



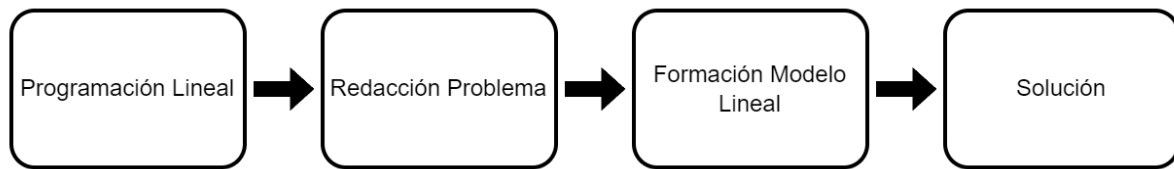
# Programación Lineal

Marcelo PAZ  
Investigación de Operaciones  
15 de abril de 2024



Versión: 1.5.0

## Diagrama de flujo: Programación Lineal



### 1. Modelo de Programación Lineal

$$\begin{aligned}
 &\left( \begin{array}{c} \text{Max} \\ \text{o} \\ \text{Min} \end{array} \right) Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
 &\text{s.a. } \left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \left( \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \right) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \left( \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \right) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \left( \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \right) b_m \end{array} \right\} \text{Restricciones} \\
 &x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0
 \end{aligned}$$

Donde:

- $Z$  es la función objetivo.
- $c_1, c_2, \dots, c_n$  son los coeficientes de Costo.
- $a_{ij}$  son los coeficientes Tecnológicos.
- $b_i$  son Constantes RHS(Right Hand Side).
- $x_j$  son las Variables de Decisión.



## Problema 1: Método gráfico

Un colegio va a realizar un paseo. En total participarán 400 personas entre alumnos y profesores. Se requiere contratar buses para el traslado de dichas personas. Al llamar a una empresa de transportes se obtiene la siguiente información: La empresa dispone de 8 buses con 40 asientos y 10 buses con 50 asientos. Para el día del paseo habrá 9 choferes disponibles. El costo de arriendo es de \$ 30.000 por cada bus de 40 asientos y de \$40.000 por cada bus de 50 asientos. Antes de contratar los buses, el Director del colegio debe decidir cuántos buses de cada tipo les conviene arrendar para que el arriendo resulte lo más económico posible.Cuál será la decisión de menor costo?

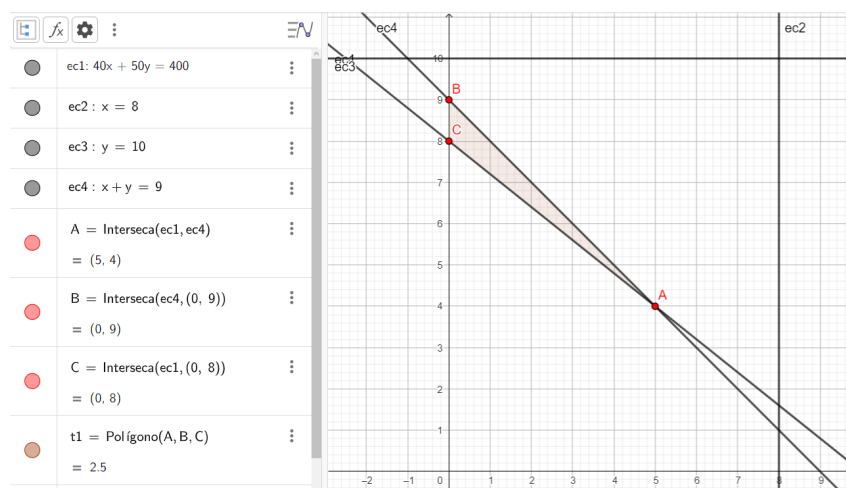
### Variables de Decisión:

- $x_1$  = Cantidad de buses de 40 asientos por contratar.
- $x_2$  = Cantidad de buses de 50 asientos por contratar.

### Función Objetivo:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= 30000x_1 + 40000x_2 \\ \text{s.a } 40x_1 + 50x_2 &\geq 400 \\ x_1 &\leq 8 \\ x_2 &\leq 10 \\ x_1 + x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

### Solución por método gráfico:



Vertice $(x_1, x_2)$	Z	
A(5, 4)	310000	*
B(0, 9)	360000	
C(0, 8)	320000	

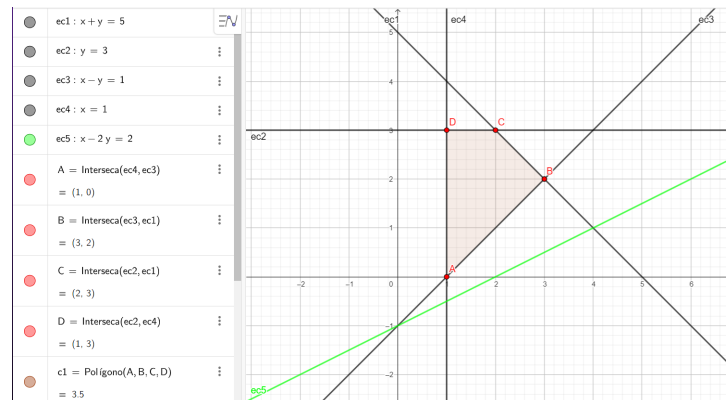


## Problema 2:

Función Objetivo: Restricción redundante

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & Z = 2x_1 - 6x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 5 \quad \text{No Activa} \\ & x_2 \leq 3 \quad \text{Activa} \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \quad \text{No Activa} \\ & x_1 \geq 1 \quad \text{Activa} \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \quad \text{No Activa} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Solución por método gráfico:



OBS:

- La restricción (5) de color verde es redundante.
- Lo de activo y no activo tengo que investigarlo mas o pedirle a alguien que me lo explique.

Vertice $(x_1, x_2)$	Z	
A(1, 0)	2	
B(3, 2)	-6	
C(2, 3)	-14	
D(1, 3)	-16	*

### 1.1. Algunas definiciones:

- **Solución factible:** todos los puntos  $(x_1, x_2)$  deben satisfacer todas las restricciones.
- **Región factible:** conjunto de todas las soluciones factibles.
- **Vértices:** puntos de esquina o extremos de la región factible.
- **Óptimo de un modelo lineal:** es un vértice de la región factible que maximiza o minimiza la función objetivo.

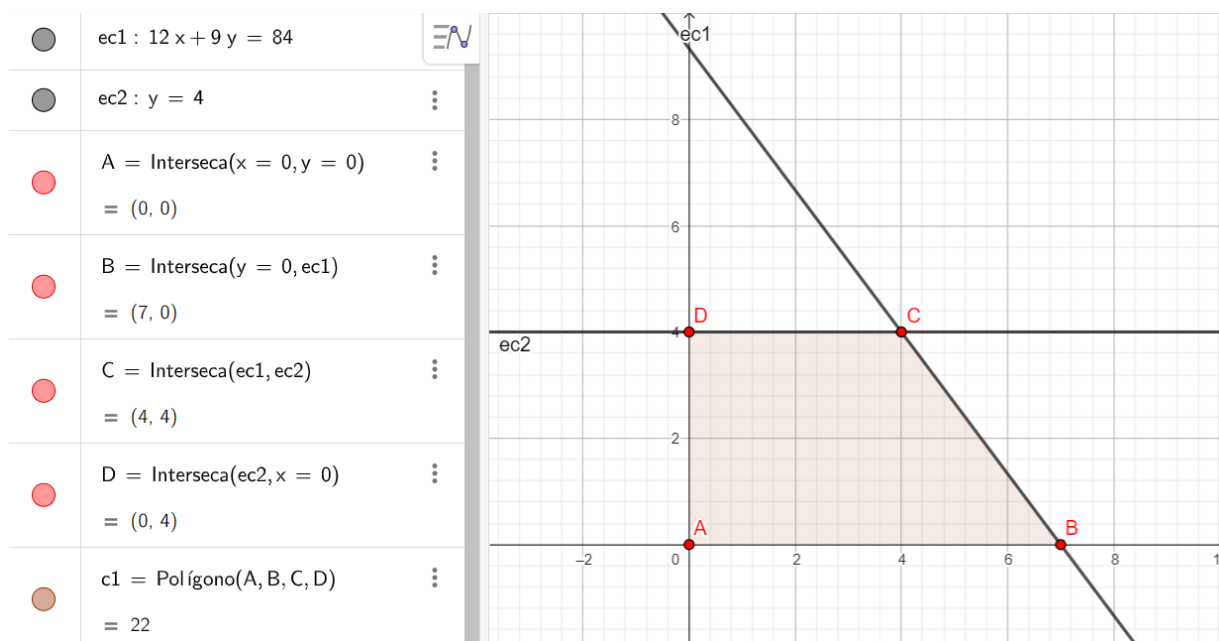


### Problema 3: Óptimos Alternativos

Función Objetivo:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a } 12x_1 + 9x_2 &\leq 84 && \text{Activa} \\ x_2 &\leq 4 && \text{Activa} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución por método gráfico:



Vertice ( $x_1, x_2$ )	Z	
A(0, 0)	0	
B(7, 0)	28	*
C(4, 4)	28	*
D(0, 4)	12	

OBS:

- Se puede observar que el vertice B y C son óptimos alternativos.

