

# Objektverfolgung - Filterung

Daniel Twumasi

daniel.twumasi@uni-oldenburg.de

**Abstract:** Unter Objektverfolgung versteht man in diesem Kontext das Erkennen von Gegenständen, Personen, etc mit Hilfe von Sensoren, und die Schätzung ihrer Position und ggf. anderer Variablen mit Hilfe von Software. Der Prozess der Objektverfolgung lässt sich in drei Teilschritte einteilen: Prädiktion, Assoziation, der Zuordnung von Objekten zueinander und Filterung, der Schätzung des Systemzustands (z.B. der Position) unter Berücksichtigung von früheren Messungen und Störgrößen. Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem letzten Schritt, der Filterung und den dafür nötigen mathematischen Grundlagen. In dieser Arbeit wird der Kalman-Filter vorgestellt.

## 1 Einleitung

Unter Objektverfolgung versteht man in diesem Kontext das Erkennen von Gegenständen, Personen, etc mit Hilfe von Sensoren, und die Schätzung ihrer Position und ggf. anderer Variablen mit Hilfe von Software. Zu den Sensoren welche für die Erkennung eingesetzt werden können gehören z.B. Radar- und Ultraschallsensoren oder Kameras. Der Prozess der Objektverfolgung lässt sich, nachdem die Objekte erkannt wurden, in drei Teilschritte einteilen: Prädiktion, Assoziation und Filterung.

Bei der Assoziation werden erkannte Objekte mit früher erkannten Objekten in Verbindung gebracht. Im letzten Schritt findet dann eine Filterung statt, dabei werden unter Berücksichtigung von früheren Messwerten und Störgrößen, welche sich aus der Ungenauigkeit und Fehleranfälligkeit von Sensoren, sowie der Umwelt und dessen Beschreibung in Gleichungssystemen ergeben, eine möglichst genaue Schätzung darüber getroffen, wo sich das erkannte Objekt zur Zeit befindet. Anwendungsfälle für die Objektverfolgung sind vielfältig und in vielen Bereichen der Industrie zu finden.

Bei der Apollo Mission wurde mittels entsprechender Algorithmen bereits 1960 eingesetzt. Fahrerassistenzsysteme lassen sich mit Hilfe entsprechender Methoden realisieren. Sicherheitsüberwachungssysteme profitieren davon, in der Lage zu sein, automatisiert Personen z.B. auf Kameras in Flughäfen zu erkennen. In dieser Arbeit geht es um den Prozess der Filterung. Zuerst soll in Sektion 2 motiviert werden, warum man stochastische und nicht deterministische Modelle zur Beschreibung von Umwelt und Sensoren einsetzt. In der nächsten Sektion 3 werden die für das Verständnis des Algorithmus notwendigen mathematischen Hintergründe aus der System- 3.1 bzw. Wahrscheinlichkeitstheorie 3.2 vorgestellt. Filter lassen sich in zwei Kategorien einteilen: Den linearen und den nicht-linearen. Lineare Filter arbeiten dabei auf Systemen, welche sich mit Hilfe von linearen Gleichungssystemen darstellen lassen. Der Kalman-Filter gehört zu diesen und wird in

Abschnitt 4 beschrieben. Nicht-lineare Filter sind geeignet um auf nicht-linearen Systemen Vorhersagen zu treffen. Zum Schluss folgt ein Fazit 5.

## 2 Motivation

Warum stochastische Modelle? Um ein physikalisches System zu beschreiben ist es notwendig ein mathematisches Modell zu entwickeln, welches dieses adequat beschreibt. Dabei werden bekannte physikalische Modelle und Gesetze verwendet, um die Beziehungen zwischen den Variablen des Systems, und den verschiedenen Eingängen und Ausgängen zu beschreiben. Um das Systemverhalten zu beobachten werden Sensoren eingesetzt, um die verschiedenen Ein- und Ausgabesignale zu messen. Es gibt drei Gründe warum stochastische Modelle für die Beschreibung des Systems notwendig sind:

