Definición 10.2.4. Sea X un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que $Y \subset \mathbb{R}^n$ es denso en X si para todo $\mathbf{x} \in X$ y para todo $r > 0$ existe $\mathbf{y} \in Y$ tal que $\mathbf{y} \in \mathcal{B}(\mathbf{x}; r) \cap X$.

Un conocido resultado del análisis establece que el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. Más aún, $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{Q}^n_+$ es denso en $\mathbb{R}^n_+$.

Bajo determinadas condiciones, que se establecen en el lema 10.2.1, es suficiente la racionalidad de una relación de preferencias para asegurar la existencia de una función den utilidad asociada.

Lema 10.2.1. Sea $Y \subset X = \mathbb{R}^n_+$ un conjunto contable no finito. Entonces, toda relación de preferencia racional sobre Y puede ser representada por una función de utilidad $u(\cdot)$ con rango en $]-1, 1[$.

Demostración. Sea $\succeq$ una relación de preferencia racional sobre Y y sea $\{\mathbf{y}_m\}$ una enumeración de Y. El argumento de la prueba consiste en construir $u(\cdot)$ por inducción.[8]

Primero, definimos $u(\mathbf{y}_1) = 0$. Luego, si $\mathbf{y}_2 \sim \mathbf{y}_1$, definimos $u(\mathbf{y}_2) = u(\mathbf{y}_1) = 0$. En caso $\mathbf{y}_2 \succ \mathbf{y}_1$, definimos $u(\mathbf{y}_2) \in]0, 1[$, y, en caso $\mathbf{y}_1 \succ \mathbf{y}_2$, definimos $u(\mathbf{y}_2) \in]-1, 0[$. De esta forma, para $k, \ell \in \{1, 2\}$ se obtiene:

$$\mathbf{y}_k \succeq \mathbf{y}_\ell \Leftrightarrow u(\mathbf{y}_k) \geq u(\mathbf{y}_\ell),\ u(\mathbf{y}_k), u(\mathbf{y}_\ell) \in]-1, 1[. \tag{10.2.6}$$

Sea ahora $m \in \mathbb{N}$, m fijo, y supongamos que se cumple (10.2.6) para todo k y ℓ en $\{1, ..., m-1\}$. El objetivo es definir $u(\mathbf{y}_m)$ de modo que

[8] Seguimos fundamentalmente las Lecture Notes in Microeconomic Theory de Ariel Rubinstein (Rubinstein, 2006).

se satisfaga (10.2.6) para todo k y ℓ en $\{1, ..., m\}$. Tenemos dos casos posibles, el primero es cuando $\mathbf{y}_m \sim \mathbf{y}_k$ para algún $k = 1, ..., m-1$. En este caso, definiendo $u(\mathbf{y}_m) = u(\mathbf{y}_k)$, vemos que, por la hipótesis de inducción, se verifica (10.2.6) para todo k y ℓ en $\{1, ..., m\}$. El segundo caso es cuando $\mathbf{y}_m \nsim \mathbf{y}_k$ para todo $k = 1, ..., m-1$. En este caso, consideremos los conjuntos (no vacíos):

$$A_m = \{u(\mathbf{y}_k) : \mathbf{y}_m \succ \mathbf{y}_k\} \cup \{-1\}.$$
$$B_m = \{u(\mathbf{y}_k) : \mathbf{y}_k \succ \mathbf{y}_m\} \cup \{1\}.$$

y tomemos $u(\mathbf{y}_m) \in I_m =]\max A_m, \min B_m[$. Si $\mathbf{y}_m \succ \mathbf{y}_k$ para algún $k \in \{1, ..., m-1\}$, entonces $u(\mathbf{y}_k) \in A_m$. Por consiguiente:

$$\mathbf{y}_m \succ \mathbf{y}_k \Leftrightarrow u(\mathbf{y}_k) \in A_m \Leftrightarrow u(\mathbf{y}_m) > \max A_m \geq u(\mathbf{y}_k),$$

es decir, se cumple (10.2.6). Si, por el contrario, $\mathbf{y}_k \succ \mathbf{y}_m$, se prueba que (10.2.6) también se cumple similarmente. Por inducción, el resultado vale para cualquier $m \in \mathbb{N}$. $\square$

El teorema 10.2.3 que se da a continuación generaliza el lema 10.2.1 en el sentido de que el conjunto sobre el cual está definida la relación de preferencia ya no tiene que ser contable no finito. El lector interesado en el teorema original puede consultar el artículo de G. Debreu «Representation of a preference ordering by a numerical function» publicado en la revista «Decision Processes», en 1954. Aquí presentamos una versión de tal resultado.[9]

[9] El teorema 10.2.3 es válido para cualquier conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ convexo que posee un subconjunto denso y contable.

Teorema 10.2.3. Sea $\succeq$ una relación de preferencia racional y continua sobre X. Entonces, existe una función de utilidad continua $u : X \to \mathbb{R}$ que la representa.

Demostración. Por brevedad, solo probamos la existencia y dejamos la prueba de la continuidad como ejercicio guiado para el lector (véase el ejercicio 10.2.15).

Sea $Y = \mathbb{Q}^n_+ \subset X$. Por el lema 10.2.1, existe $v : Y \to]-1, 1[$, función de utilidad que representa a $\succeq$ sobre Y. Luego, para cualquier $\mathbf{x} \in X$ definamos:

$$u(\mathbf{x}) = \sup \underbrace{\{v(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in Y \cap \mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x})\}}_{=A_{\mathbf{x}}} \tag{10.2.7}$$

o $u(\mathbf{x}) = -1$ en caso $A_{\mathbf{x}} = \emptyset$. Con base en la definición 10.2.7, vamos a establecer que para todo $\mathbf{z} \in X$ se cumple que:

$$\mathbf{x} \succeq \mathbf{z} \Leftrightarrow u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{z}).$$

Si $\mathbf{z} \sim \mathbf{x}$, entonces $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{z} \succ \mathbf{y}$. Por lo tanto:

$$\{v(\mathbf{y}) : \ \mathbf{y} \in Y \cap \mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x})\} = \{v(\mathbf{y}) : \ \mathbf{y} \in Y \cap \mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{z})\}.$$

De acuerdo con (10.2.7), tendremos entonces que $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{z})$ (se está tomando el supremo sobre el mismo conjunto).

Si $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$, sabemos del corolario 10.2.1 que existe $\mathbf{w} \in X$ tal que $\mathbf{x} \succ \mathbf{w} \succ \mathbf{z}$. Por la continuidad de la relación de preferencias existe $r > 0$ tal que $\forall\ \tilde{\mathbf{w}} \in \mathcal{B}(\mathbf{w}; r)$, $\mathbf{x} \succ \tilde{\mathbf{w}} \succ \mathbf{z}$ (véase el ejercicio 10.2.10). Como Y es denso en X, existe $\mathbf{y}_1 \in \mathcal{B}(\mathbf{w}; r) \cap Y$ de forma que $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}_1 \succ \mathbf{z}$. De nuevo, por el corolario 10.2.1, existe $\mathbf{y}_2 \in Y$ tal que $\mathbf{y}_1 \succ \mathbf{y}_2 \succ \mathbf{z}$. Así pues, a partir de:

$$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}_1 \succ \mathbf{y}_2 \succ \mathbf{z},$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \sup\{v(\mathbf{y}) : \ \mathbf{y} \in Y \cap \mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x})\} \\ &\geq v(\mathbf{y}_1) \\ &> v(\mathbf{y}_2) \\ &\geq \sup\{v(\mathbf{y}) : \ \mathbf{y} \in Y \cap \mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x})\} \\ &= u(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Aquí hemos usado que $\mathbf{y}_1 \in \{\mathbf{y} \in Y, \ \mathbf{x} \succ \mathbf{y}\}$ para la primera desigualdad; que $\mathbf{y}_1 \succ \mathbf{y}_2 \Leftrightarrow v(\mathbf{y}_1) > v(\mathbf{y}_2)$ (véase ejercicio 10.2.1), para la desigualdad estricta; y que $\mathbf{y}_2 \notin \{v(\mathbf{y}) : \ \mathbf{y} \in Y, \ \mathbf{z} \succ \mathbf{y}\}$, para la última desigualdad. De este modo, $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{z})$. Con esto, hemos probado que $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z} \implies u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{z})$.

Finalmente, si $u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{z})$, entonces:

$$A_{\mathbf{z}} \subset A_{\mathbf{x}} \Leftrightarrow [\forall \ \mathbf{y} \in Y : \ \mathbf{y} \prec \mathbf{z} \implies \mathbf{y} \prec \mathbf{x}].$$

Así, $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}$, lo que concluye la prueba. □

Como hemos visto, las diversas propiedades que se puedan imponer a las preferencias implican o inducen propiedades sobre las funciones de utilidad que las representan. Por ejemplo, si una relación de preferencias es monótona, entonces la función de utilidad que la representa es creciente, es decir, se cumple que $\mathbf{x} \geq \mathbf{y} \Rightarrow u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y})$.

Por razones de análisis, no solo es deseable que una función sea continua, sino más aún, que sea diferenciable. La función de utilidad asociada a una relación de preferencia podría ser continua, pero no diferenciable. Consideremos por ejemplo la preferencia de

Leontief definida en el ejemplo 10.2.2. Vimos que dicha relación de preferencias es continua. Sin embargo, se puede observar en la figura 10.2.1 (véase el ejemplo 10.2.5) que la función de utilidad que la representa no es diferenciable en los puntos del tipo $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, donde $x_1 = x_2$. El análisis de la diferenciabilidad requiere de más herramientas matemáticas que el de la continuidad y no será abordado en este libro. El lector interesado puede revisar, por ejemplo, el libro de Mas-Colell «The theory of general economic equilibrium. A differentiable approach», publicado en Cambridge university Press (Mas-Colell, 1985).

