

Notas en teoría del transporte óptimo y sus
aplicaciones en economía y finanzas
Los problemas de regularización entrópica y
métodos computacionales

Marcelo Gallardo (†)

Carlos Cosentino (†) *

Agosto 2023

Pontificia Universidad Católica del Perú

marcelo.gallardo@pucp.edu.pe

a20200397@pucp.edu.pe

Índice

1. Introducción	4
2. El problema de Kantorovich y una invitación a la teoría del transporte óptimo	7
3. Regularización entrópica	17
3.1. Solución vía dualidad del Lagrangiano	23
4. Algoritmo Sinkhorn-Knopp	25
4.1. El algoritmo	25

* (†) Facultad de Ciencias e Ingeniería, Especialidad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú.

4.2.	Preliminares de la prueba de la convergencia del algoritmo Sinkhorn-Knopp	27
4.3.	Convergencia del algoritmo Sinkhorn-Knopp	28
5.	Estimación de costos	31
5.1.	El modelo	31
5.2.	La estructura de costos paramétrica	33
5.3.	SISTA	35
5.4.	Convergencia del algoritmo SISTA	36
5.5.	Prueba de la convergencia de SISTA	42
5.6.	Estudio de la migración	48
6.	Matching	49
6.1.	Modelo de elección discreta	49
6.2.	Marriage market	50
6.3.	Estimación y parametrización	57
6.4.	Estimación de beneficios laborales y productividad laboral	61
6.5.	Mismatching ocupacional y mercado laboral peruano	66
7.	Acotamiento del CVA	68
7.1.	Acotamiento por aproximaciones empíricas	72
7.2.	Regularización entrópica del CVA	75
7.3.	Algoritmo de Sinkhorn para resolver el problema de regularización entrópica	81
8.	Acotamiento del riesgo de un portafolio	84
8.1.	Medidas de riesgo, VaR y CVaR	84
8.2.	Medidas que dependen de dos factores de riesgo	86
8.3.	Riesgo de modelo	87
9.	Conclusiones	93
A.	Fundamentos de topología y análisis real	95
B.	Teoría de la medida	99

C. Teoría de la probabilidad	106
D. Elementos de análisis convexo	111
E. Elementos de análisis funcional	115
F. Subgradientes y subdiferencial	122

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradecemos a nuestro profesor del curso Temas de Análisis (Optimal Transport), Johel Beltrán Ramírez. Este trabajo se inició como proyecto final del curso en cuestión. Además, gran parte del contenido de la Sección 2 está inspirado en sus clases. Por otro lado, agradecemos al profesor del curso Análisis Funcional, Percy Fernandez. El profesor Percy nos introdujo muchos de los resultados que son aludidos a lo largo de este documento. Por ejemplo, el Teorema de Riesz Fréchet o los Teoremas de Hahn-Banach. El anexo de Análisis Funcional E está esencialmente basado en sus notas de clase. Asimismo, algunos desarrollos del apéndice de Análisis Convexo están inspirados en lo enseñado por el profesor Jorge Chávez en el curso Investigación de Operaciones.

1. Introducción

El objetivo del presente documento es presentar algunas de las aplicaciones de la teoría del transporte óptimo en economía y finanzas, con énfasis en los métodos computacionales. En los últimos años, esta teoría viene siendo usada en numerosas investigaciones en áreas como matching, teoría financiera o econometría, ver Galichon (2016), Victor Chernozhukov and Galichon (2022) y Glasserman and Yang (2015). En concreto, vamos a presentar problemas de emparejamiento así como la estimación de estructuras de costos (en situaciones específicas). Aunado a ello, exponemos el problema del acotamiento del *Credit Value Adjustment*, una interesante aplicación en finanzas. Para introducir esto, es necesario establecer en qué contexto vamos a trabajar y por ello, exponer algunas herramientas propias de la teoría del transporte óptimo.

De este modo, empezamos esta discusión, la Sección 2, presentando el problema de Kantorovich. Luego, se introduce el problema regularización entrópica, que denotaremos \mathcal{P}_ε , para el caso de conjuntos finitos en el espacio euclidiano¹: Sección 3. A continuación, en la Sección 4, estudiamos el algoritmo Sinkhorn-Knopp, un método numérico que permite obtener una solución aproximada al

¹Estas simplificaciones permiten presentar la teoría y los modelos de la forma más sencilla y desglosada posible.

problema \mathcal{P}_ε . Después de esto, aterrizamos en las aplicaciones que se han mencionado. En primer lugar, desarrollamos la estimación de una estructura de costos particular en la cual se ha usado de una versión del algoritmo Sinkhorn-Knopp [Dupuy et al. \(2021\)](#). Luego, en la Sección 6 hacemos una breve presentación de la teoría de la elección discreta, la cual nos permite estudiar problemas de emparejamiento en el mercado del matrimonio [Dupuy and Galichon \(2014\)](#) y laboral [Dupuy and Galichon \(2022\)](#). Estos, resultan en una formulación de regularización entrópica y de ahí el vínculo con nuestra primera sección. En la Sección 7 se presenta el problema del acotamiento del *Credit Value Adjustment* [Glasserman and Yang \(2015\)](#). Finalmente, en la Sección 8 presentamos aplicaciones para actuar medidas de riesgo que dependen de dos factores de riesgo [Memartoluie \(2017\)](#) y el riesgo de modelo [Glasserman and Xu \(2014\)](#). En estas dos secciones se estudia el problema de regularización entrópica en el caso continuo y se presentan resultados importantes. Se provee un apéndice con diversos resultados de análisis convexo, funcional y teoría de la medida, entre otros, con la finalidad de hacer este documento lo más auto-suficiente posible. Adentrarse en la teoría del transporte óptimo presupone un dominio de la teoría de la medida y de probabilidad. Más aún, muchos de los resultados aludidos en las aplicaciones requieren del dominio de la teoría de subgradientes y subdiferenciales, que a su vez hacen uso de algunos resultados conocidos del análisis funcional. Recomendamos al lector empezar revisando nuestro anexo, para hacer más efectiva la lectura del documento.

El principal aporte de este documento yace en el desarrollo detallado de diversos resultados en artículos que, en su versión original, no se encuentran desglosados y aluden a resultados matemáticos no tan conocidos. Asimismo, hemos realizado una traducción al español libre de varios de los teoremas y pruebas de las referencias usadas, y desarrollado con más detalle, en caso se haya considerado pertinente, algunos de los resultados que solo eran mencionados en los artículos de la bibliografía de este documento.

Permítanos enfatizar que no se pretende en lo absoluto reemplazar los ya existentes libros de Optimal Transport. Por lo contrario, recomendamos al lector interesado consultar [Ambrosio et al. \(2021\)](#), [Galichon \(2016\)](#) o [Villani \(2009\)](#) para una exposición mucho más completa y general del tema.

Terminamos esta introducción señalando que nuestro público objetivo son alumnos de la especialidad de matemáticas con interés en las aplicaciones en economía y finanzas, o bien estudiantes de economía o finanzas con un sólido background matemático y con intereses en teoría económica y métodos numéricos. Es necesario que el lector esté familiarizado con elementos principales del análisis real, álgebra lineal y topología. Por ejemplo, tener claro las nociones de conjunto compacto, espacio vectorial, espacio métrico o topología es necesario para leer este documento. Nuestras recomendaciones para afianzar estos conceptos son [Abbott \(2015\)](#), [Axler \(2014\)](#) y [Aliprantis and Border \(2006\)](#). En nuestro apéndice solo definimos y presentamos conceptos que aparecen con frecuencia en el cuerpo principal.

Un aspecto muy importante de este documento es que brinda las herramientas necesarias para poder llevar a cabo problemas de investigación en economía y finanzas con metodologías que han sido desarrollados recientemente en la literatura. Concretamente, el algoritmo SISTA y la formulación de problemas de regularización entrópicas en el contexto de la teoría del transporte óptimo.

De este modo, esperamos que estas notas sean de interés y uso para alumnos en la Pontificia Universidad Católica del Perú, y en general, en todo país hispanohablante.

El documento no está extento de typos. De encontrar alguno, por favor señalarlo a nuestros correos.

Marcelo Gallardo y Carlos Cosentino

2. El problema de Kantorovich y una invitación a la teoría del transporte óptimo

Dedicamos esta primera sección a un breve resumen de la teoría de transporte óptimo. Para abordar esta sección, es altamente recomendado consultar el Anexo de este documento. En efecto, se requiere de conocer las definiciones básicas de Teoría de la Medida. Empecemos ahora sí con el tema en cuestión.

La teoría del transporte óptimo nace como un problema de redistribución de masa. Suponga que tenemos dos espacios de medida² (\mathcal{X}, μ) y (\mathcal{Y}, ν) . El primer espacio indica la distribución inicial de una cierta masa, mientras que el segundo espacio dicta la distribución final que debe seguir. A su vez, transportar masa de un punto $x \in \mathcal{X}$ a un punto $y \in \mathcal{Y}$ viene con un costo $c(x, y)$. Por motivos obvios, llamamos a $c : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ la función costo. Lógicamente, queremos minimizar el costo total del proceso de redistribución.

¿Por qué es un asunto tan importante? Dejando de lado que el resto de este trabajo se dedica a presentar aplicaciones en economía y finanzas, brindamos dos aplicaciones bastante intuitivas: una en el caso la masa es continua y otra en el caso la masa es discreta. En ambos casos considere que la función costo es proporcional a la distancia, como usualmente ocurre con los costos de transporte.

1. El problema de redistribución de tierra, originalmente estudiado por Monge en el siglo XVIII y considerado el primer problema de transporte óptimo. Consiste en la siguiente situación: se tiene una pila de tierra con una forma dada $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^3$ y, en otra locación, un hueco en el suelo del mismo volumen que ocupa el espacio $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^3$. Monge se pregunta por la mejor manera de transportar la pila de tierra y así, llenar el hueco. La tierra está uniformemente distribuida antes y después del transporte³. Capturamos esta información con las medidas $\mu = \text{Unif}(\mathcal{X})$ y $\nu = \text{Unif}(\mathcal{Y})$.

²Dejaremos siempre el σ -álgebra implícito. En el caso de espacios métricos consideraremos el σ -álgebra de Borel.

³La densidad de tierra es igual en todos lados en la pila y en el hueco una vez que lo llenamos.

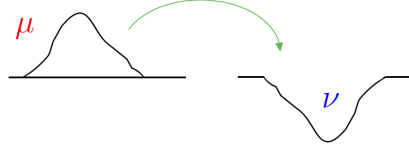


Figura 1: El problema original de Monge.

2. El problema de reasignación de soldados. Consideremos las posiciones (ciudades) $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_m\}$, cada una con una cierta cantidad de soldados, μ_1, \dots, μ_m respectivamente. Supongamos que deseamos transportarlos a las ciudades $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_n\}$, de forma que en las ciudades de Y cuenten con ν_1, \dots, ν_n soldados, respectivamente. Ciertamente la cantidad de soldados en las ciudades de X debe coincidir, con la cantidad de soldados que se necesitan en las ciudades de Y . Esto es, $\sum_{i=1}^m \mu_i = \sum_{j=1}^n \nu_j$. Podemos también definir una matriz de costos que representa el costo de enviar un soldado de x_i a y_j (justamente esta es la función de costos implícita del problema)

(x, y)	y_1	y_2	\cdots	y_n
x_1	c_{11}	c_{12}	\cdots	c_{1n}
\vdots	\vdots		\ddots	\vdots
x_m	c_{m1}			c_{mn}

Un «plan», en este contexto, es una matriz cuyas entradas representan la cantidad de soldados asignados para ir de x_i a y_j (entrada i, j):

(x, y)	y_1	y_2	\cdots	y_n
x_1	π_{11}	π_{12}	\cdots	π_{1n}
\vdots			\ddots	\vdots
x_m	π_{m1}			π_{mn}

Luego de normalizar por la masa de individuos total $M = \sum_{i=1}^m \mu_i$, el problema de minimización que compete a las autoridades planificadores es

$$\min_{\pi \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}_+)} \left\{ \sum_{i,j} \underbrace{c_{ij}}_{=\text{costos}} \underbrace{\pi_{ij}}_{=\text{el plan}} \right\}$$

sujeto a que la cantidad adecuada de soldados sea transportada y $\pi \in [0, 1]$.

Concretamente

$$\begin{aligned} & \min_{\pi} \sum_{i,j} c_{ij} \pi_{ij} \\ & s.a. \sum_{j=1}^n \pi_{ij} = \mu_i / M, \quad \forall i \\ & \quad \sum_{i=1}^m \pi_{ij} = \nu_j / M, \quad \forall j \\ & \quad \pi_{ij} \geq 0. \end{aligned}$$

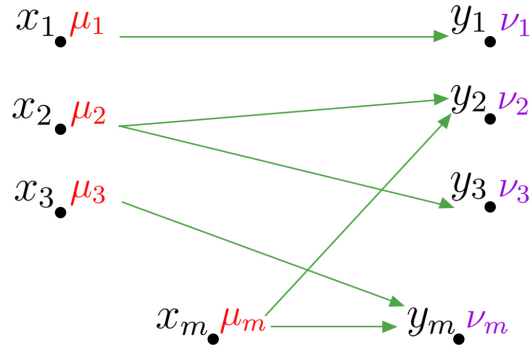


Figura 2: Ejemplo de plan de transporte para el problema de distribución de tropas. Una flecha verde representa que se manda algún soldado desde esa locación a la ciudad indicada.

En general, la redistribución puede no ser tan sencilla como una asignación $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$. Quizás esto podría funcionar en el problema de Monge, podemos mandar cada partícula de tierra en la pila a un punto específico en el hueco. Sin embargo, esto falla en nuestro segundo ejemplo: tenemos la opción de mandar a soldados del mismo campamento a ubicaciones distintas. De este modo, debemos hacer uso del concepto definido a continuación. Denotamos $\mathcal{P}(S)$ el conjunto de las medidas de probabilidad sobre un espacio medible S .

Definición 1. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios medibles y $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X}), \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ medidas de probabilidad. Decimos que $\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ es un *acoplamiento* de μ y ν cuando

$$\pi(A \times Y) = \mu(A) \quad \wedge \quad \pi(X \times B) = \nu(B)$$

para cada $A \subset \mathcal{X}, B \subset \mathcal{Y}$ medibles. En este caso, decimos también que π es un transport plan entre μ y ν , o que tiene dichos marginales en \mathcal{X}, \mathcal{Y} , respectivamente. Denotamos el conjunto de acoplamientos por

$$\Pi(\mu, \nu) := \{\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) : \pi \text{ es acoplamiento de } \mu, \nu\}.$$

Trabajamos ahora con espacios de probabilidad para normalizar las masas, de modo que $\mu(\mathcal{X}) = \nu(\mathcal{Y}) = 1$. Pensamos a $\pi(A \times B)$ como la cantidad de masa transportada de $A \subset \mathcal{X}$ hasta $B \subset \mathcal{Y}$. La idea de usar acoplamientos para caracterizar una redistribución de masa se justifica por las siguientes dos intuiciones:

1. Para cada $A \subset \mathcal{X}$, el total de masa transportada desde A hacia \mathcal{Y} es la cantidad de masa que se encontraba en A inicialmente. O sea $\pi(A \times \mathcal{Y}) = \mu(A)$
2. Para cada $B \subset \mathcal{Y}$, el total de masa transportada desde \mathcal{X} hasta B es el total de masa que se encuentra en B luego de la redistribución. Esto es $\pi(\mathcal{X} \times B) = \nu(B)$.

Observación. El conjunto de acoplamientos $\Pi(\mu, \nu)$ siempre es no vacío, pues la medida producto $\mu \times \nu$ tiene marginales μ, ν . El lector puede verificar la convexidad de este conjunto.

El siguiente resultado es de gran importancia en la teoría de transporte óptimo y justifica la mayoría de resultados que se presentan a continuación. El conjunto de acomplamientos es compacto en el espacio $\mathcal{P}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ cuando \mathcal{X}, \mathcal{Y} son polacos. Esto es, espacios métricos completos y separables.

Teorema 2. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios polacos y sean $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X}), \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ y $S = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Entonces $\Pi(\mu, \nu)$ es compacto en $\mathcal{P}(S)$ respecto a la topología inducida por la métrica

$$d_P(\mu, \nu) = \inf\{\varepsilon > 0 : \forall A \in \mathcal{B}_S : \mu(A) \leq \nu(A^\varepsilon) + \varepsilon, \nu(A) \leq \mu(A^\varepsilon) + \varepsilon\}$$

donde

$$A^\varepsilon = \{x \in S : d(x, A) < \varepsilon\}.$$

Demostración. La compacidad es un resultado más complicado de demostrar e invitamos al lector interesado revisar la prueba en [Ambrosio et al. \(2021\)](#). \square

Antes de introducir el problema de Kantorovich en su versión general, consideramos conveniente mostrar el siguiente resultado.

Lema 3. Sea $f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = g(x)$ (solo depende de $x \in \mathcal{X}$) para todo $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Entonces, para todo $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ tenemos

$$\int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} f(x, y) d\pi = \int_{\mathcal{X}} g(x) d\mu.$$

Análogamente, cuando f solamente depende de $y \in \mathcal{Y}$ se integra sobre (\mathcal{Y}, ν) .

Definición 4. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} espacios medibles, $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X}), \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ medidas de probabilidad y $c : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función costo. Para cada transport plan $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ podemos definir el costo total de transporte por el valor esperado de la función costo sobre la medida π :

$$\mathbb{E}_\pi[c] := \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} c(x, y) d\pi.$$

El problema de Kantorovich es encontrar π^* tal que

$$\mathbb{E}_{\pi^*}[c] = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{E}_\pi[c].$$

Diremos en este caso que $\pi^* \in \Pi(\mu, \nu)$ es un transport plan óptimo.

Observación. En el caso de conjuntos \mathcal{X}, \mathcal{Y} finitos, digamos con $|\mathcal{X}| = N$ y $|\mathcal{Y}| = M$, las medidas de probabilidad $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ y $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ están únicamente determinadas por sus valores en cada punto $x \in X$ o $y \in Y$. Así, podemos identificarlas con vectores $\mu = (\mu_x)_{x \in \mathcal{X}} \in \mathbb{R}^N$ y $\nu = (\nu_y)_{y \in \mathcal{Y}} \in \mathbb{R}^M$ con entradas no-negativas sumando 1. Como $|\mathcal{X} \times \mathcal{Y}| = N \times M$, por el mismo argumento, una medida de probabilidad $\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ puede ser vista como una matriz $\pi = (\pi_{xy})_{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \in \mathcal{M}_{N \times M}(\mathbb{R})$ con entradas no-negativas y tales que sus columnas y filas sumen 1 (doblemente estocásticas). Más aún, el conjunto de acoplamientos se puede caracterizar por:

$$\Pi(\mu, \nu) = \left\{ \pi : \pi_{x,y} \geq 0, \sum_{y \in \mathcal{Y}} \pi_{xy} = \mu_x, \forall x \in \mathcal{X} \wedge \sum_{x \in \mathcal{X}} \pi_{xy} = \nu_y, \forall y \in \mathcal{Y} \right\}.$$

De esta forma, en el caso discreto, el problema de Kantorovich se vuelve un problema de programación lineal:

$$\mathcal{P}_L : \begin{cases} \inf & \sum_{x,y} \pi_{x,y} c(x,y) \\ s.a. & \sum_{y \in \mathcal{Y}} \pi_{xy} = \mu_x, \forall x \in \mathcal{X} \\ & \sum_{x \in \mathcal{X}} \pi_{xy} = \nu_y \forall y \in \mathcal{Y} \\ & \pi_{xy} \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Cabe mencionar que el problema de Kantorovich en general no tiene una forma sistemática de resolverse. No obstante, cuando se trabaja el caso discreto, bajo ciertas condiciones, existen varias herramientas que nos permiten obtener o aproximar la solución (es de hecho uno de los temas principales de este trabajo).

Observación. Note que se verifica la convexidad del conjunto de acoplamientos óptimos gracias a la linealidad del funcional $\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \rightarrow \mathbb{E}_\pi(c) \in [-\infty, +\infty]$. Sin embargo, no podemos asegurar que dicho conjunto es no vacío sin imponer alguna condición sobre la función costo. El siguiente teorema garantiza su no vacuidad para una familia grande de funciones costo.

Teorema 5. Sean $(\mathcal{X}, \mu), (\mathcal{Y}, \nu)$ espacios de probabilidad polacos, y dos funciones semicontinuas superior $a : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ μ -integrable y $b : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ν -integrable. Sea $c : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función costo semicontinua inferior tal que $c(x, y) \geq a(x) + b(y)$ para todo $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Entonces existe un plan $\hat{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$ que minimiza el costo de transporte.

Demostración. Ver Teorema 4.1 en Villani (2009). \square

Observación. La cota inferior para c nos permite asegurar, gracias al Lema 3 que todo plan de transporte $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ nos da un costo total $\mathbb{E}_\pi[c] \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\pi[c] &= \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} c(x, y) d\pi \\ &> \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} (a(x) + b(y)) d\pi \\ &= \int_{\mathcal{X}} a(x) d\mu + \int_{\mathcal{Y}} b(y) d\nu \\ &> -\infty.\end{aligned}$$

Sin embargo, aún puede ocurrir que el costo de transporte óptimo sea $+\infty$. Es decir, que cada transport plan nos de costo infinito. Para descartar esta posibilidad, podríamos acotar superiormente c de la misma manera. Otra manera de garantizar que el valor óptimo en el problema de Kantorovich sea finito es imponer ciertas condiciones en los marginales μ y ν . Cuando $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}^d$, en muchos casos resulta útil para nuestros propósitos imponer condiciones de cuadrado-integrabilidad. Esto es, imponer $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 d\mu < +\infty$ y/o $\int_{\mathbb{R}^d} \|y\|^2 d\nu < \infty$.

Definición 6. Definimos el espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ como el conjunto de las medidas de probabilidad cuadrado-integrables en \mathbb{R}^d . Esto es:

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) = \{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) : \mathbb{E}_\mu[\|x\|^2] < +\infty\}.$$

El siguiente resultado nos será útil en la Sección 7. Presentamos una versión bastante reducida del Teorema de Brenier, adaptado de Ambrosio et al. (2021), que concierne al problema de Kantorovich en el espacio euclideo considerando un costo cuadrático. Para consultar el enunciado completo, así como la prueba, ver el Teorema 5.2 de dicho libro. Denotamos la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d por \mathcal{L} .

Teorema 7. Sean $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}^d$, la función costo $c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$ y $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ tal que $\mu \ll \mathcal{L}$. Entonces existe un único transport plan que minimiza el costo de transporte $\hat{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$.

Observación. En el teorema anterior, la existencia de un transport plan óptimo se deduce del Teorema 5 tomando en cuenta que $c(x, y) \geq 0$. Además, dicho plan

óptimo da un costo total finito, pues $c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2 \leq |x|^2 + |y|^2$ y μ, ν son cuadrado-integrables. La novedad está en la unicidad esta solución.

En ciertos contextos, no está en nuestras manos controlar el transport plan π , así que nos interesa saber cuál es el costo total $\mathbb{E}_\pi[c]$ que debemos asumir en el peor de los casos. Por otro lado, en ciertos contextos la función c representa más bien una utilidad, por lo que se busca maximizarla. En ambas situaciones, estamos frente a un problema equivalente. Por ejemplo, cuando c es una utilidad, digamos Φ , se busca encontrar

$$\sup_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{E}_\pi[\Phi]$$

y, de existir, el π^* que alcance dicho supremo. Note que el conjunto de planes de transporte en este caso sigue siendo convexo. A continuación, brindamos un análogo del Teorema 5 para asegurar además que no sea vacío (bajo ciertas condiciones).

Teorema 8. Sean $(\mathcal{X}, \mu), (\mathcal{Y}, \nu)$ espacios de probabilidad polacos, y dos funciones semicontinuas inferior $a : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ μ -integrable y $b : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ν -integrable. Sea $c : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ una función costo semicontinua superior tal que $c(x, y) \leq a(x) + b(y)$ para todo $x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$. Entonces existe un plan $\hat{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$ que maximiza el costo de transporte.

Demostración. Considere $C = -c, A = -a, B = -b$ y aplique el Teorema 5 para obtener un $\hat{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\hat{\pi}}[C] &= \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{E}_\pi[C] \\ -\mathbb{E}_{\hat{\pi}}[c] &= \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} -\mathbb{E}_\pi[c] = - \sup_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{E}_\pi[c]. \end{aligned}$$

Finalmente, multiplique por -1 para obtener el resultado. \square

Hemos empezado nuestra discusión presentando el problema de transporte de masas, un problema determinístico con el que se origina la teoría de transporte óptimo. Sin embargo, el problema de Kantorovich también tiene una interpretación probabilística. Veamos

Lema 9. Considere un espacio de probabilidad (Ω, \mathbb{P}) y dos variables aleatorias $X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$, $Y : \Omega \rightarrow \mathcal{Y}$ con distribuciones de probabilidad $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$, $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$, respectivamente. Considere el par $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ como vector aleatorio. Entonces:

1. El par (X, Y) sigue una distribución $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$. Es decir, la distribución del par tiene marginales μ y ν .
2. X, Y son independientes si y sólo si $\pi = \mu \times \nu$.

Demostración. Para cada $A \subset \mathcal{X}, B \subset \mathcal{Y}$ medibles

$$\pi(A \times \mathcal{Y}) = \mathbb{P}\{(X, Y) \in A \times \mathcal{Y}\} = \mathbb{P}\{X \in A\} = \mu(A)$$

$$\pi(\mathcal{X} \times B) = \mathbb{P}\{(X, Y) \in \mathcal{X} \times B\} = \mathbb{P}\{Y \in B\} = \nu(B).$$

Esto prueba la primera afirmación. Por definición, X, Y son independientes si y sólo si para cada $A \subset \mathcal{X}, B \subset \mathcal{Y}$ medibles se cumple

$$\pi(A \times B) = \mathbb{P}\{(X, Y) \in A \times B\} = \mathbb{P}\{X \in A\}\mathbb{P}\{Y \in B\} = \mu(A)\nu(B).$$

Es decir, si y sólo si π es la medida producto $\mu \times \nu$. Esto prueba la segunda afirmación. \square

Las variables aleatorias X, Y representan factores con distribuciones individuales conocidas, pero distribución conjunta $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ desconocida. No sabemos el grado de dependencia; la estructura de correlación exacta. Si queremos hacer cálculos con estas variables, podemos considerar la variable aleatoria $c(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, donde $c : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible. Nos interesamos en el valor esperado $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[c(X, Y)]$, y un cambio de variables revela

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[c(X, Y)] = \int_{\Omega} c(X, Y) d\mathbb{P} = \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} c(x, y) d\pi = \mathbb{E}_{\pi}[c].$$

Más específicamente, la teoría de transporte óptimo nos da herramientas para acotar este resultado. Es decir, hallar

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{E}_{\pi}[c] \quad \text{o} \quad \sup_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{E}_{\pi}[c]$$

según nuestros propósitos. Pensar en el problema de Kantorovich con esta interpretación nos será útil en las Secciones 7 y 8, donde presentamos las aplicaciones en finanzas. Específicamente, las variables aleatorias X, Y representarán factores de riesgo cuyas distribuciones individuales conocemos, pero cuya distribución conjunta desconocemos. Nuestro objetivo será brindar cotas para ciertas métricas comúnmente usadas en finanzas, que dependen de estos dos factores en simultaneo.

Esto concluye la breve presentación de la teoría de transporte que realizamos. Como se mencionó previamente, no es el objetivo de este documento presentar la teoría del transporte óptimo en sí, si no más bien, enfocarnos en sus aplicaciones. Empezamos con las aplicaciones en economía. En concreto, vamos a abordar una versión alterada del problema de transporte óptimo que se conoce como el problema de regularización entrópica. Este problema, dado los supuesto que se harán, puede ser abordado desde el punto de vista de la teoría de optimización estática clásica.

3. Regularización entrópica

Siguiendo a [Nenna \(2020\)](#), vamos a considerar dos conjuntos finitos \mathcal{X}, \mathcal{Y} , donde $|\mathcal{X}| = |\mathcal{Y}| = N^4$ y establecemos las medidas de probabilidad sobre \mathcal{X} y \mathcal{Y} respectivamente

$$\mu = \sum_{x \in \mathcal{X}} \mu_x \delta_x, \quad \nu = \sum_{y \in \mathcal{Y}} \nu_y \delta_y.$$

Luego, denotamos el conjunto de acoplamientos por (estamos indexando por x, y)

$$\Pi(\mu, \nu) = \left\{ \pi : \pi_{x,y} \geq 0, \sum_{y \in \mathcal{Y}} \pi_{xy} = \mu_x, \forall x \in \mathcal{X} \wedge \sum_{x \in \mathcal{X}} \pi_{xy} = \nu_y, \forall y \in \mathcal{Y} \right\}.$$

Tal y como vimos en la Sección 2, el problema de transporte *original* es [Villani \(2009\)](#), [Ambrosio et al. \(2021\)](#)

$$\min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \sum_{x,y} \pi_{xy} c(x, y). \quad (2)$$

Resolver (2) vía el algoritmo de subastas de Bertsekas tiene complejidad algorítmica $\mathcal{O}(N^3)$ [Merigot and Thibert \(2020\)](#): es decir, a lo mucho CN^3 pasos, con C una constante. Por otro lado, una situación que puede acontecer en esta formulación es que el plan de transporte sea concentrado, es decir, que puede existir $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ y $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ tal que $\pi_{xy}|_{I \times J}$ concentren el plan de transporte ($\pi_{xy} = 0$ para todo $(x, y) \notin I \times J$). La desventaja de esto último se explica en la Sección 5. Una solución que surgió a estos dos inconvenientes en la literatura es el planteamiento del problema de regularización entrópica, que presentamos a continuación.

Definición 10. Definimos la función de entropía (relativa) $H(\pi)$ de la siguiente manera

$$H(\pi) = - \sum_{x,y} h(\pi_{x,y})$$

⁴Estamos asumiendo que tienen la misma cardinalidad por simplicidad. De manera más general, podemos suponer $|\mathcal{X}| = N$ y $|\mathcal{Y}| = M$.

con

$$h(r) = \begin{cases} r(\ln(r) - 1), & \text{si } r > 0 \\ 0, & \text{si } r = 0 \\ +\infty, & \text{si } r < 0. \end{cases}$$

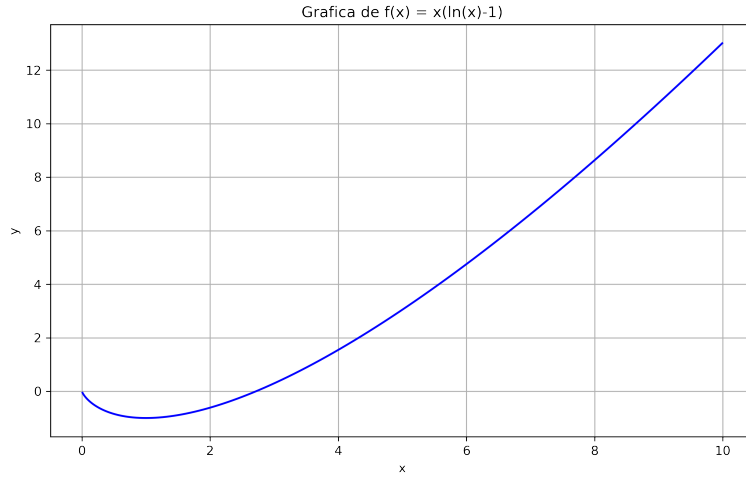


Figura 3: $h(x) = x(\ln x - 1)$

Observación. Esta definición difiere de la entropía usual de Shannon:

$$-\sum_{i,j} p_{ij} \ln(p_{ij}).$$

Esto pues, $-H(\pi)$ se puede expresar como

$$1 - \sum_{x,y} \pi_{xy} \ln(\pi_{xy}) = - \sum_{x,y} \int_0^{\pi_{xy}} \ln t dt \geq 0 \quad (3)$$

La expresión 3 facilita los cálculos tal y como veremos más adelante.

La entropía es un concepto vinculado al desorden, a la incertidumbre de la información. En concreto, dado un proceso con posibles resultados $\{a_1, \dots, a_N\}$

y probabilidades $\{p_1, \dots, p_N\}$, la entropía es máxima cuando $p_i = 1/N$, o sea, cuandolos eventos son equiprobables. En efecto, se resuelve

$$\begin{cases} \text{máx} & -\sum_{i=1}^N p_i (\ln p_i - 1) \\ \text{s.a.} & \sum_{i=1}^N p_i = 1. \end{cases}$$

Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange (dada la concavidad de la función objetivo y que solo hay una restricción lineal es condición suficiente):

$$\mathcal{L}(p_1, \dots, p_N, \lambda) = -\sum_{i=1}^N p_i (\ln p_i - 1) + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^N p_i\right).$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} = -\ln p_i - \lambda = 0 \quad \forall i \implies p_i = p_j = \frac{1}{N}, \quad \forall i, j.$$

De este modo, mientras menos concentración de la probabilidad de los estados, la entropía será mayor. Tal y como se mencionó antes, esto permitirá obtener soluciones *menos concentradas*.

Definición 11. El problema de regularización entrópica corresponde al siguiente problema de optimización

$$\mathcal{P}_\varepsilon : \inf_{\pi} \sum_{x,y} \pi_{x,y} c(x,y) - \varepsilon H(\pi) \quad (4)$$

con $\varepsilon > 0$ y sujeto a

$$\pi \in \Pi(\mu, \nu) = \left\{ \pi : \pi_{xy} \geq 0, \sum_{y \in \mathcal{Y}} \pi_{xy} = \mu_x, \quad \forall x \in \mathcal{X} \wedge \sum_{x \in \mathcal{X}} \pi_{xy} = \nu_y, \quad \forall y \in \mathcal{Y} \right\}.$$

Algunos comentarios:

1. Ahora, se busca minimizar el costo sumado con

$$1 - \sum_{x,y} \pi_{xy} \ln \pi_{xy}.$$

Es decir, se busca un transport plan que maximice la entropía.⁵

2. La función objetivo es continua sobre $\Pi(\mu, \nu)$.

⁵Note que maximizar $-\sum_{i=1}^N p_i (\ln p_i - 1)$ sujeto a que $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ conlleva a $p_i = 1/N$.

3. El problema de regularización es convexo. Esto se establece en el siguiente lema.

Lema 12. La función $-H : \pi \in (\mathbb{R}_{+*})^{N \times N} \rightarrow \sum_{x,y} h(\pi_{xy})$ es estrictamente convexa.

Demostración. Como $\pi_{xy} > 0$, $h''(t) = \frac{1}{t} > 0$. Luego,

$$\mathbf{H}(-H(\pi)) = \mathbf{D}\left(\frac{1}{\pi_{xy}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi_{11}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\pi_{NN}} \end{pmatrix}$$

la cual es definida positiva. □

Function: $f(x, y) = x^2 + y^2 + \exp(x^2 + y^2) + x + y$

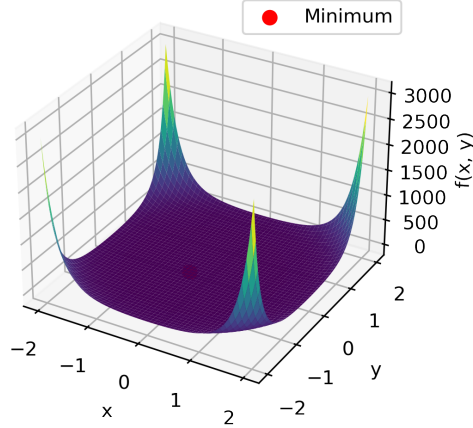


Figura 4: Función estrictamente convexa: $f(x, y) = x^2 + y^2 + e^{x^2+y^2} + x + y$.

