PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Tarea del Examen Parcial
Primer semestre 2024

Indicaciones generales:

- Materiales o equipos a utilizar: todo tipo de apuntes.
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**
- **Se tendrá en cuenta la presentación.**
- Entregar en Paideia hasta el Domingo 2 de junio a las 23h00.

Puntaje total: 20 puntos (peso de 0.35 en la nota del Examen Parcial).

Cuestionario (basado en la lectura «Partial Equilibrium and Two-sided matching model with transferable utility» del profesor Federico Echenique).

Pregunta 1. Equilibrio parcial. 12 puntos.

1.1 Sea $\succeq$ una relación de preferencias racional y continua sobre $\mathbb{R}^L_+$ tal que existe una función de utilidad de la forma $u(x_1, ..., x_L) = x_1 + \phi(x_2, ..., x_L)$ que la representa. Pruebe que $\succeq$ es cuasi lineal. Nota: revise la Definición 1.

1.2 Considere el problema de maximización del individuo i en el contexto del equilibrio parcial

$$\max_{(x,m)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \underbrace{v_i(x) + m}_{u_i(x,m)}$$
$$\text{s. a. } px + m \leq I.$$

Asuma que v_i' posee inversa y que $x_i^*(p) > 0$. Demuestre que $x_i^*(p) = (v_i')^{-1}(p)$. Note que estamos denotando el ingreso por I y no W (con respecto a la notación usada en el texto original).

1.3 Demuestre que

$$v_i(x_i^*(p)) + m^*(p, I) = \int_p^\infty x_i^*(s)ds + I.$$

Para esto, **puede tener en cuenta que** $x_i^* > 0$, que $\lim_{p\to\infty} px_i^*(p) \to 0$ y que $v_i(0) = 0$. Sin embargo, solo es necesario tener presente que $v \in C^2$ y que $x_i^*(p) = (v_i')^{-1}(p)$.

1.4 En relación al problema de optimización, que consiste en encontar las asignaciones Pareto Óptimas (es decir, las soluciones al siguiente problema de optimización[1])

$$\mathcal{P}_O : \begin{cases} \max_{x_1,\dots,x_N,m_1,\dots,m_N} & v_1(x_1) + m_1 \\ \text{s. a.} & v_i(x_i) + m_i \geq \overline{u}_i, \ i = 2, \dots, N \\ & \sum_{i=1}^N x_i \leq \sum_{i=1}^N \omega_{i,x} \\ & \sum_{i=1}^N m_i \leq \sum_{i=1}^N \omega_{i,m} \\ & x_i \geq 0. \end{cases}$$

explique la formulación del problema. Luego, demuestre que resolver $\mathcal{P}_O$ es equivalente a resolver

$$\max_{x_1,\dots,x_n \geq 0} \left\{ \sum_{i=1}^N v_i(x_i) \right\}; \text{ s.a.: } : \sum_{i=1}^N x_i \leq \sum_{i=1}^N \omega_{i,x}.$$

<u>Nota:</u> no tiene que resolver el problema. Por otro lado, $\omega_{i,x}$ y $\omega_{i,m}$ corresponden a dotaciones, que son simplemente cantidades del bien x (m respectivamente) que el individuo i posee inicialmente.

1.5 En relación al problema de optimización que involucra un sector de producción y permite encontrar asignaciones Pareto óptimas:

$$\mathcal{P}_{O_1} : \begin{cases} \max_{x_1,\dots,x_N,m_1,\dots,m_N} & v_1(x_1) + m_1 \\ \text{s. a. :} & v_i(x_i) + m_i \geq \overline{u}_i, \ i = 2, \dots, N \\ & \sum_{i=1}^N x_i \leq \sum_{i=1}^N \omega_{i,x} + x^f \\ & \sum_{i=1}^N m_i \leq \sum_{i=1}^N \omega_{i,m} - m^f \\ & (x^f, -m^f) \in Y. \end{cases}$$

demuestre que cuando $\sum_{i=1}^N \omega_{i,x} = 0$, resolver $\mathcal{P}_{O_1}$ es equivalente a resolver

$$\max_{x_1,\dots,x_N \geq 0} \left\{ \sum_{i=1}^N v_i(x_i) - c\left(\sum_{i=1}^N x_i \right) \right\}.$$

Explique además la formulación de $\mathcal{P}_{O_1}$. En particular, determine el conjunto Y y cómo se distingue este problema de optimización de $\mathcal{P}_O$.

1.6 Explique por qué la condición de eficiencia de aprovisionamiento de un bien público está dada por

$$\max_{x \geq 0} \left\{ \sum_{i=1}^N v_i(x) - c(x) \right\}. \tag{1}$$

Finalmente, demuestre y explique por qué en el equilibrio Lindahl, la firma optimiza produciendo x^* (del bien público) y se lo vende al consumidor i al precio

$$p_i = (v_i')^{-1}(x^*).$$

[1] Más adelante en el curso se estudiarán las asignaciones Pareto óptimas en el contexto del Equilibrio

Pregunta 2. Emparejamiento bilateral con transferencias de utilidad.
8 puntos.

2.1 Provea la definición de matching en el contexto del emparejamiento bilateral con transferencias de utilidad.

2.2 Explique la formulación del problema de emparejamiento

$$\begin{cases} \max_{x_{ij}} & \sum_{i\in B}\sum_{j\in S}\alpha_{ij}x_{ij} \\ \text{s. a. :} & x_{ij}\geq 0 \\ & \sum_{j\in S}x_{ij}\leq 1, \ \forall\ i\in B \\ & \sum_{i\in B}x_{ij}\leq 1, \ \forall\ j\in S. \end{cases} \tag{2}$$

En particular, explique con claridad el significado de las restricciones y la función objetivo.

2.3 Demuestre que el dual del problema[2] de optimización (2) es

$$\begin{cases} \min_{(u_i,v_j)} & \sum_{i\in B}u_i+\sum_{j\in S}v_j \\ \text{s. a. :} & u_i+v_j\geq \alpha_{ij} \\ & u_i,v_j\geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

2.4 Demuestre que siempre existe una solución al problema de optimización (2).

Definición 1. Preferencia cuasi lineal. Una relación de preferencias sobre $X = (-\infty,\infty)\times\mathbb{R}_+^{L-1}$ es cuasi lineal con respecto al bien 1 (conocido como bien numerario) si

a) $\mathbf{x}\sim\mathbf{y}$, entonces $\mathbf{x}+\alpha\mathbf{e}_1\sim\mathbf{y}+\alpha\mathbf{e}_1$ con $\mathbf{e}_1=(1,0,\cdots,0)$ y $\alpha\in\mathbb{R}$.

b) $\mathbf{x}+\alpha\mathbf{e}_1\succ\mathbf{x}$, $\forall\ \mathbf{x}\in X$ y $\alpha>0$.

General.

[2]Revise la Sección Cono Convexo y Lema de Farkas, apartado sobre programación lineal del libro texto ALOECO y la página 60 del libro Linear Programming de Robert Vanderbei publicado en Springer.