

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

1MAT33 ANÁLISIS FUNCIONAL

Segunda práctica (tipo a)

Primer semestre 2024

**Indicaciones generales:**

- Duración: 110 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: sin apuntes de clase.
- No está permitido el uso de ningún material de consulta o equipo electrónico.
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**

Puntaje total: 20 puntos.

---

Cuestionario:

**Pregunta 1 (6 puntos)**

Sea  $E$  un espacio normado y  $F \subset E$  subespacio cerrado. Entonces, demuestre que:

a) Dado  $x \in E$ ,

$$||[x]||_{E/F} = \inf_{v \in F} ||x - v||_E$$

define una norma en  $E/F$  (el espacio cociente).

b) Si  $E$  es de Banach,  $E/F$  también es de Banach (seguimos usando la misma norma).

c) Si  $\pi : E \rightarrow E/F$  es tal que  $\pi(x) = [x]$ , entonces  $||\pi(x)||_{E/F} \leq ||x||_E$ .

**Pregunta 2 (4 puntos)**

Sea  $(E, ||\cdot||_E)$  un espacio normado real. Pruebe que el funcional de Minkowski de la bola abierta  $B(0, 1)$  coincide con  $||\cdot||_E$ .

**Pregunta 3 (6 puntos)**

a) Sean  $E_1$  y  $E_2$  espacios normados y  $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ . Pruebe que

$$||T|| = \sup\{|\varphi(T(x))| : \varphi \in B_{E_2'}, x \in B_{E_1}\}.$$

Acá  $B_X$  es la bola unitaria.

b) Sea  $E$  un espacio normado y  $F \subset E$  subespacio de  $E$ . El anulador de  $F$  está definido por

$$F^\perp = \{\varphi \in E' : \varphi(x) = 0, \forall x \in F\}.$$

Pruebe que  $F'$  es isomorfo a  $E'/F^\perp$ .

**Pregunta 4 (4 puntos)**

- a) De un ejemplo de una función que no sea continua pero que su gráfico sea cerrado.
- b) Sea  $T : E \rightarrow E'$ ,  $E$  espacio normado tal que  $T(x)(x) \geq 0$  para todo  $x \in E$ . Pruebe que  $T$  es acotado.

Profesor del curso: Percy Fernández.

San Miguel, 10 de mayo del 2024.