PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Segunda práctica (tipo a)
Primer semestre 2024

Indicaciones generales:

- Duración: 110 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: con apuntes de clase (físicos o digitales).
- No está permitido el uso de ningún material o equipo electrónico adicional al indicado (no celulares, se aceptan tablets).
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**

Puntaje total: 20 puntos.

Cuestionario:

Pregunta 1 (4 puntos)

Considere que una firma puede escoger entre dos procesos de producción (1 y 2) que le generan los siguientes costos de producción:

$$C_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_2x_3$$
$$C_2(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_3^2.$$

Aquí x_1, x_2 y x_3 son insumos de producción. La firma desea que su costo sea el menor posible para cualquier combinación de insumos (x_1, x_2, x_3). Determine qué proceso de producción escogerá.

Pregunta 2 (7 puntos)

2.1) Pruebe que si S es un conjunto abierto no vacío y A es cualquier otro conjunto no vacío, $S + A$ es abierto.

(2 puntos)

2.2) Un agente económico consume n bienes, cuyas cantidades vienen representadas por $x_1, ..., x_n$. Este agente económico puede únicamente consumir cantidades de los bienes mayores o iguales a $a_1, a_2, ..., a_n > 0$. Determine la restricción presupuestaria del agente, es decir, el conjunto de canastas de consumo $(x_1, ..., x_n)$ que son factibles (que puede consumir). Para esto, considere que el agente tiene un ingreso $I > 0$ y enfrenta un nivel de precios $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n_{++}$. Luego, en función de los parámetros $a_1, ..., a_n, p_1, ..., p_n$ e I, analice si el conjunto es no vacío, compacto y/o convexo.

(2 puntos)

2.3) Para $n = 2$, $p_1 = p_2 = 2$, $I = 10$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 0.5$, grafique la restricción presupuestaria. Muestre gráficamente cómo cambia la región si p_2 pasa a valer 1 e I pasa a valer 12.

(1 punto)

2.4) ¿Podría decirse que el consumidor tiene más opciones para consumir cuando $p_2 = 1$ o cuando $p_2 = 2$? ¿Si los precios aumentan pero el ingreso aumenta también, es posible determinar en qué casos el consumidor tiene más opciones para consumir? Justifique su respuesta.

(2 puntos)

Pregunta 3 (5 puntos)

3.1) Considere el conjunto

$$X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{++} : \prod_{i=1}^{n} x_i \geq 1 \right\}.$$

Pruebe que X es convexo.

(2.5 puntos)

3.2) Considere el siguiente conjunto

$$U = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{+} : \ \min \left\{ \frac{x_1}{a_1}, \cdots, \frac{x_n}{a_n} \right\} \geq c \right\},$$

donde $a_1, ..., a_n > 0$ y $c \geq 0$. Muestre que U es convexo.

(2.5 puntos)

Pregunta 4 (4 puntos)

4.1) Sea $Y \subset \mathbb{R}^n$ una tecnología. Diremos que la tecnología presenta rendimientos a escala no crecientes si: $\forall\, \mathbf{y} \in Y$, $\alpha \mathbf{y} \in Y$, $\forall\, \alpha \in [0, 1]$. Por otro lado, diremos que la tecnología es aditiva si dados $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in Y$, $\mathbf{y} + \mathbf{y}' \in Y$. Pruebe que una tecnología presenta rendimientos a escala no crecientes y es aditiva si y solamente si es un cono convexo.

(2 puntos)

4.2) Se dice que una tecnología $Y \subset \mathbb{R}^L$ presenta la propiedad de libre disposición si dados $\mathbf{y} \in Y$ e $\mathbf{y}' \leq \mathbf{y}$, entonces $\mathbf{y}' \in Y$. Demuestre que si una tecnología es cerrada (es decir, Y es un conjunto cerrado), convexa y tal que $-\mathbb{R}^L_{+} \subset Y$, entonces cumple la propiedad de libre disposición.

(2 puntos)

Tarea y bonus: hasta 2 puntos. Entregar en Paideia hasta el 4 de mayo a las 23h.

1) Resuelva la PC completamente y correctamente.

(1 punto)

2) Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ convexa y diferenciable. Pruebe que la función

$$g(x) = \exp\left[\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right],\ x > 0,$$

es convexa.

(1 punto)

Profesor del curso: Jorge Chávez.

San Miguel, 03 de mayo del 2024