Practico distribución normal

Marcelo Paz
Estadistica y Probabilidades 14 de diciembre de 2023

Ejercicio 1

Las longitudes de las sardinas recibidas por cierta enlatadora tienen una distribución normal con media $\mu = 4{,}62$ pulgadas y desviación estándar $\sigma = 0{,}23$ pulgadas.
X: longitudes de las sardinas.
Notación: $X \sim N(4{,}62, 0{,}23^2)$

- **a)** ¿Qué porcentaje de todas estas sardinas son mayores de 5 pulgadas?

  Notación normal estándar: $Z \sim N(0,1)$

$$
\begin{aligned}
P(X > 5) &= 1 - P(X \leq 5) && \text{Estandarización} \\
&= 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{5-4{,}62}{0{,}23}\right) \\
&= 1 - P\left(Z \leq \frac{5-4{,}62}{0{,}23}\right) && , Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \\
&= 1 - P(Z \leq 1{,}65) \\
&= 1 - 0{,}9505 \\
&= 0{,}0495
\end{aligned}
$$

  Respuesta: Por lo tanto, el 4,95 % de las sardinas son mayores a 5 pulgadas.

- **b)** ¿Qué porcentaje de las sardinas miden entre 4.35 y 4.85 pulgadas?

$$
\begin{aligned}
P(4{,}35 \leq X \leq 4{,}85) &= P\left(\frac{4{,}35-4{,}62}{0{,}23} \leq Z \leq \frac{4{,}85-4{,}62}{0{,}23}\right) \\
&= P(-1{,}17 \leq Z \leq 1{,}00) \\
&= P(Z \leq 1{,}00) - P(Z \leq -1{,}17) \\
&= 0{,}8413 - 0{,}1210 \\
&= 0{,}7203
\end{aligned}
$$

  Respuesta: Por lo tanto, el 72,03 % de las sardinas miden entre 4.35 y 4.85 pulgadas.

- **c)** ¿Qué porcentaje de las sardinas miden como máximo 4.62 pulgadas?

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 4{,}62) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{4{,}62-4{,}62}{0{,}23}\right) \\
&= P(Z \leq 0) \\
&= 0{,}5000
\end{aligned}
$$

  Respuesta: Por lo tanto, el 50 % de las sardinas miden como máximo 4.62 pulgadas.

Ejercicio 2

Dos estudiantes fueron informados de sus puntajes estandarizados en un examen de inglés, y corresponden a 0,8 y $-0{,}4$, respectivamente. Si sus puntuaciones fueron 88 y 64, respectivamente, ¿cuál fue el promedio y la desviación estándar del examen de inglés?

X: puntajes en el examen de inglés.
Notación: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
Recordemos:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

Para el primer estudiante:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{X-\mu}{\sigma} \\ 0{,}8 &= \frac{88-\mu}{\sigma} && \text{Remplazando} \\ 0{,}8\sigma &= 88-\mu \\ \sigma &= \frac{88-\mu}{0{,}8} \end{aligned}$$

Para el segundo estudiante:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{X-\mu}{\sigma} \\ -0{,}4 &= \frac{64-\mu}{\sigma} && \text{Remplazando} \\ -0{,}4\sigma &= 64-\mu \\ \sigma &= \frac{64-\mu}{-0{,}4} \end{aligned}$$

Igualando ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{88-\mu}{0{,}8} &= \frac{64-\mu}{-0{,}4} \\ -0{,}4(88-\mu) &= 0{,}8(64-\mu) \\ -35{,}2+0{,}4\mu &= 51{,}2-0{,}8\mu \\ 0{,}4\mu+0{,}8\mu &= 51{,}2+35{,}2 \\ 1{,}2\mu &= 86{,}4 \\ \mu &= \frac{86{,}4}{1{,}2} \\ \mu &= 72 \end{aligned}$$

Remplazando en la ecuación del primer estudiante:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{88-72}{0{,}8} \\ \sigma &= \frac{16}{0{,}8} \\ \sigma &= 20 \end{aligned}$$

Respuesta: Asi, $\mu = 72$ y $\sigma = 20$
Notación: $X \sim N(72, 20^2)$

Ejercicio 3

En una industria alimenticia se envasa café instantáneo en frascos cuyos pesos netos tienen una distribución normal con desviación estándar de 5.5 gramos. Si el 5 % de los frascos pesa a lo menos 139 gramos, ¿cuál es el promedio de ellos?

X: pesos netos de los frascos.

Notación: $X \sim N(\mu, 5{,}5^2)$

$$\begin{aligned}
P(X \geq 139) &= 0{,}05 \\
P\left(\frac{X-\mu}{5{,}5} \geq \frac{139-\mu}{5{,}5}\right) &= 0{,}05 \\
P\left(Z \geq \frac{139-\mu}{5{,}5}\right) &= 0{,}05 \qquad , Z = \frac{X-\mu}{5{,}5} \\
1 - P\left(Z \leq \frac{139-\mu}{5{,}5}\right) &= 0{,}05 \\
P\left(Z \leq \frac{139-\mu}{5{,}5}\right) &= 0{,}95 \\
\frac{139-\mu}{5{,}5} &= 1{,}65 \\
139 - \mu &= 9{,}075 \\
\mu &= 129{,}925
\end{aligned}$$

Respuesta: Por lo tanto, el promedio de los frascos es de 129.925 gramos.

Ejercicio 4

Las alturas de los naranjos están distribuidos en forma normal. Se sabe que un 2.28 % miden más de 14pies y un 84.13 % menos de 12 pies. Determine la altura media de los naranjos y la desviación estándar de los naranjos.

