TAREA-220149

Marcelo Paz **José Peña**
Claudia Sobino

Estadistica y Probabilidad

18 de diciembre de 2023

1. Problema 1

Suponga que el número de autos X, que pasan a través de una máquina lavadora, entre las 16:00 y las 17:00 horas de un día viernes determinado, tiene la siguiente función de probabilidad:

x	4	5	6	7	8	9
P(X=x)	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Figura 1: Tabla de probabilidad

Sea $g(X) = 2X - 1$ que representa la cantidad de dinero en dólares que el gerente del negocio le paga al encargado.

Definición de evento:

- X: "Número de autos que pasan por la lavadora"

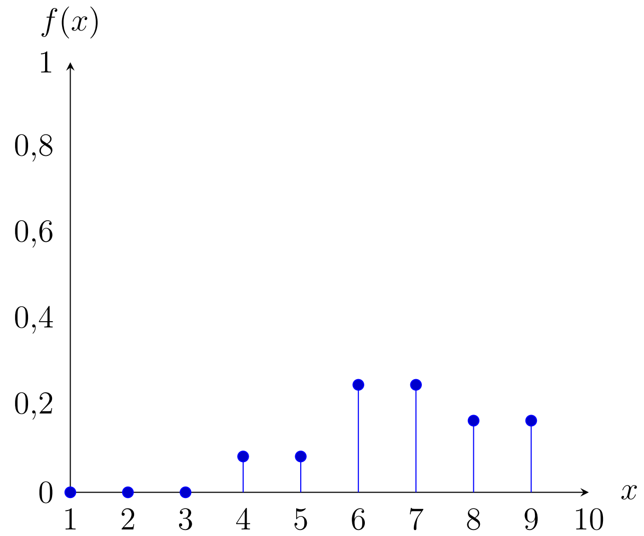


Figura 2: Representación gráfica de la función de probabilidad

1.1. a

Encuentre las ganancias esperadas en este período de tiempo en particular.

$$\begin{aligned}
E(g(x)) &= \sum_{i=1}^{n} g(x) \cdot P(X = x) && \text{Remplazando} \\
&= (7 \cdot \frac{1}{12}) + (9 \cdot \frac{1}{12}) + (11 \cdot \frac{1}{4}) + (13 \cdot \frac{1}{4}) + (15 \cdot \frac{1}{6}) + (17 \cdot \frac{1}{6}) \\
&= \frac{7}{12} + \frac{9}{12} + \frac{33}{12} + \frac{39}{12} + \frac{30}{12} + \frac{34}{12} \\
&= \frac{154}{12} \\
&= 12,6667
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las ganancias esperadas en este período de tiempo en particular son de \$12,6667 aproximadamente \$13 dólares.

1.2. b

¿Cuál es la probabilidad de que pasen 9 autos el día viernes entre las 16:00 y las 17:00 horas?

$$P(X = 9) = \frac{1}{6}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que pasen 9 autos el día viernes entre las 16:00 y las 17:00 horas es de $\frac{1}{6}$.

1.3. c

Determine: $V(4 + 3X)$, $V(4)$, $E(6X)$, $E(5 + 5X)$, $V(9X)$.
Primero se calculara $V(X) = E(X^2) - (E(X)^2)$:

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{i=1}^{n} x^2 \cdot P(X = x) && \text{Remplazando} \\
&= (16 \cdot \frac{1}{12}) + (25 \cdot \frac{1}{12}) + (36 \cdot \frac{1}{4}) + (49 \cdot \frac{1}{4}) + (64 \cdot \frac{1}{6}) + (81 \cdot \frac{1}{6}) \\
&= \frac{16}{12} + \frac{25}{12} + 9 + \frac{49}{4} + \frac{64}{6} + \frac{81}{6} \\
&= \frac{16}{12} + \frac{25}{12} + \frac{108}{12} + \frac{147}{12} + \frac{128}{12} + \frac{162}{12} \\
&= \frac{586}{12} \\
&= 48,8333
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} x \cdot P(X = x) && \text{Remplazando} \\ &= (4 \cdot \frac{1}{12}) + (5 \cdot \frac{1}{12}) + (6 \cdot \frac{1}{4}) + (7 \cdot \frac{1}{4}) + (8 \cdot \frac{1}{6}) + (9 \cdot \frac{1}{6}) \\ &= \frac{4}{12} + \frac{5}{12} + \frac{6}{4} + \frac{7}{4} + \frac{8}{6} + \frac{9}{6} \\ &= \frac{4}{12} + \frac{5}{12} + \frac{18}{12} + \frac{21}{12} + \frac{16}{12} + \frac{18}{12} \\ &= \frac{82}{12} \\ &= 6,8333 \end{aligned}$$

