

Pontificia Universidad Católica del Perú

Especialidad de Finanzas

21 de noviembre de 2024

Práctica Dirigida 7 FIN 203

Profesor: José Gallardo

Jefes de práctica: Marcelo Gallardo y Karen Montoya

Juegos Dinámicos

Juegos dinámicos con información perfecta

Ejercicio 1. Considere el siguiente juego dinámico de dos jugadores:

1. El jugador 1 escoge L o R . Si escoge L , el juego termina con pagos $(2, 0)$.
2. Si el jugador 1 escoge R , entonces el jugador 2 observa esta elección y escoge entre L' o R' . Si el jugador 2 escoge L' , el juego termina con pagos $(1, 1)$.
3. Si el jugador 2 escoge R' , el jugador 1 vuelve a tomar una decisión, habiendo observado la secuencia de elecciones previas. Puede escoger entre L'' , que termina el juego con pagos $(3, 0)$, o R'' , que termina el juego con pagos $(0, 2)$.

Responda a las siguientes preguntas:

- (a) Describa el juego en forma extensiva.
- (b) Resuelva el juego mediante retroinducción, identificando las estrategias óptimas para cada jugador y los resultados asociados a cada secuencia de decisiones.

Ejercicio 2. En 1931, Stackelberg propuso un modelo de duopolio en el cual una firma dominante (líder) mueve primero, y una firma subordinada (seguidora) mueve después. Plantee este juego dinámico y calcule las cantidades producidas por cada firma q_1^*, q_2^* , así los beneficios respectivos π_1^* y π_2^* . Interprete.

Juegos dinámicos con información imperfecta

Ejercicio 3. Considere un modelo de competencia internacional entre dos países, cada uno con un gobierno que decide un impuesto de exportación, una firma que produce tanto para el mercado local como para exportar, y consumidores que compran en el mercado local o en el extranjero. Si la cantidad total producida en el país i es Q_i , el precio que limpia el mercado es $P_i(Q_i) = a - Q_i$, donde $Q_i = h_i + e_i$, con h_i como producción para el consumo local y e_i como producción para exportación. Las firmas enfrentan un costo marginal constante c_i y no tienen costos fijos, de modo que $C_i(h_i, e_i) = c(h_i + e_i)$. Además, si una firma i exporta e_i a otro país j , debe pagar un impuesto de exportación de $t_j e_i$ al gobierno del país j . En el primer periodo, los gobiernos deciden simultáneamente las tarifas t_1 y t_2 . Posteriormente, las firmas observan los impuestos y escogen sus niveles de producción para el mercado local y para exportación, (h_i, e_i) .

1. Formule el problema de maximización de cada firma y del bienestar de cada gobierno en términos de sus variables de decisión, impuestos y producción.
2. Encuentre el **equilibrio perfecto en sub-juegos**.

Ejercicio 4. Considere dos trabajadores y su jefe. El trabajador i produce un output $y_i = e_i + \epsilon_i$, donde e_i es el esfuerzo y ϵ_i un ruido. La producción se realiza de la manera siguiente. Primero, los trabajadores escogen simultáneamente un nivel de esfuerzo $e_i \geq 0$. Luego, los ruidos ϵ_1, ϵ_2 se escogen aleatoriamente según $\epsilon \sim F$ con densidad $f(\epsilon)$, y $\mathbb{E}[\epsilon] = 0$. Luego, los outputs se observan pero no los esfuerzos. El salario de los trabajadores depende de los outputs pero no directamente del esfuerzo. El jefe le otorga un salario w_H al trabajador con mayor output y w_L al de menor output. El pago a un trabajador con salario w y ejerciendo un esfuerzo e , es $u(w, e) = w - g(e)$ con $g', g'' > 0$ (creciente y convexa). Por otro lado, el pago del jefe es $y_1 + y_2 - w_H - w_L$.

1. En el contexto de un juego dinámico con información imperfecta de dos etapas, identifique a los jugadores y las variables de elección.
2. Especifique las condiciones que deben cumplir e^* y $w_H^* - w_L^*$.

Juegos repetidos

Ejercicio 5. Considere el dilema del prisionero repetido con una tasa de descuento $\delta = 0,9$. Demuestre si la cooperación mutua puede sostenerse en equilibrio perfecto en subjuegos si ambos jugadores usan la estrategia de "ojo por ojo". En esta estrategia, cada jugador coopera en la primera ronda y, en las rondas siguientes, cada uno juega la misma acción que su oponente en la ronda anterior.

