

# 1 Residuo del solido con inerzia nel metodo immerso

## 1.1 Formulazione del problema

Consideriamo un problema FSI con approccio *immersed domain*: il fluido è definito su tutto il dominio  $\Omega$ , mentre il solido occupa un sottodomini  $\Omega_s \subset \Omega$ . L'accoppiamento è gestito tramite moltiplicatori di Lagrange distribuiti su  $\Omega_s$ .

### 1.1.1 Equazioni governanti

**Fluido** (Navier-Stokes incomprimibile su  $\Omega$ ):

$$\rho_f \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} + \rho_f (\mathbf{u}_f \cdot \nabla) \mathbf{u}_f - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_f = 0 \quad (2)$$

**Solido** (Elastodinamica su  $\Omega_s$ ):

$$\rho_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{d}_s) + \mathbf{b}_s \quad (3)$$

dove  $\mathbf{d}_s$  è lo spostamento,  $\mathbf{v}_s = \partial \mathbf{d}_s / \partial t$  la velocità, e  $\mathbf{P}$  il primo tensore di Piola-Kirchhoff.

## 1.2 Schema partizionato

Ad ogni timestep, l'algoritmo iterativo è:

1. Imporre al solido la velocità del fluido:  $\mathbf{v}_s = T(\mathbf{u}_f)$
2. Calcolare il residuo del solido  $\mathbf{R}_s$  dovuto alla velocità imposta
3. Trasferire il residuo al fluido:  $\mathbf{f}_{\text{ext}} = T^T(\mathbf{R}_s)$
4. Risolvere le equazioni del fluido con  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$
5. Iterare fino a convergenza

## 1.3 Calcolo del residuo solido con inerzia

### 1.3.1 Dalla velocità imposta all'accelerazione

Quando imponiamo la velocità  $\mathbf{v}_s^{n+1} = T(\mathbf{u}_f^{n+1})$ , dobbiamo ricostruire l'accelerazione per il termine inerziale. Usando uno schema di Newmark o BDF:

**Schema BDF1 (Backward Euler):**

$$\mathbf{a}_s^{n+1} = \frac{\mathbf{v}_s^{n+1} - \mathbf{v}_s^n}{\Delta t} \quad (4)$$

**Schema BDF2:**

$$\mathbf{a}_s^{n+1} = \frac{3\mathbf{v}_s^{n+1} - 4\mathbf{v}_s^n + \mathbf{v}_s^{n-1}}{2\Delta t} \quad (5)$$

Lo spostamento si aggiorna analogamente:

$$\mathbf{d}_s^{n+1} = \mathbf{d}_s^n + \Delta t \mathbf{v}_s^{n+1} \quad (\text{BDF1}) \quad (6)$$

### 1.3.2 Definizione del residuo

Il residuo dell'elastodinamica è:

$$\boxed{\mathbf{R}_s = \rho_{\text{eff}} \mathbf{a}_s^{n+1} - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{d}_s^{n+1})} \quad (7)$$

dove  $\rho_{\text{eff}}$  è la densità effettiva da determinare.

## 1.4 Perché usare $\rho_s - \rho_f$ invece di $\rho_s$ ?

Questa è la domanda cruciale. La risposta dipende dalla **formulazione del fluido nella regione solida**.

### 1.4.1 Il problema della doppia inerzia

Nel metodo immerso, il fluido è risolto su **tutto** il dominio  $\Omega$ , inclusa la regione  $\Omega_s$ . Quindi l'equazione del fluido in  $\Omega_s$  contiene già un termine inerziale:

$$\rho_f \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} \quad \text{in } \Omega_s \quad (8)$$

Se il residuo del solido usasse la densità piena  $\rho_s$ :

$$\mathbf{R}_s = \rho_s \mathbf{a}_s - \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (9)$$

e questo venisse trasferito al fluido come forza esterna, avremmo:

$$\underbrace{\rho_f \mathbf{a}_f}_{\text{inerzia fluido in } \Omega_s} + \underbrace{\rho_s \mathbf{a}_s}_{\text{da } T^T(\mathbf{R}_s)} = \text{altre forze} \quad (10)$$

Poiché imponiamo  $\mathbf{v}_s = \mathbf{u}_f$  (e quindi  $\mathbf{a}_s = \mathbf{a}_f$ ) in  $\Omega_s$ , l'inerzia totale sarebbe:

$$(\rho_f + \rho_s) \mathbf{a} \quad \text{SBAGLIATO!} \quad (11)$$

### 1.4.2 La correzione

Per ottenere la corretta inerzia  $\rho_s \mathbf{a}$  nella regione solida, dobbiamo **sottrarre** l'inerzia del fluido già presente. Quindi:

$$\boxed{\mathbf{R}_s = (\rho_s - \rho_f) \mathbf{a}_s - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{d}_s)} \quad (12)$$

