Roteiro de aulas - Distribuição de Probabilidade

Disciplina: *Probabilidade e Estatística*

Professor: André Oliveira

06 de outubro de 2025

Variável aleatória

Uma quantidade X, associada a cada possível resultado do espaço amostral, é denominada **variável aleatória discreta** ($V.A.D.$), quando assume valores em um conjunto finito ou enumerável, cada um com uma probabilidade bem definida. Por outro lado, X é denominada **variável aleatória contínua** ($V.A.C.$), quando o seu conjunto de valores possíveis corresponde a um intervalo (ou união de intervalos) de números reais, o que constitui um conjunto não enumerável. As variáveis aleatórias podem ser **discretas** ou **contínuas.**

Uma variável aleatória **discreta** assume valores que podem ser contados. Em outras palavras, os valores consecutivos de uma variável aleatória discreta são separados por uma determinada lacuna. As variáveis aleatórias podem ser discretas ou contínuas. Dizemos que uma variável aleatória X é discreta se toma um número finito ou enumerável de valores. Por outro lado, a variável aleatória X será **contínua** se assume valores em um intervalo de números reais. Uma função que associa, a cada ponto pertencente a um espaço amostral , um único número real é uma função de probabilidade ($f.p$) para uma variável aleatória X é discreta e uma ($f.d.p$) para uma variável aleatória contínua.

- Número de cliques em um anúncio digital durante o intervalo de um dia.
  $X = (0, 1, 2, 3, \dots)$ → **Variável aleatória discreta.**
- Número de tentativas até o sucesso na autenticação de um usuário.
  $X = (0, 1, 2, 3, \dots)$ → **Variável aleatória discreta.**
- Quantidade de dados transmitidos por segundo (em $Mbps$).
  $X \in [0, \infty)$ → **Variável aleatória contínua.**
- Tempo de resposta de um servidor.
  $X \in [0, \infty)$ → **Variável aleatória contínua.**

Considerando uma variável aleatória **discreta** X na qual cada ponto amostral é associado uma probalilidade. Uma função de probabilidade ($f.p$) só será considerada uma função de probabilidade se:

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x) = 1,00$$

$$0 \leq P(X = x) \leq 1$$

Considerando uma variável aleatória **contínua** Y na qual cada Y é associado a uma densidade de probalilidade. Uma função só será considerada uma **função densidade de probabilidade(f.d.p)** se:

$$f(y) \geq 0;\ (-\infty; -\infty;)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\ dy = 1,00$$

Uma **função** $(f.p)$ *ou* $(f.d.p)$ que associa a cada **ponto** de um espaço amostral (Ω) de um experimento a um valor **numérico real**, possibilitando a análise **probabilística** dos pontos amostrais por meio de **distribuições de probabilidade**, esperança matemática (média), variância e entre outras medidas estatísticas.

Exemplo

Um lote de cabos de rede contém **dez** cabos de rede, dos quais **três** são defeituosos e **sete** não defeituosos. Retira-se **um único** cabo desse lote ao acaso. Considere Y a variável aleatória que representa o número de cabos com defeito da amostra.

Obtenção da tabela de distribuição de probabilidade para a variável aleatória Y.

Considerando que:

- $D = \{O\ cabo\ retirado\ foi\ com\ defeito\}$
- $B = \{O\ cabo\ retirado\ foi\ sem\ defeito\}$

Assim o espaço amostral é $\Omega = \{D;\ B\}$, neste caso a amostra tem $(n = 1)$ que foi apenas **um** cabo retirado.

A transformação do espaço amostral Ω para a variável aleatória Y pode ser observada na árvore abaixo.

$$(D) \rightarrow 1\ (um\ cabo\ com\ defeito)$$

$$(B) \rightarrow 0\ (zero\ cabo\ com\ defeito)$$

Assim fica claro que os pontos amostrais da variável aleatória Y são $Y = \{0; 1\}$

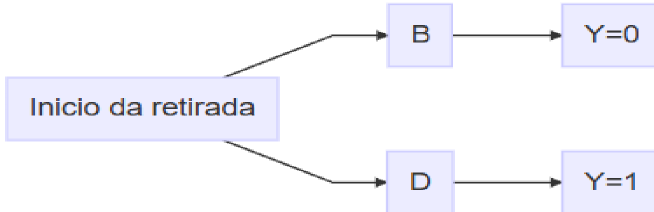


Figura 1: Árvore de possibilidades do espaço amostral

Observe que $\dfrac{3}{10}$ e $\dfrac{7}{10}$ são as frações de cabos com defeito e cabos sem defeitos respectivamente

Assim a tabela pode ser observada na árvore abaixo. Considerando que são eventos independentes:

- $P(Y = 0) = P(B) = \dfrac{7}{10}$
- $P(Y = 1) = P(D) = \dfrac{3}{10}$

Os cálculos acima podem ser observados de forma resumida no diagrama de árvore abaixo.

