

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Segunda práctica (tipo a)
Primer semestre 2025

Indicaciones generales:

- Duración: 100 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: con apuntes de clase físicos.
- No está permitido el uso de ningún material o equipo electrónico.
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**

Puntaje total: 20 puntos.

Cuestionario:

Pregunta 1 (4 puntos)

Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule sus valores propios y analice si la matriz es diagonalizable.

Solución: los valores propios son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -2$ y los vectores propios asociados, $v_1 = (-3, -1, 1)$ y $v_2 = (-1, -1, 1)$. Por ende, la matriz no es diagonalizable.

Pregunta 2 (4 puntos)

Modelo de Leontief. Considere tres sectores productivos: el sector primario agro-exportador, el sector industrial y el sector de servicios. Suponga que, en términos de proporciones, el sector primario requiere de 0.4 de su propio sector, 0.4 del sector industrial y 0.1 del sector de servicios. Por otro lado, el sector industrial requiere de 0.2 del sector agro-exportador, 0.2 de su propio sector y del sector servicios 0.3. Finalmente, el sector servicios requiere 0.2 del sector agro-exportador, 0.1 del sector industrial y 0.3 de su propio sector. Además, se sabe que la demanda externa es $\mathbf{d} = [200 \ 300 \ 400]$. Encuentre la oferta óptima (cantidad producida) por cada sector en el equilibrio (redondee a las centésimas).

Solución: El modelo de insumo-producto puede representarse mediante la matriz de coeficientes técnicos A y la demanda externa \mathbf{d} :

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 400 \end{bmatrix}.$$

- El sector **primario** provee de alimentos a los demás sectores y a sí mismo.
- El sector **industrial** provee maquinaria, desde tractores hasta computadoras, a los demás sectores y a sí mismo.
- El sector **servicios** provee, por ejemplo, servicios legales, consultorías, etc., a los demás sectores y a sí mismo.

Para encontrar la oferta total óptima \mathbf{x} , calculamos:

$$\mathbf{x} = (I - A)^{-1} \mathbf{d} \simeq \begin{bmatrix} 1081.0.81 \\ 1063.63 \\ 1181.81 \end{bmatrix}.$$

Pregunta 3 (6 puntos)

- Determine si $\bigcap_{k=1}^{\infty} [0, 1/k]$ es un conjunto cerrado.
- Sea A un conjunto abierto y B un conjunto cualquiera. Pruebe que $A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$ es un conjunto abierto.
- En teoría microeconómica, el simplex

$$\Delta = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$$

es un conjunto que aparece con frecuencia (equilibrio general, loterías, teoría de juegos etc.).

- Grafique Δ para $n = 2$ y $n = 3$.
- Demuestre que Δ es un conjunto compacto para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Solución: $\bigcap_{k=1}^{\infty} [0, 1/k] = \{0\}$ el cual es un conjunto cerrado. Además, es la intersección arbitraria de cerrados. Respecto a $A - B = \bigcup_{b \in B} A - \{b\}$, es abierto pues es la unión arbitraria de abiertos ($A - b$ es trivialmente abierto). Finalmente, $\Delta \subset B(\mathbf{p}, I)$ para $\mathbf{p} = \mathbf{1}$ e $I = 1$. Como el conjunto Walrasiano, es acotado pues está incluido en $B_{\|\cdot\|_{\infty}}(2I/p_{\min})$, Δ también. Luego, Δ es la intersección de \mathbb{R}_+^n con $f^{-1}(1)$, con $f(\mathbf{x}) = x_1 + \dots + x_n$ (pre-imagen de un cerrado por una función continua es cerrado).

Pregunta 4 (6 puntos)

- Pruebe que $\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$ define una norma sobre $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, y que

$$\sqrt{\rho(A)} \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \sqrt{\rho(A^T A)}, \text{ donde } : \rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i| : \lambda_i \text{ valor propio de } A\}.$$

- Pruebe que si A es simétrica y sus valores propios son todos estrictamente positivos, entonces A es definida positiva. **(1.5 puntos).**
- Pruebe que $\|(x_1, x_2)\| = (x_1^p + x_2^p)^{1/p}$ es una norma para $p = 2$. **(1.5 puntos).**

Solución: a) Para probar que $\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$ define una norma sobre $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, verificamos las tres propiedades de norma.

