PUCP

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS IV

PRÁCTICA CALIFICADA 1

PROFESOR: JORGE R. CHÁVEZ

JEFES DE PRÁCTICA: MARCELO GALLARDO & RODRIGO CROUSILLAT

SEMESTRE 2025-2

FECHA 02-09-2025

1) Considere el siguiente conjunto

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x_1 \leq 1/4, \ 0 \leq x_2 \leq 1/4, \ 3x_2 \leq 1 - 4x_1\}.$$

1.1) ¿Es X un conjunto convexo? **(1 punto)**

Si, porque es la intersección de $\{0 \leq x_1 \leq 1/4\} \subset \mathbb{R}^2$, $\{0 \leq x_2 \leq 1/3\} \subset \mathbb{R}^2$ y $\{3x_2 \leq 1 - 4x_1\} \subset \mathbb{R}^2$, los cuales son convexos.

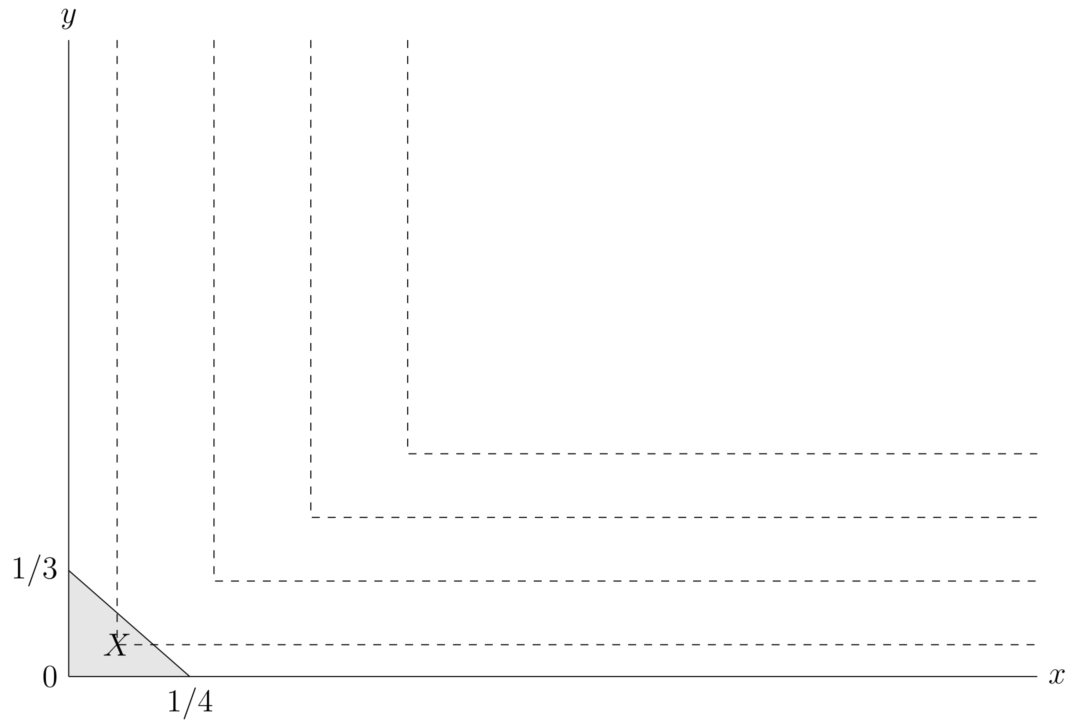
1.2) Identifique X con la restricción presupuestaria de cierto individuo: especifique el vector de precios que enfrenta la persona (si sabe que $p_1 = 4$) y el ingreso disponible $I > 0$. **(1 punto)**

Como la cantidad máxima que se puede consumir del primer bien es $\overline{x_1} = 1/4$, y su precio es $p_1 = 4$, entonces el ingreso es $I = 1$ tal que $\frac{I}{p_1} = \overline{x_1}$.

