Certamen 2

Marcelo Paz
Claudia Sobino

Investigación de Operaciones

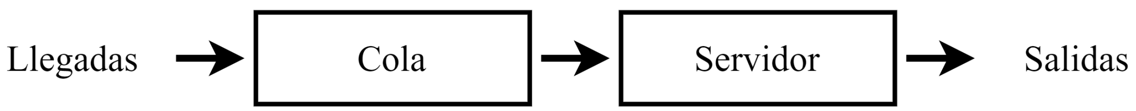
1 de julio de 2024

Versión: 1.1.0

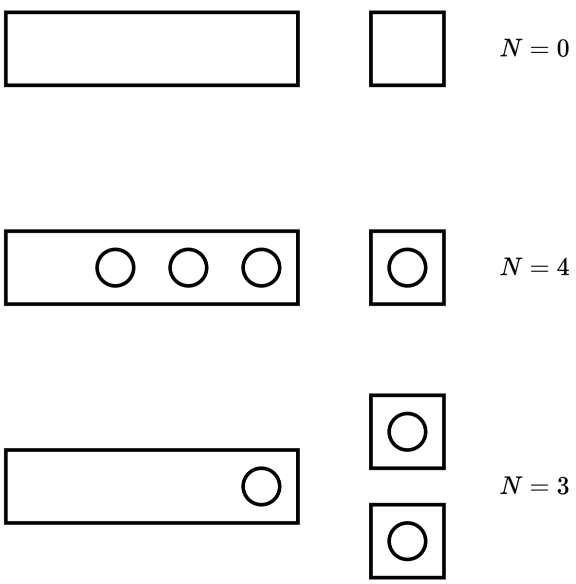
1. Lineas de Espera

Es un modelo matemático que permite analizar el comportamiento de un sistema de espera.

- **Objetivo:** Minimizar el tiempo de espera de los clientes y el costo de atención.
- **Aplicaciones:** Aeropuertos, hospitales, bancos, supermercados, etc.



Cantidad de Clientes en el Sistema



1.1. Único Servidor (M/M/1)

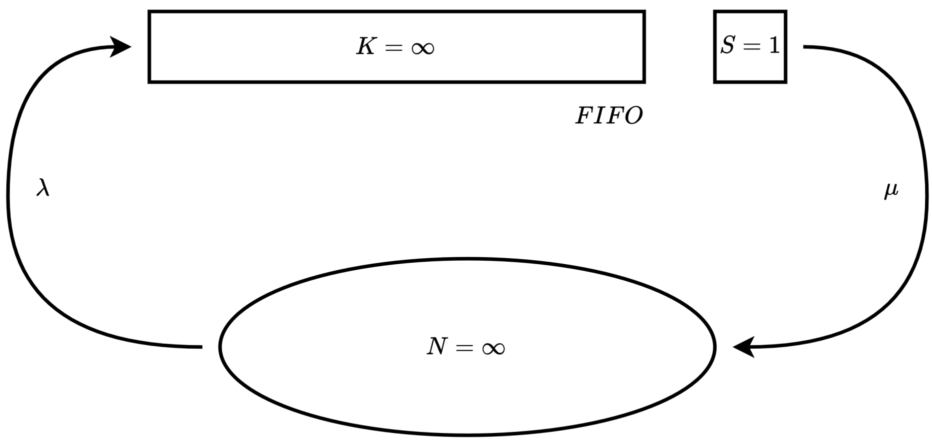
Notación de Kendall: M/M/1 se refiere a un sistema de colas con una tasa de llegada de clientes λ, una tasa de servicio μ y 1 servidor.

El sistema de espera se caracteriza por:

- Los tiempos de llegadas y los tiempos de servicio se distribuyen de manera exponencial.
- Un único servidor.
- Tiene el formato FIFO (First In First Out).
- El tamaño de la población de entrada es infinito, es decir, el número de clientes en el sistema no afecta a la tasa de llegada.
- La tasa de servicio no depende del número de clientes en el sistema.
- Para que el sistema sea estable, se debe cumplir la **Condición de regimen**.

$$\rho < 1$$

Esta condición tiene el objetivo de que la tasa de llegada sea menor a la tasa de servicio, pues como la capacidad del sistema es infinita, si la tasa de llegada es mayor a la tasa de servicio, el sistema se saturará.



Donde:

- K : Capacidad del sistema.
- S : Número de servidores en paralelo.
- μ : Tasa de servicio medidas (Clientes / Unidad de tiempo).
- N : Número de clientes en el sistema.
- λ : Tasa de llegada de clientes (Clientes / Unidad de tiempo)

1.1.1. Indicadores (Performance)

IMPORTANTE: Para los cálculos, se debe considerar la misma unidad de tiempo.

- L : Cantidad promedio de clientes en el sistema.

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

- L_q : Cantidad promedio de clientes en la cola.

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

- W : Tiempo promedio de un cliente en el sistema.

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

- W_q : Tiempo promedio de un cliente en la cola.

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

1.1.2. Probabilidades

Sea n : Cantidad de clientes en el sistema. $(n = 1, 2, ...)$ Entonces:

- ρ : Factor de utilización / Factor de carga / Intensidad tráfico.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1 - P_0$$

- P_0 : Probabilidad de que ningún cliente se encuentre en el sistema.

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

- P_n : Probabilidad de que haya n clientes en el sistema.

$$P_n = \rho^n \cdot P_0 \qquad \text{Condición de regimen} \quad \rho < 1$$

- $P(W_q > t)$: Probabilidad que un cliente este en la cola a lo menos t unidades de tiempo.

$$P(W_q > t) = \rho e^{-\mu(1-e)\cdot t}$$

- $P(W > t)$: Probabilidad que un cliente permanezca en el sistema, a lo menos t unidades de tiempo.

$$P(W > t) = e^{-\mu(1-e)\cdot t}$$

1.1.3. Problema 1:

En el mostrador de facturación de una aerolínea llega un promedio de 45 clientes por hora, cuando su capacidad media es de 60 clientes por hora. Si un cliente espera una media de 3 minutos en la cola, se pide:

Datos

$\lambda = 45$ clientes/hora
$\mu = 60$ clientes/hora
$W_q = 3$ minutos
$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4} < 1$ Condición de regimen

a) Tiempo medio que un cliente pasa en la facturación.

$$\begin{aligned} W &= \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{60-45} = \frac{1}{15} \cdot 60 \text{ minutos} \\ &= 4 \text{ minutos} \end{aligned}$$

b) Número medio de clientes en la cola.

