Suma de Riemann

Marcelo Paz

Calculo Integral

18 de diciembre de 2023

1. Teoria

1.1. Algunas Sumatorias

$$\sum_{i=0}^{n} 1 = n \qquad \sum_{i=1}^{n} C = C\sum_{i=1}^{n} 1 = Cn \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}(i^2+i-2) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} - 2n$$

1.2. Suma de Riemann

Método de aproximar el área bajo un gráfico al sumar un número entero de áreas rectangulares dibujadas bajo la curva.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \quad \text{, donde} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n} \;, \quad n = \text{ número de subdivisiones,} \quad x_i \in [a,b]$$

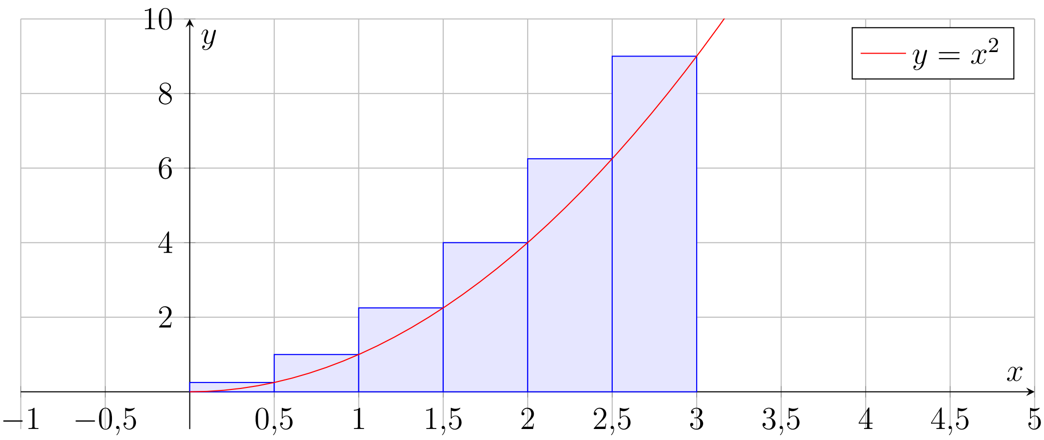

Figura 1: Suma de Riemann

1.3. Suma izquierda de Riemann

El x_i de cada rectángulo es el extremo izquierdo, $m_i = a + (i-1)(\frac{b-a}{n})$.

$$\sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x \quad \text{, donde} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ ,} \quad n = \text{ número de subdivisiones,} \quad m_i \in [a, b{-}\Delta x]$$

