Roteiro de aulas - Teste de hipóteses para Variâncias

Disciplina: *Probabilidade e Estatística*

Professor: André Oliveira

28 de outubro de 2025

Teste de Hipóteses (TH)

Os ***testes*** de hipóteses fazem parte de um conjunto de procedimentos ***inferenciais*** usados em estatística. O uso de tais procedimentos permite ao pesquisador fazer inferências a respeito de uma população a partir de uma ou mais amostras representativas da população da qual as amostras foram retiradas.

No dia a dia usamos de inferência para tomarmos ***decisões***. Por exemplo, quando vamos à feira para comprar abacaxi e um feirante nos oferece um pedaço de abacaxi. Qual o nosso procedimento? Se aquele pedaço de abacaxi for doce, concluí-se que todo o lote de abacaxi vendido por aquele feirante é doce. Por outro lado, se o pedaço for azedo, inferimos que todo o lote é azedo. É lógico que podemos tomar decisões erradas devido à amostragem. Por exemplo, corremos o risco de levar abacaxi azedo para casa, mesmo que a nossa prova tenha sido doce. Isto pode acontecer porque o lote de abacaxi pode não ser completamente uniforme no teor de açúcar, ou porque experimentamos um abacaxi doce no meio de um lote composto por abacaxis azedos. Este é um exemplo prático que ilustra o princípio básico do teste de hipóteses. Porém, em ciência é necessário que todos os procedimentos sejam padronizados e bem especificados.

O objetivo aqui é fornecer os conceitos teóricos fundamentais para um correto uso dos ***testes de hipóteses***. Serão abordados alguns dos testes de hipóteses mais comuns para comparar no máximo parâmetros de duas populações. Outros testes de hipóteses aplicáveis para comparações de ***parâmetros*** envolvendo mais de duas ***populações***.

Um ***teste de hipóteses***, procura-se tomar decisões a respeito de uma população com base em informações obtidas de amostras desta mesma população. Teste de hipóteses é uma regra de decisão que consiste em aceitar ou rejeitar , baseada em dados amostrais.

Hipóteses em um teste estatístico

Para realizar um teste de hipóteses e divulgar as conclusões é necessário seguir um procedimento aceito pela comunidade científica. Neste procedimento, o pesquisador deve deixar claro qual a ***hipótese*** que ele deseja testar. Para isto ele precisa escrever em termos estatísticos a sua hipótese científica. A hipótese científica do pesquisador, nada mais é o que o levou a realizar a sua investigação. Hipótese estatística é uma suposição que se faz, a partir de uma amostra, sobre um parâmetro populacional. Em um teste são dois tipos de hipóteses.

Hipóteses: Estabelecem as crenças (afirmações) a serem testadas. São definidas a partir do conhecimento do problema.

A hipótese a ser testada é H_o e é lançada com propósito de ser rejeitada. A hipótese H_a é contrária a hipótese H_o e é formulada com base no conhecimento prévio do problema, informações de pesquisa, etc.

$$\begin{cases} H_o : \textit{Hipótese de nulidade} \\ H_a : \textit{Hipótese alternativa} \end{cases}$$

Exemplo 01

Em um estudo sobre o tempo ***médio*** até que os ***SSDs*** da marca ***TECBYT*** apresentem o primeiro erro de leitura, deseja-se estimar esse tempo a partir de uma amostra de unidades testadas e verificar se é ***diferente*** de 10 anos.

Hipóteses

$$\begin{cases} H_o : \mu = \ 10 \ anos \\ H_a : \mu \neq 10 \ anos \text{ (Hipótese bilateral)} \end{cases}$$

Exemplo 02

Em um estudo sobre o tempo ***médio*** até que os ***SSDs*** da marca ***TECBYT*** apresentem o primeiro erro de leitura, deseja-se estimar esse tempo a partir de uma amostra de unidades testadas e verificar se é ***maior*** que 10 anos.

Hipóteses

$$\begin{cases} H_o : \mu = 10 \ anos \\ H_a : \mu > \ 10 \ anos \text{ (Hipótese unilateral à direita)} \end{cases}$$

Exemplo 03

Em um estudo sobre o tempo ***médio*** até que os ***SSDs*** da marca ***TECBYT*** apresentem o primeiro erro de leitura, deseja-se estimar esse tempo a partir de uma amostra de unidades testadas e verificar se é ***menor*** que 10 anos.

