Variables Aleatoreas

Marcelo Paz

Estadistica y Probabilidades

18 de diciembre de 2023

1. Teoría

- **Definición 1:** Una variable aleatoria (v.a.) es una función que transforma los resultados del espacio muestral asociado a un experimento en números.
- **Definición 2:** Las variables aleatorias pueden ser de dos tipos: Discretas y Continuas. Una variable aleatoria discreta es aquella que solo puede tomar valores enteros. Una variable aleatoria continua es aquella cuyos resultados pertenecen a uno o más conjuntos de los reales.
- **Definición 3:** : Llamaremos función de probabilidad o función de cuantía de la v.a. discreta X, a $P(X = x)$ o bien a $p(x)$ si satisface las siguientes dos condiciones:

$$P(X = x) \geq 0, \forall x \in R_X$$
$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x) = 1$$

- **Definición 4:** Llamaremos función de densidad de la v.a. continua X, a $f(x)$, si satisface las siguientes dos condiciones:

$$f(x) \geq 0, \forall x \in R_X$$
$$\int_{R_x} f(x)dx = 1$$

- **Definición 5:** Llamaremos función de distribución acumulada (f.d.a.) a la probabilidad de que X sea menor o igual que x y la denotaremos por $F(x)$. Formalmente,

$$F(x) := P(X \leq x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(X = x), & \text{si X es discreta} \\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(u)du, & \text{si U es continua} \end{cases}$$

Propiedades de $F(x)$, cuando X es discreta:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $P(X > x) = 1 - F(X)$
3. $P(X = x) = F(x) - F(x - 1)$
4. $P(x_i < X \leq x_j) = F(x_j) - F(x_{i-1})$

Propiedades de $F(x)$, cuando X es continua:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $P(X > x) = 1 - F(X)$
3. $P(X = x) = 0$
4. $P(x_i < X \leq x_j) = F(x_j) - F(x_{i-1}) = \int_{x_i}^{x_j} f(x)dx$
5. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \quad y \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$
6. $\frac{\partial}{\partial x}F(x) = f(x)$

- **Definición 6:** Llamaremos Esperanza de una variable aleatoria X al promedio o media de ella y la denotaremos por $E(X)$. Formalmente, está definida por:

$$E(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i), & \text{si X es discreta} \\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx, & \text{si U es continua} \end{cases}$$

Propiedades de $E(X)$

Consideremos c constante:

1. $E(c) = c$
2. $E(X + c) = E(X) + c$
3. $E(cX) = cE(X)$
4. $E(g(X) + h(X)) = E(g(X)) + E(h(X))$

 Donde:

$$E(g(X)) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} g(x) P(X = x), & \text{si X es discreta} \\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)dx, & \text{si U es continua} \end{cases}$$

- **Definición 7:** Llamaremos Varianza de la variable aleatoria X a $V(X)$ o $Var(X)$ que está definida por:

$$V(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Propiedades de $V(X)$

Consideremos c constante:

1. $V(c) = 0$
2. $V(X + c) = V(X)$
3. $V(cX) = c^2 V(X)$
4. $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$, si X e Y son independientes