SPRAWOZDANIE NR 3

OBLICZENIA NAUKOWE

AUTOR: MARCIN ADAMCZYK
NR INDEKSU: 221 429

ZAD 1

1. Wstęp
   Zadanie polegało na napisaniu funkcji liczącej ilorazy różnicowe.

2. Funkcja:
   Input:
   1. Wektor zawierający węzły (*x::Vector*)
   2. Wektor zawierający wartość funkcji interpolowanej w węzłach (*f::Vector*)

   Działanie:
   1. Wypełnienie tablicy wynikowej (*fx::Vector*) wartościami z wektora zawierającego wartości funkcji w węzłach,
   2. Obliczanie kolejnych wartości ilorazów różnicowych:
      Pseudokod:
      ```
      for j = 1 : n
        for i = n : -1 : j+1
          fx[i] = (fx[i] - fx[i-1]) / (x[i] - x[i-j])
        end for
      end for
      ```

   Output:
   1. Tablica zawierająca obliczone ilorazy różnicowe (*fx::Vector*).

ZAD 2

1. Wstęp
   Zadanie polegało na napisaniu funkcji obliczającej za pomocą uogólnionego schematu Hornera wartość wielomianu interpolacyjnego w zadanym punkcie.

2. Funkcja:
   Input:
   1. Wektor zawierający węzły (długości n),
   2. Wektor zawierający ilorazy różnicowe
   3. Punkt dla którego obliczona ma być wartość wielomianu

   Działanie:
   1. Pseudokod uogólnionego schematu Hornera:
      ```
      nt = fx[n];
      for i=n-1 : -1 : 1
        nt = nt * (t - x[i]) + fx[i];
      end for
      ```

   Output:
   1. Wartość wielomianu w punkcie (*nt::Float64*)

ZAD 3

1. Wstęp
   Zadanie polegało na napisaniu funkcji interpolującej naszą zadaną funkcję na przedziale [a, b], a następnie rysującej wykresy jej oraz wielomianu interpolacyjnego.

2. Funkcja:
   Input:
   1. Funkcja, której wielomian interpolujący mamy wyznaczyć
   2. Końce przedziału interpolacji
   3. Stopień wielomianu interpolacyjnego

Działanie:
1. Wyznaczenie równoodległych węzłów i zapisanie ich,
2. Policzenie wartości zadanej funkcji w węzłach,
3. Wyznaczenie za pomocą funkcji z zadania 1 oraz tablic z węzłami i wartościami funkcji w nich wektora ilorazów różnicowych (mamy już wszystko czego nam potrzeba do wyznaczania wartości wielomianu interpolacyjnego),
4. Wyznaczenie wartości funkcji interpolowanej oraz wielomianu interpolacyjnego w 200 równoodległych punktach (zwiększenie dokładności wykresu) na zadanym przedziale i narysowanie ich wykresów.

