Pontificia Universidad Católica del Perú
Especialidad de Finanzas

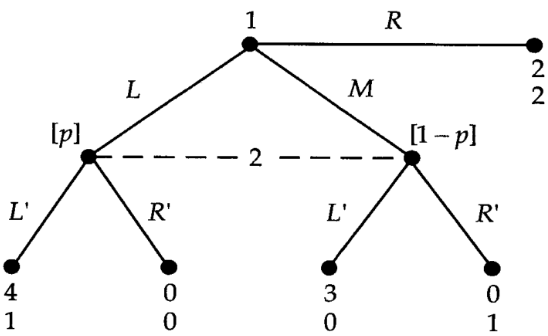
1 de diciembre de 2024

Práctica Dirigida 9
FIN 203

Profesor: José Gallardo
Jefes de práctica: Marcelo Gallardo y Karen Montoya

Juegos Dinámicos con Información Incompleta

Ejercicio 1. Considere el siguiente juego (Gibbons 1992):



Derive la forma normal, encuentre los equilibrios de Nash (del juego estático asociado) y los EBPS (Equilibrio Bayesiano Perfecto en Subjuegos), puras.

Solución: los equilibrios de Nash son (L, L') y (R, R'):

	L'	R'
L	$(4,1)$	$(0,0)$
M	$(3,0)$	$(0,1)$
R	$(2,2)$	$(2,2)$

Cuadro 1: Tabla de pagos.

Ahora, el pago para el jugador 2 al jugar L' es:

$$\pi_2(L') = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p.$$

El pago al jugar R' es:

$$\pi_2(R') = 0 \cdot p + 1 \cdot (1-p) = 1 - p.$$

El jugador 2 siempre jugará L' si:

$$\pi_2(L') > \pi_2(R') \implies p > 1 - p \implies p > \frac{1}{2}.$$

El pago para el jugador 1 al jugar L es:

$$\pi_1(L) = 4 \cdot q + 0 \cdot (1-q) = 4q.$$

Y el pago al jugar M es:

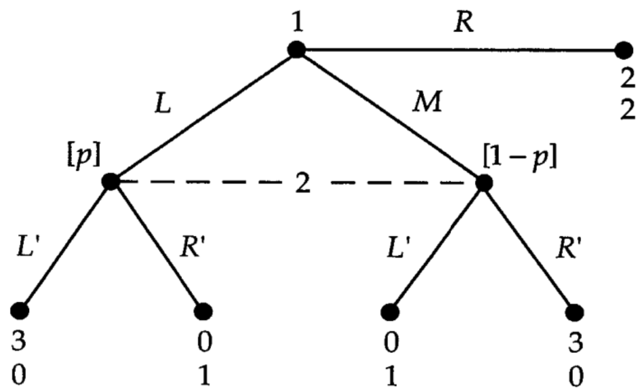
$$\pi_1(M) = 3 \cdot q + 0 \cdot (1-q) = 3q.$$

Acá q es la probabilidad de que 2 juegue L'. El jugador 1 siempre jugará L si:

$$\pi_1(L) > \pi_1(M) \implies 4q > 3q,$$

lo cual es cierto para todo $q > 0$. Por lo tanto, el jugador 1 juega L y $p = 1$. En este caso, el jugador 2 siempre jugará L'. Así, el resultado (R, R') viola los Requisitos 1 y 2 (curso/gibbons). De este modo, el EBPS es (L, L').

Ejercicio 2. Demuestre que en el siguiente juego (Gibbons 1992) no existe un equilibrio Bayesiano perfecto en estrategias puras. Encuentre un equilibrio Bayesiano perfecto en **estrategias mixtas**.



Solución: los pagos son:

	L'	R'
L	$(3,0)$	$(0,1)$
M	$(0,1)$	$(3,0)$
R	$(2,2)$	$(2,2)$

Cuadro 2: Tabla de pagos.

Ciertamente, no hay equilibrios de Nash en estrategias puras. Analicemos la existencia de un EBPS:

(a) El jugador 1 siempre jugará L si:

$$\pi_1(L) > \pi_1(M) \implies 3q + 0(1-q) > 0q + 3(1-q) \implies q > \frac{1}{2}.$$

Así, si $q > 0{,}5$, $p = 1$.

