

Congestión y penalización en transporte óptimo

Marcelo Gallardo

PUCP

12 de agosto de 2025

Introducción

El modelo

Algoritmo

Estática comparativa

Infinitos tipos

Referencias

Introducción

- ▶ Matching [Gale and Shapley, 1962, Roth and Sotomayor, 1990, Echenique and Yenmez, 2015, Echenique et al., 2023]
- ▶ Transporte óptimo [Villani, 2009, Carlier et al., 2020, Galichon, 2016, Galichon, 2021, Dupuy and Galichon, 2022].
- ▶ Dos grupos: X e Y , matching/asignación π .
- ▶ Caso discreto $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_L\}$, $I = \{1, \dots, N\}$ y $J = \{1, \dots, L\}$ los índices.

$$\min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^L c_{ij} \pi_{ij}$$

$$\Pi(\mu, \nu) = \left\{ \pi_{ij} \geq 0 : \sum_{j=1}^L \pi_{ij} = \mu_i \ \forall i \in I, \quad \sum_{i=1}^N \pi_{ij} = \nu_j \ \forall j \in J \right\}.$$

Preliminares

Definición

Dadas $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ y $B \in \mathcal{M}_{p \times q}$,

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{mp \times nq}$$

Lema

Se cumple que $(A \otimes B)^k = A^k \otimes B^k$ y $\mathbb{1}_{L \times L}^k = L^{k-1} \mathbb{1}_{L \times L}$.

Lema

Si A y B son matrices cuadradas de tamaños respectivos n y q . Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ los autovalores de A y μ_1, \dots, μ_q los de B . Entonces, los autovalores de $A \otimes B$ son:

$$\lambda_i \mu_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, q.$$

Lema

Desigualdad de Minkowski para determinantes, ver [Zhan, 2005] o [Artstein-Avidan et al., 2015].

Congestión y penalización

- Penalización y congestión (MAE-CON 2).
- Caso discreto.

$$\mathcal{P}_{CP} : \min_{\pi_{ij} \geq 0} \underbrace{\alpha \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^L \varphi(\pi_{ij}; \theta_{ij})}_{\text{Costo directo del matching}} + \underbrace{(1 - \alpha) \left[\sum_{i=1}^N \epsilon_i \left(\sum_{j=1}^L \pi_{ij} - \mu_i \right)^2 + \sum_{j=1}^L \delta_j \left(\sum_{i=1}^N \pi_{ij} - \nu_j \right)^2 \right]}_{\text{Costos de los objetivos sociales}}$$
$$=: F(\pi; \theta, \alpha, \epsilon, \delta, \mu, \nu) \quad (1)$$

donde $\epsilon_1, \dots, \epsilon_N$, $\delta_1, \dots, \delta_L$ y μ_1, \dots, μ_N , ν_1, \dots, ν_L son todos no negativos, y

$$\varphi(\pi_{ij}; \theta_{ij}) = d_{ij} + c_{ij}\pi_{ij} + a_{ij}\pi_{ij}^2. \quad (2)$$

Interpretación y propiedades

- ▶ Excesos de demanda u oferta.
- ▶ Mayor flexibilidad: α, ϵ, δ .
- ▶ Más sencillez en la resolución (CPO).
- ▶ **Nota:** voy a tratar de manera indistinta $\mathcal{M}_{N \times L}$ y \mathbb{R}^{NL} usando el isomorfismo (vectorizando por filas no columnas).
- ▶ Existencia y unicidad de la solución.
- ▶ Solución en $(F$ coerciva):

$$\Omega = [0, R]^{NL}, \text{ with } R = N \max_{1 \leq i \leq N} \{\mu_i\} + L \max_{1 \leq j \leq L} \{\nu_j\}.$$

- ▶ Optimización sobre \mathbb{R}_+^{NL} : Existen cotas de proximidad entre soluciones enteras y continuas para programas cuadráticos convexos separables con restricciones lineales [Hochbaum and Shanthikumar, 1990], [Granot and Skorin-Kapov, 1990].