Ejemplo

Ejemplo 10.2.5. Recordemos las preferencias de Leontief, definida en el ejemplo 10.2.2. Siendo ésta continua, por el teorema 10.2.3, existe una función de utilidad $u(\cdot)$ continua que la representa. Por ejemplo, la función:

$$u(x_1, x_2) = \text{mín}\{x_1, x_2\} \tag{10.2.8}$$

es continua y representa a la relación de preferencia sobre $\mathbb{R}^2_+$. Note que esta función de utilidad ilustra la noción de «complementaridad» en el consumo. Por ejemplo, si x_1 y x_2 denotan, respectivamente, la cantidad de zapatos izquierdos y derechos, la preferencia de Leontief es adecuada para representar la utilidad generada por el consumo de pares de zapatos. En este caso, la utilidad solo aumenta si ambos bienes se incrementan por igual, y permanece constante si solo uno de los bienes cambia. Así, tener 7 zapatos izquierdos y 7 derechos proporciona la misma utilidad que tener 7 zapatos izquierdos y 10 derechos. Note que las curvas de indiferencia de esta función están dadas por líneas rectas, como se muestra en la figura 10.2.1:

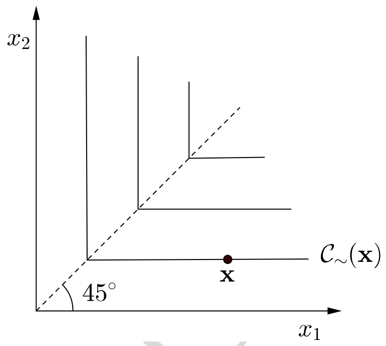

Figura 10.2.1 Curvas de indiferencia de Leontief

◊◊◊

El teorema 10.2.4 relaciona cuatro de las funciones de utilidad más usadas en la teoría microeconómica; esto es, las funciones de utilidad Lineal, Cobb-Douglas, Leontief y la CES (Constant Elasticity of Substitution).

Teorema 10.2.4. Considere la función de utilidad CES, definida sobre $\mathbb{R}^2_{++}$:

$$u(x_1, x_2) = [\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho}]^{1/\rho}. \tag{10.2.9}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2 > 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \rho \neq 0$. Entonces:

a) Cuando $\rho = 1$, u representa una función de utilidad de tipo lineal.

b) Cuando $\rho \to 0$, u representa una función de utilidad de tipo Cobb-Douglas.

c) Cuando $\rho \to -\infty$, u representa una función de utilidad de tipo Leontief.

Demostración. En el caso $\rho = 1$, la prueba es directa. Simplemente reemplazando, se obtiene que:

$$u(x_1, x_2) = [\alpha_1 x_1^1 + \alpha_2 x_2^1]^{1/1} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2. \tag{10.2.10}$$

Ahora bien, si $\rho \to 0$, el análisis es menos directo:

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho \to 0} u(x_1, x_2) &= \lim_{\rho \to 0} [\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho]^{1/\rho} \\
&= \lim_{\rho \to 0} \exp\left[\ln(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{1/\rho}\right] \\
&= \lim_{\rho \to 0} \exp\left[\frac{\ln(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)}{\rho}\right].
\end{aligned}$$

Por la continuidad de la exponencial y por la Regla de L'Hospital:

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho \to 0} \exp\left[\frac{\ln(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)}{\rho}\right] &= \exp\left[\lim_{\rho \to 0} \frac{\ln(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)}{\rho}\right] \\
&= \exp\left[\lim_{\rho \to 0} \frac{d}{d\rho} \ln(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)\right].
\end{aligned}$$

Ahora bien, escribiendo:

$$x_1^\rho = e^{\ln x_1^\rho} = e^{\rho \ln x_1},$$

se sigue que:

$$\frac{d}{d\rho}(x_1^\rho) = e^{\rho \ln x_1} \ln x_1 = x_1^\rho \ln x_1.$$

Luego:

$$\frac{d}{d\rho}\ln(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho) = \frac{\alpha_1 x_1^\rho \ln x_1 + \alpha_2 x_2^\rho \ln x_2}{\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho}.$$

De este modo, volviendo al límite, puesto que $\lim_{\rho\to 0} x_i^\rho = 1$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 0} u(x_1,x_2) &= \exp\left[\lim_{\rho\to 0}\frac{d}{d\rho}\ln(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)\right] \\
&= \exp\left[\lim_{\rho\to 0}\frac{\alpha_1 x_1^\rho \ln x_1 + \alpha_2 x_2^\rho \ln x_2}{\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho}\right] \\
&= \exp\left[\frac{\alpha_1(1)\ln x_1 + \alpha_2(1)\ln x_2}{\alpha_1(1)+\alpha_2(1)}\right] \\
&= \exp\left[\frac{\alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right].
\end{aligned}$$

Finalmente, como $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$:

$$\lim_{\rho\to 0} u(x_1,x_2) = \exp(\ln x_1^{\alpha_1} + \ln x_2^{\alpha_2}) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}.$$

Concluyamos con el tercer caso, $\rho \to -\infty$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_1 < x_2$ (si $x_1 = x_2$, el resultado es inmediato). Entonces, nuestro objetivo es mostrar que:

$$\min\{x_1,x_2\} = x_1 = \lim_{\rho\to -\infty}[\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho]^{1/\rho}.$$

Podemos reescribir el límite de la siguiente manera:

$$\lim_{\rho\to \infty}[\alpha_1 x_1^{-\rho} + \alpha_2 x_2^{-\rho}]^{-1/\rho}.$$

Luego:

$$\begin{aligned}
[\alpha_1 x_1^{-\rho} + \alpha_2 x_2^{-\rho}]^{-1/\rho} &= \left[\frac{\alpha_1}{x_1^\rho} + \frac{\alpha_2}{x_2^\rho}\right]^{-1/\rho} \\
&= \left[\frac{1}{x_1^\rho}\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2 x_1^\rho}{x_2^\rho}\right)\right]^{-1/\rho} \\
&= x_1\left[\alpha_1 + \alpha_2\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^\rho\right]^{-1/\rho}.
\end{aligned}$$

Como $x_1 < x_2$, entonces, por la continuidad de la función potencia, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to\infty} u(x_1, x_2) &= \lim_{\rho\to\infty} x_1 \left[\alpha_1 + \alpha_2 \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\rho}\right]^{-1/\rho}. \\
&= x_1(\alpha_1 + 0)^0 \\
&= x_1(1) \\
&= x_1 = \text{mín}\{x_1, x_2\}.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo

Ejemplo 10.2.6. En este ejemplo verificamos, vía simulaciones numéricas, el teorema 10.2.4. Para esto fijamos el valor de los parámetros $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$ y graficamos las curvas de indiferencia:

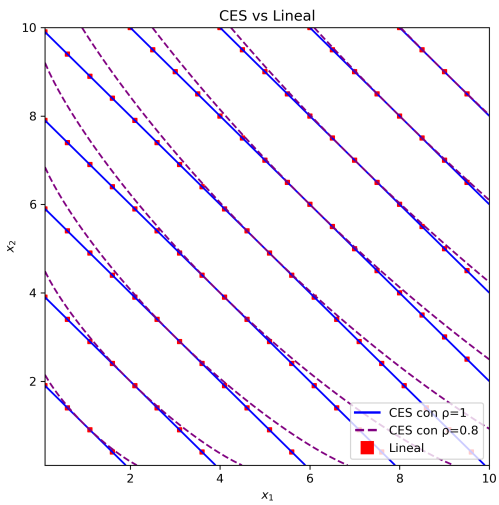

Figura 10.2.2 CES ($\rho = 0.8$ y $\rho = 1$) y lineal

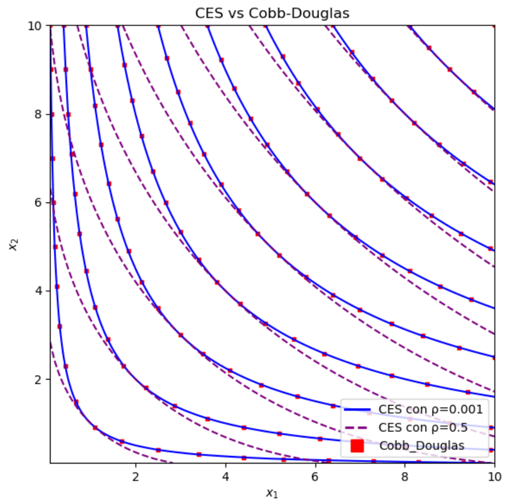

Figura 10.2.3 CES ($\rho = 0.001$ y $\rho = 0.5$) y Cobb-Douglas

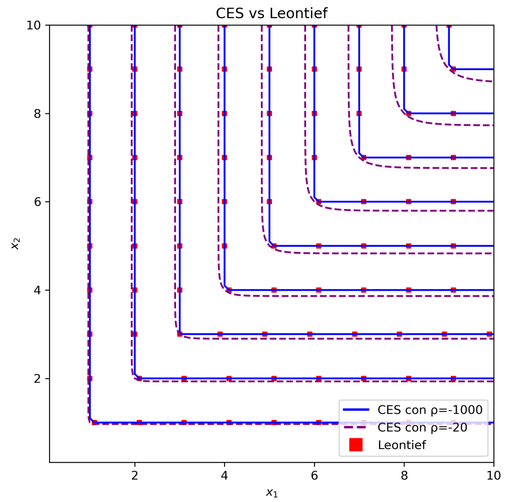

Figura 10.2.4 CES ($\rho = -20$ y $\rho = -1000$) y Leontief

a) Figura 10.2.2: En esta figura presentamos las curvas de indiferencia de la función de utilidad lineal CES para $\rho = 1$ (línea continua), $\rho = 0.8$ (línea discontinua) y las curvas de indiferencia de la función de utilidad lineal (cuadrados). Se evidencia que las curvas de indiferencia de la función CES corresponden idénticamente a las de la utilidad lineal cuando $\rho = 1$, y para $\rho = 0.8$, se asemejan bastante.

