TAREA-220149

Marcelo Paz

Estadistica y Probabilidad 28 de noviembre de 2023

1. Problema 1

Suponga que el número de autos X, que pasan a través de una máquina lavadora, entre las 16:00 y las 17:00 horas de un día viernes determinado, tiene la siguiente función de probabilidad:

x	4	5	6	7	8	9
P(X=x)	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Figura 1: Tabla de probabilidad

Sea $g(X) = 2X - 1$ que representa la cantidad de dinero en dólares que el gerente del negocio le paga al encargado.

Definición de evento:

- X: "Auto pasa por la lavadora"

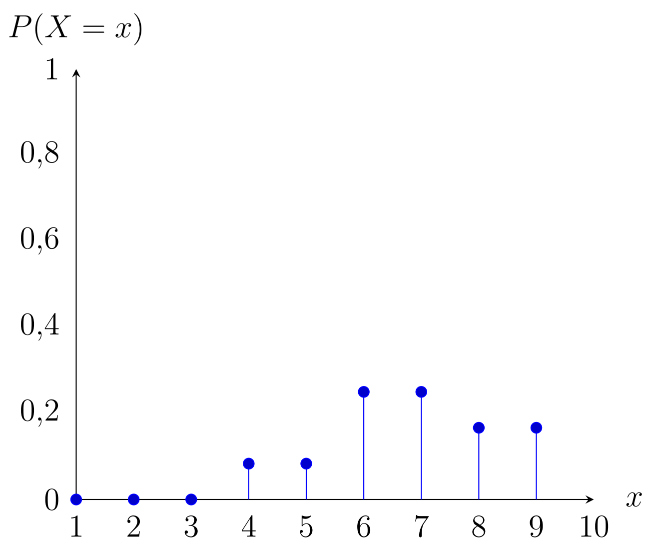


Figura 2: Representación gráfica de la función de probabilidad

1.1. a

Encuentre las ganancias esperadas en este período de tiempo en particular.

$$\begin{aligned}
E(g(x)) &= \sum_{i=1}^{n} g(x)\cdot P(X=x) && \text{Remplazando}\\
&= (7\cdot\frac{1}{12})+(9\cdot\frac{1}{12})+(11\cdot\frac{1}{4})+(13\cdot\frac{1}{4})+(15\cdot\frac{1}{6})+(17\cdot\frac{1}{6})\\
&= \frac{7}{12}+\frac{9}{12}+\frac{33}{12}+\frac{39}{12}+\frac{30}{12}+\frac{34}{12}\\
&= \frac{154}{12}\\
&= 12,66666666666667
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las ganancias esperadas en este período de tiempo en particular son de \$12,66666666666667 aproximadamente \$13 dólares.

1.2. b

¿Cuál es la probabilidad de que pasen 9 autos el día viernes entre las 16:00 y las 17:00 horas?

$$P(X=9)=\frac{1}{6}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que pasen 9 autos el día viernes entre las 16:00 y las 17:00 horas es de $\frac{1}{6}$.

1.3. c

Determine: $V(4+3X)$, $V(4)$, $E(6X)$, $E(5+5X)$, $V(9X)$.
Primero se calculara $V(X)=E(X^2)-(E(X)^2)$:

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{i=1}^{n} x^2\cdot P(X=x) && \text{Remplazando}\\
&= (16\cdot\frac{1}{12})+(25\cdot\frac{1}{12})+(36\cdot\frac{1}{4})+(49\cdot\frac{1}{4})+(64\cdot\frac{1}{6})+(81\cdot\frac{1}{6})\\
&= \frac{16}{12}+\frac{25}{12}+9+\frac{49}{4}+\frac{64}{6}+\frac{81}{6}\\
&= \frac{16}{12}+\frac{25}{12}+\frac{108}{12}+\frac{147}{12}+\frac{128}{12}+\frac{162}{12}\\
&= \frac{586}{12}\\
&= 48,83333333333333
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{n} x \cdot P(X=x) && \text{Remplazando} \\
&= (4 \cdot \frac{1}{12}) + (5 \cdot \frac{1}{12}) + (6 \cdot \frac{1}{4}) + (7 \cdot \frac{1}{4}) + (8 \cdot \frac{1}{6}) + (9 \cdot \frac{1}{6}) \\
&= \frac{4}{12} + \frac{5}{12} + \frac{6}{4} + \frac{7}{4} + \frac{8}{6} + \frac{9}{6} \\
&= \frac{4}{12} + \frac{5}{12} + \frac{18}{12} + \frac{21}{12} + \frac{16}{12} + \frac{18}{12} \\
&= \frac{82}{12} \\
&= 6,833333333333333
\end{aligned}
$$