Teorema 13. El problema \mathcal{P}_ε tiene una única solución $\pi^* \in \Pi(\mu, \nu)$ y, si $\min\{\min_x \mu_x, \min_y \nu_y\} > 0$, $\pi_{xy}^* > 0$, $\forall x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$.

Demostración. Aseguramos directamente la existencia de la solución por la continuidad sobre el compacto $\Pi(\mu, \nu)$. Veamos que $\pi_{xy}^* > 0$. Supongamos que no sea el caso, o sea, que $Z = \{(x, y) : \pi_{xy}^* = 0\} \neq \emptyset$. Tomemos⁶

$$\gamma^\theta \in \Gamma(\mu, \nu) : \gamma^\theta = (1 - \theta)\pi^* + \theta(\mu \times \nu), \theta \in (0, 1).$$

Usando la convexidad de $h : r \rightarrow r \ln(r) - r$:

$$h(\gamma_{xy}^\theta) \leq (1 - \theta)h(\pi_{xy}^*) + \theta h(\mu_x \nu_y) \leq h(\pi_{xy}^*) + \underbrace{\mathcal{O}(\theta)}_{\theta \sum_{x,y} \mu_x \nu_y (\ln \mu_x + \ln \nu_y - 1)}. \quad (5)$$

Entonces dado $(x, y) \in Z$ y

$$C = \min\{\min_x \mu_x, \min_y \nu_y\} > 0$$

se tiene la siguiente situación

$$h(\gamma_{xy}^\theta) = h(\theta \mu_x \nu_y) = \theta \mu_x \nu_y (\ln \theta + \ln \mu_x \nu_y - 1) \leq C \theta \ln \theta + \mathcal{O}(\theta). \quad (6)$$

Sumando adecuadamente [5](#) y [6](#), obtenemos

$$\underbrace{\sum_{x,y} h(\gamma_{xy}^\theta)}_{-H(\gamma^\theta)} \leq \underbrace{\sum_{x,y} h(\pi_{xy}^*)}_{-H(\pi^*)} + nC \theta \ln \theta + \mathcal{O}(\theta),$$

donde $|Z| = n$. Luego, notemos que $(1 - \theta < 1)$

$$\sum_{x,y} \gamma_{xy}^\theta c_{xy} \leq \sum_{x,y} \pi_{xy}^* c_{xy} + \theta \sum_{x,y} c_{xy} \mu_x \nu_y.$$

Aprovechando la linealidad de la estructura de costos y usando la optimalidad de π^*

$$\begin{aligned} \sum_{x,y} \pi_{xy}^* c_{xy} - \varepsilon H(\pi^*) &\leq \sum_{x,y} \gamma_{xy}^\theta c_{xy} - \varepsilon H(\gamma^\theta) \\ &\leq \sum_{x,y} \pi_{xy}^* c_{xy} - \varepsilon H(\pi_{xy}^*) + \mathcal{O}(\theta) + nC \theta \ln \theta. \end{aligned}$$

De este modo,

$$0 \leq \theta \left(\underbrace{\sum_{x,y} (c_{xy} \mu_x \nu_y + h(\mu_x \nu_y))}_{\text{cte}} + nC \underbrace{\ln \theta}_{< 0} \right), \forall \theta \in (0, 1).$$

⁶Recordemos que la medida producto es $\mu \times \nu = \sum_{x,y} \mu_x \nu_y \delta_{x,y}$.

Esto es solo posible, para cualquier configuración, solo si $n = 0$ por lo que, concluimos que $\pi_{x,y}^* > 0$ ($Z = \emptyset$). Esto a su vez asegura la unicidad por el Lema 12: si π^* y π^{**} fuesen 2 soluciones, y consideramos $\pi^{***} = \theta\pi^* + (1 - \theta)\pi^{**}$:

1. π^{***} cumple las restricciones del problema.

2. Por la convexidad estricta:

$$\begin{aligned} \sum_{x,y} (\pi_{x,y}^{***} c(x,y)) - \varepsilon H(\pi^{***}) &< \theta \sum_{x,y} (\pi_{x,y}^* c(x,y)) - \varepsilon H(\pi^*) \\ &+ (1 - \theta) \sum_{x,y} (\pi_{x,y}^{**} c(x,y)) - \varepsilon H(\pi^{**}) \\ &= \min(\mathcal{P}_\varepsilon) \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. \square

Teorema 14. La única solución π_ε a \mathcal{P}_ε converge a la solución de entropía minimal en el conjunto de soluciones óptimas al problema original. Esto es,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi_\varepsilon \rightarrow \operatorname{argmin} \{-H(\pi) : \pi \in \Pi(\mu, \nu), \text{ óptimo} \}. \quad (7)$$

Demostración. Sea $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ una sucesión tal que $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Sea π_k la solución asociada a $\mathcal{P}_{\varepsilon_k}$. Como $\Pi(\mu, \nu)$ es acotado, podemos extraer una subsucesión convergente, digamos $\pi_{k_j} \rightarrow \pi^*$. Al ser $\Pi(\mu, \nu)$ cerrado, $\pi^* \in \Pi(\mu, \nu)$. Sea ahora π la solución al problema desregularizado. Por la optimalidad de π_{k_j} y π

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{x,y} \pi_{k_j}(x,y)c(x,y) - \sum_{x,y} \pi(x,y)c(x,y) \\ &\leq \varepsilon_{k_j} (H(\pi_{k_j}) - H(\pi)). \end{aligned}$$

Dado que $-H(\cdot)$ es una función continua y acotada por $N \ln N$, tomando $\lim_{k_j \rightarrow \infty}$, se llega a que

$$\sum_{x,y} \pi^*(x,y)c(x,y) = \sum_{x,y} \pi(x,y)c(x,y).$$

Más aún, dividiendo por ε_k y tomando límite, $-H(\pi) \geq -H(\pi^*)$. Esto demuestra que π^* resuelve (7). Por la convexidad estricta de $-H(\cdot)$, esta solución es única y, finalmente, tenemos por la unicidad del límite que toda la sucesión converge. \square

3.1. Solución vía dualidad del Lagrangiano

El contexto es el siguiente

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & \sum_{x,y} (\pi_{x,y} c(x,y)) - \varepsilon H(\pi) \\ s.a. & \sum_{x \in \mathcal{X}} \pi_{xy} = \nu_y \quad \forall y \in \mathcal{Y} \\ & \sum_{y \in \mathcal{Y}} \pi_{xy} = \mu_x, \quad \forall x \in \mathcal{X} \\ & \pi_{xy} \geq 0. \end{array} \right. \quad (8)$$

A continuación, un resultado del análisis convexo y la optimización que nos permite caracterizar la solución al problema (8).

Proposición 15. Condiciones de Slater. En relación al siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \min_x & f_0(x) \\ s.a. & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

si f_0 es convexa, las restricciones son lineales y se cumple que $\exists x : f_i(x) < 0$, $Ax = b$ (pues restricciones lineales) factible,

$$\max_{\lambda, \eta} \min_x \mathcal{L}(x, \lambda, \eta) = \min_{x \in S} f_0(x)$$

donde S es el conjunto determinado por las restricciones y

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \eta) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^p \eta_i h_i(x).$$

En el caso del problema de transporte considerado, $h_i(x) = 0$ son las restricciones que debe cumplir π para que tenga marginales μ y ν , y $f_i(x) \leq 0$ es lo mismo que $-\pi_{xy} \geq 0$. Ciertamente existe un plan factible que cumple $-\pi_{xy} < 0$ (para $\min\{\mu_x, \nu_y\} > 0$), que es $\pi_{xy} = \mu_x \nu_y > 0, \quad \forall (x, y)$.

Ahora, con respecto a \mathcal{P}_ε , el Lagrangiano asociado es \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\pi, \varphi, \psi) &= \sum_{x,y} \pi_{x,y} (c(x,y) + \varepsilon(\ln \pi_{xy} - 1)) \\ &+ \sum_{x \in \mathcal{X}} \varphi(x) \left(\mu_x - \sum_{y \in \mathcal{Y}} \pi_{xy} \right) + \sum_{y \in \mathcal{Y}} \psi(y) \left(\nu_y - \sum_{x \in \mathcal{X}} \pi_{xy} \right). \end{aligned}$$

Las variables $\{\varphi(x)\}_{x \in \mathcal{X}}$ y $\{\psi(y)\}_{y \in \mathcal{Y}}$ son los multiplicadores de Lagrange.

Demostración. Ver [Luneberger and Ye \(2021\)](#). □

Observación. El resultado es análogo para máximo - concavidad.

Teorema 16. La solución al problema \mathcal{P}_ε es de la forma

$$\pi_{x,y} = e^{\frac{\varphi(x) + \psi(y) - c(x,y)}{\varepsilon}},$$

donde φ y ψ son a determinar.

Demostración. Aplicando condiciones de primer orden a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\pi, \varphi, \psi) &= \sum_{x,y} \pi_{xy} \left[c(x,y) - \psi(y) - \varphi(x) + \varepsilon \ln \left(\frac{\pi_{xy}}{e} \right) \right] \\ &\quad + \sum_{x \in \mathcal{X}} \varphi(x) \mu_x + \sum_{y \in \mathcal{Y}} \psi(y) \nu_y \end{aligned}$$

respecto a $\pi_{x,y}$

$$\begin{aligned} c(x,y) - \varphi(x) - \psi(y) + \varepsilon(\ln \pi_{x,y} - 1) + \varepsilon &= 0 \\ \varepsilon \ln \pi_{x,y} &= \varphi(x) + \psi(y) - c(x,y) \\ \pi_{x,y} &= e^{\frac{\varphi(x) + \psi(y) - c(x,y)}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

□

Observación. A partir de

$$\pi_{x,y} = e^{\frac{\varphi(x) + \psi(y) - c(x,y)}{\varepsilon}}$$

tenemos

$$\pi = [\pi_{xy}] = D_{\varphi(x)} \underbrace{e^{-\frac{c(x,y)}{\varepsilon}}}_{K_\varepsilon} D_{\psi(y)} \quad (9)$$

donde $D_{\varphi(x)}$ una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal son $e^{\varphi(x)/\varepsilon}$, $x \in \mathcal{X}$. Análogo para $D_{\psi(y)}$, $y \in \mathcal{Y}$.

Observación. Una vez π_{xy} determinado en función de φ_x y ψ_y , podemos determinar $\min_\pi \mathcal{L}(\varphi, \psi)$ reemplazando (9) en $\mathcal{L}(\pi, \varphi, \psi)$

$$\mathcal{L}(\varphi, \psi) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \varphi_x \mu_x + \sum_{y \in \mathcal{Y}} \psi_y \nu_y - \varepsilon \sum_{x,y} \exp \left(\frac{\varphi(x) + \psi(y) - c(x,y)}{\varepsilon} \right).$$

Finalmente, $\max_{\varphi, \psi} \mathcal{L}(\varphi, \psi)$ conlleva por condiciones de primer orden (función objetivo estrictamente cóncava)

$$\begin{aligned}\mu_x &= \sum_{y \in \mathcal{Y}} \exp \left(\frac{\varphi(x) + \psi(y) - c(x, y)}{\varepsilon} \right) \\ \nu_y &= \sum_{x \in \mathcal{X}} \exp \left(\frac{\varphi(x) + \psi(y) - c(x, y)}{\varepsilon} \right).\end{aligned}$$

Conclusiones

- Hemos presentado, para el caso de espacios finitos el problema de regularización entrópica.
- Se han derivado diversas propiedades relativas a este problema: existencia de una solución, unicidad y como caracterizarla.
- Hemos caracterizado el óptimo en términos de la relación entre φ y ψ y los *parámetros* $\{\mu_x\}_{x \in \mathcal{X}}, \{\nu_y\}_{y \in \mathcal{Y}}, \{c_{xy}\}_{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}}$.
- A diferencia del problema clásico, hemos podido derivar π_{xy} en función de los multiplicadores y c_{xy} .
- El objetivo a continuación es como obtener una solución aproximada, haciendo uso de [9](#).

4. Algoritmo Sinkhorn-Knopp

La utilidad de la representación [\(9\)](#) es que nos permite presentar la situación como un problema de reescalamiento de matrices.

4.1. El algoritmo

Primero, un resultado general muy vinculado a nuestro propósito.

Teorema 17. Dada una matriz $N \times N$ con entradas estrictamente positivas, digamos A , le corresponde una matriz T_A doblemente estocástica tal que

$$T_A = D_1 A D_2,$$

donde D_1, D_2 son matrices diagonales con entradas positivas. Dichas matrices son únicas salvo un factor multiplicativo $c > 0$ [Sinkhorn \(1964\)](#).

El objetivo (que es similar) es hallar las matrices D_φ y D_ψ , de forma que las marginales coincidan con μ y ν . Para esto, se aplica el siguiente algoritmo, conocido como algoritmo de Sinkhorn-Knopp, que se describe a continuación.

1. Se debe cumplir que

$$D_\varphi K_\varepsilon D_\psi \mathbf{1}_N = \mu \wedge D_\psi K_\varepsilon^T D_\varphi \mathbf{1}_N = \nu.$$

donde $\mathbf{1}_N = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^N$.

2. Expresado de otra forma

$$e^{\varphi/\varepsilon} \odot (K_\varepsilon e^{\psi/\varepsilon}) = \mu, \quad e^{\psi/\varepsilon} \odot (K_\varepsilon^T e^{\varphi/\varepsilon}) = \nu.$$

Acá $e^{\varphi/\varepsilon}, e^{\psi/\varepsilon}$ son las respectivas diagonales de D_φ y D_ψ vectorizados y \odot la multiplicación entrada por entrada. Usando estas ecuaciones, derivamos la siguiente situación:

$$e^{\varphi^{(k+1)}/\varepsilon} \doteq \frac{\mu}{K_\varepsilon e^{\psi^{(k)}/\varepsilon}}, \quad e^{\psi^{(k+1)}/\varepsilon} \doteq \frac{\nu}{K_\varepsilon^T e^{\varphi^{(k+1)}/\varepsilon}}$$

$e^{\psi^{(0)}/\varepsilon} = e^{\varphi^{(0)}/\varepsilon} = \mathbf{1}_N$. Acá la división es componente a componente. A continuación un ejemplo a modo de ejemplo para entender la notación.

Ejemplo 18. Por ejemplo, para $N = 2$ tenemos la siguiente situación

$$\begin{bmatrix} e^{\varphi_1/\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{\varphi_2/\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\frac{c_{11}}{\varepsilon}} & e^{-\frac{c_{12}}{\varepsilon}} \\ e^{-\frac{c_{21}}{\varepsilon}} & e^{-\frac{c_{22}}{\varepsilon}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\psi_1/\varepsilon} & 0 \\ 0 & e^{\psi_2/\varepsilon} \end{bmatrix}.$$

Multiplicando,

$$\begin{bmatrix} e^{\frac{\varphi_1 + \psi_1 - c_{11}}{\varepsilon}} & e^{\frac{\varphi_1 + \psi_2 - c_{12}}{\varepsilon}} \\ e^{\frac{\varphi_2 + \psi_1 - c_{21}}{\varepsilon}} & e^{\frac{\varphi_2 + \psi_2 - c_{22}}{\varepsilon}} \end{bmatrix}.$$

Entonces, por ejemplo para la fila 1, debemos tener

$$e^{\frac{\varphi_1 + \psi_1 - c_{11}}{\varepsilon}} + e^{\frac{\varphi_1 + \psi_2 - c_{12}}{\varepsilon}} = \mu_1.$$

Esto es,

$$e^{\varphi_1/\varepsilon} = \frac{\mu_1}{e^{\frac{\psi_1 - c_{11}}{\varepsilon}} + e^{\frac{\psi_2 - c_{12}}{\varepsilon}}}.$$

O sea, $e^{\varphi_1/\varepsilon}$ es la primera componente del vector que se obtiene dividiendo las entradas de μ por las entradas del vector

$$\begin{bmatrix} e^{-\frac{c_{11}}{\varepsilon}} & e^{-\frac{c_{12}}{\varepsilon}} \\ e^{-\frac{c_{21}}{\varepsilon}} & e^{-\frac{c_{22}}{\varepsilon}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\psi_1/\varepsilon} \\ e^{\psi_2/\varepsilon} \end{bmatrix}.$$

Enseguida, el algoritmo Sinkhorn-Knopp.

Algorithm 1 Sinkhorn-Knopp: algoritmo para el problema de transporte óptimo regularizado, caso discreto.

```

1: function SINKHORN-KNOPP( $K_\varepsilon, \mu, \nu$ )
2:    $e^{\varphi^{(0)}/\varepsilon} \leftarrow \mathbf{1}_N$ 
3:    $e^{\psi^{(0)}/\varepsilon} \leftarrow \mathbf{1}_N$ 
4:   for  $0 \leq k < k_{\max}$  do
5:      $e^{\varphi^{(k+1)}/\varepsilon} \leftarrow \frac{\mu}{K_\varepsilon e^{\psi^{(k)}/\varepsilon}}$ 
6:      $e^{\psi^{(k+1)}/\varepsilon} \leftarrow \frac{\nu}{K_\varepsilon^T e^{\varphi^{(k+1)}/\varepsilon}}$ 
7:   end for
8: end function

```

Concluimos esta sección demostrando la convergencia del algoritmo de Sinkhorn-Knopp.

4.2. Preliminares de la prueba de la convergencia del algoritmo Sinkhorn-Knopp

Los siguientes preliminares y la demostración del resultado principal siguen los desarrollo en [Even and Merad \(2020\)](#).

Proposición 19. La aplicación definida por:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_{+*}^N : d_{\mathcal{H}}(x, y) = \ln \max_{i,j} \frac{x_i y_j}{x_j y_i}$$

es una métrica sobre el cono proyectivo \mathbb{R}_{+*}^N / \sim donde $x \sim y$ si existe $r > 0$ tal que $x = ry$. Más aún, el cono proyectivo es completo con la métrica $d_{\mathcal{H}}$.

Demostración. Ciertamente, $d_{\mathcal{H}}$ es simétrica. Luego, si $x = ry$,

$$d_{\mathcal{H}}(x, y) = d_{\mathcal{H}}(ry, y) = \ln \max_{i,j} \frac{ry_i y_j}{y_j r y_i} = \ln 1 = 0.$$

Por otro lado, si $\frac{x_i y_j}{x_j y_i} < 1$, entonces $\frac{x_j y_i}{x_i y_j} > 1$. Así, $d_{\mathcal{H}} \geq 0$. Luego, si $d_{\mathcal{H}}(x, y) = 0$, entonces $\frac{x_i y_j}{x_j y_i} = 1$ para todo i, j . Esto es, $\frac{x_i}{y_i} = \frac{x_j}{y_j} = r$: $x = ry$, y entonces $[x] = [y]$. Finalmente, dados $x, y, z \in \mathbb{R}_{+*}^N$, existen $\ell, k \in \{1, \dots, N\}$ tales que

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{H}}(x, z) &= \ln \frac{x_k z_{\ell}}{x_{\ell} z_k} \\ &= \ln \left(\frac{x_k y_{\ell}}{x_{\ell} y_k} \cdot \frac{y_k z_{\ell}}{y_{\ell} z_k} \right) \\ &= \ln \frac{x_k y_{\ell}}{x_{\ell} y_k} + \ln \frac{y_k z_{\ell}}{y_{\ell} z_k} \\ &\leq d_{\mathcal{H}}(x, y) + d_{\mathcal{H}}(y, z). \end{aligned}$$

□

Lema 20. Sea $M \in \mathcal{M}_{N \times N}^{*+}$. Entonces, dados $x, y \in \mathbb{R}_{+*}^N$

$$d_{\mathcal{H}}(Mx, My) \leq \lambda(M) d_{\mathcal{H}}(x, y)$$

donde

$$\begin{cases} \lambda(M) &= \frac{\sqrt{\eta(M)} - 1}{\sqrt{\eta(M)} + 1} < 1 \\ \eta(M) &= \max_{i,j,k,\ell} \frac{M_{i,k} M_{j,\ell}}{M_{j,k} M_{i,\ell}}. \end{cases}$$

Demostración. Ver [Birkhoff \(1957\)](#). □

Observación. Para simplificar la notación, denotamos $e^{\frac{\varphi}{\varepsilon}}$ por φ y $e^{\frac{\psi}{\varepsilon}}$ por ψ . Luego, para la inicialización, en rigor, solo basta que los vectores tengan entradas positivas. Finalmente, cabe mencionar que todo re-escalamiento $c\varphi$, $\frac{1}{c}\psi$ sigue siendo solución.

4.3. Convergencia del algoritmo Sinkhorn-Knopp

Proposición 21. Convergencia del Algoritmo Sinkhorn. Se cumple que

1. $(\varphi^{(k)}, \psi^{(k)}) \rightarrow (\varphi^*, \psi^*)$, donde (φ^*, ψ^*) es la solución óptima. Más aún, los ratios de convergencia son

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{H}}(\varphi^{(k)}, \varphi^*) &= \mathcal{O}(\lambda(K_{\varepsilon})^{2k}) \\ d_{\mathcal{H}}(\psi^{(k)}, \psi^*) &= \mathcal{O}(\lambda(K_{\varepsilon})^{2k}). \end{aligned}$$

2. Más aún, denotando $\Pi^{(k)} = D_{\varphi^{(k)}} K_\varepsilon D_{\psi^{(k)}}$

$$d_{\mathcal{H}}(\varphi^{(k)}, \varphi^*) \leq \frac{d_{\mathcal{H}}(\Pi^{(k)} \mathbf{1}_N, \mu)}{1 - \lambda(K_\varepsilon)}, \quad d_{\mathcal{H}}(\psi^{(k)}, \psi^*) \leq \frac{d_{\mathcal{H}}(\Pi^{(k)} \mathbf{1}_N, \nu)}{1 - \lambda(K_\varepsilon)}.$$

Observación. La existencia de (φ^*, ψ^*) viene asegurada por la Proposición 15.

Demostración. Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}_{+*}^N$ tenemos

$$d_{\mathcal{H}}(x, y) = d_{\mathcal{H}}(x/y, \mathbf{1}_N) = d_{\mathcal{H}}(\mathbf{1}_N/x, \mathbf{1}_N/y)$$

donde / representa la división entrada por entrada. Luego, por la definición del algoritmo y el Lema (20)

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{H}}(\varphi^{(k+1)}, \varphi^*) &= d_{\mathcal{H}}\left(\frac{\mu}{K_\varepsilon \psi^{(k)}}, \frac{\mu}{K_\varepsilon \psi^*}\right) \\ &= d_{\mathcal{H}}(K_\varepsilon \psi^{(k)}, K_\varepsilon \psi^*). \\ &\leq \lambda(K_\varepsilon) d_{\mathcal{H}}(\psi^{(k)}, \psi^*). \end{aligned}$$

De manera análoga

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{H}}(\psi^{(k)}, \psi^*) &= d_{\mathcal{H}}\left(\frac{\nu}{K_\varepsilon^T \varphi^{(k)}}, \frac{\nu}{K_\varepsilon^T \varphi^*}\right) \\ &= d_{\mathcal{H}}(K_\varepsilon^T \varphi^{(k)}, K_\varepsilon^T \varphi^*) \\ &\leq \lambda(K_\varepsilon^T) d_{\mathcal{H}}(\varphi^{(k)}, \varphi^*). \end{aligned}$$

Como $\lambda(K_\varepsilon) = \lambda(K_\varepsilon^T)$

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{H}}(\varphi^{(k+1)}, \varphi^*) &\leq \lambda(K_\varepsilon)^2 d_{\mathcal{H}}(\varphi^{(k)}, \varphi^*) \\ d_{\mathcal{H}}(\psi^{(k)}, \psi^*) &\leq \lambda(K_\varepsilon)^2 d_{\mathcal{H}}(\psi^{(k-1)}, \psi^*). \end{aligned}$$

Dado que $\lambda(K)^2 < 1$ concluimos que $\varphi^{(k)} \rightarrow \varphi^*$ y $\psi^{(k)} \rightarrow \psi^*$. Finalmente, para el segundo inciso,

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{H}}(\varphi^{(k)}, \varphi^*) &\leq d_{\mathcal{H}}(\varphi^{(k+1)}, \varphi^{(k)}) + d_{\mathcal{H}}(\varphi^{(k+1)}, \varphi^*) \\ &\leq d_{\mathcal{H}}\left(\frac{\mu}{K_\varepsilon \psi^{(k)}}, \varphi^{(k)}\right) + \lambda(K_\varepsilon) d_{\mathcal{H}}(\varphi^{(k)}, \varphi^*) \\ &= d_{\mathcal{H}}(\mu, \varphi^{(k)} \odot (K_\varepsilon \psi^{(k)})) + \lambda(K_\varepsilon) d_{\mathcal{H}}(\varphi^{(k)}, \varphi^*) \end{aligned}$$

y, dado que $\varphi^{(k)} \odot (K_\varepsilon \psi^{(k)}) = \Pi^{(k)} \mathbf{1}_N$, se obtiene lo deseado. Para el caso de $d_{\mathcal{H}}(\psi^{(k)}, \psi^*)$ es totalmente análogo. \square

Conclusiones y observaciones:

1. Se omitió en la demostración de la Proposición 21 los detalles del argumento, simplemente se usa inducción.
2. La prueba de que $(\mathbb{R}_+^n / \sim, d_{\mathcal{H}})$ es completo se demuestra en [Nussabaum \(1987\)](#).
3. La convergencia es exponencial y la complejidad mejora a $\mathcal{O}(N^2)$ [Merigot and Thibert \(2020\)](#). Dado $\varepsilon > 0$, basta tomar

$$k \in \mathbb{N} : k \geq \left\lfloor \frac{1}{2} \ln_{\lambda} \frac{\varepsilon}{C} \right\rfloor + 1.$$

4. La constante C depende de μ, ν y $c(x, y)$.
5. Se ha probado entonces la convergencia respecto a la métrica de Hilbert de los multiplicadores de Lagrange a la solución del problema $\mathcal{P}_{\varepsilon}$. Más aún, se han brindado estimados de la convergencia.

En la siguiente sección empezamos con las aplicaciones de la teoría del transporte óptimo en economía. Es importante mencionar que, el trabajo a continuación, es esencialmente una transcripción detallada de [Dupuy et al. \(2021\)](#). Nuestro aporte principal radica principalmente en el desglose de muchos de los resultados (proposiciones, lemas) presentados. Veamos.

5. Estimación de costos

Las Secciones 3 y 4 definen el marco teórico del modelo que se trata en esta sección. Vamos a estudiar el problema de estimación de costos presentado en Dupuy et al. (2021). En dicho artículo se describe un método iterativo novedoso en la literatura: SISTA, con el objetivo de *aprender* los costos de un problema de transporte óptimo. Este método combina el algoritmo Sinkhorn con un *gradient descent*. La aplicación cuantitativa del artículo es en un modelo de migración. Nuestro objetivo es explicar los desarrollos de este artículo. Se han introducido todos los resultados matemáticos necesarios para su comprensión en los anexos de estos documentos, así como en las secciones anteriores.

5.1. El modelo

Nos situamos nuevamente en el contexto de conjuntos finitos de cardinalidad N (nuevamente, sin pérdida de generalidad se asume misma cardinalidad) y se busca resolver

$$\min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \left\{ \sum_{x,y} \pi_{xy} c_{xy} \right\}.$$

Por propósitos de notación, re-escribimos (pues es más apropiado para el contexto del problema), usando (i, j)

$$\min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \left\{ \sum_{1 \leq i, j \leq N} \pi_{ij} c_{ij} \right\}.$$

Debido a los beneficios computacionales expuestos en la Sección 4, se incorpora el término de regularización entrópica y el problema de optimización se torna

$$\min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \left\{ \sum_{1 \leq i, j \leq N} \pi_{ij} c_{ij} + \varepsilon \pi_{ij} (\ln \pi_{ij} - 1) \right\}. \quad (10)$$

Más adelante, veremos como la formulación de regularización entrópica surge naturalmente en el contexto de un modelo de emparejamiento. En el caso del problema 10, nos limitamos a la motivación computacional. Ahora bien, en muchas de las aplicaciones, lo que se dispone es de un transport plan $\hat{\pi}$ observado y se busca recuperar la estructura de costos que conllevó a dicho π . En ese sentido,

se trata del problema inverso, dado $\hat{\pi}$ *aprender* c . Este tipo de problemas es de particular interés en teoría económica pues, tal y como veremos más adelante, en ciertas situaciones uno puede observar un emparejamiento entre individuos (o entidades) y se desea saber porqué se emparejaron. En [Dupuy et al. \(2021\)](#), se propone una estructura del tipo $c_{ij} = c_{ij}^\beta = \sum_{k=1}^K \beta_k d_{ij}^k$, donde β debe ser estimado y disperso⁷, y las d_{ij} son variables explicativas con un sentido particular que se verá más adelante en esta misma sección. La estimación del vector β se hace vía la minimización de una función convexa con una penalización de tipo Lasso:

$$\min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \sum_{1 \leq i, j \leq N} \pi_{ij} c_{ij} + \varepsilon \pi_{ij} (\ln \pi_{ij} - 1).$$

con

$$\Pi(\mu, \nu) = \left\{ \pi : \pi_{ij} \geq 0 : \sum_{j=1}^N \pi_{ij} = \mu_i, \sum_{i=1}^N \pi_{ij} = \nu_j \right\}.$$

Ya sabemos que $\pi_{ij} > 0$ y que las condiciones de primer orden sobre el Lagrangiano proveen:

$$\pi_{ij} = \exp \left(\frac{\varphi_i + \psi_j - c_{ij}}{\varepsilon} \right).$$

Vamos a considerar $\varepsilon = 1$. Luego, el algoritmo Sinkhorn, adaptado a este contexto es el siguiente:

$$\begin{aligned} \exp(\varphi_i^{(k+1)}) &= \frac{\mu_i}{\sum_{j=1}^N \exp(\psi_j^{(k)} - c_{ij})} \\ \exp(\psi_j^{(k+1)}) &= \frac{\nu_j}{\sum_{i=1}^N \exp(\varphi_i^{(k+1)} - c_{ij})}. \end{aligned}$$

Observación. Esto se desprende de la dualidad (ver Proposición 15). Resolver

$$\min_{\pi \in \Pi} \left\{ \sum_{1 \leq i, j \leq N} \pi_{ij} c_{ij} + \varepsilon \pi_{ij} (\ln \pi_{ij} - 1) \right\}$$

es equivalente a resolver

$$\max_{\varphi, \psi} \left\{ \sum_{i=1}^N \varphi_i \mu_i + \sum_{j=1}^N \psi_j \nu_j - \varepsilon \sum_{1 \leq i, j \leq N} \exp \left(\frac{\mu_i + \nu_j - c_{ij}}{\varepsilon} \right) \right\},$$

⁷Favorecer entradas con el valor numérico 0.

que es lo mismo, para $\varepsilon = 1$

$$\min_{\varphi, \psi} \left\{ \sum_{1 \leq i, j \leq N} \exp(\mu_i + \nu_j - c_{ij}) - \sum_{i=1}^N \varphi_i \mu_i - \sum_{j=1}^N \psi_j \nu_j \right\}.$$

5.2. La estructura de costos paramétrica

En este caso, tal y como anticipamos, la estructura de costos viene determinada completamente por un vector de parámetros $\beta \in \mathbb{R}^K$ de forma que

$$c_{ij}^\beta = \sum_{k=1}^K \beta_k d_{ij}^k.$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} c_{11}^\beta & c_{12}^\beta & & & \\ c_{21}^\beta & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & c_{NN}^\beta \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^K \beta_k \begin{pmatrix} d_{11}^k & d_{12}^k & & & \\ d_{21}^k & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d_{NN}^k \end{pmatrix}. \quad (11)$$

En (11) d_{ij} mide la disimilitud entre i y j . Por ejemplo, en caso de problemas espaciales, puede ser una distancia, diferencias de PBI, diferencias de población etc. Una situación estándar es

1. Si x_i e y_j guardan las características de i y j , definir $d_{ij}^k = (x_i^k - y_j^k)^2$, con k la k -ésima entrada del vector.
2. Considerar siempre las mismas unidades: variables uniformizadas.

Observación. No se tiene necesariamente que $d_{ij}^k = d_{ji}^k$. Pensemos por ejemplo en d_{ij}^k como la fracción de individuos en el país i que no dominan el idioma el país j .

Proposición 22. Para estimar β , junto a los multiplicadores de Lagrange φ, ψ , teniendo en cuenta las siguientes restricciones:

$$\sum_j \pi_{ij}^\beta = \mu_i \quad \wedge \quad \sum_i \pi_{ij}^\beta = \nu_j$$

para $k = 1, \dots, K$

$$\sum_{1 \leq i, j \leq N} \pi_{ij}^\beta d_{ij}^k = \sum_{1 \leq i, j \leq N} \hat{\pi}_{ij} d_{ij}^k,$$

donde, $\pi_{ij}^\beta = \exp(\varphi_i + \psi_j - c_{ij}^\beta)$, debe resolverse el siguiente problema de optimización

$$\min_{\varphi, \psi, \beta} \underbrace{\left\{ \sum_{1 \leq i, j \leq N} \exp(\varphi_i + \psi_j - c_{ij}^\beta) + \sum_{1 \leq i, j \leq N} \hat{\pi}_{ij} (c_{ij}^\beta - \varphi_i - \psi_j) \right\}}_{F \text{ convexa}}.$$

Acá $\hat{\pi}_{ij}$ es el emparejamiento observado.

Demostración. Ver [Galichon and Salanié \(2022\)](#). Notemos sin embargo que

1. $\frac{\partial F}{\partial \varphi_i} = \sum_{j=1}^N \exp(\varphi_i + \psi_j - c_{ij}^\beta) - \underbrace{\sum_{j=1}^N \hat{\pi}_{ij}}_{=\mu_i} = 0, \forall i.$
2. $\frac{\partial F}{\partial \psi_j} = \sum_{i=1}^N \exp(\varphi_i + \psi_j - c_{ij}^\beta) - \underbrace{\sum_{i=1}^N \hat{\pi}_{ij}}_{=\nu_j} = 0, \forall j.$
3. $\frac{\partial F}{\partial \beta_k} = - \sum_{1 \leq i, j \leq N} d_{ij}^k \exp(\varphi_i + \psi_j - c_{ij}^\beta) + \sum_{1 \leq i, j \leq N} \hat{\pi}_{ij} d_{ij}^k.$

Es decir, de las condiciones de primer orden aplicadas a $F(\cdot)$, se obtienen las restricciones. \square

Con el objetivo de capturar solo los efectos importantes, se agrega una penalización tipo Lasso:

$$\min_{\varphi, \psi, \beta} \underbrace{\sum_{1 \leq i, j \leq N} \exp(\varphi_i + \psi_j - c_{ij}^\beta) - \hat{\pi}_{ij} (\varphi_i + \psi_j - c_{ij}^\beta)}_{=\Phi(\varphi, \psi, \beta)} + \gamma \|\beta\|_1. \quad (12)$$

Para continuar, recomendamos fuertemente consultar al Anexo de análisis convexo y el de subgradientes y subdiferenciales. Estos introducen definiciones y resultados indispensables para abordar el algoritmo SISTA y probar su convergencia. La siguiente figura ilustra como en \mathbb{R}^2 , la penalización Lasso restringe el dominio de elección de los β . Esto, tal y como se explica en [James et al. \(2021\)](#), nos permite recuperar solo las regresoras más importantes y medir dicha importancia por el valor numérico del β^k . Si tiende a cero, menor será la importancia de la interacción d_{ij}^k

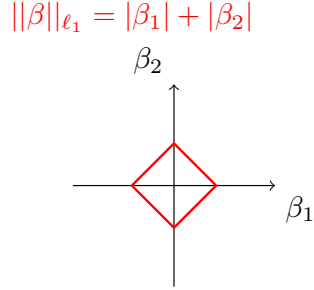


Figura 5: Restricción LASSO.