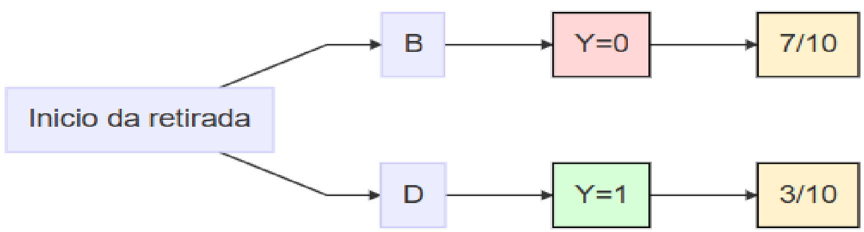


Figura 2: Árvore de possibilidades com a contagem da variável aleatória Y e suas respectivas probabilidades

Assim a **tabela de distribuição de probabilidade** para a variável aleatória Y é.

Tabela 1: Distribuição de probabilidade para a variável aleatória Y

Y_i	0	1	Total
$P(Y = y_i)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	1,00

Comentários sobre a distribuição de probabilidade

- Pelo gráfico ou pela Tabela 1 é possível observar que o ponto amostral mais provável é $P(Y = 0)$ e o ponto amostral menos provável é $P(Y = 1)$.

- $\sum_{i=1}^{2} P(Y = y_i) = 1,00$
- $0 \leq P(Y = y_i) \leq 1,$ para todo y_i.

Exemplo

Para determinado medicamento utilizado em humanos, sabe-se que a probabilidade de cura de uma certa doença é de 75%. Selecionou-se uma amostra de duas pessoas com essa doença, tratadas de forma independente durante um período de 100 dias. Ao final do tratamento, observou-se, para cada indivíduo, se houve cura ou não. Considere X a variável aleatória que representa o número de pacientes curados.

Obtenção da tabela de distribuição de probabilidade para a variável aleatória X.

Considerando que:

- $C = \{O\ paciente\ foi\ curado\}$
- $N = \{O\ paciente\ não\ foi\ curado\}$

Assim o espaço amostral é $\Omega = \{(CC);\ (CN);\ (NC);\ (NN)\}$, pois, neste caso a amostra foi de $(n = 2)$ que foram os **dois** pacientes tratados.

A transformação do espaço amostral Ω para a variável aleatória X pode ser observada na árvore abaixo.

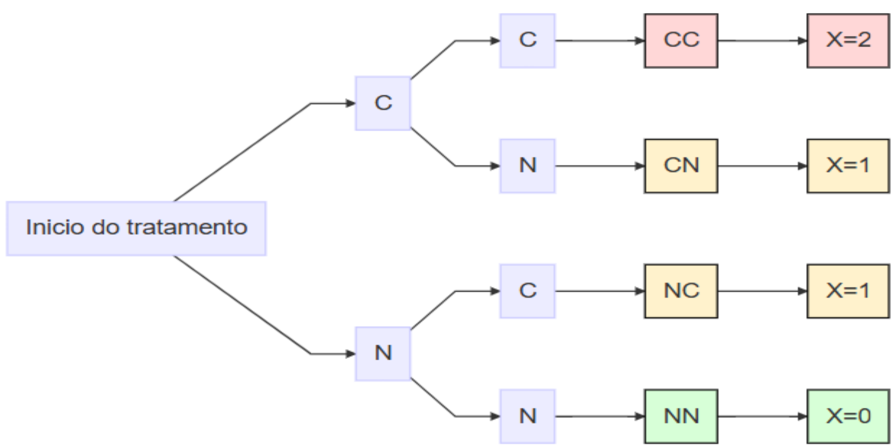


Figura 3: Árvore de possibilidades do espaço amostral e variável aleatória X

A transformação do espaço amostral Ω para a variável aleatória X acima foi por meio de contagem simples.

$$(CC) \rightarrow 2\ (dois\ pacientes\ curados)$$

$$(CN) \rightarrow 1 \ (um \ paciente \ curado)$$

$$(NC) \rightarrow 1 \ (um \ paciente \ curado)$$

$$(NN) \rightarrow 0 \ (zero \ paciente \ curado)$$

Assim fica claro que os pontos amostrais da variável aleatória X são $X = \{0; 1;\ 2\}$

Observe que $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ e que $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

Assim a tabela pode ser observada na árvore abaixo. Considerando que são eventos independentes:

- $P(X = 2) = P(C) \times P(C) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$
- $P(X = 1) = P(C) \times P(N) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$
- $P(X = 1) = P(N) \times P(C) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$
- $P(X = 0) = P(N \times P(N) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

Os cálculos acima podem ser observados de forma resumida no diagrama de árvore abaixo.