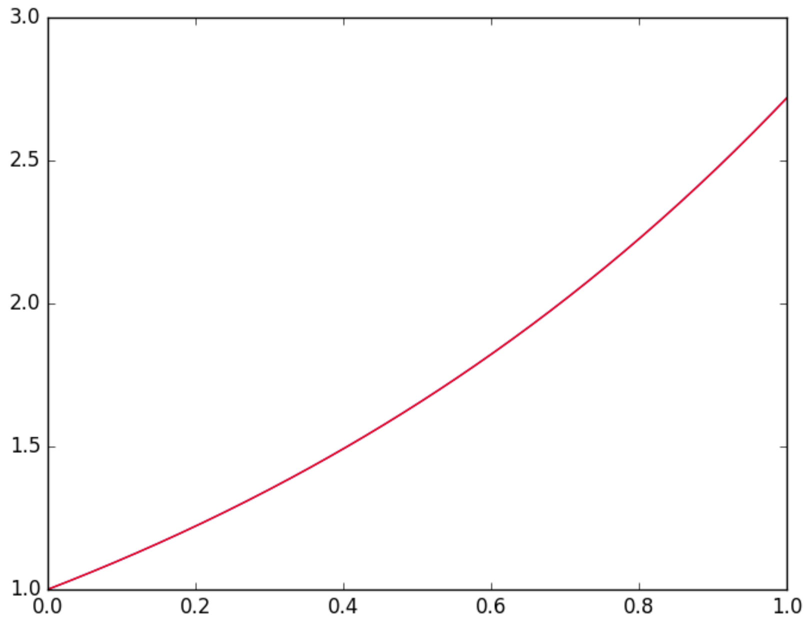
Output:
1. Wykres

ZAD 4

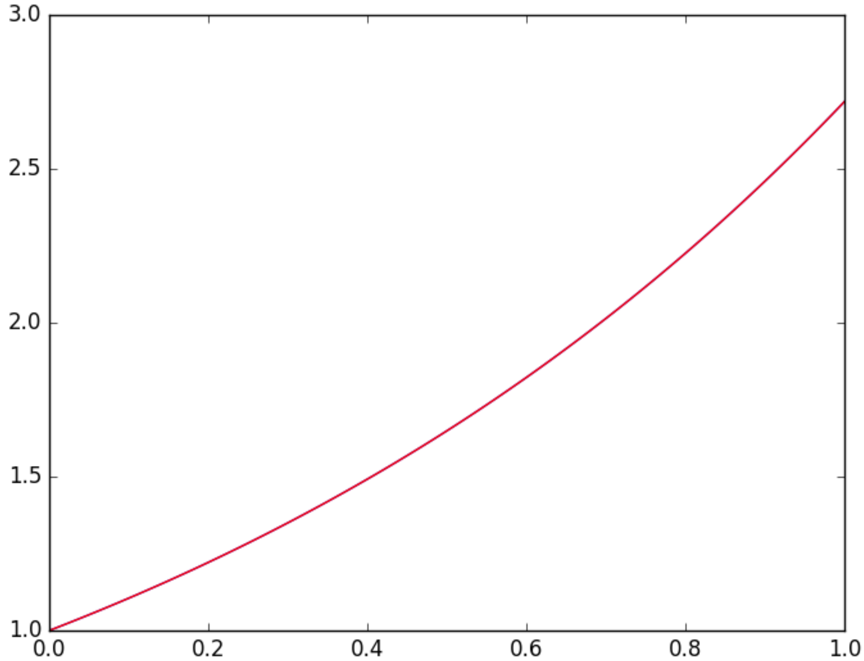
1. Wstęp
Zadanie polegało na przetestowaniu funkcji z zadania 3 dla następujących przykładów:
$$f(x) = e^x, [a, b] = [0.0, 1.0], n = 5, 10, 15$$
$$g(x) = x^2 six(x), [a, b] = [-1.0, 1.0], n = 5, 10, 15$$

2. Wyniki
Na wykresach tych wielomian interpolacyjny oznaczony jest kolorem czerwonym, a funkcja interpolowana - niebieskim.

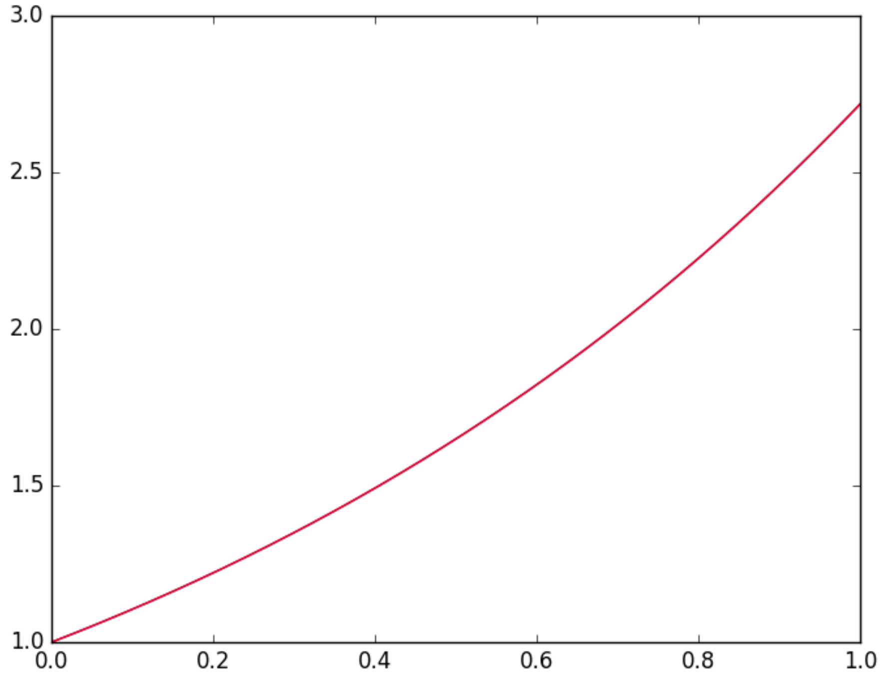
Dla funkcji f(x):
n=5:



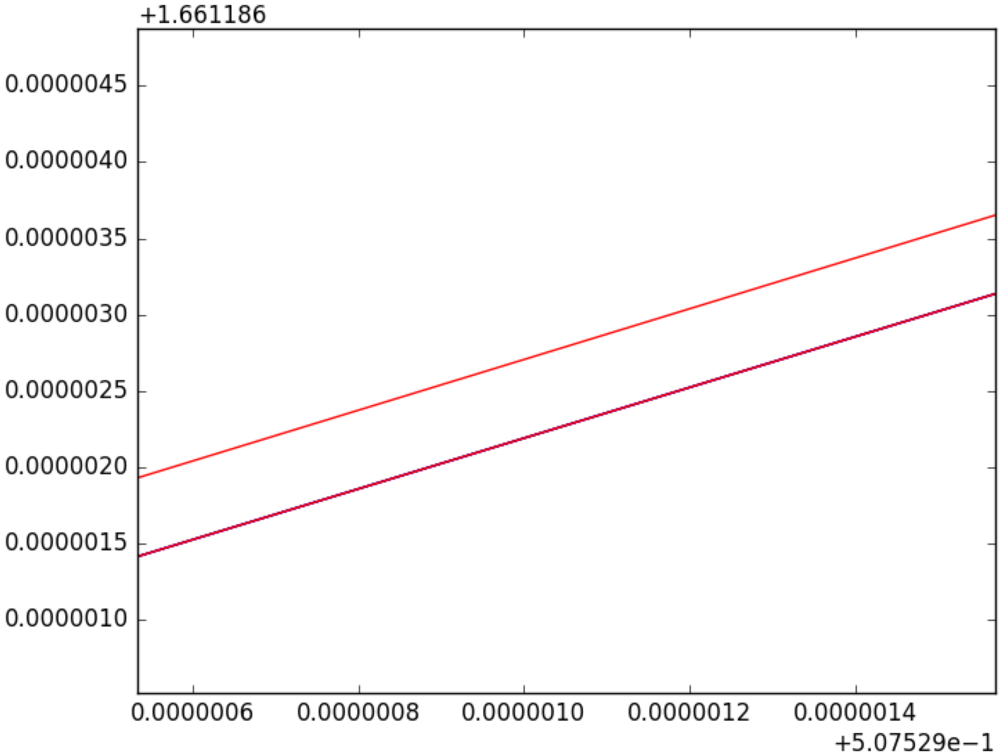
n=10:



n=15:



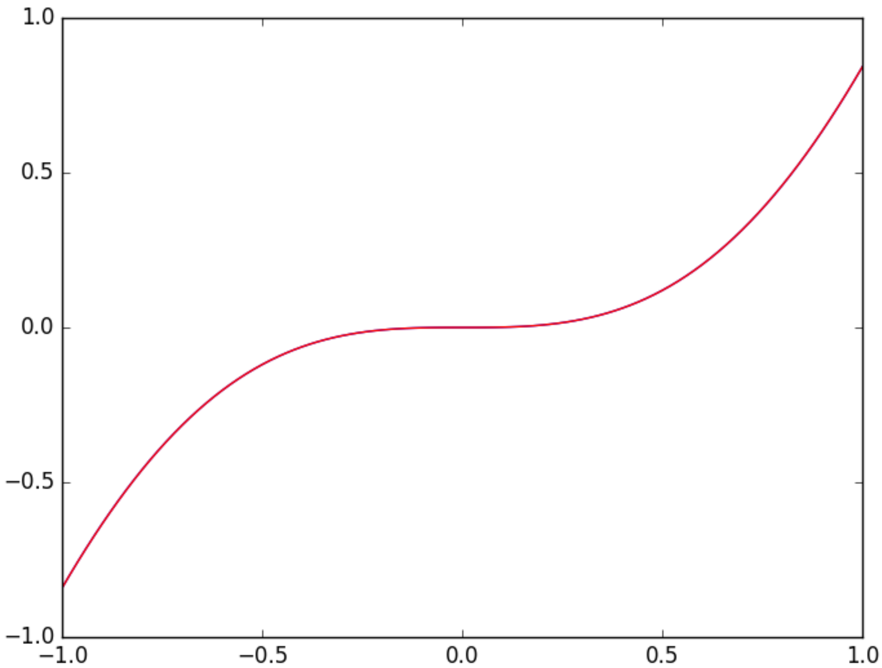
Jak widać wykresy pokrywają się ze sobą. Jeśli powiększymy wykres, na którym umieścimy wszystkie 3 wielomiany interpolacyjne oraz samą funkcję interpolowaną oto co zobaczymy:



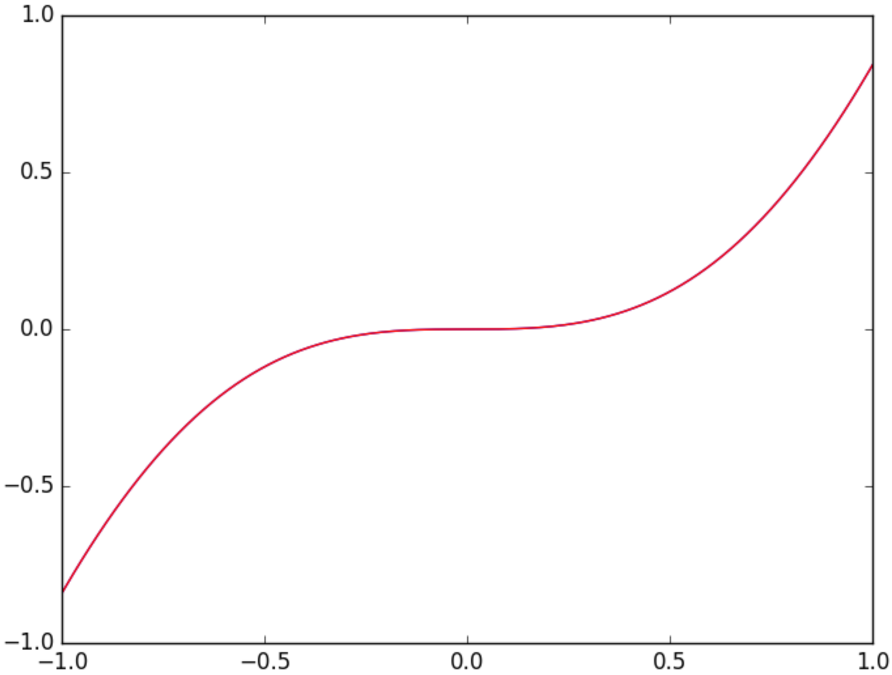
Widzimy pewne odchylenie wielomianu (n = 5), jednak pozostałe 3 wykresy znajdują się tak blisko siebie, że widzimy je jako jedynie minimalnie grubszą linie. Oczywiście dokonując dalszych – bardzo dużych przybliżeń znów ujrzymy pewne rozbieżności.

