

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES

MAT291 MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS IV

Mock Test 2
Segundo semestre 2025

Indicaciones generales:

- Tiempo sugerido: 120 minutos y el Bonus 15 minutos.
- Temas: funciones convexas y cóncavas, cuasiconvexas y cuasicóncavas, funciones de utilidad, optimización estática con y sin restricciones.

Puntaje total: 20 puntos.

Pregunta 1 (Convexidad y concavidad)

1.1) Sean $f : D_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : D_2 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones convexas. Pruebe que

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad h : D_1 \cap D_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

es convexa.

Solución: Sea $\theta \in [0, 1]$ y $x, y \in D_1 \cap D_2$

$$\begin{aligned} h(\theta x + (1 - \theta)y) &= \max\{f(\theta x + (1 - \theta)y), g(\theta x + (1 - \theta)y)\} \\ &\leq \max\{\theta f(x) + (1 - \theta)f(y), \theta g(x) + (1 - \theta)g(y)\} \\ &\leq \max\{\theta f(x), \theta g(x)\} + \max\{(1 - \theta)f(y), (1 - \theta)g(y)\} \\ &= \theta \max\{f(x), g(x)\} + (1 - \theta) \max\{f(y), g(y)\} \\ &= \theta h(x) + (1 - \theta)h(y). \end{aligned}$$

1.2) Considere la siguiente función con parámetros α y β :

$$f(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + 4xy - 10.$$

determine los valores de α y β para que la función sea convexa. ¿Qué puede decir de la convexidad (concavidad) de la función en el caso de que $\alpha = -3$ y $\beta = -5$?

Solución: Primero,

$$H = \begin{pmatrix} 2\alpha & 4 \\ 4 & 2\beta \end{pmatrix}$$

La matriz Hessiana debe ser positivo semidefinida; es decir, sus menores arbitrarios deben ser todos mayores o iguales a cero. Es decir:

$$m_1^2 = 2\alpha \geq 0 \rightarrow \alpha \geq 0$$

$$m_1^1 = 2\beta \geq 0 \rightarrow \beta \geq 0$$

$$m_2 = |H| = (2\alpha)(2\beta) - (4)(4) = 4\alpha\beta - 16 = 4(\alpha\beta - 4) \geq 0 \rightarrow \alpha\beta \geq 4$$

Por lo tanto, se debe cumplir $\alpha \geq 0 \wedge \beta \geq 0 \wedge \alpha\beta \geq 4$. para que la función sea convexa. En el caso $\alpha = -3$ y $\beta = -5$, la matriz hessiana se torna

$$H = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$M_1 = -6 < 0$$

$$M_2 = |H| = (-6)(-10) - (4)(4) = 44 > 0$$

Por ende, $H < 0$, i.e., la función es estrictamente cóncava.

Pregunta 2.1 (Cuasiconvexidad y cuasiconcavidad)

2.11) Considere la función de utilidad CES

$$u(x) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho},$$

donde $\rho \in (0, 1)$. Pruebe que $u(x)$ es cuasicóncava.

Solución: Si $0 < \rho < 1$, entonces tanto x_1^ρ como x_2^ρ son funciones cóncavas. Luego, $(x_1^\rho + x_2^\rho)$ también es cóncava por ser una combinación lineal de funciones cóncavas, y por tanto cuasicóncava. Finalmente, dado que $g(z) = z^{\frac{1}{\rho}}$ es una función creciente, se sigue que toda función CES es una transformación creciente de una función cuasicóncava, y por tanto cuasicóncava.

Pregunta 2.2 (Cuasiconvexidad y cuasiconcavidad)

Determine si las siguientes funciones son cuasicóncavas (estrictas) o cuasiconvexas (estrictas) en el dominio indicado.

2.2.1) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2, \quad x, y > 0$

2.2.2) $f(x, y) = \alpha \ln x + \beta \ln y, \quad \alpha, \beta > 0, \quad x, y > 1$

Solución: Si una función es estrictamente convexa, entonces, en particular, es estrictamente cuasiconvexa. Por ende, como $f(x, y)$ es estrictamente convexa (suma de dos funciones estrictamente convexas, hessiana ...), en particular, es estrictamente cuasiconvexa. Esto es análogo para la función $f(x, y) = \alpha \ln x + \beta \ln y, \quad \alpha, \beta > 0, \quad x, y > 1$, salvo que acá, más bien, f es estrictamente cóncava, y por ende, estrictamente cuasicóncava. Una manera más operativa de llegar al mismo resultado es calculando los **determinantes hessianos ampliados**

$$M_r(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} 0 & f_1(\mathbf{x}) & \cdots & f_r(\mathbf{x}) \\ f_1(\mathbf{x}) & f'_{11}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{1r}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_r(\mathbf{x}) & f_{r1}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{rr}(\mathbf{x}) \end{vmatrix}.$$