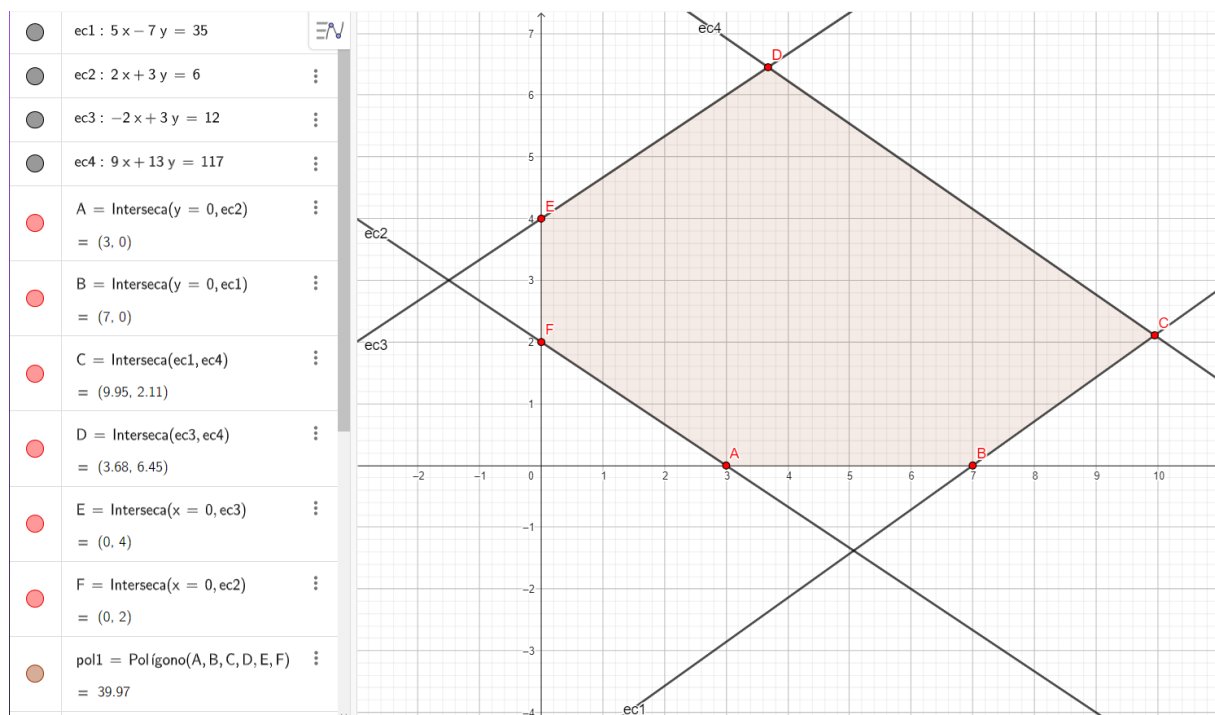


## Problema 4: Variables sin restricción de signo (S.R.S)

Función Objetivo:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= -3x_1 + 4x_2 \\ \text{s.a } 5x_1 - 7x_2 &\leq 35 && \text{No Activa} \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 6 && \text{No Activa} \\ -2x_1 + 3x_2 &\leq 12 && \text{Activa} \\ 9x_1 + 13x_2 &\leq 117 && \text{No Activa} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución por método gráfico:



Vertice ( $x_1, x_2$ )	Z	
A(3, 0)	-9	
B(7, 0)	-21	
C(637/64, 120/67)	-22,695	
D(195/53, 342/53)	14,774	
E(0, 4)	16	*
F(0, 2)	8	



### Problema 5: Región factible no acotada

Un atleta debe tomar por lo menos 4 unidades de vitamina A, 6 unidades de vitamina B y 12 unidades de vitamina C cada día. Hay dos productos en polvo, P1 y P2, que por cada frasco, contienen las siguientes unidades de esas vitaminas:

	Vitamina A	Vitamina B	Vitamina C
P1	4	1	4
P2	1	6	6

Si el precio de un frasco de P1 es de \$5000 y el de un frasco de P2 es de \$8000, se quiere averiguar cómo deben mezclarse ambos productos para obtener las vitaminas deseadas con el mínimo precio. Formular Modelo y resolver por método gráfico.

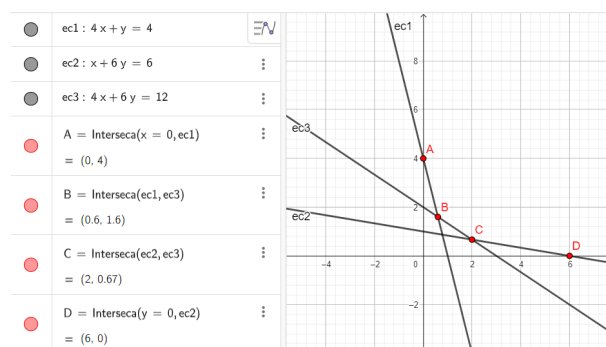
#### Variables de Decisión:

- $x_1$ : Cantidad de frascos de P1 a comprar.
- $x_2$ : Cantidad de frascos de P2 a comprar.

#### Función Objetivo:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & Z = 5000x_1 + 8000x_2 \\ \text{s.a} & 4x_1 + x_2 \geq 4 \quad \text{No Activa} \\ & x_1 + 6x_2 \geq 6 \quad \text{Activa} \\ & 4x_1 + 6x_2 \geq 12 \quad \text{Activa} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

#### Solución por método gráfico:



Vertice $(x_1, x_2)$	Z	
A(0, 4)	32000	
B(3/5, 8/5)	15800	
C(2, 2/3)	15333	*
D(6, 0)	30000	



### Problema 6: Formulación con más de 2 variables de decisión

La empresa MADERAS C.A es un fabricante de muebles. Hace tres estilos diferentes de mesas, A,B y C. Cada modelo de mesa requiere de una cierta cantidad de tiempo para el corte de las piezas, su montaje y pintura. MADERAS C.A, puede vender todas las unidades que fabrica. Es más, el modelo B se puede vender sin pintar. Utilizando los datos indicados, obtener el modelo lineal que permita determinar la máxima utilidad mensual que puede obtener la Empresa.

Modelo	Utilidad por mesa	Corte	Ensamblado	Pintura
A	17500	1	2	4
B	20000	2	4	4
B sin pintar	10000	2	4	0
C	25000	3	7	5
	Disponibilidad mensual de HH	200	298	148

#### Variables de Decisión:

- $x_1$ : Cantidad de mesas A a fabricar.
- $x_2$ : Cantidad de mesas B a fabricar.
- $x_3$ : Cantidad de mesas B sin pintar a fabricar.
- $x_4$ : Cantidad de mesas C a fabricar.

#### Función Objetivo:

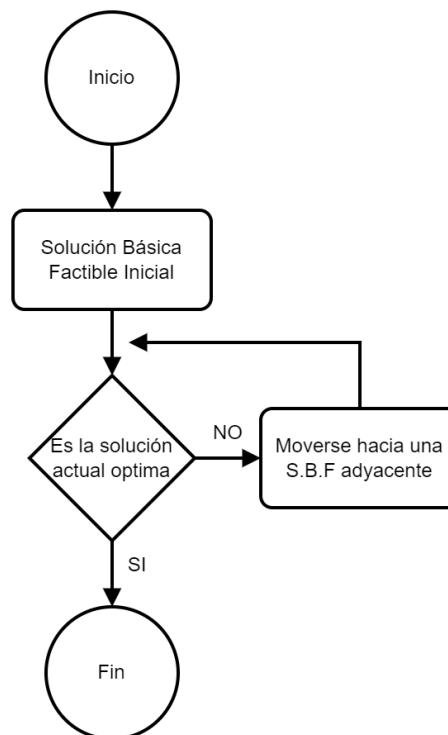
$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 17500x_1 + 20000x_2 + 10000x_3 + 25000x_4 \\ \text{s.a } x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &\leq 200 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 7x_4 &\leq 298 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_4 &\leq 148 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

OBS:

- Cuando son más de 2 variables de decisión, el método gráfico no es la mejor opción, pues para calcular las intersecciones se vuelve caótico.



## 1.2. Diagrama de flujo: Método Simplex



### Un poco de Teoría

- **Variables de holgura  $s_i$ :** Al introducir variables de holgura cada restricción se transforma en igualdad.
    - **n:** cantidad de variables.
    - **m:** cantidad de restricciones.
  - Un sistema con  $n > m$  tiene infinitas soluciones. Para estos sistemas se define:
    - Como  $n - m$ : cantidad de variables libres. Para encontrar soluciones al sistema se dan valores arbitrarios a las variables libres y se resuelve para el resto de variables.
    - Si damos el valor cero a las variables obtenemos lo que llamaremos soluciones básicas.
    - Si además los valores de las variables son mayor o igual a cero tenemos una solución básica factible (S.B.F).
- OBS:
- S.B.F corresponde a un vertice de la región factible.
  - Para un sistema  $n \times m$  la cantidad de S.B.F es menor o igual a  $\binom{n}{m}$ .
  - Dos vertices o S.B.F son adyacentes cuando tienen una arista de la R.F. en común.





## Problema 7: Método Simplex

**Función Objetivo:**

$$\begin{aligned}
 \text{Max } Z &= 4x_1 + 3x_2 \\
 \text{s.a } 12x_1 + 14x_2 &\leq 84 && \text{Activa} \\
 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 && \text{Activa} \\
 x_2 &\leq 4 && \text{No Activa} \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

**Solución por método Simplex:**

**IMPORTANTE 'Pasos incompletos.'**

**Paso 1: Agregar variables de holgura y eliminar desigualdades.**

$$\begin{aligned}
 \text{Max } Z &= 4x_1 + 3x_2 \\
 \text{s.a } 12x_1 + 14x_2 + s_1 &= 84 \\
 3x_1 + 2x_2 + s_2 &= 18 \\
 x_2 + s_3 &= 4 \\
 x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

**Paso 2: Crear tabla Simplex inicial.**

		4	3	0	0	0		
$c_j$	<b>V.B</b>	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	RHS	$\frac{RHS}{coef_{ij*}}$
0	$s_1$	12	14	1	0	0	84	$84/12 = 7$
0	$s_2$	3	2	0	1	0	18	$18/3 = 6$
0	$s_3$	0	1	0	0	1	4	$4/0 = -$
	$Z_j$	0	0	0	0	0	<u>0</u>	
	$c_j - Z_j$	4	3	0	0	0		

OBS:

- Para calcular  $Z_j = c_j \times x_j$

$$\text{Ejemplo: } Z_{x_1} = c_1 \times x_1 + c_2 \times x_1 + c_3 \times x_1 = 0 \times 12 + 0 \times 3 + 0 \times 0 = 0$$

- Creo que debería ser la columna  $c_i$  y no  $c_j$ .
- De hecho  $c_j$  debería estar arriba de **V.B**.

