Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

blisko

międzynarodowo

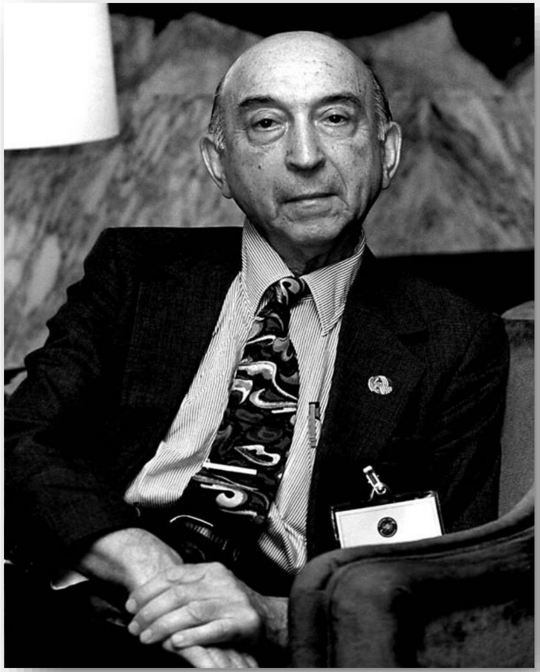
przez całe życie

LOGIKA DLA INFORMATYKÓW

Zbiory rozmyte

dr hab. Ewa Michalska

Zbiory rozmyte



Lotfi Asker Zadeh (1921-2017) właściwie Lotfi Aliaskerzadeh amerykański automatyk pochodzenia azerskiego. Twórca teorii zbiorów rozmytych (1965) i logiki rozmytej (1973).

- **„Fuzzy sets in Information and Control”** (1965) – praca prezentująca koncepcję teorii zbiorów rozmytych
- W teorii zbiorów rozmytych dopuszcza się częściową przynależność elementu do danego zbioru
- Za pomocą zbiorów rozmytych można formalnie określić pojęcia nieprecyzyjne i wieloznaczne, takie jak np. „duże miasto”, „wysoka temperatura”, a w ten sposób lepiej opisać matematycznie wiele pojęć z zakresu ekonomii, psychologii, socjologii, medycyny
- Zbiory rozmyte służą reprezentacji wiedzy wyrażonej w języku naturalnym (wyrażenia werbalne)

Zastosowania zbiorów rozmytych

Zbiory rozmyte są wykorzystywane między innymi w:

- sterowaniu procesami technologicznymi
- metodach wspomagających podejmowanie decyzji
- uczeniu maszynowym
- zagadnieniach prognozowania i planowania
- medycynie

Rodzaje zbiorów rozmytych:

- zbiory rozmyte **typu 1**: stopnie przynależności elementów do zbioru są liczbami z przedziału [0,1]
- zbiory rozmyte **typu 2**: stopnie przynależności elementów do zbioru mają charakter rozmyty

Podstawowe pojęcia teorii zbiorów rozmytych

X – przestrzeń, obszar rozważań, zbiór którego elementami mogą być liczby, osoby, przedmioty lub inne pojęcia

Zbiorem rozmytym A w pewnej (niepustej) przestrzeni X, $A \subseteq X$ nazywamy zbiór par

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\},$$

gdzie

$$\mu_A(x) : X \to [0,1]$$

jest funkcją przynależności zbioru rozmytego

Funkcja przynależności jest to funkcja, która każdemu elementowi $x \in X$ przypisuje jego stopień przynależności do zbioru rozmytego A, przy czym zachodzą trzy możliwości:

(1) $\mathbf{\mu_A(x) = 1}$ - oznacza pełną przynależność elementu x do zbioru rozmytego A, tzn. $x \in A$

(2) $\mathbf{\mu_A(x) = 0}$ - oznacza brak przynależności elementu x do zbioru rozmytego A, tzn. $x \notin A$

(3) $\mathbf{0 < \mu_A(x) < 1}$ - oznacza częściową przynależność elementu x do zbioru rozmytego A

Symboliczny zapis zbiorów rozmytych – notacja Zadeha

Jeżeli **X** jest przestrzenią o skończonej liczbie elementów, $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, to zbiór rozmyty $A \subseteq X$ przedstawia się jako:

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \cdots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

<u>UWAGA:</u>

W zapisie tym kreska ułamkowa ma charakter symboliczny (nie oznacza dzielenia), oznacza przyporządkowanie poszczególnym elementom $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ich stopni przynależności $\mu_A(x_1), \mu_A(x_2), \ldots, \mu_A(x_n)$. Podobnie znak „+" nie oznacza dodawania, ale sumę mnogościową elementów.

Jeżeli **X** jest przestrzenią o nieskończonej liczbie elementów, to zbiór rozmyty $A \subseteq X$ przedstawia się jako:

$$A = \int_X \frac{\mu_A(x)}{x}$$

Przykład 1:
Zbiór A ma trzy elementy (3;0,2),(5;0,8),(9;03). Zapis ten oznacza, że element o wartości 3 należy do zbioru A w stopniu równym 0,2, element o wartości 5 należy do zbioru A w stopniu równym 0,8, natomiast element o wartości 9 należy do zbioru A w stopniu równym 0,3.

Zbiór rozmyty A można przedstawić jako:

A={(3;0,2);(5;0,8);(9;03)}

lub w notacji Zadeha:

$$\mathrm{A} = \frac{0{,}2}{3} + \frac{0{,}8}{5} + \frac{0{,}3}{9}$$

Przykład 2:
Niech X=R – zbiór liczb rzeczywistych oraz zbiór B⊆X. Każdemu elementowi zbioru B przypisana jest wartość funkcji przynależności

$$\mu_{\mathrm{B}}(\mathrm{x}) = \exp(-x^2)$$

Zbiór rozmyty B można przedstawić jako:

$$\mathrm{B} = \{(\mathrm{x}, y)\colon\ \mathrm{x} \in \mathrm{R} \wedge y = \exp(-x^2)\}$$

lub w notacji Zadeha:

$$\mathrm{B} = \int_{x \in \mathrm{R}} \frac{\exp(-x^2)}{\mathrm{x}}$$

Przykład 3:

