Tarea de Programación Lineal.

Nombre: Marcelo Alberto Sanchez Zaragoza

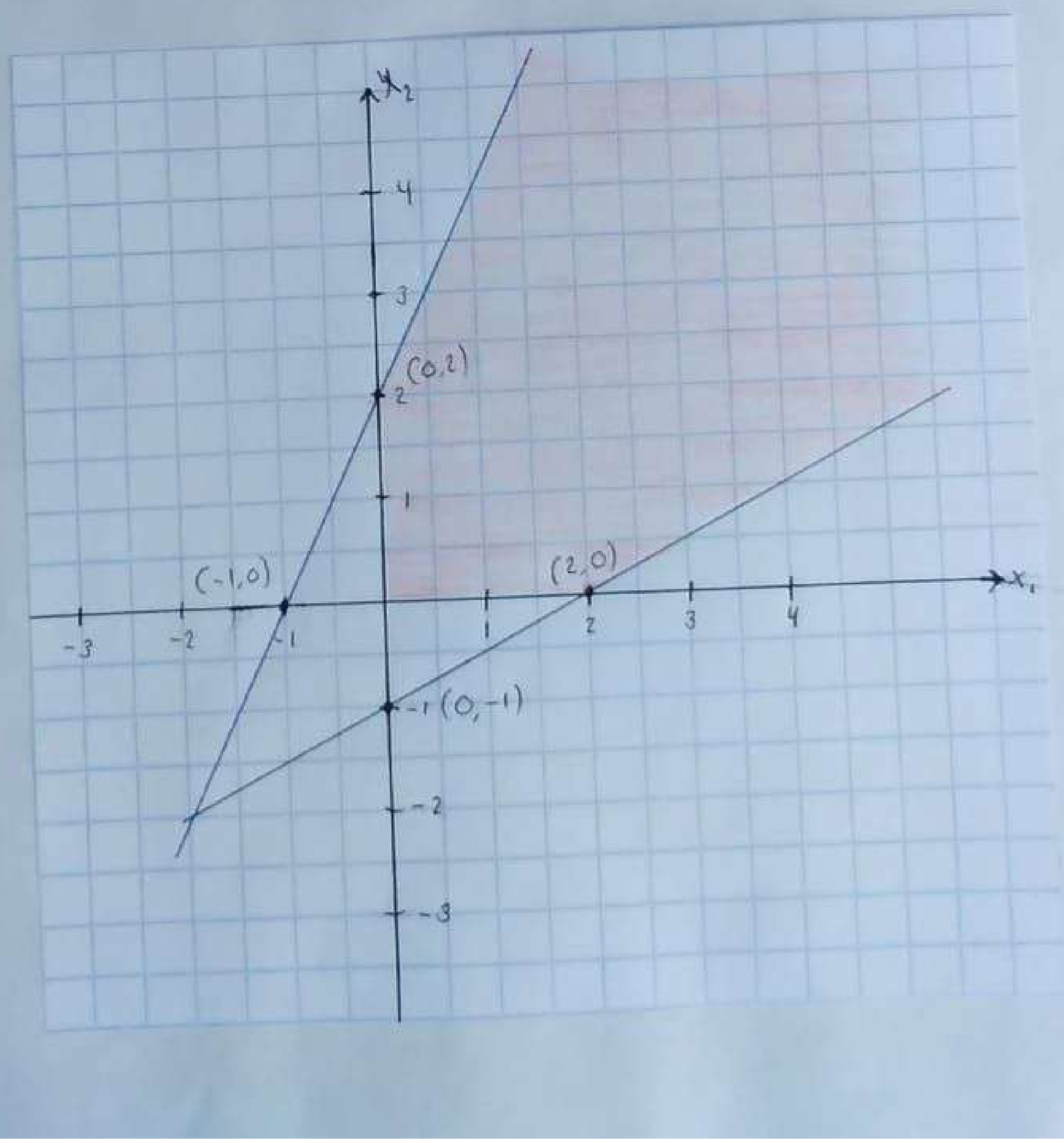
1. Método gráfico.

i) Obtener la solución óptima (si existe) del siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 - 2x_2 \le 2 \\ & -2x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Para poder encontrar nuestra región factible vamos a ocupar las sig. rectas

- $x_1 - 2x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{x_1 - 2}{2}$; puntos: $(0,-1)$, $(2,0)$
- $-2x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{2 + x_1}{2}$; puntos: $(0,1)$, $(-2,0)$



Al encontrar los puntos de la region factible vamos a evaluarlos en la función objetivo

P	función objetivo
(0,0)	0
(0,2)	6
(2,0)	6

Nuestro valor que podemos tomar puede ser (0,2) o (2,0)

II. Modelación matemática y método Simplex

2) La compañía ANCE, S.A. produce una línea de artículos de peltre para uso casero, la cual consta de varios productos. El sistema de manufactura se divide en varios departamentos: cortado, troquelado y esmaltado. Cada artículo tiene una utilidad unitaria diferente. A continuación se presenta la información relevante. Formular este problema considerando que la compañía desea maximizar la utilidad total.