Condiciones de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \pi_{ij}} = & \frac{1}{2} \left(\varphi'(\pi_{ij}^*; \theta_{ij}) + 2\epsilon_i \left(\sum_{\ell=1}^L \pi_{i\ell}^* - \mu_i \right) \right. \\ & \left. + 2\delta_j \left(\sum_{k=1}^N \pi_{kj}^* - \nu_j \right) - \gamma_{ij}^* \right) = 0, \quad \forall (i, j) \in I \times J. \end{aligned}$$

- ▶ γ_{ij} : multiplicador asociado a la condición de no negatividad.
- ▶ En el caso $\gamma_{ij}^* = 0$, se cumple que $\nabla F(\pi^*) = 0$.
- ▶ Esto implica $A\pi^* = b$, donde:

$$\begin{aligned} A = & \underbrace{\text{Diag}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{NL})}_D + \underbrace{\text{Diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N) \otimes \mathbf{1}_{L \times L}}_E \\ & + \underbrace{\mathbf{1}_{N \times N} \otimes \text{Diag}(\delta_1, \dots, \delta_L)}_F, \\ b = & \left[\epsilon_1 \mu_1 + \delta_1 \nu_1 - \frac{c_{11}}{2}, \dots, \epsilon_N \mu_N + \delta_L \nu_L - \frac{c_{NL}}{2} \right]^T. \end{aligned}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{12} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & a_{NL} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \epsilon_N \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \cdots & & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \delta_L \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo $N = L = 2$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} + \epsilon_1 + \delta_1 & \epsilon_1 & \delta_1 & 0 \\ \epsilon_1 & a_{12} + \epsilon_1 + \delta_2 & 0 & \delta_2 \\ \delta_1 & 0 & a_{21} + \epsilon_2 + \delta_1 & \epsilon_2 \\ 0 & \delta_2 & \epsilon_2 & a_{22} + \epsilon_2 + \delta_2 \end{bmatrix}$$

Resultados

- ▶ A invertible: $\det(A) \geq \det(D + E) + \det(F) \geq \det(D) > 0$.
- ▶ Condiciones sobre los parámetros $\implies A^{-1}$ aproximada vía la serie Neumann.
- ▶ Algoritmo $O((N + L)(NL)^2)$ para computar $A^{-1} \implies \pi^*$ (para el caso considerado) usando Sherman-Morrison.
- ▶ Smooth-comparative statics aproximado $\partial\pi_{ij}/\partial\theta_{k\ell}$.
- ▶ Extensión a tipos infinitos.

Lema

El determinante de A es estrictamente positivo si todos los parámetros son estrictamente positivos.

Proposición

Supóngase que $a_{ij} > 0$ y que:

$$\max_i \{\epsilon_i\} \cdot L + \max_j \{\delta_j\} \cdot N < \min_{(i,j)} \{a_{ij}\}.$$

Entonces,

$$A^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (D^{-1}X)^k \right) D^{-1}.$$

Corolario

Definiendo $\pi_n = \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k (D^{-1}X)^k \right) D^{-1}b$, para

$$n \geq N_\epsilon = \max \left\{ 1, \left\lceil \left| \log_{\|D^{-1}X\|_\sigma} \left(\frac{\epsilon (1 - \|D^{-1}X\|_\sigma)}{\sqrt{NL} \|D^{-1}b\|_\infty} \right) \right| \right\rceil + 1 \right\},$$

$$\|\pi_n - \pi^*\|_\infty < \epsilon.$$

Corolario

Supóngase que $\delta_j = 0$ para todo j , y que $D = \beta I$ con $\beta > 0$. Entonces,

$$A^{-1} = \frac{I}{\beta} + \frac{1}{\beta} \text{Diag} \left(-\frac{\epsilon_1}{\beta + L\epsilon_1}, \dots, -\frac{\epsilon_N}{\beta + L\epsilon_N} \right) \otimes \mathbf{1}_{L \times L}.$$

y

$$\pi_{ij}^* = \frac{b_{ij}}{\beta} - \sum_{\ell=1}^L \frac{b_{i\ell} \epsilon_i}{\beta^2 + L\epsilon_i \beta}.$$

Corolario

Sean $a_{ij} = \rho$ y $\epsilon_i = \delta_j = \zeta$ para todo (i, j) , con $\rho > 2NL\zeta > 0$. Entonces,

$$\pi_{ij}^* \leq NL \cdot \max\{|C_1|, C_2\} \cdot \max_{i,j} |\epsilon_i \mu_i + \delta_j \nu_j - \frac{c_{ij}}{2}|.$$

Idea de la prueba

- ▶ De $A = D + E + F = D + X$, tenemos
 $A^{-1} = (D + X)^{-1} = (I - (-1)D^{-1}X)^{-1}D^{-1}$.
- ▶ $\forall \lambda \in \sigma(D^{-1}X)$, $\lambda \leq \max_{i,j} \{1/a_{ij}\} \cdot (\lambda_{\max}^E + \lambda_{\max}^F)$, donde
 $\lambda_{\max}^E = \max_i \{\epsilon_i\} \cdot L$ y $\lambda_{\max}^F = \max_j \{\delta_j\} \cdot N$.
- ▶ Por ende, $\|D^{-1}X\|_{\sigma} < 1$. Así:
 $(I - (-1)D^{-1}X)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (D^{-1}X)^k$.