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{45^2}{60(60-45)} = \frac{2025}{900} \\ &= 2,25 \text{ clientes} \end{aligned}$$

c) Número medio de clientes en el sistema en un momento dado.

$$L = \frac{45}{(60-45)} = 3 \qquad \text{(Inventado)}$$

d) Probabilidad de que el sistema esté vacío.

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 - \frac{\lambda}{\mu} \\ &= 1 - \frac{45}{60} = \frac{4-3}{4} \\ &= \frac{1}{4} = 0,25 \\ &= 25\,\% \end{aligned}$$

e) Probabilidad de que haya más de 3 clientes:

$$\begin{aligned} P(n > 3) &= 1 - P(n \leq 3) = 1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3) \\ &= 1 - (0{,}25 + 0{,}1875 + 0{,}14 + 0{,}1054) \\ &= 1 - 0{,}6829 = 0{,}3171 \\ &= 31{,}71\,\% \end{aligned}$$

1.1.4. Problema 2:

En un restaurante de carretera llega una media de 90 personas a la hora, cuando tiene disponibilidad de dar servicio a 120 clientes por hora. Sabiendo que los clientes esperan una media de 2 minutos en la cola, se pide:

Datos

$\lambda = 90$
$\mu = 120$
$W_q = 2$ minutos
$\rho = \frac{90}{120} = \frac{3}{4} < 1$ Condición de regimen

a) Probabilidad que el sistema se encuentre sin ocupar.

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 - \rho = 1 - \frac{3}{4} = 0{,}25 \\ &= 25\,\% \end{aligned}$$

b) Probabilidad que un cliente tenga que esperar al encontrarse el sistema ocupado.

$$\begin{aligned} P(n > 1) &= 1 - P(n \leq 1) = 1 - (P_0 + P_1) \\ &= 1 - (0{,}25 + (\frac{3}{4} \cdot 0{,}25)) = 1 - (0{,}25 + 0{,}1875) = 1 - 0{,}4375 = 0{,}5625 \\ &= 56{,}25\,\% \end{aligned}$$

c) Número medio de clientes en la cola.

d) Probabilidad de que hay 4 clientes en la cola.

$$\begin{aligned} P_4 &= \rho^4 \cdot P_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 0{,}25 = 0{,}5625 \cdot 0{,}25 = 0{,}140625 \\ &= 14{,}0625\,\% \end{aligned}$$

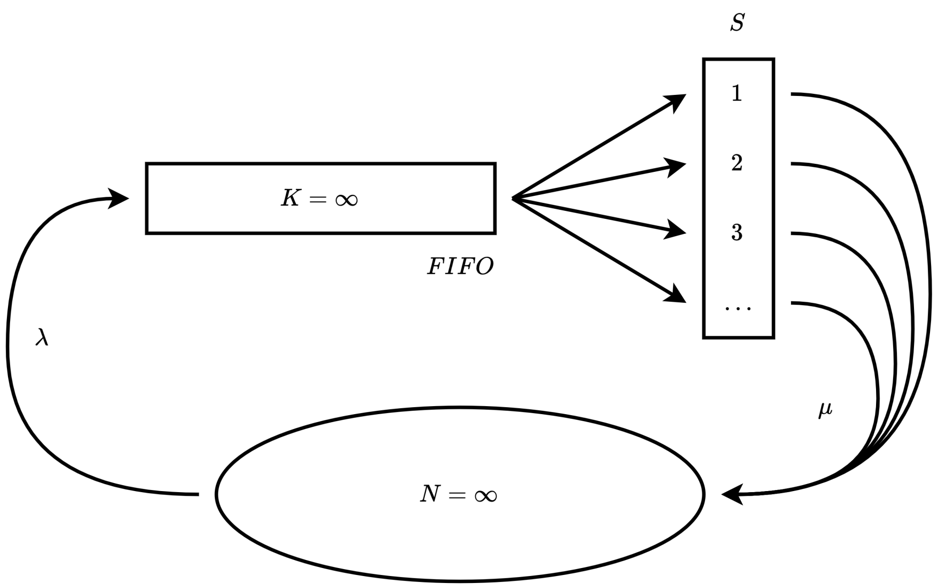
1.2. Multiples Servidores en Paralelo (M/M/S)

Notación de Kendall: M/M/S se refiere a un sistema de colas con una tasa de llegada de clientes λ, una tasa de servicio μ y una cantidad S de servidores.

- Los tiempos de llegadas y los tiempos de servicio se distribuyen de manera exponencial.
- Multiples servidores en paralelo.
- Tiene el formato FIFO (First In First Out).
- El tamaño de la población de entrada es infinito, es decir, el número de clientes en el sistema no afecta a la tasa de llegada.
- La tasa de servicio no depende del número de clientes en el sistema.
- Para que el sistema sea estable, se debe cumplir la **Condición de regimen**.

$$\rho < 1$$

  Esta condición tiene el objetivo de que la tasa de llegada sea menor a la tasa de servicio, pues como la capacidad del sistema es infinita, si la tasa de llegada es mayor a la tasa de servicio, el sistema se saturará.



Donde:

- K : Capacidad del sistema.
- S : Número de servidores en paralelo.
- μ : Tasa de servicio medidas (Clientes / Unidad de tiempo).
- N : Número de clientes en el sistema.
- λ : Tasa de llegada de clientes (Clientes / Unidad de tiempo)

1.2.1. Indicadores (Performance)

IMPORTANTE: Para los cálculos, se debe considerar la misma unidad de tiempo.

- L_s : Cantidad promedio de clientes en el sistema.

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \qquad (L_s = \lambda \cdot W_s)$$

- L_q : Cantidad promedio de clientes en la cola.

$$L_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \cdot \lambda \cdot \mu}{(s-1)! \cdot (s \cdot \mu - \lambda)^2} \cdot P_0 = \frac{1}{s!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \cdot P_0$$

- W_s : Tiempo promedio de un cliente en el sistema.

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \qquad (W_s = \frac{L_s}{\lambda})$$

- W_q : Tiempo promedio de un cliente en la cola.

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \qquad (L_q = \lambda \cdot W_q)$$

1.2.2. Probabilidades

Sea n : Cantidad de clientes en el sistema. $(n = 1, 2, ...)$ Entonces:

- ρ : Factor de utilización / Factor de carga / Intensidad tráfico.

$$\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu}$$

- P_0 : Probabilidad de que ningún cliente se encuentre en el sistema.