Niech X=N – zbiór liczb naturalnych. Określimy pojęcie zbioru liczb naturalnych „bliskich liczby 5”, definiując zbiór rozmyty $A \subseteq X$:

$$A = \frac{0{,}3}{3} + \frac{0{,}7}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0{,}7}{6} + \frac{0{,}3}{7}$$

Przykład 4:

Niech X=R – zbiór liczb rzeczywistych. Zbiór rozmyty $A \subseteq X$ liczb rzeczywistych „bliskich liczby 5”

$$A = \int_X \frac{\mu_A(x)}{x}$$

można zdefiniować poprzez różne funkcje przynależności

- $\mu_A(x) = \frac{1}{1+(x-5)^2}$

- $\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{|x-5|}{2}} & \text{dla } 3 \le x \le 7 \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$

Przykład 5:

Niech X=[15°,16°,17°,..., 25°] – temperatura wody.
Określimy pojęcie „temperatura wody w morzu idealna do kąpieli” definiując zbiór rozmyty A⊆X:

- wczasowicz 1 (preferuje temperaturę 21°)

$$A = \frac{0}{15} + \frac{0,1}{16} + \frac{0,3}{17} + \frac{0,4}{18} + \frac{0,6}{19} + \frac{0,9}{20} + \frac{1}{21} + \frac{0,9}{22} + \frac{0,8}{23} + \frac{0,7}{24} + \frac{0,5}{25}$$

- wczasowicz 2 (preferuje temperaturę 23°)

$$A = \frac{0,1}{15} + \frac{0,2}{16} + \frac{0,3}{17} + \frac{0,4}{18} + \frac{0,5}{19} + \frac{0,6}{20} + \frac{0,7}{21} + \frac{0,9}{22} + \frac{1}{23} + \frac{0,8}{24} + \frac{0,7}{25}$$

Funkcje przynależności

- Funkcja przynależności **singleton** – stosowana w rozmytych systemach wnioskujących

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x = \bar{x} \\ 0, & \text{dla } x \neq \bar{x} \end{cases}$$

- Funkcja przynależności **gaussowska** – gdzie $\bar{\mathbf{x}}$ jest środkiem krzywej gaussowskiej, a parametr $\boldsymbol{\sigma}$ określa jej szerokość

$$\mu_A(x) = \exp\left(-\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\right)$$

- Funkcja przynależności **typu dzwonowego** – gdzie parametr **a** określa jej szerokość, parametr **b** nachylenie, natomiast parametr **c** środek

$$\mu_A(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

Funkcje przynależności

- Funkcja przynależności **klasy γ**

$$\mu_A(x;a,b) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{dla } a < x \le b \\ 1 & \text{dla } x > b \end{cases}$$

- Funkcja przynależności **klasy L**

$$\mu_A(x;a,b) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \le a \\ \dfrac{b-x}{b-a} & \text{dla } a < x \le b \\ 0 & \text{dla } x > b \end{cases}$$

Funkcje przynależności

- Funkcja przynależności **trojkątna** – klasy t

$$\mu_A(x;a,b,c) = \begin{cases} 0 & \text{dla x} \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{dla } a < x \leq b \\ \dfrac{c-x}{c-b} & \text{dla } b < x \leq c \\ 0 & \text{dla x} > c \end{cases}$$

- Funkcja przynależności **trapezowa**

$$\mu_A(x;a,b,c,d) = \begin{cases} 0 & \text{dla x} \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{dla } a < x \leq b \\ 1 & \text{dla } b < x \leq c \\ \dfrac{d-x}{d-c} & \text{dla } c < x \leq d \\ 0 & \text{dla } x > d \end{cases}$$

Funkcje przynależności

- Funkcja przynależności **klasy s**, gdzie parametr b=(a+c)/2, ponadto dla x=b wartość funkcji wynosi 0,5

$$\mu_A(x;a,b,c)=\begin{cases}0 & \text{dla x} \le a\\ 2\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2 & \text{dla } a<x\le b\\ 1-2\left(\frac{x-c}{c-a}\right)^2 & \text{dla } b<x\le c\\ 1 & \text{dla x} > c\end{cases}$$

- Funkcja przynależności **klasy π** – zdefiniowana poprzez funkcję przynależności klasy s

$$\mu_A(x;b,c)=\begin{cases}\mathrm{s}(\mathrm{x};\mathrm{c}-\mathrm{b},\mathrm{c}-\frac{\mathrm{b}}{2},\mathrm{c}) & \text{dla x} \le c\\ 1-\mathrm{s}\left(\mathrm{x};\mathrm{c},\mathrm{c}+\frac{\mathrm{b}}{2},\mathrm{c}+\mathrm{b}\right) & \text{dla x} > c\end{cases}$$

Wielowymiarowe funkcje przynależności

Jeżeli $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n$, gdzie $x=[x_1,x_2,\ldots,x_n]^T$ oraz $n>1$

- dla niezależnych zmiennych x_i, $i=1,\ldots,n$ wielowymiarowe funkcje przynależności tworzymy stosując definicję iloczynu kartezjańskiego zbiorów rozmytych oraz korzystając ze standardowych funkcji przynależności jednej zmiennej
- dla zależnych zmiennych x_i, $i=1,\ldots,n$ stosujemy wielowymiarowe funkcje przynależności np.:

  - funkcja przynależności **klasy Π**

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - 2 \cdot \left(\dfrac{\|x - \bar{x}\|}{\alpha} \right)^2 & \text{dla } \|x - \bar{x}\| \le \dfrac{1}{2}\alpha \\ 2 \cdot \left(1 - \dfrac{\|x - \bar{x}\|}{\alpha} \right)^2 & \text{dla } \dfrac{1}{2}\alpha < \|x - \bar{x}\| \le \alpha \\ 0 & \text{dla } \|x - \bar{x}\| > \alpha \end{cases}$$

gdzie $\bar{\mathbf{x}}$ jest środkiem funkcji przynależności, a parametr $\alpha>0$ określa jej rozpiętość

