PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 Investigación de Operaciones

Segunda práctica (tipo a)
Primer semestre 2024

Indicaciones generales:

- Duración: 110 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: sin apuntes de clase.
- No está permitido el uso de ningún material de consulta o equipo electrónico.
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**

Puntaje total: 20 puntos.

Guía de solución PC2:

1) Basta probar que $C_1 - C_2 \geq 0$. Esto se obtiene ya sea algebraicamente deduciendo que $C_1(x_1, x_2, x_3) - C_2(x_1, x_2, x_3) \geq 0$ o bien calculando los valores propios de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ y ver que son todos estrictamente positivos.

2.1) $S + a$ es abierto y $S + A = \bigcup_{a \in A} S + a$, por ende, abierto.

2.2) El conjunto es no vacío si, por ejemplo $a_i < \frac{I}{p_i}$. También basta que $\sum_i a_i p_i \leq I$ (pues así $(a_1, ..., a_n)$ pertenece a la restricción). Luego, el conjunto es convexo (intersección de convexos), cerrado (intersección de cerrados) y compacto pues se encuentra dentro de la bola $B_{||\infty||}(0, \max\{I/p_i, 0\})$, asumiendo que $a_i < I/p_i$.

2.3) Graficar con cuidando, tanto p como I cambian.

2.4) Si $p_2 = 1$, ceteris parbius, tiene más opciones de consumo al caso $p_2 = 2$. En el caso general, si $\frac{I}{p_i} < \frac{\hat{I}}{\hat{p}_i}$, podemos decir que hay más opciones de consumir bajo la configuración $(\hat{p}, \hat{I})$.

3.1) Usar la concavidad de $\ln(\cdot)$ y la equivalencia $X = \left\{x \in \mathbb{R}^n_{++} : \sum_i \ln x_i \geq 0\right\}$. Consultar aquí. También se puede proceder por definición. Considerar esto.

3.2) Proceder por definición. Notar simplemente que

$$\min_i \left\{ \frac{tx_i + (1-t)y_i}{a_i} \right\} = \frac{tx_{i_0} + (1-t)y_{i_0}}{a_{i_0}} \geq t \min_i \frac{x_i}{a_i} + (1-t) \min_j \frac{y_j}{a_j}.$$

4.1) La definición de tecnología se encuentra en la Sección 5.3 del libro así como la de cono convexo. La vuelta es por definición. Para la ida, sean $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in Y$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Basta probar que $\alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{y}' \in Y$. Sea k un entero tal que $k > \max\{\alpha, \beta\}$. Por la aditividad, $k\mathbf{y}, k\mathbf{y}' \in Y$. Como $\alpha/k, \beta/k < 1$, entonces, por los rendimientos a escala decrecientes, $(\alpha/k)(k\mathbf{y}), (\beta/k)(k\mathbf{y}') \in Y$. Finalmente, usando nuevamente que Y es aditiva, concluimos que

$$(\alpha/k)(k\mathbf{y}) + (\beta/k)(k\mathbf{y}') = \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{y}' \in Y.$$

4.2) Dado $\mathbf{y} \in Y$ y $\mathbf{y}' \leq \mathbf{y}$, podemos siempre escribir $\mathbf{y}' = \mathbf{y} + \mathbf{v}$ con $\mathbf{v} \in -\mathbb{R}^L_+$. Bastará probar entonces que para todo $\mathbf{v} \in -\mathbb{R}^L_+$, $\mathbf{y} + \mathbf{v} \in Y$. Sea $\mathbf{v} \in -\mathbb{R}^L_+$. Ciertamente para todo $n \in \mathbb{N}$, $n\mathbf{v} \in -\mathbb{R}^L_+ \subset Y$. Luego, como Y es convexa,

$$\underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\mathbf{y} + \frac{1}{n}n\mathbf{v}}_{\mathbf{x}_n} \in Y.$$

Finalmente, usando el hecho que Y es cerrado, $\lim_n \mathbf{x}_n = \mathbf{y} + \mathbf{v} \in Y$.

Marcelo Gallardo