En el caso sencillo:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{I}{\beta} + \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{\beta} \right)^k (\text{Diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N) \otimes \mathbf{1}_{L \times L})^k \right] D^{-1} \\ &= \frac{I}{\beta} + \frac{1}{\beta L} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{L}{\beta} \right)^k (\text{Diag}(\epsilon_1^k, \dots, \epsilon_N^k) \otimes \mathbf{1}_{L \times L}) \\ &= \frac{I}{\beta} + \frac{1}{\beta L} \text{Diag} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{L\epsilon_1}{\beta} \right)^k, \dots, \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{L\epsilon_N}{\beta} \right)^k \right) \otimes \mathbf{1}_{L \times L} \\ &= \frac{I}{\beta} + \frac{1}{\beta} \text{Diag} \left(-\frac{\epsilon_1}{\beta + L\epsilon_1}, \dots, -\frac{\epsilon_N}{\beta + L\epsilon_N} \right) \otimes \mathbf{1}_{L \times L}. \end{aligned}$$

Algoritmo

Primero, escribamos

$$A = \text{Diag}(a_{11}, \dots, a_{NL}) + \sum_{i=1}^N \left(\epsilon_i^{1/2} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{1}_{L \times 1} \right) \left(\epsilon_i^{1/2} \mathbf{e}_i^T \otimes \mathbf{1}_{1 \times L} \right) \quad (3)$$
$$+ \sum_{j=1}^L \left(\delta_j^{1/2} \mathbf{1}_{N \times 1} \otimes \mathbf{e}_j \right) \left(\delta_j^{1/2} \mathbf{1}_{1 \times N} \otimes \mathbf{e}_j^T \right).$$

- ▶ Supongamos que ya conocemos la inversa de una matriz A^{-1} .
- ▶ Recibe un cambio pequeño: una actualización de rango 1 de la forma $A + uv^T$.
- ▶ ¿Debemos volver a invertir toda la matriz? ¡No! Usemos Sherman–Morrison.

Sherman–Morrison

Sean:

- ▶ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: matriz invertible,
- ▶ $u, v \in \mathbb{R}^n$: vectores columna,
- ▶ $uv^\top = [v_1 u \ \cdots \ v_n u]$: producto exterior (rango 1).

Si $1 + v^\top A^{-1} u \neq 0$, entonces:

$$(A + uv^\top)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^\top A^{-1}}{1 + v^\top A^{-1}u}$$

Los siguientes términos son **actualizaciones de rango 1**:

$$\epsilon_i^{1/2} e_i \otimes \mathbf{1}_{L \times 1} \cdot \epsilon_i^{1/2} e_i^\top \otimes \mathbf{1}_{1 \times L} \quad \text{y} \quad \delta_j^{1/2} \mathbf{1}_{N \times 1} \otimes e_j \cdot \delta_j^{1/2} \mathbf{1}_{1 \times N} \otimes e_j^\top.$$

Usando que $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$:

$$\epsilon_i \left(e_i e_i^\top \otimes \mathbf{1}_{L \times L} \right) \quad \text{y} \quad \delta_j \left(\mathbf{1}_{N \times N} \otimes e_j e_j^\top \right).$$

Algorithm: OPTIMIZE($a, b, \epsilon_1, \dots, \epsilon_N, \delta_1, \dots, \delta_L$)

- 1: **Input:** Vector $a \in \mathbb{R}_{++}^{NL}$, vector $b \in \mathbb{R}^{NL}$ and parameters $\epsilon_1, \dots, \epsilon_N$, $\delta_1, \dots, \delta_L$ in \mathbb{R}_{++}
- 2: **Output:** $\pi^* \in \mathbb{R}^{NL}$
- 3: Initialize $A^{-1} \leftarrow \text{Diag}(1/a_{11}, \dots, 1/a_{NL})$
- 4: **for** $i = 1$ to N **do**
- 5: Define $u^{(i)} \leftarrow \epsilon_i^{1/2} e_i \otimes 1_{L \times 1}$
- 6: $A^{-1} \leftarrow A^{-1} - \frac{A^{-1} u^{(i)} u^{(i)T} A^{-1}}{1 + u^{(i)T} A^{-1} u^{(i)}}$
- 7: **end for**
- 8: **for** $j = 1$ to L **do**
- 9: Define $v^{(j)} \leftarrow \delta_j^{1/2} 1_{N \times 1} \otimes e_j$
- 10: $A^{-1} \leftarrow A^{-1} - \frac{A^{-1} v^{(j)} v^{(j)T} A^{-1}}{1 + v^{(j)T} A^{-1} v^{(j)}}$
- 11: **end for**
- 12: **return** $A^{-1} b$

Teorema: Complejidad del Algoritmo OPTIMIZE

Theorem

Sea π^* una solución interior del sistema $A\pi = b$. Entonces, el algoritmo OPTIMIZE computa π^* en tiempo

$$O((N + L)(NL)^2).$$

Cuando $L \in \Theta(N)$, nuestro algoritmo alcanza la mejor cota superior conocida frente a cualquier método exacto derivado de multiplicación rápida.

