FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE FINANZAS

NOTAS EN TEORÍA DE INCERTIDUMBRE

Microeconomía Financiera
Octubre 2024-2

Profesor: José D. Gallardo Kú
jgallardo@pucp.edu.pe
Jefes de prácticas: Marcelo Gallardo & Karen Montoya
marcelo.gallardo@pucp.edu.pe
a20212185@pucp.edu.pe
https://marcelogallardob.github.io/

En estas notas vamos a desarrollar algunos ejercicios retadores en teoría de incertidumbre. Estos ejercicios se encuentra en el libro Mas-Colell et al. (1995). El principal desafío de estos ejercicios radica en el uso de teoría de la medida/probabilidad.

Ejercicio 1. Suponga que tenemos N activos riesgosos cuyos retornos z_n $(n = 1, ..., N)$ por dólar invertidos se distribuyen de manera conjunta según la función de distribución $F(z_1, ..., z_n)$. Asuma también que todos los retornos son no negativos con probabilidad uno. Considere un individuo que posee una función de utilidad de Bernouilli continua, creciente y cóncava $v(\cdot)$ sobre $\mathbb{R}_+$. Defina la función de utilidad esperada $U^e(\cdot)$ de este inversionista sobre $\mathbb{R}^N_+$, el conjunto de todos los portafolios no negativos, de la siguiente manera

$$U^e(\alpha_1, ..., \alpha_N) = \int v(\alpha_1 z_1 + ... + \alpha_N z_N) dF(z_1, ..., z_N).$$

Pruebe que $U^e(\cdot)$ es

- Creciente.
- Cóncava.
- Continua.

Para probar que $U^e(\cdot)$ es creciente, dados $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{R}^N_+$ y $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, ..., \tilde{\alpha}_N) \in \mathbb{R}^N_+$, tal que $\forall\ 1 \leq n \leq N$: $\tilde{\alpha}_n \geq \alpha_n$, se debe concluir que $U^e(\tilde{\alpha}) \geq U(\alpha)$. Como $(z_n)_{1 \leq n \leq N}$ es no negativo con probabilidad 1,

$$\sum_{n=1}^{N} \tilde{\alpha}_n z_n \geq \sum_{n=1}^{N} \alpha_n z_n$$

sobre todo subconjunto de $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ con medida de probabilidad no nula (o sea, casi seguramente). Como $v(\cdot)$ es creciente

$$v\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n z_n\right) \leq v\left(\sum_{n=1}^{N}\tilde{\alpha}_n z_n\right)$$

Al ser F una función de probabilidad, se mantiene la desigualdad integrando[1]

$$\underbrace{\int v\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n z_n\right) dF(z_1,...,z_n)}_{U^e(\alpha)} \leq \underbrace{\int v\left(\sum_{n=1}^{N}\tilde{\alpha}_n z_n\right) dF(z_1,...,z_N)..}_{=U^e(\tilde{\alpha})}$$

Esto demuestra que U^e es creciente. Continuamos con la concavidad. Dados $\theta \in [0,1]$ y α, $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}_+^N$, para probar que $U^e(\cdot)$ es cóncava basta con probar que (pues es la definición)

$$\theta U^e(\alpha) + (1-\theta)U(\tilde{\alpha}) \leq U\left(\theta\alpha + (1-\theta)\tilde{\alpha}\right).$$

Veamos. Como v es cóncava

$$\begin{aligned}\theta v\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n z_n\right) + (1-\theta)v\left(\sum_{n=1}^{N}\tilde{\alpha}_n z_n\right) &\leq v\left(\theta\sum_{n=1}^{N}\alpha_n z_n + (1-\theta)\sum_{n=1}^{N}\tilde{\alpha}_n z_n\right)\\ &= v\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\theta\alpha_n + (1-\theta)\tilde{\alpha}_n\right) z_n\right).\end{aligned}$$

Integrando y aplicando linealidad

$$\begin{aligned}\theta U^e(\alpha) + (1-\theta)U(\tilde{\alpha}) &= \theta\int v\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n z_n\right) dF(z) + (1-\theta)\int v\left(\sum_{n=1}^{N}\tilde{\alpha}_n z_n\right) dF(z)\\ &= \int\left[\theta v\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n z_n\right) + (1-\theta)v\left(\sum_{n=1}^{N}\tilde{\alpha}_n z_n\right)\right] dF(z)\\ &\leq \int v\left[\sum_{n=1}^{N}\left(\theta\alpha_n + (1-\theta)\tilde{\alpha}_n\right) z_n\right] dF(z)\\ &= U^e(\theta\alpha + (1-\theta)\tilde{\alpha}).\end{aligned}$$

