PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Solucionario de la Tercera práctica (tipo a)
Primer semestre 2024

Indicaciones generales:

- Duración: 110 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: con apuntes de clase (físicos o digitales) y calculadora no programable.
- No está permitido el uso de computadores ni celulares.
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**

Puntaje total: 20 puntos.

Solucionario:

1.1) La cuasi concavidad de F, junto con el hecho que es C^2 asegura que

$$(**) \quad -F_K^2 F_{LL} + 2u_{LK}^2 - F_{KK} F_L^2 > 0.$$

Esto se desprende del criterio de los determinantes Hessianos ampliados. Luego, por la regla de la cadena (considerando $L = L(K)$):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dK}\left(\frac{F_K}{F_L}\right) &= \frac{\frac{dF_K}{dK}F_L - \frac{dF_L}{dK}F_K}{F_L^2} \\
&= \frac{\left(F_{KK} + F_{KL}\frac{dL}{dK}\right)F_L - \left(F_{KL} + F_{LL}\frac{dL}{dK}\right)F_K}{F_L^2}.
\end{aligned}$$

Como $\frac{dL}{dK} = -\frac{F_K}{F_L}$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dK}\left(\frac{F_K}{F_L}\right) &= \frac{1}{F_L^2}\left[F_L F_{KK} - \frac{F_L F_K F_{KL}}{F_L} - \frac{F_{KL} F_K F_L}{F_L} + F_{LL} F_K^2\right] \\
&= \frac{F_K^2 F_{LL} - 2F_{KL} F_K F_L + F_{KK} F_L^2}{F_L^3} \\
&= -\frac{**}{F_L^3} < 0.
\end{aligned}$$

1.2) Primero, calculamos la TMST (Tasa Marginal de Sustitución Técnica)

$$\begin{aligned}
TMST &= \frac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2} \\
&= \frac{(1/\rho)\alpha_1 x_1^{\rho-1} A\left(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho\right)^{1/\rho-1}}{(1/\rho)\alpha_2 x_2^{\rho-1} A\left(\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho\right)^{1/\rho-1}} \\
&= \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\rho-1}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\frac{d(x_2/x_1)}{dTMST} = \frac{1}{1-\rho} TMST^{\frac{1}{1-\rho}-1}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{-\frac{1}{1-\rho}}.$$

Por ende,

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{d(x_2/x_1)}{dTMST}\frac{TMST}{x_2/x_1} \\
&= \frac{1}{1-\rho} TMST^{\frac{1}{1-\rho}-1}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{-\frac{1}{1-\rho}}\frac{TMST}{x_2/x_1} \\
&= \frac{1}{1-\rho} TMST^{\frac{1}{1-\rho}-1+1}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{-\frac{1}{1-\rho}}\frac{x_1}{x_2} \\
&= \frac{1}{1-\rho}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\rho-1}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{-\frac{1}{1-\rho}}\frac{x_1}{x_2} \\
&= \frac{1}{1-\rho}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{-\frac{1}{1-\rho}}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{\rho-1}{1-\rho}}\frac{x_1}{x_2} \\
&= \frac{1}{1-\rho}.
\end{aligned}$$

2.1) El problema queda re-escrito

$$\max_{x_1\geq 0} pAx_1^\alpha k^\beta - kw_2 - w_1x_1.$$

Como $\alpha \in (0,1)$, no es óptimo que $x_1 = 0$. Así, la solución es interior. Aplicando CPO:

$$\begin{aligned}
x_1^* &= \left[\frac{w_1}{k^\beta pA\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
&= \left(\frac{\alpha Ap}{w_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} k^{\frac{\beta}{1-\alpha}} \\
q^* &= A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\alpha p}{w_1}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} k^{\frac{\beta}{1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\pi(p,w_1,w_2,k,\alpha,\beta,A) = \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)(\alpha Ap)^{\frac{1}{1-\alpha}} w_1^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} k^{\frac{\beta}{1-\alpha}}.$$

2.2) Aplicando CPO, tenemos

$$\frac{d}{dy}[(a-bq)q-cq^2] = a-2bq-2cq = 0 \implies q^* = \frac{a}{2(b+c)}.$$

Luego,

$$p(q^*) = a - \frac{ab}{2(b+c)} = \frac{ab+2ac}{2(b+c)}.$$

Finalmente, la concavidad estricta de la función objetivo asegura la optimalidad de q^*. En caso $c(q) = cq$, hay dos casos. Si $a > c$,

$$q^* = \frac{a-c}{2b},\ p^* = \frac{a+c}{2}.$$

Si $a \leq c$, $q^* = 0$ y $p^* = a$. Los beneficios son nulos en dicho caso. Esto significa que, con costos lineales (costo marginal constante, puede que no le convenga al monopolista producir). Finalmente, en el primer caso,

$$\pi(a,b,c) = \frac{a^2(b+c)}{4(b+c)^2} = \frac{a^2}{4(b+c)}.$$

En el segundo caso, como se dijo, si $a < c$, el beneficio es nulo. Si $a > c$,

$$\pi(a,b,c) = \frac{(a-c)^2}{4b}.$$

3) El objetivo es resolver

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \max_{\mu,\sigma^2} & L(\mu,\sigma^2; x_1,...,x_n) \\ s.a.: & (\mu,\sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Es importante que los x_i no sean iguales. Note que se maximiza sobre μ y σ^2. Un primer enfoque, para poder encontrar los candidatos a óptimos locales, es aplicar directamente las condiciones de primer orden a la función objetivo