(b) El jugador 2 jugará L' si:

$$\pi_2(L') > \pi_2(R') \implies 0p + 1(1-p) > 1p + 0(1-p) \implies \frac{1}{2} > p.$$

Así, si $p < 0{,}5$, $q = 1$. Esto viola la condición que encontramos en la parte (a). Podemos proceder de manera similar con M, M'... y concluir que no existe un EBPS en estrategias puras.

En un equilibrio de estrategias mixtas, el jugador 1 juega L con probabilidad $p \in (0,1)$ y el jugador 2 juega L' con probabilidad $q \in (0,1)$. En equilibrio, el jugador 2 es indiferente entre L' y R':

$$\pi_2(L') = \pi_2(R') \implies 0p + 1(1-p) = 1p + 0(1-p) \implies p = \frac{1}{2}.$$

De manera similar, para el jugador 1:

$$\pi_1(L) = \pi_1(M) \implies 3q + 0(1-q) = 0q + 3(1-q) \implies q = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, en un equilibrio de estrategias mixtas, el jugador 1 juega L con $p = 0{,}5$ y el jugador 2 juega L' con probabilidad $q = 0{,}5$.

Signaling

Ejercicio 3. Suponga que hay dos tipos de individuos cuya productividad es independiente de su educación:

1. Grupo H con productividad 3.

2. Grupo L con productividad 2.

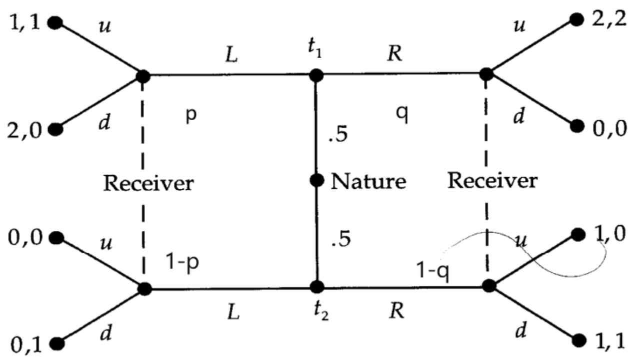
Se sabe que el grupo H representa un tercio de la población. Los trabajadores de ambos grupos pueden continuar con sus estudios a cierto costo. La cantidad de educación y es una variable continua y completamente confiable (mediante diploma). Los individuos del tipo L se enfrentan a un costo mayor para continuar con sus estudios que los del tipo H, de forma que $C_L(y) = y$, $C_H(y) = y/2$. Los empleadores consideran que cualquier individuo con nivel de educación menor a $y^* \geq 0$ tiene productividad 2, por lo que les ofrecen un salario igual a 2, mientras que cualquier individuo con un nivel de educación mayor o igual a y^* tiene una productividad de 3, y por ende, se le ofrece un salario igual a 3. Responda lo siguiente:

1. ¿Qué valores de y^* dan lugar a un equilibrio separador?

2. Imagine que ya no es posible educarse, por lo que $y = 0$ para todo individuo. Suponga además que a todos se les ofrece el mismo salario, que será la productividad media de la población. ¿Habría una mejora en el sentido de Pareto?

Solución: (1) ciertamente nadie escogerá $y > y^*$. Por otro lado, como queremos equilibrios separadores, se escoge entre $y = 0$ e $y = y^*$. Para los tipo L, su ingreso será 2 si $y = 0$ e $3 - y^*$ si $y = y^*$. Escogerá $y = 0$ si $y^* > 1$. Respecto a los del tipo H, si $y = 0$, su ingreso es 2. En caso sea $y = y^*$, su ingreso es $3 - y^*/2$. De este modo, escogen $y = y^*$ si $y^* < 2$. Por ende, para $y^* \in (1, 2)$, el equilibrio es separador. (2) Supongamos ahora que $y = 0$ para todo individuo y $w = \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{7}{3}$. Los de tipo L mejoran pues $7/3 > 2$. Por otro lado, los de tipo alto mejoran solo si $7/3 > 3 - y^*/2$. O sea, $y^* \geq 4/3$. Así, hay una mejora social si $y^* \in [4/3, 2]$.

