FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE FINANZAS

PRÁCTICA CALIFICADA 1

Microeconomía Financiera
Semestre 2024-2

Profesor: José D. Gallardo Kú
jgallardo@pucp.edu.pe
Jefes de práctica: Marcelo M. Gallardo Burga y Karen Montoya
marcelo.gallardo@pucp.edu.pe
a20212185@pucp.edu.pe
https://marcelogallardob.github.io/

- Tiene 90 minutos.
- Sea claro y justifique cada paso.
- No se permiten apuntes ni dispositivos electrónicos.
- Puede asumir todos los resultados vistos en clase.

Ejercicio 1. 5 puntos. Considere una economía donde las preferencias y dotaciones de los consumidores son:

a) $u_1(x_{11}, x_{21}) = x_{11}x_{21}$, $u_2(x_{12}, x_{22}) = \min\{x_{12}, x_{22}\}$, $\omega_1 = (1, 2)$ y $\omega_2 = (2, 1)$.

Se le pide que:

- Dibuje la caja de Edgeworth y sitúe la dotación inicial.
- Dibuje algunas curvas de indiferencia para cada consumidor en la caja de Edgeworth (al menos 2 para cada uno).
- Determine el conjunto de asignaciones Pareto eficientes. **Tiene que expresarlo como conjunto.**
- Grafique el conjunto de asignaciones Pareto eficientes.
- Compute el ratio de precios en el (un) equilibrio Walrasiano. Puede dejar su respuesta aproximando 1 decimal.

Las asignaciones P.O. caen en la diagonal de la caja de Edgeworth. Esto es,

$$\mathcal{P} = \{(x_{11}, x_{21}) \in [0,3] \times [0,3] : \; x_{21} = x_{11}\}.$$

Luego, las demandas óptimas son

$$\begin{aligned} x_{11}^* &= \frac{p_1 + 2p_2}{2p_1} \\ x_{21}^* &= \frac{p_1 + 2p_2}{2p_2} \\ x_{12}^* &= \frac{2p_1 + p_2}{p_1 + p_2} \\ x_{22}^* &= \frac{2p_1 + p_2}{p_1 + p_2}. \end{aligned}$$

Para encontrar el EW normalizamos p_1 y aplicamos la Ley de Walras que nos dice que basta equilibrar un mercado:

$$\frac{p_1 + 2p_2}{2p_1} + \frac{2p_1 + p_2}{p_1 + p_2} = 3.$$

Esto es, haciendo $p_1 = 1$

$$\begin{aligned} \frac{1 + 2p_2}{2} + \frac{2 + p_2}{1 + p_2} &= 3. \\ 1 + 2p_2 + \frac{4 + 2p_2}{1 + p_2} &= 6 \\ (1 + 2p_2)(1 + p_2) + 4 + 2p_2 &= 6(1 + p_2) \\ 1 + p_2 + 2p_2 + 2p_2^2 + 4 + 2p_2 &= 6(1 + p_2) \\ 2p_2^2 - p_2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo la cuadrática, obtenemos

$$p_2^* = 1.$$

Ejercicio 2. 4 puntos. Considere una economía Robinson Crusoe donde

$$\begin{aligned} u(\ell_o, C) &= \ell_o^{1/4} c^{3/4} \\ f(\ell_t) &= \sqrt{\ell_t} \\ \overline{\ell} &= 24. \end{aligned}$$

Recuerde que $\ell_t + \ell_o = \overline{\ell}$.

1. Resuelva el problema de forma centralizada.
2. Resuelva el problema desde el enfoque de mercado.

a) El problema centralizado es

$$\max_{0\leq \ell_t \leq 24} (24-\ell_t)^{1/4}(\ell_t)^{3/8}.$$

Aplicando CPO

$$\frac{72-5\ell_t}{8\ell_t^{5/8}(24-\ell_t)^{3/4}}=0.$$

De este modo, $\ell_t^*=72/5$, $\ell_0^*=24-72/5$ y $c^*=\sqrt{72/5}$.

b) Aplicamos ahora el enfoque de mercado:

$$\begin{aligned} &\max \Pi = p\sqrt{\ell_t}-w\ell_t \\ &\text{s.a } 0\leq \ell_t \leq 24. \end{aligned}$$

