

RBC con capital público productivo

Marcelo Gallardo*

30 de junio de 2025

Pontificia Universidad Católica del Perú

marcelo.gallardo@pucp.edu.pe

Índice

| | |
|---|-----------|
| 1. El modelo | 3 |
| 1.1. Las familias | 3 |
| 1.1.1. Condiciones de primer orden | 4 |
| 1.2. Las firmas | 6 |
| 1.2.1. Condiciones de primer orden | 8 |
| 2. Dinámica, equilibrio y log-linealización | 8 |
| 2.1. Condiciones de equilibrio | 8 |
| 2.2. Estado estacionario | 9 |
| 2.3. Inversión pública endógena | 10 |
| 2.4. Exogeneidad en la inversión pública | 12 |
| 2.5. Log-linealización: caso endógeno | 14 |
| 2.6. Log-linealización: caso exógeno | 18 |
| 2.7. Identificación de variables | 19 |
| 2.7.1. Exogeneidad de la inversión | 20 |
| 3. Calibración | 21 |
| 4. Funciones impulso respuesta | 22 |
| 4.1. Choque de productividad con endogeneidad en la inversión pública | 22 |
| 4.2. Choque de productividad con exogeneidad en la inversión pública | 24 |

*Agradezco a Diego Avalos, Ana Lucía del Río, Fabio Salas, Camila Ramos por su ayuda con los códigos y .

| | |
|---|-----------|
| 4.3. Choque de inversión pública bajo el régimen exógeno | 25 |
| 4.4. Choque de productividad con $\theta = 0.1$ | 28 |
| 5. Discusión y análisis | 29 |
| 6. Hábitos de consumo | 30 |
| 6.1. Condiciones de primer orden | 31 |
| 6.2. Equilibrio | 32 |
| 6.3. Log-linealización endógena | 33 |
| 6.4. Log-linealización exógena | 36 |
| 6.5. Funciones Impulso Respuesta | 37 |
| 6.5.1. Choque de productividad | 37 |
| 6.5.2. Choque de inversión pública | 39 |
| 6.5.3. Choque de inversión pública con más persistencia | 40 |
| 6.5.4. Choque de productividad con más persistencia | 41 |
| 6.5.5. Choque de productividad con aún más persistencia | 42 |
| 6.5.6. Choque de inversión pública con aún más persistencia | 44 |
| 7. Conclusión | 46 |

1. El modelo

A continuación, tomando como base al modelo de ciclos económicos reales, vamos a incorporar el gasto público en el modelo, de tal manera que éste sea complementario al capital privado como insumo productivo. Consideraremos que todo el gasto público es inversión pública, y que esta se acumula en el tiempo para formar capital público (infraestructura). Esta última se deprecia a una tasa diferente y algo menos que el capital del sector privado. Finalmente, asumimos que la inversión pública se financia con impuestos, que son cobrados a las familias. Estos impuestos no generan distorsiones, son de suma alzada¹.

1.1. Las familias

Empezamos por **las familias**. Sus preferencias sobre el espacio de consumo

$$\ell^\infty \times \ell^\infty = \left\{ (C_t)_{t \geq 0} \subset \mathbb{R}_+ : \sup_t |C_t| < \infty \right\} \times \left\{ (N_t)_{t \geq 0} \subset \mathbb{R}_+ : \sup_t |N_t| < \infty \right\},$$

vienen representadas por

$$V_t = \mathbb{E}_t \left[\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k (u(C_{t+k}) - v(N_{t+k})) \right]$$

donde

- $\beta \in (0, 1)$ es el factor de descuento subjetivo, i.e. $\beta = \frac{1}{1+\varrho}$ con ϱ la tasa de descuento subjetiva,
- $\mathbb{E}_t[\cdot]$ denota la esperanza condicional dado el conjunto de información en el tiempo t , o sea $\mathbb{E}_t[\cdot] = \mathbb{E}[\cdot | \mathcal{F}_t]$ donde \mathcal{F}_t es una filtración,
- $u(C_{t+k})$ es la utilidad que brinda el consumo en $t+k$, siendo $u(\cdot)$ una función de utilidad tipo Bernouilli (estrictamente creciente y cóncava), y finalmente,
- $v(N_{t+k})$ es la desutilidad generada por el trabajo (N denota horas de trabajo), con $v(\cdot)$ estrictamente creciente y convexa.

Para simplificar las derivaciones, consideramos como de costumbre

$$u(C) = \frac{C^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}, \quad \sigma \geq 0, \quad \sigma \neq 1 \quad (\text{función de utilidad CRRA})$$

$$v(N) = \frac{N^{1+\nu}}{1+\nu},$$

¹Los impuestos de suma alzada son pagos fijos que el Estado cobra a los individuos, independientemente de su nivel de ingreso, consumo o trabajo. No afectan los incentivos económicos y, por tanto, no generan distorsiones en las decisiones de los agentes.

siendo σ la aversión relativa al riesgo y ν la inversa de la elasticidad de la oferta del trabajo. Cuando $\sigma = 1$, se extiende naturalmente $u(C)$ a $\ln C$ usando la regla del Hôpital.

La restricción presupuestaria de las familias en cada $t \in \mathbb{Z}_+$ viene dada por

$$C_t + B_t = \underbrace{W_t N_t}_{\text{Renta del trabajo.}} + \underbrace{\Pi_t}_{\text{Participación en las firmas.}} - \underbrace{T_t}_{\text{Impuestos.}} + \underbrace{(1 + r_{t-1})B_{t-1}}_{\text{Rendimiento de los activos.}} \quad (1)$$

donde $T_t = I_t^G$ con I_t^G la inversión pública.

1.1.1. Condiciones de primer orden

Para derivar las condiciones de primer orden, vamos a utilizar dos enfoques. El primero es el del Lagrangiano infinito, y el segundo el de la ecuación de Bellman (Lucas et al., 1989; Sargent and Ljungqvist, 2004). El problema de considerar el Lagrangiano infinito, es que debemos asegurar la convergencia uniforme de la serie para poder permutar la derivada con la suma. No obstante, Benveniste and Scheinkman (1979); Marcet and Marimon (2011) aseguran la equivalencia. Existe una condición más que surge del hecho que para poder igualar el número de endógenas con ecuaciones linealmente independientes, se requiere un criterio de optimalidad sobre I_t^G . Esta condición la visualizaremos más adelante. Un enfoque alternativo involucra I_t^G exógeno (para simular shocks como los de A_t).

Proposición 1.1. *Las condiciones de primer orden (formulando un Lagrangiano infinito o ecuación de Bellman) de las familias están dadas por*

$$C_t^{-\sigma} = \beta \mathbb{E}_t[C_{t+1}^{-\sigma}(1 + r_t)] \quad (2)$$

$$C_t^{-\sigma} W_t = N_t^\nu. \quad (3)$$

Demostración. Formamos el Lagrangiano, cuya convergencia uniforme se asegura vía $\beta \in (0, 1)$ - esto por el teorema de la convergencia dominada permite derivar el Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \left[\frac{C_{t+k}^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} - \frac{N_{t+k}^{1+\nu}}{1 + \nu} + \lambda_{t+k} (W_{t+k} N_{t+k} + \Pi_{t+k} - T_{t+k} + (1 + r_{t+k-1})B_{t+k-1} - C_{t+k} - B_{t+k}) \right].$$

Fijando $k = 0$, las CPO proveen Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = 0 : \quad & C_t^{-\sigma} = \lambda_t \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_t} = 0 : \quad & \lambda_t W_t = N_t^\nu \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_t} = 0 : \quad \lambda_t = \beta \mathbb{E}_t[\lambda_{t+1}(1 + r_t)].$$

Note que usamos que $\mathbb{E}_t[X_t] = X_t$. Sustituyendo $\lambda_t = C_t^{-\sigma}$, se obtienen las condiciones óptimas:

$$\text{(Ecuación de Euler)} \quad C_t^{-\sigma} = \beta \mathbb{E}_t [C_{t+1}^{-\sigma}(1 + r_t)] \quad (4)$$

$$\text{(Ecuación del trabajo)} \quad C_t^{-\sigma} W_t = N_t^\nu. \quad (5)$$

□

Observación. Respecto al modelo clásico de RBC, lo único que cambia es que en la restricción $T_t \neq G_t$ pero más bien $T_t = I_t^G$. Como las preferencias se ven inalteradas, las CPO son las mismas.

Observación. Respecto a la ecuación de Bellman, se define:

$$V(B_{t-1}) = \max_{C_t, N_t, B_t} \left\{ \frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\nu}}{1+\nu} + \beta \mathbb{E}_t [V(B_t)] \right\}$$

sujeto a:

$$C_t + B_t = W_t N_t + \Pi_t - T_t + (1 + r_{t-1})B_{t-1}.$$

Sustituyendo la restricción en la función objetivo:

$$V_t(B_{t-1}) = \max_{N_t, B_t} \left\{ \frac{(W_t N_t + \Pi_t - T_t + (1 + r_{t-1})B_{t-1} - B_t)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\nu}}{1+\nu} + \beta \mathbb{E}_t [V_{t+1}(B_t)] \right\}.$$

Las condiciones de primer orden (CPO) son:

- Con respecto a B_t (ahorro): $-C_t^{-\sigma} + \beta \mathbb{E}_t [V'(B_t)] = 0$.
- Con respecto a N_t (trabajo): $C_t^{-\sigma} W_t = N_t^\nu$.

La derivada de la función valor respecto al estado B_{t-1} se obtiene usando el Teorema de la Envolvente ([Milgrom and Shannon, 1994](#)):

$$V'(B_{t-1}) = C_t^{-\sigma}(1 + r_{t-1}).$$

Además, reemplazando en la CPO de ahorro:

$$C_t^{-\sigma} = \beta \mathbb{E}_t [C_{t+1}^{-\sigma}(1 + r_t)],$$

lo cual coincide con (4) y (5).

1.2. Las firmas

Observación. Antes de analizar el modelamiento de I_t^G , nos enfocamos únicamente en las CPO al haber incorporado el gasto como capital complementario en la función de producción.

Respecto a **las firmas**, sus utilidades vienen dadas por

$$\Omega_t = \mathbb{E}_t \left[\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \left(\frac{C_{t+k}}{C_t} \right)^{-\sigma} (Y_{t+k} - W_{t+k}H_{t+k} - I_{t+k}^P) \right]$$

- $\left(\frac{C_{t+k}}{C_t} \right)^{-\sigma}$ representa el descuento estocástico estandarizado de utilidad marginal del consumo desde el punto de vista de los hogares (las empresas le pertenecen a las familias, que reciben un flujo incierto de pagos). Formalmente:

$$\left(\frac{C_t}{C_{t+k}} \right)^{-\sigma} = \prod_{j=1}^k \left(\frac{C_{t+j-1}}{C_{t+j}} \right)^{\sigma} = \prod_{j=1}^k [\beta(1 + r_{t+j-1})] = \beta^k \prod_{j=0}^{k-1} (1 + r_{t+j}).$$

Por lo que

$$\left(\frac{C_{t+k}}{C_t} \right)^{-\sigma} = \frac{1}{\beta^k \prod_{j=0}^{k-1} (1 + r_{t+j})}.$$

- $Y_{t+k} = A_{t+k} K_{t+k-1}^{\alpha} H_{t+k}^{\gamma} G_{t+k-1}^{\theta}$ con $\alpha + \gamma \leq 1$, $0 < \alpha, \gamma < 1$, $\theta \geq 0$ asegurando así la cuasi-concavidad estricta y diferenciabilidad sobre \mathbb{R}_{++}^3 , ([Turnovsky and Fisher, 1995](#); [Cassou and Lansing, 1998](#)). Si bien otras especificaciones son plausibles, como funciones CES

$$Y_t = A_t \cdot \left[G_{t-1}^{\gamma} \cdot \omega \left(a_K K_{t-1}^{\frac{\rho-1}{\rho}} + a_H H_t^{\frac{\rho-1}{\rho}} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + (1 - \omega) G_{t-1} \right]^{\eta}$$

la forma funcional escogida simplifica el análisis considerablemente, permitiendo realizar álgebra cerrado, y es un supuesto razonable ([Hsieh and Klenow, 2009](#)).

- W_{t+k} denota los salarios,
- H_{t+k} denota la demanda de trabajo (horas de trabajo contratadas) que es un insumo,
- K_{t+k-1} es el capital privado de la firma, que se toma como dado un periodo adelante,
- G_{t+k-1} es el gasto público, opera como un insumo complementario productivo de carácter exógeno, que potencia la eficiencia marginal del capital y el trabajo privado.
- I_t^P representa la inversión privada.

Finalmente, se cumple que ([Lansing, 1994](#)):

$$\begin{aligned} K_t &= (1 - \delta)K_{t-1} + I_t^P \\ G_t &= (1 - \delta^G)G_{t-1} + I_t^G, \end{aligned}$$

con $\delta^G < \delta$, y que la ley del movimiento de la productividad viene dada por el proceso AR(1)

$$\ln A_t = \rho \ln A_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2), \quad \rho \in (0, 1].$$

Observación. La inversión pública se financia con impuestos, que son cobrados a las familias, es por eso que I_t^G no aparece en la estructura de costos de la firma.

Observación. Notemos que el modelo podría generalizarse un poco más considerando que G se destina tanto a las firmas como insumo así como a las familias como bien público. En dicho caso, tendríamos $G = G^H + G^F$ y $\mathcal{V} : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{V} = \mathcal{V}(C, N, G)$ la utilidad de los consumidores extendidas (ver por ejemplo [Sargent and Ljungqvist \(2004\)](#)).

En este modelo, el capital público G_t se incorpora como un insumo complementario que incrementa la productividad total de los factores, pero que no es elegido ni financiado por las firmas. Esta formulación es consistente con la visión propuesta por [Nordhaus \(1969\)](#), quien argumenta que el parámetro de productividad A_t representa el resultado de avances tecnológicos, conocimiento acumulado y factores institucionales exógenos a la empresa, y por tanto no debe modelarse como un insumo optimizable. De manera análoga, el capital público puede entenderse como parte del entorno tecnológico efectivo, al influir positivamente sobre el producto sin alterar directamente las condiciones de elección de los agentes privados. Esta interpretación es reforzada empíricamente por [Aschauer \(1998\)](#), quien muestra que el stock de infraestructura pública posee un efecto significativo y positivo sobre el desempeño económico agregado, actuando como un determinante de la productividad multifactorial. Asimismo, en línea con el enfoque de [Klenow and Rodríguez-Clare \(2005\)](#), puede pensarse que parte del crecimiento económico no atribuido directamente a los insumos tradicionales puede capturarse a través de mejoras institucionales y de infraestructura, como el capital público, que operan indirectamente sobre la eficiencia de la economía. Por tanto, su inclusión en la función de producción no responde a un criterio de optimización por parte de las firmas, sino al reconocimiento de su rol como externalidad tecnológica agregada.

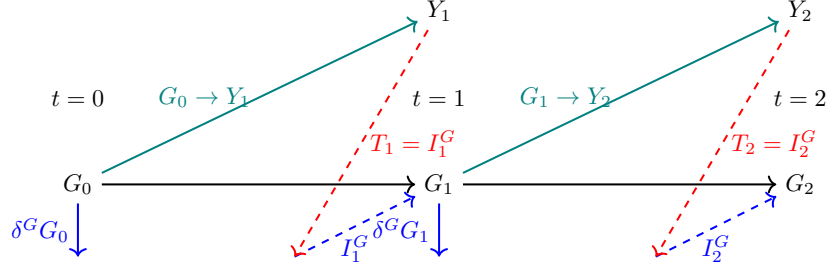


Figura 1: Dinámica de G_t .