**Paso 3: Buscamos la variable que entra.**

$$V_{in} = \text{columna Max}\{c_j - Z_j\} = X_{j*} \Rightarrow V_{in} = 4 = x_1$$

OBS:

- Como estamos maximizando la función objetivo, buscamos el valor más grande en la fila de  $c_j - Z_j$ .



**Paso 4: Buscamos la variable que sale.**

$$V_{out} = \text{Min} \left\{ \frac{RHS}{coef_{ij^*}} \right\} = i^* \Rightarrow V_{out} = 6 = s_2$$

OBS:

- Como estamos maximizando la función objetivo, buscamos el valor más pequeño en la columna de  $\frac{RHS}{coef_{ij^*}}$ , pues es la holgura que es menos influyente.

**Paso 5: Calculamos el pivote.**

$$\text{Pivote} = a_{i^*j^*} = a_{21} = 3$$

**Paso 6: Creamos una ecuación pivote.**

$$\text{N.E.P} = \frac{\text{E.P.A}}{P} \Rightarrow \frac{3 \ 2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 18}{3} = 1 \ \frac{2}{3} \ 0 \ \frac{1}{3} \ 0 \ 6$$

OBS:

- **N.E.P:** Nueva Ecuación Pivote (como entra  $x_1$  en la tabla se escribe esta ecuación).
- **E.P.A:** Ecuación Pivote Actual (como sale  $s_2$  ocupamos esa ecuación).
- $P = \text{Pivote}$

**Paso 7: Actualizamos las ecuación que se quedan.**

$$\begin{array}{rcccccc} s_1 : & 12 & 14 & 1 & 0 & 0 & 84 \\ -(12) & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 6 \end{array}$$

---


$$0 \quad 6 \quad 1 \quad -4 \quad 0 \quad 12$$

$$\begin{array}{rcccccc} s_3 : & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -(0) & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 6 \end{array}$$

---


$$0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 4$$

**Paso 8: Actualizamos la tabla simplex con las nuevas ecuaciones.**

		4	3	0	0	0		
$c_j$	V.B	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	RHS	$\frac{RHS}{coef_{ij^*}}$
0	$s_1$	0	6	1	-4	0	12	$12/6 = 2$
4	$x_1$	1	$2/3$	0	$1/3$	0	6	$6/(2/3) = 9$
0	$s_3$	0	1	0	0	1	4	$4/1 = 4$
	$Z_j$	4	$8/3$	0	$4/3$	0	<u>24</u>	
	$c_j - Z_j$	0	$1/3$	0	$-4/3$	0		



**Paso 9: Utilizamos el criterio de optimalidad.**

$$c_j - Z_j \leq 0 \quad \forall j$$

Como  $c_j - Z_j$  no es menor o igual a 0, entonces repetimos el ciclo desde el paso 3.

**Paso 10: Buscamos la variable que entra.**

$$V_{in} = \text{columna Max}\{c_j - Z_j\} = X_{j^*} \Rightarrow V_{in} = 3 = x_2$$

**Paso 11: Buscamos la variable que sale.**

$$V_{out} = \text{Min} \left\{ \frac{RHS}{coef_{ij^*}} \right\} = i^* \Rightarrow V_{out} = 2 = s_1$$

**Paso 12: Calculamos el pivote.**

$$\text{Pivote} = a_{i^*j^*} = a_{12} = 6$$

**Paso 13: Creamos una ecuación pivote.**

$$\text{N.E.P} = \frac{\text{E.P.A}}{P} \Rightarrow \frac{0 \ 6 \ 1 \ -4 \ 0 \ 12}{6} = 0 \ 1 \ 1/6 \ -2/3 \ 0 \ 2$$

**Paso 14: Actualizamos las ecuación que se quedan.**

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 : & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 6 \\ -(2/3) & 0 & 1 & 1/6 & -2/3 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & -1/9 & 7/9 & 0 & 14/3 \\ \\ s_3 : & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -(1) & 0 & 1 & 1/6 & -2/3 & 0 & 2 \\ \hline & 0 & 0 & -1/6 & 2/3 & 1 & 2 \end{array}$$

**Paso 15: Actualizamos la tabla simplex con las nuevas ecuaciones.**

		4	3	0	0	0		
$c_j$	V.B	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	RHS	$\frac{RHS}{coef_{ij^*}}$
3	$x_2$	0	1	1/6	-2/3	0	2	
4	$x_1$	1	0	-1/9	7/9	0	14/3	
0	$s_3$	0	0	-1/6	2/3	1	2	
	$Z_j$	4	3	1/18	10/9	0	74/3	
	$c_j - Z_j$	0	0	-1/18	-10/9	0		



**Paso 16: Utilizamos el criterio de optimalidad.**

$$c_j - Z_j \leq 0 \quad \forall j$$

Como  $c_j - Z_j$  es menor o igual a 0, entonces hemos llegado a la solución óptima.

**Solución:**

$$x_1 = 14/3$$

$$x_2 = 2$$

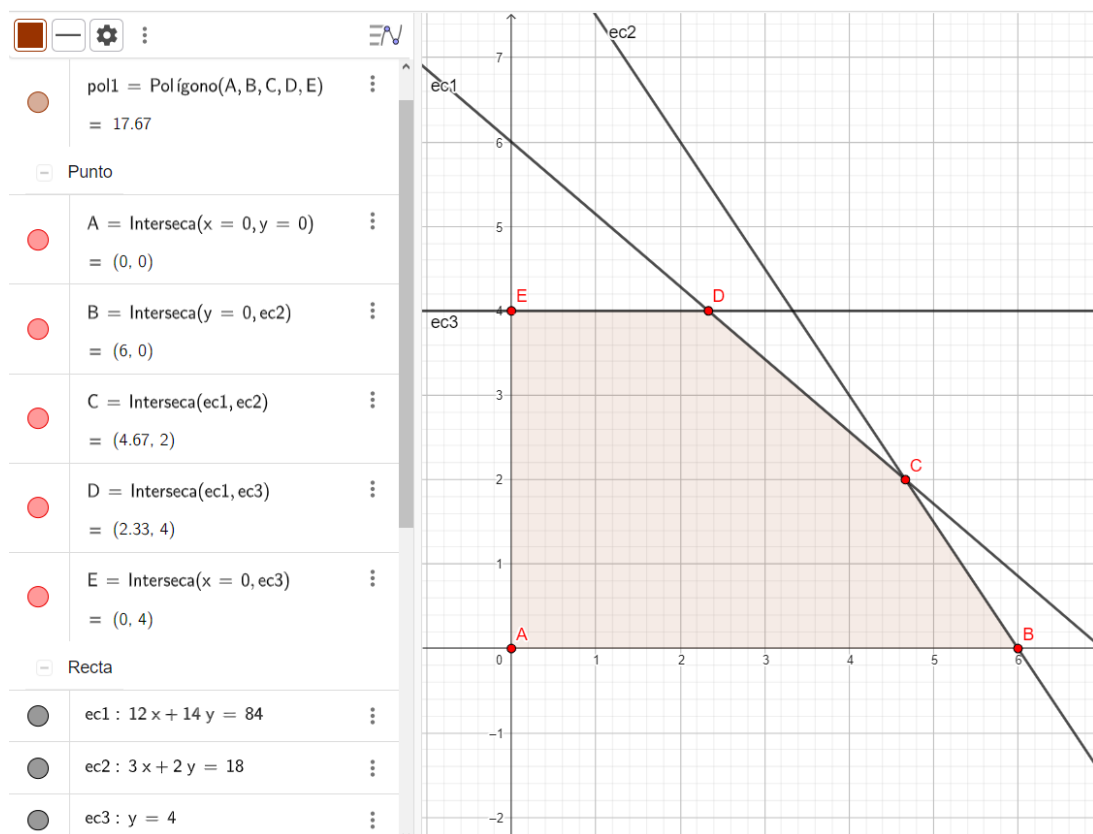
$$s_1 = 0 \quad \text{Recurso escaso} \Rightarrow \text{Restricción Activa}$$

$$s_2 = 0 \quad \text{Recurso escaso} \Rightarrow \text{Restricción Activa}$$

$$s_3 = 2 \quad \text{Recurso abundante} \Rightarrow \text{Restricción No Activa}$$

$$Z = 74/3$$

**Solución por método gráfico**



Vertice $(x_1, x_2)$	Z	
A(0, 0)	0	
B(6, 0)	24	
C(14/3, 2)	74/3	*
D(7/3, 4)	64/3	
E(0, 4)	12	

Por lo tanto, queda demostrado que el método Simplex y el método gráfico nos entregan el valor óptimo.



## Problema 8: Configuración de tabla Simplex

**Función Objetivo:**

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s.a } 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

**Solución por método Simplex:**

**Paso 1:** Si el problema es un problema de minimización, multiplica la función objetivo por -1.

**Paso 2:** Si la formulación del problema contiene algunas restricciones con lados derechos negativos, multiplique cada restricción por -1.

**Paso 3:** Agregue una variable de holgura  $S_i$  a cada restricción  $\leq$ .

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + s_1 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 + s_2 &\leq 6 \\ -x_1 + x_2 + s_3 &\leq 1 \\ x_2 + s_4 &\leq 2 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

**Paso 4:** Reste una variable de exceso  $R_i$  y sume una variable artificial para cada  $\geq$  restricción.

**Paso 5:** Agregue una variable artificial a cada restricción  $=$ .

**Paso 6:** Establecer cada variable de holgura y excedente con coeficiente igual a cero en la función objetivo.

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + s_1 &= 24 \\ x_1 + 2x_2 + s_2 &= 6 \\ -x_1 + x_2 + s_3 &= 1 \\ x_2 + s_4 &= 2 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

**Paso 7:** Establecer el coeficiente de cada variable artificial en la función objetivo igual a -M, donde M es un número muy grande.

**Paso 8:** Cada variable de holgura y artificial se convierte en una de las variables básicas en el cálculo solución básica factible inicial.

