FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE FINANZAS

EQUILIBRIO GENERAL: ANÁLISIS DE LA EXISTENCIA DEL EQUILIBRIO WALRASIANO

Microeconomía Financiera
Semestre 2024-2

Profesor: José D. Gallardo Kú
jgallardo@pucp.edu.pe
Jefes de prácticas: Marcelo Gallardo & Karen Montoya
marcelo.gallardo@pucp.edu.pe
a20212185@pucp.edu.pe
https://marcelogallardob.github.io/

---

1 Introducción

Uno de los resultados más famosos en la teoría del equilibrio general es la de la existencia del equilibrio Walrasiano, Arrow and Debreu (1954), McKenzie (1959). Hoy en día, existen varias pruebas de este resultado. Véase por ejemplo Mas-Colell et al. (1995) o Echenique (2015). Lo más frecuente es aplicar el teorema del punto fijo de Brouwer (véase About Brouwer Fixed point theorem and its applications in general equilibrium), o su generalización, el teorema del punto fijo de Kakutani Mas-Colell et al. (1995). En este documento, no discutiremos la demostración del Teorema del Punto Fijo de Brouwer pues es bastante técnica y compleja en cuanto a los requerimientos matemáticos. No obstante, hacemos uso de dicho teorema para probar la existencia del Equilibrio Walrasiano (bajo ciertas condiciones sobre las preferencias de los consumidores). La prueba se basa en y Varian (1992) y Ellickson (1993).

En este documento, ilustramos de manera sencilla el teorema del punto fijo de Brouwer y hacemos uso de este para probar la existencia del Equilibrio Walrasiano; lo cual ocurre bajo ciertos supuestos bien específicos (sobre, en particular, las preferencias de los consumidores). En nuestro análisis, no vamos a considerar producción. Asimismo, dejamos de lado la cuestión de la unicidad del equilibrio Walrasiano, que es dicho sea de paso, algo aún más delicado y técnico de estudiar. El lector interesado puede consultar Echenique (2015).

Una discusión con ejemplos que muestran cómo la violación de los supuestos conlleva a la no Existencia del equilibrio Walrasiano se encuentra en Border (2000). Ojo, puede que los supuestos no se cumplan y aún así exista el equilibrio.

2 Preliminares

Teorema 1. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una función continua. Entonces, existe un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$. En particular, si $a = 0$ y $b = 1$, dada $f : [0, 1] \to [0, 1]$, siempre existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = 1$.

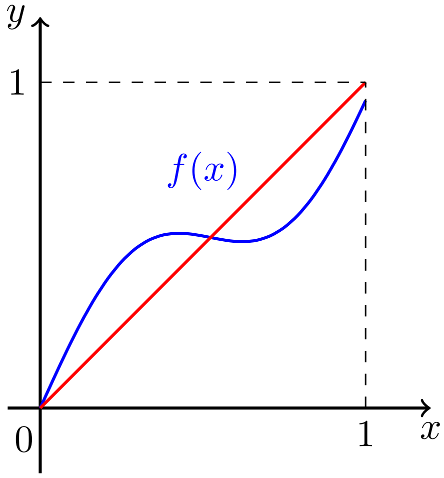

Figure 1: Gráfico relacionado con el Teorema de Brouwer en $n = 1$. Basado en Varian (1992). Se ha tomado $f(x) = x + \frac{\sin(6x)}{5}$.

El Teorema 1 es una versión simplificada del Teorema del Punto Fijo de Brouwer, cuya prueba accesible se encuentra en el Apéndice. Al escalar este resultado a mayores dimensiones, obtenemos una generalización significativa, aunque perdemos la intuición geométrica y la demostración se vuelve considerablemente más compleja. Para una exposición más avanzada sobre este tema, el lector interesado puede consultar la obra de Milnor (Milnor (2006)), así como el artículo clásico Sperner (1928), donde se presenta el Lema de Sperner, una herramienta clave para la demostración del Teorema del Punto Fijo de Brouwer en dimensiones superiores. A continuación, el enunciado general del Teorema del Punto Fijo de Brouwer.

Teorema 2. Sea X un subconjunto compacto[1] y convexo[2] en $\mathbb{R}^n$, y sea $f : X \to X$ una función continua. Entonces, existe un punto $c \in X$ tal que $f(c) = c$.

