PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS
PRÁCTICA DIRIGIDA 2
PROFESOR: Jorge Richard Chávez Fuentes
JEFES DE PRÁCTICA: Marcelo Gallardo, Rodrigo Crousillat
SEMESTRE 2025-2

Convexidad y concavidad

Ejercicio 1. Sean $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : D_2 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones convexas. Pruebe que

$$h(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}, \ h : D_1 \cap D_2 \to \mathbb{R}$$

es convexa.

Ejercicio 2. Analice la convexidad (concavidad) de las siguientes funciones:

1) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 5)$

2) $f(x, y) = \sqrt{x} + y$

3) $f(x) = e^{|x|}$

4) $f(x, y) = \ln(x + y)$

5) $f(x, y) = x + y - e^x - e^y$

6) $f(x, y, z) = x^2 + 12y^2 + 4z^2 - 6xy - 2xz + 12yz$

Ejercicio 3. Estudiar para qué valores de los parámetros a y b son cóncavas o convexas las siguientes funciones:

1) $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - az^2 + 4xy + 3yz$

2) $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + az^2 - 3bxy$

Ejercicio 4. Sea $f : S \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2 - x_1^3.$$

Hallar el mayor conjunto convexo S para el cual f es cóncava.

Ejercicio 5. Sea $f : S \to \mathbb{R}$, donde $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 1, x_2 > 1\}$, y

$$f(x_1, x_2) = (\ln x_1)^a (\ln x_2)^b,$$

con $a > 0$, $b > 0$ y $a + b < 1$. Probar que f es estrictamente cóncava.

Ejercicio 6. Sea f una función convexa, y sea $g(x) = af(x) + b$. Halle todos los valores de a y b para los cuales g es cóncava.

Cuasiconvexidad y cuasiconcavidad

Ejercicio 7. Resuelva lo siguiente:

1) Analice si $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$ es cuasicóncava sobre $\mathbb{R}^2_{++}$.

2) Considere la función de utilidad CES

$$u(x) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho},$$

donde $\rho \in (0, 1)$. Pruebe que $u(x)$ es cuasicóncava.

Ejercicio 8. Demuestre que

$$u(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}, \ \alpha_i \geq 0 \ \forall \ i = 1, ..., n$$

es cuasi cóncava sobre $\mathbb{R}^n_{++}$.

Funciones de utilidad

Ejercicio 9. Determine si las siguientes funciones de utilidad corresponden a preferencias convexas (o estrictamente convexas):

1) $u(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/3}$

2) $u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \ln x_1 + \frac{1}{3} \ln x_2$ con $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$

3) $u(x_1, x_2) = e^{x_1 + x_2}$

4) $u(x_1, x_2) = \text{mín}\{2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2\}$

5) $u(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1 + x_2}$

Optimización general

Ejercicio 10. La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ puede escribirse de la siguiente forma:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - a)^{2m} + (x_2 - b)^{2n} + c,$$

donde a, b y c son constantes y $m, n \in \mathbb{N}$.

1) ¿Cuál es el punto mínimo de la función f?

2) ¿Cuál es valor mínimo de la función f?

3) ¿Tiene puntos máximos la función f?

Ejercicio 11. Considere el siguiente problema de maximización del beneficio «en el corto plazo» (lo que significa que uno de los dos insumos está fijo, por ejemplo $x_2 = k$):

$$\max_{x_1, q \geq 0} \; pq - w_1 x_1 - w_2 k$$
$$A x_1^{\alpha} k^{\beta} = q$$

con $\alpha, \beta \in]0, 1[$, $A, k, w_1, w_2, p > 0$. Plantee el problema como un problema de optimización en una única variable y explique por qué la solución es interior. Luego, obtenga la solución al problema (x_1^*, q^*) y la función valor óptimo $\pi(p, w_1, w_2, k, \alpha, \beta, A)$.