- Kein mathematisches Model ist perfekt, denn solch ein Model beinhaltet immer nur diejenigen Charakteristiken der Umwelt, welche für den den Anwendungsfall von Interesse sind. Dies ist auch aufgrund der begrenzt zur Verfügung stehenden Rechenleistung notwendig. Mathematische Modelle approximieren selbst oft nur die Umwelt, und beinhalten deshalb Ungenauigkeiten in ihren Aussagen über den Zustand des betrachteten Systems.
- Steuersignal welche in das dynamische System gegeben werden unterliegen ebenfalls Ungenauigkeiten, welche nicht mit deterministischen Modellen beschrieben werden können. Z.B. wird die von einem Piloten in einem Flugzeug gewünschte Beschleunigung nicht exakt seinen Erwartungen entsprechen, aufgrund von Wind-einflüsse oder Ungenauigkeiten bei der Übertragung der gewünschten Beschleunigung an die Motoren und andere Gründe.
- Sensoren können keine perfekten und keine vollständigen Daten über den Zustand des Systems liefern. Ein Radarsensor z.B. arbeitet nur in einer gewissen Reichweite und Sensoren selbst unterliegen Störeinflüssen und Ungenauigkeiten. Wenn mehrere Sensoren die selbe Variable messen, bleibt auch die Frage danach, wie man diese Daten optimal kombiniert.

Aus den genannten Gründen ergeben sich folgende Fragestellungen:

- Wie entwickelt man Modelle, welche mit den Ungenauigkeiten umgehen können?
- Wenn man solch ein Modell, und durch Rauschen verzerrte bzw. unvollständige Messungen zur Verfügung hat, wie kann man den Zustand des Systems möglichst optimal Schätzen?
- Wie steuert man ein solches System, um eine gewünschte Reaktion zu erreichen?
- Wie kann man die Performance eines solchen Schätzers evaluieren und ggf. anpassen?

### 3 Mathematische Grundlagen

Ein Verständnis der mathematischen Grundlagen ist für ein Verständnis der später vorgestellten Algorithmen unerlässlich. Zuersteinmal muss die Umwelt in der die Objektverfolgung stattfindet, sowie die Sensoren, welche sie wahrnehmen, geeignet beschrieben werden. Dabei wird die Umwelt als ein System aufgefasst, welches Zustände besitzt, welche sich mit der Zeit, oder durch einen Input ändern. Die Änderung des Systemzustands lässt sich dabei bei linearen Systemen mithilfe von linearen Gleichungssystemen und nicht-linearen Systemen mit Hilfe von nicht-linearen Gleichungssystemen beschreiben. Damit wird es also möglich Vorhersagen über zukünftige Systemzustände zu machen. Die Beschreibung ist in Abschnitt 3.1 zu finden. Aufgrund der Tatsache, dass wir nie in der Lage sind exakte Aussagen über den aktuellen Zustand der Umwelt zu machen, ergibt sich die Notwendigkeit der Anwendung von Wissen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie. Sensoren selbst sind nicht in der Lage eine exakte Messung vorzunehmen, sondern unterliegen einem systematischen Fehler oder können durchaus auch mal z.B. aufgrund von Übertragungsfehlern falsche Daten liefern. Die Beschreibung der Umwelt selbst ist eine weitere Fehlerquelle. Erstens könnte diese von vornherein durch den Entwickler ungenau modelliert worden sein und zweitens Stellen selbst die aus der Physik bekannten Gesetze nur eine Annäherung an die Wirklichkeit dar. Die benötigten Grundlagen werden in Abschnitt 3.2 dargestellt.

#### 3.1 System-Theorie

Die Systemtheorie ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit der Beschreibung von linearen sowie nicht-linearen Systemen beschäftigt. Lineare Systeme erfüllen dabei gewisse Eigenschaften:

- **Additivität**  
Dies bedeutet, dass wenn es zwei verschiedene Eingaben  $x_1$  und  $x_2$  an das System gibt, auf die dieses entsprechend mit Ausgaben  $a_1$  und  $a_2$  reagiert, dann antwortet das System, wenn wir die Summe  $x_1 + x_2$  der beiden eingeben auch entsprechend mit der Summe  $a_1 + a_2$  für alle Möglichen eingaben.
- **Homogenität**  
Die Eigenschaft der Homogenität bedeutet, dass wenn wir die Eingabe  $x_1$  an ein System verändern, indem wir sie z.B. verdoppeln, so wird sich das Ausgangssignal  $a_1$  ebenfalls verdoppeln.
- **Superposition**  
Ein System erfüllt diese Eigenschaft automatisch, wenn es die beiden vorherigen Eigenschaften erfüllt. Mathematisch lässt sich dies wie folgt beschreiben:

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2) \quad (1)$$

Im folgenden soll das Aufstellen der Systemgleichungen anhand eines Beispiels erklärt werden, welches auch später für den Kalman-Filter in Abschnitt 4 verwendet wird. In diesem Beispiel geht es darum ein Objekt, (z.B. ein Auto) dessen Geschwindigkeit mittels eines Sensors gemessen wird, und das über eine Beschleunigung verfügt zu verfolgen, d.h. seine Position zu bestimmen.

