PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES

MAT291 MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS IV

Mock Test 2
Segundo semestre 2025

Indicaciones generales:

- Tiempo sugerido: 120 minutos y el Bonus 15 minutos.
- Temas: funciones convexas y cóncavas, cuasiconvexas y cuasicóncavas, funciones de utilidad, optimización estática con y sin restricciones.

Puntaje total: 20 puntos.

Pregunta 1 (Convexidad y concavidad)
1.1) Sean $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : D_2 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones convexas. Pruebe que

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \ h : D_1 \cap D_2 \to \mathbb{R}$$

es convexa.

Solución: Sea $\theta \in [0,1]$ y $x, y \in D_1 \cap D_2$

$$\begin{aligned} h(\theta x + (1-\theta)y) &= \max\{f(\theta x + (1-\theta)y), g(\theta x + (1-\theta)y)\} \\ &\leq \max\{\theta f(x) + (1-\theta)f(y), \theta g(x) + (1-\theta)g(y)\} \\ &\leq \max\{\theta f(x), \theta g(x)\} + \max\{(1-\theta)f(y), (1-\theta)g(y)\} \\ &= \theta \max\{f(x), g(x)\} + (1-\theta)\max\{f(y), g(y)\} \\ &= \theta h(x) + (1-\theta)h(y). \end{aligned}$$

1.2) Considere la siguiente función con parámetros α y β:

$$f(x,y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + 4xy - 10.$$

etermine los valores de α y β para que la función sea convexa. ¿Qué puede decir de la convexidad (concavidad) de la función en el caso de que $\alpha = -3$ y $\beta = -5$?

Solución: Primero,

$$H = \begin{pmatrix} 2\alpha & 4 \\ 4 & 2\beta \end{pmatrix}$$

La matriz Hessiana debe ser positivo semidefinida; es decir, sus menores arbitrarios deben ser todos mayores o iguales a cero. Es decir:

$$m_1^2 = 2\alpha \geq 0 \to \alpha \geq 0$$

$$m_1^1 = 2\beta \geq 0 \to \beta \geq 0$$

$$m_2 = |H| = (2\alpha)(2\beta) - (4)(4) = 4\alpha\beta - 16 = 4(\alpha\beta - 4) \geq 0 \to \alpha\beta \geq 4$$

Por lo tanto, se debe cumplir $\alpha \geq 0 \wedge \beta \geq 0 \wedge \alpha\beta \geq 4$. para que la función sea convexa.
En el caso $\alpha = -3$ y $\beta = -5$, la matriz hessiana se torna

$$H = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$M_1 = -6 < 0$$

$$M_2 = |H| = (-6)(-10) - (4)(4) = 44 > 0$$

Por ende, $H < 0$, i.e., la función es estrictamente cóncava.

Pregunta 2.1 (Cuasiconvexidad y cuasiconcavidad)
2.11) Considere la función de utilidad CES

$$u(x) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho},$$

donde $\rho \in (0,1)$. Pruebe que $u(x)$ es cuasicóncava.

Solución: Si $0 < \rho < 1$, entonces tanto x_1^ρ como x_2^ρ son funciones cóncavas. Luego, $(x_1^\rho + x_2^\rho)$ también es cóncava por ser una combinación lineal de funciones cóncavas, y por tanto cuasicóncava. Finalmente, dado que $g(z) = z^{\frac{1}{\rho}}$ es una función creciente, se sigue que toda función CES es una transformación creciente de una función cuasicóncava, y por tanto cuasicóncava.

Pregunta 2.2 (Cuasiconvexidad y cuasiconcavidad)
Determine si las siguientes funciones son cuasicóncavas (estrictas) o cuasiconvexas (estrictas) en el dominio indicado.
2.2.1) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2, \quad x, y > 0$
2.2.2) $f(x,y) = \alpha \ln x + \beta \ln y, \quad \alpha, \beta > 0, \quad x, y > 1$