Concluimos el ejercicios probando la continuidad de U^e. Esto es más delicado. En particular, haremos uso de algunos resultados del análsis. Primero, sea $g : X \to Y$, donde $(X, ||\cdot||_X)$ y $(Y, ||\cdot||_Y)$ son espacios vectoriales normados y completos. Entonces, g es continua si, dada una sucesión de Cauchy $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ que converge a $x^* \in X$,

$$\lim_{k\to\infty} g(x_k) = g(x^*) \in Y.$$

En relación a $U^e : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}_+$, tomamos $(\alpha^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^N$ con $\lim_{k\to\infty}\alpha^k = \alpha^*$. Al ser α^k convergente, $\exists\ M > 0$ tal que $||\alpha^k||_{\max} < M \in \mathbb{R}_+$. En particular, podemos tomar M

[1] Básicamente, dF es una medida absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

tal que $\alpha_n^k < M$, $\forall\ 1 \leq n \leq N$ y $k \in \mathbb{N}$. Así, tomando $m = (M, ..., M)$ se tiene que $||\alpha^k||_{\max} < ||m||_{\max}$. Por definición,

$$U^e(m) = U^e(M, ..., M) = \int v\left(\sum_{n=1}^{N} M z_n\right) dF(z_1, ..., z_N).$$

Como $\mathbb{P}(z_n \geq 0) = 1$, para todo $1 \leq n \leq N$, y $v(\cdot)$ es monótona

$$v\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^k z_n\right) \leq v\left(\sum_{n=1}^{N} M z_n\right), \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Puesto que v es continua,

$$\lim_{k\to\infty} v\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^k z_n\right) = v\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^* z_n\right)$$

Para finiquitar el negocios, requerimos del siguiente teorema.

Teorema 1. (**Convergencia Dominada**.) Dada una sucesión de funciones $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge puntualmente a una función f

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f,$$

si existe una función h integrable, i.e., $\int |h| < \infty$, tal que $|f_k| < g$ para todo k,

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k d\mu = \int f d\mu,$$

donde μ es una medida $\sigma-$finita.

Tomando $h = v\left(\sum_{n=1}^{N} M z_n\right)$, $v_k = u\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^k z_n\right)$ y $f = v\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^* z_n\right)$, como

$$\int v\left(\sum_{n=1}^{N} M z_n\right) dF(z_1, ..., z_N) < \infty,$$

aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada, se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} U^e(\alpha_1^k, ..., \alpha_N^k) &= \lim_{k\to\infty} \int v\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^k z_n\right) dF(\boldsymbol{z}) \\ &= \int v\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^* z_n\right) dF(\boldsymbol{z}) \\ &= U^e(\alpha_1^*, ..., \alpha_N^*).\end{aligned}$$

Esto es, si $\lim_{k\to\infty} \alpha^k = \alpha^*$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} U^e(\alpha^k) = U^e(\alpha^*),$$

i.e. $U(\cdot)$ es continua.

Ejercicio 2. Considere un agente de decisión con función de utilidad $u(\cdot)$ definida sobre $\mathbb{R}^L_+$.

a) Argumente por qué la concavidad de $u(\cdot)$ puede interpretarse como que el tomador de decisiones muestra aversión al riesgo con respecto a las loterías cuyos resultados son paquetes de los L productos básicos (commodities).

b) Supongamos ahora que una función de utilidad $v(\cdot)$ de Bernouilli para la riqueza se deriva de la maximización de una función de utilidad definida sobre las commodities para cada nivel de riqueza dado w. Los precios de las mercancías estando fijos. Demuestre que, si la función de utilidad de las mercancías muestra aversión al riesgo, también lo hace la función de Bernouilli derivada de la riqueza. Interpretar.

c) Argumente por qué la recíproca del inciso (b) no tiene por qué ser cierta. Esto es, hay funciones no cóncavas $u : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ tal que para cualquier vector de precios la función de utilidad de Bernouilli de la riqueza exhibe aversión al riesgo.

a) Si $u(\cdot)$ es cóncava, dado $\theta \in [0,1]$ y $x, y \in \mathbb{R}^L_+$ (dos canastas de consumo con L bienes)

$$\theta u(x) + (1-\theta)u(y) \leq u\left(\theta x + (1-\theta)y\right).$$

Viendo a $(\theta, 1-\theta)$ como una lotería (pues $\theta + (1-\theta) = 1$), tenemos $L \triangleq (\theta, 1-\theta)$, asociada a (x, y). La concavidad de u implica entonces que

$$U^e(L) \leq u(\overline{L}_\theta),$$

lo cual es justamente la desigualdad de Jensen. El resultado puede generalizarse considerando L commodities definiendo $\theta_1, ..., \theta_L$ y $x_1, ..., x_L$ con $\sum_{\ell=1}^L \theta_\ell = 1$:

$$\sum_{\ell=1}^L \theta_\ell u(x_\ell) \leq u\left(\sum_{\ell=1}^L \theta_\ell x_\ell\right).$$