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = \frac{-n}{(\sigma^2)^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{(\sigma^2)^{n/2}\sqrt{2\pi}\cdot(\sigma^2)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2} = 0.$$

Como la exponencial es siempre positiva, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0$$
$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \overline{x} = \hat{\mu}.$$

Luego, teniendo en cuenta nuevamente que $e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} > 0$ y simplificando obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma^n\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^3} &= \frac{n}{\sigma^{n+1}\sqrt{2\pi}^n} \\
\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^{n+3}} &= \frac{n}{\sigma^{n+1}} \\
m\sigma^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.
\end{aligned}$$

O sea,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2.$$

Observación: dada la estructura (productoria) de la función de máxima verosimilitud, considerando sobre todo las condiciones de segundo orden, lo más acertado es maximizar la función de log-verosimilitud, definida de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
K(\theta) &= K(\mu, \sigma^2|x) \\
&= \ln(L(x_1, ..., x_n; \mu, \sigma^2)) \\
&= \ln\left[\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}\right] \\
&= -n\ln\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - \frac{n}{2}\ln\sigma^2.
\end{aligned}$$

Debido a las propiedades de la función logaritmo neperiano, $K(\theta)$ posee los mismos óptimos, y de misma naturaleza, que $L(x;\theta)$. Por ende, bastaba con aplicar las CPO a $K(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \\
\frac{\partial K}{\partial \sigma^2} &= \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - \frac{n}{2\sigma^2} = 0.
\end{aligned}$$

Despejando, se vuelven a obtener los candidatos a máximo local

$$\begin{aligned}
\hat{\mu} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \overline{x} \\
\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2.
\end{aligned}$$

Queda entonces únicamente por analizar las condiciones de segundo orden para ver si se trata de un máximo.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 K}{\partial \mu^2} &= -\frac{n}{\sigma^2} \\
\frac{\partial^2 K}{\partial \mu \partial \sigma^2} &= \frac{\partial^2 K}{\partial \sigma^2 \partial \mu} = -\frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) \\
\frac{\partial^2 K}{\partial (\sigma^2)^2} &= \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2.
\end{aligned}$$

Luego,

$$H(K(\mu,\sigma^2)) = \begin{bmatrix} -\frac{n}{\sigma^2} & -\frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) \\ -\frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) & \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \end{bmatrix}.$$

Por ende,

$$D_1 = H_{11}(K(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)) = -\frac{n}{\hat{\sigma}^2} < 0$$

y

$$\begin{aligned}
D_2 &= \det(H(K(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2))) \\
&= \frac{1}{\sigma^6}\left[-\frac{n^2}{\sigma^2} + \frac{n}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\right)^2\right]\Bigg|_{\mu=\overline{x},\sigma^2=\hat{\sigma}^2} \\
&= \frac{1}{\sigma^6}\left[-\frac{n^2}{\sigma^2} + \frac{n}{\sigma^2}\sigma^2 - \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\right)^2\right]\Bigg|_{\mu=\overline{x},\sigma^2=\hat{\sigma}^2} \\
&= \frac{1}{\hat{\sigma}^6}\left[-\frac{n^2}{\hat{\sigma}^2} + \frac{n}{\hat{\sigma}^2}\hat{\sigma}^2 - \frac{1}{\hat{\sigma}^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})\right)^2\right] \\
&= -\frac{n}{\hat{\sigma}^2} - \frac{n}{2\hat{\sigma}^6} \\
&= \frac{n^2}{2\hat{\sigma}^6} > 0.
\end{aligned}$$

Concluimos entonces, gracias a las condiciones de segundo orden, que $(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)$ es en efecto un máximo local.

4.1) El problema de maximización del beneficio es

$$\max_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n} \left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{\rho}\right] - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i.$$

4.2) Las CPO de primer orden proveen

$$\alpha_i \rho x_i^{\rho-1} = w_i \implies x_i^* = \left[\frac{w_i}{\alpha_i \rho}\right]^{\frac{1}{\rho-1}}.$$

Se trata de un máximo pues f es estrictamente cóncava: suma de estrictamente cóncavas, o verificar que la Hessiana es definida positiva. Finalmente,

$$\pi(\mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}, \rho) = \sum_{i=1}^{N} \left[\alpha_i^{\frac{1}{1-\rho}} \left(\frac{\rho}{w_i} \right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} - w_i^{\frac{1-2\rho}{1-\rho}} (\alpha_i \rho)^{\frac{1}{1-\rho}} \right].$$