1.2.1. Condiciones de primer orden

En este caso la optimización es irrestricta pero condicionada a dinámicas, i.e., similar a los problemas de control óptimo con horizonte de tiempo finito en tiempo continuo. En este caso, como la relación entre I_t y K_t, K_{t-1} es lineal, podemos reemplazar directamente en la función objetivo (Cerdá Tena, 1991)

$$\Omega_t = \mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \left(\frac{C_{t+k}}{C_t} \right)^{-\sigma} [Y_{t+k} - W_{t+k} H_{t+k} - (K_{t+k} - (1 - \delta) K_{t+k-1})].$$

La firma recibe G_t financiado por las familias pero no decide sobre esta variable. Por lo tanto, las CPO son sobre K_t y H_t únicamente. De este modo, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_t}{\partial H_t} &= \gamma A_t K_{t-1}^{\alpha} H_t^{\gamma-1} G_{t-1}^{\theta} - W_t = 0 \\ \frac{\partial \Omega_t}{\partial K_t} &= -1 + \beta \mathbb{E}_t \left\{ \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \left[\alpha A_{t+1} K_t^{\alpha-1} H_{t+1}^{\gamma} G_t^{\theta} + (1 - \delta) \right] \right\} = 0. \end{aligned}$$

2. Dinámica, equilibrio y log-linealización

2.1. Condiciones de equilibrio

- | | |
|----------------------------------|-------------------------------|
| (i) $B_t = 0$ | (mercado de bonos) |
| (ii) $Y_t = C_t + I_t^P + I_t^G$ | (identidad contable agregada) |
| (iii) $N_t = H_t$ | (mercado de trabajo) |
| (iv) $T_t = I_t^G$ | (presupuesto del gobierno) |

- (v)
$$\begin{cases} K_t = (1 - \delta)K_{t-1} + I_t^P \\ G_t = (1 - \delta^G)G_{t-1} + I_t^G \end{cases} \quad (\text{leyes de movimiento del capital privado y público})$$
- (vi) $C_t^{-\sigma} W_t = H_t^\nu \quad (\text{oferta de trabajo})$
- (vii) $C_t^{-\sigma} = \beta \mathbb{E}_t [C_{t+1}^{-\sigma} (1 + r_t)] \quad (\text{ecuación de Euler})$
- (viii) $1 = \beta \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_t} + 1 - \delta \right) \right] \quad (\text{Q de Tobin})$
- (ix) $W_t = \gamma \frac{Y_t}{H_t} \quad (\text{productividad marginal del trabajo})$
- (x) $Y_t = A_t K_{t-1}^\alpha H_t^\gamma G_{t-1}^\theta \quad (\text{tecnología agregada})$
- (xi) $\ln A_t = \rho \ln A_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (\text{shock de productividad})$

2.2. Estado estacionario

En el estado estacionario:

- | | |
|---|--------------------------------|
| (i) $B = 0$ | (ii) $Y = C + I^P + I^G$ |
| (iii) $N = H$ | (iv) $T = I^G$ |
| (v) $I^P = \delta K$ | (vi) $I^G = \delta^G G$ |
| (vii) $C^{-\sigma} W = H^\nu$ | (viii) $\beta = \frac{1}{1+r}$ |
| (ix) $1 = \beta \left(\alpha \frac{Y}{K} + 1 - \delta \right)$ | (x) $W = \gamma \frac{Y}{H}$ |
| (xi) $Y = K^\alpha H^\gamma G^\theta$ | (xii) $A = 1$ |

Al final, todo se reduce a

- (1) $Y = C + \delta K + \delta^G G$
- (2) $H^\nu C^\sigma = \frac{\gamma Y}{H}$
- (3) $1 = \beta \left(\frac{\alpha Y}{K} + 1 - \delta \right)$
- (4) $Y = K^\alpha H^\gamma G^\theta.$

Notamos que falta una ecuación, pues tenemos 5 endógenas $\{Y, C, K, H, G\}$ y 4 ecuaciones linealmente independientes. Para resolver este problema (y de hecho, la lógica del modelo), es necesario analizar qué criterio de optimalidad sigue I_t^G . Vamos a presentar dos modelos:

1. Inversión pública endógena: se deriva de una condición de optimalidad.
2. Inversión pública exógena: sigue un AR(1). Esto es consistente y se alinea con los ejercicios de FIR más adelante.

2.3. Inversión pública endógena

Siguiendo a [Cassou and Lansing \(1998\)](#), es razonable y consistente postular que el estado maximiza la utilidad de las familias sujetas a la restricción de demanda agregada:

$$Y_t = AK_{t-1}^\alpha H_t^\gamma G_{t-1}^\theta = \underbrace{C_t + K_t - (1 - \delta)K_{t-1} + G_t - (1 - \delta^G)G_{t-1}}_{=C_t + I_t^G + I_t^P}.$$

Así, podemos definir

$$\overline{\mathcal{L}} = \mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \left[\frac{C_{t+k}^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{N_{t+k}^\nu}{1+\nu} + \psi_{t+k} \left(AK_{t-1}^\alpha H_t^\gamma G_{t-1}^\theta - C_t + K_t - (1 - \delta)K_{t-1} + G_t - (1 - \delta^G)G_{t-1} \right) \right].$$

Derivando respecto a C_t, G_t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial C_t} &= C_t^{-\sigma} - \lambda_t = 0 \\ \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial G_t} &= \beta \mathbb{E}_t \left[\lambda_{t+1} \theta A_{t+1} K_t^\alpha H_t^\gamma G_{t-1}^\theta + (1 - \delta^G) \right] - \lambda_t = 0. \end{aligned}$$

Con lo cual:

$$1 = \beta \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \frac{\theta Y_{t+1}}{G_t} + (1 - \delta^G) \right].$$

De este modo, incorporando esta nueva condición de equilibrio, tenemos

$$1 = \beta \frac{\theta Y}{G} + (1 - \delta^G).$$

Finiquitemos el negocio resolviendo el sistema no lineal

$$(1) \quad Y = C + \delta K + \delta^G G$$

$$(2) \quad H^\nu C^\sigma = \frac{\gamma Y}{H}$$

$$(3) \quad 1 = \beta \left(\frac{\alpha Y}{K} + 1 - \delta \right)$$

$$(4) \quad Y = K^\alpha H^\gamma G^\theta$$

$$(5) \quad 1 = \beta \left(\frac{\theta Y}{G} + 1 - \delta^G \right).$$

Para resolver el sistema, podríamos emplear métodos numéricos que hacen uso de Lema de Shape paramétrico, pero el problema es que el algoritmo que usa bases de Görbner depende de los parámetros que se escojan ([Kubler and Schmedders, 2010](#)). Por ende, usamos la identidades y buscamos simplificaciones algebraicas:

► Primero, de (3) y (5), podemos despejar

$$\begin{aligned} \frac{Y}{K} &= \frac{1 - \beta(1 - \delta)}{\alpha\beta} \\ \frac{Y}{G} &= \frac{1 - \beta(1 - \delta^G)}{\theta\beta}. \end{aligned}$$

► De (1):

$$\frac{Y}{K} = \frac{C}{K} + \delta + \frac{\delta^G G}{K}.$$

Como tenemos Y/K y Y/G , automáticamente tenemos G/K :

$$\frac{G}{K} = \frac{\frac{Y}{K}}{\frac{Y}{G}} = \frac{\theta}{\alpha} \frac{1 - \beta(1 - \delta)}{1 - \beta(1 - \delta^G)}.$$

Así,

$$\frac{C}{K} = \frac{1 - \beta(1 - \delta)}{\alpha\beta} - \delta - \frac{\theta\delta^G}{\alpha} \frac{1 - \beta(1 - \delta)}{1 - \beta(1 - \delta^G)}.$$

► Si tomamos $\frac{Y}{H}$ por el momento como dado, de (2):

$$\begin{aligned} \frac{\gamma Y}{H} &= H^\nu C^\sigma \\ \frac{\gamma Y}{H} &= H^\nu C^\sigma \frac{K^{\nu+\sigma}}{K^{\nu+\sigma}} \\ K &= \left[(1 - \alpha) \left(\frac{C}{K} \right)^{-\sigma} \frac{Y}{H} \left(\frac{H}{K} \right)^{-\nu} \right]^{\frac{1}{\sigma+\nu}}. \end{aligned}$$

► Ahora bien, si asumimos $\sigma = 1$, i.e. $u(C) = \ln C$:

$$H = \left(\gamma \frac{Y}{C} \right)^{\frac{1}{1+\nu}} = \left(\gamma \frac{Y}{K} \frac{K}{C} \right)^{\frac{1}{1+\nu}}.$$

► Falta solo entonces determinar Y/H :

$$\begin{aligned}
\frac{Y}{H} &= \frac{K^\alpha H^\gamma G^\theta}{H} \\
\frac{Y}{H} &= \left(\frac{Y}{Y/K} \right)^\alpha H^{\gamma-1} \left(\frac{Y}{Y/G} \right)^\theta \\
\frac{Y}{H} &= Y^{\alpha+\theta} (Y/K)^{-\alpha} (Y/G)^{-\theta} H^{\gamma-1} \\
Y^{1-\alpha-\theta} &= (Y/K)^{-\alpha} (Y/G)^{-\theta} H^\gamma \\
Y &= \left[(Y/K)^{-\alpha} (Y/G)^{-\theta} H^\gamma \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\theta}} \\
\frac{Y}{H} &= \frac{\left[(Y/K)^{-\alpha} (Y/G)^{-\theta} \left(\gamma \frac{Y}{K} \frac{K}{C} \right)^{\frac{\gamma}{1+\nu}} \right]^{\frac{1}{1-\alpha-\theta}}}{\left(\gamma \frac{Y}{K} \frac{K}{C} \right)^{\frac{1}{1+\nu}}}.
\end{aligned}$$

2.4. Exogeneidad en la inversión pública

Un modelo adicional que simulamos es uno donde

$$\ln I_t^G = \varsigma \ln I_{t-1}^G + \epsilon_t$$

con $\varsigma \in (0, 1)$ y $\epsilon_t \sim \mathcal{D}(0, \sigma^2)$. Ante esta modificación, no aparece la llamada $G-$ de Tobin. Además, en el estado estacionario:

$$\begin{aligned}
B &= 0 \\
Y &= C + I^P + I^G \\
N &= H \\
T &= I^G \\
I^P &= \delta K \\
I^G &= 1 \\
G &= \frac{1}{\delta^G} \\
C^{-\sigma} W &= H^\nu \\
\beta(1+r) &= 1 \\
1 &= \beta \left(\alpha + \frac{Y}{K} + 1 - \delta \right) \\
W &= \underbrace{(1-\alpha)}_{=\gamma} \frac{Y}{H}
\end{aligned}$$

$$Y = K^\alpha H^{1-\alpha} G^\theta$$

$$A = 1.$$

Al final todo se reduce en este caso al sistema no lineal de cuatro ecuaciones:

$$\begin{aligned} Y &= C + \delta K + 1 \\ H^\nu C^\sigma &= \frac{(1-\alpha)Y}{H} \\ 1 &= \beta \left(\frac{\alpha Y}{K} + 1 - \delta \right) \\ Y &= K^\alpha H^{1-\alpha} (\delta^G)^{-1}. \end{aligned}$$

En este caso, se recuperan las relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{Y}{K} &= \frac{1 - \beta(1 - \delta)}{\beta\alpha} \\ \frac{Y}{H} &= \left(\frac{\beta\alpha}{1 - \beta(1 - \delta)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\frac{1}{\delta^G} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ \frac{C}{K} &= \frac{Y}{K} - \delta - \frac{1}{\delta^G K} \\ K &= \left[(1 - \alpha) \left(\frac{C}{K} \right)^{-\sigma} \frac{Y}{H} \left(\frac{H}{K} \right)^{-\nu} \right]^{\frac{1}{\sigma+\nu}}. \end{aligned}$$

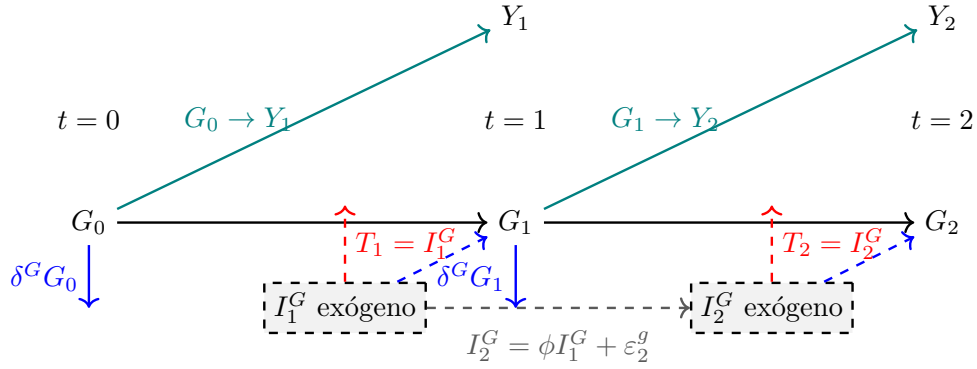


Figura 2: Dinámica caso exógeno.

2.5. Log-linealización: caso endógeno

Proposición 2.1. *El sistema resultante de ecuaciones linealizadas en torno al estado estacionario es el siguiente:*

$$-\sigma c_t + w_t = \nu h_t \quad (1: \text{Oferta de trabajo}) \quad (6)$$

$$-\sigma c_t = \mathbb{E}_t [-\sigma c_{t+1} + r_t] \quad (2: \text{Ecuacion de Euler}) \quad (7)$$

$$y_t = a_t + \alpha k_{t-1} + \gamma h_t + \theta g_{t-1} \quad (3: \text{Producción}) \quad (8)$$

$$y_t - h_t = w_t \quad (4: \text{Demanda de trabajo}) \quad (9)$$

$$0 = \mathbb{E}_t [-\sigma(c_{t+1} - c_t) + \xi(y_{t+1} - k_t)] \quad (5: \text{Q-Tobin linealizado}) \quad (10)$$

$$0 = \mathbb{E}_t [-\sigma(c_{t+1} - c_t) + \eta(y_{t+1} - g_t)] \quad (5.2: \text{G-Tobin linealizado}) \quad (11)$$

$$y_t = \frac{C}{Y} c_t + \frac{\delta K}{Y} i_t^P + \frac{\delta^G G}{Y} i_t^G \quad (6: \text{Identidad de recursos}) \quad (12)$$

$$k_t = \delta i_t^P + (1 - \delta) k_{t-1} \quad (7: \text{Acumulacion de capital}) \quad (13)$$

$$g_t = \delta^G i_t^G + (1 - \delta^G) g_{t-1} \quad (7.2: \text{Acumulacion de capital publico}) \quad (14)$$

$$a_t = \rho a_{t-1} + \varepsilon_t \quad (8: \text{Proceso AR}(1) \text{ para productividad}) \quad (15)$$

Donde:

- $c_t, h_t, y_t, i_t, k_t, w_t, r_t, a_t, g_t$ son desviaciones logarítmicas de las variables respectivas respecto a su estado estacionario.
- ξ y η son expresiones auxiliares definidas como:

$$\xi := \frac{\alpha \cdot \frac{Y}{K}}{\alpha \cdot \frac{Y}{K} + (1 - \delta)}$$

y

$$\eta = \frac{\theta \cdot \frac{Y}{G}}{\theta \cdot \frac{Y}{G} + (1 - \delta^G)}.$$

Demostración. Todo es consecuencia inmediata de lo siguiente: Las variables se expresan como desviaciones logarítmicas respecto a su valor de estado estacionario. Por ejemplo, si X es una variable, se define $x_t := \ln(X_t) - \ln(\bar{X})$, lo cual es una aproximación de primer orden de la variación porcentual:

$$\boxed{\ln X_t \approx \ln \bar{X} + \frac{X_t - \bar{X}}{\bar{X}} \Rightarrow x_t \approx \frac{X_t - \bar{X}}{\bar{X}}.}$$

En efecto, por Taylor:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$

se sigue que

$$\ln x \simeq \ln x_0 + \left. \frac{d}{dx} [\ln x] \right|_{x=x_0} (x - x_0).$$

Asimismo, si tuviéramos $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, suficientemente diferenciable, su expansión de Taylor en torno a un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, al variar en la dirección $h \in \mathbb{R}^n$, está dada por:

$$\Phi(x_0 + h) = \sum_{|\zeta| \leq m} \frac{1}{\zeta!} D^\zeta \Phi(x_0) h^\zeta + R_m(x_0, h),$$

donde:

- $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{N}^n$ es un multiíndice,
- $|\zeta| = \zeta_1 + \dots + \zeta_n$,
- $\zeta! = \zeta_1! \dots \zeta_n!$,
- $h^\zeta = h_1^{\zeta_1} \dots h_n^{\zeta_n}$,
- $D^\zeta \Phi = \frac{\partial^{|\zeta|} \Phi}{\partial x_1^{\zeta_1} \dots \partial x_n^{\zeta_n}}$,
- $R_m(x_0, h)$ es el término de residuo, de orden $o(\|h\|^m)$ cuando $h \rightarrow 0$.

