



TAREA-220149

Marcelo PAZ
Estadística y Probabilidad 28 de noviembre de 2023

1. Problema 1

Suponga que el número de autos X , que pasan a través de una máquina lavadora, entre las 16:00 y las 17:00 horas de un día viernes determinado, tiene la siguiente función de probabilidad:

x	4	5	6	7	8	9
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Figura 1: Tabla de probabilidad

Sea $g(X) = 2X - 1$ que representa la cantidad de dinero en dólares que el gerente del negocio le paga al encargado.

Definición de evento:

- X : "Auto pasa por la lavadora"

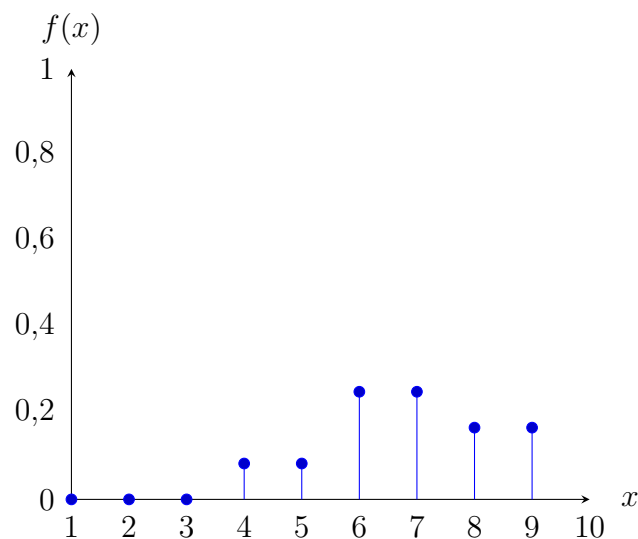


Figura 2: Representación gráfica de la función de probabilidad

**1.1. a**

Encuentre las ganancias esperadas en este período de tiempo en particular.

$$\begin{aligned} E(g(x)) &= \sum_{i=1}^n g(x) \cdot P(X = x) && \text{Remplazando} \\ &= (7 \cdot \frac{1}{12}) + (9 \cdot \frac{1}{12}) + (11 \cdot \frac{1}{4}) + (13 \cdot \frac{1}{4}) + (15 \cdot \frac{1}{6}) + (17 \cdot \frac{1}{6}) \\ &= \frac{7}{12} + \frac{9}{12} + \frac{33}{12} + \frac{39}{12} + \frac{30}{12} + \frac{34}{12} \\ &= \frac{154}{12} \\ &= 12,666666666666667 \end{aligned}$$

Por lo tanto, las ganancias esperadas en este período de tiempo en particular son de \$12,666666666666667 aproximadamente \$13 dólares.

1.2. b

¿Cuál es la probabilidad de que pasen 9 autos el día viernes entre las 16:00 y las 17:00 horas?

$$P(X = 9) = \frac{1}{6}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que pasen 9 autos el día viernes entre las 16:00 y las 17:00 horas es de $\frac{1}{6}$.

1.3. c

Determine: $V(4 + 3X)$, $V(4)$, $E(6X)$, $E(5 + 5X)$, $V(9X)$.

Primero se calculara $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{i=1}^n x^2 \cdot P(X = x) && \text{Remplazando} \\ &= (16 \cdot \frac{1}{12}) + (25 \cdot \frac{1}{12}) + (36 \cdot \frac{1}{4}) + (49 \cdot \frac{1}{4}) + (64 \cdot \frac{1}{6}) + (81 \cdot \frac{1}{6}) \\ &= \frac{16}{12} + \frac{25}{12} + 9 + \frac{49}{4} + \frac{64}{6} + \frac{81}{6} \\ &= \frac{16}{12} + \frac{25}{12} + \frac{108}{12} + \frac{147}{12} + \frac{128}{12} + \frac{162}{12} \\ &= \frac{586}{12} \\ &= 48,83333333333333 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^n x \cdot P(X = x) && \text{Remplazando} \\ &= (4 \cdot \frac{1}{12}) + (5 \cdot \frac{1}{12}) + (6 \cdot \frac{1}{4}) + (7 \cdot \frac{1}{4}) + (8 \cdot \frac{1}{6}) + (9 \cdot \frac{1}{6}) \\ &= \frac{4}{12} + \frac{5}{12} + \frac{6}{4} + \frac{7}{4} + \frac{8}{6} + \frac{9}{6} \\ &= \frac{4}{12} + \frac{5}{12} + \frac{18}{12} + \frac{21}{12} + \frac{16}{12} + \frac{18}{12} \\ &= \frac{82}{12} \\ &= 6,833333333333333 \end{aligned}$$

