

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA
1MAT33 ANÁLISIS FUNCIONAL

Segunda Práctica Dirigida
Primer semestre 2024

Indicaciones generales:

- Duración: 120 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: apuntes de clase.
- Está permitido el uso de material de consulta o equipo electrónico.
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**

Puntaje total (tarea): 20 puntos.

Cuestionario:

Pregunta 1

Considere el espacio $C[-1, 1]$ de funciones reales continuas sobre el intervalo $[-1, 1]$. Defina

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(x)| dx, \quad f \in C[-1, 1].$$

Resuelva lo siguiente:

- a) Muestre que $\|\cdot\|_1$ es una norma.
- b) Muestre que $C[-1, 1]$ tiene dimensión infinita.
- c) Demuestre que $C[-1, 1]$, con la norma $\|\cdot\|_1$ no es completo.
- d) Proponga una norma tal que $C[-1, 1]$ es completo con dicha norma.

Pregunta 2

Sea $M \subset E$ no vacío, E espacio normado. Pruebe que

$$M^\perp = \{\varphi \in E' : \varphi(x) = 0, \forall x \in M\}$$

es un subespacio cerrado de E' .

Pregunta 3

Sea $E = \mathbb{K}[x]$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , dotado de las operaciones usuales. Responda las siguientes cuestiones

- a) De una norma para E .
- b) Pruebe que E con cualquier norma no puede ser un espacio de Banach.

Pregunta 4

Sea C un subconjunto convexo y abierto de un espacio vectorial normado sobre los reales $(E, \|\cdot\|_E)$ tal que $0 \in C$. Pruebe que si C es acotado y simétrico ($C = -C$), entonces el funcional de Minkowski p_C es una norma equivalente a $\|\cdot\|_E$.

Pregunta 5

Sea E un espacio normado separable. Pruebe que existe una sucesión $(\varphi_n) \in E'$ tales que $\|\varphi_n\| = 1$ para todo n y para todo $x \in E$, $\|x\| = \sup_n |\varphi_n(x)|$ (cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) y $\|x\| = \sup_n \varphi_n(x)$ en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Tarea

Entregar en Paideia hasta las 8pm del sábado 27 de abril.

- a) Supongamos que F es un subespacio de un espacio normado E y que $\varphi \in F'$. Muestre que el conjunto de todas las extensiones de Hahn-Banach de φ es convexo.
- b) Si E es un espacio de Banach real y $T : E \rightarrow E'$ es una aplicación lineal tal que $(Tx)(x) \geq 0$ para todo $x \in E$, entonces T es acotado.
- c) Si K es un subconjunto cerrado no vacío de un espacio de Banach E , defina $d(x) = \text{dist}(x, K) = \inf_{k \in K} \|x - k\|$. Demuestre que K es convexo si y solo si $d : E \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa.

Profesor del curso: Percy Fernández.

San Miguel, 26 de abril del 2024.