b) Figura 10.2.3: En esta figura presentamos las curvas de indiferencia de la función CES para $\rho = 0.001$ (línea continua), para $\rho = 0.5$ (líneas discontinuas) y las curvas de indiferencia de la función Cobb-Douglas (cuadrados). Observamos que las curvas de indiferencia para la CES cuando $\rho = 0.001$ son casi indistinguibles de las curvas de indiferencia de la Cobb-Douglas. Por otro lado, las asociadas al caso $\rho = 0.5$, si bien se aproximan bastante, no son «idénticas» gráficamente. Esta semejanza visual resalta cómo, para valores de ρ más cercanos a 0, las curvas de indiferencia de la función CES tienden a adoptar la forma de las curvas de indiferencia Cobb-Douglas.

c) Figura 10.2.4: En esta última figura, presentamos las curvas de indiferencia de la función CES $\rho = -1000$ (línea continua), para $\rho = -20$ (línea discontinua), y las de la función de utilidad Leontief (cuadrados). Se observa que, en ambos casos, las curvas de indiferencia de la CES se asemejan a las de la función Leontief, siendo claramente las asociadas a $\rho = -1000$ mucho más parecidas. Así pues, si ρ se hace más negativo, las curvas de indiferencia de la CES se aproximan más a las de la Leontief, en conformidad con el teorema 10.2.4

$\Diamond\Diamond\Diamond$

En el ejercicio 10.2.17, el lector podrá verificar que el teorema 10.2.4 puede ser generalizado para el caso de n bienes. Inicialmente, las funciones de utilidad Lineal, Cobb-Douglas y Leontief que, como hemos visto, son casos especiales de la CES, fueron creadas para modelar procesos de producción. Es interesante notar que las funciones de producción comparten con las funciones de utilidad algunas características como la monontonía, por ejemplo.

Veamos algunas otras propiedades de la función CES, por ejemplo, la homogeneidad:

$$\begin{aligned} u(\lambda x_1, \lambda x_2) &= [\alpha_1(\lambda x_1)^\rho + \alpha_2(\lambda x_2)^\rho]^{1/\rho} \\ &= [\lambda^\rho(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)]^{1/\rho} \\ &= \lambda[\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho]^{1/\rho} \\ &= \lambda u(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Esencialmente la homogeneidad implica que si se multiplican cada uno de los bienes de consumo por cierto factor, se multiplica también la utilidad del consumidor, por el mismo factor.

Calculemos ahora la tasa marginal de sustitución $MRS_{1,2}$. Para esto, calculamos primero las utilidades marginales:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{1}{\rho}(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{\frac{1-\rho}{\rho}} \rho \alpha_1 x_1^{\rho-1} : \qquad (10.2.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\rho}(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{\frac{1-\rho}{\rho}} \rho \alpha_2 x_2^{\rho-1}. \qquad (10.2.12)$$

Luego, recordando la ecuación (8.1.14), de (10.2.11) y (10.2.12), se sigue:

$$MRS_{1,2}(x_1, x_2) = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2)}{\dfrac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2)} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\rho}. \qquad (10.2.13)$$

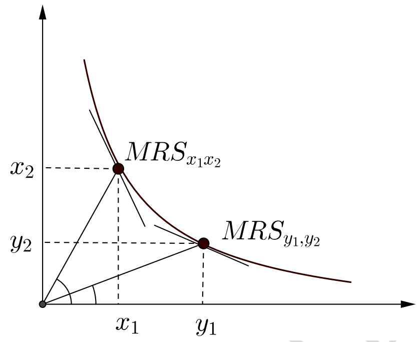

Figura 10.2.5 CES

Como se aprecia en la figura 10.2.5, y también en (10.2.13), la tasa marginal de sustitución depende del punto específico donde ésta se calcula a lo largo de la curva de indiferencia. Un traslado a lo largo de esta curva no solo induce un cambio en la proporción x_2/x_1, sino también en la tasa marginal de sustitución. La elasticidad de sustitución, denotada por σ, mide el cambio porcentual de la razón de cambio x_2/x_1 en relación a un cambio porcentual de la tasa marginal de sustitución, esto es:

$$\sigma(x_1, x_2) = \frac{\frac{d(x_2/x_1)}{x_2/x_1}}{\frac{dMRS_{1,2}}{MRS_{1,2}}} = \frac{MRS_{1,2}}{(x_2/x_1)} \frac{d(x_2/x_1)}{dMRS_{1,2}}. \qquad (10.2.14)$$

De (10.2.13) derivando x_2/x_1 con respecto a $MRS_{1,2}$, obtenemos:

$$\frac{d(x_2/x_1)}{dMRS_{1,2}} = \frac{1}{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}(1-\rho)\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-\rho}}.$$

Luego, reemplazando en (10.2.14):

$$\begin{aligned}
\sigma(x_1, x_2) &= \frac{1}{\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}(1-\rho)\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^{-\rho}} \frac{\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^{1-\rho}}{(x_2/x_1)} \\
&= \frac{1}{1-\rho}.
\end{aligned}$$

Así pues, la elasticidad de sustitución es constante a lo largo de la curva de indiferencia, de donde la función de utilidad definida en (10.2.9) recibe su nombre.

Para culminar esta sección, presentamos una extensión del modelo del consumidor, ampliamente estudiada en teoría económica: el modelo de la utilidad esperada. Este modelo se usa para poder estudiar la elección bajo incertidumbre, es decir, la elección en un contexto donde los retornos son inciertos. Aquí, asumiendo que el lector está familiarizado con conceptos básicos de probabilidades,[10] presentamos una breve introducción del tema. El lector interesado puede consultar, por ejemplo, Theory of Decision Under Uncertainty (Gilboa, 2009), para un análisis más profundo.

Considere un conjunto finito de estados de la naturaleza $S = \{1, \ldots, n\}$, y un conjunto de pagos monetarios $X_S = \{x_1, \ldots, x_n\}$, donde cada pago x_s está asociado a un estado de la naturaleza s. Esto es, si ocurre el estado s, entonces el pago es x_s. La probabilidad de ocurrencia de cada estado $s \in S$ se denota como $p_s \in [0, 1]$. Luego, el vector de probabilidades $(p_1, \ldots, p_n)$ que satisface $\sum_{s=1}^{n} p_s = 1$ se denomina «lotería» y se denota por L.

[10]Una referencia clásica sobre estos temas es Probability and Measure (Billingsley, 1996).

Dada una función de utilidad sobre los pagos, $u : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, conocida como función de utilidad tipo Bernoulli, se define la utilidad esperada de la lotería L:

$$U(L) = \sum_{s=1}^{n} p_s u(x_s).$$

Note que $U(L)$ corresponde justamente al valor esperado de la utilidad del agente bajo la distribución de probabilidades definida por L (la lotería).

De manera similar al modelo del consumidor, podemos introducir una relación de preferencia $\succeq$, esta vez definida sobre el espacio de las loterías:

$$\mathcal{L} = \left\{ L = (p_1, \ldots, p_n) \in [0,1]^S : \sum_{s=1}^{n} p_s = 1 \right\}.$$

Así, dadas $L, L' \in \mathcal{L}$, en analogía con (10.2.1), $L \succeq L' \Leftrightarrow U(L) \geq U(L')$.

Hasta ahora hemos asumido un número finito de estados. Sin embargo, puede que éstos sean infinitos e incluso no enumerables (por ejemplo: si cada estado corresponde a cada posible temperatura en grados Celsius). En dicho caso, los estados vienen representados por un continuo en $\mathbb{R}$ y las preferencias se definen sobre el espacio de las funciones de distribución para espacios continuos. En este caso, la utilidad esperada asociada a una distribución F se define como:

$$U(F) = \int u(x) dF(x). \tag{10.2.15}$$

Por ejemplo, si F es la distribución normal con media μ y varianza

σ^2, y $u(x) = -e^{-ax}$,

$$U(F) = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-ax} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = -e^{\frac{a^2\sigma^2 - 2\mu a}{2}}.$$

De manera análoga al caso de las loterías, podemos definir una relación de preferencias sobre el espacio de distribuciones de forma que:

$$F \succeq G \Leftrightarrow \int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x).$$

Algunos conceptos fundamentales que surgen en esta teoría son, por ejemplo, la «aversión al riesgo», la «dominancia estocástica» y las «probabilidades subjetivas» (Gilboa, 2009).

El siguiente ejemplo permite ilustrar los conceptos introducidos como estados de la naturaleza, loterías y utilidad esperada.

