



Certamen 2

Marcelo Paz
Investigación de Operaciones
22 de junio de 2024

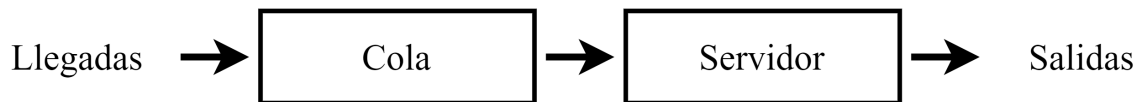


Versión: 1.0.0

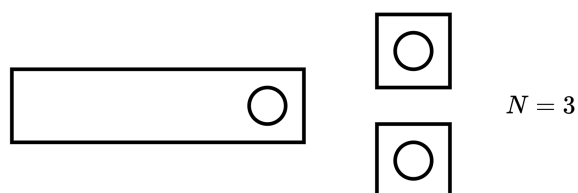
1. Líneas de Espera

Es un modelo matemático que permite analizar el comportamiento de un sistema de espera.

- **Objetivo:** Minimizar el tiempo de espera de los clientes y el costo de atención.
- **Aplicaciones:** Aeropuertos, hospitales, bancos, supermercados, etc.



Cantidad de Clientes en el Sistema





1.1. Único Servidor (M/M/1)

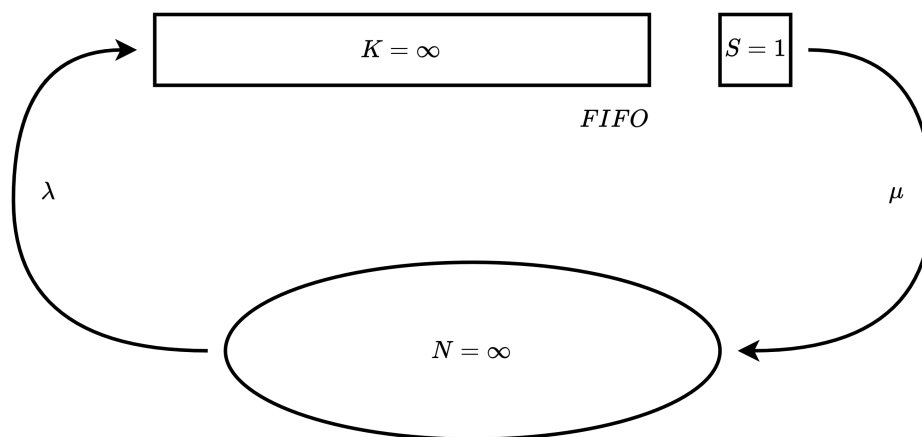
Notación de Kendall: M/M/1 se refiere a un sistema de colas con una tasa de llegada de clientes λ , una tasa de servicio μ y 1 servidor.

El sistema de espera se caracteriza por:

- Los tiempos de llegadas y los tiempos de servicio se distribuyen de manera exponencial.
- Un único servidor.
- Tiene el formato FIFO (First In First Out).
- El tamaño de la población de entrada es infinito, es decir, el número de clientes en el sistema no afecta a la tasa de llegada.
- La tasa de servicio no depende del número de clientes en el sistema.
- Para que el sistema sea estable, se debe cumplir la **Condición de regimen**.

$$\rho < 1$$

Esta condición tiene el objetivo de que la tasa de llegada sea menor a la tasa de servicio, pues como la capacidad del sistema es infinita, si la tasa de llegada es mayor a la tasa de servicio, el sistema se saturará.



Donde:

- K : Capacidad del sistema.
- S : Número de servidores en paralelo.
- μ : Tasa de servicio medidas (Clientes / Unidad de tiempo).
- N : Número de clientes en el sistema.
- λ : Tasa de llegada de clientes (Clientes / Unidad de tiempo)



1.1.1. Indicadores (Performance)

IMPORTANTE: Para los cálculos, se debe considerar la misma unidad de tiempo.

- L : Cantidad promedio de clientes en el sistema.

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

- L_q : Cantidad promedio de clientes en la cola.

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

- W : Tiempo promedio de un cliente en el sistema.

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

- W_q : Tiempo promedio de un cliente en la cola.

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

1.1.2. Probabilidades

Sea n : Cantidad de clientes en el sistema. ($n = 1, 2, \dots$) Entonces:

- ρ : Factor de utilización / Factor de carga / Intensidad tráfico.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1 - P_0$$

- P_0 : Probabilidad de que ningún cliente se encuentre en el sistema.

