



Planos y Rectas

Marcelo PAZ
Algebra Lineal

18 de diciembre de 2023



1. Teoria

1.1. Ecuacion general del plano

La ecuación general del plano es de la forma:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Donde $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

1.1.1. Importante

Sean 2 planos cualquiera

$$\begin{array}{ll} \pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 & \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \\ \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D = 0 & \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \end{array}$$

Son paralelos si:

$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \iff \vec{n}_1 = k\vec{n}_2, \text{ donde } k \in \mathbb{R}$$

Son perpendiculares si:

$$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \iff \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

Es **importante** aclarar que el producto cruz entre dos vectores, nos da como resultado un vector perpendicular a los vectores iniciales.

- Si buscamos un plano perpendicular el vector resultante se toma como vector normal del plano.
- Si buscamos una recta perpendicular el vector resultante se toma como vector director de la recta.



1.1.2. Dado 3 puntos, encontrar la ecuación general del plano

Para encontrar la ecuación general del plano dados 3 puntos, se debe seguir los siguientes pasos:

Caso ejemplo:

$$P_1 = (0, 0, 0)$$

$$P_2 = (2, 0, 0)$$

$$P_3 = (0, 2, 0)$$

1. Obtener 2 vectores del plano.

$$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (2, 0, 0)$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = P_3 - P_1 = (0, 2, 0)$$

2. Calcular el producto cruz entre los 2 vectores, para determinar el (**vector normal**).

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 4) = \vec{n} \quad \text{Vector normal}$$

3. Usando el vector normal y uno de los puntos, se puede obtener la ecuación general del plano.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad \text{Ecuación general del plano}$$

Donde $\vec{n} = (A, B, C)$ y (x_0, y_0, z_0) es un punto cualquiera del plano. Remplazando:

$$0(x - 0) + 0(y - 0) + 4(z - 0) = 0 \quad \text{Remplazamos los valores}$$

$$\text{Así, } \pi : 4z = 0$$

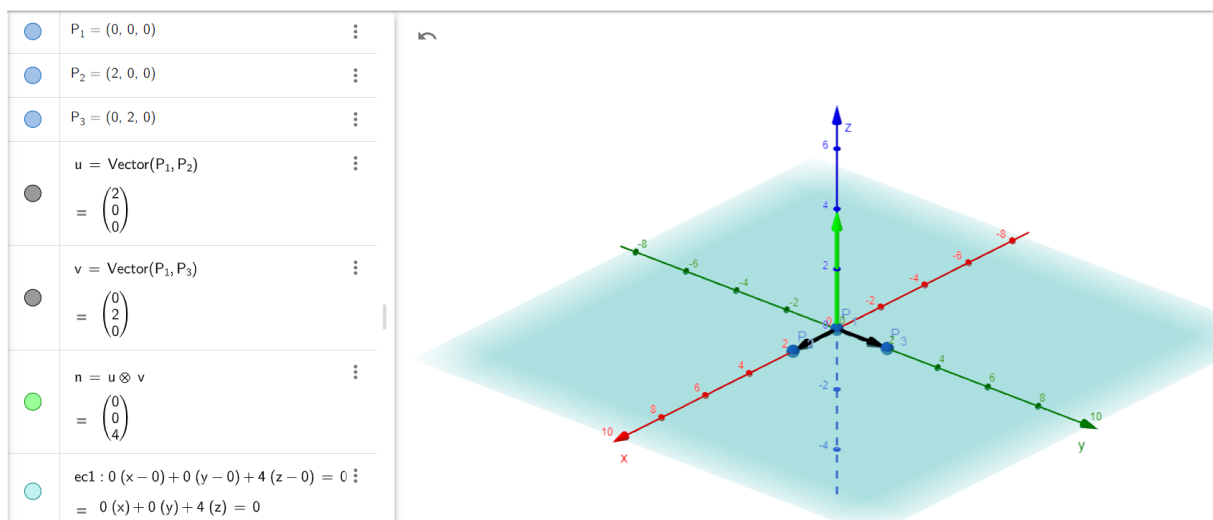


Figura 1: Plano Resultante dado 3 puntos



1.1.3. Dado un punto que pertenece al plano y dos planos ortogonales (perpendiculares), encontrar la ecuación general del plano

Para encontrar la ecuación general del plano dados un punto y dos planos ortogonales, se debe seguir los siguientes pasos:

Caso ejemplo:

$$P_1 = (0, 0, 0)$$

$$\pi_1 : 2x + 2y + 2z + 2 = 0$$

$$\pi_2 : x - y = 0$$

1. Obtener los vectores normales del plano 1 y 2.

$$\pi_1 : 2x + 2y + 2z + 2 = 0$$

$$\vec{n}_1 = (2, 2, 2)$$

Ecuación general del plano

Vector normal

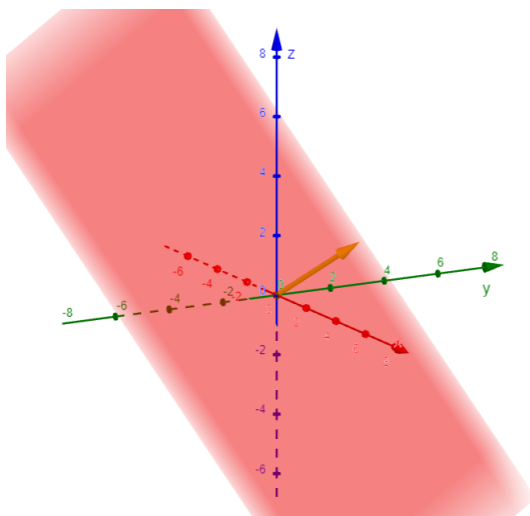


Figura 2: Plano 1

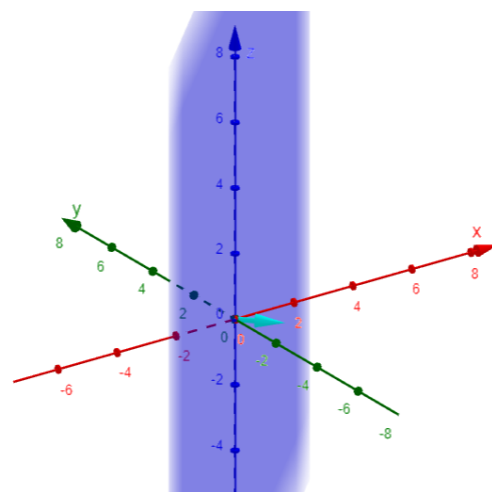


Figura 3: Plano 2

2. Calcular el producto cruz entre los 2 vectores, para determinar el (**vector normal**).

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (2, 2, -4) = \vec{n}$$

Vector normal

<input type="radio"/>	$P = (0, 0, 0)$	⋮
<input type="radio"/>	$u = \text{VectorNormal}(ec1)$	⋮
<input type="radio"/>	$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	
<input type="radio"/>	$v = \text{VectorNormal}(ec2)$	⋮
<input type="radio"/>	$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	
<input checked="" type="radio"/>	$n = u \otimes v$	⋮
<input type="radio"/>	$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$	
<input type="radio"/>	$ec3 : 2(x - 0) + 2(y - 0) - 4(z - 0) = 0$	⋮
<input type="radio"/>	$= 2(x) + 2(y) - 4(z) = 0$	