Wielowymiarowe funkcje przynależności

- funkcja przynależności **radialna**

$$\mu_A(x) = \exp\left(\frac{\|x - \bar{x}\|^2}{2\sigma^2}\right)$$

gdzie $\bar{\mathbf{x}}$ jest środkiem funkcji przynależności, natomiast wartość parametru σ wpływa na kształt tej funkcji

- funkcja przynależności **elipsoidalna**

$$\mu_A(x) = \exp\left(-\frac{(x - \bar{x})^T Q^{-1} (x - \bar{x})}{\alpha}\right)$$

gdzie $\bar{\mathbf{x}}$ jest środkiem funkcji przynależności, parametr α>0 określa jej rozpiętość, natomiast Q jest tzw. macierzą kowariancji

Teoria zbiorów rozmytych – pojęcia

Zbiór elementów przestrzeni X, dla których $\mu_A(x) > 0$ nazywamy **nośnikiem zbioru rozmytego** A i oznaczamy **supp(A)** (ang. support) co zapisujemy

$$\mathrm{supp}(A) = \{x \epsilon X\colon\ \mu_A(x) > 0\}$$

Wysokość zbioru rozmytego A oznaczamy **h(A)** i określamy jako

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$$

Zbiór rozmyty A nazywamy **normalnym** wtedy i tylko wtedy, gdy **h(A)=1**. Jeżeli zbiór A jest subnormalny (h(A)<1), to można dokonać jego normalizacji z pomocą przekształcenia

$$\mu_{A_{zn}}(x) = \frac{\mu_A(x)}{h(A)}$$

Zbiór elementów przestrzeni X, dla których $\mu_A(x) = 1$ nazywamy **jądrem zbioru rozmytego** A i oznaczamy **core(A)** (ang. core) co zapisujemy

$$\mathrm{core}(A) = \{x \epsilon X\colon\ \mu_A(x) = 1\}$$

Operacje na zbiorach rozmytych

Zbiór rozmyty A jest **pusty**, co zapisujemy A=∅, wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu_A(x) = 0$ dla każdego x∈X.

Dopełnieniem zbioru rozmytego A⊆**X** jest zbiór rozmyty A' o funkcji przynależności

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

dla każdego x∈X.

Przykład 6:

Niech X={1,2,3,4,5,6} oraz

$$A = \frac{0,3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0,7}{5} + \frac{0,9}{6}$$

- dopełnienie zbioru A: $A' = \frac{1}{1} + \frac{0,7}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0,3}{5} + \frac{0,1}{6}$

Operacje na zbiorach rozmytych

Moc (liczba kardynalna, liczność) zbioru rozmytego A wyrażona przez liczbę nierozmytą oznaczana jako ∑Count(A) (ang.sigma-count) stanowi sumę arytmetyczną stopni przynależności elementów zbioru A.

Jeżeli **X** jest przestrzenią o skończonej liczbie elementów, $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, to moc zbioru $A \subseteq X$ wyznacza się jako sumę:

$$\sum Count(A) = \sum_{x_i} \mu_A(x_i)$$

gdzie: $x_i \in supp(A)$

Jeżeli **X** jest przestrzenią o nieskończonej liczbie elementów, to moc zbioru $A \subseteq X$ wyznacza się jako całkę:

$$\sum Count(A) = \int_X \mu_A(x)$$

gdzie: $x \in supp(A)$

Przykład 7:

Niech X={1,2,3,4,5} oraz

$$A = \frac{0}{1} + \frac{0{,}1}{2} + \frac{0{,}5}{3} + \frac{0{,}3}{4} + \frac{0}{5}$$

- nośnik zbioru A: $\mathrm{supp}(A) = \{2, 3, 4\}$

- wysokość zbioru A: $\mathrm{h}(A) = 0{,}5$

- zbiór A po znormalizowaniu: $\mathrm{Azn} = \frac{0{,}1/0{,}5}{2} + \frac{0{,}5/0{,}5}{3} + \frac{0{,}3/0{,}5}{4} = \frac{0{,}2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0{,}6}{4}$

- jądro zbioru A_{zn}: $\mathrm{core}(\mathrm{Azn}) = \{3\}$

- moc zbioru A: $\sum Count(A) = \sum_{x_i} \mu_A(x_i) = 0{,}1 + 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}9$
  gdzie $x_i \in supp(A) = \{2, 3, 4\}$

Przykład 8:

Niech X=R, rozważmy zbiór rozmyty A⊆X, którego funkcja przynależności ma postać:

$$\mu_A(x;1,2,4) = \begin{cases} 0 & \text{dla x} \le 1 \\ \dfrac{x-1}{1} & \text{dla } 1 < x \le 2 \\ \dfrac{4-x}{2} & \text{dla } 2 < x \le 4 \\ 0 & \text{dla x} > 4 \end{cases}$$

- nośnik zbioru A: $\mathrm{supp}(A) = (1,4)$
- wysokość zbioru A: $\mathrm{h}(A) = 1$, zbiór A jest zbiorem normalnym
- jądro zbioru A: $\mathrm{core}(A) = \{2\}$
- moc zbioru rozmytego oblicza się przez całkowanie funkcji przynależności po zbiorze wszystkich elementów stanowiących nośnik zbioru A

$$\sum Count(A) = \int_{\mathrm{x}} \mu_A(\mathrm{x}) = \int_{(1,2]} (x-1)dx + \int_{(2,4)} \frac{4-x}{2} dx$$

Teorii zbiorów rozmytych - pojęcia

Zbiór rozmyty A **zawiera się** w zbiorze rozmytym B, co zapisujemy $A \subset B$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

dla każdego $x \in X$.

Zbiór rozmyty A **jest równy** zbiorowi rozmytemu B, co zapisujemy A=B, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mu_A(x) = \mu_B(x)$$

dla każdego $x \in X$.

UWAGA:
Jeśli wartości funkcji przynależności są prawie równe, można wprowadzić pojęcie **stopnia równości zbiorów rozmytych** A i B jako

$$E(A = B) = 1 - \max_{x \in T} |\mu_A(x) - \mu_B(x)|$$

gdzie $T = \{x \in X\colon \mu_A(x) \neq \mu_B(x)\}$.

