

Práctica 2: Ejercicios del tema 3

Marcial Antonio Barajas Martín

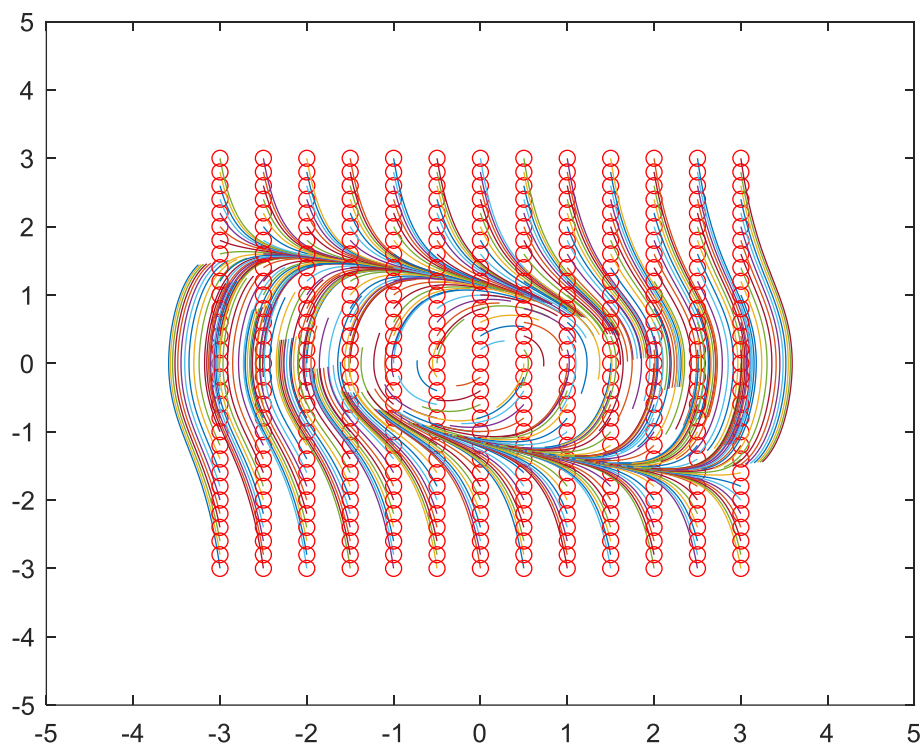
DNI: 03919846-W

Ejercicio 1. Encontrar los puntos singulares de los siguientes sistemas. Linealizar las ecuaciones en su entorno y determinar la naturaleza de dichos puntos singulares.

a)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(1 - x_2^2) \end{aligned}$$

El punto de equilibrio de este sistema es $[0,0]$, vemos que la representación es:



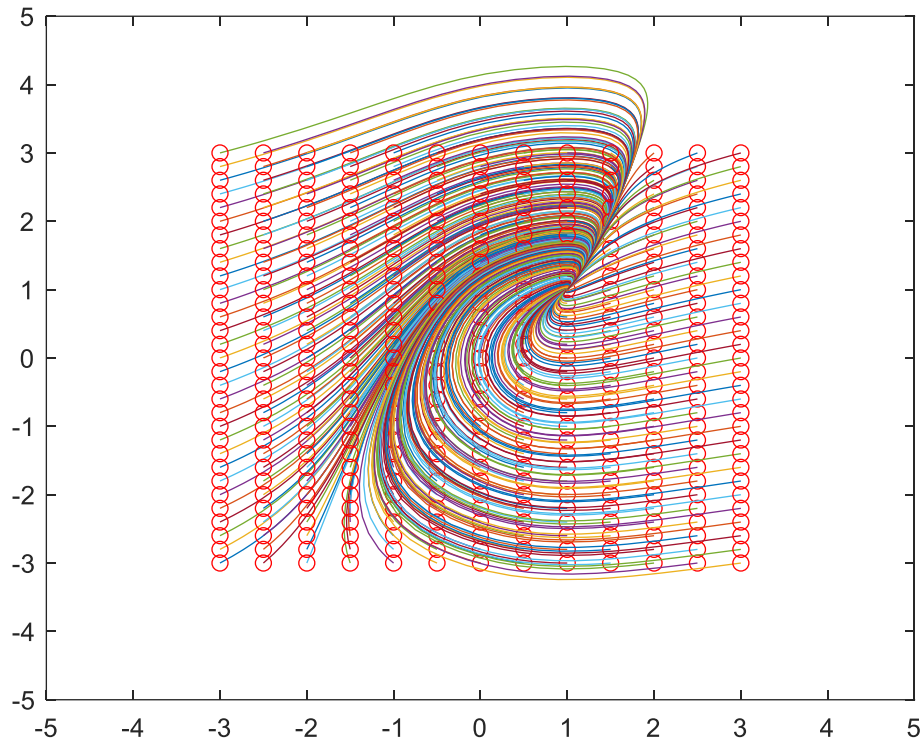
Por lo que vemos, el punto de equilibrio es un foco inestable

b)