Idea central de la demostración

- ▶ La matriz A tiene la forma:
 $A = \text{Diag}(a) + \sum_{i=1}^N u^{(i)} u^{(i)\top} + \sum_{j=1}^L v^{(j)} v^{(j)\top}$, donde $u^{(i)}$ y $v^{(j)}$ son vectores definidos por productos de Kronecker.
- ▶ Se inicializa $A^{-1} = \text{Diag}(1/a)$, y se aplican sucesivas actualizaciones de rango 1.
- ▶ Cada actualización usa la fórmula de Sherman–Morrison:

$$A^{-1} \leftarrow A^{-1} - \frac{A^{-1} w w^{\top} A^{-1}}{1 + w^{\top} A^{-1} w},$$

donde $w = u^{(i)}$ o $w = v^{(j)}$.

- ▶ Hay $N + L$ actualizaciones.
- ▶ Cada actualización requiere computar:
 - ▶ $w^{\top} A^{-1} w$: $O((NL)^2)$,
 - ▶ $A^{-1} w$: $O((NL)^2)$, $NL \times NL$ (se recorre toda la matriz)
 - ▶ $A^{-1} w w^{\top} A^{-1}$: $O((NL)^2)$ con una buena parentización (agrupar ww^{\top} perjudica).
- ▶ Así, en total: $O((N + L)(NL)^2)$.

Comparación de algoritmos para resolver $A\pi = b$

Tiempo	A dispersa	Galáctico	Referencia
$O((NL)^3)$	No	No	Folklore
$O((NL)^{2,81})$	No	No	Strassen (1969)
$O((N + L)(NL)^2)$	No	No	Este trabajo
$O((NL)^{2,371339})$	No	Sí	Alman (2025)
$O((NL)^{2,331645})$	Sí	Sí	PV (2024)

Cuadro: Comparación de algoritmos para resolver sistemas lineales.

Progreso reciente en resolución de sistemas

- ▶ Resolver el sistema lineal $A\pi = b$ de forma eficiente ha sido objeto de avances importantes la última década para clases especiales de matrices:
 - ▶ Sistemas simétricos diagonalmente dominantes $a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ [Koutis et al., 2012]
 - ▶ Casos donde A es dispersa [Peng and Vempala, 2024]: mayoría de entradas cero.
- ▶ Muchos trabajos recientes se enfocan en algoritmos aproximados para computar A^{-1} eficientemente, o directamente resolver $Ax = b$. Sin embargo, estos enfoques:
 - ▶ No aplican al caso general,
 - ▶ Y algunos no son algoritmos exactos.
- ▶ Alman et al. [Alman et al., 2025] presentan los mejores tiempos teóricos conocidos para multiplicación de matrices, basados en el *laser method* [Strassen, 1986], [Coppersmith and Winograd, 1990], [Davie and Stothers, 2013], [Williams, 2012]. Sin embargo, estos algoritmos son actualmente imprácticos para su uso real.

Estática comparativa

- ▶ Aunque podemos computar π^* con la serie de Neumann o el Algoritmo 1, no es fácil obtener una expresión cerrada.
- ▶ Como primera aproximación, se propone usar $A^{-1} \approx D^{-1}$:

$$\pi_{ij}^* \simeq \frac{2(\epsilon_i \mu_i + \delta_j \nu_j) - c_{ij}}{2a_{ij}}.$$

- ▶ Derivadas parciales: $\partial \pi_{ij}^* / \partial a_{ij}, \partial \pi_{ij}^* / \partial c_{ij} < 0$;
 $\partial \pi_{ij}^* / \partial \epsilon_i, \partial \pi_{ij}^* / \partial \delta_j, \partial \pi_{ij}^* / \partial \mu_i, \partial \pi_{ij}^* / \partial \nu_j > 0$. Sin embargo,
 $\partial \pi_{ij}^* / \partial \theta_{k\ell} = 0$ si $(k, \ell) \neq (i, j)$: no hay efecto sustitución.
- ▶ Usamos ahora $A^{-1} \approx D^{-1} - (D^{-1})^2 X$.
- ▶ Si $\epsilon_i + \delta_j < 1$:
 - ▶ $\partial \pi_{ij}^* / \partial \theta_{ij} < 0$
 - ▶ $\partial \pi_{ij}^* / \partial \theta_{i\ell}, \partial \pi_{ij}^* / \partial \theta_{kj} > 0$
 - ▶ $\partial \pi_{ij}^* / \partial \theta_{k\ell} = 0$ si $i \neq k, j \neq \ell$