**Paso 9: Escribir la tabla simplex inicial.**

$C_j$		5	4	0	0	0	0	
	<b>V.B</b>	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	RHS
0	$s_1$	6	4	1	0	0	0	24
0	$s_2$	1	2	0	1	0	0	6
0	$s_3$	-1	1	0	0	1	0	1
0	$s_4$	0	1	0	0	0	1	2

**Paso 10: Calcular la fila  $Z_j$  para la nueva Tabla.**

OBS:

- Para cada columna  $j$ , multiplica los coeficientes en la función objetivo de las variables básicas por los números correspondientes en la columna  $j$  y sumarlos

$C_j$		5	4	0	0	0	0	
	<b>V.B</b>	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	RHS
0	$s_1$	6	4	1	0	0	0	24
0	$s_2$	1	2	0	1	0	0	6
0	$s_3$	-1	1	0	0	1	0	1
0	$s_4$	0	1	0	0	0	1	2
	$Z_j$	0	0	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$							

$$0 \times 6 + 0 \times 1 + 0 \times (-1) + 0 \times 0 = 0$$

**Paso 11: : Calcular la fila  $C_j - Z_j$  para nueva tabla.**Para cada columna  $j$ , reste la fila  $C_j$  de la fila  $Z_j$ :

- Si ninguno de los valores en la fila  $C_j - Z_j$  es positivo, FIN. Redactar la solución óptima.
- Si el valor  $C_j - Z_j$  de alguna variable no básica es 0, existen soluciones óptimas alternativas.
- Si existe una variable artificial en la base con un valor positivo, el problema es inviable.

$C_j$		5	4	0	0	0	0	
	<b>V.B</b>	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	RHS
0	$s_1$	6	4	1	0	0	0	24
0	$s_2$	1	2	0	1	0	0	6
0	$s_3$	-1	1	0	0	1	0	1
0	$s_4$	0	1	0	0	0	1	2
	$Z_j$	0	0	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$	5	4	0	0	0	0	

$$5 - 0 = 5$$



**Paso 12: Determinar la variable entrante identificando la variable con el valor más positivo en la fila  $C_j - Z_j$  (La columna de entrada se llama la columna pivote)**

$$V_{in} = \text{columna Max}\{C_j - Z_j\} = X_{j^*} \Rightarrow V_{in} = x_1 : 5$$

OBS:

- Como estamos maximizando la función objetivo, buscamos el valor más grande en la fila de  $C_j - Z_j$ .

**Paso 13: Determinar la variable saliente.**

- Por cada número positivo en la columna de entrada, calcular la relación de los valores del lado derecho dividido por estos valores de columna entrantes.
- Si no hay valores positivos en la entrada columna, DETENER; el problema es ilimitado.
- En caso contrario, seleccione la variable con el mínimo relación. (La fila saliente se llama fila pivote).

$C_j$		5	4	0	0	0	0	
	V.B	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	RHS
0	$s_1$	6	4	1	0	0	0	24
0	$s_2$	1	2	0	1	0	0	6
0	$s_3$	-1	1	0	0	1	0	1
0	$s_4$	0	1	0	0	0	1	2
	$Z_j$	0	0	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$	5	4	0	0	0	0	

$$s_1 : \frac{24}{6} = 4 \quad s_2 : \frac{6}{1} = 6 \quad s_3 : \frac{1}{-1} = - \quad s_4 : \frac{2}{0} = -$$

$$V_{out} = \text{Min} \left\{ \frac{RHS}{coef_{ij^*}} \right\} = i^* \Rightarrow V_{out} = s_1 : 4$$

$C_j$		5	4	0	0	0	0	
	V.B	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	RHS
0	$s_1$	6	4	1	0	0	0	24
0	$s_2$	1	2	0	1	0	0	6
0	$s_3$	-1	1	0	0	1	0	1
0	$s_4$	0	1	0	0	0	1	2
	$Z_j$	0	0	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$	5	4	0	0	0	0	

$$\text{Pivote} = a_{i^*j^*} = a_{11} = 6$$



### Paso 14: Generar la siguiente tabla.

- Divida la fila de pivote por el elemento de pivote (el entrada en la intersección de la fila de pivote y el pivote columna) para obtener una nueva fila. Denotamos esta nueva fila (\*)

$$\text{N.E.P} = \frac{\text{E.P.A}}{P} \Rightarrow \frac{6 \ 4 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 24}{6} = 1 \ \frac{2}{3} \ \frac{1}{6} \ 0 \ 0 \ 0 \ 4$$

OBS:

- N.E.P:** Nueva Ecuación Pivote (como entra  $x_1$  en la tabla se escribe esta ecuación).
- E.P.A:** Ecuación Pivote Actual (como sale  $s_1$  ocupamos esa ecuación).
- $P = \text{Pivote}$
- Reemplace cada fila  $i$  que no sea pivote con:  $[\text{nueva fila } i] = [\text{fila actual } i] - [(a_{ij}) \times (\text{fila } *)]$ , donde  $a_{ij}$  es el valor al ingresar la columna  $j$  de la fila  $i$ .

$$\begin{array}{r} s_2 : \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \ 0 \ 0 \ 6 \\ -(1) \quad 1 \ 2/3 \quad 1/6 \quad 0 \ 0 \ 0 \ 4 \end{array}$$

---


$$0 \ 4/3 \ -1/6 \ 1 \ 0 \ 0 \ 2$$

$$\begin{array}{r} s_3 : \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \ 1 \ 0 \ 1 \\ -(-1) \quad 1 \ 2/3 \quad 1/6 \quad 0 \ 0 \ 0 \ 4 \end{array}$$

---


$$0 \ 5/3 \ 1/6 \ 0 \ 1 \ 0 \ 5$$

$$\begin{array}{r} s_4 : \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \ 0 \ 1 \ 2 \\ -(0) \quad 1 \ 2/3 \quad 1/6 \quad 0 \ 0 \ 0 \ 4 \end{array}$$

---


$$0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \ 0 \ 1 \ 2$$

$C_j$		5	4	0	0	0	0	
	<b>V.B</b>	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	RHS
5	$x_1$	1	2/3	1/6	0	0	0	4
0	$s_2$	0	4/3	-1/6	1	0	0	2
0	$s_3$	0	5/3	1/6	0	1	0	5
0	$s_4$	0	1	0	0	0	1	2
	$Z_j$	5	5/3	5/6	0	0	0	<u>20</u>
	$C_j - Z_j$	0	7/3	-5/3	0	0	0	





Paso 15: Ir a Paso 10.

$$V_{in} = \text{columna Max}\{C_j - Z_j\} = X_{j^*} \Rightarrow V_{in} = x_2 : \frac{7}{3}$$

$$x_1 : \frac{4}{\frac{2}{3}} = 6 \quad s_2 : \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2} \quad s_3 : \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3 \quad s_4 : \frac{2}{1} = 2$$

$$V_{out} = \text{Min} \left\{ \frac{RHS}{coef_{ij^*}} \right\} = i^* \Rightarrow V_{out} = s_2 : \frac{3}{2}$$

$$\text{Pivote} = a_{i^*j^*} = a_{22} = 4/3$$

$C_j$		5	4	0	0	0	0	
	<b>V.B</b>	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	RHS
5	$x_1$	1	2/3	1/6	0	0	0	4
0	$s_2$	0	4/3	-1/6	1	0	0	2
0	$s_3$	0	5/3	1/6	0	1	0	5
0	$s_4$	0	1	0	0	0	1	2
	$Z_j$	5	5/3	5/6	0	0	0	20
	$C_j - Z_j$	0	7/3	-5/3	0	0	0	

$$\text{N.E.P} = \frac{\text{E.P.A}}{P} \Rightarrow \frac{0 \quad 4/3 \quad -1/6 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 2}{4/3} = 0 \quad 1 \quad -\frac{1}{8} \quad \frac{3}{4} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 : & 1 & 2/3 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -(2/3) & 0 & 1 & -1/8 & 3/4 & 0 & 0 & 3/2 \end{array}$$

$$1 \quad 0 \quad 1/4 \quad -1/2 \quad 0 \quad 0 \quad 3$$

$$\begin{array}{ccccccc} s_3 : & 0 & 5/3 & 1/6 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ -(5/3) & 0 & 1 & -1/8 & 3/4 & 0 & 0 & 3/2 \end{array}$$

$$0 \quad 0 \quad 3/8 \quad -5/4 \quad 1 \quad 0 \quad 5/2$$

$$\begin{array}{ccccccc} s_4 : & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -(1) & 0 & 1 & -1/8 & 3/4 & 0 & 0 & 3/2 \end{array}$$

$$0 \quad 0 \quad 1/8 \quad -3/4 \quad 0 \quad 1 \quad 1/2$$



$C_j$		5	4	0	0	0	0	
	<b>V.B</b>	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	RHS
5	$x_1$	1	0	$1/4$	$-1/2$	0	0	3
4	$x_2$	0	1	$-1/8$	$3/4$	0	0	$3/2$
0	$s_3$	0	0	$3/8$	$-5/4$	1	0	$5/2$
0	$s_4$	0	0	$1/8$	$-3/4$	0	1	$1/2$
	$Z_j$	5	4	$3/4$	$1/2$	0	0	<u>21</u>
	$C_j - Z_j$	0	0	$-3/4$	$-1/2$	0	0	

**Paso R11: Calcular la fila  $C_j - Z_j$  para nueva tabla.**

- Si ninguno de los valores en la fila  $C_j - Z_j$  es positivo, FIN.

$$c_j - Z_j \leq 0 \quad \forall j$$

Como  $c_j - Z_j$  es menor o igual a 0, entonces hemos llegado a la solución óptima.