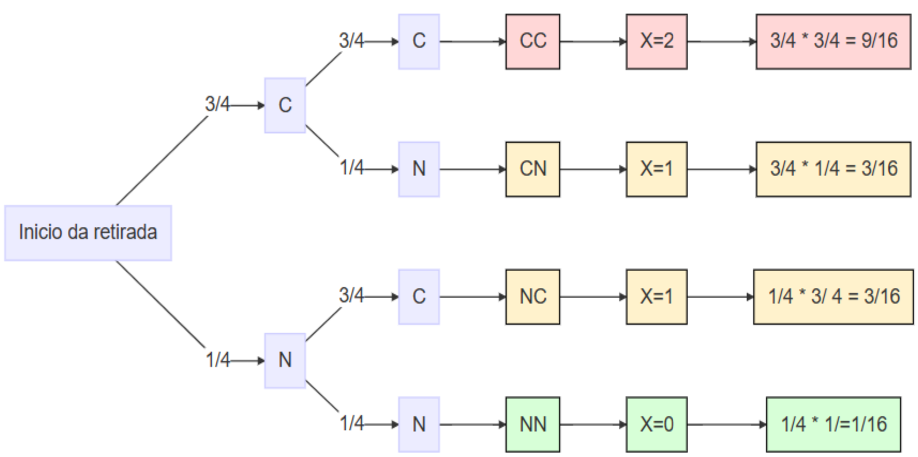


Figura 4: Árvore de possibilidades com a contagem da variável aleatória X e suas respectivas probabilidades

Assim a **tabela de distribuição de probabilidade** para a variável aleatória X é.

Tabela 01: Distribuição de probabilidade para a variável aleatória X

X_i	0	1	2	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{9}{16}$	$1,00$

A partir da **Tabela 2** acima pode ser construído o gráfico abaixo.

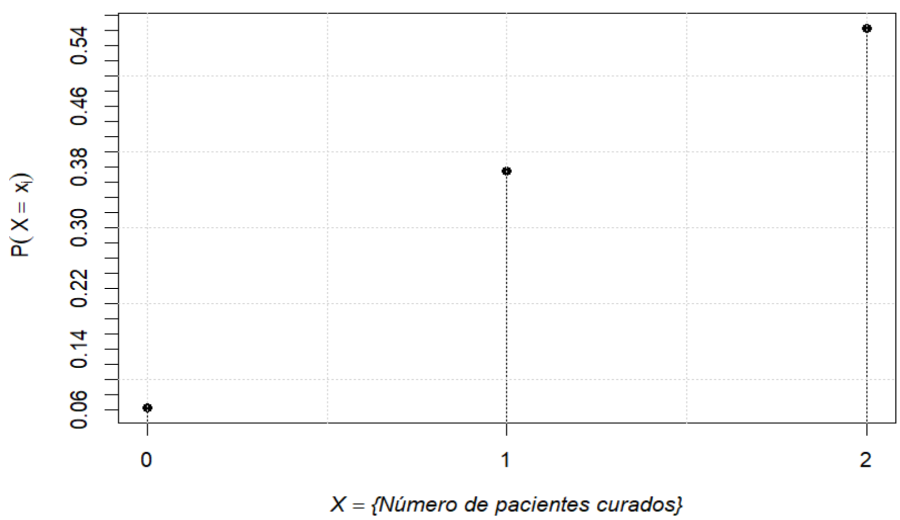


Figura 5: Gráfico distribuição de probabilidade da variável aleatória X

Comentários sobre a distribuição de probabilidade

- Pelo gráfico ou pela Tabela 2 é possível observar que o ponto amostral mais provável é $P(X = 2)$ e o ponto amostral menos provável é $P(X = 0)$. Observa-se também que tem forte evidência que a distribuição é assimétrica à esquerda (assimetria negativa).
- $\sum_{i=1}^{3} P(X = x) = 1,00$
- $0 \leq P(X = x_i) \leq 1,$ para todo x_i.

Valor esperado de uma variável aletória X

O valor esperado de uma variável aleatória discreta é dado por:

$$\mu_x = \sum_{i=1}^{n} x_i \ . \ P(X = x_i)$$

Assim o valor médio esperado é

$$\mu_x = \sum_{i=1}^{n} x_i \ . \ P(X = x_i) = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{6}{16} + 2 \times \frac{9}{16} = \frac{24}{16} = 1,500 \ \textit{pacientes curados}$$

Variância de uma variável aletória X

A variância de uma variável aleatória discreta é dada por:

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ . \ P(X = x_i) - \mu_x^2$$

$(pacientes\ curados)$ Assim o valor da variância é:

$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ . \ P(X = x_i) - \mu_x^2 = 0^2 \times \dfrac{1}{16} + 1^2 \times \dfrac{6}{16} + 2^2 \times \dfrac{9}{16} - \left(\dfrac{24}{16}\right)^2 = 0,375$ $(pacientes\ curados)^2$.

