Probabilidades

Marcelo Paz
Estadistica y Probabilidad 25 de noviembre de 2023

1. Definiciones Generales

1. **Probabilidad:** Es la medida de la certeza de que un evento ocurra.
2. **Experimento Determinista:** Es aquel que al repetirlo bajo las mismas condiciones, siempre da el **mismo resultado**.
3. **Experimento Aleatorio:** Es aquel que al repetirlo bajo las mismas condiciones, puede dar **resultados distintos**.
4. **Espacio Muestral:** Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio Ω.
5. **Evento:** Es un subconjunto del espacio muestral $A, B, C \subset \Omega$.

2. Teoria de Conjuntos

1. **Unión:** A o B o Ambos $A \cup B = \{x \in \Omega | x \in A \vee x \in B\}$
2. **Intersección:** A y B o resultados comunes, $A \cap B = \{x \in \Omega | x \in A \wedge x \in B\}$
3. **Vacio:** $\emptyset = \{\}$
4. **Mutuamente excluyente:** $A \cap B = \emptyset$
5. **Contenido:** $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$
6. **Complemento:** $A^c = \{x \in \Omega | x \notin A\}$

3. Probabilidad Clásica

La probabilidad de A es la proporción de n_A con respecto a n, esto es:

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega}$$

4. Funcion de Probabilidad

Sea Ω un espacio muestral y sea A un evento de Ω. Se llamará función de probabilidad sobre el espacio muestral a $P(A)$ si satisface los siguientes axiomas:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Sea $A, B, C, ...$ eventos mutuamente excluyentes, entonces:
   $P(A \cup B \cup C \cup ...) = P(A) + P(B) + P(C) + ...$

5. Teoremas de Probabilidad

5.1. Teorema 1

Si vacío es el evento imposible, entonces:

$$P(\emptyset) = 0$$

5.2. Teorema 2

Sean A y B dos eventos cualesquiera de Ω, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5.3. Teorema 3

Sea A un evento de Ω, entonces:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

5.4. Teorema 4

Sean A y B dos eventos cualesquiera de Ω, entonces:

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

5.5. Teorema 5

Sean A y B eventos de Ω, tales que $A \subseteq B$, entonces:

$$P(A) \leq P(B)$$

6. Propiedades de la Probabilidad

1. $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c)$
2. $P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c)$

7. Tecnicas de Conteo

7.1. Principio de Multiplicación

Si un evento A puede ocurrir de n_1 formas distintas y si para cada una de estas formas, un evento B puede ocurrir de n_2 formas distintas, entonces el evento A seguido del evento B puede ocurrir de $n_1 \cdot n_2$ formas distintas.

7.2. Principio de Adición

Si un evento A puede ocurrir de n_1 formas distintas y si para cada una de estas formas, un evento B puede ocurrir de n_2 formas distintas, entonces el evento A o el evento B puede ocurrir de $n_1 + n_2$ formas distintas.

7.3. Permutaciones (Importa el orden)

Una permutación de n objetos distintos es un arreglo de los n objetos en una secuencia ordenada. El número de permutaciones de n objetos distintos es $n!$:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

7.4. Combinaciones (No importa el orden)

Una combinación de n objetos distintos tomados en grupos de r es un subconjunto de r objetos de un conjunto de n objetos distintos. El número de combinaciones de n objetos distintos tomados en grupos de r es:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad , \quad r \leq n$$

Combinaciones	**Permutaciones**
abc	abc acb bca bac cab cba
bcd	bcd bdc cbd cdb dbc dcb
abd	abd adb bad bda dab dba
acd	acd adc cad cda dac dca

Figura 1: Tabla ejemplo: Sea a,b,c,d elegir 3 letras a la vez

8. Espacio muestral equiprobable

Un espacio muestral Ω es equiprobable si todos los eventos elementales tienen la misma probabilidad de ocurrir. En este caso, la probabilidad de un evento A es:

$$P(A) = \frac{\text{número de maneras de como puede ocurrir el evento A}}{\text{número de maneras de como puede ocurrir el espacio muestral } \Omega}$$

9. Probabilidad Condicional

La probabilidad condicional de que A ocurra, dado que ocurrió B, está dada por:

$$P(A/B) = \begin{cases} \frac{P(A\cap B)}{P(B)} & , \quad P(B) > 0 \\ 0 & , \quad P(B) = 0 \end{cases}$$

Obs:

1. La probabilidad condicional cumple todas las propiedades vistas anteriormente.
   a) $P(\Omega/A) = 1$
   b) $P(A \cup B/C) = P(A/C) + P(B/c)$, si $A \cap B = \emptyset$
   c) $P(A^c/B) = 1 - P(A/B) \leftarrow$ Complemento Condicional
2. De la definición anterior se tiene que la probabilidad condicional de la intersección entre A y B puede ser escrita como $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$, llamada **Regla de la Multiplicación**.
3. Por Simetría, se tiene que si $P(A) > 0$, entonces:

$$P(B/A) = \begin{cases} \frac{P(B\cap A)}{P(A)} & , \quad P(A) > 0 \\ 0 & , \quad P(A) = 0 \end{cases}$$

   * **Obs 3.1:** La Regla de la Multiplicación se utiliza cuando se seleccionan personas de un grupo o artículos de un lote **sin sustitución**.
   * **Obs 3.2:** Cuando seleccionan personas de grupo o artículos de un lote **con sustitución**, se dice que los eventos son independientes y en ese caso, la probabilidad de la intersección de los eventos es el producto de las probabilidades.
4. De las observaciones 2 y 3, se tiene que $P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A)$
5. La probabilidad condicional de A dado $B_1, B_2, ..., B_n$ se escribe de la siguiente forma $P(A/B_1, B_2, ..., B_n)$ y se define $P(A/B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n)$, cualesquiera sean los eventos $A, B_1, B_2, ..., B_n$ tales que $P(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n) > 0$. Un desarrollo algebraico simple conduce a la Regla de la Multiplicación Generalizada, que está dada por: $P(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) \cdot P(B_3/B_1 \cap B_2) \cdot ... \cdot P(B_n/B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{n-1})$
6. La definición de probabilidad condicional puede extenderse para incluir cualquier número de eventos que se encuentren en el espacio muestral Ω. Por ejemplo, puede demostrarse que para tres eventos A, B y C.

$$P(A/B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \quad , \quad P(B \cap C) > 0$$

$$P(A \cap B/C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} \quad , \quad P(C) > 0$$

10. def 7 buscar nombre

Diremos que los sucesos $B_1, B_2, ..., B_n$, representan una partición del espacio muestral Ω si:

1. $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$
2. $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$
3. $P(B_i) > 0, \quad \forall i,$ o bien $, \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = 1$

11. Teorema de la probabilidad total

Sean los eventos $B_1, B_2, ..., B_n$, representan una partición del espacio muestral Ω y A un evento cualquiera de Ω, entonces:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i)$$

12. Teorema de Bayes

Sean los eventos $B_1, B_2, ..., B_n$, representan una partición del espacio muestral Ω y A un evento cualquiera de Ω, entonces:

$$P(B_j/A) = \frac{P(B_j) \cdot P(A/B_j)}{\sum_{i=0}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i)}$$

13. Independencia de Eventos

Dos eventos A y B se dicen estadísticamente independientes si se verifica que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Obs:

1. $P(A/B) = P(A); \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$
2. $P(B/A) = P(B)$
3. $P(A^c/B) = P(A^c)$
4. $P(B^c/A) = P(B^c)$
5. $P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \cdot P(B^c)$
6. $P(A^c \cap B) = P(A^c) \cdot P(B)$
7. $P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c)$