PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Examen Final
Primer semestre 2024

Indicaciones generales:

- Duración: 180 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: 2 hojas A4 con apuntes de clase (físicos).
- No está permitido el uso de ningún material o equipo electrónico adicional al indicado (no celulares, no tablets, no libros).
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**

Puntaje total: 20 puntos.

Se ha otorgado mayor puntaje a las preguntas mejor y más respondidas. Preguntas que nadie hizo no bajan calificación u otorgan puntaje adicional. En concreto, las preguntas 2, 3.1 y 4 se han calificado de forma que el alumno se ve beneficiado.

Pregunta 1 (4 puntos)

1.1) Las ecuaciones de Lagrange en el (o un) punto óptimo proveen

$$\begin{aligned} u_{x_1} - \lambda p_1 &= 0 \\ u_{x_2} - \lambda p_2 &= 0 \\ I - p_1 x_1 - p_2 x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Diferenciando,

$$\begin{aligned} u_{x_1x_1} dx_1 + u_{x_1x_2} dx_2 - d\lambda p_1 - \lambda dp_1 &= 0 \\ u_{x_2x_2} dx_2 + u_{x_1x_2} dx_1 - d\lambda p_2 - \lambda dp_2 &= 0 \\ dI - dp_1 x_1 - p_1 dx_1 - dp_2 x_2 - p_2 dx_2 &= 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_{x_1x_1} & u_{x_1x_2} & -p_1 \\ u_{x_1x_2} & u_{x_2x_2} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda dp_1 \\ \lambda dp_2 \\ x_1 dp_1 + x_2 dp_2 - dI \end{bmatrix}.$$

Aplicando la regla de Cramer y anulando los efectos que no son de interés,

$$dx_1 = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 0 & u_{x_1x_2} & -p_1 \\ 0 & u_{x_2x_2} & -p_2 \\ -dI & -p_2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{u_{x_1x_2} p_2 - p_1 u_{x_2x_2}}{|A|} dI > 0.$$

Los supuestos son los que aseguran que $\frac{u_{x_1x_2} p_2 - p_1 u_{x_2x_2}}{|A|} > 0$. Así, $\frac{dx_1}{dI} > 0$ (como es de esperarse: efecto ingreso).

También es válido trabajar con el Hessiano ampliado: la conclusión es la misma.

1.2) El problema de la firma es

$$\max_{x\geq 0}\ pf(x) - wx = \max_{x\geq 0} px^a - wx.$$

Dado que $a \in (0,1)$, $x^* > 0$. De hecho, aplicando la CPO

$$x^* = \left(\frac{w}{p}\right)^{\frac{1}{a-1}}.$$

Luego,

$$\frac{dx^*}{dw} = \frac{1}{a-1}\left(\frac{w}{p}\right)^{\frac{1}{a-1}-1} < 0.$$

Acá sí se espera una resolución todo o nada: 2.5 puntos.

Pregunta 2 (3 puntos)

Se tiene que

$$V(p,I) = \frac{\ln I - \sum_{\ell=1}^{L} \alpha_\ell \ln p_\ell}{\prod_{\ell=1}^{L} p_\ell^{\beta_\ell}}.$$

$$V(p,I) = \ln I - \sum_{\ell=1}^{L} \alpha_\ell \ln p_\ell = \ln\left(\prod_{\ell=1}^{L} \frac{I^{1/L}}{p_\ell^{\alpha}}\right)$$

Ahora bien, para simplificar el trabajo, dado que e debe cumplir las propiedades aludidas (homogeneidad de grado 1, creciente en precios, estrictamente creciente en el nivel de utilidad), $\beta_\ell = 0$ para todo ℓ y $\sum_{\ell=1}^{L} \alpha_\ell = 1$. En efecto,

$$\frac{\partial e}{\partial p_i} = \frac{e(p,u)}{p_i}\left(\alpha_i + u\beta_i \prod_{\ell=1}^{L} p_\ell^{\beta_\ell}\right).$$

Como esta derivada debe ser positiva, $\alpha_i, \beta_i \geq 0$. Luego,

$$e(\lambda p, \overline{u}) = \lambda^{\sum_\ell \alpha_\ell} \exp\left\{\sum_\ell \alpha_\ell p_\ell + \lambda^{\sum_\ell \beta_\ell}\overline{u}\prod_{\ell=1}^{L} p_\ell^{\beta_\ell}\right\}.$$

Esto debe ser válido para todo p y $\overline{u}$, en particular $p = (1,\cdots,1)$ y $\overline{u} = 1$. Así,

$$\ln e(p,\overline{u}) = \left(\sum_\ell \alpha_\ell\right)\ln\lambda + \lambda^{\sum_\ell \beta_\ell}$$
$$\ln \lambda e(p,\overline{u}) = \ln\lambda + 1.$$