En particular, si $m = 2$, se tiene:

$$\underbrace{\Phi(x_0 + h) = \Phi(x_0) + \nabla \Phi(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} h^\top D^2 \Phi(x_0) h + o(\|h\|^2)}_{\doteq \Phi(x) \simeq \Phi(x_0) + \nabla \Phi(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^\top H_\Phi(x_0)(x - x_0)}.$$

De este modo, haciendo siempre uso de las condiciones de equilibrio:

1. Para la oferta de trabajo:

$$C_t^{-\sigma} W_t = H_t^\nu$$

$$-\sigma \ln C_t + \ln W_t = \nu \ln H_t$$

$$-\sigma \ln C_t + \sigma \ln C - \sigma \ln C + \ln W_t - \ln W + \ln W = \nu \ln H_t - \nu \ln H + \nu \ln H$$

$$-\sigma c_t + w_t = \nu h_t.$$

2. Ecuación de Euler: si X es una v.a. tal que $X = 0$ casi seguramente, entonces $\mathbb{E}_t[X] = 0$ para cualquier t . En consecuencia, podemos analizar

$$\begin{aligned}
C_t^{-\sigma} &= \beta C_{t+1}^{-\sigma} (1 + r_t) \\
-\sigma \ln C_t &= \ln \beta - \sigma \ln C_{t+1} + \underbrace{\ln(1 + r_t)}_{\simeq r_t} \\
-\sigma \ln C_t + \sigma \ln C &= \ln \beta - \sigma \ln C_{t+1} + \sigma \ln C_{t+1} + r_t - r + r \\
-\sigma c_t &= \mathbb{E}_t[-\sigma c_{t+1} + r_t].
\end{aligned}$$

Un procedimiento directo conduce a:

$$\begin{aligned}
C_t^{-\sigma} &\simeq \bar{C}^{-\sigma} \left[1 - \sigma \frac{C_t - \bar{C}}{\bar{C}} \right] \\
&= \bar{C}^{-\sigma} (1 - \sigma C_t) \\
1 + r_t &= 1 + \bar{r} - \bar{r} + r_t \\
&= 1 + \hat{r}_t + \bar{r} \\
&\simeq (1 + \hat{r}_t)(1 + \bar{r}) \\
\bar{C}^{-\sigma} (1 - \sigma c_t) &= \beta \mathbb{E}_t \left[\bar{C}^{-\sigma} (1 - \sigma c_{t+1}) (1 + \bar{r}) (1 + r_t) \right] \\
1 - \sigma c_t &= \mathbb{E}_t[(1 - \sigma c_{t+1})(1 + r_t)] \\
1 - \sigma c_t &\simeq \mathbb{E}_t[1 - \sigma c_{t+1} + r_t].
\end{aligned}$$

Alternativamente, asumiendo log-normalidad en el crecimiento del consumo ([Cochrane, 2005](#)), y considerando los términos de orden dos *négligeables*: $\ln \mathbb{E}_t[X] \simeq \mathbb{E}_t[\ln X]$.

3. Producción:

$$\begin{aligned}
Y_t &= A_t K_{t-1}^\alpha H_t^\gamma G_{t-1}^\theta \\
\ln Y_t &= \ln A_t + \alpha \ln K_{t-1} + \gamma \ln H_t + \theta \ln G_{t-1} \\
\ln Y_t - \ln Y + \ln Y &= \ln A_t - \ln 1 + \ln 1 + \alpha \ln K_{t-1} - \alpha \ln K + \alpha \ln K \\
&\quad + \gamma \ln H_t - \gamma \ln H + \gamma \ln H + \theta \ln G_{t-1} - \theta \ln G + \theta \ln G \\
y_t &= a_t + \alpha k_{t-1} + \gamma h_t + \theta g_{t-1}.
\end{aligned}$$

4. Demanda de trabajo:

$$\gamma \frac{Y_t}{H_t} = W_t$$

$$\ln \gamma + \ln Y_t - \ln H_t = \ln W_t$$

$$\ln \gamma + \ln Y_t - \ln Y - \ln H_t + \ln H = \ln W_t - \ln W + \ln W$$

$$y_t - h_t = w_t$$

5. Q -Tobin: por un argumento similar a lo analizado para la ecuación de Euler:

$$0 = \ln \beta + \mathbb{E}_t \left[-\sigma \ln C_{t+1} + \sigma \ln C_t + \ln \left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_t} + 1 - \delta \right) \right].$$

Ahora bien,

$$\ln \left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_t} + 1 - \delta \right) \simeq \ln \left(\alpha \frac{Y}{K} + 1 - \delta \right) + \left[\begin{array}{c} \frac{\alpha/K}{\alpha \frac{Y}{K} + 1 - \delta} \\ -\frac{\alpha Y/K^2}{\alpha \frac{Y}{K} + 1 - \delta} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} Y_{t+1} - Y & K_t - K \end{array} \right]$$

Dado que

$$\left[\underbrace{\begin{array}{c} \frac{\alpha/K}{\alpha \frac{Y}{K} + 1 - \delta} \\ -\frac{\alpha Y/K^2}{\alpha \frac{Y}{K} + 1 - \delta} \end{array}}_{=\xi} \right] \left[\begin{array}{cc} Y_{t+1} - Y & K_t - K \end{array} \right] = \frac{\alpha Y/K}{\alpha \frac{Y}{K} + 1 - \delta} \left[\begin{array}{c} \frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y} \\ - \left(\frac{K_t - K}{K} \right) \end{array} \right],$$

llegamos a:

$$0 = \ln \beta + \mathbb{E}_t \left[-\sigma \ln C_{t+1} + \sigma \ln C_t + \ln \left(\alpha \frac{Y}{K} + 1 - \delta \right) + \xi y_{t+1} - \xi k_t \right].$$

Sumando y restando las desviaciones del logaritmo del consumo, concluimos. que:

$$0 = \mathbb{E}_t [-\sigma(c_{t+1} - c_t) + \xi(y_{t+1} - k_t)].$$

6. G - de Tobin: es análogo al caso anterior.

7. Identidad de recursos:

$$\begin{aligned} Y_t - Y + Y &= C_t - C + C + I_t^P - I^P + I^P + I_t^G - I^G - I^G \\ \frac{Y_t - Y}{Y} &= \frac{C}{C} \frac{C_t - C}{Y} + \frac{I_t^P - I^P}{Y} \frac{I^P}{I^P} + \frac{I_t^G - I^G}{Y} \frac{I^G}{I^G} \end{aligned}$$

$$y_t = \frac{C}{Y}c_t + \frac{I^P}{Y}i_t^P + \frac{I^G}{Y}i_t^G$$

$$y_t = \frac{C}{Y}c_t + \frac{\delta K}{Y}i_t^P + \frac{\delta^G G}{Y}i_t^G.$$

8. Acumulación del capital privado:

$$K_t = (1 - \delta)K_{t-1} + I_t^P$$

$$K_t - K + K = (1 - \delta)(K_{t-1} - K + K) + I_t^P - I^P + I^P$$

$$K_t - K = (1 - \delta)(K_{t-1} - K) + I_t^P - I^P$$

$$\frac{K_t - K}{K} = (1 - \delta)\frac{K_{t-1} - K}{K} + \frac{I_t^P - I^P}{K}$$

$$k_t = (1 - \delta)k_{t-1} + \delta i_t^P.$$

9. Acumulación del capital público:

$$G_t = (1 - \delta^G)G_{t-1} + I_t^G$$

$$G_t - G + G = (1 - \delta^G)(G_{t-1} - G + G) + I_t^G - I^G + I^G$$

$$G_t - G = (1 - \delta^G)(G_{t-1} - G) + I_t^G - I^G$$

$$\frac{G_t - G}{G} = (1 - \delta^G)\frac{G_{t-1} - G}{G} + \frac{I_t^G - I^G}{G}$$

$$g_t = (1 - \delta^G)g_{t-1} + \delta^G i_t^G.$$

10. AR(1) para la productividad:

$$\ln A_t = \rho \ln A_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\ln A_t - \ln 1 = \rho(\ln A_{t-1} - \ln 1) + \varepsilon_t$$

$$a_t = \rho a_{t-1} + \varepsilon_t.$$

□

2.6. Log-linealización: caso exógeno

Proposición 2.2. *El sistema resultante de ecuaciones linealizadas en torno al estado estacionario es el siguiente:*

$$-\sigma c_t + w_t = \nu h_t \quad (1: \text{Oferta de trabajo}) \quad (16)$$

$$-\sigma c_t = \mathbb{E}_t [-\sigma c_{t+1} + r_t] \quad (2: \text{Ecuacion de Euler}) \quad (17)$$

$$y_t = a_t + \alpha k_{t-1} + \gamma h_t + \theta g_{t-1} \quad (3: \text{Producción}) \quad (18)$$

$$y_t - h_t = w_t \quad (4: \text{Demanda de trabajo}) \quad (19)$$

$$0 = \mathbb{E}_t [-\sigma(c_{t+1} - c_t) + \xi(y_{t+1} - k_t)] \quad (5: \text{Q-Tobin linealizado}) \quad (20)$$

$$y_t = \frac{C}{Y} c_t + \frac{\delta K}{Y} i_t^P + \frac{1}{Y} i_t^G \quad (6: \text{Identidad de recursos}) \quad (21)$$

$$k_t = \delta i_t^P + (1 - \delta) k_{t-1} \quad (7: \text{Acumulacion de capital}) \quad (22)$$

$$g_t = \delta i_t^G + (1 - \delta^G) g_{t-1} \quad (7.2: \text{Acumulacion de capital publico}) \quad (23)$$

$$a_t = \rho a_{t-1} + \varepsilon_t \quad (8: \text{Proceso AR}(1) \text{ para productividad}) \quad (24)$$

$$i_t^G = \varphi i_{t-1}^G + \epsilon_t \quad (9: \text{Proceso AR}(1) \text{ para la inversión pública}) \quad (25)$$

Donde:

- $c_t, h_t, y_t, i_t, k_t, w_t, r_t, a_t, g_t$ son desviaciones logarítmicas de las variables respectivas respecto a su estado estacionario.

- y

$$\xi := \frac{\alpha \cdot \frac{Y}{K}}{\alpha \cdot \frac{Y}{K} + (1 - \delta)}.$$

2.7. Identificación de variables

Siguiendo a [Acemoglu \(2009\)](#); [Adda and Cooper \(2003\)](#); [Kamien and Schwartz \(1991\)](#); [Kreps \(2012\)](#); [Sargent \(1987\)](#); [Stachurski \(2009\)](#); [Chiang \(1992\)](#):

Definición 1. Una **variable de estado** en un modelo dinámico es una variable que cumple con las siguientes propiedades:

- Resume toda la información relevante del pasado para predecir el futuro junto con las decisiones actuales.
- Está dada al inicio del periodo (es decir, el agente la toma como exógena al momento de decidir).
- Sigue una ecuación de transición (ley de movimiento) que la hace depender de su valor pasado y de las variables de control.
- Condiciona las decisiones actuales, ya que representa el punto de partida del problema dinámico en cada periodo.

Definición 2. Una **variable de control** es una variable que:

- Es elegida libremente por el agente en el periodo actual t , dadas las condiciones iniciales y las restricciones del modelo.
- Afecta el valor futuro de las variables de estado y también el flujo de utilidad o ganancias.
- Puede ajustarse instantáneamente (en contraste con las variables de estado, que evolucionan con fricción).

Usando la notación y palabras de [Stachurski \(2009\)](#), «el vector de estado \mathbf{x}_t constituye una descripción completa de la posición actual del sistema [...] el vector de control \mathbf{u}_t contiene las variables bajo control parcial del *problem solver*, que inciden sobre \mathbf{x}_{t+1} dado \mathbf{x}_t ». En los modelos, usualmente la atención es sobre la(s) variable(s) de control pues determinan la de estado dada una condición inicial. Por ejemplo, en el caso continuo:

$$\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \mathbf{v}_t,$$

donde v_t es un término de error. En el caso discreto:

$$\mathbf{x}(t+1) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \mathbf{v}_t.$$

Así pues, en nuestro caso, en el periodo t :

- $\mathbf{u}_t = (C_t, I_t^P, I_t^G, N_t(H_t))$ constituye el vector de controles, y,
- $\mathbf{x}_t = (K_{t-1}, G_{t-1}, A_t)$ el vector de estado, con dinámica:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \begin{bmatrix} 1 - \delta & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \delta^G & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_t^P \\ I_t^G \\ C_t \\ N_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_t \end{bmatrix}.$$

Hay tres variables del modelo que no aparecen en estas definiciones: W_t, r_t y Y_t . ¿Por qué? Pues estas son variables de equilibrio. Notar que las definiciones dadas no engloban a estas últimas.

2.7.1. Exogeneidad de la inversión

En este caso, I_t sigue un $AR(1)$ y es exógena. Por lo tanto, $\mathbf{x}(t) = (K_{t-1}, G_{t-1}, A_t, I_t^G)$ y $\mathbf{u}(t) = (C_t, I_t^P, H - t)$. **Notar que I_t^G exógena es más consistente con las simulaciones, donde se pide un shock externo.**

3. Calibración

Siguiendo fundamentalmente a [Castillo and Rojas \(2014\)](#) y complementando con una revisión del estado del arte de la calibración (incluyendo por ejemplo ECON 202 UCB dictado por el Profesor Yuriy Gorodnichenko:

| Parámetro | Valor | Fuente |
|------------|--------------------|--|
| β | 0.99 | Sims (2017) , Wellschmied (nd) |
| α | 0.33 | Wellschmied (nd) |
| γ | $1 - \alpha$ | Supuesto (rendimientos a escala) |
| δ | 0.025 | Sims (2017) |
| ρ | 0.8 | Castillo and Rojas (2014) |
| σ | 1 | Castillo and Rojas (2014) |
| ν | 0.5 | Notas de clase y Castillo and Rojas (2014) |
| δ^G | $\{0.01, 0.02\}$, | Leeper et al. (2010) |

Cuadro 1: Parámetros calibrados del modelo

Note que solo falta especificar θ . Dado que en el modelo considerado el gasto público G_t entra como insumo productivo en la función de producción:

$$Y_t = A_t K_{t-1}^\alpha H_t^\gamma G_{t-1}^\theta,$$

con $\gamma = 1 - \alpha$, el parámetro θ representa la elasticidad del producto respecto al capital público. La literatura no ofrece consenso sobre el valor empírico de esta elasticidad. Estudios tempranos como [Aschauer \(1989\)](#) sugieren valores elevados (hasta 0.24), mientras que otros trabajos como [Evans and Karras \(1994\)](#) y [Kamps \(2004\)](#) encuentran efectos nulos o incluso negativos. Siguiendo [Leeper et al. \(2010\)](#), se adoptan los valores $\theta \in \{0.05, 0.1\}$ como referencia, en línea con [Baxter and King \(1993\)](#). Cabe señalar que si se considera una forma funcional alternativa con complementariedad indiferenciable entre capital privado y público, como $Y_t = A_t (K_t G_t)^\alpha H_t^{1-\alpha}$, se obtendría una interpretación diferente, donde θ se puede absorber en α , de modo que $\theta = 0.33$ es otra alternativa plausible.

Observación. En nuestras simulaciones, vamos a combinar distintos parámetros:

$$\{\theta, \varphi, \rho\}$$

para comentar los distintos comportamientos.

4. Funciones impulso respuesta

4.1. Choque de productividad con endogeneidad en la inversión pública

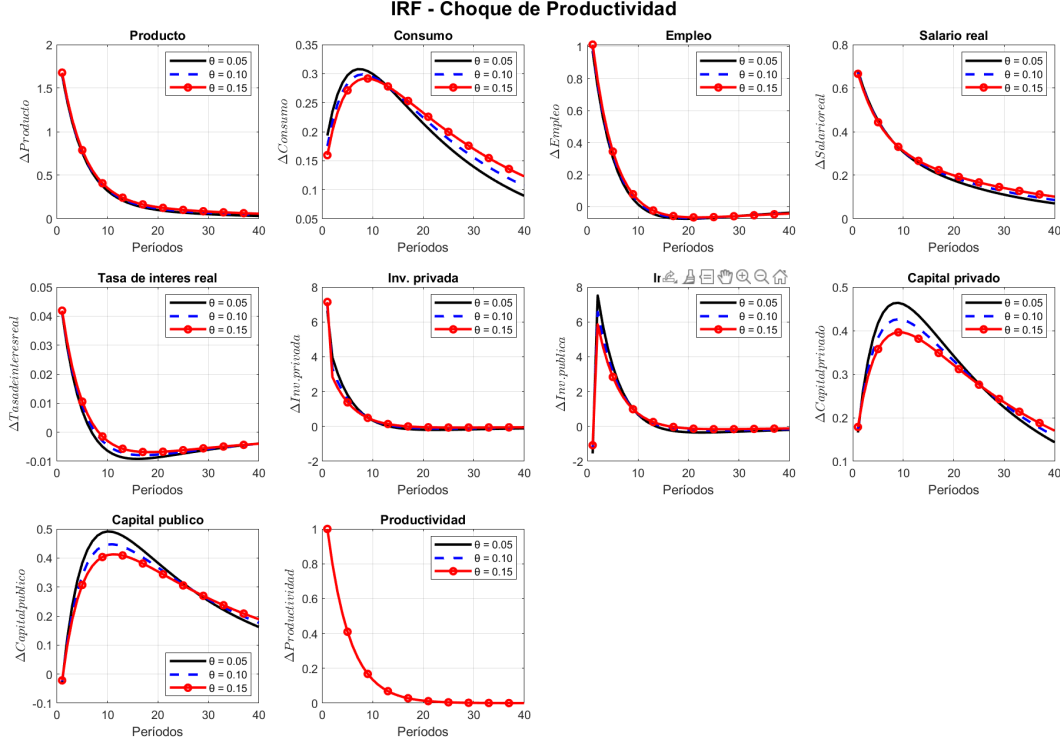


Figura 3: Choque de productividad: modelo 1. Comparación de diferentes valores de θ .