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

- P_n : Probabilidad de que haya n clientes en el sistema.

$$P_n = \rho^n \cdot P_0 \quad \text{Condición de regimen} \quad \rho < 1$$

- $P(W_q > t)$: Probabilidad que un cliente este en la cola a lo menos t unidades de tiempo.

$$P(W_q > t) = \rho e^{-\mu(1-\rho) \cdot t}$$

- $P(W > t)$: Probabilidad que un cliente permanezca en el sistema, a lo menos t unidades de tiempo.

$$P(W > t) = e^{-\mu(1-\rho) \cdot t}$$

**1.1.3. Problema 1:**

En el mostrador de facturación de una aerolínea llega un promedio de 45 clientes por hora, cuando su capacidad media es de 60 clientes por hora. Si un cliente espera una media de 3 minutos en la cola, se pide:

Datos

$$\lambda = 45 \text{ clientes/hora}$$

$$\mu = 60 \text{ clientes/hora}$$

$$W_q = 3 \text{ minutos}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4} < 1 \quad \text{Condición de regimen}$$

a) Tiempo medio que un cliente pasa en la facturación.

$$\begin{aligned} W &= \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{60 - 45} = \frac{1}{15} \cdot 60 \text{ minutos} \\ &= 4 \text{ minutos} \end{aligned}$$

b) Número medio de clientes en la cola.

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{45^2}{60(60 - 45)} = \frac{2025}{900} \\ &= 2,25 \text{ clientes} \end{aligned}$$

c) Número medio de clientes en el sistema en un momento dado.

$$L = \frac{45}{(60 - 45)} = 3 \quad (\text{Inventado})$$

d) Probabilidad de que el sistema esté vacío.

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 - \frac{\lambda}{\mu} \\ &= 1 - \frac{45}{60} = \frac{4 - 3}{4} \\ &= \frac{1}{4} = 0,25 \\ &= 25 \% \end{aligned}$$

e) Probabilidad de que haya más de 3 clientes:

$$\begin{aligned} P(n > 3) &= 1 - P(n \leq 3) = 1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3) \\ &= 1 - (0,25 + 0,1875 + 0,14 + 0,1054) \\ &= 1 - 0,6829 = 0,3171 \\ &= 31,71 \% \end{aligned}$$

**1.1.4. Problema 2:**

En un restaurante de carretera llega una media de 90 personas a la hora, cuando tiene disponibilidad de dar servicio a 120 clientes por hora. Sabiendo que los clientes esperan una media de 2 minutos en la cola, se pide:

Datos

$$\lambda = 90$$

$$\mu = 120$$

$$W_q = 2 \text{ minutos}$$

$$\rho = \frac{90}{120} = \frac{3}{4} < 1 \quad \text{Condición de regimen}$$

- a) Probabilidad que el sistema se encuentre sin ocupar.

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 - \rho = 1 - \frac{3}{4} = 0,25 \\ &= 25\% \end{aligned}$$

- b) Probabilidad que un cliente tenga que esperar al encontrarse el sistema ocupado.

$$\begin{aligned} P(n > 1) &= 1 - P(n \leq 1) = 1 - (P_0 + P_1) \\ &= 1 - (0,25 + (\frac{3}{4} \cdot 0,25)) = 1 - (0,25 + 0,1875) = 1 - 0,4375 = 0,5625 \\ &= 56,25\% \end{aligned}$$

- c) Número medio de clientes en la cola.

- d) Probabilidad de que hay 4 clientes en la cola.

$$\begin{aligned} P_4 &= \rho^4 \cdot P_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 0,25 = 0,5625 \cdot 0,25 = 0,140625 \\ &= 14,0625\% \end{aligned}$$