En la modelación declare z como la función objetivo y considerar las siguientes variables de decisión:

x_1: Cantidad del artículo 1 ; x_2: Cantidad del artículo 2 ; x_3: Cantidad del artículo 3

x_4: Cantidad del artículo 4

El problema nos menciona que la compañía desea maximizar la utilidad total y esta utilidad es resultado de multiplicar una cantidad en específico de cada artículo por su respectivo precio, tomando en cuenta la capacidad productiva de cada departamento

Nuestro problema se puede modelar:

Variables de decisión:

x_1: Cantidad del artículo 1 x_4: Cantidad del artículo 4

x_2: Cantidad del artículo 2

x_3: Cantidad del artículo 3

Modelo Matemático:

$$\max \quad z = 10x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 2x_4$$

S.a.

$$10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 4000$$

$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 1500$$

$$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 \leq 800$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Pero como nuestro problema necesita de soluciones enteras, es decir, debemos decir cuántas unidades de cada artículo maximizan la utilidad total por lo que falta una restricción

Finalmente tenemos.

$$\max \quad z = 10x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 2x_4$$

s.a

$$10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 4000$$

$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 1500$$

$$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 \leq 800$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$; $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$ Ya que nos piden soluciones enteros

3) Considerar la relajación lineal del modelo del problema 2. Resolver el modelo obtenido con el método simplex tabular

Como menciona considerar la relajación lineal del modelo anterior, debemos resolver el siguiente problema:

$$\max \quad z = 10x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 2x_4$$

$$\text{s.a} \quad 10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 4000$$
$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 1500$$
$$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 \leq 800$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Pasamos nuestro problema a su forma estandar

$$\max \quad z - 10x_1 - 15x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 0$$

$$\text{s.a} \quad 10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 4000$$
$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 + x_6 = 1500$$
$$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 + x_7 = 800$$

$$x_i \geq 0 \text{ con } i = 1, \dots, 7$$

Definiendo la tabla simplex

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	-10	-15	-4	-2	0	0	0	0
x_5	0	10	20	2	3	1	0	0	4000 ← (1/20)
x_6	0	5	5	5	4	0	1	0	1500
x_7	0	4	2	6	6	0	0	1	800

→ Pivote

$$\min\left\{\frac{4000}{20}, \frac{1500}{5}, \frac{800}{2}\right\}$$

$$\min\{200, 300, 400\}$$

Resolviendo tenemos

UB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	-10	-15	-4	-2	0	0	0	0
x_5	0	1/2	1	1/10	3/20	1/20	0	0	200
x_6	0	5	5	5	4	0	1	0	1500
x_7	0	4	2	6	6	0	0	1	800

(15) (-5) (-2)

Se observa que todavía no se cumple la prueba de optimalidad, continuamos:

UB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	-5/2	0	-5/2	1/4	3/4	0	0	3000
x_2	0	1/2	1	1/10	3/20	1/20	0	0	200
x_6	0	5/2	0	9/2	13/4	-1/4	1	0	500
x_7	0	3	0	29/5	57/10	-1/10	0	1	400

(1/3)

$$\min\left\{\frac{200}{1/2}, \frac{500}{5/2}, \frac{400}{3}\right\} = \min\{400, 200, 133.\overline{33}\}$$

UB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	-5/2	0	-5/2	1/4	3/4	0	0	3000
x_2	0	1/2	1	1/10	3/20	1/20	0	0	200
x_6	0	5/2	0	9/2	13/4	-1/4	1	0	500
x_7	0	1	0	29/15	57/30	-1/30	0	1/3	400/3

(5/2) (-1/2) (-5/2)

