PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS
PRÁCTICA DIRIGIDA 3
PROFESOR: Jorge Richard Chávez Fuentes
JEFES DE PRÁCTICA: Marcelo Gallardo, Rodrigo Crousillat
SEMESTRE 2025-2

El problema de Karush-Kuhn-Tucker

Ejercicio 1. Encuentre el máximo y el mínimo de $f(x,y) = x^3 + 2y^3$ en el conjunto $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Ejercicio 2. Encuentre el máximo y el mínimo de $f(x) = x^2 + y^2$ en el cuadrado $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Ejercicio 3. Pruebe que el problema

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}-2} \\ \text{s.a.} & x^2+y^2 \leq 1 \end{array}$$

Tiene solución. Luego, resuelva el problema.

Ejercicio 4. Pruebe que el problema

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & xy + x^2 \\ \text{s.a.} & x^2 + y \leq 2 \\ & y \geq 1 \end{array}$$

Tiene solución. Luego, resuelva el problema.

Ejercicio 5. Resuelva el problema

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & 1 - x^2 - y^2 \\ \text{s.a.} & x \geq 2 \\ & y \geq 3. \end{array}$$

Aplicaciones a la economía

Ejercicio 6. Para $L = 2$, $p_1 = p_2 = 1$, $w = 10$ y $u(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$, resuelva el problema de maximización de utilidad (UMP).

Ejercicio 7. Resuelva el UMP para

$$u(x_1, x_2) = \alpha \ln x_1 + (1 - \alpha) \ln x_2, \ \alpha \in (0, 1).$$

Ejercicio 8. Resuelva el UMP, dado un vector de precios $p > 0$ y riqueza $w > 0$ para

1) $u(x_1, x_2) = x_1 + \ln x_2$.
2) $u(x_1, x_2) = x^{1/2} y^{1/3}$.
3) $u(x_1, x_2) = x^2 y^3$.
4) $u(x_1, x_2) = e^{x+y}$
5) $u(x_1, x_2) = \ln(x + 2y + 1)$
6) $u(x_1, x_2) = x^{1/2} + y^2$
7) $u(x_1, x_2) = 3x + \ln(y + 1)$
8) $u(x_1, x_2) = 2x + 4y^{3/4}$

Ejercicio 9. Resuelva el UMP, dado un vector de precios $p > 0$ y riqueza $w > 0$ para

1) $u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$.
2) $u(x) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{\alpha_i}$, $\alpha_i, a_i > 0$ (Stone-Geary).
3) $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{\rho}$, $\rho \in (0, 1)$, $\alpha_i > 0$.
4) $u(x) = \text{mín}\left\{\frac{x_1}{a_1}, \cdots, \frac{x_n}{n}\right\}$, $a_i > 0$.

Ejercicio 10. Considere la siguiente función de utilidad

$$u(x_1, x_2) = x_1^{0.5} + x_2^{0.5}.$$

1) Encuentre las demandas ordinarias, la función de utilidad indirecta y la función de gasto.
2) Si los precios iniciales son ($p_1^0 = p_2^0 = 2$) pero luego $p_1^1 = 3$ (manteniendo $p_2^1 = 2$ y considerando $w = 100$), calcule la variación compensada y la variación equivalente.

Ejercicio 11. (∗) Suponga que en un mundo con dos bienes, la función de utilidad del consumidor toma la forma

$$u(x) = [\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho}]^{1/\rho}, \ \rho \neq 0, \ \alpha_i > 0. \tag{1}$$

Esta es una función de utilidad de elasticidad de sustitución constante (CES). Pruebe lo siguiente:

1) Cuando $\rho = 1$, la utilidad se vuelve lineal.

2) Cuando $\rho \to 0$, la utilidad representa las mismas preferencias que la función de utilidad Cobb-Douglas $u(x) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$.

3) Cuando $\rho \to -\infty$, la utilidad representa las mismas preferencias que la función de utilidad Leontief $\min\{x_1, x_2\}$.

