



Suma de Riemann

Marcelo PAZ
Calculo Integral 25 de noviembre de 2023

1. Teoria

1.1. Algunas Sumatorias

$$\sum_{i=0}^n 1 = n \quad \sum_{i=1}^n C = C \sum_{i=1}^n 1 = Cn \quad \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$\sum_{i=1}^n (i^2 + i - 2) = \sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} - 2n$$

1.2. Suma de Riemann

Método de aproximar el área bajo un gráfico al sumar un número entero de áreas rectangulares dibujadas bajo la curva.

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \quad , \text{ donde } \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad , \quad n = \text{número de subdivisiones}, \quad x_i \in [a, b]$$

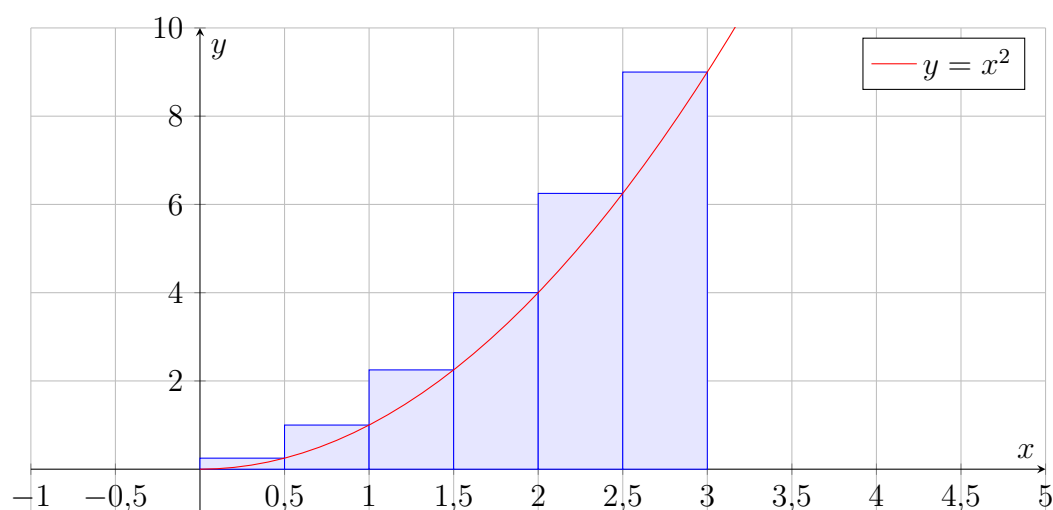


Figura 1: Suma de Riemann



1.3. Suma izquierda de Riemann

El x_i de cada rectángulo es el extremo izquierdo, $m_i = a + (i - 1)(\frac{b-a}{n})$.

$$\sum_{i=1}^n f(m_i) \Delta x, \text{ donde } \Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad n = \text{número de subdivisiones}, \quad m_i \in [a, b-\Delta x]$$