Ejemplo

Ejemplo 10.2.7. (Elección bajo incertidumbre). Considere un agente con función de utilidad de Bernoulli $u(\cdot)$, estrictamente cóncava, creciente y dos veces diferenciable, y con una riqueza inicial $w > 0$. Este agente elige una cobertura[11] $\alpha \geq 0$ ante un incendio que ocurre con probabilidad $\pi \in (0, 1)$ y genera una pérdida $D > 0$. El precio de una unidad de cobertura es $q = \pi$. Por lo tanto, tenemos dos estados de la naturaleza, s_1 =Incendio y s_2 =No incendio, con pagos x_s asociados $x_{s_1} = w + \alpha - \pi\alpha - D$ y $x_{s_2} = w - \pi\alpha$, y lotería asociada $L = (\pi, 1-\pi)$. Se sigue que la utilidad esperada del agente es:

$$\pi u (w - D + \alpha(1 - \pi)) + (1 - \pi)u (w - \alpha \pi). \qquad (10.2.16)$$

[11] α es la cantidad que desea asegurar. Es decir, el monto que la aseguradora le paga al agente en caso de incidente.

El agente busca α que maximice la utilidad esperada dada en (10.2.16). Es decir, busca la cantidad óptima con la que debe asegurarse. Para encontrar tal α, es suficiente aplicar la condición de primer orden:

$$\pi(1-\pi)u'\left(w - D + \alpha(1-\pi)\right) - (1-\pi)\pi u'\left(w - \pi\alpha\right) = 0. \quad (10.2.17)$$

La ecuación (10.2.17) implica que:

$$u'(w - D + \alpha(1-\pi)) = u'(w - \pi\alpha). \quad (10.2.18)$$

Al ser $u''(\cdot) < 0$, $u'(\cdot)$ es inyectiva. Por lo tanto, (10.2.18) implica a su vez que:

$$w - D + (1-\pi)\alpha = w - \pi\alpha.$$

O sea, $\alpha^* = D$. Esto significa que el agente se asegura completamente.

$\Diamond\Diamond\Diamond$

La teoría de la elección bajo incertidumbre es bastante rica y extensa, y ha sido objeto de mucho estudio (véase por ejemplo el capítulo 6 de Microeconomic Theory (Mas-Colell, Whinston & Green, 1995) o Notas en Teoría de la Incertidumbre (Gallardo, 2018)).

LISTA DE EJERCICIOS

Ejercicio 10.2.1. Sea $\succeq$ una relación de preferencia sobre X. Pruebe que si $u : X \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad que representa a $\succeq$, entonces se cumple que:

a) $\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{y})$.

b) $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$.

Ejercicio 10.2.2. Si $u : X \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad que representa a la relación de preferencia $\succeq$ sobre X y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función creciente, explique por qué la composición $f \circ u$ no es necesariamente una función de utilidad que represente a $\succeq$.

Ejercicio 10.2.3. Pruebe que si la funciones $u(\cdot)$ y $v(\cdot)$ representan a la misma relación de preferencia $\succeq$, entonces estas funciones están relacionadas mediante una transformación $f(\cdot)$ estrictamente creciente.

Sugerencia. Ya fue probado en (10.2.2) que si $v(\mathbf{x}) = f(u(\mathbf{x}))$, con f estrictamente creciente, entonces $u(\cdot)$ y $v(\cdot)$ representan a la misma relación de preferencia. Para probar el regreso, puede proceder por contradicción.

Ejercicio 10.2.4. Si $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_1x_2$ y $u(\cdot)$ representa a $\succeq$, determine si $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$, donde $\mathbf{x} = (2, 1)$ e $\mathbf{y} = (1, 2)$.

Ejercicio 10.2.5. Si para cierta relación de preferencia $\succeq$ se cumple que $(2, 0) \succeq (1, 1)$, diga si la función $u(x_1, x_2) = x_1x_2$ representa a $\succeq$.

Ejercicio 10.2.6. La función $u(\cdot)$ representa a $\succeq$. Para cada uno de los siguientes casos, diga si $v(\cdot)$ representa también a $\succeq$:

a) $v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + (u(\mathbf{x}))^3$.

b) $v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) - (u(\mathbf{x}))^2$.

c) $u(x) = \sqrt{u(\mathbf{x})} + 2$.

d) $u(x) = |u(\mathbf{x})|$.

Ejercicio 10.2.7. ¿Qué tipo de preferencia representa una función de utilidad de la forma $u(x_1, x_2) = \sqrt{2x_1 + x_2}$.

Ejercicio 10.2.8. Pruebe el teorema 10.2.1.

Ejercicio 10.2.9. Considere sobre el conjunto $X = \mathbb{R}_+$ la relación de preferencia $\succeq$:

$$x \succeq y \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor \geq \lfloor y \rfloor.$$

Demuestre que esta relación de preferencias no es continua.

Sugerencia. Al igual que en el ejemplo 10.2.4 use la definición por contornos superior e inferior.

Ejercicio 10.2.10. Sea $\succeq$ una relación de preferencias continua sobre X. Pruebe que si $\mathbf{x} \succ \mathbf{w} \succ \mathbf{z}$, existe $r > 0$ tal que $\forall\ \tilde{\mathbf{w}} \in \mathcal{B}(\mathbf{w}; r)$, $\mathbf{x} \succ \tilde{\mathbf{w}} \succ \mathbf{z}$.

Sugerencia. Como la relación de preferencia es continua, recuerde que los contornos superior e inferior son cerrados, y, por lo tanto, sus complementos son abiertos. Así, existen bolas centradas en w totalmente contenidas en estos complementos.

Ejercicio 10.2.11. Sea X un conjunto finito y $\succeq$ racional definida sobre X. Demuestre que existe $u : X \to \mathbb{N}$ que representa a la relación de preferencia.

Sugerencia. Sea $X = \{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n\}$. Defina $X_i = \{1 \leq j \leq n : \mathbf{x}_i \succeq \mathbf{x}_j\}$ y u tal que $u(\mathbf{x}_i) = |X_i|$ (la cardinalidad de X_i).

Ejercicio 10.2.12. La relación de preferencia lexicográfica se define de la siguiente manera: sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X = \mathbb{R}^n_+$, entonces:

$$\mathbf{x} \succ_L \mathbf{y}$$

si $x_1 > y_1$ o bien $x_1 = y_1$ y $x_2 > y_2$ o bien $x_1 = y_1, x_2 = y_2$ y $x_3 > y_3$, y así sucesivamente hasta que $x_i = y_i$ para $i = 1, ..., n-1$ y $x_n > y_n$. En caso $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \sim_L \mathbf{y}$. Demuestre que la relación de preferencia $\succeq_L$ es racional pero no es continua.

Sugerencia. Dados $\mathbf{x}_m = (1/m, 1, 1, ..., 0)$ e $\mathbf{y}_m = (0, 2, 1/m, ..., 0)$, note que $\mathbf{x}_m \succ \mathbf{y}_m$ para todo m. Finalmente, concluya estableciendo que $\lim_m \mathbf{x}_m \prec \lim_m \mathbf{y}_m$.

Ejercicio 10.2.13. Demuestre que una relación de preferencia es convexa si y solamente si $u(\cdot)$ es cuasicóncava.

Sugerencia. Recuerde el teorema 6.3.1.

Ejercicio 10.2.14. Recuerde el problema de la maximización de la utilidad trabajado en el capítulo 7, ejemplo 7.1.2 (el problema del consumidor). Explique por qué la monotonía de las preferencias implican que la restricción es $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = I$.

Ejercicio 10.2.15. Pruebe que la función de utilidad del teorema 10.2.3 es continua.

Sugerencia. Sea $\{\mathbf{x}_m\}$ una sucesión que converge a $\mathbf{x}$. Por la continuidad de $\succeq$, si $\mathbf{x}_m \succ \mathbf{y}$, entonces $\lim_m \mathbf{x}_m = \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$. Por otro lado, recuerde que de acuerdo con la ecuación (10.2.7):

$$u(\mathbf{x}_m) = \sup_{\mathbf{y} \in Y} \underbrace{\{v(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x}_m)\}}_{=A_{\mathbf{x}_m}}.$$

$$u(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{y} \in Y} \underbrace{\{v(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \mathcal{C}_{\prec}(\mathbf{x})\}}_{=A_{\mathbf{x}}}.$$

De este modo:

$$\lim_m u(\mathbf{x}_m) = \sup_{\mathbf{y} \in Y} \underbrace{\{v(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \mathcal{C}_{\preceq}(\mathbf{x})\}}_{=B_{\mathbf{x}}}.$$

Denotando $I_{\mathbf{x}} = \{v(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \mathcal{C}_{\sim}(\mathbf{x})\}$ y teniendo en cuenta que $\sup(A \cup B) = \text{máx}\{\sup A, \sup B\}$:

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathbf{y}\in Y} B_{\mathbf{x}} &= \sup_{y\in\mathbf{y}} \{A_{\mathbf{x}} \cup I_{\mathbf{x}}\} \\
&= \text{máx}\left\{\sup_{\mathbf{y}\in Y} A_{\mathbf{x}}, \sup_{\mathbf{y}\in Y} I_{\mathbf{x}}\right\} \\
&= \text{máx}\left\{\sup_{\mathbf{y}\in Y} A_{\mathbf{x}}, a\right\} \\
&= u(\mathbf{x}),
\end{aligned}$$

donde:

$$a = \begin{cases} v(\mathbf{y}_0), & \text{con } \mathbf{y}_0 \sim \mathbf{x}, \text{ en caso exista dicho } \mathbf{y}_0 \\ -1, & \text{si no existe } \mathbf{y}_0 \text{ tal que} \mathbf{y}_0 \sim \mathbf{x}. \end{cases}$$

Note que para la tercera igualdad se ha usado que si $\mathbf{y}_1 \sim \mathbf{x}$ y $\mathbf{y}_2 \sim \mathbf{x}$, $v(\mathbf{y}_1) = v(\mathbf{y}_2)$, y para la cuarta que, dado $\mathbf{y}_0 \in Y$, podemos encontrar $\mathbf{y}_m \in Y$ tal que $\mathbf{y}_m \to \mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}_m \prec \mathbf{y}_0$ y $v(\mathbf{y}_m) \to v(\mathbf{y}_0)$[12]. Concluya así que $\text{lím}_m\, u(\mathbf{x}_m) = u(\mathbf{x})$.