Trate de generalizar este resultado para «el mundo con L bienes».

Ejercicio 12. (∗∗) Una función de utilidad $u(x)$ es aditivamente separable si tiene la forma

$$u(x) = \sum_{\ell=1}^{L} u_\ell(x_\ell)$$

1) Demuestre que la separabilidad aditiva es una propiedad cardinal que solo se preserva mediante transformaciones lineales de la función de utilidad.

2) Demuestre que el orden inducido sobre cualquier grupo de bienes es independiente de los valores fijos que asignemos a los demás.

3) Demuestre que la función de demanda Walrasiana y Hicksiana generada por una función de utilidad aditivamente separable no admite bienes inferiores[1] si las funciones $u_\ell(\cdot)$ son estrictamente cóncavas. Suponga diferenciabilidad y soluciones interiores.

Ejercicio 13. Sea $f(z_1, z_2) = z_1^\alpha z_2^\beta$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Resuelva el problema de minimización de costos. Pruebe que

$$c(w_1, w_2, q) = q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \theta \phi(w_1, w_2)$$

con $\phi(w_1, w_2) = w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$ y

$$\theta = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}}.$$

Ejercicio 14. Considere la siguiente función de utilidad (intertemporal)

$$u(x) = \sum_{t=1}^{T} \beta^t \sqrt{x_t}.$$

1) Para $\beta = 1$, obtenga la demanda Walrasiana y la función de utilidad indirecta.

2) Para $\beta \in (0, 1)$, pruebe que

$$x_t^* = \frac{\beta^{2(t-1)}(1 - \beta^2)}{1 - \beta^{2(T)}}.$$

[1] La demanda disminuye cuando el ingreso aumenta.

Ejercicios para profundizar

Ejercicio 15. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ convexa y diferenciable. Pruebe que la función

$$g(x) = \exp\left[\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right], \ x > 0,$$

es convexa.

Ejercicio 16. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Para $h > 0$ fijo, defina

$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt.$$

Pruebe que si f es convexa, $f_h(x) \geq f(x)$.

Ejercicio 17. (∗∗) Considere una función de producción de tipo CES (Constant Elasticity of Substitution) generalizada $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$

$$f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^\rho\right)^{1/\rho}, \ \rho \neq 0, \ \alpha_i > 0. \tag{2}$$

Demuestre que f es cuasi cóncava para $\rho \leq 1$.

<u>Nota histórica</u>: *La función CES (Elasticidad Constante de Sustitución) es un tipo de función de producción utilizada en economía para representar una tecnología que permite sustituir entre insumos con una elasticidad constante. Fue introducida por Kenneth Arrow (matemático y premio nobel de economía de 1972), H. B. Chenery, B. S. Minhas, y Robert Solow matemático y premio nobel de economía de 1987) en 1961. Los parámetros α_i representan las participaciones de los insumos en la producción, y ρ determina la facilidad de sustitución entre estos insumos, con ρ cerca de cero indicando sustitutos cercanos y ρ muy negativo indicando complementos cercanos. La elasticidad de sustitución es una medida económica que indica qué tan fácilmente los consumidores o productores pueden sustituir un bien o insumo por otro en respuesta a cambios en los precios relativos. Esencialmente, refleja la sensibilidad de la proporción en la que se usan dos bienes o insumos ante cambios en la relación de sus precios. Si la elasticidad de sustitución es alta, significa que los bienes o insumos se pueden sustituir fácilmente entre sí. Por ejemplo, si el precio de un bien aumenta, los consumidores o productores pueden cambiar rápidamente a un bien sustituto más barato sin mucha pérdida en utilidad o productividad. Por otro lado, una elasticidad baja indica que los bienes o insumos son más complementarios, lo que significa que es difícil sustituir uno por el otro sin afectar significativamente el consumo o la producción.*

Ejercicio 18. (∗∗) Demuestre que si una función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es cuasi cóncava y homogénea de grado 1, entonces es cóncava. Use esto para deducir que la CES generalizada (Ecuación (2)) es cóncava para $\rho \leq 1$.

