continuidad de $V(x)$, $V(p) = \lim_{n\to\infty} V(x(t_n)) = a$. Por tanto $V(x) = a$ en L^+. Puesto que (por el lema 3.3.1) L^+ es un conjunto invariante, $\dot{V}(x) = 0$ en L^+, Así que,

$$L^+ \subset M \subset E \subset \Omega$$

Como $x(t)$ está acotada, x(t) se aproxima a a L^+ cuando $t \to \infty$ (lema 3.3.1), y por tanto, $x(t)$ se aproxima a M cuando $t \to \infty$. □

El teorema 3.3.1 se conoce con el nombre de Teorema de LaSalle. Es interesante hacer notar que el teorema no exige, como en el caso del teorema de Lyapunov que la función $V(x)$ sea definida positiva. Si imponemos esta condición, podemos obtener dos modificaciones del teorema de LaSalle que nos permiten determinar la estabilidad asintótica de un sistema.

Corolario 3.3.1 (Teorema de Barbashim-Krasovskii I [2]). *Sea $x = 0$ un punto de equilibrio asintóticamente estable para el sistema 3.16. Sea $V : D \to \mathbb{R}$ una función continua, diferenciable, definida positiva en el dominio D, que contiene al origen $x = 0$, tal que $\dot{V}(x) \le 0$ en D. Sea el conjunto $S = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$ y supongamos que no hay ninguna solución que pueda permanecer en S, excepto la solución trivial $x(t) \equiv 0$. Entonces el origen es asintóticamente estable.* □

Corolario 3.3.2 (Teorema de Barbashim-Krasovskii II). *Sea $x = 0$ un punto de equilibrio para el sistema 3.16. Sea $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua, diferenciable, no acotada radialmente y definida positiva, tal que $\dot{V}(x) \le 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Sea el conjunto $S = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$ y supongamos que no hay ninguna solución que pueda permanecer en S, excepto la solución trivial $x(t) \equiv 0$. Entonces el origen es asintóticamente estable de modo global.* □

Ejercicios

1. Encontrar los puntos singulares de los siguientes sistemas. Linealizar las ecuaciones en su entorno y determinar la naturaleza de dichos puntos singulares.

   a)
   $$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(1 - x_2^2)\end{aligned}$$

   b)
   $$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1|x_1|\\ \dot{x}_2 &= 1 - x_1\end{aligned}$$

   c)
   $$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(1 - x_2)\\ \dot{x}_2 &= x_2(x_1 - 1)\end{aligned}$$

2. El modelo de Volterra-Lotka puede alterarse de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_1 x_2 - \mu x_1^2\\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 - x_2 - \tau x_2 \dot{x}_1\end{aligned}$$

[2] Hay tres teoremas debidos a los mismos autores, todos ellos relacionados con estabilidad asintótica. Los dos que se definen aquí, fueron demostrados por sus autores con anterioridad al teorema de LaSalle. Después de la demostración de éste último, quedaron como simples corolarios

Donde $\mu > 0$ representa el efecto de las enfermedades y de la superpoblación de las presas y el término $\tau > 0$ modela el efecto que tiene la alimentación sobre los depredadores. Encontrar los puntos de equilibrio, linealizar en torno a aquel cuyas dos variables de estado son distintas de cero y mostrar como su estabilidad o inestabilidad dependen de μ y τ. Discutir la posibilidad de la existencia de un ciclo límite.

3. El modelo caótico de Rössler viene descrito por las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_1x_2 - x_3\\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - ax_2\\ \dot{x}_3 &= bx_1 - cx_3\end{aligned}$$

Encontrar sus puntos de equilibrio, linealizar en torno a ellos. Para $a = 0{,}1,\ b = 0{,}1,\ c = 14$ discutir la estabilidad o inestabilidad de los puntos de equilibrio. Simular el comportamiento del sistema para distintas condiciones iniciales. Representar la evolución de las variables de estado en el tiempo y el diagrama de fases.

4. Dado el sistema,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(x_1^2 - 1)\end{aligned}$$

Encontrar el dominio de atracción de su punto de equilibrio

5. Demostrar la estabilidad asintótica global del sistema,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - \gamma x_2, \gamma > 0\end{aligned}$$

(Usar $\frac{x_1^4}{4} + \frac{x_2^2}{2}$ como función candidata de Liapunov)

6. Dado el sistema,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + 2x_1^2 + x_1x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + x_1x_2 + 3x_2^2\end{aligned}$$

Emplear la función[3] $V(x) = \frac{3x_1^2}{2} + x_1x_2 + x_2^2$ Como función candidata de Lyapunov para estudiar el tipo de estabilidad del sistema. Encontrar el dominio de atracción determinado por $V(x)$.

7. Dado el sistema,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -\sin(x_1) - \epsilon x_2,\ \epsilon > 0\end{aligned}$$

y la función candidata de Lyapunov $V(x) = 1 - \cos(x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$. Encontrar el mayor valor (V_0) de $V(x)$ de modo que la región conexa $V(x) < V_0$ sea un dominio de atracción del punto de equilibrio (0,0).

[3] Esta función de Lyapunov puede obtenerse a partir de la ecuación de Lyapunov, para el sistema linealizado en torno al punto de equilibrio. ver sección 6.1.1

8. Encontrar un dominio de atracción para el sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2^2$$

Probar para ello las funciones de Lyapunov,

$$V_1(x) = x_1^2 + x_2^2$$
$$V_2(x) = x_1^2 - x_1 x_2 + \frac{3x_2^2}{2}$$

9. Dado el sistema,

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_1 x_2$$

a) Linealizar el sistema en torno al punto de equilibrio y estudiar su estabilidad.

b) Empleando la función[4] $V(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ como función candidata de Lyapunov, estudiar la estabilidad del punto de equilibrio y su dominio de atracción.

[4] Esta función de Lyapunov puede obtenerse a partir de la ecuación de Lyapunov, para el sistema linealizado en torno al punto de equilibrio. ver sección 6.1.1