

JORGE CHÁVEZ

MARCELO GALLARDO

ÁLGEBRA LINEAL Y OPTIMIZACIÓN

PARA EL ANÁLISIS ECONÓMICO

CHÁVEZ Y GALLARDO

## DEDICATORIA

A Juana y Alejandro, con quienes se inició todo...

A mis padres, José y Cybele,  
y a mi abuela Betty, por su constante apoyo.

# Índice general

<b>1. Elementos de álgebra lineal</b>	<b>14</b>
1.1. Espacios vectoriales . . . . .	14
1.2. Subespacios vectoriales . . . . .	41
1.3. Bases de espacios vectoriales . . . . .	57
1.4. Transformaciones lineales . . . . .	67
<b>2. Sistema lineal de ecuaciones</b>	
<b>algebraicas</b>	<b>88</b>
2.1. Sobre el rango de una matriz . . . . .	89
2.2. Sistemas de ecuaciones . . . . .	94
2.3. La solución . . . . .	100
<b>3. Valores y vectores</b>	
<b>propios</b>	<b>114</b>
3.1. Conceptos básicos . . . . .	114
3.2. Matrices equivalentes . . . . .	137
3.3. Matrices simétricas y formas	
cuadráticas . . . . .	152
<b>4. Espacios vectoriales topológicos</b>	<b>179</b>
4.1. La norma de un vector . . . . .	179
4.2. Distancia y aproximación . . . . .	188
4.3. Topología de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	201
<b>5. Conjuntos convexos</b>	<b>223</b>
5.1. Conjuntos convexos . . . . .	223
5.2. Separación de conjuntos	
convexos . . . . .	249
5.3. El Lema de Farkas . . . . .	268

<b>6. Funciones convexas y cóncavas</b>	<b>294</b>
6.1. Funciones convexas y cóncavas . . . . .	294
6.2. Funciones convexas y cóncavas diferenciables . . . . .	311
6.3. Funciones cuasiconvexas y cuasicóncavas . . . . .	322
<b>7. Introducción a la optimización</b>	<b>333</b>
7.1. El problema general . . . . .	334
7.2. Enfoque Geométrico . . . . .	343
7.3. Soluciones Interiores . . . . .	347
<b>8. El problema de Lagrange</b>	<b>375</b>
8.1. El Teorema de Lagrange . . . . .	383
8.2. Condiciones suficientes . . . . .	401
8.3. Estática comparativa y el Teorema de la Envolvente . . . . .	412
<b>9. El problema de Karush-Kuhn-Tucker</b>	<b>431</b>
9.1. Condiciones necesarias y el problema mixto . . . . .	432
9.2. Condiciones suficientes . . . . .	453
9.3. Condiciones de no negatividad . . . . .	461
<b>10. Relación de preferencias y equilibrio general</b>	<b>475</b>
10.1. Relación de preferencias . . . . .	476
10.2. Función de utilidad . . . . .	488
10.3. Introducción al equilibrio general . . . . .	520

**Índice**

**Bibliografía**

## PRÓLOGO

He leído con atención, con deleite y tal vez con algo de nostalgia este libro de álgebra lineal y optimización para el análisis económico que me han alcanzado Jorge Chávez y Marcelo Gallardo, respectivamente profesor del Departamento de Ciencias y estudiante de Matemáticas de la PUCP. El libro lleva al lector en un recorrido guiado por temas indispensables para el estudiante de economía de hoy en día, como el álgebra lineal, los espacios topológicos, la convexidad y la optimización, además de una introducción al equilibrio general walrasiano. El texto incluye numerosas y cuidadas figuras y ejercicios que, en mi experiencia, son insustituibles para apreciar y entender.

Un punto destacado en el texto es la elaboración del lema de Farkas, un resultado fundamental y de mucha utilidad en economía. Me tomó años después de la carrera entender la importancia de esta herramienta; me encanta encontrarla en este texto en conexión con otros resultados de separación.

