PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Lista de ejercicios
Primer semestre 2025

Aquellos ejercicios marcados con (∗) o (∗∗) son más retadores para alumnos sin previa exposición a cursos de análisis en $\mathbb{R}^n$ y microeconomía. Todos los ejercicios se pueden resolver aplicando análisis convexo y optimización, sin importar el contexto del problema.

Elementos de álgebra lineal

I. Espacios vectoriales y producto interno.

1. Demuestre que en un espacio vectorial $\mathcal{U}$, el vector nulo (elemento neutro) $\mathbf{0}$ es único.
2. Dados $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, analice si $|x_1 y_1| \cdot |x_2 y_2|$ define un producto interno. Sugerencia: considere $(x_1, x_2) = (1, 0)$.
3. Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}$, pruebe que si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, entonces $||\mathbf{x}|| \leq ||\mathbf{x} + a\mathbf{y}||$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Sugerencia: recuerde que $||\mathbf{x}||^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$.
4. Pruebe que
$$16 \leq (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right), \; x_i > 0.$$
Sugerencia: use la desigualdad media-aritmética o Cauchy-Schwarz.
5. Pruebe que si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{y}$ es un vector en la misma dirección del vector $\mathbf{x}$, entonces $\mathrm{Pr}_{\mathbf{x}}\mathbf{y} = \|\mathbf{y}\|\mathbf{u}$, donde $\mathbf{u}$ es un vector unitario en la dirección del vector $\mathbf{x}$.
6. Demuestre que, dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$, donde $||\mathbf{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Esto se conoce como la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Sugerencia: use $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \geq 0$ o considere el polinomio $p(t) = ||\mathbf{x} - t\mathbf{y}||$.
7. Asuma que la desigualdad anterior se cumple en $\mathbb{R}^n$ (esto se deduce de hecho de una de las posibles demostraciones del ítem anterior de manera directa). Demuestre que
$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$
Sugerencia: considere el vector $\mathbf{1}$ y $(x_1, ..., x_n)$.
8. Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz para probar la desigualdad triangular: $\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ (para $\mathbb{R}^n$ es la misma prueba)
$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||.$$
Sugerencia: use Cauchy-Schwarz.

II. Subespacios vectoriales. Bases y dimensión.

1. Analice si $S = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 x_2 \geq 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ y de serlo, encuentre su dimensión.
2. Analice si $S = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n} : \; A \text{ es simétrica}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ y de serlo, encuentre su dimensión.

3. Si el concepto de combinación lineal se extendiera a una suma infinita, ¿cuál seria una combinación lineal que generaría la función $f(x) = e^x$? ¿Y para $g(x) = \cos x$?

4. Determine todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$.

5. Demuestre que el conjunto de todas las funciones continuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es un subespacio vectorial del espacio vectoriales de funciones $F : [a, b] \to \mathbb{R}$.

6. Si $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_4$ genera $\mathcal{U}$, analice si

$$\{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_4\}$$

generan el espacio.

7. Analice la siguiente afirmación: si $\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m\}$ y $\{\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m\}$ son listas de vectores li, entonces $\{\mathbf{x}_i + \mathbf{y}_i\}_{i=1,...,m}$ es una lista de vectores li.

III. Transformaciones lineales.

1. Considere las siguientes dos variables económicas: el precio de un cierto bien, denotado por p, y la demanda de un consumidor de dicho bien, denotada por D. Proponga una relación lineal o lineal afín (escoja adecuadamente una de las 2) entre D y p. Justifique e interprete su propuesta. ¿Cómo cambiaría si sabe que el consumidor es muy sensible al precio?

2. Pruebe que las aplicaciones T que se dan a continuación son transformación lineales. a) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, 3x_1)$.
   b) $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_2, x_1 + 3x_1)$.
   c) $T(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + x_2 - x_3$.

3. Sea T una transformación lineal. Pruebe que si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son ld, entonces $T\mathbf{x}_1, T\mathbf{x}_2, \ldots, T\mathbf{x}_n$ también son ld.

4. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal, tal que $T(1, 0) = (1, 3)$ y $T(0, 1) = (1, 1)$. Obtenga $T(2, 5)$. En general, ¿cómo es $T(x_1, x_2)$?

5. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación definida por

$$T(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2, x_1 + x_2).$$

Encuentre la matriz asociada a T en la base $\mathcal{B} = \{(5, 3), (1, 1)\}$.

6. Sea A un matriz cuadrada de orden $n \times n$. Pruebe que si $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces $A = 0$.

7. Proporcione un ejemplo de una aplicación homogénea de grado 1 que no sea aditiva.

8. Considere una función de producción tipo Cobb-Douglas: $F(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$, donde K denota capital, L trabajo y $A > 0$ es una constante.
   - ¿Bajo qué condiciones sobre los parámetros un incremento en los insumos genera un incremento en la producción?
   - ¿Bajo qué condiciones sobre los parámetros la tasa de crecimiento de la producción respecto de sus factores K y L es cada vez menor?

9. Sea $\mathcal{U}$ un espacio vectorial con dimensión $n > 1$. Sea $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ el espacio de aplicaciones lineales de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{U}$. Considere $C \subset \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ el conjunto de todas la aplicaciones lineales no invertibles de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{U}$. Analice si C es o no un subespacio vectorial.

IV. Valores y vectores propios.

1. Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$ no singular con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. ¿Cuáles son los valores propios de la matriz A^{-1}? ¿Cuáles son sus vectores propios?

2. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Calcule sus valores propios, vectores propios y obtenga los espacios propios correspondientes. Analice si la matriz es diagonalizable.

3. Dada la matriz A que se da a continuación, encuentre A^k para todo $k \in \mathbb{N}_0$:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Pruebe que si A y B son equivalentes, entonces $|A| = |B|$.

5. Pruebe que si A y B son equivalentes, entonces A^k y B^k también lo son.

6. Considere el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\delta & 0 \\ \delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

con $k \in \mathbb{Z}_+$ y $\delta \in (0,1)$. Suponga que x_1 es un insumo y x_2 un output.

- Interprete el modelo. Identifique qué podrían ser x_1 y x_2.
- Analice $\lim_{k\to\infty} x_i(k)$ e interprete.

7. Considere el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Obtenga un conjunto solución al sistema lineal. Para esto, transforme el sistema: $D\mathbf{y} = \mathbf{c}$ con $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$ y $\mathbf{c} = P^{-1}\mathbf{b}$.

V. Formas cuadráticas.

1. Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, entonces $A^T A$ es una matriz simétrica de orden $n \times n$. Pruebe, además, que $A^T A$ es positivo semidefinida; esto es, todos sus valores propios son no negativos.

2. Sea $A = \text{Hess}(f)(\mathbf{x}_0)$ donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. ¿Bajo qué condiciones sobre f, $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ es una forma cuadrática «en el formato estándar»?

3. Considere que una firma puede escoger entre dos procesos de producción (1 y 2) que le generan los siguientes costos de producción:

$$\begin{aligned} C_1(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_2x_3 \\ C_2(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_3^2. \end{aligned}$$

Aquí x_1, x_2 y x_3 son insumos de producción. La firma desea que su costo sea el menor posible para cualquier combinación de insumos (x_1, x_2, x_3). Determine qué proceso de producción escogerá.