UB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	0	0	7/3	5	2/3	0	5/6	10000/3
x_2	0	0	1	-13/15	-4/5	1/15	0	-1/6	400/3
x_6	0	0	0	-1/3	-3/2	-1/6	1	-5/6	500/3
x_1	0	1	0	29/15	19/10	-1/30	0	1/3	400/3

Cumple la prueba de optimalidad
$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 7$

Notamos que todos los elementos en la primer fila son mayores o iguales a cero por lo que paramos. La solución extendida es:

$$\| x_1 = 400/3 \,;\; x_2 = 400/3 \,;\; x_3 = 0 ,\; x_4 = 0 ,\; x_5 = 0 ,\; x_6 = \frac{500}{3} ,\; x_7 = 0 ; \|$$

$$z = 10000/3 \,\|$$

III. Dualidad.

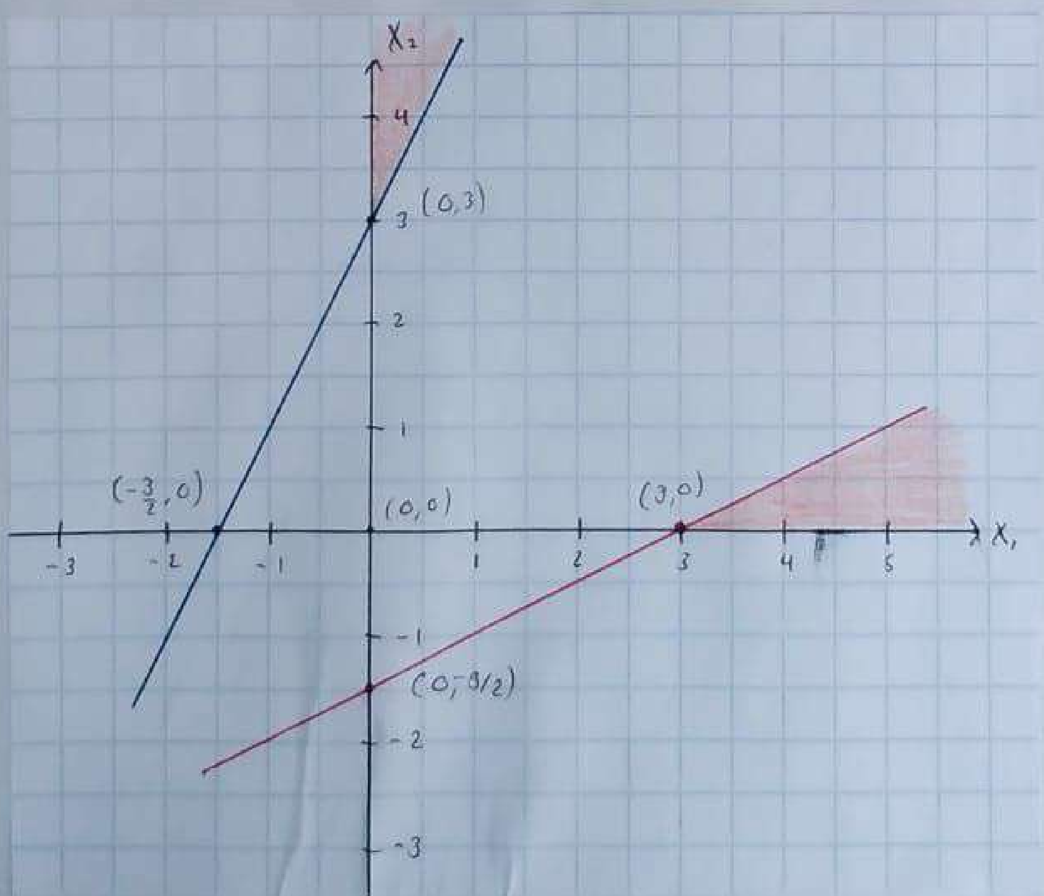
4) Considerar el modelo dual del problema 1 y encontrar la solución con el método grafico

Antes de intentar realizar la grafica vamos a encontrar el problema dual

$$\begin{array}{ll} \max & z = 3x_1 + 3x_2 \\ \text{S.a} & x_1 - 2x_2 \le 2 \\ & -2x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array} \implies \begin{array}{ll} \min & w = 2y_1 + 2y_2 \\ \text{S.a.} & y_1 - 2y_2 \ge 3 \\ & -2y_1 + y_2 \ge 3 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{array}$$

Como ya encontramos nuestro problema dual podemos graficar. Para poder encontrar nuestra región factible vamos a ocupar las siguientes rectas

- $y_1 - 2y_2 = 3 \implies y_2 = \frac{y_1 - 3}{2}$; Puntos $(0, -3/2), (3, 0)$
- $-2y_1 + y_2 = 3 \implies y_2 = 3 - 2y_1$, Puntos $(0, 3), (3/2, 0)$



Al encontrar los puntos de la región factible vamos a evaluarlos en la función objetivo

P	Función Objetivo
(0, 3)	6
(3, 0)	6

Nuestro valor que podemos tomar puede ser (0,3) o (3,0).