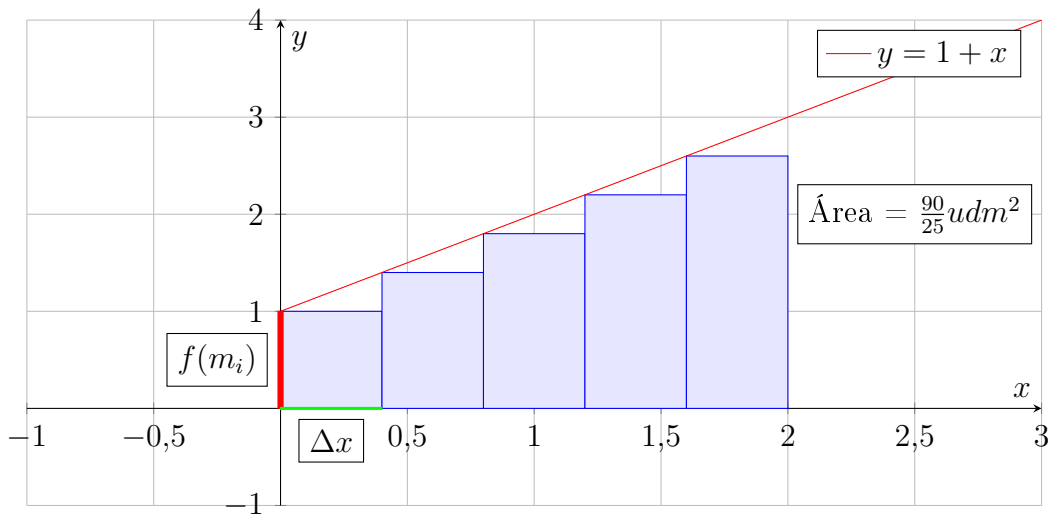


Figura 2: Suma izquierda de Riemann

1.4. Suma derecha de Riemann

El x_i de cada rectángulo es el extremo derecho, $M_i = a + i(\frac{b-a}{n})$.

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x, \text{ donde } \Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad n = \text{número de subdivisiones}, \quad M_i \in [a+\Delta x, b]$$

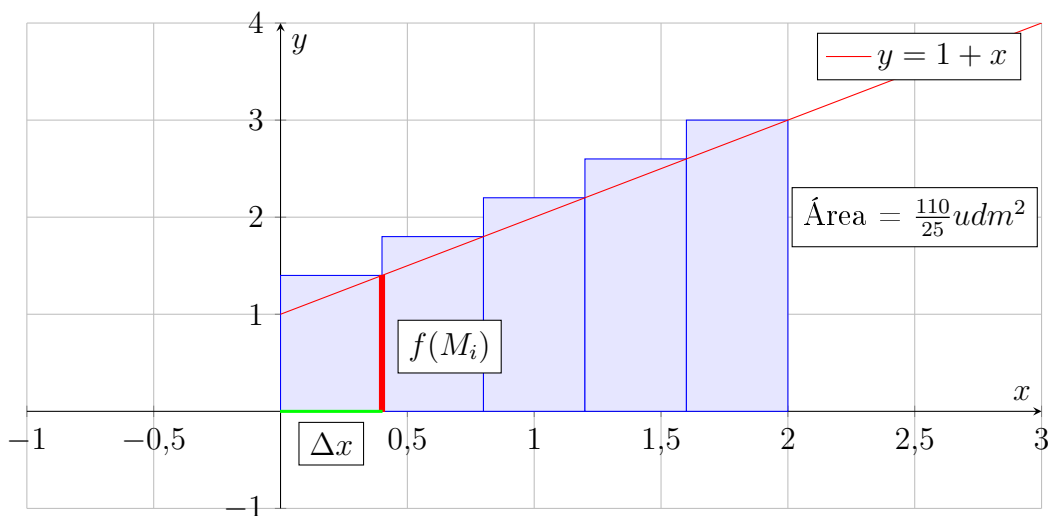


Figura 3: Suma derecha de Riemann



2. Ejercicios

2.1. Ejercicio 1

Determinar aproximadamente el area bajo la curva $y = f(x) = 1 + x$ entre $x = 0$ y $x = 2$, dividiendo el intervalo $[a, b]$ en 5 subintervalos de igual longitud. Realice dos aproximaciones, la primera usando el lado izquierdo de cada subintervalo y la segunda usando su lado derecho.

2.1.1. Datos

$$n = 5 \quad a = 0 \quad b = 2 \quad f(x) = 1 + x$$

$$\begin{aligned} \text{Area Exacta} &= \int_0^2 (1 + x) dx \\ &= x + \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 \\ &= 2 + \frac{4}{2} - \left(0 + \frac{0^2}{2}\right) \\ &= 4 \text{udm}^2 \end{aligned}$$