4. Clasifique las formas cuadráticas

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2 \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 6x_3x_4 + x_4^2. \end{aligned}$$

5. ¿Para qué valores de α, la forma cuadrática $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $x_1^2 + \alpha x_2^2 + 8x_2x_3 + \alpha x_3^2$ es definida positiva?
6. En la base canónica de $\mathbb{R}^2$ una forma cuadrática $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está dada por la siguiente expresión

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Determine cuál es la expresión de la función f en la base de $\mathbb{R}^2$ formada por los vectores $\mathbf{u} = (1, 1)$ y $\mathbf{v} = (-2, 2)$.

VI. Modelo de Leontief.

Considere tres sectores productivos: el sector primario agro-exportador, el sector industrial y el sector de servicios. Suponga que, en términos de proporciones, el sector primario requiere de 0.4 de su propio sector, 0.4 del sector industrial y 0.1 del sector de servicios. Por otro lado, el sector industrial requiere de 0.2 del sector agro-exportador, 0.2 de su propio sector y del sector servicios 0.3. Finalmente, el sector servicios requiere 0.2 del sector agro-exportador, 0.1 del sector industrial y 0.3 de su propio sector. Además, se sabe que la demanda externa es $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 200 \end{bmatrix}$.

- Plantee el modelo como un problema de insumo-producto e interprételo.
- Encuentre la oferta óptima (cantidad producida) por cada sector en el equilibrio.

Elementos de topología

1. Pruebe que $C[0,1]$ con la norma $||\cdot||_p$, $1 \leq p < \infty$ no es completo.
2. Pruebe que $C[0,1]$ con la norma $||\cdot||_\infty$ es completo.
3. Pruebe que para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se cumple

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|\mathbf{x}\|_p.$$

4. $(*)$ Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ y $\|\cdot\|$, la norma dada por

$$||A|| = \sup_{\mathbf{x}\in\partial\mathcal{B}(\mathbf{0};1)} ||A\mathbf{x}||.$$

Pruebe que $\rho(A) \leq \|A\|$ (recuerde que $\rho(A)$ es el radio espectral de A).

5. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ dos puntos fijos y $r_1, r_2 > 0$. Pruebe que

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, r_1) \subset \mathcal{B}(\mathbf{y}, r_2) \Leftrightarrow \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq r_2 - r_1.$$

6. Pruebe que (i) la unión finita y la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, (ii) la intersección finita de conjuntos compactos es un conjunto compacto.
7. Se define un vector unitario como aquel cuya norma es 1. Diga cuáles de los siguientes vectores son unitarios.
   - $\mathbf{x} = (1, 0, 2)$, respecto de la norma Euclidiana.
   - $\mathbf{x} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, respecto de la norma Euclidiana.
   - $\mathbf{x}(t) = t^2 - 4t + 3,\ t \in\ [0, 4]$, respecto de la norma $\|\cdot\|_1$.
8. Pruebe que para las matrices A de orden $m \times n$ y B, de orden $n \times k$, se cumple la siguiente desigualdad para las correspondientes normas inducidas:

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Deduzca de aquí que si A es cuadrada, entonces $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

9. Calcule la distancia entre las funciones $\mathbf{x}(t) = t^3 - 2t + 5$ e $\mathbf{y}(t) = 3t^2 + t + 3$, $t \in [-3, 3]$ en $C([-3, 3], \|\cdot\|_1)$.
10. Pruebe que si S es un conjunto abierto no vacío y A es cualquier otro conjunto no vacío, $S + A$ es abierto.

Introducción al análisis convexo

1. Basado en argumentos geométricos y por definición, diga cuáles de los siguientes conjuntos son convexos:

   - $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 \geq x_1\}$
   - $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 \leq \ln x_1\}$
   - $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 x_2 = 2\}$
   - $\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \leq 1\right\}$
   - $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 \leq 2\}$.

2. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : S \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal. Pruebe que el conjunto imagen, $f(S)$, es un conjunto convexo.

3. Sea Y un conjunto de producción. Analice, en función de si la firma posee rendimientos a escala constantes, crecientes o decrecientes, se cumple que, para $\alpha \geq 0$ e $\mathbf{y} \in Y$, $\alpha\mathbf{y} \in Y$. Analice bajo qué condiciones Y es convexo e interprete.

4. Un consumidor tiene preferencias sobre cuatro canastas factibles, pero no se decide por ninguna de ellas y, más bien, decide consumir $3/7$ de la primera, $1/7$ de la segunda, $2/7$ de la tercera y $1/7$ de la última. Se requiere saber si esta combinación produce también una canasta factible de consumo.

5. Un agente económico consume n bienes, cuyas cantidades vienen representadas por $x_1, ..., x_n$. Este agente económico puede únicamente consumir cantidades de los bienes mayores o iguales a $a_1, a_2, ..., a_n > 0$. Determine la restricción presupuestaria del agente, es decir, el conjunto de canastas de consumo $(x_1, ..., x_n)$ que son factibles (que puede consumir). Para esto, considere que el agente tiene un ingreso $I > 0$ y enfrenta un nivel de precios $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n_{++}$. Luego, en función de los parámetros $a_1, ..., a_n, p_1, ..., p_n$ e I, analice si el conjunto es no vacío, compacto y/o convexo.

6. Para $n = 2$, $p_1 = p_2 = 2$, $I = 10$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 0.5$, grafique la restricción presupuestaria. Muestre gráficamente cómo cambia la región si p_2 pasa a valer 1 e I pasa a valer 12. ¿Podría decirse que el consumidor tiene más opciones para consumir cuando $p_2 = 1$ o cuando $p_2 = 2$? ¿Si los precios aumentan pero el ingreso aumenta también, es posible determinar en qué casos el consumidor tiene más opciones para consumir? Justifique su respuesta.

7. $(*)$ Considere el conjunto
$$X = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{++} : \prod_{i=1}^{n} x_i \geq 1\right\}.$$
   Pruebe que X es convexo.

8. $(*)$ Considere el siguiente conjunto
$$U = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{+} : \ \min\left\{\frac{x_1}{a_1}, \cdots, \frac{x_n}{a_n}\right\} \geq c\right\},$$
   donde $a_1, ..., a_n > 0$ y $c \geq 0$. Muestre que U es convexo.

9. $(*)$ Sea $Y \subset \mathbb{R}^n$ una tecnología. Diremos que la tecnología presenta rendimientos a escala no crecientes si: $\forall \ \mathbf{y} \in Y$, $\alpha\mathbf{y} \in Y$, $\forall \ \alpha \in [0, 1]$. Por otro lado, diremos que la tecnología es aditiva si dados $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in Y$, $\mathbf{y} + \mathbf{y}' \in Y$. Pruebe que una tecnología presenta rendimientos a escala no crecientes y es aditiva si y solamente si es un cono convexo.

