PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Cuarta práctica (tipo a)
Primer semestre 2024

Indicaciones generales:

- Duración: 110 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: dos hojas A4 de apuntes de clase.
- No está permitido el uso de ningún material o equipo electrónico adicional al indicado (no celulares, se aceptan tablets).
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**

Puntaje total: 20 puntos.

Solucionario:

1.1) Tenemos

$$\pi^* = \pi(x^*, w, p) = pf(\mathbf{x}^*) - \underbrace{\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}^*}_{=\sum_{i=1}^n w_i x_i^*}.$$

Por el Teorema de la Envolvente,

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial w_i} = -x_i^*.$$

Luego, resolvemos el problema de maximización del beneficio con una Cobb-Douglas $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$. Las CPO proveen

$$\frac{p}{3} x_1^{-2/3} x_2^{1/3} - w_1 = 0$$
$$\frac{p}{3} x_1^{1/3} x_2^{-2/3} - w_2 = 0.$$

Despejando, se obtiene

$$x_2^* = \frac{p^3}{27 w_2^2 w_1}.$$

Así,

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial w_2} = -\frac{p^3}{27 w_2^2 w_1}.$$

1.b) Diferenciando las CPO

$$\begin{aligned} dp_1 - d\lambda u_{x_1} - \lambda u_{x_1 x_1} dx_1 - \lambda u_{x_1 x_2} dx_2 &= 0 \\ dp_2 - d\lambda u_{x_2} - \lambda u_{x_1 x_2} dx_1 - \lambda u_{x_2 x_2} dx_2 &= 0 \\ d\overline{u} - u_{x_1} dx_1 - u_{x_2} dx_2 &= 0. \end{aligned}$$

Eliminando los efectos que no son de interés, queda

$$\begin{bmatrix} dp_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda u_{x_1 x_1} & \lambda u_{x_1 x_2} & u_{x_1} \\ \lambda u_{x_1 x_2} & \lambda u_{x_2 x_2} & u_{x_2} \\ u_{x_1} & u_{x_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando la regla de Cramer

$$\frac{dx_1}{dp_1} = -\frac{u_{x_2}^2}{|A|} < 0,$$

donde

$$|A| = \lambda u_{x_1x_1}(-u_{x_2}^2) - \lambda u_{x_1x_2}(-u_{x_1}u_{x_2}) + u_{x_1}[\lambda u_{x_1x_2}u_{x_2} - \lambda u_{x_2x_2}u_{x_1}] > 0.$$

La situación es análoga para $\frac{\partial x_1}{\partial p_2}$.

2.1) Considere la relación de preferencias sobre $\mathbb{R}_+^2$: $(x,y) \in R \Leftrightarrow \max\{x_1, x_2\} \geq \max\{y_1, y_2\}$.

2.2) Hay muchas soluciones posibles. Recordar que $\succeq$ es transitiva si $x \succeq y$ y $y \succeq z$ implican que $x \succeq z$.

2.3) Relación lexicográfica o vía máximo entero en la recta.

2.4) $u(x) = -||x - x_0||$ para cierto $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$.

2.5) Es una asignación $\{x_i\}_{i=1,\ldots,I}$ tal que no existe otra asignación $\{z_i\}_{i=1,\ldots,I}$ factible $\sum_i z_i \leq \overline{\omega}$ de forma que

$$z_i \succeq_i x_i, \ \forall\ i$$

y al menos para algún $i_0 \in \{1, ..., I\}$, $z_{i_0} \succ_{i_0} x_{i_0}$.

2.6) Un equilibrio walrasiano en $\mathcal{E}$ es un par (x, p) donde:

1. $x = (x^i)_{i=1}^I \in \mathbb{R}_+^{L\times I}$ representa las asignaciones de bienes para cada consumidor, y $p \in \mathbb{R}_+^L$ es un vector de precios.
2. Para cada consumidor $i = 1, \ldots, I$, la asignación x^i está en el conjunto presupuestario $B(p, p\cdot\omega^i)$, y si cualquier otra asignación y^i también está en $B(p, p\cdot\omega^i)$, entonces $x^i \succeq_i y^i$. Esto significa que todos los consumidores optimizan su elección de x^i dado los precios p.
3. La suma de las asignaciones de todos los consumidores es igual a la suma de sus dotaciones iniciales, es decir, $\sum_{i=1}^I x^i = \sum_{i=1}^I \omega^i$ (la demanda total iguala a la oferta total).

2.7) Si es monótona, más es mejor por lo que, dado $x \in \mathbb{R}_+^n$, $\tilde{x} = x + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2n} e_i \succ x$ y $||x - \tilde{x}||_1 < \varepsilon$.

2.8) Use que la suma algebraica de conjuntos convexos es convexo y $\{z_i \succeq x_i\}$ es convexo. Combinando esto con la transitividad se concluye.

Guía de resolución para la pregunta 3.

3.1) Aplique el Teorema de la Envolvente. Para esto, tenga en cuenta que

$$\mathcal{L}(x, p, \overline{u}) = \sum_{i=1}^n p_i x_i + \lambda(\overline{u} - u(x_1, ..., x_n)).$$

Queda claro que

$$\frac{\partial \mathcal{L}(h, p, \overline{u})}{\partial p_i} = h.$$

3.2) Aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
EV(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, w) &= e(\mathbf{p}^0, u^1) - e(\mathbf{p}^0, u^0) \\
&= e(\mathbf{p}^0, u^1) - w \\
&= e(\mathbf{p}^0, u^1) - e(\mathbf{p}^1, u^1) \\
&= e(p_1^0, p_{-1}, u^1) - e(p_1^1, p_{-1}, u^1) \\
&= \int_{p_1^1}^{p_1^0} \frac{\partial e(p_1, p_{-1}, u^1)}{\partial p_1} dp_1 \\
&= \int_{p_1^1}^{p_1^0} h(p_1, p_{-1}, u^1) dp_1.
\end{aligned}$$

3.3) Usando la sugerencia y las definiciones dadas, tenemos

$$
\begin{aligned}
EV(p^0, p^1, w) &= e(p^0, u^1) - e(p^0, u^0) \\
&= \tilde{e}(p_2^0, ..., p_n^0) + u_1 - \tilde{e}(p_2^0, ..., p_n^0) - u^0 \\
&= u^1 - u^0 \\
CV(p^0, p^1, w) &= e(p^1, u^1) - e(p^1, u^0) \\
& \tilde{e}(p_2^1, ..., p_n^1) + u^1 - \tilde{e}(p_2^1, ..., p_n^1) - u^0 \\
& u^1 - u^0.
\end{aligned}
$$

Con esto concluimos. Para probar que $e(\mathbf{p}, \overline{u}) = \tilde{e}(p_2, ...p_L) + \overline{u}$, recuerde la definición de preferencia cuasi-lineal

$$u(x) = x_1 + \tilde{u}(x_2, ..., x_n).$$

Luego, se concluye que si $x = h(p, \overline{u})$, entonces $x + \alpha e_1 = h(p, \overline{u} + \alpha)$. Por ello, $h(p, \overline{u}) = \tilde{h}(p) + \overline{u} e_1$ con $\tilde{h}(p) = h(p, 0)$. Finalmente, usando la definición de e, se concluye.