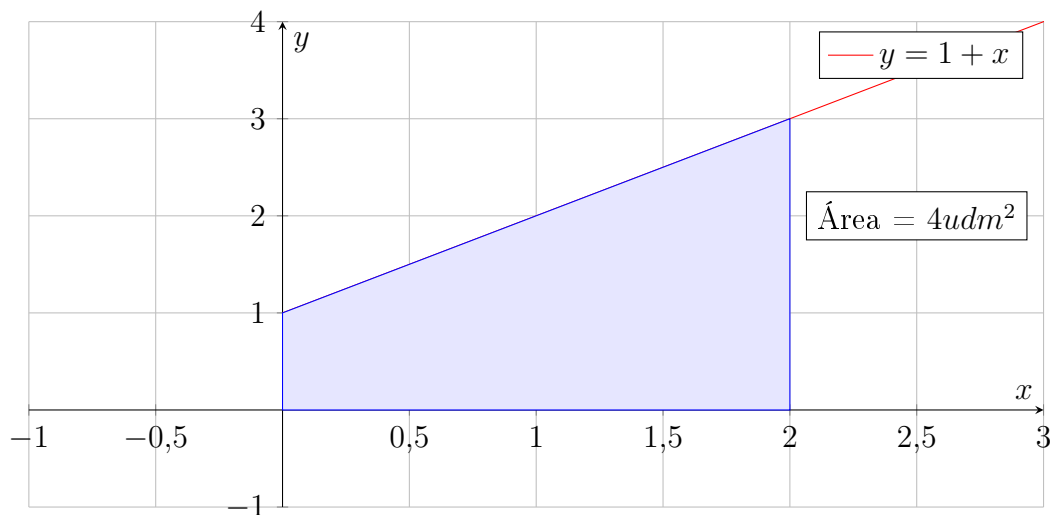


Figura 4: Integral desde 0 a 2 de $f(x) = 1 + x$



2.1.2. Suma izquierda

$$m_i = 0 + (i - 1) \left(\frac{2 - 0}{5} \right) = \frac{2}{5}(i - 1)$$

$$s(5) = \sum_{i=1}^5 f \left(\frac{2}{5}(i - 1) \right) \frac{2}{5}$$

Remplazamos los datos en la ecuación

$$= \sum_{i=1}^5 \left(1 + \frac{2}{5}(i - 1) \right) \frac{2}{5}$$

Evaluamos en la función

$$= \frac{2}{5} \sum_{i=1}^5 \left(\frac{2}{5}(i - 1) + 1 \right)$$

Sacamos la constante $\frac{2}{5}$ de la sumatoria

$$= \frac{2}{5} \left(\frac{2}{5} \sum_{i=1}^5 (i - 1) + \sum_{i=1}^5 1 \right)$$

Separamos la sumatoria

$$= \frac{2}{5} \left(\frac{2}{5} \left(\sum_{i=1}^5 i - \sum_{i=1}^5 1 \right) + \sum_{i=1}^5 1 \right)$$

Separamos la sumatoria

$$= \frac{2}{5} \left(\frac{2}{5} \left(\frac{5 \times 6}{2} - 5 \right) + 5 \right)$$