Ejercicio 10.2.16. Demuestre que la función de utilidad tipo CES generalizada para n bienes:

$$u(x_1, ..., x_n) = \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{\rho}\right]^{1/\rho}, \tag{10.2.19}$$

con $\rho \neq 0$ y $\alpha_i > 0$, es cuasicóncava para $\rho \leq 1$.[13]

[12]Esta convergencia es consecuencia de la forma cómo se construyó $v(\cdot)$, ver lema 10.2.1.

[13]De hecho, es posible demostrar que una función cuasicóncava y homogénea de grado 1 es cóncava, por lo que la CES generalizada es cóncava para $\rho \leq 1$.

Ejercicio 10.2.17. Generalice el teorema 10.2.4 como sigue. Considere la función de utilidad CES para n bienes dada por (10.2.19), donde $\rho \neq 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, y $\alpha_i > 0$ para todo $i = 1, ..., n$, definida sobre $\mathbb{R}^n_{++}$. Demuestre que:

$$\lim_{\rho \to 1} u(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

$$\lim_{\rho \to 0} u(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}.$$

$$\lim_{\rho \to -\infty} u(x_1, ..., x_n) = \min\{x_1, ..., x_n\}.$$

Sugerencia. Siga la prueba del teorema 10.2.4.

Ejercicio 10.2.18. Considere el problema de maximización de la utilidad para $u(\mathbf{x}) = (x_1^\rho + x_2^\rho + \cdots + x_n^\rho)^{1/\rho}$, $\rho \in (-\infty, 1)$, $\rho \neq 0$, con $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$ e $I > 0$.

a) Demuestre que la demanda marshalliana del $i-$ésimo bien es $x_i(\mathbf{p})^{CES} = \frac{p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}-1} I}{\sum_{j=1}^n p_j^{\frac{\rho}{\rho-1}}}$.

b) Pruebe que si $\rho \to 0$, $x_i(\mathbf{p})^{CES} \to x_i(\mathbf{p})^{CD}$, donde $x_i(\mathbf{p})^{CD} = \frac{I}{p_i n}$ es la demanda marshalliana del $i-$ésimo bien asociada al problema de maximización de la utilidad cuando $u(\mathbf{x}) = x_1 x_2 \cdots x_n$.

c) Pruebe que si $\rho \to -\infty$, $x_i(\mathbf{p})^{CES} \to x_i(\mathbf{p})^L = \frac{I}{\sum_{j=1}^n p_j}$, donde $x_i(\mathbf{p})^L$ es la demanda marshalliana del $i-$ésimo bien asociada al problema de maximización de la utilidad cuando $u(\mathbf{x}) = \min\{x_1, ..., x_n\}$.

Ejercicio 10.2.19. Considere un agente cuya función de utilidad tipo Bernouilli $u(\cdot)$ es estrictamente creciente, y los siguientes pagos $X = \{0, 100, 400, 1000\}$. Demuestre que $L = (1/4, 1/4, 1/3, 1/6) \succeq L' = (0, 1/4, 11/24, 7/24)$.

Ejercicio 10.2.20. La aversión al riesgo es un concepto económico que refleja la preferencia por un pago seguro sobre un pago incierto. Concretamente, suponga que a un agente se le propone los siguientes esquemas de pago: «1000 soles son probabilidad 1/2 y 0 soles con probabilidad 1/2», «500 soles con probabilidad 1». Estos esquemas de pagos pueden representarse a través de loterías: si $X_S = \{0, 500, 1000\}$, entonces, el primer pago corresponde a $L = (1/2, 0, 1/2)$, mientras que el segundo a $L' = (0, 1, 0)$. Un agente será adverso al riesgo si prefiere L' a L. De manera más general, un agente es adverso al riesgo si:

$$u\left(\sum_{s=1}^{n} p_s x_s\right) \geq U(L) = \sum_{s=1}^{n} p_s u(x_s).$$

a) Argumente por qué si $u(\cdot)$ es cóncava, el agente es adverso al riesgo. Interprete.

b) Adapte la definición de aversión al riesgo al caso de distribuciones continuas.

c) ¿Cómo definiría un agente «neutral al riesgo»?

Ejercicio 10.2.21. Una forma de «medir» la aversión al riesgo es a través de los coeficientes de Aversión Absoluta al Riesgo (AAR) y de Aversión Relativa al Riesgo (ARR), definidos (en cuanto u sea dos veces diferenciables y no constante), de la manera siguiente:

$$AAR(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}, \quad ARR(x) = xAAR(x).$$

a) Interprete los coeficientes $AAR(x)$ y $ARR(x)$.

b) Calcule los coeficientes $AAR(x)$ y $ARR(x)$ para $u(x) = \sqrt{x}$, $\ln x$, x y x^2. Interprete.

c) Demuestre que si $ARR(x) = \rho$ constante, entonces $u(x) = Ax^{1-\rho} + B$ si $\rho \neq 1$ y $u(x) = C \ln x + D$ si $\rho = 1$, con A, B, C y D constantes.

d) Obtenga $u(x)$ si $AAR(x) = \gamma$ constante.

Ejercicio 10.2.22. Considere la siguiente función de utilidad tipo Bernouilli, $u(x) = a + bx - (c/2)x^2, \quad b, c > 0$. Demuestre que, dado $X_S = \{x_1, \cdots, x_n\}$ y una lotería cualquiera $L = (p_1, \cdots, p_n)$, $U(L) = a + b\mu - (c/2)(\mu^2 + \sigma^2)$, donde $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ y $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$.

10.3. Introducción al Equilibrio General

Con el propósito de mostrar algunas aplicaciones de los conceptos estudiados hasta aquí, en esta sección presentamos una breve introducción a la Teoría del Equilibrio General. La teoría del equilibrio es un modelo matemático que busca analizar cómo se determinan los precios y las cantidades demandadas de los bienes de consumo a partir de la interacción de los distintos mercados que constituyen la economía. Sus orígenes se remontan a los desarrollos de León Walras, que publicó en 1874 su famoso libro «Élements d'Economie Politique Pure» (Walras, 1874). La construcción moderna se basa principalmente en los trabajos de Kenneth Arrow, Gérard Debreu y Lionel McKenzie (Arrow &

Debreu, 1950), (McKenzie, 1959). La teoría del equilibrio general abarca una gran variedad de temas, y por cuenta propia podría constituir un libro en sí mismo. Aquí nos limitamos al escenario básico en el cual se considera una economía con un número finito de agentes y bienes y no existe producción. El lector interesado en un estudio más exhaustivo del tema puede consultar, por ejemplo, el libro «Existence and Optimality of Competitive Equilibrium» (Aliprantis, Brown & Burkinshaw, 1990), en donde se estudian economías con un número infinito de bienes; o bien el texto «General equilibrium overlapping generations models and optimal growth theory» de Truman Bewley (Bewley, 2007), en donde se abordan otras extensiones del modelo.

El estudio del equilibrio general nos permite vincular la teoría con muchos de los conceptos estudiados hasta aquí. En particular, haremos uso del análisis convexo y la optimización con restricciones, así como las diferentes propiedades de las relaciones de preferencias. Empezamos presentando lo que se conoce como una «Economía de Intercambio Puro», que se caracterizan por la ausencia de entidades que permitan producir nuevos bienes. Luego, para presentar el Primer y Segundo Teorema del Bienestar, en el contexto de las economía de intercambio puro, introducimos los conceptos de «Óptimo de Pareto» y «Equilibrio Walrasiano». Veamos.

Pensemos en una economía con $N \geq 2$ individuos y $L \geq 1$ bienes. Como no hay producción, es legítimo preguntarse: ¿de dónde salen entonces los bienes? Expliquemos esto. Cada consumidor $k \in \{1, ..., N\}$ posee una una canasta de bienes $\boldsymbol{\omega}_k = (\omega_{1k}, ..., \omega_{Lk}) \in \mathbb{R}^L_+$, que constituye su dotación inicial. Por ejemplo, supongamos que una economía solo consta de $N = 3$ individuos y $L = 3$ bienes (naranjas, manzanas y camotes). Si las dotaciones iniciales son $\boldsymbol{\omega}_1 = (1, 0, 2), \boldsymbol{\omega}_2 = (0, 0, 1)$ y $\boldsymbol{\omega}_3 = (3, 2, 1)$, entonces, puesto que no hay producción, la economía contará en todo momento con 4 naranjas, 2 manzanas y 4 camotes. En general, para cada bien $\ell \in \{1, ..., L\}$, la economía cuenta con una cantidad dada por

$$\omega_\ell = \sum_{k=1}^{N} \omega_{\ell k},$$

donde $\omega_{\ell k}$ representa la ℓ-ésima componente de $\boldsymbol{\omega}_k$.

Para completar las hipótesis básicas del modelo, en adelante consideraremos una economía en la que, para cada individuo k, existe al menos algún ℓ, tal que $\omega_{\ell k} > 0$; y para cada bien ℓ, $\omega_\ell > 0$. Así pues, los consumidores tienen en su dotación inicial al menos una cantidad positiva de uno de los bienes, y todos los bienes existen en la economía. Estas condiciones permiten que se pueda llevar a cabo un intercambio de bienes entre los consumidores.