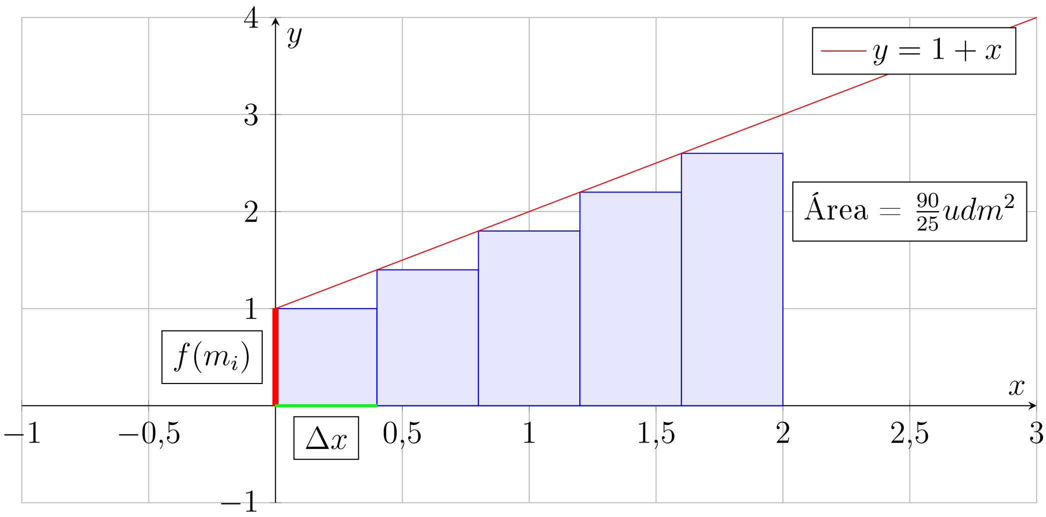

Figura 2: Suma izquierda de Riemann

1.4. Suma derecha de Riemann

El x_i de cada rectángulo es el extremo derecho, $M_i = a + i(\frac{b-a}{n})$.

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x \quad \text{, donde} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ ,} \quad n = \text{ número de subdivisiones,} \quad M_i \in [a{+}\Delta x, b]$$

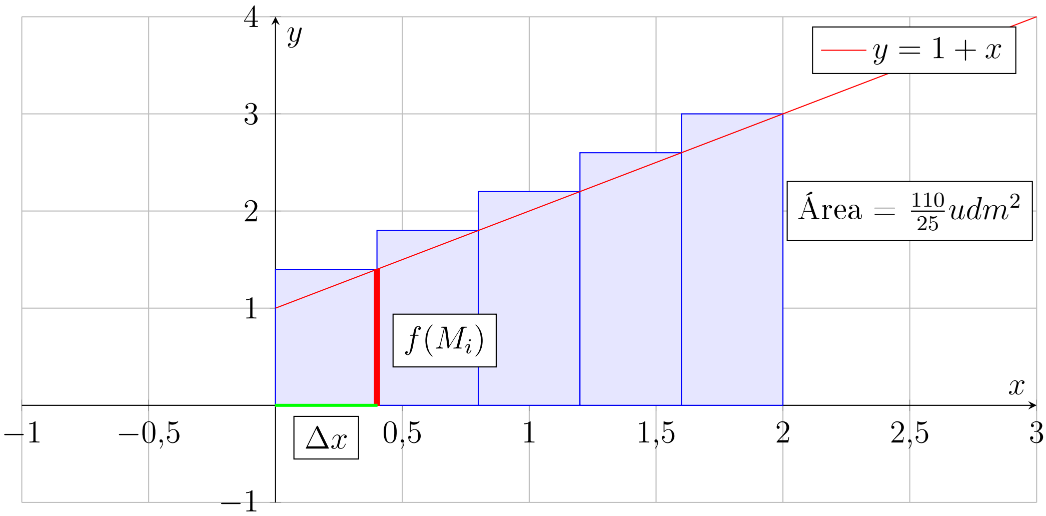

Figura 3: Suma derecha de Riemann

2. Ejercicios

2.1. Ejercicio 1

Determinar aproximadamente el area bajo la curva $y = f(x) = 1 + x$ entre $x = 0$ y $x = 2$, dividiendo el intervalo $[a, b]$ en 5 subintervalos de igual longitud. Realice dos aproximaciones, la primera usando el lado izquierdo de cada subintervalo y la segunda usando su lado derecho.

2.1.1. Datos

$$n = 5 \qquad a = 0 \qquad b = 2 \qquad f(x) = 1 + x$$

$$\begin{aligned} \text{Area Exacta} &= \int_0^2 (1 + x)dx \\ &= x + \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 \\ &= 2 + \frac{4}{2} - \left(0 + \frac{0^2}{2}\right) \\ &= 4udm^2 \end{aligned}$$

