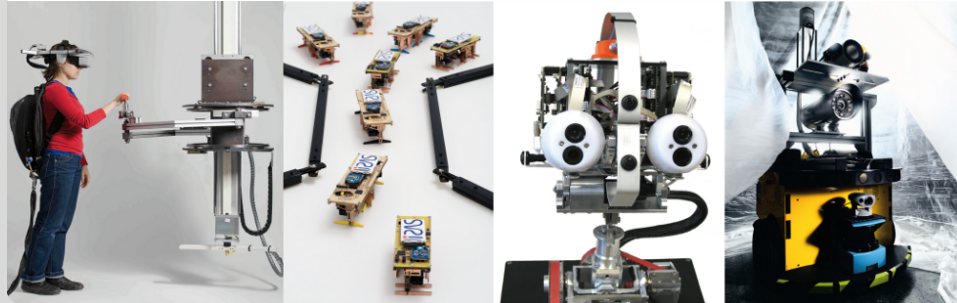


Nonlinear Filtering with Homotopy Continuation

Marcel Hiltcher | 22. Juni 2020

SEMINAR: VON BIG DATA ZU DATA SCIENCE – MODERNE METHODEN DER INFORMATIONSVERARBEITUNG



Gliederung

- 1 Motivation
 - Das System- und Messmodell
 - Filterung
 - Herausforderung der Filterung
- 2 Methoden und deren Probleme
- 3 Grundlagen der Homotopie
- 4 Homotopie und Filterung
- 5 Parameterschätzung mit Homotopie
- 6 Homotopie und partikel Filter
 - Idee vom Partikelfilter
 - Partikelfilter mit Homotopie
- 7 Zusammenfassung

Das System- und Messmodell

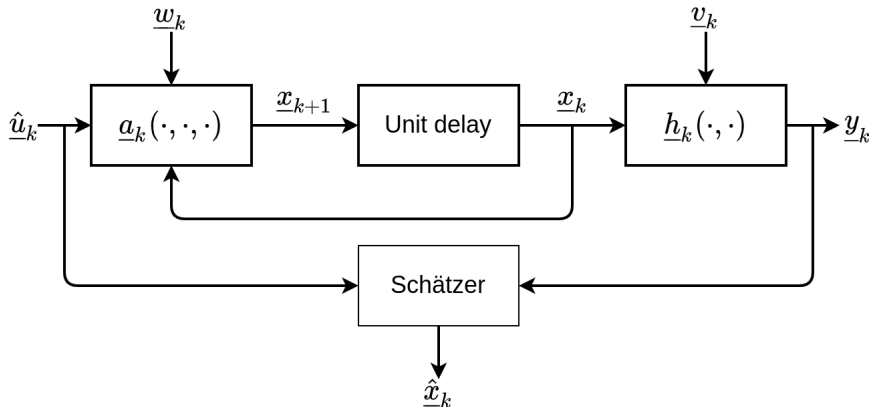


Abbildung: Nichtlineares System- und Messungsmodell

Filterung

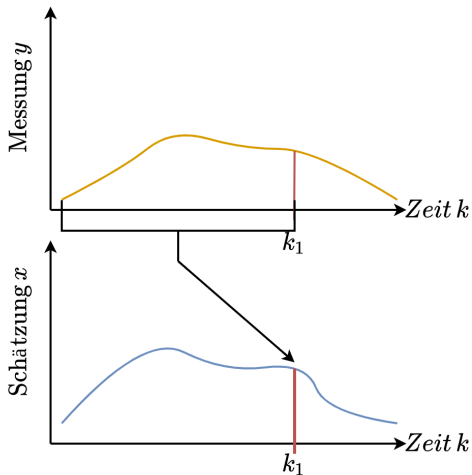


Abbildung: Prinzip der Filterung für einen expliziten Zeitpunkt

Herausforderung der Filterung

Oftmals keine closed-form Lösung für die posteriore Dichte vorhanden:

$$f_{k+1}^e(\underline{x}_{k+1} | \underline{Y}_{k+1}) \propto f_{k+1}^L(\underline{y}_{k+1} | \underline{x}_{k+1}) f_{k+1}^p(\underline{x}_{k+1} | \underline{Y}_k) \quad (1)$$

→ Approximiere auftredende Dichte

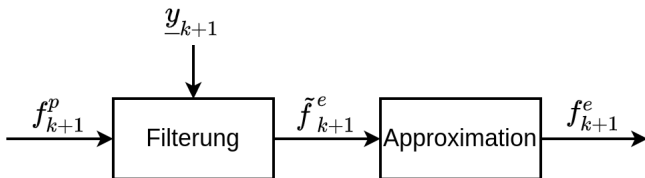


Abbildung: Approximation des Filterschritts

Methoden und deren Probleme

- Parameterschätzung mithilfe einer Abweichungsmessung $G(\underline{\theta})$
Problem: Lokale Minima
- Samplingverfahren zur Dichteschätzung
Problem: Sampledegenerierung

→ Nutzung von Homotopien

Grundlagen der Homotopie

$$H(x; \lambda) = (1 - q) \sin(\pi x) + q(8x(x - 1))$$

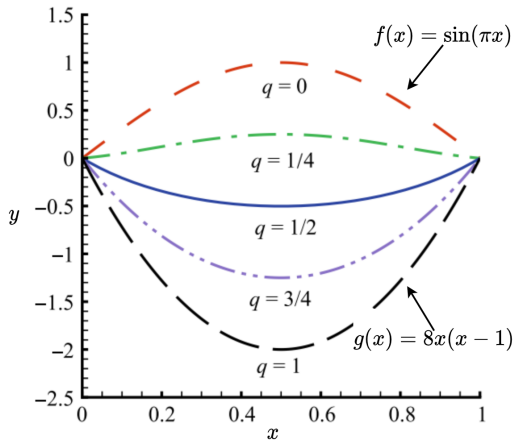


Abbildung:
Homotopieverlauf nach
[2]