Asi:

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - (E(X)^2) \\
&= 48,83333333333333 - (6,833333333333333)^2 \\
&= 48,83333333333333 - 46,69444444444444 \\
&= 2,138888888888889
\end{aligned}
$$

Para $V(4+3X)$:

$$
\begin{aligned}
V(4+3X) &= V(4) + V(3X) && \text{Aplicando Propiedad 1 y 3} \\
&= 0 + 9 \cdot V(X) && \text{Remplazando} && = 9 \cdot 2,138888888888889 \\
&= 19,25
\end{aligned}
$$

Para $V(4)$:

$$
E(4) = 0 \qquad \text{Aplicando Propiedad 1}
$$

Para $E(6X)$:

$$
\begin{aligned}
E(6X) &= 6 \cdot E(X) && \text{Aplicando Propiedad 2} \\
&= 6 \cdot 6,833333333333333 \\
&= 41
\end{aligned}
$$

Para $E(5+5X)$:

$$
\begin{aligned}
E(5+5X) &= 5 + E(5X) && \text{Aplicando Propiedad 2} \\
&= 5 + 5 \cdot E(X) && \text{Aplicando Propiedad 2} \\
&= 5 + 5 \cdot 6,833333333333333 \\
&= 40,16666666666667
\end{aligned}
$$

Para $V(9X)$:

$$
\begin{aligned}
V(9X) &= 81 \cdot V(X) && \text{Aplicando Propiedad 3} \\
&= 81 \cdot 2,138888888888889 \\
&= 173,25
\end{aligned}
$$

1.4. d

Obtenga la f.d.a. y grafíquela.

$$F(X) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 4 \\ \frac{1}{12} & , 4 \leq x < 5 \\ \frac{2}{12} & , 5 \leq x < 6 \\ \frac{5}{12} & , 6 \leq x < 7 \\ \frac{8}{12} & , 6 \leq x < 8 \\ \frac{10}{12} & , 8 \leq x < 9 \\ \frac{12}{12} & , 9 \leq x < 10 \end{cases}$$

// Hacer gráfico que si coincida

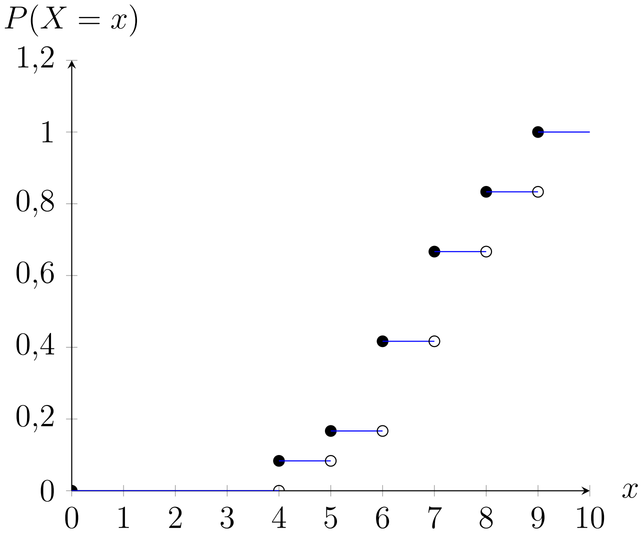


Figura 3: Representación gráfica de la función de probabilidad

1.5. e

Calcule: $P(X > 6)$, $P(X \leq 8)$ y $P(5 \leq X \leq 8)$.
Para $P(X > 6)$:

$$\begin{aligned} P(X > 6) &= 1 - F(6) \\ &= 1 - \frac{5}{12} \\ &= \frac{7}{12} \\ &= 0,5833333333333334 \end{aligned}$$

Para $P(X \leq 8)$:

$$\begin{aligned}
P(X \leq 8) &= \sum_{i=1}^{n} P(X = x) && \text{Remplazando} \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} \\
&= \frac{10}{12} \\
&= 0,8333333333333334
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X \leq 8) &= F(8) && \text{Remplazando} \\
&= \frac{10}{12} \\
&= 0,8333333333333334
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X \leq 8) &= 1 - P(X = 9) && \text{Remplazando} \\
&= 1 - \frac{1}{6} \\
&= \frac{5}{6} \\
&= 0,8333333333333334
\end{aligned}$$