Ejercicio 12. El problema del monopolista consiste en lo siguiente; dada una función inversa de demanda $p = p(q)$, su objetivo es resolver

$$\max_{q \geq 0} p(q)q - c(q),$$

donde $c(q)$ es la función de costos de la firma, que depende del nivel de producción q. Suponga que $p(q) = a - bq$ y (i) $c(q) = c \cdot q^2$, (ii) $c(q) = c \cdot q$, con $a, b, c > 0$. Resuelva el problema del monopolista para ambos casos y compárelos. Finalmente, obtenga los beneficios del monopolista en ambos casos.

Ejercicio 13. Considere una firma que posee una función de producción tipo CES

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i^{\rho}, \; 0 < \rho < 1, \; \gamma_i > 0.$$

1) Plantee el problema de maximización del beneficio de esta firma, asumiendo que los precios de los insumos son $w_1, ..., w_n > 0$ y el precio del bien que se produce es $p = 1$.

2) Resuelva el problema: verifique las condiciones de primer y segundo orden. Determine el beneficio de la firma cuando usa las cantidades óptimas de insumos.

Ejercicio 14. Puntos críticos.

1) De acuerdo al valor del parámetro $a \neq 0$, analice si la función

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2)$$

tiene puntos óptimos.

2) Considere una firma cuya función de ingreso es

$$R(x,y) = x(100-6x) + y(192-4y),$$

donde x e y representan el número de artículos vendidos. Si la función de costo es

$$C(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 4xy - 8x + 20,$$

determine el beneficio máximo.

Ejercicio 15. Resuelva los siguientes problemas de optimización gráficamente (utilizando el gradiente y las curvas de nivel)

$$1) \qquad \begin{aligned} \text{mín} \quad & x^2+y^2 \\ \text{s.a.} \quad & (x-3)^2+(y-5)^2 \leq 3 \end{aligned}$$

$$2) \qquad \begin{aligned} \text{máx} \quad & x^2+y^2 \\ \text{s.a.} \quad & y \geq -2 \\ & y \leq 2x+2 \\ & y \leq -2x+2 \end{aligned}$$

$$3) \qquad \begin{aligned} \text{máx} \quad & x^2y \\ \text{s.a.} \quad & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \\ & 2x+5y \leq 10 \end{aligned}$$

$$4) \qquad \begin{aligned} \text{máx} \quad & x+y \\ \text{s.a.} \quad & y \leq 2-x^2 \\ & x \leq 2-y^2 \end{aligned}$$

$$5) \qquad \begin{aligned} \text{mín} \quad & x^2+\tfrac{y^2}{4} \\ \text{s.a.} \quad & x^2+y^2 \leq 16 \end{aligned}$$

El problema de Lagrange y el de Karush-Kuhn-Tucker

Ejercicio 16. Para $L = 2$, $p_1 = p_2 = 1$, $I = 10$ y $u(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$, resuelva el problema de maximización de utilidad (UMP).

Ejercicio 17. Resuelva el UMP para

$$u(x_1, x_2) = \alpha \ln x_1 + (1 - \alpha) \ln x_2,\ \alpha \in (0, 1).$$

Ejercicio 18. Resuelva el UMP, dado un vector de precios $p > 0$ y riqueza $w > 0$ para

1) $u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

2) $u(x) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{\alpha_i}$, $\alpha_i, a_i > 0$ (Stone-Geary).

3) $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{\rho}$, $\rho \in (0, 1)$, $\alpha_i > 0$.

4) $u(x) = \text{mín}\left\{\frac{x_1}{a_1}, \cdots, \frac{x_n}{n}\right\}$, $a_i > 0$.

5) $u(x_1, x_2) = x_1 + \ln x_2$.

Ejercicio 19. Considere la siguiente función de utilidad

$$u(x_1, x_2) = x_1^{0.5} + x_2^{0.5}.$$

1) Encuentre las demandas ordinarias, la función de utilidad indirecta y la función de gasto.

2) Si los precios iniciales son ($p_1^0 = p_2^0 = 2$) pero luego $p_1^1 = 3$ (manteniendo $p_2^1 = 2$ y considerando $w = 100$), calcule la variación compensada y la variación equivalente.

