SPRAWOZDANIE NR 3

OBLICZENIA NAUKOWE

AUTOR: MARCIN ADAMCZYK
NR INDEKSU: 221 429

ZAD 1

1. Wstęp
   Zadanie polegało na napisaniu funkcji rozwiązującej równanie $f(x) = 0$ metodą bisekcji.

2. Funkcja:

   Input:
   1. Funkcja, której pierwiastek mamy wyznaczyć
   2. Końce przedziału, w którym szukamy rozwiązania
   3. Parametry dokładności obliczeń (wielkości przedziału i odległości od rzeczywistego „zera”)

   Działanie:
   1. Sprawdzenie poprawności przedziału,
   2. Obliczenie wartości funkcji dla zadanych krańców przedziału,
   3. Sprawdzenie czy znaki obliczonych wartości różnią się od siebie, (jeśli nie – zwróć error)
   4. Wyznaczenie środka przedziału,
   5. Obliczenie wartości funkcji dla wyznaczonego środka,
   6. Porównanie znaku otrzymanej wartości ze znakami wartości funkcji w końcach przedziału i ustalenie połowy w której funkcja zmienia znak jako nowego przedziału poszukiwań,
   7. Powtarzaj kroki 4 – 6 dopóki wartość funkcji w środku przedziału lub długość badanego przedziału będą mniejsze, od zadanych jako parametry wartości.

   Output:
   1. Przybliżona wartość pierwiastka
   2. Wartość funkcji dla obliczonego pierwiastka
   3. Liczba przebiegów pętli (iteracji)
   4. Flaga błędu

ZAD 2

1. Wstęp
   Zadanie polegało na napisaniu funkcji rozwiązującej równanie $f(x) = 0$ metodą Newtona.

2. Funkcja:
   Input:
   1. Funkcja, której pierwiastek mamy wyznaczyć
   2. Pochodna powyższej funkcji
   3. Przybliżenie początkowe
   4. Parametry dokładności obliczeń (odległość kolejnych wyznaczanych punktów od siebie i odległości od rzeczywistego „zera”),
   5. Maksymalna ilość iteracji

Działanie:

1. Policzenie wartości funkcji dla zadanego przybliżenia,
2. Sprawdzenie czy nie osiągnęliśmy wymaganej precyzji wartości,
3. Sprawdzenie, czy wartość pochodnej w badanym punkcie nie jest bliska 0,
4. Obliczenie nowego punktu wg formuły: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f`(x_0)}$
5. Zakończenie działania funkcji w przypadku gdy:
    a. Różnica między poprzednim punktem a nowym jest mniejsza od zadanej jako parametr wartości (delta)
    b. Wartość funkcji dla nowego punktu jest mniejsza od zadanej jako parametr wartości (epsilon)
    c. Osiągnięto maksymalną liczbę iteracji.
6. Powtarzanie sekwencji od kroku nr 3 do momentu zakończenia działania przez spełnienie jednego z warunków w kroku nr 5.

Output:

1. Przybliżona wartość pierwiastka
2. Wartość funkcji dla obliczonego pierwiastka
3. Liczba przebiegów pętli (iteracji)
4. Flaga błędu

ZAD 3

1. Wstęp
   Zadanie polegało na napisaniu funkcji rozwiązującej równanie $f(x) = 0$ metodą siecznych.

2. Funkcja:
   Input:
    1. Funkcja, której pierwiastek mamy wyznaczyć
    2. Dwa punkty początkowe
    3. Parametry dokładności obliczeń (odległość kolejnych wyznaczanych punktów od siebie i odległości od rzeczywistego „zera"),
    4. Maksymalna ilość iteracji

   Działanie:
    1. Policzenie wartości funkcji dla zadanych punktów początkowych
    2. W przypadku gdy wartość funkcji dla pierwszego punktu jest większa od drugiego zamiana (swap) wartości punktów oraz wartości funkcji w tych punktach,
    3. Obliczenie nowego punktu za pomocą formuły: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$
    4. Ustawienie x_{n+1} oraz x_n jako rozpatrywane punkty
    5. Policzenie wartości funkcji w punkcie x_{n+1}
    6. Zakończenie działania funkcji w przypadku gdy:
        a. Różnica między poprzednim punktem a nowym jest mniejsza od zadanej jako parametr wartości (delta)
        b. Wartość funkcji dla nowego punktu jest mniejsza od zadanej jako parametr wartości (epsilon)
        c. Osiągnięto maksymalną liczbę iteracji.
    7. Powtarzanie sekwencji od kroku nr 2 do momentu zakończenia działania przez spełnienie jednego z warunków w kroku nr 6.

Output:
1. Przybliżona wartość pierwiastka
2. Wartość funkcji dla obliczonego pierwiastka
3. Liczba przebiegów pętli (iteracji)
4. Flaga błędu

ZAD 4

1. Wstęp

Zadanie polegało na wyznaczeniu pierwiastka równania $\sin(x) - \left(-\frac{1}{2}x\right)^2 = 0$ za pomocą napisanych wcześniej metod dla zadanych parametrów:
1. Dla metody bisekcji przedział początkowy: [1.5, 2.0]
2. Dla metody Newtona przybliżenie początkowe $x_0 = 1.5$
3. Dla metody siecznych przybliżenia początkowe $x_0 = 1.0,\ x_1 = 2.0$

Parametry dokładności obliczeń były dla wszystkich takie same i wynosiły:
1. Delta ($\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$)
2. Epsilon ($\varepsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$)

2. Wyniki i wnioski

	Miejsce zerowe (x)	Wartość funkcji $f(x)$	Iteracje
Metoda bisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	17
Metoda Newtona	1.933753779789742	-2.2423316314856834e-8	4
Metoda siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4

Jak widać metoda bisekcji wykonała aż 17 iteracji, a w efekcie końcowym dała najmniej dokładny wynik.
Dużo lepiej pod względem wykonanych przebiegów pętli wypadają metody Newtona i siecznych, osiągając wymaganą dokładność już po 4 iteracjach. Jednak metoda Newtona osiągnęła znacznie dokładniejszy wynik, więc to ona jest zdecydowanym zwycięzcą w tym porównaniu.