5) Considerar la relajación lineal del problema 2. Encontrar el modelo dual y resolverlo con el método Simplex dual

Partimos del siguiente problema

$$\max\ z = 10x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 2x_4$$

S.a.

$$10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 4000$$
$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 1500$$
$$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 \leq 800$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Modelo Dual

$$\min\ w = 4000y_1 + 1500y_2 + 800y_3$$

S.a.

$$10y_1 + 5y_2 + 4y_3 \geq 10$$
$$20y_1 + 5y_2 + 2y_3 \geq 15$$
$$2y_1 + 5y_2 + 6y_3 \geq 4$$
$$3y_1 + 4y_2 + 6y_3 \geq 2$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

$\Longrightarrow$

$$\min\ w = 4000y_1 + 1500y_2 + 800y_3$$

S.a.

$$-10y_1 - 5y_2 - 4y_3 \leq -10$$
$$-20y_1 - 5y_2 - 2y_3 \leq -15$$
$$-2y_1 - 5y_2 - 6y_3 \leq -4$$
$$-3y_1 - 4y_2 - 6y_3 \leq -2$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Multiplicamos por (-1) las restricciones para poder manejar mejor el problema

$$\min\ w - 4000y_1 - 1500y_2 - 800y_3 = 0$$

S.a.

$$-10y_1 - 5y_2 - 4y_3 + S_1 = -10$$
$$-20y_1 - 5y_2 - 2y_3 + S_2 = -15$$
$$-2y_1 - 5y_2 - 6y_3 + S_3 = -4$$
$$-3y_1 - 4y_2 - 6y_3 + S_4 = -2$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0,\quad S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0$$

Ahora resolvemos por simplex dual

	W	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	S_4	RHS	
W	1	-4000	-1500	-800	0	0	0	0	0	
S_1	0	-10	-5	-4	1	0	0	0	-10	
S_2	0	-20	-5	-2	0	1	0	0	-15	← $\left(-\frac{1}{20}\right)$
S_3	0	-2	-5	-6	0	0	1	0	-4	
S_4	0	-3	-4	-6	0	0	0	1	-2	

$$\min\left\{\frac{4000}{20}, \frac{1500}{5}, \frac{800}{2}\right\} = \min\{200, 300, 400\}$$

	W	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	S_4	RHS	
W	1	-4000	-1500	-800	0	0	0	0	0	(4000)
S_1	0	-10	-5	-4	1	0	0	0	-10	(10)
Y_1	0	1	1/4	1/10	0	-1/20	0	0	3/4	
S_3	0	-2	-5	-6	0	0	1	0	-4	(2)
S_4	0	-3	-4	-6	0	0	0	1	-2	(3)

	W	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	S_4	RHS	
W	1	0	-500	-400	0	-200	0	0	3000	
S_1	0	0	-5/2	-3	1	-1/2	0	0	-5/2	← $(-1/3)$
Y_1	0	1	1/4	1/10	0	-1/20	0	0	3/4	
S_3	0	0	-9/2	-29/5	0	-1/10	1	0	-5/2	
S_4	0	0	-13/4	-57/10	0	-3/20	0	1	1/4	

$$\min\left\{\frac{500}{5/2}, \frac{400}{3}, \frac{200}{1/2}\right\} = \min\{200, 133.\overline{33}, 400\}$$

	W	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	S_4	RHS	
W	1	0	-500	-400	0	-200	0	0	3000	(400)
S_1	0	0	5/6	1	-1/3	1/6	0	0	5/6	
Y_1	0	1	1/4	1/10	0	-1/20	0	0	3/4	$(-1/10)$
S_3	0	0	-9/2	-29/5	0	-1/10	1	0	-5/2	$\left(\frac{29}{5}\right)$
S_4	0	0	-13/4	57/10	0	-3/20	0	1	1/4	$(+57/10)$

	w	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	S_4	RHS
w	1	0	$-500/3$	0	$-400/3$	$-400/3$	0	0	$10000/3$
Y_3	0	0	$5/6$	1	$-1/3$	$1/6$	0	0	$5/6$
Y_1	0	1	$1/6$	0	$1/30$	$-1/15$	0	0	$2/3$
S_3	0	0	$1/3$	0	$-29/15$	$13/15$	1	0	$7/3$
S_4	0	0	$3/2$	0	$-19/10$	$4/5$	0	1	5