De este modo, $\sum_\ell \alpha_\ell = 1$ y $\sum_\ell \beta_\ell = 0$. Luego, $\beta_\ell = 0$ para todo ℓ. Concluimos entonces, aplicando la identidad de Roy y reemplazando con los parámtros, que la demanda ordinaria de Tirole es

$$x^* = \left(\frac{I}{\alpha_1}, \cdots, \frac{I}{\alpha_L}\right).$$

Pregunta 3 (6 puntos)

3.1) La cuasi-concavidad estricta de $u(\cdot)$ asegura la convexidad estricta de las preferencias de Acemoglu. Por otro lado, las de Robert Barro son convexas pero no estrictamente convexas. Esto se prueba por definición.

3.2) Este problema de resuelve por KKT. Si $\frac{p_1}{p_2} = \frac{2}{3}$, la solución al problema es:

$$x_1^* \in \left[0, \frac{I}{p_1}\right],\ x_2^* = \frac{I - p_1 x_1^*}{p_2}.$$

Si $\frac{p_1}{p_2} > \frac{2}{3}$, $x_2^* = \frac{I}{p_2}$ y $x_1^* = 0$. Finalmente, si $\frac{p_1}{p_2} < \frac{2}{3}$, $x_1^* = \frac{I}{p_1}$ y $x_2^* = 0$. Se otorga puntaje parcial si no se analizan todos los casos. No afecta si se procede por otra técnica si se logra obtener la conclusión del resultado. El planteamiento de las ecuaciones de KKT también tiene puntaje parcial.

3.3) Luego de notar que $x_i^* = 0$ no es óptimo, aplicando Lagrange se obtiene

$$x_i^* = \frac{\alpha_i I}{p_i}.$$

Pregunta 4 (5 puntos)

4.1) Si las preferencias son localmente no saciadas, todo E.W. es O.P. La prueba es la vista en curso: sea (x^*, p^*) un E.W. Procediendo por contradicción, supongamos que la asignación x^* no es P.O. En este caso, debe existir una asignación factible $x = \{x_k\}_{k=1}^N$, tal que para cada $k = 1, ..., N$, $x_k \succeq_k x_k^*$, y al menos para algún $k_0 \in \{1, ..., N\}$, $x_{k_0} \succ_{k_0} x_{k_0}^*$. Probaremos que para tal asignación se verifica la desigualdad

$$\sum_{k=1}^N x_k > \overline{\omega},$$

lo que contradice el hecho de que x sea factible. Primero, la condición $x_k \succeq_k x_k^*$ implica que $p^* \cdot x_k \geq p^* \cdot \omega_k$. En efecto, si $p^* \cdot x_k < p^* \cdot \omega_k$, entonces existe $\epsilon > 0$, tal que para todo $z \in \mathcal{B}(x_k; \epsilon)$, $p^* \cdot z < p^* \cdot \omega_k$; y como las preferencias son localmente no saciadas, $\exists\ z_0 \in \mathcal{B}(x_k; \epsilon)$ tal que $z_0 \succ_k x_k \succeq_k x_k^*$. Sin embargo, esto contradice la maximalidad de x_k^*. Por otro lado, la condición $x_{k_0} \succ x_{k_0}^*$ implica que $p^* \cdot x_{k_0} > p^* \cdot \omega_{k_0}$. En efecto, la desigualdad contraria, esto es, $p^* \cdot x_{k_0} \leq p^* \cdot \omega_{k_0}$, contradice la maximalidad de $x_{k_0}^*$. De este modo, concluimos que

$$\sum_{k=1}^N p^* \cdot x_k = \sum_{k \neq k_0} p^* \cdot x_k + p^* \cdot x_{k_0} > \sum_{k \neq k_0} p^* \cdot \omega_k + p^* \cdot \omega_{k_0} = \sum_{k=1}^N p^* \cdot \omega_k.$$

Como $p^* \in \mathbb{R}_+^L - \{0\}$, la ecuación implica que no podemos tener $\sum_{k=1}^N x_k \leq \overline{\omega}$. Es decir, se verifica $\sum_{k=1}^N x_k > \overline{\omega}$, como queríamos.

