Pontificia Universidad Católica del Perú
Especialidad de Finanzas
FIN 2023 - PRÁCTICA DIRIGIDA 5
Profesor: José Gallardo
Jefes de Práctica: Karen Montoya y Marcelo Gallardo

Octubre 9, 2024

Utilidad esperada

Ejercicio 1. Manuel cuenta con una riqueza inicial de $w > 0$ (en soles). Existe un activo riesgoso que proporciona un retorno de $z \geq 0$ por cada sol invertido. En el escenario ω_H, que ocurre con probabilidad $0 < p_H < 1$, el retorno es de $z_H > 1$. En el escenario ω_L, que ocurre con probabilidad $p_L = 1 - p_H$, el retorno es de $z_L < 1$. La utilidad Bernouilli de Manuel está dada por $v(\cdot)$ una función diferenciable y estrictamente cóncava. Manuel decide cuánto de su riqueza (α) invierte en este activo.

a) Argumente por qué el problema de Manuel puede ser expresado como

$$\max_{0 \leq \alpha \leq w} U(\alpha) = p_L v(w + \alpha(z_L - 1)) + p_H v(w + \alpha(z_H - 1)).$$

b) Derivar las condiciones de primer orden para obtener el monto de inversión óptimo α^*.

c) ¿En qué caso son estas condiciones suficientes?

d) Considere el caso en el que el retorno neto esperado es no positivo, es decir, $\mathbb{E}[z] - 1 \leq 0$. Muestre que, en este caso, la inversión óptima es $\alpha^* = 0$.

e) Considere el caso en que el retorno esperado es positivo, es decir, $\mathbb{E}[z] - 1 > 0$. Muestre que, en este caso, la inversión óptima satisface $\alpha^* > 0$.

Solución:

a) Tenemos únicamente dos estados de la naturaleza, ω_H y ω_L. En el estado ω_L, la el pago que recibe Pancho por comprar α unidades es αz_L. Para ello, tuvo que pagar α. Por ende, su riqueza en este estado es $w + \alpha(z_L - 1)$. Un razonamiento análogo conduce a que la riqueza en el estado ω_H es $w + \alpha(z_H - 1)$. Así, su utilidad esperada viene dada por

$$U(\alpha) = p_L v(w + \alpha(z_L - 1)) + p_H v(w + \alpha(z_H - 1)).$$

Finalmente, se debe maximizar $U(\alpha)$ sobre $[0, w]$ pues la cantidad que invierta debe ser necesariamente positiva, y no puede exceder si riqueza total (no hay endeudamiento).

b) Para soluciones interiores, derivamos con respecto a α e igualamos a cero:

$$\frac{dU}{d\alpha} = (z_L - 1)p_L v'(w + \alpha(z_L - 1)) + (z_H - 1)p_H v'(w + \alpha(z_H - 1)) = 0.$$

c) La suficiencia de las condiciones depende de la concavidad de la función objetivo y la interioridad de las soluciones (para poder derivar). Entonces, asumiendo una solución interior, si la segunda derivada de la función objetivo es no positiva, podremos concluir que el punto crítico es óptimo. Derivamos entonces dos veces U:

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2} = \underbrace{(z_L - 1)^2 p_L}_{\geq 0} \underbrace{v''(w + \alpha(z_L - 1))}_{\leq 0} + \underbrace{(z_H - 1)^2 p_H}_{\geq 0} \underbrace{v''(w + \alpha(z_H - 1))}_{\leq 0} \leq 0.$$

Puesto que $v''(\cdot) \leq 0$, tenemos que $d^2U/d\alpha \leq 0$. Así, las condiciones de primer orden resultan ser suficientes bajo las hipótesis hechas. En caso la solución sea de esquina, i.e., $\alpha^* \in \partial[0, w] = \{0, w\}$, debemos comparar la función objetivo evaluada en estos puntos con la función objetivo evaluada en los puntos criíticos. Ahora bien, si se impusieran condiciones de Inada a $u(\cdot)$, podemos descartar que $\alpha^* = 0$.

