PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Práctica Dirigida 1
Primer semestre 2025

Aquellos ejercicios marcados con (∗) o (∗∗) son más retadores para alumnos sin previa exposición a cursos de análisis en $\mathbb{R}^n$ y microeconomía. Todos los ejercicios se pueden resolver aplicando análisis convexo y optimización, sin importar el contexto del problema.

Elementos de álgebra lineal

I. Espacios vectoriales y producto interno.

1. Demuestre que en un espacio vectorial $\mathcal{U}$, el vector nulo (elemento neutro) $\mathbf{0}$ es único.
2. Dados $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, analice si $|x_1 y_1| \cdot |x_2 y_2|$ define un producto interno. Sugerencia: considere $(x_1, x_2) = (1, 0)$.
3. Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}$, pruebe que si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, entonces $||\mathbf{x}|| \leq ||\mathbf{x} + a\mathbf{y}||$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Sugerencia: recuerde que $||\mathbf{x}||^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$.
4. Pruebe que
$$16 \leq (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \right), \ x_i > 0.$$
Sugerencia: use la desigualdad media-aritmética o Cauchy-Schwarz.
5. Pruebe que si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{y}$ es un vector en la misma dirección del vector $\mathbf{x}$, entonces $\mathrm{Pr}_{\mathbf{x}}\mathbf{y} = \|\mathbf{y}\|\mathbf{u}$, donde $\mathbf{u}$ es un vector unitario en la dirección del vector $\mathbf{x}$.
6. Demuestre que, dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$, donde $||\mathbf{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Esto se conoce como la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Sugerencia: use $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \geq 0$ o considere el polinomio $p(t) = ||\mathbf{x} - t\mathbf{y}||$.
7. Asuma que la desigualdad anterior se cumple en $\mathbb{R}^n$ (esto se deduce de hecho de una de las posibles demostraciones del ítem anterior de manera directa). Demuestre que
$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$
Sugerencia: considere el vector $\mathbf{1}$ y $(x_1, ..., x_n)$.
8. Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz para probar la desigualdad triangular: $\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ (para $\mathbb{R}^n$ es la misma prueba)
$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||.$$
Sugerencia: use Cauchy-Schwarz.

II. Subespacios vectoriales. Bases y dimensión.

1. Analice si $S = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 x_2 \geq 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ y de serlo, encuentre su dimensión.
2. Analice si $S = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n} :\ A \text{ es simétrica}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ y de serlo, encuentre su dimensión.

3. Si el concepto de combinación lineal se extendiera a una suma infinita, ¿cuál seria una combinación lineal que generaría la función $f(x) = e^x$? ¿Y para $g(x) = \cos x$?

4. Determine todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$.

5. Demuestre que el conjunto de todas las funciones continuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es un subespacio vectorial del espacio vectoriales de funciones $F : [a, b] \to \mathbb{R}$.

6. Si $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_4$ genera $\mathcal{U}$, analice si

$$\{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_4\}$$

   generan el espacio.

7. Analice la siguiente afirmación: si $\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m\}$ y $\{\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m\}$ son listas de vectores li, entonces $\{\mathbf{x}_i + \mathbf{y}_i\}_{i=1,...,m}$ es una lista de vectores li.

III. Transformaciones lineales.

1. Considere las siguientes dos variables económicas: el precio de un cierto bien, denotado por p, y la demanda de un consumidor de dicho bien, denotada por D. Proponga una relación lineal o lineal afín (escoja adecuadamente una de las 2) entre D y p. Justifique e interprete su propuesta. ¿Cómo cambiaría si sabe que el consumidor es muy sensible al precio?

2. Pruebe que las aplicaciones T que se dan a continuación son transformación lineales. a) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, 3x_1)$.

   b) $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_2, x_1 + 3x_1)$.

   c) $T(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + x_2 - x_3$.

3. Sea T una transformación lineal. Pruebe que si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ son ld, entonces $T\mathbf{x}_1, T\mathbf{x}_2, \dots, T\mathbf{x}_n$ también son ld.

4. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal, tal que $T(1, 0) = (1, 3)$ y $T(0, 1) = (1, 1)$. Obtenga $T(2, 5)$. En general, ¿cómo es $T(x_1, x_2)$?

5. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación definida por

$$T(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2, x_1 + x_2).$$

   Encuentre la matriz asociada a T en la base $\mathcal{B} = \{(5, 3), (1, 1)\}$.

6. Sea A un matriz cuadrada de orden $n \times n$. Pruebe que si $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces $A = 0$.

7. Proporcione un ejemplo de una aplicación homogénea de grado 1 que no sea aditiva.

8. Considere una función de producción tipo Cobb-Douglas: $F(K, L) = AK^\alpha L^\beta$, donde K denota capital, L trabajo y $A > 0$ es una constante.

   - ¿Bajo qué condiciones sobre los parámetros un incremento en los insumos genera un incremento en la producción?
   - ¿Bajo qué condiciones sobre los parámetros la tasa de crecimiento de la producción respecto de sus factores K y L es cada vez menor?

9. Sea $\mathcal{U}$ un espacio vectorial con dimensión $n > 1$. Sea $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ el espacio de aplicaciones lineales de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{U}$. Considere $C \subset \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ el conjunto de todas la aplicaciones lineales no invertibles de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{U}$. Analice si C es o no un subespacio vectorial.

Modelos

Modelo de Leontief.

Considere tres sectores productivos: el sector primario agro-exportador, el sector industrial y el sector de servicios. Suponga que, en términos de proporciones, el sector primario requiere de 0.4 de su propio sector, 0.4 del sector industrial y 0.1 del sector de servicios. Por otro lado, el sector industrial requiere de 0.2 del sector agro-exportador, 0.2 de su propio sector y del sector servicios 0.3. Finalmente, el sector servicios requiere 0.2 del sector agro-exportador, 0.1 del sector industrial y 0.3 de su propio sector. Además, se sabe que la demanda externa es $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 200 \end{bmatrix}$.

- Plantee el modelo como un problema de insumo-producto e interprételo.
- Encuentre la oferta óptima (cantidad producida) por cada sector en el equilibrio.

Modelo general de oferta y demanda.

Considere un mercado con $1, \cdots, N$ bienes. Denotemos las cantidades por q_i y los precios p_i.

- Represente matricialmente la siguiente situación: la demanda por un bien depende de los precios de todos bienes de forma lineal.
- Represente matricialmente la siguiente situación: la demanda por un bien depende únicamente de su precio.
- Para los dos ítem anteriores, interprete la pre-imagen de $\{\mathbf{0}\}$.
- Analice en función de si los bienes son complementarios o sustitutos los valores de los parámetros.

Función homogénea de grado k.

Considere la función $F : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x_1, \cdots, x_n; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta_i}.$$

- Una función es homogénea de grado $k > 0$ si $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^k f(\mathbf{x})$.
- De condiciones sobre los parámetros $\theta_1, \cdots, \theta_n$ para que F sea homogénea de grado k.
- Demuestre que si f es homogénea de grado k, $\langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle = k f(\mathbf{x})$.
- En investigación operativa, un tema fundamental es la producción.
  1. Interprete F como una función de producción: ¿qué representan los x_i? ¿los θ_i?
  2. Analice el comportamiento de F en función de los parámetros: monotonía, rendimientos a escala.
  3. Modifique F para ajustarse al siguiente enunciado: *para que la producción no sea nula, es necesario que cada insumo i sea mayor estrictamente a un umbral a_i.* **Nota:** la función que va a construir volverá a aparecer más adelante.

Ejercicios adicionales. Fuente: `https://www2.math.upenn.edu/ugrad/calc/m240/240la.pdf`

1. Espacios vectoriales. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son espacios vectoriales?

a) $\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_3 = 0\}$

b) El conjunto de soluciones x de $Ax = 0$, donde A es una matriz $m \times n$.

c) El conjunto de matrices 2×2 A tales que $\det(A) = 0$.

d) El conjunto de polinomios $p(x)$ tales que $\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = 0$.

e) El conjunto de soluciones $y = y(t)$ de la ecuación diferencial $y'' + 4y' + y = 0$.