Aplicaciones: salud y educación

- ▶ Salud: SIS (Seguro Integral de Salud), EsSalud, y EPS (Entidades Prestadoras de Salud) [Anaya-Montes and Gravelle, 2024].
 1. EPS: privado.
 2. EsSalud: trabajadores formales, tanto privado como público.
 3. SIS: universal, aplica a informales.
- ▶ Educación: grupos geográficos y socio-económicos [Alba-Vivar, 2025].
 - ▶ Tráfico.
 - ▶ Preferencias por universidades.

Problema identificado	Indicador cuantificable
Escasez de personal médico en atención primaria	12 médicos por cada 10,000 habitantes, muy por debajo del estándar de 43 recomendado por la OMS [Bendezu-Quispe et al., 2020].
Falta de camas hospitalarias	1.6 camas por cada 1,000 habitantes, debajo del promedio regional [World Bank, 2020].
Congestión en UCI neonatales	50 % de las unidades presentan ineficiencia por sobrecarga de pacientes [Arrieta and Guillén, 2017].
Ineficiencias en el sistema de referencias	Alta proporción de pacientes tratados en centros no equipados [Soto, 2019].
Baja cobertura y largas esperas	Cobertura de hasta 86 % para ciertos tratamientos complejos [EsSalud, 2025a].
Altas tasas de postergación en ciudades clave	Más del 23 % de citas postergadas (enero-marzo 2025) [EsSalud, 2025b].

Nota: En 2016, el MINSA reportó un déficit de más de 47,000 profesionales de salud. El 36 % de los centros de mediana y alta complejidad carecía de personal suficiente, el 44 % de equipamiento y el 25 % de infraestructura adecuada.

Ejemplo

- ▶ Resolvemos el problema \mathcal{P}_{CP} con $\mathbf{d} = 5\mathbf{1}_{3 \times 3}$ y $\alpha = 0,5$.

- ▶ Parámetros utilizados:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 50 & 20 \\ 50 & 1 & 20 \\ 20 & 10 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 5 & 1 & 2 \\ 10 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} 90 \\ 40 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

- ▶ Solución óptima $\boldsymbol{\pi}^*$ obtenida en Mathematica 14.1 usando el Algoritmo 1¹:

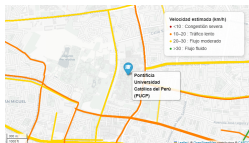
$$\boldsymbol{\pi}^* = \begin{bmatrix} 34,7802 & 0,19412 & 1,65935 \\ 0,10148 & 15,6978 & 3,41038 \\ 0,883807 & 0,905689 & 9,65139 \end{bmatrix}.$$

- ▶ Se resuelve \mathcal{P}_Q y \mathcal{P}_O con las mismas entradas que en \mathcal{P}_{CP} , pero imponiendo $\Pi(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu})$ y eliminando penalizaciones.
- ▶ Soluciones óptimas:

$$\boldsymbol{\pi}_{\mathcal{P}_Q}^* = \begin{bmatrix} 84,275 & 8,84062 & 6,88442 \\ 4,2985 & 30,4206 & 15,2809 \\ 1,42655 & 0,73873 & 17,8347 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\pi}_{\mathcal{P}_O}^* = \begin{bmatrix} 90 & 0 & 10 \\ 0 & 40 & 10 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}.$$

¹También verificamos el resultado con [QuadraticOptimization](#).

Tráfico en universidades — lunes 7pm



PUCP



ULima



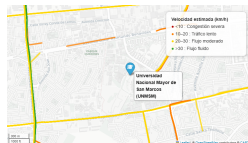
UDEP



UP



UNI



UNMSM

Problema de Kantorovich

Caso continuo: X, Y espacios Polacos (completos, separables).