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \cdot \left(\frac{s \cdot \mu}{s \cdot \mu - \lambda}\right)}$$

- P_n : Probabilidad de que haya n clientes en el sistema.

$$P_n = \begin{cases} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \cdot P_0 & \text{si } n \leq s \\ \\ \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s! \cdot s^{n-s}} \cdot P_0 & \text{si } n \geq s \end{cases}$$

1.2.3. Problema 1:

Un terminal de facturación dispone de dos operarios que atienden a los clientes que llegan según una distribución de Poisson de media 80 clientes por hora, que esperan en una única cola hasta que alguno de los operarios esté libre. El tiempo requerido para atender a un cliente se distribuye exponencialmente con medía 1,2 minutos.

Datos

$\lambda = 80$
$W_s = 1,2$ minutos
$\mu = \frac{60}{1,2} = 50$
$s = 2$
$\rho = \frac{80}{2 \cdot 50} = \frac{8}{10} < 1$ Condición de regimen

1. ¿Cuál es el número esperado de clientes en el terminal de facturación?

$$L_s = L_q + \frac{80}{50}$$

$$L_q = \frac{\left(\frac{80}{50}\right)^2 \cdot 80 \cdot 50}{(1)! \cdot (2 \cdot 50 - 80)^2} \cdot P_0$$

$$\begin{aligned}
P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{1} \frac{\left(\frac{80}{50}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{80}{50}\right)^2}{2!} \cdot \left(\frac{2 \cdot 50}{2 \cdot 50 - 80}\right)} \\
&= \frac{1}{\frac{\left(\frac{80}{50}\right)^0}{0!} + \frac{\left(\frac{80}{50}\right)^1}{1!} + \frac{\left(\frac{8}{5}\right)^2}{2!} \cdot \left(\frac{100}{20}\right)} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{8}{5} + \frac{\frac{64}{25}}{2} \cdot 5} = \frac{1}{1 + \frac{8}{5} + \frac{32}{5}} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{40}{5}} = \frac{1}{1+8} = \frac{1}{9} \\
&= 0,1111
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_q &= \frac{\left(\frac{8}{5}\right)^2 \cdot 80 \cdot 50}{(20)^2} \cdot 0,1111 \\
&= \frac{\frac{64}{25} \cdot 4000}{400} \cdot 0,1111 = \frac{64}{25} \cdot 10 \cdot 0,1111 \\
&= 26 \cdot 0,1111 = 2,8886
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_s &= 2,8886 + \frac{80}{50} = 2,8886 + 1,6 \\
&= 4,4886 \text{ clientes}
\end{aligned}$$

2. ¿Cuál es el tiempo medio que un cliente pasa en el terminal de facturación?

$$\begin{aligned} W_s &= \frac{L_s}{\lambda} \\ &= \frac{4,4886}{80} = 0,0561 \text{ horas} = 3,366 \text{ minutos} \end{aligned}$$

3. Probabilidad de que haya exactamente 6 clientes. Como $n > s$:

$$\begin{aligned} P_6 &= \frac{\left(\frac{8}{5}\right)^6}{2! \cdot 2^{6-2}} \cdot 0,1111 \\ &= \frac{\frac{262144}{15625}}{2^5} \cdot 0,1111 \\ &= \frac{8192}{15625} \cdot 0,1111 \\ &= 0,5243 \cdot 0,1111 = 0,0582 \end{aligned}$$

4. Probabilidad de que haya menos de 3 clientes.

$$\begin{aligned} P(n < 3) &= P_0 + P_1 + P_2 \\ &= 0,1111 + \frac{\left(\frac{8}{5}\right)^1}{1!} \cdot 0,1111 + \frac{\left(\frac{8}{5}\right)^2}{2!} \cdot 0,1111 \\ &= 0,1111 + \frac{8}{5} \cdot 0,1111 + \frac{64}{25} \cdot 0,1111 \\ &= 0,1111 + 0,1778 + 0,1422 = 0,4311 \end{aligned}$$

1.2.4. Problema 2:

Una pequeña bancaria tiene dos cajeros automáticos que según una distribución exponencial atienden a razón de 1,5 minutos por cliente. La tasa de llegada de clientes según una Poisson es de 30 por hora.

Datos

$\lambda = 30$
$W_s = 1,5$ minutos
$\mu = \frac{60}{1,5} = 40$
$s = 2$
$\rho = \frac{30}{2\cdot 40} = \frac{3}{8} < 1$ Condición de regimen

1. Número medio de clientes en el sistema.

$$L_s = L_q + \frac{30}{40}$$

$$\begin{aligned} L_q &= \frac{\left(\frac{30}{40}\right)^2 \cdot 30 \cdot 40}{(1)! \cdot (2\cdot 40 - 30)^2} \cdot P_0 \\ &= \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 30 \cdot 40}{(50)^2} \cdot 0,4545 \\ &= \frac{\frac{9}{16} \cdot 1200}{2500} \cdot 0,4545 \\ &= \frac{9}{16} \cdot 0,48 \cdot 0,4545 \\ &= 0,28125 \cdot 0,4545 \\ &= 0,1277 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{1} \frac{\left(\frac{30}{40}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{30}{40}\right)^2}{2!} \cdot \left(\frac{2\cdot 40}{2\cdot 40 - 30}\right)} \\ &= \frac{1}{\frac{\left(\frac{30}{40}\right)^0}{0!} + \frac{\left(\frac{30}{40}\right)^1}{1!} + \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2!} \cdot \left(\frac{80}{50}\right)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{3}{4} + \frac{\frac{9}{16}}{2} \cdot 1,6} = \frac{1}{1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{20}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{24}{20}} = \frac{1}{1 + 1,2} = \frac{1}{2,2} \\ &= 0,4545 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_s &= 0,1277 + \frac{30}{40} = 0,1277 + 0,75 \\ &= 0,8777 \text{ clientes} \end{aligned}$$