Nuestro objetivo es aplicar el Teorema 2 para demostrar la existencia de un Equilibrio Walrasiano, es decir, un vector de precios $\mathbf{p}^*$ tal que:

$$z(\mathbf{p}) = \mathbf{0}.$$

Consideremos una economía con $L > 0$ bienes y $I > 0$ consumidores, donde los bienes están indexados por ℓ y los consumidores por i.

Este problema no es trivial, ya que debemos adaptar el modelo de Equilibrio General al contexto del teorema. Para ello, debemos identificar los siguientes elementos:

[1]Cerrado y acotado: dada $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ convergente, $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, entonces $\mathbf{x} \in X$. Además, existe $r > 0$ tal que $X \subset B(\mathbf{0}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x}|| < r\}$.

[2]Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ y $\theta \in [0, 1]$, entonces $\theta\mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{y} \in X$.

1. Un conjunto convexo y compacto, que llamaremos X.

2. Una función continua tal que $f \to X$, es decir, $f(x) \in X$ para todo $x \in X$.

Comenzamos con la definición del conjunto, que será el conjunto de posibles vectores de precios y juega el rol del conjunto X en el enunciado del Teorema del Punto Fijo de Brouwer. En este caso, $\mathbf{p}$ cumple el rol de x. Para simplificar el análisis, normalizamos los precios, considerando:

$$\hat{p}_\ell = \frac{p_\ell}{\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell}.$$

Esta transformación, que explota la homogeneidad de grado cero de las demandas Walrasianas[3], garantiza que:

$$\hat{\mathbf{p}} \in \Delta = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^L : ||\mathbf{p}||_1 = \sum_{\ell=1}^{L} |p_\ell| = \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell = 1 \right\}.$$

El conjunto Δ es convexo y compacto. En efecto, dados $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \Delta$, y $\theta \in [0,1]$

$$\theta \mathbf{p}_1 + (1-\theta)\mathbf{p}_2 \in \Delta.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
||\theta \mathbf{p}_1 + (1-\theta)\mathbf{p}_2||_1 &= \sum_{\ell=1}^{L} (\theta p_\ell^1 + (1-\theta) p_\ell^2) \\
&= \theta \underbrace{\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell^1}_{=1} + (1-\theta) \underbrace{\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell^2}_{=1} \\
&= \theta + (1-\theta) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Note que p_ℓ^1 denota la $\ell-$ésima coordenada del vector $\mathbf{p}_1$, mientras que p_ℓ^2 denota la $\ell-$ésima coordenada del vector $\mathbf{p}_2$. Esto último prueba la convexidad de Δ. La compacidad se prueba de la siguiente forma: la función

$$f(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x}||_1 = \sum_{\ell=1}^{L} |x_\ell| = \sum_{\ell=1}^{L} \underbrace{x_\ell}_{=|x_\ell| \text{ pues } x_\ell \geq 0}$$

es continua sobre $\mathbb{R}_+^L$ Lima (1993). Por ende, $f^{-1}(1)$ es un conjunto cerrado Lima (1993). Finalmente, Δ es acotado pues

$$\Delta \subset B_{||\cdot||_1}(0,2) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^L : \sum_{\ell=1}^{L} |x_\ell| < 2 \right\}.$$

Por propósitos de claridad, permítanos ilustrar Δ para $L = 2$ y $L = 3$.

[3] Es decir, $\mathbf{x}(\alpha \mathbf{p}) = \mathbf{x}(\mathbf{p})$ para cualquier $\alpha > 0$

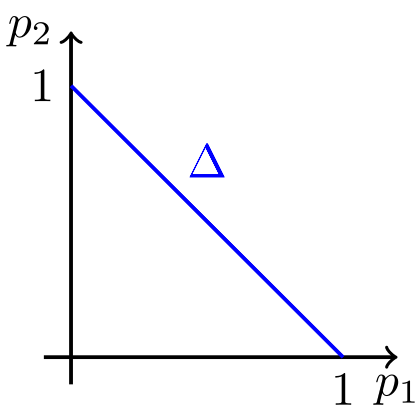

Figure 2: Δ para $L = 2$.