Desvio-padrão de uma variável aletória X

O desvio-padrão de uma variável aletória discreta é dado por:

$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$

Assim o valor do *desvio-padrão* é $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sigma_x = \sqrt{0,375} \approx 0,612\ pacientes\ curados$

Comentários

Assim, pode-se concluir que o número esperado de pacientes curados é de 1,500; com um *desvio-padrão* de 0,612.

Exercícios

1) Considere um lote de **cinco** cabos de rede, dos quais **dois** são defeituosos (D) e **três** são perfeitos (P). Retira-se uma amostra de **dois** cabos de rede deste lote **sem reposição** para analisar os defeituosos presentes, o número de erros em cada amostra e suas respectivas probabilidades. Considere X a variável aleatória que representa o número de cabos com defeito.

a) Construa a tabela de distribuição de probabilidade para a variável aleatória X;
b) Obtenha a média da variável aleatória X.
c) Obtenha a variância da variável aleatória X.
d) Obtenha o *desvio-padrão* da variável aleatória X.
e) Construa o gráfico da variável aleatória X;

Respostas

a)

Tabela 01: Distribuição de probabilidade para a variável aleatória X

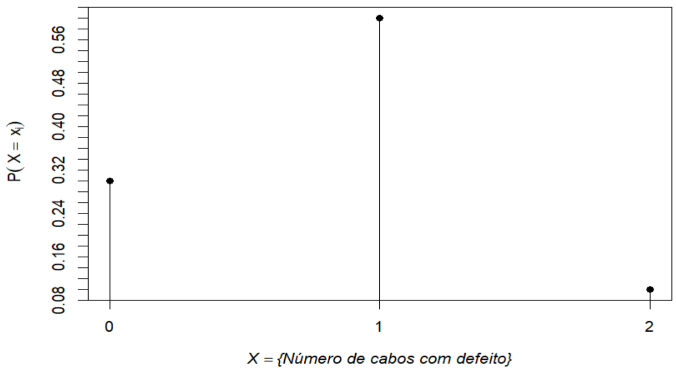
X	0	1	2	Total
$P(X = x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	$1,00$

b) $\mu_x = 0,80\ cabos\ com\ defeitos.$

c) $\sigma_x^2 = 0,48\ (cabos\ com\ defeitos)^2.$

d) $\sigma_x \approx 0,69\ cabos\ com\ defeitos.$

e)



2) Uma empresa de manutenção preventiva recebe *Desktop* com sistemas *Windows* ou *Linux* na proporção 8 : 2, ou seja, a de cada **dez** *Desktop* recebidos **oito** tem Windows e **dois** tem *Linux* como sistema operacional. Em certo dia a empresa recebeu **duas** máquinas para realizar uma manutenção preventiva. Considere variável aleatória X = {número de máquinas com sistema operacional *Windows* na amostra recebida naquele dia}.

a) Construa uma tabela de distribuição de probabilidade para a variável X;
b) Obtenha a média de X;
c) Obtenha o *desvio-padrão* X.
d) Sendo $Y = X + 2$, obtenha a média e a variância de Y.

Respostas

a)

Tabela 01: *Distribuição de probabilidade para variável X*				
X	0	1	2	Total
P(X=x)	4/100	32/100	64/100	1,00

b) $\mu_x = 1,60$ $desktop\ com\ Windows$

c) $\sigma_x^2 = 0,32$ $(desktop\ com\ Windows)^2$

d) $\mu_y = 3,60$ $desktop\ com\ Windows$ e $\sigma_y^2 = 0,32$ $(desktop\ com\ Windows)^2$

Referências

[1] DEVORE, Jay L. *Probabilidade e Estatística para Engenharia e Ciências*. Tradução da 9ª edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning Brasil, 2018.

[2] FERREIRA, D. F. *Estatística Básica*. 2. ed. Lavras: Ed. UFLA, 2009.

[3] FERREIRA, Daniel Furtado. *Fundamentos de Probabilidade*. Lavras: Editora UFLA, 2020.

[4] MAGALHÃES, M. N. *Probabilidade e Variáveis Aleatórias*. 2ª ed. São Paulo: Edusp, 2006.

[5] MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. *Noções de Probabilidade e Estatística*. 6ª ed. São Paulo: USP, 2006.

[6] MEYER, Paul L. *Probabilidade: Aplicações à Estatística*. Rio de Janeiro: Grupo GEN, 2010.

[7] MORETTIN, Luiz Gonzaga. *Estatística Básica: Probabilidade e Inferência*. São Paulo: Pearson, 2010.

[8] MORETTIN, Pedro A. *Estatística Básica*. Rio de Janeiro: Grupo GEN, 2023.