2. Tiempo medio de un cliente en el sistema.

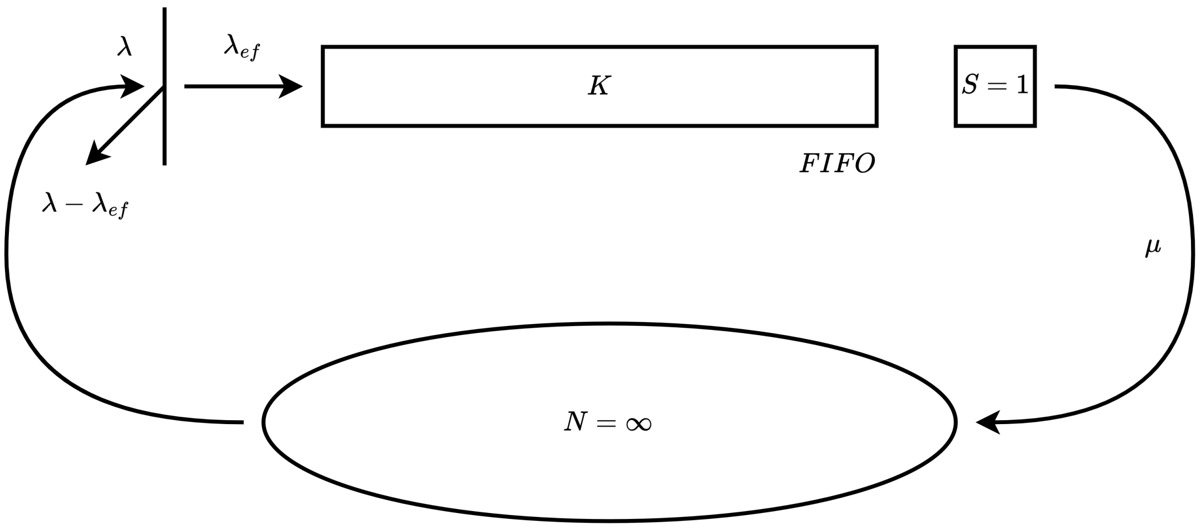
$$\begin{aligned} W_s &= \frac{L_s}{\lambda} \\ &= \frac{0,8777}{30} = 0,0293 \text{ horas} = 1,76 \text{ minutos} \end{aligned}$$

3. Porcentaje de tiempo de cajero libre.
PREGUNTARLE AL PROFESOR.

1.3. Único Servidor con Capacidad Finita (M/M/1/K)

Notación de Kendall: M/M/1/K se refiere a un sistema de colas con una tasa de llegada de clientes λ, una tasa de servicio μ, 1 servidor y una cantidad K de clientes en el sistema.

- Cola finita.
- El número máximo de clientes en el sistema es K, por lo que la capacidad de la cola es $K - s$.
- Tiene el formato FIFO (First In First Out).
- En esta situación, sí el sistema está lleno no se permite la entrada de nuevos clientes al sistema. En consecuencia, la tasa de llegada efectiva no es constante y varía con el tiempo (dependiendo sí el sistema está o no lleno).



Donde:

- K : Capacidad del sistema.
- S : Número de servidores en paralelo.
- μ : Tasa de servicio medidas (Clientes / Unidad de tiempo).
- N : Número de clientes en el sistema.
- λ : Tasa de llegada de clientes (Clientes / Unidad de tiempo)
- λ_{ef} : Tasa de llegada efectiva de clientes.

$$\lambda_{ef} = \lambda \cdot (1 - P_k)$$

1.3.1. Indicadores (Performance)

IMPORTANTE: Para los cálculos, se debe considerar la misma unidad de tiempo.

- L_s : Cantidad promedio de clientes en el sistema.

$$L_s = \begin{cases} \dfrac{\rho}{(1-\rho)} - \dfrac{(k+1)\cdot\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} & \text{si } \rho \neq 1 \\ \\ \dfrac{k}{2} & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$$

- L_q : Cantidad promedio de clientes en la cola.

$$L_q = L_s - (1 - P_0) = \begin{cases} L_s - \dfrac{(1-\rho^k)\cdot\rho}{1-\rho^{k+1}} & \text{si } \rho \neq 1 \\ \\ \dfrac{k\cdot(k-1)}{2\cdot(k+1)} & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$$

- W_s : Tiempo promedio de un cliente en el sistema.

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{ef}}$$

- W_q : Tiempo promedio de un cliente en la cola.

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda_{ef}}$$

- $Long_q$: Longitud de la cola.

$$Long_q = \lambda_{ef} \cdot W_q$$

1.3.2. Probabilidades

En este sistema da ρ puede tener cualquier valor, pues el sistema no se desborda. Sea n : Cantidad de clientes en el sistema. $(n = 1, 2, ...)$ Entonces:

- P_0 : Probabilidad de que ningún cliente se encuentre en el sistema.

$$P_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}} & \text{si } \lambda \neq \mu \equiv \rho = \frac{\lambda}{\mu} \neq 1 \\ \\ \dfrac{1}{1+k} & \text{si } \lambda = \mu \equiv \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1 \end{cases}$$

- P_n : Probabilidad de que haya n clientes en el sistema.

$$P_n = \begin{cases} \rho^n \cdot \dfrac{(1-\rho)}{1-\rho^{k+1}} & \text{si } \lambda \neq \mu \equiv \rho = \frac{\lambda}{\mu} \neq 1 \\ \\ \dfrac{1}{1+k} & \text{si } \lambda = \mu \equiv \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1 \end{cases}$$

1.3.3. Problema 1:

En un taller mecánico llegan vehículos para una puesta a punto antes de pasar la ITV, las llegadas siguen un proceso de Poisson de promedio 18 vehículos/hora. Las dimensiones del taller sólo permiten que haya 4 vehículos, y las ordenanzas municipales no permiten esperar en la vía pública. El taller despacha un promedio de 6 vehículos/hora de acuerdo con una distribución exponencial. Se pide:

1. ¿Cuál es la probabilidad de uqe no haya ningún vehículo en el taller?
2. ¿Cuál es el promedio de vehículos en el taller?
3. ¿Cuánto tiempo pasa por término medio un vehículo en el taller?
4. ¿Cuánto tiempo esperan por término medio los vehículos en la cola?
5. ¿Cuál es la longitud media de la cola?