Detenemos el proceso ya que se cumple la condición de optimalidad para nuestro problema y nuestra solución extendida es:

|| $Y_1 = 2/3$, $Y_2 = 0$, $Y_3 = 5/6$, $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 7/3$, $S_4 = 5$ ||

$w = 10000/3$ ||

IV. Análisis de Sensibilidad

Considerar la relajación lineal del modelo del problema 2 en cada uno de los siguientes incisos y concluir con la solución óptima del problema

6) Determinar los rangos de variación en la utilidad unitaria de las variables no básicas de tal forma que la solución óptima no se altere

El problema original:

$$\max\ z = 10x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 2x_4$$

s.a.

$$10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 4000$$

$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 \le 1500$$

$$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 \le 800$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

La última tabla del método simplex es:

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	0	0	7/3	5	2/3	0	5/6	10000/3
x_2	0	0	1	-13/15	-4/5	1/15	0	-1/6	400/3
x_6	0	0	0	-1/3	-3/2	-1/6	1	-5/6	500/3
x_1	0	1	0	29/15	19/10	-1/30	0	1/3	400/3

Definimos

$$S^* = \begin{pmatrix} 1/15 & 0 & -1/6 \\ -1/6 & 1 & -5/6 \\ -1/30 & 0 & 1/3 \end{pmatrix};\ Y^* = (2/3\ \ 0\ \ 5/6);\ b = \begin{pmatrix} 4000 \\ 1500 \\ 800 \end{pmatrix}$$

$$b^*_{\text{anterior}} = \begin{pmatrix} 400/3 \\ 500/3 \\ 400/3 \end{pmatrix},\ z^*_{\text{anterior}} = 10000/3$$

Vamos a encontrar los intervalos permisibles.

$A_j^* = S^* \bar{A}_j$; Para el intervalo tomamos $c_j \leq y^* \bar{A}_j$

En nuestra solución las variables que no son basicas son: x_3 y x_4.
Por lo que veamos el intervalo permisible

$$A_3^* = S^* \bar{A}_3 = \begin{pmatrix} 1/15 & 0 & -1/6 \\ -1/6 & 1 & -5/6 \\ -1/30 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/15 - 1 \\ -1/3 + 5 - 5 \\ -1/15 + 2 \end{pmatrix} =$$

Sabemos que $c_j \leq y^* \bar{A}_j \Rightarrow C_3 \leq y^* \bar{A}_3 = (2/3 \;\; 0 \;\; 5/6) \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{19}{3}$

$$\| \therefore C_3 \leq \frac{19}{3} \approx 6.34 \|$$

Ahora para x_4

$$C_4 \leq y^* \bar{A}_4 = (2/3 \;\; 0 \;\; 5/6) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 7$$

$$\| \therefore C_4 \leq 7 \|$$

7) Evaluar el efecto de un cambio en la utilidad del producto tres de \$4 a \$5.

Nos menciona el problema que nuestra variable 3 va a cambiar en su utilidad por lo que debemos analizar si hay algún cambio

Realizando el cambio en nuestro modelo

$$\max \quad z = 10x_1 + 15x_2 + \underline{5x_3} + 2x_4$$

$$10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 4000$$

$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 1500$$

$$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 \leq 800$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Como el cambio se realiza en x_3, entonces encontramos la restricción dual asociada a esa columna donde se realizaron los cambios

$$2y_1 + 5y_2 + 6y_3 \geq 5$$

Sabemos del inciso anterior que $y^* = (2/3 \quad 0 \quad 5/6)$

$$\Rightarrow 2(2/3) + 5(0) + 6(5/6) \geq 5$$

$$4/3 + 5 \geq 5$$

$$19/3 \geq 5 \quad \text{Se cumple}$$

|| Por lo tanto nuestra solución óptima del modelo original sigue siendo válida en el modelo con cambio ||

8) Evaluar las posibles efectos en la solución óptima al realizar el siguiente cambio $a_3 = (2, 3, 1)^t$