Teorii zbiorów rozmytych - pojęcia

α**-przekrojem** zbioru rozmytego $A \subseteq X$, oznaczanym A_α, nazywamy następujący zbiór nierozmyty

$$A_\alpha = \{x \in X\colon\ \mu_A(x) \geq \alpha\}, \qquad \forall_{\alpha \epsilon [0,1]}$$

czyli zbiór określony przez funkcję charakterystyczną

$$\chi_{A_\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{dla } \ \mu_A(x) \geq \alpha \\ 0 & \text{dla } \ \mu_A(x) < \alpha \end{cases}$$

Zbiór rozmyty $A \subseteq R$ jest **wypukły**, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in R$ i $\lambda \in [0,1]$ zachodzi

$$\mu_A[\lambda\, x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A\,(x_2)\}$$

Zbiór rozmyty $A \subseteq R$ jest **wklęsły**, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie punkty $x_1, x_2 \in R$ i $\lambda \in [0,1]$, że spełniona jest nierówność

$$\mu_A[\lambda\, x_1 + (1-\lambda)x_2] < \min\{\mu_A(x_1), \mu_A\,(x_2)\}$$

Przykład 9:

Rozważmy zbiór rozmyty $A \subseteq X=\{1, 2,\ldots,10\}$

$$A = \frac{0,2}{2} + \frac{0,3}{4} + \frac{0,6}{5} + \frac{0,9}{8} + \frac{1}{10}$$

Kolejne α-przekroje:

$$A_0 = X = \{1, 2, \ldots, 10\}$$
$$A_{0,2} = \{2, 4, 5, 8, 10\}$$
$$A_{0,3} = \{4, 5, 8, 10\}$$
$$A_{0,6} = \{5, 8, 10\}$$
$$A_{0,9} = \{8, 10\}$$
$$A_1 = \{10\}$$

Operacje na zbiorach rozmytych

Przecięciem (iloczynem) zbiorów rozmytych $A,B \subseteq \mathbf{X}$ jest zbiór rozmyty $A \cap B$ o funkcji przynależności

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

dla każdego $x \in X$.

Przecięciem (iloczynem) skończonej liczby zbiorów rozmytych $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \mathbf{X}$ jest zbiór rozmyty $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ o funkcji przynależności

$$\mu_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}(x) = \min\{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \ldots, \mu_{A_n}(x)\}$$

dla każdego $x \in X$.

Iloczynem algebraicznym (miękkim przecięciem) zbiorów rozmytych $A,B \subseteq \mathbf{X}$ jest zbiór rozmyty $C = A \cdot B$ zdefiniowany następująco

$$C = \{(x, \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)) \colon x \in X\},$$

dla każdego $x \in X$.

Operacje na zbiorach rozmytych

Sumą zbiorów rozmytych $A,B \subseteq \mathbf{X}$ jest zbiór rozmyty $A \cup B$ o funkcji przynależności

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

dla każdego $x \in X$.

Sumą skończonej liczby zbiorów rozmytych $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \mathbf{X}$ jest zbiór rozmyty $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ o funkcji przynależności

$$\mu_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}(x) = \max\{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \ldots, \mu_{A_n}(x)\}$$

dla każdego $x \in X$.

Sumą algebraiczną (miękką sumą) zbiorów rozmytych $A,B \subseteq \mathbf{X}$ jest zbiór rozmyty $C=A+B$ zdefiniowany następująco

$$C = \{(x, \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)) \colon x \in X\},$$

dla każdego $x \in X$.

Operacje na zbiorach rozmytych

Różnicą zbiorów rozmytych A,B⊆**X** jest zbiór rozmyty A\B o funkcji przynależności

$$\mu_{A\setminus B}(x) = \min\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}$$

dla każdego x∈X.

Różnicą symetryczną (sumą wyłączającą) zbiorów rozmytych A,B⊆**X** jest zbiór rozmyty A∆B o funkcji przynależności

$$\mu_{A\triangle B}(x) = \max\{\min\{\mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}, \min\{\mu_B(x), 1 - \mu_A(x)\}\}$$

dla każdego x∈X.

Twierdzenie o dekompozycji: Każdy zbiór rozmyty A⊆**X** można przedstawić w postaci

$$A = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha A_\alpha$$

gdzie αA_α oznacza zbiór rozmyty, którego elementom przypisano następujące stopnie przynależności:

$$\mu_{\alpha A_\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{dla} \quad x \in A_\alpha \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin A_\alpha \end{cases}$$

Przykład 10:
Niech X={1,2,3,4,5,6,7} oraz

$$A = \frac{0,9}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0,6}{6}, \qquad B = \frac{0,7}{3} + \frac{1}{5} + \frac{0,4}{6}$$

- iloczyn zbiorów A i B: $A \cap B = \frac{0,7}{3} + \frac{0,4}{6}$
- suma zbiorów A i B: $A \cup B = \frac{0,9}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0,6}{6}$
- iloczyn algebraiczny zbiorów A i B: $A \cdot B = \frac{0,63}{3} + \frac{0,24}{6}$

- suma algebraiczna zbiorów A i B: $A + B = \frac{0,97}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0,76}{6}$
- różnica zbiorów A i B: $A \backslash B = \frac{0,3}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0,6}{6}$
- różnica symetryczna zbiorów A i B: $A \Delta B = \frac{0,3}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0,6}{6}$

Przykład 11:

Rozważmy zbiór rozmyty $A \subseteq X = \{1, 2, \ldots, 10\}$

$$A = \frac{0,2}{2} + \frac{0,3}{4} + \frac{0,6}{5} + \frac{0,9}{8} + \frac{1}{10}$$

Dekompozycja zbioru A:

$$A = \frac{0,2}{2} + \frac{0,3}{4} + \frac{0,6}{5} + \frac{0,9}{8} + \frac{1}{10} =$$

$$= \left(\frac{0,2}{2} + \frac{0,2}{4} + \frac{0,2}{5} + \frac{0,2}{8} + \frac{0,2}{10}\right) \cup \left(\frac{0,3}{4} + \frac{0,3}{5} + \frac{0,3}{8} + \frac{0,3}{10}\right) \cup$$

$$\cup \left(\frac{0,6}{5} + \frac{0,6}{8} + \frac{0,6}{10}\right) \cup \left(\frac{0,9}{8} + \frac{0,9}{10}\right) \cup \left(\frac{1}{10}\right)$$

Operacje na zbiorach rozmytych

Iloczyn kartezjański zbiorów rozmytych $A \subseteq \mathbf{X}$ i $B \subseteq \mathbf{Y}$ oznaczamy $A \times B$ i definiujemy jako

$$\mu_{A\times B}(x, y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

lub

$$\mu_{A\times B}(x, y) = \mu_A(x)\,\mu_B(x)$$

dla każdego $x \in X$ i $y \in Y$.

