PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Cuarta práctica (tipo a)
Primer semestre 2024

Indicaciones generales:

- Duración: 110 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: con apuntes de clase.
- No está permitido el uso de ningún material o equipo electrónico adicional al indicado (no celulares, se aceptan tablets).
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**

Puntaje total: 20 puntos.

Cuestionario:

Pregunta 1 (6 puntos)

1.1) Considere una empresa que produce un bien utilizando un conjunto de insumos representados por el vector $\mathbf{x}$. La función de beneficios de la empresa está dada por $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{w}, p) = pf(\mathbf{x}) - \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$, donde $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n_{++}$ representa el vector de precios de los insumos y $p > 0$ el precio al que se vende el bien que produce. Suponga que f es clase C^1. Demuestre que, para $\mathbf{x}^* > \mathbf{0}$

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial w_i} = -x_i^*, \text{ donde } \pi^* = \pi(\mathbf{x}^*, \overline{\mathbf{w}}, \overline{p}).$$

Nota: a esto se le conoce como el Lema de Hotelling. Use finalmente este resultado para encontrar

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial w_2}$$

para el caso en el cual la tecnología de la firma es $x_1^{1/3} x_2^{1/3}$.

1.2) Un individuo consume dos bienes x_1 y x_2, cuyos precios son $p_1, p_2 > 0$. El individuo minimiza el gasto considerando que quiere una utilidad por lo menos igual a $\overline{u} > 0$. Su función de utilidad es clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ y tal que, $u(\mathbf{0}) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} > 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} > 0$. Asuma que no es óptimo $x_i = 0$. Halle mediante estática comparativa los siguientes efectos (si es que son positivos, negativos o no puede concluir) de

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} \text{ y } \frac{\partial x_1}{\partial p_2}.$$

Interprete.

Pregunta 2 (8 puntos)

2.1) Proponga una relación de preferencias (sobre $\mathbb{R}^L_+$) que no sea convexa.

2.2) Proponga una relación binaria que no sea transitiva. Puede proponer la relación sobre cualquier conjunto.

2.3) Proponga una relación de preferencias (completa y transitiva) que no sea continua.

2.4) Proponga una función de utilidad que represente una relación de preferencias localmente saciada en $X = \mathbb{R}^L_+$.

2.5) Provea la definición de óptimo de Pareto en el contexto de una economía de intercambio puro.

2.6) Provea la definición de equilibrio Walrasiano en el contexto de una economía de intercambio puro.

2.7) Pruebe que si una relación de preferencias es monótona, entonces es localmente no saciada. ¿Vale la conversa?

2.8) En una economía de intercambio puro donde todas las preferencias $\succeq_i$ son convexas, demuestre que

$$S = \sum_{i=1}^{I} S_i(\mathbf{x}_i^*), \;\; S_i(\mathbf{x}_i^*) = \{\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^L_+ : \; \mathbf{z}_i \succ_i \mathbf{x}_i^*\}$$

es un conjunto convexo. ¿En la demostración de qué teorema se usa este conjunto?

Pregunta 3 (6 puntos).

A una solución al problema de minimización del gasto

$$\mathcal{P}_e : \begin{cases} \min & \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \\ \text{s.t.} & u(\mathbf{x}) \geq \overline{u} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

se le conoce como demanda Hicksiana $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \overline{u})$, también denotada $h(\mathbf{p}, \overline{u})$. Suponga que la restricción $u(\mathbf{x}) \geq \overline{u}$ se da con igualdad y que $h(\mathbf{p}, \overline{u}) \in \mathbb{R}^L_{++}$.

a) Demuestre el Lema de Shepard: si $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua y diferenciable que representa una relación de preferencia fuertemente monótona y estrictamente convexa $\succeq$, definida en $X = \mathbb{R}^L_+$, entonces, para todo $\mathbf{p}$ y $\overline{u}$, la demanda hicksiana $h(\mathbf{p}, \overline{u})$ y la función de gasto $e(\mathbf{p}, \overline{u})$ satisfacen la siguiente relación:

$$h(\mathbf{p}, \overline{u}) = \nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p}, \overline{u}).$$

b) Defina la variación equivalente y la variación compensada de la siguiente forma:

$$EV(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, w) = e(\mathbf{p}^0, u^1) - e(\mathbf{p}^0, u^0) = e(\mathbf{p}^0, u^1) - w$$
$$CV(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, w) = e(\mathbf{p}^1, u^1) - e(\mathbf{p}^1, u^0) = w - e(\mathbf{p}^1, u^0),$$

donde w es el ingreso de un individuo, $\mathbf{p}^0$ los precios en un tiempo $t = 0$, $\mathbf{p}^1$ los precios en un tiempo $t = 1$, $\overline{u}$ un nivel de utilidad y e la función de gastos. Pruebe, bajo las condiciones del inciso (a), que si únicamente el precio del bien 1, p_1, cambia, entonces

$$EV(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, w) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(p_1, \mathbf{p}_{-1}, u^1) dp_1 \tag{1}$$

y

$$CV(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, w) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(p_1, \mathbf{p}_{-1}, u^0) dp_1. \tag{2}$$

¿Qué representan la variación equivalente EV y la variación compensada VC?

c) Suponga que $u(x_1, ..., x_n)$ es cuasi-lineal con respecto a x_1. Fije $p_1 = 1$. Demuestre que

$$CV(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, w) = EV(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, w), \; \forall \; (\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, w). \tag{3}$$

<u>Sugerencia:</u> demuestre que cuando las preferencias son cuasi lineales y $p_1 = 1$, se tiene que $e(\mathbf{p}, \overline{u}) = \widetilde{e}(p_2, ...p_L) + \overline{u}$. Use esto para obtener (3).

Profesor del curso: Jorge Chávez.

San Miguel, 21 de junio del 2024