Programación Lineal

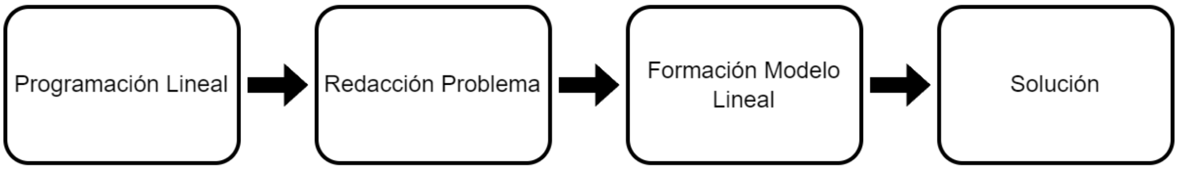
Marcelo Paz

Investigación de Operaciones

11 de abril de 2024

Versión: 1.3.0

Diagrama de flujo: Programación Lineal



1. Modelo de Programación Lineal

$$\begin{pmatrix} \text{Max} \\ \text{o} \\ \text{Min} \end{pmatrix} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{s.a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} b_m \end{array}\right\} \text{Restricciones}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

Donde:

- Z es la función objetivo.
- $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son los coeficientes de Costo.
- a_{ij} son los coeficientes Tecnologicos.
- b_i son Constantes RHS(Right Hand Side).
- x_j son las Variables de Decisión.

Problema 1: Método gráfico

Un colegio va a realizar un paseo. En total participarán 400 personas entre alumnos y profesores. Se requiere contratar buses para el traslado de dichas personas. Al llamar a una empresa de transportes se obtiene la siguiente información: La empresa dispone de 8 buses con 40 asientos y 10 buses con 50 asientos. Para el día del paseo habrá 9 choferes disponibles. El costo de arriendo es de \$ 30.000 por cada bus de 40 asientos y de \$40.000 por cada bus de 50 asientos. Antes de contratar los buses, el Director del colegio debe decidir cuántos buses de cada tipo les conviene arrendar para que el arriendo resulte lo más económico posible. Cuál será la decisión de menor costo?

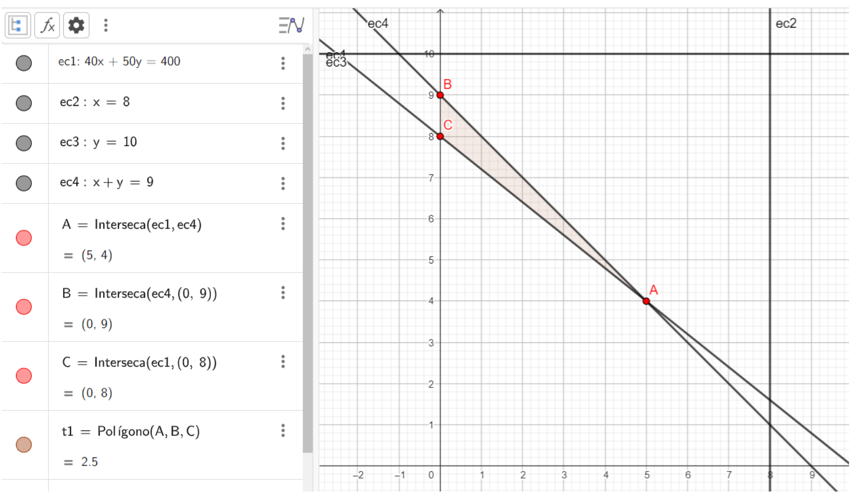
Variables de Decisión:

- x_1 = Cantidad de buses de 40 asientos por contratar.
- x_2 = Cantidad de buses de 50 asientos por contratar.

Función Objetivo:

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & Z = 30000x_1 + 40000x_2 \\
\text{s.a} \quad & 40x_1 + 50x_2 \geq 400 \\
& x_1 \leq 8 \\
& x_2 \leq 10 \\
& x_1 + x_2 \leq 9 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Solución por método gráfico:



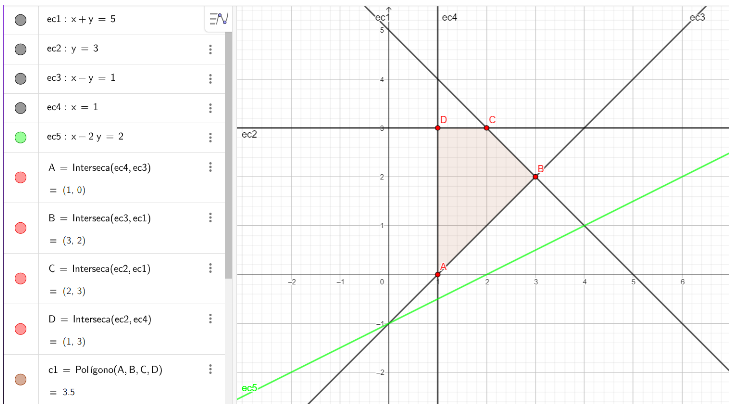
Vertice (x_1, x_2)	Z	
A(5, 4)	310000	*
B(0, 9)	360000	
C(0, 8)	320000	

Problema 2:

Función Objetivo: Restricción redundante

$$
\begin{array}{rll}
\text{Min} & Z = 2x_1 - 6x_2 & \\
\text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 5 & \textbf{No Activa} \\
& x_2 \leq 3 & \textbf{Activa} \\
& x_1 - x_2 \leq 1 & \textbf{No Activa} \\
& x_1 \geq 1 & \textbf{Activa} \\
& x_1 - 2x_2 \leq 2 & \textbf{No Activa} \\
& x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

Solución por método gráfico:



OBS:

- La restriccion (5) de color verde es redundante.
- Lo de activo y no activo tengo que investigarlo mas o pedirle a alguien que me lo explique.

Vertice (x_1, x_2)	Z	
A(1, 0)	2	
B(3, 2)	-6	
C(2, 3)	-14	
D(1, 3)	-16	*

1.1. Algunas definiciones:

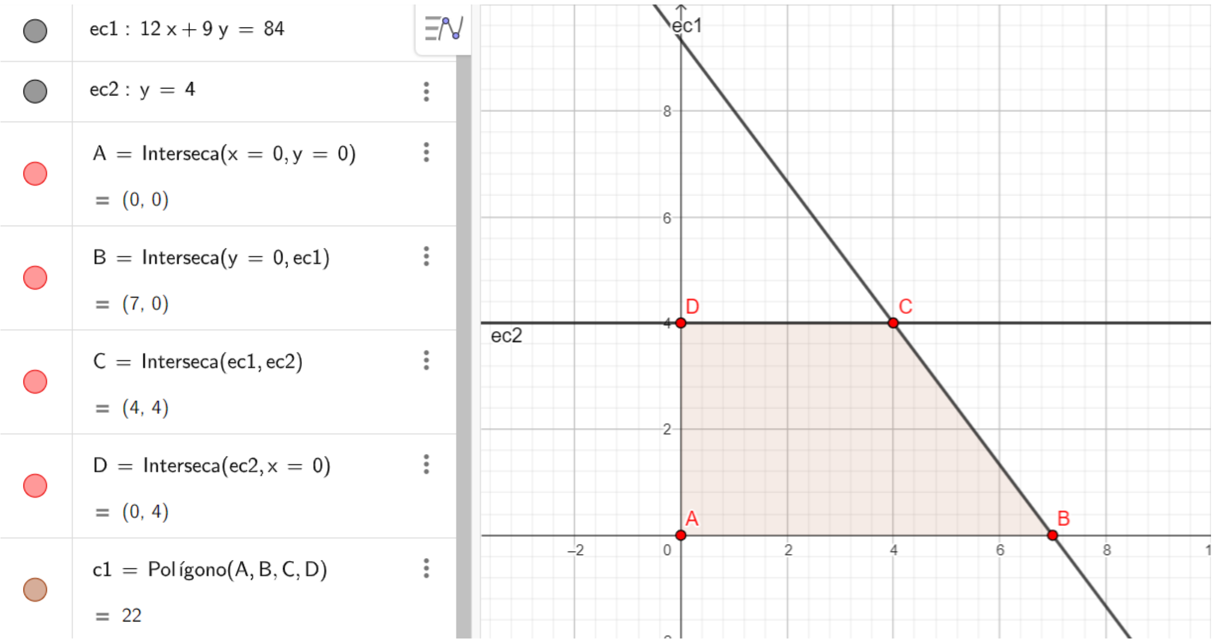
- **Solución factible:** todos los puntos (x_1, x_2) deben satisfacer todas las restricciones.
- **Región factible:** conjunto de todas las soluciones factibles.
- **Vértices:** puntos de esquina o extremos de la región factible.
- **Optimo de un modelo lineal:** es un vértice de la región factible que maximiza o minimiza la función objetivo.