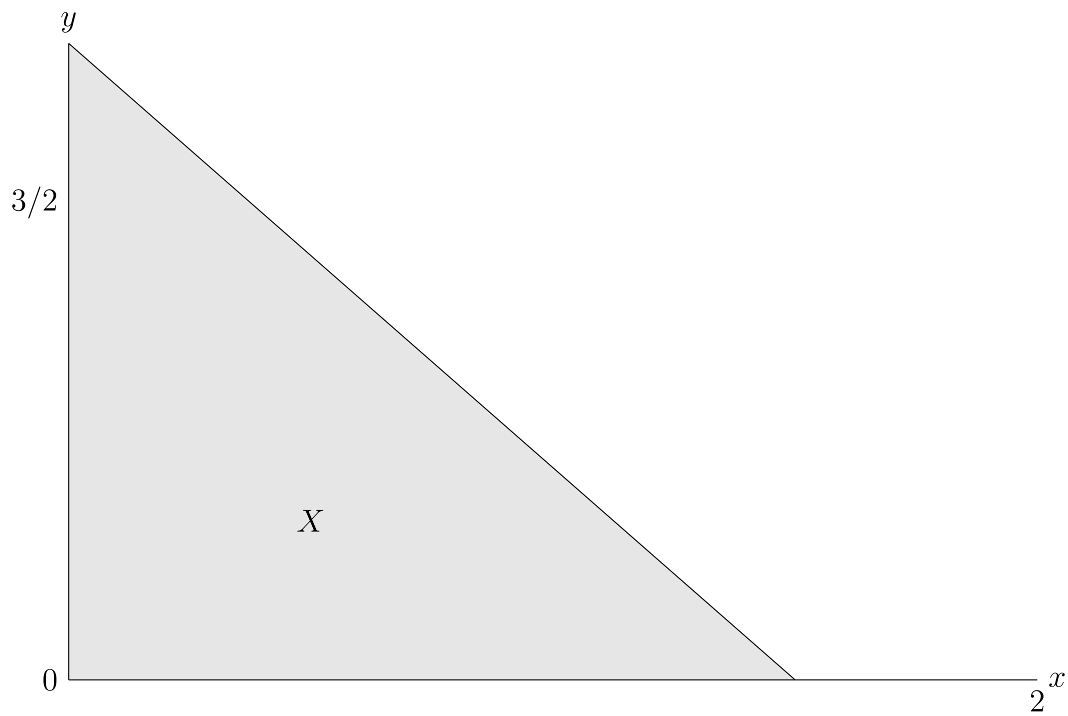
Dado que el ingreso es $I = 1$ y la cantidad máxima que se puede consumir del bien 2 es $\overline{x_2} = \frac{1}{3}$, el precio debe ser $p_2 = 3$ tal que $\frac{I}{p_2} = \overline{x_2}$. Tenemos entonces que

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1.3) Grafique el conjunto X, y, en la misma figura, grafique las curvas de indiferencia de la función de utilidad $u(x_1, x_2) = \text{mín}\{x_1, x_2\}$. **(2 puntos)**



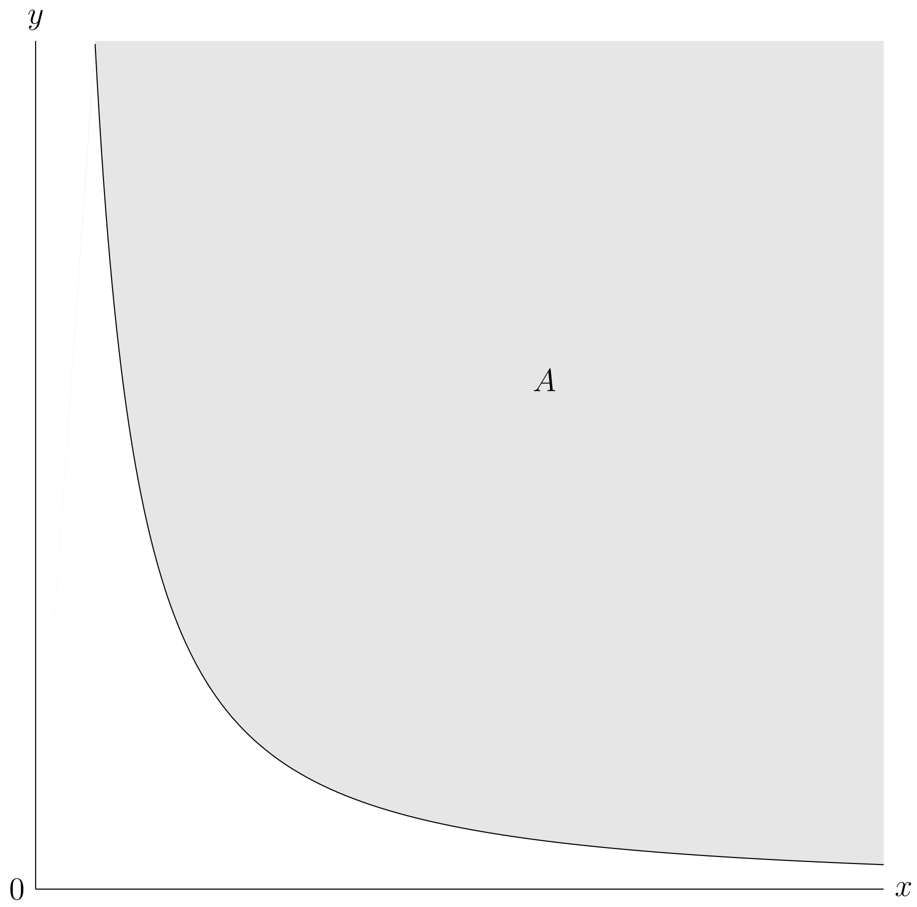
1.4) Grafique de nuevo el conjunto X, pero ahora considere que el ingreso aumenta en 5 unidades monetarias. **(1 punto)**