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1|x_1|$$

$$\dot{x}_2 = 1 - x_1$$

El punto singular en sistema de ecuaciones es [1,1] y su gráfica es:



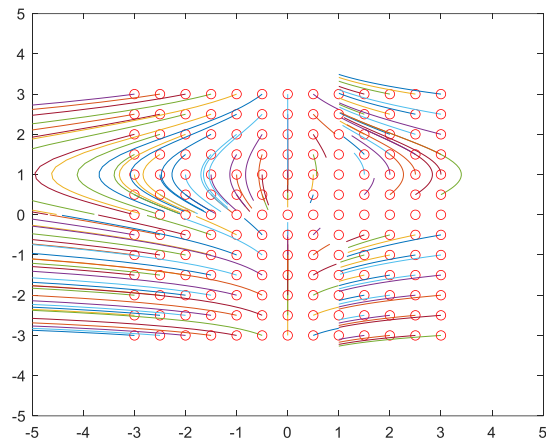
Por lo que vemos en la gráfica, el punto de equilibrio es un nodo estable

c)

$$\dot{x}_1 = x_1(1 - x_2)$$

$$\dot{x}_2 = x_2(x_1 - 1)$$

Los puntos de equilibrio de este sistema son [0,0] y [1,0], su representación es:



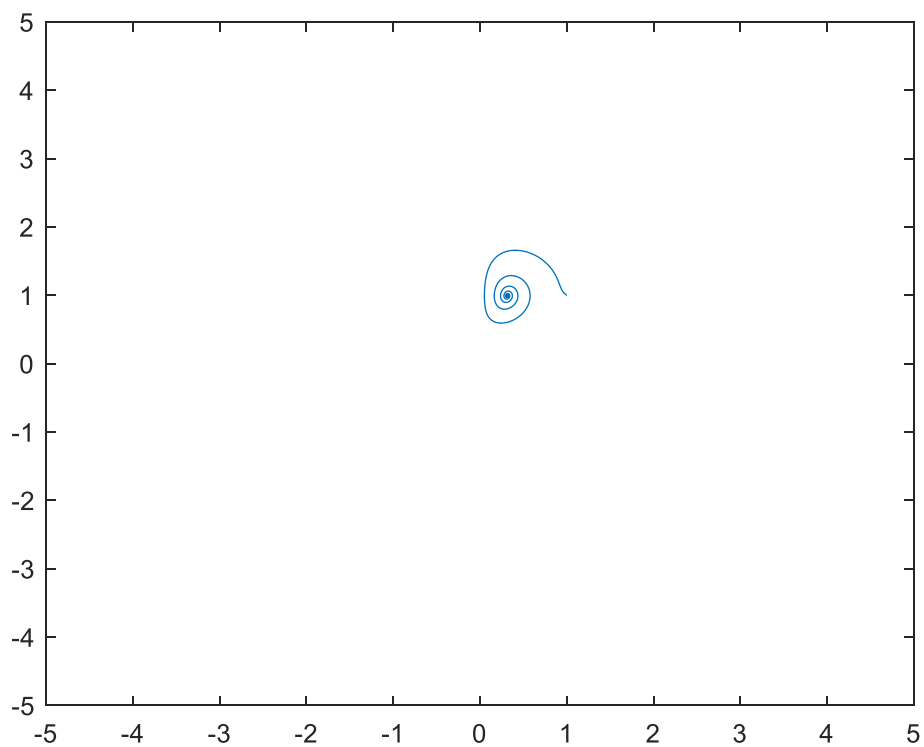
Vemos que el punto $[1,0]$ es el punto donde está convergiendo todas las gráficas

Ejercicio 3.- Para el modelo caótico de Rössler con los parámetros $a=0.1$, $b=0.1$, $c=14$, tenemos los puntos de equilibrio:

$$P_1 = [0,0,0]$$

$$P_2 = [-0.31, 0.99, -0.0023]$$

$$P_3 = [0.31, 0.99, 0.0023]$$



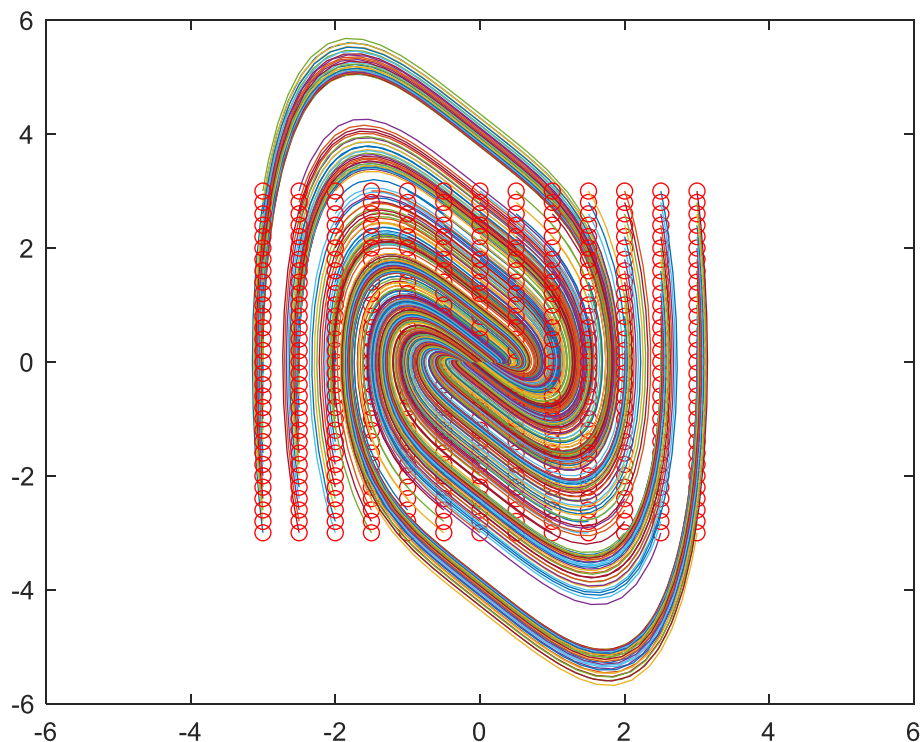
Representación del modelo con los parámetros dados

De aquí vemos que el único punto de equilibrio estable es P_3 , que es donde el sistema converge

Ejercicio 5.- Para el estudio de la estabilidad asintótica global del sistema,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - \gamma x_2, \gamma > 0 \end{aligned}$$

La representación del sistema es:



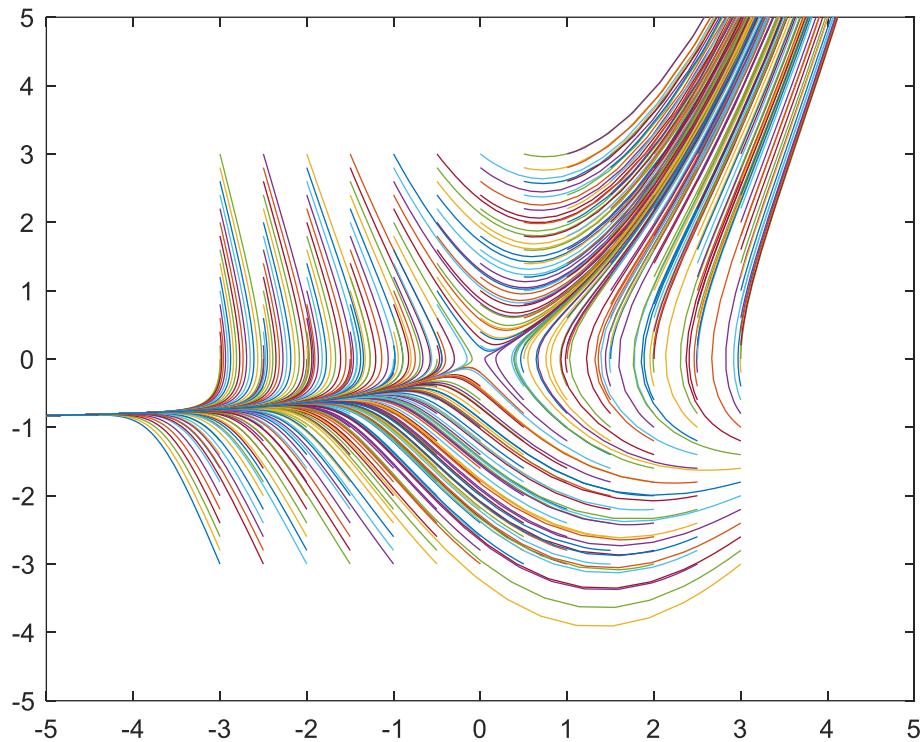
Representación Gráfica del sistema

Ahora, usando la función candidata de Lyapunov: $\frac{x_1^4}{2} + \frac{x_2^2}{2}$, el gradiente de esta función candidata es $\nabla = x_1^3 + x_2$, como este gradiente es positivo para los valores del dominio mayores que 0 y negativo para los valores negativos del dominio, por lo que vemos que el sistema es asintóticamente estable, ya que no sobrepasa los valores $x=-3$ y $x=3$, también vemos que para los valores $y=6$, $y=-6$, la gráfica no sobrepasa de ahí.

Ejercicio 9. El sistema dado es:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + x_1x_2\end{aligned}$$

Si representamos el sistema de ecuaciones diferenciales, ya linealizado:



Representación del sistema ya linealizado

En la figura vemos que el punto de equilibrio está tornando el $[0,0]$, es un punto de silla (inestable).

Ahora, con la función candidata de Lyapunov $V(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$

El gradiente de esta función es: $\nabla V = (3x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$

Como vemos, en este gradiente los valores van a depender del dominio donde estemos, para los valores de $x_1, x_2 > 0$ la función de Lyapunov será positiva y negativa para los valores de x_1x_2