**Solución:**

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

$$s_1 = 0$$

**Recurso escaso  $\Rightarrow$  Restricción Activa**

$$s_2 = 0$$

**Recurso escaso  $\Rightarrow$  Restricción Activa**

$$s_3 = \frac{5}{2}$$

**Recurso abundante  $\Rightarrow$  Restricción No Activa**

$$s_4 = \frac{1}{2}$$

**Recurso abundante  $\Rightarrow$  Restricción No Activa**

$$Z = 21$$



## Problema 9: Configuración de tabla Simplex y Metodo M

Función Objetivo:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \\ \text{s.a } x_1 + x_2 + x_3 &\leq 30 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\geq 60 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución por método Simplex:

Paso 1: Si el problema es un problema de minimización, multiplica la función objetivo por -1.

$$\text{Max } -Z = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

Paso 2: Si la formulación del problema contiene algunas restricciones con lados derechos negativos, multiplique cada restricción por -1.

Paso 3: Agregue una variable de holgura  $S_i$  a cada restricción  $\leq$ .

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + s_1 &\leq 30 \\ x_1, x_2, x_3, s_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Paso 4: Reste una variable de exceso  $R_i$  y sume una variable artificial para cada  $\geq$  restricción.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - R_1 + A_2 &\geq 60 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, R_1, A_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Paso 5: Agregue una variable artificial a cada restricción  $=$ .

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + A_3 &= 20 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, A_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Paso 6: Establecer cada variable de holgura y excedente con coeficiente igual a cero en la función objetivo.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + s_1 &= 30 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - R_1 + A_2 &= 60 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + A_3 &= 20 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, R_1, A_2, A_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Paso 7: Establecer el coeficiente de cada variable artificial en la función objetivo igual a -M, donde M es una número muy grande.

$$\text{Max } -Z = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - MA_2 - MA_3$$



**Paso 8: Cada variable de holgura y artificial se convierte en una de las variables básicas en el cálculo solución básica factible inicial.**

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & -Z = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - MA_2 - MA_3 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 30 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 - R_1 + A_2 = 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + A_3 = 20 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, R_1, A_2, A_3 \geq 0 \end{aligned}$$

**Paso 9: Escribir la tabla simplex inicial.**

$C_j$		-2	3	4	0	0	-M	-M	
	V.B	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$R_1$	$s_1$	$A_2$	$A_3$	RHS
0	$s_1$	1	1	1	0	1	0	0	30
0	$A_2$	2	1	3	-1	0	1	0	60
0	$A_3$	1	-1	2	0	0	0	1	20

**Paso 10: Calcular la fila  $Z_j$  para la nueva Tabla.**

OBS:

- Para cada columna  $j$ , multiplica los coeficientes en la función objetivo de las variables básicas por los números correspondientes en la columna  $j$  y sumarlos

$C_j$		-2	3	4	0	0	-M	-M	
	V.B	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$R_1$	$s_1$	$A_2$	$A_3$	RHS
0	$s_1$	1	1	1	0	1	0	0	30
-M	$A_2$	2	1	3	-1	0	1	0	60
-M	$A_3$	1	-1	2	0	0	0	1	20
	$Z_j$	-3M	0	-5M	M	0	-M	-M	-80M
	$C_j - Z_j$								

$$0 \times 1 + -M \times 2 + -M \times (1) = -3M$$

**Paso 11: : Calcular la fila  $C_j - Z_j$  para nueva tabla.**

Para cada columna  $j$ , reste la fila  $C_j$  de la fila  $Z_j$ :

- Si ninguno de los valores en la fila  $C_j - Z_j$  es positivo, FIN. Redactar la solución óptima.
- Si el valor  $C_j - Z_j$  de alguna variable no básica es 0, existen soluciones óptimas alternativas.
- Si existe una variable artificial en la base con un valor positivo, el problema es inviable.

$C_j$		-2	3	4	0	0	-M	-M	
	V.B	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$R_1$	$s_1$	$A_2$	$A_3$	RHS
0	$s_1$	1	1	1	0	1	0	0	30
-M	$A_2$	2	1	3	-1	0	1	0	60
-M	$A_3$	1	-1	2	0	0	0	1	20
	$Z_j$	-3M	0	-5M	M	0	-M	-M	-80M
	$C_j - Z_j$	$-2 + 3M$	3	$4 + 5M$	M	0	0	0	

$$-2 - (-3M) = -2 + 3M$$



**Paso 12: Determinar la variable entrante identificando la variable con el valor más positivo en la fila  $C_j - Z_j$  (La columna de entrada se llama la columna pivote)**

$$V_{in} = \text{columna Max}\{C_j - Z_j\} = X_{j^*} \Rightarrow V_{in} = x_3 : 4 + 5M$$

OBS:

- Como estamos maximizando la función objetivo, buscamos el valor más grande en la fila de  $C_j - Z_j$ , por lo que como M es un numero muy grande  $3 < 3M < 5M$ .

**Paso 13: Determinar la variable saliente.**

- Por cada número positivo en la columna de entrada, calcular la relación de los valores del lado derecho dividido por estos valores de columna entrantes.
- Si no hay valores positivos en la entrada columna, DETENER; el problema es ilimitado.
- En caso contrario, seleccione la variable con el mínimo relación. (La fila saliente se llama fila pivote).

$C_j$		-2	3	4	0	0	-M	-M	
	<b>V.B</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$R_1$	$s_1$	$A_2$	$A_3$	RHS
0	$s_1$	1	1	1	0	1	0	0	30
-M	$A_2$	2	1	3	-1	0	1	0	60
-M	$A_3$	1	-1	2	0	0	0	1	20
	$Z_j$	-3M	0	-5M	M	0	-M	-M	-80M
	$C_j - Z_j$	$-2 + 3M$	3	$4 + 5M$	M	0	0	0	

$$s_1 : \frac{30}{1} = 30 \quad A_2 : \frac{60}{3} = 20 \quad A_3 : \frac{20}{2} = 10$$

$$V_{out} = \text{Min} \left\{ \frac{RHS}{coef_{ij^*}} \right\} = i^* \Rightarrow V_{out} = A_3 : 10$$

$C_j$		-2	3	4	0	0	-M	-M	
	<b>V.B</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$R_1$	$s_1$	$A_2$	$A_3$	RHS
0	$s_1$	1	1	1	0	1	0	0	30
-M	$A_2$	2	1	3	-1	0	1	0	60
-M	$A_3$	1	-1	2	0	0	0	1	20
	$Z_j$	-3M	0	-5M	M	0	-M	-M	-80M
	$C_j - Z_j$	$-2 + 3M$	3	$4 + 5M$	M	0	0	0	

$$\text{Pivote} = a_{i^*j^*} = a_{33} = 2$$



### Paso 14: Generar la siguiente tabla.

- Divida la fila de pivote por el elemento de pivote (el entrada en la intersección de la fila de pivote y el pivote columna) para obtener una nueva fila. Denotamos esta nueva fila (\*)

$$x_3 : \quad \text{N.E.P} = \frac{\text{E.P.A}}{P} \Rightarrow \frac{1 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 20}{2} = \frac{1}{2} \quad \frac{-1}{2} \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 10$$

OBS:

- N.E.P:** Nueva Ecuación Pivote (como entra  $x_3$  en la tabla se escribe esta ecuación).
- E.P.A:** Ecuación Pivote Actual (como sale  $A_3$  ocupamos esa ecuación).
- $P = \text{Pivote}$
- Reemplace cada fila  $i$  que no sea pivote con: [nueva fila  $i$ ] = [fila actual  $i$ ] - [ $(a_{ij})$  x (fila  $(*)$ )], donde  $a_{ij}$  es el valor al ingresar la columna  $j$  de la fila  $i$ .

$$\begin{array}{r} s_1 : \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 30 \\ -(1) \quad 1/2 \quad -1/2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1/2 \quad 10 \end{array}$$

$$1/2 \quad 3/2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1/2 \quad 20$$

$$\begin{array}{r} A_2 : \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 60 \\ -(3) \quad 1/2 \quad -1/2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1/2 \quad 10 \end{array}$$

$$1/2 \quad 5/2 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad -3/2 \quad 30$$

$C_j$		-2	3	4	0	0	-M	-M	
	<b>V.B</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$R_1$	$s_1$	$A_2$	$A_3$	RHS
0	$s_1$	1/2	3/2	0	0	1	0	-1/2	20
-M	$A_2$	1/2	5/2	0	-1	0	1	-3/2	30
4	$x_3$	1/2	-1/2	1	0	0	0	1/2	10
	$Z_j$	$-M/2 + 2$	$-5M/2 - 2$	4	M	0	-M	$3M/2 + 2$	$-30M + 40$
	$C_j - Z_j$	$-4 + M/2$	$5 + 5M/2$	0	-M	0	0	$-5M/2 - 2$	



Paso 15: Ir a Paso 10.

$$V_{in} = \text{columna Max}\{C_j - Z_j\} = X_{j^*} \Rightarrow V_{in} = x_2 : \frac{5M}{2}$$

$$s_1 : \frac{20}{\frac{3}{2}} = 13,34 \quad A_2 : \frac{30}{\frac{5}{2}} = 12 \quad x_3 : \frac{10}{\frac{-1}{2}} = -20$$

$$V_{out} = \text{Min} \left\{ \frac{RHS}{coef_{ij^*}} \right\} = i^* \Rightarrow V_{out} = A_2 : 12$$

$$\text{Pivote} = a_{i^*j^*} = a_{22} = \frac{5}{2}$$

$C_j$		-2	3	4	0	0	-M	-M	
	<b>V.B</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$R_1$	$s_1$	$A_2$	$A_3$	RHS
0	$s_1$	1/2	3/2	0	0	1	0	-1/2	20
-M	$A_2$	1/2	5/2	0	-1	0	1	-3/2	30
4	$x_3$	1/2	-1/2	1	0	0	0	1/2	10
	$Z_j$	$-M/2 + 2$	$-5M/2 - 2$	4	M	0	-M	$3M/2 + 2$	$-30M + 40$
	$C_j - Z_j$	$-4 + M/2$	$5 + 5M/2$	0	-M	0	0	$-5M/2 - 2$	

$$x_2 : \frac{1/2 \quad 5/2 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad -3/2 \quad 30}{5/2} = \frac{1}{5} \quad 1 \quad 0 \quad \frac{-2}{5} \quad 0 \quad \frac{2}{5} \quad \frac{-3}{5} \quad 12$$

$$\begin{array}{r} x_1 : \quad 1/2 \quad 3/2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1/2 \quad 20 \\ -(3/2) \quad 1/5 \quad 1 \quad 0 \quad -2/5 \quad 0 \quad 2/5 \quad -3/5 \quad 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1/5 \quad 0 \quad 0 \quad 3/5 \quad 1 \quad -3/5 \quad 2/5 \quad 2 \\ x_3 : \quad 1/2 \quad -1/2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1/2 \quad 10 \\ -(-1/2) \quad 1/5 \quad 1 \quad 0 \quad -2/5 \quad 0 \quad 2/5 \quad -3/5 \quad 12 \end{array}$$

$$3/5 \quad 0 \quad 1 \quad -1/5 \quad 0 \quad 1/5 \quad 1/5 \quad 16$$



$C_j$		-2	3	4	0	0	-M	-M	
	<b>V.B</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$R_1$	$s_1$	$A_2$	$A_3$	RHS
0	$s_1$	1/5	0	0	3/5	1	-3/5	2/5	2
3	$x_2$	1/5	1	0	-2/5	0	2/5	-3/5	12
4	$x_3$	3/5	0	1	-1/5	0	1/5	1/5	16
	$Z_j$	3	3	4	-2	0	2	-1	<u>100</u>
	$C_j - Z_j$	-5	0	0	2	0	$-M - 2$	$-M + 1$	