Hipóteses

$$\begin{cases} H_o : \mu = 10\ anos \\ H_a : \mu < \ 10\ anos \text{ (Hipótese unilateral à esquerda)} \end{cases}$$

Observe que apesar de ser possível existir três possibilidades para H_a, apenas uma possibilidade foi lançada. Outro ponto importante é que as hipóteses foram lançadas em termos dos parâmetros e não em termos dos seus estimadores. Não faz sentido lançar as hipóteses usando os estimadores, pois os mesmos não possuem um valor fixo, ou seja, apresentam valores diferentes para amostras diferentes, enquanto que o parâmetro possui um valor fixo.

Na verdade, quando um pesquisador realiza um experimento, a hipótese de nulidade é construída com o expresso propósito de ser rejeitada. Isto faz sentido porque, quem teria o trabalho de realizar um experimento se achasse que duas médias são iguais? Qualquer um se daria ao trabalho de instalar um experimento, apenas se desconfiar que existe diferença significativa entre as médias de duas populações. No entanto, num teste de hipóteses, até que se prove o contrário, a H_o é considerada como a hipótese verdadeira.

Procedimento para a realização de um teste de hipóteses

- Identifique o parâmetro de interesse a partir do problema;
- Especifique (enunciar) a hipótese nula H_o e a hipótese alternativa H_a;
- Escola um nível de significância α, e identificar a distribuição associada ao teste $(Z,\ T,\ F,\ \chi^2)$;
- Determine a estatística de teste baseada na amostra:
  - $Z_{cal} = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
  - $t_{cal} = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$
  - $F_{calc} = \dfrac{S_{max}}{S_{min}}$
  - $\chi^2_{cal} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$
  - etc
- Determinar as regiões de aceitação e rejeição de H_o (região crítica) baseadas na hipótese alternativa e no nível de significância α;
- Decida (conclua) se deve ou não rejeitar H_o.

Teste de hipóteses para Variâncias

Testar a hipótese de que a variância de uma determinada característica (X) de ***uma*** população é igual a um valor de interesse é feito por meio do teste ***qui-quadrado***. Já a ***homogeneidade*** de variâncias entre grupos é um pressuposto para alguns métodos estatísticos. A comparação entre as variâncias de ***duas*** populações pode ser realizada pelo ***teste F de Fisher-Snedecor***.

Teste de hipóteses para variâncias de uma população

Variâncias homogêneas é um pressuposto para muitos modelos estatísticos em análise de dados. Suponha que desejamos testar a hipótese de que a variância de uma população normal com (σ_x^2) seja igual a um valor específico (σ_o^2).

A depender do interesse do experimentador as hipóteses podem ser ***uma das três***:

$$\begin{cases} H_o : \sigma^2 = \sigma_o^2 \\ H_a : \sigma^2 \neq \sigma_o^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_o : \sigma^2 = \sigma_o^2 \\ H_a : \sigma^2 > \sigma_o^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_o : \sigma^2 = \sigma_o^2 \\ H_a : \sigma^2 < \sigma_o^2 \end{cases}$$

A estatística de teste é $\chi^2_{cal} = \dfrac{(n-1).\widehat{\sigma}^2}{\sigma_o^2}$ *em que* $\dfrac{(n-1).\widehat{\sigma}^2}{\sigma_o^2} \sim \chi^2_\nu.\ \nu = n-1$

Exemplo 01

Um empresário deseja importar uma ***liga metálica*** para fabricar equipamentos de Tecnologia da Informação. Ele só comprará a liga se a variância da dureza (em HB – *Brinell*) for igual a 180 HB^2, garantindo que a liga seja homogênea e confiável para fabricação. Para isto ele obteve uma amostra de $n = 10$ lotes da liga.

Durezas (HB): 180,200,190,210,200,220,190,200,210,180

Usando $\alpha = 5\%$ testar a hipóteses de que a variância da liga é igual 180 HB^2.