1.3.4. Problema 2:

Sea un sistema de espera (m/m/1/6) y $\lambda = \mu = 20$. Calcular:

1. L_s.

$$\begin{aligned} L_s &= \frac{k}{2} \\ &= \frac{6}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

2. L_q.

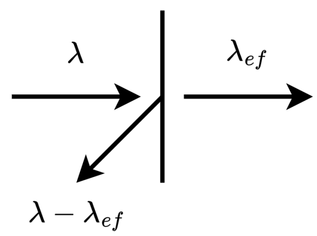
$$\begin{aligned} L_q &= \frac{k \cdot (k-1)}{2 \cdot (k+1)} \\ &= \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 7} \\ &= 2,1429 \end{aligned}$$

3. Probabilidad de que hayan menos de 3 clientes en el sistema.

$$\begin{aligned} P(n > 3) &= P_0 + P_1 + P_2 \\ &= \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7} \\ &= 0,4286 \end{aligned}$$

4. Tasa efectiva.

$$\begin{aligned} \lambda_{ef} &= \lambda \cdot (1 - P_0) \\ &= 20 \cdot (1 - \frac{1}{7}) \\ &= 20 \cdot (\frac{6}{7}) \\ &= \frac{120}{7} \\ &= 17{,}1429 \end{aligned}$$

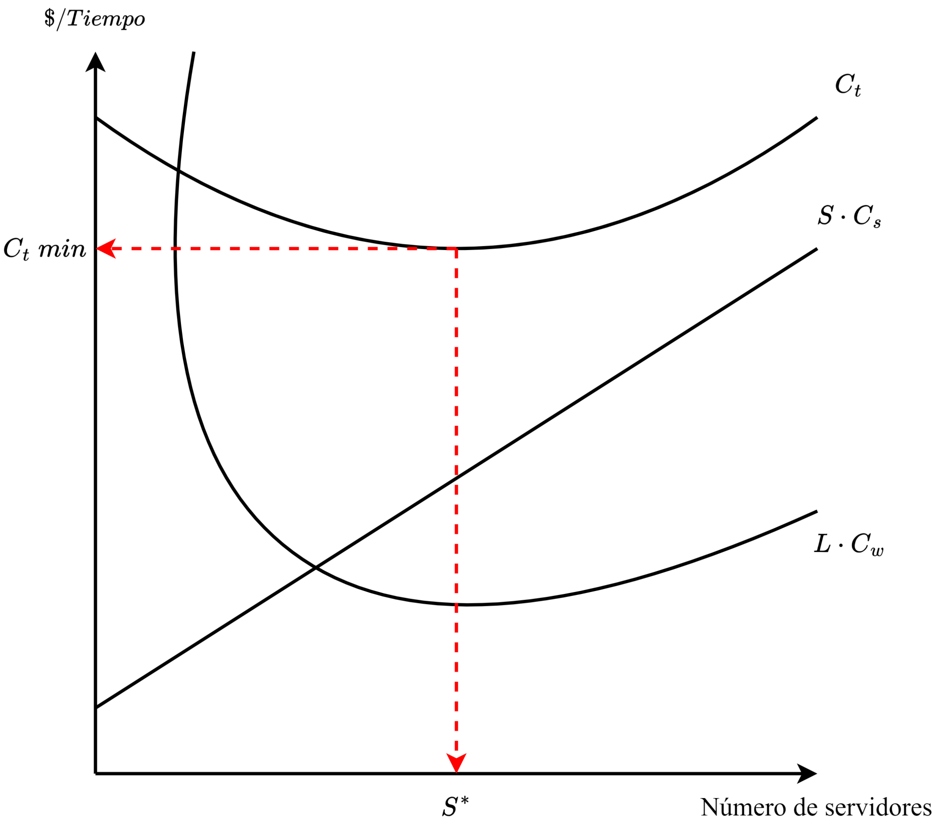


$20 - 17.1429$

2.8571

2. Costos en los sistemas de colas

$$C_t = S \cdot C_s + L \cdot C_w$$



Donde:

- S : Número de servidores.
- C_s : Costo de operación por servidor ($/t).
- L : Número promedio de clientes.
- C_w : Costo unitario de espera ($/t).

2.1. Problema 1:

El departamento de Ciencias de la Decisión trata de determinar si renta una copiadora lenta o una rápida. El departamento cree que el tiempo de un empleado vale 15 $/h. El arrendamiento de la copiadora lenta cuesta 4 $/h y un empleado tarda un promedio de 10 minutos en terminar sus copias, distribuido exponencialmente. La copiadora rápida cuesta 15 $/h en arrendamiento, y un empleado tarda un promedio de 6 minutos en terminar sus copias. Un promedio de 4 empleados/h son los que necesitan usar la copiadora. Los tiempos entre llegadas son exponenciales. ¿Que maquina debe rentar el departamento?

	m/m/1 lenta	m/m/1 rápida
s	1	1
C_s	4 $/h	15 $/h
λ	4 empleados/h	4 empleados/h
μ	6 clientes/h	10 clientes/h
L	$\frac{4}{2} = 2$	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
C_w	15 $/h	15 $/h
C_t	$1 \cdot 4 + 2 \cdot 15 = 34$ $/h	$1 \cdot 15 + \frac{2}{3} \cdot 15 = 25$ $/h

$\therefore$ Se debe arrendar la fotocopiadora rápida.

2.2. Problema 2:

Un supermercado trata de decidir cuántas cajas deben estar funcionando. Suponga que cada hora llega un promedio de 18 clientes, y el tiempo promedio de atención a un cliente es 4 minutos. Los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio son exponenciales, y el sistema se puede modelar como uno $M/M/s/DG/\infty/\infty$. El funcionamiento de una caja cuesta 20 $/h, y se carga un costo de 0,25 $ por cada minuto que el cliente pasa en la zona de cajas. ¿Cuántas cajas debe abrir el supermercado?

s	P_0	L
1	-	-
2	0,25	1,88
3	0,29	1,29
4	0,3	1,22

s	μ	λ	ρ	C_s	L	C_w	C_t
1	15	18	Colapsa	20	-	15	-
2	15	18	Estable	20	1,88	15	$40 + 1{,}88 \cdot 15 = 68{,}2$*
3	15	18	Estable	20	1,29	15	$60 + 1{,}29 \cdot 15 = 79{,}35$
4	15	18	Estable	20	1,22	15	$80 + 1{,}22 \cdot 15 = 98{,}3$
...	...	...	...	...	...	...	...

