PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Primera práctica (tipo a)
Primer semestre 2024

Indicaciones generales:

- Duración: 110 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: con apuntes de clase (físicos o digitales) y calculadora no programable.
- No está permitido el uso de ningún material o equipo electrónico adicional al indicado (no celulares, se aceptan tablets).
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**

Puntaje total: 20 puntos.

Cuestionario:

Pregunta 1 (3 puntos)

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación definida por

$$T(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2, x_1 + x_2).$$

1.1) Pruebe que T es una aplicación lineal. **(1 punto)**

Simplemente verificamos que $T(\alpha\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} T(\alpha x_1 + y_1, \alpha x_2 + y_2) &= T(x_1, x_2) = (4\alpha x_1 + 4y_1 - 2\alpha x_2 - 2y_2, \alpha x_1 + y_1 + \alpha x_2 + y_2). \\ &= (4\alpha x_1 - 2\alpha x_2, \alpha x_1 + \alpha x_2) + (4y_1 - 2y_2, y_1 + y_2) \\ &= \alpha T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2). \end{aligned}$$

1.2) Encuentre la matriz asociada a T en la base $\mathcal{B} = \{(5, 3), (1, 1)\}$. **(2 puntos)**

La matriz en cuestión es

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pregunta 2 (5 puntos)

Resuelva las siguientes cuestiones:

2.1) Proporcione un ejemplo de una aplicación homogénea de grado 1 que no sea aditiva. **(2 puntos)**

Hay varias soluciones, una es $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $T(x,y) = \sqrt[3]{xy^2}$. En efecto,

$$T(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{\lambda x \lambda^2 y^2} = \sqrt[3]{\lambda^3 x y^2} = \lambda T(x,y)$$

y ciertamente T no es aditiva: $T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \neq T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. Hay muchas otras opciones ciertamente. Cuidado con escoger $Ax^\alpha y^\beta$ sin estudiar bien α y β, pues puede que no funcione con $\lambda < 0$ o $\lambda = 0$.

Considere una función de producción tipo Cobb-Douglas: $F(K,L) = AK^\alpha L^\beta$, donde K denota capital, L trabajo y $A > 0$ es una constante.

2.2) ¿Bajo qué condiciones sobre los parámetros un incremento en los insumos genera un incremento en la producción? **(1 punto)**

Combinando la propiedad de homogeneidad con $F_K = A\alpha K^{\alpha-1}L^\beta$, $F_L = A\beta K^\alpha L^\beta$, concluimos que debemos tener $\alpha, \beta > 0$. Note que la condición $\alpha + \beta > 1$ genera crecimientos sobre proporcionales (sobre «escala»), lo cual indica una tecnología convexa o costos cóncavos. Basta con decir que $F_K, F_L > 0$. Si $\alpha, \beta > 0$, $(K+\epsilon)^\alpha > K^\alpha$ y es análogo para el otro insumo (labor - L). Todo esto sobre $\mathbb{R}^2_+$ ciertamente.

2.3) ¿Bajo qué condiciones sobre los parámetros la tasa de crecimiento de la producción respecto de sus factores K y L es cada vez menor? **(2 puntos)**

Acá nos fijamos en 2 cuestiones, al homogeneidad y las segundas derivadas parciales. Si $\alpha, \beta \in (0,1)$ obtenemos que un incremento en los insumos, por separado, hace crecer la producción cada vez menos. Si además $\alpha + \beta < 1$, crecimiento simultáneos generan un crecimiento sub-proporcional. Eventualmente, para incorporar el caso $F_{KK}, F_{LL} \leq$, podemos incorporar las soluciones de esquina $\{0,1\}$. Además, en dicho caso, $F_{KL} \geq 0$. La firma tiene en este escenario rendimientos a escala decrecientes y por ende, costos convexos (esto se estudiará más adelante).

Pregunta 3 (7 puntos)

Resuelva las siguientes cuestiones:

3.1) Sea $\mathcal{U}$ un espacio vectorial con dimensión $n > 1$. Sea $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ el espacio de aplicaciones lineales de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{U}$. Considere $C \subset \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ el conjunto de todas la aplicaciones lineales no invertibles de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{U}$. Analice si C es o no un subespacio vectorial. **(2 puntos)**

No lo es. Sea $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{U}$ con $x_n \neq 0$. Defina $T\mathbf{x} = (x_1, ..., x_{n-1}, 0)$ y $S\mathbf{x} = (0, ..., 0, x_n)$. Ciertamente T, y S no son invertibles pues no son inyectivas. Sin embargo, $(T+S)\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

3.2) Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$ no singular con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. ¿Cuáles son los valores propios de la matriz A^{-1}? ¿Cuáles son sus vectores propios?

