PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Lista de ejercicios
Primer semestre 2025

Aquellos ejercicios marcados con (∗) o (∗∗) son más retadores para alumnos sin previa exposición a cursos de análisis en $\mathbb{R}^n$ y microeconomía. Todos los ejercicios se pueden resolver aplicando análisis convexo y optimización, sin importar el contexto del problema..

Valores y vectores propios

1. Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$ no singular con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. ¿Cuáles son los valores propios de la matriz A^{-1}? ¿Cuáles son sus vectores propios?

2. Dada la matriz A que se da a continuación, encuentre A^k para todo $k \in \mathbb{N}_0$:
$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Pruebe que si A y B son equivalentes, entonces $|A| = |B|$.

4. Pruebe que si A y B son equivalentes, entonces A^k y B^k también lo son.

5. Considere el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:
$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\delta & 0 \\ \delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$
con $k \in \mathbb{Z}_+$ y $\delta \in (0,1)$. Suponga que x_1 es un insumo y x_2 un output.
   - Interprete el modelo. Identifique qué podrían ser x_1 y x_2.
   - Analice $\lim_{k\to\infty} x_i(k)$ e interprete.

6. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Calcule sus valores propios, vectores propios y obtenga los espacios propios correspondientes. Analice si la matriz es diagonalizable.

7. Considere el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Obtenga un conjunto solución al sistema lineal. Para esto, transforme el sistema: $D\mathbf{y} = \mathbf{c}$ con $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$ y $\mathbf{c} = P^{-1}\mathbf{b}$.

Formas cuadráticas

1. Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, entonces A^TA es una matriz simétrica de orden $n \times n$. Pruebe, además, que A^TA es positivo semidefinida; esto es, todos sus valores propios son no negativos.

2. Sea $A = \text{Hess}(f)(\mathbf{x}_0)$ donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. ¿Bajo qué condiciones sobre f, $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ es una forma cuadrática «en el formato estándar»?

3. Considere que una firma puede escoger entre dos procesos de producción (1 y 2) que le generan los siguientes costos de producción:

$$C_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_2x_3$$
$$C_2(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_3^2.$$

Aquí x_1, x_2 y x_3 son insumos de producción. La firma desea que su costo sea el menor posible para cualquier combinación de insumos (x_1, x_2, x_3). Determine qué proceso de producción escogerá.

4. Clasifique las formas cuadráticas

$$f_1(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 6x_3x_4 + x_4^2.$$

5. ¿Para qué valores de α, la forma cuadrática $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $x_1^2 + \alpha x_2^2 + 8x_2x_3 + \alpha x_3^2$ es definida positiva?

6. En la base canónica de $\mathbb{R}^2$ una forma cuadrática $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está dada por la siguiente expresión

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2.$$

Determine cuál es la expresión de la función f en la base de $\mathbb{R}^2$ formada por los vectores $\mathbf{u} = (1, 1)$ y $\mathbf{v} = (-2, 2)$.

Elementos de topología

1. Pruebe que para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se cumple

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|\mathbf{x}\|_p.$$

2. $(*)$ Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ y $\|\cdot\|$, la norma dada por

$$||A|| = \sup_{\mathbf{x}\in\partial\mathcal{B}(\mathbf{0};1)} ||A\mathbf{x}||.$$

Pruebe que $\rho(A) \leq \|A\|$ (recuerde que $\rho(A)$ es el radio espectral de A).

3. Pruebe que si S es un conjunto abierto no vacío y A es cualquier otro conjunto no vacío, $S + A$ es abierto.

4. Pruebe que el conjunto presupuestario (Walrasiano) es compacto. Interprete.

5. Interprete el uso de las normas $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ y $||\cdot||_{\max}$.

6. Pruebe que $C[0, 1]$ con la norma $||\cdot||_p$, $1 \leq p < \infty$ no es completo.

7. Pruebe que $C[0, 1]$ con la norma $||\cdot||_\infty$ es completo.

8. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ dos puntos fijos y $r_1, r_2 > 0$. Pruebe que

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, r_1) \subset \mathcal{B}(\mathbf{y}, r_2) \Leftrightarrow \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq r_2 - r_1.$$

9. Pruebe que (i) la unión finita y la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, (ii) la intersección finita de conjuntos compactos es un conjunto compacto.

10. Se define un vector unitario como aquel cuya norma es 1. Diga cuáles de los siguientes vectores son unitarios.

- $\mathbf{x} = (1, 0, 2)$, respecto de la norma Euclidiana.
- $\mathbf{x} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, respecto de la norma Euclidiana.
- $\mathbf{x}(t) = t^2 - 4t + 3,\ t \in\ [0, 4]$, respecto de la norma $\|\cdot\|_1$.

11. Pruebe que para las matrices A de orden $m \times n$ y B, de orden $n \times k$, se cumple la siguiente desigualdad para las correspondientes normas inducidas:

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Deduzca de aquí que si A es cuadrada, entonces $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

12. Calcule la distancia entre las funciones $\mathbf{x}(t) = t^3 - 2t + 5$ e $\mathbf{y}(t) = 3t^2 + t + 3,\ t \in [-3, 3]$ en $C([-3, 3], \|\cdot\|_1)$.

Profesor del curso: Jorge Chávez.

Asistente de docencia: Marcelo Gallardo.