5.3. SISTA

El algoritmo SISTA - Sinkhorn (S) y Proximal Gradient Descent (ISTA) - consiste en minimizar (12) en tres etapas:

1. Iterar φ , manteniendo β y ψ constantes.
2. Iterar ψ , manteniendo β y φ constantes.
3. Descenso de gradiente proximal (ver Anexo) respecto a β manteniendo φ y ψ constantes.

Definición 23. Función $\text{prox } \|\cdot\|_1$.

$$\text{prox}_{\rho, \gamma, \|\cdot\|_1}(z) = \begin{cases} z - \rho\gamma, & \text{si } z > \rho\gamma \\ 0, & \text{si } |z| \leq \rho\gamma \\ z + \rho\gamma, & \text{si } z < -\rho\gamma. \end{cases}$$

En la siguiente sub-sección explicamos con detalle la Definición 23.

Algorithm 2 SISTA.

1: $\beta^{(0)}, \rho, \mu, \nu, d_{ij}^k, \hat{\pi}_{ij}, \varphi^{(0)}, \psi^{(0)}$

2:

3: **while** not converged **do**

4: Planteamos $c_{ij}^{\beta^{(t)}} = \sum_{k=1}^K \beta_k^{(t)} d_{ij}^k$

$$\begin{cases} \exp(\varphi_i^{(t+1)}) &= \frac{\mu_i}{\sum_{j=1}^N \exp(\psi_j^{(t)} - c_{ij}^{\beta^{(t)}})} \\ \exp(\psi_j^{(t+1)}) &= \frac{\nu_j}{\sum_{i=1}^N \exp(\varphi_i^{(t+1)} - c_{ij}^{\beta^{(t)}})} \end{cases}$$

5: Sea $\pi_{ij}^{\beta^{(t)}} = \exp(\varphi_i^{(t+1)} + \psi_j^{(t+1)} - c_{ij}^{\beta^{(t)}})$. Para $k = 1, \dots, K$

$$\beta_k^{(t+1)} = \text{prox}_{\rho, \gamma, \|\cdot\|} \left(\beta_k^{(t)} - \rho \underbrace{\sum_{1 \leq j, i \leq N} (\hat{\pi}_{ij} - \pi_{ij}^{\beta^{(t)}}) d_{ij}^{(k)}}_{\nabla_{\beta} F} \right).$$

6: **end while**

7: **return** β

5.4. Convergencia del algoritmo SISTA

En esta sub-sección presentamos la prueba de la convergencia del algoritmo. Seguimos nuevamente [Dupuy et al. \(2021\)](#). Introducimos tres supuestos sobre las disimilitudes $d_{ij}^k; \forall k = 1, \dots, K$

$$\sum_{i=1}^N d_{ij}^k = 0, \forall j = 1, \dots, N \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^N d_{ij}^k = 0, \forall i = 1, \dots, N \quad (14)$$

$$\{d_1, \dots, d^K\} \text{ es un conjunto l.i.} \quad (15)$$

y, respecto al transport plan empirico:

$$\hat{\pi}_{ij} > 0. \quad (16)$$

Observación. Siempre podemos obtener $\sum_{i,j} d_{ij}^k = 0$ y las condiciones (13), (13) re-definiendo

$$\tilde{d}_{ij}^k = d_{ij}^k - a_i^k - b_j^k$$

con $a_i^k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N d_{ij}^k$ y $b_j^k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_{ij}^k - \frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq p,q \leq N} d_{pq}^k$.

Demostración. Sumando:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i,j \leq N} \tilde{d}_{ij}^k &= \sum_{1 \leq i,j \leq N} (d_{ij}^k - a_i^k - b_j^k) \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq N} d_{ij}^k - \sum_{1 \leq i,j \leq N} \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N d_{ij}^k \right] - \sum_{1 \leq i,j \leq N} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_{ij}^k - \frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq p,q \leq N} d_{pq}^k \right] \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq N} d_{ij}^k - \sum_{1 \leq i \leq N} \sum_{1 \leq j \leq N} N \cdot \frac{1}{N} d_{ij}^k - \sum_{1 \leq j \leq N} \sum_{1 \leq i \leq N} N \cdot \frac{1}{N} d_{ij}^k \\ &\quad + N^2 \frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq p,q \leq N} d_{pq}^k \\ &= 2 \sum_{1 \leq i,j \leq N} d_{ij}^k - 2 \sum_{1 \leq i,j \leq N} d_{ij}^k \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego, uno puede ver fácilmente que $\sum_{i=1}^N \tilde{d}_{ij}^k = 0$ y $\sum_{j=1}^N \tilde{d}_{ij}^k = 0$. \square

Teorema 24. Supongamos que tenemos 13, 13 15 y 16. Entonces, la sucesión $x^{(t)} = (\varphi^{(t)}, \psi^{(t)}, \beta^{(t)})$ generada por el algoritmo SISTA converge a la solución del problema de optimización, $\min_{(\varphi, \psi, \beta) \in K} \Phi(\varphi, \psi, \beta)$, cuando $t \rightarrow \infty$ (para un ρ suficientemente chico que será dado), con $\varphi(0), \psi(0) \in \mathbb{R}_+^N$ y $\beta^{(0)}$ un *guess*. Más aún, existe $\delta > 0$ tal que

$$\Phi(x^{(t)}) - \Phi(x^*) \leq \frac{\Phi(x^{(0)}) - \Phi(x^*)}{(1 + \delta)^t}. \quad (17)$$

La prueba del Teorema 24 se descompone en las siguientes partes. Primero, se estudia la función Φ . Luego, se establece la existencia de una solución y como caracterizarla. Finalmente, se prueba que el algoritmo SISTA permite converger a dicha solución de forma que (17) se satisface.

Nuestro objetivo es resolver

$$\inf_{(\varphi, \psi, \beta) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^K} \Phi(\varphi, \psi, \beta) = G \circ \Lambda(\varphi, \psi, \beta) + \gamma \|\beta\|_1 \quad (18)$$

donde $\Lambda : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^K \rightarrow \mathcal{M}_{N \times N}$ es una lineal definida de la siguiente forma:

$$(\Lambda(\varphi, \psi, \beta))_{ij} = \varphi_i + \psi_j - c_{ij}^\beta, \quad \forall (i, j)$$

y G una función C^∞ y convexa, con regla de correspondencia

$$G(\lambda) = \sum_{1 \leq i, j \leq N} (\exp(\lambda_{ij}) - \hat{\pi}_{ij} \lambda_{ij}), \quad \forall \lambda \in \mathcal{M}_{N \times N}.$$

Luego (véase el Apéndice 150),

$$\begin{aligned} \nabla G(\lambda) &= [e^{\lambda_{ij}} - \hat{\pi}_{ij}] \in \mathcal{M}_{N \times N} \\ \mathbf{H}(G(\lambda)) &= \text{diag}(\exp(\lambda)) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_{11}} & & & \\ & e^{\lambda_{12}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & e^{\lambda_{NN}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N^2 \times N^2}. \end{aligned}$$

Denotando $x = (\varphi, \psi, \beta)$

$$\nabla F(x) = \underbrace{\underbrace{\Lambda^T}_{(N \times N \times K) \times (N \times N)} \underbrace{(\exp \Lambda(x) - \hat{\pi})}_{\sim \mathbb{R}^{N^2}}}_{(N \times N \times K) \times (N \times N)}, \quad \mathbf{H}(F(x)) = \Lambda^T \text{diag}(\exp(\Lambda(x))) \Lambda. \quad (19)$$

En efecto,

$$\nabla F(x) = (dG_{\Lambda(x)} \circ d\Lambda_x)^T = \Lambda^T (\exp \Lambda(x) - \hat{\pi}).$$

Ahora, definamos

$$\tilde{c}^\beta = \sum_{k=1}^K \beta_k \tilde{d}^k, \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^K$$

y

$$\tilde{\Lambda}(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \beta)_{ij} = \tilde{\varphi}_{ij} + \tilde{\psi}_{ij} - \tilde{c}_{ij}^\beta.$$

Entonces, notamos que

$$\Lambda(\varphi, \psi, \beta) = \tilde{\Lambda} \left(\varphi - \sum_{k=1}^K \beta_k a^k, \psi - \sum_{k=1}^K \beta_k b^k, \beta \right).$$

En otras palabras, sin pérdida de generalidad, podemos considerar \tilde{d} en vez de d . Ahora, por otro lado, observemos que, para cualquier vector fijo $m \in \mathbb{R}^N$

$$\Lambda(\varphi + m, \psi - m, \beta) = \Lambda(\varphi, \psi, \beta).$$

Si se impone la restricción $\varphi_1 = 0$, se remueve esta invarianza. Así, llegamos al siguiente resultado.

Lema 25. Bajo los supuestos del Teorema 24, Λ es inyectiva de

$$E = \{(\varphi, \psi, \beta) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^K : \varphi_1 = 0\} \simeq \mathbb{R}^{2N-1+K}.$$

a $\mathcal{M}_{N \times N}$.

Demostración. Sea $(\varphi, \psi, \beta) \in E$, perteneciendo al núcleo de Λ , entonces:

$$\forall i, j : \varphi_i + \psi_j = \sum_{k=1}^K \beta_k d_{ij}^k.$$

Luego, por los supuestos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \{\varphi_i + \psi_j\} &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^K \beta_k d_{ij}^k \\ &= \sum_{k=1}^K \underbrace{\left[\sum_{j=1}^N \beta_k d_{ij}^k \right]}_{=0}. \end{aligned}$$

Esto es, $N\varphi_i + \sum_{j=1}^N \psi_j = 0$, para todo i . En particular, para $i = 1$

$$\sum_{j=1}^N \psi_j = 0.$$

Así, $\varphi = 0$. Pero entonces, análogamente, $\psi = 0$ también. Con lo cual,

$$\sum_{k=1}^K \beta_k d^k = 0.$$

Por la independencia lineal de $\{d^k\}_{k=1}^K$, $\beta = \mathbf{0}$. Así, $\{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^N}, \mathbf{0}_{\mathbb{R}^N}, \mathbf{0}_{\mathbb{R}^K}\} = \text{Ker}(\Lambda)$. □

Lema 26. Nuevamente bajo los supuestos del Teorema 24, para $x, y \in E$ se existen $\alpha = \alpha(M)$ y $v = v(M)$, con

$$\max\{\|\Lambda(x)\|_\infty, \|\Lambda(y)\|_\infty\} \leq M,$$

tales que

$$\begin{aligned} F(x) &\geq F(y) + \nabla F(y)(x - y) + \frac{v}{2} \|x - y\|_2^2 \\ \|\nabla F(x) - \nabla F(y)\|_2 &\leq \alpha \|x - y\|_2. \end{aligned}$$

Demostración. Proponemos $v = e^{-M} \sigma_{\min}$ donde σ_{\min} es el menor autovalor de la matriz simétrica $\Lambda^T \Lambda$. Por el Teorema de Taylor, existe $c \in [x, y]$ tal que

$$F(y) = F(x) + \nabla F(x)^T (y - x) + \frac{1}{2} (y - x)^T \mathbf{H}(F(c)) (y - x).$$

Luego, $c = \theta x + (1 - \theta)y$, $\theta \in [0, 1]$. Analicemos $(y - x)^T \mathbf{H}(F(c)) (y - x)$:

$$\begin{aligned} (y - x)^T \mathbf{H}(F(c)) (y - x) &= (y - x)^T \Lambda^T \text{diag}(\exp(\Lambda(\theta x + (1 - \theta)y))) \Lambda (y - x)^T \\ &\stackrel{\text{linealidad de } \Lambda}{=} (y - x)^T \Lambda^T \text{diag}(\exp(\theta \Lambda(x) + (1 - \theta) \Lambda(y))) \Lambda (y - x) \\ &\geq (y - x)^T \Lambda^T \text{diag}(\exp(-M)) \Lambda (y - x) \\ &\geq e^{-M} \sigma_{\min} \|y - x\|_2^2. \end{aligned}$$

La última desigualdad se explica a continuación. Usando el Teorema Espectral [Botelho et al. \(2023\)](#), obtenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \min_{\|n\|=1} \{n^T A n\} &= \min_{\|n\|=1} \{n^T (U D U^T) n\} \\ &= \min_{\|n\|=1} \{(U^T n)^T D (U^T n)\} \\ &= \min_{\|U^T n\|=1} \{(U^T n)^T D (U^T n)\} \\ &= \min_{\|z\|=1} \{z^T D z\} \\ &= \min_{\|z\|=1} \sum_i z_i^2 D_{ii} \\ &= \min_{\|z\|=1} \sum_i z_i^2 \lambda_i \\ &\geq \min_i \{\lambda_i\} \underbrace{\sum_i z_i^2}_{=1}. \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{1}{\|y - x\|_2^2} (y - x)^T (\Lambda^T \Lambda) (y - x) \geq \min_i \lambda_i.$$

Con respecto a la segunda desigualdad: $\|\nabla F(x) - \nabla F(y)\|_2 \leq \alpha \|x - y\|_2$, esto es consecuencia de que

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \sup_{z \in (x, y)} \|g'(z)\| \cdot \|x - y\|$$

y

$$\begin{aligned}
\sup_{z \in (x,y)} \|g'(z)\| &= \sup_{z \in (x,y)} \|J(\nabla F(z))\| \\
&= \sup_{z \in (x,y)} \|\mathbf{H}(F(z))\| \\
&= \sup_{z \in (x,y)} \|\Lambda^T \text{diag}(\exp(\Lambda(z)))\Lambda\| \\
&\leq e^M \|\Lambda^T \Lambda\| \\
&\leq e^M \|\Lambda^T\| \cdot \|\Lambda\|.
\end{aligned}$$

□

Proposición 27. Bajo los supuestos del Teorema 24

1. Φ es coerciva en \mathbb{R}^{2N-1+K} , i.e., los conjuntos $\{x \in \mathbb{R}^{2N-1+K} : f(x) \leq c\}$ son acotados (compactos de hecho por la continuidad).
2. El problema (18) admite una única solución $x^* = (\varphi^*, \psi^*, \beta^*)$.
3. El óptimo x^* viene caracterizado por

$$\nabla_{\varphi} F(x^*) = \mathbf{0}, \nabla_{\psi} F(x^*) = \mathbf{0}, -\nabla_{\beta} F(x^*) \in \gamma \partial \|\cdot\|_1(\beta^*). \quad (20)$$

Lema 28. Toda función coerciva $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida en un cerrado, que es continua, posee un mínimo.

Demostración. Escojamos $x_0 \in X$ arbitrario. Como f es coerciva, existe $k > 0$ tal que, si $\|x\| \geq k$, $f(x) \geq 1 + f(x_0)$. Luego, tomemos el compacto $K = X \cap \overline{B}(0, k)$. Como f es continua, existe x^* tal que $f(x^*)$ es el mínimo en K . Luego, si $x_0 \notin K$, $\|x_0\| > k$ por lo que $x_0 \in K$. Por ende, $f(x^*) \geq f(x_0)$. Ahora, si $x \in X - K$, $\|x\| > k$, por lo que $f(x) > f(x_0) \geq f(x^*)$. De este modo, x^* es minimizador global. □

Demostración. Probamos ahora la Proposición 27. Tenemos las siguientes 3 desigualdades:

$$e^t - pt \geq p - \ln p, \quad \forall p > 0$$

$$\begin{aligned}
e^\lambda - \hat{\pi}_{ij}\lambda &\geq \hat{\pi}_{ij}|\lambda|, \quad \lambda < 0 \\
e^\lambda - \hat{\pi}_{ij}\lambda &= \hat{\pi}_{ij}|\lambda| + e^\lambda - 2\hat{\pi}_{ij}\lambda \\
e^\lambda - \hat{\pi}_{ij}\lambda &\geq \hat{\pi}_{ij}\lambda - 2\ln 2.
\end{aligned}$$

Combinando esto y sumando, llegamos a

$$\Phi(\varphi, \psi, \beta) \geq \sum_{1 \leq i, j \leq N} \hat{\pi}_{ij} |\Lambda_{ij}(\varphi, \psi, \beta)| - 2N^2 \ln 2 + \gamma \|\beta\|_1. \quad (21)$$

Dado que Λ es inyectiva sobre E y $\hat{\pi}_{ij} > 0$, podemos concluir la coercividad de Φ . Luego, dada la continuidad de Φ (pues F es suave y $\|\cdot\|_1$ continua), y el hecho que E es cerrado en \mathbb{R}^{2N-1+K} , podemos asegurar la existencia de un minimizador global x^* (Lema 28). Pero entonces, usando la Proposición 161, concluimos que

$$\mathbf{0} \in \partial\Phi(\varphi^*, \psi^*, \beta^*). \quad (22)$$

Dado que Boyd (2022) (Moreau-Rockafellar)

$$\begin{aligned}
\partial(\alpha f(x)) &= \alpha \partial f(x) \\
\partial\left(\sum_{i=1}^n f_i(x)\right) &= \sum_{i=1}^n \partial f_i(x)
\end{aligned}$$

concluimos que (22) es equivalente a (20). \square

5.5. Prueba de la convergencia de SISTA

Demostración. Empezamos con un vector de inicialización $(\varphi^{(0)}, \psi^{(0)}, \beta^{(0)}) \in \mathbb{R}^{2N+K}$ (previamente se ha comentado sobre esta inicialización), y se define recursivamente la secuencia $(\varphi^{(t)}, \psi^{(t)}, \beta^{(t)})$

$$\begin{aligned}
\varphi^{(t+1)} &\in \operatorname{argmin} F(\cdot, \psi^{(t)}, \beta^{(t)}) \\
\psi^{(t+1)} &\in \operatorname{argmin} F(\varphi^{(t+1)}, \cdot, \beta^{(t)})
\end{aligned}$$

construidos de manera explícita vía

$$\begin{cases} \exp(\varphi_i^{(t+1)}) &= \frac{\mu_i}{\sum_{j=1}^N \exp\left(\psi_j^{(t)} - c_{ij}^{\beta^{(t)}}\right)} \\ \exp(\psi_j^{(t+1)}) &= \frac{\nu_j}{\sum_{i=1}^N \exp\left(\varphi_i^{(t+1)} - c_{ij}^{\beta^{(t)}}\right)}. \end{cases}$$

Por otro lado, teníamos

$$\beta^{(t+1)} = \text{prox}_{\rho, \gamma, \|\cdot\|} \left(\beta_k^{(t)} - \rho \underbrace{\sum_{1 \leq j, i \leq N} (\hat{\pi}_{ij} - \pi_{ij}^{\beta^{(t)}}) d_{ij}^{(k)}}_{\nabla_{\beta} F} \right).$$

Esto es lo mismo que minimizar respecto a β

$$\rho \gamma \|\beta\|_1 + \frac{1}{2} \|\beta - (\beta^{(t)} - \rho \nabla_{\beta} F(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t)}))\|_2^2. \quad (23)$$

O sea, el algoritmo es completamente explícito. El primer elemento de la demostración es escoger ρ adecuadamente. Para esto, notemos la siguiente situación: sea $C = \Phi(\varphi^{(0)}, \psi^{(0)}, \beta^{(0)})$. Gracias a la cota (21)

$$\Phi(\varphi, \psi, \beta) \leq C \implies \|\beta\|_1 \leq \frac{C + 2N^2 \ln 2}{\gamma}.$$

Definiendo $A = C + 2N^2 \ln 2 + 1$ tendremos que

$$A > C + 2N^2 \ln 2, \quad F \leq A \text{ cuando } \Phi \leq C.$$

Sea ahora $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, función no decreciente tal que

$$\theta(t) = \begin{cases} t, & \text{si } t \leq A \\ \theta(t) \geq t, & \text{si } t \in [A, 2A] \\ 2A, & \text{si } t \geq 2A. \end{cases}$$

A modo de ejemplo, para C^1 podríamos tener

$$\theta(t) = \begin{cases} t, & \text{si } t \leq A \\ \frac{1}{A^3}(t - A)^3(2A - t) + t \geq t, & \text{si } t \in [A, 2A] \\ 2A, & \text{si } t \geq 2A. \end{cases}$$

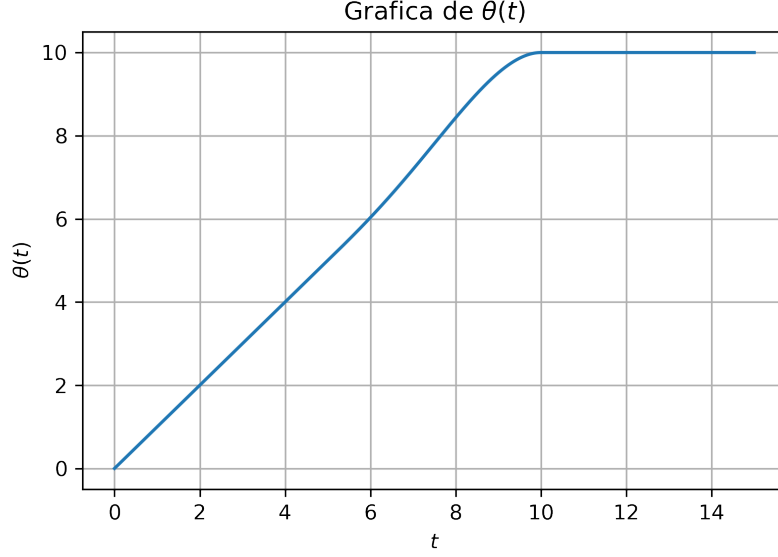


Figura 6: $\theta(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ para $t \in [0, 3A]$, $A = 5$.

Luego, $\tilde{F} = \theta \circ F$ tiene gradiente globalmente Lipschitz pues, combinamos la suavidad de θ con el Lema 26. Sea α dicha constante. Entonces, afirmamos que $\rho \in (0, \alpha^{-1}]$ funciona. Ahora, como $\nabla \tilde{F}(x)$ es α -Lipschitz continuo,

$$\tilde{F}(x) \leq \tilde{F}(y) + \nabla \tilde{F}(y)(x - y) + \frac{\alpha}{2} \|x - y\|_2^2.$$

En efecto, si consideramos $\phi(t) = \tilde{F}(y + t(x - y))$

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x) - \tilde{F}(y) - \langle \nabla \tilde{F}(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla \tilde{F}(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla \tilde{F}(y), x - y \rangle \\ &= \int_0^1 \langle \nabla \tilde{F}(y + t(x - y)) - \nabla \tilde{F}(y), x - y \rangle dt \\ &\leq \int_0^1 \|\nabla \tilde{F}(y + t(x - y)) - \nabla \tilde{F}(y)\|_2 \|x - y\|_2 dt \\ &\leq \int_0^1 \alpha t \|x - y\|_2^2 dt \\ &= \frac{\alpha}{2} \|x - y\|_2^2. \end{aligned}$$

Ahora, probemos por inducción que el ρ escogido hace que $\Phi \leq C$ para futuras iteraciones. Ciertamente por construcción

$$C \geq \Phi(\varphi^{(t)}, \psi^{(t)}, \beta^{(t)}) \geq \Phi(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t)}).$$

Probar sin embargo que $\Phi(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t+1)}) \leq C$ requiere más pasos. Primero, cuando $\Phi \leq A$, $F \leq A$ y por ende, $F = \tilde{F}$ y $\nabla F = \nabla \tilde{F}$. Entonces, de (23)

$$\beta^t - \beta^{t+1} - \rho \nabla_{\beta} F(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t)}) \in \rho \gamma \partial(\|\cdot\|_1)(\beta^{t+1}).$$

Esto es, usando la definición de subdiferencial:

$$\gamma \|\beta^{(t)}\|_1 \geq \gamma \|\beta^{(t+1)}\|_1 + \frac{1}{\rho} \|\beta^{(t+1)} - \beta^{(t)}\|_2^2 - \nabla_{\beta} F(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t)})(\beta^{(t)} - \beta^{(t+1)}). \quad (24)$$

Por la α -Lipschitz continuidad

$$F(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t)}) \geq \tilde{F}(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t+1)}) \quad (25)$$

$$+ \nabla_{\beta} F(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t)})(\beta^{(t)} - \beta^{(t+1)}) \quad (26)$$

$$- \frac{\alpha}{2} \|\beta^{(t+1)} - \beta^{(t)}\|_2^2. \quad (27)$$

Sumando (24) con (25) y tomando en cuenta que $\rho \leq 1/\alpha$

$$\Phi(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t)}) \geq \tilde{F}(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t+1)}) + \gamma \|\beta^{(t+1)}\|_1 + \frac{\alpha}{2} \|\beta^{(t+1)} - \beta^{(t)}\|_2^2. \quad (28)$$

Si $F(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t+1)}) \leq 2A$, entonces

$$\tilde{F}(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t+1)}) \geq F(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t+1)})$$

y así

$$\Phi(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t+1)}) \leq C.$$

Si $F(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t+1)}) > 2A$, de (28) tenemos que

$$2A \leq F(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t)}) + \gamma \|\beta^{(t)}\|_1 \leq 2(C + 2N^2 \ln 2).$$

Pero esto es una contradicción por la definición de A . Así,

$$\Phi(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t)}) \geq \Phi(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t+1)}) + \frac{\alpha}{2} \|\beta^{(t+1)} - \beta^{(t)}\|_2^2, \quad (29)$$

y que entonces $\Phi(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t+1)}) \leq C$. Entonces, Φ_t es una sucesión decreciente, acotada superior e inferiormente: converge monótonamente.

Nos falta únicamente establecer (17). Veamos. Por el Lema 26 y las condiciones $\nabla_\varphi F(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t)}, \beta^{(t)}) = 0$, $\nabla_\psi F(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t)}) = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} F(\varphi^{(t)}, \psi^{(t)}, \beta^{(t)}) - F(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t)}, \beta^{(t)}) &\geq \frac{v}{2} \|\varphi^{(t+1)} - \varphi^{(t)}\|_2^2 \\ F(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t)}, \beta^{(t)}) - F(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t)}) &\geq \frac{v}{2} \|\psi^{(t+1)} - \psi^{(t)}\|_2^2. \end{aligned}$$

Sumando y teniendo en cuenta que

$$F(\varphi^{(t)}, \psi^{(t)}, \beta^{(t)}) - F(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t)}) = \Phi(\varphi^{(t)}, \psi^{(t)}, \beta^{(t)}) - \Phi(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t)})$$

llegamos a la desigualdad

$$\Phi(\varphi^{(t)}, \psi^{(t)}, \beta^{(t)}) - \Phi(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t)}) \geq \frac{v}{2} (\|\varphi^{(t+1)} - \varphi^{(t)}\|_2^2 + \|\psi^{(t+1)} - \psi^{(t)}\|_2^2). \quad (30)$$

Juntando (29) y (30)

$$\Phi(\varphi^{(t)}, \psi^{(t)}, \beta^{(t)}) - \Phi(\varphi^{(t+1)}, \psi^{(t+1)}, \beta^{(t+1)}) \geq \frac{v}{2} (\|\varphi^{(t+1)} - \varphi^{(t)}\|_2^2 + \|\psi^{(t+1)} - \psi^{(t)}\|_2^2) \quad (31)$$

$$+ \frac{\alpha}{2} \|\beta^{(t+1)} - \beta^{(t)}\|_2^2. \quad (32)$$

Dado que $\alpha \geq v$ (ver Lema 26), definiendo $A_t = \Phi(x_t) - \Phi(x^*)$

$$A_{t-1} - A_t \geq \frac{v}{2} \|x_t - x_{t-1}\|_2^2, \quad \forall t \geq 1.$$

Queda por acotar A_t superiormente. Por la construcción de $\beta^{(t)}$

$$q_t = \frac{\beta^{(t-1)} - \beta^{(t)}}{\rho} - \nabla_\beta F(\varphi^{(t)}, \psi^{(t)}, \beta^{(t-1)}) \in \gamma \partial \|\cdot\|_1(\beta^{(t)}).$$

Así,

$$\Phi(x^*) \geq \Phi(x_t) + \nabla_\varphi F(x_t)(\varphi^* - \varphi^{(t)}) + \frac{v}{2} \|\varphi^{(t)} - \varphi^*\|_2^2 \quad (33)$$

$$+ \nabla_\psi F(x_t)(\psi^* - \psi^{(t)}) + \frac{v}{2} \|\psi^{(t)} - \psi^*\|_2^2 \quad (34)$$

$$+ (\nabla_\beta F(x_t) + q_t)(\beta^* - \beta^{(t)}) + \frac{v}{2} \|\beta^{(t)} - \beta^*\|_2^2. \quad (35)$$

Se hace uso nuevamente del Lema 26 y la Definición 156. Por la Desigualdad de Young:

$$|q \cdot z| \leq \frac{v}{2} \|z\|_2^2 + \frac{1}{2v} \|q\|_2^2. \quad (36)$$

Usando (36) en (33), concluimos que

$$A_t \leq \frac{1}{2v} (\|\nabla_\varphi F(x_t)\|_2^2 + \|\nabla_\psi F(x_t)\|_2^2 + \|\nabla_\beta F(x_t) + q_t\|_2^2).$$

Como $\nabla_\varphi F(\varphi^{(t)}, \psi^{(t-1)}, \beta^{(t-1)}) = 0$, $\nabla_\psi F(\varphi^{(t)}, \psi^{(t)}, \beta^{(t-1)}) = 0$,

$$\begin{aligned} \|\nabla_\varphi F(\varphi^{(t)}, \psi^{(t)}, \beta^{(t)}) - \nabla_\varphi F(\varphi^{(t)}, \psi^{(t-1)}, \beta^{(t-1)})\|_2 &\leq \alpha \|x_t - x_{t-1}\|_2^2 \\ \|\nabla_\varphi F(\varphi^{(t)}, \psi^{(t)}, \beta^{(t)}) - \nabla_\varphi F(\varphi^{(t)}, \psi^{(t)}, \beta^{(t-1)})\|_2 &\leq \alpha \|x_t - x_{t-1}\|_2^2 \\ \|\nabla_\varphi F(x_t)\|_2^2 + \|\nabla_\psi F(x_t)\|_2^2 &\leq 2\alpha^2 \|x_t - x_{t-1}\|_2^2. \end{aligned}$$

Usando la bilinealidad del producto interno y el hecho que $\nabla_\beta F(\varphi^{(t)}, \psi^{(t)}, \cdot)$ es decreciente:

$$\begin{aligned} \|\nabla_\beta F(x_t) + q_t\|_2^2 &= \left\| \frac{\beta^{(t-1)} - \beta^{(t)}}{\rho} + \nabla_\beta F(x_t) - \nabla_\beta F(\varphi^{(t)}, \psi^{(t)}, \beta^{(t-1)}) \right\|_2^2 \\ &= \frac{1}{\rho^2} \|\beta^{(t-1)} - \beta^{(t)} + \rho(\nabla_\beta F(x_t) - \nabla_\beta F(\varphi^{(t)}, \psi^{(t)}, \beta^{(t-1)}))\|_2^2 \\ &= \frac{1}{\rho^2} \|\beta^{(t-1)} - \beta^{(t)}\|_2^2 + \|\nabla_\beta F(x_t) - \nabla_\beta F(\varphi^{(t)}, \psi^{(t)}, \beta^{(t-1)})\|_2^2 \\ &\quad + \frac{2}{\rho} (\beta^{(t-1)} - \beta^{(t)}) \cdot (\nabla_\beta F(x_t) - \nabla_\beta F(\varphi^{(t)}, \psi^{(t)}, \beta^{(t-1)})) \\ &\leq \left(\frac{1}{\rho^2} + \alpha^2 \right) \|\beta^{(t-1)} - \beta^{(t)}\|_2^2 \\ &\quad + \frac{2}{\rho} (\beta^{(t-1)} - \beta^{(t)}) \cdot (\nabla_\beta F(x_t) - \nabla_\beta F(\varphi^{(t)}, \psi^{(t)}, \beta^{(t-1)})) \\ &\leq \left(\frac{1}{\rho^2} + \alpha^2 \right) \|\beta^{(t-1)} - \beta^{(t)}\|_2^2. \end{aligned}$$

De este modo,

$$A_t \frac{1}{2v} \left(\frac{1}{\rho^2} + \alpha^2 + 2\alpha^2 \right) \|x_t - x_{t-1}\|_2^2 = \frac{3\alpha^2 + \rho^{-2}}{2v} \|x_t - x_{t-1}\|_2^2.$$

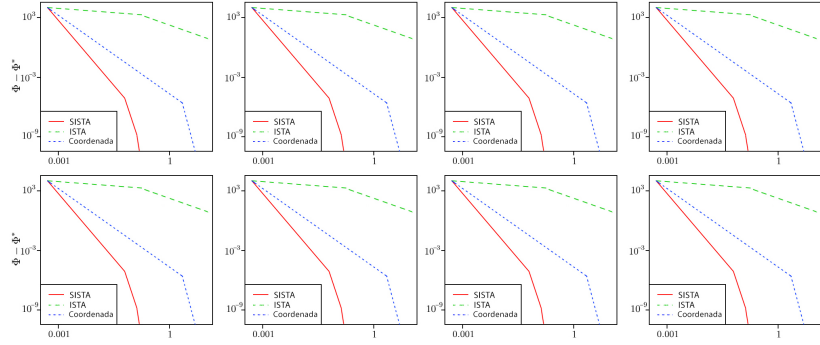
Definiendo $\delta = \frac{v^2 \rho^2}{2\alpha^2 \rho^2 + 1}$, como $A_t \leq A_{t-1} - \frac{v}{2} \|x_t - x_{t-1}\|_2^2$

$$A_t \leq \frac{A_{t-1}}{1 + \delta}. \quad (37)$$

Finalmente, por inducción, concluimos que (37) implica (17). \square

5.6. Estudio de la migración

Siempre siguiendo [Dupuy et al. \(2021\)](#), los autores realizan una aplicación del algoritmo SISTA en el contexto del estudio de la migración. Sin ahondar en los detalles, presentemos en esta breve sub-sección los datos usados, la metodología y los resultados. Los autores acceden a la probabilidad de que un migrante (escogido aleatoriamente) del país i se encuentre en el país j : $\hat{\pi}_{ij}$. Luego, recuperan a partir de las bases de datos del World Bank, Centre d'Études Prospectives de l'Information Internacionales y la Freedom House, los elementos a usar en la matriz d . Aplicando el algoritmo SISTA obtienen que las variables más importantes son: el idioma, la relación colonial, la distancia geográfica, una dummy del estado de los servicios públicos, la interacción entre la superficie geográfica de los países, y una variable vinculada la esperanza de vida de las mujeres en el país de destino.



(A) $K = 100, N = 100$ (B) $K = 100, N = 200$ (C) $K = 500, N = 100$ (D) $K = 500, N = 200$

Figura 7: Comparación: traducido y editado del artículo original [Dupuy et al. \(2021\)](#).

Esto concluye nuestro estudio sobre el artículo [Dupuy et al. \(2021\)](#). Empezamos la siguiente sección presentando brevemente el modelo básico de elección discreta que será necesario para comprender las aplicaciones de la teoría de transporte óptimo en matching.

6. Matching

6.1. Modelo de elección discreta

A continuación una breve introducción a la teoría de la elección discreta en microeconomía. Estas nociones serán necesarias para poder presentar unos ejemplos donde se plantean problemas de emparejamiento bajo la formulación de un problema de transporte.