Procedimentos do teste

1) $\widehat{\mu}_{HB} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \dfrac{180 + 200 + 190 + 210 + \cdots + 210 + 180}{10} = \dfrac{1980}{10} = 198,00\ HB$

2) $\widehat{\sigma}^2_{HB} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \widehat{\mu}_x)^2}{n-1} = \dfrac{(180 - 173,33)^2 + (200 - 173,33)^2 + \cdots + (180 - 173,33)^2}{10-1} =$ $173,33\ HB^2$

Assim $\widehat{\mu}_{HB} = 198,00\ HB$ e $\widehat{\sigma}^2_{HB} = 173,33\ HB^2$

3) Hipotese é definida em função do objetivo do experimentador e neste caso é uma hipóteses ***bilateral*** $\begin{cases} H_o : \sigma^2_{HB} = 180 \ HB^2 \\ H_a : \sigma^2_{HB} \neq 180 \ HB^2 \end{cases}$

4) $\alpha = 5\%$

5) $\chi^2_{cal} = \dfrac{(n-1).\hat{\sigma}^2}{\sigma^2_o} = \dfrac{9 \times 173,33}{180} = 8,67$

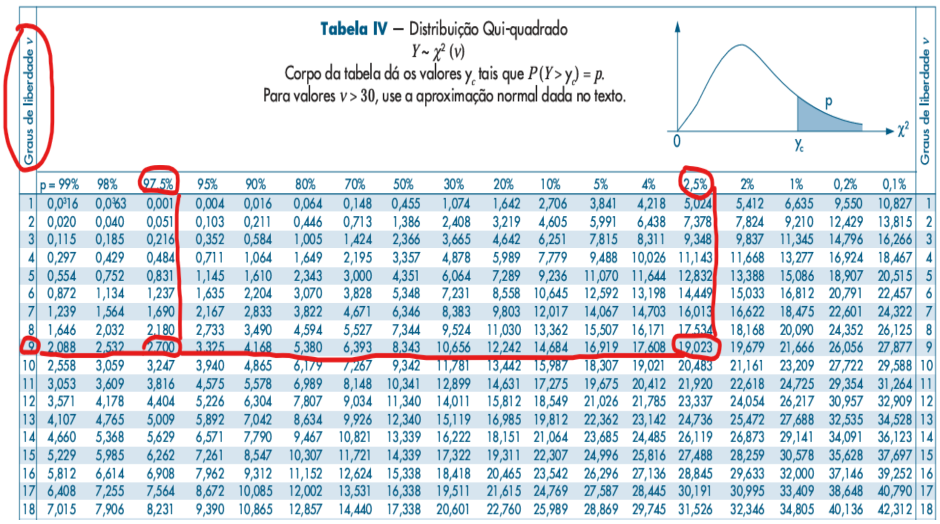


Tabela IV — Distribuição Qui-quadrado

$Y \sim \chi^2(v)$

Corpo da tabela dá os valores y_c tais que $P(Y > y_c) = p$.

Para valores $v > 30$, use a aproximação normal dada no texto.

Graus de liberdade v	p = 99%	98%	97,5%	95%	90%	80%	70%	50%	30%	20%	10%	5%	4%	2,5%	2%	1%	0,2%	0,1%	Graus de liberdade v
1	$0,0^{3}16$	$0,0^{3}63$	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	4,218	5,024	5,412	6,635	9,550	10,827	1
2	0,020	0,040	0,051	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	6,438	7,378	7,824	9,210	12,429	13,815	2
3	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	8,311	9,348	9,837	11,345	14,796	16,266	3
4	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	10,026	11,143	11,668	13,277	16,924	18,467	4
5	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	11,644	12,832	13,388	15,086	18,907	20,515	5
6	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	13,198	14,449	15,033	16,812	20,791	22,457	6
7	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	14,703	16,013	16,622	18,475	22,601	24,322	7
8	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	16,171	17,534	18,168	20,090	24,352	26,125	8
9	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	17,608	19,023	19,679	21,666	26,056	27,877	9
10	2,558	3,059	3,247	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	19,021	20,483	21,161	23,209	27,722	29,588	10
11	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	20,412	21,920	22,618	24,725	29,354	31,264	11
12	3,571	4,178	4,404	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	21,785	23,337	24,054	26,217	30,957	32,909	12
13	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	23,142	24,736	25,472	27,688	32,535	34,528	13
14	4,660	5,368	5,629	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	24,485	26,119	26,873	29,141	34,091	36,123	14
15	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	25,816	27,488	28,259	30,578	35,628	37,697	15
16	5,812	6,614	6,908	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	27,136	28,845	29,633	32,000	37,146	39,252	16
17	6,408	7,255	7,564	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	28,445	30,191	30,995	33,409	38,648	40,790	17
18	7,015	7,906	8,231	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	29,745	31,526	32,346	34,805	40,136	42,312	18