Dla funkcji g(x):

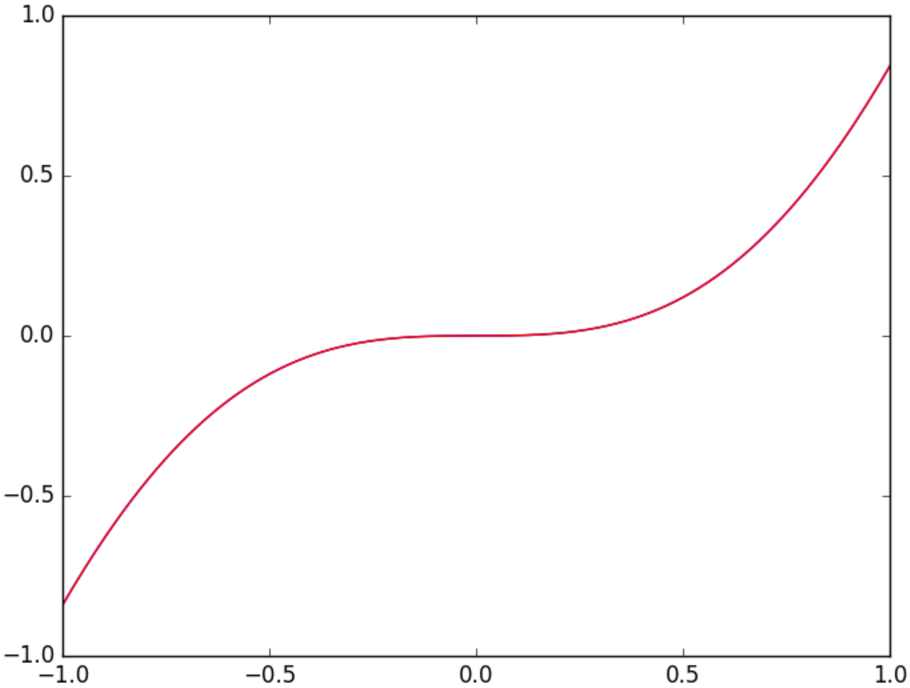
n=5:



n=10:



n=15:



Tutaj ponownie spotykamy się z sytuacją, gdy wykresy wielomianu interpolacyjnego i funkcji interpolowanej w zasadzie pokrywają się ze sobą. Gdybyśmy dokonali przybliżenia, uzyskalibyśmy efekt podobny do poprzedniego – jako pierwszy odchyliłby się wielomian interpolacyjny najniższego stopnia.

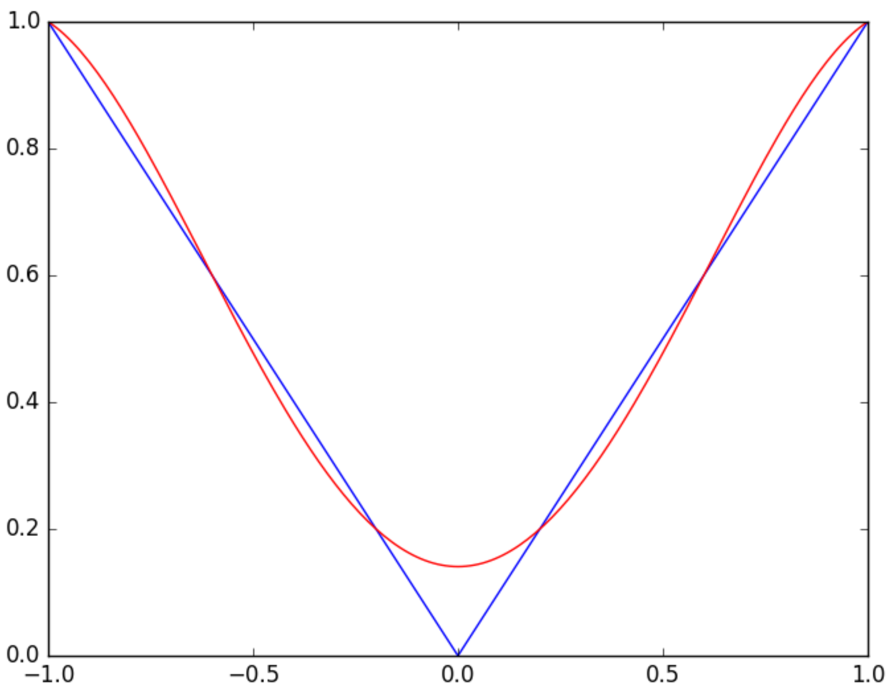
3. Wnioski:
   Wykresy wielomianów interpolacyjnych oraz opisanych we wstępie funkcji, prawie się pokrywają. Co jednak ważniejsze, można zauważyć, że wraz ze wzrostem stopnia wielomianu, bardzo mocno wzrasta także jego dokładność (podobieństwo do oryginalnej funkcji).