Un agente de decisión n debe elegir entre $\{1, \dots, J\}$ opciones que le generan una utilidad $U_{nj} = V_{nj} + \varepsilon_{nj}$, $\forall j = 1, \dots, J$. El término V_{nj} es conocido, mientras que ε_{nj} es un término estocástico. Suponemos que los términos $\{\varepsilon_{nj}\}_j$ son independientes y se distribuyen según una Extreme Value de Tipo 1:

$$\begin{aligned} F(s) &= e^{-e^{-s}} \\ f(s) &= e^{-s} e^{-e^{-s}}, \end{aligned}$$

siendo $F(s)$ la función de distribución y $f(s)$ la función de densidad respecto a la medida de Lebesgue. Luego, siguiendo a [McFadden \(1974\)](#) y [Echenique and Chambers \(2016\)](#) la probabilidad de que el agente n escoja la alternativa i es

$$\mathbb{P}_{ni} = \mathbb{P}(V_{ni} + \varepsilon_{ni} \geq V_{nj} + \varepsilon_{nj}, \forall j \neq i).$$

Esto es,

$$\mathbb{P}(\varepsilon_{nj} \leq V_{ni} - V_{nj} + \varepsilon_{ni}, \forall j \neq i).$$

Usando la independencia,

$$\mathbb{P}(\varepsilon_{nj} \leq V_{ni} - V_{nj} + \varepsilon_{ni}, \forall j \neq i | \varepsilon_{ni}) = \prod_{j \neq i} e^{-e^{-(\varepsilon_{ni} + V_{ni} - V_{nj})}}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{ni} &= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\prod_{j \neq i} e^{-e^{-(s + V_{ni} - V_{nj})}} \right)}_{=\mathbb{P}(\varepsilon_{nj} \leq V_{ni} - V_{nj} + \varepsilon_{ni}, \forall j \neq i | \varepsilon_{ni} = s)} \underbrace{e^{-s} e^{-e^{-s}}}_{f(s)} ds. \end{aligned}$$

Como $e^{-e^{-s}} = e^{-e^{-(s + V_{ni} - V_{ni})}}$

$$\mathbb{P}_{ni} = \int_{\mathbb{R}} \left(\prod_j e^{-e^{-(s + V_{ni} - V_{nj})}} \right) e^{-s} ds.$$

Luego, $\prod_j e^{-e^{-(s+V_{ni}-V_{nj})}} = \exp \left\{ -\sum_j e^{-(V_{ni}-V_{nj}+s)} \right\}$ y así

$$\mathbb{P}_{ni} = \int_{\mathbb{R}} \exp \left(-\exp(s) \sum_j e^{-(V_{ni}-V_{nj})} \right) e^{-s} ds. \quad (38)$$

Sea $t = -e^{-s}$, $dt = e^{-s} ds$. Podemos entonces re-escribir 38 como sigue

$$\mathbb{P}_{ni} = \int_{-\infty}^0 \exp \left(t \sum_j e^{-(V_{ni}-V_{nj})} \right) dt.$$

De ahí la situación es directa:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{ni} &= \frac{\exp \left(t \sum_j e^{-(V_{ni}-V_{nj})} \right) \Big|_{-\infty}^0}{\sum_{j=1}^J e^{V_{nj}-V_{ni}}} \\ &= \frac{1}{\sum_{j=1}^J e^{V_{nj}-V_{ni}}} \\ &= \frac{e^{V_{ni}}}{\sum_{j=1}^J e^{V_{nj}}}. \end{aligned}$$

De este modo, la probabilidad de que n escoja a i es $\frac{e^{V_{ni}}}{\sum_{j=1}^J e^{V_{nj}}}$.

Notation. A continuación denotamos, en caso sea necesario (cardinalidad finita de \mathcal{X})

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} \pi_{xy} = \int_{\mathcal{X}} \pi(x, y) dx.$$

Lo análogo para \mathcal{Y} .

Ahora sí, procedemos a estudiar los modelos de emparejamiento que recurren a la teoría de transporte óptimo. Empezamos con el modelo del matrimonio. Luego, pasamos al contexto del mercado laboral.

6.2. Marriage market

El siguiente modelo fue desarrollado en [Dupuy and Galichon \(2014\)](#) y [Dupuy et al. \(2017\)](#). La situación es la siguiente. Usualmente, como ya hemos visto, en los problemas de transporte óptimo se cuenta con una función de costos $c(x, y)$ o beneficios $\Phi(x, y)$, y se busca encontrar el plan de transporte $\pi(x, y)$ que resuelva

$$\min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{E}_{\pi}[c(x, y)]$$

o bien

$$\max_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{E}_\pi[\Phi(x, y)]. \quad (39)$$

Acá, como de costumbre, $\Pi(\mu, \nu)$ es el conjunto de acoplamientos. En la Sección 5 vimos que en la práctica se suele resolver el problema inverso: dado un emparejamiento o plan de transport óptimo (observado) $\hat{\pi}$, determinar la función Φ (un estimado $\hat{\Phi}$) (análogo para el costo).

En el modelo en cuestión, lo que se busca es determinar la función de afinidad relativa al emparejamiento de hombres y mujeres. Sean \mathcal{X} y \mathcal{Y} son subconjuntos de \mathbb{R}^L cerrados⁸. Cada individuo viene representado por $x \in \mathcal{X}$, y cada individuo por $y \in \mathcal{Y}$, vectores que recuperan una serie de características: educación, edad, indicadores de personalidad, salario etc. Debido a *shocks de simpatía*, que constituyen una modelización de lo que vienen a ser las *variables no observables*, el problema de transporte óptimo tradicional (39) se convierte en un problema de transporte regularizado⁹:

$$\max_{\pi(x, y) \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{E}_\pi[\Phi(x, y) - \sigma(\ln \pi(x, y) - 1)]. \quad (40)$$

A continuación, derivamos con detalle el modelo presentado en Dupuy and Galichon (2014).

Observación. En los artículos originales, se trabaja con un logit continuo. No obstante, a continuación, nos limitamos al caso discreto. Asimismo, nos limitamos a conjuntos con la misma cardinalidad. Esto simplifica mucho las derivaciones.

Sean μ y ν las distribuciones de las características, con densidades respecto a la medida de Lebesgue f y g :

$$\mu(A) = \int_A f(x)dx, \quad \nu(A) = \int_A g(x)dx.$$

Sin pérdida de generalidad, se asume que $\mathbb{E}_\mu[X] = \mathbb{E}_\nu[Y] = 0$, siendo X la v.a. asociada a los vectores característica de los hombres e Y el de las mujeres.

⁸Y por ende medibles, consultar el Anexo B

⁹Note que ahora se suma directamente la entropía. En la minimización del costo se restaba. Se ha agregado un término constante a diferencial de modelo original, esto conduce a

Luego, un emparejamiento, en este contexto, es una probabilidad $\pi(x, y)$ de que ocurra la pareja (x, y) . Dicho emparejamiento debe satisfacer las siguientes restricciones (debe ser un acoplamiento respecto a las medidas μ y ν)

$$\Pi(\mu, \nu) = \left\{ \pi : \pi(x, y) \geq 0 : \int_{\mathcal{Y}} \pi(x, y) dy = f(x), \int_{\mathcal{X}} \pi(x, y) dx = g(y) \right\}.$$

La función objetivo se denomina función de afinidad total o conjunto. El problema consiste entonces en resolver

$$\max_{\pi(x, y) \in \Pi(\mu, \nu)} \left\{ \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \Phi(x, y) \pi(x, y) dx dy \right\}.$$

Sin embargo, se introducen *shocks de simpatía* que permiten modelar la heterogeneidad: características no observables. Así, al final se desea maximizar $\Phi(x, y) + \varepsilon_m(y) + \eta_w(x)$ donde m es de hombre, w de mujer y $\Phi(x, y) = U(x, y) + V(x, y)$ ¹⁰ de forma que

$$U(x, y) + \varepsilon_m(y)$$

es la utilidad de un hombre con características x de emparejarse con una mujer de características y . Análogamente,

$$V(x, y) + \eta_w(x)$$

es la utilidad de una mujer con características y de emparejarse con un hombre de características x . El problema de optimización consiste entonces maximizar la suma de las utilidades aleatorias de los hombres y las mujeres.

Se asume que el número de puntos $(y_k, \varepsilon_k) \in A$, denotado N_A , sigue una distribución $Pois(\theta(A))$ con $d\theta = e^{-\varepsilon} d\varepsilon dy$, y es tal que N_A, N_B con $A \cap B = \emptyset$ son independientes. A esto se le conoce como *Poisson-Point-Process*. Cada hombre m , maximiza su utilidad estocástica. Así, podemos definir

$$Z = \max_{y \in \mathcal{Y}} \{U(x, y_j) + \varepsilon_m(y_j)\}.$$

Tenemos

$$\mathbb{P}(Z \leq c) = \underbrace{\mathbb{P}(U(x, y_j) + \varepsilon_m(y_j) \leq c, \forall y \in \mathcal{Y})}_{\#\{(y_j, \varepsilon_m(y_j)) \in \{(y, \varepsilon) : U(x, y) + \varepsilon > c\}\} = 0}.$$

simplificaciones algebraicas.

¹⁰Formalmente, puede descomponerse, pero queda por determinar las funciones de manera

Esto es,

$$\mathbb{P}(Z \leq c) = e^{-\iint_{\mathcal{Y} \times \mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{U(x,y)+\varepsilon > c\}} e^{-\varepsilon} d\varepsilon dy}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \ln \mathbb{P}(Z \leq c) &= -\iint_{\mathcal{Y} \times \mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{U(x,y)+\varepsilon > c\}} e^{-\varepsilon} d\varepsilon dy \\ &= -\int_{\mathcal{Y}} \int_{c-U(x,y)}^{\infty} e^{-\varepsilon} d\varepsilon dy \\ &= -\exp\left(-c + \ln \int_{\mathcal{Y}} \exp(U(x, y')) dy'\right). \end{aligned}$$

Con lo cual,

$$\mathbb{P}(Z \leq c) = e^{-\exp(-c + \ln \int_{\mathcal{Y}} \exp(U(x, y')) dy')}.$$

Así, $Z \sim \text{Gumbel}\left(\ln \int_{\mathcal{Y}} \exp(U(x, y')) dy', 1\right)$. Esto permite además obtener

$$\mathbb{E}[Z] = \ln\left(\int_{\mathcal{Y}} \exp(U(x, y')) dy'\right). \quad (41)$$

Por otro lado, (abusando de la notación), ya sabemos de la Sección 6 que

$$\pi(y|x) = \frac{e^{U(x,y)}}{\int_{\mathcal{Y}} \exp(U(x, y')) dy'}.$$

Recordando la notación que se está empleando, finalmente

$$\pi(y|x) = \exp\left\{U(x, y) - \ln \sum_{y' \in \mathcal{Y}} \exp(U(x, y'))\right\} \quad (42)$$

$$\pi(x|y) = \exp\left\{U(x, y) - \ln \sum_{x' \in \mathcal{X}} \exp(U(x', y))\right\}. \quad (43)$$

Observación. Si se re-escala de forma que $\varepsilon \rightarrow \frac{\varepsilon\sigma}{2}$ (σ un parámetro positivo real), se obtiene

$$\begin{aligned} \pi(y|x) &= \frac{\exp\left[\frac{U(x,y)}{\sigma/2}\right]}{\int_{\mathcal{Y}} \exp\left[\frac{U(x,y')}{\sigma/2}\right] dy'} \\ \pi(x|y) &= \frac{\exp\left[\frac{U(x,y)}{\sigma/2}\right]}{\int_{\mathcal{X}} \exp\left[\frac{U(x',y)}{\sigma/2}\right] dx'}. \end{aligned}$$

Esto es sencillo de verificar.

Proposición 29. El plan de transporte es tal que

$$\ln \pi(x, y) = \frac{\Phi(x, y) - a(x) - b(y)}{\sigma}, \quad (44)$$

donde a y b se determinan de forma que $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$.

Demostración. Hacemos uso de (42) para obtener (44). Por otro lado, la segunda afirmación será consecuencia de lo derivado en la Sección 3 y el Teorema 30.

Como $\pi(y|x)f(x) = \pi(x, y)$,

$$\pi(x, y) = \frac{\exp \left[\frac{U(x, y)}{\sigma/2} \right] f(x)}{\int_{\mathcal{Y}} \exp \left[\frac{U(x, y')}{\sigma/2} \right] dy'}$$

Luego,

$$\frac{\sigma}{2} \ln \pi(x, y) = U(x, y) + \frac{\sigma}{2} \left\{ \ln f(x) - \ln \left(\int_{\mathcal{Y}} \exp \left[\frac{U(x, y')}{\sigma/2} \right] dy' \right) \right\}.$$

Análogamente,

$$\frac{\sigma}{2} \ln \pi(x, y) = V(x, y) + \frac{\sigma}{2} \left\{ \ln g(y) - \ln \left(\int_{\mathcal{X}} \exp \left[\frac{V(x', y)}{\sigma/2} \right] dx' \right) \right\}.$$

Así, sumando,

$$\ln \pi(x, y) = \frac{\underbrace{U(x, y) + V(x, y)}_{=\Phi(x, y)} - a(x) - b(y)}{\sigma}$$

con

$$a(x) = \frac{\sigma}{2} \ln \int_{\mathcal{Y}} \frac{e^{\frac{U(x, y')}{\sigma/2}}}{f(x)} dy'$$

$$b(y) = \frac{\sigma}{2} \ln \int_{\mathcal{X}} \frac{e^{\frac{V(x', y)}{\sigma/2}}}{g(y)} dx'.$$

□

Teorema 30. El problema de maximización, relativo a los shocks aleatorios, es el siguiente

$$\mathcal{W} = \max_{\pi(x, y) \in \Pi(\mu, \nu)} \left\{ \iint_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \Phi(x, y) \pi(x, y) dx dy - \sigma \iint_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \ln \pi(x, y) \pi(x, y) dx dy \right\}.$$

Demostración. Seguimos la prueba hecha en [Dupuy and Galichon \(2014\)](#). Los resultados de dualidad [Ambrosio et al. \(2021\)](#) permiten establecer que

$$\mathcal{W} = \inf_{u_m + v_w \geq \Phi(x_m, y_w) + \frac{\sigma}{2} \varepsilon_m(y) + \frac{\sigma}{2} \eta_w(x)} \left\{ \int u_m dm + \int v_w dw \right\}. \quad (45)$$

Luego, la restricción puede escribirse

$$U(x, y) + V(x, y) \geq \Phi(x, y)$$

con

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \inf_m \left\{ u_m - \frac{\sigma}{2} \varepsilon_m(y) \right\} \\ V(x, y) &= \inf_w \left\{ v_w - \frac{\sigma}{2} \eta_w(x) \right\}. \end{aligned}$$

A su vez, esto implica que

$$\begin{aligned} u_m &= \sup_{y \in \mathcal{Y}} \left\{ U(x, y) + \frac{\sigma}{2} \varepsilon_m(y) \right\} \\ v_w &= \sup_{x \in \mathcal{X}} \left\{ V(x, y) + \frac{\sigma}{2} \eta_w(x) \right\}. \end{aligned}$$

De ahí, denotando

$$\begin{aligned} G_x(U(x, \cdot)) &= \mathbb{E} \left[\max_k \left\{ U(x, y_k^m) + \frac{\sigma}{2} \varepsilon_k^m \right\} \right] \\ H_y(V(\cdot, y)) &= \mathbb{E} \left[\max_l \left\{ V(x_l^m, y) + \frac{\sigma}{2} \eta_l^w \right\} \right] \end{aligned}$$

el problema (45) puede escribirse de la siguiente manera

$$\min_{U, V: U(x) + V(y) \geq \phi(x, y)} \left\{ \int_{\mathcal{X}} G_x(U(x, \cdot)) f(x) dx + \int_{\mathcal{Y}} H_y(V(\cdot, y)) g(y) dy \right\}. \quad (46)$$

A partir de (46), podemos plantear el problema desde la perspectiva del Lagrangiano:

$$\mathcal{W} = \inf_{U, V} \sup_{\pi} \int_{\mathcal{X}} G_x(U(x, \cdot)) f(x) dx + \int_{\mathcal{Y}} H_y(V(\cdot, y)) g(y) dy \quad (47)$$

$$+ \iint_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} (\Phi(x, y) - U(x, y) - V(x, y)) \pi(x, y) dx dy. \quad (48)$$

Esta situación puede re-escribirse de la siguiente manera:

$$\sup_{\pi} \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \Phi(x, y) \pi(x, y) dx dy - \mathcal{I}(\pi) \quad (49)$$

con

$$\mathcal{I}(\pi) = \sup_U(*) + \sup_V(**)$$

$$\begin{aligned} * &= \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} U(x, y) \pi(x, y) dx dy - \int_{\mathcal{X}} G_x(U(x, \cdot)) f(x) dx \\ ** &= \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} V(x, y) \pi(x, y) dx dy - \int_{\mathcal{Y}} H_x(V(\cdot, y)) g(y) dy. \end{aligned}$$

Recordemos de (41) que

$$\begin{aligned} G_x(U(x, \cdot)) &= \frac{\sigma}{2} \ln \int_{\mathcal{Y}} \exp \frac{U(x, y)}{\sigma/2} dy \\ H_x(V(\cdot, y)) &= \frac{\sigma}{2} \ln \int_{\mathcal{X}} \exp \frac{V(x, y)}{\sigma/2} dx. \end{aligned}$$

Aplicando condiciones de primer orden a¹¹

$$\iint_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} U(x, y) \pi(x, y) dx dy - \int_{\mathcal{X}} G_x(U(x, \cdot)) f(x) dx \quad (50)$$

respecto a $U(x, y)$:

$$\pi(x, y) = \frac{f(x) \exp \frac{U(x, y)}{\sigma/2}}{\int_{\mathcal{Y}} \exp \frac{U(x, y)}{\sigma/2} dy}.$$

Esto pues,

$$\frac{d}{dU(x, y)} \left\{ \frac{\sigma}{2} \ln \int_{\mathcal{Y}} \exp \frac{U(x, y)}{\sigma/2} dy \right\} = \frac{\sigma}{2} \frac{1}{\sigma/2} \frac{\exp \frac{U(x, y)}{\sigma/2}}{\int_{\mathcal{Y}} \exp \frac{U(x, y)}{\sigma/2} dy}.$$

Así, podemos re-escribir (50)¹² como sigue

$$\frac{\sigma}{2} \iint_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \pi(x, y) \ln \frac{\pi(x, y)}{f(x)} dx dy.$$

Procediendo de manera análoga para la expresión en $V(x, y)$,

$$\mathcal{I}(\pi) = \sigma \iint_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \ln \pi(x, y) \pi(x, y) dx dy - \frac{\sigma}{2} \left[\int_{\mathcal{X}} \ln f(x) f(x) dx + \int_{\mathcal{Y}} \ln g(y) g(y) dy \right].$$

Pero entonces, (49) es equivalente a

$$\sup_{\pi} \left\{ \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \Phi(x, y) \pi(x, y) dx dy - \sigma \iint_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \ln \pi(x, y) \pi(x, y) dx dy \right\}.$$

explícita. Esto se hace vía Sinkhorn.

¹¹Recordemos que, haciendo abuso de notación, seguimos en el caso discreto en el cual

$U(x, y) = U_{x, y}$ y $\pi(x, y) = \pi_{x, y}$.

¹²Recordando que $\int_{\mathcal{Y}} \pi(x, y) dy = f(x)$.

Además, usando el hecho que $\pi(x, y) \in \Pi(\mu, \nu)$ y μ, ν son dadas, esto es lo mismo que resolver

$$\sup_{\pi} \left\{ \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \Phi(x, y) \pi(x, y) dx dy - \sigma \iint_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} (\ln \pi(x, y) - 1) \pi(x, y) dx dy \right\}.$$

□

Corolario 31. El plan de transporte es tal que

$$\pi(x, y) = \exp \left[\frac{\Phi(x, y) - a(x) - b(y)}{\sigma} \right] \quad (51)$$

con

$$a(x) = -\frac{\sigma}{2} \ln \frac{f(x)}{\int_{\mathcal{Y}} \exp U(x, y) dy}, \quad b(y) = -\frac{\sigma}{2} \ln \frac{g(y)}{\int_{\mathcal{X}} \exp V(x, y) dx}.$$

Conclusiones: el modelamiento que incorpora shocks de simpatía (en el contexto del mercado del matrimonio), conlleva a una formulación de regularización entrópica y su resolución, puede efectuarse vía los algoritmos presentados en secciones anteriores. A continuación presentamos brevemente la parametrización escogida en [Dupuy and Galichon \(2014\)](#).

6.3. Estimación y parametrización

A continuación, vamos a presentar una forma de estimar la función de beneficios Φ en un caso, que si bien es específico, sigue siendo de amplias aplicaciones. Recordemos que el objetivo es resolver

$$\max_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}_{\pi} [\Phi(x, y) - \sigma (\ln \pi(x, y) - 1)].$$

En el caso discreto, esta situación se expresa de la siguiente manera:

$$\max_{\pi \in \Pi} \left\{ \sum_{x, y} \pi_{xy} \Phi_{xy} - \sigma \sum_{x, y} \pi_{xy} (\ln \pi_{xy} - 1) \right\}.$$

Este problema de optimización¹³ en $\{\pi_{xy}\}$ es convexo y tiene solución única. Ahora bien, así como en la Sección 5, el objetivo es más bien, dado un emparejamiento observable $\hat{\pi}$, encontrar la función de beneficios Φ implícita. Para ello, siguiendo a [Dupuy et al. \(2017\)](#), los autores asumen que

$$\Phi_A(x, y) = x^T A y.$$

¹³Note que no es nada más que un problema de regularización entrópica.

y se normaliza $\sigma = 1$. De este modo, como

$$\frac{\partial^2 \Phi_A}{\partial x_i \partial y_j} = A_{ij} = \frac{\partial^2 \ln \pi^A}{\partial x_i \partial y_j},$$

si $A_{ij} > 0$ entonces existe una interacción positiva entre la dimensión i de x y la dimensión j de y , si $A_{ij} = 0$, esta interacción es nula, y en caso A_{ij} sea negativo, la interacción será repulsiva (negativa).

De este modo, el objetivo ahora es estimar la matriz A basándose en N observaciones $(x^k, y^k) \in \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^L$ $k = 1, \dots, N$. Se tiene entonces que la medida empírica (véase Definición 41)

$$\hat{\pi}(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x^k}(x) \delta_{y^k}(y),$$

con marginales $\mu_1(x) = \sum_{k=1}^N \delta_{x^k}(x)$ e $\mu_2(y) = \sum_{k=1}^N \delta_{y^k}(y)$. Acá δ denota el δ - de Dirac. A continuación se presentan ciertos resultados que conducen al algoritmo propuesto en Dupuy et al. (2017), cuyo propósito es estimar A , teniendo en cuenta el costo computacional.

Proposición 32. Dado un muestreo aleatorio independiente, la función de verosimilitud $\ell(A; \hat{\pi})$ viene dada por

$$\ell(A; \hat{\pi}) = N \mathbb{E}_{\hat{\pi}}[\ln \pi^A(x, y)] = N \{ \mathbb{E}_{\hat{\pi}}[\Phi_A(x, y)] - \mathcal{W}(A) \},$$

donde

$$\mathcal{W}(A) = \max_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}_{\pi} \left[\underbrace{\Phi_A(x, y)}_{x^T A y} - \sigma(\ln \pi(x, y) - 1) \right].$$

Demostración. Usando la independencia,

$$\begin{aligned} \ell(A; \hat{\pi}) &= \ln \left(\prod_{k=1}^N \pi^A(x^k, y^k) \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \ln \pi^A(x^k, y^k) \\ &= N \mathbb{E}_{\hat{\pi}}[\ln \pi^A(x, y)]. \end{aligned}$$

Luego,

$$\ln \pi^A(x^k, y^k) = \ln a(x^k) + \ln b(y^k) + \Phi_A(x^k, y^k).$$

Así,

$$N\mathbb{E}_{\hat{\pi}}[\ln \pi^A(x, y)] = N \{ \mathbb{E}_{\hat{\pi}}[\ln a(x)] + \mathbb{E}_{\hat{\pi}}[\ln b(y)] + \mathbb{E}_{\hat{\pi}}[\Phi_A(x, y)] \}.$$

Sin embargo, como $\pi^A, \hat{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\hat{\pi}}[\ln \pi^A(x, y)] &= \mathbb{E}_{\hat{\pi}}[\Phi_A(x, y)] - \mathbb{E}_{\pi^A}[\Phi_A(x, y)] + \mathbb{E}_{\pi^A}[\Phi_A(x, y)] \\ &\quad + \mathbb{E}_{\pi^A}[\ln a(x) + \ln b(y)] \\ &= \mathbb{E}_{\hat{\pi}}[\Phi_A(x, y)] - \mathbb{E}_{\pi^A}[\Phi_A(x, y)] + \mathbb{E}_{\pi^A}[\ln \pi^A(x, y)] \\ &= \mathbb{E}_{\hat{\pi}}[\Phi_A(x, y)] - \mathcal{W}(A). \end{aligned}$$

Con lo cual, $\ell(A; \hat{\pi}) = N\{\mathbb{E}_{\hat{\pi}}[\Phi_A(x, y)] - \mathcal{W}(A)\}$. \square

Proposición 33. La función $\ell(A; \hat{\pi})$ es una función cóncava en A y

$$\nabla_A \ell(A; \hat{\pi})_{i,j} = N\{\mathbb{E}_{\hat{\pi}}[x_i y_j] - \mathbb{E}_{\pi^A}[x_i y_j]\}.$$

Demostración. La función $\ell(A; \hat{\pi})$ es cóncava pues $\mathcal{W}(A)$ es convexa y $\mathbb{E}_{\hat{\pi}}[\Phi_A(x, y)]$ es lineal en A . Luego, por el Teorema Envolvente [Simon and Blume \(1987\)](#),

$$\nabla_A \ell(A; \hat{\pi})_{i,j} = N\{\mathbb{E}_{\hat{\pi}}[x_i y_j] - \mathbb{E}_{\pi^A}[x_i y_j]\}.$$

\square

Corolario 34. \hat{A} es tal que $\mathbb{E}_{\hat{\pi}}[x_i y_j] - \mathbb{E}_{\pi^{\hat{A}}}[x_i y_j] = 0$.

Observación. Si las variables X e Y están centradas (normalizadas por ejemplo), la condición brindada por el Corolario [34](#) se reduciría a

$$\text{cov}_{\pi^A}(x, y) = \text{cov}_{\hat{\pi}}(x, y).$$

El problema de optimización entonces consiste en maximizar la función de verosimilitud $\ell(A; \hat{\pi})$. Esto puede naturalmente realizarse vía una gradient ascent, aprovechando la concavidad de la función. En [Dupuy et al. \(2017\)](#) los autores buscan optimizar la función de verosimilitud imponiendo una condición sobre el rango de la matriz A :

$$\begin{aligned} &\max_A \ell(A; \hat{\pi}) \\ &\text{s.a. } \text{rango}(A) \leq r. \end{aligned}$$

Este problema, dada su complejidad algorítmica, es modificado en

$$\min_A \{ \mathcal{W}(A) - \mathbb{E}_{\hat{\pi}}[\Phi_A(x, y)] + \lambda \|A\|_* \}. \quad (52)$$

En 52, $\|A\|_*$ corresponde a la suma de los valores singulares de A Gentle (2017). Para resolver numéricamente esta situación, los autores proponen el siguiente algoritmo: un proximal gradient descent combinando con el clásico algoritmo Sinkhorn. Note que los pasos son similares a los del ampliamente detallado algoritmo SISTA. Se empieza aplicando Sinkhorn y luego, se actualiza la matriz A usando el gradiente de la función objetivo.

Algorithm 3 Estimación de la matriz A .

```

1:  $A$ , step size  $\theta$ , emparejamiento  $\{(x^k, y^k)\}_{k=1, \dots, N}, \lambda$ 
2:
3: while not converged do
4:   Aplicar Sinkhorn para estimar  $\pi^A$ 
5:    $A \leftarrow A - \theta \left( \sum_{i,j=1}^N (\pi_{ij}^A - \hat{\pi}_{ij}) x^i (y^j)^T \right)$ 
6:    $[U, D(s_1, \dots, s_d), V] = \text{SVD}(A)$ 
7:    $A \leftarrow UD((s_1 - t\lambda)^+, \dots, (s_d - t\lambda)^+)V^T$ 
8: end while
9: return  $A$ 
```

Acá SVD significa naturalmente *Singular Value Decomposition*. Concretamente, se trata de una descomposición de la forma

$$A = USV^T$$

con U, S matrices ortogonales y S una matriz diagonal con entradas no negativas y de rango $r \leq \min\{\dim(x), \dim(y)\}$. Para más detalles, consultar Gentle (2017).

Mencionemos por último, que así como el algoritmo SISTA, la convergencia del algoritmo propuesto en Dupuy et al. (2017) viene asegurada por Toh and Yun (2010).

En resumen, respecto Dupuy and Galichon (2014) y Dupuy et al. (2017): el objetivo fue determinar en qué basan las personas su elección de emparejamiento m vs w . La metodología usada fue plantear el problema como un problema de transporte óptimo. Incorporar los shocks de simpatía conduce al problema de

transporte óptimo regularizado. Dada la especificación usada por los autores, se recupera la función de beneficio del emparejamiento usando métodos numéricos.

Luego de haber establecido los resultados presentados en esta sección (en el caso más general siguiendo [Dagsvik \(1994\)](#), [Dagsvik \(2002\)](#)), en [Dupuy et al. \(2017\)](#) se realizan los trabajos de estimación usando los datos de la encuesta Duth Househol Survey (DHS). Incorporan en sus variables x, y características como la educación, el peso, IMC, rasgos de personalidad, 16 PF Test etc; en total 26 dimensiones y por ende $A \in \mathcal{M}_{26 \times 26} \simeq \mathbb{R}^{676}$. Sin embargo, se logra reducir la dimensión usando una serie de indicadores. A muy grandes rasgos, las conclusiones del estudios son las siguientes: para las mujeres, *fácilmente ofendido* es la variable más importante, mientras que para los hombres es *disciplinada*.

6.4. Estimación de beneficios laborales y productividad laboral

Pasamos del *mercado del matrimonio* al mercado laboral. El artículo [Dupuy and Galichon \(2022\)](#) introduce un estimador de máxima verosimilitud para el valor de comodidades¹⁴ laborales y productividad laboral en un mercado de emparejamiento único, basado en los equilibrios de emparejamiento y salarios observados. Los autores, si bien mencionan que su estimador se acomoda a varias situaciones, ajustan el modelo al caso de compensaciones por accidente en el trabajo (usan datos para Estados-Unidos 2017). El set-up del modelo es similar al que se presentó para [Dupuy and Galichon \(2014\)](#). Las modificaciones siguen fundamentalmente las ideas presentadas en [Echenique et al. \(2023\)](#) (Capítulo 26).

Demanda y oferta. Se define el salario $w(x, y)$ del trabajador de tipo x en la firma y . El trabajador no valora únicamente su salario, pero también unas *comodidades* adicionales que se descomponen en $\alpha(x, y)$, un componente sistemático y $\varepsilon(y)$ un componente estocástico. Concretamente, el trabajador valora

$$\alpha(x, y) + w(x, y) + \sigma_1 \varepsilon(y).$$

¹⁴Se puede entender como beneficios a los trabajadores

Se asume que ε sigue un proceso de Gumbel (Extreme Value Tipo 1). A continuación, describimos el proceso.

1. Lo trabajadores seleccionan un pool aleatorio de firmas y shocks de utilidad: subconjunto finito de \mathcal{Y} . Por comodidad, seguiremos denotando \mathcal{Y} . En rigor, lo que se puede tener es incluso un continuo de elementos. No obstante, con la finalidad de simplificar el problema y aplicar la teoría de la elección discreta, reducimos el conjunto de elección a un conjunto finito.
2. Se modela el *random pool* vía un Poisson Point Process (ya presentado en la Sección 6.2).
3. Más aún, se asume que se está evaluado en $\mathcal{Y} \times \mathbb{R}$ y la intensidad del proceso es $dye^{-\varepsilon}d\varepsilon$.

Análogamente, las firmas perciben un beneficio neto

$$\gamma(x, y) - w(x, y) + \sigma_2 \eta(x)$$

donde γ son los beneficios, w el salario y η un shock de productividad.

Definición 35. Definimos la utilidad indirecta aleatoria por

$$\tilde{U} = \max_{y \in \mathcal{Y}} \left\{ \underbrace{U(x, y)}_{=\alpha(x, y) + w(x, y)} + \sigma_1 \varepsilon(y) \right\}.$$

De la Sección 6.2 sabemos que

$$\begin{aligned} \pi(y|x) &= \frac{\exp\left(\frac{\alpha(x, y) + w(x, y)}{\sigma_1}\right)}{\int_{\mathcal{Y}} \exp\left(\frac{\alpha(x, y') + w(x, y')}{\sigma_1}\right) dy'} \\ \pi(x|y) &= \frac{\exp\left(\frac{\gamma(x, y) - w(x, y)}{\sigma_2}\right)}{\int_{\mathcal{X}} \exp\left(\frac{\gamma(x', y) - w(x', y)}{\sigma_2}\right) dx'}. \end{aligned}$$

De manera más compacta,

$$\begin{aligned} \pi(y|x) &= \exp\left(\frac{\alpha(x, y) + w(x, y) - u(x)}{\sigma_1}\right) \\ \pi(x|y) &= \exp\left(\frac{\gamma(x, y) - w(x, y) - v(y)}{\sigma_2}\right), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} u(x) &= \sigma_1 \ln \int_{\mathcal{Y}} \exp \left(\frac{\alpha(x, y') + w(x, y')}{\sigma_1} \right) dy' \\ v(y) &= \sigma_2 \ln \int_{\mathcal{X}} \exp \left(\frac{\gamma(x', y) - w(x', y)}{\sigma_2} \right) dx'. \end{aligned}$$

Definición 36. Equilibrio 1. Un salario de equilibrio $w(x, y)$ es tal que la densidad $\pi(x, y)$ que se obtiene del problema de los trabajadores coincide con la densidad de los pares (x, y) que proviene del problema de las firmas. Esto es:

$$\exp \left(\frac{\alpha(x, y) + w(x, y) - a(x)}{\sigma_1} \right) = \pi(x, y) = \exp \left(\frac{\gamma(x, y) - w(x, y) - b(y)}{\sigma_2} \right) \quad (53)$$

con

$$\begin{cases} a(x) &= u(x) - \sigma_1 \ln f(x) \\ b(y) &= v(y) - \sigma_2 \ln g(y). \end{cases}$$

Corolario 37. Denotando $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, en el equilibrio

$$w(x, y) = \frac{\sigma_1}{\sigma} (\gamma(x, y) - b(y)) + \frac{\sigma_2}{\sigma} (a(x) - \alpha(x, y)). \quad (54)$$

Demostración. A partir de (53), dada la inyectividad de $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$\frac{\alpha(x, y) + w(x, y) - a(x)}{\sigma_1} = \frac{\gamma(x, y) - w(x, y) - b(y)}{\sigma_2}.$$

Despejando $w(x, y)$ se obtiene (54). □

Corolario 38. Se tiene que

$$\pi(x, y) = \exp \left(\frac{\phi(x, y) - a(x) - b(y)}{\sigma} \right).$$

con $\phi = \gamma + \alpha$.

Demostración. Por un lado, dado que

$$\pi(x, y) = \exp \left(\frac{\alpha(x, y) + w(x, y) - a(x)}{\sigma_1} \right)$$

despejando $w(x, y)$:

$$w(x, y) = \sigma_1 \ln \pi(x, y) + a(x) - \alpha(x, y).$$

Luego, reemplazando en

$$\pi(x, y) = \exp \left(\frac{\gamma(x, y) - w(x, y) - b(y)}{\sigma_2} \right)$$

se llega a

$$\pi(x, y) = \exp \left(\frac{\gamma(x, y) - \sigma_1 \ln \pi(x, y) - a(x) + \alpha(x, y) - b(y)}{\sigma_2} \right)$$

De ahí, simplificando y usando la propiedad de suma de exponenciales,

$$\begin{aligned} \pi(x, y) &= \exp \left(\frac{\phi(x, y) - a(x) - b(y)}{\sigma_2} \right) e^{-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \ln \pi(x, y)} \\ \pi(x, y)^{1+\frac{\sigma}{\sigma_2}} &= \exp \left(\frac{\phi(x, y) - a(x) - b(y)}{\sigma_2} \right) \\ \pi(x, y) &= \exp \left(\frac{\phi(x, y) - a(x) - b(y)}{\sigma} \right). \end{aligned}$$

□

Definición 39. Equilibrio (π, w) **2.** Un equilibrio (π, w) consiste en un emparejamiento de equilibrio π y un salario de equilibrio w de forma que existen $a(x)$ y $b(y)$ tales que

1. $\pi \in \mathcal{M}(f, g)$.
2. $w(x, y)$ queda definida como en la Ecuación (54).