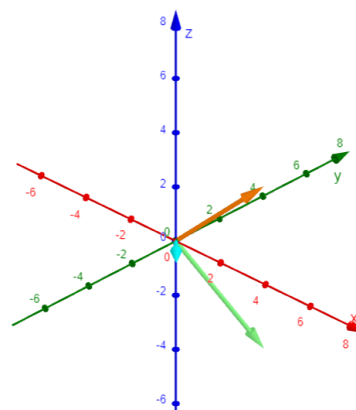


Figura 4: Producto cruz



3. Usando el vector normal y uno de los puntos, se puede obtener la ecuación general del plano.

$$2(x - 0) + 2(y - 0) + -4(z - 0) = 0 \quad \text{Remplazamos los valores}$$

$$\text{Así, } \pi : 2x + 2y - 4z = 0$$

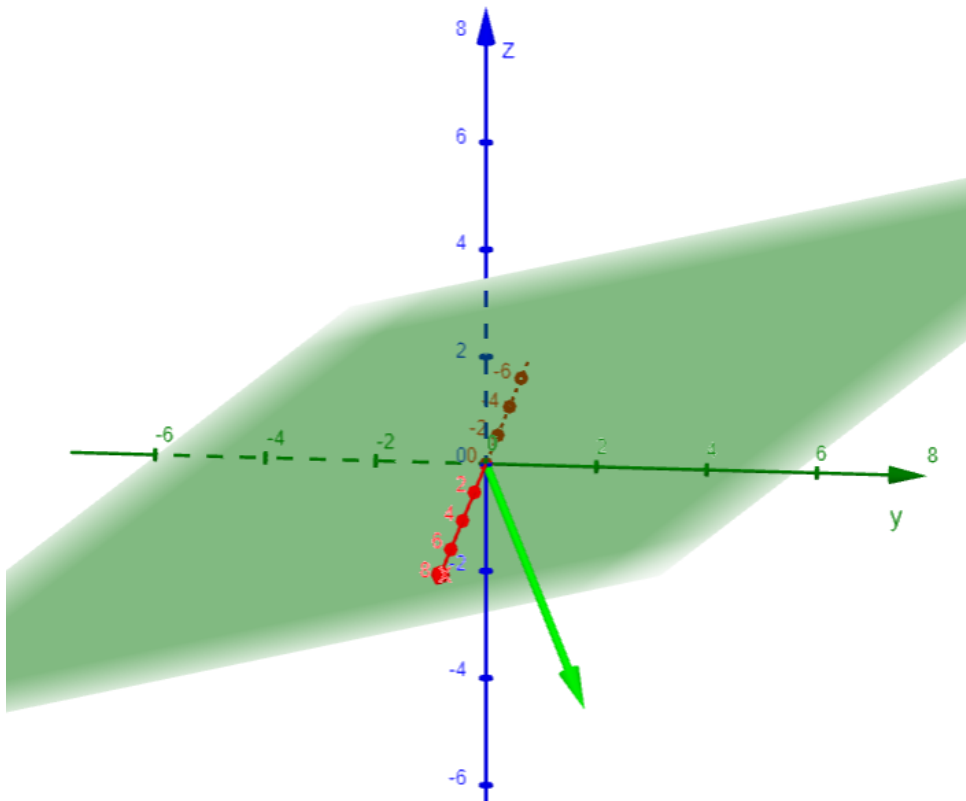


Figura 5: Plano Resultante dado 1 punto y 2 planos ortogonales



2. Ecuacion de la recta

2.1. Ecuacion vectorial de la recta

La ecuación vectorial de la recta es de la forma:

$$\mathcal{L}(t) = \vec{P}_1 + t \vec{v}$$

Donde \vec{P}_1 es un punto cualquiera de la recta, \vec{v} es el vector director de la recta y $t \in \mathbb{R}$.

***Nota:** El vector normal es perpendicular, mientras que el vector director es paralelo.

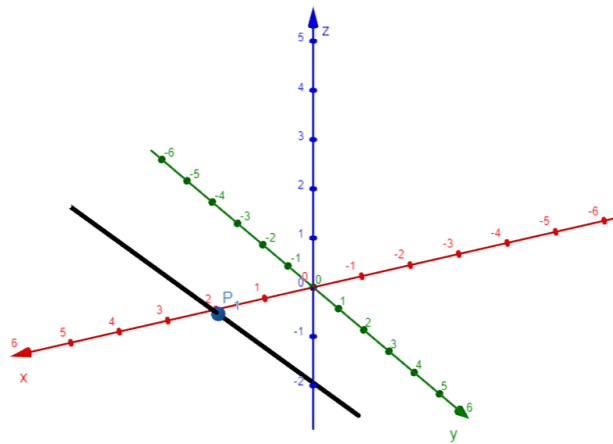


Figura 6: Recta vectorial

2.2. Ecuacion parametrica de la recta

La ecuación parametrica de la recta es de la forma:

$$\mathcal{L}(t) = \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Donde $P_1 = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto cualquiera de la recta y (a, b, c) es el vector director de la recta.

2.3. Ecuacion simetrica de la recta

La ecuación simetrica de la recta es de la forma:

$$\mathcal{L} : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Donde $P_1 = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto cualquiera de la recta y (a, b, c) es el vector director de la recta, con $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$



2.4. Ecuacion de la recta dado la interseccion de dos planos

Dado los planos:

$$\pi_1 : 2x + 5y + 4z + 15 = 0$$

$$\pi_2 : -2x + 5y - 2z + 35 = 0$$

1. Determinamos los vectores normales de los planos.

$$\pi_1 : 2x + 5y + 4z + 15 = 0$$

$$\vec{n}_1 = (2, 5, 4)$$

$$\pi_2 : -2x + 5y - 2z + 35 = 0$$

$$\vec{n}_2 = (-2, 5, -2)$$

2. Determinamos el vector director de la recta, usando el producto cruz entre los vectores normales de los planos.

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = (-30, -4, 20) = \vec{v} \quad \text{Vector director}$$