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + w_t \quad (2)$$

Dies ist die Zustandsgleichung, wobei  $x_{t-1}$  ein Vektor ist, der den Zustand des Systems zum Zeitpunkt  $t + 1$  beschreibt. Im Beispiel sind das also die Position und die Geschwindigkeit. Der  $u_t$  Vektor ist der Input des Systems zum Zeitpunkt  $t$ , in diesem Fall die Beschleunigung.  $w_t$  stellt das Systemrauschen dar. Hierbei handelt sich um einen normalverteilten stochastischen Prozess, der die Systemungenauigkeit modelliert bzw. simuliert.  $A$  und  $B$  sind Matrizen

$$y_t = Cx_t + z_t \quad (3)$$

Ist die Ausgangsgleichung des Systems. Der  $y_t$  Vektor stellt den Output dar, im Beispiel die Position. Diese berechnet sich durch multiplizieren einer Matrix  $C$  mit dem vorherigen Systemzustand  $x_t$  unter Berücksichtigung von Messungenauigkeiten, welche mit dem stochastischen Prozess  $z_t$  dargestellt werden.

Die Zustandsübergänge in diesem Beispiel lassen sich mit Hilfe der aus der Physik bekannten Gleichungen berechnen:

$$v_{t+1} = v_t + Tu_t \quad (4)$$

$v_{t+1}$  ist die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t + 1$  und diese berechnet sich Anhand der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$  sowie der Beschleunigung, welche für einen Zeitraum  $T$  als Input vorhanden war. Da wir auch hier mit Ungenauigkeiten rechnen, wird auf diese Gleichung noch ein weiterer Störprozess  $\hat{v}_k$  aufaddiert.

Für die Position ergibt sich folgende Gleichung:

$$p_{t+1} = p_t + Tv_t + \frac{1}{2}T^2u_t + \hat{p}_t \quad (5)$$

Wobei  $\hat{p}_t$  wieder die Ungenauigkeit bzgl. der Position darstellt. Insgesamt ergibt sich für dieses System folgendes Gleichungssystem:

$$x_{t+1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} T^2 \div 2 \\ T \end{bmatrix} u_t + w_t \quad (6)$$

$$y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_t + z_k \quad (7)$$

### 3.2 Wahrscheinlichkeitstheorie

Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung von möglichen Ausgängen eines Zufallsexperimentes in die reellen Zahlen. Eine Zufallsvariable kann diskret oder stetig sein. Der Wurf

eines Würfels stellt eine diskrete Zufallsvariable dar, da die Ausprägungen der Variable diskrete Werte sind. Die Höchsttemperatur von Morgen dagegen ist eine stetige Zufallsvariable, weil ihre Ausprägungen stetig sind.

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen entspricht dem durchschnittlich zu erwartenden Wert der Variablen bei Ausführung eines Experimentes:

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m A_i p_i \quad (8)$$

Wobei die  $A_i$  den möglichen Ausprägungen der Zufallsvariablen, und die  $p_i$  den dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten entsprechen.

Beispiel Würfeln: Die möglichen Ausprägungen sind 1, 2, ..., 6, also die geworfene Augenzahl. Die Wahrscheinlichkeiten wurden bereits oben zu  $p_i = \frac{1}{6}$  berechnet. Dann ist der Erwartungswert:

$$E(X) = \sum (1)(\frac{1}{6}) + \dots + (6)(\frac{1}{6}) = 3.5 \quad (9)$$

Die Varianz einer Zufallsvariable ist die Abweichung vom Erwartungswert. Sie ist wie folgt definiert:

$$\sigma_X^2 = E[(X - \bar{x})^2] \quad (10)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f_X(x) dx \quad (11)$$

Die Standardabweichung  $\sigma$  einer Zufallsvariable ist die Wurzel der Varianz.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion einer Zufallsvariablen  $X$  ist wie folgt definiert:

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (12)$$

Und gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der  $X$  einen Wert kleiner gleich  $x$  annimmt. Sie trägt auch den Namen probability distribution function (PDF).