4.2) Dada la monotonía de las preferencias, en un O.P.

$$x_B^2 = \frac{x_B^1}{2} = \overline{u}$$

y así,

$$x_A^1 = 1 - 2\overline{u},\ x_A^2 = 1 - \overline{u}.$$

Esto corresponde en la caja de Edgeworth a la recta $x_B^2 = \frac{1}{2} x_B^1$. Con respecto al equilibrio Walrasiano, se resuelve en simultáneo

$$\begin{cases} \max_{(x_A^1, x_A^2) \in \mathbb{R}_+^2} & a \ln x_A^1 + (1-a) \ln x_A^2 \\ \text{s. a}: & p_1 x_A^1 + p_2 x_A^2 \leq p_2 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \max_{(x_B^1, x_B^2) \in \mathbb{R}_+^2} & \min\left\{\frac{1}{2} x_B^1, x_B^2\right\} \\ \text{s. a}: & p_1 x_B^1 + p_2 x_B^2 \leq p_1. \end{cases}$$

Luego, obtenemos

$$\begin{aligned} x_A^1 &= \frac{a p_2}{p_1} \\ x_A^2 &= 1 - a \\ x_B^1 &= \frac{p_1}{4p_1 + 2p_2} \\ x_B^2 &= \frac{p_1}{2p_1 + p_2}. \end{aligned}$$

Para concluir, se iguala la oferta a la demanda y se despeja el ratio de precios. Finalmente, se reemplaza en las demandas óptimas.

4.3) Se otorga puntaje, de 0.5 a 1 según la argumentación: monotonía estricta, convexidad estricta etc. Se penaliza si solo se impone no saciabilidad local pues es insuficiente. A continuación un enfoque interesante[1]

$$\mathcal{E} = \{(\succeq_i, \omega_i)_{i=1}^{I}\}$$

una economía de intercambio puro. Supongamos que $\succeq_i$ es continua, estrictamente monótona y es representada por una función de utilidad u^i. Consideremos el siguiente problema de maximización:

$$\mathcal{P} = \begin{cases} \max_{x \in \mathbb{R}_+^{LI}} & u_1(x_1) \\ \text{s.a.} & u_i(x_i) \geq \overline{u}_i \\ & \sum_{i=1}^{I} x_i \leq \overline{\omega}. \end{cases}$$

Entonces, una asignación es Pareto óptima si y solamente si resuelve $\mathcal{P}$. Veamos que si $\succeq_i$ viene representada por una función estrictamente cóncava[2] y las preferencias son las mismas para todos los consumidores, $\overline{\omega}/I$ es Pareto óptimo. Supongamos por contradicción que no es el caso: ha de existir $y \in \mathbb{R}_+^{LI}$ tal que $u(x) \leq u(y^i)$ para todo $i = 1, ..., I$ y, existe al menos un j tal que $u(x) < u(y^j)$. Por otro lado, y debe ser factible, esto es:

$$\sum_{i=1}^{I} y_i = \overline{\omega}.$$

Dividiendo por $I > 0$ y aplicando la concavidad estricta de la función $u(\cdot)$,

$$\sum_{i=1}^{I} \frac{1}{I} u(y^i) < u\left(\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} y_i\right) = u\left(\frac{\overline{\omega}}{I}\right) = u(x). \tag{1}$$

Por otro lado, como $u(x) \leq u(y^i)$ para todo $i = 1, ..., I$ y $u(x) < u(y^j)$ para cierto j,

$$\frac{1}{I}u(x) \leq \frac{1}{I}u(y^i) \ \forall \ i = 1, ..., I.$$

Sumando sobre todos los $i = 1, ..., I$[3]:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{1}{I}u(x)\right)}_{=u(x)} < \sum_{i=1}^{I} \frac{1}{I} u(y^i). \tag{2}$$

La Ecuación 2 contradice 1, lo cual nos permite concluir que x es óptimo de Pareto, tal y como deseábamos. Hemos tenido que recurrir a la concavidad estricta pues, en caso las funciones de utilidad sean solo cóncavas, podrían ser lineales y se tendría igualdad en (2) y (1): no llegamos a una contradicción. Por otro lado, cabe la posibilidad que nuestro requisito haya sido demasiado fuerte y que podamos, por ejemplo, exigir convexidad estricta en las preferencias (o sea función de utilidad estrictamente cuasicóncava). No obstante, como no es directo construir ejemplos (ya no visuales) en $\mathbb{R}^L$, $L \geq 3$, lo que nos permite asegurar el enunciado es la concavidad estricta de u^i, $\forall \ i = 1, ..., I$.

4.4) X debe ser localmente compacto y Polaco (en particular, separable y metrizable). Por otro lado, $\mathcal{P}$ cerrado y las preferencias localmente estrictas.

4.5) Para todo $x, y \in X$ con $x \succeq y$, y para todas las vecindades de x e y respectivamente, digamos U y V, existen $z \in X$ y $w \in Y$ con $z \succ w$.

[1] No se esperaba una resolución así de detallada y ciertamente no se penaliza drásticamente en esta pregunta por faltas menores.

[2] Además de los supuestos clásicos: continuidad, monotonía y racionalidad.

[3] Acá la desigualdad estricta aparece por el j-ésimo individuo.

Pregunta 5 (2 puntos)

5.1)

Fedor/Joe	A	B
A	20, 20	0, 0
B	0, 0	10, 10

5.2) (A, A) y (B, B) son E.N.