



Practico distribución normal

Marcelo PAZ
Estadística y Probabilidades
18 de diciembre de 2023



Ejercicio 1

Las longitudes de las sardinas recibidas por cierta enlatadora tienen una distribución normal con media $\mu = 4,62$ pulgadas y desviación estándar $\sigma = 0,23$ pulgadas.

X: longitudes de las sardinas.

Notación: $X \sim N(4,62, 0,23^2)$

- a) ¿Qué porcentaje de todas estas sardinas son mayores de 5 pulgadas?

Notación normal estándar: $Z \sim N(0, 1)$

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X \leq 5) && \text{Estandarización} \\ &= 1 - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{5 - 4,62}{0,23}\right) \\ &= 1 - P\left(Z \leq \frac{5 - 4,62}{0,23}\right) && , Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \\ &= 1 - P(Z \leq 1,65) \\ &= 1 - 0,9505 \\ &= 0,0495 \end{aligned}$$

Respuesta: Por lo tanto, el 4,95 % de las sardinas son mayores a 5 pulgadas.

- b) ¿Qué porcentaje de las sardinas miden entre 4.35 y 4.85 pulgadas?

$$\begin{aligned} P(4,35 \leq X \leq 4,85) &= P\left(\frac{4,35 - 4,62}{0,23} \leq Z \leq \frac{4,85 - 4,62}{0,23}\right) \\ &= P(-1,17 \leq Z \leq 1,00) \\ &= P(Z \leq 1,00) - P(Z \leq -1,17) \\ &= 0,8413 - 0,1210 \\ &= 0,7203 \end{aligned}$$

Respuesta: Por lo tanto, el 72,03 % de las sardinas miden entre 4.35 y 4.85 pulgadas.

- c) ¿Qué porcentaje de las sardinas miden como máximo 4.62 pulgadas?

$$\begin{aligned} P(X \leq 4,62) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{4,62 - 4,62}{0,23}\right) \\ &= P(Z \leq 0) \\ &= 0,5000 \end{aligned}$$

Respuesta: Por lo tanto, el 50 % de las sardinas miden como máximo 4.62 pulgadas.



Ejercicio 2

Dos estudiantes fueron informados de sus puntajes estandarizados en un examen de inglés, y corresponden a 0,8 y $-0,4$, respectivamente. Si sus puntuaciones fueron 88 y 64, respectivamente, ¿cuál fue el promedio y la desviación estándar del examen de inglés?

X: puntajes en el examen de inglés.

Notación: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Recordemos:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Para el primer estudiante:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{X - \mu}{\sigma} \\ 0,8 &= \frac{88 - \mu}{\sigma} && \text{Reemplazando} \\ 0,8\sigma &= 88 - \mu \\ \sigma &= \frac{88 - \mu}{0,8} \end{aligned}$$

Para el segundo estudiante:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{X - \mu}{\sigma} \\ -0,4 &= \frac{64 - \mu}{\sigma} && \text{Reemplazando} \\ -0,4\sigma &= 64 - \mu \\ \sigma &= \frac{64 - \mu}{-0,4} \end{aligned}$$

Igualando ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{88 - \mu}{0,8} &= \frac{64 - \mu}{-0,4} \\ -0,4(88 - \mu) &= 0,8(64 - \mu) \\ -35,2 + 0,4\mu &= 51,2 - 0,8\mu \\ 0,4\mu + 0,8\mu &= 51,2 + 35,2 \\ 1,2\mu &= 86,4 \\ \mu &= \frac{86,4}{1,2} \\ \mu &= 72 \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación del primer estudiante:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{88 - 72}{0,8} \\ \sigma &= \frac{16}{0,8} \\ \sigma &= 20 \end{aligned}$$

Respuesta: Así, $\mu = 72$ y $\sigma = 20$

Notación: $X \sim N(72, 20^2)$



Ejercicio 3

En una industria alimenticia se envasa café instantáneo en frascos cuyos pesos netos tienen una distribución normal con desviación estándar de 5.5 gramos. Si el 5 % de los frascos pesa a lo menos 139 gramos, ¿cuál es el promedio de ellos?

X: pesos netos de los frascos.

Notación: $X \sim N(\mu, 5,5^2)$

$$\begin{aligned}P(X \geq 139) &= 0,05 \\P\left(\frac{X - \mu}{5,5} \geq \frac{139 - \mu}{5,5}\right) &= 0,05 \\P\left(Z \geq \frac{139 - \mu}{5,5}\right) &= 0,05 & , Z = \frac{X - \mu}{5,5} \\1 - P\left(Z \leq \frac{139 - \mu}{5,5}\right) &= 0,05 \\P\left(Z \leq \frac{139 - \mu}{5,5}\right) &= 0,95 \\\frac{139 - \mu}{5,5} &= 1,65 \\139 - \mu &= 9,075 \\\mu &= 129,925\end{aligned}$$

Respuesta: Por lo tanto, el promedio de los frascos es de 129.925 gramos.