Iloczyn kartezjański skończonej liczby zbiorów rozmytych $A_1 \subseteq X_1, A_2 \subseteq X_2, \dots, A_n \subseteq X_n$ jest zbiór rozmyty $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ o funkcji przynależności

$$\mu_{A_1\times A_2\times\cdots\times A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min\{\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_n}(x_n)\}$$

lub

$$\mu_{A_1\times A_2\times\cdots\times A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mu_{A_1}(x_1)\,\mu_{A_2}(x_2)\dots\mu_{A_n}(x_n)$$

dla każdego $x_1 \subseteq X_1, x_2 \subseteq X_2, \dots, x_n \subseteq X_n$.

Przykład 12:

Niech X={2,4}, Y={2,4,6} oraz

$$A = \frac{0{,}5}{2} + \frac{0{,}9}{4}, \qquad B = \frac{0{,}3}{2} + \frac{0{,}7}{4} + \frac{0{,}1}{6}$$

- iloczyn kartezjański zbiorów A i B:

$$A \times B = \frac{0{,}3}{(2{,}2)} + \frac{0{,}5}{(2{,}4)} + \frac{0{,}1}{(2{,}6)} + \frac{0{,}3}{(4{,}2)} + \frac{0{,}7}{(4{,}4)} + \frac{0{,}1}{(4{,}6)}$$

UWAGA:

Własności dopełnienia zbioru A:

- $A \cap A' \neq \emptyset$
- $A \cup A' \neq X$
- $\mu_{A \cap A'}(x) \leq 1/2$
- $\mu_{A \cup A'}(x) \geq 1/2$

Operacje na zbiorach rozmytych

Koncentrację zbioru rozmytego A⊆**X** oznaczamy CON(A) i definiujemy jako

$$\mu_{CON(A)}(x) = \left(\mu_A(x) \right)^2$$

dla każdego x∈X.

Rozcieńczenie zbioru rozmytego A⊆**X** oznaczamy DIL(A) i definiujemy jako

$$\mu_{DIL(A)}(x) = \left(\mu_A(x) \right)^{0,5}$$

dla każdego x∈X.

Przykład 13:

Niech X={1,2,3,4} oraz

$$A = \frac{0,4}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0,7}{4}$$

- koncentracja zbioru A: $CON(A) = \frac{0,16}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0,49}{4}$
- rozcieńczenie zbioru A: $DIL(A) = \frac{0,63}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0,84}{4}$

Zastosowanie zbiorów rozmytych w podejmowaniu decyzji

Przykład 14:

Uczeń złożył dokumenty w kilku uczelniach i został przyjęty do czterech. Podejmując decyzję o wyborze uczelni kieruje się następującymi kryteriami:

- pozycja w rankingu najlepszych szkół wyższych – K1
- niezbyt duża odległości od miejsca zamieszkania – K2
- program wymiany międzynarodowej – K3
- dobre zaplecze techniczne – K4
- szanse na znalezienie pracy – K5

Przykład 14 c.d.:

Rozważane uczelnie tworzą zbiór X={x1,x2,x3,x4}.

Kryteria wyboru można zapisać w postaci zbiorów rozmytych:

K1: zbiór rozmyty $\mathrm{C1} = \frac{0{,}75}{x1} + \frac{1}{x2} + \frac{0{,}25}{x3} + \frac{0{,}5}{x4}$

K2: zbiór rozmyty $\mathrm{C2} = \frac{0{,}8}{x1} + \frac{0{,}9}{x2} + \frac{0{,}4}{x3} + \frac{0{,}5}{x4}$

K3: zbiór rozmyty $\mathrm{C3} = \frac{0{,}2}{x1} + \frac{0{,}2}{x2} + \frac{0{,}9}{x3} + \frac{0{,}6}{x4}$

K4: zbiór rozmyty $\mathrm{C4} = \frac{0{,}5}{x1} + \frac{0{,}3}{x2} + \frac{0{,}6}{x3} + \frac{0{,}7}{x4}$

K5: zbiór rozmyty $\mathrm{C5} = \frac{0{,}6}{x1} + \frac{0{,}5}{x2} + \frac{0{,}7}{x3} + \frac{0{,}7}{x4}$

Zbiór rozmyty opisujący cel: $G=C1\cap C2\cap C3\cap C4\cap C5$

Decyzja rozmyta dla t-normy typu minimum jest postaci:

$$\mathrm{D} = \frac{0{,}2}{x1} + \frac{0{,}2}{x2} + \frac{0{,}25}{x3} + \frac{0{,}5}{x4}$$

Uczeń wybierze uczelnię o największym stopniu przynależności – uczelnia x4 (stopień przynależności 0,5)

Normy trójkątne

Podane definicje operacji przecięcia i sumy zbiorów rozmytych nie są jedynymi definicjami tych operacji

- Przecięcie zbiorów rozmytych możemy zdefiniować ogólniej jako

$$\mu_{A\cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

gdzie funkcja T jest tzw. T-normą

Przykład **T-normy**: $T\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) = \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$

- Iloczyn zbiorów rozmytych możemy zdefiniować ogólniej jako

$$\mu_{A\cap B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

gdzie funkcja S jest tzw. S-normą

Przykład **S-normy**: $S\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) = \max\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$

<u>UWAGA</u>:
T-normy oraz S-normy należą do tzw. norm trójkątnych. Funkcja S nosi także nazwę ko-normy lub normy dualnej względem T-normy

T-normy

Funkcję T dwóch zmiennych

$$T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

nazywamy **T-normą**, jeżeli:

- funkcja T jest nierosnąca względem obu argumentów

$$T(a,c) \leq T(b,d) \quad \text{dla } a \leq b \text{ i } c \leq d$$

- funkcja T spełnia warunek przemienności

$$T(a,b)=T(b,a)$$

- funkcja T spełnia warunek łączności

$$T(T(a,b),c)=T(a,T(b,c))$$

- funkcja T spełnia warunki brzegowe

$$T(a,0)=0,\ T(a,1)=a$$

gdzie $a,b,c,d \in [0,1]$

S-normy

Funkcję S dwóch zmiennych

$$S: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$$

nazywamy **S-normą**, jeżeli:

- funkcja S jest nierosnąca względem obu argumentów

$$S(a,c) \leq S(b,d) \quad \text{dla } a \leq b \text{ i } c \leq d$$

- funkcja S spełnia warunek przemienności

$$S(a,b)=S(b,a)$$

- funkcja S spełnia warunek łączności

$$S(S(a,b),c)=S(a,S(b,c))$$

- funkcja S spełnia warunki brzegowe

$$S(a,0)=a, \ S(a,1)=1$$

gdzie $a,b,c,d \in [0,1]$

Przykładowe T-normy i S-normy

Nr	**T-normy:** T(a,b)=$a *^{T} b$	**S-normy:** S(a,b)=$a *^{S} b$
(1)	T(a,b)=min{a,b}	S(a,b)=max{a,b}
(2)	T(a,b)=a·b	S(a,b)=a+b−a·b
(3)	T(a,b)=max{a+b−a·b,0}	S(a,b)=min{a+b,1}
(4)	$T(a,b)=\begin{cases} a & \text{gdy } b=1 \\ b & \text{gdy } a=1 \\ 0 & \text{gdy } a,b\neq 1 \end{cases}$	$S(a,b)=\begin{cases} a & \text{gdy } b=0 \\ b & \text{gdy } a=0 \\ 1 & \text{gdy } a,b\neq 0 \end{cases}$

Własności:

- Każdej T-normie odpowiada S-norma, związek między nimi przedstawia równanie:

$$a *^{T} b = 1 - [(1-a) *^{S} (1-b)]$$

- Dowolna T-norma jest ograniczona w następujący sposób:

$$T_w(a,b) \leq T(a,b) \leq \min\{a,b\}$$

- Dowolna S-norma jest ograniczona w następujący sposób:

$$\max\{a,b\} \leq S(a,b) \leq S_w(a,b)$$

gdzie T_w, S_w to normy postaci (4)

Zasady rozszerzania

Niech f będzie wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniem nierozmytym przestrzeni **X** w przestrzeń **Y**

$$\mathbf{f}: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$$

Dla zbioru rozmytego A (określonego w przestrzeni **X**, tzn. A⊆**X**) postaci

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \cdots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n}$$

zbiorem indukowanym przez odwzorowanie f będzie zbiór rozmyty B (określony w przestrzeni **Y**, tzn. B⊆**Y**) postaci

$$B = f(A) = \frac{\mu_A(x_1)}{f(x_1)} + \frac{\mu_A(x_2)}{f(x_2)} + \cdots + \frac{\mu_A(x_n)}{f(x_n)}$$

Przykład 14:

Dla zbioru rozmytego

$$A = \frac{0{,}4}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0{,}7}{4}$$

oraz odwzorowania wzajemnie jednoznacznego f(x)=2x+1

- rozmyty zbiór indukowany B ma postać: $B = \frac{0{,}4}{5} + \frac{1}{7} + \frac{0{,}7}{9}$

Zasada rozszerzania I

Niech f będzie odwzorowaniem nierozmytym przestrzeni **X** w przestrzeń **Y**

$$\mathbf{f}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$$

Dla zbioru rozmytego A (określonego w przestrzeni **X**, tzn. A⊆**X**) **zbiorem indukowanym** przez odwzorowanie f będzie zbiór rozmyty B (określony w przestrzeni **Y**, tzn. B⊆**Y**) postaci:

- dla zbioru X zawierającego skończoną liczbę elementów

$$B = f(A) = \left\{ \left(y, \mu_B(y) \right) \middle| \; y = f(x), x \epsilon X \right\}$$

- dla zbioru X zawierającego nieskończoną liczbę elementów

$$B = f(A) = \int_Y \frac{\mu_A(x)}{f(x)}$$

gdzie

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) & \text{dla} \;\; f^{-1}(x) \neq \emptyset \\ 0 & \text{dla} \;\; f^{-1}(x) = \emptyset \end{cases}$$

Zasada rozszerzania II

Niech f będzie odwzorowaniem nierozmytym przestrzeni $\mathbf{X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n}$ w przestrzeń **Y**

$$f\colon \mathbf{X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n} \to Y$$

Dla zbiorów rozmytych A_i (gdzie $A_i \subseteq \mathbf{X_i}$) **zbiorem indukowanym** przez odwzorowanie f będzie zbiór rozmyty B (określony w przestrzeni **Y**, tzn. $B \subseteq \mathbf{Y}$) postaci:

$$B = f(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \left\{ \left(y, \mu_B(y)\right) \middle| \, y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), (x_1, x_2, \ldots, x_n) \epsilon X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \right\}$$

gdzie

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \ldots, \mu_{A_n}(x_n)\} & \text{dla} \quad f^{-1}(x) \neq \emptyset \\ 0 & \text{dla} \quad f^{-1}(x) = \emptyset \end{cases}$$

Relacje rozmyte i ich własności

Relacje rozmyte pozwalają sformalizować nieprecyzyjne sformułowania typu „x jest prawie równe y” lub „x jest znacznie większe od y”.