Solución: Si una función es estrictamente convexa, entonces, en particular, es estrictamente cuasiconvexa. Por ende, como $f(x,y)$ es estrictamente convexa (suma de dos funciones estrictamente convexas, hessiana ...), en particular, es estrictamente cuasiconvexa. Esto es análogo para la función $f(x,y) = \alpha \ln x + \beta \ln y, \quad \alpha, \beta > 0, \quad x, y > 1$, salvo que acá, más bien, f es estrictamente cóncava, y por ende, estrictamente cuasicóncava. Una manera más operativa de llegar al mismo resultado es calculando los **determinantes hessianos ampliados**

$$M_r(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} 0 & f_1(\mathbf{x}) & \cdots & f_r(\mathbf{x}) \\ f_1(\mathbf{x}) & f_{11}'(\mathbf{x}) & \cdots & f_{1r}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_r(\mathbf{x}) & f_{r1}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{rr}(\mathbf{x}) \end{vmatrix}.$$

Para la primera función, queda

$$M_1(x) \begin{vmatrix} 0 & 2x \\ 2x & 2 \end{vmatrix}.$$

y

$$M_2(x) \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2 & 0 \\ 2y & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Computamos $M_1(x) = -4x^2 < 0$ (pues $x > 0$), y $M_2(x) = -8x^2 - 8y^2 < 0$. Análogamente, para la segunda función, queda

$$(-1)M_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\alpha}{x} \\ \frac{\alpha}{x} & \frac{-\alpha}{x^2} \end{vmatrix} = (-1)\left(-\frac{\alpha^2}{x^2}\right) = \frac{\alpha^2}{x^2} > 0$$

y

$$(-1)^2 M_2(x) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\alpha}{x} & \frac{\beta}{y} \\ \frac{\alpha}{x} & \frac{-\alpha}{x^2} & 0 \\ \frac{\beta}{y} & 0 & \frac{-\beta}{y^2} \end{vmatrix} = \frac{\alpha^2\beta + \alpha\beta^2}{x^2y^2} > 0.$$

Pregunta 3:

a) De acuerdo al valor del parámetro $a \neq 0$, analice si la función

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2)$$

tiene puntos óptimos.

b) Considere una firma cuya función de ingreso es

$$R(x,y) = x(100-6x) + y(192-4y),$$

donde x e y representan el número de artículos vendidos. Si la función de costo es

$$C(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 4xy - 8x + 20,$$

determine el beneficio máximo.

Solución:

a) El gradiente de f viene dado por

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 4x(x^2+y^2-a^2) \\ 4y(x^2+y^2+a^2) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, los puntos críticos son $(0,0), (-a,0), (a,0)$. Ahora calculamos la hessiana de f:

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 4(x^2+y^2)+8x^2-4a^2 & 8xy \\ 8xy & 4(x^2+y^2)+8y^2+4a^2 \end{bmatrix}.$$

Evaluando en los puntos estacionario:

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} -4a^2 & 0 \\ 0 & 4a^2 \end{bmatrix} \implies |Hf(0,0)| = -16a^4 < 0 \implies \text{silla}$$

$$Hf(-a,0) = H(a,0) = \begin{bmatrix} 8a^2 & 0 \\ 0 & 8a^2 \end{bmatrix} \implies \text{mínimo local.}$$

b) El beneficio es

$$B(x,y) = R(x,y) - C(x,y) = x(100-6x) + y(192-4y) - \left(2x^2+2y^2+4xy-8x+20\right)$$

cuyo gradiente es

$$\nabla B(x,y) = (108-16x-4y,\ 192-4x-12y)$$

Obtenemos el punto crítico $(3,15)$. La matriz Hessiana es

$$H_B(x,y) = \begin{bmatrix} -16 & -4 \\ -4 & -12 \end{bmatrix}$$

La cual es definida negativa en $\mathbb{R}^2$. Por tanto, la función es cóncava en $\mathbb{R}^2$ y el punto $(3,15)$ es un máximo global.

Pregunta 4. (Lagrange)
Resuelva el problema de maximización de la utilidad en función del vector de precios $\mathbf{p} = (p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$ y la riqueza $I > 0$, para

- $u(x_1,x_2) = x_1^{0.5} + x_2^{0.5}$.
- $u(x_1,x_2) = x_1 + \ln x_2$, $x_2 > 0$.

