Formativa 2

Marcelo Paz
Investigación de Operaciones
8 de julio de 2024

Versión: 1.0.1

1. Problema 1

A un cajero automático llegan 10 clientes por hora y cada usuario permanece en promedio 4 minutos.

a) ¿Qué sistema es y cuáles son sus parámetros?

Tenemos un sistema M/M/1, donde los parámetros son:

$$\lambda = 10 \text{ clientes por hora}$$
$$\mu = \frac{1}{4} \text{ clientes por minuto} = \frac{1}{4} \cdot 60 = 15 \text{ clientes por hora}$$

b) ¿Cuál es la tasa de utilización del cajero?

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} = 0{,}6667$$

c) Porcentaje del tiempo que está ocupado.

$$P(P > 0) = 1 - P_0 = \rho = 0{,}6667$$
$$= 66{,}67\,\%$$

d) ¿Cuántos clientes se encuentran esperando para usar el cajero en un momento dado?

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{10^2}{15(15-10)} = \frac{100}{75} = \frac{4}{3} = 1{,}3333$$

e) ¿Cuánto tiempo utiliza un usuario en toda la operación, desde el instante inicial?

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{15-10} = \frac{1}{5} = 0{,}2 \text{ horas} = 12 \text{ minutos}$$

2. Problema 2

Una ventanilla de ventas de pasajes dispone de dos personas que atienden a clientes que llega a una tasa de 80 clientes por hora. Cada vendedor es capaz de atender a 50 clientes por hora. Se pide:

a) Identifique el sistema y sus parámetros.

Tenemos un sistema M/M/S, donde los parámetros son:

$$\begin{aligned} s &= 2 \text{ vendedores} \\ \lambda &= 80 \text{ clientes por hora} \\ \mu &= 50 \text{ clientes por hora} \end{aligned}$$

b) ¿Es estable el sistema?
Para que el sistema sea estable, se debe cumplir la condicion de regimen ($\rho < 1$):

$$\rho = \frac{\lambda}{S\mu} = \frac{80}{2 \cdot 50} = \frac{8}{10} = 0{,}8 < 1$$

$$\therefore \text{ el sistema es estable.}$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema este vacio?

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{2-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2!} \cdot \left(\frac{s \cdot \mu}{s \cdot \mu - \lambda}\right)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{8}{5} + 1,28 \cdot \frac{100}{20}} \\ &= \frac{1}{1 + 1{,}6 + 6{,}4} \\ &= \frac{1}{9} \\ &= 0{,}1111 \\ &= 11{,}11\,\% \end{aligned}$$

d) El número esperado de clientes.

$$\begin{aligned} L_s &= L_q + \frac{\lambda}{\mu} \\ &= L_q + \frac{8}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot \lambda \cdot \mu}{(s-1)! \cdot (s \cdot \mu - \lambda)^2} \cdot P_0 \\ &= \frac{\left(\frac{8}{5}\right)^2 \cdot 80 \cdot 50}{1! \cdot 20^2} \cdot P_0 \\ &= \frac{2,56 \cdot 4000}{400} \cdot P_0 \\ &= 25,6 \cdot 0,1111 \\ &= 2,8442 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_s &= 2,8442 + \frac{8}{5} \\ &= 2,8442 + 1,6 \\ &= 4,4442 \end{aligned}$$

$\therefore$ el número esperado de clientes es de 4,4442.

e) La probabilidad que haya más de 4 clientes en el sistema.

$$\begin{aligned} P(n > 4) &= 1 - P(n \leq 4) \\ &= 1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{9} = 0,1111 \\ P_1 &= \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{45} = 0,1778 \\ P_2 &= \frac{\left(\frac{8}{5}\right)^2}{2!} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1,28}{9} = 0,1422 \\ P_3 &= \frac{\left(\frac{8}{5}\right)^3}{2! \cdot 2^1} \cdot \frac{1}{9} = \frac{4,096}{36} = 0,1138 \\ P_4 &= \frac{\left(\frac{8}{5}\right)^4}{2! \cdot 2^2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{6,5536}{72} = 0,0910 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(n > 4) &= 1 - (0,1111 + 0,1778 + 0,1422 + 0,1138 + 0,0910) \\ &= 1 - 0,6359 \\ &= 0,3641 \\ &= 36,41\,\% \end{aligned}$$

3. Problema 3

Encontrar las medidas de desempeño para un sistema de cola M/M/1/5 con tasa de llegada 10 y tasa de servicio igual a 12.

$$\begin{aligned} \lambda &= 10 \\ \mu &= 12 \\ s &= 1 \\ k &= 5 \\ \rho &= \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} = 0{,}8333 \end{aligned}$$

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^6} = \frac{0,1667}{1-0,3348} = \frac{0,1667}{0,6652} = 0,2506$$

$$P_5 = \rho^n \cdot P_0 = 0,8333^5 \cdot 0,2506 = 0,1007$$

$$\lambda_{ef} = \lambda \cdot (1 - P_5) = 10 \cdot (1 - 0,1007) = 10 \cdot 0,8993 = 8,9930$$

$$\begin{aligned} L_s &= \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(6)\cdot\rho^6}{1-\rho^6} \\ &= 4,9988 - \frac{2,0089}{0,6652} \\ &= 4,9988 - 3,0200 \\ &= 1,9788 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_q &= L_s - \frac{(1-\rho^5)\cdot\rho}{1-\rho^6} \\ &= 1,9788 - \frac{(0,5982)\cdot 0,8333}{0,6652} \\ &= 1,9788 - 0,7494 \\ &= 1,2294 \end{aligned}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{ef}} = \frac{1,9788}{8,9930} = 0,2200$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{ef}} = \frac{1,2294}{8,9930} = 0,1366$$

4. Problema 4

Un banco trata de determinar cuántos cajeros debe emplear. El costo total de emplear un cajero es 90 dólares diarios y un cajero puede atender a un promedio de 60 clientes por día. Al banco llega un promedio de 50 clientes por día y los tiempos de servicio y los tiempos entre llegadas son exponenciales. Si el costo de demora por cliente y día [en el sistema] es de 20 dólares, ¿cuántos cajeros debe contratar el banco para minimizar los costos de operación?

$$\lambda = 50 \qquad \mu = 60 \qquad C_s = 90 \qquad C_w = 20$$

s	μ	λ	ρ	C_s	P_0	L	C_w	$C_t = S \cdot C_s + L \cdot C_W$
1	60	50	$\frac{50}{60} = 0,8333 < 1$	90	-	5	20	$1 \cdot 90 + 5 \cdot 20 = 190$*
2	60	50	$\frac{50}{2 \cdot 60} = 0,4167 < 1$	90	0,4118	1,0084	20	$2 \cdot 90 + 1,0084 \cdot 20 = 200,1680$
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Para $s = 1$:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{50}{60 - 50} = 5$$

Para $s = 2$:

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{1} \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{2!} \cdot \left(\frac{2 \cdot 60}{2 \cdot 60 - 50}\right)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{5}{6} + 0,3472 \cdot 1,7143} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{5}{6} + 0,5952} \\ &= \frac{1}{2,4285} \\ &= 0,4118 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 50 \cdot 60}{70^2} \cdot P_0 \\ &= \frac{0,6944 \cdot 3000}{4900} \cdot 0,4118 \\ &= 0,1751 \end{aligned}$$

$$L = L_q + \frac{50}{60} = 0,1751 + 0,8333 = 1,0084$$

$\therefore$ el banco debe contratar 1 cajero.