Ejercicio 20. ($*$) Suponga que en un mundo con dos bienes, la función de utilidad del consumidor toma la forma

$$u(x) = [\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho}]^{1/\rho},\ \rho \neq 0,\ \alpha_i > 0. \tag{1}$$

Esta es una función de utilidad de elasticidad de sustitución constante (CES). Pruebe lo siguiente:

1) Cuando $\rho = 1$, la utilidad se vuelve lineal.

2) Cuando $\rho \to 0$, la utilidad representa las mismas preferencias que la función de utilidad Cobb-Douglas $u(x) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$.

3) Cuando $\rho \to -\infty$, la utilidad representa las mismas preferencias que la función de utilidad Leontief $\text{mín}\{x_1, x_2\}$.

Trate de generalizar este resultado para «el mundo con L bienes».

Ejercicio 21. $(**)$ Una función de utilidad $u(x)$ es aditivamente separable si tiene la forma

$$u(x) = \sum_{\ell=1}^{L} u_\ell(x_\ell)$$

1) Demuestre que la separabilidad aditiva es una propiedad cardinal que solo se preserva mediante transformaciones lineales de la función de utilidad.

2) Demuestre que el orden inducido sobre cualquier grupo de bienes es independiente de los valores fijos que asignemos a los demás.

3) Demuestre que la función de demanda Walrasiana y Hicksiana generada por una función de utilidad aditivamente separable no admite bienes inferiores[1] si las funciones $u_\ell(\cdot)$ son estrictamente cóncavas. Suponga diferenciabilidad y soluciones interiores.

Ejercicio 22. Sea $f(z_1, z_2) = z_1^\alpha z_2^\beta$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Resuelva el problema de minimización de costos. Pruebe que

$$c(w_1, w_2, q) = q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \theta \phi(w_1, w_2)$$

con $\phi(w_1, w_2) = w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$ y

$$\theta = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}}.$$

Ejercicio 23. Considere la siguiente función de utilidad (intertemporal)

$$u(x) = \sum_{t=1}^{T} \beta^t \sqrt{x_t}.$$

1) Para $\beta = 1$, obtenga la demanda Walrasiana y la función de utilidad indirecta.

2) Para $\beta \in (0, 1)$, pruebe que

$$x_t^* = \frac{\delta^{2(t-1)}(1-\delta^2)}{1-\delta^{2(T)}}.$$

Ejercicios para profundizar

Ejercicio 24. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ convexa y diferenciable. Pruebe que la función

$$g(x) = \exp\left[\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right],\ x > 0,$$

es convexa.

[1] La demanda disminuye cuando el ingreso aumenta.

Ejercicio 25. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Para $h > 0$ fijo, defina

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)dt.$$

Pruebe que si f es convexa, $f_h(x) \geq f(x)$.

Ejercicio 26. ($**$) Considere una función de producción de tipo CES (Constant Elasticity of Substitution) generalizada $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$

$$f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{\rho} \right)^{1/\rho}, \ \rho \neq 0, \ \alpha_i > 0. \tag{2}$$

Demuestre que f es cuasi cóncava para $\rho \leq 1$.

<u>Nota histórica</u>: *La función CES (Elasticidad Constante de Sustitución) es un tipo de función de producción utilizada en economía para representar una tecnología que permite sustituir entre insumos con una elasticidad constante. Fue introducida por Kenneth Arrow (matemático y premio nobel de economía de 1972), H. B. Chenery, B. S. Minhas, y Robert Solow matemático y premio nobel de economía de 1987) en 1961. Los parámetros α_i representan las participaciones de los insumos en la producción, y ρ determina la facilidad de sustitución entre estos insumos, con ρ cerca de cero indicando sustitutos cercanos y ρ muy negativo indicando complementos cercanos. La elasticidad de sustitución es una medida económica que indica qué tan fácilmente los consumidores o productores pueden sustituir un bien o insumo por otro en respuesta a cambios en los precios relativos. Esencialmente, refleja la sensibilidad de la proporción en la que se usan dos bienes o insumos ante cambios en la relación de sus precios. Si la elasticidad de sustitución es alta, significa que los bienes o insumos se pueden sustituir fácilmente entre sí. Por ejemplo, si el precio de un bien aumenta, los consumidores o productores pueden cambiar rápidamente a un bien sustituto más barato sin mucha pérdida en utilidad o productividad. Por otro lado, una elasticidad baja indica que los bienes o insumos son más complementarios, lo que significa que es difícil sustituir uno por el otro sin afectar significativamente el consumo o la producción.*

Ejercicio 27. ($**$) Demuestre que si una función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es cuasi cóncava y homogénea de grado 1, entonces es cóncava. Use esto para deducir que la CES generalizada (Ecuación (2)) es cóncava para $\rho \leq 1$.