Observación. Dado que a priori no se conoce $\alpha(x, y)$ y $\gamma(x, y)$, se deben determinar a y b de forma que se cumpla

$$\begin{cases} \int_{\mathcal{Y}} \exp \left(\frac{\phi(x, y) - a(x) - b(y)}{\sigma} \right) dy &= f(x) \\ \int_{\mathcal{X}} \exp \left(\frac{\phi(x, y) - a(x) - b(y)}{\sigma} \right) dx &= g(y). \end{cases}$$

Una posibilidad para ello, es usar el algoritmo Sinkhorn.

Estimación paramétrica

La observación consiste en las ternas $\{X_i, Y_i, W_i\}_{i=1}^n$ donde X_i e Y_i son los vectores para los empleados / firmas (características) y $W_i = w(X_i, Y_i) + \epsilon_i$ el salario, donde $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, s^2)$. Luego, el objetivo es identificar α (beneficios para

los trabajadores) y γ (productividad). Recordemos que ϕ es el valor conjunto del emparejamiento. A partir de los Corolarios 37 y 38 observamos que

$$\begin{aligned}\alpha(x, y) &= \sigma_1 \ln \pi(x, y) - w(x, y) + c(x) \\ \gamma(x, y) &= \sigma_2 \ln \pi(x, y) + w(x, y) - d(y).\end{aligned}$$

Luego, haciendo un abuso de notación que omite el parámetro σ y teniendo en cuenta que (bajo esa notación)

$$\begin{aligned}\pi(x, y) &= \exp(\phi(x, y) - a(x) - b(y)) \\ \begin{cases} \int_{\mathcal{Y}} \exp(\phi(x, y) - a(x) - b(y)) dy &= f(x) \\ \int_{\mathcal{X}} \exp(\phi(x, y) - a(x) - b(y)) dx &= g(y) \end{cases} \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned}u(x) &= \sigma a(x) + \sigma_1 \ln f(x) + t \\ v(y) &= \sigma b(y) + \sigma_2 \ln g(y) - t\end{aligned}$$

$$w(x, y) = \sigma_1(\gamma(x, y) - b(y)) + \sigma_2(a(x) - \alpha(x, y)) + t$$

se propone la siguiente parametrización ($A, \Gamma \in \mathbb{R}^K$):

$$\begin{aligned}\alpha(x, y; A) &= \sum_{k=1}^K A_k \varphi_k(x, y) \\ \gamma(x, y; \Gamma) &= \sum_{k=1}^K \Gamma_k \varphi_k(x, y)\end{aligned}$$

con $\{\varphi_k\}_{k=1, \dots, K}$ una familia de funciones l.i. Por definición,

$$\phi(x, y; \Phi) = \sum_{k=1}^K \Phi_k \varphi_k(x, y), \quad \Phi_k = \Gamma_k + A_k.$$

El modelo queda entonces totalmente parametrizado por $\theta = (A, \Gamma, \sigma_1, \sigma_2, t, s^2)$.

Teniendo entonces en cuenta que

$$\pi(x, y; \Phi) = \exp(\phi(x, y; \Phi) - a(x; \Phi) - b(y; \Phi)),$$

con $a(x; \Phi), b(y; \Phi)$ determinadas por el sistema (55). Entonces, la verosimilitud de la muestra es:

$$\ln L(\theta) = n \mathbb{E}_{\hat{\pi}} \left[\phi(X, Y; \Phi) - a(X; \Phi) - b(Y; \Phi) - \frac{(W - w(X, Y; \theta))^2}{2s^2} \right] - \frac{n}{2} \ln s^2$$

con $\hat{\pi}$ la densidad observada. A partir de esta situación, maximizando la log-verosimilitud se obtiene una estimación π_{ij}^{Φ} . Para más detalles, consultar [Dupuy and Galichon \(2022\)](#).

6.5. Mismatching ocupacional y mercado laboral peruano

En esta última sección, proponemos una aplicación de la teoría revisada a lo largo de este documento al caso de la economía laboral peruana. En concreto, seguimos la idea de [Burga and Moreno \(2001\)](#) pero, consideramos una importante mejora metodológica. Además, el nuevo contexto da mayor grados de libertad en la estimación y permite explotar una rama la teoría económica aún no muy popularizada [Galichon \(2016\)](#).

La década de los cincuenta y sesenta fue, para los países en desarrollo, un momento de expansión en el ámbito educativo. Concretamente, en Latinoamérica, las tasas de matrícula y de alfabetización aumentaron sustancialmente: educación primaria de 61.1 % a 85.5 %, educación secundaria 13.3 % a 48 % y educación superior de 1.8 % a 11.7 %. La inversión en educación a nivel de individuo se supone clave para facilitar el empleo e incrementar los ingresos. No obstante, esto ha sido cuestionado luego de encontrar evidencia de mayor desempleo en los más educados (años 70), y/o subempleados (trabajos de semi y baja calificación). Motivemos el estudio que se propone con la siguiente definición: el **mismatching ocupacional** es la discordancia entre la profesión y la ocupación desempeñada por un trabajador en el mercado laboral.

El Perú es un país en el cual se observa mismatching ocupacional: muchos individuos terminan en empleos que no corresponden a su formación. En ese sentido, lo que se propone es entender los factores que explican el emparejamiento en el mercado laboral: trabajador-ocupación. Nótese que esto difiere del trabajo de [Burga and Moreno \(2001\)](#) pues no se va a medir la discordancia en sí. Para ello, se requiere contar con una muestra de N clusters de individuos y M ocupaciones (también agrupadas). De ser posible, se agruparían o dividirían las ocupaciones de forma de tener $M = N$ (sin embargo, esto no es menester). Luego, el matching ocupacional sería determinado por $\hat{\pi}_{ij}$. En analogía con el trabajo de [Dupuy et al. \(2021\)](#), proponemos una estructura de costos paramé-

trica siguiendo el criterio de disimilitud. Esto es, $c_{ij}^\beta = \sum_{k=1}^K \beta_k d_{ij}^k$, donde, para todo k , d_{ij}^k mide la diferencia existente entre i y j . Por ejemplo, podemos tener en cuenta la diferencia entre la media de la edad de los trabajadores en la ocupación j y la edad promedio de los individuos en i , la media de los años de educación, indicadores de habilidades requeridas etc (definir estas variables es lo clave para el trabajo). Luego, se aplica el algoritmo SISTA y se estima la matriz de costos c_{ij}^β tal y como fue presentado en la Sección 5. Este planteamiento difiere del de [Burga and Moreno \(2001\)](#) y además, nos permite efectuar una estimación en conjunto de las características que determinan el matching.

Recordemos que en [Burga and Moreno \(2001\)](#) se define sobre educado si el nivel de escolaridad del individuo, expresados en los años de educación alcanzados, es mayor que el promedio de años de escuela en la ocupación más una desviación estándar: $\mu + \sigma$. Para nosotros, sobre-educado es una característica que se incorpora en la *estructura de costos*.

El trabajo fundamental es construir las matrices $(d_{ij})^k$ para $k = 1, \dots, K$ e implementar el algoritmo SISTA con el objetivo de recuperar el parámetro $\beta \in \mathbb{R}^K$. Dado que se incorpora la penalización tipo LASSO $\|\beta\|_1$, no hay que restringir la elección de las matrices. Ahora bien, existen, tal y como se mencionó previamente, medidas naturales de disimilitud. Sin embargo, con la finalidad de tomar en consideración variables como localización, migrante o no, características sociales etc, es necesario proponer alguna métrica. De manera concreta, a modo de ejemplo, sea k el índice asociado con la característica localización. Luego, para todo $i = 1, \dots, N$, sea d_i^k una magnitud que toma valores en \mathbb{R}_+ y mide que tan conectada está la región donde i habita. Luego, sea d_j^k , $j = 1, \dots, N$ una magnitud que toma valores en \mathbb{R}_+ y mide que tanto la ocupación j requiere conectividad e interacción con pares. Por ejemplo, para médico e informático d_j^k es mayor que para taxista o pintor. Finalmente, se toma $d_{ij}^k = (d_i^k - d_j^k)^2$.

Esto concluye las aplicaciones en economía que presentamos en este documento. Permítanos enfatizar una vez más que la gama de aplicaciones sobrepasa lo expuesto en las secciones anteriores. Una exposición completa puede ser encontrada en [Galichon \(2016\)](#). Si bien en [Galichon \(2016\)](#) no se presentan los artículos que hemos desglosado, provee un abanico más extenso, así como ejercicios resueltos. A continuación damos paso a las aplicaciones finanzas.

7. Acotamiento del CVA

Siguiendo a [Hull \(2006\)](#), un derivado se define como un instrumento financiero cuyo valor se deriva de variables subyacentes, comúnmente de activos como acciones o divisas. Aunque dichos instrumentos pueden ser bastante complejos, nos centraremos a continuación en contratos entre dos entidades financieras. Tomaremos el punto de vista de una de ellas, y llamaremos a la otra la *contraparte*. Brindamos tres ejemplos con al finalidad de aterrizar estas ideas:

1. Un contrato tipo *forward* es un acuerdo para comprar o vender a la contraparte un activo a un precio y en un tiempo específico. Por ejemplo, si se piensa que el precio de una acción caerá, se buscará entrar en un contrato en el que se venda dicha acción en el futuro a un precio similar al actual. Por otro lado, la contraparte espera que el precio suba, y así obtener la acción a un precio menor.
2. Una *opción* es un contrato donde una de las partes paga un precio por el derecho a comprar o vender un activo a la contraparte, a un valor y en un plazo previamente acordados. La diferencia con un contrato forward radica en que no se está obligado a ejercer este derecho, pero si no se ejerce se asume el precio del contrato como pérdida.
3. Un contrato *swap* es un acuerdo entre dos entidades para intercambiar pagos en el futuro. El acuerdo especifica las fechas donde deben llevarse a cabo los pagos, y el método para calcularlos ([Hull \(2006\)](#)). Este cálculo involucra el valor futuro de algún activo u otras variables del mercado.

Considere entonces un portafolio de contratos de derivados, entre ellos contratos swap, hechos con una única contraparte¹⁵. Como sabemos, los precios de los activos en el mercado están sujetos a fluctuaciones aleatorias, que afectan el valor de los derivados. Por este motivo, el *riesgo de mercado* afecta el valor total del portafolio. Por otra parte, dicho valor está sujeto al *riesgo de crédito*, que considera la posibilidad de que la contraparte incurra en el incumplimiento de los pagos restantes, a lo que denominamos *default*. La exposición es la pérdida

¹⁵En la práctica, un portafolio puede tener miles de posiciones en contratos hechos con

que se asume en caso la contraparte entre en default, y equivale al valor del portafolio al tiempo de default, cuando dicho valor es positivo. Cuando es negativo, uno se libra de una deuda y por ende decimos que la exposición es nula. En resumen: el riesgo de mercado determina la magnitud de nuestra exposición a la contraparte, y el riesgo de crédito dicta la probabilidad de que esta exposición se convierta en pérdida ([Glasserman and Yang \(2015\)](#)).

El *Credit Value Adjustment* (ajuste por riesgo de crédito) o CVA es una métrica que indica las potenciales pérdidas de un portafolio de derivados por el default de la contraparte. Se define como la diferencia entre el valor del portafolio considerando la posibilidad de default y el valor del mismo sin considerar esta eventualidad¹⁶. El CVA incrementa con el *wrong-way risk*, la posibilidad que el riesgo de crédito y el riesgo del mercado estén positivamente correlacionados. El interés es encontrar el CVA en el peor de los casos: una cota superior para las pérdidas ocasionadas por default. Este factor está determinado por la dependencia entre el riesgo de crédito y el riesgo de mercado, como veremos a continuación, cuyas distribuciones individuales asumimos son conocidas. Sin embargo, no conocemos la distribución conjunta de ambos factores. Tal y como motivamos hacia el final de la Sección 2, la teoría del transporte óptimo resulta una herramienta provechosa a la hora de tratar con este tipo de problemas.

A partir de ahora trabajaremos sobre un espacio de probabilidad (Ω, \mathbb{P}) ; nuestro telón de fondo: puede pensar en él como el conjunto de todas las posibilidades en la economía, dotado con una medida de la probabilidad de ocurrencia de cada evento. Siguiendo la formulación en [Glasserman and Yang \(2015\)](#), definamos la variable aleatoria $\tau : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ como el tiempo de default de la contraparte y sea $V(\tau)$ el valor del portafolio en dicho tiempo. Como ya vimos, la pérdida al tiempo de default sería la parte positiva de $V(\tau)$, que denotamos $V^+(\tau)$. Definimos el CVA en el horizonte de tiempo $T > 0$ como el valor esperado del nivel de exposición al tiempo de default

$$CVA := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[V^+(\tau)\mathbf{1}\{\tau \leq T\}].$$

varias contrapartes.

¹⁶Esto vuelve al CVA un precio, no una medida de riesgo. Puede ser usado para calcular un

Comunmente se calcula dicha esperanza sobre tiempos intermedios $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_d = T$, que pueden ser las fechas de pagos de los contratos de derivados, previamente acordadas por ambas partes. Considere los valores aleatorios $V^+(t_1), \dots, V^+(t_d)$ donde cada $V^+(t_i)$ es la pérdida si la contraparte incurre en default en el periodo $(t_{i-1}, t_i]$. Calcular estos valores requiere considerar las valoraciones de cada activo del portafolio sobre todas las posibilidades y en cada tiempo, un proceso computacional en el cual no nos centraremos. Formamos el vector aleatorio $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ dado por

$$X = (V^+(t_1), \dots, V^+(t_d)),$$

que tiene una distribución de probabilidad conocida $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, relacionada con el riesgo de mercado. Asumimos que X es un vector aleatorio continuo. Esto es, que μ no tiene átomos. Asimismo, el riesgo de crédito dicta las probabilidades de default en cada periodo, por lo que da una ley conocida $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ para el vector aleatorio $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$:

$$Y = (\mathbf{1}_{\{\tau \leq t_1\}}, \mathbf{1}_{\{t_1 < \tau \leq t_2\}}, \dots, \mathbf{1}_{\{t_{d-1} < \tau \leq t_d\}}).$$

Este vector nos indica en qué periodo (si es que en alguno) ocurre el default, y por ende qué pérdida se asume. Ciertamente, el soporte de Y es (o está contenido en) el conjunto finito $\{y_1, \dots, y_d, y_{d+1}\}$, donde $y_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, y_d = (0, 0, \dots, 1)$, $y_{d+1} = (0, 0, \dots, 0)$. Esto vuelve a ν una medida discreta. De esta forma, la pérdida es:

$$V^+(\tau) \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} = \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^d V^+(t_i) \mathbf{1}_{\{t_{i-1} < \tau \leq t_i\}}.$$

Permítanos enfatizar que si bien conocemos las distribuciones individuales, no conocemos la distribución conjunta $\pi = (X, Y)_{\#} \mathbb{P} \in \Pi(\mu, \nu)$. Mediante un cambio de variable, tenemos:

$$CVA = \int_{\Omega} \langle X, Y \rangle d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi.$$

pago adicional que cobra el banco por asumir este riesgo de default. Para una discusión más extensa ver [Rosen and Saunders \(2012\)](#)

Deseamos evaluar el peor caso posible para el CVA, lo que resulta en un problema de transporte óptimo¹⁷.

$$CVA_{sup} = \sup_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi. \quad (56)$$

Buenas noticias: bajo circunstancias razonables este problema admite un único transport plan óptimo, i.e., una única solución.

Teorema 40. Si $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ ¹⁸ y $\mu \ll \mathcal{L}$ ¹⁹, entonces existe un único transport plan $\hat{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\hat{\pi} = \sup_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi$$

Demostración. Basta notar que $\langle x, y \rangle = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2}{2}$ y el problema es entonces hallar:

$$\sup_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \left[\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{\|x\|^2}{2} d\pi + \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{\|y\|^2}{2} d\pi - \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{\|x - y\|^2}{2} d\pi \right]$$

Por el Lema 3, esto es:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\|x\|^2}{2} d\mu + \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\|y\|^2}{2} d\nu - \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{\|x - y\|^2}{2} d\pi \quad (57)$$

Dado $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, los dos primeros sumandos son finitos y se cumplen las condiciones del Teorema 7. Es decir, tenemos la existencia de una única solución $\hat{\pi}$ para el ínfimo en 57, y por ende para el supremo en 56 \square

Observación. Hemos definido el CVA unilateral, que considera que una de las partes bajo ninguna circunstancia entrará en default. El CVA bilateral asume que ambas contrapartes tienen posibilidades de incumplir en los pagos, por lo que se deben considerar la exposición de ambas partes por separado. Además, ignoramos que el dinero tiene mayor valor hoy que en el futuro. Una formulación más completa, que considera factores de descuento en los tiempos t_1, \dots, t_d y el CVA bilateral, puede encontrarse en [Memartoluie \(2017\)](#)

¹⁷Recuerde la interpretación probabilística del problema de Kantorovich, comentada en Sección 2

¹⁸Ver la Definición 6

¹⁹Recordar que \mathcal{L} es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d

7.1. Acotamiento por aproximaciones empíricas

La tarea de acotar el CVA, un problema de transporte óptimo en el caso continuo, no tiene solución analítica en general. Es por eso que discretizaremos el problema mediante un número finito de simulaciones, de modo que permita ser resuelto con un método de programación lineal. Volveremos al caso continuo tomando el límite cuando la cantidad de simulaciones tiende a infinito. Hacemos uso del concepto de medida empírica, que formaliza la intuición de medida experimental que todos conocemos. Supongamos que queremos estimar la probabilidad de que un vector aleatorio $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ tome valores en un conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$. Considere X_1, X_2, \dots copias independientes de X . Realizar N experimentos independientes corresponde a evaluar $X_1(\omega), \dots, X_N(\omega)$ para algún $\omega \in \Omega$. Contamos cuántos de estos $X_i(\omega)$ cayeron en A y dividimos sobre N . Se espera que, a medida que el número de experimentos N incrementa, esta estimación se acerque más a la probabilidad real $\mathbb{P}\{X \in A\}$.

Definición 41. Sea (Ω, \mathbb{P}) un espacio de probabilidad, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ un vector aleatorio con distribución $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ y una sucesión de copias independientes X_1, X_2, \dots . Para cada $N \in \mathbb{N}$, definimos la *distribución empírica de X* por:

$$\mu_N(A) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{X_i \in A\}}.$$

para cada $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$.

Observación. En rigor, μ_N tal y como lo hemos definido es una variable aleatoria que arroja medidas de probabilidad. Esto es: $\mu_N(\omega) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ con $\mu_N(\omega)(A) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{X_i(\omega) \in A\}}$ para cada $\omega \in \Omega$ y $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ medible. Sin embargo, omitimos esta notación porque las propiedades que nos interesan de la distribución empírica se satisfacen \mathbb{P} -casi seguramente (\mathbb{P} -c.s.).

Lema 42. En el contexto de la definición anterior, $\mu_N \rightarrow \mu$ puntualmente \mathbb{P} -c.s. cuando $N \rightarrow +\infty$.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ y $Z_i = \mathbf{1}_{\{X_i \in A\}}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Ciertamente $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_i] = \mathbb{P}\{X_i \in A\} = \mu(A)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. De hecho, los Z_i están idénticamente distribuidos pues los X_i lo están. Así, por la Ley Fuerte de los Grandes

Números (Ver Teorema 126

$$\mu_N(A) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_i \rightarrow \mu(A)$$

\mathbb{P} -casi seguramente. Como A es arbitrario, tenemos la convergencia puntual \mathbb{P} -c.s. \square

Corolario 43. Consecuencia directa del Lema anterior, tenemos $\mu_N \xrightarrow{w} \mu$ y $\mu_N \xrightarrow{\mathcal{P}_2} \mu$ \mathbb{P} -c.s.

Sean X, Y como en la subsección anterior y considere X_1, X_2, \dots y Y_1, Y_2, \dots sucesiones de copias independientes. Asumiendo que μ no tiene átomos, los X_1, \dots, X_N son distintos casi seguramente y podemos entender a μ_N como la distribución uniforme sobre $\{X_1, \dots, X_N\}$. En general, las medidas empíricas μ_N, ν_N tratan de imitar las distribuciones reales μ, ν . Así, podemos ir simulando numéricamente cada vez más valores $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mientras resolvemos el problema de transporte óptimo sobre las medidas μ_N, ν_N .

Cada $\pi \in \Pi(\mu_N, \nu_N)$ está concentrada en el conjunto $\{(X_i, y_j) : i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, d+1\}$. Denotando $\pi\{(X_i, y_j)\} = \pi_{ij}$, queremos entonces hallar:

$$CVA_{sup}^N := \sup_{\pi \in \Pi(\mu_N, \nu_N)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{d+1} \pi_{ij} \langle X_i, y_j \rangle.$$

Sabemos que sobre medidas discretas, el problema de Kantorovich se reduce a un problema de programación lineal. Debemos por ello resolver:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{máx} & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{d+1} \pi_{ij} \langle X_i, y_j \rangle \\ \text{s.a.} & \sum_{i=1}^N \pi_{ij} = \nu_N(y_j) \quad \forall j = 1, \dots, d+1 \\ & \sum_{j=1}^{d+1} \pi_{ij} = \frac{1}{N}, \quad \forall i = 1, \dots, N \\ & \pi_{ij} \geq 0. \end{array} \right. \quad (58)$$

Estos valores dependen de los resultados de las simulaciones numéricas $(X_i(\omega))_{i \in \mathbb{N}}$ y $(Y_i(\omega))_{i \in \mathbb{N}}$, o sea del evento $w \in \Omega$ sobre el que estamos evaluando todo tácticamente²⁰. Aún así, con toda seguridad podemos asegurar que los CVA_{sup}^N

²⁰Evitamos hacerlo explícito como un abuso de notación para no sobrecargar las ecuaciones.

convergen a la solución del problema general $CV A_{sup}$. Esto gracias al siguiente teorema. Para leer la prueba recomendamos consultar primero el Apéndice C.

Teorema 44. Sean X, Y vectores aleatorios en \mathbb{R}^d con distribuciones de probabilidad $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, respectivamente. Entonces

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{\pi \in \Pi(\mu_N, \nu_N)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi = \sup_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi$$

\mathbb{P} -casi seguramente.

Demostración. Por definición de la métrica W_2 en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$:

$$W_2^2(\mu, \nu) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \|x - y\|^2 d\pi \quad (59)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 d\mu + \int_{\mathbb{R}^d} \|y\|^2 d\nu - 2 \sup_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi \quad (60)$$

El Lema 42 nos otorga la convergencia puntual $\mu_N \rightarrow \mu$ y $\nu_N \rightarrow \nu$ \mathbb{P} -c.s. Esto implica

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 d\mu_N \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 d\mu \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|y\|^2 d\nu_N \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \|y\|^2 d\nu \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

A su vez, implica la convergencia debil en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ $\mu_N \xrightarrow{\mathcal{P}_2} \mu$ y $\nu_N \xrightarrow{\mathcal{P}_2} \nu$ \mathbb{P} -c.s.

Por el Teorema 134, esto es equivalente a $W(\mu_N, \mu) \rightarrow 0$ y $W(\nu_N, \nu) \rightarrow 0$ \mathbb{P} -c.s. Gracias a la desigualdad triangular

$$0 \leq W(\mu_N, \nu_N) \leq W(\mu_N, \mu) + W(\mu, \nu) + W(\nu, \nu_N) \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

y por el Teorema del sandwich

$$W(\mu_N, \nu_N) \rightarrow W(\mu, \nu) \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Aprovechando estos tres resultados tenemos:

$$-2 \sup_{\pi \in \Pi(\mu_N, \nu_N)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \|x - y\|^2 d\pi \rightarrow -2 \sup_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \|x - y\|^2 d\pi$$

\mathbb{P} -casi seguramente. Multiplicando por $-\frac{1}{2}$ se obtiene el resultado deseado. \square

Observación. En la práctica, al calcular el CVA máximo siempre se discretiza el problema mediante simulaciones de Montecarlo. Sin embargo, estas simulaciones son computacionalmente muy costosas. Más aún cuando tratamos con portafolios de decenas de miles de contratos de derivados.

7.2. Regularización entrópica del CVA

Aunque el método anterior prueba ser computacionalmente eficiente, la cota CVA_{sup} puede ser bastante improbable de alcanzarse; más pesimista de lo necesario. Es por esto que impondremos una penalización por la entropía, al estilo del problema de regularización entrópica expuesto en la Sección 3. La entropía presentada ahí se interpreta como un cuantificador de qué tan concentrada es una medida discreta. En esta sección usaremos un concepto de entropía distinta: la entropía relativa de Kullback-Leibler. Es una noción de distancia de una medida Q respecto de otra medida P . Es decir, evalúa tomando un modelo de referencia P . Según [Glasserman and Xu \(2014\)](#), mide la información que ganamos al movernos de una distribución de referencia a una distribución a una nueva. Referimos a dicho trabajo para una interpretación más detallada.

Definición 45. Entropía de Kullback-Leibler. Sean Ω un espacio medible y $P, Q \in \mathcal{P}(\Omega)$ tal que $Q \ll P$. Definimos la entropía relativa de Q a P como

$$D(Q|P) = \mathbb{E}_P \left[h \left(\frac{dQ}{dP} \right) \right] = \mathbb{E}_Q \left[\ln \left(\frac{dQ}{dP} \right) \right]$$

donde $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x \ln(x), & x > 0. \end{cases}$$

Notemos que h es una función continua y convexa. Su gráfica se muestra a continuación.

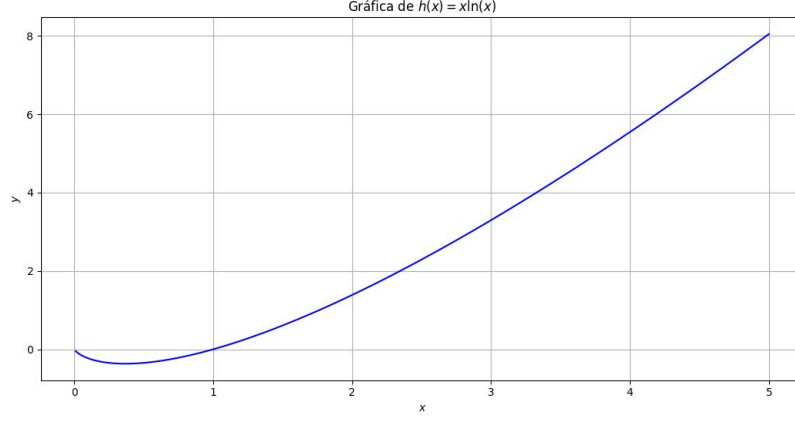


Figura 8: $h(x) = x \ln x$.

Observación. En el caso discreto (Ω finito), usamos la fórmula

$$D(Q|P) = \sum_{\omega \in \Omega} Q(\omega) \ln \left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right).$$

Aunque la entropía de Kullback-Leibler no define una métrica en $\mathcal{P}(\Omega)$ (no es simétrica y no cumple la desigualdad triangular), satisface algunas propiedades deseables.

Lema 46. En el contexto de la Definición 45, se cumple:

1. $D(Q|P) \geq 0$
2. $D(Q|P) = 0$ si y sólo si $P = Q$.
3. $D(Q|P)$ es convexa en Q .

Demostración. Para (i) y (ii) basta notar que, como h es estrictamente convexa, la desigualdad de Jensen otorga:

$$D(P|Q) = \mathbb{E}_P \left[h \left(\frac{dQ}{dP} \right) \right] \geq h \left(\mathbb{E}_P \left[\frac{dQ}{dP} \right] \right) = h(\mathbb{E}_Q[1]) = h(1) = 0$$

con igualdad si y sólo si $\frac{dQ}{dP}$ es constante (Ver Teorema 123). Dado que $\mathbb{E}_P[\frac{dQ}{dP}] = \mathbb{E}_Q[1] = 1$, sólo puede ocurrir $\frac{dQ}{dP} = 1$ y por ende $P = Q$.

Para (iii), sean $t \in [0, 1]$ y $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$ absolutamente continuas respecto a P . Ciertamente $tQ_1 + (1 - t)Q_2$ también lo es. La convexidad de h cierra el asunto:

$$\begin{aligned}
D(tQ_1 + (1 - t)Q_2|P) &= \mathbb{E}_P \left[h \left(\frac{d(tQ_1 + (1 - t)Q_2)}{dP} \right) \right] \\
&= \mathbb{E}_P \left[h \left(t \frac{dQ_1}{dP} + (1 - t) \frac{dQ_2}{dP} \right) \right] \\
&\leq \mathbb{E}_P \left[th \left(\frac{dQ_1}{dP} \right) + (1 - t)h \left(\frac{dQ_2}{dP} \right) \right] \\
&= tD(Q_1|P) + (1 - t)D(Q_2|P).
\end{aligned}$$

□

Nuestro modelo de referencia será la medida producto $P = \mu \times \nu$, que considera que el riesgo de mercado y el riesgo de crédito son independientes. Esta elección es arbitraria, aunque podemos argumentar que el default de la contraparte depende mayormente de factores internos²¹ y no de la situación del mercado²². De esta forma buscamos regularizar desviaciones de un modelo que considera el riesgo de mercado y el riesgo de crédito no están correlacionados de ninguna manera. Brindamos dos formulaciones: un problema restringido y un problema penalizado.

Definición 47. Sean $\eta, \theta > 0$. Definimos el problema de optimización restringida $\mathcal{P}_{res, \eta}$ y el problema de optimización penalizada $\mathcal{P}_{pen, \theta}$ como los siguientes problemas de optimización:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{res, \eta} : \quad & \sup_{\pi \in \Pi(\mu, \nu), D(\pi|P) \leq \eta} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi \right\} \\
\mathcal{P}_{pen, \theta} : \quad & \sup_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi - \frac{1}{\theta} D(\pi|P) \right\}
\end{aligned}$$

donde $P = \mu \times \nu$.

²¹Si la contraparte es una compañía o una persona, el default se puede deber a que declaró la quiebra, resultado de una mala administración de las finanzas.

²²Si puede ser el caso. Por ejemplo, si la razón de default es que la contraparte asumió varias pérdidas de sus posiciones en el mercado y por ende no cuenta con liquidez para pagar.

Como bien indican los nombres, en el primero imponemos una penalización proporcional a la entropía en nuestra función objetivo, mientras que en el segundo restringimos el conjunto de elección mediante un *presupuesto entrópico*²³.

Para el problema de optimización restringida, cuando $\eta = 0$ el único elemento en el conjunto de elección es $\pi = \mu \times \nu$ (ver Lema 46), mientras que si $\eta = +\infty$ no damos restricción alguna y estamos frente a la cota pesimista 56. Por otro lado, en el problema de optimización penalizada, cuando $\theta = 0$, la penalización $\frac{1}{\theta}D(\pi|P)$ será infinita a menos que $\pi = \mu \times \nu$, y esta sería la solución. A su vez, si $\theta = +\infty$ la penalización sería nula y estaríamos, nuevamente, frente al problema original 56. La siguiente figura muestra la solución óptima al problema penalizado bajo diferentes parámetros $\epsilon = \frac{1}{\theta}$. Notemos que para un ϵ grande (θ pequeño) el término penalizador induce una solución muy parecida a la medida producto. A medida el término penalizador disminuye en intensidad la solución óptima se permite tomar una forma distinta.

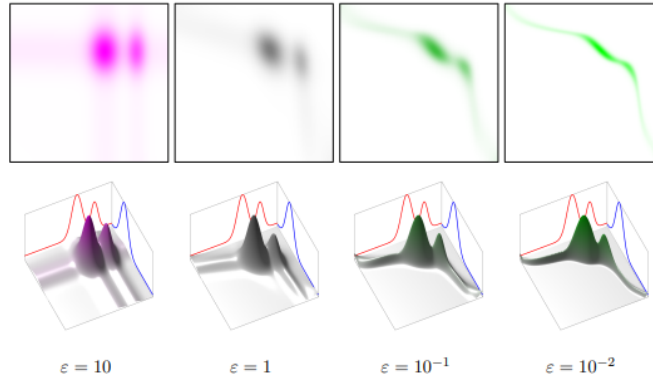


Figura 9: Recuperado de [Peyre and Cuturi \(2019\)](#) El impacto de $\epsilon = \frac{1}{\theta}$ en las soluciones al problema penalizado. La segunda fila muestra las densidades de los marginales (en rojo y azul) y de la solución.

Resulta que ambas formulaciones son, en cierto sentido, equivalentes. De forma más precisa, para cada $\theta > 0$, existe un $\eta > 0$ tal que $\mathcal{P}_{pen,\theta}$ y $\mathcal{P}_{res,\eta}$

²³En el sentido que define una cota superior.

tienen el mismo optimizador. En la prueba, es necesario primero establecer que el problema $\mathcal{P}_{pen,\theta}$ tiene una única solución. Para esto, [Glasserman and Yang \(2015\)](#) alude al Teorema 3 de [Rüschendorf and Thomsen \(1993\)](#). En este documento imponemos una condición adicional: $\mathbb{E}_{\mu \times \nu}[e^{\theta \langle x, y \rangle}] < +\infty$, y brindamos una prueba rigurosa partiendo de esta hipótesis. En ese sentido, el siguiente lema es una adaptación del resultado en [Rüschendorf and Thomsen \(1993\)](#).

Lema 48. Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ y $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Si $D(\pi|P) < +\infty$ para algún $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$, entonces existe un único $\hat{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$ tal que

$$D(\hat{\pi}|P) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} D(\pi|P).$$

Teorema 49. Sean $\theta > 0$ y $P = \mu \times \nu$. Si $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ y $\mathbb{E}_P[e^{\theta \langle x, y \rangle}] < +\infty$, entonces el problema $\mathcal{P}_{pen,\theta}$ tiene una única solución $\pi^\theta \in \Pi(\mu, \nu)$.