Nuestro nuevo cambio es :

$$\begin{aligned} \max\ & z = 10x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 2x_4 \\ \text{s.a}\ & 10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 4000 \\ & 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 \le 1500 \\ & 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 \le 800 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \max\ & z = 10x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 2x_4 \\ \text{s.a.}\ & 10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 4000 \\ & 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 1500 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 \le 800 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

Como el cambio se realizo en x_3, encontramos la restricción dual asociada a esa columna donde se realizaron los cambios

$$2y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 4 \quad ;$$

La ultima tabla de simplex

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	0	0	7/3	5	2/3	0	5/6	10009/3
x_2	0	0	1	-13/15	-4/5	1/15	0	-1/6	400/3
x_6	0	0	0	-1/3	-3/2	-1/6	1	-5/6	500/3
x_1	0	1	0	29/15	19/10	-1/30	0	1/3	400/3

$y^* = (2/3 \quad 0 \quad 5/6)$

Revisemos si se cumple la desigualdad

$$2(2/3) + 3(0) + (5/6) \ge 4$$

$$4/3 + 5/6 \ge 4$$

$$13/6 \not\ge 4 \quad \times\times \text{ No se cumple}$$

Debemos encontrar una nueva solucion con $z_j^* - \bar{c}_j = y^* \bar{A}_j - \bar{c}_j$ y $A_j^* = S^* \bar{A}_j$

$$S^* = \begin{pmatrix} 1/15 & 0 & -1/6 \\ -1/6 & 1 & -5/6 \\ -1/30 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} ; \quad \bar{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{c}_3 = 4$$

$$z_3^* - \bar{c}_3 = (2/3 \quad 0 \quad 5/6)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 = \frac{4}{3} + \frac{5}{6} - 4 = -\frac{11}{6}$$

$$A_3^* = \begin{pmatrix} 1/15 & 0 & -1/6 \\ -1/6 & 1 & -5/6 \\ -1/30 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/15 - 1/6 \\ -2/6 + 3 - 5/6 \\ -2/30 + 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/30 \\ 11/6 \\ 4/15 \end{pmatrix}$$

Una vez que realizamos las anteriores operaciones actualizamos nuestra ultima tabla

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	0	0	$-11/6$	5	$2/3$	0	$5/6$	$10000/3$
x_2	0	0	1	$-1/30$	$-4/5$	$1/15$	0	$-1/6$	$400/3$
x_6	0	0	0	$11/6$	$-3/2$	$-1/6$	1	$-5/6$	$500/3$
x_1	0	1	0	$4/15$	$19/10$	$-1/30$	0	$1/3$	$400/3$

Una vez que realizamos el cambio solo nos resta volver cero arriba y abajo

$$\min\left\{\frac{500/3}{11/6},\ \frac{400/3}{4/15}\right\} =$$

$$\min\left\{\frac{1000}{11},\ 500\right\}$$

$(6/11)$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	0	0	$-11/6$	5	$2/3$	0	$5/6$	$10000/3$
x_2	0	0	1	$-1/30$	$-4/5$	$1/15$	0	$-1/6$	$400/3$
x_6	0	0	0	1	$-9/11$	$-1/11$	$6/11$	$-5/11$	$1000/11$
x_1	0	1	0	$4/15$	$19/10$	$-1/30$	0	$1/3$	$400/3$

$(11/6)$ $(1/30)$ $(-4/15)$

$$\min\left\{\frac{+11/6}{1},\ 5/24,\ \frac{2/3}{2},\ \frac{5/6}{5}\right\} = \min\left\{\frac{11}{6},\ \frac{5}{24}\right\}$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	0	0	0	$7/2$	$1/2$	1	0	3500
x_2	0	0	1	0	$-91/110$	$53/56$	$1/55$	$-2/11$	$1500/11$
x_3	0	0	0	1	$-9/11$	$-1/11$	$6/11$	$-5/11$	$1000/11$
x_1	0	1	0	0	$\frac{233}{110}$	$-1/110$	$8/55$	$5/11$	$1200/11$

Finalmente nuestra solución extendida es:

|| $x_1 = \frac{1200}{11}$; $x_2 = \frac{1500}{11}$; $x_3 = \frac{1000}{11}$; $x_4 = 0$, $x_5 = 0$; $x_6 = 0$; $x_7 = 0$ ||

$z^* = 3500$ ||

9) El tomador de decisiones está estudiando la posibilidad de adicionar un nuevo artículo a su línea de producción actual con coeficiente 12 en la función objetivo y en las restricciones con coeficientes 9, 7 y 6 respectivamente. ¿Sí es recomendable esta acción?

