Planos y Rectas

Marcelo Paz

Algebra Lineal 25 de noviembre de 2023

1. Teoria

1.1. Ecuacion general del plano

La ecuación general del plano es de la forma:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Donde $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

1.1.1. Importante

Sean 2 planos cualquiera

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 \qquad \overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$$
$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D = 0 \qquad \overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$$

Son paralelos si:

$$\overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2} \iff \overrightarrow{n_1} = k\overrightarrow{n_2} \quad \text{, donde } k \in \mathbb{R}$$

Son perpendiculares si:

$$\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \iff \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$$

Es **importante** aclarar que el producto cruz entre dos vectores, nos da como resultado un vector perpendicular a los vectores iniciales.

- Si buscamos un plano perpendicular el vector resultante se toma como vector normal del plano.
- Si buscamos una recta perpendicular el vector resultante se toma como vector director de la recta.

1.1.2. Dado 3 puntos, encontrar la ecuacion general del plano

Para encontrar la ecuación general del plano dados 3 puntos, se debe seguir los siguientes pasos:

Caso ejemplo:

$$P_1 = (0,0,0) \qquad P_2 = (2,0,0) \qquad P_3 = (0,2,0)$$

1. Obtener 2 vectores del plano.

$$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (2,0,0) \qquad \overrightarrow{P_1P_3} = P_3 - P_1 = (0,2,0)$$

2. Calcular el producto cruz entre los 2 vectores, para determinar el (**vector normal**).

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,4) = \overrightarrow{n} \qquad \text{Vector normal}$$

3. Usando el vector normal y uno de los puntos, se puede obtener la ecuación general del plano.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad \text{Ecuación general del plano}$$

Donde $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ y (x_0, y_0, z_0) es un punto cualquiera del plano. Remplazando:

$$0(x-0) + 0(y-0) + 4(z-0) = 0 \qquad \text{Remplazamos los valores}$$

$$\text{Asi,} \quad \pi : 4z = 0$$

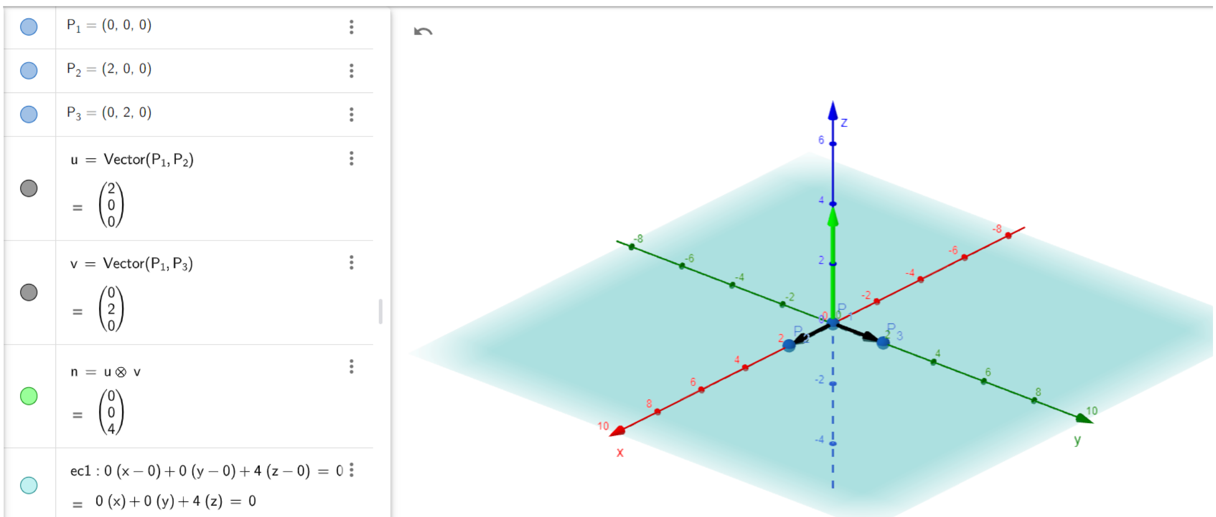

Figura 1: Plano Resultante dado 3 puntos

1.1.3. Dado un punto que pertenece al plano y dos planos ortogonales (perpendiculares), encontrar la ecuacion general del plano

Para encontrar la ecuación general del plano dados un punto y dos planos ortogonales, se debe seguir los siguientes pasos:

Caso ejemplo:

$$P_1 = (0,0,0) \qquad \pi_1 : 2x + 2y + 2z + 2 = 0 \qquad \pi_2 : x - y = 0$$

1. Obtener los vectores normales del plano 1 y 2.

$$\pi_1 : 2x + 2y + 2z + 2 = 0 \qquad \text{Ecuación general del plano}$$
$$\vec{n} = (2,2,2) \qquad \text{Vector normal}$$