Claramente, las dotaciones del ejemplo anterior satisfacen las hipótesis establecidas. Ahora bien, si la dotación inicial del tercer individuo fuera, por ejemplo, $\boldsymbol{\omega}_3 = (3, 0, 1)$, se cumpliría la primera hipótesis, pues cada individuo seguiría teniendo al menos un bien de los bienes considerados; sin embargo, no se cumpliría la segunda hipótesis, pues no habrían naranjas en la economía. Las economías que no satisfacen las propiedades anotadas se llaman «degeneradas» y no serán de nuestro interés aquí.

Si dos individuos no están satisfechos con sus dotaciones iniciales entonces, dado que no hay producción, se verán impulsados a intercambiar bienes entre ellos, y éste intercambio será posible si cada uno tiene lo que el otro desea.[14] De esta manera se configura lo que se conoce como una «economía de intercambio puro».

Si el k-ésimo individuo ejecuta un intercambio de bienes, éste pasa de tener una dotación inicial $\boldsymbol{\omega}_k \in \mathbb{R}^L_+$ a tener una dotación $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^L_+$. Ahora bien, ¿cómo los individuos miden su bienestar?, ¿cómo distinguen entre una dotación y otra? La respuesta viene dada por las preferencias naturales de cada uno de ellos. Así pues, queda configurado el modelo de una economía de intercambio puro en la que cada consumidor posee una dotación inicial $\boldsymbol{\omega}_k$, que satisface las hipótesis establecidas, y que está caracterizado por sus preferencias $\succeq_k$ sobre $\mathbb{R}^L_+$. Si los individuos, de acuerdo con sus preferencias, no están satisfechos con sus dotaciones iniciales, dado que no hay producción, se sentirán impelidos a realizar intercambios de bienes entre ellos, de suerte de conseguir una dotación que les produzca mayor grado de satisfacción. Denotamos esta economía con L bienes y N individuos por el conjunto $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \{(\boldsymbol{\omega}_k, \succeq_k);\ \boldsymbol{\omega}_k \in \mathbb{R}^L_+,\ k = 1, \ldots, N\}.$$

Ejemplo

Ejemplo 10.3.1. Sea $\mathcal{E}$ una economía de intercambio puro con $L = N = 2$ y supongamos que las dotaciones iniciales son $\boldsymbol{\omega}_1 = (1, 0)$ y $\boldsymbol{\omega}_2 = (0, 1)$. Supongamos, además, que las preferencias de los individuos que componen la economía están representadas por

[14] En realidad, el intercambio se efectuará si al menos uno de los dos mejora y el otro no resulta perjudicado como consecuencia del intercambio.

funciones de utilidad de tipo Cobb-Douglas: $u_1(x_1, x_2) = x_1^{1/3}x_2^{3/4}$ y $u_2(x_1, x_2) = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$. Bajo estas condiciones, ¿habrá intercambio? Ciertamente sí, pues las dotaciones iniciales de cada individuo le reportan una utilidad igual a cero; mientras que, si el individuo 1 intercambia una cantidad $x_1 \in]0, 1[$ del bien 1 a cambio de una cantidad $x_2 \in]0, 1[$ del bien 2, del individuo 2, las utilidades de ambos se tornan positivas, pues las asignaciones, después del intercambio, serían $\mathbf{x}_1 = (1 - x_1, x_2)$ y $\mathbf{x}_2 = (x_1, 1 - x_2)$, lo que generaría utilidades positivas, $u_1 = (1 - x_1)^{1/3}x_2^{3/4}$ y $u_2 = x_1^{1/2}(1 - x_2)^{1/2}$, respectivamente.

Ahora bien, con la finalidad de mejorar sus utilidades ¿qué cantidades x_1 y x_2 deberían intercambiar los agentes? Este problema no es tan sencillo como en situaciones anteriores. Por ejemplo, en el problema del consumidor, el individuo busca la canasta óptima de consumo dada su restricción presupuestaria. Qué tanto puede mejorar su utilidad depende únicamente de su ingreso, el vector de precios de los bienes y sus preferencias. En las economías de intercambio puro existen varios individuos, y la única manera de mejorar sus utilidades es intercambiando bienes con el resto. Pero entonces, el individuo depende de lo que los otros deseen intercambiar, y deben ponerse de acuerdo sobre las tasas de intercambio. En este ejemplo, dadas las dotaciones iniciales, ambos individuos tienen incentivos de intercambiar para mejorar su utilidad. Sin embargo, en el caso general, es posible que algunos de los agentes no desee intercambiar. Si en este ejemplo hubiésemos tenido $u_1(x_1, x_2) = 10x_1 + x_2$ y $u_2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$, a ninguno de los individuos les conviene intercambiar. En efecto, dadas las dotaciones en cuestión, la canasta $\mathbf{x}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 = (1,0)$ le da la mayor utilidad posible al individuo 1, sujeto a que el individuo 2 desee intercambiar, y a su vez, $\mathbf{x}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 = (0,1)$ le da la mayor utilidad posible al individuo 2, sujeto a que el individuo 1 desee intercambiar. Formalmente la solución de:

$$\max_{\mathbf{x}_1 \in [0,1]^2} 10x_{11} + x_{21}$$
$$\text{s.a } u_2(x_{12}, x_{22}) = (1 - x_{11}) + 2(1 - x_{21}) \geq u_2(\boldsymbol{\omega}_2) = 2$$

es $(1,0)$, y a su vez, $(0,1)$ resuelve:

$$\max_{\mathbf{x}_2 \in [0,1]^2} x_{12} + 2x_{22}$$
$$\text{s.a } u_1(x_{11}, x_{21}) = 10(1 - x_{12}) + (1 - x_{22}) \geq u_1(\boldsymbol{\omega}_1) = 10.$$

Las condiciones $u_2(x_{12}, x_{22}) \geq u_2(0,1)$ y $u_1(x_{11}, x_{21}) \geq u_1(1,0)$ son justamente aquellas que corresponden a las restricciones: *sujeto a que el otro individuo desee intercambiar.*

Note que hemos usado el hecho que $x_{11} + x_{12} = 1$ y $x_{21} + x_{22} = 1$. Asimismo, estamos considerando que los individuos intercambian cuando están mejor o igual que en su dotación. Esto es, consideramos desigualdades débiles en las restricciones $u_i(x_{1k}, x_{2k}) \geq u_i(\omega_{1k}, \omega_{2k})$.

Por lo tanto, dadas las dotaciones y preferencias en cuestión, a los individuos nos les conviene intercambiar (no mejoran su utilidad) y se quedan con su dotación.

Así pues, el consumo final de cada individuo dependerá de las preferencias y las dotaciones iniciales de cada agente en la economía, los individuos no optimizan individualmente. En lo que sigue abordamos justamente este problema de optimización conjunta.

◊◊◊

Las dotaciones de los individuos, después de intercambiar, no son arbitrarias, sino que están sujetas a las existencias iniciales de los bienes de consumo. Formalmente:

Definición 10.3.1. Una «dotación factible» es una colección de canastas de consumo $\{\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^L_+; k = 1, \ldots, N\}$, tal que:

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k \leq \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\omega}_k. \tag{10.3.1}$$

Ejemplo

Ejemplo 10.3.2. Sean $L = N = 2$ y supongamos que $\boldsymbol{\omega}_1 = (1, 2)$ y $\boldsymbol{\omega}_2 = (2, 2)$. Entonces, $\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = (3, 4)$. Así, las asignaciones $\{(1, 1), (2, 2)\}$ y $\{(1.5, 3), (1.5, 1)\}$ son factibles, pues en ambos casos se verifica la condición (10.3.1); en cambio, la asignación $\{(2, 2), (2, 2)\}$ no es factible, pues la suma de las primeras componentes es superior a 3, por lo que no se verifica la condición (10.3.1). Una asignación es factible si resulta de una transacción de los bienes totales que existían inicialmente.

◊◊◊

Quedamos entonces que en una economía de intercambio puro los agentes insatisfechos con sus dotaciones iniciales buscan mejorarlas a través de intercambios voluntarios de los bienes de consumo. Esto demanda que los agentes dispongan de un criterio que describa o mida esta mejora. El siguiente criterio, conocido como «Óptimo de Pareto», es ampliamente aplicado en la economía y otras disciplinas, y constituye un criterio de eficiencia para la acción de intercambio. Este concepto fue introducido por el ingeniero francés de origen italiano Wilfredo Pareto (1848-1923).

Definición 10.3.2. (Óptimo de Pareto). Se dice que una asignación factible $\{\tilde{\mathbf{x}}_k\}_{k=1}^N$ es un Óptimo de Pareto (PO por sus siglas en inglés) si no existe otra asignación factible $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N$, tal que se cumplan las siguientes condiciones:

$$\forall\ k \in \{1, ..., N\}: \quad \mathbf{x}_k \succeq_k \tilde{\mathbf{x}}_k. \tag{10.3.2}$$

$$\exists\ k_0 \in \{1, ..., N\}: \quad \mathbf{x}_{k_0} \succ_{k_0} \tilde{\mathbf{x}}_{k_0}. \tag{10.3.3}$$

En concreto, una asignación es PO si es factible y no existe otra asignación factible con la cual al menos un agente esté estrictamente mejor y todos los demás estén por lo menos igual o mejor que con la asignación PO.