**Paso R11: Calcular la fila  $C_j - Z_j$  para nueva tabla.**

- Si ninguno de los valores en la fila  $C_j - Z_j$  es positivo, FIN.

$$c_j - Z_j \leq 0 \quad \forall j$$

Como  $c_j - Z_j$  es menor o igual a 0, entonces hemos llegado a la solución óptima.

**Solución:**

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 12$$

$$x_3 = 16$$

$$s_1 = 2 \quad \text{Recurso abundante} \Rightarrow \text{Restricción No Activa}$$

$$A_2 = 0 \quad \text{Recurso escaso} \Rightarrow \text{Restricción Activa}$$

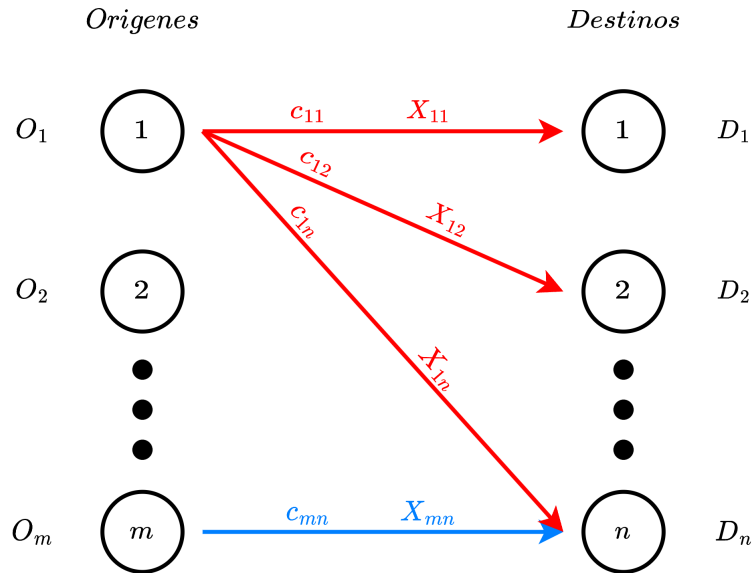
$$A_3 = 0 \quad \text{Recurso escaso} \Rightarrow \text{Restricción Activa}$$

$$Z = 100$$





## Teoría



Donde:

- $m$ : Origenes con oferta  $O_i$ .
- $n$ : Destinos con demanda  $D_j$ .
- $C_{ij}$ : Costos unitarios de transportar desde  $i$  hasta  $j$ .
- $X_{ij}$ : Variables de decisión, cantidad de unidades a transportar desde  $i$  hasta  $j$ . (m-n)
- **Objetivo**: Minimizar costo total de transporte. S.T restricciones. (m+n)

## Modelo Lineal



$$c_{11} \times X_{11} = \text{Costo total de 1 a 1}$$

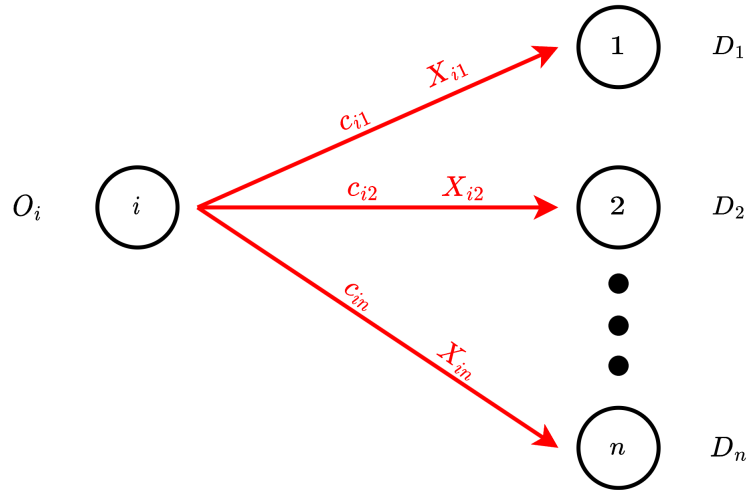
## Funcion Objetivo:

$$\text{Min } Z = c_{11} \times X_{11} + c_{12} \times X_{12} + \dots + c_{mn} \times X_{mn}$$

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \times X_{ij}$$



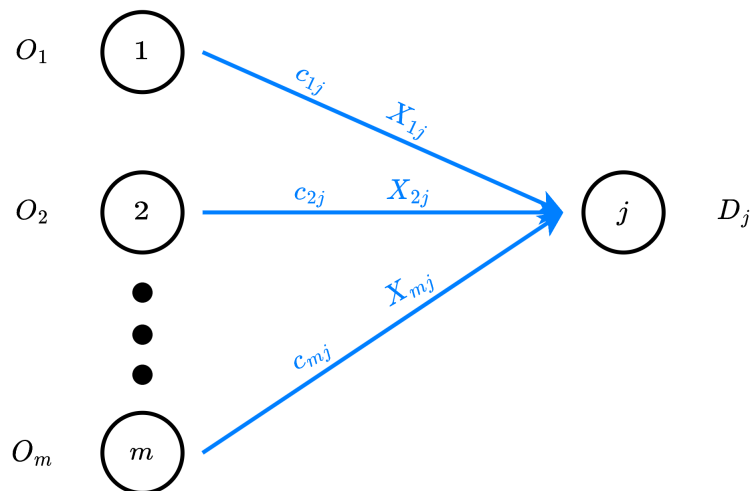
**Restricciones Ofertas:**



$$x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} \leq O_i \quad \forall i = \overline{1, m}$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} \leq O_i \quad \forall i = \overline{1, m}$$

**Restricciones Demandas:**



$$x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj} \geq D_j \quad \forall j = \overline{1, n}$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} \geq D_j \quad \forall j = \overline{1, n}$$



### En resumen:

Los P.T. quedan de la forma:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \times X_{ij} \\ \text{s.a } \sum_{j=1}^n X_{ij} &\leq O_i \quad \forall i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m X_{ij} &\geq D_j \quad \forall j = \overline{1, n} \\ X_{ij} &\geq 0 \quad \forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n} \end{aligned}$$

### Problema 10: Problema de transporte

Escribir el M.L. para el siguiente P.T.:

$X_{11}$	2	$X_{12}$	5	$X_{13}$	3	10
$X_{21}$	4	$X_{22}$	2	$X_{23}$	1	15
10		10		10		25 $\sum O_i$
						30 $\sum D_j$

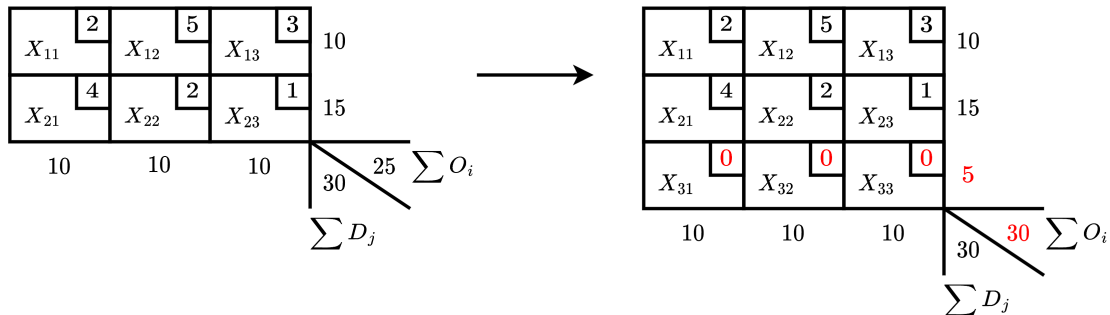
### Función Objetivo:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= 2X_{11} + 5X_{12} + 3X_{13} + 4X_{21} + 2X_{22} + X_{23} \\ \text{s.a } X_{11} + X_{12} + X_{13} &\leq 10 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} &\leq 15 \\ X_{11} + X_{21} &\geq 10 \\ X_{12} + X_{22} &\geq 10 \\ X_{13} + X_{23} &\geq 10 \\ X_{ij} &\geq 0 \quad \forall i = \overline{1, 2}, \forall j = \overline{1, 3} \end{aligned}$$

- Si en un P.T.  $\sum D_j = \sum O_i$ , diremos que el P.T. está balanceado.



- Si un P.T. esta desbalanceado se puede balancear incorporando una restricción con coeficientes de costo nulo.



### Teorema

En un P.T. balanceado, todas las restricciones son Activas.