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist definiert als die Ableitung der Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$f_X = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (13)$$

Sie trägt auch den Namen probability density function (pdf). Einige Eigenschaften dieser Funktion:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(z) dz \quad (14)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \quad (15)$$

$$P(a < x \leq b) = \int_a^b f_x(x) dx \quad (16)$$

Eine Zufallsvariable heißt gauss- oder normalverteilt, wenn seine Dichtefunktion gegeben ist durch:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ \frac{-(x - \hat{x})^2}{2\sigma^2} \right] \quad (17)$$

Intuitiv bedeutet diese Verteilung, dass Werte welche nahe am Erwartungswert liegen

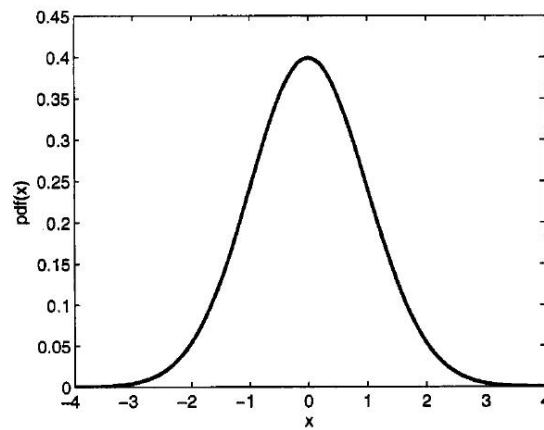


Abbildung 1: Gaussverteilung aus [Sim06]

(Spitze der Glocke in Abbildung 1) wahrscheinlicher sind, also solche welche weiter entfernt von dieser liegen.

Ein stochastischer Prozess ist einfach ausgedrückt eine Zufallsvariable, welche sich mit der Zeit ändert. Dabei unterscheidet man zeitdiskrete und zeitstetige stochastische Prozesse, je nachdem ob die Zeit diskret oder stetig ist, sowie von wertediskreten Prozessen, wenn die Werte diskret sind. Da ein stochastischer Prozess eine Zufallsvariable darstellt, welche sich mit der Zeit ändert, so ist auch die PFD dieser Variablen  $X(t)$  eine Funktion der Zeit:

$$F_X(x, t) = P(X(t) \leq x) \quad (18)$$

Die pdf ist dann:

$$f_X(x, t) = \frac{dF_X(x, t)}{dx} \quad (19)$$

Der Durchschnitt und die Kovarianz sind dann auch Funktionen der Zeit:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, t) dx \quad (20)$$

$$C_X(t) = E \{ [X(t) - \bar{x}(t)] [X(t) - \bar{x}(t)]^T \} \quad (21)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [x - \bar{x}(t)] [x - \bar{x}(t)]^T f(x, t) dx \quad (22)$$

### 3.3 Kleinste-Quadrate-Schätzer

In diesem Abschnitt wird eine Möglichkeit aufgezeigt, wie man mehrere ungenaue Messungen nutzen kann, um den Zustand einer oder mehrerer Variablen innerhalb eines linearen Systems zu schätzen. Dieser Schätzer nennt sich Kleinste-Quadrate-Schätzer (KQ-Schätzer) und wurde von Karl Friedrich Gauß bereits 1809 entwickelt. Der Kalman-Filter liegt der Idee des KQ-Schätzers zugrunde und dieser soll deswegen hier vorgestellt werden. Die Idee hinter dem KQ-Schätzer ist es den durchschnittlichen Messfehler, also den Abstand zwischen tatsächlichem und geschätztem Wert zu minimieren.

Es werden drei Arten vorgestellt: Der einfache Kleinste-Quadrate Schätzer ( 3.3.1) für Messungen, welche die selbe Genauigkeit besitzen, der gewichtete KQ-Schätzer ( 3.3.2) für Messungen, die unterschiedliche Genauigkeiten besitzen, sowie der rekursive KQ-Schätzer ( 3.3.3) welcher rekursiv arbeitet.