Ejercicio 6. Considere el juego de precios de dos empresas que pueden fijar un precio alto (H) o bajo (L) en cada ronda, con una tasa de descuento $\delta = 0,8$. La matriz de pagos en cada ronda es:

	H	L
H	(4, 4)	(0, 6)
L	(6, 0)	(2, 2)

Determine si fijar un precio alto en todas las rondas puede formar un equilibrio perfecto en subjuegos y justifique matemáticamente su respuesta. Suponga que ambas empresas se castigarán estableciendo un precio bajo en la siguiente ronda si alguna se desvía de la estrategia de fijar precios altos.

Ejercicio 7. Alejandro está alarmado porque Sergio, su socio en la colusión de un juego repetido, es un hombre de avanzada edad y no goza de buena salud. Sergio lo tranquiliza y le señala: *No tienes de qué preocuparte. Cuando yo no esté, mi hijo Roberto continuará con nuestro convenio. Después de todo, las condiciones del juego seguirán siendo las mismas.* ¿Puede Alejandro estar tranquilo de que el acuerdo se mantendrá?

Ejercicio 8. Explique por qué en el Dilema del Prisionero repetido dos veces, la estrategia del gatillo que usa *no confesar* como estrategia de cooperación no es un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Luego, generalice al caso $T < \infty$.

Ejercicio 9. Si el siguiente juego estático se juega dos veces:

	I	D
A	(4, 4)	(1, 1)
B	(3, 2)	(1, 2)

- Muestre tres perfiles de estrategias que sean Equilibrios de Nash Perfectos en Subjuegos (ENPS).
- Muestre que el siguiente perfil también es un ENPS:
 - σ_1 : Juega *B* en el primer periodo. Luego, juega *A* en el segundo periodo si el resultado del primer periodo ha sido (B, I) ; de otro modo, juega *B*.
 - σ_2 : Juega *I* en el primer periodo. Luego, juega *I* en el segundo periodo si el resultado del primer periodo ha sido (B, I) ; de otro modo, juega *D*.

Ejercicio 10. Considere un juego estático bipersonal que tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras, EN1 y EN2, cuyos pagos son tales que $u(\text{EN1}) > u(\text{EN2})$, donde las utilidades son vectores $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Si dicho juego se repite infinitas veces, muestre que una estrategia de gatillo será más fácil de sostener (i.e., que requerirá una menor tasa de descuento) en un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, si el castigo por desviarse de cualquier acuerdo colusivo es la acción EN2 en lugar de EN1. Considere un juego con dos estrategias puras para cada jugador, *C* y *D*.

Ejercicio 11. Considere el siguiente juego:

	B1	B2	B3
A1	(10, 10)	(2, 12)	(0, 13)
A2	(12, 2)	(5, 5)	(0, 0)
A3	(13, 0)	(0, 0)	(1, 1)

- a) Halle todos los equilibrios de Nash en estrategias puras del juego estático. Calcule los pagos de ambos jugadores en esos equilibrios.
- b) Ahora, repetimos el juego una vez. Antes de empezar la segunda ronda, los jugadores observan las acciones elegidas por el otro en la primera ronda. Halle todos los Equilibrios de Nash Perfectos en Subjuegos en estrategias puras del juego repetido. Asuma que no hay descuento ($\delta = 1$).

Ejercicio 12. Cristina y Luis son los únicos productores de camotes en la región. Si se unen y venden toda la producción en el mismo puesto, pueden actuar como un monopolio y obtener ganancias de USD 7 cada uno. Sin embargo, si solo uno de ellos se presenta en el mercado, el precio del camote sube, de modo que el productor obtiene una ganancia de USD 12. Cada uno va al mercado en su propia camioneta, por lo que pueden contratar a un agente para que corte los frenos de la camioneta del otro, por un pago de USD 2. El daño a los frenos equivale a una pérdida de USD 5.

- a) Escriba el juego en forma normal.
- b) Halle las condiciones bajo las cuales los jugadores cooperarán si el juego se repite infinitas veces.
- c) Proponga una estrategia que sea un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Demuéstrelo.