d) Para probar que la inversión óptima es $\alpha^* = 0$, basta probar que $U'(0) \leq 0$. En efecto, si $U'(0) \leq 0$, como $U'(\cdot)$ es monótona, se maximiza en $\alpha^* = 0$ (dada la restricción $\alpha \in [0, w]$). De este modo,

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{d\alpha}(0) &= (z_L - 1)p_L v'(w) + (z_H - 1)p_H v'(w) \\
&= (p_L z_L + p_H z_H - p_L - p_H)v'(w) \\
&= \underbrace{(\mathbb{E}[z] - 1)}_{\leq 0} \underbrace{v'(w)}_{>0} \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

e) Por un razonamiento análogo al hecho en d), basta probar que $U'(0) > 0$. En efecto, de ser el caso, el óptimo se encuentra a la derecha de $\alpha = 0$. Nuevamente,

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{d\alpha}(0) &= (z_L - 1)p_L v'(w) + (z_H - 1)p_H u'(w) \\
&= (p_L z_L + p_H z_H - p_L - p_H)v'(w) \\
&= \underbrace{(\mathbb{E}[z] - 1)}_{>0}\underbrace{v'(w)}_{>0} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Ejercicio 2. Ann tiene aversión absoluta al riesgo constante $\gamma > 0$ y una riqueza inicial w. Ella puede comprar acciones de dos activos divisibles que se venden a precio unitario. Uno de los activos paga un dividendo $X \sim N(2\mu, \sigma^2)$ y el otro paga un dividendo $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, donde X y Y están distribuidos independientemente y $\mu > 1$. Ella puede comprar cualquier cantidad de acciones de cada activo y puede mantener parte de su riqueza inicial en efectivo. Encuentra el portafolio óptimo para Ann.

Solución: el problema de optimización es

$$\max_{z_1, z_2} \mathbb{E}\left[e^{-\gamma(w + z_1(X-1) + z_2(Y-1))}\right] = \max_{z_1, z_2}\; w + z_1(\mu - 1) - \frac{z_1^2}{2}\gamma\sigma^2 + z_2(2\mu - 1) - \frac{z_2^2}{2}\alpha\sigma^2.$$

Aplicando CPO:

$$z_1 = \frac{1}{\gamma}\frac{\mu - 1}{\sigma^2}, \quad z_2 = \frac{1}{\gamma}\frac{2\mu - 1}{\sigma^2}.$$

Consumos contingentes

Ejercicio 3. Lucien está inmerso en el mundo de las inversiones y sabe que es momento que invertir en una empresa. De este modo, se pone a observar el rendimiento del mercado en los últimos 5 días y obtiene:

Figura 1: Mercado en los últimos 5 días.

Lucien nota que hay dos opciones de sectores que le llaman la atención. Estos son *Information Tecnology (IT)* y *Financials (F)*. Si decide invertir en IT, comprará un total de c_1 acciones. Si invierte en F, comprará c_2 acciones. Con este último sector, Lucien tiene una probabilidad igual a 0.6 de obtener ganancias, mientras que con IT su probabilidad de obtener ganancias es 0.4. Los precios de cada acción, según el sector que elija, son p_1 (IT) y p_2 (F). Por otro lado, Lucien posee una cantidad inicial de acciones de ambos sectores elegidos: $\bar{c}_i$, donde $i = 1, 2$. Además, su utilidad sobre pagos monetarios/consumos está dada por $v(c_i) = \ln c_i$.

a) Plantee el problema de otpimización que enfrenta Lucien.

b) Obtenga las CPO.

c) Halle la decisión de consumo (c_1^*, c_2^*) de Lucien. Para esto, asuma que $\bar{c}_1 = 10$, $\bar{c}_2 = 6$ y $p_1 = 2$ y $p_2 = 1$.

d) Grafique la situación inicial de Lucien y la situación final (cuando consume lo óptimo).

Solución:

1. El problema que debe resolver es

$$\begin{cases} \text{máx} & U^e = 0{,}4 \ln c_1 + 0{,}6 \ln c_2 \\ \text{s.a} & p_1 c_1 + p_2 c_2 = p_1 \bar{c}_1 + p_2 \bar{c}_2. \end{cases}$$

   Dada las condiciones de Inada, no es necesario especificar las condiciones de no negatividad.