#### 3.3.1 einfacher Kleinste-Quadrate-Schätzer

Als Beispiel wollen wir den Wert einer konstanten unter Berücksichtigung von ungenauen Messwerten eines Messgerätes schätzen, und zwar den Widerstand eines Widerstands. Dazu verwenden wir Messungen welche sich wie folgt in einem Vektor darstellen lassen:

$$y_1 = H_{11}x_1 + \dots + H_{1n}x_n + v_1 \quad (23)$$

$$\vdots \quad (24)$$

$$y_k = H_{k1}x_1 + \dots + H_{kn}x_n + v_k \quad (25)$$

$x$  ist ein unbekannter  $n$ -Elementiger Vektor, welcher die einzelnen Widerstände darstellt.  $y$  ist ein  $k$ -Elementiger Messvektor, welcher eine Messungenauigkeit  $v$  enthält. Die Frage ist nach einer bestmöglichen Schätzung  $\hat{x}$  von  $x$ . Diese Gleichungen lassen sich in Matrix Form wie folgt aufschreiben:

$$y = Hx + v \quad (26)$$

Den Differenz zwischen den Messungen und dem Vektor  $H\hat{x}$ , bezeichnet als Residuum:

$$\epsilon_y = y - H\hat{x} \quad (27)$$

Nach Karl Gauß ist nun derjenige Vektor  $\hat{x}$  gesucht, welcher die Summe der quadratischen Abstände zwischen den beobachteten Werten  $y$  und dem Vektor  $H\hat{x}$  minimiert. Die zu minimierende Funktion sieht also wie folgt aus:

$$J = \epsilon_{y1}^2 + \dots + \epsilon_{yk}^2 \quad (28)$$

$$= \epsilon_y^T \epsilon_y \quad (29)$$

Wobei  $\epsilon_y^T$  den transponierten Vektor  $\epsilon_y$  darstellt. Wir können  $\epsilon_y$  ersetzen und erhalten folgende Funktion:

$$J = (y - H\hat{x})^T (y - H\hat{x}) \quad (30)$$

$$= y^T y - \hat{x}^T H^T y - y^T H \hat{x} + \hat{x}^T H^T H \hat{x} \quad (31)$$

Um die Funktion J zu minimieren berechnen wir die erste partielle Ableitung nach  $\hat{x}$  und setzen diese gleich Null.

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{x}} = -y^T H - y^T H + 2\hat{x}^T H^T H \quad (32)$$

$$= 0 \quad (33)$$

Lösen dieser Gleichung ergibt:

$$H^T y = H^T H \hat{x} \quad (34)$$

$$\hat{x} = (H^T H)^{-1} H^T y \quad (35)$$

Um auf der obige Problem zurück zu kommen:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} \quad (36)$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt:

$$\hat{x} = (H^T H)^{-1} H^T y = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

### 3.3.2 gewichteter Kleinst-Quadrate Schätzer

Der gewichtete KQ-Schätzer funktioniert analog zum einfachen KQ-Schätzer, nur dass hier die Messungen von Sensoren mit unterschiedlichen Ungenauigkeiten bzw. Varianzen gemacht wurden.



### 3.3.3 rekursiver Kleinste-Quadrate-Schätzer

Ein problem der vorherigen Schätzer ist, dass diese alle Messwerte betrachten, um eine Schätzung abzugeben. Jedoch ist dies für eine Implementierung in Software nicht günstig, da ein hoher Speicherplatzverbrauch und Rechenaufwand besteht. Der rekursive KQ-Schätzer berechnet seine Schätzungen nur anhand der zuvor berechneten Schätzung und dem aktuellen Messwert. Intuitiv befindet sich die Information aller vorherigen Messungen in der gerade gemachten Schätzung.

## 4 Kalman-Filter

Der Kalman-Filter ist ein (rekursiver) Kleinste-Quadrate-Schätzer für lineare Systeme. Unter gewissen Bedingungen garantiert der Kalman-Filter eine optimale Schätzung des Systemzustandes, d.h. es gibt keinen Filter, welcher über die Zeit bessere Ergebnisse erzielen kann als der Kalman-Filter. Im nachfolgenden soll der Filter anhand des Beispiels aus Sektion 3.1 erklärt werden. Zuersteinmal sollte man einige Voraussetzungen für den Einsatz eines Kalman-Filters zur Schätzung des Systemzustandes festhalten:

- Das System ist linear, oder zumindest durch lineare Gleichungen approximiert.
- Die den Messungen und dem System zugrundeliegenden Störungen stammen aus einer Normalverteilung mit Erwartungswert 0.
- Es besteht keine Korrelation zwischen den Störungen der Messungen und den Störungen des Systems, d.h. sie sind unabhängig voneinander.