10. Se dice que una tecnología $Y \subset \mathbb{R}^L$ presenta la propiedad de libre disposición si dados $\mathbf{y} \in Y$ e $\mathbf{y}' \leq \mathbf{y}$, entonces $\mathbf{y}' \in Y$. Demuestre que si una tecnología es cerrada (es decir, Y es un conjunto cerrado), convexa y tal que $-\mathbb{R}^L_+ \subset Y$, entonces cumple la propiedad de libre disposición.

Funciones convexas y cóncavas

1. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ convexa y diferenciable. Pruebe que la función
$$g(x) = \exp\left[\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right],\ x > 0,$$
es convexa.

2. Proponga condiciones bajo las cuales el producto de funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexas y de clase C^2 es una función convexa.

3. Sea $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c$, donde $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. ¿Bajo qué condiciones sobre $A, \mathbf{b}$ y c la función f es convexa?

4. $(*)$ Pruebe que si f es convexa sobre $[a, b]$, entonces se cumple la siguiente desigualdad:
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

5. $(*)$ Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Para $h > 0$ fijo, defina
$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt.$$
Pruebe que si f es convexa, $f_h(x) \geq f(x)$.

6. Sean $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : D_2 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones convexas. Pruebe que
$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\},\ h : D_1 \cap D_2 \to \mathbb{R}$$
es convexa.

7. $(*)$ Demuestre que
$$u(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i},\ \alpha_i \geq 0\ \forall\ i = 1, ..., n$$
es cuasi cóncava sobre $\mathbb{R}^n_{++}$.

8. $(**)$ Considere una función de producción de tipo CES (Constant Elasticity of Substitution) generalizada $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$
$$f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^\rho\right)^{1/\rho},\ \rho \neq 0,\ \alpha_i > 0. \tag{1}$$
Demuestre que f es cuasi cóncava para $\rho \leq 1$.

   Nota histórica: La función CES (Elasticidad Constante de Sustitución) es un tipo de función de producción utilizada en economía para representar una tecnología que permite sustituir entre insumos con una elasticidad constante. Fue introducida por Kenneth Arrow (matemático y premio nobel de economía de 1972), H. B. Chenery, B. S. Minhas, y Robert Solow matemático y premio nobel de economía de 1987) en 1961. Los parámetros α_i representan las participaciones de los insumos en la producción, y ρ determina la facilidad de sustitución entre estos insumos, con ρ cerca de cero indicando sustitutos cercanos y ρ muy negativo indicando complementos cercanos. La elasticidad de sustitución es una medida económica que indica qué tan fácilmente los consumidores o productores pueden sustituir un bien o insumo por otro en respuesta a cambios en los precios relativos. Esencialmente, refleja la sensibilidad de la proporción en la que se usan dos bienes o insumos ante cambios en la relación de sus precios. Si la elasticidad de sustitución es alta, significa que los bienes o insumos se pueden sustituir fácilmente entre sí. Por ejemplo, si el precio de un bien aumenta, los consumidores o productores pueden cambiar rápidamente a un bien sustituto más barato sin mucha pérdida en utilidad o productividad. Por otro lado, una elasticidad baja indica que los bienes o insumos son más complementarios, lo que significa que es difícil sustituir uno por el otro sin afectar significativamente el consumo o la producción.

9. (**) Demuestre que si una función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es cuasi cóncava y homogénea de grado 1, entonces es cóncava. Use esto para deducir que la CES generalizada (Ecuación (1)) es cóncava para $\rho \leq 1$.

10. (*) Sea $u(x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de utilidad cuasi cóncava y de clase C^2, con utilidades marginales estrictamente positivas, con utilidades marginales positivas.

    - Demuestre que su tasa marginal de sustitución (TMS) u_{x_1}/u_{x_2} es decreciente en x_1. Para esto, suponga que x_2 es función diferenciable de x_1, $x_2 = x_2(x_1)$. Además analice esto desde la perspectiva de una curva de nivel.
    - ¿Es cierto que cuando la TMS es decreciente el consumidor está dispuesto a dar cada vez más unidades del bien x_1 por una unidad del bien x_2 cuando su consumo en x_1 es mucho mayor que el de x_2? Justifique su respuesta.

11. (**) Pruebe que
$$f(x_1, ..., x_n) = \ln\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right)$$
es convexa sobre $\mathbb{R}^n$. Sugerencia. Aplique la desigualdad de Holder: dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y $p, q \in]1, \infty[$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}$.

12. (**) Sean $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ y $b_i \in \mathbb{R}$. Demuestre que la siguiente función es convexa:
$$f(\mathbf{x}) = -\ln\left[-\ln\left(\sum_{i=1}^{p} e^{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}+b_i}\right)\right], \ \mathrm{Dom}(f) = \left\{\mathbf{x} : \ \sum_{i=1}^{p} e^{\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}+b_i} < 1\right\}.$$

13. Demuestre por definición que x^2 es convexa.

Teoría clásica de la demanda y producción

I. Teoría clásica de la demanda.

1. Considere el problema de maximización de la utilidad
$$\mathcal{P}_u : \begin{cases} \max & u(\mathbf{x}) \\ \text{s. a}: & \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq I \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{cases}$$
Asuma que $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$, $I > 0$ y que $u(\cdot)$ es continua y tal que $\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}_1 \implies u(\mathbf{x}_2) > u(\mathbf{x}_1)$. Sea $\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)$ una solución al problema.

    - Demuestre que $\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)$ es homogénea de grado cero (es decir, $\mathbf{x}^*(\alpha\mathbf{p}, \alpha I) = \mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)$ para todo $\alpha > 0$) y que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I) = I$.
    - Si u es cuasi cóncava, demuestre que el conjunto de soluciones al problema $\mathcal{P}_u$ es convexo. Si u es estrictamente cuasi cóncava, demuestre que el conjunto de soluciones al problema $\mathcal{P}_u$ es unitario (la solución es única).
    - Considere $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, $u(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i$, $p_i = 1$, $\forall\ i$, e $I = 20$. Resuelva $\mathcal{P}_u$ analíticamente. Justifique su respuesta. Nota: Puede usar cualquier método o argumento que considere viable.
    - Considere $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, $u(\mathbf{x}) = \min\{x_1, ..., x_n\}$, $p_i = 1$, $\forall\ i$, e $I = 100$. Resuelva $\mathcal{P}_u$ analíticamente. Justifique su respuesta.
    - Haga lo mismo para $u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ con $a_i > 0$.

2. Considere el problema de minimización del gasto:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}}\ & \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} \\ \text{s. a. :}\ & u(\mathbf{x}) \geq \overline{u} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

donde u es una función de utilidad continua tal que $\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}_1 \Rightarrow u(\mathbf{x}_2) > u(\mathbf{x}_1)$ y $u(\mathbf{0}) = 0$. Por otro lado, $\overline{u}$ es un parámetro positivo, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ representa una canasta de consumo.