Ejemplos

Ejemplo 10.3.3. Consideremos una economía $\mathcal{E}$ en la cual viven dos individuos, Eduardo y Alicia, y existe un único bien de consumo: el dinero (m). Las preferencias de Eduardo y Alicia están definidas por

$$m \succeq_k \hat{m} \Leftrightarrow m \geq \hat{m},\ \ k = 1, 2. \tag{10.3.4}$$

Por otro lado, supongamos que las dotaciones iniciales son $\boldsymbol{\omega}_1 = 300, \boldsymbol{\omega}_2 = 700$ ¿Constituye la dotación $\{300, 700\}$ una asignación

PO? La respuesta es afirmativa, pues no existe una asignación $\{m_1, m_2\}$, tal que $m_1 + m_2 \leq 1000$ y además se cumpla que:

$$[m_1 \geq 300 \ \wedge m_2 \geq 700] \ \wedge \ [m_1 > 300 \ \vee \ m_2 > 700]. \quad (10.3.5)$$

Es sencillo notar que si $m_1 > 300$, necesariamente $m_2 < 700$ y que si $m_2 > 700$, necesariamente $m_1 < 300$. Así pues, en ninguno de estos casos se cumpliría la primera condición de (10.3.5), por lo que $\{300, 700\}$ es una asignación PO. La única forma en la que, o bien Eduardo, o bien Alicia, mejoren su felicidad es incrementando la cantidad de dinero que poseen, pero esto solo puede pasar si el otro cede una cantidad de dinero, lo cual disminuiría su felicidad.

Siguiendo el mismo argumento, el lector puede verificar que la asignación $\{m_1, m_2\}$, tal que $m_1 + m_2 = 1000$, con $m_1, m_2 \geq 0$, es una asignación PO. Este resultado tiene una consecuencia que podría juzgarse como injusta. Imaginemos que Eduardo y Alicia han sido dotados de $m_1 = 999$ y $m_2 = 1$ dólares, respectivamente. De acuerdo con lo establecido, esta asignación sería un PO, aunque Alicia desearía mucho hacer un intercambio, lo que perjudicaría a Eduardo. Aunque injusto, sin embargo, es una situación eficiente desde el punto de vista conceptual.

Ejemplo 10.3.4. Retomemos el ejemplo 10.3.1, donde $L = 2 = N$, $\boldsymbol{\omega}_1 = (1, 0)$, $\boldsymbol{\omega}_2 = (0, 1)$, y las preferencias de los individuos son:

$$(x_1, x_2) \succeq_1 (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1^{1/3} x_2^{3/4} \geq y_1^{1/3} y_2^{3/4}.$$

$$(x_1, x_2) \succeq_2 (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1^{1/2} x_2^{1/2} \geq y_1^{1/2} y_2^{1/2}.$$

¿Constituye la dotación $\{(1,0),(0,1)\}$ una asignación PO? Veamos que no. En efecto, si lo fuera, no existiría $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\}$ tal que:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 &\succeq_1 (1,0),\\ \mathbf{x}_2 &\succeq_2 (0,1),\\ \mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2 &\leq (1,1).\end{aligned}$$

y, o bien $\mathbf{x}_1 \succ_1 (1,0)$, o bien $\mathbf{x}_2 \succ_1 (0,1)$. Sin embargo, $\{(0.5,0.5),(0.5,0.5)\}$ es una asignación tal que:

$$\begin{aligned}(0.5,0.5) &\succ_1 (1,0),\\ (0.5,0.5) &\succ_2 (0,1),\\ (0.5,0.5)+(0.5,0.5) &= (1,1).\end{aligned}$$

Es decir, $\{(0.5,0.5),(0.5,0.5)\}$ es una asignación factible con la cual ambos consumidores se encuentran estrictamente mejor que con la asignación $\{(1,0),(0,1)\}$. Luego, por definición, $\{(1,0),(0,1)\}$ no es PO. En este caso, los agentes buscarán mejorar su dotación inicial. Observe, más bien, que la asignación $\{(0.5,0.5),(0.5,0.5)\}$ sí constituye un PO, pues en esta situación, cualquier intercambio entre ellos implicará la mejora de uno y el empeoramiento del otro.

$\Diamond\Diamond\Diamond$

Observemos que, como puede verse del ejemplo 10.3.3, para un mismo escenario, podrían existir varias asignaciones PO, incluso infinitas. El teorema 10.3.1 provee una caracterización de un PO como solución de un problema de optimización (de tipo $\mathcal{KKT}$). Para presentar el teorema, permítanos primero definir el siguiente problema:

Definición 10.3.3. (El problema $\mathcal{P}_{k_0}(\overline{\mathbf{u}}_{-k_0})$). Sea $\mathcal{E}$ una economía de intercambio puro en la que cada relación de preferencias $\succeq_k$ es representada por una función de utilidad $u_k(\cdot)$ continua. Sea $k_0 \in \{1, ..., N\}$ y $\overline{\mathbf{u}}_{-k_0} = (\overline{u}_1, ..., \overline{u}_{k_0-1}, \overline{u}_{k_0+1}, ..., \overline{u}_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$. Definimos el problema de maximización $\mathcal{P}_{k_0}(\overline{\mathbf{u}}_{-k_0})$ como sigue:

$$\mathcal{P}_{k_0}(\overline{\mathbf{u}}_{-k_0}) : \begin{cases} \max\limits_{\{\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^L_+\}_{k=1}^N} & u_{k_0}(\mathbf{x}_{k_0}) \\ \text{s. a :} & u_k(\mathbf{x}_k) \geq \overline{u}_k,\ k = 1, ..., N, k \neq k_0 \\ & \sum_{k=1}^N \mathbf{x}_k \leq \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega}_k. \end{cases}$$

Lo que se busca en el problema $\mathcal{P}_{k_0}(\overline{\mathbf{u}}_{-k_0})$ es encontrar una asignación de canastas que maximice la utilidad de alguno de los individuos (k_0) y que mantenga los niveles de utilidad del resto de agentes por encima de cierto umbral (determinado por $\overline{\mathbf{u}}_{-k_0}$). En otras palabras, encontrar la mejor canasta posible para k_0 sin «empeorar» al resto de individuos. Esta maximización se hace sobre el conjunto de todas las asignaciones factibles.

Note que cuando las funciones de utilidad son continuas y el conjunto de oportunidad es no vacío, el problema $\mathcal{P}_{k_0}(\overline{\mathbf{u}}_{-k_0})$ siempre tiene solución. En efecto, sea S el conjunto de oportunidad del problema $\mathcal{P}_{k_0}(\overline{\mathbf{u}}_{-k_0})$. Como las funciones de utilidad u_k son continuas, cada restricción $u_k(\mathbf{x}_k) \geq \overline{u}_k$ determina un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^L$. Puesto que el producto cartesiano de cerrados es un conjunto cerrado, el conjunto A definido por

$$A = \prod_{k \neq k_0} \underbrace{\{\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^L_+ : u_k(\mathbf{x}_k) \geq \overline{u}_k\}}_{\subset \mathbb{R}^L} \times \underbrace{\{\mathbf{x}_{k_0} \in \mathbb{R}^L_+\}}_{\subset \mathbb{R}^L} \subset \mathbb{R}^{LN}$$

es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^{LN}$. Por otro lado, como:

$$B = \left\{ (\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{LN}_+ : \sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k \leq \overline{\boldsymbol{\omega}} \right\} \tag{10.3.6}$$

es un conjunto compacto (véase ejercicio 10.3.1) y $S = A \cap B$, concluimos que S es compacto, y el resultado se sigue del Teorema de Weierstrass.

Teorema 10.3.1. Sea $\mathcal{E}$ una economía de intercambio puro, donde cada relación de preferencias $\succeq_k$ es racional, continua y fuertemente monótona. Entonces, $\tilde{\mathbf{x}} = \{\tilde{\mathbf{x}}_k\}_{k=1}^N$, es una asignación PO si y solamente si para algún $k_0 \in \{1, ..., N\}$ existe un vector $\overline{\mathbf{u}}_{-k_0} \in \mathbb{R}^{N-1}$, tal que $\tilde{\mathbf{x}}$ es solución del problema $\mathcal{P}_{k_0}(\overline{\mathbf{u}}_{-k_0})$.

Demostración. Para la ida, supongamos que $\tilde{\mathbf{x}} = \{\tilde{\mathbf{x}}_k\}_{k=1}^N$ es una asignación PO. Entonces, por definición, no existe otra asignación factible $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N$ en $\mathcal{E}$, tal que para todo $k \in \{1, ..., N\}$, $\mathbf{x}_k \succeq_k \tilde{\mathbf{x}}_k$, y, para algún $k_0 \in \{1, ..., N\}$, $\mathbf{x}_{k_0} \succ_{k_0} \tilde{\mathbf{x}}_{k_0}$. En términos de funciones de utilidad, podemos reescribir esto mismo diciendo que no existe otra asignación factible $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N$, tal que para todo $k \in \{1, ..., N\}$, $u_k(\mathbf{x}_k) \geq u_k(\tilde{\mathbf{x}}_k)$, y, para algún $k_0 \in \{1, ..., N\}$, $u_{k_0}(\mathbf{x}_{k_0}) > u_{k_0}(\tilde{\mathbf{x}}_{k_0})$. Esto implica que, para algún $k_0 \in \{1, ..., N\}$, la asignación $\tilde{\mathbf{x}}$ es solución del problema $\mathcal{P}_{k_0}(\overline{\mathbf{u}}_{-k_0})$:

$$\begin{aligned}
&\max_{\{\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^L_+\}_{k=1}^N} \ u_{k_0}(\mathbf{x}_{k_0}) \\
&\text{s. a} : u_k(\mathbf{x}_k) \geq \underbrace{u_k(\tilde{\mathbf{x}}_k)}_{\overline{u}_k}, \ k = 1, ..., N, \ k \neq k_0 \\
&\sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k \leq \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\omega}_k.
\end{aligned}$$