Para $P(5 \leq X \leq 8)$:

$$\begin{aligned}
P(5 \leq X \leq 8) &= F(8) - F(4) && \text{Remplazando} \\
&= \frac{10}{12} - \frac{1}{12} \\
&= \frac{9}{12} \\
&= 0,75
\end{aligned}$$

2. Problema 2

Considera la función $f(x)$ de la variable aleatoria X, que está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} kx & , \quad 0 \leq x < 1 \\ k - x & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & , \quad \text{e.o.c} \end{cases}$$

2.1. a

Determine el valor de k para que $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad.
Para que $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad, se debe cumplir que:

$$\int_{R_x} f(x)dx = 1$$

Por lo tanto es necesario calcular el valor de k para que se cumpla la condición anterior:

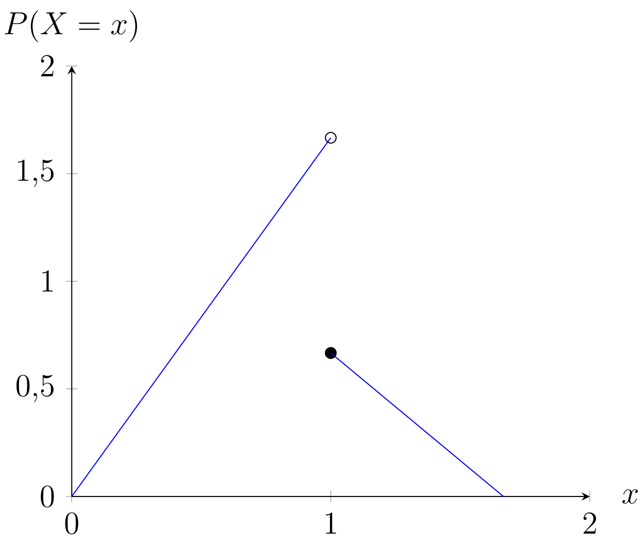
$$\begin{aligned}
\int_0^1 (kx)dx + \int_1^2 (k-x)dx &= 1 && \text{Aplicando la integral} \\
\frac{kx^2}{2}\Big|_0^1 + (kx - \frac{x^2}{2})\Big|_1^2 &= 1 && \text{Remplazando} \\
\frac{k}{2} + (2k - 2 - k + \frac{1}{2}) &= 1 && \text{Despejando k} \\
\frac{k}{2} + (k - \frac{3}{2}) &= 1 \\
\frac{k}{2} + k - \frac{3}{2} &= 1 \\
\frac{3k}{2} - \frac{3}{2} &= 1 \\
\frac{3k}{2} &= \frac{5}{2} \\
k &= \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para que $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{3}x & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{5}{3} - x & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & , \quad \text{e.o.c} \end{cases}$$

2.2. b

Grafique $f(x)$



2.3. c

Calcule: $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right)$ y $P\left(X \geq \frac{3}{8}\right)$

Para $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right) &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\frac{5}{3}x)dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} (\frac{5}{3} - x)dx && \text{Aplicando la integral} \\
&= \frac{5}{6}x^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + (\frac{5}{3}x - \frac{x^2}{2})\Big|_{1}^{\frac{3}{2}} && \text{Remplazando} \\
&= \frac{5}{6} - \frac{5}{24} + (\frac{5}{2} - \frac{9}{8} - \frac{5}{3} + \frac{1}{2}) \\
&= \frac{20}{24} - \frac{5}{24} + (3 - \frac{67}{24}) \\
&= \frac{15}{24} + 3 - \frac{67}{24} \\
&= \frac{15}{24} + \frac{72}{24} - \frac{67}{24} \\
&= \frac{20}{24} \\
&= \frac{5}{6} \\
&= 0,8333333333333334
\end{aligned}$$

Para $P\left(X \geq \frac{3}{8}\right)$:

$$
\begin{aligned}
P\left(X \geq \frac{3}{8}\right) &= 1 - F(\frac{3}{8}) \\
&= 1 - \int_0^{\frac{3}{8}} (\frac{5}{3}x)dx && \text{Aplicando la integral} \\
&= 1 - \frac{5}{6}x^2\Big|_0^{\frac{3}{8}} && \text{Remplazando} \\
&= 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{64} \\
&= 1 - \frac{15}{128} \\
&= \frac{113}{128} \\
&= 0,8828125
\end{aligned}
$$