«Las matemáticas son un lenguaje.» Así reza el prefacio de los Fundamentos del Análisis Económico de Paul Samuelson, quien atribuye la frase al gran Willard Gibbs. Como todo lenguaje, el aprendizaje de las matemáticas requiere práctica y ejercicio, y recompensa aprenderlo temprano para adquirir familiaridad y destreza. Es un lenguaje que resulta aún más necesario para el economista, ya que la herramienta básica de la teoría económica son los modelos expresados de manera matemática. Los modelos son una versión simplificada y abstracta de la realidad, nuestra

guía de ruta. Para leerlos y, aún más, para escribirlos, la destreza en las matemáticas es fundamental. Me gusta mucho que en el libro se incluya uno de los modelos esenciales en economía: el equilibrio general walrasiano.

Otro lenguaje, o conjunto de lenguajes, cada vez más necesario para el economista es la computación. Las excelentes figuras en el texto fueron generadas con herramientas como GeoGebra, LaTeX, TikZ y Python.

En mi tiempo en la PUCP, el maestro Ramón García-Cobián fue una guía fundamental. Con Ramón, en ese entonces, descubrimos el significado económico de conceptos como convexidad, continuidad y genericidad. Me alegra que este texto contribuya a la formación de nuevas generaciones de estudiantes de la PUCP.

César Martinelli,  
profesor del Departamento de Economía  
en la Universidad George Mason.

## PREFACIO

Este libro nace de la experiencia docente de los autores en los cursos de Investigación de Operaciones y Matemáticas para Economistas en las Facultades de Ciencias e Ingeniería y Ciencias Sociales de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Se fundamenta en las notas de clases de los últimos años preparadas por los autores para tales cursos. El texto está principalmente dirigido a estudiantes de pregrado en matemáticas aplicadas, estudiantes de maestría en economía o cualquier lector con cierta base en álgebra lineal y cálculo en varias variables interesado en los modelos matemáticos de la economía. El libro también pretende ser un material de apoyo para el trabajo de los profesores de matemáticas aplicadas y economía, así como para los investigadores interesados en la economía teórica o modelización matemática.

A lo largo del texto, se presentan más de 190 ejemplos, muchos de los cuales provienen del contexto económico. Se destacan al menos 50 ejemplos de teoría económica, desde el problema de la maximización de la utilidad del consumidor hasta el cálculo del equilibrio walrasiano, pasando por modelos como el de Black & Scholes, el de transporte óptimo o el modelo IS-LM; además, hay alrededor de 150 ejemplos adicionales que sirven para reforzar e ilustrar la teoría. La presentación de los diversos conceptos y definiciones son introducidas formalmente y, con el propósito de tornar al libro un material auto-contenido, todos los teoremas son demostrados, salvo dos excepciones que requieren elementos



no discutidos en este libro. Sin embargo, puesto que los diversos ejemplos incluidos aseguran una comprensión integral de los diferentes teoremas y lemas, se recomienda al lector omitir las demostraciones en una primera lectura. Esta flexibilidad garantiza que el material sea accesible para una amplia gama de estilos de aprendizaje y necesidades educativas.

Acompañando el texto, hay más de 280 ejercicios, distribuidos en alrededor de 10 ejercicios por sección. El grado de dificultad de éstos es variado desde aquellos que se resuelven casi inmediatamente hasta aquellos que, por su grado de dificultad, son más retadores y poseen sugerencias de solución. Además, para apoyar la comprensión de la teoría se cuentan con abundantes figuras, elaboradas con herramientas como GeoGebra,  $\text{\LaTeX}$ , TikZ, y Python.

El libro se estructura en torno a tres bloques principales y un capítulo adicional enfocado enteramente al estudio de algunos tópicos selectos en teoría microeconómica. El primer bloque comprende tres capítulos iniciales dedicados al álgebra lineal, estableciendo una base matemática fundamental para la lectura de los siguientes capítulos. A continuación describimos este primer bloque.

En el capítulo 1, se introducen los conceptos básicos del álgebra lineal, tales como espacio vectorial, dimensión, producto interno, transformaciones lineales, etc. Con base en la teoría presentada en este primer capítulo, en el capítulo 2 se estudian exhaustivamente los sistemas de ecuaciones lineales. Se analizan las condiciones necesarias para que un sistema dado tenga solución y, en tal caso, se determina el número de soluciones posibles. Además, se

ofrece un método sistemático para la resolución de estos sistemas. En este contexto, se presenta un ejemplo importante conocido en la literatura como el modelo insumo-producto de Leontief. La importancia de este modelo radica en su capacidad para describir cómo los diferentes sectores de una economía interactúan entre sí, proporcionando así una herramienta valiosa para el análisis de la producción y distribución de bienes y servicios. El capítulo 3 está, fundamentalmente, dedicado al estudio de los valores y vectores propios, así como a la diagonalización de matrices y formas cuadráticas.