In questo modo:

$$\underbrace{\rho_f \mathbf{a}}_{\text{dal fluido}} + \underbrace{(\rho_s - \rho_f) \mathbf{a}}_{\text{dal residuo}} = \rho_s \mathbf{a} \quad \checkmark \quad (13)$$

## 1.5 Formulazione completa

### 1.5.1 Residuo del solido

$$\boxed{\mathbf{R}_s^{n+1} = (\rho_s - \rho_f) \frac{\mathbf{v}_s^{n+1} - \mathbf{v}_s^n}{\Delta t} - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{d}_s^{n+1})} \quad (14)$$

### 1.5.2 Algoritmo partizionato completo

Data la soluzione al tempo  $t^n$ , per trovare la soluzione a  $t^{n+1}$ :

1. **Inizializzazione:**  $\mathbf{u}_f^{(0)} = \mathbf{u}_f^n$ ,  $k = 0$
2. **Loop iterativo:** per  $k = 0, 1, 2, \dots$  fino a convergenza:

(a) Trasferire velocità al solido:

$$\mathbf{v}_s^{(k+1)} = T(\mathbf{u}_f^{(k)}) \quad (15)$$

(b) Aggiornare spostamento solido:

$$\mathbf{d}_s^{(k+1)} = \mathbf{d}_s^n + \Delta t \mathbf{v}_s^{(k+1)} \quad (16)$$

(c) Calcolare accelerazione:

$$\mathbf{a}_s^{(k+1)} = \frac{\mathbf{v}_s^{(k+1)} - \mathbf{v}_s^n}{\Delta t} \quad (17)$$

(d) Calcolare residuo solido (con densità corretta):

$$\mathbf{R}_s^{(k+1)} = (\rho_s - \rho_f) \mathbf{a}_s^{(k+1)} - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{d}_s^{(k+1)}) \quad (18)$$

(e) Trasferire al fluido:

$$\mathbf{f}_{\text{ext}}^{(k+1)} = T^T(\mathbf{R}_s^{(k+1)}) \quad (19)$$

(f) Risolvere Navier-Stokes:

$$\rho_f \frac{\mathbf{u}_f^{(k+1)} - \mathbf{u}_f^n}{\Delta t} + \rho_f (\mathbf{u}_f^{(k+1)} \cdot \nabla) \mathbf{u}_f^{(k+1)} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f + \mathbf{f}_{\text{ext}}^{(k+1)} \quad (20)$$

(g) Verificare convergenza:  $\|\mathbf{u}_f^{(k+1)} - \mathbf{u}_f^{(k)}\| < \text{tol}$

3. **Aggiornamento:**  $\mathbf{u}_f^{n+1} = \mathbf{u}_f^{(k+1)}$ ,  $\mathbf{d}_s^{n+1} = \mathbf{d}_s^{(k+1)}$ , ecc.

## 1.6 Osservazioni importanti

- Se  $\rho_s = \rho_f$  (solido con stessa densità del fluido), il termine inerziale nel residuo si annulla e rimane solo il contributo elastico: si recupera il caso quasi-statico.
- Se  $\rho_s > \rho_f$  (solido più denso), il termine  $(\rho_s - \rho_f)\mathbf{a}_s$  è positivo e aggiunge inerzia.
- Se  $\rho_s < \rho_f$  (solido meno denso, es. bolla), il termine è negativo, riducendo l'inerzia effettiva—fisicamente corretto!
- Questo approccio è noto come **added mass correction** o **density difference formulation** nella letteratura sui metodi immersi.

## 1.7 Trasferimento del residuo al fluido e scalatura

### 1.7.1 Unità di misura del residuo solido

Il residuo calcolato sul solido è:

$$\mathbf{R}_s = (\rho_s - \rho_f) \mathbf{a}_s - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{d}_s) \quad (21)$$

Dopo discretizzazione FEM, il sistema algebrico è:

$$\mathbf{R}_s^h = M_s \mathbf{a}_s - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d}_s) \quad (22)$$

dove:

- $M_s$  è la matrice di massa [kg]
- $\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d}_s)$  è il **vettore** delle forze interne elastiche [N]

Nel caso di elasticità lineare, il vettore delle forze interne si scrive come:

$$\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d}_s) = K_s \mathbf{d}_s \quad (23)$$

dove  $K_s$  è la **matrice** di rigidezza [N/m]. Nel caso non lineare (grandi deformazioni),  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  è una funzione non lineare di  $\mathbf{d}_s$ .