X: alturas de los naranjos.

Notación: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Sabemos que:

$$P(X > 14) = 0{,}0228$$
$$P(X < 12) = 0{,}8413$$

Resolviendo $P(X > 14)$:

$$\begin{aligned}
P(X > 14) &= 0{,}0228 \\
P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{14-\mu}{\sigma}\right) &= 0{,}0228 \\
P\left(Z > \frac{14-\mu}{\sigma}\right) &= 0{,}0228 && , Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \\
1 - P\left(Z \leq \frac{14-\mu}{\sigma}\right) &= 0{,}0228 \\
P\left(Z \leq \frac{14-\mu}{\sigma}\right) &= 0{,}9772 \\
\frac{14-\mu}{\sigma} &= 2 \\
14 - \mu &= 2\sigma && \text{Despejando } \mu \\
\mu &= 14 - 2\sigma
\end{aligned}$$

Resolviendo $P(X < 12)$:

$$\begin{aligned}
P(X < 12) &= 0{,}8413 \\
P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{12-\mu}{\sigma}\right) &= 0{,}8413 \\
P\left(Z < \frac{12-\mu}{\sigma}\right) &= 0{,}8413 && , Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \\
\frac{12-\mu}{\sigma} &= 1 \\
12 - \mu &= \sigma && \text{Despejando } \mu \\
\mu &= 12 - \sigma
\end{aligned}$$

Igualando ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned}14 - 2\sigma &= 12 - \sigma \\ 2\sigma - \sigma &= 14 - 12 \\ \sigma &= 2\end{aligned}$$

Remplazando en la ecuación de $P(X > 14)$:

$$\begin{aligned}\mu &= 14 - 2\sigma \\ \mu &= 14 - 2(2) \\ \mu &= 14 - 4 \\ \mu &= 10\end{aligned}$$

Respuesta: Por lo tanto, la altura media de los naranjos es de 10 pies y la desviación estándar de los naranjos es de 2 pies.

Ejercicio 5

El tiempo de trabajo (en horas) que emplean los ejecutivos de ciertas empresas sigue una distribución normal con media $\mu = 8$ y desviación estándar $\sigma = 4$.

- **a)** ¿Qué porcentaje de estos ejecutivos trabaja más de 7 horas?

$$\begin{aligned}P(X > 7) &= 1 - P(X \leq 7) && \text{Estandarización} \\ &= 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{7-8}{4}\right) \\ &= 1 - P\left(Z \leq \frac{7-8}{4}\right) && , Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \\ &= 1 - P(Z \leq -0{,}25) \\ &= 1 - 0{,}4013 \\ &= 0{,}5987\end{aligned}$$

Respuesta: Por lo tanto, el 59,87 % de los ejecutivos trabaja más de 7 horas.

- **b)** ¿Si el 20 % de los ejecutivos trabajan menos de x_0 horas. Encuentre x_0.

$$\begin{aligned}P(X < x_0) &= 0{,}20 \\ P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x_0-\mu}{\sigma}\right) &= 0{,}20 \\ P\left(Z < \frac{x_0-\mu}{\sigma}\right) &= 0{,}20 && , Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \\ \frac{x_0-\mu}{\sigma} &= -0{,}84 \\ x_0 &= -0{,}84\sigma + \mu \\ x_0 &= -0{,}84(4) + 8 \\ x_0 &= 4{,}64\end{aligned}$$

Respuesta: Por lo tanto, $x_0 = 4{,}64$.

- **c)** ¿Cuál es la probabilidad de que un ejecutivo cualquiera trabaje entre 3 y 6 horas diarias?

$$\begin{aligned}
P(3 \leq X \leq 6) &= P\left(\frac{3-8}{4} \leq Z \leq \frac{6-8}{4}\right) \\
&= P(-1{,}25 \leq Z \leq -0{,}5) \\
&= P(Z \leq -0{,}5) - P(Z \leq -1{,}25) \\
&= 0{,}3085 - 0{,}1056 \\
&= 0{,}2029
\end{aligned}$$

  Respuesta: Por lo tanto, la probabilidad de que un ejecutivo cualquiera trabaje entre 3 y 6 horas diarias es de 20,29 %.

- **d)** La cantidad de tiempo que dedica un ejecutivo a realizar tareas propias de sus subalternos, también sigue una distribución normal con media $\mu = 2{,}4$ horas. Determine la desviación estándar,σ, de este tiempo, si se sabe que el 10 % de los ejecutivos gasta más de 3.5 horas en tareas de este tipo.

$$\begin{aligned}
P(X > 3{,}5) &= 0{,}10 \\
P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{3{,}5-\mu}{\sigma}\right) &= 0{,}10 \\
P\left(Z > \frac{3{,}5-\mu}{\sigma}\right) &= 0{,}10 && , Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \\
1 - P\left(Z \leq \frac{3{,}5-\mu}{\sigma}\right) &= 0{,}10 \\
P\left(Z \leq \frac{3{,}5-\mu}{\sigma}\right) &= 0{,}90 \\
\frac{3{,}5-\mu}{\sigma} &= 1{,}28 \\
3{,}5-\mu &= 1{,}28\sigma \\
\sigma &= \frac{3{,}5-\mu}{1{,}28} && \text{Remplazando} \\
\sigma &= \frac{3{,}5-2{,}4}{1{,}28} \\
\sigma &= \frac{1{,}1}{1{,}28} \\
\sigma &= 0{,}8594
\end{aligned}$$

  Respuesta: Por lo tanto, la desviación estándar es de 0.8594 horas.