Roteiro de aulas - Somatório

Disciplina: *Probabilidade e Estatística*

Professor: André Oliveira

15 de setembro de 2025

Somatório

Algumas ferramentas utilizadas no estudo de **Estatística** provêm de diversas áreas da **Matemática.** Entre as mais essenciais estão a **probabilidade**, os **somatórios**, as **integrais** e a **álgebra linear**, além de outros conceitos fundamentais que permitem modelar, analisar e interpretar dados de maneira rigorosa. Neste tópico da disciplina estudaremos alguns conceitos básicos de **somatório**.

Em muitos métodos de Estatística e inferência Estatística é frequentemente necessário calcular a soma de um conjunto de números observados que compõe uma **amostra**. Para representar estas somas se utiliza a letra grega maiúscula **sigma** que representa um somatório (letra grega maiúscula sigma é Σ). É uma notação **compacta** e **formal** para expressar a operação soma sobre conjuntos de dados de uma amostra de n observações quantitativa.

Considere os valores observados do número de SSDs vendidos por dia durante 7 dias em uma loja. Assim os valores observados (amostra) foram: X = (5, 6, 2, 9, 8, 2, 5). Esta mostra tem $n = 7$ elementos, e, cada elemento que compõe a amostra, tem uma **posição** que é indicado pelo **índice** i. Na amostra citada o primeiro elemento é 5 e será indicado por x_1, o segundo elemento é 6 e será indicado por x_2.

Para esta amostra anterior tem que $x_1 = 5$, $x_2 = 6$, $x_3 = 2$, $x_4 = 9$, $x_5 = 8$, $x_6 = 2$, $x_7 = 5$. A **soma** deste elementos é indicada por $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$.

Soma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 5 + 6 + 2 + 9 + 8 + 2 + 5 = 37$, ou seja, a soma das vendas durante os 7 dias totalizou 37 *SSDs*.

Entretanto esta **soma** de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$ pode ser escrita na forma **compacta** na linguagem de um somatório $\sum_{i=1}^{7} = 37$.

Em que $\overbrace{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7}^{\textit{Linguagem de soma expandida}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{7} X_i}_{\textit{Linguagem de soma compacta}}$.

A organização dos elementos de uma amostra em ordem crescente ou decrescente é denominada *(ROL)*. No caso da amostra acima o *ROL* é $X_{(i)} = (2,2,5,5,6,8,9)$ em que $x_{(1)} = 2$, $x_{(2)} = 2$, $x_{(3)} = 5$, $x_{(4)} = 5$, $x_{(5)} = 6$, $x_{(6)} = 8$, $x_{(7)} = 9$. Observe que há diferenciação na notação nos índices.

- X refere a uma variável;
- x_i refere a um valor particular da amostra da variável X na i-ésima posição.
  - o valor particular do elemento que ocupa a 4ª posição da amostra é indicado por x_4;
  - o elemento que ocupa a 4ª posição do ROL é indicado por $x_{(4)}$.

Considere a variável X na qual obteve-se uma amostra de n valores $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ assim a soma $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ é uma soma expandida e esta soma pode ser representada por:

$$\overbrace{x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots+x_n}^{\textit{Forma de soma expandida}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i}_{\textit{Notação compacta em forma de somatório}} .$$

A leitura de $\sum_{i=1}^{n} X_i$ é: Somatório de X_i com i variando de 1 até n.

Algumas das principais representações de soma para uso em Estatística:

- $\sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ - Soma simples (SS)
- $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ - Soma de quadrados (SQ)
- $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^2$ - Quadrado de uma soma (QS)
- $\sum_{i=1}^{n}(X_i.Y_i) = (X_1.Y_1) + (X_2.Y_2) + \cdots + (X_n.Y_n)$ - Soma de produtos (SP)
- $\sum_{i=1}^{n} X_i. \sum_{i=1}^{n} Y_i = (X_1+X_2+\cdots+X_n).(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n)$ - Produto de somas (PS)

Propriedades importantes sobre somatórios

- $\sum_{i=1}^{n} k = n.k$, em que k é uma constante pertencente ao conjunto dos números reais.
- $\sum_{i=1}^{n} k.X_i = k.\sum_{i=1}^{n} X_i$, em que k é uma constante pertencente ao conjunto dos números reais.
- $\sum_{i=1}^{n}(k.X_i+p) = k.\sum_{i=1}^{n} X_i+n.p$, em que k e p são constates pertencentes ao conjunto do números reais.
- $\sum_{i=1}^{n}(X_i + Y_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Exemplo 01

Considere os valores observados do número de SSDs vendidos por dia durante 7 dias em uma loja. Assim os valores observados (amostra) foram: X = (5, 6, 2, 9, 8, 2, 5). Calcule a cada soma abaixo.

a) SS

b) SQ

c) QS

Resolução

a) $SS = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 5+6+2+9+8+2+5 = 37,00$

b) $SQ = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 = 5^2+6^2+2^2+9^2+8^2+2^2+5^2 = 239,00$

c) $QS = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = (X_1+X_2+\cdots+X_n)^2 = (5+6+2+9+8+2+5)^2 = 37^2 = 1369,00$

Exemplo 02

Considere as variáveis número de SSDs (X) vendidos e número de placas de vídeo (Y) vendidas pela loja $TECINF$ em seis dias.

X={50, 95, 97, 98, 80, 60}

Y={60, 90, 95, 96, 90, 75}

Calcule cada soma solicitada.
a) SP
b) PS

Solução

a) $SP = \sum_{i=1}^{n}(X_i.Y_i) = (X_1.Y_1) + (X_2.Y_2) + \cdots + (X_n.Y_n) = 50.60 + 95.90 + 97.95 + 98.96 + 80.90 + 60.75 = 3000 + 8550 + 9215 = 9408 + 7200 + 4500 = 41873,00$

b) $PS = \sum_{i=1}^{n} X_i . \sum_{i=1}^{n} Y_i = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n).(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n) = (50 + 95 + 97 + 98 + 80 + 60).(60 + 90 + 95 + 96 + 90 + 75) = 480.506 = 242880,00$

As quantidades SS, SQ, SP e PS são utilizadas em modelos de regressão linear, correlação linear, entre vários outros métodos estatísticos.

Exercícios de fixação

1) Considere uma amostra do número de filhos de 10 famílias de um bairro. Sendo a variável Y assumindo os valores da amostra: Y = {5, 2, 3, 0, 1, 2, 6, 9, 4, 8}. Calcule os somatórios abaixo.

a) $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ $(R:.\ 40,00)$

b) $\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ $(R:.\ 240,00)$

c) $\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2}{n}$ $(R:.\ 80,00)$

2) Considere uma amostra da temperatura do um processador medido em alguns dias: X = {21, 25, 20, 23}. Calcule os somatórios indicados.

a) $\sum_{i=1}^{n} 2.X_i$ $(R:.\ 178,00)$

b) $\sum_{i=1}^{n} (4.X_i + 3)$ $(R:.\ 368,00)$