PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Solucionario
PD3
Primer semestre 2025

1 Funciones convexas y cóncavas

1) Considere el cambio de variable

$$u = \frac{t}{x}.$$

Entonces,

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(ux)du.$$

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{++}$:

$$F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \int_0^1 f(u(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2))du.$$

Como f es convexa:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(u(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2))du &\leq \int_0^1 [\alpha f(ux_1) + (1-\alpha)f(x_2)]du \\ &\leq \alpha \int_0^1 f(ux_1)du + (1-\alpha)\int_0^1 f(ux_2)du.\end{aligned}$$

O sea

$$F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha F(x_1) + (1-\alpha)F(x_2).$$

Como $g(s) = e^s$ es convexa, $g \circ F$ también lo es. Esto concluye la prueba.

Alternativamente,

$$F(x) = \int_0^1 f(xu)du$$

es convexa aplicando el criterio de la segunda derivada:

$$F''(x) = \int_0^1 u^2 f''(xu)du \geq 0.$$

2) Pensemos en lo siguiente, queremos $(fg)'' = (f'g + g'f)' = f''g + 2f'g' + g''f \geq 0$. Basta entonces que f y g sean crecientes y positivas.

3) Basta que $A \geq 0$, cuando es simétrica, pues $Hf = 2A$. No importan $\mathbf{b}$ y c.

4) Notar que $u(\mathbf{x})$ cuasi cóncava es probar

$$X = \left\{\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \geq c\right\}$$

es convexo para todo $c \in \mathbb{R}$. En particular, trabajamos con $c > 0$ pues $x_i > 0$. Ahora bien,

$$X = \left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i \ln x_i \geq \ln c\right\}$$

es convexo pues $\ln(\cdot)$ es cóncava (se prueba por definición), los $\alpha_i \geq 0$ y la suma de cóncavas es cóncava.

5) La cuasi concavidad de u, junto con el hecho que es C^2 asegura que

$$(**) \quad -u_{x_1}^2 u_{x_2x_2} + 2u_{x_1x_2}u_{x_1}u_{x_2} - u_{x_1x_1}u_{x_2}^2 > 0.$$

Esto se desprende del criterio de los determinantes Hessianos ampliados. Luego, por la regla de la cadena (considerando $x_2 = x_2(x_1)$):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx_1}\left(\frac{u_{x_1}}{u_{x_2}}\right) &= \frac{\frac{du_{x_1}}{dx_1}u_{x_2} - \frac{du_{x_2}}{dx_1}u_{x_1}}{u_{x_2}^2} \\
&= \frac{\left(u_{x_1x_1} + u_{x_1x_2}\frac{dx_2}{dx_1}\right)u_{x_2} - \left(u_{x_1x_2} + u_{x_2}^2\frac{dx_2}{dx_1}\right)u_{x_1}}{u_{x_2}^2}.
\end{aligned}$$

Como $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{u_{x_1}}{u_{x_2}}$ y las utilidades marginales son positivas,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx_1}\left(\frac{u_{x_1}}{u_{x_2}}\right) &= \frac{1}{u_{x_2}^2}\left[u_{x_2}u_{x_1x_1} - \frac{u_{x_2}u_{x_1}u_{x_1x_2}}{u_{x_2}} - \frac{u_{x_1x_2}u_{x_1}u_{x_2}}{u_{x_2}} + \frac{u_{x_2x_2}u_{x_1}}{u_{x_2}}\right] \\
&= \frac{u_{x_1}^2u_{x_2x_2} - 2u_{x_1x_2}u_{x_1}u_{x_2} + u_{x_1x_1}u_{x_2}^2}{u_{x_2}^3} \\
&= -\frac{**}{u_{x_2}^3} < 0.
\end{aligned}$$

La Tasa Marginal de Sustitución (TMS) decreciente implica que a medida que se intercambia más de un bien por otro, el consumidor está dispuesto a renunciar a menos del primer bien para obtener una unidad adicional del segundo. Esto refleja la ley de la utilidad marginal decreciente: el valor adicional que el consumidor asigna a una unidad adicional de un bien disminuye conforme aumenta su cantidad consumida. La respuesta es afirmativa.

6) Sean $u_i = e^{x_i}, v_i = e^{y_i}$ y sea $\theta \in [0,1]$. Entonces,

$$f(\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y}) = \log\left(\sum_{i=1}^n e^{\theta x_i + (1-\theta)y_i}\right) = \log\left(\sum_{i=1}^n u_i^\theta v_i^{(1-\theta)}\right)$$

La desigualdad de Hölder establece que:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Aplicando esta desigualdad,

$$f(\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y}) = \log\left(\sum_{i=1}^n u_i^\theta v_i^{(1-\theta)}\right) \leq \log\left[\left(\sum_{i=1}^n (u_i^\theta)^{\frac{1}{\theta}}\right)^\theta \left(\sum_{i=1}^n (v_i^{1-\theta})^{\frac{1}{1-\theta}}\right)^{1-\theta}\right],$$

lo que se reduce, por la linealidad del logaritmo, a:

$$\theta\log\left(\sum_{i=1}^n u_i\right) + (1-\theta)\log\left(\sum_{i=1}^n v_i\right).$$

7) Se busca minimizar el gasto en el que incurre un consumidor dado que las canastas de consumo de entre las cuales se escoge, producen un nivel de utilidad mayor o igual a $\overline{u}$. Si este parámetro aumenta, asumiendo u creciente, el gasto aumenta.