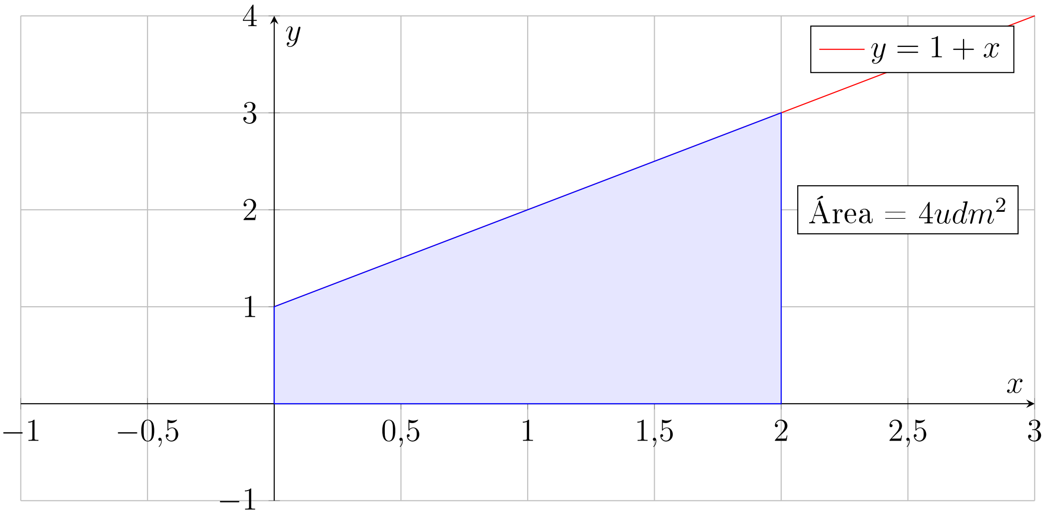

Figura 4: Integral desde 0 a 2 de $f(x) = 1 + x$

2.1.2. Suma izquierda

$$m_i = 0 + (i-1)\left(\frac{2-0}{5}\right) = \frac{2}{5}(i-1)$$

$$\begin{aligned}
s(5) &= \sum_{i=1}^{5} f\left(\frac{2}{5}(i-1)\right)\frac{2}{5} && \text{Remplazamos los datos en la ecuación}\\
&= \sum_{i=1}^{5}\left(1+\frac{2}{5}(i-1)\right)\frac{2}{5} && \text{Evaluamos en la función}\\
&= \frac{2}{5}\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{2}{5}(i-1)+1\right) && \text{Sacamos la constante } \frac{2}{5} \text{ de la sumatoria}\\
&= \frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\sum_{i=1}^{5}(i-1)+\sum_{i=1}^{5}1\right) && \text{Separamos la sumatoria}\\
&= \frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\left(\sum_{i=1}^{5}i-\sum_{i=1}^{5}1\right)+\sum_{i=1}^{5}1\right) && \text{Separamos la sumatoria}\\
&= \frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\left(\frac{5\times 6}{2}-5\right)+5\right) && \text{Resolvemos las sumatorias}\\
&= \frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\times 10+5\right)\\
&= \frac{2}{5}(4+5)\\
&= \frac{18}{5}\\
&= \frac{90}{25} = 3,6udm^2
\end{aligned}$$