- Primero, $\|A\|_F \geq 0$ y $\|A\|_F = 0$ si y solo si $\text{tr}(A^T A) = 0$, lo cual ocurre únicamente cuando $A = 0$, ya que $A^T A$ es semidefinida positiva y su traza es la suma de los cuadrados de todas las entradas de A .
- Segundo, la homogeneidad se cumple pues para cualquier escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene $\|\alpha A\|_F = \sqrt{\text{tr}((\alpha A)^T (\alpha A))} = \sqrt{\alpha^2 \text{tr}(A^T A)} = |\alpha| \cdot \|A\|_F$.
- Tercero, la desigualdad triangular se deduce observando que $\|A + B\|_F^2 = \text{tr}((A + B)^T (A + B)) = \text{tr}(A^T A) + \text{tr}(B^T B) + \text{tr}(A^T B + B^T A)$, y aplicando Cauchy-Schwarz sobre los vectores formados por las entradas de A y B , obtenemos $|\text{tr}(A^T B)| \leq \|A\|_F \|B\|_F$, y de forma análoga para $\text{tr}(B^T A)$, por lo que $\|A + B\|_F^2 \leq (\|A\|_F + \|B\|_F)^2$, implicando $\|A + B\|_F \leq \|A\|_F + \|B\|_F$.
- Alternativamente se puede probar que la traza induce un producto interno.

Para las desigualdades

$$\sqrt{\rho(A)} \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \sqrt{\rho(A^T A)},$$

notamos que $\rho(A)$ denota el radio espectral de A , es decir, el máximo valor propio en módulo. Como $A^T A$ es simétrica y semidefinida positiva, todos sus valores propios son reales y no negativos, y $\|A\|_F^2 = \text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ donde λ_i son los valores propios de $A^T A$. Como $\text{tr}(A^T A) = \sum_i \lambda_i \leq n \cdot \lambda_{\max}$, se deduce que $\|A\|_F^2 \leq n \cdot \rho(A^T A)$ y por tanto $\|A\|_F \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\rho(A^T A)}$. Ahora bien, para la otra desigualdad, se usa que $\rho(A) \leq \sum_i \|\sigma_i(A^T A)\|^2 = \|A\|_F$. De hecho, también vale para $\rho(A^T A)$. Para más detalles, consultar SVD (bastante usado en otros contextos).¹

- Si A es simétrica con valores propios estrictamente positivos, entonces es diagonalizable como $A = PDP^{-1}$, donde D es diagonal con los autovalores positivos en la diagonal. Como A es simétrica, se puede tomar una base ortonormal de autovectores, por lo que P es ortogonal y se tiene $P^{-1} = P^T$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$x^T A x = x^T P D P^T x = (P^T x)^T D (P^T x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2 > 0,$$

donde $z = P^T x$ y $\lambda_i > 0$. Por tanto, A es definida positiva.

- Para $p = 2$, la función $\|(x_1, x_2)\| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ es la norma euclidiana. Verificamos:
 - **Positividad:** $\|(x_1, x_2)\| \geq 0$, y se anula si y solo si $(x_1, x_2) = (0, 0)$.
 - **Homogeneidad:** $\|\alpha(x_1, x_2)\| = |\alpha| \cdot \|(x_1, x_2)\|$.
 - **Desigualdad triangular:** Se deduce de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que afirma:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

donde $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$. Entonces:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Tomando raíz cuadrada se obtiene $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Note que esta norma proviene de un producto interno si y solo si $p = 2$. En efecto, si una norma proviene de un producto interno, necesariamente satisface la identidad de polarización, que solo es válida para el caso euclidiano.

Profesor del curso: Jorge Chávez.

Asistente de docencia: Marcelo Gallardo.

¹Dado que $\|\cdot\|$ es una norma, entonces para cualquier $c > 0$, $c\|\cdot\|$ también define una norma. Por lo tanto, para cualquier matriz A que no sea nilpotente, se cumple que $\rho(A) > c\|A\|$ cuando c es suficientemente pequeño. Así, la respuesta a la pregunta es negativa. Sin embargo, sí se cumple que $\rho(A) \leq \|A\|$ siempre que $\|\cdot\|$ sea una norma matricial submultiplicativa, es decir, que satisfaga $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ para cualquier par de matrices A y B . Sea λ un valor propio de A de módulo máximo y x un vector propio asociado. Sea y cualquier vector no nulo. Como $\|\cdot\|$ es submultiplicativa, se tiene:

$$\rho(A) \|xy^T\| = |\lambda| \|xy^T\| = \|Axy^T\| \leq \|A\| \|xy^T\|.$$

Dado que xy^T es una matriz no nula, se cumple que $\|xy^T\| > 0$. Por lo tanto, podemos concluir que $\rho(A) \leq \|A\|$. Una buena referencia es: <https://www.cis.upenn.edu/~cis5150/cis515-11-sl4.pdf>.