(2 puntos)

Los valores propios son λ_i^{-1} (son no nulos pues la matriz es no singular) y los vectores propios son los mismos.

3.3) Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Calcule sus valores propios, vectores propios y obtenga los espacios propios correspondientes. Analice si la matriz es diagonalizable.

Los valores propios de la matriz A son:

$$\lambda_1 = -2,$$
$$\lambda_2 = 0.$$

En efecto, $\chi(t) = t^3 + 2t^2$.

Los vectores propios correspondientes a cada valor propio son:

- Para $\lambda_1 = -2$, el vector propio es $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Para $\lambda_2 = 0$, el vector propio es $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Los espacios propios se definen como sigue:

$$E_{\lambda_1} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$
$$E_{\lambda_2} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Finalmente, note que la matriz no es diagonalizable y que los vectores propios son los mencionados salvo una escalar múltiplo no nulo.

(3 puntos)

Pregunta 4 (2 puntos)

Resuelva las siguientes cuestiones:

4.1) Considere las siguientes dos variables económicas: el precio de un cierto bien, denotado por p, y la demanda de un consumidor de dicho bien, denotada por D. Proponga una relación lineal o lineal afín (escoja adecuadamente una de las 2) entre D y p. Justifique e interprete su propuesta. **(1 punto)**

$D = D(p) = a - bp$. $a > 0$ y $b > 0$. Esto pues $D(0) = a > 0$ (si el precio es 0 la demanda es positiva naturalmente; de hecho, si se pidiera un modelo no lineal, sería más exacto decir que $D(p) = a/p - bp + c$, $a, b, c > 0$). Por otro lado, ciertamente $D' < 0$ (bienes normales), por lo que $b > 0$.

El argumento si la demanda crece el precio también porque, a mayor demanda debería poder cobrar más funciona si hay fallas de mercado, como el caso de un monopolio (no hay competencia). Se puede mantener constante si es que el bien es estrictamente necesario y no sustituible (insulina por ejemplo). Algunos bienes crecen con el precio empíricamente, pero esto está correlacionado con la calidad etc... Cualquier argumentación de este tipo también es válida. Note que lo que aumenta con el precio es la oferta $O(p) = \theta p$, $\theta > 0$.

4.2) En relación a su solución del inciso (4.1), ¿cómo cambiaría si sabe que el consumidor es muy sensible al precio? **(1 punto)**

b aumenta.

Pregunta 5 (3 puntos)

Considere tres sectores productivos: el sector primario agro-exportador, el sector industrial y el sector de servicios. Suponga que, en términos de proporciones, el sector primario requiere de 0.4 de su propio sector, 0.4 del sector industrial y 0.1 del sector de servicios. Por otro lado, el sector industrial requiere de 0.2 del sector agro-exportador, 0.2 de su propio sector y del sector servicios 0.3. Finalmente, el sector servicios requiere 0.2 del sector agro-exportador, 0.1 del sector industrial y 0.3 de su propio sector. Además, se sabe que la demanda externa es $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 200 \end{bmatrix}$.

5.1) Plantee el modelo como un problema de insumo-producto e interprételo. **(2 puntos)**

5.2) Encuentre la oferta óptima (cantidad producida) por cada sector en el equilibrio. **(1 punto)**

5.1) El modelo de insumo-producto puede ser representado por la matriz de coeficientes técnicos A y la demanda externa $\mathbf{d}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 200 \end{bmatrix}$$

- El sector primario provee de alimentos a los demás sectores y a si mismo.
- El sector industrial provee maquinaría, desde tractores hasta computadoras a los demás sectores y a si mismo.
- El sector servicios provee, por ejemplo, servicio legal, consultorías etc. a los demás sectores y a si mismo.

5.2) Para encontrar la oferta óptima, calculamos $\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{d}$, donde I es la matriz identidad. Esto nos dará la cantidad producida por cada sector en el equilibrio. Para los que tienen calculadora:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 540.9 \\ 531.8 \\ 590.9 \end{bmatrix}.$$

Importante, cuando tenemos

$$\underbrace{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + d_1}_{\text{demanda}} = \underbrace{x_1}_{\text{oferta}},$$

a_{12} representa lo que el sector 2 le demanda al sector 1. En ese sentido, $a_{21} = 0.4$ mientras que $a_{12} = 0.2$.

Profesor del curso: Jorge Chávez.

San Miguel, 05 de abril de 2024