2. El Lagrangiano del problema es

$$L(c_1, c_2, \lambda) = 0{,}4 \ln c_1 + 0{,}6 \ln c_2 + \lambda[p_1 \bar{c}_1 + p_2 \bar{c}_2 - p_1 c_1 - p_2 c_2].$$

   Diferenciamos con respecto a c_1, c_2 y λ. Al hacer esto, obtenemos

$$\frac{\partial L}{\partial c_1} = \frac{0{,}4}{c_1} - \lambda p_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial c_2} = \frac{0{,}6}{c_2} - \lambda p_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 \bar{c}_1 + p_2 \bar{c}_2 - p_1 c_1 - p_2 c_2 = 0.$$

   Combinando las ecuaciones, dado que no es óptimo tener $c_i = 0$,

$$\frac{0{,}4 c_2}{0{,}6 c_1} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{1}$$

   La ecuación 1 corresponde justamente al Teorema Fundamental del Manejo de Riesgos:

$$\frac{\pi_1}{p_1} v'(c_1) = \cdots = \frac{\pi_N}{p_N} v'(c_N) = \lambda.$$

Reemplazando con (1) en la restricción presupuestaria,

$$
\begin{aligned}
p_1\bar{c}_1 + p_2\bar{c}_2 - p_1c_1 - p_2\frac{0,6p_1}{0,4p_2}c_1 = 0 \\
p_1\bar{c}_1 + p_2\bar{c}_2 &= (p_1 + 1,5p_1)c_1 \\
\frac{p_1\bar{c}_1 + p_2\bar{c}_2}{2,5p_1} &= c_1^* \\
\frac{1,5(p_1\bar{c}_1 + p_2\bar{c}_2)}{2,5p_2} &= c_2^*.
\end{aligned}
$$

3. Asumiendo que $\bar{c}_1 = 10$ y $\bar{c}_2 = 6$, y que $p_1 = 2$ y $p_2 = 1$, obtenemos $c_1^* = 5{,}2$ y $c_2^* = 15{,}6$.

Activos

Ejercicio 4. Fernando posee unas tierras en Ica (50 fundos para ser concretos), en los cuales produce pisco. Fernando le compró unos robots (21 robots) de última generación a Cristina que se encargan del proceso de producción. Desafortunadamente, debido al comportamiento de las corrientes marinas, ha habido una alerta de fuertes olas de calor (estas pueden ocurrir con una probabilidad de 0.3). El calor extremo perjudica el funcionamiento de los robots y, en dicho caso, su rendimiento es igual a 3. De no haber calor extremo, el rendimiento es de 20. Fernando leyó las notas de clase de los profesores A. Araujo y P. Klinger, *Introducción a la Economía Dinámica y Mercados Incompletos* y por ende, sabe que se arriesga al solo tener en su posesión a los robots. Por este motivo, Fernando decide adquirir casas con potencial alquiler en Lima (pues el alquiler en Lima no depende de si hay mucho calor o no en Ica). El rendimiento de estos alquileres es el mismo en cada uno de los dos escenarios posibles: 11.5. Por último, sabemos que los precios de los robots que le vende Cristina son iguales a 1 (asumimos una normalización), que los precios de las casas es también igual a 1, y que las preferencias de Fernando vienen representadas por la función de utilidad $v(c) = \sqrt{c}$. Inicialmente Fernando no tiene casa (vive en su trailer). En base a esto, responda los siguientes ítems:

a) Identifique los activos de Fernando, sus dotaciones, respectivos rendimientos, las probabilidades de los estados de la naturaleza, y los precios.

b) Plantee el problema de optimización de Fernando.

c) Plantee las CPO y resuelva el problema.