Demostración. Definamos la medida de probabilidad $\hat{P} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ con $\hat{P} \approx P = \mu \times \nu$ dada por

$$d\hat{P} = \frac{e^{\theta \langle x, y \rangle}}{\mathbb{E}_P[e^{\theta \langle x, y \rangle}]} dP.$$

Entonces, para cada $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ con $\pi \ll P$, tenemos $\pi \ll \hat{P}$. Más aún, las derivadas de Radon-Nikodym se comportan de manera deseable:

$$\frac{d\pi}{d\hat{P}} = \frac{d\pi}{dP} \frac{dP}{d\hat{P}} \tag{61}$$

$$= \frac{\mathbb{E}_P[e^{\theta \langle x, y \rangle}] d\pi}{e^{\theta \langle x, y \rangle} dP} \tag{62}$$

El problema $\mathcal{P}_{pen,\theta}$ implica encontrar

$$\sup_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi - \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \ln \left(\frac{d\pi}{dP} \right) d\pi \tag{63}$$

$$= -\frac{1}{\theta} \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \ln \left(\frac{d\pi}{e^{\theta \langle x, y \rangle} dP} \right) d\pi \tag{64}$$

$$= -\frac{1}{\theta} \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \left[\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \ln \left(\frac{\mathbb{E}_P[e^{\theta \langle x, y \rangle}] d\pi}{e^{\theta \langle x, y \rangle} d\pi} \right) d\pi - \ln \left(\mathbb{E}_P[e^{\theta \langle x, y \rangle}] \right) \right] \tag{65}$$

$$= -\frac{1}{\theta} \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \left[-\ln(\mathbb{E}_P[e^{\theta \langle x, y \rangle}]) + \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \ln \left(\frac{d\pi}{d\hat{P}} \right) d\pi \right] \tag{66}$$

$$= \frac{1}{\theta} \left[\ln(\mathbb{E}_P[e^{\theta \langle x, y \rangle}]) - \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} D(\pi|\hat{P}) \right]. \tag{67}$$

Verificamos que se cumple la condición del Lema 48: el mismo $P = \mu \times \nu$ da entropía finita.

$$D(P|\hat{P}) = \mathbb{E}_P \left[\ln \left(\frac{dP}{d\hat{P}} \right) \right] \quad (68)$$

$$= \mathbb{E}_P \left[\ln \left(\frac{\mathbb{E}_P[e^{\theta \langle x, y \rangle}]}{e^{\theta \langle x, y \rangle}} \right) \right] \quad (69)$$

$$= \ln \left(\mathbb{E}_P[e^{\theta \langle x, y \rangle}] \right) - \theta \mathbb{E}_P[\langle x, y \rangle]. \quad (70)$$

Por hipótesis, $0 < \mathbb{E}_P[e^{\theta \langle x, y \rangle}] < +\infty$, por lo que $\ln(\mathbb{E}_P[e^{\theta \langle x, y \rangle}]) \in \mathbb{R}$. Además, como μ, ν son cuadrado-integrables, podemos acotar

$$\mathbb{E}_P[|\langle x, y \rangle|] \leq \mathbb{E}_P \left[\frac{||x||^2 + ||y||^2}{2} \right] = \frac{1}{2} \mathbb{E}_\mu[||x||^2] + \frac{1}{2} \mathbb{E}_\nu[||y||^2] < +\infty.$$

Por ende $\mathbb{E}_P[\langle x, y \rangle] \in \mathbb{R}$ y luego $D(P|\hat{P}) \in \mathbb{R}$.

Por último, el Lema 48 garantiza que el ínfimo en 67, y por ende el problema $\mathcal{P}_{pen, \theta}$, tienen un único optimizador $\pi^\theta \in \Pi(\mu, \nu)$.

□

Para concluir esta subsección, presentamos el resultado de [Glasserman and Yang \(2015\)](#) sobre la equivalencia entre el problema penalizado y el problema restringido.

Teorema 50. Sea $\theta > 0$. La solución π^θ a $\mathcal{P}_{pen, \theta}$ es la solución al problema $\mathcal{P}_{res, \eta(\theta)}$ con

$$\eta(\theta) = D(\pi^\theta|P).$$

La asignación $\theta \rightarrow \eta(\theta)$ es creciente.

Demostración. Ya vimos que $\mathcal{P}_{pen, \theta}$ tiene una única solución π^θ . Suponga que π^θ no es óptimo en el problema $\mathcal{P}_{res, \eta(\theta)}$. Entonces existe un $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ tal que $D(\pi|P) \leq D(\pi^\theta|P)$ y

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi > \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi^\theta$$

Esto implica que

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi - \frac{1}{\theta} D(\pi|P) > \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi^\theta - \frac{1}{\theta} D(\pi^\theta|P)$$

lo que contradice la optimalidad de π^θ para el problema penalizado $\mathcal{P}_{pen,\theta}$. Ahora probamos que la asignación $\theta \rightarrow \eta(\theta)$ es creciente. Sean $\theta_2 > \theta_1 > 0$ y $\pi^{\theta_1}, \pi^{\theta_2}$ las soluciones a los problemas penalizados $\mathcal{P}_{pen,\theta_1}, \mathcal{P}_{pen,\theta_2}$, respectivamente. Si $\pi^{\theta_1} = \pi^{\theta_2}$ entonces sus divergencias son iguales, o sea $\eta(\theta_1) = \eta(\theta_2)$. Caso contrario, dado que π^{θ_2} es la solución única al problema $\mathcal{P}_{pen,\theta_2}$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi^{\theta_2} - \frac{1}{\theta_2} D(\pi^{\theta_2} | P) > \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi^{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} D(\pi^{\theta_1} | P). \quad (71)$$

Si $\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi^{\theta_2} \leq \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi^{\theta_1}$, entonces $D(\pi^{\theta_2} | P) < D(\pi^{\theta_1} | P)$, o sea

$$\left(\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1} \right) D(\pi^{\theta_2} | P) > \left(\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1} \right) D(\pi^{\theta_1} | P). \quad (72)$$

Sumando las inecuaciones 71 y 72 obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi^{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1} D(\pi^{\theta_2} | P) > \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi^{\theta_1} - \frac{1}{\theta_1} D(\pi^{\theta_1} | P), \quad (73)$$

lo que contradice la optimalidad de π^{θ_1} . Luego, solo puede ocurrir

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi^{\theta_2} > \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi^{\theta_1}. \quad (74)$$

En caso $D(\pi^{\theta_2} | P) \leq D(\pi^{\theta_1} | P)$, podemos sumar $-\frac{1}{\theta_1} D(\pi^{\theta_2} | P) \geq -\frac{1}{\theta_1} D(\pi^{\theta_1} | P)$ para obtener la ecuación 73: otra vez llegamos a una contradicción. Así, $\eta(\theta_2) > \eta(\theta_1)$. \square

Observación. No podemos asegurar la conversa. Es decir, no garantizamos que para cada $\eta > 0$ existe un $\theta(\eta) > 0$ tal que la solución a $\mathcal{P}_{res,\eta}$ sea solución a $\mathcal{P}_{pen,\theta(\eta)}$.

7.3. Algoritmo de Sinkhorn para resolver el problema de regularización entrópica

Rescatando el contexto de la subsección 7.1 y la expresión para la divergencia de Kullback-Leibler para espacios finitos, discretizamos el problema penalizado. Mostramos que el problema discretizado es equivalente al problema de regularización entrópica descrito en la Sección 3, y por ende puede resolverse mediante el algoritmo de Sinkhorn.

Para cada $\theta > 0, N \in \mathbb{N}$ formulamos el problema penalizado con el modelo de referencia $P = \mu_N \times \nu_N$.

$$\mathcal{P}_\theta^N : \sup_{\pi^N \in \Pi(\mu_N, \nu_N)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{d+1} \left\{ \pi_{ij}^N \langle X_i, y_j \rangle - \frac{1}{\theta} \pi_{ij} \ln \left(\frac{\pi_{ij}}{\mu_N(X_i) \nu_N(y_j)} \right) \right\}.$$

Tras un reordenamiento, encontramos que los sumandos pueden reescribirse como:

$$\pi_{ij}^N \left(\langle X_i, y_j \rangle + \frac{1}{\theta} \ln(\mu_N(X_i) \nu_N(y_j)) \right) - \frac{1}{\theta} \pi_{ij} \ln(\pi_{ij})$$

Defina la función costo $c(X_i, y_j) = -(\langle X_i, y_j \rangle + \frac{1}{\theta} \ln(\mu_N(X_i) \nu_N(y_j)))$ de modo que el problema se vuelve equivalente a encontrar un ínfimo de la siguiente forma:

$$\mathcal{P}_\theta^N : - \inf_{\pi \in \Pi(\mu_N, \nu_N)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{d+1} \pi_{ij} c(X_i, y_j) + \frac{1}{\theta} \pi_{ij} \ln(\pi_{ij})$$

Estamos frente al problema de regularización entrópica de la Sección 3, donde identificamos $\mathcal{P}_{\frac{1}{\theta}}$ con $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_N\}$, $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_{d+1}\}$ y la función costo descrita anteriormente. De esta forma, por la Proposición 21, el algoritmo de Sinkhorn converge a la solución óptima \mathcal{P}_θ^N . Note que la función objetivo es convexa en los $N \times (d+1)$ instrumentos de optimización y esto nos permite asegurar la optimalidad del candidato a óptimo vía Lagrange. El procedimiento de resolución es muy similar al presentado anteriormente. Solo enfatizamos que ahora no se tienen conjuntos finitos de misma cardinalidad, en este contexto: $\varepsilon = 1/\theta$ y que no se ha agregado la constante $1/\theta$ al problema de optimización.

Por último, presentamos un resultado de convergencia cuando $N \rightarrow +\infty$. Para esto, necesitamos definir, dadas dos medidas de probabilidad $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ arbitrarias

$$G(\pi_1, \pi_2) := \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi_1 - \frac{1}{\theta} D(\pi_1 | \pi_2).$$

Teorema 51. Sean X, Y vectores aleatorios con \mathbb{R}^d con distribuciones $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$. Si además $\mathbb{E}_{\mu \times \nu} [e^{\theta \langle x, y \rangle}] < +\infty$ y Y tiene soporte finito, entonces:

1. El valor óptimo en \mathcal{P}_θ^N converge al valor óptimo en el problema $\mathcal{P}_{pen, \theta}$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \max_{\pi \in \Pi(\mu_N, \nu_N)} G(\pi, \mu_N \times \nu_N) = \sup_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} G(\pi, \mu \times \nu)$$

2. El maximizador $\pi_N^* \in \Pi(\mu_N, \nu_N)$ de $G(\cdot, \mu_N \times \nu_N)$ converge debilmente al maximizador $\pi^* \in \Pi(\mu, \nu)$ de $G(\cdot, \mu \times \nu)$
3. El CVA máximo en \mathcal{P}_θ^N converge al CVA máximo en \mathcal{P}_θ \mathbb{P} -c.s. Esto es

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi_N^* = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \langle x, y \rangle d\pi^* \quad \mathbb{P}\text{-c.s.}$$

Demostración. Ver el Apéndice C de [Glasserman and Yang \(2015\)](#). □

En esta sección hemos formulado entonces un problema de transporte óptimo que permite computar el máximo para el CVA (una cota superior). Más aún, hemos brindado asociado a ello un resultado de existencia y unicidad. Luego, se adaptó el modelo siguiendo la bibliografía, con la finalidad de poder resolver el problema vía métodos computacionales. En relación a ello, se probó la convergencia del algoritmo que permite resolver numéricamente el problema de transporte óptimo. Concretamente, se brindaron dos formulaciones para el problema de regularización entrópica y se estableció la convergencia para el algoritmo Sinkhorn. Finalmente, desarrollamos un resultado alineado con la bibliografía (Teorema [49](#)), que, de cierto modo, es un resultado de nuestra autoría.

8. Acotamiento del riesgo de un portafolio

Divimos la presente sección de la siguiente manera. Primero, presentamos el concepto de medida de riesgo, así como el VaR (Value at Risk) y el CVaR (Conditional Value at Risk). Segundo, siguiendo a [Memartoluie \(2017\)](#), formulamos un problema de transporte óptimo para acotar medidas de riesgo que dependen en dos factores de riesgo X, Y , al estilo de la sección anterior. Tercero, basándonos en [Glasserman and Yang \(2015\)](#), aplicamos regularización entrópica para acotar el riesgo de modelo.

8.1. Medidas de riesgo, VaR y CVaR

Siguiendo a [Memartoluie \(2017\)](#), para cada variable aleatoria $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que representa el valor futuro de un portafolio, queremos cuantificar el riesgo $\rho(X)$. Denotaremos a continuación χ al espacio vectorial de variables aleatorias en (Ω, \mathbb{P}) .

Definición 52. Una *medida de riesgo* es una función $\rho : \chi \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface los siguientes axiomas:

1. Monotonicidad: si $X, Y \in \chi$ y $X \leq Y$ casi seguramente, entonces $\rho(X) \leq \rho(Y)$.
2. Invarianza por traslación: si $X \in \chi$ y $m \in \mathbb{R}$ entonces $\rho(X + m) = \rho(X) + m$.

Decimos que es una *medida de riesgo convexa* cuando

$$\rho(tX + (1 - t)Y) \leq t\rho(X) + (1 - t)\rho(Y), \quad \forall X, Y \in \chi, \forall t \in [0, 1]$$

Por último, decimos que es una medida de riesgo convexa es *coherente* cuando

$$\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X), \quad \forall X \in \chi, \lambda \geq 0.$$

Observación. Cabe resaltar que:

1. Una medida de riesgo coherente satisface la subaditividad. Esto es

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y), \quad \forall X, Y \in \chi.$$

2. La convexidad es una propiedad deseable, pues refleja que la diversificación es beneficiosa para el inversor. Cuando un inversor reparte su capital entre varias posiciones, espera que su riesgo total no incremente. La subaditividad también refleja esta idea.
3. Para una discusión más detallada ver la Sección 4.1 en [Follmer and Schied \(2002\)](#).

Una medida de riesgo muy usada en la práctica es el *Value at Risk* (VaR). Es un cuantil sobre la distribución de la pérdida L de un portafolio sobre un horizonte de tiempo fijo $T > 0$, que mantendremos implícito.

Definición 53. Dada una variable aleatoria $L : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de pérdidas, el VaR al nivel de confianza $\alpha \in [0, 1)$ se define como:

$$VaR_\alpha(L) = \inf\{\ell \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(L \geq \ell) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{\ell \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(L < \ell) \geq \alpha\}.$$

La interpretación es clara: las pérdidas estarán por debajo de $VaR_\alpha(L)$ con un nivel de confianza α . Cabe mencionar que la configuración de parámetros más comunes es $\alpha = 0,999$ y un horizonte de tiempo de un año ([Memartoluie \(2017\)](#)). Sin embargo, esta métrica tiene dos carencias principales. Primero, no es una medida de riesgo coherente, pues no es subaditiva. La diversificación no está justificada bajo esta medida de riesgo. Segundo, no brinda información completa. En efecto, si bien controla la probabilidad de pérdidas, no dice nada sobre el comportamiento de la distribución más allá de la cota.

Por estos motivos, se introdujo en la literatura el llamado *Conditional Value at Risk* (CVaR), que enmienda estos dos errores del VaR.

Definición 54. Dada una variable aleatoria $L : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de pérdidas, el CVaR al nivel de confianza $\alpha \in [0, 1]$ se define como:

$$CVaR_\alpha(L) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 VaR_\xi(L) d\xi.$$

Para cada $\alpha \in [0, 1)$, el $CVaR_\alpha$ es una medida coherente²⁴ y revela información acerca de la cola derecha de la distribución. Más aún, considera la

²⁴Al ser una medida convexa, resulta más fácil de controlar por medio de algoritmos eficien-

intensidad de las posibles pérdidas más allá de Var_α .

Para cimentar estas ideas, considere pérdidas que siguen una distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$. Esto es, sigue la función de distribución $F_L(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Afortunadamente, la distribución es continua, por lo que hallar el VaR se reduce a resolver $F_L(x) = \alpha$. Obtenemos

$$Var_\alpha(L) = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{1}{1-\alpha} \right).$$

Luego, integrando obtenemos el CVaR:

$$CVaR_\alpha(L) = \frac{1}{\lambda(1-\alpha)} \int_\alpha^1 \ln \left(\frac{1}{1-\xi} \right) d\xi = \frac{1 + \ln(\frac{1}{1-\alpha})}{\lambda}.$$

8.2. Medidas que dependen de dos factores de riesgo

Considere dos vectores aleatorios X, Y que representan factores de riesgo. Como es usual, conocemos sus distribuciones individuales μ y ν , pero no la estructura de dependencia entre ellas $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$. Si tenemos una función de las futuras pérdidas de nuestro portafolio $L(X, Y)$ y una medida de riesgo ρ , buscamos saber cuál es el riesgo máximo al que nos exponemos. Esto es, hallar

$$\sup_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \rho(L(X, Y))$$

La siguiente caracterización del CVaR probará ser fundamental a la hora de plantear el problema de transporte óptimo. Proveemos una adaptación²⁵ del Teorema 4.47 de [Follmer and Schied \(2002\)](#), y referimos al lector a este libro para la prueba.

Teorema 55. Para todo $\alpha \in [0, 1)$, el $CVaR_\alpha$ es una medida de riesgo coherente y admite la representación

$$CVaR_\alpha(L) = \sup_{Q \in \mathcal{G}_\alpha} \mathbb{E}_Q[L], \quad \forall L \in \chi$$

tes. Es una métrica más amigable que el VaR si nuestro objetivo es optimizar un portafolio con un número elevado de activos y posiciones. Más aún, minimizar el CVaR implica controlar el VaR.

²⁵Las definiciones de medida de riesgo, VaR y CVaR en [Follmer and Schied \(2002\)](#) difieren ligeramente de las presentadas en [Memartoluie \(2017\)](#), pero son equivalentes. En particular: si ρ es una medida de riesgo para [Memartoluie \(2017\)](#), entonces $-\rho$ es una medida de riesgo

donde

$$\mathcal{G}_\alpha = \left\{ Q \in \mathcal{P}(\Omega) : Q \ll \mathbb{P} \text{ y } \frac{dQ}{d\mathbb{P}} \leq \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{P} - c.s. \right\}.$$

Ciertamente, consideramos pérdidas $L(X, Y)$ que dependen de los factores de riesgo X e Y . El problema es encontrar:

$$\sup_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} CVaR_\alpha(L(X, Y)) = \sup_{\pi \in \Pi(\mu, \nu), Q \in \mathcal{G}_\alpha} \mathbb{E}_G[L(X, Y)], \quad \forall L \in \chi.$$

En la práctica, lo usual es trabajar con distribuciones marginales discretas. Por ejemplo, como vimos anteriormente, μ y ν pueden aproximarse²⁶ por sus medidas empíricas $\{\mu_N\}, \{\nu_N\}$. Por este motivo, asumamos que X y Y tienen soportes en $\{x_1, \dots, x_n\}$ y $\{y_1, \dots, y_m\}$, respectivamente. Para aliviar la notación, escribiremos $\mu_i = \mu(x_i), \nu_j = \nu(y_j)$. Análogamente, escribiremos $\pi = (X, Y)_\# \mathbb{P}$ y $\gamma = (X, Y)_\# Q$ para las distribuciones conjuntas de (X, Y) bajo \mathbb{P} y Q , respectivamente. Como ya es costumbre, reducimos el problema a programación lineal:

$$\begin{cases} \text{máx} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \gamma_{ij} L(x_i, y_j) \\ \text{s.a.} & \sum_{i=1}^n \pi_{ij} = \nu_j \quad \forall j = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^m \pi_{ij} = \mu_i, \quad \forall i = 1, \dots, n \\ & 0 \leq \gamma_{ij} < \frac{1}{1-\alpha} \pi_{ij}. \end{cases} \quad (75)$$

Note que no la restricción final no es fija, por lo que el costo computacional es mayor que en problema básico 1.

8.3. Riesgo de modelo

A continuación nos enfocaremos en el control del llamado *riesgo de modelo*. Seguimos a [Glasserman and Xu \(2014\)](#), manteniendo la notación ya establecida en esta sección. Medir el riesgo conlleva asumir supuestos para los modelos que se usan. Estos errores del modelo se trasladan a errores en la medida del riesgo. El objetivo de la presente sección es desarrollar herramientas para acotar el error, sujeto a una desviación máxima del modelo de referencia.

[Follmer and Schied \(2002\)](#). Finalmente, [Follmer and Schied \(2002\)](#) usa el parámetro $\lambda = 1 - \alpha$ tanto para el VaR como para el CVar.

²⁶En el sentido de la convergencia débil.

Considere un vector aleatorio $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ que codifica los factores de riesgo o, en general, los elementos estocásticos del modelo. Trabajaremos con un indicador de riesgo de la forma $\rho(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[V(X)]$, donde $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible. No sabemos la distribución real del vector aleatorio X , sin embargo asumimos que sigue otra distribución $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Partiendo de este modelo de referencia podemos considerar distribuciones de probabilidad no muy alejadas de P para X , en el sentido de definir una cota η para la entropía de Kullback-Leibler $D(\cdot|P)$. En este contexto, la entropía mide la información adicional que necesitamos para hacer un modelo alternativo Q preferible sobre un modelo de referencia P . Teniendo esto presente, construimos el problema restringido $\mathcal{P}_{pen,\eta}$:

$$\sup_{D(Q|P) < \eta} \mathbb{E}_Q[V(x)] \quad (76)$$

Más aún, podemos generalizar el Teorema 50 sobre la equivalencia entre el problema penalizado y el problema restringido.²⁷ El lector interesado puede consultar Glasserman and Xu (2014).

Observación. Considere $P, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ absolutamente continuas respecto a la medida de Lebesgue $\mathcal{L} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, con funciones de densidad respectivas f, g . Si además $Q \ll P$, entonces

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{g}{f}.$$

Por este motivo, capturamos la desviación del modelo Q al modelo de referencia P a través del ratio $m := \frac{g}{f}$. De este modo, la entropía puede ser calculada por:

$$D(Q|P) = \mathbb{E}_P[m \ln(m)].$$

Observación. Podemos reconstruir el modelo Q a través de P, m por $g(x) = m(x)f(x)$. Además, para cualquier $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ medible:

$$\mathbb{E}_P[m(x)h(x)] = \mathbb{E}_Q[h(x)].$$

Definición 56. Definamos el conjunto de todas las funciones de densidad respecto a P .

$$\mathcal{M} = \{m : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} : m \geq 0, \mathbb{E}_P[m] = 1\}$$

²⁷Mostraremos el caso particular $V : \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $V(x, y) = \langle x, y \rangle$.

Para cada $\eta > 0$, definamos el subconjunto de \mathcal{M} de funciones de densidad cuyas medidas asociadas Q cumplen $D(Q|P) < \eta$.

$$\mathcal{M}_\eta = \{m \in \mathcal{M} : \mathbb{E}_P[m \ln(m)] < \eta\}.$$

Así, podemos dar una formulación alternativa a (76) a través de:

$$\sup_{m \in \mathcal{M}_\eta} \mathbb{E}_P[m(x)V(x)]. \quad (77)$$

El dual (ver [Florenzano and le Van \(2001\)](#)) de este problema es:

$$\inf_{\theta > 0} \sup_{m \in \mathcal{M}} \mathbb{E}_P \left[mV(x) - \frac{1}{\theta} (m \ln(m) - \eta) \right]. \quad (78)$$

Notemos que, para cada $\theta > 0$, el problema de maximización interior

$$\sup_{m \in \mathcal{M}} \mathbb{E}_P \left[mV(x) - \frac{1}{\theta} m \ln(m) \right] \quad (79)$$

es análogo al problema penalizado $\mathcal{P}_{pen,\theta}$, asumiendo que tanto P como Q son absolutamente continuas respecto de la medida de Lebesgue. La solución es

$$m_\theta = \frac{\exp(\theta V(x))}{\mathbb{E}_P[\exp(\theta V(x))]}, \quad (80)$$

cuando el denominador es finito [Glasserman and Xu \(2014\)](#).

Veamos una aplicación cuando nuestro criterio²⁸ para medir riesgo es la varianza del portafolio.

Definición 57. Considere el espacio de probabilidad (Ω, \mathbb{P}) . Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ el vector aleatorio de los retornos de activos de un portafolio con pesos $a = (a_1, \dots, a_d)^T$. Si la media es $\mathbb{E}_\mathbb{P}[X] = \mu$, definimos la *varianza del portafolio* por

$$\mathbb{E}_\mathbb{P}[a^T (X - \mu)(X - \mu)^T a].$$

Identificamos $V(x) = a^T (x - \mu)(x - \mu)^T a$, por lo que se estamos frente al problema de optimización

$$\sup_{m \in \mathcal{M}_\eta} \mathbb{E}_P[m(x)a^T (x - \mu)(x - \mu)^T a].$$

²⁸Esta no es una medida de riesgo

Acá la función objetivo asume que sabemos con certeza la media $\mathbb{E}_Q[X] = \mu$, pero no la distribución en si. Entonces debemos imponer esta condición en nuestro problema de optimización. Sin embargo, la solución al problema global (sin imponer la restricción) resulta cumplir que la media es μ cuando la distribución de referencia es normal multivariada. Veamos: por la discusión anterior, el optimizador es de la forma

$$m_\theta(x) = C \exp(\theta a^T (x - \mu)(x - \mu)^T a) \quad (81)$$

para alguna constante normalizadora $C > 0$.

Así, la distribución Q_θ óptima en (76) tiene densidad $g_\theta = m_\theta(x)f(x)$ respecto a la medida de Lebesgue, donde f es la densidad del modelo de referencia P .

$$g_\theta(x) = C \exp(\theta a^T (x - \mu)(x - \mu)^T a) f(x). \quad (82)$$

Un caso interesante ocurre cuando asumimos que el modelo de referencia sigue una distribución normal multivariada, pues además de mantener la media igual, la distribución maximizadora también permanece normal multivariada. Nos apoyamos del siguiente resultado.

Teorema 58. Sea $\mu \in \mathbb{R}^d$ y $\Sigma \in \mathcal{M}_{d \times d}(\mathbb{R})$ una matriz semidefinida positiva y simétrica. Entonces la distribución normal multivariada $\mathcal{N}(\mu, \Sigma) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ tiene función densidad respecto a la medida de Lebesgue dada por:

$$f(x) = \hat{C} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)\right)$$

para alguna $\hat{C} > 0$ constante normalizadora.

Escogemos el modelo de referencia $P = \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ con μ, Σ como en el Teorema 58. De esta forma, la solución a (76) está dada por la función de densidad

$$g_\theta(x) = C \exp(\theta a^T (x - \mu)(x - \mu)^T a) \times \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)\right).$$

Notemos que los productos del primer exponente pueden identificarse con productos escalares en \mathbb{R}^d , así que podemos permutar los factores del siguiente modo:

$$\theta a^T (x - \mu)(x - \mu)^T a = (x - \mu)^T (\theta a^T a I)(x - \mu),$$

donde I es la matriz identidad de tamaño $d \times d$. Reescribimos así

$$g_\theta(x) = C \exp \left((x - \mu)^T (\theta a^T a I) (x - \mu) - \frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu) \right) \quad (83)$$

$$g_\theta(x) = C \exp \left(-\frac{1}{2} (x - \mu)^T (\Sigma^{-1} - 2\theta a^T a I) (x - \mu) \right). \quad (84)$$

Cuando existe²⁹ $\hat{\Sigma} := (\Sigma^{-1} - 2\theta a^T a I)^{-1}$, tenemos que Q_θ sigue la distribución $\mathcal{N}(\mu, \hat{\Sigma})$. Esto es sorprendente: ¡la distribución óptima es es también normal multivariada! Este es un caso especial, pues nada asegura que el modelo óptimo pertenezca a la misma familia de distribuciones del modelo de referencia P .

Este fenómeno persiste cuando consideramos una función cuadrática arbitraria $V(x) = x^T A x$ con $A \in \mathcal{M}_{d \times d}(\mathbb{R})$ una matriz definida positiva. En particular A es simétrica. De nuevo aludiendo al resultado 80, obtenemos el ratio óptimo

$$m_\theta(x) = C \exp(\theta x^T A x). \quad (85)$$

Consideremos nuevamente la distribución de referencia $N(\mu, \Sigma)$.

De hecho, ahora consideraremos distribuciones sin la restricción de mantener la media.

De $g(x) = m(x)f(x)$ obtenemos

$$g_\theta(x) = C \exp(\theta x^T A x) \times \exp \left(-\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu) \right) \quad (86)$$

$$= C \exp \left(\theta x^T A x - \frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu) \right). \quad (87)$$

Reordenando los elementos del exponente:

$$x^T (\theta A) x - \frac{1}{2} x^T \Sigma^{-1} x + \frac{1}{2} [\mu^T \Sigma^{-1} x + x^T \Sigma^{-1} \mu] - \frac{1}{2} \mu^T \Sigma^{-1} \mu \quad (88)$$

$$= -\frac{1}{2} x^T (\Sigma^{-1} - 2\theta A) x + \frac{1}{2} [\mu^T \Sigma^{-1} x + x^T \Sigma^{-1} \mu] - \frac{1}{2} \mu^T \Sigma^{-1} \mu. \quad (89)$$

Para θ suficientemente pequeño, podemos asegurar que $\hat{\Sigma} := (\Sigma^{-1} - 2\theta A)^{-1}$ existe. Notemos que Σ, A simétricas implican que Σ^{-1} y $\Sigma^{-1} - 2\theta A$ sean también simétricas y por ende $\hat{\Sigma}$ también lo es. Reescribiendo el exponente, se llega:

$$= -\frac{1}{2} x^T \hat{\Sigma}^{-1} x + \frac{1}{2} [\mu^T \Sigma^{-1} \hat{\Sigma} \hat{\Sigma}^{-1} x + x^T \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\Sigma} \Sigma^{-1} \mu] - \frac{1}{2} \mu^T \Sigma^{-1} \mu \quad (90)$$

$$= -\frac{1}{2} x^T \hat{\Sigma}^{-1} x + \frac{1}{2} [(\hat{\Sigma} \Sigma^{-1} \mu)^T \hat{\Sigma}^{-1} x + x^T \hat{\Sigma}^{-1} (\hat{\Sigma} \Sigma^{-1} \mu)] - \frac{1}{2} \mu^T \Sigma^{-1} \mu. \quad (91)$$

²⁹Para θ suficientemente pequeño podemos asegurar que el determinante de $\Sigma^{-1} - 2\theta a^T a I$

Definamos $\hat{\mu} := \hat{\Sigma}\Sigma^{-1}\mu$ para aliviar la notación.

$$= -\frac{1}{2}x^T\hat{\Sigma}^{-1}x + \frac{1}{2}\left[\hat{\mu}^T\hat{\Sigma}^{-1}x + x^T\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mu}\right] - \frac{1}{2}\hat{\mu}^T\Sigma^{-1}\hat{\mu} + cte \quad (92)$$

$$= -\frac{1}{2}(x - \hat{\mu})^T\hat{\Sigma}^{-1}(x - \hat{\mu}) + cte. \quad (93)$$

Por último, al reemplazar esta expresión en (87) obtenemos

$$g_\theta(x) = \hat{C} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \hat{\mu})^T\hat{\Sigma}^{-1}(x - \hat{\mu})\right), \quad (94)$$

con $\hat{C} > 0$ alguna constante de normalización. Hemos probado que la distribución óptima Q_θ sigue también una distribución normal multivariada $\mathcal{N}(\hat{\mu}, \hat{\Sigma})$. Al igual que en el ejemplo anterior, no hay razón para esperar que la distribución óptima pertenezca a la misma familia de distribuciones. Esta es la razón por la cual este método es tan potente: evalúa una gama infinita de posibles distribuciones. Según [Glasserman and Xu \(2014\)](#), el método va más allá de simplemente examinar el efecto de cambios en los parámetros de la distribución, sino que evalúa tipos más generales de errores de modelo.

Conclusiones

Hemos formulado un problema de transporte óptimo para acotar la medida de riesgo de un portafolio. Luego, mostramos que el problema de acotar el CVaR se reduce a un problema de programación lineal en el caso discreto. En ese sentido, se vuelve al problema de regularización entrópica para controlar el riesgo de modelo, con la diferencia de no restringir nuestro conjunto de elección a $\Pi(\mu, \nu)$. De cierta forma, si bien este ejemplo no cae en la familia de problemas de transporte óptimo, sigue siendo un problema de regularización entrópica y de ahí el interés de incorporarlo en este trabajo. Esto concluye las aplicaciones en finanzas y en general, el cuerpo de este documento.

no se anula.

9. Conclusiones

En este documento, se ha realizado un análisis de las aplicaciones del transporte óptimo en economía y finanzas, enfocándonos en una selección de artículos. Se comenzó estudiando el problema de la regularización entrópica, que es clave para comprender el algoritmo Sinkhorn-Knopp. A continuación, se exploró cómo esta técnica se emplea para abordar un problema concreto: la estimación de costos. Luego de ello, se estudió el problema de emparejamiento en el mercado matrimonial así como en el mercado laboral. En particular, se vio cómo el propio modelo conlleva a una formulación de regularización entrópica. Esto resalta el objetivo principal de este documento: demostrar cómo el transporte óptimo surge como una herramienta de gran interés en la teoría económica.

Aunado a ello, se ha propuesto una línea de investigación considerando los desarrollos anteriores en este documento, específicamente para el caso del mercado laboral peruano. Se espera que este documento sea el punto de partida para iniciar una serie de proyectos relacionados con la teoría del transporte óptimo en problemas económicos. Es importante enfatizar una vez más que aún quedan muchas aplicaciones en economía por explorar que no han sido desarrolladas en este documento, como el tema del transporte urbano. Desde una perspectiva de transporte urbano luego de una estimación económica convencional de costos de transporte, es posible plantear un problema de transporte tradicional.

Sobre las aplicaciones en finanzas, formulamos problemas de transporte óptimo para acotar el CVA y medidas de riesgo. Esta formulación puede aplicarse a cualquier métrica financiera que depende de múltiples factores de riesgo, siempre y cuando las distribuciones individuales sean conocidas. También se abordó el problema de regularización entrópica en el caso continuo, en su forma penalizada y restringida, y cómo controla las desviaciones de un modelo de referencia. A su vez, mostramos la discretización del problema de regularización de modo que permita aplicar el algoritmo de Sinkhorn.

Permítanos enfatizar una última vez que la teoría del transporte óptimo es una línea de investigación bastante activa, tanto en economía como en finanzas, y que este trabajo constituye un desglose y adaptación de una extensa revisión de literatura.

Terminamos este documento con la Figura 10. Esta fue realizada siguiendo https://python.quantecon.org/opt_transport.html. El objetivo de esto es dar una última referencia sobre los paquetes y programas ya elaborados y destinados a la resolución numérica de problemas de transporte óptimo.

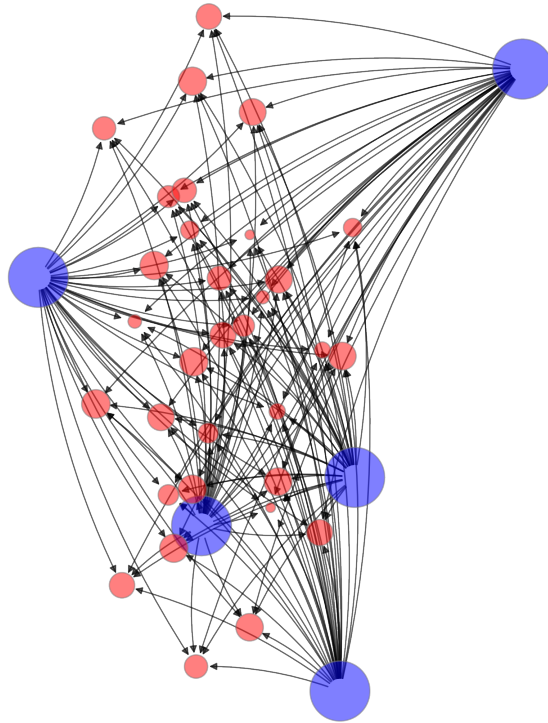


Figura 10: Plan de transporte: descripción visual. Código adaptado de Thomas Sargent et. al.

A. Fundamentos de topología y análisis real

Empezamos con una breve recordatorio de algunas definiciones básicas del análisis real. Un libro de referencia de Análisis Real con aplicaciones en Economía es sin lugar a dudas [Ok \(2007\)](#). Nos limitamos a definir brevemente los conceptos a los cuales aludimos, sin pasar por los resultados que suponemos conocidos del análisis (convergencia de sucesiones, continuidad, compacidad de un conjunto etc).

Definición 59. Dado $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, no vacío, decimos que $\theta \in \overline{\mathbb{R}}$ es **cota superior** de A si $x \leq \theta, \forall x \in A$.

Ejemplo 60. Dado el conjunto $\{x \in \mathbb{R}_+ : x^2 < 2\}$, 10 es una cota superior.

Definición 61. Dado $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, no vacío, decimos que $\theta \in \overline{\mathbb{R}}$ es **cota inferior** de A si $\theta \leq x, \forall x \in A$.

Definición 62. Dado $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, definimos $\beta = \sup A$ como la menor cota superior, es decir,

1. β es cota superior.
2. Si β' es otra cota superior, $\beta \leq \beta'$.

Ejemplo 63. Consideremos nuevamente el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}_+ : x^2 < 2\}$. Es sencillo notar que $\sqrt{2} = \sup A$.

