PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Examen Final (Mock)
Primer semestre 2024

Indicaciones generales:

- Duración: 180 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: 2 hojas A4 con apuntes de clase (físicos).
- No está permitido el uso de ningún material o equipo electrónico adicional al indicado (no celulares, no tablets, no libros).
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**

Puntaje total: 20 puntos.

Pregunta 1 (4 puntos)

Resuelva las siguientes cuestiones:

1.1) Luego de explicar la formulación del problema (1), determine el problema dual asociado y demuestre que tiene solución.

$$\begin{cases} \max_{x_{ij}} & \displaystyle\sum_{i\in B}\sum_{j\in S}\alpha_{ij}x_{ij} \\ \text{s. a}: & x_{ij}\geq 0 \\ & \displaystyle\sum_{j\in S}x_{ij}\leq 1,\ \forall\ i\in B \\ & \displaystyle\sum_{i\in B}x_{ij}\leq 1,\ \forall\ j\in S. \end{cases} \tag{1}$$

1.2) En el problema de maximización de la utilidad, ¿bajo qué condiciones sobre la función de utilidad puede asegurar que la solución no es de esquina? Provea un ejemplo de una función que cumpla con dichas condiciones.

1.3) Resuelva, en función de los precios $p_1, p_2 > 0$ y el ingreso $I > 0$, el problema de maximización de la utilidad para

$$u(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2.$$

Pregunta 2 (6 puntos)

2.1) Sea $f(z_1, z_2) = z_1^{\alpha} z_2^{\beta}$, con $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Demuestre que

$$c(w_1, w_2, q) = q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\theta\phi(w_1, w_2)$$

con $\phi(w_1, w_2) = w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$ y

$$\theta = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}.$$

Note que $c(w_1, w_2, q)$ es la función de costos.

2.2) En una economía 2×2, existen dos consumidores A y B con las siguientes funciones de utilidad y dotaciones,

$$u_A(x_A^1, x_A^2) = (x_A^1)^a (x_A^2)^{1-a}, \quad a \in (0,1),\ \omega_1 = (0,1)$$
$$u_B(x_B^1, x_B^2) = \min\{x_B^1, x_B^2\}, \quad \omega_2 = (1,0).$$

Calcule los precios y cantidades que equilibran el mercado (en otras palabras, halle un equilibrio Walrasiano). Interprete el resultado.

Pregunta 3 (4 puntos)

a) Considere el Almost Ideal Demand System (AIDS); que viene representado por la siguiente función de gasto:

$$\ln(e(p, \overline{u})) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln p_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \gamma_{ij} \ln p_i \ln p_j + \overline{u} \beta_0 \prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i}.$$

Imponga condiciones sobre los parámetros para que e corresponda a una función de gastos. Es decir, para que sea cóncava en los precios, no decreciente en p_i para todo $i = 1, ..., n$, creciente en $\overline{u}$ y homogénea de grado uno en precios.

b) Considere la siguiente función de costo $c(w, q) = (aw_1 + bw_2)\sqrt{q}$. Obtenga la función de producción asociada. Sugerencia: mediante el teorema de la envolvente, derive un resultado similar al Lema de Shepard.

Pregunta 4 (3 puntos)

Enuncie el teorema min-max y provea una interpretación de este.

Pregunta 5 (3 puntos)

5.1) Considere una economía de puro intercambio con L bienes de consumo y N consumidores, donde cada consumidor $k = 1, \ldots, N$ tiene preferencias representadas por

$$u_k(x_k) = \prod_{\ell=1}^{L} x_{\ell k}^{\alpha_{\ell k}},$$

donde $\sum_{\ell=1}^{L} \alpha_{\ell k} = 1,\ \alpha_{\ell k} \in (0,1)$, y $\boldsymbol{\omega}_k > \mathbf{0}$, para todo $k = 1, ..., N$. Obtenga la función de demanda de cada consumidor en un equilibrio Walrasiano, en función de los precios.

5.2) ¿Bajo qué condiciones sobre las preferencias es válido el 2do Teorema del Bienestar? Explique la importancia de cada hipótesis.

Profesor del curso: Jorge Chávez.

Asistente de docencia: Marcelo Gallardo.

San Miguel, 6 de julio del 2024