PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Guía de Resolución Examen Parcial
Primer semestre 2024

Indicaciones generales:

- Duración: 180 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: con apuntes de clase (físicos o digitales) y calculadora no programable.
- No está permitido el uso de ningún material o equipo electrónico adicional al indicado (no celulares, se aceptan tablets).

Puntaje total: 20 puntos (ponderación de 0.65, Tarea: ponderación de 0.35).

<u>Solucionario:</u>

Pregunta 1

1.1) Pensemos en lo siguiente, queremos $(fg)'' = (f'g + g'f)' = f''g + 2f'g' + g''f \geq 0$. Basta entonces que f y g sean crecientes y positivas.

1.2) Basta que $A \geq 0$, cuando es simétrica, pues $Hf = 2A$. No importan $\mathbf{b}$ y c.

1.3) Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &= \int_0^1 f((1-t)a + bt)dt \\ &\leq \int_0^1 tf(a) + (1-t)f(b)dt \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2}.\end{aligned}$$

Pregunta 2

2.1) Se busca minimizar el gasto en el que incurre un consumidor dado que las canastas de consumo de entre las cuales se escoge, producen un nivel de utilidad mayor o igual a $\overline{u}$. Si este parámetro aumenta, asumiendo u creciente, el gasto aumenta.

2.2) Simplemente

$$
\begin{aligned}
e(\lambda \mathbf{p}_1 + (1-\lambda)\mathbf{p}_2, \overline{u}) &= \min_{\mathbf{x}\geq \mathbf{0}, u(\mathbf{x})\geq \overline{u}} (\lambda \mathbf{p}_1 + (1-\lambda)\mathbf{p}_2)\cdot \mathbf{x} \\
&= \lambda \mathbf{p}_1 \cdot \tilde{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\mathbf{p}_2 \cdot \tilde{\mathbf{x}} \\
&\geq \lambda \min_{\mathbf{x}\geq \mathbf{0}, u(\mathbf{x})\geq \overline{u}} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x} + (1-\lambda) \min_{\mathbf{x}\geq \mathbf{0}, u(\mathbf{x})\geq \overline{u}} \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x} \\
&= \lambda e(\mathbf{p}_1, \overline{u}) + (1-\lambda) e(\mathbf{p}_2, \overline{u}).
\end{aligned}
$$

Acá $\tilde{\mathbf{x}}$ es el que resuelve $\min_{\mathbf{x}\geq \mathbf{0}, u(\mathbf{x})\geq \overline{u}} (\lambda \mathbf{p}_1 + (1-\lambda)\mathbf{p}_2)\cdot \mathbf{x}$.

¿Porqué es cóncava? : Supongamos que consumes dos bienes. Imagina que el precio de uno de esos bienes, digamos p_1, aumenta. También supongamos que, en lugar de reajustar tu demanda, incrementas el consumo del bien uno lo suficiente como para mantener un cierto nivel de utilidad (digamos el mismo nivel de utilidad que tenías al consumir los bienes 1 y 2 antes de que el precio del bien 1 aumentara). Entonces, tus gastos aumentan linealmente. Supongamos, en cambio, que reajustas tu demanda. Entonces tus gastos también aumentan, pero no tanto como cuando no reajustas tu demanda. Por lo tanto, se deduce la concavidad.

2.3) La solución es $(0, 5/3)$. Sucede que el bien 2 le genera estrictamente siempre más utilidad. Como los precios son iguales, es mejor concentrar todo en x_2.

2.4) La solución es $x_i^* = 0$ para $i = 1, ..., n-1$ y $x_n^* = \overline{u}$; le es más barato consumir solo de x_n y alcanza el mismo nivel de utilidad. El gasto incurrido es $p_n \overline{u}$.

Pregunta 3

3.1) Notar que $u(\mathbf{x})$ cuasi cóncava es probar

$$X = \left\{ \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \geq c \right\}$$

es convexo para todo $c \in \mathbb{R}$. En particular, trabajamos con $c > 0$ pues $x_i > 0$. Ahora bien,

$$X = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i \geq \ln c \right\}$$

es convexo pues $\ln(\cdot)$ es cóncava (se prueba por definición), los $\alpha_i \geq 0$ y la suma de cóncavas es cóncava.