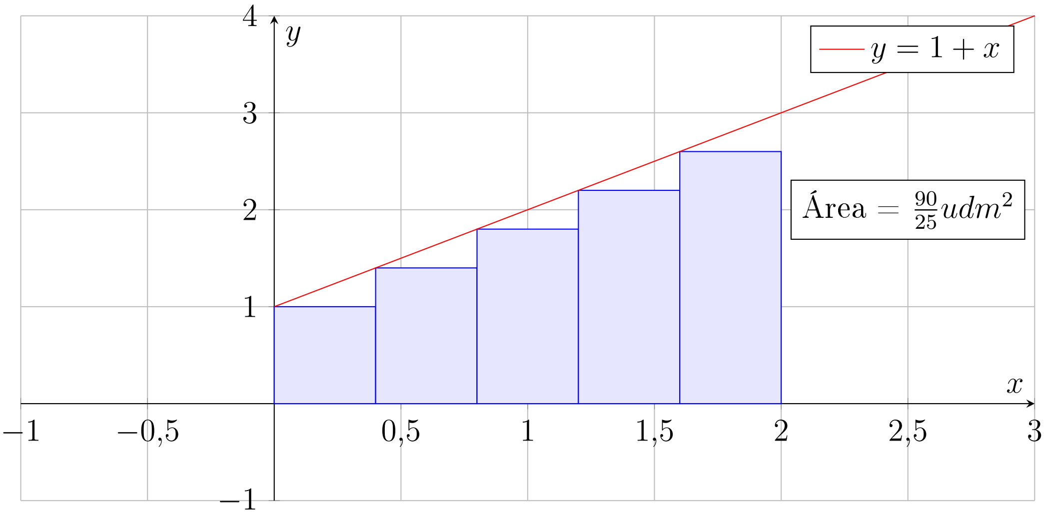

Figura 5: Suma izquierda de Riemann

2.1.3. Suma derecha

$$M_i = 0 + (i)\left(\frac{2-0}{5}\right) = \frac{2i}{5}$$

$$
\begin{aligned}
s(5) &= \sum_{i=1}^{5} f\left(\frac{2i}{5}\right)\frac{2}{5} && \text{Remplazamos los datos en la ecuación}\\
&= \sum_{i=1}^{5}\left(1+\frac{2i}{5}\right)\frac{2}{5} && \text{Evaluamos en la función}\\
&= \frac{2}{5}\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{2i}{5}+1\right) && \text{Sacamos la constante } \frac{2}{5} \text{ de la sumatoria}\\
&= \frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\sum_{i=1}^{5} i + \sum_{i=1}^{5} 1\right) && \text{Separamos la sumatoria}\\
&= \frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\left(\frac{5\times 6}{2}\right)+5\right) && \text{Resolvemos las sumatorias}\\
&= \frac{2}{5}(6+5)\\
&= \frac{22}{5}\\
&= \frac{110}{25} = 4,4udm^2
\end{aligned}
$$

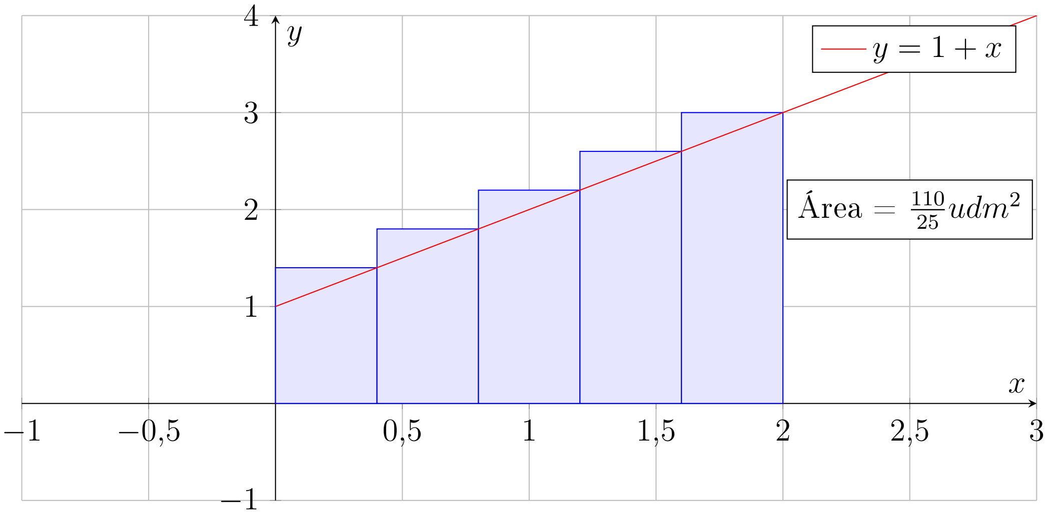

Figura 6: Suma derecha de Riemann