

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

1MAT33 ANÁLISIS FUNCIONAL

Cuarta práctica (tipo a)
Primer semestre 2024

Indicaciones generales:

- Duración: 110 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: sin apuntes de clase.
- No está permitido el uso de ningún material de consulta o equipo electrónico.
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**

Puntaje total: 20 puntos.

Cuestionario:

Pregunta 1 (5 puntos)

Sea E un espacio normado de dimensión infinita y $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ la esfera unitaria. Pruebe que

$$\underbrace{\overline{S}^{\sigma(E, E')}}_{\text{clausura de } S \text{ en la topología } \sigma(E, E')} = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}.$$

Pregunta 2 (5 puntos)

- a) Sean E un espacio reflexivo y $\varphi \in E'$. Demuestre que existe $x \in E$ no nulo tal que $\varphi(x) = \|x\| \cdot \|\varphi\|$.
- b) Sea E un espacio normado. Demuestre que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en E converge débilmente a $x \in E$, entonces la sucesión es limitada.

Pregunta 3 (5 puntos)

Considere el espacio $C[0, 1]$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Pruebe que el operador

$$T_2 : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1], \quad T_2(f)(x) = \int_0^x f(s) ds$$

es compacto y no tiene autovalores.

Pregunta 4 (5 puntos)

Pruebe que todo conjunto no vacío y abierto de la topología débil de un espacio de dimensión infinita es ilimitado.

Profesor del curso: Percy Fernández.

San Miguel, 28 de junio del 2024.