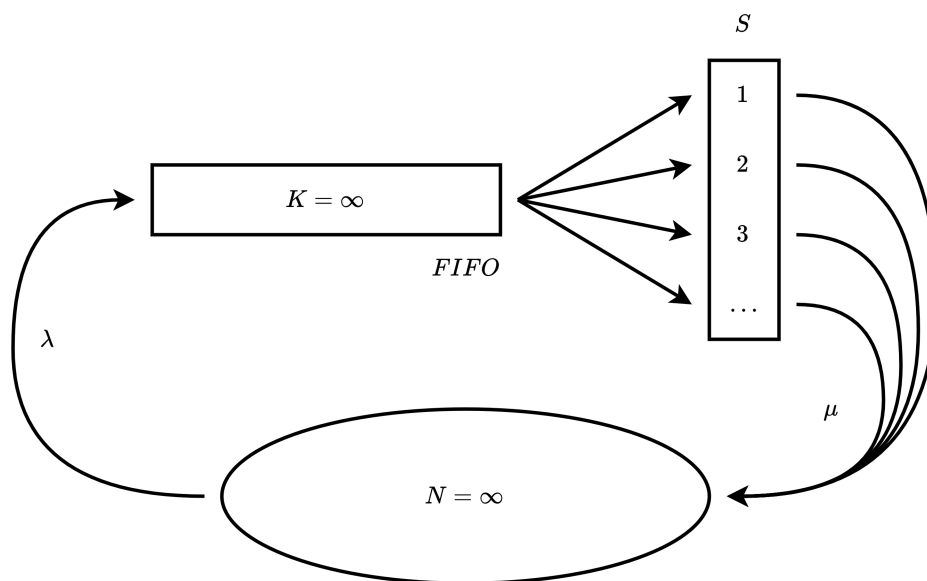
1.2. Múltiples Servidores en Paralelo (M/M/S)

Notación de Kendall: $M/M/S$ se refiere a un sistema de colas con una **tasa de llegada de clientes λ** , una **tasa de servicio μ** y una cantidad **S de servidores**.

- Los tiempos de llegadas y los tiempos de servicio se distribuyen de manera exponencial.
- Múltiples servidores en paralelo.
- Tiene el formato FIFO (First In First Out).
- El tamaño de la población de entrada es infinito, es decir, el número de clientes en el sistema no afecta a la tasa de llegada.
- La tasa de servicio no depende del número de clientes en el sistema.
- Para que el sistema sea estable, se debe cumplir la **Condición de régimen**.

$$\rho < 1$$

Esta condición tiene el objetivo de que la tasa de llegada sea menor a la tasa de servicio, pues como la capacidad del sistema es infinita, si la tasa de llegada es mayor a la tasa de servicio, el sistema se saturará.



Donde:

- K : Capacidad del sistema.
- S : Número de servidores en paralelo.
- μ : Tasa de servicio medidas (Clientes / Unidad de tiempo).
- N : Número de clientes en el sistema.
- λ : Tasa de llegada de clientes (Clientes / Unidad de tiempo)



1.3. Indicadores (Performance)

IMPORTANTE: Para los cálculos, se debe considerar la misma unidad de tiempo.

- L_s : Cantidad promedio de clientes en el sistema.

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \quad (L_s = \lambda \cdot W_s)$$

- L_q : Cantidad promedio de clientes en la cola.

$$L_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \cdot \lambda \cdot \mu}{(s-1)! \cdot (s \cdot \mu - \lambda)^2} \cdot P_0 = \frac{1}{s!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \cdot P_0$$

- W_s : Tiempo promedio de un cliente en el sistema.

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \quad (W_s = \frac{L_s}{\lambda})$$

- W_q : Tiempo promedio de un cliente en la cola.

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad (L_q = \lambda \cdot W_q)$$

1.4. Probabilidades

Sea n : Cantidad de clientes en el sistema. ($n = 1, 2, \dots$) Entonces:

- ρ : Factor de utilización / Factor de carga / Intensidad tráfico.

$$\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu}$$

- P_0 : Probabilidad de que ningún cliente se encuentre en el sistema.

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \cdot \left(\frac{s \cdot \mu}{s \cdot \mu - \lambda}\right)}$$

- P_n : Probabilidad de que haya n clientes en el sistema.

$$P_n = \begin{cases} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \cdot P_0 & \text{si } n \leq s \\ \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s! \cdot s^{n-s}} \cdot P_0 & \text{si } n \geq s \end{cases}$$

**1.4.1. Problema 1:**

Un terminal de facturación dispone de dos operarios que atienden a los clientes que llegan según una distribución de Poisson de media 80 clientes por hora, que esperan en una única cola hasta que alguno de los operarios esté libre. El tiempo requerido para atender a un cliente se distribuye exponencialmente con media 1,2 minutos.