Solución:

a) Los activos son los robots y las casas. Las dotaciones son $\bar{q}_R = 21$, $\bar{q}_C = 0$. Los rendimientos son $z_{R1} = 3$ con probabilidad 0,3 y $z_{R2} = 20$ con probabilidad 0.7. Los precios son $p_R = p_C = 1$.

b) El problema de optimización que compete a Fernando es

$$\begin{aligned} \text{máx } U^e &= 0{,}3\sqrt{c_1} + 0{,}7\sqrt{c_2} \\ \text{s.a } q_R + q_C &= 21 \\ 3q_R + 11{,}5q_C &= c(1) = c_1 \\ 20q_R + 11{,}5q_C &= c(2) = c_2. \end{aligned}$$

c) Tenemos, de las restricciones, que

$$c_1 + c_2 = 23(q_C + q_R) \implies \frac{c_1 + c_2}{23} = q_R + q_C = 21.$$

Así, $c_1 + c_2 = 483$. Luego, el Lagrangiano del problema es

$$L = 0{,}3\sqrt{c_1} + 0{,}7\sqrt{c_2} + \lambda[483 - c_1 - c_2].$$

Las CPO proveen

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial c_1} &= \frac{0{,}3}{2\sqrt{c_1}} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial c_2} &= \frac{0{,}7}{2\sqrt{c_2}} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 483 - c_1 - c_2 = 0. \end{aligned}$$

Así, se deduce que $\sqrt{c_2/c_1} = 2{,}33$. Finalmente, como $c_2 = (2{,}33)^2 c_1 \simeq 5{,}43c_1$,

$$\begin{aligned} 483 - c_1 - 5{,}43c_1 &= 0 \\ c_1 &= 75{,}12 \\ c_2 &= 407{,}88 \\ 75{,}12 &= 3q_R + 11{,}5q_C \\ 407{,}88 &= 20q_R + 11{,}5q_C \\ \begin{bmatrix} 75{,}12 \\ 407{,}88 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 11{,}5 \\ 20 & 11{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_R \\ q_C \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 11{,}5 \\ 20 & 11{,}5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 75{,}12 \\ 407{,}88 \end{bmatrix} &\simeq \begin{bmatrix} 19{,}57 \\ 1{,}43 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

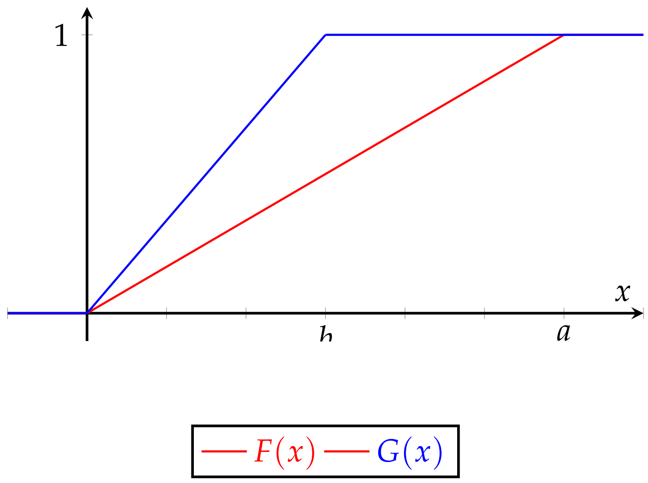
Dominancia estocástica

Ejercicio 5. Suponga que F es la distribución uniforme en el intervalo $[0, a]$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x < 0, \\ \frac{x}{a}, & \text{si } \ 0 \leq x \leq a, \\ 1, & \text{si } \ a < x. \end{cases}$$

De manera similar, suponga que G es la distribución uniforme en el intervalo $[0, b]$. Si $a \geq b$, demuestre que $F \geq_{FOSD} G$.

Solución: simplemente si $a \geq b$, $F(x) \leq G(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.



Ejercicio 6. Considere dos variables aleatorias X e Y definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

- Pruebe que si $X \geq Y$, entonces $F_X \geq_{FOSD} F_Y$. **Sugerencia:** note que

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \subset \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq x\}.$$

- Demuestre que la conversa de la afirmación anterior no es verdadera. **Sugerencia**: considere $\Omega = [0, 1]$, P como la distribución uniforme y $X(\omega) = 1 + \omega$, $Y = 2 - 2\omega$.

1) Es por definición.

$$F_X(x) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \leq \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq x\} = F_Y(x).$$

2) Se cumple que $Y(\omega) > X(\omega)$ para todo $\omega < 1/3$. Sin embargo,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ x - 1, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1, & \text{si } 2 \leq x. \end{cases}$$

y

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2}, & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1, & \text{si } 2 \leq x. \end{cases}$$

Por ende, $F_X(x) \leq F_Y(y)$.

