

JORGE CHÁVEZ

MARCELO GALLARDO

ÁLGEBRA LINEAL Y OPTIMIZACIÓN

PARA EL ANÁLISIS ECONÓMICO

DEDICATORIA

A mis padres, José y Cybele
y a mi abuela Betty, por su constante apoyo.

INTRODUCCIÓN

Este libro nace de la experiencia docente en las facultades de Ciencias e Ingeniería y Ciencias Sociales de la Pontificia Universidad Católica del Perú, y se fundamenta en las notas de clases de los últimos diez años preparadas para los cursos Investigación de Operaciones y Matemática para Economistas. El texto está principalmente dirigido a estudiantes de maestría en economía teórica, estudiantes de pregrado en matemáticas aplicadas, o cualquier lector con cierta base en Álgebra Lineal y Cálculo en varias variables. El libro también será de gran apoyo para los profesores e investigadores interesados en las aplicaciones de las matemáticas o los modelos económicos.

A lo largo del texto, se presentan más de 200 ejemplos, muchos de los cuales provienen del contexto económico. Se destacan al menos 50 ejemplos de teoría económica, desde el Problema de la Maximización de la Utilidad del Consumidor hasta el cálculo del Equilibrio Walrasiano, pasando por modelos como el de Black & Scholes, el de Transporte Óptimo o el modelo IS-LM; además, hay alrededor de 150 ejemplos adicionales que sirven para reforzar e ilustrar la teoría. La presentación de los diversos conceptos y definiciones son introducidas formalmente y, con el propósito de tornar al libro en un material auto-contenido, todos los teoremas son demostrados, salvo dos excepciones que requieren elementos no discutidos en este libro. Sin embargo, puesto que los diversos ejemplos incluidos aseguran una comprensión integral de

los diferentes teoremas y lemas, permitiendo al lector obviar las demostraciones en una primera lectura. Esta flexibilidad garantiza que el material sea accesible para una amplia gama de estilos de aprendizaje y necesidades educativas.

Acompañando el texto, hay más de 280 ejercicios, distribuidos en aproximadamente 10 ejercicios por sección. El grado de dificultad de éstos es variado desde aquellos que se resuelven casi inmediatamente hasta aquellos que, por su grado de dificultad, son más retadores y poseen sugerencias de solución. Además, se cuentan con más de 100 figuras, elaboradas con herramientas como GeoGebra, L^AT_EX, TikZ, y Python, cuya finalidad es facilitar la comprensión de conceptos abstractos.

El libro se estructura en torno a tres bloques principales y un capítulo adicional enfocado enteramente al estudio de algunos tópicos selectos en teoría microeconómica. El primer bloque comprende tres capítulos iniciales dedicados al Álgebra Lineal, estableciendo una base matemática fundamental para la lectura de los siguientes capítulos.

En el Capítulo 1, se introducen los conceptos básicos del Álgebra Lineal, tales como espacio vectorial, dimensión, producto interno y transformaciones lineales. Con base en la teoría presentada en este capítulo, en el Capítulo 2 se estudian exhaustivamente los sistemas de ecuaciones lineales. Se analizan las condiciones necesarias para que un sistema dado tenga solución y, en tal caso, se determina el número de soluciones posibles. Además, se ofrece un método sistemático para la resolución de estos sistemas. En este contexto, se presenta uno de los ejemplos más significativos: el modelo de

Insumo-Producto de Leontief. La importancia de este modelo radica en su capacidad para describir cómo los diferentes sectores de una economía interactúan entre sí, proporcionando así una herramienta valiosa para el análisis de la producción y distribución de bienes y servicios. El Capítulo 3 está fundamentalmente dedicado al estudio de los valores y vectores propios, así como a la diagonalización de matrices y formas cuadráticas.

El segundo bloque está constituido por los Capítulos 4 y 5. El Capítulo 4 introduce los conceptos de distancia, sucesión y convergencia en espacios vectoriales, así como los principios básicos de topología, los cuales son usados en capítulos posteriores. El Capítulo 5 se centra en el estudio de los conjuntos convexos, que son de particular interés en teoría del consumidor y del productor. Con la teoría desarrollada aquí, se abordan también resultados importantes como el Teorema de Separación y el Lema de Farkas.

El último bloque corresponde al de Optimización Estática. Está compuesto por los capítulos del 6 al 9. En el Capítulo 6 se estudian las funciones convexas, cóncavas, cuasi convexas y cuasi cóncavas. Estas funciones aparecen frecuentemente en economía; algunos ejemplos incluyen las funciones de utilidad, de producción, de gasto, de costo, de utilidad indirecta y de beneficios, y son aquellas que usualmente se busca optimizar. El Capítulo 7 aborda el problema general de optimización. Se comienza con un enfoque geométrico, y, luego, se enuncia y demuestra el Teorema de Weierstrass, que es el primer resultado fundamental de la teoría de optimización. Inmediatamente después, se estudian las condiciones necesarias de primer orden y las condiciones suficientes de segundo orden,

herramientas necesarias para identificar candidatos a óptimos y asegurar su optimalidad. El capítulo concluye con un tema muy importante, la estática comparativa, usada para derivar relaciones macroeconómicas en el contexto del modelo IS-LM.