2) Considere el siguiente conjunto:

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : \; x_1^{1/3} x_2^{1/4} \geq 2\}.$$

2.1) Grafique A. **(1 punto)**



2.2) Determine si A es un conjunto convexo. **(2 puntos)**

El conjunto es el conjunto de nivel superior de $f(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{1/4}$, pero esta es la composición $(g \circ h)(x_1, x_2)$ de $g(x) = e^x$ y $u(x_1, x_2) = \frac{1}{3}\ln x_1 + \frac{1}{4}\ln x_2$. Como g es creciente y h es cóncava, f es cuasicóncava y sus conjuntos de nivel superior, como A, son convexos. Una forma directa de ver esto es aplicando logaritmo y usando la concavidad de $\ln(\cdot)$.

2.3) Determine las preferencias que representa u, y analice si son racionales, convexas y localmente no saciadas. **(2 puntos)**

La función $u(x_1, x_2)$ puede ser tomada como función de utilidad. Las preferencias que representan son

- Racionales, porque están representadas por una función de utilidad.
- Convexas, porque esta función es cuasicóncava. Alternativamente, usando el primer inciso.
- Localmente no saciadas, porque u es estrictamente creciente en x_1 y x_2 sobre $\mathbb{R}^2_{++}$ (tiene primeras derivadas positivas), y creciente sobre $\{x_1 = 0\} \cup \{x_2 = 0\}$.

3) Determine cuales de los siguientes conjuntos son convexos (1 punto cada una):

3.1 $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$. Convexo, es una bola.

3.2 $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 4\}$. No convexo, es una circunferencia.

3.3 $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 4 \leq x\}$. Convexo, cambiando x_1 con x_2, es el epigrafo de una función cuadrática positiva y, por ende, convexa.

3.4 $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq e^{x_1}\}$. No convexo, es el hipografo de una exponencial positiva, y por ende convexa.

3.5 $\{x_1 \in \mathbb{R} :\ 0 \leq x_1 \leq 5 \text{ o } x_1 \geq 8\}$. No convexa, es la unión de dos intervalos disjuntos, y por ende no es conexo ni convexo.

4) Proponga una función que represente las preferencias de la siguiente afirmación: Una persona nunca come pan solo, siempre lo acompaña con mermelada, pero cuando no hay mermelada, usa mantequilla. **(3 puntos)**

$$x_1 = \text{pan}, \qquad x_2 = \text{mermelada}, \qquad x_3 = \text{mantequilla}$$

$$u(x_1, x_2, x_3) = \min\{ax_1,\, bx_2 + cx_3\}, \qquad a, b, c > 0$$

$$u(x_1, x_2, x_3) = \min\{ax_1,\, bx_2\} + \min\{ax_1,\, cx_3\}, \qquad a, b, c > 0$$

5) Se sabe que las preferencias lexicográficas $\succeq_L$ no tienen representación de utilidad para el conjunto de todas las posibles palabras (que es infinito). Ahora, considere el conjunto de palabras de 4 letras, denotado por X, y el conjunto de palabras de 4 letras o menos, denotado por Y.

5.1 ¿Tiene $\succeq_L$ representación de utilidad sobre X? Si la tiene, proponga una función de utilidad. **(1 punto)**

La existencia de una función de utilidad es inmediata, pues X es finito. En particular, X tiene 27^4 elementos, todas las posibles formas de formar palabras de 4 letras. Uno puede definir u tal que $u(aaaa) = 27^4, u(aaab) = 27^4 - 1, \ldots, u(zzzy) = 1, u(zzzz) = 0$.

5.2 ¿Tiene $\succeq_L$ representación de utilidad sobre Y? Si la tiene, proponga una función de utilidad. **(1 punto)**

La existencia de una función de utilidad es inmediata, pues Y también es finito (ver PD). En particular, X tiene $27^4 + 27^3 + 27^2 + 27$ elementos, todas las posibles formas de formar palabras de 4 letras o menos. Uno puede definir u tal que $u(a) = 27^4 + 27^3 + 27^2 + 27, u(aa) = 27^4 + 27^3 + 27^2 + 27 - 1, \ldots, u(zzzy) = 1, u(zzzz) = 0$.