Lista de ejercicios: convexidad y optimización (IOP224)

Marcelo Gallardo

2024-1

Pontificia Universidad Católica del Perú

marcelo.gallardo@pucp.edu.pe

1 Convexidad

1. Proponga condiciones bajo las cuales el producto de funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexas y de clase C^2 es una función convexa.

2. Sea $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c$, donde $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. ¿Bajo qué condiciones sobre $A, \mathbf{b}$ y c la función f es convexa?

3. Pruebe que si f es convexa sobre $[a, b]$, entonces se cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

4. Sea $u(x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de utilidad cuasi cóncava y de clase C^2 , con utilidades marginales estrictamente positivas. Demuestre que su tasa marginal de sustitución (TMS) u_{x_1}/u_{x_2} es decreciente en x_1. Para esto, suponga que x_2 es función diferenciable de x_1, $x_2 = x_2(x_1)$.

5. Sean $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : D_2 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones convexas. Pruebe que

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\},\ \ h : D_1 \cap D_2 \to \mathbb{R}$$

es convexa.

2 Optimización

2.1 Introducción a la optimización

1. Considere el problema de minimización del gasto:

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$$
$$\text{s. a.} : u(\mathbf{x}) \geq \overline{u}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

donde u es una función de utilidad continua tal que $\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}_1 \Rightarrow u(\mathbf{x}_2) > u(\mathbf{x}_1)$ y $u(\mathbf{0}) = 0$. Por otro lado, $\overline{u}$ es un parámetro positivo, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{+}$ representa una canasta de consumo.

1. Explique con detalle la formulación del problema. Definimos la función «valor óptimo» por

$$e(\mathbf{p}, \overline{u}) = \min_{\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ u(\mathbf{x}) \geq \overline{u}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}.$$

   ¿Qué espera que suceda con la función valor óptimo si $\overline{u}$ aumenta?

2. Demuestre que la función valor óptimo es cóncava con respecto al vector de precios $\mathbf{p}$. ¿A qué se debe esto (analice)?

3. Resuelva el problema gráficamente si $n = 2$, $u(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$, $\overline{u} = 5$ y $p_1 = p_2 = 1$. Interprete la solución.

4. Resuelva el problema cuando $u(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ y $p_1 > p_2 > \cdots > p_n$. Interprete su solución (explique lo obtenido en sus propias palabras).

2 [Levin, Stanford y Paul Milgrom 2004]. Dada una tecnología $Y \subset \mathbb{R}^n$ y dado un vector de precios $\mathbf{p}$ (tanto de inputs como de outputs) definimos la función de beneficios $\pi(\mathbf{p}) = \max_{\mathbf{y} \in Y} \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}$.

1. Explique la formulación del problema de optimización y demuestre que $\pi(\cdot)$ es homogénea de grado 1 ($\lambda > 0$). Interprete esto último.

2. Demuestre que la función $\pi(\cdot)$ es convexa.

3. Demuestre que si Y es cerrada (es decir Y es un conjunto cerrado) y convexa (es decir Y es un conjunto convexo), entonces

$$Y = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} \leq \pi(\mathbf{p}), \ \forall \ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n\}.$$

3. Considere el problema de maximización de la utilidad

$$\mathcal{P}_u : \begin{cases} \max & u(\mathbf{x}) \\ \text{s. a:} & \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq I \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Asuma que $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$, $I > 0$ y que $u(\cdot)$ es continua y tal que $\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}_1 \implies u(\mathbf{x}_2) > u(\mathbf{x}_1)$. Sea $\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)$ una solución al problema.

1. Demuestre que $\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)$ es homogénea de grado cero (es decir, $\mathbf{x}^*(\alpha\mathbf{p}, \alpha I) = \mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)$ para todo $\alpha > 0$) y que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I) = I$.

2. Si u es cuasi cóncava, demuestre que el conjunto de soluciones al problema $\mathcal{P}_u$ es convexo. Si u es estrictamente cuasi cóncava, demuestre que el conjunto de soluciones al problema $\mathcal{P}_u$ es unitario (la solución es única).