Figura 1: Fragmento da tabela de qui-quadrado para consulta

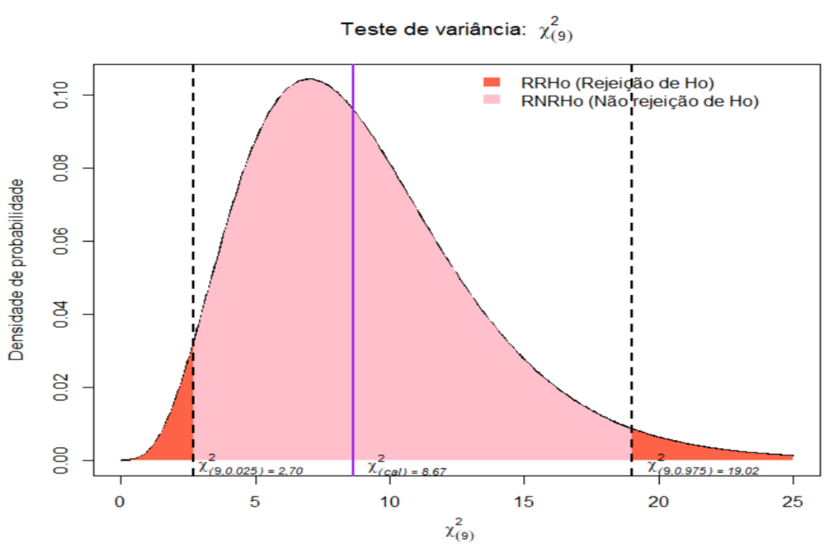


Figura 2: Regiões do Teste de Hipóteses

$RNRHo = Região\ de\ não\ Rejeição\ de\ Ho$ e $RRHo = Região\ de\ Rejeição\ de\ Ho$

Conclusão

$\chi^2_{cal} \in$ *a* $RNRHo$, a diferença observada foi ao acaso, e, assim, não rejeita Ho.

Comentários

Se o critério de compra da liga metálica é que a variabilidade seja estatísticamente 180 HB^2, pelo teste de qui-quadrado conclui-se o empresário pode importar uma liga metálica, pois a variabilidade não difere de 180 HB^2.

Teste de hipóteses para variâncias de duas população

A comparação entre variâncias de duas populações pode ser feita pelo *teste F de Fisher-Snedecor*.

A estatística de teste é $F_{cal} = \dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \sim F_{(n_A-1, n_A-1)}$ e $F_{cal} = \dfrac{Maior\ valor\ entre\ (\sigma_A^2, \sigma_B^2)}{Menor\ valor\ entre\ (\sigma_A^2, \sigma_B^2)}$

As hipóteses são

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \\ H_a : \sigma_A^2 > \sigma_B^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} H_0 : \text{As variâncias são homogêneas} \\ H_a : \text{As variâncias não são homogêneas} \end{cases}$$

Para comparar duas variâncias usa-se o teste de F e duas ou mais variâncias pode usar os testes de homogeneidade de variância *Bartlett*, *Levene*, *Cochran* entre outros.

Exemplo 01

Uma construtora recebe tubos de aço de dois fabricantes diferentes. Para avaliar se há diferenças entre as variâncias da densidade dos tubos (D), medida em kg/m, produzidos pelos 2 fornecedores (A e B), uma amostra de 10 tubos de cada fornecedor foi selecionada e as densidades dos tubos medidas. Os resultados obtidos foram:

Amostra dos tubos A : $7, 707, 807, 908, 107, 808, 108, 007, 907, 808, 00$

Amostra dos tubos B : $7, 908, 108, 007, 807, 707, 908, 108, 008, 008, 10$

Os valores observados nas 2 amostras indicam que as variâncias das densidades dos tubos produzidos pelos 2 fabricantes são diferentes? Usando $\alpha = 5\%$ teste a hipótese pelo *teste F de Fisher-Snedecor*.