2. Bases en $\mathbb{R}^2$. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases de $\mathbb{R}^2$?

a) $\{(0,1),(1,1)\}$

b) $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$

c) $\{(1,0),(-1,0)\}$

d) $\{(1,1),(1,-1)\}$

e) $\{(1,1),(2,2)\}$

f) $\{(1,2)\}$.

3. Dependencia lineal en $\mathbb{R}^4$. ¿Para qué valores reales de x los vectores

$$(x,1,1,1), \quad (1,x,1,1), \quad (1,1,x,1), \quad (1,1,1,x)$$

no forman una base de $\mathbb{R}^4$? Para cada valor de x que encuentres, ¿cuál es la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^4$ que generan?

4. Determinante con escalares. Sea A una matriz 5×5 tal que $\det(A) = -1$. Calcula $\det(-2A)$.

5. Caracterización de matrices invertibles. Sea A una matriz $n \times n$ de números reales o complejos. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son equivalentes a: "la matriz A es invertible"?

a) Las columnas de A son linealmente independientes.

b) Las columnas de A generan $\mathbb{R}^n$.

c) Las filas de A son linealmente independientes.

d) El núcleo de A es $\{0\}$.

e) La única solución de la ecuación homogénea $Ax = 0$ es $x = 0$.

f) La transformación lineal $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por A es inyectiva.

g) La transformación lineal $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por A es sobreyectiva.

h) El rango de A es n.

6. Caracterización de aplicaciones lineales inyectivas. Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ una aplicación lineal. Demuestre que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) A es inyectiva (por lo tanto $n \leq k$).

b) $\dim \ker(A) = 0$. (ker es Núcleo por Kernel del alemán).

c) A tiene inversa por la izquierda B, tal que $BA = I$.

d) Las columnas de A son linealmente independientes.

7. Solución general de un sistema. Considere el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - z = a \\ x - y + 2z = b \end{cases}$$

a) Encuentre la solución general de la ecuación homogénea.

b) Una solución particular de las ecuaciones no homogéneas cuando $a = 1$ y $b = 2$ es $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$. Encuentre la solución general del sistema no homogéneo.

c) Encuentre una solución particular cuando $a = -1$ y $b = -2$.

d) Encuentre una solución particular cuando $a = 3$ y $b = 6$.

Observación: una vez hecha la parte a), se pueden escribir directamente las soluciones de las partes siguientes.

8. Resolución matricial. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Encuentre la solución general Z de la ecuación homogénea $AZ = 0$.

b) Encuentre una solución de $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) Encuentre la solución general de la ecuación del inciso b).

d) Encuentre alguna solución de $AX = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y de $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

e) Encuentre alguna solución de $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

f) Encuentre alguna solución de $AX = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Nota: $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Observación: después de hacer los incisos a), b) y e), se pueden escribir directamente las soluciones de los incisos restantes.*

9. Transformación de figuras por matrices. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ como una transformación lineal entre planos.

a) Si dos rectas en el plano original son paralelas, demuestre que sus imágenes bajo A también son paralelas (aunque pueden coincidir).

b) Sea Q el cuadrado unidad: $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. Sea Q' su imagen bajo la transformación A. Demuestre que el área de Q' es $|ad - bc|$.

Más generalmente, el área de cualquier región se multiplica por $|ad - bc|$, lo cual corresponde al determinante de A.

10. Aplicaciones lineales con núcleo dado. Encuentre todas las aplicaciones lineales $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuyo núcleo es exactamente el plano

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}.$$

11. Núcleo e imagen coincidentes. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $T : V \to V$ una transformación lineal tal que la imagen y el núcleo de T coinciden.

a) Demuestre que n es par.

b) Dé un ejemplo de una transformación lineal T con esa propiedad.

12. Espacio de aplicaciones con núcleo dado. Sea $V \subset \mathbb{R}^{11}$ un subespacio lineal de dimensión 4. Considere la familia $\mathcal{A}$ de todas las aplicaciones lineales $L : \mathbb{R}^{11} \to \mathbb{R}^9$ cuyo núcleo contiene a V.

a) Demuestre que $\mathcal{A}$ es un espacio vectorial.

b) Calcule su dimensión.

Profesor del curso: Jorge Chávez.

Asistente de docencia: Marcelo Gallardo.