Problema 3: Optimos Alternativos

Función Objetivo:

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & Z = 4x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & 12x_1 + 9x_2 \leq 84 && \textbf{Activa} \\
& x_2 \leq 4 && \textbf{Activa} \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Solución por método gráfico:



Vertice (x_1, x_2)	Z	
A(0, 0)	0	
B(7, 0)	28	*
C(4, 4)	28	*
D(0, 4)	12	

OBS:

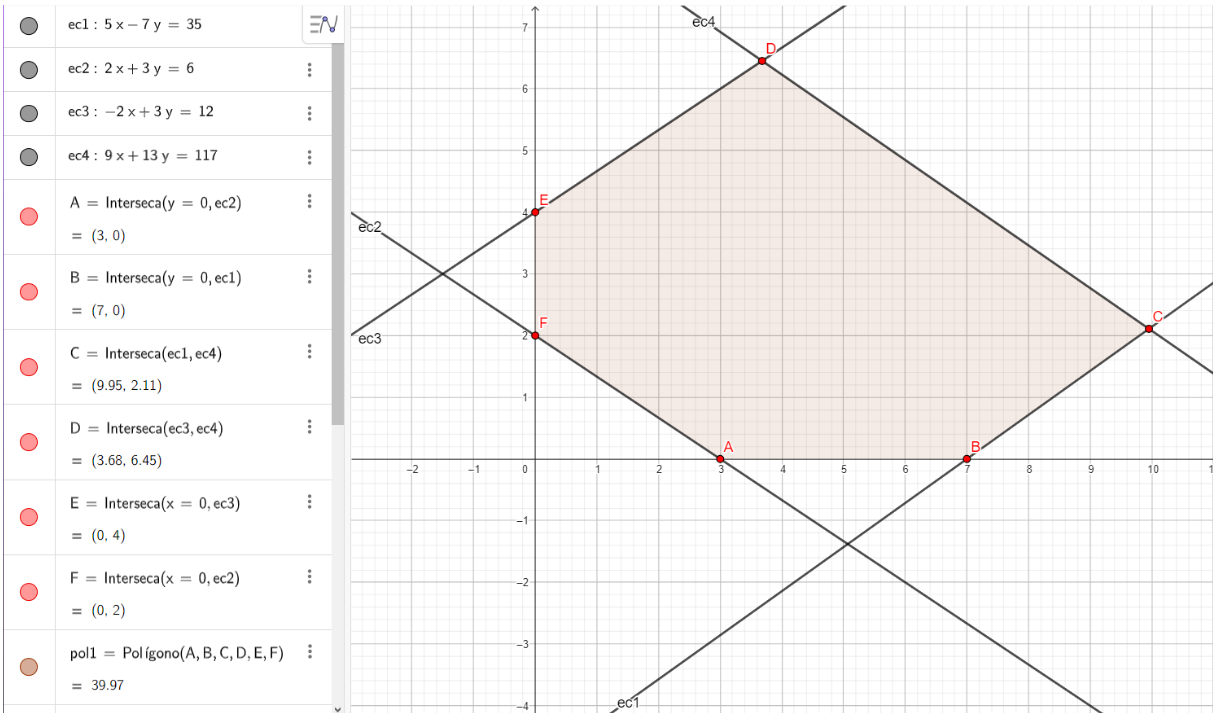
- Se puede observar que el vertice B y C son optimos alternativos.

Problema 4: Variables sin restriccion de signo (S.R.S)

Función Objetivo:

$$
\begin{array}{rll}
\text{Max} & Z = -3x_1 + 4x_2 & \\
\text{s.a} & 5x_1 - 7x_2 \leq 35 & \textbf{No Activa} \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 6 & \textbf{No Activa} \\
& -2x_1 + 3x_2 \leq 12 & \textbf{Activa} \\
& 9x_1 + 13x_2 \leq 117 & \textbf{No Activa} \\
& x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

Solución por método gráfico:



Vertice (x_1, x_2)	Z	
A(3, 0)	-9	
B(7, 0)	-21	
C(637/64, 120/67)	-22,695	
D(195/53, 342/53)	14,774	
E(0, 4)	16	*
F(0, 2)	8	

Problema 5: Región factible no acotada

Un atleta debe tomar por lo menos 4 unidades de vitamina A, 6 unidades de vitamina B y 12 unidades de vitamina C cada día. Hay dos productos en polvo, P1 y P2, que por cada frasco, contienen las siguintes unidades de esas vitaminas:

	Vitamina A	Vitamina B	Vitamina C
P1	4	1	4
P2	1	6	6

Si el precio de un frasco de P1 es de \$5000 y el de un frasco de P2 es de \$8000, se quiere averiguar cómo deben mezclarse ambos productos para obtener las vitaminas deseadas con el minimo precio. Formular Modelo y resolver por método gráfico.

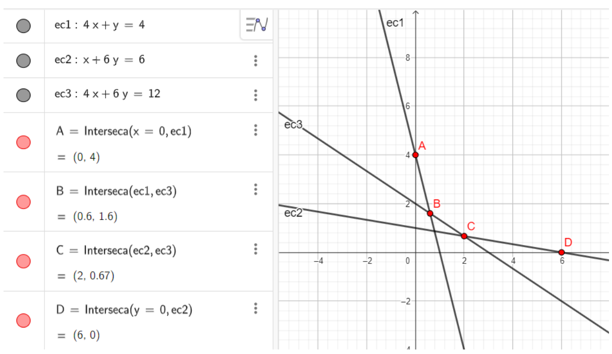
Variables de Decisión:

- x_1: Cantidad de frascos de P1 a comprar.
- x_2: Cantidad de frascos de P2 a comprar.

Función Objetivo:

$$
\begin{array}{rll}
\text{Max} & Z = 5000x_1 + 8000x_2 & \\
\text{s.a} & 4x_1 + x_2 \geq 4 & \textbf{No Activa} \\
& x_1 + 6x_2 \geq 6 & \textbf{Activa} \\
& 4x_1 + 6x_2 \geq 12 & \textbf{Activa} \\
& x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

Solución por método gráfico:



Vertice (x_1, x_2)	Z	
A(0, 4)	32000	
B(3/5, 8/5)	15800	
C(2, 2/3)	15333	*
D(6, 0)	30000	

Problema 6: Formulación con más de 2 variables de decisión

La empresa MADERAS C.A es un fabricante de muebles. Hace tres estilos diferentes de mesas, A,B y C. Cada modelo de mesa requiere de una cierta cantidad de tiempo para el corte de las piezas, su montaje y pintura. MADERAS C.A, puede vender todas las unidades que fabrica. Es más, el modelo B se puede vender sin pintar. Utilizando los datos indicados, obtener el modelo lineal que permita determinar la máxima utilidad mensual que puede obtener la Empresa.