Ejercicio 4. Encuentre todos los equilibrios separadores EBP y agrupadores en estrategias puras.



Solución: recordemos un poco el modelo. Primero, la naturaleza juega y determina el tipo del individuo (t_1) o (t_2). Esto ocurre en este caso particular con probabilidad 0.5 (t_i). Enseguida, el jugador 1 (al cual la naturaleza le reveló su tipo) debe escoger entre L y R (esta es la señal que manda). Finalmente, el segundo jugador (receptor), juega entre uj y d. El jugador 2, no sabe el tipo de la persona. Buscamos entonces, equilibrios pooling y separadores.

- *Pooling* (L, L): el pago esperado del receptor es el mismo en ambos casos, $\pi_R(L, u) = \pi_R(L, d) = 0{,}5$.
    - Bajo (u, u) - u si recibe L y u si recibe R, no importa el tipo; $\pi_1(L, u) = 1 < \pi_1(R, u) = 2$, por lo que no es sostenible.
    - Bajo (u, d), $\pi_2(L, u) = 0 < \pi_2(R, d) = 1$, lo cual tampoco hace sostenible a (L, L).
    - Bajo (d, d), $\pi_2(L, d) = 0 < \pi_2(R, d) = 1$, por lo que tampoco es sostenible.
    - Bajo (d, u), $\pi_2(L, u) = 0 < \pi_2(R, d) = 1$, tampoco es sostenible.

  Entonces, (L, L) no es un equilibrio.

- *Separador* (L, R)[1]: la mejor respuesta es (u, d) pues $\pi_R(L, u|1) > \pi_R(L, d|1)$ y $\pi_R(R, u|2) < \pi_R(R, d|2)$.
    - $\pi_1(L, u) = 1 > \pi_1(R, d) = 0$.
    - $\pi_2(L, u) = 0 < \pi_2(R, d) = 1$.

  Este sí es un equilibrio, no se quieren desviar.

- *Pooling* (R, R): $\pi_R(R, u) = 1 > \pi_R(R, d) = 0{,}5$. Las estrategias del receptor son (u, u) y (d, u) (en este caso, los del tipo 1 están indiferentes pero los de tipo 2, ganan 0 vs 1).
    - Bajo (u, u), $\pi_i(L, u) < \pi_i(R, u)$, $i = 1, 2$.
    - Bajo (d, u), $\pi_i(L, d) \leq \pi_i(R, u)$, $i = 1, 2$.

- *Separador* (R, L): la mejor respuesta es (u, d)
    - $\pi_1(L, d) = 2 = \pi_1(R, u) = 2$. Indiferente.
    - $\pi_2(L, u) = 0 \leq \pi_2(R, d) = 1$. Se desvía.

Los EBP son

1. $[(L, R), (u, d), p = 1, q = 0]$
2. $[(R, R), (u, u), p, q = 0{,}5]$
3. $[(R, R), (d, u), p, q = 0{,}5]$

[1] Por regla de Bayes, el receptor actualiza sus probabilidades subjetivas y sabe que los de tipo 1 juegan L y tipo 2 juegan R. Por ende, no trabajamos con pagos esperados en este caso.

Selección adversa

Ejercicio 5. Considere el siguiente mercado de autos usados, similar al de Akerlof, donde la calidad de los autos está dada por $x \in [0,1]$. Un auto de calidad x es valorado en x por el comprador y en $v(x)$ por el vendedor, donde $v(\cdot)$ es una función continua, estrictamente creciente, tal que $v(x) \leq x$ para todo x. Si la densidad de las calidades es $f(x)$, determine el equilibrio bajo las siguientes condiciones:

a) Los compradores y vendedores conocen la calidad de cada auto.

b) Ni los compradores ni los vendedores conocen la calidad de cada auto.

c) Si f es una distribución uniforme en $[0,1]$ y $v(x) = x^2$, y solo los vendedores conocen la calidad del auto.

