Equilibrio parcial

Marcelo Gallardo Burga

PUCP

Mayo 2024

Índice

Estos slides están basados en el Capítulo 10 de Mas-Colell, Whinston and Green y las notas de clase del profesor Federico Echenique (sección 13).

Optimalidad de Pareto y Equilibrio Competitivo

Considere una economía con $I > 0$ consumidores (indexados por $i = 1, ..., I$), J firmas (indexadas por $j = 1, ..., J$) y L bienes (indexados por $\ell = 1, ..., L$). Cada consumidor i tiene una relación de preferencias sobre $X_i \subset \mathbb{R}^L$, que viene representada por una función de utilidad $u_i(\cdot)$.

La cantidad total disponible de cada bien inicialmente es $\omega_\ell, \ell = 1, ..., L$. Por otro lado, es posible transformar las dotaciones en bienes de consumo. Esto se hace vía la tecnología de cada firma, $Y_j \subset \mathbb{R}^L$. Un elemento de Y_j es un plan de producción $(y_{1j}, \cdots, y_{Lj})$.

Optimalidad de Pareto y Equilibrio Competitivo

Un asignación $(x_1, ..., x_I, y_1, ..., y_J) \in \mathbb{R}^{IL} \times \mathbb{R}^{JL}$ es una especificación de vectores de consumo $x_i \in X_i$ para cada individuo y planes de producción para cada firma $y_j \in Y_j$. Diremos que una asignación es factible si

$$\sum_{i=1}^{I} x_{\ell i} \leq \omega_\ell + \sum_{j=1}^{J} y_{\ell j}, \ \forall \ \ell = 1, ..., L.$$

Optimalidad de Pareto y Equilibrio Competitivo

Definición

Una asignación factible $(x_1, ..., x_I, y_1, ..., y_J)$ es un óptimo de Pareto si no existe otra asignación factible $(x'_1, ..., x'_I, y'_1, ..., y'_J)$ tal que $u_i(x'_i) \geq u_i(x_i)$ para todo $i = 1, ..., I$ y $u_{i_0}(x'_{i_0}) > u_{i_0}(x_{i_0})$ para algún i_0.

Optimalidad de Pareto y Equilibrio Competitivo

Definición

La asignación $(x_1^*, \cdots, x_I^*, y_1, \cdots, y_J^*)$ constituye un equilibrio competitivo si las siguientes condiciones se cumplen

1. Cada firma maximiza sus beneficios: y_j^* es tal que resuelve

$$\max_{y_j \in Y_j} \; p^* \cdot y_j$$

$$\text{s. a } y_j \in Y_j.$$

2. Cada individuo maximiza su utilidad: $\forall\ i$, x_i^* resuelve

$$\max_{x_i \in X_i} \; u_i(x_i)$$

$$\text{s. a } p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij}(p^* \cdot y_j^*).$$

3. Se limpia el mercado: para cada bien $\ell = 1, ..., L$

$$\sum_{i=1}^{I} x_{\ell i}^* = \omega_\ell + \sum_{j=1}^{J} y_{\ell j}^*.$$

Equilibrio parcial

Consideramos una economía en la cual hay $i = 1, ..., I$ individuos y poseen dotaciones ω_i y preferencias $\succeq_i$ sobre $\mathbb{R}^L$. Ahora bien, supongamos que estas preferencias vienen representadas por funciones de utilidad

$$u_i(x_1, ..., x_L) = v_i(x_1) + \sum_{\ell=2}^{L} x_\ell. \tag{1}$$

Como se puede ver en (1), los bienes $\ell = 2, ..., L$ son vistos como sustitutos perfectos. Por lo tanto, estos bienes deben tener el mismo precio[1] Ahora bien, podemos ver a $\sum_{\ell=2}^{L} x_\ell$ como un **bien compuesto** que denotamos m y cuyo precio es normalizado a $p_m = 1$. Asociaremos a m con el dinero pues $\sum_{\ell=2}^{L} x_\ell = m$ corresponde a la cantidad del bien compuesto que se consume, y como su precio es 1, el monto que se paga es justamente m.