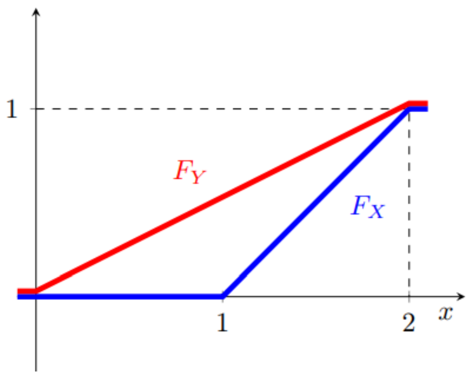


Figura 2: FOSD - from T. Sarver lecture notes (Duke University).

Ejercicio 7. Sean X e Y variables aleatorias con valores reales, y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función creciente. Discuta la veracidad de las siguientes afirmaciones:

1. Si X domina estocásticamente en primer orden a Y, entonces $g(X)$ domina estocásticamente en primer orden a $g(Y)$.

2. Si X domina estocásticamente en segundo orden a Y, entonces $g(X)$ domina estocásticamente en segundo orden a $g(Y)$.

Solución:

1. Verdadero: $\mathbb{P}\{g(X) \leq t\} = \mathbb{P}\{X \leq g^{-1}(t)\} \leq \mathbb{P}\{Y \leq g^{-1}(t)\} = \mathbb{P}\{g(Y) \leq t\}$.

2. Falso: considere $X = 1/2$ y Y con distribución uniforme sobre $[0, 1]$. Entonces,

$$\int_{-\infty}^{t} F_X(s)ds = t - 1/2 \leq \int_{-\infty}^{t} F_Y(s)ds = t^2/2.$$

   Ahora bien, considere $g(t) = t^2$ y $u(t) = t$. Entonces,

$$\mathbb{E}[u(g(Y))] = \mathbb{E}[g(Y)] > g(\mathbb{E}[Y]) = g(X) = \mathbb{E}[u(g(X))].$$

Enfoque Media-Varianza

Repaso de los ejemplos vistos en clase:

Ejercicio 8. Una pregunta de gran interés es si la utilidad esperada U^e depende, en ciertos casos, únicamente de $\mathbb{E}[X] = \mu$ y $\mathbb{E}[X^2] = \sigma^2$ (salvedad de los demás parámetros del modelo). Acá X es una variable aleatoria. Recordemos que

$$U^e = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} p_i u(x_i) & \text{(caso de distribución discreta)} \\ \int_a^b u(x) f(x) dx & \text{(caso de distribución continua)} \end{cases}$$

A continuación, se presentan dos situaciones en las que U^e depende únicamente de μ y σ^2. Una corresponde a una distribución discreta y la otra a una distribución continua. Considere

$$u(x) = k_0 + k_1 x - \frac{k_2}{2} x^2, \; k_1, k_2 > 0, \; k_0 \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

1. Demuestre cómo la función de utilidad cuadrática dada por (2) da lugar a una expresión de U^e que depende únicamente de la media μ y la varianza σ^2 de la distribución discreta.

2. Explique la relación entre la derivada de la media $\frac{d\mu}{d\sigma}$ y la aversión al riesgo. **Sugerencia:** pruebe que

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{\sigma k_2}{k_1 - k_2 \mu}, \; k_1 - k_2 \mu \neq 0.$$

3. Para el caso continuo, demuestre que

$$\begin{aligned} U^e &= -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu+a\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{-2\mu a \sigma^2 + a^2\sigma^4}{2\sigma^2}} dx \\ &= -e^{\frac{a^2\sigma^2 - 2\mu a}{2}}. \end{aligned}$$

   cuando la función de utilidad es $u(x) = -e^{-ax}$ y la distribución $f(x)$ es una normal con media μ y varianza σ^2.