3. Determinamos un punto de la recta, usando el sistema de ecuaciones de los planos.

$$\begin{cases} 2x + 5y + 4z + 15 = 0 \\ -2x + 5y - 2z + 35 = 0 \end{cases} \quad \text{Sistema de ecuaciones}$$

Podemos suponer que $x, y, z = 0$:

$$\begin{cases} 2x + 5y + 4(0) + 15 = 0 \\ -2x + 5y - 2(0) + 35 = 0 \end{cases} \quad \text{Remplazamos } z = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 5y + 15 = 0 \\ -2x + 5y + 35 = 0 \end{cases} \quad \text{Igualamos las ecuaciones}$$

$$2x + 5y + 15 = -2x + 5y + 35 \quad \text{Restamos } 5y$$

$$4x = 20 \quad \text{Dividimos por 4}$$

$$x = 5$$

Remplazamos $x = 5$ en (1):

$$2(5) + 5y + 15 = 0$$

$$10 + 5y + 15 = 0$$

$$5y = -25 \quad \text{Restamos 25}$$

$$y = -5 \quad \text{Dividimos por 5}$$

Asi obtenemos el punto $P_1 = (5, -5, 0)$



4. Usando el punto y el vector director, podemos obtener la ecuación vectorial de la recta.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \vec{P}_1 + t\vec{v} \\ \mathcal{L}(t) &= (5, -5, 0) + t(-30, -4, 20) \\ \mathcal{L}(t) &= (5 - 30t, -5 - 4t, 20t)\end{aligned}$$

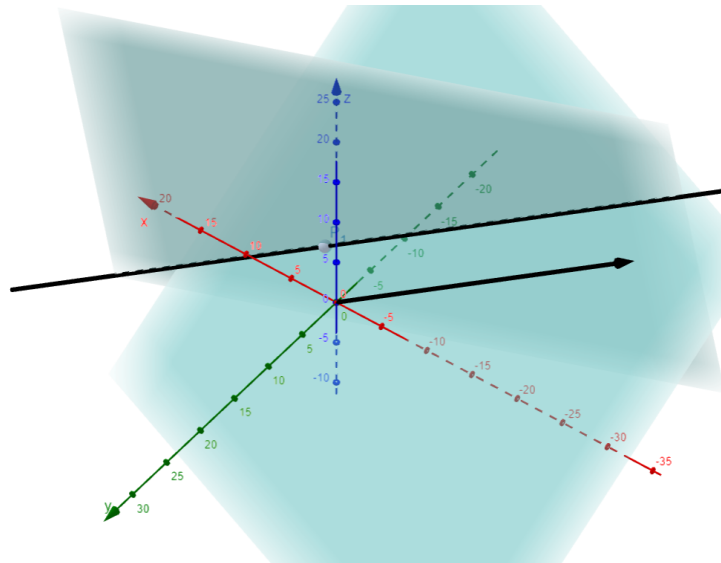


Figura 7: Recta dado la interseccion de dos planos perspectiva 1

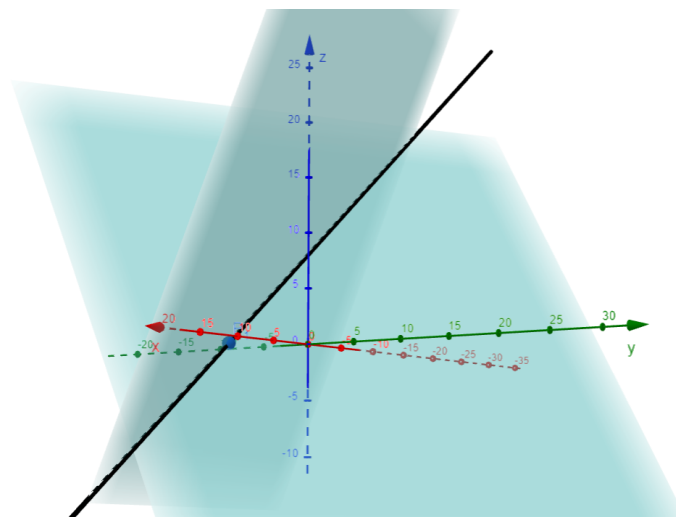


Figura 8: Recta dado la interseccion de dos planos perspectiva 2