PC4 – Solucionario

Ejercicio 1 (Modelo de Solow)**.** Recordemos la ecuación fundamental (EF) del modelo de crecimiento económico de Solow:

$$k' = sf(k) - (n+\delta)k$$

donde s es la tasa de ahorro, n es la tasa de crecimiento poblacional y δ es la tasa de depreciación. Si la función de producción es de tipo Cobb-Douglas, esto es:

$$Y = F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}.$$

Resuelva las siguientes preguntas:

1.1) ¿Como es la EF en este caso?

1.2) Encuentre k^*.

1.3) Pruebe que si s aumenta, también aumenta la producción per cápita; y que si n aumenta, entonces decrece la producción per cápita.

1.4) En la pregunta anterior se le ha pedido que pruebe que si la tasa de ahorro crece, entonces también aumenta la producción per cápita. Explique por qué no se puede usar esta política por siempre para aumentar significativamente el crecimiento de la economía en el largo plazo.

1.5) Un planificador central de la economía buscará una tasa de ahorro que genere el mayor nivel de consumo per cápita. Pruebe que el valor de estado estacionario k^* que conlleva el mayor nivel de consumo per cápita viene dado por

$$k^* = \left(\frac{\alpha A}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Solución.

1.1) La producción per capita viene dada por

$$f(k) = \frac{Y}{L} = \frac{F(K,L)}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = AK^{\alpha}L^{-\alpha} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = Ak^{\alpha}$$

por lo que

$$k' = sAk^{\alpha} - (n+\delta)k.$$

1.2) En el equilibrio se cumple que

$$k' = sAk^{\alpha} - (n+\delta)k = 0$$

por lo que

$$k^* = \left(\frac{sA}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

1.3) La producción per capita viene dada por

$$y^* = f(k^*) = A(k^*)^{\alpha} = \left[\left(\frac{sA}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]^{\alpha} = \left(\frac{sA}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

que es creciente en α y decreciente en n.

1.4) Como s es una tasa de ahorro, no puede exceder 1. De hecho, incluso que alcance 1 implicaría que no hay consumo pues todo el ingreso se ahorra, cosa que no resulta posible. Por ello, $s < 1$ y, entonces

$$y^* = \left(\frac{sA}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} < \left(\frac{A}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Podemos ver entonces que la producción per cápita esta acotada con respecto al rango de s.

1.5) El consumo per cápita viene dado por

$$c(k) = (1-s)f(k) = f(k) - sf(k) = f(k) - (n+\delta)k.$$

La CPO provee

$$f'(k) = n+\delta.$$

O sea,

$$\alpha A k^{\alpha-1} = n+\delta \implies k^{golden\ rule} = \left(\frac{\alpha A}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Para verificar que se trata de un máximo, simplemente notar que

$$c''(k) = f''(k) < 0.$$

Alternativamente, el consumo per cápita viene dado por

$$c^*(k) = (1-s)f(k^*) = (1-s)\left(\frac{sA}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \left(\frac{A}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(s^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - s^{\frac{\alpha}{1-\alpha}+1}\right)$$

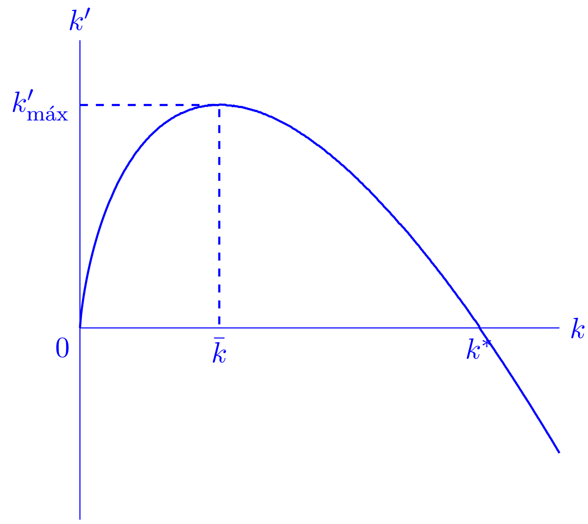
$$= \left(\frac{A}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (s^\alpha - s)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Es sencillo notar que $c(s)$ es transformación monótona de $g(s) = s^\alpha - s$ porque $\left(\frac{A}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} > 0$ y $\frac{1}{1-\alpha} > 0$. Entonces, $\arg\max(c = \arg\max g)$. Como g es suma de cóncavas, entonces es cóncava y, si cuenta con un único punto estacionario, este es máximo. Evaluamos:

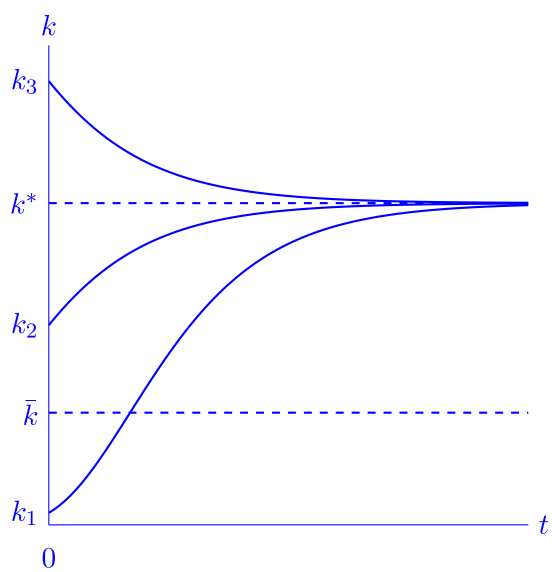
$$g'(s) = \alpha s^{a-1} - 1 = 0 \implies s = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Ejercicio 2 (Modelo de Solow)**.** Para distintos valores del capital inicial y, asumiendo los supuestos generales del modelo de Solow, grafique en el plano k versus t las correspondientes trayectorias del modelo para el capital.

Solución. Recordemos que, para f que satisface las condiciones de Inada, el diagrama de fases del Modelo de Solow es de la forma



Podemos ver que el equilibrio k^* es estable y, ademas, que las trayectorias son convexas entre 1 y $\bar{k}$ (porque en este tramo, k' es creciente) y cóncavas entre $\bar{k}$ y k^* (porque en este tramos, k' es decreciente). Por encima de k^*, las trayectorias convergen asintóticamente, siendo convexas en su completitud. Considerando tres condiciones iniciales k_1, k_2 y k_3 tales que $0 < k_1 < \bar{k} < k_2 < k^* < k_3$, tenemos



Nota. Caso Cobb–Douglas. Para $f(k) = Ak^\alpha$ con $0 < \alpha < 1$, la EDO

$$k' = sAk^\alpha - (n + \delta)k$$

se linealiza con el cambio $u(t) = k(t)^{1-\alpha}$. Como

$$\dot{u} = (1-\alpha)k^{-\alpha}\dot{k} = (1-\alpha)\big[sA - (n+\delta)k^{1-\alpha}\big] = (1-\alpha)sA - (1-\alpha)(n+\delta)u,$$

obtenemos una EDO lineal:

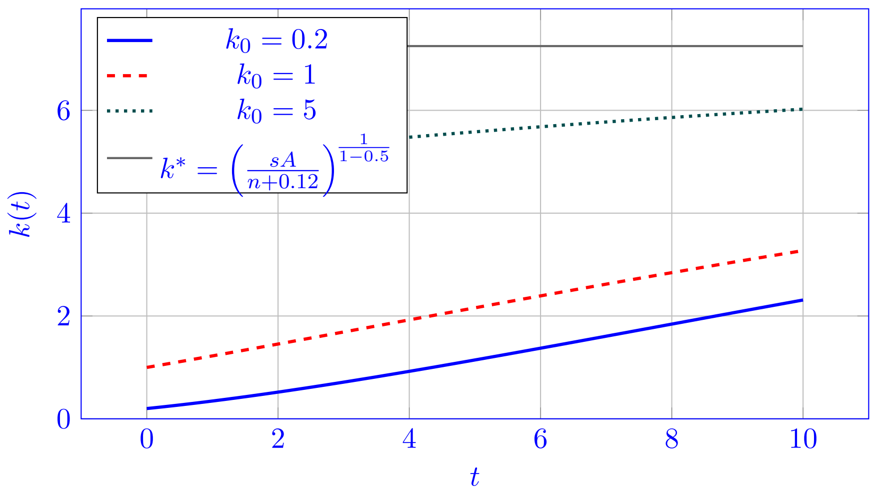
$$\dot{u} + (1-\alpha)(n+\delta)\,u = (1-\alpha)sA.$$