Con esto en mente, podemos escribir

$$u_i(x, m) = v_i(x_i) + m. \tag{2}$$

[1] Por un lado, en el intercambio, se dará una unida de $\ell \in \{2, ..., L\}$ por una unidad de $\ell' \in \{2, ..., L\}$. La intuición es que si se valoran igual, deberían costar igual.

Equilibrio parcial

Si p es el precio del bien x, el problema de maximización de la utilidad de i es

$$\max_{(x,m)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} v_i(x)+m$$
$$\text{s. a. } px+m\leq W.$$

Observación:

Se esta permitiendo que m tome valores negativos. Este es un supuesto bastante fuerte que se fundamenta en 3 cuestiones (interpretación personal):

1. Ya no hay necesidad de analizar soluciones de esquina del tipo $m^* = 0$.
2. Se permite endeudamiento.
3. No nos interesa realmente qué sucede con el bien m si no más bien con el bien x.

Cuando v_i satisface las condiciones de Inada, $x^* > 0$.

Equilibrio parcial

Asumamos desde ahora que $v_i(\cdot)$ es estrictamente creciente, cóncava y de clase C^2. Luego, el problema de reduce a maximizar

$$v_i(x) + (W - px), \text{ s. a. } x \geq 0. \tag{3}$$

Veremos lo siguiente:

1. $x^* = x^*(p)$ no depende del ingreso. Ver para más detalles al respecto Econ 101A — Solution to Problem Set 2.
2. $m^* = m^*(p, W) = W - px^*(p)$.
3. Cambios en el ingreso W se traducen en cambios en la demanda de dinero m.

Equilibrio parcial

Las condiciones de primer orden (CPO) del problema (3) (para ver una justificación véase Optimization Methods MIT) son

$$v'(x) - p = \begin{cases} \leq 0 & \text{si } x = 0 \\ = 0, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Es importante enfatizar que esto solo porque se le da libertad a m. Nuevamente, suponga simplemente que cuando $m < 0$, el individuo considera óptimo endeudarse. Véase : Discusión en Economics Stack Exchange.

Ahora bien, de la CPO

$$v_i'(x_i^*(p)) = p, \; x_i^*(p) > 0$$

por lo que $x_i^* = [v_i']^{-1}(p)$.

Equilibrio parcial

La utilidad indirecta del individuo i es

$$v_i(x_i^*(p)) + m^*(p,W) = v_i(x_i^*(p)) + W - px_i^*(p) \underbrace{=}_{?} W + \int_p^{\infty} x_i^*(s)ds.$$

Ahora bien

$$\frac{d}{dp}[v_i(x_i^*(p)) - px_i^*(p)] = v_i'(x_i^*(p))[x_i^*]'(p) - x_i^*(p) - p[x_i^*]'(p).$$

Factorizando $[x_i^*]'(p)$:

$$\frac{d}{dp}[v_i(x_i^*(p)) - px_i^*(p)] = \underbrace{[v_i'(x_i^*(p)) - p]}_{=0}[x_i^*]'(p) - x_i^*(p).$$

Si $\lim_{p\to\infty} x_i^*(p)p = 0$ y $v_i(0) = 0$, concluimos vía el TFI y usando que $-\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$

$$v_i(x_i^*(p)) - px_i^*(p) = \int_p^{\infty} x_i^*(s)ds.$$

Equilibrio parcial

En el caso general, notemos que

$$\int_0^{x_i^*(p)} [v_i'(x) - p]dx = v_i(x_i^*(p)) - v_i(0) - px_i^*(p) = v_i(x_i^*(p)) - px_i^*(p).$$

Finalmente, como $v_i'(x) = s \Leftrightarrow x_i^*(s) = x$,

$$\int_0^{x_i^*(p)} [v_i'(x) - p]dx = \int_p^{\infty} x_i^*(s)ds$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_p^{\infty} x_i(s)ds &= \int_{x_i^*(p)}^{0} xv_i''(x)dx \\
&= xv_i'(x)|_{x_i^*(p)}^{0} - \int_{x_i^*(p)}^{0} v_i'(x)dx \\
&= -x_i^*(p) + \int_0^{x_i^*(p)} v_i'(x)dx \\
&= \int_0^{x_i^*(p)} [v_i'(x) - p]dx.
\end{aligned}$$