- Explique con detalle la formulación del problema. Definimos la función «valor óptimo» por

$$e(\mathbf{p}, \overline{u}) = \min_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0},\ u(\mathbf{x})\geq\overline{u}} \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}.$$

  ¿Qué espera que suceda con la función valor óptimo si $\overline{u}$ aumenta?
- Demuestre que la función valor óptimo es cóncava con respecto al vector de precios $\mathbf{p}$. ¿A qué se debe esto (analice)?
- Resuelva el problema gráficamente si $n = 2$, $u(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$, $\overline{u} = 5$ y $p_1 = p_2 = 1$. Interprete la solución.
- Resuelva el problema cuando $u(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$ y $p_1 > p_2 > \cdots > p_n$. Interprete su solución (explique lo obtenido en sus propias palabras).

II. Teoría clásica de la producción.

1. (**) Dada una tecnología $Y \subset \mathbb{R}^n$ y dado un vector de precios $\mathbf{p}$ (tanto de inputs como de outputs) definimos la función de beneficios $\pi(\mathbf{p}) = \max_{\mathbf{y}\in Y} \mathbf{p}\cdot\mathbf{y}$.

- Explique la formulación del problema de optimización y demuestre que $\pi(\cdot)$ es homogénea de grado 1. Interprete esto último.
- Demuestre que la función $\pi(\cdot)$ es convexa.
- Demuestre que si Y es cerrada (es decir Y es un conjunto cerrado) y convexa (es decir Y es un conjunto convexo), entonces

$$Y = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{p}\cdot\mathbf{y} \leq \pi(\mathbf{p}),\ \forall\ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n\}.$$

- Demuestre que si Y es cerrada es decir Y es un conjunto cerrado) y convexa (es decir Y es un conjunto convexo) y posee la propiedad de libre disposición (recuerde de la PC2 que esto es, dado $\mathbf{y} \in Y$ e $\mathbf{y}' \leq \mathbf{y}$, entonces $\mathbf{y}' \in Y$), entonces

$$Y = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{p}\cdot\mathbf{y} \leq \pi(\mathbf{p}),\ \forall\ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_+\}.$$

2. (**) Considere el problema de minimización del costo

$$\begin{aligned} \min\ & \mathbf{w}\cdot\mathbf{z} \\ \text{s. a:}\ & f(\mathbf{z}) \geq q \\ & \mathbf{z} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

En este problema, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n_+$ es el vector de precio de los insumos de producción $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $f(\cdot)$ la función de producción de la firma y $q > 0$ un parámetro que denota un nivel de producción del bien que produce la firma.

- Demuestre que la función valor óptimo, conocida como función de costos,

$$c(\mathbf{w}, q) = \min_{f(\mathbf{z})\geq q, \mathbf{z}\geq\mathbf{0}} \mathbf{w}\cdot\mathbf{z},$$

  es creciente en $\mathbf{w}$ (esto es, $\mathbf{w}_1 \leq \mathbf{w}_2 \implies c(\mathbf{w}_1, q) \leq c(\mathbf{w}_2, q)$) y que es homogénea de grado 1 en $\mathbf{w}$ (esto es, $c(\lambda\mathbf{w}, q) = \lambda c(\mathbf{w}, q)$ para todo $\lambda > 0$).

- Pruebe que $c(\mathbf{w}, q)$ es cóncava con respecto al vector de insumos $\mathbf{w}$.
- Pruebe que si $f(\cdot)$ es cóncava, entonces $c(\cdot)$ es una función convexa con respecto a q.
- Suponga que $f(\cdot)$ es homogénea de grado $\alpha > 0$, esto es $f(\lambda \mathbf{z}) = \lambda^\alpha f(\mathbf{z})$ para todo $\lambda > 0$. Asuma que la restricción se da con igualdad: $f(\mathbf{z}) = q$ (no hay desperdicios). Pruebe que

$$c(\mathbf{w}, q) = q^{1/\alpha} c(\mathbf{w}, 1).$$

- Considere la siguiente función

$$c(\mathbf{w}, q) = A w_1^a w_2^b q^c, A, c > 0.$$

¿Bajo qué condiciones sobre los parámetros a, b esta función corresponde a una función de costos? Suponga que si una función cumple con las propiedades descritas anteriormente y además es continua, es suficiente para asegurar que es una función de costos.
<u>Nota histórica:</u> El problema de recuperar la función de producción o función de utilidad a partir de una función de costo o de gasto es central en la teoría económica y utiliza herramientas como el lema de Shepard, en honor al economista Ronald Shepard, profesor en la Universidad de California, Berkeley. Este lema establece una relación formal entre las derivadas respecto a los precios de la función de costos (la función de gasto, respectivamente) y las demandas condicionales de los factores (la demanda Hicksiana, respectivamente). Paul Samuelson, uno de los teóricos más influyentes en economía y Premio Nobel de Economía en 1970, también contribuyó al desarrollo de la teoría de la dualidad y los métodos para recuperar funciones de utilidad y producción a partir de funciones de costos y gastos. El siguiente problema está relacionado a estas cuestiones y no se requiere emplear las herramientas desarrolladas por Shepard o Samuelson.
- Considere la siguiente función de costos:

$$c(\mathbf{w}, q) = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i w_i\right] q,$$

donde $a_i > 0, \forall\ i = 1, ..., n$. Pruebe que si la función de producción asociada es homogénea de grado 1 y que la restricción se da con igualdad (es decir $f(\mathbf{z}) = q$), entonces:

$$f(a_1, ..., a_n) = 1$$

para cualquier combinación de los parámetros $a_i > 0$.
- Determine la función de producción f si $c(\mathbf{w}, q) = \min\left\{\frac{w_1}{b_1}, \cdots, \frac{w_n}{b_n}\right\} q$.

3. Una empresa tiene la siguiente función de producción

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \min\{2x_1 + x_2, x_3 + 2x_4\}.$$

Encuentre la función de costo de esta empresa en términos de $w, q > 0$. Haga lo mismo para

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \min\{x_1, x_2\} + \min\{x_3, x_4\}.$$

4. Considere la siguiente función de costo:

$$c(w, q) = q^{1/2} (w_1 w_2)^{3/4}.$$

Encuentre la función de producción.

5. Considere la siguiente función de costo:

$$c(w, q) = q(w_1 - \sqrt{w_1 w_2} + w_2).$$

Encuentre la función de producción. Haga lo mismo para

$$c(w, q) = \left(q + \frac{1}{q}\right) \sqrt{w_1 w_2}.$$

Optimización estática sin restricciones

I. Optimización clásica y aplicaciones.

1. La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ puede escribirse de la siguiente forma:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - a)^{2m} + (x_2 - b)^{2n} + c,$$

donde a, b y c son constantes y $m, n \in \mathbb{N}$.

- ¿Cuál es el punto mínimo de la función f?
- ¿Cuál es valor mínimo de la función f?
- ¿Tiene puntos máximos la función f?

2. Supongamos que un consumidor tiene inicialmente la riqueza monetaria W. Existe la probabilidad p de que pierda la cantidad L; por ejemplo, existe la probabilidad p sw que se queme su casa. Puede suscribir un seguro por el que percibirá q soles si experimenta esta pérdida. La cantidad de dinero que ha de pagar a cambio de q soles de cobertura del seguro es πq, donde π es la prima por sol de cobertura. ¿Cuántas cobertura suscribirá el consumidor? Sugerencia: revise el capítulo 4 de MWG.