Die Gleichungen des Filters sehen wie folgt aus. Dabei sei angemerkt, dass es in der Literatur verschiedene Formen dieser Gleichungen gibt, diese sind jedoch alle äquivalent zueinander [Sim06]. Die hier vorgestellte ist aus [Sim01]

$$K_t = AP_t C^T (CP_t C^T + S_z)^{-1} \quad (38)$$

$$\hat{x}_{t+1} = (A\hat{x}_t + Bu_t) + K_t(y_{t+1} - C\hat{x}_t) \quad (39)$$

$$P_{t+1} = AP_k A^T + S_w - AP_k C^T S_z^{-1} CP_k A^t \quad (40)$$

$P_{t+1}$  ist die Schätzfehler-Kovarianz Matrix.

$\hat{x}_{t+1}$  stellt den geschätzten Zustand des Systems zum Zeitpunkt  $t+1$  dar. Der erste Teil der Gleichung zeigt an, wie sich das System ohne Input verhält, d.h. im Beispiel, wenn die Beschleunigung Null ist. Der zweite Teil gibt vor, wie sich der Zustand des Systems bei einer Eingabe verändert, d.h. beschleunigt wird. Dabei ist die  $K_t$ -Matrix der sogenannte Kalman-Gain. Er gibt vor, wie stark die aktuelle Messung des Systemzustands in die Schätzung des Zustands eingeht. D.h. wenn die Messfehler-Kovarianz  $S_z = E(z_k z_k^T)$  groß ist, dann wird  $K$  klein, und der Messung wird kein so hoher Stellenwert gegenüber der

vorherigen Schätzung eingeräumt und umgekehrt.

In diesen Gleichungen stellt  $A^{-1}$  die inverse einer Matrix, und  $A^T$  das transponierte einer Matrix dar.  $S_w = E(w_k w_k^T)$  sind die System bzw. Messungfehler-Kovarianzen.

Um den Kalman-Filter anwenden zu können muss man Informationen über die Ungenauigkeiten der verwendeten Sensoren und das System selbst haben. In diesem Beispiel sei die Position des Autos mit einem Varianz von 10 Fuß gemessen. Die Beschleunigung soll konstante  $\frac{1 \text{ Fuß}}{\text{sek}^2}$  betragen und der Fehler  $\frac{0.2 \text{ Fuß}}{\text{sek}^2}$ . Die Position wird 10-mal pro Sekunde gemessen. Mit diesen Werten können wir die Systemgleichungen aus Abschnitt 3.1 füllen:

$$x_{t+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 0.005 \div 2 \\ 0.1 \end{bmatrix} u_t + w_t \quad (41)$$

$$y_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_t + z_k \quad (42)$$

Als nächstes werden die Matrizen  $S_w$  und  $S_z$  berechnet. Da die Position proportional zum 0.005-fachen der Beschleunigung ist, und das Rauschen der Beschleunigung  $\frac{0.2 \text{ Fuß}}{\text{sek}^2}$  berechnet sich die Varianz zu  $(0.005)^2 * (0.2)^2 = 10^{-6}$ . Analog ist die Geschwindigkeit  $v$  proportional zum 0.1-fachen der Beschleunigung und die Varianz des Rauschens damit  $(0.1)^2 * (0.2)^2 = 4 * 10^{-4}$ . Die Kovarianz zwischen dem Rauschen der Position und dem der Geschwindigkeit ergibt sich dann durch Multiplikation der Varianzen:  $(0.005 * 0.2) * (0.1 * 0.2)$ . Mit diesen Werten können wir nun die Systemfehler-Kovarianzmatrix  $S_w$  berechnen wie folgt:

$$S_w = E \left( \begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & v \end{bmatrix} \right) = E \begin{bmatrix} p^2 & pv \\ pv & v^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 2 \times 10^{-5} \\ 2 \times 10^{-5} & 4 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (43)$$