**Le unità di misura sono:**

- $\mathbf{R}_s^h$  ha unità di **forza** [N] (forza nodale concentrata)
- Questo perché la formulazione debole integra sul volume:  $\int_{\Omega_s} \phi_i (\rho_s \mathbf{a} - \nabla \cdot \mathbf{P}) dV$

Nel caso quasi-statico (senza inerzia), il residuo è semplicemente:

$$\boldsymbol{\lambda} = K_s \mathbf{d}_s = \mathbf{F}_{\text{int}} \quad (24)$$

e  $\boldsymbol{\lambda}$  ha unità di **forza nodale** [N].

### 1.7.2 L'operatore di trasferimento $B$ e la sua trasposta

Definiamo l'operatore  $B$  che interpola la velocità del fluido sui nodi del solido:

$$\mathbf{v}_s = B \mathbf{u}_f \quad (25)$$

Se  $B$  è costruito come media pesata con funzioni di forma  $\phi_k$ :

$$B_{ij} = \frac{\int_{\Omega_s} \phi_i(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^f) dV}{\int_{\Omega_s} \phi_i(\mathbf{x}) dV} \quad (26)$$

dove la normalizzazione per righe rende  $\sum_j B_{ij} = 1$ , allora  $B$  è **adimensionale**.

**Problema:** Quando si usa  $B^T$  per trasferire le forze:

$$\mathbf{F}_f = B^T \boldsymbol{\lambda} \quad (27)$$

la forza trasferita  $\mathbf{F}_f$  ha le stesse unità di  $\boldsymbol{\lambda}$ , cioè [N] (forza concentrata sulla cella fluido).

### 1.7.3 Scalatura per il metodo di proiezione

Nel metodo di proiezione esplicito, l'equazione della quantità di moto per la velocità intermedia è:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n + \Delta t \left[ -(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \nu \nabla^2 \mathbf{u}^n + \frac{\mathbf{f}}{\rho_f} \right] \quad (28)$$

dove  $\mathbf{f}$  è una **forza per unità di volume** [N/m<sup>3</sup>].

**Passaggi per la scalatura corretta:**

1. **Forza nodale dal solido:**  $\boldsymbol{\lambda} = K_s \mathbf{d}_s$  [N]
2. **Trasferimento al fluido:**  $\mathbf{F}_f = B^T \boldsymbol{\lambda}$  [N] (forza sulla cella fluido)
3. **Conversione in forza per unità di volume:**

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}_f}{V_{\text{cella}}} = \frac{\mathbf{F}_f}{\Delta x \cdot \Delta y} \quad [\text{N}/\text{m}^3] \text{ in 2D}$$

(29)

oppure  $\mathbf{f} = \mathbf{F}_f / (\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)$  in 3D.

4. **Applicazione nella velocità intermedia:**

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n + \Delta t \left[ \text{altri termini} + \frac{\mathbf{f}}{\rho_f} \right] \quad (30)$$

#### 1.7.4 Formula finale per l'implementazione

Combinando tutti i fattori, la correzione di velocità dovuta alla forza del solido è:

$$\boxed{\Delta \mathbf{u} = -\frac{\Delta t}{\rho_f \cdot \Delta x \cdot \Delta y} B^T (K_s \mathbf{d}_s)} \quad (31)$$

Il segno negativo dipende dalla convenzione: se  $\lambda$  rappresenta la forza che il solido esercita *sul* fluido, il segno è positivo; se rappresenta la reazione, è negativo.

#### 1.7.5 Caso alternativo: $B$ non normalizzato

Se l'operatore  $B$  è costruito *senza* normalizzazione per righe, includendo i pesi di quadratura e il Jacobiano:

$$B_{ij} = \sum_q w_q \phi_i(\mathbf{x}_q) J_q \delta(\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_j^f) \quad (32)$$

allora  $B_{ij}$  ha unità di [ $\text{m}^2$ ] (area) in 2D. In questo caso:

- $\mathbf{v}_s = B \mathbf{u}_f$  richiederebbe normalizzazione per l'area nodale
- $\mathbf{F}_f = B^T \boldsymbol{\sigma}$  dove  $\boldsymbol{\sigma}$  è uno *stress* [ $\text{N}/\text{m}^2$ ] darebbe direttamente una forza [N]

È fondamentale essere consistenti tra la costruzione di  $B$  e l'interpretazione delle quantità trasferite.

### 1.8 Riferimenti

Questa formulazione è consistente con i lavori su:

- Immersed Finite Element Method (IFEM) - Zhang, Liu, Gay (2004)
- Distributed Lagrange Multiplier/Fictitious Domain (DLM/FD) - Glowinski, Pan, Hesla, Joseph (1999)
- Immersed Boundary Method con massa - Peskin, Printz (1993)