Para la primera función, queda

$$M_1(x) \begin{vmatrix} 0 & 2x \\ 2x & 2 \end{vmatrix}.$$

y

$$M_2(x) \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2 & 0 \\ 2y & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Computamos $M_1(x) = -4x^2 < 0$ (pues $x > 0$), y $M_2(x) = -8x^2 - 8y^2 < 0$. Análogamente, para la segunda función, queda

$$(-1)M_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\alpha}{x} \\ \frac{\alpha}{x} & \frac{-\alpha}{x^2} \end{vmatrix} = (-1) \left(-\frac{\alpha^2}{x^2} \right) = \frac{\alpha^2}{x^2} > 0$$

y

$$(-1)^2 M_2(x) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\alpha}{x} & \frac{\beta}{y} \\ \frac{\alpha}{x} & \frac{-\alpha}{x^2} & 0 \\ \frac{\beta}{y} & 0 & \frac{-\beta}{y^2} \end{vmatrix} = \frac{\alpha^2 \beta + \alpha \beta^2}{x^2 y^2} > 0.$$

Pregunta 3:

a) De acuerdo al valor del parámetro $a \neq 0$, analice si la función

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2)$$

tiene puntos óptimos.

b) Considere una firma cuya función de ingreso es

$$R(x, y) = x(100 - 6x) + y(192 - 4y),$$

donde x e y representan el número de artículos vendidos. Si la función de costo es

$$C(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 4xy - 8x + 20,$$

determine el beneficio máximo.

Solución:

a) El gradiente de f viene dado por

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 4x(x^2 + y^2 - a^2) \\ 4y(x^2 + y^2 + a^2) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, los puntos críticos son $(0, 0)$, $(-a, 0)$, $(a, 0)$. Ahora calculamos la hessiana de f :

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 4(x^2 + y^2) + 8x^2 - 4a^2 & 8xy \\ 8xy & 4(x^2 + y^2) + 8y^2 + 4a^2 \end{bmatrix}.$$

Evaluable en los puntos estacionario:

$$Hf(0, 0) = \begin{bmatrix} -4a^2 & 0 \\ 0 & 4a^2 \end{bmatrix} \implies |Hf(0, 0)| = -16a^4 < 0 \implies \text{silla}$$

$$Hf(-a, 0) = H(a, 0) = \begin{bmatrix} 8a^2 & 0 \\ 0 & 8a^2 \end{bmatrix} \implies \text{mínimo local.}$$

b) El beneficio es

$$B(x, y) = R(x, y) - C(x, y) = x(100 - 6x) + y(192 - 4y) - (2x^2 + 2y^2 + 4xy - 8x + 20)$$

cuyo gradiente es

$$\nabla B(x, y) = (108 - 16x - 4y, 192 - 4x - 12y)$$

Obtenemos el punto crítico $(3, 15)$. La matriz Hessiana es

$$H_B(x, y) = \begin{bmatrix} -16 & -4 \\ -4 & -12 \end{bmatrix}$$

La cual es definida negativa en \mathbb{R}^2 . Por tanto, la función es cóncava en \mathbb{R}^2 y el punto $(3, 15)$ es un máximo global.

Bonus. Aplicación de la cuasiconcavidad al problema de maximización de la utilidad.

Considere el siguiente problema de optimización con parámetros (note que corresponde al problema maximización de la utilidad)

$$\mathcal{P}_u : \begin{cases} \max & u(\mathbf{x}) \\ \text{s. a :} & \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq I \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Asuma que $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{++}^n$, $I > 0$ y que $u(\cdot)$ es continua y tal que $\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{x}_1 \implies u(\mathbf{x}_2) > u(\mathbf{x}_1)$. Sea $\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)$ una solución al problema. Demuestre que:

1. Si u es cuasicóncava, entonces el conjunto de soluciones al problema \mathcal{P}_u es convexo.
2. Si u es estrictamente cuasicóncava, entonces el conjunto de soluciones al problema \mathcal{P}_u es unitario (la solución es única).

Solución:

Supongamos que $u(\cdot)$ es cuasicóncava y que tenemos dos soluciones \mathbf{x}^* y \mathbf{x}^{**} con $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{x}^{**}$. El objetivo es probar que $\theta\mathbf{x}^* + (1-\theta)\mathbf{x}^{**}$ es solución para todo $\theta \in [0, 1]$. Los casos $\theta = 0, 1$ son triviales. Tomemos entonces $\theta \in (0, 1)$. Por un lado,

$$\mathbf{p} \cdot [\theta\mathbf{x}^* + (1-\theta)\mathbf{x}^{**}] = \theta\mathbf{p}\mathbf{x}^* + (1-\theta)\mathbf{p}\mathbf{x}^{**} \leq \theta I + (1-\theta)I = I.$$

Finalmente, por la cuasiconcavidad de $u(\cdot)$

$$u(\theta\mathbf{x}^* + (1-\theta)\mathbf{x}^{**}) \geq \min\{u(\mathbf{x}^*), u(\mathbf{x}^{**})\} = u^*.$$

Ahora bien, si $u(\cdot)$ fuese estrictamente cuasicóncava,

$$u(\theta\mathbf{x}^* + (1-\theta)\mathbf{x}^{**}) > \min\{u(\mathbf{x}^*), u(\mathbf{x}^{**})\} = u^*,$$

lo cual contradice la optimalidad de \mathbf{x}^* y \mathbf{x}^{**} .