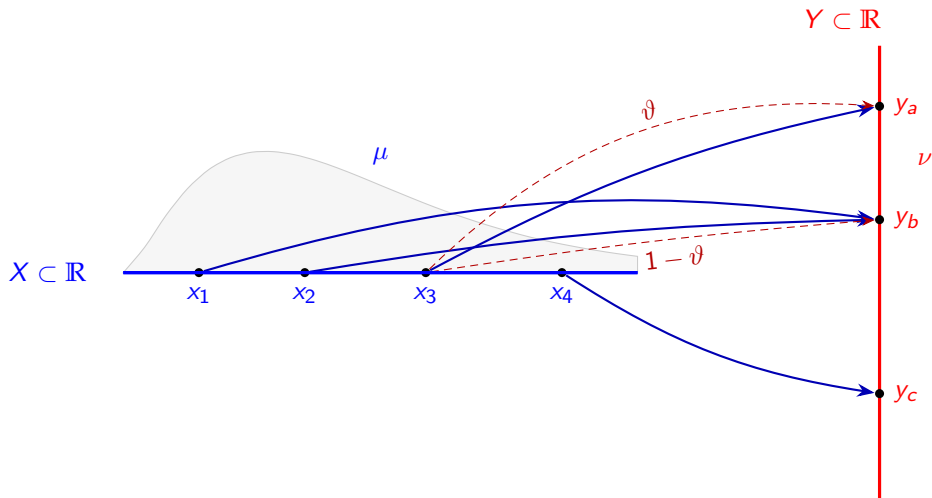
$$\inf \left\{ \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y) : \pi \in \Pi(\mu, \nu) \right\}.$$

con

$$\begin{aligned} \Pi(\mu, \nu) = \{ \pi \in \Delta(X \times Y) : \pi(A \times Y) = \mu(A), \\ \pi(X \times B) = \nu(B), \quad \forall A, B \text{ Borelianos} \} \end{aligned} \quad (4)$$

y $c : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ semi-continua inferior.

Infinitos tipos



Preliminares

- ▶ Derivada de Radon-Nikodym: densidad f de π con respecto a Lebesgue (producto).
- ▶ Medida de conteo: $C_X(A) = \#(A)$, $\forall A \subseteq X$.
- ▶ Notar que: $\mu = \sum_{i=1}^N \mu_i \delta_{x_i}$, con $\mu_i = \left(\frac{d\mu}{dC_X} \right) (x_i)$. En efecto, $\mu \ll C$.
- ▶ Análogo: $\pi = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^L \pi_{ij} \delta_{(x_i, y_j)}$, $\pi_{ij} = \left(\frac{d\pi}{d(C_X \otimes C_Y)} \right) (x_i, y_j)$.
- ▶ Podemos entonces escribir

$$\int_{X \times Y} \left[c(x, y) \left(\frac{d\pi}{d[C_X \otimes C_Y]} \right) + a(x, y) \left(\frac{d\pi}{d[C_X \otimes C_Y]} \right)^2 \right] d[C_X \otimes C_Y].$$

- ▶ Espacio de Banach, semi-continuidad inferior, espacio reflexivo, de Hilbert.

Extensión al caso continuo

$$\inf_{f \in L^2_+(X \times Y) \leftarrow \pi \in M_+(X \times Y)} \left\{ \int_{X \times Y} (a(x, y) f^2(x, y) + c(x, y) f(x, y)) \, dx \, dy \right. \\ \left. + \|\epsilon(F - f_\mu)\|_{L^2(X)}^2 + \|\delta(G - f_\nu)\|_{L^2(Y)}^2 \right\}$$

- ▶ $M_+(X \times Y)$ son medidas positivas sobre el producto cartesiano $X \times Y$,
- ▶ f es la derivada de R.N. de π con respecto a Lebesgue $dx dy$,
- ▶ $a, c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$ son funciones positivas,
- ▶ f_μ es la densidad respecto a Lebesgue de μ : $d\mu = f_\mu dx$, análogo con f_ν : $d\nu = f_\nu dy$,
- ▶ μ, ν medidas fijas en $M_+(X)$ e $M_+(Y)$ respectivamente,
- ▶ $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ es la norma L^2 sobre un espacio Ω ,
- ▶ $F = \int_Y f(x, y) dy$ y $G = \int_X f(x, y) dx$.
- ▶ $\epsilon \in L^\infty(X)$ y $\delta \in L^\infty(Y)$.