Datos

$$\lambda = 80$$

$$W_s = 1,2 \text{ minutos}$$

$$\mu = \frac{60}{1,2} = 50$$

$$s = 2$$

$$\rho = \frac{80}{2 \cdot 50} = \frac{8}{10} < 1 \quad \text{Condición de regimen}$$

1. ¿Cuál es el número esperado de clientes en el terminal de facturación?

$$L_s = L_q + \frac{80}{50}$$

$$L_q = \frac{\left(\frac{80}{50}\right)^2 \cdot 80 \cdot 50}{(1)! \cdot (2 \cdot 50 - 80)^2} \cdot P_0$$

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{\left(\frac{80}{50}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{80}{50}\right)^2}{2!} \cdot \left(\frac{2 \cdot 50}{2 \cdot 50 - 80}\right)} \\ &= \frac{1}{\frac{\left(\frac{80}{50}\right)^0}{0!} + \frac{\left(\frac{80}{50}\right)^1}{1!} + \frac{\left(\frac{8}{5}\right)^2}{2!} \cdot \left(\frac{100}{20}\right)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{8}{5} + \frac{64}{25} \cdot 5} = \frac{1}{1 + \frac{8}{5} + \frac{32}{5}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{40}{5}} = \frac{1}{1 + 8} = \frac{1}{9} \\ &= 0,1111 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{\left(\frac{8}{5}\right)^2 \cdot 80 \cdot 50}{(20)^2} \cdot 0,1111 \\ &= \frac{\frac{64}{25} \cdot 4000}{400} \cdot 0,1111 = \frac{64}{25} \cdot 10 \cdot 0,1111 \\ &= 26 \cdot 0,1111 = 2,8886 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_s &= 2,8886 + \frac{80}{50} = 2,8886 + 1,6 \\ &= 4,4886 \text{ clientes} \end{aligned}$$



2. ¿Cuál es el tiempo medio que un cliente pasa en el terminal de facturación?

$$\begin{aligned}W_s &= \frac{L_s}{\lambda} \\&= \frac{4,4886}{80} = 0,0561 \text{ horas} = 3,366 \text{ minutos}\end{aligned}$$

3. Probabilidad de que haya exactamente 6 clientes. Como $n > s$:

$$\begin{aligned}P_6 &= \frac{\left(\frac{8}{5}\right)^6}{2! \cdot 2^{6-2}} \cdot 0,1111 \\&= \frac{262144}{15625} \cdot 0,1111 \\&= \frac{8192}{15625} \cdot 0,1111 \\&= 0,5243 \cdot 0,1111 = 0,0582\end{aligned}$$

4. Probabilidad de que haya menos de 3 clientes.

$$\begin{aligned}P(n < 3) &= P_0 + P_1 + P_2 \\&= 0,1111 + \frac{\left(\frac{8}{5}\right)^1}{1!} \cdot 0,1111 + \frac{\left(\frac{8}{5}\right)^2}{2!} \cdot 0,1111 \\&= 0,1111 + \frac{8}{5} \cdot 0,1111 + \frac{64}{25} \cdot 0,1111 \\&= 0,1111 + 0,1778 + 0,1422 = 0,4311\end{aligned}$$

**1.4.2. Problema 2:**

Una pequeña bancaria tiene dos cajeros automáticos que según una distribución exponencial atienden a razón de 1,5 minutos por cliente. La tasa de llegada de clientes según una Poisson es de 30 por hora.

Datos

$$\lambda = 30$$

$$W_s = 1,5 \text{ minutos}$$

$$\mu = \frac{60}{1,5} = 40$$

$$s = 2$$

$$\rho = \frac{30}{2 \cdot 40} = \frac{3}{8} < 1 \quad \text{Condición de regimen}$$

1. Número medio de clientes en el sistema.

$$L_s = L_q + \frac{30}{40}$$

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{\left(\frac{30}{40}\right)^2 \cdot 30 \cdot 40}{(1)! \cdot (2 \cdot 40 - 30)^2} \cdot P_0 \\ &= \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 30 \cdot 40}{(50)^2} \cdot 0,4545 \\ &= \frac{\frac{9}{16} \cdot 1200}{2500} \cdot 0,4545 \\ &= \frac{9}{16} \cdot 0,48 \cdot 0,4545 \\ &= 0,28125 \cdot 0,4545 \\ &= 0,1277 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_s &= 0,1277 + \frac{30}{40} = 0,1277 + 0,75 \\ &= 0,8777 \text{ clientes} \end{aligned}$$

2. Tiempo medio de un cliente en el sistema.

$$\begin{aligned} W_s &= \frac{L_s}{\lambda} \\ &= \frac{0,8777}{30} = 0,0293 \text{ horas} = 1,76 \text{ minutos} \end{aligned}$$