Equilibrio parcial

Definimos

$$CS_i(p) = v_i(x_i^*(p)) - px_i^*(p) = \int_p^{\infty} x_i^*(s)ds,$$

el excedente del consumidor. En efecto,

$$\int_p^{\infty} x_i^*(s)ds = \underbrace{\int_0^{x_i^*(p)} [v_i'(x) - p]dx}_{\text{el consumidor va ganando } v'(x)-p} .$$

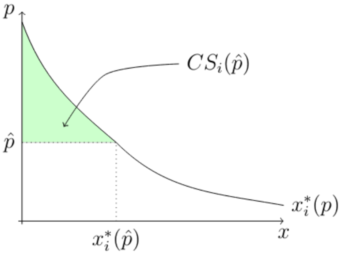

Figura Excedente del consumidor.

Demanda Agregada y Bienestar

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{I}(v_i(x_i^*(p)) - px_i^*(p)) &= \sum_{i=1}^{I}\int_p^{\infty} x_i^*(s)ds \\ &= \int_p^{\infty}\sum_{i=1}^{I} x_i^*(s)ds \\ &= \int_p^{\infty} X^*(s)ds,\end{aligned}$$

donde

$$X^*(p) = \sum_{i=1}^{I} x_i^*(p).$$

Asignaciones Pareto Óptimas

Consideremos el siguiente problema que consiste en encontrar las asignaciones Pareto óptimas

$$
\begin{aligned}
&\max_{x_i \geq 0} \; v_1(x_1) + m_1 \\
&\text{s. a } v_i(x_i) + m_i \geq \overline{u}_i, \;\forall\; i = 2, \ldots I \\
&\qquad \sum_{i=1}^{I} x_i \leq \sum_{i=1}^{I} \omega_{i,x} \\
&\qquad \sum_{i=1}^{I} m_i \leq \sum_{i=1}^{I} \omega_{i,m}.
\end{aligned}
$$

Como las utilidades son crecientes (estrictamente), las restricciones se darán con igualdad. Así,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{I} m_i &= \sum_{i=1}^{I} \omega_{i,m} \\
m_1 &= -\sum_{i=2}^{I} m_i + \sum_{i=1}^{I} \omega_{i,m} \\
m_i &= \overline{u}_i - v_i(x_i) \\
m_1 &= \sum_{i=2}^{I} v_i(x_i) - \sum_{i=2}^{I} \overline{u}_i + \sum_{i=1}^{I} \omega_{i,m} \\
&= \sum_{i=2}^{I} v_i(x_i) + \text{constante}
\end{aligned}
$$

Asignaciones Pareto Óptimas

Incorporando en la función objetivo, vemos entonces que el problema es equivalente a resolver

$$\max_{x_i \geq 0} \left\{ \sum_{i=1}^{I} v_i(x_i) \right\}$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{I} x_i \leq \sum_{i=1}^{I} \omega_{i,x}.$$

El Lagrangiano asociado al segundo problema es

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(\{x_i\}_{i=1}^{I}, \lambda, \mu_i) &= \sum_{i=1}^{I} v_i(x_i) + \lambda \left[\sum_{i=1}^{I} \omega_{i,x} - \sum_{i=1}^{I} x_i \right] + \sum_{i=1}^{I} \mu_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^{I} (v_i(x_i) - \lambda x_i) + \lambda \sum_{i=1}^{I} \omega_{i,m}. \end{aligned}$$

Hemos usado que $x_i^* > 0$: condiciones de Inada. Las CPO proveen

$$v_i'(x_i) - \lambda = 0,$$

lo cual coincide con las CPO del problema de maximización individual cuando $\lambda = p$.

