SOLUCIONES DEL EXAMEN PARCIAL – IOP224 Primer semestre 2025

Profesor: Jorge Chávez   Asistente de docencia: Marcelo Gallardo

Pregunta 1

1. Ciertamente es un subespacio vectorial. Las matrices que forman una base son

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Estas matrices son l.i y generan el subespacio. Por ende, la dimensión es 3. De manera general, es fácil ver que

$$\dim(\mathcal{S}) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Sea $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}$. Calculamos autovalores con el polinomio característico:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda - 7 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm 2\sqrt{2}.$$

Luego

$$A = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix}1+2\sqrt{2} & 0\\ 0 & 1-2\sqrt{2}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Así,

$$A^{100} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix}(1+2\sqrt{2})^{100} & 0\\ 0 & (1-2\sqrt{2})^{100}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

3. $Q(x) > 0$ si y solo si su matriz asociada

$$M = \begin{bmatrix}a_1 & a_3\\ a_3 & a_2\end{bmatrix}$$

es definida positiva, es decir:

$$a_1 > 0, \quad \det(M) = a_1 a_2 - a_3^2 > 0.$$

4. Es fácil notar que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2.$$

Por ende, si $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_{||\cdot||_1}(\mathbf{a}, r)$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i|\right) \leq r$$

se sigue que $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_{||\cdot||_2}(\mathbf{a}, r)$. Finalmente, si $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_{||\cdot||_2}(\mathbf{a}, r)$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2\right)^{1/2} \leq r.$$

Como $||\mathbf{x} - \mathbf{a}||_\infty = |x_{i_0} - a_{i_0}| = \sqrt{(x_{i_0} - a_{i_0})^2}$ para cierto i_0, entonces $\mathbf{x} \in \mathbb{B}_{||\cdot||_\infty}(\mathbf{a}, r)$.

5. $\{(x,y) : y \leq \ln x \ : \ x \in [1,5]\}$ define un conjunto convexo ya que ln es cóncava:

$$\begin{aligned} y_1 &\leq \ln x_1 \\ y_2 &\leq x_2 \\ \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 &\leq \lambda \ln x_1 + (1-\lambda) \ln x_2 \\ &\leq \ln(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2). \end{aligned}$$

La intersección con el conjunto convexo $C = [1,3] \times [0,1]$ (un rectángulo) preserva la convexidad.

6. Los conjuntos A y B no pueden ser separados estrictamente, ya que su clausura se interseca en el eje $x = 0$ (ver ejemplo del curso). Sin embargo, sí pueden ser separados (no estrictamente) por el hiperplano $x = 0$ (la vertical).

7. El conjunto X es equivalente (el mismo conjunto) a $\{\sum_{i=1}^n \alpha_i \ln x_i > 0\}$, el cual es claramente convexo.

8. Notar que:

$$\min_i \left\{ \frac{tx_i + (1-t)y_i}{a_i} \right\} = \frac{tx_{i_0} + (1-t)y_{i_0}}{a_{i_0}} \geq t \min_i \frac{x_i}{a_i} + (1-t) \min_j \frac{y_j}{a_j}.$$

Aplicando esto a cada entrada se concluye.

9. La definición de tecnología se encuentra en la Sección 5.3 del libro así como la de cono convexo **(se deja como lectura)**. La vuelta del enunciado es por definición: un cono convexo C es un conjunto aditivo tal que $\alpha \mathbf{y} \in C$ para todo $\alpha \geq 0$ e $\mathbf{y} \in C$. Para la ida, sean $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in Y$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Basta probar que $\alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{y}' \in Y$. Sea k un entero tal que $k > \max\{\alpha, \beta\}$. Por la aditividad, $k\mathbf{y}, k\mathbf{y}' \in Y$. Como $\alpha/k, \beta/k < 1$, entonces, por los rendimientos a escala decrecientes, $(\alpha/k)(k\mathbf{y}), (\beta/k)(k\mathbf{y}') \in Y$. Finalmente, usando nuevamente que Y es aditiva, concluimos que

$$(\alpha/k)(k\mathbf{y}) + (\beta/k)(k\mathbf{y}') = \alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{y}' \in Y.$$

10. Dado $\mathbf{y} \in Y$ y $\mathbf{y}' \leq \mathbf{y}$, podemos siempre escribir $\mathbf{y}' = \mathbf{y} + \mathbf{v}$ con $\mathbf{v} \in -\mathbb{R}^L_+$. Bastará probar entonces que para todo $\mathbf{v} \in -\mathbb{R}^L_+$, $\mathbf{y} + \mathbf{v} \in Y$. Sea $\mathbf{v} \in -\mathbb{R}^L_+$. Ciertamente para todo $n \in \mathbb{N}$, $n\mathbf{v} \in -\mathbb{R}^L_+ \subset Y$. Luego, como Y es convexa,

$$\underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbf{y} + \frac{1}{n} n\mathbf{v}}_{\mathbf{x}_n} \in Y.$$

Finalmente, usando el hecho que Y es cerrado, $\lim_n \mathbf{x}_n = \mathbf{y} + \mathbf{v} \in Y$.