3. Porcentaje de tiempo de cajero libre.
PREGUNTARLE AL PROFESOR.

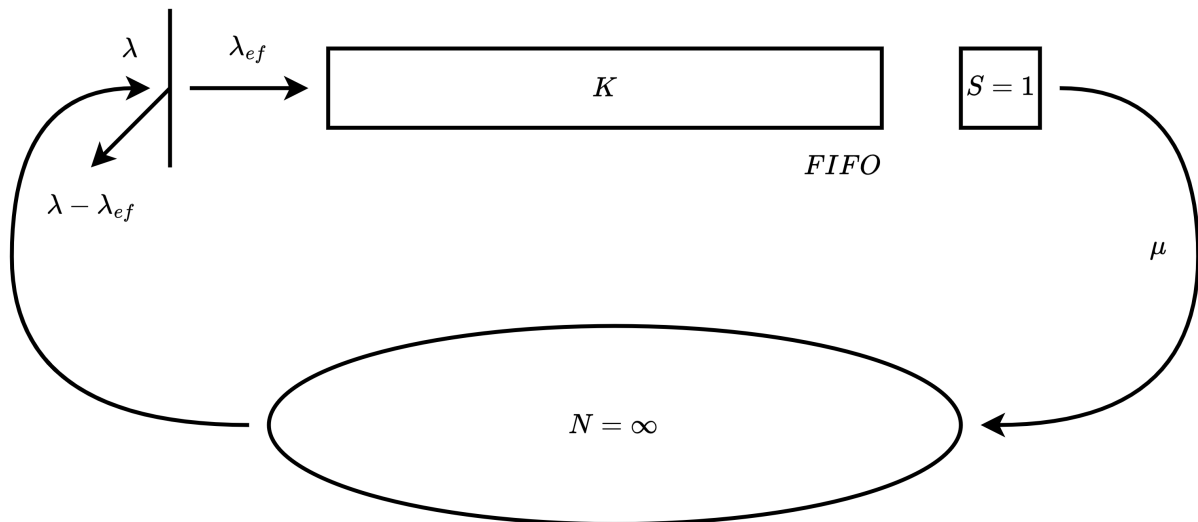
$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{\left(\frac{30}{40}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{30}{40}\right)^2}{2!} \cdot \left(\frac{2 \cdot 40}{2 \cdot 40 - 30}\right)} \\ &= \frac{1}{\frac{\left(\frac{30}{40}\right)^0}{0!} + \frac{\left(\frac{30}{40}\right)^1}{1!} + \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2!} \cdot \left(\frac{80}{50}\right)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{3}{4} + \frac{\frac{9}{16}}{2} \cdot 1,6} = \frac{1}{1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{20}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{24}{20}} = \frac{1}{1 + 1,2} = \frac{1}{2,2} \\ &= 0,4545 \end{aligned}$$



1.5. Único Servidor con Capacidad Finita (M/M/1/K)

Notación de Kendall: M/M/1/K se refiere a un sistema de colas con una tasa de llegada de clientes λ , una tasa de servicio μ , 1 servidor y una cantidad K de clientes en el sistema.

- Cola finita.
- El número máximo de clientes en el sistema es K , por lo que la capacidad de la cola es $K - s$.
- Tiene el formato FIFO (First In First Out).
- En esta situación, si el sistema está lleno no se permite la entrada de nuevos clientes al sistema. En consecuencia, la tasa de llegada efectiva no es constante y varía con el tiempo (dependiendo si el sistema está o no lleno).



Donde:

- K : Capacidad del sistema.
- S : Número de servidores en paralelo.
- μ : Tasa de servicio medidas (Clientes / Unidad de tiempo).
- N : Número de clientes en el sistema.
- λ : Tasa de llegada de clientes (Clientes / Unidad de tiempo)
- λ_{ef} : Tasa de llegada efectiva de clientes.

$$\lambda_{ef} = \lambda \cdot (1 - P_k)$$



1.6. Indicadores (Performance)

IMPORTANTE: Para los cálculos, se debe considerar la misma unidad de tiempo.