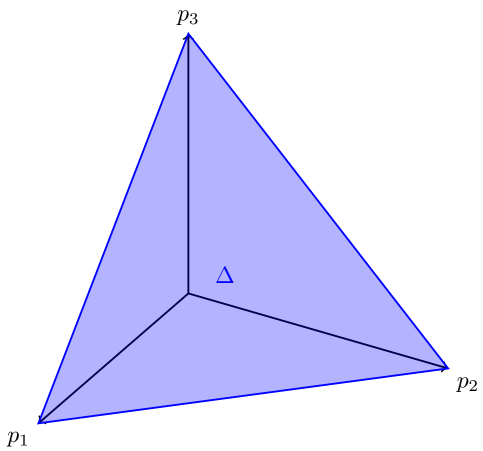

Figure 3: Δ para $L = 3$.

Nos falta únicamente determinar la función que jugará el papel de $f : \Delta \to \Delta$. La primera tentación es considerar

$$f(\mathbf{p}) = z(\mathbf{p}) + \mathbf{p} = \sum_{i=1}^{I} \mathbf{x}_i^*(\mathbf{p}) - \sum_{i=1}^{I} \boldsymbol{\omega_i} + \mathbf{p}.$$

En efecto, de tener un punto fijo, digamos $\mathbf{p}^*$,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}^*) &= \mathbf{p}^* \\ z(\mathbf{p}^*) + \mathbf{p}^* &= \mathbf{p}^* \\ z(\mathbf{p}^*) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

No obstante, $f(\mathbf{p}) = z(\mathbf{p}) + \mathbf{p}$, por lo general, no pertenece a Δ. Es decir,

$$||f(\mathbf{p})||_1 = ||z(\mathbf{p}) + \mathbf{p}||_1 = \sum_{\ell=1}^{L} |z_\ell(\mathbf{p}) + p_\ell| \underbrace{\neq}_{\text{por lo general}} 1.$$

Es por esto que debemos encontrar otra función que cumpla con el requisito de ser continua y que además caiga en Δ. Considere la siguiente función

$$g = (g_1, ..., g_L) : \Delta \to \Delta$$

dada por

$$g(\mathbf{p}) = (g_1(\mathbf{p}), ..., g_L(\mathbf{p})),\ \ g_\ell(\mathbf{p}) = \frac{p_\ell + \max\{0, z_\ell(\mathbf{p})\}}{1 + \sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell(\mathbf{p})\}}. \tag{1}$$

Se cumple efectivamente que $g(\mathbf{p}) \in \Delta$. En efecto,

$$\begin{aligned}
||g||_1 &= \sum_{\ell=1}^{L} |g_\ell(\mathbf{p})| \\
&= \sum_{\ell=1}^{L} g_\ell(\mathbf{p}) \\
&= \sum_{\ell=1}^{L} \frac{p_\ell + \max\{0, z_\ell(\mathbf{p})\}}{1 + \sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell(\mathbf{p})\}} \\
&= \frac{1}{\left(1 + \sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell(\mathbf{p})\}\right)} \sum_{\ell=1}^{L} (p_\ell + \max\{0, z_\ell(\mathbf{p})\}) \\
&= \frac{1}{\left(1 + \sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell(\mathbf{p})\}\right)} \left[\underbrace{\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell}_{=1} + \sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell(\mathbf{p})\} \right] \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Queda solo por verificar que g es continua. Esto se deriva de una serie de resultados, no triviales, que involucran supuestos sobre las preferencias:

1. Las preferencias de los consumidores $\succeq_i$ son continuas (y por ende lo son sus funciones de utilidad $u_i(\cdot)$ asociadas). Esto conlleva por el Teorema de Berge (Berge (1963), de la Fuente (2000) o Ok (2007)) a que las demandas Walrasianas sean continuas.

2. Una función vectorial $g = (g_1, ..., g_L)$ es continua si y solamente si las funciones componentes g_ℓ son continuas.

3. El máximo de dos funciones continuas es continua. Esto es, si $\varphi, \psi : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ son continuas, $\phi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ es continua.

4. La suma, resta producto y división de funciones es continuas es continua. Más aún, las funciones constantes[4] son continuas.

Estos resultados son detallados en Abbott (2021) o de la Fuente (2000). Combinándolos, podemos garantizar la continuidad de (1). En efecto, z_ℓ resulta ser continua pues es la suma en i de $x_{\ell i}$ (las demandas de los consumidores por el bien ℓ son continuas por el

[4] f tal que $f(x) = c$ para todo x.