Modelo	Utilidad por mesa	Corte	Ensamblado	Pintura
A	17500	1	2	4
B	20000	2	4	4
B sin pintar	10000	2	4	0
C	25000	3	7	5
	Disponibilidad mensual de HH	200	298	148

Variables de Decisión:

- x_1: Cantidad de mesas A a fabricar.
- x_2: Cantidad de mesas B a fabricar.
- x_3: Cantidad de mesas B sin pintar a fabricar.
- x_4: Cantidad de mesas C a fabricar.

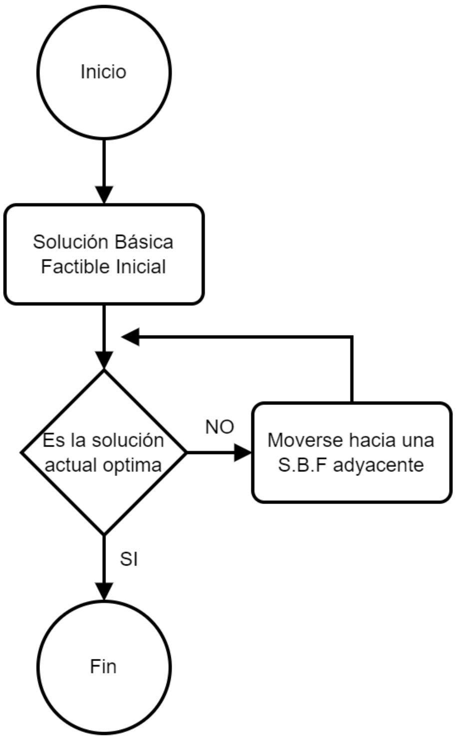
Función Objetivo:

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & Z = 17500x_1 + 20000x_2 + 10000x_3 + 25000x_4 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 200 \\
& 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 7x_4 \leq 298 \\
& 4x_1 + 4x_2 + 5x_4 \leq 148 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

OBS:

- Cuando son más de 2 variables de decisión, el método gráfico no es la mejor opción, pues para calcular las intersecciones se vuelve caotico.

1.2. Diagrama de flujo: Método Simplex



Un poco de Teoría

- **Variables de holgura** s_i: Al introducir variables de holgura cada restriccion se transforma en igualdad.
  - **n**: cantidad de variables.
  - **m**: cantidad de restricciones.
- Un sistema con $n > m$ tiene infinitas soluciones. Para estos sistemas se define:
  - Como $n - m$: cantidad de variables libres. Para encontrar soluciones al sistema se dan valores arbitrarios a las variables libres y se resuelve para el resto de variables.
  - Si damos el valor cero a las variables obtenemos lo que llamaremos soluciones básicas.
  - Si ademas los valores de las variables son mayor o igual a cero tenemos una solucion basica factible (S.B.F).

    OBS:
    - S.B.F corresponde a un vertice de la región factible.
    - Para un sistema $n \times m$ la cantidad de S.B.F es menor o igual a $\binom{n}{m}$.
    - Dos vertices o S.B.F son adyacentes cuando tienen una arista de la R.F. en común.

Problema 7: Método Simplex

Función Objetivo:

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & Z = 4x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & 12x_1 + 14x_2 \leq 84 && \textbf{Activa} \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 18 && \textbf{Activa} \\
& x_2 \leq 4 && \textbf{No Activa} \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Solución por método Simplex:

IMPORTANTE 'Pasos incompletos.'
Paso 1: Agregar variables de holgura y eliminar desigualdades.

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & Z = 4x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & 12x_1 + 14x_2 + s_1 = 84 \\
& 3x_1 + 2x_2 + s_2 = 18 \\
& x_2 + s_3 = 4 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Paso 2: Crear tabla Simplex inicial.

		4	3	0	0	0		
c_j	**V.B**	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS	$\frac{RHS}{coef_{ij^*}}$
0	s_1	12	14	1	0	0	84	$84/12 = 7$
0	s_2	3	2	0	1	0	18	$18/3 = 6$
0	s_3	0	1	0	0	1	4	$4/0 =$ -
	Z_j	0	0	0	0	0	$\underline{0}$	
	$c_j - Z_j$	4	3	0	0	0		

OBS:

- Para calcular $Z_j = c_j \times x_j$

  Ejemplo: $Z_{x_1} = c_1 \times x_1 + c_2 \times x_1 + c_3 \times x_1 = 0 \times 12 + 0 \times 3 + 0 \times 0 = 0$

- Creo que deberia ser la columna c_i y no c_j.
- De hecho c_j deberia estar arriba de **V.B**.

Paso 3: Buscamos la variable que entra.

$$V_{in} = \text{columna Max}\{c_j - Z_j\} = X_{j^*} \Rightarrow V_{in} = 4 = x_1$$

OBS:

- Como estamos máximizando la función objetivo, buscamos el valor más grande en la fila de $c_j - Z_j$.

Paso 4: Buscamos la variable que sale.

$$V_{out} = \text{Min}\left\{\frac{RHS}{coef_{ij^*}}\right\} = i^* \Rightarrow V_{out} = 6 = s_2$$

OBS:

- Como estamos máximizando la función objetivo, buscamos el valor más pequeño en la columna de $\dfrac{RHS}{coef_{ij^*}}$, pues es la holgura que es menos influyente.

Paso 5: Calculamos el pivote.

$$\text{Pivote} = a_{i^*j^*} = a_{21} = 3$$

Paso 6: Creamos una ecuación pivote.

$$\textbf{N.E.P} = \frac{\textbf{E.P.A}}{P} \Rightarrow \frac{3 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 18}{3} = 1 \quad \tfrac{2}{3} \quad 0 \quad \tfrac{1}{3} \quad 0 \quad 6$$

OBS:

- **N.E.P**: Nueva Ecuación Pivote (como entra x_1 en la tabla se escribe esta ecuación).
- **E.P.A**: Ecuación Pivote Actual (como sale s_2 ocupamos esa ecuación).
- $P = Pivote$

Paso 7: Actualizamos las ecuación que se quedan.

$$\begin{array}{rrrrrrr} s_1: & 12 & 14 & 1 & 0 & 0 & 84 \\ -(12) & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 6 \\ \hline & 0 & 6 & 1 & -4 & 0 & 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} s_3: & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -(0) & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 6 \\ \hline & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

Paso 8: Actualizamos la tabla simplex con las nuevas ecuaciones.

		4	3	0	0	0		
c_j	**V.B**	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS	$\frac{RHS}{coef_{ij^*}}$
0	s_1	0	6	1	-4	0	12	$12/6 = 2$
4	x_1	1	2/3	0	1/3	0	6	$6/(2/3) = 9$
0	s_3	0	1	0	0	1	4	$4/1 = 4$
	Z_j	4	8/3	0	4/3	0	<u>24</u>	
	$c_j - Z_j$	0	1/3	0	-4/3	0		

Paso 9: Utilizamos el criterio de optimalidad.

$$c_j - Z_j \leq 0 \quad \forall j$$

Como $c_j - Z_j$ no es menor o igual a 0, entonces repetimos el ciclo desde el paso 3.
Paso 10: Buscamos la variable que entra.

$$V_{in} = \text{columna Max}\{c_j - Z_j\} = X_{j^*} \Rightarrow V_{in} = 3 = x_2$$

Paso 11: Buscamos la variable que sale.

$$V_{out} = \text{Min}\left\{\frac{RHS}{coef_{ij^*}}\right\} = i^* \Rightarrow V_{out} = 2 = s_1$$

Paso 12: Calculamos el pivote.

$$\text{Pivote} = a_{i^*j^*} = a_{12} = 6$$

Paso 13: Creamos una ecuación pivote.

$$\textbf{N.E.P} = \frac{\textbf{E.P.A}}{P} \Rightarrow \frac{0 \quad 6 \quad 1 \quad -4 \quad 0 \quad 12}{6} = \quad 0 \quad 1 \quad 1/6 \quad -2/3 \quad 0 \quad 2$$

Paso 14: Actualizamos las ecuación que se quedan.