Ejercicio 28. ($*$) Sea $u(x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de utilidad cuasi cóncava y de clase C^2, con utilidades marginales estrictamente positivas, con utilidades marginales positivas.

1) Demuestre que su tasa marginal de sustitución (TMS) u_{x_1}/u_{x_2} es decreciente en x_1. Para esto, suponga que x_2 es función diferenciable de x_1, $x_2 = x_2(x_1)$. Además analice esto desde la perspectiva de una curva de nivel.

2) ¿Es cierto que cuando la TMS es decreciente el consumidor está dispuesto a dar cada vez más unidades del bien x_1 por una unidad del bien x_2 cuando su consumo en x_1 es mucho mayor que el de x_2? Justifique su respuesta.

Ejercicio 29. Considere el problema de maximización de la utilidad

$$\mathcal{P}_u : \begin{cases} \text{máx} & u(\mathbf{x}) \\ \text{s. a :} & \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \leq I \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Asuma que $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$, $I > 0$ y que $u(\cdot)$ es continua y tal que $\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}_1 \implies u(\mathbf{x}_2) > u(\mathbf{x}_1)$. Sea $\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)$ una solución al problema.

1) Demuestre que $\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)$ es homogénea de grado cero (es decir, $\mathbf{x}^*(\alpha\mathbf{p}, \alpha I) = \mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)$ para todo $\alpha > 0$) y que $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I) = I$.

2) Si u es cuasi cóncava, demuestre que el conjunto de soluciones al problema $\mathcal{P}_u$ es convexo. Si u es estrictamente cuasi cóncava, demuestre que el conjunto de soluciones al problema $\mathcal{P}_u$ es unitario (la solución es única).

3) Considere $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, $u(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n x_i$, $p_i = 1$, $\forall\ i$, e $I = 20$. Resuelva $\mathcal{P}_u$ analíticamente. Justifique su respuesta. <u>Nota</u>: Puede usar cualquier método o argumento que considere viable.

4) Considere $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, $u(\mathbf{x}) = \text{mín}\{x_1, ..., x_n\}$, $p_i = 1$, $\forall\ i$, e $I = 100$. Resuelva $\mathcal{P}_u$ analíticamente. Justifique su respuesta.

5) Haga lo mismo para $u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ con $a_i > 0$.

Ejercicio 30. Considere el problema de minimización del gasto:

$$\min_{\mathbf{x}} \ \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$$
$$\text{s. a.} : u(\mathbf{x}) \geq \overline{u}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

donde u es una función de utilidad continua tal que $\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}_1 \Rightarrow u(\mathbf{x}_2) > u(\mathbf{x}_1)$ y $u(\mathbf{0}) = 0$. Por otro lado, $\overline{u}$ es un parámetro positivo, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ representa una canasta de consumo.

1) Explique con detalle la formulación del problema. Definimos la función «valor óptimo» por

$$e(\mathbf{p}, \overline{u}) = \min_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0},\ u(\mathbf{x})\geq\overline{u}} \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}.$$

¿Qué espera que suceda con la función valor óptimo si $\overline{u}$ aumenta?

2) Demuestre que la función valor óptimo es cóncava con respecto al vector de precios $\mathbf{p}$. ¿A qué se debe esto (analice)?

3) Resuelva el problema gráficamente si $n = 2$, $u(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$, $\overline{u} = 5$ y $p_1 = p_2 = 1$. Interprete la solución.

4) Resuelva el problema cuando $u(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ y $p_1 > p_2 > \cdots > p_n$. Interprete su solución (explique lo obtenido en sus propias palabras).

