PUCP

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

PRÁCTICA DIRIGIDA 2

PROFESOR: JORGE R. CHÁVEZ

JEFE DE PRÁCTICA: MARCELO GALLARDO

SEMESTRE 2024-1

FECHA 19-04-2024

I. Diagonalización

1. Dada la matriz A que se da a continuación, encuentre A^k para todo $k \in \mathbb{N}_0$:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Pruebe que si A y B son equivalentes, entonces $|A| = |B|$.

$B = P^{-1}AP$, $|B| = |P^{-1}AP|P^{-1}PA| = |A|$.

3. Pruebe que si A y B son equivalentes, entonces A^k y B^k también lo son.

$B = P^{-1}AP$, $B^k = P^{-1}A^kP$

$$B^{k+1} = B^kB = P^{-1}A^kPP^{-1}AP = P^{-1}A^{k+1}P.$$

4. Considere el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\delta & 0 \\ \delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

con $k \in \mathbb{Z}_+$ y $\delta \in (0,1)$. Suponga que x_1 es un insumo y x_2 un output.

- Interprete el modelo. Identifique qué podrían ser x_1 y x_2.
- Analice $\lim_{k\to\infty} x_i(k)$ e interprete.

x_{10} stock de un insumo. Por ejemplo metal. Se va usando δ a cada paso para producir x_2. Luego, x_2 son robots para fabricar autos por ejemplo. Ahora bien, $\lambda_1 = 1-\delta$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{v}_1 = [-1, 1]$ y $\mathbf{v}_2 = [0, 1]$. Así,

$$\begin{aligned} A^k &= PD^kP^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-\delta)^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} (1-\delta)^k & 0 \\ 1-(1-\delta)^k & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De este modo

$$\mathbf{x}(k) = A^k\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10}(1-\delta)^k \\ x_{10} + x_{20} - x_{10}(1-\delta)^k. \end{bmatrix}$$

5. Considere el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Obtenga un conjunto solución al sistema lineal. Para esto, transforme el sistema: $D\mathbf{y} = \mathbf{c}$ con $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$ y $\mathbf{c} = P^{-1}\mathbf{b}$.

Los valores propios y sus vectores propios asociados son

$$\lambda = 0 \ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 1 \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 2 \ \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Así,

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

De aquí, se obtiene el sistema (más sencillo)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

<u>II. Formas cuadráticas</u>

1. Clasifique las formas cuadráticas

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2) &= 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 \\ f_2(x_1,x_2,x_3) &= 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2 \\ f_3(x_1,x_2,x_3,x_4) &= 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 6x_3x_4 + x_4^2. \end{aligned}$$

a) Los valores propios son $\lambda = \frac{9\pm\sqrt{65}}{2} > 0$. Así, la forma cuadrática es definida positiva.

c) $\lambda = 0$ con mult 2 y luego $\lambda = 5, 10$. Semi-definida positiva.

2. Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, entonces A^TA es una matriz simétrica de orden $n \times n$. Pruebe, además, que A^TA es positivo semidefinida; esto es, todos sus valores propios son no negativos.

$\lambda x^T x = (A^TAx)\cdot x = (Ax)\cdot(Ax) \geq 0 \implies \lambda \geq 0.$

3. Sea $A = \mathrm{Hess}(f)(\mathbf{x}_0)$ donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. ¿Bajo qué condiciones sobre f, $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ es una forma cuadrática «en el formato estándar»?

4. ¿Para qué valores de α, la forma cuadrática $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $x_1^2 + \alpha x_2^2 + 8x_2x_3 + \alpha x_3^2$ es definida positiva?

Los valores propios son $\lambda_1 = 1$, $\lambda = \frac{a}{2} + 1 \pm \frac{\sqrt{a^2-4a+68}}{2}$.

5. En la base canónica de $\mathbb{R}^2$ una forma cuadrática $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está dada por la siguiente expresión

$$f(x_1,x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Determine cuál es la expresión de la función f en la base de $\mathbb{R}^2$ formada por los vectores $\mathbf{u} = (1,1)$ y $\mathbf{v} = (-2,2)$.

III. Elementos de topología

1. Pruebe que $C[0,1]$ con la norma $||\cdot||_p$, $1 \leq p < \infty$ no es completo.

2. Pruebe que $C[0,1]$ con la norma $||\cdot||_\infty$ es completo.

3. Pruebe que para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se cumple

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|\mathbf{x}\|_p.$$

4. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ y $\|\cdot\|$, la norma dada por

$$||A|| = \sup_{\mathbf{x}\in\partial\mathcal{B}(\mathbf{0};1)} ||A\mathbf{x}||.$$

Pruebe que $\rho(A) \leq \|A\|$ (recuerde que $\rho(A)$ es el radio espectral de A).

5. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ dos puntos fijos y $r_1, r_2 > 0$. Pruebe que

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, r_1) \subset \mathcal{B}(\mathbf{y}, r_2) \Leftrightarrow \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq r_2 - r_1.$$

6. Pruebe el Teorema 4.3.1 y pruebe que (i) la unión finita y la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, (ii) la intersección finita de conjuntos compactos es un conjunto compacto.

7. Se define un vector unitario como aquel cuya norma es 1. Diga cuáles de los siguientes vectores son unitarios.
a) $\mathbf{x} = (1, 0, 2)$, respecto de la norma Euclidiana
b) $\mathbf{x} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, respecto de la norma Euclidiana.
c) $\mathbf{x}(t) = t^2 - 4t + 3,\ t \in\ [0, 4]$, respecto de la norma $\|\cdot\|_1$.

8. Pruebe que para las matrices A de orden $m \times n$ y B, de orden $n \times k$, se cumple la siguiente desigualdad para las correspondientes normas inducidas:

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Deduzca de aquí que si A es cuadrada, entonces $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

9. Calcule la distancia entre las funciones $\mathbf{x}(t) = t^3 - 2t + 5$ e $\mathbf{y}(t) = 3t^2 + t + 3$, $t \in [-3, 3]$

en $C([-3,3], \|\cdot\|_1)$.

IV. Introducción al análisis convexo

1. Basado en argumentos geométricos y por definición, diga cuáles de los siguientes conjuntos son convexos:

a) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 \geq x_1\}$

b $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 \leq \ln x_1\}$

c) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 x_2 = 2\}$

d) $\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ \dfrac{x_1^2}{4} + \dfrac{x_2^2}{9} \leq 1\right\}$

e) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 \leq 2\}$.

2. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : S \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal. Pruebe que el conjunto imagen, $f(S)$, es un conjunto convexo.

3. Sea Y un conjunto de producción. Analice, en función de si la firma posee rendimientos a escala constantes, crecientes o decrecientes, se cumple que, para $\alpha \geq 0$ e $\mathbf{y} \in Y$, $\alpha\mathbf{y} \in Y$. Analice bajo qué condiciones Y es convexo e interprete.

4. Un consumidor tiene preferencias sobre cuatro canastas factibles, pero no se decide por ninguna de ellas y, más bien, decide consumir 3/7 de la primera, 1/7 de la segunda, 2/7 de la tercera y 1/7 de la última. Se requiere saber si esta combinación produce también una canasta factible de consumo.