3. Considere el siguiente problema de maximización del beneficio «en el corto plazo» (lo que significa que uno de los dos insumos está fijo, por ejemplo $x_2 = k$):

$$\max_{x_1, q \geq 0} \quad pq - w_1 x_1 - w_2 k$$
$$A x_1^{\alpha} k^{\beta} = q$$

con $\alpha, \beta \in]0, 1[$, $A, k, w_1, w_2, p > 0$. Plantee el problema como un problema de optimización en una única variable y explique por qué la solución es interior. Luego, obtenga la solución al problema (x_1^*, q^*) y la función valor óptimo $\pi(p, w_1, w_2, k, \alpha, \beta, A)$.

4. El problema del monopolista consiste en lo siguiente; dada una función inversa de demanda $p = p(q)$, su objetivo es resolver

$$\max_{q \geq 0} p(q)q - c(q),$$

donde $c(q)$ es la función de costos de la firma, que depende del nivel de producción q. Suponga que $p(q) = a - bq$ y (i) $c(q) = c \cdot q^2$, (ii) $c(q) = c \cdot q$, con $a, b, c > 0$. Resuelva el problema del monopolista para ambos casos y compárelos. Finalmente, obtenga los beneficios del monopolista en ambos casos.

5. Sea $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ una muestra aleatoria correspondiente a una distribución normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Se define la función de verosimilitud por:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, ..., x_n; \mu, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \mu, \sigma^2) \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Se denominan los estimadores de máxima verosimilitud de μ y σ^2 (que se denotan por $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}^2$) a los valores para los que se alcanza el máximo valor de la función definida en (2). Calcule $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}^2$, comprobando que se trata de un máximo. Asuma que no todos los x_i son iguales.

6. Considere una firma que posee una función de producción tipo CES

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i^{\rho}, \; 0 < \rho < 1, \; \gamma_i > 0.$$

- Plantee el problema de maximización del beneficio de esta firma, asumiendo que los precios de los insumos son $w_1, ..., w_n > 0$ y el precio del bien que se produce es $p = 1$.

- Resuelva el problema: verifique las condiciones de primer y segundo orden. Determine el beneficio de la firma cuando usa las cantidades óptimas de insumos.

II. Estática comparativa.

1. Sea $F : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}$, $F(x_1, x_2)$ una función de producción diferenciable. La elasticidad de sustitución de esta función se define como
$$\sigma = \frac{d(x_2/x_1)}{dTMST} \frac{TMST}{x_2/x_1},$$
donde $TMST = \frac{F_{x_1}}{F_{x_2}}$. Si
$$F(x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho)^{1/\rho}, \ \rho \neq 0, \ \alpha_i > 0,$$
demuestre que
$$\sigma = \frac{1}{1-\rho}.$$

2. $(**)$ Considere el siguiente modelo macroeconómico
$$Y = C_0 + C(Y - T_0 - T(Y), r) + I_0 + I(r, Y) + G_0$$
$$L_0 + L(Y, r) = M_0.$$
Las variables endógenas del modelo son Y, la producción y r, la tasa de interés. Considere los siguientes supuestos de comportamiento
$$0 < C_{Y_d} < 1, \ T_Y > 0, C_r < 0, I_Y > 0, I_r < 0$$
$$C_{Y_d} + I_Y < 1, L_Y > 0, L_r < 0,$$
donde $Y^d = Y - T_0 - T(Y)$.
   - Determine los parámetros del modelo e identifique qué representan $T(Y)$ e $I(Y, r)$. Por ejemplo, $L(Y, r)$ es la función de demanda monetaria y M_0 la oferta monetaria.
   - Determine $\dfrac{\partial Y}{\partial G_0}$ y $\dfrac{\partial r}{\partial G_0}$.
   - ¿Es cierto que un incremento de la oferta monetaria M_0 reduce la producción Y? Justifique.
   - ¿Es cierto que un incremento de la oferta monetaria M_0 incrementa la tasa de interés r? Justifique.

Relaciones de preferencias

1. Sea $\succeq$ una relación de preferencias racional sobre $X = \mathbb{R}^n_+$ y $u(\cdot)$ una función de utilidad que la representa. Demuestre que si $\succeq$ es convexa, entonces $u(\cdot)$ es cuasi cóncava.

2. Pruebe que si $\succeq$ es racional, entonces
   - $\succ$ es tanto irreflexiva ($x \succ x$ nunca se cumple) como transitiva ($x \succ y$ y $y \succ z$ implican $x \succ z$).
   - $\sim$ es reflexiva ($x \sim x$ para todo x) y transitiva ($x \sim y$ y $y \sim z$ implican $x \sim z$).
   - Si $x \succ y \succeq z$, entonces $x \succ z$.

3. Pruebe que una preferencia $\succeq$ puede ser representada por una función de utilidad solo si es racional.

4. Si u representa $\succeq$ y f es simplemente creciente (no estrictamente), ¿$f \circ u$ es necesariamente una función de utilidad que representa $\succeq$?

5. Considere una relación de preferencia racional $\succeq$. Muestre que si $u(x) = u(y)$ implica $x \sim y$ y $u(x) > u(y)$ implica $x \succ y$, entonces u representa $\succeq$.

6. Proponga una función que represente las preferencias de la siguiente afirmación: Una persona nunca come pan solo, siempre lo acompaña con mermelada, pero cuando no hay mermelada, usa mantequilla.

7. Pruebe que la preferencia lexicográfica es racional pero no es continua.

8. La relación de preferencia $\succeq$ es monótona en $X \subset \mathbb{R}^L$ si $x \in X$ y $y > x$ (desigualdad estricta en cada entrada) implica $y \succ x$. Es fuertemente monótona si $y \geq x$, $y \neq x$ implica $y \succ x$. Pruebe que, si $u : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$, C^1, representa $\succ$ y $\succ$ es fuertemente monótona, entonces $\frac{\partial u}{\partial x_i} > 0$.

9. La relación de preferencia en X, $\succeq$ es localmente no saciada si para todo $x \in X$ y todo $\varepsilon > 0$, existe $y \in X$ tal que $||y - x|| \leq \varepsilon$ y $y \succ x$. Pruebe que si $\succeq$ es monótona, entonces es localmente no saciada.

10. Considere una relación de preferencia continua $\succeq$ sobre $X = \mathbb{R}^L_+$ ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{L-1}_+$ respectivamente). Pruebe que

    - $\succeq$ es homotética si y solo si admite una función de utilidad $u(x)$ que es homogénea de grado uno: $u(\alpha x) = \alpha u(x)$.
    - $\succeq$ es cuasi-lineal con respecto al primer bien si y solo si admite una función de utilidad $u(x)$ de la forma
    $$u(x_1, \cdots, x_n) = x_1 + \phi(x_2, \cdots, x_L).$$

11. Daron Acemoglu tiene preferencias representadas por $u(x_1, x_2) = (x_1 + 1)(x_2 + 1)$. Demuestre que Acemoglu tiene preferencias convexas. ¿Son estrictamente convexas? Efectúe el mismo análisis para las preferencias de Robert Barro, representadas por $v(x_1, x_2) = \min\left\{\frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{10}\right\}$.