Su solución es

$$u(t) = u^* + \big(u(0) - u^*\big)e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t}, \qquad u^* = \frac{sA}{n+\delta}.$$

Volviendo a k:

$$k(t) = \Big[u(t)\Big]^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{sA}{n+\delta} + \Big(k(0)^{1-\alpha} - \frac{sA}{n+\delta}\Big)e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$



Ejercicio 3 (Ajuste entre empleo y salario real con fricción)**.** Supongamos una economía donde el nivel de empleo $u(t)$ (proporción de trabajadores empleados) y el salario real $w(t)$ se ajustan dinámicamente de acuerdo con

$$\begin{cases} u' = u(1-u) - \gamma w, \\ w' = \eta(u - u^*), \end{cases}$$

donde γ y η son parámetros positivos.

La primera ecuación indica que el empleo crece según una curva logística $u(1-u)$, pero se reduce cuando el salario real w es demasiado alto (encarece la contratación). La segunda ecuación refleja que el salario real aumenta si el empleo está por encima del nivel de equilibrio u^* y disminuye si está por debajo: un mecanismo de negociación entre sindicatos y empresas.

Asumiendo que $u^* = 0.7$, $\eta = 1.0$ y $\gamma = 2.0$, resuelva lo siguiente:

3.1) ¿Se forman ciclos en la economía?

3.2) ¿Qué pasa con el empleo y el salario real en el largo plazo?

3.3) Si una economía parte con un empleo muy bajo y un salario real por encima de su valor de equilibrio, ¿sube o baja el empleo?

3.4) ¿En qué zona del plano de fases crecen el empleo y los salarios?

3.5) ¿En qué zona del plano de fases decrece el salario?

Solución. Consideremos el sistema (con $\gamma, \eta > 0$, $u^* = 0.7$, $\eta = 1$, $\gamma = 2$):

$$\begin{cases} u' &= u(1-u) - \gamma\, w, \\ w' &= \eta\,(u - u^*). \end{cases}$$

Equilibrio único. De la segunda ecuación, en estado estacionario $u = u^*$. Luego, de la primera ecuación:

$$0 \;=\; u^*(1-u^*) - \gamma\, w^* \quad\Longrightarrow\quad w^* \;=\; \frac{u^*(1-u^*)}{\gamma}.$$

Con los valores dados: $u^* = 0.7$, $\gamma = 2$, $w^* = \frac{0.7\cdot 0.3}{2} = 0.105$. Luego, el único equilibrio es $(u^*, w^*) = (0.7,\, 0.105)$.

Linealización y estabilidad. La Jacobiana es

$$J(u,w) = \begin{pmatrix} \partial_u u' & \partial_w u' \\ \partial_u w' & \partial_w w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2u & -\gamma \\ \eta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En el equilibrio (u^*, w^*) se tiene

$$\tau \;=\; \operatorname{tr} J \;=\; 1-2u^* \;=\; 1-1.4 \;=\; -0.4 \;<0, \qquad \Delta \;=\; \det J \;=\; \gamma\eta \;=\; 2 \;>\; 0.$$

El discriminante es $\tau^2 - 4\Delta = 0.16 - 8 = -7.84 < 0$, por lo que los autovalores son complejos con parte real negativa $-\frac{1}{5} \pm \frac{7}{5}i$: *foco (espiral) estable.* En particular, las trayectorias *no pueden* alejarse sostenidamente del equilibrio ni sostener oscilaciones cerradas estables alrededor de él: convergen en espiral hacia (u^*, w^*).

3.1) ¿Se forman ciclos? No. La linealización muestra un *foco estable*; no hay ciclos límite (órbitas cerradas) alrededor del equilibrio.[1]

3.2) Largo plazo. Para toda condición inicial razonable ($u(0) \in (0,1)$, $w(0)$ finito), la solución converge a $(u^*, w^*) = (0.7, 0.105)$; el ajuste es oscilatorio amortiguado (espiral estable).