3. Considere $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, $u(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n x_i$, $p_i = 1$, $\forall \ i$, e $I = 20$. Resuelva $\mathcal{P}_u$ analíticamente. Justifique su respuesta. <u>Nota</u>: puede usar cualquier método o argumento que encuentre factible.

4. Considere $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, $u(\mathbf{x}) = \min\{x_1, ..., x_n\}$, $p_i = 1$, $\forall \ i$, e $I = 100$. Resuelva $\mathcal{P}_u$ analíticamente. Justifique su respuesta. <u>Nota</u>: puede usar cualquier método o argumento que encuentre factible.

4. Considere el problema de minimización del costo

$$\begin{aligned} &\min \ \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} \\ &\text{s. a. } f(\mathbf{z}) \geq q \\ &\mathbf{z} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

En este problema, $\mathbf{w}$ es el vector de precio de los insumos de producción $\mathbf{z}$, $f(\cdot)$ la función de producción de la firma y q un parámetro que denota un nivel de producción del bien que produce la firma. Demuestre que la función valor óptimo, conocida como función de costos,

$$c(\mathbf{w}, q) = \min_{f(\mathbf{z}) \geq q, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{z}$$

1. Es creciente en $\mathbf{w}$ (esto es, $\mathbf{w}_1 \leq \mathbf{w}_2 \implies c(\mathbf{w}_1, q) \leq c(\mathbf{w}_2, q)$) y que es homogénea de grado 1 en $\mathbf{w}$ (esto es, $c(\lambda \mathbf{w}, q) = \lambda c(\mathbf{w}, q)$ para todo $\lambda > 0$).
2. Es cóncava con respecto al vector de insumos $\mathbf{w}$.
3. Pruebe que si $f(\cdot)$ es cóncava, entonces $c(\cdot)$ es una función convexa con respecto a q.
4. Determine f si $c(\mathbf{w}, q) = \min\left\{\frac{w_1}{b_1}, \cdots, \frac{w_n}{b_n}\right\} q$.

3 Optimización: condiciones de 1er y 2do orden

1 [Chávez y Gallardo 2024]. Plantee el problema de MCO cuando hay una muestra de N observaciones, una variable dependientes y una variable independiente. Resuelva el problema.

2 [Gallardo 2018]. Investigue acerca de la paradoja de San Petersburgo y su relación con la concavidad de las funciones de utilidad tipo Bernouilli.

3 [Varian 1982]. Supongamos que un consumidor tiene inicialmente la riqueza monetaria W. Existe la probabilidad p de que pierda la cantidad L; por ejemplo, existe la probabilidad p sw que se queme su casa. Puede suscribir un seguro por el que percibirá q soles si experimenta esta pérdida. La cantidad de dinero que ha de pagar a cambio de q soles de cobertura del seguro es πq, donde π es la prima por sol de cobertura. ¿Cuántas cobertura suscribirá el consumidor?

4 [Chávez y Gallardo 2024]. La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ puede escribirse de la siguiente forma:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - a)^{2m} + (x_2 - b)^{2n} + c,$$

donde a, b y c son constantes y $m, n \in \mathbb{N}$.

a) ¿Cuál es el punto mínimo de la función f?

b) ¿Cuál es valor mínimo de la función f?

c) ¿Tiene puntos máximos la función f?

4 Definiciones importantes

1. Productividad media.
2. Elasticidad insumo-producto.
3. Rendimientos a escala.
4. Tasa marginal de sustitución técnica.
5. Elasticidad de sustitución.
6. Aversión al riesgo.

5 Referencias

1. Microeconomía Intermedia, Bernardita Vial y Felipe Zurita.
2. Análisis Microeconómico de Hal Varian.
3. Notas en Teoría de Incertidumbre de José Gallardo.
4. Álgebra Lineal y Optimización para el Análisis Económico de Jorge Chávez y Marcelo Gallardo.
5. Producer Theory de Jonathan Levin y Paul Milgrom.