Solución:

- Para $u(x_1, x_2) = x_1^{0.5} + x_2^{0.5}$:

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \quad \text{s.a.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = I.$$

  Las condiciones de primer orden (interior) son

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{p_1} = \frac{\frac{1}{2} x_1^{-1/2}}{p_1} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_2}}{p_2} = \frac{\frac{1}{2} x_2^{-1/2}}{p_2} \implies \frac{1}{p_1 \sqrt{x_1}} = \frac{1}{p_2 \sqrt{x_2}} \implies x_2 = x_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2.$$

  Sustituyendo en la restricción presupuestaria:

$$p_1 x_1 + p_2 \, x_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 = x_1 \left(p_1 + \frac{p_1^2}{p_2}\right) = I \implies x_1^*(p_1, p_2, I) = \frac{I \, p_2}{p_1 \, (p_1 + p_2)},$$

$$x_2^*(p_1, p_2, I) = x_1^* \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 = \frac{I \, p_1}{p_2 \, (p_1 + p_2)}.$$

- Para $u(x_1, x_2) = x_1 + \ln x_2$, $x_2 > 0$:

$$\max_{x_1 \geq 0, x_2 > 0} x_1 + \ln x_2 \quad \text{s.a.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = I.$$

  Las condiciones de primer orden (interior) son

$$\frac{\partial u / \partial x_1}{p_1} = \frac{1}{p_1} = \lambda, \qquad \frac{\partial u / \partial x_2}{p_2} = \frac{1/x_2}{p_2} = \lambda \implies \frac{1}{x_2 \, p_2} = \frac{1}{p_1} \implies x_2^* = \frac{p_1}{p_2}.$$

  De la restricción:

$$p_1 x_1 + p_2 \frac{p_1}{p_2} = I \implies x_1^* = \frac{I - p_1}{p_1} = \frac{I}{p_1} - 1.$$

  (Para garantizar $x_1^* \geq 0$ se requiere $I \geq p_1$.) Si no $x_2^* = I/p_2$ y $x_1^* = 0$.

Bonus. Aplicación de la cuasiconcavidad al problema de maximización de la utilidad.

Considere el siguiente problema de optimización con parámetros (note que corresponde al problema maximización de la utilidad)

$$\mathcal{P}_u : \begin{cases} \max & u(\mathbf{x}) \\ \text{s. a :} & \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq I \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Asuma que $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$, $I > 0$ y que $u(\cdot)$ es continua y tal que $\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}_1 \implies u(\mathbf{x}_2) > u(\mathbf{x}_1)$. Sea $\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)$ una solución al problema. Demuestre que:

1. Si u es cuasicóncava, entonces el conjunto de soluciones al problema $\mathcal{P}_u$ es convexo.
2. Si u es estrictamente cuasicóncava, entonces el conjunto de soluciones al problema $\mathcal{P}_u$ es unitario (la solución es única).

Solución:

Supongamos que $u(\cdot)$ es cuasicóncava y que tenemos dos soluciones $\mathbf{x}^*$ y $\mathbf{x}^{**}$ con $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{x}^{**}$. El objetivo es probar que $\theta\mathbf{x}^* + (1-\theta)\mathbf{x}^{**}$ es solución para todo $\theta \in [0, 1]$. Los casos $\theta = 0, 1$ son triviales. Tomemos entonces $\theta \in (0, 1)$. Por un lado,

$$\mathbf{p} \cdot [\theta\mathbf{x}^* + (1-\theta)\mathbf{x}^{**}] = \theta\mathbf{p}\mathbf{x}^* + (1-\theta)\mathbf{p}\mathbf{x}^{**} \leq \theta I + (1-\theta)I = I.$$

Finalmente, por la cuasiconcavidad de $u(\cdot)$

$$u(\theta\mathbf{x}^* + (1-\theta)\mathbf{x}^{**}) \geq \min\{u(\mathbf{x}^*), u(\mathbf{x}^{**})\} = u^*.$$

Ahora bien, si $u(\cdot)$ fuese estrictamente cuasicóncava,

$$u(\theta\mathbf{x}^* + (1-\theta)\mathbf{x}^{**}) > \min\{u(\mathbf{x}^*), u(\mathbf{x}^{**})\} = u^*,$$

lo cual contradice la optimalidad de $\mathbf{x}^*$ y $\mathbf{x}^{**}$.