Theorem

([Brezis, 2010]) Sea E un espacio de Banach reflexivo, y sea $A \subset E$ un subconjunto cerrado y convexo. Supongamos que $\varphi : A \rightarrow (-\infty, \infty]$ es una función convexa, semicontinua inferior y no idénticamente infinita. Si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- ▶ A es acotado, o
- ▶ $\lim_{\substack{x \in A \\ \|x\| \rightarrow \infty}} \varphi(x) = \infty$,

entonces φ alcanza su mínimo sobre A ; es decir, existe $x^* \in A$ tal que

$$\varphi(x^*) = \inf_{x \in A} \varphi(x).$$

Resultado

Theorem

Suponga que X e Y son espacios métricos compactos con medida de Lebesgue igual a 1. Suponga que

$$a \in L^\infty(X \times Y), \quad a(x, y) \geq a_0 > 0 \text{ a.e.}, \quad c \in L^2_+(X \times Y),$$

y que

$$\epsilon \in L^\infty(X), \quad \epsilon(x) \geq 0 \text{ a.e.}, \quad \delta \in L^\infty(Y), \quad \delta(y) \geq 0 \text{ a.e.}$$

Entonces, el problema para el caso de infinitos tipos tiene solución y es única para $f \in L^2_{++}(X \times Y)$.

Idea de la prueba

- ▶ X e Y acotados, y normalizado a medida de Lebesgue 1.
- ▶ $A = L^2_+$, que es un subconjunto convexo y cerrado de L^2 es de Hilbert (y por ende reflexivo).
- ▶ $\varphi : f \rightarrow \mathbb{E}[af^2 + cf] + \|\epsilon(F - f_\mu)\|_{L^2(X)}^2 + \|\delta(G - f_\nu)\|_{L^2(Y)}^2$ es convexa y l.s.c.
- ▶ Lema de Fatou da l.s.c. para el término cuadrático. Los operadores I y J son continuos (Cauchy-Schwarz/Fubini).
- ▶ Acotar A i.e. acotar f : propósitos computacionales. Ya no se requiere la positividad uniforme para $a(x, y)$.

L^2_+ cerrado y convexidad de φ

- L^2_+ es convexo de forma inmediata: si $f, g \geq 0$ c.t.p. y $\theta \in [0, 1]$, entonces $\theta f + (1 - \theta)g \geq 0$ c.t.p. Es cerrado pues, si $f_n \in L^2_+$ y $f_n \rightarrow f$ en L^2 , existe subsucesión con $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ c.t.p., por lo que $f \geq 0$ c.t.p. Se prueba por contradicción: Existe un conjunto medible $S \subset X$ tal que $\mu(S) > 0$ y $f(x) < -\frac{1}{k}$ para todo $x \in S$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Entonces, para todo n ,

$$\|f_n - f\|_{L^2}^2 \geq \int_S |f_n(x) - f(x)|^2 dx \geq \int_S \left(\frac{1}{k}\right)^2 dx = \frac{1}{k^2} \mu(S) > 0.$$

Esto contradice la hipótesis de que $f_n \rightarrow f$ en L^2 .

- La convexidad se sigue de la linealidad y convexidad de la función cuadrado. En particular, la convexidad estricta se debe a

$$Q(f) = \int_{X \times Y} a(x, y) f^2(x, y) dx dy$$

bajo hipótesis de estricta positividad.

I.s.c. y existencia/unicidad

I y J son contracciones:

$$\|I(f)\|_{L^2(X)}^2 \leq \mathcal{L}(Y) \|f\|_{L^2(X \times Y)}^2, \quad \|J(f)\|_{L^2(Y)}^2 \leq \mathcal{L}(X) \|f\|_{L^2(X \times Y)}^2.$$

$$\begin{aligned} \|I(f)\|_{L^2(X)}^2 &= \int_X \left| \int_Y f(x, y) d\mathcal{L}(y) \right|^2 d\mathcal{L}(x) \\ &\leq \mathcal{L}(Y) \int_X \int_Y |f(x, y)|^2 \underbrace{d\mathcal{L}(y) d\mathcal{L}(x)}_{\doteq dx dy} \\ &= \underbrace{\mathcal{L}(Y)}_{=1} \|f\|_{L^2(X \times Y)}^2. \end{aligned}$$

Luego, si $f_n \rightarrow f$ en L^2 , por Fatou:

$$\int af^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int af_n^2,$$

lo que prueba que $Q(f)$ es semicontinua inferiormente.

Si $a(x, y) \geq \delta > 0$ c.t.p., entonces

$$Q(f) \geq \delta \|f\|_{L^2}^2.$$

Referencias I



Alba-Vivar, F. M. (2025).

Opportunity bound: Transport and access to college in a megacity.

Job Market Paper.

Department of Economics - Wake Forest University.



Alman, J., Duan, R., Williams, V. V., Xu, Y., Xu, Z., and Zhou, R. (2025).

More asymmetry yields faster matrix multiplication.

In *Proceedings of the 2025 ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, pages 2005–2039, Philadelphia. SIAM.



Anaya-Montes, M. and Gravelle, H. (2024).

Health insurance system fragmentation and COVID-19 mortality: Evidence from Peru.