Nuevamente, los coeficiente θ_ℓ representan las probabilidades asociadas a la lotería $L = (\theta_1, \cdots, \theta_L)$, y se tiene

$$U^e(L) \leq u(\mathbb{E}[L]).$$

b) Recordemos el problema de maximización de la utilidad en el contexto de la Teoría Clásica de la Demanda

$$\begin{aligned} &\max\, u(x) \\ &\text{s.a.} : p \cdot x \leq w. \end{aligned}$$

Para un nivel fijo de precios $p \in \mathbb{R}^L_+$, $x, \overline{x} \in \mathbb{R}^L_+$, $\theta \in [0,1]$ y dados los niveles de riqueza $w, \overline{w} \geq 0$,

$$p \cdot \underbrace{(\theta x + (1-\theta)\overline{x})}_{=\tilde{x}} \leq \theta w + (1-\theta)\overline{w},$$

donde $x = x(\boldsymbol{p}, w)$ y $\overline{x} = x(p, \overline{w})$. Puesto que con el nivel de riqueza $\theta w + (1-\theta)\overline{w}$, fijados los precios, puede obtenerse una canasta x^* al menos tan buena como $\tilde{x}$,

$$u(\theta x + (1-\theta)\overline{x}) \leq v_w(\theta w + (1-\theta)\overline{w}),$$

con v_w la función de utilidad de Bernouilli para la riqueza. Ahora, por el inciso (a), si u exhibe aversión al riesgo, es cóncava. Por ello

$$u(\theta x + (1-\theta)\overline{x}) \geq \theta u(x) + (1-\theta)u(\overline{x}).$$

Finalmente, como

$$\theta u(x) + (1-\theta)u(\overline{x}) = \theta v(w) + (1-\theta)v(\overline{w}),$$

se concluye que v_w muestra aversión al riesgo, pues

$$\theta v_w(w) + (1-\theta)v_w(\overline{w}) \leq v_w(\theta w + (1-\theta)\overline{w}).$$

c) Considérese la función $f : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$, con regla de correspondencia $f(x) = \max\{x_1, ..., x_L\}$. Sea también $g(t) = t^\beta$ definida sobre $\mathbb{R}^+$, con $0 < \beta < 1$. Ciertamente g es cóncava pues $g''(t) = \beta(\beta - 1)t^{\beta-2} < 0$. Ahora, veamos que $g \circ f(x) = (\max\{x_1, ..., x_L\})^\beta$ no es cóncava.

Proof. Consideramos $L = 2$ y se generaliza tomando ceros en las otras componentes. Sean $x = (1, 0)$ y $y = (0, 1)$. Sea también $\theta \in [0, 1]$. Para $\theta \in (0, 1)$, tenemos

$$g \circ f(\theta x + (1-\theta)y) = [\max\{\theta, 1-\theta\}]^{\beta}\,{}^{2} < 1.$$

Por otro lado,

$$\theta(g \circ f(x)) + (1-\theta)(g \circ f(y)) = [\theta + (1-\theta)]^\beta = 1.$$

□

Ahora, dado $p = (p_1, ..., p_L)$ fijo, y el problema de maximización

$$\begin{aligned} \max \;\; & u(x) = [\max\{x_1, ..., x_L\}]^\beta \\ \text{s.a.} : \; & p \cdot x \leq w, \end{aligned}$$

definiendo $p_{\min} = \min\{p_1, ..., p_L\}$, tendremos que $x^* = (0, ..., w/p_{\min}, ...0)$, y así, $v_w = (w/p_{\min})^\beta$, la cual es una función cóncava en w, y por ello exhibe aversión al riesgo.

