PUCP

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES IOP224

PRÁCTICA CALIFICADA 1

PROFESOR: JORGE R. CHÁVEZ

JEFE DE PRÁCTICA: MARCELO GALLARDO

SEMESTRE 2024-1

FECHA 05-04-2024

Ejercicio 1 (3 pts). Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal con $T(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2, x_1 + x_2)$, y considere el conjunto $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{B}_2 = \{(5,3),(1,1)\}$.

1. Verifique que $\mathcal{B}_2$ es una base de $\mathbb{R}^2$.
2. Encuentre la matriz asociada a T en la base $\mathcal{B}_2$.

1) No existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ diferentes ambos de cero tal que $\alpha(5,3) + \beta(1,1) = (0,0)$.

2) La matriz en cuestión es

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 2 (4 pts). Resuelva las siguientes cuestiones:

1. Proporcione un ejemplo de una aplicación homogénea de grado 1 pero que no sea aditiva.
2. Considere una función de producción tipo Cobb-Douglas: $F(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$, $A > 0$.
   (a) ¿Bajo qué condiciones sobre los parámetros un incremento en los insumos genera un incremento en la misma proporción en el producto?
   (b) ¿Bajo qué condiciones sobre los parámetros un incremento en los insumos genera un incremento «sub-proporcional» en el producto?

1) Considere

$$T(x,y) = \sqrt[3]{xy^2}.$$

Ciertamente,

$$T(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{\lambda x \lambda^2 y^2} = \sqrt[3]{\lambda^3 x y^2} = \lambda T(x,y).$$

Sin embargo,

$$T((x,y)+(z,w)) = \sqrt[3]{(x+z)(y+w)^2} \neq T(x,y) + T(z,w).$$

2a) Si $\alpha \in (0,1)$ y $\beta = 1-\alpha$.

2b) Si $\alpha, \beta \in (0,1)$ y $\alpha + \beta < 1$.

Si se consideran los casos borde $\alpha = 0, 1$, F ya no depende de uno de los dos insumos.

Ejercicio 3 (6 pts). Resuelva las siguientes cuestiones:

1. Sea $\mathcal{U}$ un espacio vectorial con dimensión $n > 1$. Sea $\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ el espacio de aplicaciones lineales de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{U}$. Considere $C \subset \mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ el conjunto de todas la aplicaciones lineales no invertibles de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{U}$. Analice si C es o no un subespacio vectorial.

2. Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$ no singular con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. ¿Cuáles son los valores propios de la matriz A^{-1}? ¿Cuáles son sus vectores propios?

3. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Calcule sus valores propios, vectores propios y obtenga los espacios propios. Analice si la matriz es diagonalizable.

4. Dadas A, B dos matrices $m \times n$ y $n \times p$, demuestre que

$$\rho(AB) \leq \min\{\rho(A), \rho(B)\}.$$

1) No lo es. Sea $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{U}$ con $x_n \neq 0$. Defina $T\mathbf{x} = (x_1, ..., x_{n-1}, 0)$ y $S\mathbf{x} = (0, ..., 0, x_n)$. Ciertamente T, y S no son invertibles pues no son inyectivas. Sin embargo, $(T+S)\mathbf{x} = \mathbf{x}$. O sea, $T + S = I$, que sí es invertible. Este problema puede pensarse (que es lo mejor), desde una perspectiva matricial.

2) Los valores propios son λ_i^{-1} y los vectores propios son los mismos. En efecto,

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x} \\ \mathbf{x} &= \lambda A^{-1}\mathbf{x} \\ \frac{1}{\lambda} &= A^{-1}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

3) Los valores propios de la matriz A son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2, \\ \lambda_2 &= 0. \end{aligned}$$

En efecto,

$$\chi(t) = t^3 + 2t^2.$$

Luego, los vectores propios correspondientes a cada valor propio son:

- Para $\lambda_1 = -2$, el vector propio es $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Para $\lambda_2 = 0$, el vector propio es $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Los espacios propios se definen como sigue:

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ E_{\lambda_2} &= \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente, la matriz no es diagonalizable.

4) Note simplemente que $Nu(B) \subset Nu(AB)$ y si $\mathbf{y} \in \text{Im}(AB)$, $\mathbf{y} \in \text{Im}(A)$.