Solución:

$$\begin{aligned} U^e &= \sum_{i=1}^{N} p_i u(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N} p_i \left[u(\mu) + u'(\mu)(x_i - \mu) + \frac{u''(\mu)}{2!}(x_i - \mu)^2 \right] \\ &= u(\mu) + \frac{u''(\mu)}{2} \sigma^2 \\ &= k_0 + k_1 \mu - \frac{k_2}{2}(\mu^2 + \sigma^2). \end{aligned}$$

También notamos, tomando diferenciales ($0 = k_1 d\mu - k_2\mu d\mu - k_2 d\sigma$), que

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{\sigma k_2}{k_1 - k_2\mu},$$

lo que implica que los aumentos en σ generan aumentos más que proporcionales en μ. Esto es una consecuencia de la aversión al riesgo. Pasando al contexto continuo,

$$U^e = \int_{\mathbb{R}} u(x)f(x)dx,\ u(x) = -e^{-ax},\ a > 0,\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} U^e &= \int_{\mathbb{R}} \frac{-e^{-ax}}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{2\sigma^2ax+x^2-2x\mu+\mu^2}{2\sigma^2}}dx. \end{aligned}$$

Reordenando,

$$\begin{aligned} x^2 + \mu^2 + 2(\sigma^2 a - \mu) &= x^2 - 2(\mu - \sigma^2 a) + \mu^2 \\ &= (x - \mu + a\sigma^2)^2 + 2\mu a\sigma^2 - a^2\sigma^4, \end{aligned}$$

concluimos que

$$\begin{aligned} U^e &= -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu+a\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}e^{\frac{-2\mu a\sigma^2+a^2\sigma^4}{2\sigma^2}}dx \\ &= -e^{\frac{a^2\sigma^2-2\mu a}{2}}. \end{aligned}$$

Para estudiar el comportamiento en μ y σ^2, aplique el logaritmo y divida por a:

$$\mu - 0{,}5a\sigma^2.$$

Capital Asset Pricing Model

Ejercicio 9. Luis es un exalumno de finanzas. Ahora trabajar en una mesa de inversiones y su jefe le ha encargado que encuentre el retorno esperado de la acción de la empresa Cruzada Corp. Su jefe le dijo que asuma que se cumple el CAPM. Luis baja la información de retornos de Bloomberg y encuentra que el beta de la empresa respecto al premio por riesgo de mercado (equity price) es de 1.8. Por otro lado, el retorno esperado del portafolio es de 18 %. Asimismo, la tasa libre de riesgo es de 3 %. Con esta información y con la indicación del jefe de Luis, determine cuál es el retorno esperado de la acción Cruzada Corp.

Solución:

$$\mathbb{E}[R] = R_f + \beta[\mathbb{E}[R_m] - R_f] = 0{,}03 + 1{,}8(0{,}18 - 0{,}03) = 0{,}3.$$

Ejercicio 10. Considere un inversor que está construyendo un portafolio compuesto por k activos. La varianza del retorno del portafolio está dada por $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i\right)$, donde α_i es la proporción invertida en el activo i, A_i es el retorno del activo i, y Σ es la matriz de covarianza de los retornos de los activos. Plantee y resuelva el problema de minimización del riesgo del portafolio. Recuerde que el retorno esperado es igual μ_0 y que la suma de las proporciones invertidas es igual a 1. Use el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar las proporciones óptimas α_i.

Solución: el problema es

$$\begin{aligned} \min_{\sum_k \alpha_k = 1} \ & \mathrm{Var}(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_k A_k) \\ \text{s.a } & \alpha_1 \mu_1 + \cdots + \alpha_k \mu_k = \mu_0. \end{aligned}$$

El Lagrangiano asociado es

$$L(\alpha, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2}\alpha^T \Sigma \alpha + \lambda_1(\alpha^T \mu - \mu_0) + \lambda_2 \left(\sum_k \alpha_k - 1 \right).$$

Las CPO proveen

$$\begin{aligned} \Sigma\alpha - \lambda_1 \mu - \lambda_2 \mathbf{1} &= \mathbf{0} \\ \alpha^T \mu &= \mu_0 \\ \sum_k \alpha_k &= 1. \end{aligned}$$

Así,

$$\alpha^* = \lambda_1 \Sigma^{-1} \mu + \lambda_2 \Sigma^{-1} \mathbf{1}$$

donde

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^T \Sigma^{-1} \mu & \mu^T \Sigma^{-1} \mathbf{1} \\ \mu^T \Sigma^{-1} \mathbf{1} & \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$