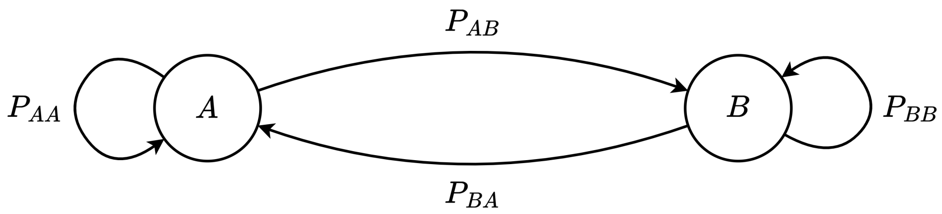
3. Cadenas de Markov

Es un proceso estocástico de tiempo discreto. Donde:

$$\{X_n\} \ n \in \mathbb{N} \quad \text{con } x_1, x_2, x_3, ..., x_n$$

Sucesión de variables aleatoreas.
Supuesto 1: El estado en que se encuentra el proceso en al etapa actual siguiente depende solamente del estado en que se encuentra el proceso en la etapa actual y no de las anteriores.

3.1. Diagrama de transición entre estados



3.2. Probabilidad de transición en una etapa

- P_{ij} : Probabilidad de pasar del estado i al estado j. Notar que:

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1, \quad \forall i$$

OBS: En otras palabras la suma de las probabilidades de transición de un estado a todos los demás estados es igual a 1.

3.3. Matriz de transición

Esta probabilidad se puede escribir en una matriz P de transición en una etapa.

$$P = \begin{pmatrix} P_{AA} & P_{AB} \\ P_{BA} & P_{BB} \end{pmatrix}$$

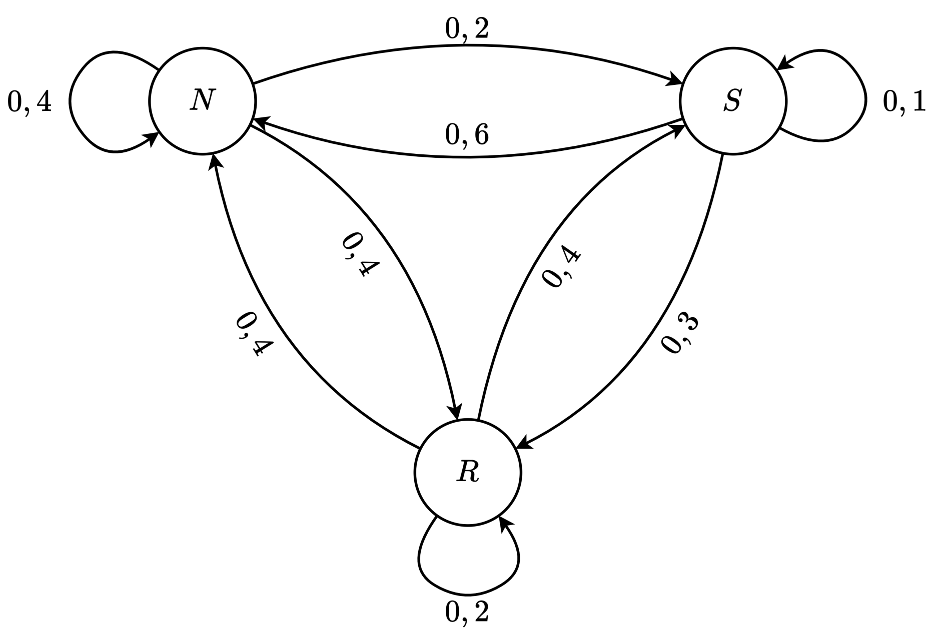
Supuesto 2: Las P_{ij} no dependen de cuantas veces se transite de i a j.

3.4. Ejemplo 1:

$$X_n : \text{estado del clima en etapa(Día)} \quad n$$
$$\Omega : \{N : \text{nublado}, S : \text{soleado}, R : \text{lluvioso}\}$$

Una realización de este proceso es: $N\ N\ S\ S\ S\ R\ R\ N\ N$ ...

Diagrama de transición entre estados



Matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} P_{NN} & P_{NS} & P_{NR} \\ P_{SN} & P_{SS} & P_{SR} \\ P_{RN} & P_{RS} & P_{RR} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0,1 & 0,3 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$$

OBS: P^n : es la matriz de transición de probabilidades en n etapas.

$$P^n = P \cdot P \cdot P \cdot ... \quad n \text{ veces}$$

3.5. Problema 1:

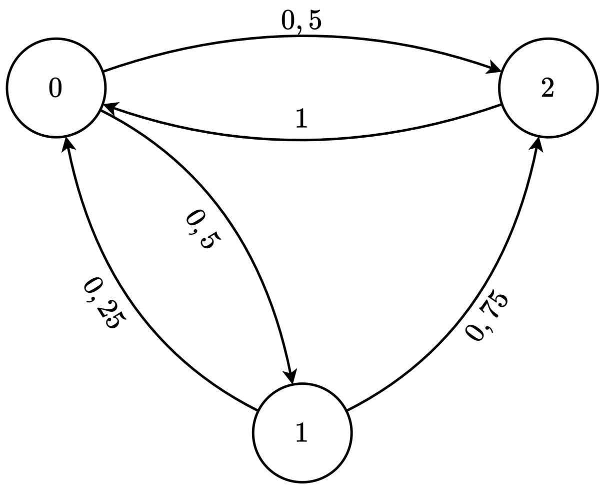
El ascensor de un edificio con bajo y dos pisos realiza viajes de uno a otro piso. El piso en el que finaliza el viaje n-ésimo del ascensor sigue una cadena de Markov. Se sabe que la mitad de los viajes que parten del bajo se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el primer piso, sólo el 25 % de las veces finaliza en el segundo. Por último, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en el bajo.

$$X_n : \text{Piso en que se encuentra ascensor en la etapa} \quad n$$
$$\Omega : \{0, 1, 2\}$$

Si:

- El proceso esta en el piso 0, puede ir a piso 1 o piso 2 con la misma probabilidad.
- El proceso esta en el piso 2 va a piso 0 directamente.
- El proceso esta en el piso 1 va a piso 0 el 25 % de las veces.

1. Dibujar el diagrama de transición entre estados.



2. Encontrar la matriz P.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0 & 0,75 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Matriz de transición en 2 etapas.

