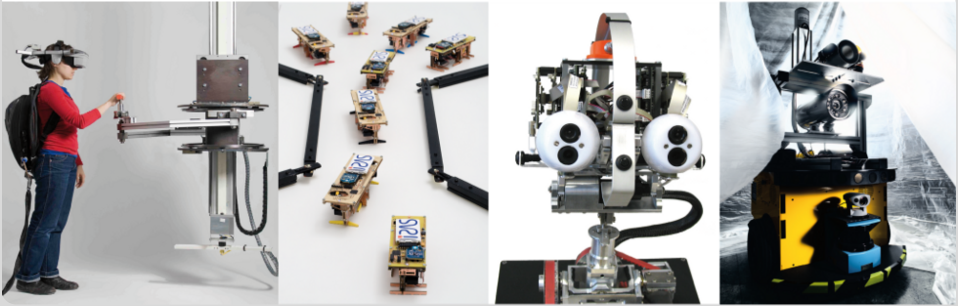
Nonlinear Filtering with Homotopy Continuation

Marcel Hiltscher | 22. Juni 2020

SEMINAR: VON BIG DATA ZU DATA SCIENCE – MODERNE METHODEN DER INFORMATIONSVERARBEITUNG



Gliederung

1. Motivation
   - Das System- und Messmodell
   - Filterung
   - Herausforderung der Filterung
2. Methoden und deren Probleme
3. Grundlagen der Homotopie
4. Homotopie und Filterung
5. Parameterschätzung mit Homotopie
6. Homotopie und partikel Filter
   - Idee vom Partikelfilter
   - Partikelfilter mit Homotopie
7. Zusammenfassung

Das System- und Messmodell

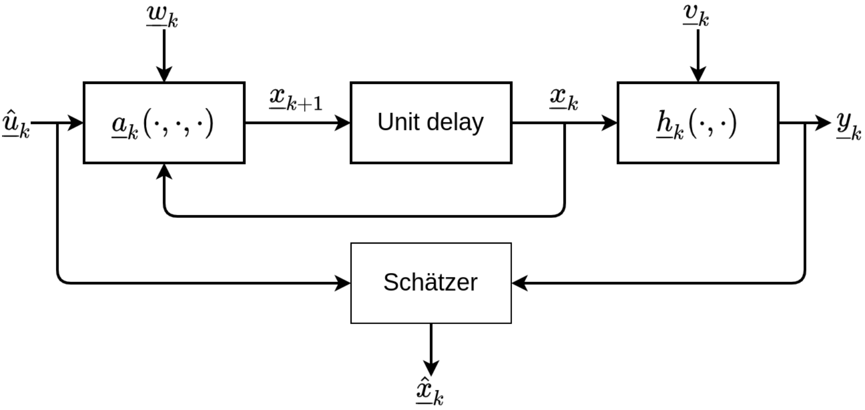


Abbildung: Nichtlineares System- und Messungsmodell

Filterung

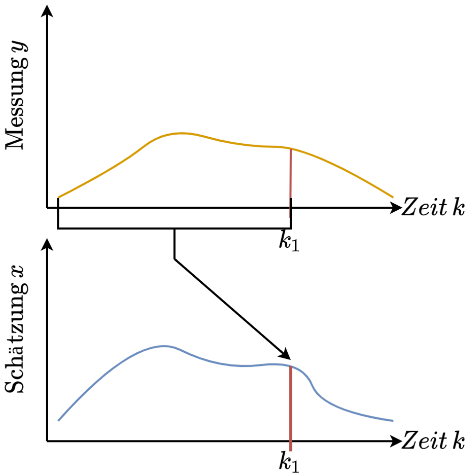


Abbildung: Prinzip der Filterung für einen expliziten Zeitpunkt

Herausforderung der Filterung

Keine closed-form Lösung für die posteriore Dichte vorhanden:

$$f^e_{k+1}(\underline{x}_{k+1}|\underline{Y}_{k+1}) \propto f^L_{k+1}(\underline{y}_{k+1}|\underline{x}_{k+1}) f^p_{k+1}(\underline{x}_{k+1}|\underline{Y}_k) \quad (1)$$

$\rightarrow$ Approximiere auftredende Dichte

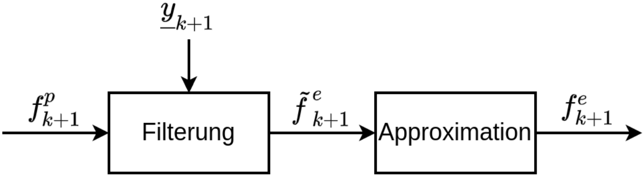


Abbildung: Approximation des Filterschritts

Methoden und deren Probleme

- Parameterschätzung mithilfe einer Abweichungsmessung $G(\underline{\theta})$
  Problem: Lokale Minima

- Samplingverfahen zur Dichteschätzung
  Problem: Sampledegenerierung

$\rightarrow$ Nutzung von Homotopien

Grundlagen der Homotopie

$$H(x;\lambda) = (1-q)\sin(\pi x) + q(8x(x-1))$$

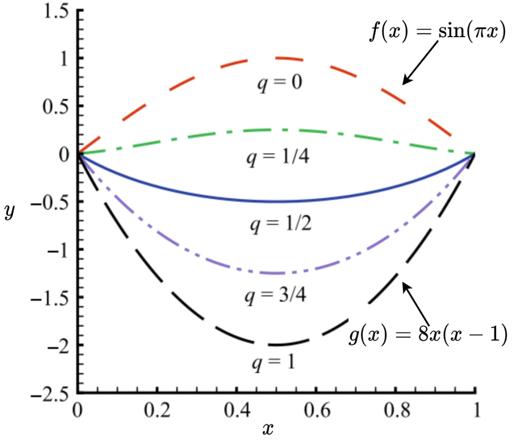


Abbildung: Homotopieverlauf nach [2]