Respecto a la concavidad, simplemente:

$$\begin{aligned} e(\lambda \mathbf{p}_1 + (1-\lambda)\mathbf{p}_2, \overline{u}) &= \min_{\mathbf{x}\geq \mathbf{0}, u(\mathbf{x})\geq \overline{u}} (\lambda \mathbf{p}_1 + (1-\lambda)\mathbf{p}_2)\cdot \mathbf{x} \\ &= \lambda \mathbf{p}_1 \cdot \tilde{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\mathbf{p}_2 \cdot \tilde{\mathbf{x}} \\ &\geq \lambda \min_{\mathbf{x}\geq \mathbf{0}, u(\mathbf{x})\geq \overline{u}} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x} + (1-\lambda) \min_{\mathbf{x}\geq \mathbf{0}, u(\mathbf{x})\geq \overline{u}} \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x} \\ &= \lambda e(\mathbf{p}_1, \overline{u}) + (1-\lambda) e(\mathbf{p}_2, \overline{u}). \end{aligned}$$

Acá $\tilde{\mathbf{x}}$ es el que resuelve $\min_{\mathbf{x}\geq \mathbf{0}, u(\mathbf{x})\geq \overline{u}} (\lambda \mathbf{p}_1 + (1-\lambda)\mathbf{p}_2)\cdot \mathbf{x}$.

Para el caso $u(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$, y precios igual a 1, la solución es $(0, 5/3)$. Sucede que el bien 2 le genera estrictamente siempre más utilidad. Como los precios son iguales, es mejor concentrar todo en x_2.

Finalmente, la solución es $x_i^* = 0$ para $i = 1, ..., n-1$ y $x_n^* = \overline{u}$; le es más barato consumir solo de x_n y alcanza el mismo nivel de utilidad. El gasto incurrido es $p_n \overline{u}$.

2 Optimización en $\mathbb{R}^n$

1) El mínimo se alcanza en $(x_1, x_2) = (a, b)$ y el valor mínimo es c. Ahora bien, la función no tiene puntos máximos, es coercitiva de hecho.

2) El problema queda re-escrito

$$\max_{x_1 \geq 0} pAx_1^{\alpha} k^{\beta} - kw_2 - w_1 x_1.$$

Como $\alpha \in (0,1)$, no es óptimo que $x_1 = 0$. Así, la solución es interior. Aplicando CPO:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \left[\frac{w_1}{k^{\beta} pA\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &= \left(\frac{\alpha A p}{w_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} k^{\frac{\beta}{1-\alpha}} \\ q^* &= A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha p}{w_1}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} k^{\frac{\beta}{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\pi(p, w_1, w_2, k, \alpha, \beta, A) = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) (\alpha A p)^{\frac{1}{1-\alpha}} w_1^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} k^{\frac{\beta}{1-\alpha}}.$$

3) El problema de maximización del beneficio es

$$\max_{(x_1, \dots, x_n)\in \mathbb{R}^n_+} \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^{\rho}\right] - \sum_{i=1}^n w_i x_i.$$

Las CPO de primer orden proveen

$$\alpha_i \rho x_i^{\rho-1} = w_i \implies x_i^* = \left[\frac{w_i}{\alpha_i \rho}\right]^{\frac{1}{\rho-1}}.$$

Se trata de un máximo pues f es estrictamente cóncava: suma de estrictamente cóncavas, o verificar que la Hessiana es definida positiva. Finalmente,

$$\pi(\mathbf{w}, \boldsymbol{\alpha}, \rho) = \sum_{i=1}^N \left[\alpha_i^{\frac{1}{1-\rho}} \left(\frac{\rho}{w_i}\right)^{\frac{\rho}{1-\rho}} - w_i^{\frac{1-2\rho}{1-\rho}} (\alpha_i \rho)^{\frac{1}{1-\rho}}\right].$$

PC3: puntos importantes

1. Probar que funciones son convexas o cóncavas por definición.
2. Probar que funciones son cuasi-convexas o cuasi-cóncavas usando alguna de las definiciones equivalentes.
3. Problema de maximización de la utilidad.
4. Problema de minimización del gasto.
5. Problema de minimización del costo.
6. Problema de maximización del beneficio.
7. Conjuntos de producción.
8. Referencias: Mas-Colell et al. (1995) capítulos 3 y 5.