- Las soluciones basicas factibles tienen  $m + n - 1$  variables básicas.

$$\text{S.B.F.I.} = \begin{cases} \text{Regla Nor-Oeste} \\ \text{Costo Mínimo} \\ \text{Vogël} \end{cases}$$

### Problema 11: Regla Nor-Oeste, Costo Mínimo y Vogël

Sea el siguiente P.T.:

	10	2	20	11	15
	12	7	9	20	25
	4	14	16	18	10
5	15	15	15	50	$\sum O_i$
				50	$\sum D_j$



## Por Regla Nor-Oeste

Algoritmo:

- Elegir una celda desde la esquina Nor-Oeste, le damos el máximo valor de oferta y demanda posible, para rellenar la fila y/o columna que no sea posible darle más.

5	10	2	20	11	<del>15</del>	10
-	12	7	9	20	25	
-	4	14	16	18	10	
<del>5</del>	15	15	15	50	50	$\sum O_i$
0				$\sum D_j$		

- Repetimos hasta que se cumplan todas las restricciones.

5	10	10	2	-	20	-	11	<del>15</del>	<del>10</del>	0
-	12	7	9	20	25					
-	4	14	16	18	10					
<del>5</del>	15	<del>15</del>	15	15	50	50	$\sum O_i$			
0	5				$\sum D_j$					

5	10	10	2	-	20	-	11	<del>15</del>	<del>10</del>	0
-	12	5	7	9	20	25	20			
-	4	-	14	16	18	10				
<del>5</del>	15	<del>15</del>	15	15	50	50	$\sum O_i$			
0	5	0			$\sum D_j$					



5	10	2	-	20	-	11	<del>15</del>	<del>10</del>	0
-	12	5	7	15	9	20	<del>25</del>	<del>20</del>	5
-	4	-	14	-	16	18	10		
<del>5</del>	<del>15</del>	<del>15</del>	15				50	$\sum O_i$	
0	<del>5</del>	0					50	$\sum D_j$	

5	10	2	-	20	-	11	<del>15</del>	<del>10</del>	0
-	12	5	7	15	5	20	<del>25</del>	<del>20</del>	<del>5</del>
-	4	-	14	-	16	18	10		
<del>5</del>	<del>15</del>	<del>15</del>	<del>15</del>				50	$\sum O_i$	
0	<del>5</del>	0	10				50	$\sum D_j$	

5	10	2	-	20	-	11	<del>15</del>	<del>10</del>	0
-	12	5	7	15	5	20	<del>25</del>	<del>20</del>	<del>5</del>
-	4	-	14	-	10	18	<del>10</del>	0	
<del>5</del>	<del>15</del>	<del>15</del>	<del>15</del>				50	$\sum O_i$	
0	<del>5</del>	0	10				50	$\sum D_j$	

- Verificamos la cantidad de soluciones factibles.

$$\text{S.F.} = m + n - 1 = 6$$

- Calculamos el valor de la función objetivo.

$$\begin{aligned} Z &= 5 \cdot 10 + 10 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 15 \cdot 9 + 5 \cdot 20 + 10 \cdot 18 \\ &= 50 + 20 + 35 + 135 + 100 + 180 \\ &= 520 \end{aligned}$$



## Por costo mínimo

Algoritmo:

- Elegimos el  $c_{ij}$  más pequeño, le damos el valor maximo posible de oferta y demanda, luego elegimos fila o columna a rellenar con - de los demas  $X_{ij}$ .

-	10	2	-	20	-	11	<del>15</del>	0
	12		7		9	20	25	
	4		14		16	18	10	
5	<del>15</del>	15	15	15	50	50	$\sum O_i$	
	0				$\sum D_j$			

- Y repetimos lo anterior, hasta que se cumplan todas las restricciones.

-	10	15	2	-	20	-	11	<del>15</del>	0
-	12		7		9	20	25		
5	4		14		16	18	<del>10</del>	5	
<del>5</del>	<del>15</del>	15	15	50	50	$\sum O_i$			
0	0			$\sum D_j$					

-	10	15	2	-	20	-	11	<del>15</del>	0
-	12	0	7		9	20	25		
5	4	-	14		16	18	<del>10</del>	5	
<del>5</del>	<del>15</del>	15	15	50	50	$\sum O_i$			
0	0			$\sum D_j$					



-	10	15	2	-	20	-	11	<del>15</del>	0
-	12	0	7	15	9	-	20	<del>25</del>	10
5	4	-	14	-	16	-	18	<del>10</del>	5
<del>5</del>	<del>0</del>	<del>15</del>	<del>0</del>	<del>15</del>	15			50	$\sum O_i$
								50	$\sum D_j$

-	10	15	2	-	20	-	11	<del>15</del>	0	
-	12	0	7	15	9	-	20	<del>25</del>	10	
5	4	-	14	-	16	5	18	<del>10</del>	<del>5</del>	0
<del>5</del>	<del>15</del>	<del>15</del>	<del>15</del>	<del>15</del>	<del>15</del>	<del>15</del>	<del>15</del>	50	50	$\sum O_i$
								$\sum D_j$		

-	10	15	2	-	20	-	11	<del>15</del>	0	
-	12	0	7	15	9	10	20	<del>25</del>	<del>10</del>	0
5	4	-	14	-	16	5	18	<del>10</del>	<del>5</del>	0
<del>5</del>	<del>15</del>	<del>15</del>	<del>15</del>	<del>15</del>	<del>10</del>			50	50	$\sum O_i$
								50		$\sum D_j$

- Luego se verifica la cantidad de soluciones factibles.

$$\text{S.F.} = m + n - 1 = 6$$

- Para finalizar se calcula el valor de la función objetivo.

$$\begin{aligned}
 Z &= 15 \cdot 2 + 0 \cdot 7 + 15 \cdot 9 + 10 \cdot 20 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 18 \\
 &= 30 + 0 + 135 + 200 + 20 + 90 \\
 &= 475
 \end{aligned}$$





## Por Vogël

Algoritmo:

- Se calculan las diferencias de costo entre las celdas con un coste más pequeño, de cada fila y columna, para elegir la mayor diferencia de costo (*penalización*).

	10	2	20	11	15	8
	12	7	9	20	25	2
	4	14	16	18	10	10
5	15	15	15	50	$\sum O_i$	
6	5	7	7	50	$\sum D_j$	

- Se elige la celda con menor  $c_{ij}$  de la fila o columna con mayor *penalización*, para asignarle el valor maximo posible de oferta y demanda, luego se elige la fila o columna a rellenar con - de los demas  $X_{ij}$ .

-	10	2	20	11	15	
-	12	7	9	20	25	
5	4	14	16	18	<del>10</del>	5
<del>5</del>	15	15	15	50	$\sum O_i$	
0				50	$\sum D_j$	

- Se repite el proceso (La fila/columna con - no se utiliza para calcular la *penalización*).

-	10	2	20	11	15	9
-	12	7	9	20	25	2
5	4	14	16	18	<del>10</del>	5
<del>5</del>	15	15	15	50	$\sum O_i$	
0	5	7	7	50	$\sum D_j$	



-	10	15	2	20	11	<del>15</del>	0
-	12	-	7	9	20	25	
5	4	-	14	16	18	<del>10</del>	5
<del>5</del>		<del>15</del>	15	15		50	$\sum O_i$
0	0					50	$\sum D_j$

-	10	15	2	20	11	<del>15</del>	0	9
-	12	-	7	9	20	25	11	←
5	4	-	14	16	18	<del>10</del>	5	2
<del>5</del>		<del>15</del>	15	15		50	50	$\sum O_i$
0	0		7	7		50		$\sum D_j$

-	10	15	2	20	11	<del>15</del>	0
-	12	-	7	15	9	20	10
5	4	-	14	16	18	<del>10</del>	5
<del>5</del>		<del>15</del>	<del>15</del>	15		50	$\sum O_i$
0	0	0				50	$\sum D_j$



- Al tener las filas o columnas con - se procede a rellenarlas para cumplir con las restricciones y con la cantidad de soluciones factibles.

-	10	15	2	-	20	11	<del>15</del>	0	
-	12	-	7	15	9	20	<del>25</del>	<del>10</del>	0
5	4	-	14	-	16	18	<del>10</del>	5	
<del>5</del>	<del>15</del>	<del>15</del>	<del>15</del>	<del>15</del>	50	50	$\sum O_i$		
$\sum D_j$									

-	10	15	2	-	20	11	<del>15</del>	0	
-	12	-	7	15	9	20	<del>25</del>	<del>10</del>	0
5	4	-	14	-	16	5	<del>10</del>	<del>5</del>	0
<del>5</del>	<del>15</del>	<del>15</del>	<del>15</del>	<del>5</del>			50	50	$\sum O_i$
0	0	0	0	0			$\sum D_j$		

-	10	15	2	-	20	0	15	0	
-	12	-	7	15	9	10	25	10	0
5	4	-	14	-	16	5	10	5	0
<del>5</del>	<del>15</del>	<del>15</del>	<del>15</del>	<del>5</del>	<div><div></div><div>50</div><div><math>\sum O_i</math></div></div>				
0	0	0	0	5	<div><div></div><div>50</div><div><math>\sum D_j</math></div></div>				

- Se verifica la cantidad de soluciones factibles.

$$\text{S.F.} = m + n - 1 = 6$$



- Se calcula el valor de la función objetivo.

$$\begin{aligned} Z &= 15 \cdot 2 + 0 \cdot 11 + 15 \cdot 9 + 10 \cdot 20 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 18 \\ &= 30 + 0 + 135 + 200 + 20 + 90 \\ &= 475 \end{aligned}$$

### Para finalizar

- Se comparan los valores de la función objetivo de cada método.

$$\text{Regla Nor-Oeste: } Z = 520$$

$$\text{Costo Mínimo: } Z = 475$$

$$\text{Vogël: } Z = 475$$

- Se elige el método con el menor valor de la función objetivo.