La Figura 3 presenta las funciones impulso-respuesta (IRFs) ante un **choque positivo de productividad total de los factores (TFP)**, bajo el supuesto de que la inversión pública I_t^G es *endógena* y responde según una regla de decisión óptima del gobierno. Esta simulación se realiza utilizando los **parámetros calibrados base**, y en particular se considera un proceso autoregresivo para la productividad con persistencia $\rho = 0.8$. El nivel base es 0.

En este marco, el gobierno elige de forma *óptima* la trayectoria de inversión pública, decidiendo cuánto invertir en cada periodo en función del retorno marginal del capital público. La función de producción incorpora capital público, ponderado por el parámetro $\theta \in \{0.05, 0.10, 0.15\}$, que mide su importancia relativa en la generación de output.

Se destacan las siguientes reacciones:

- **Producto (Y_t):** Responde de forma inmediata al shock, con un alza significativa seguida de una *caída gradual*. El efecto inicial es mayor a mayor θ , ya que el capital público complementa al capital privado y amplifica el impacto del TFP. Eventualmente, la producción *cae por debajo de su nivel de largo plazo* debido al fin del impulso de productividad, a la depreciación del capital y a la caída transitoria en la inversión.
- **Consumo (C_t):** Se observa una respuesta *persistentemente creciente*, sin caída inicial. Esto ocurre a pesar de la ausencia de hábitos de consumo, y se debe a dos factores: (i) la elevada persistencia del TFP, que prolonga el efecto ingreso esperado, y (ii) la mejora sostenida en el stock de capital (privado y público), que incrementa la riqueza permanente.
- **Empleo (H_t):** Aumenta de forma inmediata, pero presenta una *caída gradual*. La mayor demanda laboral en el corto plazo refleja el aumento de productividad marginal del trabajo, aunque a medida que se disipa el efecto del shock y los impuestos aumentan $T = I^G$, el empleo se reduce más de lo necesario transitoriamente.
- **Salario real (w_t):** Reacciona positivamente al inicio, pues PMG_H aumenta por el shock en los complementos, pero luego *cae de forma progresiva*. Esto se debe a la desaparición del impulso de TFP y al hecho de que el empleo aumenta inicialmente más rápido que la productividad marginal, lo que comprime el salario en el mediano plazo.
- **Tasa de interés real (r_t):** Presenta un aumento pronunciado inmediato, seguido de una *caída gradual* que la lleva por debajo del nivel inicial. Esto refleja una composición intertemporal del consumo: la mayor productividad futura reduce el incentivo a postergar consumo, y por tanto la tasa cae.
- **Inversión privada (I_t^P):** Reacciona bruscamente con un pico inicial elevado y luego *cae de forma más que proporcional*. Esta sobrecorrección obedece a la anticipación de menores retornos marginales en el futuro cuando el efecto del TFP y del capital público se agota.
- **Inversión pública (I_t^G):** Como es decidida por el gobierno, sube rápidamente en respuesta al mayor retorno marginal del capital público. No obstante, puede observarse una leve caída inicial debido al *desfase temporal inherente en la ecuación de acumulación* y a la *compensación de equilibrio entre los componentes de la demanda agregada*. Posteriormente, *se ajusta gradualmente a la baja*, en la medida en que el beneficio intertemporal de seguir invirtiendo se reduce conforme el capital público se vuelve menos escaso.

- **Capital privado (K_t):** Exhibe una trayectoria *persistente creciente*, sin caída inicial. Se acumula con retardo respecto al pico de inversión. Aunque eventualmente converge, no cae por debajo del valor inicial. Clásico comportamiento analizado en [Romer \(2019\)](#).
- **Capital público (G_t):** Al igual que el capital privado, muestra una respuesta *monótona y persistente*. Se acumula progresivamente gracias al aumento inicial en I_t^G .
- **Productividad (A_t):** Su dinámica es exógena y sigue el proceso $A_t = \rho A_{t-1} + \varepsilon_t$, con $\rho = 0.8$, lo que genera una trayectoria decreciente suavemente desde el pico del impacto.

En conjunto, la figura evidencia que un mayor valor de θ genera respuestas más amplificadas en la economía, debido al papel productivo del capital público. Además, incluso en ausencia de fricciones en el consumo, la persistencia del shock y la acumulación de capitales inducen un comportamiento suave en las decisiones agregadas, en particular el consumo y la inversión.

4.2. Choque de productividad con exogeneidad en al inversión pública

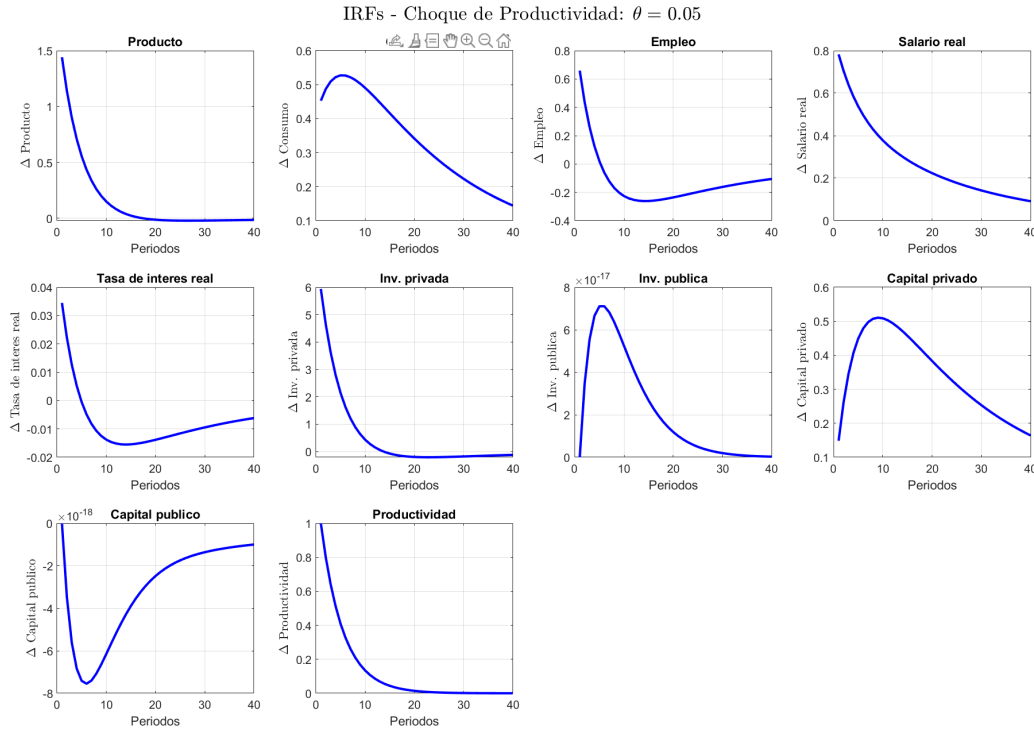


Figura 4: IRFs ante un choque de productividad con inversión pública exógena ($\theta = 0.05$).

La Figura 4 muestra las respuestas del modelo cuando la inversión pública I_t^G se modela como un proceso exógeno AR(1), manteniendo la calibración base y fijando $\theta = 0.05$. Como puede apreciarse,

tanto la inversión pública como el capital público no presentan dinámica alguna: los valores numéricos observados (del orden de 10^{-17} y 10^{-18}) corresponden a ruido computacional y son efectivamente cero para propósitos económicos. Este tipo de residuales son comunes en simulaciones numéricas con procesos estocásticos y se deben a errores de redondeo en la resolución de sistemas lineales, como se documenta en [Süli and Mayers \(2003\)](#). El resto de variables responde de forma similar al caso con inversión endógena, aunque con menor intensidad en la fase expansiva y una contracción más anticipada, debido a la ausencia de una respuesta activa de la inversión pública que amplifique la demanda agregada.

4.3. Choque de inversión pública bajo el régimen exógeno

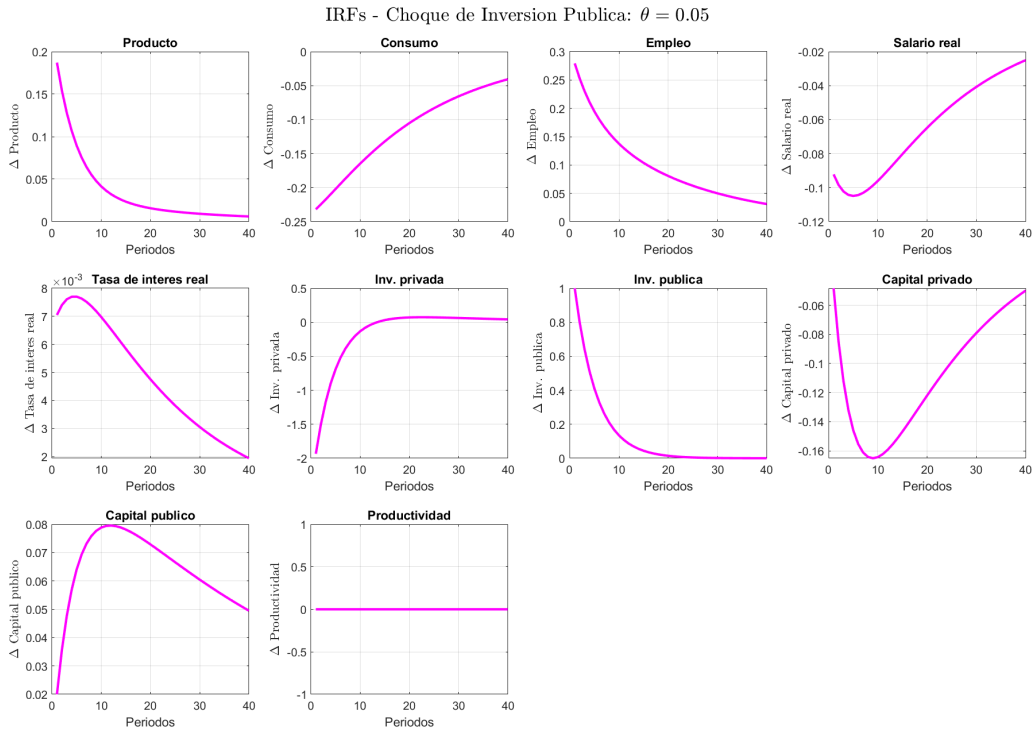


Figura 5: IRFs ante un choque de inversión pública exógena ($\theta = 0,05$).

La Figura 5 muestra las respuestas del modelo ante un choque positivo de inversión pública I_t^G , considerado como exógeno y transitorio, con $\theta = 0.05$. La dinámica exhibida es cualitativamente diferente a la del choque de productividad. En este caso, se observa un efecto inicial contractivo sobre el consumo, explicado por el financiamiento impositivo necesario para ejecutar la inversión. Dado que no hay ajuste intertemporal por parte del gobierno, la inversión debe financiarse directamente vía impuestos, reduciendo el ingreso disponible de los hogares. Este efecto se transmite a la inversión

privada, que *cae fuertemente en el impacto*, anticipando retornos márginales decrecientes por la acumulación de capital público y el aumento de la tasa de interés. En contraste, el empleo aumenta, impulsado por la mayor demanda agregada inducida por la inversión gubernamental. El producto también crece inicialmente, aunque de manera acotada. El capital público se acumula con rezago, dado el efecto directo del shock sobre I_t^G , mientras que el capital privado se contrae transitoriamente, en coherencia con la caída de la inversión privada. El salario real cae en el corto plazo por el aumento en el empleo, y se recupera gradualmente. Finalmente, la productividad permanece constante, al ser un proceso puramente exógeno no afectado por esta clase de shocks. Esta simulación muestra que, cuando el gasto público no es optimizado intertemporalmente, el resultado puede incluir efectos contractivos en algunas variables reales clave, debido a los efectos de desplazamiento y financiación impositiva directa.

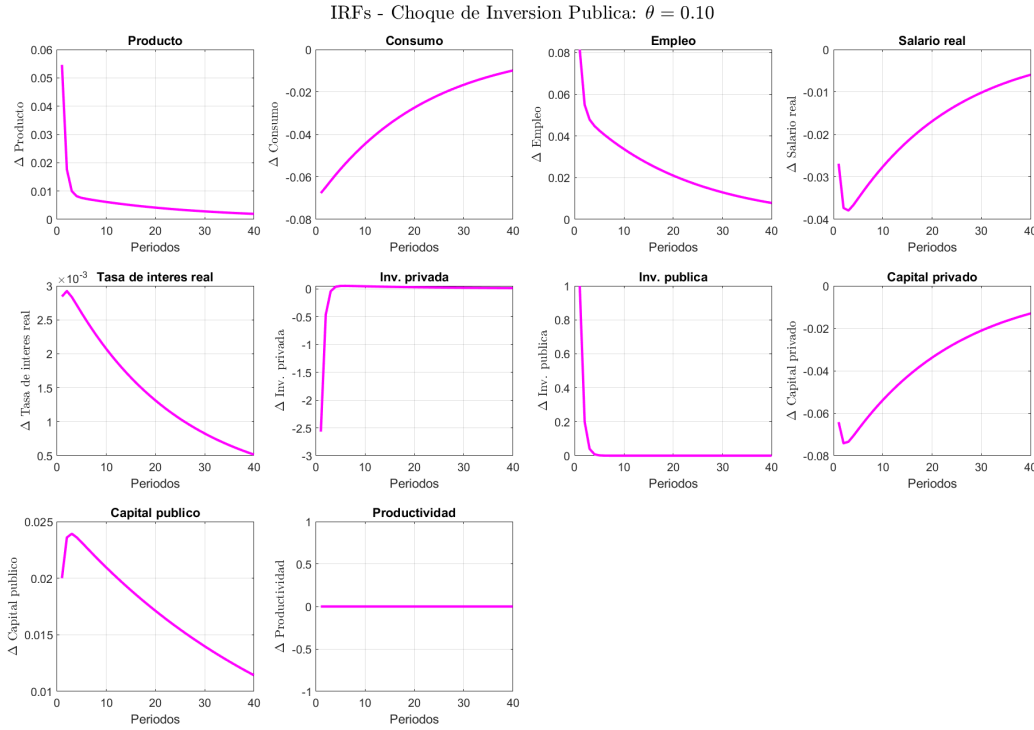


Figura 6: IRFs ante un choque de inversión pública exógena con $\theta = 0,10$.

Comparando las Figuras 5 y 6, que muestran los efectos de un mismo choque de inversión pública bajo distintos valores de θ , se aprecia que el impacto macroeconómico se amplifica moderadamente a medida que aumenta la importancia del capital público en la función de producción. En particular, el producto responde de manera algo más intensa cuando $\theta = 0.10$, pues es más intenso el efecto dado el término G^θ , aunque el efecto sigue siendo de corta duración. El consumo presenta una caída

levemente más pronunciada en el corto plazo, dado que el incremento del gasto gubernamental genera un desplazamiento más marcado del ingreso disponible hacia el sector público. En el mercado de factores, el empleo y el salario real también presentan respuestas similares en forma, pero algo más suaves en el caso de θ mayor, como consecuencia de una menor presión sobre el trabajo relativo al capital. Cabe destacar que la inversión privada cae más fuertemente con $\theta = 0.10$, ya que la mayor eficiencia del capital público hace que las empresas anticipen un efecto crowding-out más fuerte sobre el capital privado. Esto se traduce en una caída inicial más profunda de I_t^P , con una posterior convergencia suave. En consonancia, el capital privado cae más en el corto plazo, aunque la recuperación es más progresiva. Finalmente, la tasa de interés real presenta un incremento inicial menos pronunciado con θ alto, indicando que el efecto de demanda agregada neta es menor cuando el capital público sustituye más eficientemente al privado. En conjunto, un valor mayor de θ modera los efectos de corto plazo sobre ciertas variables (como salarios o empleo), pero intensifica los efectos de desplazamiento en la composición de la inversión. Esto refuerza la idea de que el capital público puede actuar como sustituto parcial del capital privado en la generación de producto, pero no sin costos transitorios sobre el consumo privado y la asignación de recursos.

