Distribuciones

Marcelo Paz
Estadistica y Probabilidades 4 de diciembre de 2023

1. Teoría

Para valores Discretos

- **Distribución Binomial:** Una variable aleatoria X se dice Binomial cuando indica el número de éxitos que ocurren en n ensayos Bernoulli.

  Supuestos:

  1. La probabilidad de éxito "p" permanece constante durante los n ensayos Bernoulli.
  2. Los n ensayos son independientes.

  Función de Probabilidad:

  $$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} \qquad \text{, x = 0, 1, ..., n; q = 1 - p}$$

  Notación:

  $$X \sim B(n, p)$$

  Esperanza y Varianza:

  $$E(X) = n \cdot p \qquad V(X) = n \cdot p \cdot q$$

- **Distribución Hipergeométrica:** Una variable aleatoria X se dice Hipergeométrica cuando a partir de una población de tamaño N que se encuentra dividida en solo dos grupos, k y $N - k$, donde k es una característica o atributo de interés, se toma un tamaño de muestra n y X es el número de éxitos que se obtienen en la muestra.

  Función de Probabilidad:

  $$P(X = x) = \frac{\binom{k}{x} \cdot \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{, x = 0, 1, ..., min\{n,k\}}$$

  Notación:

  $$X \sim H(N, k, n)$$

- **Distribución de Poisson:** Una variable aleatoria se dice Poisson cuando indica el número de ocurrencias de un evento por intervalo de tiempo o unidad de área.

  El parámetro que caracteriza a esta distribución es λ e indica el promedio o tasa de ocurrencia del evento por intervalo de tiempo o unidad de área.

  Función de Probabilidad:

  $$P(X = x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \qquad \text{, x = 0, 1, 2, ..., } \infty$$

  Notación:

  $$X \sim P(\lambda)$$

  Esperanza y Varianza:

  $$E(X) = \lambda \qquad V(X) = \lambda$$

Para valores Continuos

- **Distribución Uniforme:** Una variable aleatoria continua X se dice distribuida Uniforme en el intervalo $[a, b]$ si su función de densidad de probabilidad está dada por:

  $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{, a} \leq \text{x} \leq \text{b} \\ \\ 0 & \text{, en otro caso} \end{cases}$$

  Notación:

  $$X \sim U[a, b]$$

  Esperanza y Varianza:

  $$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- **Distribución Exponencial:** Una variable aleatoria continua X se dice exponencialmente distribuida con parámetro λ si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{, x} \geq 0 \\ \\ 0 & \text{, en otro caso} \end{cases}$$

Notación:

$$X \sim \varepsilon(\lambda)$$

Esperanza y Varianza:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Función de Distribución Acumulada:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{, x} \geq 0 \\ \\ 0 & \text{, en otro caso} \end{cases}$$

- **Distribución Normal:** Una variable aleatoria continua X que toma todos los valores reales, tiene una distribución normal si su función de densidad de probabilidades es de la forma.

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad , -\infty < x < \infty$$

Donde, $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$

Notación:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Esperanza y Varianza:

$$E(X) = \mu \qquad V(X) = \sigma^2$$

Variable aleatoria normal estándar: Si Z es una variable normal con medio cero y varianza uno, con

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Función de densidad:

$$\varphi_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad , -\infty < z < \infty$$

Función de distribución:

$$F_z(z) = \phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi_z(t) \cdot dt$$

Teorema

Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Si, $Y = aX + b$, a >0
Entonces, Y es una variable normal con media $a\mu + b$ y varianza $a^2\sigma^2$.