Definición 64. Dado $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, definimos $\alpha = \inf A$ como la mayor cota inferior, es decir,

1. α es cota inferior.
2. Si α' es otra cota superior, $\alpha' \leq \alpha$.

Notation. Sea A un conjunto y $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Denotamos

$$\inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A) \text{ y } \sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A)$$

Proposición 65. Sea A un conjunto y $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, entonces

$$\inf_{x \in A} -f(x) = -\sup_{x \in A} f(x)$$

A continuación brindamos la definición de distancia y espacio métrico. Estos conceptos son en particular importante en la Sección 4 cuando se trabaja con la métrica de Hilbert.

Definición 66. Dado una conjunto M , una métrica sobre M es una función $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ que cumple con las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad triangular).

Ejemplo 67. En \mathbb{R}^n , $d(x, y) = \|x - y\|$ define una métrica. Más aún, se conoce como la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|$.

Definición 68. Un espacio métrico es un par (M, d) . Es decir, un espacio métrico es un conjunto M dotado con una función distancia asociada.

Definamos ahora lo que es una topología. Este concepto es esencial a la hora de hablar, en el apéndice de medida, de los borelianos. Más aún, es crucial a la hora de definir formalmente el concepto de convergencia. Veamos.

Definición 69. Sea X un conjunto no vacío. Una topología sobre X , denotada \mathcal{T} , es una familia de subconjuntos de X tales que:

- a) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.
- b) Dado \mathcal{I} un conjunto arbitrario de índices, si $\forall i \in \mathcal{I}, A_i \in \mathcal{T}$, entonces:

$$\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \right) \in \mathcal{T}.$$

- c) Si para todo $i = 1, \dots, m$, $A_i \in \mathcal{T}$, entonces:

$$\left(\bigcap_{i=1}^m A_i \right) \in \mathcal{T}.$$

Llamamos *abiertos* a los elementos de la topología.

Definición 70. Diremos que una familia S de subconjuntos de X genera la topología \mathcal{T} cuando

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{B \in A} B : A \subset S \right\}.$$

Es decir, cuando la topología está formada por todas las posibles uniones en S .

Definición 71. Dado un espacio métrico (M, d) , la topología inducida por d es aquella generada por los abiertos respecto a la métrica d , esto es, los conjuntos

$$B(x, \epsilon) = \{y \in M : d(x, y) < \epsilon\}.$$

Definición 72. Dada $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$, definimos

$$\limsup x_n = \inf_{k \geq 1} \sup\{x_n : n \geq k\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\liminf x_n = \sup_{k \geq 1} \inf\{x_n : n \geq k\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Alternativamente, podemos definir

$$\limsup x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup\{x_n : n \geq k\} = \inf_{k \geq 1} \sup\{x_n : n \geq k\}$$

$$\liminf x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf\{x_n : n \geq k\} = \sup_{k \geq 1} \inf\{x_n : n \geq k\}.$$

La siguiente figura permite aterrizar estas dos últimas definiciones.

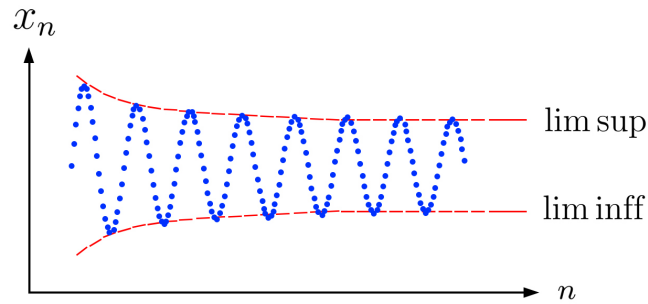


Figura 11: Lim sup y lim inf.

Ejemplo 73. Sea $x_n = \frac{(-1)^n(n+4)}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \sup\{x_k : k \geq n\} &= \sup\{(-1)^n(n+4)/n : (-1)^{n+1}(n+5)/(n+1), \dots\} \\ &= (n+4)/n \text{ para } n \text{ par y } (n+5)/(n+1) \text{ para } n \text{ impar} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Así, $\limsup x_n = 1$. Análogamente, el lector puede verificar que $\liminf x_n = -1$.

Proposición 74. La sucesión $(x_n) \subset \mathbb{R}$ es convergente si y sólo si $\limsup x_n = \liminf x_n$. Dicho valor común coincide con $\lim x_n$.

Continuamos definiendo brevemente la semi-continuidad superior e inferior. Este tipo de funciones juegan un rol importante en la teoría y en la práctica pues permiten obtener resultados sin tener que imponer la continuidad en los posibles *agentes* (funciones) involucrado(a)s.

Definición 75. Sea M un espacio métrico. Decimos que una función $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es semicontinua inferiormente en $x_0 \in M$ cuando para toda sucesión (x_n) en M tal que $x_n \rightarrow x_0$, se tiene $f(x_0) \leq \liminf f(x_n)$.

Definición 76. Sea M un espacio métrico. Decimos que una función $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es semicontinua superiormente en $x_0 \in M$ cuando para toda sucesión (x_n) en M tal que $x_n \rightarrow x_0$, se tiene $\limsup f(x_n) \leq f(x_0)$.

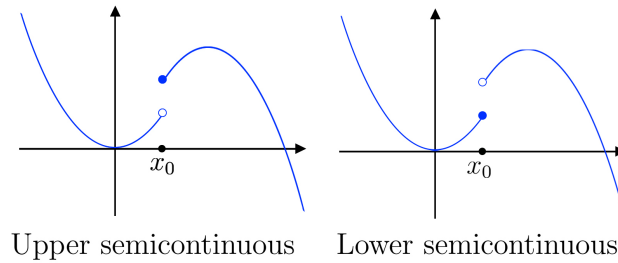


Figura 12: Upper y lower semicontinuous.

Proposición 77. Sea M un espacio métrico. La función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es continua si y sólo si es semicontinua inferior y semicontinua superior.

B. Teoría de la medida

Este anexo es sobre la bases de la teoría de la medida, tema aludido frecuentemente a lo largo de este documento. Dado un universo \mathcal{Y} no vacío, una medida μ se encarga de asignar a subconjuntos A de \mathcal{X} , algún valor cuantitativo $\mu(A) \in [0, +\infty]$ de su tamaño. Establezcamos antes de continuar una notación que se ha repetido con frecuencia en el cuerpo principal de este documento.

Notation. Dado un conjunto \mathcal{X} , para todo sub-conjunto $A \subset \mathcal{X}$, definimos la función indicatriz de A de la siguiente manera:

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Definición 78. Dado un universo \mathcal{X} no vacío decimos que una colección de conjuntos $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ es σ -álgebra cuando

1. $X \in \mathcal{F}$
2. Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$.
3. Si $\{A_j\}_{j \in \mathcal{J}} \in \mathcal{F}$, \mathcal{J} enumerable, entonces

$$\bigcup_{j \in \mathcal{J}} A_j \in \mathcal{F}.$$

Definición 79. Dado un universo \mathcal{X} , no vacío, y \mathcal{F} un σ -álgebra de subconjuntos de \mathcal{X} , decimos que $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ es medida cuando

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. Si $\{A_j\}_{j \in \mathcal{J}} \subset \mathcal{F}$, siendo \mathcal{J} enumerable, tal que $A_j \cap A_i = \emptyset$, $\forall j \neq i$ (disjuntos dos a dos), entonces

$$\mu\left(\bigcup_{j \in \mathcal{J}} A_j\right) = \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu(A_j).$$

Esta condición se conoce como σ -aditividad.

Definición 80. Se conoce a $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ como **espacio medible**, mientras que, $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$ se conoce como **espacio de medida**.

Definición 81. Decimos que la medida μ en el espacio medible $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ es una **medida finita** cuando $\mu(\mathcal{X}) < +\infty$.

Ejemplo 82. Dado un espacio medible (\mathcal{X}, Σ) y un punto $x \in \mathcal{X}$, el delta de Dirac

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}, \quad \forall A \in \Sigma$$

define una medida finita sobre dicho espacio. En efecto, por definición $\delta(A) \geq 0$ para todo $A \in \Sigma$. Luego, $\delta_x(\emptyset) = 0$ pues $x \notin \emptyset$. Finalmente, sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos en Σ disjuntos dos a dos. Si $x \in A_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces $x \notin A_n$ para todo $n \neq m$ y además, $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. De este modo,

$$\delta_x\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_x(A_n),$$

pues $\delta_x(A_n) = 0$ para todo $n \neq m$. En caso $x \notin A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tenemos $x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y así

$$\delta_x\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_x(A_n).$$

En ambos casos se satisface la σ -aditividad. Dado $\delta_x(X) = 1$, tenemos que la medida es finita.

Definición 83. Dado \mathcal{X} no vacío y $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$. Definimos el σ -álgebra generado por \mathcal{C} , $\sigma(\mathcal{C})$, como el menor σ -álgebra que contiene a \mathcal{C} , o sea

1. $\sigma(\mathcal{C})$ es σ -álgebra
2. $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$
3. Si \mathcal{G} es un σ -álgebra, $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$, $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{G}$.

Ejemplo 84. Para cada $A \subset \mathcal{X}$, tenemos $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, \mathcal{X}\}$

Definición 85. Sobre \mathbb{R}^d definimos el σ -álgebra de los borelianos por

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} = \sigma \{ \mathcal{O} \in \mathbb{R}^d : \mathcal{O} \text{ abierto} \}.$$

Este es el σ -álgebra implícito que consideramos al definir medidas los espacios euclidianos.

Proposición 86. Considere el siguiente conjunto:

$$\mathcal{C} = \left\{ \prod_{i=1}^d [a_i, b_i] : a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, d \right\}.$$

Entonces, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} = \sigma(\mathcal{C})$.

Por supuesto, las medidas más intuitivas son la de longitud en \mathbb{R} , área en \mathbb{R}^2 y volumen en \mathbb{R}^3 . Esta es la medida de Lebesgue, que a cada caja le otorga como medida el producto de las longitudes de sus lados.

Teorema 87. Existe una única medida \mathcal{L} en $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$ tal que

$$\mathcal{L} \left(\prod_{i=1}^d [a_i, b_i] \right) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i).$$

Definición 88. Llamamos a la medida \mathcal{L} del teorema anterior la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d .

Ya habiendo definido lo que es un σ -álgebra y una medida, podemos ampliar el horizonte y pensar en la integración. De los cursos de cálculo, es sabido que la integral permite medir un área o volumen. Sin embargo, la teoría de la integración se enriquece mucho cuando se construye a partir de los conceptos que se acaban de definir en este anexo. La integral de Riemman permite integrar una clase muy reducida de funciones. Por ejemplo, la función $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ no es Riemman-integrable. La integral de Lebesgue nace por la motivación de extender el universo de funciones que podemos integrar.

Empezamos con algunos elementos básicos de la teoría de la integración. Para más detalles, consultar [Folland \(1984\)](#).

Dado $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ espacio medible, definimos el conjunto de las funciones *simples* como aquellas que tienen rango finito. Denotamos

$$\mathcal{S}(\mathcal{X}, \mathcal{F}) = \left\{ f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} : f \doteq \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{1}_{A_i}, A_i \in \mathcal{F} \right\}.$$

Asimismo, definimos

$$S_+(\mathcal{X}, \mathcal{F}) = \{f \in S(\mathcal{X}, \mathcal{F}) : f \geq 0\}.$$

Definición 89. Dado un espacio de medida $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$, definimos para cada $f \in S_+$, con $f \doteq \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{1}_{A_i}$

$$\int_{\mathcal{X}} f d\mu = \sum_{i=1}^m a_i \mu(A_i)$$

Gracias a estas definiciones, podemos introducir la integral de Lebesgue.

Definición 90. Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ y $(\mathcal{Y}, \mathcal{H})$ espacios medibles. Decimos que $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ es una función medible si

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{H}.$$

Además, si $(\mathcal{Y}, \mathcal{H}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$ diremos que la función es Borel-medible.

Proposición 91. Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{F}), (\mathcal{Y}, \mathcal{G}), (\mathcal{Z}, \mathcal{H})$ espacios medibles. Si $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ y $g : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ son medibles, entonces la composición $g \circ f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ es medible.

Proposición 92. Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ un espacio medible y $\forall f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ una función Borel-medible positiva, existe una sucesión (f_n) en $S_+(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ tal que $f_n(x) \uparrow f(x), \forall x \in \mathcal{X}$.

Demostración. Definimos $\varphi_n : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, como

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{n2^n-1} i2^{-n} \mathbf{1}_{[i/2^n, (i+1)/2^n)} + n \mathbf{1}_{[n, +\infty)}.$$

Observemos que $\varphi_n(x) \uparrow x, \forall x \geq 0$ y $\varphi_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es Borel medible positiva.

Por lo tanto, definiendo $f_n = \varphi_n \circ f, f_n \uparrow f, \forall x \in \mathbb{R}$. En efecto,

$$\underbrace{\varphi_n(f(x))}_{=f_n(x)} \leq \underbrace{\varphi_{n+1}(f(x))}_{=f_{n+1}(x)}.$$

Finalmente, $f_n \in S_+(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ pues es composición de medibles. □

Definición 93. Para $f : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible positiva, definimos

$$\int_{\mathcal{X}} f d\mu = \sup \left\{ \int_{\mathcal{X}} g : g \in S_+(\mathcal{X}, \mathcal{F}), 0 \leq g \leq f \right\}$$

Para definir la integral sobre toda la clase de funciones medibles, separamos a cada función en sus partes positiva y negativa.

Definición 94. Sea $f : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Definimos su parte positiva f^+ y parte negativa f^- por

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Observación. El lector puede verificar las descomposiciones $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$

Observación. Si f es medible, entonces f^+ y f^- también lo son.

Definición 95. Para $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medibles, definimos

$$\int_{\mathcal{X}} f d\mu = \int_{\mathcal{X}} f^+ d\mu - \int_{\mathcal{X}} f^- d\mu,$$

donde las integrales en el lado derecho son sobre funciones medibles positivas, y por ende ya están definidas.

Definición 96. Dado un espacio de medida $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$, decimos que una función medible $f : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es μ -integrable cuando

$$\int_{\mathcal{X}} |f| d\mu < +\infty$$

A continuación exhibimos ciertas propiedades útiles de la integral.

Proposición 97. Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida y $f, g : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones μ -integrables.

1. Monotonicidad: Si $f \leq g$ entonces $\int_{\mathcal{X}} f d\mu \leq \int_{\mathcal{X}} g d\mu$
2. Linealidad: $\int_{\mathcal{X}} (af + bg) d\mu = a \int_{\mathcal{X}} f d\mu + b \int_{\mathcal{X}} g d\mu$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$
3. $|\int_{\mathcal{X}} f d\mu| \leq \int_{\mathcal{X}} |f| d\mu$

Observación. La integrabilidad, como bien dice el término, garantiza que la

integral de f está bien comportada. Como $-|f| \leq f \leq |f|$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} -|f|d\mu &\leq \int_{\mathcal{X}} f d\mu \leq \int_{\mathcal{X}} |f|d\mu \\ -\int_{\mathcal{X}} |f|d\mu &\leq \int_{\mathcal{X}} f d\mu \leq \int_{\mathcal{X}} |f|d\mu \end{aligned}$$

y por ende $\int_{\mathcal{X}} f d\mu \in \mathbb{R}$

A parte de poder definir la integral sobre ellas, una gran ventaja de las funciones medibles es que podemos inducir medidas en el espacio de llegada a través de ellas.

Definición 98. Push-forward de medidas. Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida y $(\mathcal{Y}, \mathcal{G})$ espacio medible y $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ medible. Definimos la medida push-forward en $(\mathcal{Y}, \mathcal{G})$, denotada $T_{\#}\mu$, de la siguiente forma:

$$(T_{\#}\mu)(A) = \mu(T^{-1}(A)), \forall A \in \mathcal{G}.$$

Ese concepto nos permite establecer una resultado análogo al famoso teorema de cambio de variables del cálculo integral.

Teorema 99. Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ y $(\mathcal{Y}, \mathcal{G})$ espacios medibles. Sean μ medida en $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ y $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ medible, y defina $\nu = T_{\#}\mu$ medida en $(\mathcal{Y}, \mathcal{G})$. Si $f : \mathcal{Y} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es ν -integrable, entonces $f \circ T$ es μ -integrable y se cumple

$$\int_{\mathcal{X}} f \circ T d\mu = \int_{\mathcal{Y}} f d\nu.$$

Terminamos los fundamentos de teoría de la medida definiendo los conceptos de medida producto, medida absolutamente continua respecto a otra, y enunciando el Teorema de Radon-Nikodym. Cabe mencionar que hemos omitido en esta presentación de teoría de la medida varios resultados clásicos como el Teorema de la Convergencia Monótona, Dominada o el Lema de Fatou, [Gall \(2022\)](#).

Definición 100. Dados $(\mathcal{X}_1, \mathcal{F}_1)$, $(\mathcal{X}_2, \mathcal{F}_2)$, ..., $(\mathcal{X}_K, \mathcal{F}_K)$, definimos sobre el producto cartesiano $X_1 \times \dots \times X_k$ el σ -álgebra producto $\mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_k$ como el σ -álgebra generado por las cajas.

$$\mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_k = \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_k : A_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, A_k \in \mathcal{F}_k\}).$$

Definición 101. Diremos que una medida ν sobre $(\mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_k, \mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_k)$ es una medida producto de μ_1, \dots, μ_k si

$$\nu(A_1 \times \dots \times A_k) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_k(A_k)$$

Las medidas producto siempre existen, pues las podemos construir a partir de la condición 98 haciendo uso de herramientas de teoría de la medida que no mencionaremos. Sin embargo, bajo la siguiente condición podemos asegurar que existe una única medida producto.

Definición 102. Dado $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$ decimos que μ es σ -finita cuando existe $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\mathcal{X} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n,$$

con $\mu(A_n) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$.

Observación. Las medidas finitas son σ -finitas.

Proposición 103. Si μ_1, \dots, μ_k son σ -finitas, entonces existe una única medida producto $\mu_1 \times \dots \times \mu_k$.

Definición 104. Dadas dos medidas μ, ν en un espacio medible $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$, decimos que ν es absolutamente continua respecto a μ , denotado por $\nu \ll \mu$, cuando

$$\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0, \forall A \in \mathcal{F}.$$

Teorema 105. Radon-Nikodym para medidas positivas. Dado un espacio medible positiva $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$, dos medidas σ -finitas $\mu, \nu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$ con $\nu \ll \mu$, existe una función medible f sobre $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ que satisface

$$\nu(A) = \int_{\mathcal{X}} \mathbf{1}_A f d\mu, \forall A \in \mathcal{F}. \quad (95)$$

Definición 106. Derivada de Radon-Nikodym. En (95), la función f se conoce como derivada de Radon-Nikodym y escribimos $f = \frac{d\nu}{d\mu}$.

Proposición 107. Sean μ, ν, γ medidas en $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$. Se cumplen:

1. Linealidad: Si $\nu, \gamma \ll \mu$ entonces $\nu + \gamma \ll \mu$ y se cumple

$$\frac{d(a\nu + b\gamma)}{d\mu} = a \frac{d\nu}{d\mu} + b \frac{d\gamma}{d\mu}$$

2. Conmutatividad: Si $\gamma \ll \nu$ y $\nu \ll \mu$ entonces $\gamma \ll \mu$ y se cumple

$$\frac{d\gamma}{d\mu} = \frac{d\gamma}{d\nu} \frac{d\nu}{d\mu}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Habiendo establecido las bases de la teoría de la medida, nos enfocamos ahora en brindar los resultados básicos de teoría de la probabilidad a los que se ha hecho referencia y han sido usados en diferentes partes de este documento.

C. Teoría de la probabilidad

Definición 108. Sea μ una medida en el espacio medible (Ω, \mathcal{F}) . Decimos que \mathbb{P} es una **medida de probabilidad** si $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. En este contexto, decimos que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un **espacio de probabilidad**.

Ejemplo 109. Para cada $\omega \in \Omega$, como ya se vio, δ_ω es una medida de probabilidad

Definición 110. Sea Ω un conjunto finito con $|\Omega| = N$ y \mathcal{F} la familia (finita) de todos los subconjuntos de X . Definimos la distribución uniforme $\mu = Unif(\Omega)$ por

$$\mu(A) = \frac{|A|}{N} \quad \forall A \subset \Omega$$

Ejemplo 111. Si $\mu = Unif\{1, 2, 3, 4, 5\}$, entonces $\mu(\{1, 3, 4\}) = \frac{3}{5}$

Definición 112. Para cada espacio medible (Ω, \mathcal{F}) , definimos $\mathcal{P}(\Omega)$ como el conjunto de todas sus medidas de probabilidad.

Definición 113. Para cada $\mathcal{X} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$, definimos el σ -álgebra de los borelianos en X por

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}} := \{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} : A \subset \mathcal{X}\}.$$

Sobre este, si además $\mathcal{L}(\mathcal{X}) < +\infty$, definimos la medida $\mu = Unif(\mathcal{X})$ por

$$\mu(A) = \frac{\mathcal{L}(A)}{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \quad \forall A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}.$$

Definición 114. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, una variable aleatoria es una función Borel-medible $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. De forma más general, un vector aleatorio es una función Borel-medible $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ en algun espacio euclideo.

Definición 115. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Decimos que el vector aleatorio $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tiene distribución o ley $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ cuando $\mu = X_{\#}\mathbb{P}$. Del mismo modo, la ley de un vector aleatorio es su medida push-forward $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$

Observación. La ley de X nos dice cómo se distribuyen los valores que toma dicho vector. Por definición, para cada $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ tenemos $\mu(A) = \mathbb{P}\{X \in A\}$, donde denotamos $\{X \in A\} = X^{-1}(A)$. Por ejemplo, en el caso $d = 1$, $\mu([0, 1])$ indica con qué probabilidad ocurre $0 \leq X \leq 1$.

Definición 116. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad y $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria con ley $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Definimos la función de distribución $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ por

$$F_X(s) = \mathbb{P}\{X \leq s\} \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Esto es equivalente a $F_X(s) = \mu((-\infty, s])$, por lo que la función de distribución depende de sólo de la ley de X .

Definición 117. Dado el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y una variable aleatoria $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ integrable, definimos el valor esperado como la integral de X . Escribimos

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] = \int_{\Omega} X d\mathbb{P}.$$

El siguiente resultado es el teorema 99 expresado en el lenguaje de probabilidad.

Teorema 118. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad y $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ vector aleatorio con ley $\mu = X_{\#}\mathbb{P}$. Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ función Borel-medible. Entonces $f(X) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria integrable si y solo si f es μ -integrable, y se cumple

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(X)] = \mathbb{E}_{\mu}[f]$$

Definición 119. Sean μ y ν medidas en un espacio medible $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$. Cuando $\nu \ll \mu$, decimos que la derivada de Radon-Nykodim $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ es la densidad de ν respecto a μ .

Proposición 120. En el contexto de la definición anterior, para cada $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ medible y μ -integrable tenemos

$$\mathbb{E}_\mu[h(x)] = \mathbb{E}_\nu[h(x)f(x)]$$

Proposición 121. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de probabilidad. Para cada función Borel-medible positiva $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $\mathbb{E}_\mu[f] = 1$, la fórmula

$$\nu(A) = \int_{\Omega} 1_A f d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

define una medida de probabilidad $\nu \in \mathcal{P}(\Omega)$ que cumple $\nu \ll \mu$.

Definición 122. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad y considere un evento $A \in \mathcal{F}$. Decimos que A ocurre \mathbb{P} -casi seguramente (abreviado \mathbb{P} -c.s.) cuando $\mathbb{P}(A) = 1$. Sin embargo, puede ocurrir que dicho conjunto no sea medible. En ese caso, pedimos que exista un $B \in \mathcal{F}$ de probabilidad uno tal que $B \subset A$.

En la práctica A es el conjunto donde se cumple una cierta condición que depende de $\omega \in \Omega$, y decimos que la condición ocurre \mathbb{P} -casi seguramente. Por ejemplo, si tenemos la variable aleatoria X , decimos que $X > 0$ \mathbb{P} -c.s. cuando $\mathbb{P}\{X > 0\} = 1$.

Teorema 123. Desigualdad de Jensen. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, X variable aleatoria integrable y $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. Entonces

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\varphi(X)] \geq \varphi(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X])$$

con igualdad si y sólo si φ es una función afín o X es una constante \mathbb{P} -casi seguramente.

Definición 124. Considere dos vectores aleatorios $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Decimos que X, Y son independientes cuando

$$\mathbb{P}\{X \in A, Y \in B\} = \mathbb{P}\{X \in A\}\mathbb{P}\{Y \in B\}, \quad \forall A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$$

De forma más general, considere una colección $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ de vectores aleatorios en \mathbb{R}^d , con \mathcal{I} finito o infinito. Decimos que los $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ son independientes

cuando:

$$\mathbb{P}\{X_{i_1} \in A_1, \dots, X_{i_n} \in A_n\} = \mathbb{P}\{X_{i_1} \in A_1\} \times \dots \times \mathbb{P}\{X_{i_n} \in A_n\},$$

para todo subconjunto de índices finito $\{i_1, \dots, i_n\} \subset \mathcal{I}$ y para todo $A_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$.

Definición 125. Decimos que los vectores aleatorios $\{X_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ son independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d) cuando son independientes y todos tienen la misma ley $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 126. Ley Fuerte de los Grandes Números Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d. e integrables. Entonces

$$\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_1]$$

\mathbb{P} -casi seguramente.

Observación. Ser idénticamente distribuidos implica que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_1] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_i]$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Además, la convergencia \mathbb{P} -casi seguramente indica que el conjunto $\{\omega \in \Omega : \frac{1}{n}(X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)) \rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_1]\}$ es o contiene a un conjunto medible de probabilidad uno.

Así como existen distintos tipos de convergencia de funciones, como la convergencia puntual o la convergencia uniforme, también las hay para medidas de probabilidad. Nos centramos en convergencia de probabilidades en $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$.

Definición 127. Sea $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ y $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Decimos que $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente³⁰ cuando

$$\mu_n(A) \rightarrow \mu(A), \quad \forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$$

Decimos que $\mu_n \rightarrow \mu$ puntualmente.

Definición 128. Sea $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ y $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Decimos que $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge debilmente a μ cuando

³⁰En inglés *setwise convergence*, traducido como convergencia conjunto a conjunto, es un nombre más apropiado.

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu, \quad \forall \varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$$

donde $C_b(\mathbb{R}^d)$ es el conjunto de todas las funciones $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continuas y acotadas. Denotamos esta convergencia por $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$

Proposición 129. $\mu_n \rightarrow \mu$ puntualmente implica $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

Pasamos ahora a conceptos vinculados a la teoría del transporte óptimo. Comenzamos por el concepto de espacio polaco. Es en ellos que se contruye gran parte de la teoría.

Definición 130. Decimos que un espacio métrico (\mathcal{X}, d) es *polaco* cuando es completo y separable.

Para las definiciones posteriores seguimos a [Villani \(2009\)](#).

Definición 131. Sea (\mathcal{X}, d) un espacio polaco y $p \in [1, +\infty)$. Para cada $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$, definimos la distancia de Wasserstein de orden p entre μ y ν por

$$\mathcal{W}_p(\mu, \nu) = \left(\inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{\mathcal{X}} d(x, y)^p d\pi \right)^{\frac{1}{p}}$$

Esta no es una métrica todavía, pues puede tomar el valor $+\infty$. Para que lo sea, debemos tomarla en el siguiente espacio.

Definición 132. Sea (\mathcal{X}, d) un espacio polaco y $p \in [1, +\infty)$. Definimos el espacio de Wasserstein de orden p por

$$\mathcal{P}_p(\mathcal{X}) = \left\{ \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) : \int_{\mathcal{X}} d(x_0, x)^p d\mu < +\infty \right\},$$

donde $x_0 \in \mathcal{X}$ es arbitrario y el espacio $\mathcal{W}_p(\mathcal{X})$ no depende de la elección del x_0 .

Definición 133. Sea (\mathcal{X}, d) un espacio polaco, $p \in [1, +\infty)$, $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ y $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en $\mathcal{P}(\mathcal{X})$. Decimos que μ_n converge debilmente en $\mathcal{P}_p(\mathcal{X})$ cuando $\mu_k \xrightarrow{w} \mu$ y

$$\int_{\mathcal{X}} d(x_0, x)^p d\mu_n \rightarrow \int_{\mathcal{X}} d(x_0, x)^p d\mu$$

para algún $x_0 \in \mathcal{X}$. Denotamos $\mu_n \xrightarrow{\mathcal{P}_p} \mu$. De hecho, si se cumple para un $x_0 \in \mathcal{X}$ se cumple para cualquier elección de x_0 .

Teorema 134. Sea (\mathcal{X}, d) espacio polaco y $p \in [1, +\infty)$. Entonces la topología inducida por la métrica \mathcal{W}_p en \mathcal{P}_p es la topología de la convergencia débil en $\mathcal{P}_p(\mathcal{X})$. Esto es,

$$\mathcal{W}(\mu_n, \mu) \rightarrow 0 \leftrightarrow \mu_n \xrightarrow{\mathcal{P}_p} \mu$$

D. Elementos de análisis convexo

A continuación, recordamos algunos elementos fundamentales del análisis convexo que serán de utilidad para probar un Lema necesario para la prueba de la convergencia del algoritmo SISTA.

Definición 135. Una función $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, S convexo no vacío, es convexa si para cualesquiera $x, y \in S$

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y), \quad \theta \in [0, 1].$$

Teorema 136. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, abierto y convexo. Entonces, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si y solamente si

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)(y - x), \quad \forall x, y \in S. \quad (96)$$

Demostración. \implies Si f es estrictamente convexa sobre S , por la Definición 135

$$\begin{aligned} f(\theta y + (1 - \theta)x) &\leq \theta f(y) + (1 - \theta)f(x) \\ f(x + \theta(y - x)) &\leq f(x) + \theta(f(y) - f(x)) \\ f(x + \theta(y - x)) - f(x) &\leq \theta(f(y) - f(x)) \\ f(x) + \frac{f(x + \theta(y - x)) - f(x)}{\theta} &\leq f(y). \end{aligned}$$

Luego, como f es diferenciable, haciendo $\theta \rightarrow 0$

$$f(x) + \underbrace{\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \theta(y - x)) - f(x)}{\theta}}_{df_x(v) = \nabla f(v)^T = \nabla f(y - x)^T} \leq f(y).$$

\Leftarrow Como (96) vale para cualesquiera x, y , definamos $z = \theta x + (1 - \theta)y$

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(z) + \nabla f(z)^T(x - z) \\ f(y) &\geq f(z) + \nabla f(z)^T(y - z). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \theta f(x) &\geq \theta f(z) + \theta \nabla f(z)^T(x - z) \\ (1 - \theta)f(y) &\geq (1 - \theta)f(z) + (1 - \theta)\nabla f(z)^T(y - z). \end{aligned}$$

Sumando,

$$\begin{aligned} \theta f(x) + (1 - \theta)f(y) &\geq f(z) + \nabla f(z)^T(\theta x + (1 - \theta)y - z) \\ &= f(z). \end{aligned}$$

□

Corolario 137. Se cumple que, dada f en el contexto del Teorema 136, si f es convexa, entonces

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T(x - y) \geq 0.$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) \\ f(x) &\geq f(y) + \nabla f(y)^T(x - y). \end{aligned}$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned} f(y) + f(x) &\geq f(x) + f(y) + \nabla f(x)^T(y - x) + \nabla f(y)^T(x - y) \\ 0 &\geq \nabla f(x)^T(y - x) + \nabla f(y)^T(x - y) \\ 0 &\geq -\nabla f(x)^T(x - y) + \nabla f(y)^T(x - y). \end{aligned}$$

Así

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T(x - y) \geq 0.$$

□

Definición 138. Una función f , en el contexto del Teorema 136, es fuertemente convexa si para cualesquiera $x, y \in S$ y algún $\theta > 0$

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\theta}{2} \|x - y\|^2.$$

Observación. Trabajamos con $\|\cdot\|_2$.

Observación. Intuitivamente, la convexidad fuerte nos dice que existe una cota inferior cuadrática. Esto implica directamente la convexidad de la función. Notemos además que esto implica directamente la convexidad de la función (4).

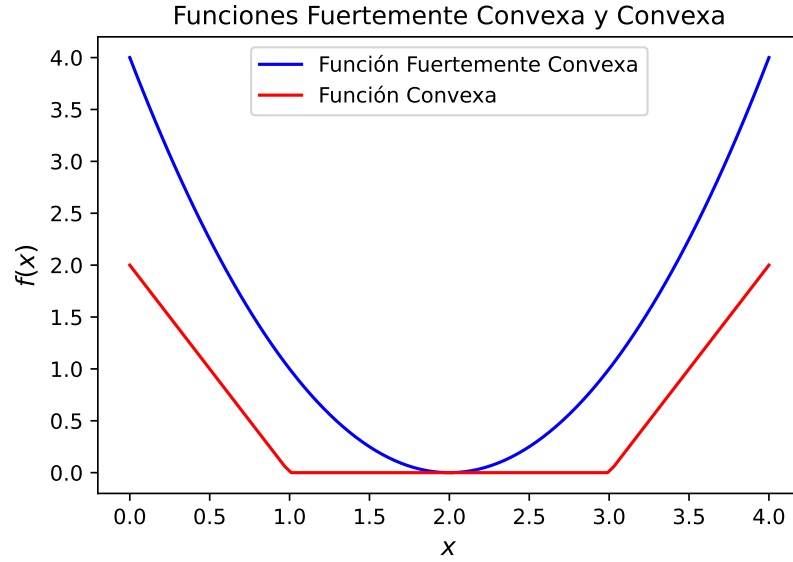


Figura 13: Fuertemente convexa y convexa.

Lema 139. Las siguientes condiciones son equivalentes para una función diferenciable f fuertemente convexa, con $\theta > 0$

- a) $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\theta}{2}\|y - x\|^2$.
- b) $g(x) = f(x) - \frac{\theta}{2}\|x\|^2$ es convexa.
- c) $(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T(x - y) \geq \theta\|x - y\|^2$.
- d) $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) - \frac{\alpha(1 - \alpha)\theta}{2}\|x - y\|^2$, $\alpha \in (0, 1)$.

Demostración. Vamos a probar $(a) \Leftrightarrow (b)$, $(b) \Leftrightarrow (c)$ y $(b) \Leftrightarrow (d)$.