Resolvemos las sumatorias

$$= \frac{2}{5} \left(\frac{2}{5} \times 10 + 5 \right)$$

$$= \frac{2}{5} (4 + 5)$$

$$= \frac{18}{5}$$

$$= \frac{90}{25} = 3,6 \text{ udm}^2$$

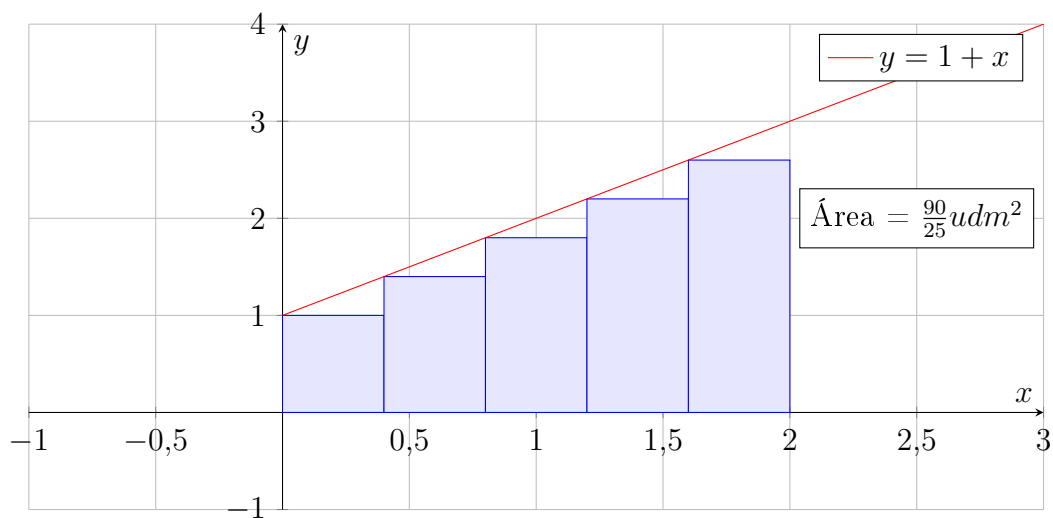


Figura 5: Suma izquierda de Riemann



2.1.3. Suma derecha

$$M_i = 0 + (i) \left(\frac{2-0}{5} \right) = \frac{2i}{5}$$

$$s(5) = \sum_{i=1}^5 f\left(\frac{2i}{5}\right) \frac{2}{5}$$

Remplazamos los datos en la ecuación

$$= \sum_{i=1}^5 \left(1 + \frac{2i}{5} \right) \frac{2}{5}$$

Evaluamos en la función

$$= \frac{2}{5} \sum_{i=1}^5 \left(\frac{2i}{5} + 1 \right)$$

Sacamos la constante $\frac{2}{5}$ de la sumatoria

$$= \frac{2}{5} \left(\frac{2}{5} \sum_{i=1}^5 i + \sum_{i=1}^5 1 \right)$$

Separamos la sumatoria

$$= \frac{2}{5} \left(\frac{2}{5} \left(\frac{5 \times 6}{2} \right) + 5 \right)$$

Resolvemos las sumatorias

$$= \frac{2}{5} (6 + 5)$$

$$= \frac{22}{5}$$

$$= \frac{110}{25} = 4,4 \text{ udm}^2$$

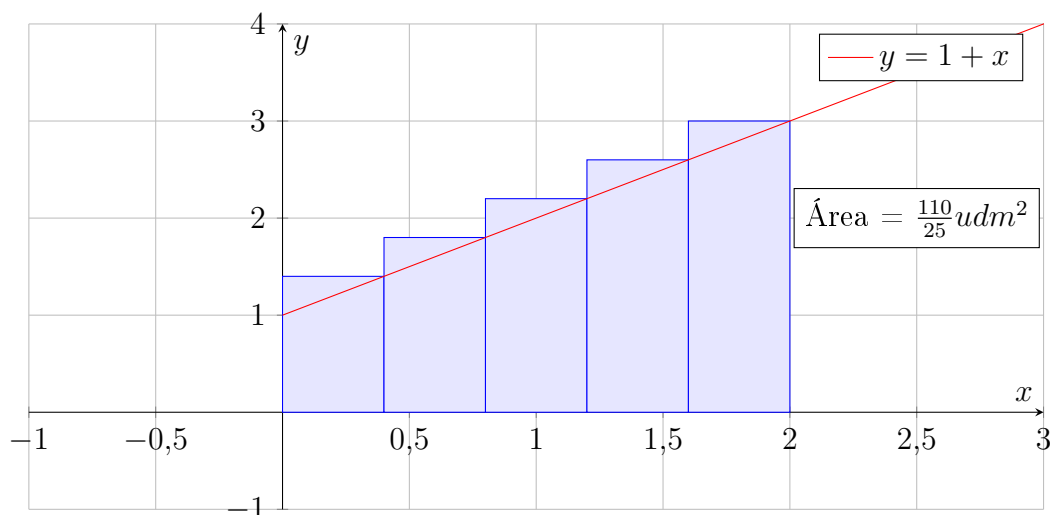


Figura 6: Suma derecha de Riemann