Ejercicio 4

Las alturas de los naranjos están distribuidos en forma normal. Se sabe que un 2.28 % miden más de 14pies y un 84.13 % menos de 12 pies. Determine la altura media de los naranjos y la desviación estándar de los naranjos.

X: alturas de los naranjos.

Notación: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Sabemos que:

$$P(X > 14) = 0,0228$$

$$P(X < 12) = 0,8413$$

Resolviendo $P(X > 14)$:

$$P(X > 14) = 0,0228$$

$$P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{14 - \mu}{\sigma}\right) = 0,0228$$

$$P\left(Z > \frac{14 - \mu}{\sigma}\right) = 0,0228$$

$$, Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$1 - P\left(Z \leq \frac{14 - \mu}{\sigma}\right) = 0,0228$$

$$P\left(Z \leq \frac{14 - \mu}{\sigma}\right) = 0,9772$$

$$\frac{14 - \mu}{\sigma} = 2$$

$$14 - \mu = 2\sigma$$

$$\mu = 14 - 2\sigma$$

Despejando μ

Resolviendo $P(X < 12)$:

$$P(X < 12) = 0,8413$$

$$P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{12 - \mu}{\sigma}\right) = 0,8413$$

$$P\left(Z < \frac{12 - \mu}{\sigma}\right) = 0,8413$$

$$, Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$\frac{12 - \mu}{\sigma} = 1$$

$$12 - \mu = \sigma$$

$$\mu = 12 - \sigma$$

Despejando μ



Igualando ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned}14 - 2\sigma &= 12 - \sigma \\2\sigma - \sigma &= 14 - 12 \\ \sigma &= 2\end{aligned}$$

Remplazando en la ecuación de $P(X > 14)$:

$$\begin{aligned}\mu &= 14 - 2\sigma \\ \mu &= 14 - 2(2) \\ \mu &= 14 - 4 \\ \mu &= 10\end{aligned}$$

Respuesta: Por lo tanto, la altura media de los naranjos es de 10 pies y la desviación estándar de los naranjos es de 2 pies.

Ejercicio 5

El tiempo de trabajo (en horas) que emplean los ejecutivos de ciertas empresas sigue una distribución normal con media $\mu = 8$ y desviación estándar $\sigma = 4$.

- a) ¿Qué porcentaje de estos ejecutivos trabaja más de 7 horas?

$$\begin{aligned}P(X > 7) &= 1 - P(X \leq 7) && \text{Estandarización} \\ &= 1 - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{7 - 8}{4}\right) \\ &= 1 - P\left(Z \leq \frac{7 - 8}{4}\right) && , Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \\ &= 1 - P(Z \leq -0,25) \\ &= 1 - 0,4013 \\ &= 0,5987\end{aligned}$$

Respuesta: Por lo tanto, el 59,87% de los ejecutivos trabaja más de 7 horas.

- b) ¿Si el 20 % de los ejecutivos trabajan menos de x_0 horas. Encuentre x_0 .

$$\begin{aligned}P(X < x_0) &= 0,20 \\ P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,20 \\ P\left(Z < \frac{x_0 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,20 && , Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \\ \frac{x_0 - \mu}{\sigma} &= -0,84 \\ x_0 &= -0,84\sigma + \mu \\ x_0 &= -0,84(4) + 8 \\ x_0 &= 4,64\end{aligned}$$

Respuesta: Por lo tanto, $x_0 = 4,64$.



- c) ¿Cuál es la probabilidad de que un ejecutivo cualquiera trabaje entre 3 y 6 horas diarias?

$$\begin{aligned}P(3 \leq X \leq 6) &= P\left(\frac{3-8}{4} \leq Z \leq \frac{6-8}{4}\right) \\&= P(-1,25 \leq Z \leq -0,5) \\&= P(Z \leq -0,5) - P(Z \leq -1,25) \\&= 0,3085 - 0,1056 \\&= 0,2029\end{aligned}$$

Respuesta: Por lo tanto, la probabilidad de que un ejecutivo cualquiera trabaje entre 3 y 6 horas diarias es de 20,29 %.

- d) La cantidad de tiempo que dedica un ejecutivo a realizar tareas propias de sus subalternos, también sigue una distribución normal con media $\mu = 2,4$ horas. Determine la desviación estándar, σ , de este tiempo, si se sabe que el 10 % de los ejecutivos gasta más de 3.5 horas en tareas de este tipo.

$$\begin{aligned}P(X > 3,5) &= 0,10 \\P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{3,5 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,10 \\P\left(Z > \frac{3,5 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,10 \quad , Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \\1 - P\left(Z \leq \frac{3,5 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,10 \\P\left(Z \leq \frac{3,5 - \mu}{\sigma}\right) &= 0,90 \\\frac{3,5 - \mu}{\sigma} &= 1,28 \\3,5 - \mu &= 1,28\sigma \\\sigma &= \frac{3,5 - \mu}{1,28} \quad \text{Remplazando} \\\sigma &= \frac{3,5 - 2,4}{1,28} \\\sigma &= \frac{1,1}{1,28} \\\sigma &= 0,8594\end{aligned}$$

Respuesta: Por lo tanto, la desviación estándar es de 0.8594 horas.