Antes de dar una recomendación analicemos.

$$\begin{array}{ll} \max & z = 10x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 2x_4 \\ \text{s.a} & 10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 4000 \\ & 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 \le 1500 \\ & 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 \le 800 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \max & z = 10x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 2x_4 + \underline{12x_n} \\ \text{s.a} & 10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 9x_n \le 4000 \\ & 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 7x_n \le 1500 \\ & 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 6x_n \le 800 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{array}$$

La restricción dual asociada a X_n en el problema con los cambios es:

$$9y_1 + 7y_2 + 6y_3 \ge 12$$

y nuestra solución complementaria es $y^* = (2/3 \quad 0 \quad 5/6)$

$$9(2/3) + 7(0) + 6(5/6) \ge 12$$
$$6 + 5 \ge 12$$
$$11 \not\ge 12 \quad \text{No se cumple}$$

Por lo tanto hay que actualizar los valores de la tabla $z_j^* - \bar{c}_j = y^*\bar{A}_j - \bar{c}_n$; $A_j^* = S^*\bar{A}_j$, así:

$$z_n^* - \bar{c}_n = (2/3 \quad 0 \quad 5/6)\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} - 12 = 6 + 5 - 12 = -1 \quad ; \quad S^* = \begin{pmatrix} 1/15 & 0 & -1/6 \\ -1/6 & 1 & -5/6 \\ -1/30 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$A_n^* = \begin{pmatrix} 1/15 & 0 & -1/6 \\ -1/6 & 1 & -5/6 \\ -1/30 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 1/2 \\ 17/10 \end{pmatrix}$$

Ahora actualizamos nuestra última tabla

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_n	LD	
z	1	0	0	7/3	5	2/3	0	5/6	−1	1000/3	
x_2	0	0	1	−13/15	−4/5	1/15	0	−1/6	−2/5	400/3	
x_6	0	0	0	−1/3	−3/2	−1/6	1	−5/6	1/2	500/3	
x_1	0	1	0	29/15	19/10	−1/30	0	1/3	17/10	400/3	← (10/17)

$$\min\left\{\frac{500/3}{1/2}, \frac{400/3}{17/10}\right\} = \min\left\{\frac{1000}{3}, \frac{4000}{51}\right\}$$

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_n	LD	
z	1	0	0	7/3	5	2/3	0	5/6	-1	10000/3	(1)
x_2	0	0	1	-13/15	-4/5	1/15	0	-1/6	-2/5	1400/3	(2/5)
x_6	0	0	0	-1/3	-3/2	-1/6	1	-5/6	1/2	500/3	(-1/2)
x_1	0	1	0	58/51	19/17	-1/51	0	10/51	1	4000/51	

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_n	LD
z	1	0	0	59/17	104/17	11/17	0	35/34	0	58000/17
x_2	0	0	1	-7/17	-6/17	1/17	0	-3/34	0	2800/17
x_6	0	0	0	116/51	-35/17	-8/51	1	-95/102	0	6500/51
x_n	0	1	0	58/51	19/17	-1/51	0	10/51	1	4000/51

Finalmente tenemos nuestra nueva solución extendida

$\| x_1 = 0,\ x_2 = 2800/17,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = 6500/51,\ x_7 = 0 \|$

$\| x_n = 4000/51 \ ;\ z^* = 58000/17 \approx 3411.765 \|$

Una vez que tenemos este analisis podemos dar la recomedación, dado que el nuevo valor de $z^* \approx 3411.765$ y el anterior fue de $z^*_{anter.} = 10000/3 \approx 3333.\overline{83}$ la recomendación es de que si se recomienda la acción, ya que se tiene una mejor utilidad total.