El segundo bloque está constituido por los capítulos 4 y 5. En el capítulo 4 se introducen los conceptos de distancia, de sucesión y de convergencia en espacios vectoriales, así como los principios básicos de topología, los cuales son usados en capítulos posteriores. El capítulo 5 se centra en el estudio de los conjuntos convexos, que son de particular interés en teoría del consumidor y del productor. Con la teoría desarrollada aquí, se abordan también resultados importantes como el Teorema de Separación y el Lema de Farkas.

El último bloque corresponde al de optimización, y está compuesto por los capítulos del 6 al 9. En el capítulo 6 se estudian las funciones convexas, cóncavas, cuasiconvexas y cuasicóncavas. Estas funciones aparecen frecuentemente en economía; algunos ejemplos incluyen las funciones de utilidad, de producción, de gasto, de costo, de utilidad indirecta y de beneficios, y son aquellas que usualmente se busca optimizar. En el capítulo 7 se aborda el problema general de optimización. Se comienza con un enfoque geométrico, y, luego, se presenta el Teorema de Weierstrass, que

es el primer resultado fundamental de la teoría de optimización. Inmediatamente después, se estudian las condiciones necesarias y suficientes que son herramientas fundamentales para identificar candidatos a óptimos y asegurar su optimalidad. El capítulo concluye con el análisis de estática comparativa y su aplicación en el contexto de un modelo macroeconómico conocido en la literatura como modelo IS-LM.

En los capítulos 8 y 9 se discuten problemas específicos de optimización. En el capítulo 8, abordamos el problema de Lagrange, que es un problema con restricciones de igualdad, y que es esencial en economía, pues permite resolver, bajo ciertas circunstancias, diversos problemas como el de la maximización de la utilidad o la minimización del gasto. También presentamos en este capítulo el Teorema de la Envolvente, y proporcionamos ejemplos prácticos derivando, por ejemplo, identidades como las de Roy o Shepard. En el capítulo 9 presentamos el problema de Karush-Kuhn-Tucker, que es un problema con restricciones de desigualdad, y desarrollamos algunos ejemplos clásicos relacionados con él.

Finalmente, en el capítulo 10 se presentan algunos tópicos fundamentales de la teoría microeconómica. Así, en las primeras dos secciones estudiamos las relaciones de preferencias y las funciones de utilidad, que constituyen la base de la teoría del consumidor. Estos conceptos nos permiten ilustrar el uso de las propiedades topológicas de los conjuntos convexos así como entender la importancia de las propiedades de concavidad y cuasiconcavidad de las funciones de utilidad. Más aún, en este capítulo presentamos brevemente el modelo de la utilidad esperada,

extensión del modelo básico de la teoría del consumidor. Con el propósito de conectar los contenidos de los primeros capítulos y preparar al lector para estudios superiores, el capítulo 10 culmina con una introducción a la teoría del equilibrio general. Para terminar, queremos expresar nuestro agradecimiento, en primer lugar, a la Pontificia Universidad Católica del Perú por haber hecho viable la realización de este proyecto. En segundo lugar, a los profesores César Martinelli (Universidad George Mason) y José Gallardo (Pontificia Universidad Católica del Perú), por sus valiosas discusiones e impresiones compartidas con los autores. Finalmente, agradecemos también a Manuel Loaiza Vásquez, ex-alumno de la especialidad de Matemáticas, por sus importantes comentarios y observaciones. Por último, expresamos nuestra especial gratitud al profesor Martinelli por el magnífico prólogo que compartió con nosotros para esta edición del libro.

Esperamos que este texto sea útil, tanto a estudiantes como profesores e investigadores para el desarrollo de sus cursos de microeconomía y economía matemática.

Jorge Chávez,  
profesor principal  
del Departamento de Ciencias de la  
Pontificia Universidad Católica del Perú.

Marcelo Gallardo,  
asistente de investigación  
en la Facultad de Ciencias e Ingeniería de la  
Pontificia Universidad Católica del Perú.