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 : & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 6 \\ -(2/3) & 0 & 1 & 1/6 & -2/3 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & -1/9 & 7/9 & 0 & 14/3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc} s_3 : & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -(1) & 0 & 1 & 1/6 & -2/3 & 0 & 2 \\ \hline & 0 & 0 & -1/6 & 2/3 & 1 & 2 \end{array}$$

Paso 15: Actualizamos la tabla simplex con las nuevas ecuaciones.

		4	3	0	0	0		
c_j	**V.B**	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS	$\frac{RHS}{coef_{ij^*}}$
3	x_2	0	1	1/6	-2/3	0	2	
4	x_1	1	0	-1/9	7/9	0	14/3	
0	s_3	0	0	-1/6	2/3	1	2	
	Z_j	4	3	1/18	10/9	0	$\underline{74/3}$	
	$c_j - Z_j$	0	0	-1/18	-10/9	0		

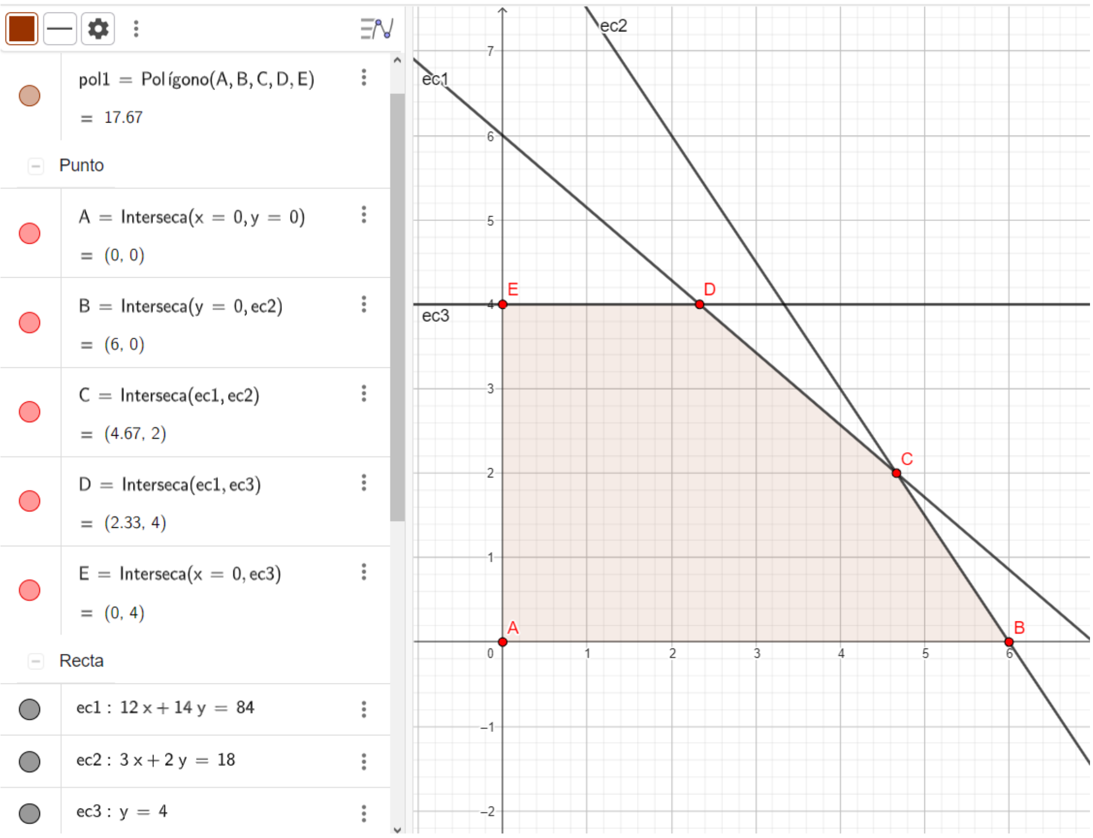
Paso 16: Utilizamos el criterio de optimalidad.

$$c_j - Z_j \leq 0 \quad \forall j$$

Como $c_j - Z_j$ es menor o igual a 0, entonces hemos llegado a la solución óptima. **Solución:**

$$\begin{aligned}
x_1 &= 14/3 \\
x_2 &= 2 \\
s_1 &= 0 \qquad \textbf{Recurso escaso} \Rightarrow \textbf{Restricción Activa} \\
s_2 &= 0 \qquad \textbf{Recurso escaso} \Rightarrow \textbf{Restricción Activa} \\
s_3 &= 2 \qquad \textbf{Recurso abundante} \Rightarrow \textbf{Restricción No Activa} \\
Z &= 74/3
\end{aligned}$$

Solución por método gráfico



Vertice (x_1, x_2)	Z	
A(0, 0)	0	
B(6, 0)	24	
C(14/3, 2)	74/3	*
D(7/3, 4)	64/3	
E(0, 4)	12	

Por lo tanto, queda demostrado que el método Simplex y el método gráfico nos entregan el valor optimo.

Problema 8: Configuración de tabla Simplex

Función Objetivo:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s.a} \quad & 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución por método Simplex:

Paso 1: Si el problema es un problema de minimización, multiplica la función objetivo por -1.
Paso 2: Si la formulación del problema contiene algunas restricciones con lados derechos negativos, multiplique cada restricción por -1.
Paso 3: Agregue una variable de holgura S_i a cada restricción $\leq$.

$$\begin{aligned} & 6x_1 + 4x_2 + s_1 \leq 24 \\ & x_1 + 2x_2 + s_2 \leq 6 \\ & -x_1 + x_2 + s_3 \leq 1 \\ & x_2 + s_4 \leq 2 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Paso 4: Reste una variable de exceso R_i y sume una variable artificial para cada $\geq$ restricción.
Paso 5: Agregue una variable artificial a cada restricción $=$.
Paso 6: Establecer cada variable de holgura y excedente con coeficiente igual a cero en la función objetivo.

$$\begin{aligned} & 6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24 \\ & x_1 + 2x_2 + s_2 = 6 \\ & -x_1 + x_2 + s_3 = 1 \\ & x_2 + s_4 = 2 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Paso 7: Establecer el coeficiente de cada variable artificial en la función objetivo igual a -M, donde M es una número muy grande.
Paso 8: Cada variable de holgura y artificial se convierte en una de las variables básicas en el cálculo solución básica factible inicial.

Paso 9: Escribir la tabla simplex inicial.

