PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Práctica Dirigida 1
Primer semestre 2025

Aquellos ejercicios marcados con (∗) o (∗∗) son más retadores para alumnos sin previa exposición a cursos de análisis en $\mathbb{R}^n$ y microeconomía. Todos los ejercicios se pueden resolver aplicando análisis convexo y optimización, sin importar el contexto del problema.

Elementos de álgebra lineal

I. Espacios vectoriales y producto interno.

1. Demuestre que en un espacio vectorial $\mathcal{U}$, el vector nulo (elemento neutro) $\mathbf{0}$ es único.

2. Dados $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, analice si $|x_1 y_1| \cdot |x_2 y_2|$ define un producto interno. Sugerencia: considere $(x_1, x_2) = (1, 0)$.

3. Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}$, pruebe que si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, entonces $||\mathbf{x}|| \leq ||\mathbf{x} + a\mathbf{y}||$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Sugerencia: recuerde que $||\mathbf{x}||^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$.

4. Pruebe que
$$16 \leq (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right), \ x_i > 0.$$
Sugerencia: use la desigualdad media-aritmética o Cauchy-Schwarz.

5. Pruebe que si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{y}$ es un vector en la misma dirección del vector $\mathbf{x}$, entonces $\mathrm{Pr}_{\mathbf{x}}\mathbf{y} = \|\mathbf{y}\|\mathbf{u}$, donde $\mathbf{u}$ es un vector unitario en la dirección del vector $\mathbf{x}$.

6. Demuestre que, dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$, donde $||\mathbf{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Esto se conoce como la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Sugerencia: use $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \geq 0$ o considere el polinomio $p(t) = ||\mathbf{x} - t\mathbf{y}||$.

7. Asuma que la desigualdad anterior se cumple en $\mathbb{R}^n$ (esto se deduce de hecho de una de las posibles demostraciones del ítem anterior de manera directa). Demuestre que
$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$
Sugerencia: considere el vector $\mathbf{1}$ y $(x_1, ..., x_n)$.

8. Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz para probar la desigualdad triangular: $\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ (para $\mathbb{R}^n$ es la misma prueba)
$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||.$$
Sugerencia: use Cauchy-Schwarz.

II. Subespacios vectoriales. Bases y dimensión.

1. Analice si $S = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 x_2 \geq 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ y de serlo, encuentre su dimensión.

2. Analice si $S = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n} : \ A \text{ es simétrica}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ y de serlo, encuentre su dimensión.

3. Si el concepto de combinación lineal se extendiera a una suma infinita, ¿cuál seria una combinación lineal que generaría la función $f(x) = e^x$? ¿Y para $g(x) = \cos x$?

4. Determine todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$.

5. Demuestre que el conjunto de todas las funciones continuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es un subespacio vectorial del espacio vectoriales de funciones $F : [a, b] \to \mathbb{R}$.

6. Si $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_4$ genera $\mathcal{U}$, analice si

$$\{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_4\}$$

generan el espacio.

7. Analice la siguiente afirmación: si $\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m\}$ y $\{\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m\}$ son listas de vectores li, entonces $\{\mathbf{x}_i + \mathbf{y}_i\}_{i=1,...,m}$ es una lista de vectores li.

III. Transformaciones lineales.

1. Considere las siguientes dos variables económicas: el precio de un cierto bien, denotado por p, y la demanda de un consumidor de dicho bien, denotada por D. Proponga una relación lineal o lineal afín (escoja adecuadamente una de las 2) entre D y p. Justifique e interprete su propuesta. ¿Cómo cambiaría si sabe que el consumidor es muy sensible al precio?

2. Pruebe que las aplicaciones T que se dan a continuación son transformación lineales. a) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, 3x_1)$.

   b) $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_2, x_1 + 3x_1)$.

   c) $T(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + x_2 - x_3$.

3. Sea T una transformación lineal. Pruebe que si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son ld, entonces $T\mathbf{x}_1, T\mathbf{x}_2, \ldots, T\mathbf{x}_n$ también son ld.

4. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal, tal que $T(1, 0) = (1, 3)$ y $T(0, 1) = (1, 1)$. Obtenga $T(2, 5)$. En general, ¿cómo es $T(x_1, x_2)$?

5. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación definida por

$$T(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2, x_1 + x_2).$$

Encuentre la matriz asociada a T en la base $\mathcal{B} = \{(5, 3), (1, 1)\}$.

6. Sea A un matriz cuadrada de orden $n \times n$. Pruebe que si $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces $A = 0$.

7. Proporcione un ejemplo de una aplicación homogénea de grado 1 que no sea aditiva.

8. Considere una función de producción tipo Cobb-Douglas: $F(K, L) = AK^\alpha L^\beta$, donde K denota capital, L trabajo y $A > 0$ es una constante.

   - ¿Bajo qué condiciones sobre los parámetros un incremento en los insumos genera un incremento en la producción?
   - ¿Bajo qué condiciones sobre los parámetros la tasa de crecimiento de la producción respecto de sus factores K y L es cada vez menor?

9. Sea $\mathcal{U}$ un espacio vectorial con dimensión $n > 1$. Sea $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ el espacio de aplicaciones lineales de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{U}$. Considere $C \subset \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ el conjunto de todas la aplicaciones lineales no invertibles de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{U}$. Analice si C es o no un subespacio vectorial.