Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

blisko

międzynarodowo

przez całe życie

LOGIKA DLA INFORMATYKÓW

Wnioskowanie w logice rozmytej

dr hab. Ewa Michalska

Reguły wnioskowania w logice rozmytej

Wartość logiczna zdania warunkowego „**Jeżeli** X jest A **to** Y jest B" (lub **P** $\rightarrow$ **Q**), jest zależna od wartości prawdy w zdaniach przesłanki i konkluzji czyli od wartości funkcji przynależności $\mu_A(x),\ \mu_B(y)$ zbiorów rozmytych określonych odpowiednio w przestrzeniach X, Y.

Dla różnych wartości $x \in X$, $y \in Y$ wartość logiczna zdania warunkowego wyraża się poprzez wartość funkcji przynależności $\mu_R(x, y)$, relacji rozmytej $R \subset X \times Y$, która reprezentuje znaczeniowo zdanie warunkowe.

Istnieje wiele możliwości definiowania relacji R (np. za pomocą t-norm), w ten sposób powstają różne reguły wnioskowania. Reguły wnioskowania spełniające warunki (**1°-5°** - kolejny slajd) są implikacjami w sensie logicznym.

Implikacje rozmyte

Implikacją rozmytą jest funkcja

$$\mathbf{I}: [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \times [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \to [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$$

spełniająca następujące warunki:

1° jeżeli $a \leq c$ to $I(a,b) \geq I(c,b)$ dla wszystkich $a,b,c \in [0,1]$

(nierosnąca funkcja względem pierwszego argumentu)

2° jeżeli $b \leq c$ to $I(a,b) \leq I(a,c)$ dla wszystkich $a,b,c \in [0,1]$

(niemalejąca funkcja względem drugiego argumentu)

3° $I(0,b)=1$ dla wszystkich $b \in [0,1]$

(z fałszu może wynikać dowolna wartość b)

4° $I(a,1)=1$ dla wszystkich $a \in [0,1]$

(dowolna wartość a może prowadzić do prawdy)

5° $I(1,0)=0$

(z prawdy nigdy nie wynika fałsz)

Implikacje rozmyte:

Kleene'a-Dienesa (binarna)	$\mu_{I_{K-D}}(x,y) = \max\{1-\mu_A(x); \mu_B(y)\}$
Łukasiewicza	$\mu_{I_Ł}(x,y) = \min\{1; 1-\mu_A(x)+\mu_B(y)\}$
Zadeha	$\mu_{I_Z}(x,y) = \max\{\min\{\mu_A(x); \mu_B(y)\}; 1-\mu_A(x)\}$
Reichenbacha	$\mu_{I_R}(x,y) = 1-\mu_A(x)+\mu_A(x)\cdot\mu_B(y)$
Dubois-Prade	$\mu_{I_{D-P}}(x,y) = \begin{cases} 1-\mu_A(x), & \mu_B(y)=0 \\ \mu_B(y), & \mu_A(x)=1 \\ 1, \ \mu_A(x)\neq 1, \mu_B(y)\neq 0 & \end{cases}$
Goedla	$\mu_{I_G}(x,y) = \begin{cases} 1, & \mu_A(x)\leq\mu_B(y) \\ \mu_B(y), & \mu_A(x)>\mu_B(y) \end{cases}$
Goguena	$\mu_{I_{Gg}}(x,y) = \begin{cases} \min\left\{1; \frac{\mu_B(y)}{\mu_A(x)}\right\}, & \mu_A(x)>0 \\ 1, & \mu_A(x)=0 \end{cases}$
Yagera	$\mu_{I_{Gg}}(x,y) = \begin{cases} \left(\mu_B(y)\right)^{\mu_A(x)}, & \mu_A(x)>0 \\ 1, & \mu_A(x)=0 \end{cases}$

Reguły rozmyte:

Mamdaniego	$\mu_{R_M}(x,y) = \min\{\mu_A(x); \mu_B(y)\}$
Larsena	$\mu_{R_L}(x,y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$