Relacją rozmytą R między dwoma niepustymi zbiorami (nierozmytymi) **X** i **Y** nazywamy zbiór rozmyty określony na iloczynie kartezjańskim **X**×**Y**, tzn.

$$R \subseteq X \times Y = \{(x, y): x \in X, y \in Y\}$$

- Relacja rozmyta jest zbiorem par

$$R = \{((x, y), \mu_R(x, y))\}, \qquad \forall_{x \in X} \forall_{y \in Y}$$

gdzie

$$\mu_R: X \times Y \to [0,1]$$

- Zapis relacji w notacji Zadeha

$$R = \sum_{X \times Y} \frac{\mu_R(x, y)}{(x, y)}, \qquad R = \int_{X \times Y} \frac{\mu_R(x, y)}{(x, y)}$$

UWAGA:
Funkcja μ_R przyporządkowuje każdej parze (x, y) stopień przynależności $\mu_R(x, y)$, który interpretuje się jako siłę powiązania między elementami $x \in X$ i $y \in Y$.

Przykład 15:

Sformalizowanie nieprecyzyjnego stwierdzenia „y jest prawie równe x”
Niech X={2,4,5} oraz Y={5,6}. Relację R można zdefiniować jako

$$R = \frac{0{,}7}{(2{,}5)} + \frac{0{,}8}{(2{,}6)} + \frac{0{,}9}{(4{,}5)} + \frac{0{,}8}{(4{,}6)} + \frac{1}{(5{,}5)} + \frac{0{,}9}{(5{,}6)}$$

Funkcja przynależności $\mu_R(x, y)$ relacji R jest postaci:

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = y \\ 0{,}9 & \text{dla } |x - y| = 1 \\ 0{,}8 & \text{dla } |x - y| = 2 \\ 0{,}7 & \text{dla } |x - y| = 3 \end{cases}$$

Relację R można też zapisać za pomocą tablicy (macierzy)

	y_1=5	y_2=6
x_1=2	0,7	0,8
x_2=4	0,9	0,8
x_3=5	1	0,9

Relacje rozmyte - złożenie

Rozważmy trzy zbiory nierozmyte X, Y, Z i dwie relacje rozmyte $R \subseteq X \times Y$ i $S \subseteq Y \times Z$ o funkcjach przynależności $\mu_R(x, y)$ i $\mu_S(y, z)$

Złożeniem typu sup-T relacji $R \subseteq X \times Y$ i $S \subseteq Y \times Z$ nazywamy relację rozmytą $R \circ S \subseteq X \times Z$ o funkcji przynależności

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \sup_{y \in Y} \{ \mu_R(x, y) *^{T} \mu_S(y, z)\}$$

- Postać funkcji przynależności zależy od przyjętej t-normy np. dla $T(a, b) = \min\{a, b\}$

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \sup_{y \in Y} \{\min\{ \mu_R(x, y), \mu_S(y, z)\}\}$$

- Jeśli zbiór Y ma skończoną liczbę elementów wówczas

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \max_{y \in Y} \{\min\{ \mu_R(x, y), \mu_S(y, z)\}\}$$

Przykład 16:

Załóżmy, że relacje R i S są reprezentowane przez macierze:

$$R = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}1 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}6 & 1 \end{bmatrix}$$

przy czym $X=\{x_1,x_2\}$, $Y=\{y_1,y_2\}$, $Z=\{z_1,z_2,z_3\}$

Złożenie typu max-min relacji R i S ma postać:

$$W = R \circ S = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \end{bmatrix}$$

$$w_{11} = \max\{\min\{0{,}4; 0{,}3\}; \min\{0{,}2; 0{,}9\}\} = 0{,}3$$
$$w_{12} = \max\{\min\{0{,}4; 0{,}7\}; \min\{0{,}2; 0{,}6\}\} = 0{,}4$$
$$w_{13} = \max\{\min\{0{,}4; 0{,}8\}; \min\{0{,}2; 1\}\} = 0{,}4$$
$$w_{21} = \max\{\min\{0{,}5; 0{,}3\}; \min\{0{,}1; 0{,}9\}\} = 0{,}3$$
$$w_{22} = \max\{\min\{0{,}5; 0{,}7\}; \min\{0{,}1; 0{,}6\}\} = 0{,}5$$
$$w_{23} = \max\{\min\{0{,}5; 0{,}8\}; \min\{0{,}1; 1\}\} = 0{,}5$$

Zatem

$$W = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Relacje rozmyte - złożenie

Złożenie zbioru rozmytego $A \subseteq X$ i relacji rozmytej $R \subseteq X \times Y$ oznaczamy $A \circ R$ i definiujemy jako zbiór rozmyty $B \subseteq Y$

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X}\{\mu_A(x) *^T \mu_R(x,y)\}$$

Postać funkcji przynależności zależy od przyjętej t-normy i właściwości zbioru X:

(1) Jeżeli $T(a,b) = \min\{a,b\}$ – złożenie typu sup-min

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X}\{\min\{\mu_A(x), \mu_R(x,y)\}\}$$

(2) Jeżeli $T(a,b) = \min\{a,b\}$ oraz X ma skończoną liczbę elementów – złożenie typu max-min

$$\mu_B(y) = \max_{x \in X}\{\min\{\mu_A(x), \mu_R(x,y)\}\}$$

(3) Jeżeli $T(a,b) = a \cdot b$ – złożenie typu sup-iloczyn

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X}\{\mu_A(x) \cdot \mu_R(x,y)\}$$

(4) Jeżeli $T(a,b) = a \cdot b$ oraz X ma skończoną liczbę elementów – złożenie typu max-iloczyn

$$\mu_B(y) = \max_{x \in X}\{\mu_A(x) \cdot \mu_R(x,y)\}$$

Przykład 17:

Załóżmy, że X={x_1,x_2,x_3}, Y={y_1,y_2}.