Optimización con restricciones

I. Lagrange y Karush-Kuhn-Tucker.

1. Para $L = 2$, $p_1 = p_2 = 1$, $I = 10$ y $u(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$, resuelva el problema de maximización de utilidad (UMP).

2. Resuelva el UMP para
$$u(x_1, x_2) = \alpha \ln x_1 + (1 - \alpha) \ln x_2, \ \alpha \in (0, 1).$$

3. $(*)$ Defina
$$v(p, w) = \max_{x \geq 0, \ p \cdot x \leq w} u(x).$$
   Pruebe que la función de utilidad indirecta $v : \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_+$ satisface las siguientes propiedades

    - Homogeneidad de grado cero.
    - Estrictamente creciente en w y no creciente en p_ℓ.
    - Cuasi-cóncava: $\{(p, w) : v(p, w) \leq \overline{v}\}$ es un conjunto convexo para todo $\overline{v}$.
    - Continua en p, w. Sugerencia: investigue acerca del Teorema de Berge.

4. Resuelva el UMP, dado un vector de precios $p > 0$ y riqueza $w > 0$ para

    - $u(x) = \sum_{i=1}^n x_i$.
    - $u(x) = \prod_{i=1}^n (x_i - a_i)^{\alpha_i}$, $\alpha_i, a_i > 0$ (Stone-Geary).
    - $u(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^\rho$, $\rho \in (0, 1)$, $\alpha_i > 0$.
    - $u(x) = \min\left\{\frac{x_1}{a_1}, \cdots, \frac{x_n}{n}\right\}$, $a_i > 0$.
    - $u(x_1, x_2) = x_1 + \ln x_2$.

5. Considere la siguiente función de utilidad

$$u(x_1, x_2) = x_1^{0.5} + x_2^{0.5}.$$

- Encuentre las demandas ordinarias, la función de utilidad indirecta y la función de gasto.
- Si los precios iniciales son ($p_1^0 = p_2^0 = 2$) pero luego $p_1^1 = 3$ (manteniendo $p_2^1 = 2$ y considerando $w = 100$), calcule la variación compensada y la variación equivalente.

6. (∗) Suponga que en un mundo con dos bienes, la función de utilidad del consumidor toma la forma

$$u(x) = [\alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho]^{1/\rho}, \ \rho \neq 0, \ \alpha_i > 0. \tag{3}$$

Esta es una función de utilidad de elasticidad de sustitución constante (CES). Pruebe lo siguiente:

- Cuando $\rho = 1$, la utilidad se vuelve lineal.
- Cuando $\rho \to 0$, la utilidad representa las mismas preferencias que la función de utilidad Cobb-Douglas $u(x) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$.
- Cuando $\rho \to -\infty$, la utilidad representa las mismas preferencias que la función de utilidad Leontief $\min\{x_1, x_2\}$.

Trate de generalizar este resultado para «el mundo con L bienes».

7. (∗∗) Una función de utilidad $u(x)$ es aditivamente separable si tiene la forma

$$u(x) = \sum_{\ell=1}^{L} u_\ell(x_\ell)$$

- Demuestre que la separabilidad aditiva es una propiedad cardinal que solo se preserva mediante transformaciones lineales de la función de utilidad.
- Demuestre que el orden inducido sobre cualquier grupo de bienes es independiente de los valores fijos que asignemos a los demás.
- Demuestre que la función de demanda Walrasiana y Hicksiana generada por una función de utilidad aditivamente separable no admite bienes inferiores[1] si las funciones $u_\ell(\cdot)$ son estrictamente cóncavas. Suponga diferenciabilidad y soluciones interiores.

8. Sea $f(z_1, z_2) = z_1^\alpha z_2^\beta$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Resuelva el problema de minimización de costos. Pruebe que

$$c(w_1, w_2, q) = q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \theta \phi(w_1, w_2)$$

con $\phi(w_1, w_2) = w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$ y

$$\theta = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}}.$$

9. Considere la siguiente función de utilidad (intertemporal)

$$u(x) = \sum_{t=1}^{T} \beta^t \sqrt{x_t}.$$

- Para $\beta = 1$, obtenga la demanda Walrasiana y la función de utilidad indirecta.
- Para $\beta \in (0, 1)$, pruebe que

$$x_t^* = \frac{\delta^t (1 - \delta^2)}{1 - \delta^{2(T+1)}}.$$

[1] La demanda disminuye cuando el ingreso aumenta.

10. Luego de explicar la formulación del problema (4), determine el problema dual asociado y demuestre que tiene solución.

$$\begin{cases} \max_{x_{ij}} & \sum_{i\in B}\sum_{j\in S} \alpha_{ij}x_{ij} \\ \text{s. a}: & x_{ij}\geq 0 \\ & \sum_{j\in S} x_{ij} \leq 1, \ \forall\, i\in B \\ & \sum_{i\in B} x_{ij} \leq 1, \ \forall\, j\in S. \end{cases} \tag{4}$$

11. En el problema de maximización de la utilidad, ¿bajo qué condiciones sobre la función de utilidad puede asegurar que la solución no es de esquina? Provea un ejemplo de una función que cumpla con dichas condiciones.

12. Resuelva, en función de los precios $p_1, p_2 > 0$ y el ingreso $I > 0$, el problema de maximización de la utilidad para

$$u(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2.$$

II. Teorema de la envolvente y aplicaciones en teoría del consumidor.

1. Suponga que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa una relación de preferencia localmente no saciada $\succeq$ definida en el conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$ y que el vector de precios es $p > 0$. Entonces, definiendo la función de gasto $e = e(p, \overline{u}) = \min_{u(x)\geq \overline{u}} p\cdot x$, pruebe que

   (a) Si x^* es óptimo en el UMP cuando $w > 0$, entonces x^* es óptimo en el EMP cuando $\overline{u} = u(x^*)$. Además, $e(p, \overline{u}) = w$.

   (b) Si x^* es óptimo en el EMP cuando el nivel de utilidad requerido es $\overline{u} > u(0)$, entonces x^* es óptimo en el UMP cuando $w = p \cdot x^*$. Además, $v(p, w) = \overline{u}$.

2. **Lema de Shephard.** Suponga que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa una relación de preferencia localmente no saciada y estrictamente convexa $\succeq$ definida en $X = \mathbb{R}^L_+$. Para todo p y $\overline{u}$, la demanda hicksiana $h(p, \overline{u})$ y la función de gasto satisfacen la siguiente relación

$$h(p, \overline{u}) = \nabla_p e(p, \overline{u}).$$

   Pruebe esto.

3. (∗) Suponga que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa una relación de preferencia localmente no saciada y estrictamente convexa $\succeq$ definida en el conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$. Suponga además que $h(\cdot, \overline{u})$ es continuamente diferenciable en $(p, \overline{u})$ y denote su matriz Jacobiana de tamaño $L \times L$ por $D_p h(p, \overline{u})$. Entonces, pruebe que

   (a) $D_p h(p, \overline{u}) = D^2_p e(p, \overline{u})$.