Homotopie und Filterung

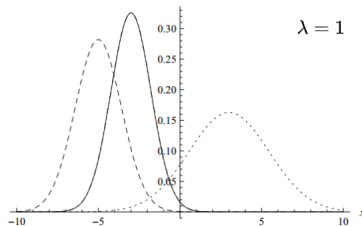
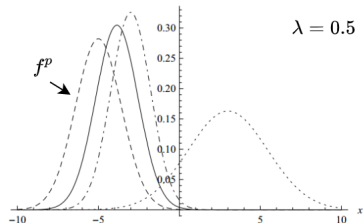
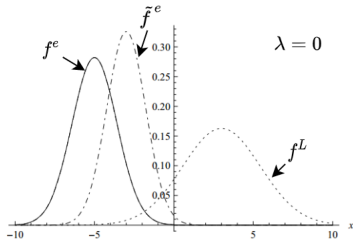


Abbildung: Homotopieverlauf nach [1]

Parameterschätzung mit Homotopie

Ziel: Berechne die optimalen Parameter $\underline{\theta}$ für f^e

- 1 Homotopie $\tilde{f}^e(\underline{x}, \lambda)$
- 2 Approximations Dichte $f^e(\underline{x}, \underline{\theta})$
- 3 Abweichungsmessung $G(\theta)$ zwischen $f^e(\underline{x}, \underline{\theta})$ und $\tilde{f}^e(\underline{x}, \lambda)$
- 4 Differentialgleichung (ODE) von der Abweichungsmessung abgeleitet

Löse die ODE für bestimmtes $\lambda \rightarrow$ Bekomme optimalen Parameter $\underline{\theta}$

Partikelfilter und Importance Sampling

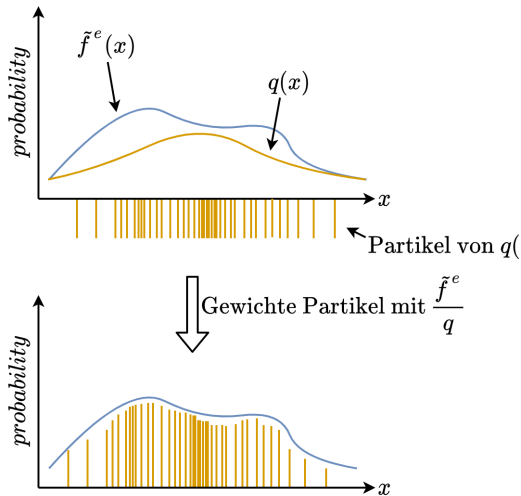


Abbildung: Idee des Importance Sampling

Partikelfilter mit Homotopie

Erstelle mit Homotopie vorläufige Versionen der Dichte $q(x)$

Grundlegende Prozedur für die Progression $\lambda \leq 1$:

- 1 Update die Samples mithilfe der $q(x)$
- 2 Update die Gewichte mithilfe \tilde{f}^e/q

Mit dem letzten Schritt ($\lambda = 1$) erhält man die approximation der posterioren Dichte

Zusammenfassung

Homotopie als progressive Approximation der posterioren Dichte

- Kontinuierliche Approximation mithilfe der Parameterschätzung
- Discrete Approximation mithilfe vom Importance Sampling

Danke für Ihre Aufmerksamkeit

Literatur



Jonas Hagmar, Mats Jirstrand, Lennart Svensson, and Mark Morelande.

Optimal parameterization of posterior densities using homotopy.

In *14th International Conference on Information Fusion*, pages 1–8, July 2011.



Shijun Liao.

Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations.

Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2012.

Zusatz

Homotopiegleichung für Parameterschätzung:

$$\tilde{f}^e(\underline{x}, \lambda) = f^p(\underline{x})f^L(\underline{x})^\lambda \quad (2)$$

Herleitung der ODE:

$$\underline{G}_{\underline{\theta}}(\underline{\theta}, \lambda) = \frac{\partial \underline{G}(\underline{\theta}, \lambda)}{\partial \underline{\theta}} = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{G}_{\underline{\theta}}(\underline{\theta}(\lambda), \lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{\partial \underline{G}_{\underline{\theta}}(\underline{\theta}(\lambda), \lambda)}{\partial \underline{\theta}} \frac{\partial \underline{\theta}(\lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial \underline{G}_{\underline{\theta}}(\underline{\theta}(\lambda), \lambda)}{\partial \lambda} \\ &= \underline{G}_{\underline{\theta}\underline{\theta}}(\underline{\theta}(\lambda), \lambda) \dot{\underline{\theta}}(\lambda) + \underline{G}_{\underline{\theta}\lambda}(\underline{\theta}(\lambda), \lambda) \end{aligned} \quad (4)$$

Zusatz

Approximation mit den Partikeln durch eine Dirac Dichte:

$$f^e(\underline{x}, \lambda_\tau) = \sum_{i=1}^L w^{(i)} \delta(\underline{x} - \underline{x}_\tau^{(i)}) \quad (5)$$