4.4. Choque de productividad con $\theta = 0.1$

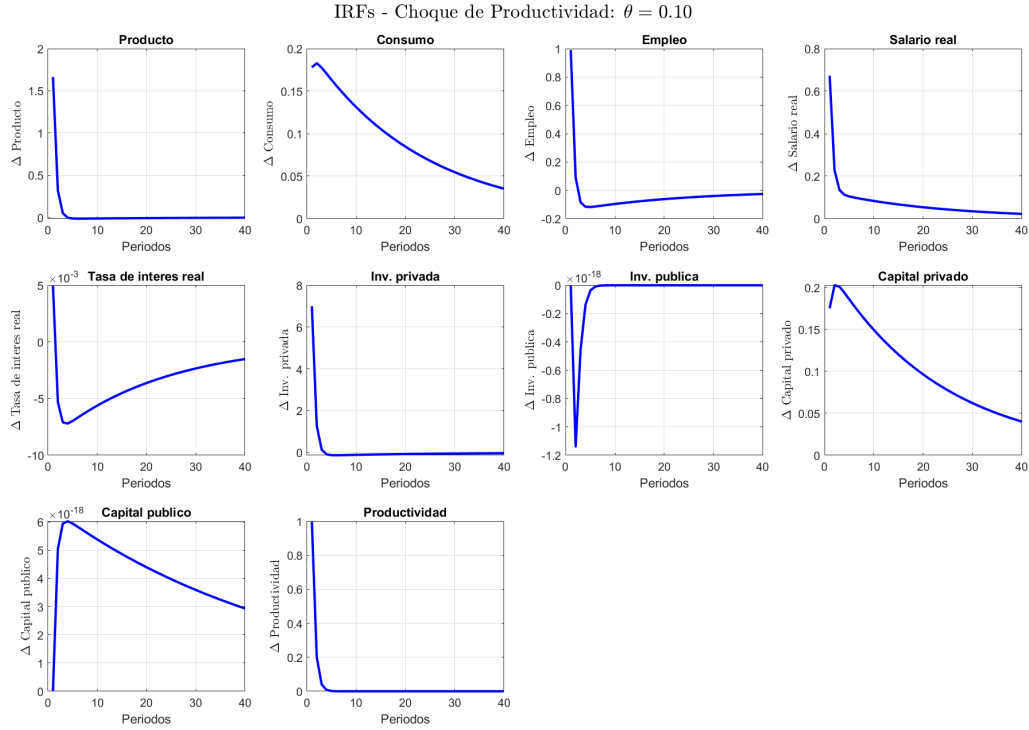


Figura 7: IRFs ante un choque de productividad con $\theta = 0.10$.

La Figura 7 presenta las respuestas del modelo ante un choque positivo de productividad bajo el supuesto de que la inversión pública es exógena y no responde a decisiones optimizadas del gobierno. Se utiliza una mayor participación del capital público en la función de producción, fijando $\theta = 0.10$. En este caso, al igual que con $\theta = 0.05$, tanto la inversión pública como el capital público no se mueven significativamente: las variaciones observadas están en el orden de 10^{-18} , lo que constituye un valor nulo desde el punto de vista computacional. Estas pequeñas fluctuaciones son atribuibles a ruido numérico inherente a los procesos autoregresivos en la simulación dinámica (cf. Süli and Mayers, 2003).

Sin embargo, las demás variables responden con mayor intensidad que en el caso con menor θ . El producto y la inversión privada muestran picos iniciales más altos, ya que una mayor eficiencia del capital público hace más rentable la acumulación de capital privado, incluso en ausencia de nuevas inversiones estatales. El consumo, en cambio, crece con más suavidad y cae más lentamente, producto del aumento sostenido en el ingreso esperado. La tasa de interés real cae bruscamente y luego se recupera, reflejando la revalorización inicial del capital ante la mayor productividad, seguida

por la convergencia intertemporal. El empleo y el salario real suben inicialmente, pero muestran una corrección moderada. Este ejercicio confirma que, incluso si el gobierno no responde activamente al shock de productividad, un mayor peso de G_t en la tecnología de producción amplifica los efectos agregados vía complementariedad con el capital privado. No obstante, la ausencia de una regla de inversión pública limita la persistencia de estos efectos.

5. Discusión y análisis

En esta sección discutimos las implicancias, ventajas y desventajas de incluir inversión pública en el modelo RBC estudiado. Extendemos la discusión al caso de hábitos de consumo en la sección 6.

El modelo estándar de Ciclos Económicos Reales suele incorporar al gobierno asumiendo que todo el gasto público se canaliza vía consumo de bienes finales. Sin embargo, esta hipótesis es limitada: en la práctica, una proporción significativa del gasto público corresponde a inversión en infraestructura y otros bienes intermedios (Vasilev, 2021). Diversas investigaciones han mostrado que no es adecuado tratar el gasto público como un bloque homogéneo, ya que sus distintos componentes generan efectos dispares sobre la actividad económica (Konstantinou and Partheniou, 2021; Devadas and Pennings, 2018).

A diferencia del gasto en consumo, el cual incide principalmente sobre la demanda agregada sin afectar directamente la capacidad productiva de la economía, la inversión pública influye tanto por el lado de la demanda como por el de la oferta. Al incrementar la dotación de capital público, eleva la productividad marginal del trabajo y del capital privado, y por tanto, la producción potencial. Como consecuencia, el efecto riqueza negativo de un incremento del gasto público suele atenuarse, generando incluso una respuesta positiva del consumo privado en ciertos escenarios (Tchakarov and Straub, 2007).

Desde una perspectiva normativa, este mecanismo sugiere que una composición del gasto público con mayor énfasis en inversión podría ser preferible. De hecho, la literatura ha defendido la *regla dorada* de las finanzas públicas, según la cual el gasto en consumo debe financiarse con impuestos corrientes, mientras que la inversión puede justificarse con endeudamiento, al tener efectos persistentes sobre el producto (Perotti, 2004).

En términos de modelización, la incorporación explícita de la inversión pública en modelos RBC permite capturar de forma más realista los mecanismos a través de los cuales la política fiscal afecta al ciclo económico y al crecimiento. Modelos que diferencian entre gasto en consumo e inversión generan predicciones más acordes con la evidencia empírica y ofrecen orientaciones más pertinentes

para el diseño de políticas (Lee, 2025). Esta diferenciación también resulta crítica para países en desarrollo, donde los cuellos de botella en infraestructura limitan el crecimiento y donde los retornos de la inversión pública tienden a ser más elevados (de Economía, 2018; Escobal, 2005).

No obstante, esta extensión trae consigo mayores exigencias técnicas y empíricas. El capital público requiere una formulación cuidadosa en la función de producción, lo que implica seleccionar tasas de depreciación plausibles y parámetros que reflejen su complementariedad (o sustituibilidad) con el capital privado. Además, la eficiencia de la inversión pública varía entre contextos, dificultando la calibración de los modelos (Dabla-Norris et al., 2012). Esta heterogeneidad genera incertidumbre en las predicciones y limita la robustez de las recomendaciones.

Muchos modelos RBC con inversión pública suponen eficiencia perfecta en la asignación del gasto, lo cual es problemático. La evidencia muestra que los proyectos públicos suelen enfrentar sobrecostos, retrasos e ineficiencias (Ogibayashi and Takashima, 2017; Azzimonti et al., 2009). Incluso bajo supuestos de racionalidad gubernamental, la presencia de restricciones institucionales, problemas de agencia y consideraciones políticas puede inducir comportamientos subóptimos (Azzimonti, 2005; Perotti, 2004). Ignorar estos factores lleva a sobrestimar los beneficios de la inversión pública y a una potencial mala orientación de la política fiscal.

6. Hábitos de consumo

La noción de hábitos de consumo surge como una respuesta teórica y empírica a la necesidad de capturar la persistencia observada en las decisiones de consumo agregadas. A lo largo de cinco décadas, distintos autores han contribuido al desarrollo de esta idea. Desde los trabajos fundacionales de Pollak (1970); Ryder and Heal (1973); Sundaresan (1989), hasta las extensiones aplicadas a precios de activos y ciclos reales Abel (1990); Campbell and Cochrane (1999); Boldrin et al. (2001), así como las formulaciones con utilidad comparativa y hábitos externos en Carroll et al. (1997), y las evaluaciones empíricas más recientes como Chen and Ludvigson (2004); Leeper et al. (2010), se ha consolidado un marco teórico donde el consumo no depende exclusivamente del nivel actual, sino de una referencia dinámica influenciada por decisiones pasadas.

Adoptamos aquí el modelo clásico de hábitos de consumo con separabilidad entre consumo y trabajo, en línea con la formulación de utilidad intertemporal que permite representar de manera *tractable* la dinámica de las decisiones. Como decía Albert Einstein: «Si no puedes explicárselo a un niño de seis años, es que tú mismo no lo entiendes». Motivados por esa filosofía, optamos por la

especificación²

$$\frac{(C_t - bC_{t-1})^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} - \frac{N_t^{1+\nu}}{1 + \nu},$$

que es un caso particular de:

$$F(u(C_t, X_t), N_t | \Xi), \quad \text{con } X_t = f(C_{t-1}, C_{t-2}, \dots, C_0), \quad \Xi \text{ vector de parámetros.}$$

Nuevamente por la regla del Hospital, se demuestra fácilmente que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1} \frac{(C_t - bC_{t-1})^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} = \ln(C_t - bC_{t-1}). \quad (26)$$

Por lo tanto, asumiendo siempre un espacio de trayectorias donde $C_t - bC_{t-1} > 0$, extendemos el modelo al caso $\sigma = 1$ vía (26).

6.1. Condiciones de primer orden

El modelo solo se ve modificado por el lado de las preferencias de los consumidores. En general, la ecuación de Euler siempre provee

$$u'(C_t) = \beta \mathbb{E}_t [u'(C_{t+1})(1 + r_t)].$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta esto, y que

$$u'(C_t) = (C_t - bC_{t-1})^{-\sigma},$$

obtenemos :

²La función de utilidad $\frac{(C_t - bC_{t-1})^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} - \frac{N_t^{1+\nu}}{1 + \nu}$ introduce hábitos de consumo internos de tipo aditivo. El parámetro $b \in [0, 1)$ mide el grado de hábito: cuanto más cercano a 1, mayor es la dependencia del consumo actual respecto al consumo pasado. La forma aditiva $(C_t - bC_{t-1})$ implica que el consumidor evalúa su nivel de satisfacción relativa a un estándar interno basado en su propio consumo reciente. Esta especificación es tractable analíticamente y fundamentada en, por ejemplo: Pollak (1970); Ryder and Heal (1973); Campbell and Cochrane (1999). La elección de una sola lag (C_{t-1}) en lugar de un promedio móvil más largo como $\sum_{k=1}^K \omega_k C_{t-k}$ responde a motivos de parsimonia y simplificación. No obstante, en algunos contextos como los ciclos de consumo estacional (por ejemplo, festividades como Navidad o Fiestas Patrias), podría ser razonable modelar el hábito como dependiente de valores pasados específicos (por ejemplo, C_{t-12} en modelos mensuales), lo que introduce patrones de referencia con periodicidad calendario. Aquí, sin embargo, se supone un entorno temporalmente homogéneo que va en acorde con la idea de un consumo suavizado y la memoria a corto plazo.

Cuadro 2: Condiciones de primer orden del modelo RBC con hábitos y capital público: I^G **endógena**.

| | | | |
|--------|------------------------|----------------------------------|---|
| (i) | Euler (hábitos) | $(C_t - bC_{t-1})^{-\sigma}$ | $= \beta \mathbb{E}_t [(C_{t+1} - bC_t)^{-\sigma} (1 + r_t)]$ |
| (ii) | Oferta laboral | $(C_t - bC_{t-1})^{-\sigma} W_t$ | $= N_t^\nu$ |
| (iii) | Inv. privada: FOC | 1 | $= \beta \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{C_{t+1} - bC_t}{C_t - bC_{t-1}} \right)^{-\sigma} \left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_t} + 1 - \delta \right) \right]$ |
| (iv) | Inv. pública: FOC | 1 | $= \beta \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{C_{t+1} - bC_t}{C_t - bC_{t-1}} \right)^{-\sigma} \left(\theta \frac{Y_{t+1}}{G_t} + 1 - \delta^G \right) \right]$ |
| (v) | Capital privado | K_t | $= (1 - \delta) K_{t-1} + I_t^P$ |
| (vi) | Capital público | G_t | $= (1 - \delta^G) G_{t-1} + I_t^G$ |
| (vii) | Salario real | W_t | $= \gamma \frac{Y_t}{H_t}$ |
| (viii) | Producción agregada | Y_t | $= A_t K_{t-1}^\alpha H_t^\gamma G_{t-1}^\theta$ |
| (ix) | Shock de productividad | $\ln A_t$ | $= \rho \ln A_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ |

Cuando cambiamos la hipótesis de endogeneidad por exogeneidad (con la finalidad de simular shocks):

Cuadro 3: Condiciones de primer orden del modelo RBC con hábitos y capital público: I^G **exógena**.

| | | | |
|--------|----------------------------|----------------------------------|---|
| (i) | Euler (hábitos) | $(C_t - bC_{t-1})^{-\sigma}$ | $= \beta \mathbb{E}_t [(C_{t+1} - bC_t)^{-\sigma} (1 + r_t)]$ |
| (ii) | Oferta laboral | $(C_t - bC_{t-1})^{-\sigma} W_t$ | $= N_t^\nu$ |
| (iii) | Inv. privada: FOC | 1 | $= \beta \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{C_{t+1} - bC_t}{C_t - bC_{t-1}} \right)^{-\sigma} \left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_t} + 1 - \delta \right) \right]$ |
| (iv) | Capital privado | K_t | $= (1 - \delta) K_{t-1} + I_t^P$ |
| (v) | Capital público | G_t | $= (1 - \delta^G) G_{t-1} + I_t^G$ |
| (vi) | Salario real | W_t | $= \gamma \frac{Y_t}{H_t}$ |
| (vii) | Producción agregada | Y_t | $= A_t K_{t-1}^\alpha H_t^\gamma G_{t-1}^\theta$ |
| (viii) | Shock de productividad | $\ln A_t$ | $= \rho \ln A_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ |
| (ix) | Shock de inversión pública | $\ln I_t^G$ | $= \varphi \ln I_{t-1}^G + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ |

6.2. Equilibrio

La única modificación a las ecuaciones de equilibrio surge de la oferta laboral, pues ahora

$$C^{-\sigma} (1 - b)^{-\sigma} W = H^\nu.$$

Las nuevas preferencias no alteran las demás ecuaciones pues en el equilibrio, el ratio de utilidades marginales es igual a uno dada la inyectividad de $u'(\cdot)$.

Observación. Nuestro modelo es una simplificación de [Leeper et al. \(2010\)](#). En dicho artículo, se incorpora tanto hábitos de consumo, el gasto público como insumo productivo, segmentado según su uso, e impuestos más específicos. El trabajo nos induce a realizar simplificaciones. Es sin embargo importante precisar que un análisis más extendido consiste simplemente en replicar [Leeper et al. \(2010\)](#).

6.3. Log-linealización endógena

Proposición 6.1. *Las siguientes ecuaciones:*

$$\begin{aligned}
u_{c,t} + w_t &= \nu h_t, & u_{c,t} &= \mathbb{E}_t[u_{c,t+1} + r_t] \\
y_t &= a_t + \alpha k_{t-1} + \gamma h_t + \theta g_{t-1}, & y_t - h_t &= w_t \\
0 &= \mathbb{E}_t[u_{c,t+1} - u_{c,t} + \xi(y_{t+1} - k_t)], & \xi &= \frac{\alpha \frac{Y}{K}}{\alpha \frac{Y}{K} + (1 - \delta)} \\
0 &= \mathbb{E}_t[u_{c,t+1} - u_{c,t} + \eta(y_{t+1} - g_t)], & \eta &= \frac{\theta \frac{Y}{G}}{\theta \frac{Y}{G} + (1 - \delta^G)} \\
y_t &= \frac{C}{Y} c_t + \frac{\delta K}{Y} i_t^P + \frac{\delta^G G}{Y} i_t^G, & k_t &= \delta i_t^P + (1 - \delta) k_{t-1} \\
g_t &= \delta^G i_t^G + (1 - \delta^G) g_{t-1}, & a_t &= \rho a_{t-1} + \varepsilon_t
\end{aligned}$$

donde

$$u_{c,t} = \frac{-\sigma}{1-b} (c_t - b c_{t-1}),$$

son resultado de la log-linealización.