Zbiór rozmyty $\mathrm{A} = \frac{0{,}4}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{0{,}6}{x_3}$, a relację R reprezentuje macierz:

$$\mathrm{R} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 1 \\ 0{,}9 & 0{,}3 \end{bmatrix}$$

Złożenie $\mathrm{A} \circ \mathrm{R}$ typu max-min daje zbiór rozmyty B postaci:

$$\mathrm{B} = \frac{\mu_{\mathrm{B}}(y_1)}{y_1} + \frac{\mu_{\mathrm{B}}(y_2)}{y_2}$$

$$\mu_{\mathrm{B}}(y_1) = \max\{\min\{0{,}4; 0{,}5\}; \min\{1; 0{,}2\}; \min\{0{,}6; 0{,}9\}\} = 0{,}6$$
$$\mu_{\mathrm{B}}(y_2) = \max\{\min\{0{,}4; 0{,}7\}; \min\{1; 1\}; \min\{0{,}6; 0{,}3\}\} = 1$$

Zatem

$$\mathrm{B} = \frac{0{,}6}{y_1} + \frac{1}{y_2}$$

Liczby rozmyte

X=R – przestrzeń, obszar rozważań

Liczbą rozmytą nazywamy zbiór rozmyty A⊆R, którego funkcja przynależności

$$\mu_A(x): R \to [0,1]$$

spełnia następujące warunki:

(1) $\sup\limits_{x \in R} \mu_A(x) = 1$, tzn. zbiór rozmyty A jest normalny

(2) $\mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$, tzn. zbiór A jest wypukły

(3) $\mu_A(x)$ jest funkcją przedziałami ciągłą

Liczba rozmyta A⊆R jest **dodatnia**, jeżeli $\mu_A(x) = 0$ dla wszystkich x<0.
Liczba rozmyta A⊆R jest **ujemna**, jeżeli $\mu_A(x) = 0$ dla wszystkich x>0.

Operacje na liczbach rozmytych

Zasada rozszerzania pozwala na definiowanie działań na liczbach rozmytych

Operacje arytmetyczne na liczbach rozmytych A,B⊆R		
dodawanie	$C = A \oplus B$	$\mu_C(y) = \sup\limits_{\substack{x_1,x_2 \\ y=x_1+x_2}} \min\{\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)\}$
odejmowanie	$C = A \ominus B$	$\mu_C(y) = \sup\limits_{\substack{x_1,x_2 \\ y=x_1-x_2}} \min\{\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)\}$
mnożenie	$C = A \odot B$	$\mu_C(y) = \sup\limits_{\substack{x_1,x_2 \\ y=x_1 \cdot x_2}} \min\{\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)\}$
dzielenie	$C = A \oslash B$	$\mu_C(y) = \sup\limits_{\substack{x_1,x_2 \\ y=x_1/x_2}} \min\{\mu_A(x_1), \mu_B(x_2)\}$

UWAGA:
Wynik operacji arytmetycznych wykonywanych na liczbach rozmytych może nie być liczbą rozmytą. Problem ten zostaje wyeliminowany, gdy przeprowadzamy operacje na liczbach rozmytych o ciągłych funkcjach przynależności (**twierdzenie Dubois i Prade**).

Przykład 18:

Działania arytmetyczne na liczbach rozmytych

$$A = \frac{0,7}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0,6}{4}, \quad B = \frac{0,8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0,5}{6}$$

$$C=A\oplus B=\frac{\min\{0,7;0,8\}}{5} + \frac{\max\{\min\{0,7;1\};\min\{1;0,8\}\}}{6} + \frac{\max\{\min\{1;1\};\min\{0,6;0,8\}\}}{7} +$$
$$+\frac{\max\{\min\{0,7;0,5\};\min\{0,6;0,8\}\}}{8} + \frac{\min\{1;0,5\}}{9} + \frac{\min\{0,6;0,5\}}{10} =$$
$$=\frac{0,7}{5} + \frac{0,8}{6} + \frac{1}{7}+\frac{0,6}{8} + \frac{0,5}{9} + \frac{0,5}{10}$$

$$C=A\odot B=\frac{\min\{0,7;0,8\}}{6} + \frac{\min\{0,7;1\}}{8} + \frac{\min\{1;0,8\}}{9} +$$
$$+\frac{\max\{\min\{0,7;0,5\};\min\{1;1\};\min\{0,6;0,8\}\}}{12} + \frac{\min\{0,6;1\}}{16} + \frac{\min\{1;0,5\}}{18} + \frac{\min\{0,6;0,5\}}{24} =$$
$$=\frac{0,7}{6} + \frac{0,7}{8} + \frac{0,8}{9}+\frac{1}{12} + \frac{0,6}{16} + \frac{0,5}{18} + \frac{0,5}{24}$$

Operacje jednoargumentowe na liczbach rozmytych

1. Operacja zmiany znaku:

W wyniku operacji $f(x) = -x$ otrzymujemy liczbę przeciwną do liczby rozmytej A⊆R oznaczaną jako -A⊆R, której funkcja przynależności ma postać

$$\mu_{-A}(x) = \mu_A(-x)$$

Liczby rozmyte A i –A są symetryczne względem osi OX

2. Operacja odwrotności:

W wyniku operacji $f(x) = 1/x$ otrzymujemy liczbę odwrotną do liczby rozmytej A⊆R oznaczaną jako A^{-1}⊆R, której funkcja przynależności ma postać

$$\mu_{A^{-1}}(x) = \mu_A(x^{-1})$$

Zakładamy, że liczba rozmyta A jest liczbą dodatnią lub ujemną. Jeśli liczba rozmyta A nie jest ani dodatnia, ani ujemna, to zbiór rozmyty B=f(A)=A^{-1} nie jest wypukły, a więc B nie jest liczbą rozmytą.

Operacje jednoargumentowe na liczbach rozmytych

3. Operacja skalowania:

W wyniku operacji $f(x) = \lambda x$ otrzymujemy liczbą przeskalowaną liczby rozmytej $A \subseteq R$ oznaczaną jako $\lambda A \subseteq R$, której funkcja przynależności ma postać

$$\mu_{\lambda A}(x) = \mu_A(\lambda^{-1}x)$$

4. Operacja eksponent:

Wynikiem operacji eksponent na liczbie rozmytej $A \subseteq R$ jest liczba $e^A \subseteq R$, której funkcja przynależności ma postać

$$\mu_{e^A}(x) = \begin{cases} \mu_A(\ln(x)) & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

5. Operacja wartości bezwzględnej:

Wartość bezwzględna liczby rozmytej $A \subseteq R$ jest liczba $|A| \subseteq R$, której funkcja przynależności ma postać

$$\mu_{|A|}(x) = \begin{cases} \max\{\mu_A(x), \mu_A(-x)\} & \text{dla } x \geq 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Liczby rozmyte |A| jest liczbą dodatnią