Teorema de Berge y la suma de funciones[5] continuas es continua) restado con la constante $\omega_\ell = \sum_{i=1}^{I} \omega_{\ell i}$. Luego, $\max\{0, z_\ell(\mathbf{p})\}$ es continua pues el máximo de dos funciones continuas (la función constante igual a cero es continua por (4) y ya determinamos que z_ℓ es continua). Finalmente, $p_\ell + \max\{0, z_\ell$ es continua pues tanto la función proyección $\pi_\ell(\mathbf{p}) = p_\ell$ como $\max\{0, z_\ell\}$ son continuas (y la suma de continuas es continua), así como lo es $1 + \sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell\}$ (por el mismo argumento). De este modo,

$$\frac{p_\ell + \max\{0, z_\ell\}}{\underbrace{1 + \sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell\}}_{>0}}$$

es continua, pues es la división de dos funciones continuas. Concluimos así gracias a (2) que g es continua. Antes de dar paso el resultado que nos interesa, un pequeño Lema cuya prueba se encuentra en el Apéndice y es crucial en la prueba del teormea de existencia del equilibrio Walrasiano (sobre todo por el uso de la Ley de Walras).

Lema 1. Si $(\succeq_i, \boldsymbol{\omega}_i)_{i=1}^{I}$ es una economía de intercambio puro tal que $\overline{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{i=1}^{I} \boldsymbol{\omega}_i \gg 0$ y $\succeq_i$ es continua, estrictamente convexa y estrictamente monótona para todo $i = 1, ..., I$, entonces $z(\cdot)$ satisface las siguientes propiedades:

1. z es continua.

2. z es homogénea de grado cero: $z(\lambda \mathbf{p}) = z(\mathbf{p})$, $\forall\ \lambda > 0$.

3. z satisface la ley de Walras: $\forall\ p \in \mathbb{R}^L_{++} :\ \mathbf{p} \cdot z(\mathbf{p}) = 0$.

4. $\exists\ M > 0$ tal que $\forall\ \ell = 1, ..., L$ y $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^L_{++}$: $z_\ell(\mathbf{p}) > -M$.

Ahora sí, estamos listo para enunciar el plato de fondo.

Teorema 3. Si $(\succeq_i, \boldsymbol{\omega}_i)_{i=1}^{I}$ es una economía de intercambio puro tal que $\overline{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{i=1}^{I} \boldsymbol{\omega}_i \gg \mathbf{0}$ y $\succeq_i$ es continua, estrictamente convexa y estrictamente monótona para todo $i = 1, ..., I$, entonces, existe $\mathbf{p}^*$ tal que $z(\mathbf{p}^*) \leq \mathbf{0}$. Además, si $z : \mathbb{R}^L_{++} \to \mathbb{R}^L$, existe $\mathbf{p}^*$ tal que $z(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$.

Proof. Por el Teorema de Brouwer, existe $\mathbf{p}^*$ tal que $g(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*$. Esto lleva a:

[5] A priori las demandas son correspondencias y no funciones. Sin embargo, si asumimos convexidad estricta de las preferencias, son funciones.

$\forall\ \ell = 1, ..., L$

$$p_\ell^* = \frac{p_\ell^* + \max\{0, z_\ell(\mathbf{p}^*)\}}{1 + \sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell(\mathbf{p}^*)\}}$$

$$p_\ell^* \left(1 + \sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell(\mathbf{p}^*)\}\right) = p_\ell^* + \max\{0, z_\ell(\mathbf{p}^*)\}$$

$$p_\ell^* \sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell(\mathbf{p}^*)\} = \max\{0, z_\ell(\mathbf{p}^*)\}$$

$$z_\ell(\mathbf{p}^*) p_\ell^* \sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell(\mathbf{p}^*)\} = z_\ell(\mathbf{p}^*) \max\{0, z_\ell(\mathbf{p}^*)\}$$

$$\underbrace{\sum_{\ell=1}^{L} z_\ell(\mathbf{p}^*) p_\ell^*}_{=0 \text{ por la Ley de Walras}} \left[\sum_{\ell=1}^{L} \max\{0, z_\ell(\mathbf{p}^*)\}\right] = \sum_{\ell=1}^{L} z_\ell(\mathbf{p}^*) \max\{0, z_\ell(\mathbf{p}^*)\}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{\ell=1}^{L} z_\ell(\mathbf{p}^*) \underbrace{\max\{0, z_\ell(\mathbf{p}^*)\}}_{\geq 0} = 0. \tag{2}$$