La solución es interior por lo que, aplicando CPO

$$\ell_t^d=\frac{p^2}{4w^2}.$$

Luego, el problema del consumidor es

$$\begin{aligned} &\max\ \ell_o^{1/4}c^{3/4} \\ &\text{s. a. } pc+w\ell_o \leq 24w+\Pi^* \\ &\quad c,\ell_o \geq 0, \end{aligned}$$

donde $\Pi^*=\frac{p^2}{4w}$. Entonces, dado que la utilidad es tipo Cobb-Douglas, rápidamente concluimos que

$$\begin{aligned} \ell_o^d &= \frac{1}{4}\frac{24w+p^2/4w}{w} \\ c_o^d &= \frac{3}{4}\frac{24w+p^2/4w}{p}. \end{aligned}$$

Finalmente, haciendo $\ell_o^d+\ell_t^d=24$, y normalizando $w=1$, obtenemos

$$p^*=12\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Reemplazando en las demandas, obtenemos el mismo resultado que en el enfoque centralizado.

Ejercicio 3. 3 puntos. Se tiene una economía con dos agentes, Alice y Bob, cuyas funciones de utilidad son las siguientes:

$$u_A(x_A^1,x_A^2)=x_A^1,$$

$$u_B(x_B^1,x_B^2)=x_B^2.$$

Se sabe que $\omega_A+\omega_B=(\omega_A^1,\omega_A^2)+(\omega_B^1,\omega_B^2)=(3,3)$, es decir, la dotación total de la economía consta de 3 unidades de x^1 y 3 unidades de x^2.

1. ¿Es la asignación dada por $\omega_A = (1,2)$ y $\omega_B = (2,1)$ Pareto eficiente? ¿Por qué? Justifique su respuesta.
2. ¿Es la asignación dada por $\omega_A = (3,3)$ y $\omega_B = (0,0)$ Pareto eficiente? ¿Por qué? Justifique su respuesta.
3. Considere la asignación inicial $\omega_A = (0,3)$ y $\omega_B = (3,0)$, que no es Pareto eficiente. Tomando $p_2 = 1$, determine p_1 tal que se pueda llegar a una asignación Pareto eficiente bajo equilibrio competitivo.

a) La asignación no es Pareto eficientes pues es posible mejorar la situación de al menos un agente sin empeorar al otro. En particular, si Alice intercambia una unidad de x_2 con Bob, ambos mejoran.

b) Lo mismo que en (a). Alice puede darle todo del bien x_2 a Bob sin bajar su utilidad, mientras que la de Bob aumenta.

c) La mejor asignación es $\{(3,0),(0,3)\}$. Para llegar a ello, $p_1 = p_2 = 1$. Esto se deduce de

$$p_2\omega_2^A = p_1\omega_1^B.$$

Ejercicio 4. 1 punto. Encuentre las demandas óptimas en una economía de intercambio puro con L bienes de consumo y N consumidores, donde cada consumidor $k = 1, \ldots, N$ tiene preferencias representadas por

$$u_k(x_k) = \prod_{\ell=1}^{L} x_{\ell k}^{\alpha_{\ell k}},$$

$\sum_{\ell=1}^{L} \alpha_{\ell k} = 1,\ \alpha_{\ell k} \in (0,1)$, y dotaciones $\omega_k > 0$. **No busque encontrar el equilibrio Walrasiano solo encuentre las demandas óptimas.**

Solución: simplemente

$$x_{\ell k} = \frac{\alpha_{\ell k}(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\omega}_k)}{p_\ell}.$$

Formlamente, esto se deriva de la siguiente manera. Como las Coob-Douglas satisfacen Inada, la solución es interior (condiciones de Inada)

$$L(x_k, \lambda) = \prod_{\ell=1}^{L} x_{\ell k}^{\alpha_{\ell k}} + \lambda \left[\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell(\omega_{\ell k} - x_{\ell k})\right].$$

Dado que las transformaciones estrictamente crecientes no afectan la utilidad (las funciones de utilidad representan una relación de preferencias, que al final de cuentas, es una relación de orden), poemos sacarle $\ln(\cdot)$ a $u(\cdot)$ para simplificar las operaciones. De este modo, nos queda

$$L(x_k, \lambda) = \sum_{\ell=1}^{L} \alpha_{\ell k} \ln(x_{\ell k}) + \lambda \left[\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell(\omega_{\ell k} - x_{\ell k})\right].$$