Solución:

1. Si $v(x) < x$, entonces cada auto se vende a un precio $p = x$.

2. Si $v(x) \leq x$ y no es posible para ninguna de las partes verificar la calidad de los autos,
$$p = \mathbb{E}[X] = \int_0^1 x f(x) dx \geq \int_0^1 v(x) f(x) dx = \mathbb{E}[v(x)].$$

3. En equilibrio,
$$p^* = \mathbb{E}[x \mid x \in \Theta^*],\ \Theta^* = \{x : v(x) \leq p\}.$$
Dado que la esperanza condicional se calcula como:
$$\mathbb{E}[X|B] = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X d\mathbb{P},$$
tenemos que:
$$p^* = \frac{1}{\sqrt{p}} \int_0^{\sqrt{p}} \frac{x}{\sqrt{p}} dx = \left[\frac{x^2}{2\sqrt{p}}\right]_0^{\sqrt{p}}.$$
Por lo tanto, $p^* = 1/4$ y los autos con $x > 1/2$ se venden. Otro equilibrio es $p = 0$.

Ejercicio 6. Considere un mercado de autos donde la calidad máxima disponible es $Q = 1{,}9$, y la distribución de q es uniforme con $a = 0$ y $b = Q$. Un auto de calidad q es valorado por el comprador como máximo en q, y por el vendedor en q/Q. Se asume que existen suficientes compradores para que las ganancias del intercambio se concentren del lado del vendedor. Dado que $q/Q < q$, el comprador asigna un mayor valor al auto que el vendedor, lo que permite a ambas partes comerciar el auto a un precio p entre q/Q y q, generando un beneficio para el vendedor y un excedente para el comprador. En particular, si un auto de calidad q se intercambia a un precio p, el comprador obtiene una utilidad:

$$u(p, q) = q - p,$$

mientras que el vendedor obtiene un beneficio de:

$$\pi(p, q, Q) = p - \frac{q}{Q}.$$

a) Calcule el valor esperado para el comprador, suponiendo que existe información asimétrica.

b) Basándose en la parte anterior, calcule el punto de corte para los autos ofrecidos por el vendedor, el precio asociado y sus beneficios.

c) Calcule la valoración de los autos por parte del comprador y del vendedor bajo condiciones de información perfecta.

d) Si un comprador anticipa el intervalo donde no se ofrecerán autos, determine el nuevo valor esperado de los autos ofrecidos y la decisión del vendedor. ¿Qué ocurre con los nuevos precios y los beneficios del vendedor?

Solución:

a) El valor esperado de la calidad, tal como lo percibe el consumidor, es:

$$\mathbb{E}[q] = \int_0^Q \frac{x}{Q-0} dx = \frac{Q}{2} = 0{,}95.$$

b) Por lo tanto, el consumidor estará dispuesto a pagar $p = 0{,}95$. Por otro lado, la calidad ofrecida será $q < 0{,}95 \cdot Q = \frac{Q^2}{2} = 1{,}805$. Finalmente, las ganancias del vendedor serán:

$$\pi = p - \frac{q}{Q} = 0{,}95 - \frac{q}{1{,}9}.$$

c) En el caso de *información perfecta*, el comprador valora exactamente q, y el vendedor $q/Q = 0{,}52q$.

d) Si el comprador anticipa que $q \in [0, 1{,}805 = Q^2/2)$, estará dispuesto a pagar:

$$p = \mathbb{E}[q | q \in [0, 1{,}805 = Q^2/2)] = \int_0^{Q^2/2} \frac{x}{Q^2/2} dx = \frac{Q^2}{4} = \frac{1{,}805}{2}.$$

Finalmente, esto implica que $q/Q < p = \frac{Q^2}{4}$. Es decir, $q < Q^3/3$.