Asi:

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X)^2) \\ &= 48,8333 - (6,8333)^2 \\ &= 48,8333 - 46,6944 \\ &= 2,1389 \end{aligned}$$

Para $V(4 + 3X)$:

$$\begin{aligned} V(4 + 3X) &= V(4) + V(3X) \\ &= 0 + 9 \cdot V(X) \\ &= 9 \cdot 2,1389 \\ &= 19,2501 \end{aligned}$$

Para $V(4)$:

$$V(4) = 0$$

Para $E(6X)$:

$$\begin{aligned} E(6X) &= 6 \cdot E(X) \\ &= 6 \cdot 6,8333 \\ &= 40,9998 \end{aligned}$$

Para $E(5 + 5X)$:

$$\begin{aligned} E(5 + 5X) &= 5 + E(5X) \\ &= 5 + 5 \cdot E(X) \\ &= 5 + 5 \cdot 6,8333 \\ &= 39,1665 \end{aligned}$$

Para $V(9X)$:

$$\begin{aligned} V(9X) &= 81 \cdot V(X) \\ &= 81 \cdot 2,1389 \\ &= 173,2509 \end{aligned}$$

1.4. d

Obtenga la f.d.a. y grafíquela.

$$F(X) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 4 \\ \frac{1}{12} & , 4 \leq x < 5 \\ \frac{2}{12} & , 5 \leq x < 6 \\ \frac{5}{12} & , 6 \leq x < 7 \\ \frac{8}{12} & , 6 \leq x < 8 \\ \frac{10}{12} & , 8 \leq x < 9 \\ \frac{12}{12} & , 9 \leq x \end{cases}$$

// Hacer gráfico que si coincida

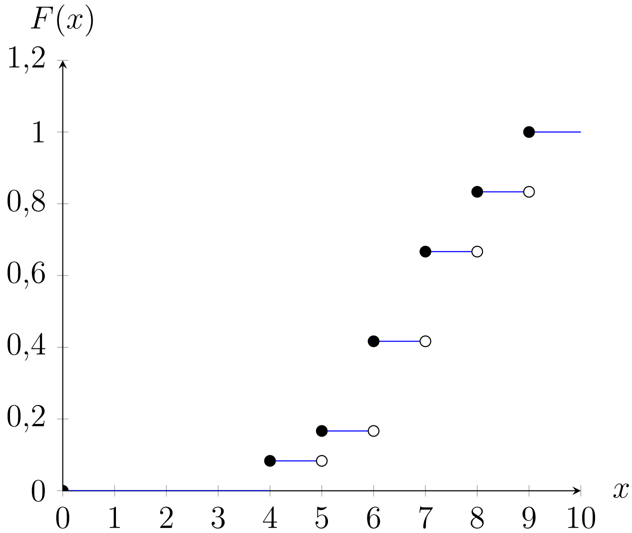


Figura 3: Representación gráfica de la función de probabilidad

1.5. e

Calcule: $P(X > 6)$, $P(X \leq 8)$ y $P(5 \leq X \leq 8)$.
Para $P(X > 6)$:

$$\begin{aligned} P(X > 6) &= 1 - F(6) \\ &= 1 - \frac{5}{12} \\ &= \frac{7}{12} \\ &= 0,5833 \end{aligned}$$

Para $P(X \leq 8)$:

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 8) &= \sum_{i=1}^{n} P(X = x) && \text{Remplazando} \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} \\
&= \frac{10}{12} \\
&= 0,8333
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 8) &= F(8) && \text{Remplazando} \\
&= \frac{10}{12} \\
&= 0,8333
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 8) &= 1 - P(X = 9) && \text{Remplazando} \\
&= 1 - \frac{1}{6} \\
&= \frac{5}{6} \\
&= 0,8333
\end{aligned}
$$

Para $P(5 \leq X \leq 8)$:

$$
\begin{aligned}
P(5 \leq X \leq 8) &= F(8) - F(4) && \text{Remplazando} \\
&= \frac{10}{12} - \frac{1}{12} \\
&= \frac{9}{12} \\
&= 0,75
\end{aligned}
$$

2. Problema 2

Considera la función $f(x)$ de la variable aleatoria X, que está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} kx & , \quad 0 \leq x < 1 \\ k - x & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & , \quad \text{e.o.c} \end{cases}$$

