Matching bilateral con transferencias de utilidad

Marcelo Gallardo Burga

PUCP

Mayo 2024

Índice

Estos slides están basados en las notas de clase del profesor Federico Echenique (sección 14).

El modelo

1. Shapley y Shubik (1971)
2. B conjunto de compradores
3. S conjunto de vendedores
4. Tanto B como S son no vacíos, finitos y disjuntos
5. Cada comprador en B busca comprar una única unidad de un bien indivisible
6. Cada vendedor posee una única unida para vender, pero son de diferentes tipos (puede que ofrezcan bienes distintos).
7. Si $i \in B$ le compra a $j \in S$, se genera un surplus α_{ij}. Estos coeficientes ya están dados.
8. Cuando i le compra a j percibe una utilidad u_i, y j recibe un beneficio v_j. Así
$$u_i + v_j = \alpha_{ij}.$$
9. i le compra a j si $\alpha_{ij} - v_j \geq \alpha_{ih} - v_h, \ \forall \ h$. Esto es
$$u_i + v_h \geq \alpha_{ih}, \ \forall \ i, h.$$

Matching

Definición

Un **matching** es una matriz $(x_{ij})_{i\in B, j\in S}$ tal que $x_{ij} \geq 0$ para todo $(i,j) \in B \times S$ y

$$\sum_{h\in S} x_{ih} \leq 1$$

$$\sum_{h\in B} x_{hj} \leq 1.$$

Si $x_{ij} \in \{0,1\}$ podemos interpretar $x_{ij} = 1$ como que i le compra a j.

Definición

Una **asignación** es un par de vectores $((u_i)_{i\in B}, (v_j)_{j\in S})$ tal que $u_i, v_j \geq 0$ y tal que existe un matching x_{ij} de forma que

$$\sum_{i\in B} u_i + \sum_{j\in S} v_j = \sum_{i\in B,\ j\in S} \alpha_{ij} x_{ij}.$$

Matching

Definición

Una asignación (u, v) pertenece al **núcleo** si

$$u_i + v_j \geq \alpha_{ij}.$$

Definición

Un par (i, j) **bloquea** una asignación si $u_i + v_j < \alpha_{ij}$.

En efecto, intercambiando entre ellos, generan el surplus α_{ij} y pueden compartir $u_i + \frac{\epsilon}{2}$, $v_j + \frac{\epsilon}{2}$, con $\epsilon = \frac{\alpha_{ij} - u_i - v_j}{2}$.
En este modelo, solo los pares generan surplus, no hay «singles». El núcleo es entonces el conjunto de asignaciones que ningún par puede bloquear. Finalmente, en el núcleo, cada agente optimiza:

$$u_i = \max_{h \in S}\{\alpha_{is} - v_h\}, \;\; v_j = \max_{h \in B}\{\alpha_{hj} - u_h\}.$$

Enfoque de la programación lineal

Consideramos el problema de emparejar eficientemente compradores y vendedores. Esto es:

$$\begin{aligned}
&\max_{x_{ij}} \sum_{i\in B}\sum_{j\in S} \alpha_{ij} x_{ij} \\
\text{s. a} : \ & x_{ij} \geq 0 \\
&\sum_{j\in S} x_{ij} \leq 1 \ \forall \ i \in B \\
&\sum_{i\in B} x_{ij} \leq 1 \ \forall \ j \in S.
\end{aligned}$$

Note que el problema tiene solución por Weierstrass.

Enfoque de la programación lineal

Si u_i y v_j son los multiplicadores asociados a las restricciones

$$\mathscr{L}(x,(u,v)) = \sum_{i\in B, j\in S} \alpha_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in B} u_i \left(1 - \sum_{j\in S} x_{ij}\right) + \sum_{j\in S} v_j \left(1 - \sum_{i\in B} x_{ij}\right).$$

Del Teorema Min-Max:

$$\max_{(x_{ij})} \min_{((u_i),(v_j))} \mathscr{L}(x,(u,v)) = \min_{((u_i),(v_j))} \max_{(x_{ij})} \mathscr{L}(x,(u,v)).$$

Si desarrollamos el Lagrangiano,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(x,(u,v)) &= \sum_{i\in B, j\in S} \alpha_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in B} u_i \left(1 - \sum_{j\in S} x_{ij}\right) + \sum_{j\in S} v_j \left(1 - \sum_{i\in B} x_{ij}\right) \\ &= \sum_{i\in B,\ j\in S} (\alpha_{ij} - u_i - v_j)x_{ij} + \sum_{i\in B} u_i + \sum_{j\in S} v_j.\end{aligned}$$

Así pues,

$$\max_{(x_{ij})} \min_{((u_i),(v_j))} \mathscr{L}(x,(u,v)) = \min_{((u_i),(v_j))} \max_{(x_{ij})} \left\{ \sum_{i\in B} u_i + \sum_{j\in S} v_j + \sum_{i\in B,\ j\in S} (\alpha_{ij} - u_i - v_j)x_{ij} \right\}.$$

Enfoque de la programación lineal

El problema dual es

$$\begin{aligned} \min_{(u,v)\in\mathbb{R}^{|B|}\times\mathbb{R}^{|S|}} \quad & \sum_{i\in B} u_i + \sum_{j\in S} v_j \\ \text{s. a}: \quad & u_i + v_j \geq \alpha_{ij} \\ & u_i \geq 0 \\ & v_j \geq 0. \end{aligned}$$

Note que si x_{ij} resuelve el primal y (u, v) resuelve el dual:

$$\sum_{i\in B,\ j\in S} \alpha_{ij} x_{ij} = \sum_{i\in B} u_i + \sum_{j\in S} v_j.$$

Enfoque de la programación lineal

Proposición

Existe una solución al problema de maximización del surplus en la que $x_{ij} \in \{0, 1\}$ y si $x_{ij} = 1$ entonces $u_i + v_j = \alpha_{ij}$.

Prueba.

Los matchings con $x_{ij} \in \{0, 1\}$ son aquellos que corresponden a matrices con entradas 0 o 1. El problema primal es un problema de programación lineal por lo que, una solución de esquina siempre existe. Ahora bien, la condición de holgura complementaria en el problema dual nos dice que

$$0 = \sum_{i \in B, j \in S} x_{ij} \underbrace{(\alpha_{ij} - u_i - v_j)}_{\leq 0}.$$

Acá los x_{ij} juegan el rol de los multiplicadores. Así, si es que $x_{ij} > 0$, $u_i + v_j = \alpha_{ij}$. □

Enfoque de la programación lineal

Proposición

Si $\alpha_{ij} > 0$ para todo i, j y $|B| = |S|$, entonces las restricciones se cumple con igualdad y todos los agentes son emparejados.

Proposición

Sea (u, v) y (u', v') asignaciones en el núcleo. Sea $\overline{u}_i = \max\{u_i, u'_i\}$ y $\underline{v}_j = \min\{v_j, v'_j\}$. Entonces, $(\overline{u}, \underline{v})$ son asignaciones en el núcleo.

1. El resultado es análogo si se toma $\underline{u}$ y $\overline{u}$.
2. Hay intereses comunes para los agentes del mismo lado del mercado, e intereses opuestos para los agentes en lados opuestos del mercado.

Enfoque de la programación lineal

Existen asignaciones del núcleo (u^*, v_*) y (u_*, v^*) tales que para cualquier asignación del núcleo (u, v),

$$u_i^* \geq u_i \geq u_{i*},$$

$$v_j^* \geq v_j \geq v_{*j}.$$

Pensamos en (u^*, v_*) y (u_*, v^*) como asignaciones del núcleo con precios mínimos y máximos, respectivamente.