Nota: La solución en su forma más general está dada por:

$$\mathbb{E}[q | p - q/Q \geq 0] = \mathbb{E}[q | q \leq Qp] = \begin{cases} \frac{pQ}{2}, & \text{si } p < 1, \\ \frac{Q}{2}, & \text{si } p \geq 1. \end{cases}$$

Riesgo moral

Ejercicio 7. Suponga una relación principal-agente donde hay dos posibles resultados, valorados en $50,000$ y $25,000$ dólares. El agente debe elegir entre dos niveles posibles de esfuerzo. La distribución de probabilidades sobre los resultados como función de los niveles de esfuerzo se da en la siguiente tabla:

	25,000	50,000
e_1	$1/4$	$3/4$
e_2	$1/2$	$1/2$

Suponga que el principal es neutral al riesgo y que el agente es adverso al riesgo, con preferencias descritas por las siguientes funciones:

$$B(x,w) = x - w,$$

$$U(w,e) = 2\sqrt{w} - g(e),$$

donde $g(e_1) = 40$ y $g(e_2) = 20$. El nivel de utilidad de reserva es $\overline{u} = 120$.

a) Escriba los contratos óptimos bajo información simétrica para cada nivel de esfuerzo y los beneficios obtenidos por el principal en cada caso. ¿Qué nivel de esfuerzo prefiere el principal?

b) Escriba los contratos óptimos cuando existe un problema de riesgo moral. ¿Cuál es el nivel de esfuerzo y el contrato elegido por el principal?

Solución:

a) En el caso observable, siempre se tiene un esquema de pagos constante

$$w^* = v^{-1}(\overline{u} + g(e)).$$

En caso el esfuerzo sea alto (e_1),

$$w_1 = \frac{(\overline{u} + g(e_1))^2}{4} = \frac{(120+40)^2}{4} = 6400.$$

De ahí, en el caso bajo (e_2)

$$w_2 = \frac{(\overline{u} + g(e_2))^2}{4} = \frac{(120+20)^2}{4} = 4900.$$

Luego, evaluamos para ver cual es el esfuerzo que maximiza los beneficios. En caso se implemente el esfuerzo alto e_1,

$$\Pi(e = e_1) = \frac{1}{4} \cdot 25000 + \frac{3}{4} \cdot 50000 - 6400 = 37350$$

$$\Pi(e = e_2) = \frac{1}{2} \cdot 25000 + \frac{1}{2} \cdot 25000 - 4900 = 32600.$$

Así, el principal prefiere que se implemente e_1.

b) En el caso e no observable, i.e., riesgo moral, se resuelver

$$\begin{cases} \text{máx}_{e,w(\pi)} & \sum_{i=1}^{2}[\pi_i - w_i]p(\pi_i|e) \\ s.a. & v(w(\pi_1))p(\pi_1|e) + v(w(\pi_2))p(\pi_2|e) - g(e) \geq \overline{u} \\ & e \text{ maximiza } v(w(\pi_1))p(\pi_1|e) + v(w(\pi_2))p(\pi_2|e) - g(e). \end{cases}$$

Primero, encontramos el esquema de pagos en función de los beneficios generados. Para esto, recordemos que los multiplicadores son positivos por lo que, las restricciones son con igualdad. Trabajamos con e_1 pues, para implementar e_2, se sigue ofreciendo un salario fijo igual a 4900 (esfuerzo bajo induce el pago del caso con información completa).

$$\begin{aligned} &2\sqrt{w(\pi_2)}\frac{1}{4} + 2\sqrt{w(\pi_1)}\frac{3}{4} - 40 = 120 \\ &2\sqrt{w(\pi_2)}\frac{1}{4} + 2\sqrt{w(\pi_1)}\frac{3}{4} - 40 = 2\sqrt{w(\pi_2)}\frac{1}{2} + 2\sqrt{w(\pi_1)}\frac{1}{2} - 20. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones proveen el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{w(\pi_2)} \\ \sqrt{w(\pi_1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos $w(\pi_2) = 2500$ y $w(\pi_1) = 8100$. Finalmente, queda evaluar qué prefiere el principal. Este último busca minimizar

$$\sum_{i=1}^{2} w_i p(\pi_i|e).$$

Los beneficios obtenidos bajo e_1 son

$$\frac{1}{4} \cdot (25000 - 2500) + \frac{3}{4} \cdot (50000 - 8100) = 37050.$$

Así, dado que bajo este contrato, buscando implementar e_1, su beneficio excede al caso $e = e_2$, (32 600), optará por implementar el esfuerzo alto.