Homotopie und Filterung

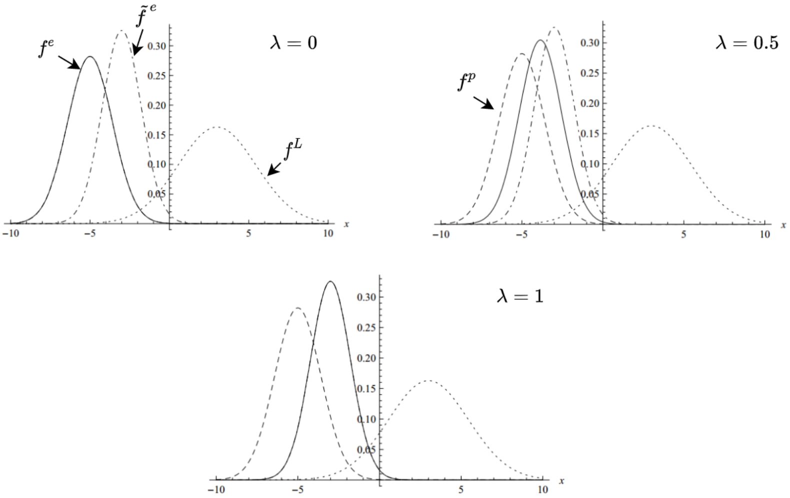


Abbildung: Homotopieverlauf nach [1]

Parameterschätzung mit Homotopie

Ziel: Berechne die optimalen Parameter $\underline{\theta}$ für f^e

1. Homotopie $\tilde{f}^e(\underline{x}, \lambda)$
2. Approximations Dichte $f^e(\underline{x}, \underline{\theta})$
3. Abweichungsmessung $G(\theta)$ zwischen $f^e(\underline{x}, \underline{\theta})$ und $\tilde{f}^e(\underline{x}, \lambda)$
4. Differentialgleichung (ODE) von der Abweichungsmessung abgeleitet

Löse die ODE für bestimmtes $\lambda \rightarrow$ Bekomme optimalen Parameter $\underline{\theta}$

Partikelfilter und Importance Sampling

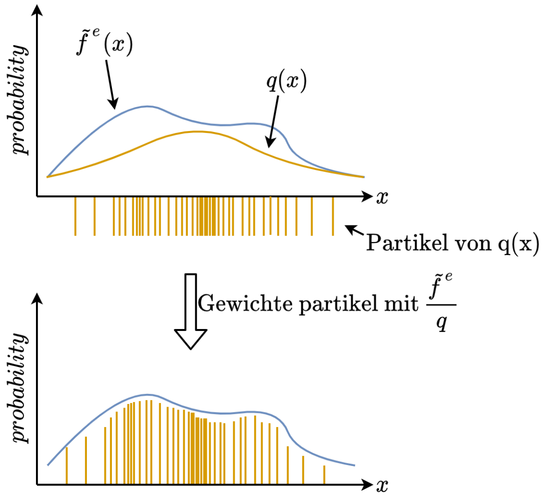


Abbildung: Idee des Importance Sampling

Partikelfilter mit Homotopie

Erstelle mit Homotopie vorläufige Versionen der Dichte $q(x)$

Grundlegende Prozedur für die Progression $\lambda \leqslant 1$:

1. Update die Samples mithilfe der $q(x)$
2. Update die Gewichte mithilfe $\tilde{f}^e / q$

Mit dem letzten Schritt ($\lambda = 1$) erhält man die approximation der posterioren Dichte

Zusammenfassung

Danke für Ihre Aufmerksamkeit

Literatur

Jonas Hagmar, Mats Jirstrand, Lennart Svensson, and Mark Morelande.
Optimal parameterization of posterior densities using homotopy.
In *14th International Conference on Information Fusion*, pages 1–8, July 2011.

Shijun Liao.
Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations.
Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2012.

Zusatz

Homotopiegleichung für Parameterschätzung:

$$\tilde{f}^e(\underline{x}, \lambda) = f^p(\underline{x}) f^L(\underline{x})^\lambda \tag{2}$$

Herleitung der ODE:

$$G_{\underline{\theta}}(\underline{\theta}, \lambda) = \frac{\partial G(\underline{\theta}, \lambda)}{\partial \underline{\theta}} = 0 \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{\underline{\theta}}(\underline{\theta}(\lambda), \lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{\partial G_{\underline{\theta}}(\underline{\theta}(\lambda), \lambda)}{\partial \underline{\theta}} \frac{\partial \underline{\theta}(\lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial G_{\underline{\theta}}(\underline{\theta}(\lambda), \lambda)}{\partial \lambda} \\ &= G_{\underline{\theta\theta}}(\underline{\theta}(\lambda), \lambda)\, \dot{\underline{\theta}}(\lambda) + G_{\underline{\theta}\lambda}(\underline{\theta}(\lambda), \lambda) \end{aligned} \tag{4}$$