Producción

Supongamos ahora que el bien x puede ser producido a partir del bien m (el dinero). El costo de producir x es $c(x)$, donde $c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Así pues, el conjunto de producción es

$$Y = \{(x, -c(x)) : x \in \mathbb{R}_+\}.$$

Las asignaciones P.O. pueden ser encontradas resolviendo el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned}
&\max \; v_1(x_1) + m_1 \\
&\text{s. a } v_i(x_i) + m_i \geq \overline{u}_i, \; \forall\, i = 2, ..., I \\
&\qquad \sum_{i=1}^{I} x_i \leq \sum_{i=1}^{I} \omega_{i,x} + x^f \\
&\qquad \sum_{i=1}^{I} m_i \leq \sum_{i=1}^{I} \omega_{i,m} - m^f \\
&\qquad (x^f, -m^f) \in Y.
\end{aligned}$$

Producción

Supongamos que $\sum_{i=1}^{I} \omega_{i,x} = 0$. Entonces, debemos tener

$$\sum_{i=1}^{I} x_i = x^f.$$

Así,

$$m^f = c(x^f) = c\left(\sum_{i=1}^{I} x_i\right).$$

Finalmente, como las restricciones se dan con igualdad,

$$\sum_{i=1}^{I} m_i = \sum_{i=1}^{I} \omega_{i,m} - m^f = -c\left(\sum_{i=1}^{I} x_i\right) + \sum_{i=1}^{I} \omega_{i,m}.$$

Así, el problema equivale a resolver

$$\max_{x_i \geq 0} \left\{\sum_{i=1}^{I} v_i(x_i) - c\left(\sum_{i=1}^{I} x_i\right)\right\}.$$

Producción

Asumamos que c es C^1 con $c' > 0$ y c estrictamente convexa. Las CPO para una solución interior son:

$$v_i'(x_i) = c'(x).$$

Haciendo $p = c'(x)$, $v_i'(x_i) = p$.

Bienes públicos : condición de Samuelson

Un bien público es un bien que todos los consumidores consumen (y valoran no todos necesariamente igual; no lo usan/consumen necesariamente por igual). Enfaticemos que todos tienen acceso a él una vez que se provea[2]. Por la condición de eficiencia, ya analizada, se debe tener

$$\max_{x \geq 0} \left\{ \sum_{i=1}^{I} \underbrace{v_i(x)}_{=v_i(x_i)} - c(x) \right\}.$$

Las CPO provee

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{I} v_i'(x) = c'(x)}_{\text{condición de Samuelson}}$$

La condición de Samuelson se puede expresar de la siguiente manera: la suma de las tasas marginales de sustitución (TMS) entre el bien público y un bien privado debe ser igual a la tasa marginal de transformación (TMT) entre esos bienes. En términos más sencillos, esto significa que un bien público debe proveerse hasta el punto en que la suma total de lo que cada individuo está dispuesto a pagar por una unidad adicional del bien público es igual al costo de proveer esa unidad adicional.

[2] Ascensor, defensa nacional, alumbrado etc.

Bienes públicos : condición de Samuelson

La lógica detrás de esta condición de Samuelson es que, en una economía eficiente, los recursos deben asignarse de manera que el costo de producir una última unidad de cualquier bien (el costo marginal) debe ser igual al valor que los consumidores le asignan a esa última unidad (la disposición a pagar). Para los bienes privados, esto se logra fácilmente a través de los mercados, donde cada consumidor paga un precio que refleja su disposición a pagar por la última unidad consumida.
Sin embargo, para un bien público, ningún individuo tiene incentivos para revelar su verdadera disposición a pagar, ya que no pueden ser excluidos del consumo del bien. Esto conduce al problema del «free rider» o pasajero gratuito, donde los individuos consumen el bien sin contribuir a su costo. La condición de Samuelson intenta superar este problema agregando las disposiciones a pagar de todos los individuos y equiparándolas con el costo marginal de producción del bien público. Así, se asegura que el bien público se produzca en una cantidad que sea socialmente óptima, maximizando la utilidad total en la economía.