- L_s : Cantidad promedio de clientes en el sistema.

$$L_s = \begin{cases} \frac{\rho}{(1-\rho)} - \frac{(k+1) \cdot \rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} & \text{si } \rho \neq 1 \\ \frac{k}{2} & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$$

- L_q : Cantidad promedio de clientes en la cola.

$$L_q = L_s - (1 - P_0) = \begin{cases} L_s - \frac{(1-\rho^k) \cdot \rho}{1-\rho^{k+1}} & \text{si } \rho \neq 1 \\ \frac{k \cdot (k-1)}{2 \cdot (k+1)} & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$$

- W_s : Tiempo promedio de un cliente en el sistema.

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{ef}}$$

- W_q : Tiempo promedio de un cliente en la cola.

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda_{ef}}$$

- $Long_q$: Longitud de la cola.

$$Long_q = \lambda_{ef} \cdot W_q$$

1.7. Probabilidades

En este sistema ρ puede tener cualquier valor, pues el sistema no se desborda.

Sea n : Cantidad de clientes en el sistema. ($n = 1, 2, \dots$) Entonces:

- P_0 : Probabilidad de que ningún cliente se encuentre en el sistema.

$$P_0 = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} & \text{si } \lambda \neq \mu \equiv \rho = \frac{\lambda}{\mu} \neq 1 \\ \frac{1}{1+k} & \text{si } \lambda = \mu \equiv \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1 \end{cases}$$

- P_n : Probabilidad de que haya n clientes en el sistema.

$$P_n = \begin{cases} \rho^n \cdot \frac{(1-\rho)}{1-\rho^{k+1}} & \text{si } \lambda \neq \mu \equiv \rho = \frac{\lambda}{\mu} \neq 1 \\ \frac{1}{1+k} & \text{si } \lambda = \mu \equiv \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1 \end{cases}$$



1.7.1. Problema 1:

En un taller mecánico llegan vehículos para una puesta a punto antes de pasar la ITV, las llegadas siguen un proceso de Poisson de promedio 18 vehículos/hora. Las dimensiones del taller sólo permiten que haya 4 vehículos, y las ordenanzas municipales no permiten esperar en la vía pública. El taller despacha un promedio de 6 vehículos/hora de acuerdo con una distribución exponencial. Se pide:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ningún vehículo en el taller?
2. ¿Cuál es el promedio de vehículos en el taller?
3. ¿Cuánto tiempo pasa por término medio un vehículo en el taller?
4. ¿Cuánto tiempo esperan por término medio los vehículos en la cola?
5. ¿Cuál es la longitud media de la cola?

**1.7.2. Problema 2:**

Sea un sistema de espera (m/m/1/6) y $\lambda = \mu = 20$. Calcular:

1. L_s .

$$\begin{aligned} L_s &= \frac{k}{2} \\ &= \frac{6}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

2. L_q .

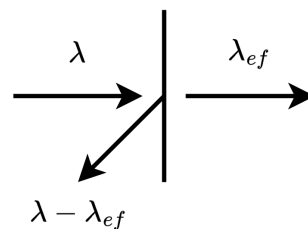
$$\begin{aligned} L_q &= \frac{k \cdot (k - 1)}{2 \cdot (k + 1)} \\ &= \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 7} \\ &= 2,1429 \end{aligned}$$

3. Probabilidad de que hayan menos de 3 clientes en el sistema.

$$\begin{aligned} P(n > 3) &= P_0 + P_1 + P_2 \\ &= \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7} \\ &= 0,4286 \end{aligned}$$

4. Tasa efectiva.

$$\begin{aligned} \lambda_{ef} &= \lambda \cdot (1 - P_0) \\ &= 20 \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right) \\ &= 20 \cdot \left(\frac{6}{7}\right) \\ &= \frac{120}{7} \\ &= 17,1429 \end{aligned}$$



