Descrição do exercício proposto

A tua empresa domina o mercado de entregas de pequenos pacotes a casas em Portugal e de momento precisa de aumentar a sua capacidade de distribuição. Para esse efeito, a empresa vai posicionar os seus centros de distribuição em posições estratégicas, com o objetivo de diminuir os custos de distribuição anuais.

Cada cidade em Portugal, caraterizada pela sua latitude e longitude, é uma potencial localização para o estabelecimento de um centro de distribuição. O custo anual de um centro de distribuição é de 25000 euros.

Em Portugal continental, a previsão do número de entregas efetuadas num ano a cada cidade é de 3 por cada 1000 habitantes (arredondado para cima). Cada entrega custa 1€ por km percorrido.

Para calcular a distância entre dois pontos será usada a Manhattan distance: a distância entre dois pontos é igual à soma da distância percorrida paralela ao meridiano de Greenwich (longitude) com a distância percorrida paralela ao equador (latitude). Considera que a Terra é uma esfera com 6371,009 km de raio.

Manhattan Distance

A Manhattan distance (D) entre dois pontos A = (x1, y1) e B = (x2, y2) é $D = |x1 - x2| + |y1 - y2|$.

A Manhattan distance vai ser escrita como a soma de duas variáveis dx e dy descritas pelas seguintes inequações:

$$\begin{cases} dx \geq x1 - x2 \\ dx \geq x2 - x1 \end{cases} \qquad \begin{cases} dy \geq y1 - y2 \\ dy \geq y2 - y1 \end{cases}$$

Como as posições das cidades são dadas em latitude e longitude, a Manhattan distance (D) daí calculada está em graus. Porque também precisamos desta em km convertemos usando:

$D = 2\pi r * \frac{\alpha}{360}$ onde α é a manhattan distance em graus e r é o raio da Terra dado.

Posicionamento de um centro de distribuição

O objetivo é posicionar apenas um centro de distribuição, minimizando os custos fixos e os custos anuais de distribuição da empresa.

Modelo Matemático

Dados:

$\mathrm{Cidades}$		Conjunto das cidades
$\mathrm{Latitude_i}$	$\mathrm{i} \in \mathrm{Cidades}$	Latitude das cidades
$\mathrm{Longitude_i}$	$\mathrm{i} \in \mathrm{Cidades}$	Longitude das cidades
$\mathrm{População_i}$	$\mathrm{i} \in \mathrm{Cidades}$	População das cidades
Raio		Raio da Terra
$\mathrm{Custo_i} = \left\lceil \frac{3 * \mathrm{pop_i}}{1000} \right\rceil$	$\mathrm{i} \in \mathrm{Cidades}$	Custo por km para servir a cidade i
$\mathrm{CustoCD} = 25000$		Custo anual do centro de distribuição

Variáveis:

X		Latitude do centro de distribuição
Y		Longitude do centro de distribuição
DX_i	$\mathrm{i} \in \mathrm{Cidades}$	Diferença absoluta de latitude entre o CD e a cidade i
DY_i	$\mathrm{i} \in \mathrm{Cidades}$	Diferença absoluta de longitude entre o CD e a cidade i
D_i	$\mathrm{i} \in \mathrm{Cidades}$	Distância entre o CD e a cidade i
CD_i	$\mathrm{i} \in \mathrm{Cidades}$	Indicador sobre se há ou não um CD na cidade i

Sujeito a:

$$DX_i \geq \frac{X - Latitude_i}{360} * 2\pi * Raio \qquad \mathrm{i} \in \mathrm{Cidades}$$

$$DX_i \geq \frac{Latitude_i - X}{360} * 2\pi * Raio \qquad \mathrm{i} \in \mathrm{Cidades}$$

$$DY_i \geq \frac{Y - Longitude_i}{360} * 2\pi * Raio \qquad \mathrm{i} \in \mathrm{Cidades}$$

$$DY_i \geq \frac{Longitude_i - Y}{360} * 2\pi * Raio \qquad \mathrm{i} \in \mathrm{Cidades}$$

$$D_i = DX_i + DY_i \qquad \mathrm{i} \in \mathrm{Cidades}$$

$$\sum_{i \in Cidades} CD_i = 1$$

$$D_i * CD_i \leq 0 \qquad \mathrm{i} \in \mathrm{Cidades}$$

$$X, Y \in \mathbb{R}$$

$$DX_i, DY_i, D_i \geq 0 \qquad \mathrm{i} \in \mathrm{Cidades}$$

$$CD_i \in \{0,1\} \qquad \mathrm{i} \in \mathrm{Cidades}$$

Objetivo:

$$Minimizar\ z = CustoCD + \sum_{i \in Cidades} Custo_i * D_i$$

Solução:

Centro de distribuição:

- Cidade: Santarém
- Latitude: 39.2333
- Longitude: -8.68333

Outras informações:

- Custo total anual: 3856574.517 € (Incluindo os 25000€ fixos)
- Cidade com maior custo anual de distribuição: Lisboa

Posicionamento de no máximo cinco centros de distribuição

O objetivo é posicionar até cinco centros de distribuição, minimizando os custos de construção dos centros de distribuição e os custos anuais de distribuição da empresa.

Modelo Matemático

Dados:

Cidades		Conjunto das cidades
Latitude_i	$i \in \text{Cidades}$	Latitude das cidades
Longitude_i	$i \in \text{Cidades}$	Longitude das cidades
População_i	$i \in \text{Cidades}$	População das cidades
Raio		Raio da Terra
$\text{Custo}_i = \left\lceil \frac{3*\text{pop}_i}{1000} \right\rceil$	$i \in \text{Cidades}$	Custo por km para servir a cidade i
$\text{CustoCD} = 25000$		Custo anual do centro de distribuição
$\text{Limite} = 5$	$i \in \text{Cidades}$	Número máximo de centros de distribuição

Variáveis:

NR		Número de centros de distribuição
DX_{ij}	$i, j \in \text{Cidades}$	Diferença absoluta de latitude entre a cidade i e a cidade j
DY_{ij}	$i, j \in \text{Cidades}$	Diferença absoluta de longitude entre a cidade i e a cidade j
D_{ij}	$i, j \in \text{Cidades}$	Distância entre a cidade i e a cidade j
CD_i	$i \in \text{Cidades}$	Indicador sobre se há ou não um CD na cidade i
S_{ij}	$i, j \in \text{Cidades}$	Indicador sobre que cidade serve qual

Sujeito a:

$$DX_{ij} \geq \frac{Latitude_j - Latitude_i}{360} * 2\pi * Raio \qquad i, j \in \text{Cidades}$$

$$DX_{ij} \geq \frac{Latitude_i - Latitude_j}{360} * 2\pi * Raio \qquad i, j \in \text{Cidades}$$

$$DY_{ij} \geq \frac{Longitude_j - Longitude_i}{360} * 2\pi * Raio \qquad i, j \in \text{Cidades}$$

$DY_{ij} \geq \frac{Longitude_i - Longitude_j}{360} * 2\pi * Raio$ i, j $\in$ Cidades

$D_{ij} = DX_{ij} + DY_{ij}$ i, j $\in$ Cidades

$\sum_{i \in Cidades} S_{ij} = 1$ j $\in$ Cidades

$\sum_{i \in Cidades} CD_i \geq 1$

$\sum_{i \in Cidades} CD_i \leq Limite$

$S_{ij} \leq CD_i$ i, j $\in$ Cidades

$NR = \sum_{i \in Cidades} CD_i$ i $\in$ Cidades

$NR \in \mathbb{N}$

$DX_i, DY_i, D_i \geq 0$ i $\in$ Cidades

$CD_i \in \{0,1\}$ i $\in$ Cidades

$S_{ij} \in \{0,1\}$ i, j $\in$ Cidades

Objetivo:

$$Minimizar\ z = \sum_{i \in Cidades} CD_i * CustoCD + \sum_{i,j \in Cidades} Custo_j * D_{ij} * S_{ij}$$

Solução:

Número de centros de distribuição: 5

Centros de distribuição:

Cidade	Latitude	Longitude
Lisboa	38.7167	-9.13333
Loule	37.1377	-8.01968
Ourem	39.6417	-8.5919
Pedroucos	41.1888	-8.58624
Sernancelhe	40.8987	-7.49342

Custo total anual: 989525.1756€
Cidade com maior custo anual de distribuição: Coimbra (Distribuição feita a partir de Ourem)