PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS PARA ECONOMISTAS
PRÁCTICA DIRIGIDA 4
PROFESOR: Jorge Richard Chávez Fuentes
JEFES DE PRÁCTICA: Marcelo Gallardo, Rodrigo Crousillat
SEMESTRE 2025-2

Ecuaciones diferenciales

Ejercicio 1. Verifique que $\varphi(t)$ es solución de la ecuación E:

1) $\varphi(t) = 2e^{-t} + \frac{1}{2}t$ para $E : x' = -x + e^t$.

2) $\varphi(t) = -e^{3t} - \frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{9}t - \frac{2}{27}$ para $E : x' = 3x + t^2$.

3) $\varphi(t) = t^4,\ t > 0$ para $E : x' = 4x^{3/4}$.

4) $\varphi(t) = \sqrt{t^2 + 1}$ para $E : x' = \frac{2t}{x}$.

5) $\varphi(t) = \sin t$ para $E : x'' = -x$.

Ejercicio 2. Halle la solución de las siguientes ecuaciones:

1) $x' = 2x + 4$.

2) $x' = \frac{2}{3}x + 6$.

3) $x' = x + t$.

4) $x' = -2x + t^2$

5) $x' = -\frac{2}{t}x + t - 1 + \frac{1}{t}$

Ejercicio 3. Halle la solución de las siguientes ecuaciones:

1) $x' = te^t - t$.

2) $x^2x' = t + 1$.

3) $e^x x' = t + 1$.

4) $tx' = x(1 - t)$

5) $(1 + t^3)x' = t^2 x$

Modelo de Solow

Ejercicio 4. Muestre que las siguientes funciones de producción satisfacen las condiciones de Inada:

1) $F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ con $A > 0$, $0 < \alpha < 1$.

2) $F(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$ con $A > 0$, $0 < \alpha, \beta < 1$.

3) $F(K,L) = AK^{\alpha} + BL^{\beta}$ con $A, B > 0$, $0 < \alpha, \beta < 1$.

4) $F(K,L) = A(K^{\alpha} + \ln(L))$ con $A > 0$, $0 < \alpha < 1$.

5) $F(K,L) = a \ln K + b \ln L$, $a, b > 0$.

Ejercicio 5. Halle el equilibrio considerando el modelo de Solow y las funciones de producción del ejercicio anterior (1 y 3 para $\beta = 1 - \alpha$). Trace el diagrama de fases correspondiente.

Ejercicio 6. Considere el modelo de Solow con alguna función de producción F que satisfaga las condiciones de Inada. Determine el efecto sobre el nivel de capital de equilibrio de:

1) $\Delta n > 0$.

2) $\Delta \delta > 0$.

3) $\Delta s > 0$.

Ejercicio 7. Explique porqué en el estado estacionario, el consumo por trabajador está dado por:

$$c = Af(k) - (n + \delta)k.$$

A partir de esto, podemos entonces determinar el nivel de capital que maximiza el consumo. Derivando con respecto a k, obtenemos:

$$\frac{dc}{dk} = Af'(k_{GR}) - (n + \delta) = 0,$$

lo que implica la condición de la regla de oro:

$$Af'(k_{GR}) = n + \delta,$$

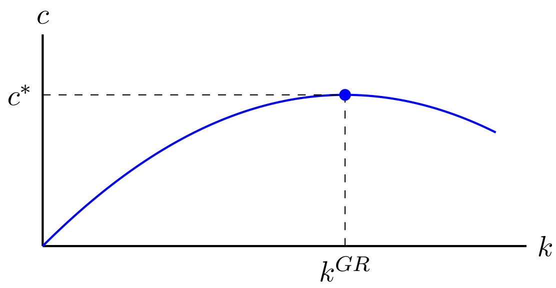
donde k_{GR} representa el nivel de capital por trabajador que maximiza el consumo, también conocido como el *stock de capital de la regla de oro*. Este máximo es factible siempre que $f''(k) < 0$, lo cual está garantizado por la condición de segundo orden:

$$\frac{d^2c}{dk^2} = Af''(k_{GR}) < 0.$$

Gráficamente, la relación entre el consumo y el capital en estado estacionario sigue una curva cóncava, alcanzando su valor máximo en el punto en el que se satisface la condición $Af'(k_{GR}) = n + \delta$. También se cumple que $c = 0$ cuando:

$$Af(k) = (n + \delta)k,$$

lo que ocurre en dos puntos: $k = 0$ y un valor $k > 0$ tal que $f(k)/k = (n + \delta)/A$.



Suponga que la función de producción por trabajador es de tipo Cobb-Douglas: $f(k) = k^\alpha$. Encuentre k^{GR} como función de las variables y parámetros exógenos, usando la condición:

$$Af'(k^{GR}) = n + \delta.$$

Ejercicio 8. Considere el modelo de Solow con progreso tecnológico exógeno. La función de producción agregada se define como

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)) = K(t)^\alpha \, [A(t)L(t)]^{1-\alpha},$$

donde $0 < \alpha < 1$, el capital $K(t)$ y el trabajo efectivo $A(t)L(t)$ son los factores productivos. El progreso tecnológico $A(t)$ crece a una tasa constante g, mientras que la población $L(t)$ crece a una tasa constante n:

$$\dot{A}(t) = gA(t), \qquad \dot{L}(t) = nL(t).$$

El ahorro es una fracción constante s del producto, y el capital se deprecia a una tasa constante $\delta > 0$. La ecuación de acumulación de capital es entonces:

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t).$$

1. Exprese el modelo en términos de variables por unidad de trabajo efectivo, definiendo

$$k(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)}, \qquad y(t) = \frac{Y(t)}{A(t)L(t)}.$$

   Muestre que la función de producción por trabajador efectivo se reduce a

$$y(t) = f(k(t)) = k(t)^\alpha.$$

2. Derive la ecuación diferencial que describe la dinámica del capital por trabajador efectivo, es decir, obtenga $\dot{k}(t)$ en función de $k(t)$:

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (n + g + \delta)k(t).$$

3. Interprete económicamente cada término de la ecuación diferencial y explique qué implica el estado estacionario del modelo.

Sistemas de ecuaciones diferenciales

Ejercicio 9. Halle la solución de los siguientes sistemas

1) $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} x$

2) $x' = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x$

3) $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x$

4) $x' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x$

5) $x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x$

6) $x' = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ 16 & -4 \end{pmatrix} x$

Ejercicio 10. Halle la solución de los siguientes sistemas

1) $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) $x' = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$