Ejercicio 8 (I. Segal and S. Tadelis, ECON 206 UCB). Considere un problema estándar de riesgo moral con las siguientes características:

- El principal (p) y el agente (a) son ambos neutrales al riesgo. Sea x el resultado verificable, e el esfuerzo no observado del agente, y $w(x)$ el pago al agente. Los niveles finales de utilidad de las dos partes están dados por:

  $$u_p = x - w(x), \quad u_a = w(x) - v(e),$$

  donde $v(\cdot)$ es una función estrictamente creciente del esfuerzo.

- El agente tiene una riqueza limitada, lo que restringe al principal a ofrecer esquemas de incentivos tales que $w(x) > 0$ para todo x. Esta restricción garantiza que el agente esté dispuesto a trabajar para el principal (no se necesita una restricción adicional de participación).

- El resultado x puede tomar tres valores: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, y $x_3 = 3$. El esfuerzo puede tomar dos valores: $e_0 = 0$ y $e_1 = 1$. Normalice $v(0) = 0$.

- La probabilidad de x dado e, denotada $\pi(x \mid e)$, satisface la Propiedad de Razón de Verosimilitud Monótona:

$$\frac{\pi(x_j \mid e=1)}{\pi(x_j \mid e=0)} > \frac{\pi(x_{j-1} \mid e=1)}{\pi(x_{j-1} \mid e=0)} \quad \text{para } j = 2, 3.$$

Suponga que una solución de segundo mejor para este problema induce al agente a elegir e_1. Demuestre que en tal solución $w(x_1) = w(x_2) = 0$, y $w(x_3) > 0$.

Solución: El enunciado señala que el principal desea implementar $e = 1$ al menor costo posible, sujeto a las restricciones de participación y compatibilidad. Por lo tanto, resuelve:

$$\begin{cases} \text{mín}_{w(i), i\in\{1,2,3\}} & \sum_{i=1}^{3} \pi(i|e=1)w(i), \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^{3} \pi(i|e=1)w(i) - v(1) \geq \sum_{i=1}^{3} \pi(i|e=0)w(i), \\ & w(i) \geq 0, \ \forall \ i \in \{1,2,3\}. \end{cases}$$

El Lagrangiano asociado es:

$$\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{3} \pi(i|e=1)w(i) - \lambda \left[\sum_{i=1}^{3} (\pi(i|e=1) - \pi(i|e=0))w(i) - v(1) \right] - \sum_{i=1}^{3} \mu_i w(i).$$

Las condiciones de primer orden (FOC) resultan en:

$$\pi(i|e=1)w(i) - \lambda[\pi(i|e=1) - \pi(i|e=0)] - \mu_i = 0, \ \forall \ i \in \{1,2,3\},$$

junto con la condición de holgura complementaria:

$$w(i)\mu_i = 0.$$

Para algún i^* se debe cumplir que $w(i^*) = 0$. Por lo tanto, $\mu_{i^*} = 0$ y

$$\lambda = \frac{1}{1 - \frac{\pi(i^*|e=0)}{\pi(i^*|1)}} > 1.$$

Para cualquier otro i,

$$\frac{\mu_i}{\pi(i|e=0)} = \lambda - (\lambda - 1)\frac{\pi(i|e=1)}{\pi(i|e=0)}.$$

Dado que $\frac{\pi(i|e=1)}{\pi(i|e=0)}$ es creciente en i y $\lambda > 1$,

$$\frac{\mu_1}{\pi(1|e=0)} > \frac{\mu_2}{\pi(2|e=0)} > \frac{\mu_3}{\pi(3|e=0)} \geq 0.$$

Se deduce, dado que $\mu_3 = 0$, que $\mu_1, \mu_2 > 0$. Así, $w(1) = w(2) = 0$ y $w(3) > 0$.