Ejercicio 19. (*) Sea $u(x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de utilidad cuasi cóncava y de clase C^2, con utilidades marginales estrictamente positivas, con utilidades marginales positivas.

1) Demuestre que su tasa marginal de sustitución (TMS) u_{x_1}/u_{x_2} es decreciente en x_1. Para esto, suponga que x_2 es función diferenciable de x_1, $x_2 = x_2(x_1)$. Además analice esto desde la perspectiva de una curva de nivel.

2) ¿Es cierto que cuando la TMS es decreciente el consumidor está dispuesto a dar cada vez más unidades del bien x_1 por una unidad del bien x_2 cuando su consumo en x_1 es mucho mayor que el de x_2? Justifique su respuesta.

Ejercicio 20. Considere el problema de maximización de la utilidad

$$\mathcal{P}_u : \begin{cases} \text{máx} & u(\mathbf{x}) \\ \text{s. a :} & \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq I \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Asuma que $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$, $I > 0$ y que $u(\cdot)$ es continua y tal que $\mathbf{x_2} \geq \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \neq \mathbf{x_1} \implies u(\mathbf{x_2}) > u(\mathbf{x_1})$. Sea $\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)$ una solución al problema.

1) Demuestre que $\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)$ es homogénea de grado cero (es decir, $\mathbf{x}^*(\alpha\mathbf{p}, \alpha I) = \mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)$ para todo $\alpha > 0$) y que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I) = I$.

2) Si u es cuasi cóncava, demuestre que el conjunto de soluciones al problema $\mathcal{P}_u$ es convexo. Si u es estrictamente cuasi cóncava, demuestre que el conjunto de soluciones al problema $\mathcal{P}_u$ es unitario (la solución es única).

3) Considere $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, $u(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n x_i$, $p_i = 1$, $\forall\ i$, e $I = 20$. Resuelva $\mathcal{P}_u$ analíticamente. Justifique su respuesta. <u>Nota</u>: Puede usar cualquier método o argumento que considere viable.

4) Considere $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, $u(\mathbf{x}) = \text{mín}\{x_1, ..., x_n\}$, $p_i = 1$, $\forall\ i$, e $I = 100$. Resuelva $\mathcal{P}_u$ analíticamente. Justifique su respuesta.

5) Haga lo mismo para $u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ con $a_i > 0$.

Ejercicio 21. Considere el problema de minimización del gasto:

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \\ &\text{s. a. : } u(\mathbf{x}) \geq \overline{u} \\ &\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

donde u es una función de utilidad continua tal que $\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}_1 \Rightarrow u(\mathbf{x}_2) > u(\mathbf{x}_1)$ y $u(\mathbf{0}) = 0$. Por otro lado, $\overline{u}$ es un parámetro positivo, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ representa una canasta de consumo.

1) Explique con detalle la formulación del problema. Definimos la función «valor óptimo» por

$$e(\mathbf{p}, \overline{u}) = \min_{\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ u(\mathbf{x}) \geq \overline{u}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}.$$

¿Qué espera que suceda con la función valor óptimo si $\overline{u}$ aumenta?

2) Demuestre que la función valor óptimo es cóncava con respecto al vector de precios $\mathbf{p}$. ¿A qué se debe esto (analice)?

3) Resuelva el problema gráficamente si $n = 2$, $u(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$, $\overline{u} = 5$ y $p_1 = p_2 = 1$. Interprete la solución.

4) Resuelva el problema cuando $u(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ y $p_1 > p_2 > \cdots > p_n$. Interprete su solución (explique lo obtenido en sus propias palabras).