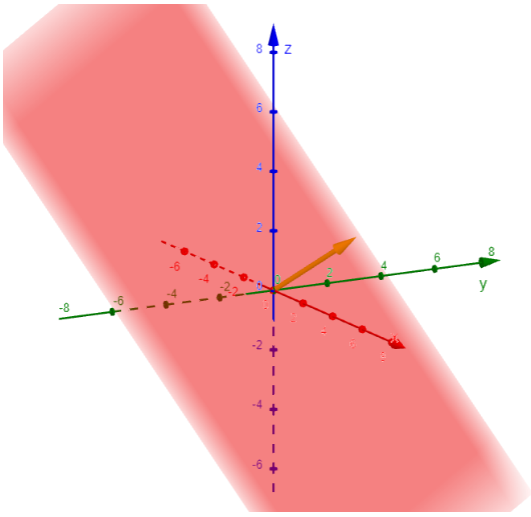

Figura 2: Plano 1

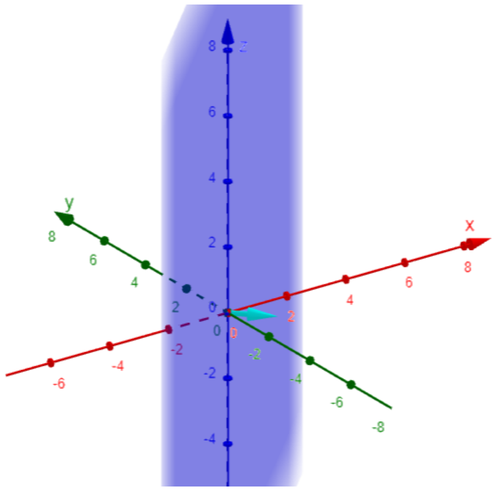

Figura 3: Plano 2

2. Calcular el producto cruz entre los 2 vectores, para determinar el (**vector normal**).

$$\vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (2,2,-4) = \vec{n} \qquad \text{Vector normal}$$

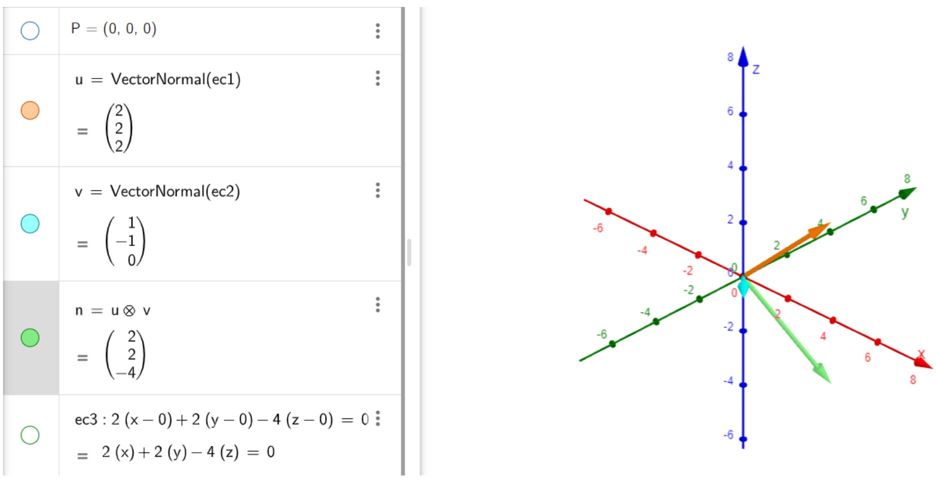

Figura 4: Producto cruz

3. Usando el vector normal y uno de los puntos, se puede obtener la ecuación general del plano.

$$2(x-0)+2(y-0)+-4(z-0)=0 \qquad \text{Remplazamos los valores}$$
$$\text{Asi,} \quad \pi : 2x+2y-4z=0$$