Costo Mínimo y Vogël

### Problema 12: Problema de transporte

Escribir el M.L. para el siguiente P.T.:

	10		12		7		6	20
	11		10		12		14	20
	15		10		12		14	40
30		20		10		20		80
								80
								$\sum O_i$
								$\sum D_j$

Donde:

$$\text{S.F.} = m + n - 1 = 6$$



### Por Regla Nor-Oeste

20	10	-	12	-	7	-	6	20
10	11	10	10	-	12	-	14	20
-	15	10	10	12	20	14	40	30
30	20	10	20	80	80	0	0	0
10	10	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
								$\sum O_i$
								$\sum D_j$

Valor de la función objetivo:

$$\begin{aligned}
 Z &= 20 \cdot 10 + 10 \cdot 11 + 10 \cdot 10 + 10 \cdot 10 + 10 \cdot 12 + 20 \cdot 14 \\
 &= 200 + 110 + 100 + 100 + 120 + 280 \\
 &= 910
 \end{aligned}$$

### Por Costo Mínimo

-	10	-	12	-	7	20	6	20	0
-	11	20	10	-	12	-	14	20	0
30	15	0	10	10	12	0	14	40	30
30	20	10	20	80	80	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
								$\sum O_i$	
								$\sum D_j$	

Valor de la función objetivo:

$$\begin{aligned}
 Z &= 20 \cdot 6 + 20 \cdot 10 + 30 \cdot 15 + 0 \cdot 10 + 10 \cdot 12 + 0 \cdot 14 \\
 &= 120 + 200 + 450 + 0 + 120 + 0 \\
 &= 890
 \end{aligned}$$



Por Vogël

-	10	-	12	0	7	20	6	<del>20</del>	0		
20	11	-	10	-	12	-	14	<del>20</del>	0		
10	15	20	10	10	12	-	14	<del>40</del>	<del>20</del>	<del>10</del>	0
<del>30</del>	<del>20</del>	<del>10</del>	<del>20</del>					<del>80</del>	$\sum O_i$		
10	0	0	0					80	$\sum D_j$		
0											

Valor de la función objetivo:

$$\begin{aligned}
 Z &= 0 \cdot 7 + 20 \cdot 6 + 20 \cdot 11 + 10 \cdot 15 + 20 \cdot 10 + 10 \cdot 12 \\
 &= 0 + 120 + 220 + 150 + 200 + 120 \\
 &= 810
 \end{aligned}$$



### Problema 13: Relación entre Tabla Simplex Primal y Problema de Transporte [Criterios]

Sea el siguiente P.T. resuelto por Regla Nor-Oeste:

5	10	2	20	11	15
10	2	-	-	11	15
-	12	7	9	20	25
5	7	15	9	5	20
-	4	14	16	18	10
-	-	-	10	18	10
5	15	15	15	50	50

$$\begin{aligned}
 Z &= 5 \cdot 10 + 10 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 15 \cdot 9 + 5 \cdot 20 + 10 \cdot 18 \\
 &= 50 + 20 + 35 + 135 + 100 + 180 \\
 &= 520
 \end{aligned}$$

Tabla Simplex Primal:

$C_j$		10	2	20	11	12	7	9	20	4	14	16	18	
	V.B	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	$x_{34}$	RHS
10	$x_{11}$	1	0				0	0	0				0	5
2	$x_{12}$	0	1				0	0	0				0	10
7	$x_{22}$	0	0				1	0	0				0	5
9	$x_{23}$	0	0				0	1	0				0	15
20	$x_{24}$	0	0				0	0	1				0	5
18	$x_{34}$	0	0				0	0	0				1	10
	$Z_j$	10	2				7	9	20				18	520
	$C_j - Z_j$	0	0	16	-4	-3	0	0	0	-9	9	9	0	

#### Criterio de Optimalidad

##### ■ Costo reducido

$$\overline{C}_{ij} = C_{ij} - u_i - v_j$$

$$\begin{aligned}
 u_i + v_j &= C_{ij} \quad \forall (i, j) \text{ Básica} \\
 u_1 &= 0
 \end{aligned}$$

\*OBS:

- Para facilitar la búsqueda de las demás variables, se empieza un  $u_1 = 0$ .
- Luego se calculan los costos reducidos de las celdas que no tiene valor.



Paso a paso:

- **Paso 1:** Calcular los costos reducidos de las celdas que no tienen valor.
- **Paso 1.1:** Para ello calculamos primero los valores de  $u_i$  y  $v_j$ , usando  $u_1 = 0$  en las celdas que tiene valor.

$$v_j = C_{ij} - u_i \quad \forall (i, j) \quad \text{Básica} \Leftrightarrow u_i = C_{ij} - v_j \quad \forall (i, j) \quad \text{Básica}$$

	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$	
$u_1 = 0$	5	10	-	-	15
$u_2 =$	-	5	15	5	25
$u_3 =$	-	-	-	10	10
	5	15	15	15	50

	$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 =$	$v_4 =$	
$u_1 = 0$	5	10	-	-	15
$u_2 =$	-	5	15	5	25
$u_3 =$	-	-	-	10	10
	5	15	15	15	50

$v_1 = 10 - 0 = 10$   
 $v_2 = 2 - 0 = 2$

	$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 =$	$v_4 =$	
$u_1 = 0$	5	10	-	-	15
$u_2 = 5$	-	5	15	5	25
$u_3 =$	-	-	-	10	10
	5	15	15	15	50

$u_2 = 7 - 2 = 5$





	$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	
$u_1 = 0$	5	10	-	-	15
$u_2 = 5$	-	5	15	5	25
$u_3 = 3$	-	-	-	10	10
	5	15	15	15	50

- **Paso 1.2:** Ahora calculamos los costos reducidos de las celdas que no tienen valor.

$$\overline{C}_{ij} = C_{ij} - u_i - v_j$$

$$\overline{C}_{13} = 20 - 0 - 4 = 16$$

	$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	
$u_1 = 0$	5	10	16	20	15
$u_2 = 5$	-	5	15	5	25
$u_3 = 3$	-	-	-	10	10
	5	15	15	15	50

- **Paso 2:** Verificar si todos los costos reducidos:

- Si **todos** los costos reducidos son  $\geq 0$ , entonces hemos llegado a la solución óptima.
- Si **existe** uno o varios costos reducidos  $\leq 0$ , entonces se procede a elegir la celda con el valor más negativo.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	
$u_1 = 0$	5	10	16	-4	15
$u_2 = 5$	-3	5	15	5	25
$u_3 = 3$	-9	9	9	10	10
	5	15	15	15	50



- **Paso 3:** Elegir la celda con el valor más negativo.

Vemos que la celda  $x_{31}$  es el valor más negativo.

$$V_{in} = x_{31}$$

	$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$
$u_1 = 0$	5	10	-	-
$u_2 = 5$	-3	5	15	5
$u_3 = 3$	-9	4	9	10

- **Paso 4:** Utilizamos el método (Stepping-Stone), para actualizar los valores de las celdas y marcar que variable sale.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$
$u_1 = 0$	5	-	10	-
$u_2 = 5$	-3	5	-	5
$u_3 = 3$	-9	4	9	10

- **Paso 4.1:** Elegimos el valor menor de las celdas que se les resta, en este caso tenemos las variables  $x_{11}$  y  $x_{22}$  con el valor de 5. Por lo que la variable  $x_{11}$  o  $x_{22}$  podrían salir.

$$V_{out} = x_{22}$$

Importante: el valor de la variable que sale, se le asigna a la variable que entra.

- **Paso 4.2:** Luego se procede a actualizar los valores de las celdas, sumando o restando el valor de la variable que sale a las celdas con valor.

	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$
$u_1 = 0$	0	15	-	-
$u_2 =$	-	-	15	10
$u_3 =$	5	-	-	5



$$\begin{aligned}
 Z &= 0 \cdot 10 + 15 \cdot 2 + 15 \cdot 9 + 10 \cdot 20 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 18 \\
 &= 0 + 30 + 135 + 200 + 20 + 90 \\
 &= 475
 \end{aligned}$$

- **Paso ?**: Repetir los pasos hasta que en el paso 2 todos los costos reducidos sean  $\geq 0$ .

$v_1 = 10 \quad v_2 = 2 \quad v_3 = 13 \quad v_4 = 24$

		10		2	7	20	13	11
$u_1 = 0$	0	-	15	-	-	-	-	+
$u_2 = -4$	6	12	5	7		9	10	20
	-	-	-		15			
$u_3 = -6$	5	4	18	14	9	16	5	18
		+	-		-		-	-

$v_1 = \quad v_2 = \quad v_3 = \quad v_4 =$

		10		2		20		11
$u_1 = 0$	-		15		-		0	
$u_2 =$		12		7		9	10	20
	-		-		15			
$u_3 =$	5	4		14		16	5	18
			-		-			

$$\begin{aligned}
 Z &= 15 \cdot 2 + 0 \cdot 11 + 15 \cdot 9 + 10 \cdot 20 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 18 \\
 &= 30 + 0 + 135 + 200 + 20 + 90 \\
 &= 475
 \end{aligned}$$

$v_1 = -3 \quad v_2 = 2 \quad v_3 = 0 \quad v_4 = 11$

	13	10		2	20	20		11
$u_1 = 0$	-		15	-	-		0	+
$u_2 = 9$	6	12	-4	7		9	10	20
	-			+	15			-
$u_3 = 7$	5	4	5	14	9	16	5	18
			-		-			



	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$				
$u_1 = 0$	-	10	5	2	-	20	10	11
$u_2 =$	-	12	10	7	15	9	-	20
$u_3 =$	5	4	-	14	-	16	5	18

	$v_1 = -3$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 11$				
$u_1 = 0$	13 -	10 -	5 -	2 -	16 -	20 -	10 -	11 -
$u_2 = 5$	10 -	12 -	10 -	7 -	15 -	9 -	4 -	20 -
$u_3 = 7$	5 -	4 -	5 -	14 -	5 -	16 -	5 -	18 -

- Calculamos el valor de la función objetivo.

$$\begin{aligned}
 Z &= 5 \cdot 2 + 10 \cdot 11 + 10 \cdot 7 + 15 \cdot 9 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 18 \\
 &= 10 + 110 + 70 + 135 + 20 + 90 \\
 &= 435
 \end{aligned}$$