Aplicando CPO

$$\frac{\alpha_{\ell k}}{x_{\ell k}} - \lambda p_\ell = 0,\ \forall\ \ell.$$

Luego,

$$\alpha_{\ell k} = \lambda p_\ell x_{\ell k}.$$

Sumando (aporovechanod que la suma de los coeficientes da 1)

$$\underbrace{\sum_{\ell=1}^{L} \alpha_{\ell k}}_{=1} = \sum_{\ell=1}^{L} \lambda p_\ell x_{\ell k}.$$

De este modo, como

$$\sum_{\ell=1}^{L} p_{\ell k} x_{\ell k} = \sum_{\ell=1}^{L} p_{\ell k} \omega_{\ell k}$$

se deduce que

$$\lambda = \frac{1}{\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell \omega_{\ell k}}$$

y por ende,

$$x_{\ell k} = \frac{\alpha_{\ell k} \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell \omega_{\ell k}}{p_\ell}.$$

1 Tarea

Ejercicio 5. Considere una economía de Robinson Crusoe donde

$$u(\ell_o, c) = \ell_o c$$
$$f(\ell_t) = \ell_t, \ \bar{\ell} = 24.$$

ℓ_t denota las horas trabajadas y ℓ_0 las horas de ocio.

1. Resuelva el problema de forma centralizada.

2. Resuelva el problema desde el enfoque de mercado.

Nota: va a tener que analizar 3 casos que vienen dados por la relación entre el salario w y el precio del bien de consumo p.

El problema centralizado es

$$\max_{0 \leq \ell_o \leq 24} \{\ell_o(24 - \ell_0)\}.$$

La CPO provee

$$24 - \ell_o = 0 \implies \ell_o^* = 12.$$

De este modo, $\ell_t^* = 12 = c^*$.

El problema de mercado se resuelve empezando por el problema de la firma

$$\max_{0 \leq \ell_t 24} \underbrace{pf(\ell_t) - w\ell_t}_{=(p-w)\ell_t}.$$

Si $p > w$, la firma demanda $\ell_t^* = 24$, pero esto no es definitivamente óptimo. En caso $w > p$, $\ell_t^* = 0$. Nuevamente, esto no es óptimo. De este modo, solo puede haber equilibrio si $p = w$. En dicho caso, $\Pi = 0$ y la demanda de la firma es $\ell_t^* \in (0, 24)$ - por determinar.

El problema del consumidor provee

$$\ell_o^d = \frac{24w}{2w} = 12$$
$$c^d = \frac{24w}{2p} = 12.$$

De este modo, $\ell_t^* = 12$.

Ejercicio 6. Considere una economía con 2 sectores. El sector 1 produce x y el sector 2 produce y. Hay un factor de producción L (el empleo) y hay $\overline{L}$ unidades de este factor en la economía (la dotación). Se sabe que

$$\overline{L} = L_x + L_y$$
$$y = L_y^{1/2} x_y^{1/2}$$
$$x = L_x - x_y$$

donde L_x es la cantidad del insumo usada en la producción de x (en el mercado final), L_y es la cantidad del insumo usada en la producción de y (en el mercado final) y x_y es la cantidad de x que es usada en la producción de y (en el mercado final). Halle la frontera de producción.

Consideremos el caso general $y = L_y^\alpha x_y^{1-\alpha}$. Al final reemplazamos con $\alpha = 1$. Para encontrar la frontera de producción resolvemos

$$\begin{aligned} &\max y \\ &\text{s.a.} x = \overline{x} \\ &\quad L_x + L_y = \overline{L}. \end{aligned}$$

El Lagrangiano asociado es

$$\mathcal{L} = L_y^\alpha x_y^{1-\alpha} + \lambda(\overline{x} - L_x + x_y).$$

Esto es, usando las restricciones sobre el trabajo

$$\mathcal{L} = L_y^\alpha x_y^{1-\alpha} + \lambda(\overline{x} + x_y - (\overline{L} - L_y)).$$

Las CPO son (ahora las variable de control L_y, x_y)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \alpha L_y^{\alpha-1} x_y^{1-\alpha} + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_y} = (1-\alpha) L_y^\alpha x_y^{-\alpha} + \lambda = 0.$$

