Ejercicios

1. El modelo de Volterra-Lotka estudia la evolución de un sistema formado por dos poblaciones una de depredadores y otra de presas que conforman un ecosistema cerrado.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 - cx_1x_2\\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + dx_1x_2\\ &a, b, c, d \in \mathbb{R}^+,\end{aligned}$$

donde x_1 representa la población de presas; x_2 la de depredadores; a la tasa de nacimiento de las presas, que es función de la cantidad de alimento que reciben; b es la tasa de defunción de los depredadores;c y d modelan la interacción entre los depredadores y las presas.

   a) Simular el modelo de Volterra-Lotka para parámetros fijos, por ejemplo $a = b = c = d = 1$. Emplear para ello tanta Matlab como Simulink. Emplear distintas condiciones iniciales. Obtener tanto un gráfico de la evolución temporal de los estados como el diagrama de fases.

   b) Modificar el modelo, de modo que el parámetro a pase a ser un una función periódica $a = \frac{a_0}{2}\sin(\omega t) + \frac{a_0}{2}$. Estudiar el efecto de la frecuencia en el modelo.

2. El modelo de Lorenz, fue propuesto en 1963 por Edward Lorenz como un modelo simplificado de convección atmosférica.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1)\\ \dot{x}_2 &= x_1(\rho - x_3) - x_2\\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - \beta x_3\\ &\sigma, \rho, \beta \in \mathbb{R}^+\end{aligned}$$

Para los valores $\sigma = 10$, $\beta = 8/3, \rho = 28$ el sistema exhibe soluciones caóticas; para casi todas las condiciones iniciales el sistema converge a un conjunto invariante conocido con el nombre de Atractor de Lorentz.

   a) Utilizar tanto Matlab como Simulink para simular el modelo de Lorenz. Emplear para ello los parámetros indicados más arriba.

   b) Comprobar mediante simulación, que para $\rho < 1$, el sistema converge a su único punto de equilibrio. Para $\rho = 1$ el sistema sufre una bifurcación de horquilla, Obtener los puntos de equilibrio del sistema y comprobarlo.

3. La siguiente ecuación diferencial, define un modelo lineal, conocido a veces como el modelo Masa-Muelle-Amortiguador,

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F(t),$$

donde y es la posición del sistema, m representa la masa, c es un coeficiente de amortiguamiento, y k es una constante recuperadora, $F(t)$ representa una fuerza externa. El modelo es genérico en el sentido de que reproduce el símil mecánico de sistemas de muy diverso tipo.

   a) Obtener el modelo equivalente en variable de estados, de modo que una variable de estado sea la posición del sistema y y la otra la velocidad $\dot{y}$

   b) Simular el modelo para valores $m = 2{,}5Kg$, $c = 0{,}6Ns/m$ y $k = 0{,}4N/m$, empelando Matlab. Considerar los siguientes casos,

c) La señal de entrada F es nula. Probar para distintos valores de las condiciones iniciales: $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$; $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$; $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$. Representar la evolución temporal de los estado durante un intervalo de $50s$.

d) La señal de entrada es una fuerza constante de $1N$.

e) La señal de entrada es una sinusoide de frecuencia $0{,}1rad/s$. Representar en un mismo gráfico la evolución temporal de la señal de entrada y de la señal de salida en un intervalo de $200s$. ¿Qué desfase se observa entre la entrada y la salida para un tiempo mayor a $50s$? ¿Está estabilizada la señal de salida?

f) repetir el apartado 3e), para señales sinusoidales de frecuencias, $0{,}4rad/s$ y $1rad/s$ ¿Cuánto tarda en estabilizarse la señal en estos casos? ¿Qué conclusión se puede extraer del análisis de los resultados de estos dos últimos ejercicios?

4. Empleando las ecuaciones 2.35 y 2.36 para el modelo de un péndulo invertido sin par externo,

   a) Linealizar el sistema en torno al punto de equilibrio $\theta = \pi$.

   b) simular mediante matlab tanto el sistema original como el linealizado. Emplear para ello $m = g = l = b = 1$. Considerar como condiciones iniciales para X_1 distintos ángulos cada vez más alejados de π y p $x_2 = 0$ en todos los casos. Representar en un mismo gráfico la evolución temporal de x_1 para el sistema original y el linealizado. Discutir la validez de la aproximación lineal en función del las condiciones iniciales empleadas.

5. Dado el sistema,

$$\dot{x}_1 = -x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) - x_1$$

   a) Obtener un diagrama de fases del sistema, empleando para ello Matlab. Comprobar gráficamente que el círculo $x_1^2 + x_2^2 = 1$ marca el límite de la región de estabilidad del punto de equilibrio del sistema $(0, 0)$. Pista: una manera clara de obtener el resultado es integrar para un intervalo de tiempo negativo, en ese caso, el límite de estabilidad se convierte en un ciclo límite.

   b) Comprobar que el resultado de integrar el sistema para un tiempo negativo es idéntico a obtener las soluciones del sistema presentado en el ejemplo 2.4.7, tomando $\mu = 1$.