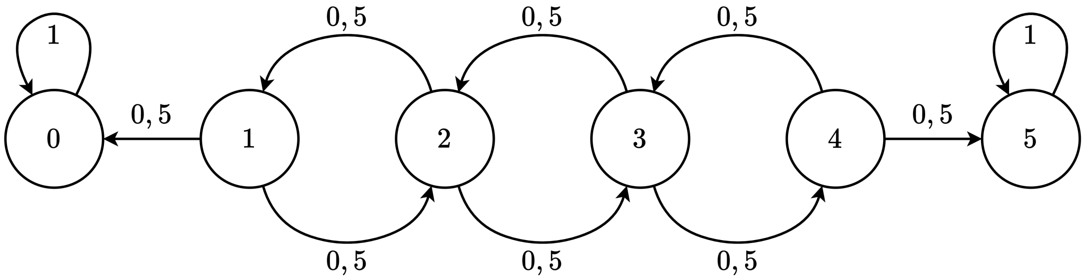
$$\begin{aligned} P^2 &= P \cdot P \\ &= \begin{pmatrix} 0,625 & 0 & 0,375 \\ 0,75 & 0,125 & 0,125 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$P_{00}^{(2)} = 0 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0,25 + 0,5 \cdot 1 = 0,625$$

3.6. Problema 2:

En un juego participan dos jugadores, A y B. En cada turno, se lanza una moneda al aire. Si sale cara, A le debe \$1 a B. Si sale cruz, B le debe \$1 a A. Al principio, A tiene \$3 y B tiene \$2. El juego continúa hasta que alguno de los dos se arruine. Calcular:

Diagrama de transición entre estados



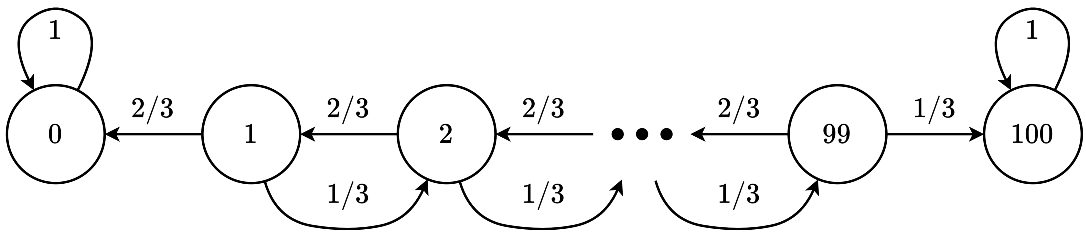
1. La probabilidad de que A termine arruinándose.
2. La probabilidad de que B termine arruinándose.
3. El número medio de tiradas que tarda en acabar el juego.

3.7. Problema 3:

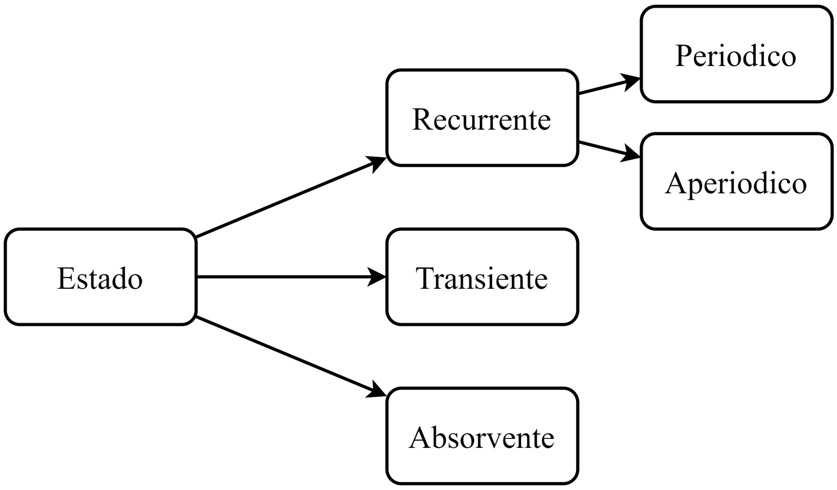
Se lanza un dado repetidas veces. Cada vez que sale menor que 5 se pierde \$1, y cada vez que sale 5 o 6 se gana \$1. El juego acaba cuando se tiene \$0 o \$100.

- Sea X_t : Estado de cuentas en el instante t. Tenemos que X_t es una CM.
- S = {0, 1, 2, ..., 100}

1. Dibujar el diagrama de transición entre estados.



3.8. Clasificación de estados



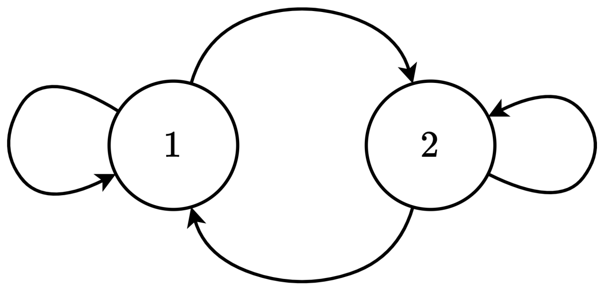
- Sea la relación i se comunica con j definida como:

$$i \to j \quad \wedge \quad j \to i$$

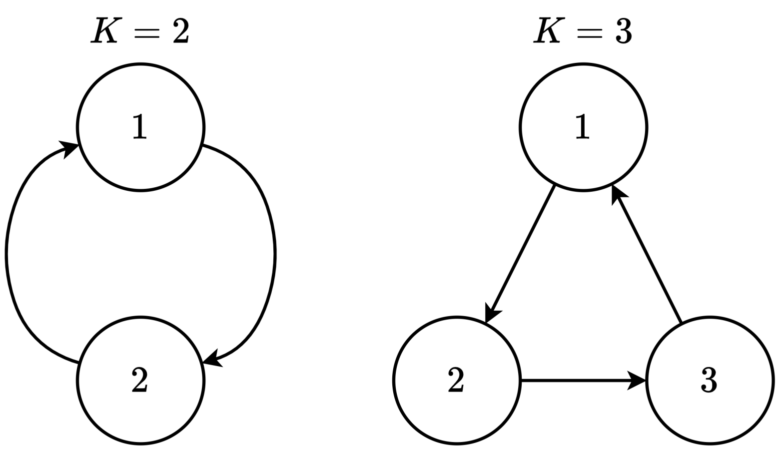
- Los estados que se comunican entre si son de una misma clase.
- La relación $i \leftrightarrow j$ es transitiva, es decir:

$$i \leftrightarrow j \quad \wedge \quad j \leftrightarrow k \quad \Rightarrow \quad i \leftrightarrow k$$