C_j		5	4	0	0	0	0	
	V.B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
0	s_1	6	4	1	0	0	0	24
0	s_2	1	2	0	1	0	0	6
0	s_3	-1	1	0	0	1	0	1
0	s_4	0	1	0	0	0	1	2

Paso 10: Calcular la fila Z_j para la nueva Tabla.
OBS:

- Para cada columna j, multiplica los coeficientes en la función objetivo de las variables básicas por los números correspondientes en la columna j y sumarlos

C_j		5	4	0	0	0	0	
	V.B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
0	s_1	6	4	1	0	0	0	24
0	s_2	1	2	0	1	0	0	6
0	s_3	-1	1	0	0	1	0	1
0	s_4	0	1	0	0	0	1	2
	Z_j	0	0	0	0	0	0	$\underline{0}$
	$C_j - Z_j$							

$$0 \times 6 + 0 \times 1 + 0 \times (-1) + 0 \times 0 = 0$$

Paso 11: : Calcular la fila $C_j - Z_j$ para nueva tabla.
Para cada columna j, reste la fila C_j de la fila Z_j.:

- Si ninguno de los valores en la fila $C_j - Z_j$ es positivo, FIN. Redactar la solución óptima.
- Si el valor $C_j - Z_j$ de alguna variable no básica es 0, existen soluciones óptimas alternativas.
- Si existe una variable artificial en la base con un valor positivo, el problema es inviable.

C_j		5	4	0	0	0	0	
	V.B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
0	s_1	6	4	1	0	0	0	24
0	s_2	1	2	0	1	0	0	6
0	s_3	-1	1	0	0	1	0	1
0	s_4	0	1	0	0	0	1	2
	Z_j	0	0	0	0	0	0	$\underline{0}$
	$C_j - Z_j$	5	4	0	0	0	0	

$$5 - 0 = 5$$

Paso 12: Determinar la variable entrante identificando la variable con el valor más positivo en la fila $C_j - Z_j$ (La columna de entrada se llama la columna pivote)

$$\boxed{V_{in}} = \text{columna Max}\{C_j - Z_j\} = X_{j^*} \Rightarrow V_{in} = x_1 : 5$$

OBS:

- Como estamos máximizando la función objetivo, buscamos el valor más grande en la fila de $C_j - Z_j$.

Paso 13: Determinar la variable saliente.

- Por cada número positivo en la columna de entrada, calcular la relación de los valores del lado derecho dividido por estos valores de columna entrantes.
- Si no hay valores positivos en la entrada columna, DETENER; el problema es ilimitado.
- En caso contrario, seleccione la variable con el mínimo relación.(La fila saliente se llama fila pivote).

C_j		5	4	0	0	0	0	
	V.B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
0	s_1	6	4	1	0	0	0	24
0	s_2	1	2	0	1	0	0	6
0	s_3	-1	1	0	0	1	0	1
0	s_4	0	1	0	0	0	1	2
	Z_j	0	0	0	0	0	0	$\underline{0}$
	$C_j - Z_j$	5	4	0	0	0	0	

$$s_1 : \frac{24}{6} = 4 \qquad s_2 : \frac{6}{1} = 6 \qquad s_3 : \frac{1}{-1} = \text{-} \qquad s_4 : \frac{2}{0} = \text{-}$$

$$\boxed{V_{out}} = \text{Min}\left\{\frac{RHS}{coef_{ij^*}}\right\} = i^* \Rightarrow V_{out} = s_1 : 4$$

C_j		5	4	0	0	0	0	
	V.B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
0	s_1	6	4	1	0	0	0	24
0	s_2	1	2	0	1	0	0	6
0	s_3	-1	1	0	0	1	0	1
0	s_4	0	1	0	0	0	1	2
	Z_j	0	0	0	0	0	0	$\underline{0}$
	$C_j - Z_j$	5	4	0	0	0	0	

$$\text{Pivote} = a_{i^*j^*} = a_{11} = 6$$

Paso 14: Generar la siguiente tabla.

- Divida la fila de pivote por el elemento de pivote (el entrada en la intersección de la fila de pivote y el pivote columna) para obtener una nueva fila. Denotamos esta nueva fila (*)

$$\textbf{N.E.P} = \frac{\textbf{E.P.A}}{P} \Rightarrow \frac{6 \quad 4 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 24}{6} = 1 \quad \tfrac{2}{3} \quad \tfrac{1}{6} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4$$

  OBS:

  - **N.E.P**: Nueva Ecuación Pivote (como entra x_1 en la tabla se escribe esta ecuación).
  - **E.P.A**: Ecuación Pivote Actual (como sale s_1 ocupamos esa ecuación).
  - $P = Pivote$

- Reemplace cada fila i que no sea pivote con: [nueva fila i] = [fila actual i] - [(a_{ij}) x (fila (*))], donde a_{ij} es el valor al ingresar la columna j de la fila i.

$$\begin{array}{rccccccc} s_2: & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ -(1) & 1 & 2/3 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ \hline & 0 & 4/3 & -1/6 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccc} s_3: & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -(-1) & 1 & 2/3 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ \hline & 0 & 5/3 & 1/6 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccc} s_4: & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -(0) & 1 & 2/3 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ \hline & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

C_j		5	4	0	0	0	0	
	V.B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
5	x_1	1	2/3	1/6	0	0	0	4
0	s_2	0	4/3	-1/6	1	0	0	2
0	s_3	0	5/3	1/6	0	1	0	5
0	s_4	0	1	0	0	0	1	2
	Z_j	5	5/3	5/6	0	0	0	20
	$C_j - Z_j$	0	7/3	-5/3	0	0	0	

Paso 15: Ir a Paso 10.

$$V_{in} = \text{columna Max}\{C_j - Z_j\} = X_{j^*} \Rightarrow V_{in} = x_2 : \frac{7}{3}$$

$$x_1 : \frac{4}{\frac{2}{3}} = 6 \qquad s_2 : \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2} \qquad s_3 : \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3 \qquad s_4 : \frac{2}{1} = 2$$

$$V_{out} = \text{Min}\left\{\frac{RHS}{coef_{ij^*}}\right\} = i^* \Rightarrow V_{out} = s_2 : \frac{3}{2}$$

$$\text{Pivote} = a_{i^*j^*} = a_{22} = 4/3$$

C_j		5	4	0	0	0	0	
	V.B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
5	x_1	1	2/3	1/6	0	0	0	4
0	s_2	0	4/3	-1/6	1	0	0	2
0	s_3	0	5/3	1/6	0	1	0	5
0	s_4	0	1	0	0	0	1	2
	Z_j	5	5/3	5/6	0	0	0	20
	$C_j - Z_j$	0	7/3	-5/3	0	0	0	

$$\textbf{N.E.P} = \frac{\textbf{E.P.A}}{P} \Rightarrow \frac{0 \quad 4/3 \quad -1/6 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 2}{4/3} = 0 \quad 1 \quad \tfrac{-1}{8} \quad \tfrac{3}{4} \quad 0 \quad 0 \quad \tfrac{3}{2}$$

$$\begin{array}{rccccccc} x_1: & 1 & 2/3 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -(2/3) & 0 & 1 & -1/8 & 3/4 & 0 & 0 & 3/2 \\ \hline & 1 & 0 & 1/4 & -1/2 & 0 & 0 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccc} s_3: & 0 & 5/3 & 1/6 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ -(5/3) & 0 & 1 & -1/8 & 3/4 & 0 & 0 & 3/2 \\ \hline & 0 & 0 & 3/8 & -5/4 & 1 & 0 & 5/2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccc} s_4: & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -(1) & 0 & 1 & -1/8 & 3/4 & 0 & 0 & 3/2 \\ \hline & 0 & 0 & 1/8 & -3/4 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}$$

C_j		5	4	0	0	0	0	
	V.B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
5	x_1	1	0	1/4	-1/2	0	0	3
4	x_2	0	1	-1/8	3/4	0	0	3/2
0	s_3	0	0	3/8	-5/4	1	0	5/2
0	s_4	0	0	1/8	-3/4	0	1	1/2
	Z_j	5	4	3/4	1/2	0	0	$\underline{21}$
	$C_j - Z_j$	0	0	-3/4	-1/2	0	0	

Paso R11: Calcular la fila $C_j - Z_j$ para nueva tabla.