La Ecuación 2 indica que $z_\ell(\mathbf{p}^*) \leq 0$, $\forall\ \ell = 1, ..., L$ pues, si $z_\ell(\mathbf{p}^*) > 0$ para algún ℓ, la suma es estrictamente positiva. Finalmente, nuevamente por la Ley de Walras (Lema 1) dado que debemos tener

$$\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell^* z_\ell(\mathbf{p}^*) = 0 \tag{3}$$

con $p_\ell \geq 0$, combinando (3) con la Ecuación 2, se sigue que $p_\ell z_\ell(\mathbf{p}^*) = 0$ para todos $\ell = 1, ..., L$. Finalmente, en caso $p_\ell > 0$, necesariamente $z_\ell(\mathbf{p}^*) = 0$ para todo $\ell = 1, ..., L$, concluyendo así la demostración. □

3 Apéndice

Prueba del Teorema 1.

Proof. Sea

$$g(x) = f(x) - x.$$

Notemos que $g(x)$ es una función continua en $[a, b]$, ya que f es continua y $\psi(x) = x$ es una función continua (la suma de funciones continuas es continua, ver Abbott (2021)). Ahora, evaluemos g en los extremos del intervalo $[a, b]$:

$$g(a) = f(a) - a \quad \text{y} \quad g(b) = f(b) - b.$$

Dado que $f : [a, b] \to [a, b]$, tenemos que $f(a) \geq a$ y $f(b) \leq b$. Esto implica que $g(a) \geq 0$ y $g(b) \leq 0$. Por el Teorema del Valor Intermedio (TVI), si $g(a) \geq 0$ y $g(b) \leq 0$, entonces existe un $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$. Es decir,

$$f(c) - c = 0,$$

l o que implica que $f(c) = c$. Por lo tanto, hemos demostrado que existe un punto fijo c en $[a, b]$. □

Observación 1. Un resultado importante en topología es que todo espacio compacto y convexo en $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo (Lima (1993)) a una bola cerrada en $\mathbb{R}^n$:

$$B(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x}||| \leq r\}.$$

Esto significa que, topológicamente, podemos pensar en el espacio X como si fuera una bola cerrada. El teorema de Brouwer asegura que para cualquier función continua que mapea X en sí mismo, debe haber un punto fijo.

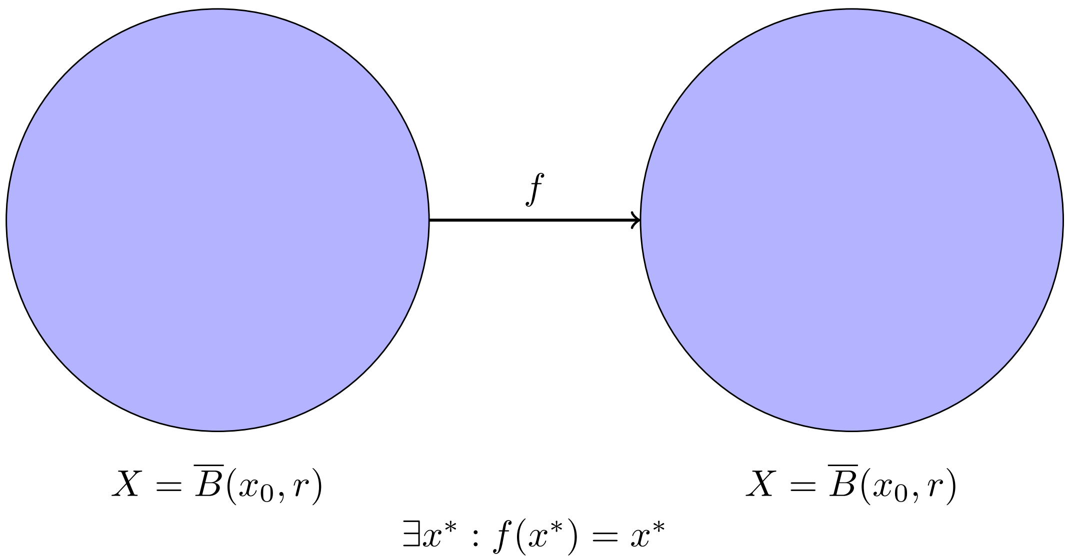

Figure 4: Gráfico relacionado con el Teorema de Brouwer en $n = 2$.

Para una prueba más general del teorema de Brouwer ver Ok (2007), Brouwer (1911), Brown (1928) o About Brouwer fixed point theorem and its applications in general equilibrium.

