

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Primera práctica (tipo a)  
Primer semestre 2025

**Indicaciones generales:**

- Duración: 110 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: con apuntes de clase físicos.
- No está permitido el uso de ningún material o equipo electrónico.
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**

Puntaje total: 20 puntos.

---

Cuestionario:

**Pregunta 1 (2 puntos)**

Dados  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}$ , pruebe que si  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ , entonces  $\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} + a\mathbf{y}\|$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

**Pregunta 2 (4 puntos)**

Analice si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^2$ , **justifique**:

1.  $S_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2^2 \geq 1\}$ .
2.  $S_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 = 3x_2 - 5\}$ .
3.  $S_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$ .
4.  $S_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 9x_1 - 8x_2 = 0\}$ .

**Pregunta 3 (4 puntos)**

Resuelva las siguientes cuestiones:

- Sea  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una transformación lineal, tal que  $T(1, 0) = (1, 3)$  y  $T(0, 1) = (1, 1)$ . Obtenga  $T(2, 5)$ . En general, ¿cómo es  $T(x_1, x_2)$ ?
- Sea  $T$  una transformación lineal. Pruebe que si  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  son ld, entonces  $T\mathbf{x}_1, T\mathbf{x}_2, \dots, T\mathbf{x}_n$  también son ld.

**Pregunta 4 (4 puntos)**

Considere el siguiente sistema de ecuaciones de demanda para **dos** bienes, donde la cantidad demandada de cada bien  $q_i$  no solo depende de su propio precio  $p_i$ , sino también del precio del otro bien  $p_{-i}$ :

$$q_1 = \alpha_{11}p_1 + \alpha_{12}p_2$$

$$q_2 = \alpha_{21}p_1 + \alpha_{22}p_2.$$

- Escriba el sistema en forma matricial.
- Si los bienes son sustitutos y normales, determine el signo de los coeficientes. *Se dice que dos bienes son sustitutos cuando el consumidor puede reemplazar el consumo de uno de ellos por el otro, y viceversa (celulares Apple vs celulares Samsung). Se dice que un bien es normal cuando su demanda decrece con el precio.*

**Pregunta 5 (4 puntos)**

Considere la función  $F : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$  con regla de correspondencia  $F(x_1, x_2, x_3) = Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}$ , donde  $\alpha_i \geq 0$  para todo  $i \in \{1, 2, 3\}$ , y  $A > 0$ . Esta función representa una función de producción llamada Cobb-Douglas.  $x_1$  suele denotar el capital,  $x_2$  el trabajo y  $x_3$  las tierras (terreno).  $A > 0$  es una constante de productividad.

- ¿Bajo qué condiciones sobre los parámetros  $\alpha_i$ ,  $F$  es homogénea de grado 1? Es decir, cumple con la condición de homogeneidad de las transformaciones lineales para  $\lambda \in \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ ?
- ¿Es  $F : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una transformación lineal para  $\alpha_i = 1/3$  y  $A = 2$ ?
- ¿Bajo qué condiciones sobre los parámetros  $\alpha_i$  un incremento en los insumos  $x_i$  genera un incremento en la producción?
- ¿Bajo qué condiciones sobre los parámetros  $\alpha_i$  la tasa de crecimiento de la producción respecto de sus factores (insumos),  $\partial F / \partial x_i$  es cada vez menor?

**Pregunta 6 (2 puntos)**

Claudio habla francés y alemán; César habla inglés, francés e italiano; Eduardo habla inglés, italiano y español; Manuel habla todos los idiomas que los demás hablan excepto el francés; y nadie habla ningún otro idioma. Construya una matriz  $A = (a_{ij})$ , donde las **filas representan a las personas** y las **columnas representan los idiomas**. Defina  $a_{ij} = 1$  si la persona  $i$  habla el idioma  $j$ , y  $a_{ij} = 0$  en caso contrario. Explique el significado de las matrices  $AA^T$  y  $A^TA$ .<sup>1</sup> Use la siguiente convención para el orden de las filas y columnas:

- **Personas (filas):**
  - Claudio
  - César
  - Eduardo
  - Manuel.
- **Idiomas (columnas):**
  - Inglés
  - Francés
  - Alemán
  - Italiano
  - Español.

Profesor del curso: Jorge Chávez.

Asistente de docencia: Marcelo Gallardo.

San Miguel, 11 de abril del 2025.

---

<sup>1</sup>Concretamente, qué representan las entradas de estas matrices.