En los Capítulos 8 y 9 se discuten problemas específicos de optimización. En el Capítulo 8, abordamos el Problema de Lagrange, esencial en economía para resolver, bajo ciertas circunstancias, diversos problemas, como el de la maximización de la utilidad o la minimización del gasto. También presentamos en este capítulo el Teorema de la Envolvente, y proporcionamos ejemplos prácticos derivando, por ejemplo, identidades como las de Roy o Shepard. En el Capítulo 9 presentamos el Problema de Karush-Kuhn-Tucker y algunos ejemplos clásicos relacionados con él. En particular, se presentan las condiciones de Inada, cruciales para determinar cuándo ciertos problemas de Karush-Kuhn-Tucker pueden resolverse como uno de Lagrange.

Finalmente, en el Capítulo 10 se presentan algunos tópicos fundamentales de la teoría microeconómica. Así, en las primeras dos secciones estudiamos las relaciones de preferencias y las funciones de utilidad, que constituyen la base de la teoría del consumidor. Estos conceptos nos permiten ilustrar el uso de las propiedades topológicas de los conjuntos convexos así como entender la importancia de las propiedades de concavidad y cuasi concavidad de las funciones de utilidad. Con el propósito de conectar los contenidos de los primeros capítulos y preparar al lector para estudios superiores, el capítulo 10 culmina con una introducción a la teoría del Equilibrio General.

Para terminar, queremos expresar nuestro agradecimiento, en primer lugar, a la Pontificia Universidad Católica del Perú por haber hecho viable la realización de este proyecto. En segundo lugar al profesor José Gallardo Kú del Departamento de Economía de esta misma casa de estudios por sus valiosas discusiones sostenidas con los autores en materia económica; y a Manuel Loaiza Vásquez, ex-alumno de la especialidad de Matemáticas, por sus importantes comentarios y observaciones.

Esperamos que este texto sea útil, tanto a estudiantes como profesores e investigadores para el desarrollo de sus cursos de microeconomía y economía matemática.

Jorge Chávez,
Profesor Principal
del Departamento de Ciencias de la
Pontificia Universidad Católica del Perú

Marcelo Gallardo,
Asistente de investigación
en la Facultad de Ciencia e Ingeniería de la
Pontificia Universidad Católica del Perú

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{N} : Conjunto de números naturales, $\mathbb{N} \triangleq \{1, 2, \dots\}$.

\mathbb{Z} : Conjunto de números enteros, $\mathbb{Z} \triangleq \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

\mathbb{Z}_+ : Conjunto de números enteros positivos incluido el cero, $\mathbb{Z}_+ \triangleq \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

\mathbb{R} : Conjunto de números reales.

A^c : Si A es un conjunto, A^c denota el complemento de dicho conjunto.

$A \subset B$: El conjunto A está incluido en el conjunto B .

\mathbb{R}^n : Espacio euclidiano de dimensión $n \in \mathbb{N}$.

$\|\mathbf{x}\|$: Si \mathbf{x} es un vector del espacio vectorial V , $\|\mathbf{x}\|$ denota la norma Euclidiana de dicho vector.

$\mathcal{B}(\mathbf{x}_0; \epsilon)$: Bola abierta centrada en \mathbf{x}_0 y de radio $\epsilon > 0$.

$\mathcal{N}_{\mathbf{x}}$: Vecindad del punto \mathbf{x} ; es decir, un conjunto que contiene una bola abierta centrada en dicho punto.

$\sup\{A\}$: Supremo del conjunto A .

∂A : Borde o frontera del conjunto A .

$C^n(A)$: Espacio de funciones con n -ésima derivada continua.

$t \downarrow c$: t tiende a c y $t > c$.

\emptyset : el conjunto vacío.

Índice general

1. Elementos de álgebra lineal	11
1.1. Espacios vectoriales	11
1.2. Subespacios vectoriales	38
1.3. Bases de espacios vectoriales	54
1.4. Transformaciones lineales	64
2. Sistema lineal de ecuaciones	
algebraicas	85
2.1. Sobre el rango de una matriz	86
2.2. Sistemas de ecuaciones	91
2.3. La solución	97
3. Valores y vectores	
propios	111
3.1. Conceptos básicos	111
3.2. Matrices equivalentes	134
3.3. Matrices simétricas y formas cuadráticas	149
4. Espacios vectoriales topológicos	176
4.1. La norma de un vector	176
4.2. Distancia y aproximación	185
4.3. Topología de \mathbb{R}^n	198
5. Conjuntos convexos	219
5.1. Conjuntos convexos	219
5.2. Separación de conjuntos convexos	245
5.3. El Lema de Farkas	264

6. Funciones convexas y cóncavas	288
6.1. Funciones convexas y cóncavas	288
6.2. Funciones convexas y cóncavas diferenciables	305
6.3. Funciones cuasi convexas y cuasi cóncavas	316
7. Introducción a la Optimización	327
7.1. Problema General de Optimización	328
7.2. Enfoque Geométrico	337
7.3. Soluciones Interiores	341
8. El problema de Lagrange	370
8.1. El Teorema de Lagrange	378
8.2. Condiciones suficientes	396
8.3. Estática comparativa y el Teorema de la Envolvente	407
9. El problema de Karush-Kuhn-Tucker	426
9.1. Condiciones necesarias y el problema mixto	427
9.2. Condiciones suficientes	448
9.3. Condiciones de Inada y de no negatividad	456
10. Relaciones de preferencias y Equilibrio General	478
10.1. Relaciones de preferencias	479
10.2. Funciones de utilidad	491
10.3. Introducción al equilibrio general	515
Bibliografía	550
Índice	559