ZAD 5

1. Wstęp

Zadanie polegało na wyznaczeniu za pomocą metody bisekcji punktów przecięcia wykresów funkcji:

$$y = 3x$$
$$y = e^x$$

Parametry dokładności obliczeń wynosiły:
1. Delta ($\delta = 10^{-4}$)
2. Epsilon ($\varepsilon = 10^{-4}$)

2. Rozwiązanie

Aby wykresy funkcji przecięły się, muszą one przyjmować taką samą wartość dla danego argumentu (właśnie jego szukamy). Ponieważ jednak metoda bisekcji zaimplementowana przeze mnie nie porównuje dwóch funkcji, a jedynie wyszukuje pierwiastek zadanej funkcji, korzystam z faktu, że w miejscu gdzie funkcje mają tą samą wartość, ich różnica wynosi 0. Dlatego jako parametr, do metody bisekcji przekazuję: $e^x - 3x$, czyli różnice naszych funkcji.

Po krótkiej analizie wykresów funkcji stwierdziłem, że pierwszym przedziałem, który będę badał, będzie [0.0, 1.0]. Jak się okazało, faktycznie, funkcja zakończyła swoje działanie sukcesem. Podobnie dla następnego przedziału, który wybrałem, czyli [1.0, 2.0].

Przedział	x	$e^x - 3x$	iteracje
[0.0, 1.0]	0.619140625	-9.066320343276146e-5	9
[1.0, 2.0]	1.5120849609375	-7.618578602741621e-5	13

ZAD 6

1. Wstęp

   Zadanie polegało na wyznaczeniu za pomocą metod bisekcji, Newtona oraz siecznych pierwiastków funkcji:

$$f(x) = e^{1-x} - 1$$
$$g(x) = xe^{-x}$$

Parametry dokładności obliczeń wynosiły:

1. Delta ($\delta = 10^{-5}$)
2. Epsilon ($\varepsilon = 10^{-5}$)

2. Rozwiązania i wyniki:

Dla $f(x) = e^{1-x} - 1$:

Pierwszym zadanie jest wyznaczenie odpowiednich przedziałów. Patrząc na funkcję, można stwierdzić, że rozwiązaniem będzie x = 1.
W takim wypadku dla metody bisekcji unikam wybrania przedziału, w którego środku znajduje się pierwiastek, ponieważ metoda zakończyłaby działanie już po jednej iteracji, a to mija się z celem zadania.
W metodzie Newtona należy pamiętać o wybraniu początkowego przybliżenia uważnie, ponieważ funkcja bardzo szybko „wypłaszacza się”, czyli pochodna dąży do 0, co jest bardzo niepożądaną sytuacją dla metody Newtona…
Przy metodzie siecznych musimy uważać, by nie wybrać zbyt dużych wartości przybliżeń, ponieważ następne obliczone punkty będą na tyle blisko siebie, że metoda zakończy działanie stwierdzając, że osiągnęła wymaganą precyzję.

Metoda	Dane początkowe	Miejsce zerowe (x)	Wartość funkcji $f(x)$	Iteracje
Bisekcji	[0.0, 1.1]	0.9999969482421877	3.051762468953001e-6	15
Newtona	$x_0 = 0.2$	0.9999999173530496	8.264695372517394e-8	4
Siecznych	$x_0 = 0.5$ $x_1 = 1.5$	0.9999999624498374	3.755016342310569e-8	5

Dla $g(x) = xe^{-x}$:
W tym wypadku od razu można stwierdzić, że miejscem zerowym będzie x = 0.
W metodzie bisekcji ponownie unikam wybrania przedziału ze środkiem w x = 0, ale tym razem staram się, by ten środek był zdecydowanie bliżej pierwiastka niż w przypadku poprzedniej funkcji.
Jeśli chodzi o metody Newtona i siecznych pułapki są te same co w przypadku poprzedniej funkcji.

Metoda	Dane początkowe	Miejsce zerowe (x)	Wartość funkcji $g(x)$	Iter.
Bisekcji	[-0.4, 0.6]	-6.1035156250222045e-6	-6.103552878038877e-6	15
Newtona	$x_0 = 0.5$	-3.0642493416461764e-7	8.264695372517394e-8	5
Siecznych	$x_0 = -1.0$ $x_1 = 1.0$	1.744165849924562e-8	1.7441658195034172e-8	18

Porównując wyniki nasuwają się pewne wnioski:

1. Metoda bisekcji, niezależnie od przesunięcia przedziału względem pierwiastka osiąga wynik w tym samym tempie (jest ono zależne od wielkości początkowo wybranego przedziału), ponieważ to co robimy, to dzielenie przedziału na pół do momentu uzyskania satysfakcjonująco małego jego rozmiaru (chyba, że wcześniej uda nam się trafić dostatecznie blisko pierwiastka, ale to inna sprawa…),
2. Metoda bisekcji nie ma ograniczeń związanych z przebiegiem funkcji, czy jej pochodnej,
3. Metoda Newtona osiąga wynik zdecydowanie najszybciej ze wszystkich badanych metod (co wcale nie oznacza, że jest najlepsza, ze względu na konieczność obliczania pochodnej).