Por meio dos estimadores obtem-se a ***Tabela auxiliar***

$$\widehat{\sigma}^2_{_D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \widehat{\mu}_x)^2}{n-1} \text{ e } \widehat{\mu}_{_D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

As hipóteses são

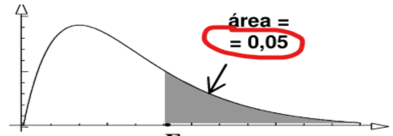
$$\begin{cases} H_o : \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \\ H_a : \sigma_A^2 > \sigma_B^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} H_o : \text{As variâncias são homogêneas} \\ H_a : \text{As variâncias não são homogêneas} \end{cases}$$

Assim $F_{cal} = \dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = \dfrac{0,019}{0,018} = 1,05; \quad F_{(n_A-1,\ n_A-1)} = F_{(9,\ 9,\ 5\%)} = 3,18$

Tabela auxiliar

Estatísticas	**A**	**B**
n	10	10
$\widehat{\mu}$	7,910	7,960
$\widehat{\sigma}^2$	0,019	0,018

TABELA VI Distribuição F de Snedecor $\alpha = 0,05$



gl denom.	graus de liberdade no numerador									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54

Figura 3: Fragmento da tabela de F de Fisher-Snedecor para consulta

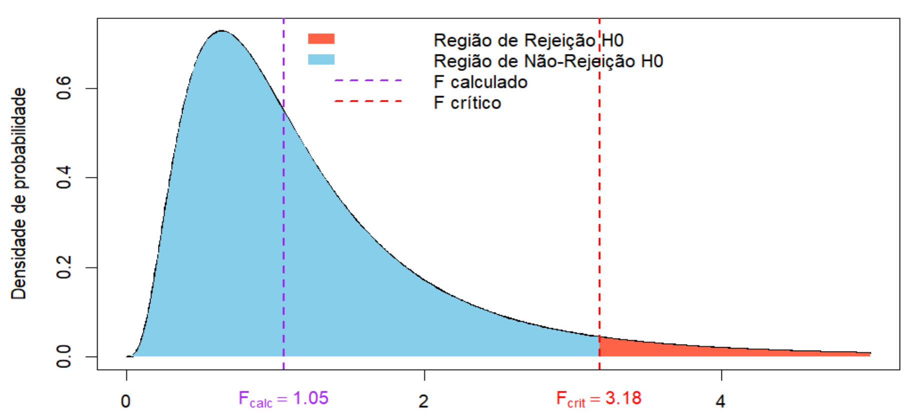


Figura 4: Regiões do Teste de Hipóteses

Conclusão

$\chi^2_{cal} \in$ $a\ RNRHo$, a diferença observada foi ao acaso, e, assim, não rejeita Ho.

A densidade dos dois fabricantes de tubos tem a mesma variabilidade pelo teste F a 5%.

$RNRHo = Região\ de\ não\ Rejeição\ de\ Ho$ e $RRHo = Região\ de\ Rejeição\ de\ Ho$

Comentários

No que tange ao critério de compra dos tubos, considerando a menor variabilidade da densidade, pelo teste F conclui-se que não há diferença significativa entre os fabricantes, ou seja, eles são homogêneos em relação à variabilidade. Assim, pode-se optar pelo fornecedor de menor custo, entre A e B, por exemplo.

Referências

[1] DEVORE, Jay L. *Probabilidade e Estatística para Engenharia e Ciências*. Tradução da 9ª edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning Brasil, 2018.

[2] FERREIRA, D. F. *Estatística Básica*. 2. ed. Lavras: Ed. UFLA, 2009.

[3] FERREIRA, Daniel Furtado. *Fundamentos de Probabilidade*. Lavras: Editora UFLA, 2020.

[4] MAGALHÃES, M. N. *Probabilidade e Variáveis Aleatórias*. 2ª ed. São Paulo: Edusp, 2006.

[5] MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. *Noções de Probabilidade e Estatística*. 6ª ed. São Paulo: USP, 2006.

[6] MEYER, Paul L. *Probabilidade: Aplicações à Estatística*. Rio de Janeiro: Grupo GEN, 2010.

[7] MORETTIN, Luiz Gonzaga. *Estatística Básica: Probabilidade e Inferência*. São Paulo: Pearson, 2010.

[8] MORETTIN, Pedro A. *Estatística Básica*. Rio de Janeiro: Grupo GEN, 2023.

INSTITUTO FEDERAL
Espírito Santo
Campus de Alegre

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

TADS
Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de Sistemas

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo - Ifes