

Examen Parcial

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
MATEMÁTICA PARA ECONOMÍA Y FINANZAS 3 (1MAT27)

Semestre: 2022-1

Fecha: 21/05/2022

Profesor: Jorge Chávez Fuentes (jrchavez@pucp.edu.pe)

Jefes de Práctica: Joaquin Rivadeneyra (jrivadeneyrab@pucp.edu.pe),
Marcelo Gallardo (marcelo.gallardo@pucp.edu.pe),
Mauricio Vallejos (mauricio.vallejos@pucp.edu.pe).

Puntaje: 20 puntos.

Observación: La solución del examen debe ser colgada en PAIDEIA como máximo hasta las 11.15 a.m. Después de esta hora, ningún documento será aceptado.

Pregunta 1) Las curvas de oferta y de demanda de un bien a través del tiempo se comportan de la siguiente manera:

$$Q_d(t) = -3P''(t) - 2P'(t) + 14P(t)$$
$$Q_s(t) = P''(t) + 6P'(t) + 2P(t).$$

- a) Halle la trayectoria del precio que hace que el mercado del bien esté siempre en equilibrio; es decir, que hace que la demanda sea igual a la oferta en todo instante. Asuma que $P(0) = 1$ y que $P'(0) = 5$. **(2 puntos)**
- b) ¿Qué pasa con el precio en el largo plazo; es decir, cuando $t \rightarrow \infty$? **(1 punto)**

Pregunta 2) Considere el siguiente modelo de crecimiento poblacional:

$$x'(t) = ax - bx^2,$$

donde $x = x(t)$ denota la trayectoria de la población, y las constantes a y b representan los parámetros del modelo. Resuelva los siguientes problemas:

- a) Encuentre la trayectoria $x(t)$ para cualquier condición inicial $x(0) = x_0$. **(3 puntos)**
- b) ¿Qué pasa con la población en el largo plazo; es decir, cuando $t \rightarrow \infty$? **(1 punto)**

Pregunta 3) Considere el siguiente sistema lineal

$$x' = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ -1 & \theta \end{pmatrix} x.$$

- a) En función de los parámetros $\beta \neq 0$ y $\theta \neq 0$, clasifique al equilibrio nulo. **(2 puntos)**
Para $\beta = -1$ y $\theta = 2$, resuelva los siguientes problemas:

- b) encuentre la trayectoria solución **(2 puntos)**
- c) encuentre los subespacios estable e inestable **(1 punto)**
- d) basándose en los subespacios encontrados, haga el diagrama de fases en el plano $X_1 - X_2$ y proporcione una condición inicial para que la trayectoria correspondiente converja al equilibrio. **(2 puntos)**

Pregunta 4) Considere el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{aligned}x' &= yx - 2y \\y' &= xy - 2x.\end{aligned}$$

- a) encuentre los equilibrios **(1 punto)**
- b) ¿es posible aplicar el teorema de Hartman-Grobman? En caso afirmativo, clasifique la estabilidad de los equilibrios. **(2 puntos)**
- c) esboce el diagrama de fases. **(3 puntos)**