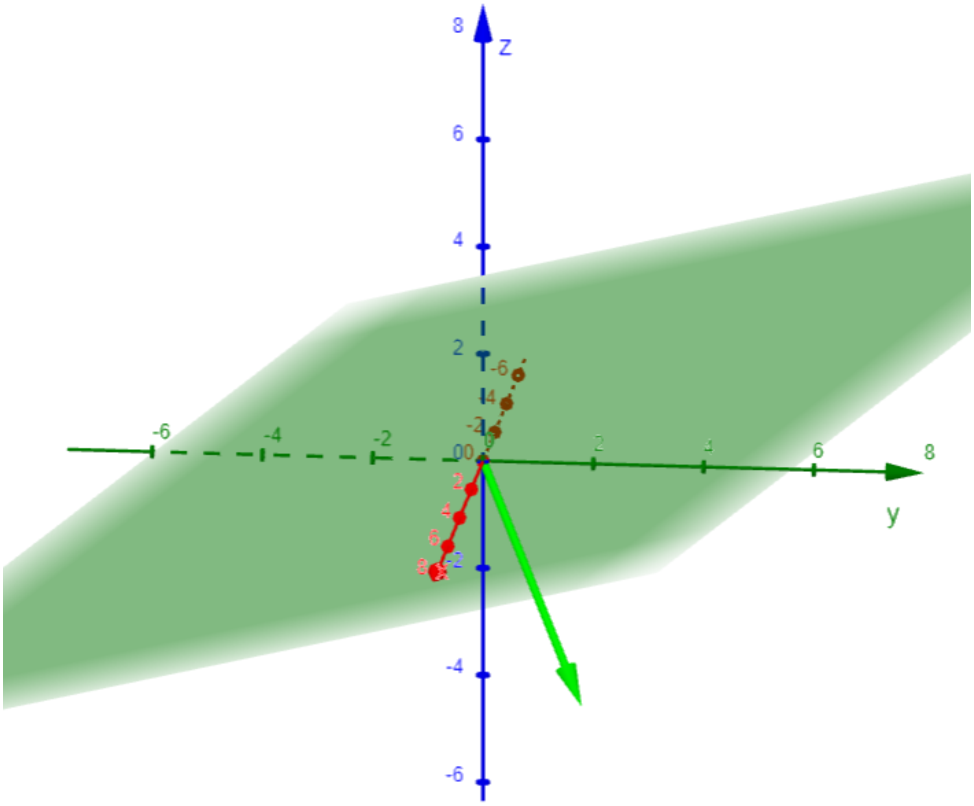

Figura 5: Plano Resultante dado 1 punto y 2 planos ortogonales

2. Ecuacion de la recta

2.1. Ecuacion vectorial de la recta

La ecuación vectorial de la recta es de la forma:

$$\mathcal{L}(t) = \overrightarrow{P_1} + t\overrightarrow{v}$$

Donde $\overrightarrow{P_1}$ es un punto cualquiera de la recta, $\overrightarrow{v}$ es el vector director de la recta y $t \in \mathbb{R}$.
***Nota:** El vector normal es perpendicular, mientras que el vector director es paralelo.

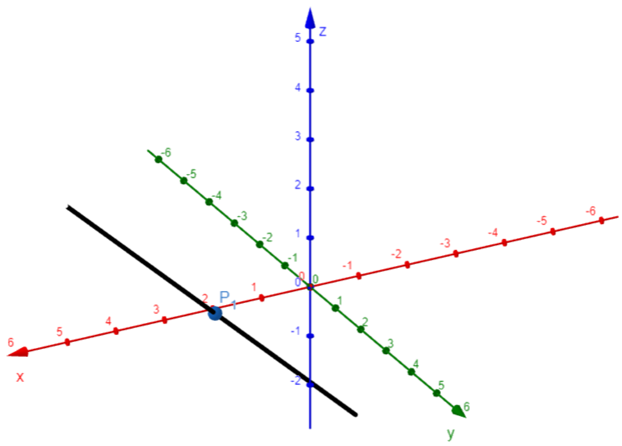

Figura 6: Recta vectorial

2.2. Ecuacion parametrica de la recta

La ecuación parametrica de la recta es de la forma:

$$\mathcal{L}(t) = \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Donde $P_1 = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto cualquiera de la recta y (a, b, c) es el vector director de la recta.

2.3. Ecuacion simetrica de la recta

La ecuación simetrica de la recta es de la forma:

$$\mathcal{L} : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Donde $P_1 = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto cualquiera de la recta y (a, b, c) es el vector director de la recta, con $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$

2.4. Ecuacion de la recta dado la interseccion de dos planos

Dado los planos:

$$\pi_1 : 2x + 5y + 4z + 15 = 0 \qquad \pi_2 : -2x + 5y - 2z + 35 = 0$$

1. Determinamos los vectores normales de los planos.

$$\begin{aligned} \pi_1 &: 2x + 5y + 4z + 15 = 0 & \overrightarrow{n_1} &= (2, 5, 4) \\ \pi_2 &: -2x + 5y - 2z + 35 = 0 & \overrightarrow{n_2} &= (-2, 5, -2) \end{aligned}$$