2.1. a

Determine el valor de k para que $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad.
Para que $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad, se debe cumplir que:

$$\int_{R_x} f(x)dx = 1$$

Por lo tanto es necesario calcular el valor de k para que se cumpla la condición anterior:

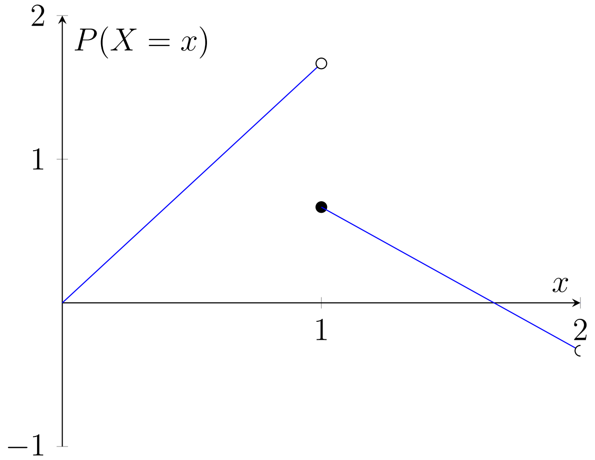
$$\begin{aligned} \int_0^1 (kx)dx + \int_1^2 (k - x)dx &= 1 && \text{Aplicando la integral} \\ \frac{kx^2}{2}\Big|_0^1 + (kx - \frac{x^2}{2})\Big|_1^2 &= 1 && \text{Remplazando} \\ \frac{k}{2} + (2k - 2 - k + \frac{1}{2}) &= 1 && \text{Despejando k} \\ \frac{k}{2} + (k - \frac{3}{2}) &= 1 \\ \frac{k}{2} + k - \frac{3}{2} &= 1 \\ \frac{3k}{2} - \frac{3}{2} &= 1 \\ \frac{3k}{2} &= \frac{5}{2} \\ k &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{3}x & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{5}{3} - x & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & , \quad \text{e.o.c} \end{cases}$$

2.2. b

Grafique $f(x)$



2.3. c

Calcule: $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right)$ y $P\left(X \geq \frac{3}{8}\right)$

Para $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right) &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\frac{5}{3}x)dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} (\frac{5}{3} - x)dx && \text{Aplicando la integral} \\
&= \frac{5}{6}x^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + (\frac{5}{3}x - \frac{x^2}{2})\Big|_{1}^{\frac{3}{2}} && \text{Remplazando} \\
&= \frac{5}{6} - \frac{5}{24} + (\frac{5}{2} - \frac{9}{8} - \frac{5}{3} + \frac{1}{2}) \\
&= \frac{20}{24} - \frac{5}{24} + (3 - \frac{67}{24}) \\
&= \frac{15}{24} + 3 - \frac{67}{24} \\
&= \frac{15}{24} + \frac{72}{24} - \frac{67}{24} \\
&= \frac{20}{24} \\
&= \frac{5}{6} \\
&= 0,8333
\end{aligned}$$

Para $P\left(X \geq \dfrac{3}{8}\right)$:

$$\begin{aligned}
P\left(X \geq \frac{3}{8}\right) &= 1 - F(\frac{3}{8}) \\
&= 1 - \int_0^{\frac{3}{8}} (\frac{5}{3}x)dx && \text{Aplicando la integral} \\
&= 1 - \frac{5}{6}x^2\Big|_0^{\frac{3}{8}} && \text{Remplazando} \\
&= 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{64} \\
&= 1 - \frac{15}{128} \\
&= \frac{113}{128} \\
&= 0,8828
\end{aligned}$$

2.4. d

Determine el valor de: $E(6 - 5X)$ y $V(6 - 5X)$
Para $E(6 - 5X)$:
Es necesario:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x \cdot f(x))dx \\
&= \int_0^1 (x \cdot \frac{5}{3}x)dx + \int_1^2 (x \cdot (\frac{5}{3} - x))dx \\
&= \frac{5x^3}{9}\Big|_0^1 + \left(\frac{5x^2}{6} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 \\
&= \frac{5}{9} + \frac{20}{6} - \frac{8}{3} - \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{5}{9} + \frac{20}{6} - \frac{16}{6} - \frac{15-6}{18} \\
&= \frac{5}{9} + \frac{4}{6} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{5}{9} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{13}{18}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E(6-5X) &= E(6) - E(5X) \\
&= 6 - 5E(X) \\
&= 6 - 5\left(\frac{13}{18}\right) \\
&= 6 - \frac{65}{18} \\
&= \frac{43}{18} \\
&= 2,3889
\end{aligned}
$$