Demostración. Definimos $S_t := C_t - b C_{t-1}$, y notamos que, en el equilibrio: $\bar{S} = \bar{C}(1-b)$. Expandimos $S_t^{-\sigma}$ alrededor de \bar{S} :³

$$S_t^{-\sigma} \approx \bar{S}^{-\sigma} \left(1 - \sigma \frac{S_t - \bar{S}}{\bar{S}} \right)$$

³La expansión de primer orden de x^{-a} alrededor de un punto $\bar{x} > 0$ es:

$$x^{-a} \approx \bar{x}^{-a} \left(1 - a \cdot \frac{x - \bar{x}}{\bar{x}} \right).$$

Para obtener este resultado, aplicamos la fórmula de Taylor de orden 1:

$$x^{-a} \approx \bar{x}^{-a} - a \bar{x}^{-a-1} (x - \bar{x}) = \bar{x}^{-a} \left(1 - a \cdot \frac{x - \bar{x}}{\bar{x}} \right).$$

Observamos que:

$$S_t - \bar{S} = (C_t - \bar{C}) - b(C_{t-1} - \bar{C}) = \bar{C}(c_t - bc_{t-1}) \Rightarrow \frac{S_t - \bar{S}}{\bar{S}} = \frac{c_t - bc_{t-1}}{1 - b}.$$

Por lo tanto:

$$u_{c,t} := (C_t - bC_{t-1})^{-\sigma} \approx \bar{S}^{-\sigma} \left(1 - \frac{\sigma}{1-b}(c_t - bc_{t-1}) \right) \Rightarrow u_{c,t} = \frac{-\sigma}{1-b}(c_t - bc_{t-1}). \quad (27)$$

Respecto a la condición de equilibrio en el mercado laboral, la FOC es:

$$(C_t - bC_{t-1})^{-\sigma} W_t = H_t^\nu.$$

Tomamos logaritmos en ambos lados:

$$-\sigma \ln(C_t - bC_{t-1}) + \ln W_t = \nu \ln H_t$$

Aproximamos log-linealmente alrededor del estado estacionario. Sabemos que en equilibrio $\bar{S} := \bar{C}(1 - b)$, y definimos las variables logarítmicas:

$$c_t := \ln C_t - \ln \bar{C}, \quad w_t := \ln W_t - \ln \bar{W}, \quad h_t := \ln H_t - \ln \bar{H}.$$

Luego, usamos la aproximación de primer orden:

$$\ln(C_t - bC_{t-1}) \approx \ln \bar{C}(1 - b) + \frac{C_t - bC_{t-1} - \bar{C}(1 - b)}{\bar{C}(1 - b)} = \ln \bar{S} + \frac{c_t - bc_{t-1}}{1 - b}.$$

Sustituimos en la ecuación:

$$-\sigma \left(\ln \bar{S} + \frac{c_t - bc_{t-1}}{1 - b} \right) + \ln \bar{W} + w_t = \nu (\ln \bar{H} + h_t),$$

y cancelamos términos constantes. Reordenando:

$$-\frac{\sigma}{1-b}(c_t - bc_{t-1}) + w_t = \nu h_t.$$

Definiendo:

$$u_{c,t} := \frac{-\sigma}{1-b}(c_t - bc_{t-1}),$$

Definiendo la variable loglinealizada $\hat{x} := \frac{x - \bar{x}}{\bar{x}}$, obtenemos finalmente:

$$x^{-a} \approx \bar{x}^{-a}(1 - a\hat{x}).$$

obtenemos finalmente:

$$u_{c,t} + w_t = \nu h_t.$$

Ahora la ecuación de Euler:

$$(C_t - bC_{t-1})^{-\sigma} = \beta \mathbb{E}_t [(C_{t+1} - bC_t)^{-\sigma} (1 + r_t)].$$

Aproximamos el lado derecho usando una expansión de primer orden alrededor del estado estacionario $\bar{S} := \bar{C}(1 - b)$. Usamos la definición:

$$u_{c,t} := \frac{-\sigma}{1 - b} (c_t - bc_{t-1}).$$

Entonces, de (27):

$$(C_{t+1} - bC_t)^{-\sigma} \approx \bar{S}^{-\sigma} (1 + u_{c,t+1}), \quad \text{y} \quad (1 + r_t) \simeq (1 + \hat{r}_t)(1 + \bar{r})$$

Multiplicamos los dos términos:

$$(C_{t+1} - bC_t)^{-\sigma} (1 + \bar{r})(1 + \hat{r}_t) \approx \bar{S}^{-\sigma} (1 + u_{c,t+1})(1 + \bar{r})(1 + \hat{r}_t).$$

De igual forma, aproximamos el lado izquierdo:

$$(C_t - bC_{t-1})^{-\sigma} \approx \bar{S}^{-\sigma} (1 + u_{c,t}).$$

Sustituyendo en la ecuación de Euler:

$$\bar{S}^{-\sigma} (1 + u_{c,t}) = \beta \mathbb{E}_t [\bar{S}^{-\sigma} (1 + u_{c,t+1})(1 + \bar{r})(1 + \hat{r}_t)] = \beta \mathbb{E}_t [\bar{S}^{-\sigma} ((1 + u_{c,t+1})(1 + \bar{r})(1 + \hat{r}_t))].$$

Como estamos loglinealizando alrededor del estado estacionario, podemos cancelar $\bar{S}^{-\sigma}$ y, además, eliminando términos de segundo orden, usando que $\beta(1 + \bar{r}) = 1$ y denotando $\hat{r}_t = r_t$:

$$1 + u_{c,t} = \mathbb{E}_t [1 + u_{c,t+1} + r_t].$$

Finalmente, con respecto a la Q de Tobin, partimos de:

$$1 = \beta \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{C_{t+1} - bC_t}{C_t - bC_{t-1}} \right)^{-\sigma} \left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_t} + 1 - \delta \right) \right].$$

Como vimos antes:

$$\ln \left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_t} + (1 - \delta) \right) \approx \ln \left(\alpha \frac{Y}{K} + (1 - \delta) \right) + \eta(y_{t+1} - k_t), \quad \text{donde} \quad \eta = \frac{\alpha \frac{Y}{K}}{\alpha \frac{Y}{K} + (1 - \delta)}.$$

Usando las ecuaciones del estado estacionario y la propiedad del logaritmo y la esperanza condicional (*s.o.t. neglectable*): $0 = \mathbb{E}_t[(u_{c,t+1} - u_{c,t}) + \eta(y_{t+1} - k_t)]$. El resto de ecuaciones ya tienen estructura lineal por lo que la log-linealización es directa, salvo la que involucra la condición de equilibrio en la inversión pública. Sin embargo, es análoga a la Q -de Tobin. \square

6.4. Log-linealización exógena

Proposición 6.2. *Las siguientes ecuaciones:*

$$u_{c,t} + w_t = \nu h_t,$$

$$u_{c,t} = \mathbb{E}_t[u_{c,t+1} + r_t]$$

$$y_t = a_t + \alpha k_{t-1} + \gamma h_t + \theta g_{t-1},$$

$$y_t - h_t = w_t$$

$$0 = \mathbb{E}_t[u_{c,t+1} - u_{c,t} + \xi(y_{t+1} - k_t)],$$

$$\xi = \frac{\alpha \frac{Y}{K}}{\alpha \frac{Y}{K} + (1 - \delta)}$$

$$y_t = \frac{C}{Y} c_t + \frac{\delta K}{Y} i_t^P + \frac{1}{Y} i_t^G,$$

$$k_t = \delta i_t^P + (1 - \delta)k_{t-1}$$

$$g_t = \delta^G i_t^G + (1 - \delta^G)g_{t-1},$$

$$a_t = \rho a_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde

$$u_{c,t} = \frac{-\sigma}{1 - b}(c_t - b c_{t-1}),$$

y

$$\ln i_t^G = \varphi \ln i_{t-1}^G + \epsilon_t,$$

son resultado de la log-linealización.

6.5. Funciones Impulso Respuesta

6.5.1. Choque de productividad

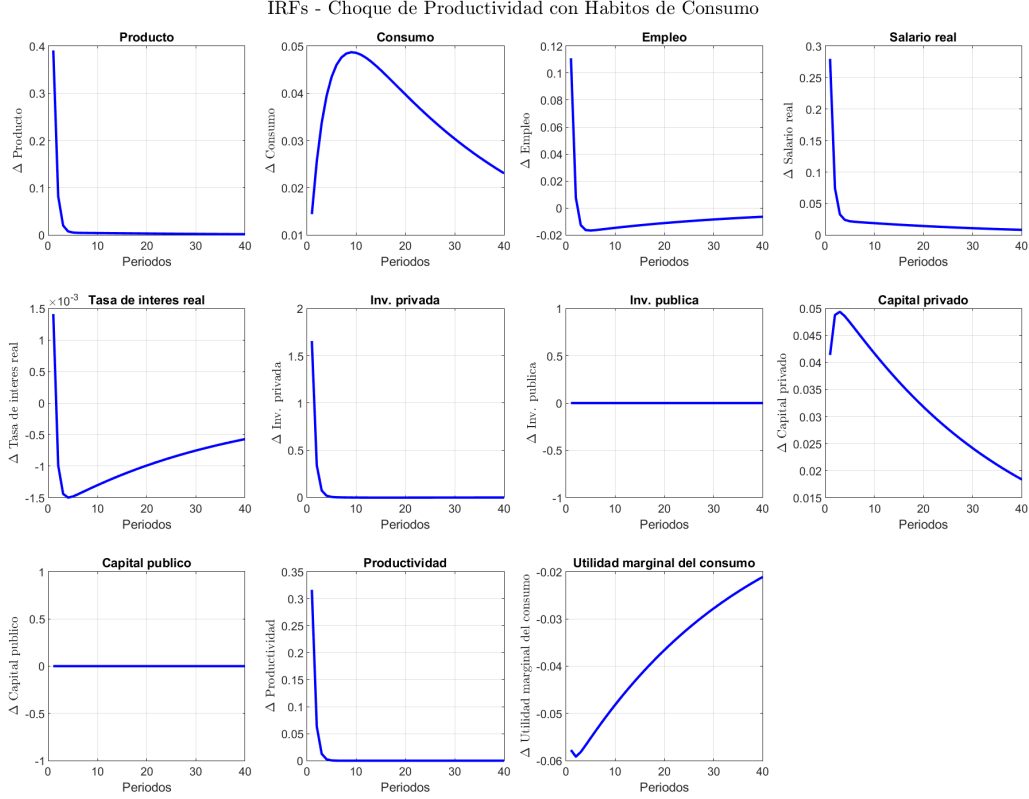


Figura 8: IRFs ante un choque de productividad con hábitos de consumo: transitorio ($\rho \rightarrow 0$).

La Figura 8 presenta las funciones impulso-respuesta ante un choque positivo de productividad cuando las familias exhiben hábitos de consumo. En este entorno, el bienestar intertemporal depende no solo del nivel corriente de consumo, sino también de su relación con el pasado, lo cual introduce inercia adicional en la decisión de consumo y altera la transmisión de los shocks. El consumo reacciona positivamente desde el inicio, y alcanza su punto máximo alrededor del quinto periodo. Esta respuesta es más suave y persistente que en el caso sin hábitos, ya que los hogares internalizan el costo de ajustar bruscamente su consumo, prefiriendo una senda más gradual. Esta fricción también se refleja en la utilidad marginal del consumo, que muestra una caída inicial que se revierte lentamente:

$$u''(\cdot) < 0 \implies u'(\cdot) \text{ decreciente} \Leftrightarrow C \uparrow \Leftrightarrow u'(C) \downarrow.$$

El producto también aumenta de forma inmediata, impulsado por el alza en la productividad total de los factores. El empleo y el salario real se ajustan con rapidez, presentando un leve efecto de corto plazo seguido de convergencia. La tasa de interés real cae inicialmente, lo cual incentiva la inversión privada, que responde con fuerza positiva en el primer periodo y luego retorna progresivamente a su valor estacionario. El capital privado se acumula en los primeros periodos, acompañando el impulso inicial, pero comienza a desacelerarse una vez que la productividad retorna a su tendencia. La inversión pública y el capital público no responden al shock debido a su carácter exógeno en esta especificación, y los valores observados cercanos a cero reflejan simplemente redondeo computacional. La productividad, al ser la fuente del shock, aumenta abruptamente y luego se disipa, siguiendo su proceso autoregresivo. Este comportamiento genera una reasignación temporal de recursos, que en presencia de hábitos se traduce en una respuesta suavizada, especialmente en el consumo. En suma, el modelo con hábitos de consumo genera efectos más persistentes pero más contenidos en las decisiones intertemporales, y evidencia la importancia de las fricciones internas en la transmisión de shocks de oferta. Note que para esta simulación se consideró un ρ chico, o sea se intentó simular un shock no persistente. A pesar de eso, se observa la forma de campana en el consumo consistente con el modelo.

6.5.2. Choque de inversión pública

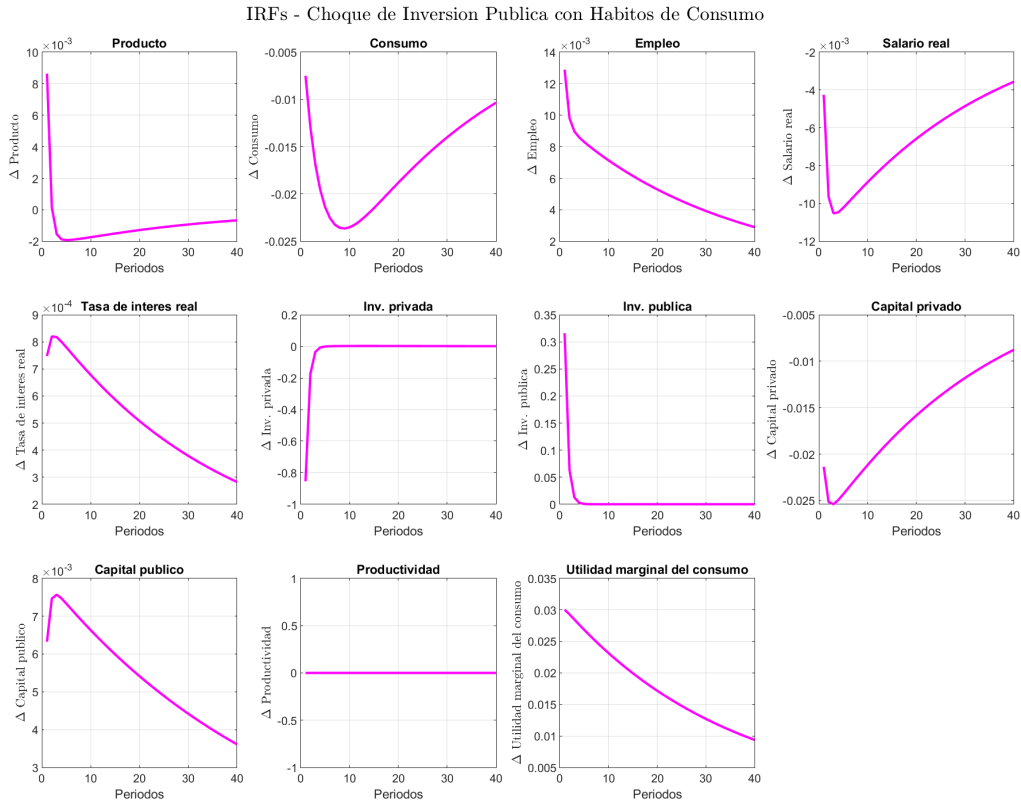


Figura 9: IRFs ante un choque de inversión pública con $\theta = 0,10$ con hábitos de consumo. $b = 0.75$.

La Figura 9 muestra la respuesta de la economía ante un choque exógeno de inversión pública en un entorno donde los hogares presentan hábitos de consumo. En este contexto, la utilidad marginal depende tanto del nivel actual como del pasado, lo que introduce una fricción intertemporal adicional. El producto presenta una leve alza inicial que se disipa lentamente. La inversión pública sube abruptamente y luego converge, acumulándose en el capital público, lo que genera efectos positivos, aunque modestos, sobre la producción. El consumo cae inicialmente más que en el caso sin hábitos, y su recuperación es más lenta. Esto se debe a que los hábitos amplifican el impacto fiscal sobre el bienestar intertemporal, induciendo a los hogares a suavizar más agresivamente su ajuste. Este comportamiento también se refleja en la utilidad marginal del consumo, que se mantiene elevada durante varios períodos. El empleo reacciona positivamente de forma inmediata y converge gradualmente. El salario real cae en el corto plazo, por la mayor oferta laboral, y luego se recupera. La inversión privada disminuye por efecto desplazamiento, pero se recupera con rapidez, y el capital privado sigue una trayectoria ascendente. La tasa de interés real sube inicialmente, reflejando presión

sobre el mercado de fondos prestables. En conjunto, la presencia de hábitos de consumo refuerza los efectos contractivos iniciales y amplifica la persistencia del ajuste dinámico ante un impulso de inversión pública.