3.2) Recordar que si f es la composición de una cóncava con una creciente, es cuasi cóncava. Entonces, sea

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{\rho}.$$

Para $0 < \rho \leq 1$, g es ciertamente cóncava (estudiar la Hessiana, $\alpha_i \rho(\rho-1)x_i^{\rho-2} \leq 0$. Como $t^{1/\rho}$ es creciente para $0 < \rho \leq 1$, concluimos. Sea ahora $\rho \leq 0$. Basta notar que $g(x)^{1/\rho}$ es decreciente en $g(x)$ y por ende creciente en $-g(x)$. Como $-g(x)$ es cóncava para $\rho \leq 0$, se concluye.

3.3) Tomemos cualquier $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$. Observemos que la homogeneidad de grado 1 implica que

$$f\left(\frac{\mathbf{x}_1}{f(\mathbf{x}_1)}\right) = \frac{f(\mathbf{x}_1)}{f(\mathbf{x}_1)} = 1 = \frac{f(\mathbf{x}_2)}{f(\mathbf{x}_2)}.$$

Para cualquier $\lambda \in (0,1)$, definimos

$$\theta = \frac{\lambda f(\mathbf{x}_1)}{\lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2)}.$$

Notemos que θ también pertenece al intervalo unitario abierto. Así, por la cuasi concavidad, tenemos para cada $\theta \in (0,1)$,

$$f\left(\theta \frac{\mathbf{x}_1}{f(\mathbf{x}_1)} + (1-\theta)\frac{\mathbf{x}_2}{f(\mathbf{x}_2)}\right) \geq \min\left\{f\left(\frac{\mathbf{x}_1}{f(\mathbf{x}_1)}\right), f\left(\frac{\mathbf{x}_2}{f(\mathbf{x}_2)}\right)\right\} = 1.$$

Expandiendo el lado izquierdo,

$$f\left(\frac{\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)}{\lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2)}\mathbf{x}_2\right) \geq 1.$$

Nuevamente por la homogeneidad de grado 1,

$$\frac{f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2)}{\lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2)} \geq 1 \Leftrightarrow f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \geq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2),$$

lo que completa nuestra demostración. Así, como la CES es homogénea de grado 1, concluimos que es cóncava para $\rho \leq 1$.

Pregunta 4

4.1) El problema consiste en maximizar el beneficio de una firma $\pi(\mathbf{p})$. El vector de precios $\mathbf{p}$ fija el precio de los bienes que se venden (output) tanto como el precio de los insumos. Los $\mathbf{y}$ constituyen planes de producción y $\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}$ es el beneficio generado por dicho plan (ingresos brutos menos costos). Luego, para $\lambda \geq 0$ (homogeneidad de grado 1 en precios: $\lambda \geq 0$)

$$\pi(\lambda \mathbf{p}) = \max_{\mathbf{y} \in Y} (\lambda \mathbf{p}) \cdot \mathbf{y} = \lambda \max_{\mathbf{y} \in Y} \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} = \lambda \pi(\mathbf{p}).$$

Esto significa que si el precio de los insumos y de los productos se incrementan/reducen en la misma magnitud, los beneficios se incrementan/reudcen en esa misma proporción. Es natural pues

$$\pi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}_{output}\mathbf{y}_{output} - \mathbf{p}_{input}|\mathbf{y}|_{inputs}$$

4.2) Esto es análogo a la pregunta 3.2:

$$\begin{aligned}
\pi(\lambda \mathbf{p}_1 + (1-\lambda)\mathbf{p}_2) &= (\lambda \mathbf{p}_1 + (1-\lambda)\mathbf{p}_2) \cdot \tilde{\mathbf{y}} \\
&= \lambda \mathbf{p}_1 \cdot \tilde{\mathbf{y}} + (1-\lambda)\mathbf{p}_2 \cdot \tilde{\mathbf{y}} \\
&\leq \lambda \max_{\mathbf{y} \in Y} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{y} + (1-\lambda) \max_{\mathbf{y} \in Y} \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{y} \\
&= \lambda \pi(\mathbf{p}_1) + (1-\lambda)\pi(\mathbf{p}_2).
\end{aligned}$$

Acá $\tilde{\mathbf{y}}$ resuelve el problema de optimización original con la combinación convexa de precios.

4.3) Sea $\hat{Y} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \pi(\mathbf{p}),\ \forall\ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n\}$. Necesitamos demostrar que $Y \subset \hat{Y}$ y que $\hat{Y} \subset Y$. La primera inclusión se sigue de la definición de π. Para la inclusión inversa, supongamos que Y es cerrado y convexo y sea $\mathbf{x} \notin Y$. Entonces, por el teorema del hiperplano separador (estricto), existe un $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ distinto del vector nulo tal que

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} > \max_{\mathbf{y} \in Y} \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} = \pi(\mathbf{p}).$$

Esto implica que $\mathbf{x} \notin \hat{Y}$. El hallazgo de $\mathbf{x} \notin Y \Rightarrow \mathbf{x} \notin \hat{Y}$, establece que $\hat{Y} \subset Y$.

