PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA

IOP224 INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Examen Final
Primer semestre 2024

Indicaciones generales:

- Duración: 180 minutos.
- Materiales o equipos a utilizar: 2 hojas A4 con apuntes de clase (físicos).
- No está permitido el uso de ningún material o equipo electrónico adicional al indicado (no celulares, no tablets, no libros).
- **La presentación, la ortografía y la gramática de los trabajos influirán en la calificación.**

Puntaje total: 20 puntos.

Pregunta 1 (4 puntos)

1.1) Considere el problema de maximización de la utilidad con $p_1, p_2, I > 0$ y $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Asuma además que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0, \ \frac{\partial u}{\partial x_i} > 0, \text{ y } \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} > 0, \quad i = 1, 2.$$

Asuma que $x^* \in \mathbb{R}^2_{++}$ satisface las ecuaciones de Lagrange. Aplicando el método de los diferenciales, obtenga el efecto (si es positivo, negativo o no puede concluir) de $\dfrac{\partial x_2^*}{\partial I}$, donde (x_1^*, x_2^*) es solución al problema de maximización de la utilidad considerado. Interprete.

1.2) Considere una firma que produce un único bien y (mate) y para esto, usa un único insumo x (*erythroxylum coca*). El precio de mercado del output es $p > 0$, y el del insumo es $w > 0$. La tecnología de la firma es $f(x) = x^a$, $a \in (0, 1)$. Plantee el problema de maximización de la firma, resuélvalo, y verifique que $\dfrac{\partial x^*}{\partial w} < 0$.

Pregunta 2 (3 puntos)

La función de gastos de Tirole es la siguiente:

$$e(p, \overline{u}) = \exp\left\{ \sum_{\ell=1}^{L} \alpha_\ell \ln(p_\ell) + \left(\prod_{\ell=1}^{L} p_\ell^{\beta_\ell} \right) \overline{u} \right\}, \ p \in \mathbb{R}^L_{++}.$$

Asuma (a esto se le conoce como teorema de la dualidad) que $e(p, V(p, I)) = I$, donde I es el ingreso en el problema de maximización de la utilidad y V la función de utilidad indirecta. Obtenga la función de utilidad indirecta de Tirole y verifique la identidad de Roy. Imponga las condiciones que crea conveniente sobre el vector de parámetros (α, β)[1].

Pregunta 3 (6 puntos)

3.1) Daron Acemoglu tiene preferencias representadas por $u(x_1, x_2) = (x_1 + 1)(x_2 + 1)$. Demuestre que Acemoglu tiene preferencias convexas. ¿Son estrictamente convexas? Efectúe el mismo análisis para las preferencias de Robert Barro, representadas por $v(x_1, x_2) = \min\left\{\frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{10}\right\}$.

[1] Recuerde que las funciones de gasto con cóncavas con respecto a los precios, no decrecientes en p_ℓ y crecientes en $\overline{u}$.

3.2) Resuelva, en función de los precios $p_1, p_2 > 0$ y el ingreso $I > 0$, el problema de maximización de la utilidad para el individuo Andreu Mas-Colell, cuya función de utilidad es

$$u(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2.$$

3.3) Thomas Sargent (Tom) tiene la siguiente función de utilidad:

$$u(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i},\ 0 < \alpha_i < 1,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Resuelva el problema de maximización para Tom considerando $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ e $I > 0$. Obtenga las demandas Marshalianas de cada bien consumido por Tom y verifique la identidad de Roy.

Pregunta 4 (5 puntos)

4.1) Enuncie y demuestre el Primer Teorema del Bienestar.

4.2) En una economía 2×2, existen dos consumidores Ariel Rubinstein (A) y Bengt Holmstrom (B) con las siguientes funciones de utilidad y dotaciones,

$$\begin{aligned} u_A(x_A^1, x_A^2) &= a \ln x_A^1 + (1-a) \ln x_A^2, \quad a \in (0,1),\ \omega_1 = (0,1) \\ u_B(x_B^1, x_B^2) &= \min\left\{\frac{1}{2}x_B^1, x_B^2\right\}, \quad \omega_2 = (1,0). \end{aligned}$$

Obtenga en caso existan, (i) las asignaciones Pareto óptimas, (ii) los precios y cantidades que equilibran el mercado (en otras palabras, halle un equilibrio Walrasiano) y (iii) verifique si se satisface la conclusión del primer teorema del bienestar.

4.3) Supongamos que en una economía de intercambio puro todos los consumidores tienen las mismas preferencias. ¿Qué requisitos impondría sobre estas preferencias para que la asignación donde todos reciben la misma canasta sea un óptimo de Pareto?

4.4) En el artículo «Recovering Preferences from Finite Data» de Christopher Chambers, Federico Echenique y Nicolás Lambert, ¿bajo qué condiciones sobre el espacio de preferencias $\mathcal{P}$ y el espacio X es posible asegurar que $\succeq_n$ (la preferencia que racionaliza Σ_n) converge a $\succeq^*$? Sitúese en el modelo de preferencias reveladas.

4.5) Provea la definición de preferencia localmente estricta. ¿Si las preferencias son localmente estrictas, entonces son localmente no saciadas?

Pregunta 5 (2 puntos)

Dos colegas, Fedor y Joe, van a encontrarse en un aeropuerto. Sin embargo, no saben el terminal (A o B) en el cual van a encontrarse. Se sabe que para ellos es mejor encontrarse en el terminal A (les queda más cerca al parking de autos). Si ambos se encuentran en el terminal A, su utilidad es 20. Si ambos se encuentran en el terminal B, su utilidad es 10. Si van a terminales diferentes, su utilidad es 0.

5.1) Provea la forma normal del juego.

5.2) Identifique la(s) estrategia(s) que constituye(n) un equilibrio de Nash.

Profesor del curso: Jorge Chávez.

Asistente de docencia: Marcelo Gallardo.

San Miguel, 11 de julio del 2024