Als letztes ist es notwendig den Vektor  $\hat{x}_0$ , also die initiale Schätzung des Systemzustands und die dazugehörige initiale Matrix  $P_0$  zu bestimmen. Der Ablauf des Filter-Prozesses mit dem Kalman-Filter ist in Abbildung 2 dargestellt. Auf Grundlage der Initial Estimates, also der Initialwerte für den Systemzustand  $\hat{x}_0$  und dessen Unsicherheit  $P_0$  wird der Kalman-Gain berechnet und unter Berücksichtigung der aktuellen Messung wird eine neue Schätzung des Systemzustands, also der Position und Geschwindigkeit des Vehikels vorgenommen (Update Estimate). Daraufhin wird die Systemfehler-Kovarianzmatrix geupdated (Update Covariance). Jetzt wird eine Schätzung des Systemzustands zum Zeitpunkt  $k + 1$  vorgenommen der Kalman-Gain berechnet und wieder mit Hilfe einer erneuten Messung eine Schätzung der Position und Geschwindigkeit vorgenommen.

## 5 Fazit

## Literatur

[Mit07] H.B. Mitchell. *Multi-Sensor Data Fusion*. Springer, 2007.

[Sim01] Dan Simon. Kalman Filtering. *Embedded Systems Programming*, 2001.

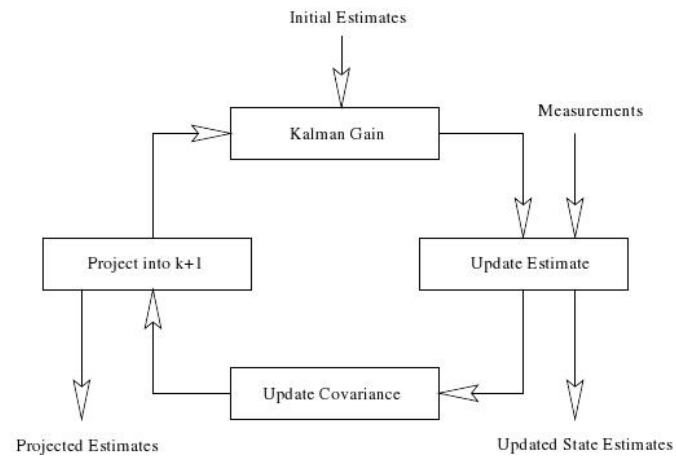


Abbildung 2: Ablauf des Filterprozesses.

[Sim06] David Simon. *Optimal State Estimation*. John Wiley Sons, 2006.

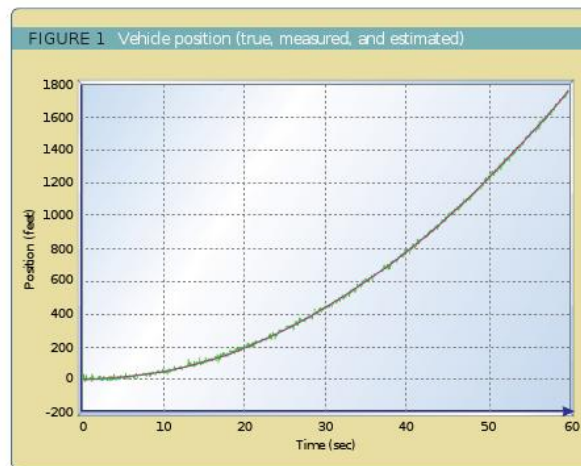


Abbildung 3: Vehikel Position. Tatsächliche (true), gemessene (measured) und geschätzte (estimate) aus [Sim01]

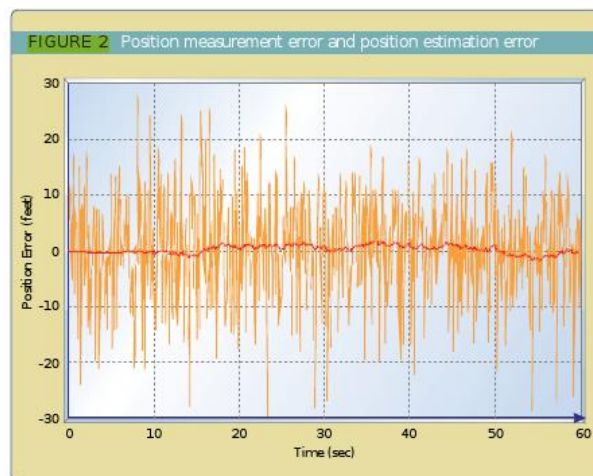


Abbildung 4: Positionmess- und Positionsschätzfehler aus [Sim01]