Ejercicio 3. En relación a la comparación entre agentes,

a) Pruebe que el que exista una función creciente y cóncava $\psi(\cdot)$ tal que $u_2(x) = \psi(u_1(x))$ para todo x, esto es, $u_2(\cdot)$ es una transformación cóncava de $u_1(\cdot)$. [En otras palabras, $u_2(\cdot)$ es más cóncava que $u_1(\cdot)$], es equivalente a que $c(F, u_2) \leq c(F, u_1)$ para todo $F(\cdot)$.

b) Pruebe que $c(F, u_2) \leq c(F, u_1)$ para todo $F(\cdot)$ es equivalente a que cada vez que $u_2(\cdot)$ encuentra una lotería $F(\cdot)$ al menos tan buena como un resultado sin riesgo $\overline{x}$, entonces $u_1(\cdot)$ también encuentra $F(\cdot)$ al menos tan buena como $\overline{x}$. Esto es, $\forall$ $F(\cdot)$, $\overline{x}$

$$\int u_2(x)dF(x) \geq u_2(\overline{x}) \implies \int u_1(x)dF(x) \geq u_1(\overline{x})$$

[2] Pues tanto θ como $1-\theta$ son menores a 1 y mayores a 0. Como $g' > 0$, y $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, $0 \leq t^\beta \leq 1$ para $0 \leq t \leq 1$.

a) Sea $u_2(x) = \psi(u_1(x))$. Tenemos

$$\int u_2(x)dF(x) = \int \psi(u_1(x))dF(x).$$

Como ψ es cóncava,

$$\int \psi(u_1(x))dF(x) \leq \psi\left(\int u_1(x)dF(x)\right).$$

Por ello, usando la definición del equivalente de certeza,

$$u_2(c(F,u_2)) = \psi \circ u_1(c(F,u_2)) \leq \psi \circ u_1(c(F,u_1)).$$

Como ψ es creciente, de la última desigualdad de deduce que

$$u_1(c(F,u_2)) \leq u_1(c(F,u_1)).$$

Finalmente, usando que u_1 es también una función creciente,

$$c(F,u_2) \leq c(F,u_1).$$

Para probar la recíproca, tomamos $\theta \in [0,1]$, x, y dos outcomes. Usando la definición del equivalente de certeza, tendríamos

$$u_1(c(F,u_1)) = \theta u_1(x) + (1-\theta)u_1(y)$$

y

$$u_2(c(F,u_2)) = \theta u_2(x) + (1-\theta)u_2(y).$$

Ahora, componiendo con ψ

$$\begin{aligned} u_2(c(F,u_2)) &= \theta u_2(x) + (1-\theta)u_2(y) \\ &= \theta\psi(u_1(x)) + (1-\theta)\psi(u_1(y)). \end{aligned}$$

Como $c(F,u_2) \leq c(F,u_1)$ y u_2 es creciente

$$\begin{aligned} u_2(c(F,u_1)) &= \psi(u_1(c(F,u_1))) \\ &= \psi(\theta u_1(x) + (1-\theta)u_1(y)) \\ &\geq u_2(c(F,u_2)) \\ &= \theta u_2(x) + (1-\theta)u_2(y) \\ &= \theta\psi(u_1(x)) + (1-\theta)\psi(u_1(y)). \end{aligned}$$

Así

$$\theta\psi(u_1(x)) + (1-\theta)\psi(u_1(y)) \leq \psi(\theta u_1(x) + (1-\theta)u_1(y)),$$

i.e., ψ es cóncava. Finalmente, ψ es creciente. En efecto, dados x, y tal que $u_2(x) < u_2(y)$ y $u_1(x) < u_1(y)$, si ψ fuese decreciente, $\psi(u_2(x)) > \psi(u_2(y))$. Pero entonces $u_1(x) > u_1(y)$, contradicción.

b) Como u_2 es creciente, si

$$u(\overline{x}) \leq u(c(F,u_2)) = \int u_2(x)dF(x),$$

$\overline{x} \leq c(F, u_2)$. Ahora, usando que $c(F, u_2) \leq c(F, u_1)$, por transitividad $\overline{x} \leq c(F, u_1)$. Finalmente, como u_1 también es creciente,

$$u_1(\overline{x}) \leq u_1(c(F, u_1)) = \int u_1(x) dF(x).$$

Así,

$$u(\overline{x}) \leq \int u_2(x) dF(x) \implies u_1(\overline{x}) \leq \int u_1(x) dF(x).$$

Supongamos ahora que cualquier riesgo aceptado por $u_2(\cdot)$ partiendo de una posición sin riesgo, también sería aceptado por $u_1(\cdot)$. Esto es

$$\int u_2(x) dF(x) \geq u_2(\overline{x}) \implies \int u_1(x) dF(x) \geq u_1(\overline{x}) \ , \ \forall \ \overline{x}.$$

En particular, tomando $c(F, u_2) = \overline{x}$, tendremos

$$u_1(c(F, u_1)) = \int u_1(x) dF(x) \geq u_1(c(F, u_2)).$$

Por ello, como u_1 es creciente, $c(F, u_1) \geq c(F, u_2)$.

Lima, 30 de Setiembre, 2024.

References

Mas-Colell, A., Whinston, M. D., and Green, J. R. (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, New York.