Implikacje logiczne

$\mu_A(x)$	$\mu_B(y)$	**Implikacja Kleene'a-Dienesa** $\mu_{I_{K-D}}(x,y) = \max\{1-\mu_A(x); \mu_B(y)\}$	**Implikacja Łukasiewicza** $\mu_{I_Ł}(x,y) = \min\{1; 1-\mu_A(x)+\mu_B(y)\}$	$\mu_{A\to B}(x,y)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

Reguły

$\mu_A(x)$	$\mu_B(y)$	**Reguła Mamdaniego** $\mu_{R_M}(x,y) = \min\{\mu_A(x); \mu_B(y)\}$	**Reguła Larsena** $\mu_{R_L}(x,y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$	$\mu_{A\to B}(x,y)$
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

Podstawowe reguły wnioskowania w logice dwuwartościowej

Modus ponens – wnioskowanie stwierdzające przez stwierdzenie, reguła odrywania

Przesłanka 1 Przesłanka 2 (implikacja)	P $P \rightarrow Q$
Wniosek	Q

Modus tollens – wnioskowanie zaprzeczające przez zaprzeczenie

Przesłanka 1 (implikacja) Przesłanka 2	$P \rightarrow Q$ $\neg Q$
Wniosek	$\neg P$

Rozmyte złożeniowe reguły wnioskowania

Uogólniona rozmyta reguła wnioskowania **modus ponens**

Przesłanka 1 Przesłanka 2 (implikacja)	P2 $P1 \rightarrow Q1$	x jest A2 **JEŻELI** x jest A1 **TO** y jest B1
Wniosek	$Q2=P2 \circ (P1 \rightarrow Q1)$	y jest B2

gdzie symbol „$\circ$” oznacza operację złożenia,
$A1,A2 \subseteq X$ oraz $B1,B2 \subseteq Y$ są zbiorami rozmytymi, a zmienne x i y są tzw. zmiennymi lingwistycznymi (słowa, zdania języka naturalnego, liczby)

Uwaga:

Jeśli P1=P2 oraz Q1=Q2 to uogólniona rozmyta reguła wnioskowania modus ponens sprowadza się do zwykłej reguły modus ponens

Rozmyte złożeniowe reguły wnioskowania

Uogólniona rozmyta reguła wnioskowania **modus tollens**

Przesłanka 1 (implikacja) Przesłanka 2	$P1 \rightarrow Q1$ $Q2$	**JEŻELI** x jest A1 **TO** y jest B1 y jest B2
Wniosek	$P2=(P1 \rightarrow Q1) \circ Q2$	x jest A2

gdzie symbol „$\circ$” oznacza operację złożenia,
$A1,A2 \subseteq X$ oraz $B1,B2 \subseteq Y$ są zbiorami rozmytymi, a zmienne x i y są tzw. zmiennymi lingwistycznymi (słowa, zdania języka naturalnego, liczby)

Uwaga:

Jeśli $P1=P2$ oraz $Q1=Q2$ to uogólniona rozmyta reguła wnioskowania modus tollens sprowadza się do zwykłej reguły modus tollens

Rozmyte złożeniowe reguły wnioskowania

Przykład: reguła wnioskowania **modus ponens**

Przesłanka 1 Przesłanka 2 (implikacja)	Prędkość samochodu jest duża. Jeżeli prędkość samochodu jest bardzo duża to poziom hałasu jest wysoki.
Wniosek	Poziom hałasu w samochodzie jest średnio-wysoki.

Zmienne lingwistyczne: x-prędkość samochodu, y-poziom hałasu

X={„mała”, „średnia”, „duża”, „bardzo duża”}

Y={„mały”, „średni”, „średnio-wysoki”, „wysoki”}

A1=„bardzo duża prędkość samochodu”, A2=„duża prędkość samochodu”

B1=„wysoki poziom hałasu”, B2=„średnio-wysoki poziom hałasu”

Rozmyte złożeniowe reguły wnioskowania

<u>Przykład:</u> reguła wnioskowania **modus tollens**

Przesłanka 1 Przesłanka 2 (implikacja)	Poziom hałasu w samochodzie jest średnio-wysoki. Jeżeli prędkość samochodu jest bardzo duża to poziom hałasu jest wysoki.
Wniosek	Prędkość samochodu jest duża.

