Uniwersytet
Ekonomiczny
w Katowicach

blisko
międzynarodowo
przez całe życie

LOGIKA DLA INFORMATYKÓW

Logiki wielowartościowe

dr hab. Ewa Michalska

Logika trójwartościowa

Jan Łukasiewicz(1878-1956) polski logik, matematyk i filozof, twórca pierwszej nieklasycznej logiki zwanej logiką trójwartościową.

Łukasiewicz rozważa zdanie:
„Od dziś za rok będę w Warszawie”
– w chwili, gdy jest wypowiadane nie może być uważane ani za zdanie prawdziwe ani za fałszywe.

- **„O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa”** (1912) – praca przedstawiająca pomysł logiki trójwartościowej
- **„O logice trójwartościowej”** (1920) – uzasadniona w artykule trzecia możliwość „ani prawdy, ani fałszu” wprowadza zmianę w dotychczasowym myśleniu o logice
- Logika Łukasiewicza otworzyła drogę nieklasycznym koncepcjom logicznym, np. **logice modalnej** (dotyczącej przede wszystkim światów możliwych) oraz **logice rozmytej** (wykorzystywanej w informatyce oraz przy stosowaniu sztucznych sieci neuronalnych).

Aksjomatyka trójwartościowego rachunku zdań (TRZ)

Aksjomatyka rachunku zdań trójelementowej logiki Łukasiewicza (opracowana przez Łukasiewicza, Tarskiego, Wajsberga) składa się z następujących **aksjomatów**:

1. $p \to (q \to p)$

2. $(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$

3. $[(p \to \neg p) \to p] \to p$

4. $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$

5. $[(p \to q) \to q] \to [(q \to p) \to p]$

6. $[(p \to q) \to (q \to p)] \to (q \to p)$

oraz z dwóch **reguł**:

- reguły odrywania

$$\frac{\alpha, \ \alpha \to \beta}{\beta}$$

- reguły podstawiania

$$\frac{\alpha}{\alpha_{[p::=\beta]}}$$

(z formuły α, w której występuje zmienna zdaniowa p, wnioskujemy to, co otrzymamy w rezultacie podstawienia dowolnej formuły β za każde wystąpienie zmiennej p)

UWAGA:
Pierwsza aksjomatyka Łukasiewicza była oparta na spójnikach implikacji i negacji. Inne znane spójniki – koniunkcji, alternatywy i równoważności – były definiowane przez implikację i negację.

$$(p \wedge q) \leftrightarrow [(p \to q) \to q]$$
$$(p \vee q) \leftrightarrow \neg(\neg p \to \neg q)$$
$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to p)]$$

Logika trójwartościowa:

1 – prawda
0 – fałsz
½ – nieokreśloność, możliwość, niezdeterminowanie, niezdefiniowanie, brak danych

Matryce logiczne:

p	¬p
0	1
½	½
1	0

→	0	½	1
0	1	1	1
½	½	1	1
1	0	½	1

∧	0	½	1
0	0	0	0
½	0	½	½
1	0	½	1

∨	0	½	1
0	0	½	1
½	½	½	1
1	1	1	1

↔	0	½	1
0	1	½	0
½	½	1	½
1	0	½	1

Logiki wielowartościowe:

Definiowanie logik wielowartościowych za pomocą działań dla liczb rzeczywistych:

$(x \wedge y) = \min\{x;y\}$
$(x \vee y) = \max\{x;y\}$
$(x \rightarrow y) = \min\{1-x+y;1\}$
$\neg x = 1-x$

Przykładowe zbiory wartości logicznych:
(a) $A_3=\{0, ½, 1\}$ – logika trójwartościowa
(b) $A_5=\{0, {}^{1}/_{4}, {}^{2}/_{4}, {}^{3}/_{4}, 1\}$ – logika pięciowartościowa
(c) $A_{11}=\{0, {}^{1}/_{10}, {}^{2}/_{10}, {}^{3}/_{10}, \dots, {}^{9}/_{10}, 1\}$ – logika jedenastowartościowa
(d) $A_n=\{0, {}^{1}/_{n-1}, {}^{2}/_{n-1}, {}^{3}/_{n-1}, \dots, {}^{n-2}/_{n-1}, 1\}$ – logika n-wartościowa

Uwaga:
Łukasiewicz opisał całą rodzinę skończenie wielowartościowych logik L_n dla n=3, 4, 5, …, oraz jedną nieskończenie wartościową logikę $L_{\aleph_0}$.

UWAGA:

System L_3 trójwartościowego rachunku zdań (KRZ) różni się od klasycznego rachunku zdań – pewne prawa logiki klasycznej nie są tautologiami L_3, a inne formuły sprzeczne w (KRZ) są prawdziwe w L_3

(a) $(p \vee \neg p)$ (prawo wyłączonego środka)
(b) $\neg(p \wedge \neg p)$ (zasada sprzeczności)
(c) $(p \leftrightarrow \neg p)$
(d) $\neg(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

Przykład:

Matryce logiczne dla logiki pięciowartościowej określonej na zbiorze $\{0, {}^{1}/_{4}, {}^{2}/_{4}, {}^{3}/_{4}, 1\}$:

p	$\neg p$
0	1
$^{1}/_{4}$	$^{3}/_{4}$
$^{2}/_{4}$	$^{2}/_{4}$
$^{3}/_{4}$	$^{1}/_{4}$
1	0

$\rightarrow$	0	$^{1}/_{4}$	$^{2}/_{4}$	$^{3}/_{4}$	1
0					
$^{1}/_{4}$					
$^{2}/_{4}$					
$^{3}/_{4}$					
1					

$(x \wedge y) = \min\{x;y\}$

$(x \vee y) = \max\{x;y\}$

$(x \rightarrow y) = \min\{1-x+y;1\}$

$\neg x = 1-x$

Przykład c.d.:

$\wedge$	0	$^1/_4$	$^2/_4$	$^3/_4$	1
0					
$^1/_4$					
$^2/_4$					
$^3/_4$					
1					

$\vee$	0	$^1/_4$	$^2/_4$	$^3/_4$	1
0					
$^1/_4$					
$^2/_4$					
$^3/_4$					
1					

$\neg x = 1 - x$

$(x \wedge y) = \min\{x;y\}$

$(x \vee y) = \max\{x;y\}$

$(x \rightarrow y) = \min\{1-x+y;1\}$

$(x \leftrightarrow y) = 1 - |x-y|$

$(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow [(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)]$

$(x \leftrightarrow y) = \min\{\min\{1-x+y;1\};\min\{1-y+x;1\}\}$

$\leftrightarrow$	0	$^1/_4$	$^2/_4$	$^3/_4$	1
0					
$^1/_4$					
$^2/_4$					
$^3/_4$					
1					

Związek między logiką wielowartościową i logiką rozmytą:

Typową logikę rozmytą otrzymamy, jeśli jako zbiór wartości logicznych przyjmiemy cały odcinek [0;1], a działania będą określone według podanych wcześniej wzorów. Wzory te nie są jedynymi możliwymi wzorami (inne propozycje różnią się zwykle sposobem zdefiniowania działania odpowiadającego implikacji).

Przykłady definiowania implikacji rozmytej:

1. $(x \to y) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x \neq 1 \text{ lub } y = 1 \\ 0, & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$
2. $(x \to y) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x \leq y \\ 0, & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$
3. $(x \to y) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x = y \\ 0, & \text{jeśli } x \neq y \end{cases}$
4. $(x \to y) = \min\{1; y/x\}$
5. $(x \to y) = \min\{1; 1-x+y\}$