Ejercicio 31. Considere el problema de minimización del costo

$$\begin{aligned} &\text{mín } \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} \\ &\text{s. a: } f(\mathbf{z}) \geq q \\ &\mathbf{z} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

En este problema, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n_+$ es el vector de precio de los insumos de producción $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $f(\cdot)$ la función de producción de la firma y $q > 0$ un parámetro que denota un nivel de producción del bien que produce la firma.

1) Demuestre que la función valor óptimo, conocida como función de costos,

$$c(\mathbf{w}, q) = \min_{f(\mathbf{z}) \geq q, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{z},$$

es creciente en $\mathbf{w}$ (esto es, $\mathbf{w}_1 \leq \mathbf{w}_2 \implies c(\mathbf{w}_1, q) \leq c(\mathbf{w}_2, q)$) y que es homogénea de grado 1 en $\mathbf{w}$ (esto es, $c(\lambda \mathbf{w}, q) = \lambda c(\mathbf{w}, q)$ para todo $\lambda > 0$).

2) Pruebe que $c(\mathbf{w}, q)$ es cóncava con respecto al vector de insumos $\mathbf{w}$.

3) Pruebe que si $f(\cdot)$ es cóncava, entonces $c(\cdot)$ es una función convexa con respecto a q.

4) Suponga que $f(\cdot)$ es homogénea de grado $\alpha > 0$, esto es $f(\lambda \mathbf{z}) = \lambda^\alpha f(\mathbf{z})$ para todo $\lambda > 0$. Asuma que la restricción se da con igualdad: $f(\mathbf{z}) = q$ (no hay desperdicios). Pruebe que

$$c(\mathbf{w}, q) = q^{1/\alpha} c(\mathbf{w}, 1).$$

5) Considere la siguiente función

$$c(\mathbf{w}, q) = A w_1^a w_2^b q^c, A, c > 0.$$

¿Bajo qué condiciones sobre los parámetros a, b esta función corresponde a una función de costos? Suponga que si una función cumple con las propiedades descritas anteriormente y además es continua, es suficiente para asegurar que es una función de costos.

<u>Nota histórica:</u> El problema de recuperar la función de producción o función de utilidad a partir de una función de costo o de gasto es central en la teoría económica y utiliza herramientas como el lema de Shepard, en honor al economista Ronald Shepard, profesor en la Universidad de California, Berkeley. Este lema establece una relación formal entre las derivadas respecto a los precios de la función de costos (la función de gasto, respectivamente) y las demandas condicionales de los factores (la demanda Hicksiana, respectivamente). Paul Samuelson, uno de los teóricos más influyentes en economía y Premio Nobel de Economía en 1970, también contribuyó al desarrollo de la teoría de la dualidad y los métodos para recuperar funciones de utilidad y producción a partir de funciones de costos y gastos. El siguiente problema está relacionado a estas cuestiones y no se requiere emplear las herramientas desarrolladas por Shepard o Samuelson.

6) Considere la siguiente función de costos:

$$c(\mathbf{w}, q) = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i w_i\right] q,$$

donde $a_i > 0, \forall\, i = 1, ..., n$. Pruebe que si la función de producción asociada es homogénea de grado 1 y que la restricción se da con igualdad (es decir $f(\mathbf{z}) = q$), entonces:

$$f(a_1, ..., a_n) = 1$$

para cualquier combinación de los parámetros $a_i > 0$.

7) Determine la función de producción f si $c(\mathbf{w}, q) = \text{mín}\left\{\frac{w_1}{b_1}, \cdots, \frac{w_n}{b_n}\right\} q$.

Ejercicio 32. Defina

$$v(p, w) = \max_{x \geq 0,\ p \cdot x \leq w} u(x).$$

Pruebe que la función de utilidad indirecta $v : \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_+$ satisface las siguientes propiedades

1) Homogeneidad de grado cero.

2) Estrictamente creciente en w y no creciente en p_ℓ.

3) Cuasi-cóncava: $\{(p, w) : v(p, w) \leq \overline{v}\}$ es un conjunto convexo para todo $\overline{v}$.

4) Continua en p, w. <u>Sugerencia:</u> investigue acerca del Teorema de Berge.