2. Determinamos el vector director de la recta, usando el producto cruz entre los vectores normales de los planos.

$$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = (-30, -4, 20) = \overrightarrow{v} \qquad \text{Vector director}$$

3. Determinamos un punto de la recta, usando el sistema de ecuaciones de los planos.

$$\begin{cases} 2x + 5y + 4z + 15 &= 0 \\ -2x + 5y - 2z + 35 &= 0 \end{cases} \qquad \text{Sistema de ecuaciones}$$

Podemos suponer que x,y,z = 0 :

$$\begin{cases} 2x + 5y + 4(0) + 15 &= 0 \\ -2x + 5y - 2(0) + 35 &= 0 \end{cases} \qquad \text{Remplazamos z = 0}$$

$$\begin{cases} 2x + 5y + 15 &= 0 \\ -2x + 5y + 35 &= 0 \end{cases} \qquad \text{Igualamos las ecuaciones}$$

$$\begin{aligned} 2x + 5y + 15 &= -2x + 5y + 35 && \text{Restamos 5y} \\ 4x &= 20 && \text{Dividimos por 4} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Remplazamos x = 5 en (1):

$$\begin{aligned} 2(5) + 5y + 15 &= 0 \\ 10 + 5y + 15 &= 0 && \text{Restamos 25} \\ 5y &= -25 && \text{textDividimos por 5} \\ y &= -5 \end{aligned}$$

Asi obtenemos el punto $P_1 = (5, -5, 0)$

4. Usando el punto y el vector director, podemos obtener la ecuación vectorial de la recta.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(t) = \overrightarrow{P_1} + t\overrightarrow{v} \\
&\mathcal{L}(t) = (5, -5, 0) + t(-30, -4, 20) \\
&\mathcal{L}(t) = (5 - 30t, -5 - 4t, 20t)
\end{aligned}$$

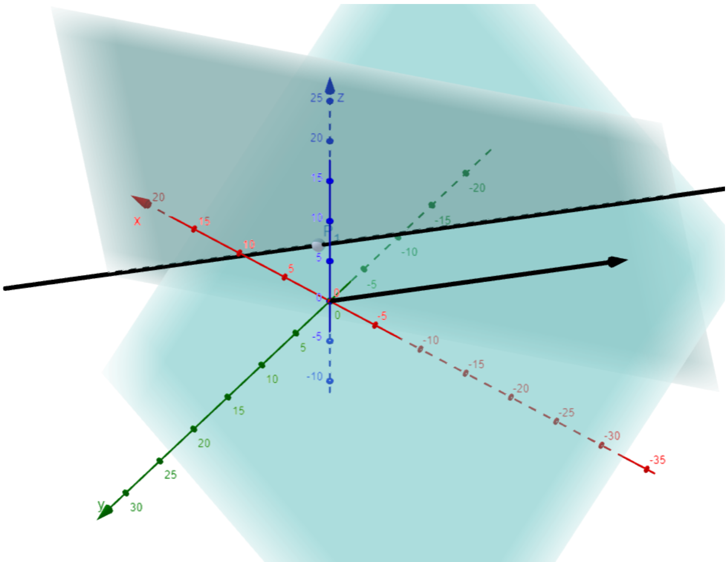

Figura 7: Recta dado la interseccion de dos planos perspectiva 1

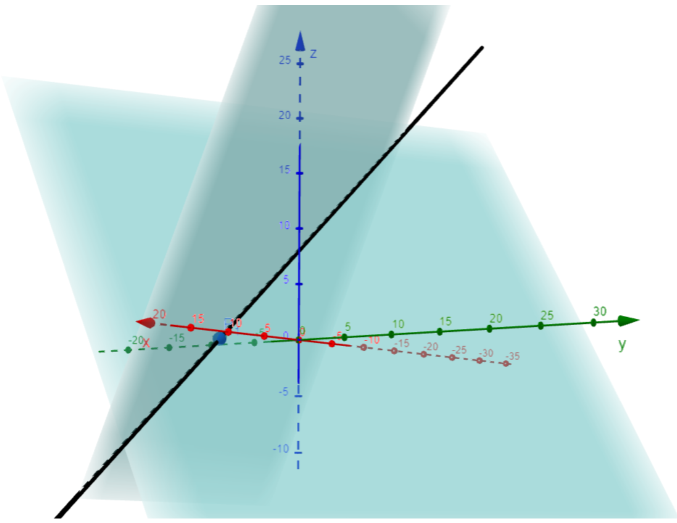

Figura 8: Recta dado la interseccion de dos planos perspectiva 2