- Si ninguno de los valores en la fila $C_j - Z_j$ es positivo, FIN.

$$c_j - Z_j \leq 0 \quad \forall j$$

Como $c_j - Z_j$ es menor o igual a 0, entonces hemos llegado a la solución óptima. **Solución:**

$$\begin{aligned}
x_1 &= 3 \\
x_2 &= \frac{3}{2} \\
s_1 &= 0 \qquad \textbf{Recurso escaso} \Rightarrow \textbf{Restricción Activa} \\
s_2 &= 0 \qquad \textbf{Recurso escaso} \Rightarrow \textbf{Restricción Activa} \\
s_3 &= \frac{5}{2} \qquad \textbf{Recurso abundante} \Rightarrow \textbf{Restricción No Activa} \\
s_4 &= \frac{1}{2} \qquad \textbf{Recurso abundante} \Rightarrow \textbf{Restricción No Activa} \\
Z &= 21
\end{aligned}$$

Problema 9: Configuración de tabla Simplex y Metodo M

Función Objetivo:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 30 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 = 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución por método Simplex:

Paso 1: Si el problema es un problema de minimización, multiplica la función objetivo por -1.

$$Max \quad -Z = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

Paso 2: Si la formulación del problema contiene algunas restricciones con lados derechos negativos, multiplique cada restricción por -1.
Paso 3: Agregue una variable de holgura S_i a cada restricción $\leq$.

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 + s_1 \leq 30 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Paso 4: Reste una variable de exceso R_i y sume una variable artificial para cada $\geq$ restricción.

$$\begin{aligned} & 2x_1 + x_2 + x_3 - R_1 + A_2 \geq 60 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, R_1, A_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Paso 5: Agregue una variable artificial a cada restricción $=$.

$$\begin{aligned} & x_1 - x_2 + 2x_3 + A_3 = 20 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, A_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Paso 6: Establecer cada variable de holgura y excedente con coeficiente igual a cero en la función objetivo.

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 30 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 - R_1 + A_2 = 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + A_3 = 20 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, R_1, A_2, A_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Paso 7: Establecer el coeficiente de cada variable artificial en la función objetivo igual a -M, donde M es una número muy grande.

$$Max \quad -Z = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - MA_2 - MA_3$$

Paso 8: Cada variable de holgura y artificial se convierte en una de las variables básicas en el cálculo solución básica factible inicial.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & -Z = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - MA_2 - MA_3 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 30 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 - R_1 + A_2 = 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + A_3 = 20 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, R_1, A_2, A_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Paso 9: Escribir la tabla simplex inicial.

C_j		-2	3	4	0	0	-M	-M	
	V.B	x_1	x_2	x_3	R_1	s_1	A_2	A_3	RHS
0	s_1	1	1	1	0	1	0	0	30
0	A_2	2	1	3	-1	0	1	0	60
0	A_3	1	-1	2	0	0	0	1	20

Paso 10: Calcular la fila Z_j para la nueva Tabla.
OBS:

- Para cada columna j, multiplica los coeficientes en la función objetivo de las variables básicas por los números correspondientes en la columna j y sumarlos

C_j		-2	3	4	0	0	-M	-M	
	V.B	x_1	x_2	x_3	R_1	s_1	A_2	A_3	RHS
0	s_1	1	1	1	0	1	0	0	30
-M	A_2	2	1	3	-1	0	1	0	60
-M	A_3	1	-1	2	0	0	0	1	20
	Z_j	-3M	0	-5M	M	0	-M	-M	-80M
	$C_j - Z_j$								

0 $\times$ 1 + -M $\times$ 2 + -M $\times$ (1) = -3M

Paso 11: : Calcular la fila $C_j - Z_j$ para nueva tabla.
Para cada columna j, reste la fila C_j de la fila Z_j.:

- Si ninguno de los valores en la fila $C_j - Z_j$ es positivo, FIN. Redactar la solución óptima.
- Si el valor $C_j - Z_j$ de alguna variable no básica es 0, existen soluciones óptimas alternativas.
- Si existe una variable artificial en la base con un valor positivo, el problema es inviable.

C_j		-2	3	4	0	0	-M	-M	
	V.B	x_1	x_2	x_3	R_1	s_1	A_2	A_3	RHS
0	s_1	1	1	1	0	1	0	0	30
-M	A_2	2	1	3	-1	0	1	0	60
-M	A_3	1	-1	2	0	0	0	1	20
	Z_j	-3M	0	-5M	M	0	-M	-M	-80M
	$C_j - Z_j$	$-2+3M$	3	$4+5M$	M	0	0	0	

-2 $-$ -3M $=$ $-2+3M$

Paso 12: Determinar la variable entrante identificando la variable con el valor más positivo en la fila $C_j - Z_j$ (La columna de entrada se llama la columna pivote)

$$V_{in} = \text{columna Max}\{C_j - Z_j\} = X_{j^*} \Rightarrow V_{in} = x_3 : 4 + 5M$$

OBS:

- Como estamos máximizando la función objetivo, buscamos el valor más grande en la fila de $C_j - Z_j$, por lo que como M es un numero muy grande $3 < 3M < 5M$.

Paso 13: Determinar la variable saliente.

- Por cada número positivo en la columna de entrada, calcular la relación de los valores del lado derecho dividido por estos valores de columna entrantes.
- Si no hay valores positivos en la entrada columna, DETENER; el problema es ilimitado.
- En caso contrario, seleccione la variable con el mínimo relación.(La fila saliente se llama fila pivote).

C_j		-2	3	4	0	0	-M	-M	
	V.B	x_1	x_2	x_3	R_1	s_1	A_2	A_3	RHS
0	s_1	1	1	1	0	1	0	0	30
-M	A_2	2	1	3	-1	0	1	0	60
-M	A_3	1	-1	2	0	0	0	1	20
	Z_j	-3M	0	-5M	M	0	-M	-M	-80M
	$C_j - Z_j$	$-2+3M$	3	$4+5M$	M	0	0	0	

$$s_1 : \frac{30}{1} = 30 \qquad A_2 : \frac{60}{3} = 20 \qquad A_3 : \frac{20}{2} = 10$$

$$V_{out} = \text{Min}\left\{\frac{RHS}{coef_{ij^*}}\right\} = i^* \Rightarrow V_{out} = A_3 : 10$$

C_j		-2	3	4	0	0	-M	-M	
	V.B	x_1	x_2	x_3	R_1	s_1	A_2	A_3	RHS
0	s_1	1	1	1	0	1	0	0	30
-M	A_2	2	1	3	-1	0	1	0	60
-M	A_3	1	-1	2	0	0	0	1	20
	Z_j	-3M	0	-5M	M	0	-M	-M	-80M
	$C_j - Z_j$	$-2+3M$	3	$4+5M$	M	0	0	0	

$$\text{Pivote} = a_{i^*j^*} = a_{33} = 2$$

Paso 14: Generar la siguiente tabla.