Zmienne lingwistyczne: x-prędkość samochodu, y-poziom hałasu

X={„mała”, „średnia”, „duża”, „bardzo duża”}

Y={„mały”, „średni”, „średnio-wysoki”, „wysoki”}

A1=„bardzo duża prędkość samochodu”, A2=„duża prędkość samochodu”

B1=„wysoki poziom hałasu”, B2=„średnio-wysoki poziom hałasu”

Rozmyte złożeniowe reguły wnioskowania

Przykład:

Dane są zbiory rozmyte:

A1={(x_1; 0,3),(x_2;0,4),(x_3;0,1)}, A2={(x_1; 0,2),(x_2;0,8),(x_3;0,4)}

B1={(y_1; 0,3),(y_2;0,1)}, B2={(y_1; 0,5),(y_2;0,9)}

Reguła wnioskowania modus ponens: Q2=P2 ∘ (P1 → Q1)

Przyjmując implikację Łukasiewicza oraz operację złożenia max-min otrzymujemy

	(y_1;0,3)	(y_2;0,1)
(x_1;0,3)	1	0,8
(x_2;0,4)	0,9	0,7
(x_3;0,1)	1	1

Złożenie typu max-min daje konkluzję - zbiór rozmyty B2 postaci:

$$\mathrm{B2} = \frac{\mu_{\mathrm{B2}}(y_1)}{y_1} + \frac{\mu_{\mathrm{B2}}(y_2)}{y_2} = \{(y_1; 0{,}8), (y_2; 0{,}7)\}$$

$$\mu_{\mathrm{B2}}(y_1) = \max\{\min\{0{,}2; 1\}; \min\{0{,}8; 0{,}9\}; \min\{0{,}4; 1\}\} = 0{,}8$$
$$\mu_{\mathrm{B2}}(y_2) = \max\{\min\{0{,}2; 0{,}8\}; \min\{0{,}8; 0{,}7\}; \min\{0{,}4; 1\}\} = 0{,}7$$

Rozmyte złożeniowe reguły wnioskowania

Przykład:

Dane są zbiory rozmyte:

A1={(x_1; 0,3),(x_2;0,4),(x_3;0,1)}, A2={(x_1; 0,2),(x_2;0,8),(x_3;0,4)}

B1={(y_1; 0,3),(y_2;0,1)}, B2={(y_1; 0,5),(y_2;0,9)}

Reguła wnioskowania modus tollens: P2=(P1 → Q1) ∘ Q2

Przyjmując implikację Łukasiewicza oraz operację złożenia max-min otrzymujemy

	(y_1;0,3)	(y_2;0,1)
(x_1;0,3)	1	0,8
(x_2;0,4)	0,9	0,7
(x_3;0,1)	1	1

Złożenie typu max-min daje konkluzję - zbiór rozmyty A2 postaci:

$$A2 = \frac{\mu_{A2}(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_{A2}(x_2)}{x_2} + \frac{\mu_{A2}(x_3)}{x_3} = \{(x_1; 0{,}8), (x_2; 0{,}7); (x_3; 0{,}9)\}$$

$$\mu_{A2}(x_1) = \max\{\min\{1; 0{,}5\}; \min\{0{,}8; 0{,}9\}\} = 0{,}8$$
$$\mu_{A2}(x_2) = \max\{\min\{0{,}9; 0{,}5\}; \min\{0{,}7; 0{,}9\}\} = 0{,}7$$
$$\mu_{A2}(x_2) = \max\{\min\{1; 0{,}5\}; \min\{1; 0{,}9\}\} = 0{,}9$$