PLOS ONE, 19(8):e0309531.



Arrieta, A. and Guillén, J. (2017).

Output congestion leads to compromised care in peruvian public hospital neonatal units.

Health Care Management Science, 20(2):209–221.



Artstein-Avidan, S., Giannopoulos, A., and Milman, V. D. (2015).

Asymptotic Geometric Analysis, Part I, volume 202 of *Mathematical Surveys and Monographs*.

American Mathematical Society.



Bendezu-Quispe, G., Mari-Huarache, L. F., Taype-Rondan, A., Mejia, C. R., and Inga-Berrosipi, F. (2020).

Effect of rural and marginal urban health service on the physicians' perception of primary health care in peru.

Revista Peruana de Medicina Experimental y Salud Pública, 37(4):636–644.



Brezis, H. (2010).

Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.

Springer, New York.



Carlier, G., Dupuy, A., Galichon, A., and Sun, Y. (2020).

SISTA: Learning Optimal Transport Costs under Sparsity Constraints.

arXiv preprint arXiv:2009.08564.

Submitted on 18 Sep 2020, last revised 21 Oct 2020.

Referencias II



Coppersmith, D. and Winograd, S. (1990).
Matrix multiplication via arithmetic progressions.
Journal of Symbolic Computation, 9(3):251–280.



Davie, A. M. and Stothers, A. J. (2013).
Improved bound for complexity of matrix multiplication.
Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A: Mathematics, 143(2):351–369.



Dupuy, A. and Galichon, A. (2022).
A Note on the Estimation of Job Amenities and Labor Productivity.
Quantitative Economics, 13:153–177.



Echenique, F., Immorlica, N., and Vazirani, V. V. (2023).
Online and Matching-Based Market Design.
Cambridge University Press.



Echenique, F. and Yenmez, M. B. (2015).
How to Control Controlled School Choice.
The American Economic Review, 105(8):2679–2694.



EsSalud (2025a).
Dashboard de indicadores fonafe y tablero estratégico.



EsSalud (2025b).
Tablero de diferimento de citas.



Gale, D. and Shapley, L. S. (1962).
College Admissions and the Stability of Marriage.
The American Mathematical Monthly, 69(1):9–15.



Galichon, A. (2016).
Optimal Transport Methods in Economics.
Princeton University Press.

Referencias III



Galichon, A. (2021).

The Unreasonable Effectiveness of Optimal Transport in Economics.
Preprint submitted on 12 Jan 2023.



Granot, F. and Skorin-Kapov, J. (1990).

Some proximity and sensitivity results in quadratic integer programming.
Mathematical Programming, 47(1):259–268.



Hochbaum, D. S. and Shanthikumar, J. G. (1990).

Convex separable optimization is not much harder than linear optimization.
Journal of the ACM, 37(4):843–862.



Koutis, I., Miller, G. L., and Peng, R. (2012).

A fast solver for a class of linear systems.
Communications of the ACM, 55(10):99–107.



Peng, R. and Vempala, S. S. (2024).

Solving sparse linear systems faster than matrix multiplication.
Communications of the ACM, 67(7):79–86.



Roth, A. E. and Sotomayor, M. A. O. (1990).

Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis, volume 18 of *Econometric Society Monographs*.
Cambridge University Press.



Soto, A. (2019).

Barreras para una atención eficaz en los hospitales de referencia del ministerio de salud del Perú: atendiendo pacientes en el siglo xxi con recursos del siglo xx.
Revista Peruana de Medicina Experimental y Salud Pública, 36(2):304.



Strassen, V. (1986).

The asymptotic spectrum of tensors and the exponent of matrix multiplication.
In *27th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (SFCS 1986)*, pages 49–54. IEEE.

Referencias IV



Villani, C. (2009).

Optimal Transport: Old and New, volume 338 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer.



Williams, V. V. (2012).

Multiplying matrices faster than coppersmith-winograd.

In *Proceedings of the 44th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 887–898, New York. ACM.



World Bank (2020).

Health at a glance: Latin america and the caribbean 2020.

[https://documents1.worldbank.org/curated/en/383471608633276440/pdf/](https://documents1.worldbank.org/curated/en/383471608633276440/pdf/Health-at-a-Glance-Latin-America-and-the-Caribbean-2020.pdf)

[Health-at-a-Glance-Latin-America-and-the-Caribbean-2020.pdf](https://documents1.worldbank.org/curated/en/383471608633276440/pdf/Health-at-a-Glance-Latin-America-and-the-Caribbean-2020.pdf).

Accessed: 18 March 2025.



Zhan, S. (2005).

On the determinantal inequalities.

Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 6(4):Article 105.