6.5.3. Choque de inversión pública con más persistencia

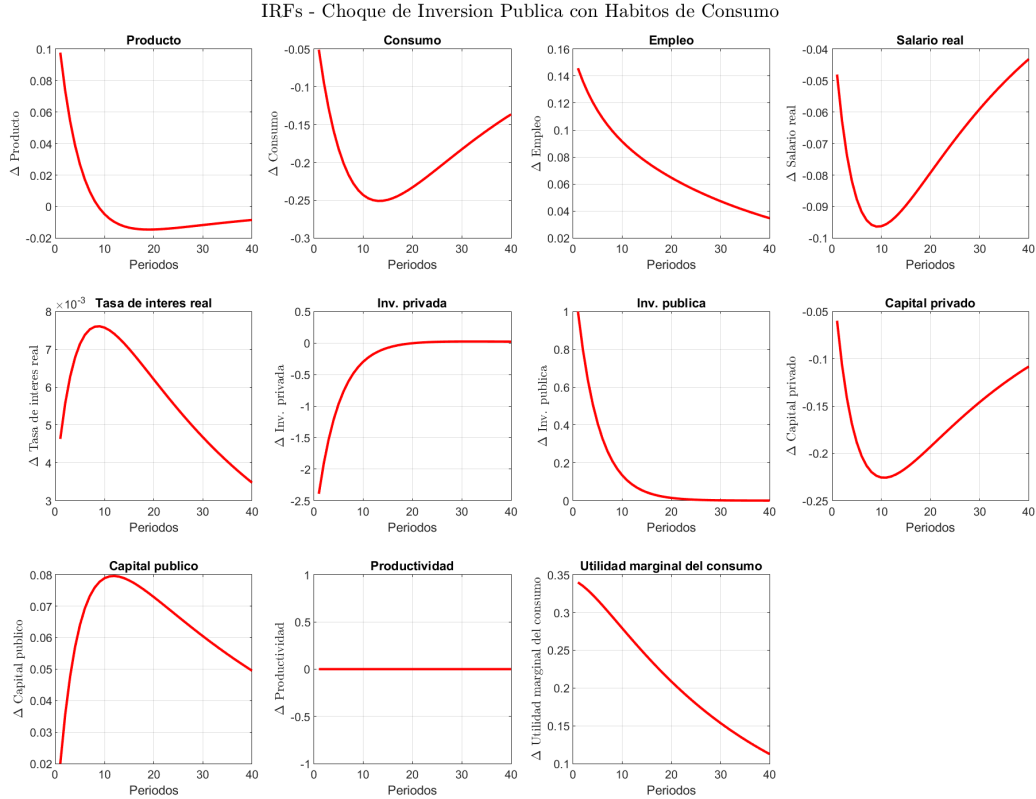


Figura 10: IRFs ante un choque de inversión pública con $\theta = 0,10$ con hábitos de consumo. $b = 0.75$ y $\varphi = 0.5$.

La Figura 10 representa la respuesta de la economía ante un choque exógeno de inversión pública bajo hábitos de consumo, con una mayor persistencia del gasto público (valor de φ más del doble respecto al caso base). El cambio en la dinámica del impulso genera reacciones más intensas y prolongadas en varias variables reales. El producto y el empleo aumentan con mayor magnitud en el corto plazo, sostenidos por la persistencia del impulso fiscal. La inversión pública se desacelera más lentamente, lo que favorece la acumulación continua de capital público. Esto extiende el efecto multiplicador de la demanda agregada. El consumo cae con mayor intensidad en el impacto, reflejo de una carga fiscal más persistente. Su recuperación es más lenta, y la utilidad marginal del

consumo se mantiene elevada durante más tiempo, amplificando los efectos intertemporales de los hábitos. El salario real y la inversión privada presentan respuestas en **forma de U asimétrica**: caen inicialmente, pero revierten gradualmente a medida que el retorno marginal del capital privado se estabiliza. El capital privado también alcanza un mínimo más profundo antes de recuperarse. La tasa de interés real aumenta de forma más persistente, lo que es consistente con una presión sostenida sobre los mercados financieros ante la prolongación del impulso fiscal. La productividad y la inversión pública son exógenas en esta especificación, y no presentan dinámica propia. Este ejercicio muestra que, ante una regla fiscal más persistente, los efectos de corto plazo son más notorios y el ajuste intertemporal se amplifica, especialmente en presencia de fricciones de comportamiento como los hábitos de consumo.

6.5.4. Choque de productividad con más persistencia

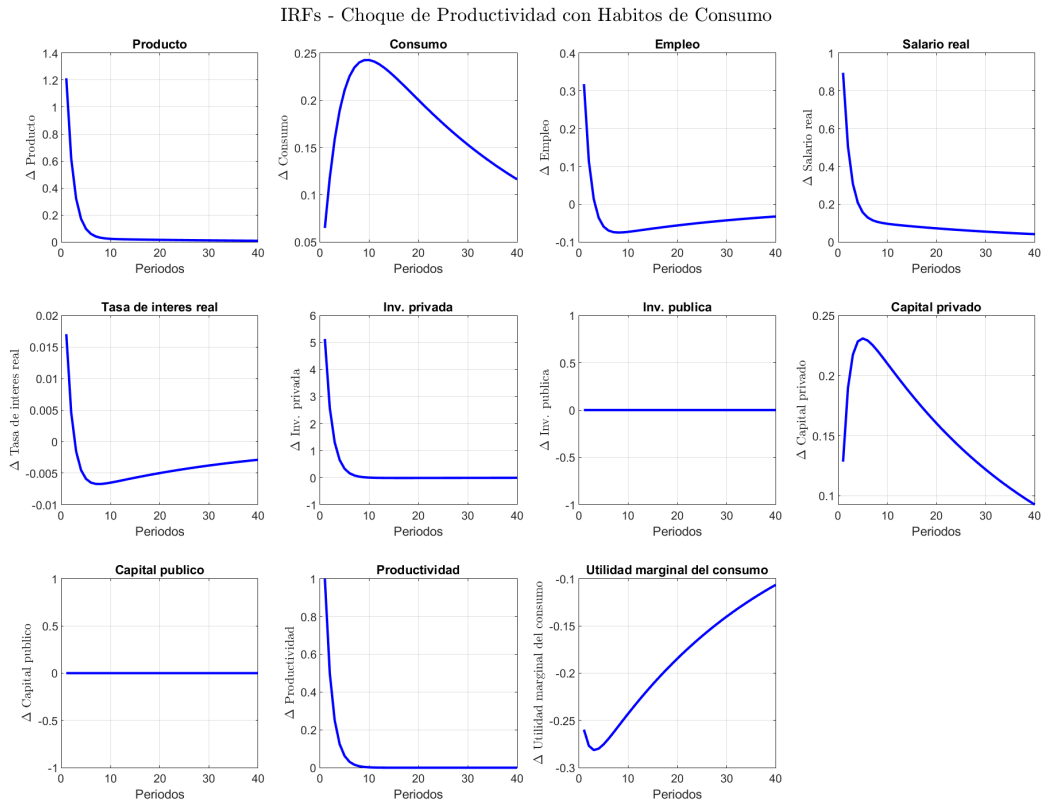


Figura 11: IRFs ante un choque de productividad con $\theta = 0,10$ con hábitos de consumo. $b = 0.85$ y $\varphi = 0.5$.

La Figura 11 resume el efecto de un choque de productividad en presencia de hábitos de consumo. Como se observa, el impulso inicial es fuerte: el producto, el empleo, el consumo, el salario real y la inversión privada reaccionan positivamente y con mayor magnitud en el corto plazo. El capital privado se acumula más rápidamente, pero eventualmente converge. La utilidad marginal del consumo cae de forma marcada al inicio, reflejando la inercia generada por los hábitos. La tasa de interés real disminuye brevemente, lo que estimula la inversión. Las variables fiscales no se mueven, dado que la inversión pública es exógena. El ajuste general es más persistente que en el caso sin hábitos.

6.5.5. Choque de productividad con aún más persistencia

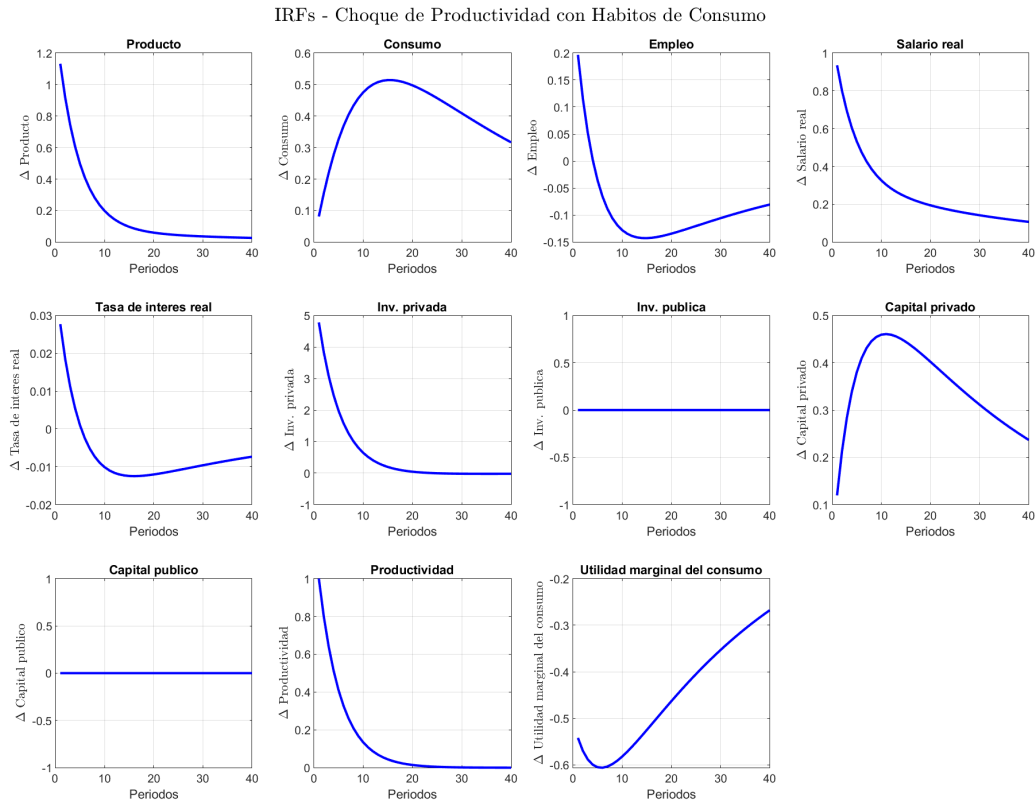


Figura 12: IRFs ante un choque de productividad con hábitos de consumo. $b = 0.85$, $\rho = 0.8$.

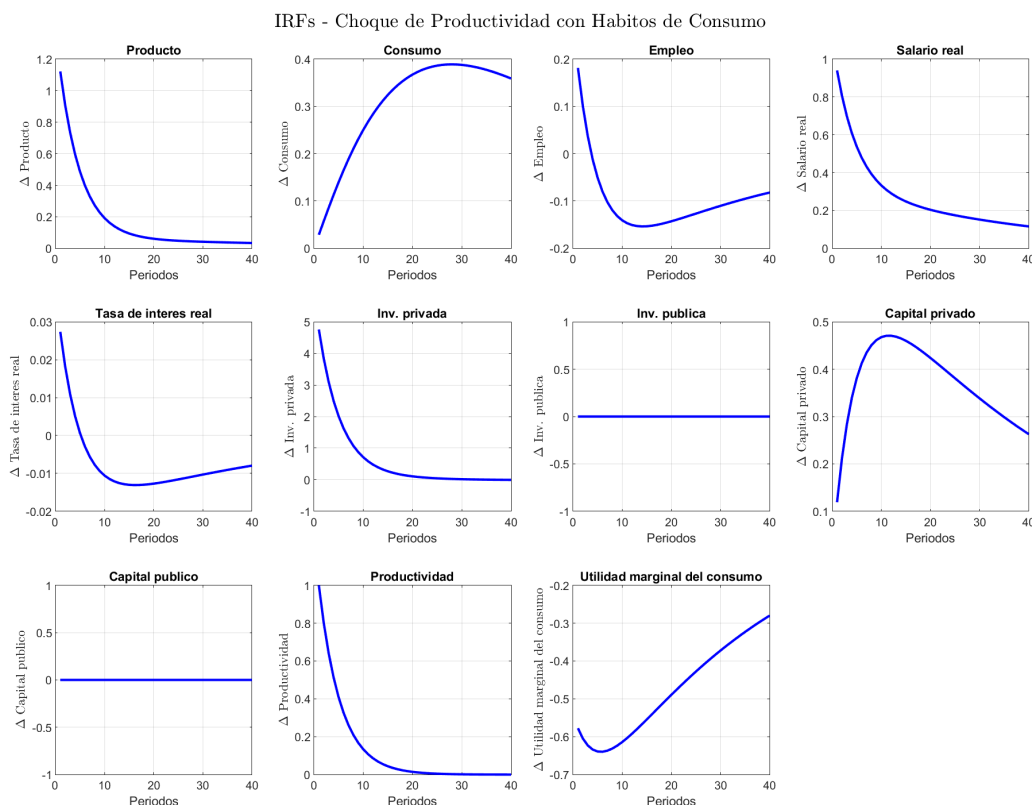


Figura 13: IRFs ante un choque de productividad con hábitos de consumo. $b = 0.95$, $\rho = 0.8$.

Las Figuras 12 y 13 comparan la dinámica agregada ante un mismo choque de productividad cuando los hogares presentan hábitos de consumo de distinta intensidad. A la izquierda, el caso con $b = 0.85$; a la derecha, $b = 0.95$. La persistencia del shock se mantiene constante en $\rho = 0.8$. Un valor más alto de b amplifica la fricción intertemporal: el consumo sube más lentamente y su desaceleración es más gradual. Esto se refleja en una caída más marcada de la utilidad marginal del consumo y una recuperación más lenta. El resto de variables reacciona en la misma dirección, aunque con una persistencia algo mayor para producto, capital y tasa de interés real cuando el hábito es más fuerte. En conjunto, el modelo muestra que cuanto más intensos son los hábitos, más prolongados y suaves son los efectos del choque, a costa de un menor ajuste inmediato del consumo.

6.5.6. Choque de inversión pública con aún más persistencia

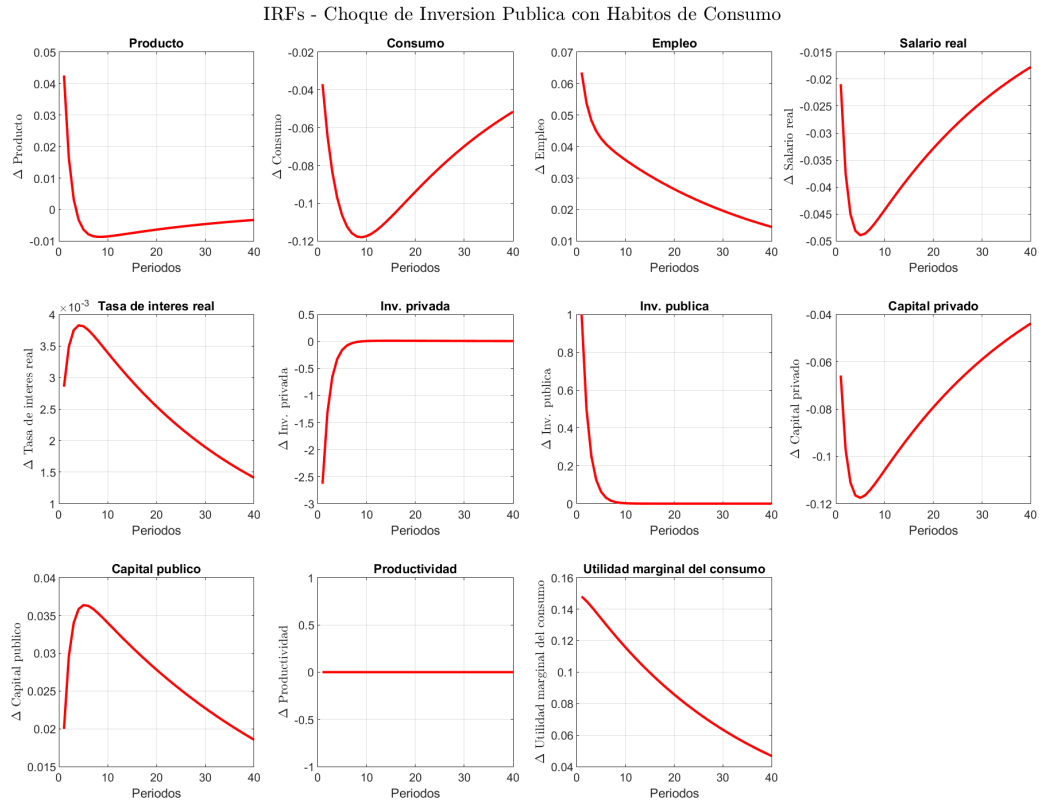


Figura 14: IRFs ante un choque de inversión pública con hábitos de consumo. $b = 0.85$, $\rho = 0.8$.