Para $V(6-5X)$:
Es necesario:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 \cdot f(x))dx \\
&= \int_0^1 (x^2 \cdot \frac{5}{3}x)dx + \int_1^2 (x^2 \cdot (\frac{5}{3} - x))dx \\
&= \frac{5x^4}{12}\Big|_0^1 + \left(\frac{5x^3}{9} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^2 \\
&= \frac{5}{12} + \frac{40}{9} - \frac{16}{4} - \left(\frac{5}{9} - \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{5}{12} + \frac{40}{9} - \frac{16}{6} - \frac{15-6}{18} \\
&= \frac{5}{12} + \frac{5}{36} \\
&= \frac{5}{9}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(6-5X) &= V(6) - 5^2V(X) \\
&= 0 - 25V(X) \\
&= -25\left(E(x^2) - (E(x))^2\right) \\
&= -25\left(\frac{5}{9} - \left(\frac{13}{18}\right)^2\right) \\
&= -25\left(\frac{5}{9} - \frac{169}{324}\right) \\
&= -25\left(\frac{11}{324}\right) \\
&= -\frac{275}{324} \\
&= -0,8488
\end{aligned}
$$

3. Problema 3

Si un banco de Concepción recibe en promedio 6 cheques sin fondo por día:

3.1. a

¿Cuál es la probabilidad de que se reciban 4 cheques sin fondo en un día determinado?
Sea X: número de cheques sin fondo por día.
$X \sim P(6)$

$$\begin{aligned} P(X=4) &= \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \\ &= \frac{6^4 \cdot e^{-6}}{4!} \\ &= 0,1339 \end{aligned}$$

3.2. b

¿Cuál es la probabilidad de que no se reciba ningún cheque sin fondo en 2 días?
Sea X: número de cheques sin fondo en 2 días.
$X \sim P(12)$

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \\ &= \frac{12^0 \cdot e^{-12}}{0!} \\ &= \frac{1 \cdot e^{-12}}{1} \\ &= e^{-12} \\ &= \frac{1}{e^{12}} \\ &= 0,000006144 \end{aligned}$$

3.3. c

¿Cuál es la probabilidad de que se reciban más de tres cheques sin fondo en 2 días?

$$\begin{aligned} P(X>3) &= 1 - P(X \leq 3) \\ &= 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)) \\ &= 1 - \left(\frac{12^0 \cdot e^{-12}}{0!} + \frac{12^1 \cdot e^{-12}}{1!} + \frac{12^2 \cdot e^{-12}}{2!} + \frac{12^3 \cdot e^{-12}}{3!} \right) \\ &= 1 - 0,0023 \\ &= 0,9977 \end{aligned}$$

3.4. d

¿Cuántos cheques sin fondo se reciben en promedio por año?
Sea X: número de cheques sin fondo en 365 día.
$X \sim P(2190)$

$$\begin{aligned} E(X) &= \lambda \\ &= 2190 \end{aligned}$$

3.5. e

Si en un día determinado el banco recibe 10 cheques, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 4 no tengan fondos? Sea X: número de cheques sin fondo. $U \sim B(10, p = P(X = 4))$

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \\ &= \frac{6^4 \cdot e^{-6}}{4!} \\ &= 0,1339 \end{aligned}$$

Remplazando:

$$P(U = 4) = \binom{10}{4} \cdot 0,1339^4 \cdot (1 - 0,1339)^{10-4} = 0,0001$$

4. Problema 4

En un determinado aeropuerto del país, se sabe que 7 de 14 maletas contienen artículos de contrabando. Determine la probabilidad de que exactamente 4 de 6 maletas seleccionadas en la inspección al azar de pasajeros, contengan artículos de contrabando.

Sea X: Número de maletas que contienen artículos de contrabando.

$X \sim H(14, 6, 7)$

$$P(X = x) = \frac{\binom{7}{x}\binom{7}{6-x}}{\binom{14}{6}} \qquad \text{, x=0, 1, 2, ..., min\{6,7\}}$$

$$P(X = 4) = \frac{\binom{7}{4}\binom{14-7}{6-4}}{\binom{14}{6}} = \frac{\binom{7}{4}\binom{7}{2}}{\binom{14}{6}}$$

$$= \frac{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \cdot \frac{7 \cdot 6}{2!}}{\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{6!}}$$

$$= \frac{35}{143}$$

$$= 0,2448$$