Ejercicio 4 (4 pts). Resuelva las siguientes cuestiones:

1. Considere las siguientes dos variables económicas: el precio de un cierto bien, denotado p, y la demanda de un consumidor por dicho bien, denotada D. Plantee una relación lineal o lineal afín (escoja adecuadamente una de las 2) entre D y p. Justifique su elección e interprete. ¿Impondría alguna condición sobre el bien en cuestión (sobre su naturaleza o características)?

2. En relación a su solución del inciso (1), ¿cómo cambiaría si sabe que el consumidor es muy sensible al precio? Calcule en cuanto aumenta porcentualmente la demanda si el precio aumenta en 1% en función del precio.

3. Considere ahora la oferta de una empresa por el bien del inciso (1), que denotamos O. Justifique que la oferta puede modelarse como una transformación lineal del precio. Interprete. Encuentre el precio de equilibrio en esta economía con un consumidor y una empresa.

4. ¿Es adecuado el modelo lineal o lineal afín para la relación entre la demanda y el precio (inciso 1)? Plantee un modelo no lineal y justifique su elección. ¿Bajo qué condiciones se pierde completamente el componente lineal?

a) $D(p) = a - bp$, $a, b > 0$. a es la demanda cuando $p = 0$ (debería ser una constante muy grande), b mide que tan sensible es la demanda al precio. A mayor precio, menor la demanda. Se escoge una relación lineal afín y no lineal pues $D(0) > 0$. No debe ser un bien Giffen (bienes de lujos cuya demanda aumenta conforme el precio aumenta).

b) b aumenta. Luego, $\frac{\partial D}{\partial p}\frac{p}{cp} = -\frac{bp}{a-bp}$.

c) $O(p) = dp$, $d > 0$. Naturalmente, $O(0) = 0$. Luego, resolvemos $dp = a - bp$,

$$p = \frac{a}{b+d} > 0.$$

d) Lo más realista es que $\lim_{p\to 0^+} D(p) = \infty$. Así, podemos considerar $D(p) = \frac{b_1}{p} + b_2 p + b_3$, $b_1 > 0$, donde posiblemente $b_2, b_3 = 0$. El componente lineal no se pierde cuando, para precios muy altos, $\exists\ p^*$ tal que $D(p^*) = 0$. En dicho caso, $b_2 \ \vee \ b_3 \neq 0$.

Ejercicio 5 (3 pts). Considere tres sectores productivos: el sector primario agro-exportador, el sector industrial y el sector de servicios. Suponga que, en términos de proporciones:

1. El sector primario requiere de 0.4 de su propio sector, 0.4 del sector industrial y 0.1 del sector de servicios.

2. El sector industrial requiere de 0.2 del sector agro-exportador, 0.2 de su propio sector y del sector servicios 0.3.

3. El sector servicios requiere 0.2 del sector agro-exportador, 0.1 del sector industrial y 0.3 de su propio sector.

Además, se sabe que la demanda externa es $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 200 \end{bmatrix}$.

1. Plantee el modelo como un problema de insumo-producto e interprételo.

2. Encuentre la oferta óptima (cantidad producida) por cada sector en el equilibrio.

1) El modelo de insumo-producto puede ser representado por la matriz de coeficientes técnicos A y la demanda externa $\mathbf{d}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 200 \end{bmatrix}$$

- El sector primario provee de alimentos a los demás sectores y a si mismo.

- El sector industrial provee maquinaría, desde tractores hasta computadoras a los demás sectores y a si mismo.

- El sector servicios provee, por ejemplo, servicio legal, consultorías etc. a los demás sectores y a si mismo..

2) Para encontrar la oferta óptima, calculamos $\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{d}$, donde I es la matriz identidad. Esto nos dará la cantidad producida por cada sector en el equilibrio. Para los que tienen calculadora:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 540.9 \\ 531.8 \\ 590.9 \end{bmatrix}.$$

Bonus: entregar hasta el sábado 7 de abril a las 23h00.

1. En relación a la pregunta 2.2. ¿Si se incrementan el insumo capital en 1%, en términos de porcentajes, en cuánto se incrementa el producto? (**1 pt.**)

2. Resuelva la PC correctamente y completamente. (**1 pts.**)

Tomando logaritmos,

$$\ln(F(K, L)) = \ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L,$$

vemos que un incremento en 1% de K hace que Y incremente en α %.