ZAD 5

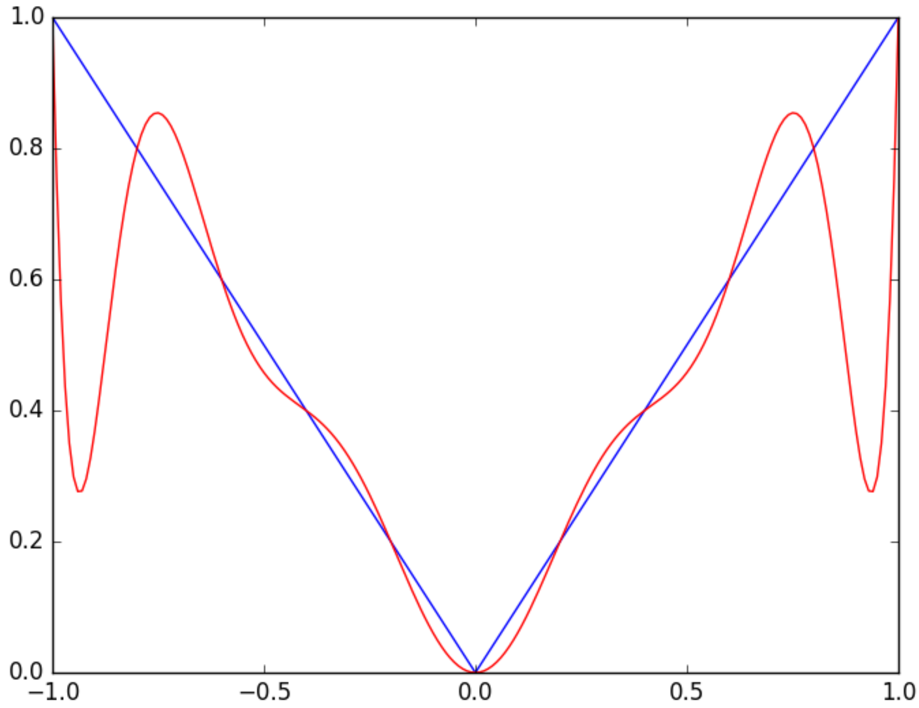
1. Wstęp
   Zadanie, podobnie jak poprzednie, polegało na przetestowaniu funkcji z zadania 3 dla następujących przykładów:

$$f(x) = |x|, [a, b] = [-1.0, 1.0], n = 5, 10, 15$$
$$g(x) = \frac{1}{1 + x^2}, [a, b] = [-1.0, 1.0], n = 5, 10, 15$$

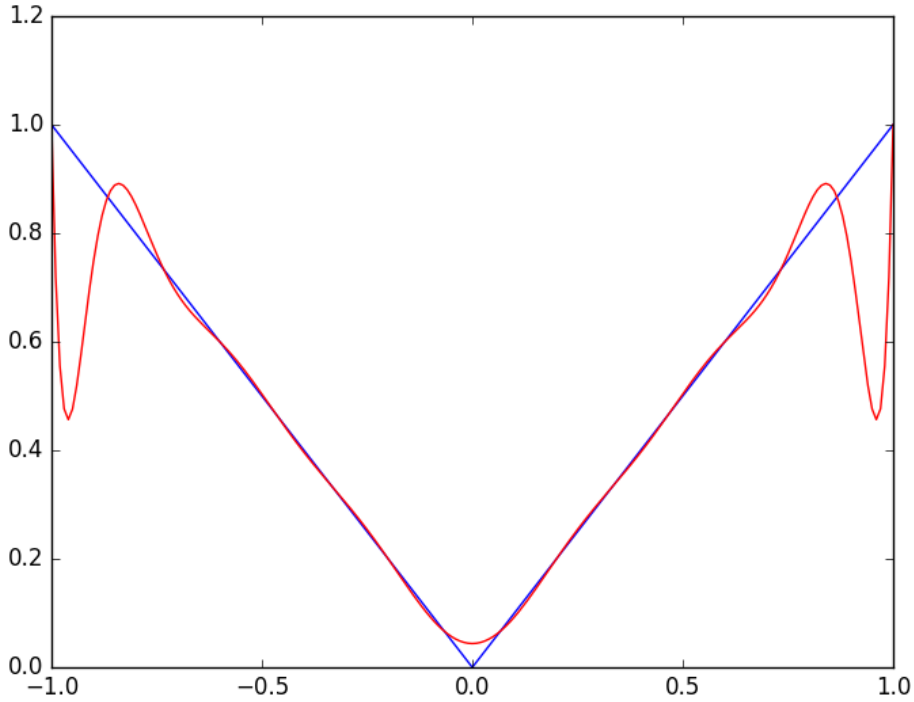
2. Wyniki:
   Dla funkcji f(x):
   n=5:



n=10:

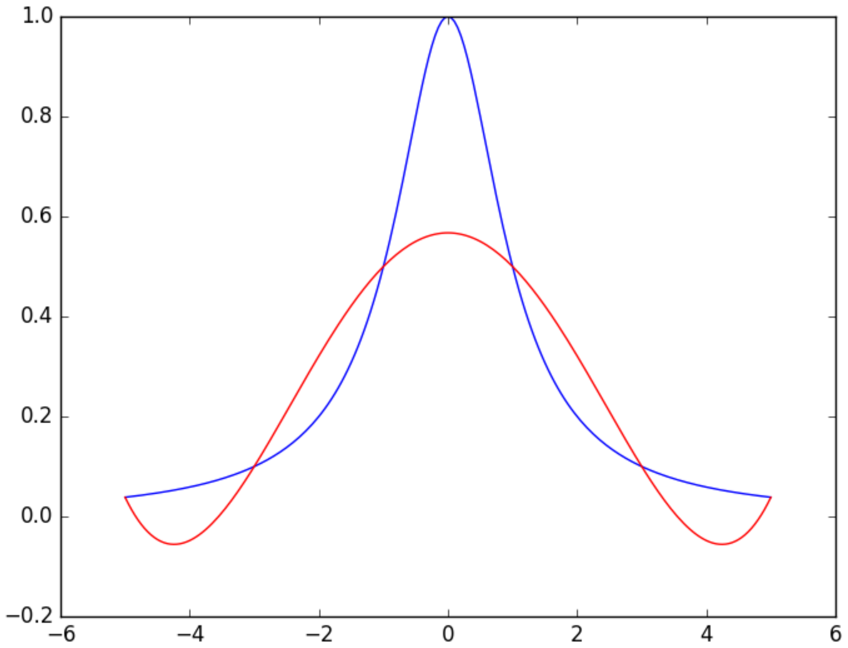


n=15:

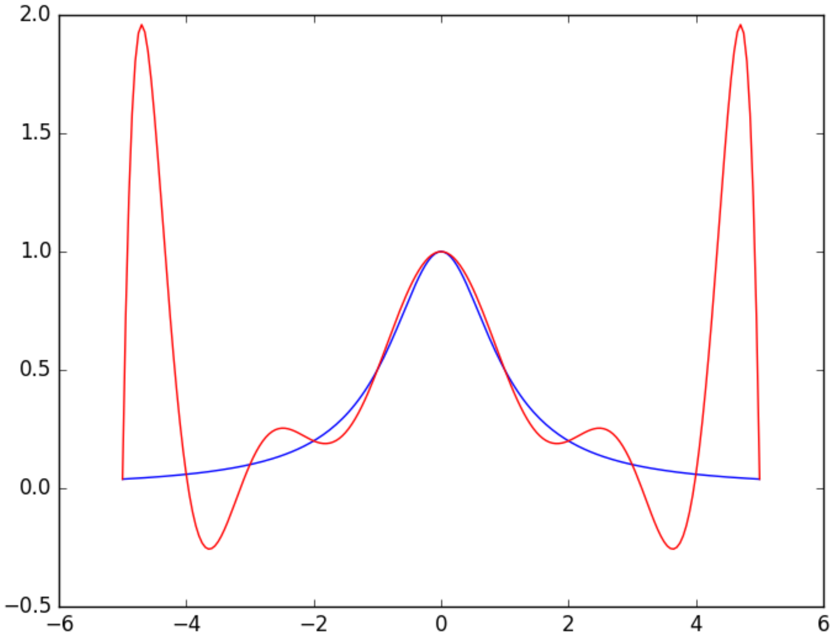


Niestety, od razu można zauważyć, że wielomian interpolacyjny zdecydowanie mniej przypomina funkcje interpolowaną niż w przypadku poprzedniego zadania. Zjawisko to szczególnie mocno rzuca się w oczy w okolicach końców badanego przedziału, ale jedynie dla wielomianów interpolacyjnych wyższego stopnia (dla n=5 odchylenia nie są tak znaczne).

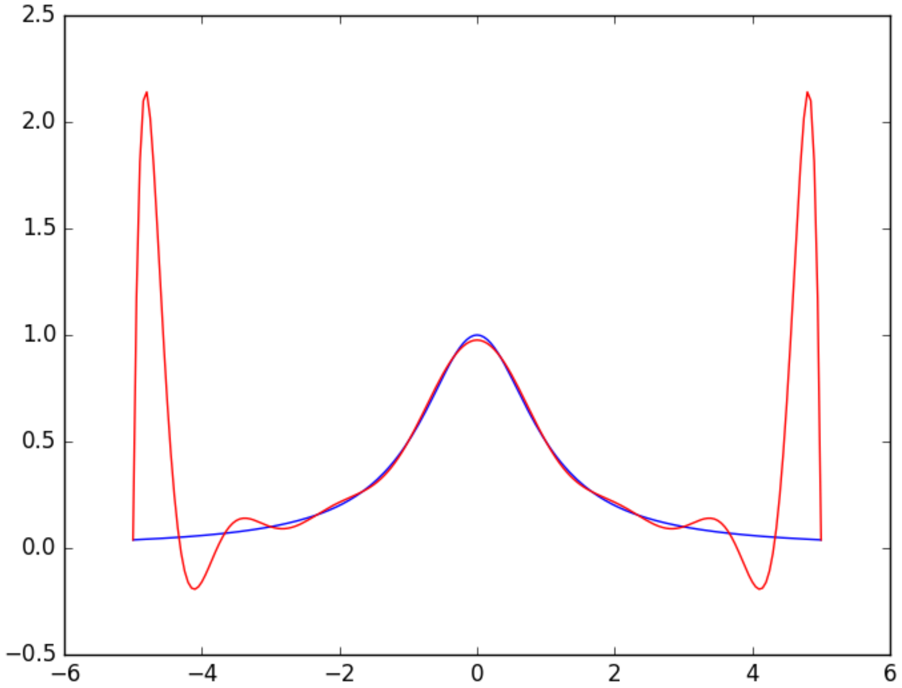
Dla funkcji g(x):
n=5:



n=10:



n=15:



Tutaj ponownie mamy do czynienia ze zjawiskiem zaobserwowanym dla poprzedniej funkcji. Wielomiany interpolacyjne stopnie 10 i 15, w okolicach końców przedziału dają bardzo duże odchylenia. Jeśli chodzi o sam wielomian stopnia 5, mimo, że w końcach przedziału nie uzyskuje tak niedorzecznych wartości jak jego odpowiednicy wyższego stopnia, to jest on ogólnie dużo mniej dokładny (dla n = 10 i n = 15, poza końcami przedziału, przybliżenie jest dużo lepsze, chociaż wciąż raczej niezadowalające).

3. Wnioski:
   W pierwszym przypadku błędy spowodowane były wyborem funkcji, która mimo, że jest ciągła, nie jest różniczkowalna.
   W drugim przypadku mieliśmy do czynienia ze zjawiskiem Runge'go. Wielomiany interpolacyjne wysokiego stopnia o węzłach równoodległych, w pobliżu końców przedziału zaczynają bardzo silnie „oscylować" i generować odchylenia. W takim przypadku najlepszym rozwiązaniem byłoby wybranie jako węzły, zer wielomianu Czebyszewa.