   (b) $D_p h(p, \overline{u})$ es una matriz semidefinida negativa.

   (c) $D_p h(p, \overline{u})$ es una matriz simétrica.

   (d) $D_p h(p, \overline{u})p = 0$.

4. (∗) **Ecuación de Slutsky.** Suponga que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa una relación de preferencia localmente no saciada y estrictamente convexa $\succeq$ definida en el conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$. Entonces, para todo (p, w) y $\overline{u} = v(p, w)$ tenemos

$$\frac{\partial h_\ell(p,\overline{u})}{\partial p_k} = \underbrace{\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k}}_{\text{efecto precio}} + \underbrace{\frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial w} x_k(p,w)}_{\text{efecto ingreso}}, \ \forall\, \ell, k.$$

   Pruebe esto e interprételo.

5. (*) **Identidad de Roy.** Suponga que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa una relación de preferencia localmente no saciada y estrictamente convexa $\succeq$ definida en el conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$. Suponga además que la función de utilidad indirecta es diferenciable en $(\overline{p}, \overline{w}) > 0$. Entonces
$$x(\overline{p}, \overline{w}) = -\frac{1}{\nabla_w v(\overline{p}, \overline{w})} \nabla_p v(\overline{p}, \overline{w}).$$
Esto es,
$$x_\ell(\overline{p}, \overline{w}) = -\frac{1}{\frac{\partial v(\overline{p}, \overline{w})}{\partial w}} \frac{\partial v(\overline{p}, \overline{w})}{\partial p}.$$
Pruebe la identidad de Roy.

6. (**) Consideramos un consumidor con una relación de preferencia racional $\succeq$. Siempre que sea conveniente, se asumirá que tanto la función de utilidad indirecta como la función de gasto son diferenciables. En una primera etapa, asumimos que un consumidor tiene una riqueza fija $w > 0$ y enfrenta precios $\mathbf{p}^0$. Luego, los precios cambian a $\mathbf{p}^1$. El individuo está en peor situación cuando
$$v(\mathbf{p}^1, w) - v(\mathbf{p}^0, w) < 0.$$
Ahora, $e(p, v(p, w))$ es la riqueza requerida para alcanzar un nivel de utilidad $e(p, v(p, w))$ cuando los precios son p. Por lo tanto,
$$e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}^1, w)) - e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}^0, w))$$
proporciona una medida del cambio en el bienestar expresada en unidades monetarias. Se puede construir una función de utilidad indirecta métrica monetaria de esta manera para cualquier vector de precios $p > 0$. Sea $u^0 = v(p^0, w)$ y $u^1 = v(p^1, w)$, y observe que $e(p^0, u^0) = e(p^1, w^1)$. Definimos la variación equivalente y la variación compensada.
$$\begin{aligned} EV(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, w) &= e(\mathbf{p}^0, u^1) - e(\mathbf{p}^0, u^0) = e(\mathbf{p}^0, u^1) - w \\ CV(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, w) &= e(\mathbf{p}^1, u^1) - e(\mathbf{p}^1, u^0) = w - e(\mathbf{p}^1, u^0), \end{aligned}$$
En la variación equivalente, trabajamos con los precios iniciales, y en la variación compensada, trabajamos con los precios finales. La variación equivalente es la cantidad en unidades monetarias que haría que el consumidor fuera indiferente entre aceptarla en lugar del cambio de precios; es decir, es el cambio en la riqueza que sería equivalente al cambio de precios en términos de su impacto en el bienestar. Por lo tanto, es negativa si el cambio de precios empeorara la situación del consumidor. Así,
$$v(\mathbf{p}^0, w + EV) = u^1 = v(\mathbf{p}^1, w).$$
Por otro lado, la variación compensada mide el ingreso neto de un planificador que debe compensar al consumidor por el cambio de precios después de que ocurra, devolviendo el nivel de utilidad del consumidor al original u^0. Así, la variación compensada es negativa si el planificador tuviera que pagar al consumidor una cantidad positiva de compensación porque el cambio de precios empeora su bienestar. Así,
$$v(\mathbf{p}^1, w - CV) = u^0.$$

- Pruebe que si solo el precio del bien 1 cambia,
$$EV(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, w) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(p_1, \mathbf{p}_{-1}, u^1) dp_1 \tag{5}$$
<u>Sugerencia</u>: $e(\mathbf{p}^0, u^1) - e(\mathbf{p}^0, u^0) = e(\mathbf{p}^0, u^1) - w = e(\mathbf{p}^0, u^1) - e(\mathbf{p}^1, u^1)$.
- Pruebe que si solo el precio del bien 1 cambia,
$$CV(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, w) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(p_1, \mathbf{p}_{-1}, u^0) dp_1. \tag{6}$$
<u>Sugerencia</u>: $e(\mathbf{p}^1, u^1) - e(\mathbf{p}^1, u^0) = w - e(\mathbf{p}^1, u^0) = e(\mathbf{p}^0, u^0) - e(\mathbf{p}^1, u^0)$.

- Suponga que $u(x_1,...,x_n)$ es cuasi-lineal con respecto a x_1. Fije $p_1 = 1$. Demuestre que

$$CV(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, w) = EV(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, w),\ \forall\ (\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, w). \tag{7}$$

  Sugerencia: demuestre que cuando las preferencias son cuasi lineales y $p_1 = 1$, se tiene que $e(\mathbf{p}, \overline{u}) = \tilde{e}(p_2, ...p_L) + \overline{u}$. Use esto para obtener (7).

7. (∗) Considere la siguiente función de gasto de Tirole

$$e(p, \overline{u}) = \exp\left\{\sum_{\ell=1}^{L} \alpha_\ell \ln(p_\ell) + \left(\prod_{\ell=1}^{L} p_\ell^{\beta_\ell}\right)\overline{u}\right\}.$$

   Asuma (a esto se le conoce como teorema de la dualidad) que $e(p, V(p, I)) = I$, donde I es el ingreso en el problema de maximización de la utilidad y V la función de utilidad indirecta. Obtenga la función de utilidad indirecta de Tirole y verifique la identidad de Roy. Imponga las condiciones que crea conveniente sobre el vector de parámetros (α, β)[2].

8. Un consumidor tiene la siguiente función de utilidad indirecta

$$v(p_1, p_2, w) = \frac{w}{\min\{p_1, p_2\}}.$$

   Encuentre la función de gasto, la función de utilidad y la demanda Walrasiana del bien 1. Haga lo mismo para

$$v(p_1, p_2, w) = \frac{w}{p_1 + p_2}.$$

9. Considere una empresa que produce un bien utilizando un conjunto de insumos representados por el vector $\mathbf{x}$. La función de beneficios de la empresa está dada por $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{w}, p) = pf(\mathbf{x}) - \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$, donde $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n_{++}$ representa el vector de precios de los insumos y $p > 0$ el precio al que se vende el bien que produce. Suponga que f es clase C^1. Demuestre que, para $\mathbf{x}^* > \mathbf{0}$

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial w_i} = -x_i^*,\ \text{donde } \pi^* = \pi(\mathbf{x}^*, \overline{\mathbf{w}}, \overline{p}).$$

   Nota: a esto se le conoce como el Lema de Hotelling. Use finalmente este resultado para encontrar

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial w_2}$$

   para el caso en el cual la tecnología de la firma es $x_1^{1/3} x_2^{1/3}$.