Bienes públicos

Comparamos con la provisión privada del bien público. Supongamos que el precio del bien público es p. Entonces, cada agente escoge x_i al precio p. Así, el problema que resuelve cada individuo es

$$\max_{x_i \geq 0} \; v_i\left(x_i + \sum_{j \neq i} x_j\right) - px_i.$$

La CPO provee

$$v_i'\left(\sum_j x_j\right) - p = 0, \;\; x_i > 0$$

$$v_i'\left(\sum_j x_j\right) - p \leq 0, \;\; x_i = 0.$$

Por otro lado, la maximización del beneficio requiere que

$$p = c'\left(\sum_j x_j\right).$$

En efecto, la firma resuelve

$$\max \;\; px - \underbrace{c(x)}_{=c\left(\sum_j x_j\right)}.$$

Bienes públicos

Ahora bien, supongamos por simplicidad que $v_1' < v_2' < \cdots < v_I'$. Luego, como p no depende de i, debemos tener

$$\begin{gathered} v_I'(\hat{x}) = p \\ v_i'(\hat{x}) - p < 0, \; i = 1, ..., I - 1. \end{gathered}$$

Entonces, $x_i = 0$ para $i = 1, ..., I - 1$ y $x_I = \hat{x}$. Por lo tanto, $x_i = 0$ para todo $i \neq I$ y $x_I = \hat{x}$. Luego, como $v_i' > 0$ para todo i,

$$\sum_{i=1}^{I} v_i'(\hat{x}) > v_I'(\hat{x}) = c'(\hat{x}).$$

Por la monotonía estricta de c', $\hat{x} < x^*$: hay un sub-aprovisionamiento del bien público.

Equilibrio Lindahl

Supongamos que podemos «engañar» a los consumidores y hacerles creer que la cantidad consumida del bien público solo depende de sus compras privadas. Pagarían un precio individual p_i. En dicho caso, resuelven

$$\max_{x_i \geq 0} \; v_i(x_i) - p_i x_i.$$

La CPO, cuando la solución es interior, es $v_i'(x_i) = p_i$. Ahora bien, sea x^* el nivel eficiente del bien público. Si hacemos $p_i = v_i'(x^*)$, entonces será óptimo para cada consumidor comprar x^*. Por otro lado, la firma resuelve

$$\max_{q \geq 0} \left(\sum_{i=1}^{I} p_i \right) q - c(q).$$

Como $\sum_{i=1}^{I} p_i = \sum_{i=1}^{I} v_i'(x^*)$, y x^* satisface la condición de Samuelson,

$$\sum_{i=1}^{I} p_i = c'(x^*).$$

Equilibrio Lindahl

En resumen, la condición de equilibrio de Lindahl describe cómo se pueden financiar eficientemente los bienes públicos en una economía. Cada consumidor paga un precio que refleja su valoración marginal del bien público en el punto de eficiencia, donde la suma de las valoraciones marginales de todos los consumidores para el bien público es igual al costo marginal de proporcionarlo. Esto asegura que cada consumidor contribuya al financiamiento del bien público de acuerdo con el beneficio marginal que recibe, promoviendo una asignación eficiente de recursos.

Equilibrio / impuesto Lindahl

En teoría, los precios e impuestos de Lindahl promueven una asignación eficiente de bienes públicos, ajustando la carga tributaria según la valoración individual de los beneficios recibidos. No obstante, su implementación práctica enfrenta varios desafíos significativos:

1. Problema de la revelación de preferencias: Los individuos, al poseer información exclusiva sobre sus beneficios marginales, pueden sentirse incentivados a subdeclarar su valoración para reducir su carga fiscal. Esto deriva en un dilema similar al de los bienes públicos, donde la honestidad resulta costosa y puede ser contraproducente. Aunque existen mecanismos como el de Vickrey-Clarke-Groves para fomentar la revelación honesta de preferencias, estos no han resuelto el problema de manera definitiva y su implementación es complicada y costosa.
2. Problema del conocimiento de la preferencia: A menudo, las personas no tienen certeza sobre cuánto valoran realmente un bien público, especialmente aquellos con los que no interactúan frecuentemente, como la defensa nacional. Esta incertidumbre complica aún más la tarea de reportar una disposición a pagar precisa.
3. Problema de agregación de preferencias: Incluso si se conociera la disposición a pagar de cada individuo y esta fuera reportada honestamente, el gobierno enfrentaría enormes desafíos para sumar estas valoraciones individuales en una medida colectiva de valor, particularmente para bienes públicos que afectan a grandes poblaciones, como la seguridad nacional.