Ejercicio 22. Considere el problema de minimización del costo

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} \\ &\text{s. a: } f(\mathbf{z}) \geq q \\ &\mathbf{z} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

En este problema, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n_+$ es el vector de precio de los insumos de producción $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $f(\cdot)$ la función de producción de la firma y $q > 0$ un parámetro que denota un nivel de producción del bien que produce la firma.

1) Demuestre que la función valor óptimo, conocida como función de costos,

$$c(\mathbf{w}, q) = \min_{f(\mathbf{z}) \geq q, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{z},$$

es creciente en $\mathbf{w}$ (esto es, $\mathbf{w}_1 \leq \mathbf{w}_2 \implies c(\mathbf{w}_1, q) \leq c(\mathbf{w}_2, q)$) y que es homogénea de grado 1 en $\mathbf{w}$ (esto es, $c(\lambda \mathbf{w}, q) = \lambda c(\mathbf{w}, q)$ para todo $\lambda > 0$).

2) Pruebe que $c(\mathbf{w}, q)$ es cóncava con respecto al vector de insumos $\mathbf{w}$.

3) Pruebe que si $f(\cdot)$ es cóncava, entonces $c(\cdot)$ es una función convexa con respecto a q.

4) Suponga que $f(\cdot)$ es homogénea de grado $\alpha > 0$, esto es $f(\lambda \mathbf{z}) = \lambda^\alpha f(\mathbf{z})$ para todo $\lambda > 0$. Asuma que la restricción se da con igualdad: $f(\mathbf{z}) = q$ (no hay desperdicios). Pruebe que

$$c(\mathbf{w}, q) = q^{1/\alpha} c(\mathbf{w}, 1).$$

5) Considere la siguiente función

$$c(\mathbf{w},q) = Aw_1^a w_2^b q^c, A, c > 0.$$

¿Bajo qué condiciones sobre los parámetros a, b esta función corresponde a una función de costos? Suponga que si una función cumple con las propiedades descritas anteriormente y además es continua, es suficiente para asegurar que es una función de costos.

Nota histórica: El problema de recuperar la función de producción o función de utilidad a partir de una función de costo o de gasto es central en la teoría económica y utiliza herramientas como el lema de Shepard, en honor al economista Ronald Shepard, profesor en la Universidad de California, Berkeley. Este lema establece una relación formal entre las derivadas respecto a los precios de la función de costos (la función de gasto, respectivamente) y las demandas condicionales de los factores (la demanda Hicksiana, respectivamente). Paul Samuelson, uno de los teóricos más influyentes en economía y Premio Nobel de Economía en 1970, también contribuyó al desarrollo de la teoría de la dualidad y los métodos para recuperar funciones de utilidad y producción a partir de funciones de costos y gastos. El siguiente problema está relacionado a estas cuestiones y no se requiere emplear las herramientas desarrolladas por Shepard o Samuelson.

6) Considere la siguiente función de costos:

$$c(\mathbf{w},q) = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i w_i\right] q,$$

donde $a_i > 0, \forall\, i = 1, ..., n$. Pruebe que si la función de producción asociada es homogénea de grado 1 y que la restricción se da con igualdad (es decir $f(\mathbf{z}) = q$), entonces:

$$f(a_1, ..., a_n) = 1$$

para cualquier combinación de los parámetros $a_i > 0$.

7) Determine la función de producción f si $c(\mathbf{w},q) = \text{mín}\left\{\frac{w_1}{b_1}, \cdots, \frac{w_n}{b_n}\right\} q$.

Ejercicio 23. Defina

$$v(p,w) = \max_{x\geq 0,\ p\cdot x\leq w} u(x).$$

Pruebe que la función de utilidad indirecta $v : \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_+$ satisface las siguientes propiedades

1) Homogeneidad de grado cero.

2) Estrictamente creciente en w y no creciente en p_ℓ.

3) Cuasi-cóncava: $\{(p,w) : v(p,w) \leq \overline{v}\}$ es un conjunto convexo para todo $\overline{v}$.

4) Continua en p, w. Sugerencia: investigue acerca del Teorema de Berge.