Asi:

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= 48,83333333333333 - (6,833333333333333)^2 \\ &= 48,83333333333333 - 46,69444444444444 \\ &= 2,138888888888889 \end{aligned}$$

Para $V(4 + 3X)$:

$$\begin{aligned} V(4 + 3X) &= V(4) + V(3X) && \text{Aplicando Propiedad 1 y 3} \\ &= 0 + 9 \cdot V(X) && \text{Remplazando} && = 9 \cdot 2,138888888888889 \\ &= 19,25 \end{aligned}$$

Para $V(4)$:

$$E(4) = 0 \quad \text{Aplicando Propiedad 1}$$

Para $E(6X)$:

$$\begin{aligned} E(6X) &= 6 \cdot E(X) && \text{Aplicando Propiedad 2} \\ &= 6 \cdot 6,833333333333333 \\ &= 41 \end{aligned}$$

Para $E(5 + 5X)$:

$$\begin{aligned} E(5 + 5X) &= 5 + E(5X) && \text{Aplicando Propiedad 2} \\ &= 5 + 5 \cdot E(X) && \text{Aplicando Propiedad 2} \\ &= 5 + 5 \cdot 6,833333333333333 \\ &= 40,16666666666667 \end{aligned}$$

Para $V(9X)$:

$$\begin{aligned} V(9X) &= 81 \cdot V(X) && \text{Aplicando Propiedad 3} \\ &= 81 \cdot 2,138888888888889 \\ &= 173,25 \end{aligned}$$

1.4. d

Obtenga la f.d.a. y gráfiquela.

$$F(X) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 4 \\ \frac{1}{12} & , \quad 4 \leq x < 5 \\ \frac{2}{12} & , \quad 5 \leq x < 6 \\ \frac{5}{12} & , \quad 6 \leq x < 7 \\ \frac{8}{12} & , \quad 6 \leq x < 8 \\ \frac{10}{12} & , \quad 8 \leq x < 9 \\ \frac{12}{12} & , \quad 9 \leq x < 10 \end{cases}$$

// Hacer gráfico que si coincida

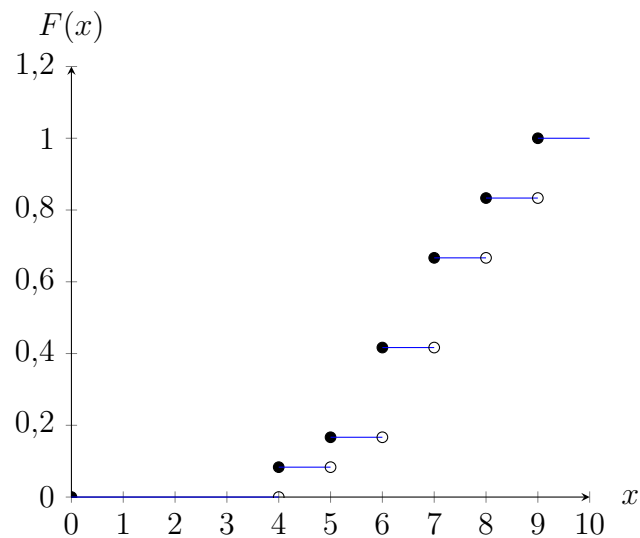


Figura 3: Representación gráfica de la función de probabilidad

1.5. e

Calcule: $P(X > 6)$, $P(X \leq 8)$ y $P(5 \leq X \leq 8)$.