- Divida la fila de pivote por el elemento de pivote (el entrada en la intersección de la fila de pivote y el pivote columna) para obtener una nueva fila. Denotamos esta nueva fila (*)

$$x_3: \quad \textbf{N.E.P} = \frac{\textbf{E.P.A}}{P} \Rightarrow \frac{1 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 20}{2} = \frac{1}{2} \quad \frac{-1}{2} \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 10$$

  OBS:

  - **N.E.P**: Nueva Ecuación Pivote (como entra x_3 en la tabla se escribe esta ecuación).
  - **E.P.A**: Ecuación Pivote Actual (como sale A_3 ocupamos esa ecuación).
  - $P = Pivote$

- Reemplace cada fila i que no sea pivote con: [nueva fila i] = [fila actual i] - [(a_{ij}) x (fila (*))], donde a_{ij} es el valor al ingresar la columna j de la fila i.

$$\begin{array}{cccccccc} s_1: & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 30 \\ -(1) & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 10 \\ \hline & 1/2 & 3/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} A_2: & 2 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 60 \\ -(3) & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 10 \\ \hline & 1/2 & 5/2 & 0 & -1 & 0 & 1 & -3/2 & 30 \end{array}$$

C_j		-2	3	4	0	0	-M	-M	
	V.B	x_1	x_2	x_3	R_1	s_1	A_2	A_3	RHS
0	s_1	1/2	3/2	0	0	1	0	-1/2	20
-M	A_2	1/2	5/2	0	-1	0	1	-3/2	30
4	x_3	1/2	-1/2	1	0	0	0	1/2	10
	Z_j	$-M/2+2$	$-5M/2-2$	4	M	0	-M	$3M/2+2$	$\underline{-30M+40}$
	$C_j - Z_j$	$-4+M/2$	$5+5M/2$	0	-M	0	0	$-5M/2-2$	

Paso 15: Ir a Paso 10.

$$\boxed{V_{in}} = \text{columna Max}\{C_j - Z_j\} = X_{j^*} \Rightarrow V_{in} = x_2 : \frac{5M}{2}$$

$$s_1 : \frac{20}{\frac{3}{2}} = 13,34 \qquad A_2 : \frac{30}{\frac{5}{2}} = 12 \qquad x_3 : \frac{10}{\frac{-1}{2}} = -20$$

$$\boxed{V_{out}} = \text{Min}\left\{\frac{RHS}{coef_{ij^*}}\right\} = i^* \Rightarrow V_{out} = A_2 : 12$$

$$\text{Pivote} = a_{i^*j^*} = a_{22} = \frac{5}{2}$$

C_j		-2	3	4	0	0	-M	-M	
	V.B	x_1	x_2	x_3	R_1	s_1	A_2	A_3	RHS
0	s_1	1/2	3/2	0	0	1	0	-1/2	20
-M	A_2	1/2	5/2	0	-1	0	1	-3/2	30
4	x_3	1/2	-1/2	1	0	0	0	1/2	10
	Z_j	$-M/2+2$	$-5M/2-2$	4	M	0	-M	$3M/2+2$	$\underline{-30M+40}$
	$C_j - Z_j$	$-4+M/2$	$5+5M/2$	0	-M	0	0	$-5M/2-2$	

$$x_2 : \frac{1/2 \quad 5/2 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad -3/2 \quad 30}{5/2} = \frac{1}{5} \quad 1 \quad 0 \quad \frac{-2}{5} \quad 0 \quad \frac{2}{5} \quad \frac{-3}{5} \quad 12$$

$$\begin{array}{rcccccccc} x_1 : & 1/2 & 3/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 20 \\ -(3/2) & 1/5 & 1 & 0 & -2/5 & 0 & 2/5 & -3/5 & 12 \\ \hline & 1/5 & 0 & 0 & 3/5 & 1 & -3/5 & 2/5 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccccc} x_3 : & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 10 \\ -(-1/2) & 1/5 & 1 & 0 & -2/5 & 0 & 2/5 & -3/5 & 12 \\ \hline & 3/5 & 0 & 1 & -1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 16 \end{array}$$

C_j		-2	3	4	0	0	-M	-M	
	V.B	x_1	x_2	x_3	R_1	s_1	A_2	A_3	RHS
0	s_1	1/5	0	0	3/5	1	-3/5	2/5	2
3	x_2	1/5	1	0	-2/5	0	2/5	-3/5	12
4	x_3	3/5	0	1	-1/5	0	1/5	1/5	16
	Z_j	3	3	4	-2	0	2	-1	$\underline{100}$
	$C_j - Z_j$	-5	0	0	2	0	$-M-2$	$-M+1$	

Paso R11: Calcular la fila $C_j - Z_j$ para nueva tabla.

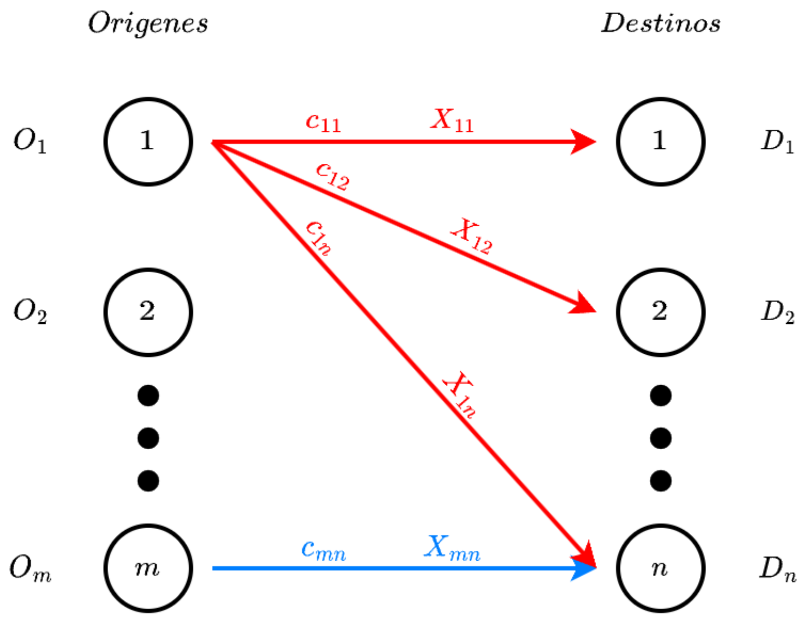
- Si ninguno de los valores en la fila $C_j - Z_j$ es positivo, FIN.

$$c_j - Z_j \leq 0 \quad \forall j$$

Como $c_j - Z_j$ es menor o igual a 0, entonces hemos llegado a la solución óptima. **Solución:**

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0 \\
x_2 &= 12 \\
x_3 &= 16 \\
s_1 &= 2 && \textbf{Recurso abundante} \Rightarrow \textbf{Restricción No Activa} \\
A_2 &= 0 && \textbf{Recurso escaso} \Rightarrow \textbf{Restricción Activa} \\
A_3 &= 0 && \textbf{Recurso escaso} \Rightarrow \textbf{Restricción Activa} \\
Z &= 100
\end{aligned}$$

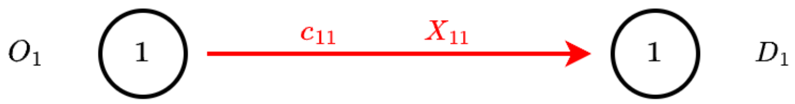
Teoría



Donde:

- m: Origenes con oferta O_i.
- n: Destinos con demanda D_j.
- C_{ij}: Costos unitarios de transportar desde i hasta j.
- X_{ij}: Variables de decisión, cantidad de unidades a transportar desde i hasta j. (m-n)
- **Objetivo**: Minimizar costo total de transporte. S.T restricciones. (m+n)