10) El tomador de decisiones ahora quiere tomar en cuenta en el modelo una restricción de demanda mínima para mantener una cierta posición en el mercado, lo cual representa una nueva restricción:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq 500$$

Antes vamos a mostrar nuestros nuevos cambios

$$\max z = 10x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 2x_4$$

s.a

$$10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 4000$$
$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 1500$$
$$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 \leq 800$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$\max z = 10x_1 + 15x_2 + 4x_3 + 2x_4$$

s.a.

$$10x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 4000$$
$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 1500$$
$$4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 \leq 800$$
$$\boxed{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq 500}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

La solución optima es $x^* = \{400/3, 400/3, 0, 0\}$

$$(400/3) + 2(400/3) \geq 500$$
$$400 \not\geq 500$$

No satisface la condición, entonces debemos encontrar la forma aumentada, recordando que se puede solucionar por simplex dual

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq 500$$
$$\Rightarrow -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 \leq -500$$
$$-x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 + x_8 = -500$$

Actualizando nuestra ultima tabla del ejercicio 2

VB	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
z	1	0	0	7/3	5	2/3	0	5/6	0	10000/3
x_2	0	0	1	-13/15	-4/5	1/15	0	-1/6	0	400/3
x_6	0	0	0	-1/3	-3/2	-1/6	1	-5/6	0	500/3
x_1	0	1	0	29/15	57/30	-1/30	0	1/3	0	400/3
x_8	0	-1	-2	-3	-4	0	0	0	1	-500 ← (2)

Debemos asegurarnos que las variables básicas tienen forma canonica

$$\min\left\{\frac{7/3}{3}, \frac{5}{4}\right\} = \min\left\{\frac{7}{9}, \frac{5}{4}\right\}$$

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
Z	1	0	0	$7/3$	5	$2/3$	0	$5/6$	0	$10000/3$
x_2	0	0	1	$-13/15$	$-4/5$	$1/15$	0	$-1/6$	0	$400/3$
x_6	0	0	0	$-1/3$	$-3/2$	$-1/6$	1	$-5/6$	0	$500/3$
x_1	0	1	0	$29/15$	$57/30$	$-1/30$	0	$1/3$	0	$400/3$
x_8	0	-1	0	$-\frac{71}{15}$	$-\frac{28}{5}$	$2/15$	0	$-1/3$	1	$-\frac{700}{3}$

$(+1)$

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
Z	1	0	0	$7/3$	5	$2/3$	0	$5/6$	0	$10000/3$
x_2	0	0	1	$-13/15$	$-4/5$	$1/15$	0	$-1/6$	0	$400/3$
x_6	0	0	0	$-1/3$	$-3/2$	$-1/6$	1	$-5/6$	0	$500/3$
x_1	0	1	0	$29/15$	$57/30$	$-1/30$	0	$1/3$	0	$400/3$
x_8	0	0	0	$-14/5$	$-37/10$	$1/10$	0	0	1	-100

$\leftarrow \left(-\frac{5}{14}\right)$

$$\min\left\{\frac{7/3}{14/5}, \frac{5}{37/10}, \frac{2/3}{1/10}\right\} = \min\left\{\frac{5}{6}, \frac{50}{37}, \frac{20}{3}\right\}$$

Z	1	0	0	$7/3$	5	$2/3$	0	$5/6$	0	$10000/3$
x_2	0	0	1	$-13/15$	$-4/5$	$1/15$	0	$-1/6$	0	$400/3$
x_6	0	0	0	$-1/3$	$-3/2$	$-1/6$	1	$-5/6$	0	$500/3$
x_1	0	1	0	$29/15$	$57/30$	$-1/30$	0	$1/3$	0	$400/3$
x_8	0	0	0	1	$\frac{37}{28}$	$-1/28$	0	0	$-\frac{5}{14}$	$\frac{250}{7}$

$(-7/3)$ $(13/15)$ $(1/3)$ $(-29/15)$

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
Z	1	0	0	0	$23/12$	$3/4$	0	$5/6$	$5/6$	3250
x_2	0	0	1	0	$79/84$	$1/28$	0	$-1/6$	$-13/42$	$1150/7$
x_6	0	0	0	0	$89/84$	$5/28$	1	$-5/6$	$-5/42$	$1250/7$
x_1	0	1	0	0	$-\frac{55}{84}$	$1/28$	0	$1/3$	$19/42$	$\frac{450}{7}$
x_3	0	0	0	1	$\frac{37}{28}$	$-1/28$	0	0	$-\frac{5}{14}$	$\frac{250}{7}$

Se cumple la condición de optimalidad nos detenemos

Al introducir una nueva restricción la utilidad $Z^* = 3250$ disminuye y la solución óptima extendida es

$$\| \; x_1 = \frac{450}{7},\; x_2 = \frac{1150}{7},\; x_3 = \frac{250}{7},\; x_4 = 0,\; x_5 = 0,\; x_6 = \frac{1250}{7},\; x_7 = 0,\; x_8 = 0$$

$$Z^* = 3250 \; \|$$