11. Sea $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$. Entonces, la recta $y = ax + b$ separa a los dos conjuntos si se cumple que $b > 1$ y $2a + b < 2$. Sea $a \leq 0$. En este caso, hay separación si se cumple que $a + b > 1$ y $2a + b < 2$. Sea finalmente $a \geq 2$. En este caso, hay separación si se cumple que $a + b < 0$ y $a + 2b > 2$.

12. Sean $x_1, x_2 \in A$, $\lambda \in [0,1]$, entonces $T(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda T(x_1) + (1-\lambda) T(x_2) \in T(A)$.

Pregunta 2

1. Queremos probar que $F \neq \emptyset$ si y solo si $G = \emptyset$.

   - ($\Rightarrow$) Si existe $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, entonces para todo $\mathbf{y}$ tal que $\mathbf{y}A \geq \mathbf{0}$, se tiene:

   $$\mathbf{y}^T \mathbf{b} = \mathbf{y}^T A \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \Rightarrow \mathbf{y}^T \mathbf{b} \not< 0 \Rightarrow \mathbf{y} \notin G.$$

   - ($\Leftarrow$) Si $F = \emptyset$, entonces por el Teorema de Separación Estricta aplicado a los conjuntos disjuntos convexos $\{\mathbf{b}\}$ y $\{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, existe un hiperplano separador $\mathcal{H}(\mathbf{y}, \alpha = 0)$ tal que:

   $$\mathbf{y}^T \mathbf{b} < \alpha = 0 \leq \mathbf{y}^T A \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Como $A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i$, donde $\mathbf{v}_i$ es la i-ésima columna de A, se tiene:

$$\mathbf{y}^T A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{y}^T \mathbf{v}_i.$$

Para que esta suma sea mayor o igual a α para todo $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, es necesario que:

$$\mathbf{y}^T \mathbf{v}_i \geq 0 \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, n \implies \mathbf{y}^T A \geq \mathbf{0}.$$

Por tanto, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ cumple:

$$\mathbf{y}^T A \geq \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbf{y}^T \mathbf{b} < 0,$$

es decir, $\mathbf{y} \in G$. Esto prueba que si $F = \emptyset$, entonces $G \neq \emptyset$.

2. Sea $C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ la bola unitaria. Queremos demostrar que la proyección de un punto $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sobre C está dada por:

$$\mathrm{Proy}_C(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}}{\text{máx}\{1, \|\mathbf{v}\|\}}.$$

Si $\|\mathbf{v}\| \leq 1$, entonces claramente $\mathbf{v} \in C$, y por definición:

$$\mathrm{Proy}_C(\mathbf{v}) = \mathbf{v}.$$

Supongamos ahora que $\|\mathbf{v}\| > 1$. Queremos mostrar que para todo $\mathbf{a} \in C$ se cumple:

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{a}\|^2 \geq \left\|\left\|\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}}{\text{máx}\{1, \|\mathbf{v}\|\}}\right\|\right\|^2 = \left\|\left\|\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right\|\right\|^2.$$

Observe que el lado derecho se puede reescribir como:

$$\left\|\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right\|^2 = (\|\mathbf{v}\| - 1)^2.$$

Expandamos el lado izquierdo:

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{a}\rangle + \|\mathbf{a}\|^2.$$

Queremos entonces probar que:

$$\|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{a}\rangle + \|\mathbf{a}\|^2 \geq \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{v}\| + 1.$$

Restando $\|\mathbf{v}\|^2$ de ambos lados:

$$-2\langle \mathbf{v}, \mathbf{a}\rangle + \|\mathbf{a}\|^2 \geq -2\|\mathbf{v}\| + 1,$$

lo cual equivale a:

$$\|\mathbf{a}\|^2 - 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{a}\rangle + 2\|\mathbf{v}\| - 1 \geq 0.$$

Usamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{a}\rangle \leq \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{a}\|$, y como $\|\mathbf{a}\| \leq 1$, se sigue que:

$$\|\mathbf{a}\|^2 - 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{a}\rangle + 2\|\mathbf{v}\| - 1 \geq \|\mathbf{a}\|^2 - 2\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{a}\| + 2\|\mathbf{v}\| - 1.$$

Agrupando:

$$= \|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|(1 - \|\mathbf{a}\|) - 1.$$

Finalmente, como $0 \leq \|\mathbf{a}\| \leq 1$, se tiene:

$$\|\mathbf{a}\|^2 + 2(1 - \|\mathbf{a}\|) - 1 = (\|\mathbf{a}\| - 1)^2 \geq 0.$$

Por tanto, se cumple:

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{a}\|^2 \geq (\|\mathbf{v}\| - 1)^2 = \left\|\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right\|^2,$$

y concluimos que el punto más cercano de C a $\mathbf{v}$ es $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$. Es decir,

$$\mathrm{Proy}_C(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{v}}{\text{máx}\{1, \|\mathbf{v}\|\}}.$$