Para $P(X > 6)$:

$$\begin{aligned} P(X > 6) &= 1 - F(6) \\ &= 1 - \frac{5}{12} \\ &= \frac{7}{12} \\ &= 0,5833333333333334 \end{aligned}$$



Para $P(X \leq 8)$:

$$\begin{aligned} P(X \leq 8) &= \sum_{i=1}^n P(X = x) && \text{Remplazando} \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} \\ &= \frac{10}{12} \\ &= 0,8333333333333334 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 8) &= F(8) && \text{Remplazando} \\ &= \frac{10}{12} \\ &= 0,8333333333333334 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 8) &= 1 - P(X = 9) && \text{Remplazando} \\ &= 1 - \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{6} \\ &= 0,8333333333333334 \end{aligned}$$

Para $P(5 \leq X \leq 8)$:

$$\begin{aligned} P(5 \leq X \leq 8) &= F(8) - F(4) && \text{Remplazando} \\ &= \frac{10}{12} - \frac{1}{12} \\ &= \frac{9}{12} \\ &= 0,75 \end{aligned}$$

2. Problema 2

Considera la función $f(x)$ de la variable aleatoria X , que está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} kx & , \quad 0 \leq x < 1 \\ k - x & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & , \quad \text{e.o.c} \end{cases}$$

2.1. a

Determine el valor de k para que $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad.
Para que $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad, se debe cumplir que:

$$\int_{R_x} f(x)dx = 1$$

Por lo tanto es necesario calcular el valor de k para que se cumpla la condición anterior:

$$\int_0^1 (kx)dx + \int_1^2 (k - x)dx = 1 \quad \text{Aplicando la integral}$$

$$\left. \frac{kx^2}{2} \right|_0^1 + \left. \left(kx - \frac{x^2}{2} \right) \right|_1^2 = 1 \quad \text{Remplazando}$$

$$\frac{k}{2} + (2k - 2 - k + \frac{1}{2}) = 1 \quad \text{Despejando k}$$

$$\frac{k}{2} + (k - \frac{3}{2}) = 1$$

$$\frac{k}{2} + k - \frac{3}{2} = 1$$

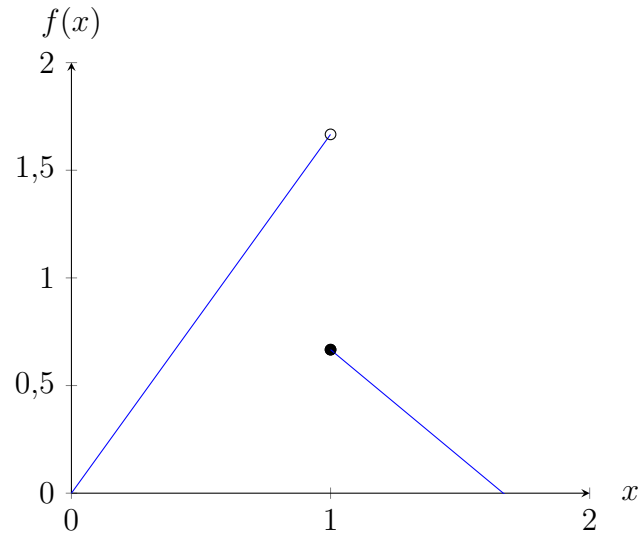
$$\frac{3k}{2} - \frac{3}{2} = 1$$

$$\frac{3k}{2} = \frac{5}{2}$$

$$k = \frac{5}{3}$$

Por lo tanto, para que $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{3}x & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{5}{3} - x & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & , \quad \text{e.o.c} \end{cases}$$