Para la vuelta, supongamos que para cierto $k_0 \in \{1, ..., N\}$ existe $\overline{\mathbf{u}}_{-k_0} \in \mathbb{R}^{N-1}$, tal que la asignación $\tilde{\mathbf{x}} = \{\tilde{\mathbf{x}}_k\}_{k=1}^N$ es solución del problema $\mathcal{P}_{k_0}(\overline{\mathbf{u}}_{-k_0})$. Esto significa que $\tilde{\mathbf{x}}_{k_0}$ maximiza la utilidad de k_0 sujeto a que $u_k(\tilde{\mathbf{x}}_k) \geq \overline{u}_k$, $k \neq k_0$, y $\sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{x}}_k \leq \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega}_k = \overline{\boldsymbol{\omega}}$. Lo primero que establecemos es que para todo $k \neq k_0$, $u_k(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \overline{u}_k$ y $\sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{x}}_k = \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega}_k$. Supongamos, por contradicción, que para algún $k_j \neq k_0$, la desigualdad es estricta. Esto es, $u_{k_j}(\tilde{\mathbf{x}}_{k_j}) > \overline{u}_{k_j}$. En este caso, debido a la continuidad y monotonía fuerte de las preferencias, existen $\epsilon > 0$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^L_+$ diferente de $\mathbf{0}$, tales que:

$$u_{k_j}(\tilde{\mathbf{x}}_{k_j}) > u_{k_j}\left(\tilde{\mathbf{x}}_{k_j} - \epsilon \mathbf{v}\right) = \overline{u}_{k_j}.$$

Pero entonces, para $\tilde{\mathbf{x}}_{k_0} + \epsilon \mathbf{v}$, nuevamente por la monotonía fuerte:

$$u_{k_0}(\tilde{\mathbf{x}}_{k_0} + \epsilon \mathbf{v}) > u_{k_0}(\tilde{\mathbf{x}}_{k_0}).$$

Esto es una contradicción, pues $\{\tilde{\mathbf{x}}_1, ..., \tilde{\mathbf{x}}_{k_j} - \epsilon \mathbf{v}, \cdots, \tilde{\mathbf{x}}_{k_0} + \epsilon \mathbf{v}, ..., \tilde{\mathbf{x}}_N\}$ es una asignación tal que $u_k(\cdot) \geq \overline{u}_k$ para todo $k \neq k_0$ y es factible, ya que:

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 + \cdots + (\tilde{\mathbf{x}}_{k_j} - \epsilon \mathbf{v}) + \cdots + (\tilde{\mathbf{x}}_{k_0} + \epsilon \mathbf{v}) + \cdots + \tilde{\mathbf{x}}_N = \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{x}}_k \leq \overline{\boldsymbol{\omega}}.$$

Por otro lado, si $\sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{x}}_k < \overline{\boldsymbol{\omega}}$, podemos definir la asignación:

$$\left\{\tilde{\mathbf{x}}_1, \cdots, \overline{\boldsymbol{\omega}} - \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{x}}_{k_0}, \cdots, \tilde{\mathbf{x}}_N\right\}.$$

Esta asignación es factible pues para $k \neq k_0$, todos alcanzan un nivel de utilidad por lo menos igual a $\overline{u}_k$ (la canasta de cada individuo $k \neq k_0$ es $\tilde{\mathbf{x}}_k$ y ya establecimos que $u_k(\tilde{\mathbf{x}}_k) = \overline{u}_k$), y:

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 + \cdots + \overline{\boldsymbol{\omega}} - \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{x}}_{k_0} + \cdots + \tilde{\mathbf{x}}_N = \overline{\boldsymbol{\omega}}.$$

Sin embargo, por la monotonía fuerte de las preferencias:

$$u_{k_0}\left(\overline{\boldsymbol{\omega}} - \sum_{k=1}^{N} \tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{x}}_{k_0}\right) > u_{k_0}(\tilde{\mathbf{x}}_{k_0}),$$

lo cual es una contradicción, pues viola la maximalidad de $\tilde{\mathbf{x}}_{k_0}$.

De este modo, que $\tilde{\mathbf{x}}$ sea solución de $\mathcal{P}_{k_0}(\overline{\mathbf{u}}_{-k_0})$ implica que no existe otra asignación factible $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N$, tal que:

$$u_k(\mathbf{x}_k) \geq \overline{u}_k = u_k(\tilde{\mathbf{x}}_k),\ k \neq k_0, \tag{10.3.7}$$

$$u_{k_0}(\mathbf{x}_{k_0}) > u_{k_0}(\tilde{\mathbf{x}}_{k_0}). \tag{10.3.8}$$

Para concluir que $\tilde{\mathbf{x}}$ es una asignación PO debemos probar que no existe otra asignación factible, tal que para todo $k \in \{1, \ldots, N\}$, $u_k(\mathbf{x}_k) \geq u_k(\tilde{\mathbf{x}}_k)$ y para algún $k_j \in \{1, ..., N\}$, $u_{k_j}(\mathbf{x}_{k_j}) > u_{k_j}(\tilde{\mathbf{x}}_{k_j})$. Supongamos, por contradicción, que sí existe dicha asignación $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N$. Por (10.3.7) y (10.3.8) sabemos que no existe dicha asignación para $k_j = k_0$, por lo que $k_j \neq k_0$. Sea entonces $k_j \neq k_0$ y $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N$, tal que:

$$u_k(\mathbf{x}_k) \geq u_k(\tilde{\mathbf{x}}_k),$$
$$u_{k_j}(\mathbf{x}_{k_j}) > u_{k_j}(\tilde{\mathbf{x}}_{k_j}),$$
$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k = \overline{\boldsymbol{\omega}}.$$

Como las preferencias son continuas, fuertemente monótonas, y $\mathbf{x}_{k_j} \neq \mathbf{0}$[15], existe $\ell \in \{1, ..., L\}$ y $\epsilon > 0$, tal que, haciendo $\hat{\mathbf{x}}_{k_j} = (x_{1k_j}, ..., x_{\ell k_j} - \epsilon, ..., x_{Lk_j})$:

$$u_{k_j}(\hat{\mathbf{x}}_{k_j}) = u_{k_j}(\tilde{\mathbf{x}}_{k_j}) = \overline{u}_{k_j}.$$

[15] Como $\tilde{\mathbf{x}}_{k_j} \geq \mathbf{0}$ y $\mathbf{x}_{k_j} \succ \tilde{\mathbf{x}}_{k_j}$, necesariamente $\mathbf{x}_{k_j} \neq \mathbf{0}$.

Ahora, definiendo $\hat{\mathbf{x}}_{k_0} = \mathbf{x}_{k_0} + \epsilon \mathbf{e}_\ell = (x_{1k_0}, ..., x_{\ell k_0} + \epsilon, ..., x_{Lk_0})$, nuevamente por la monotonía fuerte de las preferencias, obtenemos:

$$u_{k_0}(\hat{\mathbf{x}}_{k_0}) > u_{k_0}(\mathbf{x}_{k_0}).$$

Esto es una contradicción, pues $\{\mathbf{x}_1, ..., \hat{\mathbf{x}}_{k_0}, ..., \hat{\mathbf{x}}_{k_j}, ..., \mathbf{x}_N\}$ es una asignación factible, tal que:

$$\begin{aligned}
u_k(\mathbf{x}_k) &\geq \overline{u}_k, \;\; k \neq k_0, k_j, \\
u_{k_j}(\hat{\mathbf{x}}_{k_j}) &= \overline{u}_{k_j}, \\
u_{k_0}(\hat{\mathbf{x}}_{k_0}) &> u_{k_0}(\mathbf{x}_k) \geq u_{k_0}(\tilde{\mathbf{x}}_{k_0}),
\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_1 + \cdots + \hat{\mathbf{x}}_{k_j} + \cdots + \hat{\mathbf{x}}_{k_0} + \cdots + \mathbf{x}_N = \overline{\boldsymbol{\omega}}.$$

en la que k_0 mejora su utilidad. Esto contradice la maximalidad de $\tilde{\mathbf{x}}_{k_0}$. Así, tal $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N$ no existe, i.e., $\tilde{\mathbf{x}} = \{\tilde{\mathbf{x}}_k\}_{k=1}^N$ es una asignación PO. □

Ejemplo 10.3.5. Volvamos al ejemplo 10.3.3. Las preferencias de Eduardo y Alicia pueden ser asociadas, respectivamente, a las funciones de utilidad $u_1(m_1) = m_1$ y $u_2(m_2) = m_2$. Recordemos que habíamos determinado que la asignación $\{300, 700\}$ era PO. Entonces, de acuerdo con el teorema 10.3.1, existe $k_0 \in \{1, 2\}$, tal que $\{300, 700\}$ es solución del problema $\mathcal{P}_{k_0}(\overline{u}_{-k_0})$ para algún nivel de utilidad $\overline{u}_{-k_0}$. Para $k_0 = 1$, veamos que $\{300, 700\}$ es solución del problema $\mathcal{P}_1(700)$:

$$\mathcal{P}_1(700) : \begin{cases} \max\limits_{\{m_1, m_2 \in \mathbb{R}_+\}} & u_1(m_1) = m_1 \\ \text{s. a :} & u_2(m_2) = m_2 \geq 700 \\ & m_1 + m_2 \leq 1000. \end{cases} \tag{10.3.9}$$