IRFs - Choque de Inversion Publica con Habitos de Consumo

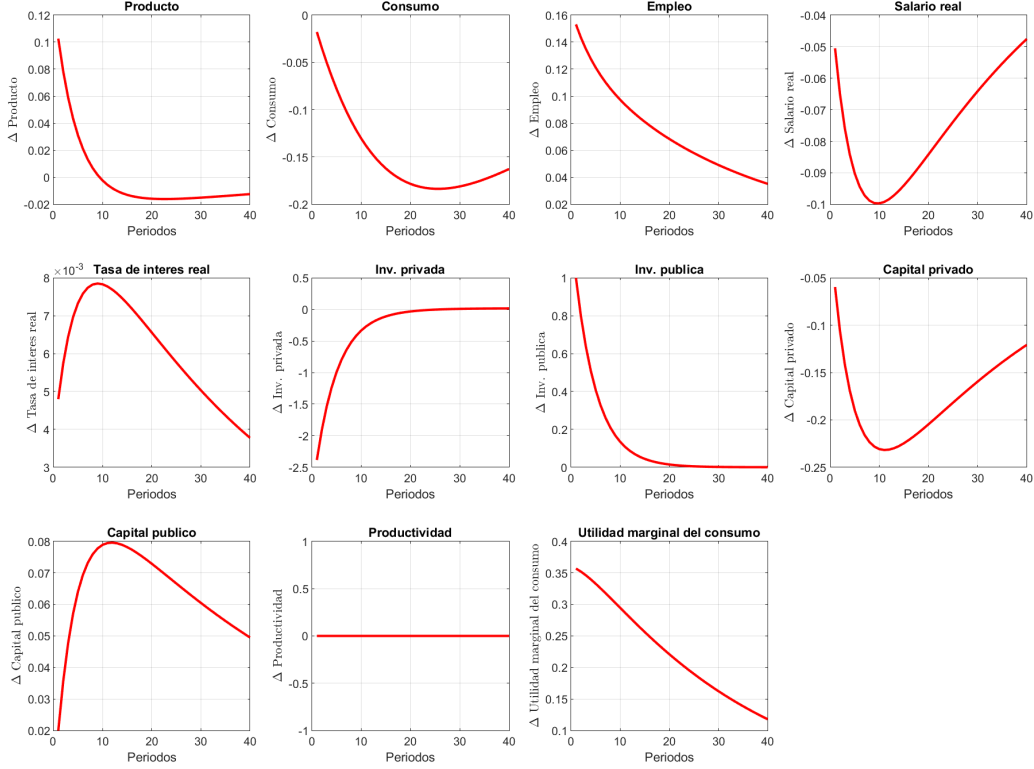


Figura 15: IRFs ante un choque de inversión pública con hábitos de consumo. $b = 0.95$, $\rho = 0.8$.

Las Figuras 14 y 15 comparan la respuesta de la economía ante un mismo choque de inversión pública, bajo dos niveles distintos de intensidad de hábitos de consumo: $b = 0.85$ (izquierda) y $b = 0.95$ (derecha), manteniendo la persistencia del shock en $\rho = 0.8$. Con hábitos más marcados ($b = 0.95$), el consumo presenta una caída inicial más pronunciada y una recuperación más lenta. Esto refleja una mayor rigidez intertemporal que obliga a los hogares a suavizar de manera más agresiva sus decisiones. Como resultado, la utilidad marginal del consumo permanece elevada por más tiempo. El efecto desplazamiento sobre la inversión privada también se amplifica: su caída inicial es mayor y su recuperación más gradual. El impacto sobre el producto también es más contenido con hábitos fuertes. Finalmente, la tasa de interés real responde más suavemente, reflejando una menor presión sobre el equilibrio intertemporal de fondos. En conjunto, un mayor valor de b amplifica los efectos contractivos iniciales del impuesto y modera la reacción de la economía, dando lugar a trayectorias más persistentes y suaves.

Síntesis del modelo

Los incrementos en la productividad, cuando el modelo incluye inversión pública exógena, se comportan como en el modelo clásico con hábitos de consumo. Por otro lado, los choques de inversión pública se observa que frenan el consumo y la inversión privada, lo cual es consistente con la ecuación de demanda agregada. Por un lado, esta inversión se financia con recursos de las familias; por otro, existe un grado de sustitución entre el capital privado y el público. Sin embargo, el incremento en la inversión pública también actúa, desde el lado de la industria, como un choque de productividad, lo cual es coherente con la literatura. Existen muchos otros esquemas de modelamiento posibles, incluyendo otro criterio de optimalidad para el caso endógeno u otro tipo de proceso autorregresivo, pero ello será materia de un trabajo posterior.

7. Conclusión

En este trabajo, hemos explorado una extensión del modelo estándar de Ciclos Económicos Reales (RBC) al incorporar explícitamente la acumulación de capital público. En lugar de tratar la inversión pública como una serie exógena o un simple parámetro, se modeló como una variable endógena sujeta a decisiones óptimas de un gobierno planificador. Adicionalmente, se consideró un modelo alternativo donde la inversión pública es exógena y obedece a una regla simple. Este segundo modelo fue útil para simular respuestas de la economía ante distintos choques, como aquellos de productividad o de política fiscal. En ambos casos, se asumió que el gasto público no afecta directamente las preferencias de los hogares, sino que su efecto se transmite principalmente a través del canal tributario. Esto implica que el ajuste recae sobre las decisiones intertemporales de las familias, especialmente el consumo y la oferta laboral. Las simulaciones confirman que la inversión pública genera un impulso inicial sobre la demanda agregada, seguido por efectos más persistentes en la oferta, reflejados en la acumulación de capital público y en mejoras de productividad.

En la sección 6, extendimos el modelo introduciendo hábitos de consumo, utilizando la especificación aditiva convencional. Esta fricción introduce inercia en el comportamiento del consumo, generando respuestas más suaves y persistentes ante los choques. Esta idea, desarrollada originalmente en el trabajo de [Deaton \(1992\)](#), se conecta con la literatura sobre consumo permanente de [Friedman \(1957\)](#), el paseo aleatorio de [Hall \(1978\)](#), el CAPM ([Echenique, 2024](#); [Mehra and Prescott, 1985](#)) y con extensiones modernas que incluyen restricciones de liquidez ([Zeldes, 1989](#)), ahorro precautorio ([Carroll, 1997](#)), y preferencias del tipo Epstein-Zin ([Epstein and Zin, 1989](#)).

En suma, al introducir la inversión pública y fricciones realistas en el comportamiento del con-

sumo, los modelos RBC logran aproximarse mejor a los patrones observados en los datos. Sin embargo, como toda herramienta teórica, estos modelos son simplificaciones de una realidad compleja: capturan ciertos mecanismos clave, pero omiten otros. Como sugiere el Principito de Antoine de Saint-Exupéry⁴, *Et puisque c'est beau, il est vraiment utile*. En economía, un modelo útil no es necesariamente el más completo, sino aquel que logra representar con elegancia lo fundamental.

⁴Ver la página personal del profesor de teoría microeconómica en Princeton [Fedor Sandomirskiy](#).

Referencias

- Abel, A. B. (1990). Asset prices under habit formation and catching up with the joneses. *The American Economic Review*, 80(2):38–42.
- Acemoglu, D. (2009). *Introduction to Modern Economic Growth*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Adda, J. and Cooper, R. (2003). *Dynamic Economics: Quantitative Methods and Applications*. MIT Press, Cambridge, MA.
- Aschauer, D. A. (1989). Is public expenditure productive? *Journal of Monetary Economics*, 23(2):177–200.
- Aschauer, D. A. (1998). How big should the public capital stock be? the relationship between public capital and economic growth. Working Paper 43, The Jerome Levy Economics Institute of Bard College.
- Azzimonti, M. (2005). On the dynamic inefficiency of governments. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.689141>.
- Azzimonti, M., Sarte, P.-D. G., and Soares, J. (2009). Distortionary taxes and public investment when government promises are not enforceable. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 33(9):1662–1681.
- Baxter, M. and King, R. G. (1993). Fiscal policy in general equilibrium. *American Economic Review*, 83(3):315–334.
- Benveniste, L. M. and Scheinkman, J. A. (1979). On the differentiability of the value function in dynamic models of economics. *Econometrica*, 47(3):727–732.
- Boldrin, M., Christiano, L. J., and Fisher, J. D. M. (2001). Habit persistence, asset returns, and the business cycle. *The American Economic Review*, 91(1):149–166.
- Campbell, J. Y. and Cochrane, J. H. (1999). By force of habit: A consumption-based explanation of aggregate stock market behavior. *Journal of Political Economy*, 107(2):205–251.
- Carroll, C. D. (1997). Buffer-stock saving and the life cycle/permanent income hypothesis. *The Quarterly Journal of Economics*, 112(1):1–55.
- Carroll, C. D., Overland, J., and Weil, D. N. (1997). Comparison utility in a growth model. *Journal of Economic Growth*, 2(4):339–367.

- Cassou, S. P. and Lansing, K. J. (1998). Optimal fiscal policy, public capital, and the productivity slowdown. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 22(6):911–935.
- Castillo, P. and Rojas, Y. (2014). Términos de intercambio y productividad total de factores: Evidencia empírica de los mercados emergentes de américa latina. *Revista Estudios Económicos*, 28:27–46.
- Cerdá Tena, E. (1991). *Optimizacion dinamica en economia*. Alianza Editorial, Madrid.
- Chen, X. and Ludvigson, S. C. (2004). Land of addicts? an empirical investigation of habit-based asset pricing behavior. Technical Report 10503, National Bureau of Economic Research.
- Chiang, A. C. (1992). *Elements of Dynamic Optimization*. McGraw-Hill, New York.
- Cochrane, J. H. (2005). *Asset Pricing*. Princeton University Press, Princeton, NJ, revised edition edition.
- Dabla-Norris, E., Brumby, J., Kyobe, A., Mills, Z., and Papageorgiou, C. (2012). Investing in public investment: an index of public investment efficiency. *Journal of Economic Growth*, 17:235–266.
- de Economía, I. P. (2018). El pobre estado de nuestra infraestructura. <https://www.ipe.org.pe/portal/el-pobre-estado-de-nuestra-infraestructura/>. 18 de octubre.
- Deaton, A. (1992). *Understanding Consumption*. Oxford University Press, Oxford.
- Devadas, S. and Pennings, S. M. (2018). Assessing the effect of public capital on growth: An extension of the world bank long-term growth model. Policy Research Working Paper 8604, World Bank.
- Echenique, F. (2024). Lecture notes on general equilibrium theory. Accessed June 2025.
- Epstein, L. G. and Zin, S. E. (1989). Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset returns: A theoretical framework. *Econometrica*, 57(4):937–969.
- Escobal, J. (2005). *The role of public infrastructure in market development in rural Peru*. PhD thesis, Wageningen University and Research.
- Evans, P. and Karras, G. (1994). Are government activities productive? evidence from a panel of u.s. states. *The Review of Economics and Statistics*, 76(1):1–11.
- Friedman, M. (1957). *A Theory of the Consumption Function*. Princeton University Press, Princeton.
- Hall, R. E. (1978). Stochastic implications of the life cycle-permanent income hypothesis: Theory and evidence. *Journal of Political Economy*, 86(6):971–987.

- Hsieh, C.-T. and Klenow, P. J. (2009). Misallocation and manufacturing tfp in china and india. *The Quarterly Journal of Economics*, 124(4):1403–1448.
- Kamien, M. I. and Schwartz, N. L. (1991). *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. Elsevier Science, Amsterdam.
- Kamps, C. (2004). New estimates of government net capital stocks for 22 oecd countries, 1960–2001. *IMF Staff Papers*, 51(1):1–16.
- Klenow, P. J. and Rodríguez-Clare, A. (2005). Externalities and growth. In Aghion, P. and Durlauf, S. N., editors, *Handbook of Economic Growth*, volume 1B of *Handbooks in Economics*, chapter 11, pages 817–861. Elsevier.
- Konstantinou, P. T. and Partheniou, A. (2021). The effects of government spending over the business cycle: a disaggregated analysis for oecd and non-oecd countries. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 80:809–822.
- Kreps, D. M. (2012). *Microeconomic Foundations I: Choice and Competitive Markets*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Kubler, F. and Schmedders, K. (2010). Tackling multiplicity of equilibria with gröbner bases. *Operations Research*, 58(4, Part 2 of 2):1037–1050. Special Issue on Computational Economics.
- Lansing, K. J. (1994). Optimal fiscal policy when public capital is productive: A business-cycle perspective. Working Paper 9406, Federal Reserve Bank of Cleveland.
- Lee, S. (2025). Rbc in politics: A full guide for change. <https://www.numberanalytics.com/blog/rbc-politics-full-guide-change>. 27 de abril.
- Leeper, E. M., Walker, T. B., and Yang, S.-C. S. (2010). Government investment and fiscal stimulus. *Journal of Monetary Economics*, 57(8):1000–1012.
- Lucas, R. E., Stokey, N. L., and Prescott, E. C. (1989). *Recursive Methods in Economic Dynamics*. Harvard University Press.
- Marcet, A. and Marimon, R. (2011). Recursive contracts. *Journal of Economic Theory*, 144(6):2293–2335.
- Mehra, R. and Prescott, E. C. (1985). The equity premium: A puzzle. *Journal of Monetary Economics*, 15(2):145–161.
- Milgrom, P. and Shannon, C. (1994). Monotone comparative statics. *Econometrica*, 62(1):157–180.

- Nordhaus, W. D. (1969). An economic theory of technological change. *The American Economic Review*, 59(2):18–28.
- Ogibayashi, S. and Takashima, K. (2017). Influence of inefficiency in government expenditure on the multiplier of public investment. *Computational Economics*, 50:549–577.
- Perotti, R. (2004). Public investment: another (different) look. Working Paper 277, IGER.
- Pollak, R. A. (1970). Habit formation and dynamic demand functions. *Journal of Political Economy*, 78(4, Part 1):745–763.
- Romer, D. (2019). *Advanced Macroeconomics*. McGraw-Hill Education, New York, 5 edition.
- Ryder, H. E. and Heal, G. M. (1973). Optimal growth with intertemporally dependent preferences. *The Review of Economic Studies*, 40(1):1–31.
- Sargent, T. J. (1987). *Dynamic Macroeconomic Theory*. Harvard University Press, Cambridge, MA.
- Sargent, T. J. and Ljungqvist, L. (2004). *Recursive Macroeconomic Theory*. MIT Press, Cambridge, MA, 2nd edition.
- Sims, E. (2017). Graduate macro theory ii: Extensions of basic rbc framework. Course Notes, Spring 2017.
- Stachurski, J. (2009). *Economic Dynamics: Theory and Computation*. MIT Press, Cambridge, MA.
- Süli, E. and Mayers, D. F. (2003). *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge University Press.
- Sundaresan, S. M. (1989). Intertemporally dependent preferences and the volatility of consumption and wealth. *The Review of Financial Studies*, 2(1):73–89.
- Tchakarov, I. and Straub, R. (2007). Assessing the impact of a change in the composition of public spending: A dsge approach. Technical report, International Monetary Fund.
- Turnovsky, S. J. and Fisher, W. H. (1995). The composition of government expenditure and its consequences for macroeconomic performance. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 19(4):747–786.
- Vasilev, A. (2021). How quantitatively important is public investment for both business cycle fluctuations and output growth in bulgaria (1999–2018)? *Macroeconomics and Finance in Emerging Market Economies*, 14(2):126–141.

Wellschmied, F. (n.d.). The real business cycle model part 1. Slides, Macroeconomics II.

Zeldes, S. P. (1989). Consumption and liquidity constraints: An empirical investigation. *Journal of Political Economy*, 97(2):305–346.