3.8.1. Recurrentes: Aperiodico

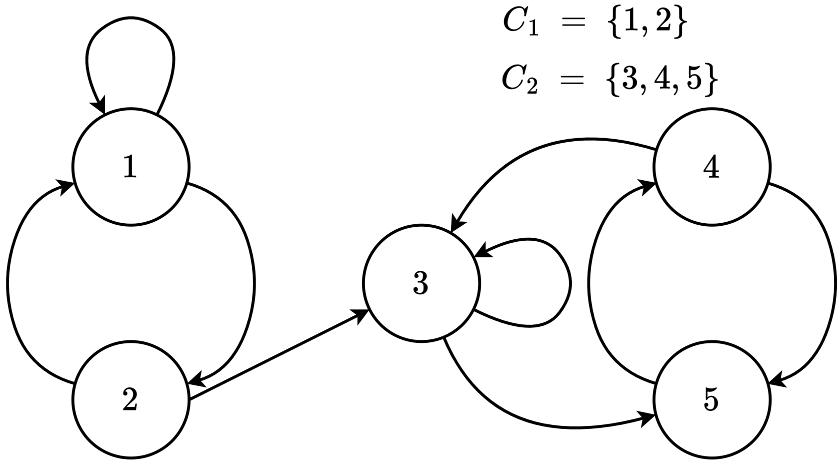


3.8.2. Recurrentes: Periodico



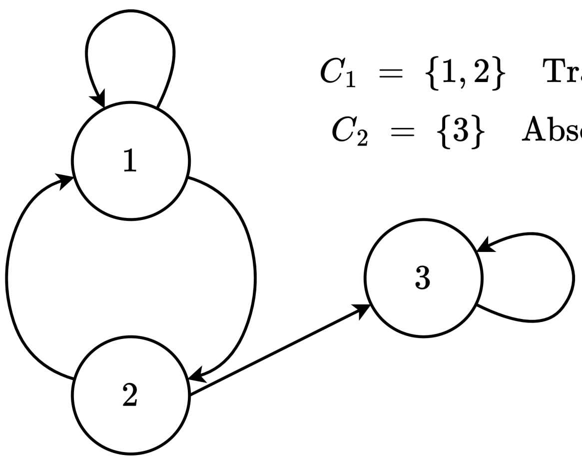
3.8.3. Transientes

$$C_1 = \{1, 2\}$$
$$C_2 = \{3, 4, 5\}$$



3.8.4. Absorvente

$C_1 = \{1, 2\}$ Transiente
$C_2 = \{3\}$ Absorvente



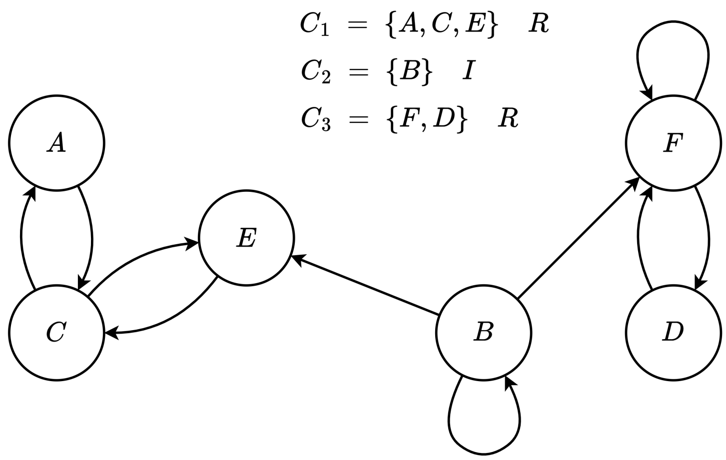
3.9. Clases de cadenas

3.9.1. Irreducible

Una cadena se dice irreducible si sus estados forman una sola clase.

3.9.2. Reducible / Reductible

Una cadena se dice reducible si sus estados forman más de una clase.



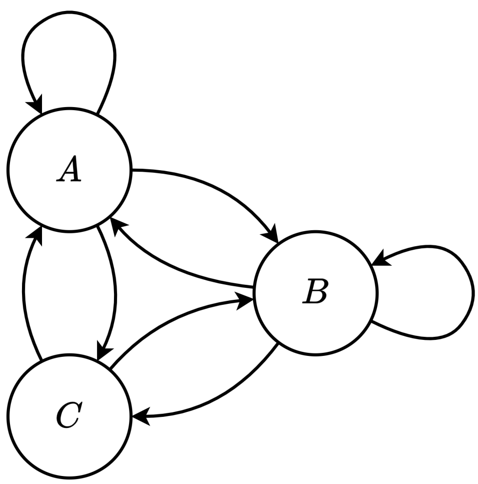
3.9.3. Ergódica

Una cadena se dice ergódica si es irreducible, recurrente y aperiódica.

- Para este tipo de cadena podemos determinar.

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_k) \quad \sum \pi_i = 1$$

  Distribución de estado o de largo plazo.



$$A, A, B, B, C, A, A, C, A, B$$

$$\pi_A = \frac{5}{10} \qquad \pi_B = \frac{3}{10} \qquad \pi_C = \frac{2}{10}$$

3.10. Teorema 1

Cuando P es la matriz de transición en una etapa de una cadena ergódica.

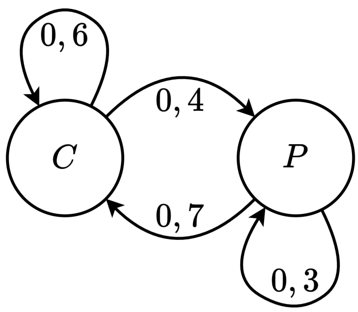
$$\lim_{n\to\infty} P^n = \pi$$

3.11. Teorema 2

$$\pi = \pi \cdot P \qquad \sum \pi_i = 1$$

3.12. Problema 4

¿Que porcentaje de mercado captura cada competidor en el largo plazo?



$$(\pi_1 \pi_2) = (\pi_1 \pi_2) \cdot \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0,6 \cdot \pi_1 + 0,7 \cdot \pi_2 \\ \pi_2 &= 0,4 \cdot \pi_1 + 0,3 \cdot \pi_2 \end{aligned}$$

Igualamos las ecuaciones y despejamos.

$$\begin{aligned} -0,4 \cdot \pi_1 + 0,7 \cdot \pi_2 &= 0 \\ 0,4 \cdot \pi_1 - 0,7 \cdot \pi_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,4 \cdot \pi_1 - 0,7 \cdot \pi_2 &= 0 \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0,64 = 64\,\% \\ \pi_2 &= 0,36 = 36\,\% \end{aligned}$$