3.3) Si $u(0)$ muy bajo y $w(0) > w^*$. Inicialmente,

$$u' \;=\; u(1-u) - \gamma w$$

puede ser *negativo* (salario alto encarece contratación) y

$$w' = \eta(u - u^*) < 0$$

porque $u(0) < u^*$. Entonces, *bajan los salarios* al inicio; con el tiempo, al bajar w, el término $u(1-u) - \gamma w$ se vuelve positivo y el empleo comienza a subir. En suma: *el salario cae al inicio y luego el empleo repunta*, convergiendo ambos a (u^*, w^*).

3.4) Zona donde crecen empleo y salario.

$$u' > 0 \iff u(1-u) > \gamma w, \qquad w' > 0 \iff u > u^*.$$

Por tanto, en la región $\left\{(u,w) : u > u^*,\ w < \frac{u(1-u)}{\gamma}\right\}$ *crecen ambos.*

3.5) Zona donde decrece el salario.

$$w' < 0 \iff u < u^*.$$

Así, por debajo de u^*, los salarios caen.

Nota: Lectura de "ciclos" vs. "oscilaciones amortiguadas". En el lenguaje de dinámica en el plano, *ciclo límite* significa una órbita cerrada aislada. Aquí las trayectorias *oscilan* pero con amortiguamiento (foco estable), por lo que **no** hay curva cerrada persistente: sólo *oscilaciones transitorias* que se apagan al converger al equilibrio.

[1] Más allá del análisis local, el sistema es plano y suave, con un único equilibrio; el foco estable descarta ciclos estables alrededor y la dinámica numérica estándar confirma convergencia global.

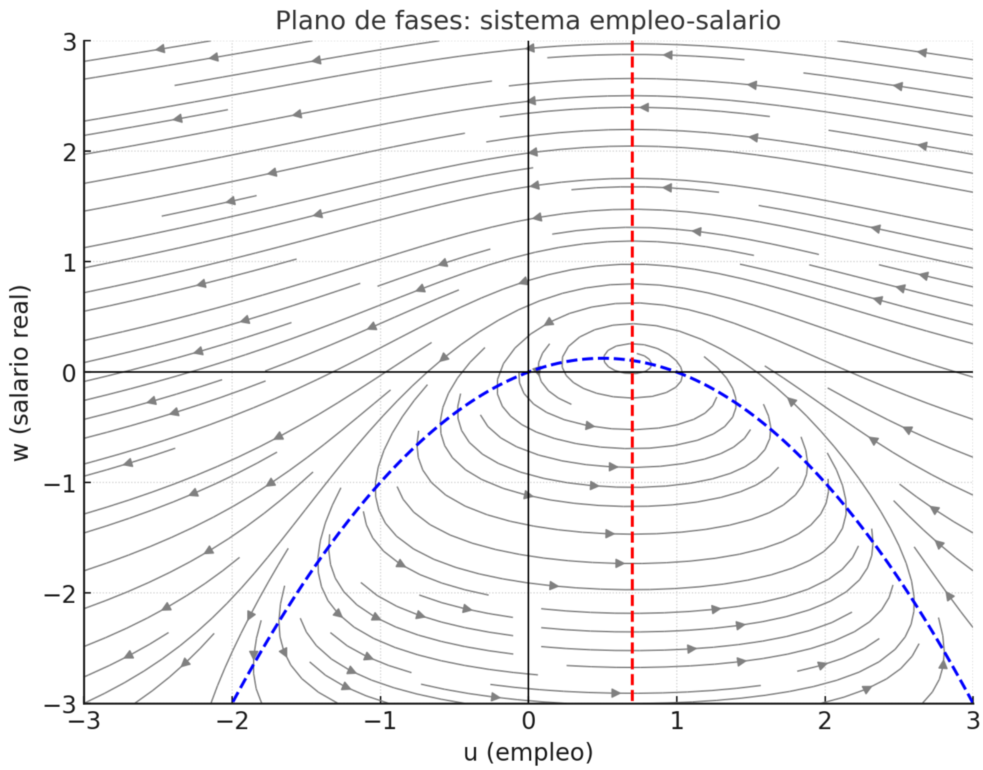


Figura 1: Diagrama de fases.