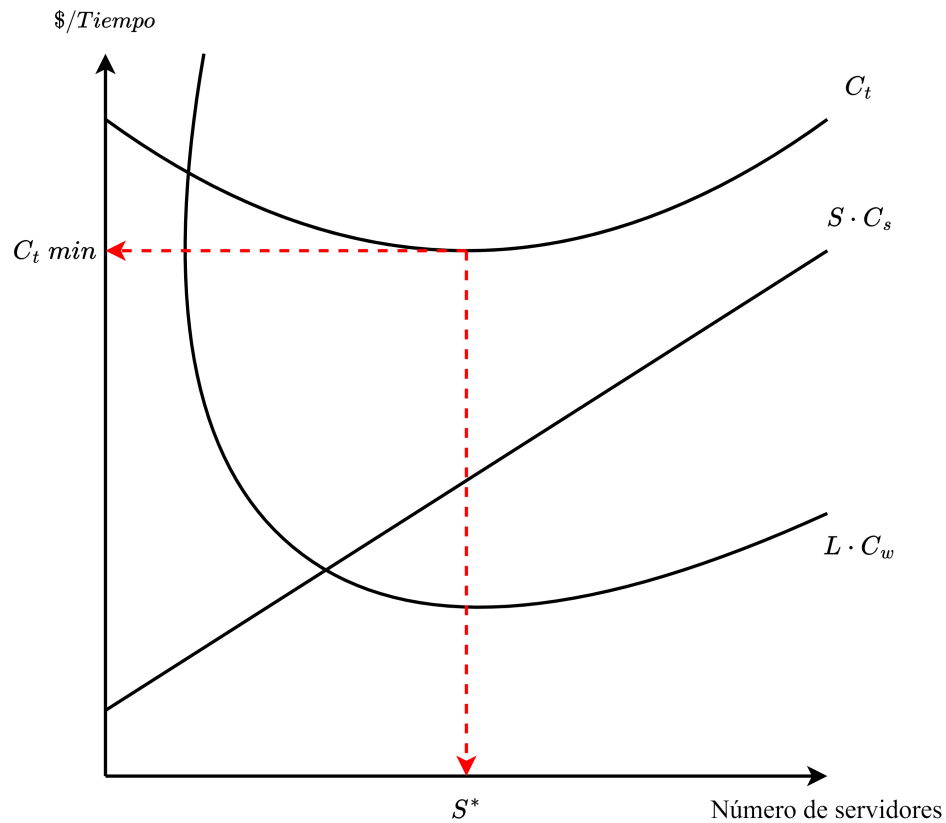
$$20 - 17,1429$$

$$2,8571$$



2. Costos en los sistemas de colas

$$C_t = S \cdot C_s + L \cdot C_w$$



Donde:

- S : Número de servidores.
- C_s : Costo de operación por servidor ($\$/t$).
- L : Número promedio de clientes.
- C_w : Costo unitario de espera ($\$/t$).



2.1. Problema 1:

El departamento de Ciencias de la Decisión trata de determinar si renta una copiadora lenta o una rápida. El departamento cree que el tiempo de un empleado vale 15 \$/h. El arrendamiento de la copiadora lenta cuesta 4 \$/h y un empleado tarda un promedio de 10 minutos en terminar sus copias, distribuido exponencialmente. La copiadora rápida cuesta 15 \$/h en arrendamiento, y un empleado tarda un promedio de 6 minutos en terminar sus copias. Un promedio de 4 empleados/h son los que necesitan usar la copiadora. Los tiempos entre llegadas son exponenciales. ¿Que maquina debe rentar el departamento?

	m/m/1 lenta	m/m/1 rápida
s	1	1
C_s	4 \$/h	15 \$/h
λ	4 empleados/h	4 empleados/h
μ	6 clientes/h	10 clientes/h
L	$\frac{4}{2} = 2$	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
C_w	15 \$/h	15 \$/h
C_t	$1 \cdot 4 + 2 \cdot 15 = 34$ \$/h	$1 \cdot 15 + \frac{2}{3} \cdot 15 = 25$ \$/h

∴ Se debe arrendar la fotocopidora rápida.

2.2. Problema 2:

Un supermercado trata de decidir cuántas cajas deben estar funcionando. Suponga que cada hora llega un promedio de 18 clientes, y el tiempo promedio de atención a un cliente es 4 minutos. Los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio son exponenciales, y el sistema se puede modelar como uno $M/M/s/DG/\infty/\infty$. El funcionamiento de una caja cuesta 20 \$/h, y se carga un costo de 0,25 \$ por cada minuto que el cliente pasa en la zona de cajas. ¿Cuántas cajas debe abrir el supermercado?

s	P_0	L
1	-	-
2	0,25	1,88
3	0,29	1,29
4	0,3	1,22

s	μ	λ	ρ	C_s	L	C_w	C_t
1	15	18	Colapsa	20	-	15	-
2	15	18	Estable	20	1,88	15	$40 + 1,88 \cdot 15 = 68,2^*$
3	15	18	Estable	20	1,29	15	$60 + 1,29 \cdot 15 = 79,35$
4	15	18	Estable	20	1,22	15	$80 + 1,22 \cdot 15 = 98,3$
...