De este modo,

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_y}{L_y} = 1.$$

Como $\alpha = 1 - \alpha = 1/2$,

$$x_y = L_y = y.$$

De este modo, la FP es

$$2y + x = \overline{L}.$$

Ejercicio 7. Considere una economía llamada Courcsant, que consiste en dos consumidores, dos bienes y una empresa. Los agentes consumen dos bienes: cristales kyber (x) y sables de luz (y). Sin embargo, los agentes solo tienen dotaciones iniciales de cristales kyber, $\omega_1 = (3, 0)$ y $\omega_2 = (2, 0)$ respectivamente. Por otro lado, la única empresa produce sables de luz con la siguiente tecnología $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq 0, \; y \leq \sqrt{-x}\}$. Además, las preferencias de los consumidores están representadas por $u_1(x_1, y_1) = \sqrt{x_1 y_1}$ y $u_2(x_2, y_2) = 2 \ln x_2 + \ln y_2$, respectivamente.

a) Con la información proporcionada, ¿la economía alcanza un equilibrio de Walras, o se requiere una condición adicional sobre la distribución de los derechos de propiedad sobre la empresa? Si es así, proponga una distribución $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $\sum_{i=1}^{2} \theta_i = 1$.

b) Encuentre la función de demanda de insumos de la empresa para los cristales kyber (x^d), la función de oferta de la empresa (y^s) y las ganancias π^*.

c) Encuentre la función de demanda de cada consumidor.

a) Proponemos por simplicidad $\theta_1 = \theta_2 = 0.5$.

b) La función de demanda de la firma por el insumo será denotado x^d y la oferta de la firma es y^s. El problema de optimización es

$$\max_{(x,y)} \; \Pi = p_x x + p_y y, \quad \text{s.a}: \; y \leq \sqrt{-x}, \; x \leq 0.$$

O sea, el problema de la firma se reduce a (la solución cicertamente se da en la frontera)

$$\max_{(x,y)} \; \Pi = p_x x + p_y \sqrt{-x}, \; \text{s.a } x \leq 0.$$

El Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = p_x x + p_y \sqrt{-x} - \lambda x.$$

Las CPO proveen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \implies p_x - \frac{p_y (-x)^{-1/2}}{2} - \lambda = 0$$

y

$$\lambda x = 0.$$

Si $\lambda = 0$, $x < 0$. Si $\lambda > 0, x = 0$. Nos interesa solo el primer caso.

$$\begin{aligned} x^d &= -\left(\frac{p_y}{2p_x}\right)^2 \\ y^s &= -\sqrt{x^d} = \frac{p_y}{2p_x} \\ \Pi^* &= \frac{p_y^2}{4p_x}. \end{aligned}$$

c) Con respecto a los consumidores, debemos resolver

$$\begin{aligned} &\max_{x_i, y_i} \; u(x_i, y_i) \\ &\quad \text{s.a } p_x x_i + p_{yi} = p_x \omega_x + \theta_i \Pi^*. \end{aligned}$$

Dado que las funciones de utilidad son tipo Cobb-Douglas

$$\begin{aligned}
x_1^d &= \frac{1}{2}\left(\frac{3p_x + \pi^*/2}{p_x}\right) \\
y_1^d &= \frac{1}{2}\left(\frac{3p_x + \pi^*/2}{p_y}\right) \\
x_2^d &= \frac{2}{3}\left(\frac{2p_x + \pi^*/2}{p_x}\right) \\
y_2^d &= \frac{1}{3}\left(\frac{2p_x + \pi^*/2}{p_y}\right).
\end{aligned}$$

Normalizando $p_x = 1$ y remplazando la expresión de π,

$$\begin{aligned}
x_1^d &= \frac{1}{2}(3/p_y + p_y/8) \\
y_1^d &\frac{1}{2}(3/p_y + p_y/8) \\
x_2^d &= \frac{2}{3}(2 + p_y^2/8) \\
y_2^d &= \frac{1}{3}(2/p_y + p_y/8).
\end{aligned}$$

Finalmente, por motivos de conclusión, permítanos calcular el EW. Aplicando la ley de Walras para este conexto:

$$x_1^d + x_2^d + x^d - 5 = 0.$$

Esto conlleva a $p_y = 2.3$. De este modo,

$$(x_1^*, y_1^*) = (1.8, 0.8),\ (x_2^*, y_2^*) = (1.8, 0.4),\ x^{*d} = 1.4,\ \text{y}\ y^{*s} = 1.2.$$

Lima, 14 de setiembre, 2024.