1. (a) \Leftrightarrow (b) Si g es convexa,

$$g(y) \geq g(x) + \nabla g(x)^T(y - x).$$

Luego

$$f(y) - \frac{\theta}{2}\|y\|^2 \geq f(x) - \frac{\theta}{2}\|x\|^2 + \nabla^T f(x)(y - x) - \theta x(y - x).$$

Esto pues, $\frac{\theta}{2}\|x\|^2 = \frac{\theta}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2$. Luego, agrupando términos,

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(x) + \frac{\theta}{2}(\|y\|^2 - \|x\|^2) + \nabla^T f(x)(y - x) - \theta x(y - x) \\ f(x) + \frac{\theta}{2}(\|y\|^2 - \|x\|^2) + \nabla^T f(x)(y - x) + \theta\|x\|^2 - \theta xy \\ &= f(x) + \frac{\theta}{2}(\|y\|^2 + \|x\|^2) + \nabla^T f(x)(y - x) - \theta xy \\ &= f(x) + \nabla^T f(x)(y - x) + \underbrace{\left[\frac{\theta}{2}(\|y\|^2 + \|x\|^2) - \theta xy \right]}_{= \frac{\theta}{2}\|x - y\|^2} \\ &= f(x) + \nabla^T f(x)(y - x) + \frac{\theta}{2}\|x - y\|^2. \end{aligned}$$

2. (b) \Leftrightarrow (c) Como g es convexa diferenciable, por el Corolario 137

$$(\nabla f(x) - \theta x - \nabla f(y) + \theta y)^T(x - y) \geq 0.$$

Entonces,

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T(x - y) + \theta(y - x)^T(x - y) \geq 0.$$

Así,

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T(x - y) \geq \theta \underbrace{(x - y)^T(x - y)}_{= \|x - y\|^2}.$$

3. (b) \Leftrightarrow (d) De la convexidad de g

$$\begin{aligned} g(\alpha x + (1 - \alpha)y) &\leq f(\alpha x + (1 - \alpha)y) - \frac{\theta}{2}\|\alpha x + (1 - \alpha)y\|^2 \\ &\leq \alpha f(x) - \frac{\alpha\theta}{2}\|x\|^2 + (1 - \alpha)f(y) - \frac{(1 - \alpha)\theta}{2}\|y\|^2. \end{aligned}$$

Ahora bien, estas desigualdades implican que

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \frac{\theta}{2}\|\alpha x + (1 - \alpha)y\|^2 + \alpha f(x) - \frac{\alpha\theta}{2}\|x\|^2 + (1 - \alpha)f(y) - \frac{(1 - \alpha)\theta}{2}\|y\|^2.$$

Analicemos el término

$$\frac{\theta}{2} \|\alpha x + (1 - \alpha)y\|^2 - \frac{\alpha\theta}{2} \|x\|^2 - \frac{(1 - \alpha)\theta}{2} \|y\|^2.$$

Por la convexidad de la norma

$$\frac{\theta}{2} (\alpha \|x\| + (1 - \alpha)\|y\|)^2 - \frac{\alpha\theta}{2} \|x\|^2 - \frac{(1 - \alpha)\theta}{2} \|y\|^2.$$

Desarrollando,

$$\frac{\theta}{2} (\alpha^2 \|x\|^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\|x\| \cdot \|y\| + (1 - \alpha)^2 \|y\|^2) - \frac{\alpha\theta}{2} \|x\|^2 - \frac{(1 - \alpha)\theta}{2} \|y\|^2.$$

Factorizamos todo por $\theta/2$

$$\frac{\theta}{2} [\alpha(\alpha - 1)(\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \cdot \|y\|)] \leq \frac{\theta}{2} \alpha(\alpha - 1) \|x - y\|^2.$$

Con esto concluimos.

□

La teoría del análisis convexo es bastante extensa y útil en economía. No ahondamos más en este tema pero recomendamos al lector consultar [Ok \(2007\)](#) o [Florenzano and le Van \(2001\)](#) para profundizar en estos temas. Solo hemos presentado aquello estrictamente necesario, es decir, aquello a lo que se ha aludido en el texto. Continuamos con el apéndice de análisis funcional que, en cierta forma, es un preámbulo al último apéndice. Este último se encuentra fuertemente vinculado con los desarrollo de la Sección 5 y presenta resultados no tan estándares en la literatura.

E. Elementos de análisis funcional

A continuación algunos elementos de análisis funcional, necesarios para poder llegar a la 1era forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach, de la cual se hace uso en la Sección 5. Los siguientes enunciados y pruebas vienen fundamentalmente de [Botelho et al. \(2023\)](#). No se han incorporado modificaciones sustanciales.

Definición 140. Sea V un espacio vectorial no nulo. Un hiperplano V es un subespacio $W \neq V$ tal que, si W_1 es subespacio de V , $W \subset W_1$, entonces $W_1 = V$ o $W = V$.

Proposición 141. Sea $V \neq \{0\}$ espacio vectorial, W subespacio de V . Entonces, W es un hiperplano de V si y solo si existe $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ funcional lineal tal que $W = \ker(\varphi)$.

Demostración. \Rightarrow Sea $W \subset V$ hiperplano y sea $v_0 \in V - W$ y $W_1 = W + [v_0] \neq W$. Luego, $V = W_1$. Así, tenemos

$$\begin{aligned}\varphi : W_1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ w + av_0 &\rightarrow a\end{aligned}$$

que es lineal, $\varphi \neq 0$ y $\ker(\varphi) = W$. \Leftarrow Ahora, sea $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ funcional lineal no nulo y $W = \ker(\varphi)$. Sea W_1 subespacio de V tal que $W \subseteq W_1$ pero $W \neq W_1$ y sea $v_0 \in W_1 - W$. Dado $v \in V$, considere

$$u = v - \frac{\varphi(v)}{\varphi(v_0)}v_0 \in \ker(\varphi) = W.$$

Luego, $v \in W_1$ pues $W \subset W_1$. Así, $W_1 = V$. \square

Definición 142. Si H es un hiperplano de V y $v_0 \in V$, el conjunto

$$H + v_0 = \{v + v_0 : v \in H\}$$

es llamado hiperplano afín. Por la Proposición (141), los hiperplanos afines son de la forma

$$[\varphi = a] = \{v \in V : \varphi(v) = a\}$$

donde φ es un funcional lineal.

Proposición 143. Un hiperplano $[\varphi = a]$ es cerrado si y solamente si φ es continuo.

Demostración. \Leftarrow Como φ es continua, entonces $[\varphi = a] = \varphi^{-1}\{a\}$ es cerrado. \Rightarrow Sea $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ funcional lineal no nulo y $H = [\varphi = a]$ cerrado. Como $V - H$ es abierto y no vacío, si $x_0 \in V - H$, existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset V - H$. Tenemos que $\varphi(x_0) \neq a$. S.p.d.g. digamos que $\varphi(x_0) < a$. Probaremos que $\varphi(x) < a$ para todo $x \in B(x_0, r)$. Supongamos que no, y que existe x_1 tal que $\varphi(x_1) > a$ con $x_1 \in B(x_0, r)$. Tomemos

$$t = \frac{\varphi(x_1) - a}{\varphi(x_1) - \varphi(x_0)} < 1.$$

Luego,

$$tx_0 + (1-t)x_1 \in B(x_0, r)$$

y

$$\begin{aligned}\varphi(tx_0 + (1-t)x_1) &= t\varphi(x_0) + (1-t)\varphi(x_1) \\ &= \varphi(x_1) + t(\varphi(x_0) - \varphi(x_1)) \\ &= \varphi(x_1) - \varphi(x_1) + a = a,\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción: $B(x_0, r) \subset V - H$. De ahí,

$$\varphi(x_0) + r\varphi(z) = \varphi(x_0 + rz) < a, \quad \forall z \in V, \|z\| < 1.$$

O sea,

$$\frac{\varphi(x_0) - a}{r} < \varphi(z) < \frac{a - \varphi(x_0)}{r}.$$

Haciendo $z \rightarrow -z$ ($\| -z \| < 1$)

$$\|\varphi\| < \frac{a - \varphi(x_0)}{r},$$

y así, φ es continua. □

Definición 144. Funcional de Minkowski. Sea C un subconjunto convexo y abierto con $0 \in C$, de un espacio normado. La aplicación

$$P_C : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow \inf \left\{ a > 0 : \frac{x}{a} \in C \right\}$$

es llamada funcional de Minkowski de C .

Proposición 145. Tenemos las siguientes propiedades:

1. $P_C(bx) = bP_C(x)$, $\forall b > 0$ y $x \in E$.
2. $C = \{x \in E : P_C(x) < 1\}$.
3. Existe $M > 0$ tal que $0 \leq P_C(x) \leq M\|x\|$, $\forall x \in E$.
4. $P_C(x + y) \leq P_C(x) + P_C(y)$, $\forall x, y \in E$.

Demostración. Inciso por inciso:

1. Por definición,

$$\begin{aligned} P_C(bx) &= \inf \left\{ a > 0 : \frac{bx}{a} \in C \right\} \\ &= \inf \left\{ ba > 0 : \frac{x}{a} \in C \right\} \\ &= bP_C(x). \end{aligned}$$

2. Como C es abierto, para todo $x \in C$, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $(1 + \varepsilon)x \in B[x, \varepsilon\|x\|] \subset C$ (bola cerrada). Luego, $x(1 + \varepsilon) \in C$. Por ende $P_C(x) \leq (1 + \varepsilon)^{-1} < 1$. Recíprocamente, si $P_C(x) < 1$, entonces existe $0 < a < 1$ tal que $\frac{x}{a} \in C$:

$$x = a \left(\frac{x}{a} \right) + (1 - a)0 \in C.$$

3. Sea $r > 0$ tal que $B(0, r) \subset C$. Para $0 < s < r$ tenemos

$$s \frac{x}{\|x\|} \in C, \forall x \in E - \{0\}.$$

Luego,

$$\frac{s}{\|x\|} P_C(x) = P_C \left(\frac{s}{\|x\|} x \right) < 1.$$

Entonces, $P_C(x) < \frac{1}{s} \|x\|$, $1/s = M$.

4. Dado $\varepsilon > 0$ veamos que $\frac{x}{P_C(x) + \varepsilon} \in C$. Por el inciso (a)

$$P_C \left(\frac{x}{P_C(x) + \varepsilon} \right) = \frac{1}{P_C(x) + \varepsilon} P_C(x) < 1.$$

Por ende, de (b) se tiene que $\frac{x}{P_C(x) + \varepsilon} \in C$. Análogamente $\frac{y}{P_C(y) + \varepsilon} \in C$.

Sea

$$0 < t = \frac{P_C(x) + \varepsilon}{P_C(x) + P_C(y) + \varepsilon} < 1.$$

Tenemos

$$\frac{x + y}{P_C(x) + P_C(y) + 2\varepsilon} = t \frac{x}{P_C(x) + \varepsilon} + (1 - t) \frac{y}{P_C(y) + \varepsilon} \in C.$$

Luego,

$$\frac{1}{P_C(x) + P_C(y) + 2\varepsilon} P_C(x + y) = P_C \left(\frac{x + y}{P_C(x) + P_C(y) + 2\varepsilon} \right) < 1.$$

Así

$$P_C(x + y) < P_C(x) + P_C(y) + 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

Por lo tanto,

$$P_C(x+y) \leq P_C(x) + P_C(y), \forall x, y \in E.$$

□

Lema 146. Sea C convexo, abierto, propio y no vacío de un espacio normado E y $x_0 \in E - C$. Entonces, $\exists \varphi \in E'$ tal que $\varphi(x) < \varphi(x_0)$, $\forall x \in C$.

Demostración. Supongamos que $0 \notin C$, sea $z_0 \in C$ y considere $0 \in D = C - z_0$ y $y_0 = x_0 - z_0$. Tenemos que $y_0 \notin D$ (pues $x_0 \notin C$), es convexo, no vacío y abierto. Podemos entonces considerar el funcional de Minkowski P_D . Definimos $G = [y_0]$ y

$$\begin{aligned} g : G &\rightarrow \mathbb{R} \\ ty_0 &\rightarrow tP_D(y_0) \end{aligned}$$

es un funcional lineal. Como

$$\begin{aligned} \forall t > 0 : g(ty_0) &= tP_D(y_0) = P_D(ty_0) \\ t \leq 0 : g(ty_0) &= tP_D(y_0) \leq 0 \leq P_D(ty_0) \end{aligned}$$

tenemos

$$g(x) \leq P_D(x), \forall x \in G.$$

Por el Teorema de Hahn-Banach existe $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ $\varphi|_G = g$ y $\varphi(x) \leq P_D(x)$, $\forall x \in E$. Luego, sabemos que existe $M > 0$ tal que $\varphi(x) \leq P_D(x) \leq M\|x\|$. Esto es, φ es continua. Para todo $x \in D$ se tiene $\varphi(x) \leq P_D(x) < 1$. Como $P_D(y_0) \geq 1$ luego

$$\begin{aligned} \varphi(y) &< 1 \leq P_D(y_0) = g(y_0) = \varphi(y_0) = \varphi(x_0 - z_0), \forall y \in D = C - z_0 \\ \varphi(x) &= \varphi(x - z_0) + \varphi(z_0) < \varphi(x_0 - z_0) + \varphi(z_0) = \varphi(x_0), \forall x \in C. \end{aligned}$$

En caso $0 \in C$, tomamos $z_0 = 0$.

□

Lema 147. Sean E un espacio normado, $\varphi \in E' - \{0\}$ continuo, y $C \subset E$ convexo, abierto y no vacío. Entonces, $\varphi(C)$ es un intervalo abierto.

Demostración. Como $\varphi \neq 0$ entonces φ es sobreyectiva y $\varphi(C)$ es un intervalo (pues debe ser conexo al ver C convexo, i.e., en particular conexo). Suponga que $\varphi(C)$ esté limitado superiormente por $a \in \varphi(C)$. Sea entonces $x \in C$ tal que $\varphi(x) = a$ y $\varphi(y) \leq a$ para todo $y \in C$. Como C es abierto, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset C$. Sea $z \in E - \{0\}$. Entonces

$$x + \frac{\varepsilon}{2\|z\|}z \in B(x, \varepsilon) \subset C.$$

Luego,

$$a \geq \varphi\left(x + \frac{\varepsilon}{2\|z\|}z\right) = \varphi(x) + \frac{\varepsilon}{2\|z\|}\varphi(z) = a + \frac{\varepsilon}{2\|z\|}\varphi(z)$$

por lo que $\varphi(z) \leq 0$, $\forall z \in E$ (contradicción pues φ es sobreyectiva). \square

Teorema 148. Primera forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach.

Sean A y B subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos del espacio normado E . Si A es abierto entonces existen un funcional $\varphi \in E'$ y $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(x) < a \leq \varphi(y), \forall x \in A, y \in B$$

se dice que el hiperplano cerrado $[\varphi = a]$ separa A y B .

Demostración. Consideremos el conjunto $C = A - B$:

1. C es abierto pues $C = \bigcup_{b \in B} (A - \{b\})$.
2. C es convexo: para todo $x_1, x_2 \in A$ y $y_1, y_2 \in B$ y $0 < t < 1$

$$t(x_1 - y_1) + (1 - t)(x_2 - y_2) = (tx_1 + (1 - t)x_2) - (ty_1 + (1 - t)y_2) \in A - B$$
3. $\emptyset \neq C$, $0 \notin C$ pues $A \cap B = \emptyset$, luego $C \neq E$.

Por el Lema (146) existe $\varphi \in E'$ tal que

$$\varphi(z) < \varphi(0) = 0, \forall z \in C.$$

Luego,

$$\varphi(x) + \varphi(x - y) + \varphi(y) < \varphi(y), \forall x \in A, \forall y \in B \quad (97)$$

y como $B \neq \emptyset$, de esta desigualdad $\varphi(A)$ es acotado y así $a = \sup \varphi(A) \in \mathbb{R}$.

Por ende, $\varphi(A) \subset (-\infty, a]$. De (97)

$$a \leq \varphi(y), \forall y \in B.$$

Finalmente, por el Lema (147)

$$\varphi(x) < a, \forall a \in A.$$

□

Antes de concluir con esta sección, es necesario hacer mención del siguiente Teorema pues, es usado en la prueba de la Proposición 157. En nuestro contexto, nos hemos limitado a $H = \mathbb{R}^d$.

Teorema 149. Teorema de Riesz-Fréchet. Sea H un espacio de Hilbert y $\varphi : H \rightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal continuo. Entonces, existe un único $y_0 \in H$ tal que

$$\varphi(x) = \langle x, y_0 \rangle, \forall x \in H.$$

Además de ello, $\|\varphi\| = \|y_0\|$.

Antes de pasar al último apéndice, unas breves definiciones que, implícitamente se usaron en los preliminares de la prueba del Teorema 24.

Definición 150. Sean X, Y espacios de Banach normados y $f : X \rightarrow Y$. Diremos que f es Fréchet diferenciable en $x_0 \in X$ si existe una transformación lineal $T : X \rightarrow Y$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - T(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

En dicho caso, $f'(x_0)$ es la derivada de Fréchet en x_0 .

Corolario 151. Si X es un espacio de Hilbert sobre \mathbb{R} y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, entonces, si la derivada de Fréchet en $x \in X$ existe, es un funcional lineal continuo. Por el Teorema 149, existe $u \in X$ tal que $f'(x)(h) = \langle h, u \rangle$ para todo $h \in X$. Dicho vector u se conoce como el vector gradiente $\nabla f(x)$. De este modo,

$$f'(x)(h) = \langle h, \nabla f(x) \rangle, \forall h \in X.$$

F. Subgradiientes y subdiferencial

Terminamos con el anexo sobre los subgradiientes y subdiferenciales, conceptos que aparecieron más de una vez en la Sección 5.

Dada $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexa y diferenciable, se cumple que

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x). \quad (98)$$

¿Y si f no es diferenciable? A continuación estudiamos la teoría de los subdiferenciales que, de cierta forma, permiten extender y generalizar (98).

Definición 152. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. El epígrafo de f es el conjunto

$$\mathcal{E}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq y\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

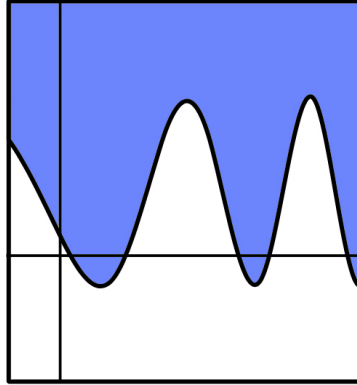


Figura 14: Epígrafo.

Definición 153. Diremos que z soporta el epígrafo de f en $(x_0, f(x_0))$ si, $\forall (y, t) \in \mathcal{E}(f)$ si

$$z^T \left[\underbrace{p}_{(y,t)} - \underbrace{p_0}_{(x_0, f(x_0))} \right] \leq 0.$$

Corolario 154. Si f es convexa y diferenciable en x_0 , el vector $(\nabla f(x_0), -1)$ soporta el epígrafo de f en $(x_0, f(x_0))$.

Demostración. Simplemente verificamos que, dado $(y, t) \in \mathcal{E}(f)$,

$$\begin{bmatrix} \nabla f(x_0) \\ -1 \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} y - x_0 \\ t - f(x_0) \end{pmatrix} = \nabla f(x_0)(y - x_0) - t + f(x_0) \leq 0.$$

En efecto, como $(y, t) \in \mathcal{E}(f)$, inmediatamente $f(y) \leq t$ y, de (98) se tiene la otra desigualdad. \square

Definición 155. $g \in \mathbb{R}^n$ es un subgradiente de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en x si

$$f(y) \geq f(x) + g^T(y - x), \forall y.$$

Observación. Por definición:

1. $(g, -1)$ soporta el epígrafo de f en $(x, f(x))$.
2. Dada f convexa, $\nabla f(x)$ es subgradiente (si es que f es diferenciable en x) en x .

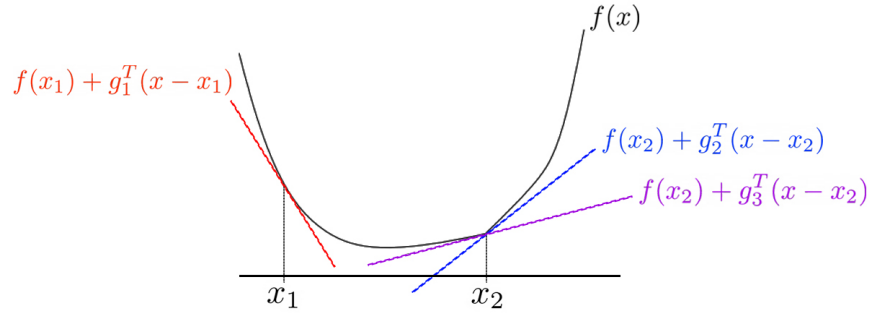


Figura 15: Sub-gradients.

Definición 156. El subdiferencial de $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ en x , denotado $\partial f(x)$ es el conjunto de subgradietes en x . Esto es,

$$\partial f(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : f(z) \geq f(x) + \langle y, z - x \rangle, \forall z \in \mathbb{R}^d\}.$$

Proposición 157. El subdiferencial en un punto interior del dominio de finitud de f es no vacío cuando f es convexa.

Demostración. Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una función convexa. Sea $x_0 \in D^\circ$, donde D es el conjunto de finitud de la función f . Definamos el abierto y convexo (pues f lo es)

$$A = \{(x, y) \in D^\circ \times \mathbb{R} : y > f(x)\}.$$

Dado que $(x_0, f(x_0)) \notin A$, por los Teoremas 148 y 149 existe un hiperplano que separa A de $(x_0, f(x_0))$. Ahora, veamos que no es de la forma

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : \langle w, x \rangle_{\mathbb{R}^d} = c\}.$$

O sea, que no es vertical. Acá $c \in \mathbb{R}$ y $w \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ (fijo). Supongamos por contradicción que lo es. En dicho caso, como D° es un abierto, existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset D^\circ$. Entonces, existen $x_1, x_2 \in B(x_0, r)$ tales que $\langle x_1, w \rangle < c < \langle x_2, w \rangle$. Pero entonces, $(x_1, f(x_1) + 1)$ y $(x_2, f(x_2) + 1)$ son separados por el hiperplano y ambos pertenecen a A . De este modo, el hiperplano es de la forma

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : \langle w, x \rangle_{\mathbb{R}^d} + y = c\}.$$

Luego, como $(x_0, f(x_0)) \in \overline{A}$,

$$\langle w, x_0 \rangle + f(x_0) = c.$$

Notando que $\langle w, x \rangle + y \geq c$ en A , para todo $x \in D^\circ$

$$\langle w, x \rangle + f(x) + \varepsilon \geq c, \forall \varepsilon > 0 \implies \langle w, x \rangle + f(x) \geq c.$$

De este modo,

$$f(x) \geq f(x_0) = \langle w, x - x_0 \rangle \implies w \in \partial f(x_0).$$

Por ende $\partial f(x_0)$ es no vacío. □

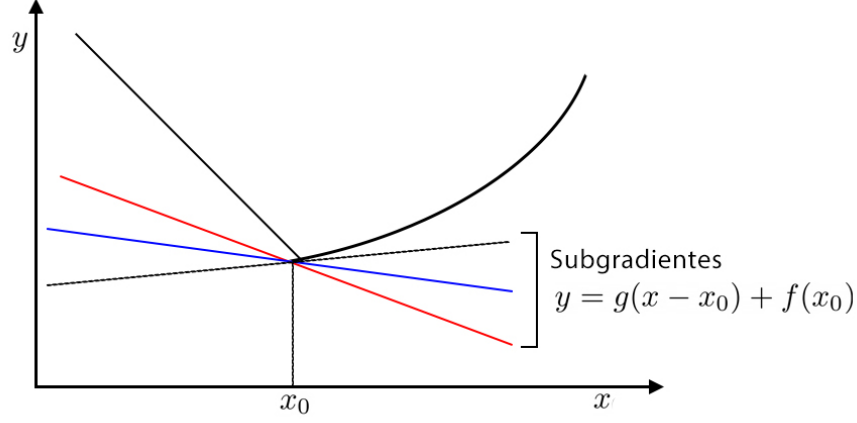


Figura 16: Sub-gradientes.

Proposición 158. El subdiferencial de una función convexa f en x en un conjunto convexo y cerrado.

Demostración. Sean $y, z \in \partial f(x)$ y $\theta \in [0, 1]$. Entonces, para todo $x' \in \mathbb{R}^d$ tenemos

$$\begin{aligned} f(x') &= (1 - \theta)f(x') + \theta f(x') \geq (1 - \theta)(f(x) + \langle y, x' - x \rangle) + \theta(f(x) + \langle z, x' - x \rangle) \\ &= f(x) + \langle (1 - \theta)y + \theta z, x' - x \rangle. \end{aligned}$$

Así, $\partial f(x)$ es convexo. Veamos ahora que se trata de un cerrado.

$$\partial f(x) = \underbrace{\bigcap_{x' \in \mathbb{R}^d} \underbrace{\{y : f(x') \geq f(x) + \langle y, x' - x \rangle\}}_{\text{cerrado}}}_{\text{cerrado}}.$$

□

Proposición 159. Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa y C^1 , entonces $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.

Demostración. Ciertamente, por el Teorema 96, $\nabla f(x) \in \partial f(x)$. Ahora, supongamos que existe otro elemento, digamos $y \in \partial f(x)$. Por definición $f(x') \geq$

$f(x) + \langle y, x' - x \rangle$, $x' \in \mathbb{X}$. Tomamos $x' = x + tz$ para $z \in X$ y $t > 0$. Entonces,

$$\frac{f(x + tz) - f(x)}{t} \geq \langle y, z \rangle.$$

Haciendo $t \rightarrow 0$,

$$\langle \nabla f(x), z \rangle \geq \langle y, z \rangle.$$

Pero entonces, $\langle \nabla f(x) - y, z \rangle \geq 0$. Al ser z arbitrario, tomamos

$$z = -(\nabla f(x) - y).$$

Esto nos permite obtener

$$\|\nabla f(x) - y\| \leq 0 \implies y = \nabla f(x).$$

□

Ejemplo 160. Consideremos $f(x) = \|x\|_2$. Entonces,

$$\partial f(x) = \begin{cases} \left\{ \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right\}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ B_{\|\cdot\|_2}(0, 1), & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Esto es consecuencia del Lema 159 y de lo siguiente. Si $g \in \partial f((0, 0))$, entonces,

$$\langle g, z \rangle \leq \|z\|_2, \quad z = (x, y).$$

Luego, si $\|g\| \leq 1$, por Cauchy-Schwarz

$$\langle g, z \rangle \leq \|g\|_2 \|z\|_2 \leq \|z\|_2.$$

O sea, g es subgradiente si $\|g\|_2 \leq 1$. Ahora, si g es un subgradiente, $\langle g, z \rangle \leq \|z\|_2$. Esto debe cumplirse para $\|y\| \leq 1$. Entonces,

$$\sup_{y: \|y\| \leq 1} \langle g, y \rangle \leq \|y\| \implies \|g\|_2 \leq 1.$$

Note que se puede generalizar esta situación a \mathbb{R}^n .

Proposición 161. x^* minimiza f si y solamente si $0 \in \partial f(x^*)$.

Demostración. Tenemos:

$$\begin{aligned}
f(x^*) &= \min_x f(x) \\
&\Leftrightarrow \\
f(x^*) &\leq f(y), \quad \forall y \\
&\Leftrightarrow \\
f(y) &\geq f(x^*) + \mathbf{0}^T(y - x^*), \quad \forall y \\
&\Leftrightarrow \\
\mathbf{0} &\in \partial f(x^*).
\end{aligned}$$

□

Lema 162. Sea $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$, con f_1, f_2 diferenciables. Entonces,

$$\partial f(x) = \begin{cases} \nabla f_1(x), & \text{si } f_1(x) > f_2(x) \\ \nabla f_2(x), & \text{si } f_2(x) > f_1(x) \\ [\nabla f_1(x), \nabla f_2(x)] & \text{si } f_1(x) = f_2(x). \end{cases}$$

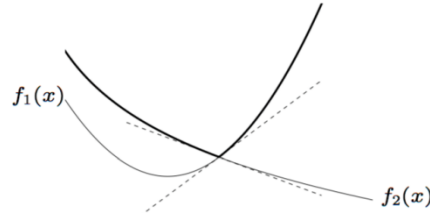


Figura 17: Sub-diferencial $\max\{f_1, f_2\}$.

Definición 163. La función prox. La función proximidad de una función convexa $h(\cdot)$ es, para $t > 0$

$$\text{prox}_{h,t}(x) = \operatorname{argmin}_u \left(h(u) + \frac{1}{2t} \|u - x\|_2^2 \right). \quad (99)$$

Observación. Un resultado crucial del cuál se ha hecho uso es el Teorema de Moreau-Rockafellar [Lain \(1988\)](#). Este resultado nos dice que, si $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow$

$(-\infty, \infty]$ son funciones convexas tales que la intersección de sus dominios de finitud Ω es no vacía, entonces para todo $x_0 \in \Omega$

$$\partial f(x_0) + \partial g(x_0) = \partial(f + g)(x_0).$$

Ejemplo 164. Si $h(x) = \lambda \|x\|_1$, $t = 1$

$$\text{prox}_h(x)_i = \begin{cases} x_i - \lambda, & \text{si } x_i \geq \lambda \\ 0, & \text{si } |x_i| \leq \lambda \\ x_i + \lambda, & \text{si } x_i \leq -\lambda. \end{cases} \quad (100)$$

En efecto, $|x| = \max\{x, -x\}$. Así pues, de (99), observando que el problema es separable, basta tener

$$0 \in \partial f(u_i^*).$$

Luego, por Moreau-Rockafellar,

$$\partial f(u_i^*) = \{u_i^* - x_i + \lambda \partial |\cdot|(u_i^*)\}.$$

Finalmente, dado que

$$\partial |\cdot|(u_i^*) = \begin{cases} -1, & \text{si } u_i^* < 0 \\ [-1, 1], & \text{si } u_i^* = 0 \\ 1 & \text{si } u_i^* > 0 \end{cases}$$

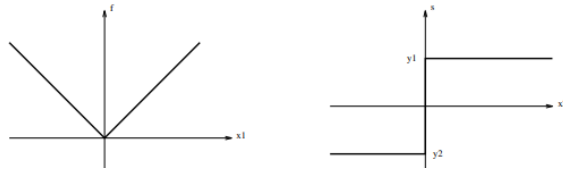


Figura 18: Sub-diferencial $|\cdot|$.

concluimos que

$$u_i^* = \begin{cases} x_i - \lambda, & \text{si } x_i \geq \lambda \\ 0, & \text{si } |x_i| \leq \lambda \\ x_i + \lambda, & \text{si } x_i \leq -\lambda. \end{cases}$$

Ahora bien, en el caso de tener

$$f(x) = g(x) + h(x) \tag{101}$$

con g convexa y diferenciable sobre su dominio y h convexa pero eventualmente no diferenciable, se ejecuta el siguiente algoritmo con la finalidad de minimizar (101):

$$x^{(k)} = \text{prox}_{t_k, h}(x^{(k-1)} - t_k \nabla g(x^{(k-1)})).$$

¿Cuál es la intuición?

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= \underset{u}{\operatorname{argmin}} \left(h(u) + \frac{1}{2t_k} \left\| u - x^{(k-1)} - t_k \nabla g(x^{(k-1)}) \right\|_2^2 \right) \\ &= \underset{u}{\operatorname{argmin}} \left(h(u) + g(x) + \nabla g(x)^T (u - x) + \frac{1}{2t} \|u - x\|_2^2 \right). \end{aligned}$$

Lo que minimizamos es $h(u)$ más la diferencia de u y el clásico gradient-descent.

Observación. La Definición 23 es entonces en realidad consecuencia de (99) y (100).

Referencias

- Abbott, S. (2015). *Understanding Analysis*. Springer.
- Aliprantis, C. and Border, K. (2006). *Infinite dimensional analysis*. Springer Verlag.
- Ambrosio, L., Brué, E., and Semola, D. (2021). *Lectures on Optimal Transport*. Springer Verlag.
- Axler, S. (2014). *Linear Algebra Done Right*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing.
- Birkhoff, G. (1957). Extensions of jentzsch theorem. *American Mathematical Society*, 85(1):219–227.
- Botelho, G., Pellegrino, D., and Teixeira, E. (2023). *Fundamentos de Analise Funcional*. SBM.
- Boyd, S. (2022). Subgradients. *Lectures Notes*.
- Burga, C. and Moreno, M. (2001). ¿existe subempleo profesional en el Perú urbano? *Investigaciones Breves* 17.
- Dagsvik, J. (1994). Discrete and continuous choide, max-stable processes and interdependence from irrelevant attributes. *Econometrica*, 1994(5):1179–1205.
- Dagsvik, J. (2002). Discrete choice in continuous time: implications of an intertemporal version of the iia property. *Econometrica*, 70(2):817–831.
- Dupuy, A., Carlier, G., Galichon, A., and Sun, Y. (2021). Sista learning optimal transport costos under sparsity constraints. *Discussion Paper Series*.
- Dupuy, A. and Galichon, A. (2014). Personality traits and the marriage market. *Journal of Political Economy*, 122(6):1271–1319.
- Dupuy, A. and Galichon, A. (2022). A note on the estimation of job amenities and labor productivity. *Quantitative economics*, 13(1):157–177.
- Dupuy, A., Galichon, A., and Sun, Y. (2017). Estimating matching affinity

- matrix under low-rank constraints. *Information and Inference: A Journal of the IMA*, 8(4):677–689.
- Echenique, F. and Chambers, C. (2016). *Revealed Preference Theory*. Cambridge University Press.
- Echenique, F., Immorlica, N., and Vazirani, V. (2023). *Online and Matching-Based Market Design*. Cambridge University Press.
- Even, M. and Merad, I. (2020). Optimal transport and stochastic optimization. *ENS*.
- Florenzano, M. and le Van, C. (2001). *Finite Dimensional Convexity and Optimization*. Springer Verlag.
- Folland, G. (1984). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Application*. Wiley.
- Föllmer, H. and Schied, A. (2002). *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*. De Gruyter studies in mathematics. Walter de Gruyter.
- Galichon, A. (2016). *Optimal Transport Methods in Economics*. Princeton University Press.
- Galichon, A. and Salanié, B. (2022). Cupid’s invisible hand: Social surplus and identification in matching models. *The Review of Economic Studies*, 89(5):2600–2629.
- Gall, J.-F. L. (2022). *Measure Theory, Probability, and Stochastic Processes*. Springer Verlag.
- Gentle, J. (2017). *Matrix Algebra Theory, Computations and Applications in Statistics*. Springer, 2 edition.
- Glasserman, P. and Xu, X. (2014). Robust risk measurement and model risk. *Quantitative Finance*, 14(1):29–58.
- Glasserman, P. and Yang, L. (2015). Bounding wrong-way risk in cva calculation.

- Hull, J. (2006). *Options, futures, and other derivatives*. Pearson Prentice Hall, 8. ed., pearson internat. ed edition.
- James, G., Witten, D., Hastie, T., and Tibshirani, R. (2021). *An Introduction to Statistical Learning*. Springer Verlag.
- Lain, H. C. (1988). Moreau-rockafellar type theorem for convex set functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 132:558–571.
- Luneberger, D. and Ye, Y. (2021). *Linear and Nonlinear Programming*. Springer Verlag.
- McFadden, D. (1974). Conditional logit analysis of qualitative choice behavior. pages 105–142.
- Memartoluie, A. (2017). *Computational Methods in Finance Related to Distributions with Known Marginals*. PhD thesis.
- Merigot, Q. and Thibert, B. (2020). Optimal transport, discretization and algorithms.
- Nenna, L. (2020). Lecture 4 entropic optimal transport and numerics.
- Nussabaum, R. (1987). Iterated nonlinear maps and hilbert’s projective metric: A summary. *Dynamics of Infinite Dimensional Systems*.
- Ok, E. A. (2007). *Real Analysis with Economic Applications*. Princeton University Press.
- Peyre, G. and Cuturi, M. (2019). Computational optimal transport. *Foundations and Trends in Machine Learning*, 11(5-6):355–607.
- Rosen, D. and Saunders, D. (2012). Cva the wrong way. *Journal of Risk Management in Financial Institutions*, 5:252–272.
- Rüschendorf, L. and Thomsen, W. (1993). Note on the schrödinger equation and i-projections. *Statistics & Probability Letters*, 17(5):369–375.
- Simon, C. and Blume, L. (1987). *Mathematics for Economists*. W. W. Norton Company, 1 edition.

- Sinkhorn, R. (1964). A relationship between arbitrary positive matrices and doubly stochastic matrices. *Annales of Mathematics and Statistics*.
- Toh, K.-C. and Yun, S. (2010). An accelerated proximal gradient algorithm for nuclear norm regularized linear least squares problems. *Pacific Journal of Optimization*, 6(3):615–640.
- Victor Chernozhukov, Guillaume Carlier, G. D. B. and Galichon, A. (2022). Vector quantile regression and optimal transport, from theory to numerics. *Empirical economics*, 62(6):35–62.
- Villani, C. (2009). *Optimal Transport Old and New*. Springer Verlag.