Modelo Lineal



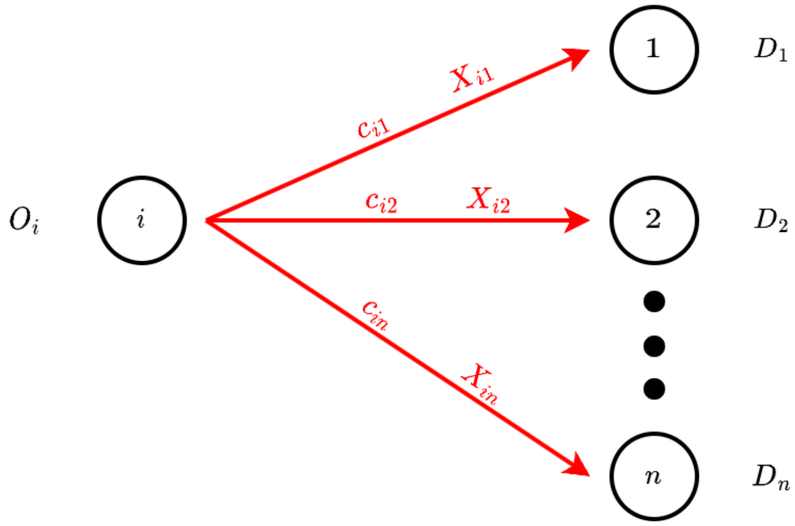
$$c_{11} \times X_{11} = \text{Costo total de 1 a 1}$$

Funcion Objetivo:

$$\text{Min} \quad Z = c_{11} \times X_{11} + c_{12} \times X_{12} + ... + c_{mn} \times X_{mn}$$

$$\text{Min} \quad Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \times X_{ij}$$

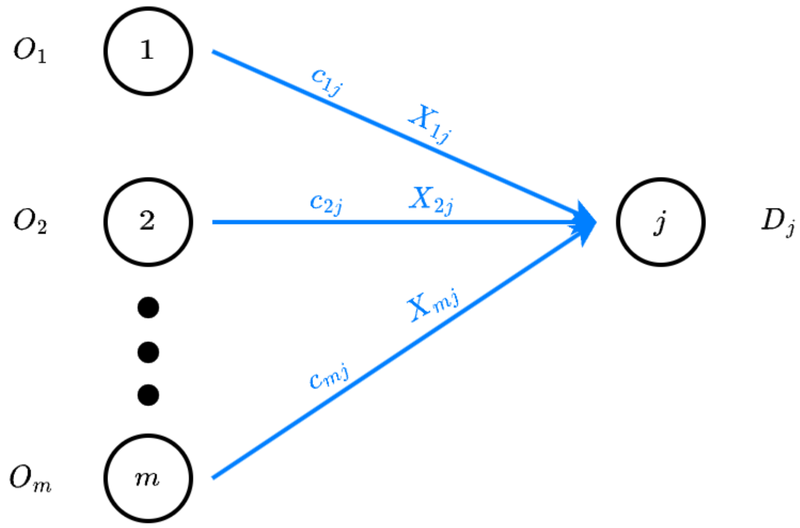
Restricciones Ofertas:



$$x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} \leq O_i \quad \forall i = \overline{1, m}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq O_i \quad \forall i = \overline{1, m}$$

Restricciones Demandas:



$$x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{mj} \geq D_j \quad \forall j = \overline{1, n}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \geq D_j \quad \forall j = \overline{1, n}$$

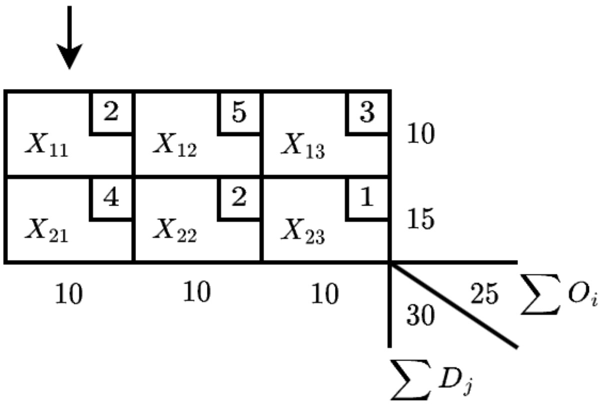
En resumen:

Los P.T. quedan de la forma:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \times X_{ij} \\ \text{s.a} \quad & \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq O_i \quad \forall i = \overline{1,m} \\ & \sum_{i=1}^{m} X_{ij} \geq D_j \quad \forall j = \overline{1,n} \\ & X_{ij} \geq 0 \quad \forall i = \overline{1,m}, \forall j = \overline{1,n} \end{aligned}$$

Problema 10: Problema de transporte

Escribir el M.L. para el siguiente P.T.:

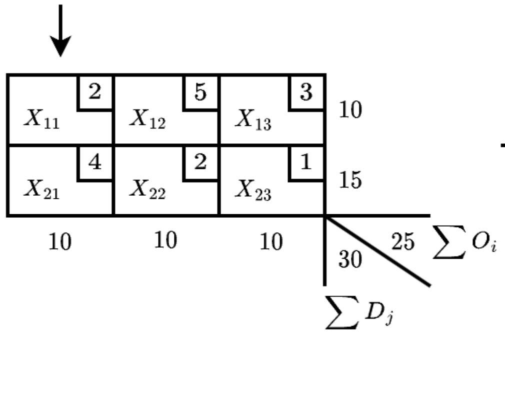


Función Objetivo:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = 2X_{11} + 5X_{12} + 3X_{13} + 4X_{21} + 2X_{22} + X_{23} \\ \text{s.a} \quad & X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 10 \\ & X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 15 \\ & X_{11} + X_{21} \geq 10 \\ & X_{12} + X_{22} \geq 10 \\ & X_{13} + X_{23} \geq 10 \\ & X_{ij} \geq 0 \quad \forall i = \overline{1,2}, \forall j = \overline{1,4} \end{aligned}$$

- Si en un P.T. $\sum D_j = \sum O_i$, diremos que el P.T. esta balanceado.

- Si un P.T. esta desbalanceado se puede balancear incorporando una restricción con coeficientes de costo nulo.



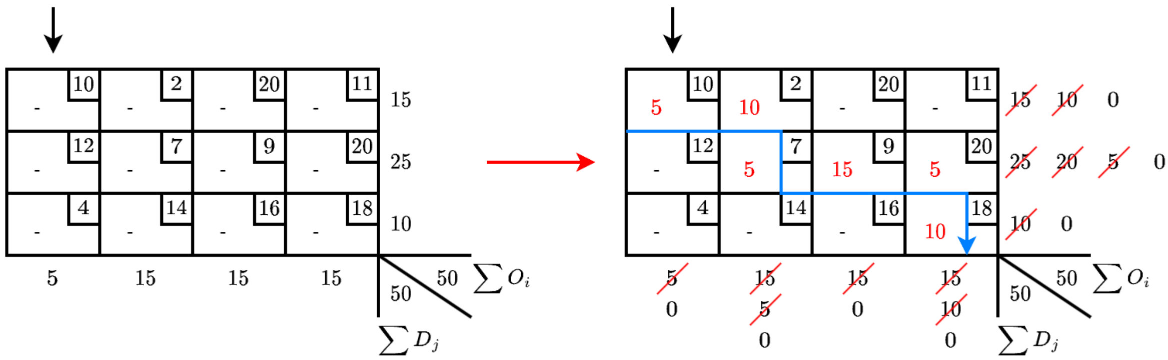
Teorema

En un P.T. balanceado, todas las restricciones son Activas.

- Las soluciones basicas factibles tienen $m + n - 1$ variables básicas.

$$\textbf{S.B.F.I.} = \begin{cases} \text{Regla Nor-Oeste} \\ \text{Costo Mínimo} \\ \text{Vogël} \end{cases}$$

Por regla Nor-Oeste



- $m = 3$
- $n = 4$
- $m + n - 1 = 6$

Solución factible: se cumplen 6 restricciones.