**2.2. b**Grafique $f(x)$ **2.3. c**Calcule: $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right)$ y $P\left(X \geq \frac{3}{8}\right)$ Para $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right)$:

$$P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{5}{3}x\right)dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \left(\frac{5}{3} - x\right)dx \quad \text{Aplicando la integral}$$

$$= \frac{5}{6}x^2 \Big|_{\frac{1}{2}}^1 + \left(\frac{5}{3}x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_1^{\frac{3}{2}} \quad \text{Remplazando}$$

$$= \frac{5}{6} - \frac{5}{24} + \left(\frac{5}{2} - \frac{9}{8} - \frac{5}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{20}{24} - \frac{5}{24} + \left(3 - \frac{67}{24}\right)$$

$$= \frac{15}{24} + 3 - \frac{67}{24}$$

$$= \frac{15}{24} + \frac{72}{24} - \frac{67}{24}$$

$$= \frac{20}{24}$$

$$= \frac{5}{6}$$

$$= 0,8333333333333334$$



Para $P\left(X \geq \frac{3}{8}\right)$:

$$\begin{aligned} P\left(X \geq \frac{3}{8}\right) &= 1 - F\left(\frac{3}{8}\right) \\ &= 1 - \int_0^{\frac{3}{8}} \left(\frac{5}{3}x\right)dx && \text{Aplicando la integral} \\ &= 1 - \frac{5}{6}x^2 \Big|_0^{\frac{3}{8}} && \text{Remplazando} \\ &= 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{64} \\ &= 1 - \frac{15}{128} \\ &= \frac{113}{128} \\ &= 0,8828125 \end{aligned}$$

2.4. d

Determine el valor de: $E(6 - 5X)$ y $V(6 - 5X)$

Para $E(6 - 5X)$:

Es necesario:

$$\begin{aligned} E(X) &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (x \cdot f(x))dx \right) \\ &= \left(\int_0^1 \left(x \cdot \frac{5}{3}x\right)dx + \int_1^2 \left(x \cdot \left(\frac{5}{3} - x\right)\right)dx \right) \\ &= \left(\frac{5x^3}{9} \Big|_0^1 + \left(\frac{5x^2}{6} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 \right) \\ &= \left(\frac{5}{9} + \frac{20}{6} - \frac{8}{3} - \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3} \right) \right) \\ &= \left(\frac{5}{9} + \frac{20}{6} - \frac{16}{6} - \frac{15 - 6}{18} \right) \\ &= \left(\frac{5}{9} + \frac{4}{6} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \left(\frac{5}{9} + \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{13}{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(6 - 5X) &= E(6) - E(5X) \\&= 6 - 5E(X) \\&= 6 - 5\left(\frac{13}{18}\right) \\&= 6 - \frac{65}{18} \\&= \frac{43}{18} \\&= 2,38889\end{aligned}$$

Para $V(6 - 5X)$:

Es necesario:

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 \cdot f(x)) dx \right) \\&= \left(\int_0^1 (x^2 \cdot \frac{5}{3}x) dx + \int_1^2 (x^2 \cdot (\frac{5}{3} - x)) dx \right) \\&= \left(\frac{5x^4}{12} \Big|_0^1 + \left(\frac{5x^3}{9} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_1^2 \right) \\&= \left(\frac{5}{12} + \frac{40}{9} - \frac{16}{4} - \left(\frac{5}{9} - \frac{1}{4} \right) \right) \\&= \left(\frac{5}{12} + \frac{40}{9} - \frac{16}{6} - \frac{15-6}{18} \right) \\&= \left(\frac{5}{12} + \frac{5}{36} \right) \\&= \frac{5}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(6 - 5X) &= V(6) - 5^2V(X) \\&= 0 - 25V(X) \\&= -25(E(x^2) - (E(x))^2) \\&= -25\left(\frac{5}{9} - \left(\frac{13}{18}\right)^2\right) \\&= -25\left(\frac{5}{9} - \frac{169}{324}\right) \\&= -25\left(\frac{11}{324}\right) \\&= -\frac{275}{324} \\&= -0,848765\end{aligned}$$