Prueba del Lema 1

Proof. Inciso por inciso:

1. La continuidad de $u^i(\cdot)$ y las propiedades de $B(\mathbf{p}, \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\omega}_i)$ aseguran la continuidad de $\mathbf{x}_i^*(\mathbf{p}, \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\omega}_i)$ y, por lo tanto, la continuidad de z.

2. Para cada consumidor $i = 1, ..., I$, su conjunto presupuestario

$$B(\mathbf{p}, \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\omega}_i) = \{\mathbf{x}_i \geq \mathbf{0} : \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}_i \leq \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\omega}_i\}$$

claramente permanece inalterado si $\mathbf{p} \to \lambda\mathbf{p}$ con $\lambda > 0$.

3. Dado que $\succeq_i$ es estrictamente monótona para cada consumidor,

$$\forall\ i = 1, ..., I:\ \underbrace{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}_i^*(\mathbf{p}, \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\omega}_i)}_{\text{gasto}} = \underbrace{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\omega}_i}_{\text{ingreso de la dotación}}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{I}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}_i^*(\mathbf{p}, \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\omega}_i) &= \sum_{i=1}^{I}\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\omega}_i \\ \mathbf{p}\cdot\left(\sum_{i=1}^{I}\mathbf{x}_i^*(\mathbf{p}, \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\omega}_i) - \boldsymbol{\omega}_i\right) &= 0 \\ \mathbf{p}\cdot z(\mathbf{p}) &= 0. \end{aligned}$$

4. Dado que $x_{\ell i}^*(\mathbf{p}, \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\omega}_i)$ es positivo para cada consumidor $i = 1, ..., I$ y bien $\ell = 1, ..., L$:

$$z_\ell(\mathbf{p}) \geq -\overline{\omega}_\ell.$$

Sea $M > \max_{\ell=1,...,L}\{\overline{\omega}_\ell\}$. Entonces, $z_\ell(\mathbf{p}) > -M$ para todos ℓ y $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^L_{++}$.

$\square$

Otra propiedad que $z(\cdot)$ satisface es que si $\{\mathbf{p}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^L_{++}$ converge a $\overline{\mathbf{p}} \neq \mathbf{0}$ tal que existe $\ell:\ \overline{p}_\ell = 0$, entonces

$$\max\{z_1(\mathbf{p}_n), ..., z_L(\mathbf{p}_n)\} \to \infty.$$

La demostración se puede encontrar en Echenique (2015).

Lima, 7 de setiembre, 2024.

References

Abbott, S. (2021). *Understanding Analysis.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2nd edition.

Arrow, K. J. and Debreu, G. (1954). Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, 22(3):265–290.

Berge, C. (1963). *Topological Spaces: Including a Treatment of Multi-valued Functions, Vector Spaces, and Convexity.* Dover Publications, Mineola, NY.

Border, K. (2000). (Non)-Existence of Walrasian Equilibrium. v. 2017.10.23::12.17.

Brouwer, L. E. J. (1911). Über abbildung von mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 71(1):97–115.

Brown, G. (1928). A new proof of brouwer's theorem. *Transactions of the American Mathematical Society*, 30(2):317–324.

de la Fuente, A. (2000). *Mathematical Methods and Models for Economists.* Cambridge University Press.

Echenique, F. (2015). Lecture notes general equilibrium theory.

Ellickson, B. (1993). *Competitive Equilibrium: Theory and Applications.* Cambridge University Press, Cambridge.

Lima, E. L. (1993). *Análise Real: Volume 2.* IMPA, Rio de Janeiro, 2nd edition.

Mas-Colell, A., Whinston, M. D., and Green, J. R. (1995). *Microeconomic Theory.* Oxford University Press, New York.

McKenzie, L. W. (1959). On the existence of general equilibrium for a competitive market. *Econometrica*, 27(1):54–71.

Milnor, J. (2006). *Topology from the Differentiable Viewpoint.* Princeton University Press, Princeton, NJ, revised edition.

Ok, E. A. (2007). *Real Analysis with Economic Applications.* Princeton University Press, Princeton, NJ.

Sperner, E. (1928). Neuer beweis für die invarianz der dimensionszahl und des gebietes. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 6(1):265–272.

Varian, H. R. (1992). *Microeconomic Analysis.* W. W. Norton & Company, New York, 3rd edition.