III. Estática comparativa (revisited).

1. Mediante estática comparativa, con respecto al problema de maximización de utilidad

$$\begin{aligned} &\max u(x_1, x_2) \\ &\text{s.t. } p_1 x_1 + p_2 x_2 \le w \\ &\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

   obtenga

$$\frac{\partial x_1}{\partial w}.$$

   Puede asumir que las preferencias son monótonas, convexas y que $u \in C^2$. Sugerencia: recuerde la regla de Cramer.

[2] Recuerde que las funciones de gasto con cóncavas con respecto a los precios, no decrecientes en p_ℓ y crecientes en $\overline{u}$.

2. ($*$) Con respecto al problema de minimización del gasto para dos bienes, encuentre mediante estática comparativa
$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}.$$
¿Es cierto que el efecto sustitución es siempre negativo? Puede asumir que las preferencias son monótonas y que $u \in C^2$.

3. Considere la siguiente función de utilidad $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.
   - Dibuje las curvas de indiferencia y analice si u es cuasi-cóncava.
   - Encuentre la demanda Marshalliana y Hicksiana.
   - ¿Se satisface la ecuación de Slutsky? Interprete.

4. ($*$) Pruebe que si las preferencias son cuasi-lineales, la demanda Hicksiana es igual a la demanda Walrasiana. Concluya que en una economía de dos bienes donde solo cambia el precio del bien 1,
$$CV = \int_{p_1^0}^{p_1^1} x_1^*(p_1, p_2, w) dp_1.$$

Economías de intercambio puro

1. En una economía 2×2, existen dos consumidores A y B con las siguientes funciones de utilidad y dotaciones,
$$u_A(x_A^1, x_A^2) = (x_A^1)^a (x_A^2)^{1-a}, \quad a \in (0,1),\ \omega_1 = (0,1)$$
$$u_B(x_B^1, x_B^2) = \min\{x_B^1, x_B^2\}, \quad \omega_2 = (1,0).$$
Calcule los precios y cantidades que equilibran el mercado (en otras palabras, halle un equilibrio Walrasiano). Interprete el resultado.

2. Considere dos individuos en una economía de puro intercambio cuyas utilidades indirectas son
$$v_1(p_1, p_2, I) = \ln I - a \ln p_1 - (1-a) \ln p_2$$
$$v_2(p_1, p_2, I) = \ln I - b \ln p_1 - (1-b) \ln p_2$$
Las dotaciones son $\omega_1 = (1,1)$ y $\omega_2 = (1,1)$. Obtenga los precios que «limpian» el mercado.

3. En una economía 2×2, existen dos consumidores Ariel Rubinstein (A) y Bengt Holmstrom (B) con las siguientes funciones de utilidad y dotaciones,
$$u_A(x_A^1, x_A^2) = a \ln x_A^1 + (1-a) \ln x_A^2, \quad a \in (0,1),\ \omega_1 = (0,1)$$
$$u_B(x_B^1, x_B^2) = \min\left\{\frac{1}{2}x_B^1, x_B^2\right\}, \quad \omega_2 = (1,0).$$
Obtenga en caso existan, (i) las asignaciones Pareto óptimas, (ii) los precios y cantidades que equilibran el mercado (en otras palabras, halle un equilibrio Walrasiano) y (iii) verifique si se satisface la conclusión del primer teorema del bienestar.

4. ($*$) Enuncie y demuestre el Primer Teorema del Bienestar.

5. ($*$) Considere una economía de puro intercambio con L bienes de consumo y N consumidores, donde cada consumidor $k = 1, \ldots, N$ tiene preferencias representadas por
$$u_k(x_k) = \prod_{\ell=1}^{L} x_{\ell k}^{\alpha_{\ell k}},$$
donde $\sum_{\ell=1}^{L} \alpha_{\ell k} = 1$, $\alpha_{\ell k} \in (0,1)$, y $\boldsymbol{\omega}_k > \mathbf{0}$, para todo $k = 1, ..., N$. Obtenga la función de demanda de cada consumidor en un equilibrio Walrasiano, en función de los precios.

6. ¿Bajo qué condiciones sobre las preferencias es válido el 2do Teorema del Bienestar? Explique la importancia de cada hipótesis.

7. (**) Supongamos que en una economía de intercambio puro todos los consumidores tienen las mismas preferencias. ¿Qué requisitos impondría sobre estas preferencias para que la asignación donde todos reciben la misma canasta sea un óptimo de Pareto?

8. Considere una economía con 3 consumidores y 2 bienes. Las utilidades y dotaciones se dan por:

$$
\begin{aligned}
u_1(x_{11}, x_{21}) &= x_{11}^{1/2} + x_{21}^{1/2},\ (\omega_{11}, \omega_{21}) = (1, 2) \\
u_2(x_{12}, x_{22}) &= \min\{x_{12}, x_{22}\},\ (\omega_{12}, \omega_{22}) = (3, 4) \\
u_3(x_{13}, x_{23}) &= x_{23}e^{x_{13}},\ (\omega_{13}, \omega_{23}) = (1, 1).
\end{aligned}
$$

   Demuestre que las demandas óptimas son

$$
\begin{aligned}
x_{11} &= \frac{p_2p_1 + 2p_2^2}{p_1^2 + p_2p_1},\ x_{21} = \frac{p_1^2 + 2p_2p_1}{p_2p_1 + p_2^2} \\
x_{12} &= x_{22} = \frac{3p_1 + 4p_2}{p_1 + p_2} \\
x_{13} &= \frac{p_2}{p_1},\ x_{23} = \frac{p_1}{p_2}.
\end{aligned}
$$

References

[1] Mas-Colell, A., Whinston, M. D., and Green, J. R. (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press.

[2] Kreps, D. M. (2019). *Microeconomic Foundations I: Choice and Competitive Markets*. Princeton University Press.

[3] Kreps, D. M. (2023). *Microeconomic Foundations II: Imperfect Competition, Information, and Strategic Interaction*. Princeton University Press.

[4] Boyd, S., and Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press.

[5] Florenzano, M. (2001). *Finite Dimensional Convexity and Optimization*. Springer.

[6] Aliprantis, C. D., and Border, K. C. (2006). *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide* (3rd ed.). Springer.

[7] Ok, E. A. (2007). *Real Analysis with Economic Applications*. Princeton University Press.

[8] Chávez, J., and Gallardo, M. (2025). *Álgebra Lineal y Optimización para el Análisis Económico*. Fondo Editorial PUCP (por aparecer).

[9] Casella, G., and Berger, R. L. (2001). *Statistical Inference* (2nd ed.). Duxbury Press.

[10] Lancaster, K. (1971). *Mathematical Economics*. Macmillan.

[11] Simon, C. P., and Blume, L. (1994). *Mathematics for Economists*. W. W. Norton and Company.