4.4) Sea

$$\hat{Y} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} \leq \pi(\mathbf{p}) \text{ para todo } \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_+\}.$$

Necesitamos demostrar que $Y \subset \hat{Y}$ y que $\hat{Y} \subset Y$. La primera inclusión se deriva directamente de la definición de π. Para la inclusión inversa, si $\mathbf{x} \notin Y$, siendo Y cerrado y convexo, por el teorema del hiperplano separador, existe un $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ distinto del vector nulo tal que

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} > \max_{\mathbf{y} \in Y} \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} = \pi(\mathbf{p}). \quad (*)$$

Por el principio de disposición libre, si alguna componente de $\mathbf{p}$ fuera negativa, entonces

$$\sup_{\mathbf{y} \in Y} \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} = +\infty,$$

lo que contradice $(*)$ y por ende impide que cualquier componente de $\mathbf{p}$ sea negativa; así $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_+$. Esto lleva a que $\mathbf{x} \notin \hat{Y}$. De esta forma se establece que $\hat{Y} \subset Y$.

Pregunta 5

5.1) La cuasi concavidad de u, junto con el hecho que es C^2 asegura que

$$(**) \quad -u_{x_1}^2 u_{x_2x_2} + 2u_{x_1x_2}u_{x_1}u_{x_2} - u_{x_1x_1}u_{x_2}^2 > 0.$$

Esto se desprende del criterio de los determinantes Hessianos ampliados. Luego, por la regla de la cadena (considerando $x_2 = x_2(x_1)$):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx_1}\left(\frac{u_{x_1}}{u_{x_2}}\right) &= \frac{\frac{du_{x_1}}{dx_1}u_{x_2} - \frac{du_{x_2}}{dx_1}u_{x_1}}{u_{x_2}^2} \\ &= \frac{\left(u_{x_1x_1} + u_{x_1x_2}\frac{dx_2}{dx_1}\right)u_{x_2} - \left(u_{x_1x_2} + u_{x_2}^2\frac{dx_2}{dx_1}\right)u_{x_1}}{u_{x_2}^2}.\end{aligned}$$

Como $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{u_{x_1}}{u_{x_2}}$ y las utilidades marginales son positivas,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx_1}\left(\frac{u_{x_1}}{u_{x_2}}\right) &= \frac{1}{u_{x_2}^2}\left[u_{x_2}u_{x_1x_1} - \frac{u_{x_2}u_{x_1}u_{x_1x_2}}{u_{x_2}} - \frac{u_{x_1x_2}u_{x_1}u_{x_2}}{u_{x_2}} + \frac{u_{x_2x_2}u_{x_1}}{u_{x_2}}\right] \\ &= \frac{u_{x_1}^2 u_{x_2x_2} - 2u_{x_1x_2}u_{x_1}u_{x_2} + u_{x_1x_1}u_{x_2}^2}{u_{x_2}^3} \\ &= -\frac{**}{u_{x_2}^3} < 0.\end{aligned}$$

5.2) La Tasa Marginal de Sustitución (TMS) decreciente implica que a medida que se intercambia más de un bien por otro, el consumidor está dispuesto a renunciar a menos del primer bien para obtener una unidad adicional del segundo. Esto refleja la ley de la utilidad marginal decreciente: el valor adicional que el consumidor asigna a una unidad adicional de un bien disminuye conforme aumenta su cantidad consumida. La respuesta es afirmativa.

5.3) Sean $u_i = e^{x_i}, v_i = e^{y_i}$ y sea $\theta \in [0, 1]$. Entonces,

$$f(\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y}) = \log\left(\sum_{i=1}^{n} e^{\theta x_i + (1-\theta)y_i}\right) = \log\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{\theta} v_i^{(1-\theta)}\right)$$

La desigualdad de Hölder establece que:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Aplicando esta desigualdad,

$$f(\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y}) = \log\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{\theta} v_i^{(1-\theta)}\right) \leq \log\left[\left(\sum_{i=1}^{n} (u_i^{\theta})^{\frac{1}{\theta}}\right)^{\theta} \left(\sum_{i=1}^{n} (v_i^{1-\theta})^{\frac{1}{1-\theta}}\right)^{1-\theta}\right],$$

lo que se reduce, por la linealidad del logaritmo, a:

$$\theta \log\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right) + (1-\theta) \log\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right).$$