Uniwersytet
Ekonomiczny
w Katowicach

blisko

międzynarodowo

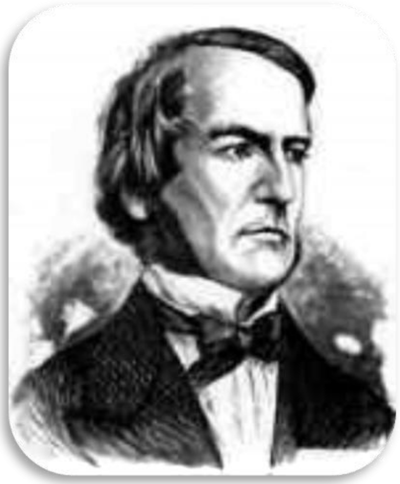
przez całe życie

LOGIKA DLA INFORMATYKÓW

Algebry Boole'a

dr hab. Ewa Michalska

ALGEBRA BOOLE'A



George Boole (1815-1864) angielski matematyk i filozof, wprowadził metody algebraiczne do logiki, współtworząc logikę matematyczną

- **Algebra Boole'a** – struktura matematyczna z działaniami spełniającymi ustalone prawa
- **Algebra Boole'a** – arytmetyka symboliczna stosowana do wykonywania obliczeń na wartościach logicznych w sposób algebraiczny

Zastosowania:

- projektowanie układów logicznych
- upraszczanie skomplikowanych wyrażeń logicznych

Algebra Boole'a jest to zbiór z dwoma działaniami dwuargumentowymi (+) i (•), działaniem jednoargumentowym (') oraz różnymi elementami 0 i 1, spełniającymi następujące prawa:

1. prawa przemienności

$$\left.\begin{aligned} x + y &= y + x \\ x \bullet y &= y \bullet x \end{aligned}\right\}$$

2. prawa łączności

$$\left.\begin{aligned} (x + y) + z &= x + (y + z) \\ (x \bullet y) \bullet z &= x \bullet (y \bullet z) \end{aligned}\right\}$$

3. prawa rozdzielności

$$\left.\begin{aligned} x + (y \bullet z) &= (x + y) \bullet (x + z) \\ x \bullet (y + z) &= (x \bullet y) + (x \bullet z) \end{aligned}\right\}$$

4. prawa identyczności

$$\left.\begin{aligned} x + 0 &= x \\ x \bullet 1 &= x \end{aligned}\right\}$$

5. prawa dopełnienia

$$\left.\begin{aligned} x + x' &= 1 \\ x \bullet x' &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Działanie (+) nazywamy sumą, (•) – iloczynem, a działanie jednoargumentowe (') – dopełnieniem

Zasada dualności

Jeśli zamienimy ze sobą znaki „+” i „•” oraz 0 i 1 we wzorze prawdziwym we wszystkich algebrach Boole’a, to otrzymany wzór też będzie prawdziwy we wszystkich algebrach Boole’a:

6. prawa idempotentności

$$\left.\begin{aligned} x+x&=x \\ x\bullet x&=x \end{aligned}\right\}$$

7. następne prawa identyczności

$$\left.\begin{aligned} x+1&=1 \\ x\bullet 0&=0 \end{aligned}\right\}$$

8. prawa pochłaniania

$$\left.\begin{aligned} (x\bullet y)+x&=x \\ (x+y)\bullet x&=x \end{aligned}\right\}$$

9. prawa De Morgana

$$\left.\begin{aligned} (x+y)'&=x'\bullet y' \\ (x\bullet y)'&=x'+y' \end{aligned}\right\}$$

Odpowiedniki w różnych systemach

Rachunek zdań	Rachunek zbiorów	Algebra Boole'a
$p \vee \neg p$	U	1
$p \wedge \neg p$	$\varnothing$	0
$\neg$	`	`
$\vee$	$\cup$	+
$\wedge$	$\cap$	•
$\leftrightarrow$	=	=

Funkcja booleowska

Funkcją booleowską nazywamy n-argumentową funkcję zmiennych binarnych postaci

$$\mathbf{f: B^n \rightarrow B}$$

gdzie:

$B=\{0;1\}$

$B^n = \{0;1\} \times \{0;1\} \times \ldots \times \{0;1\}$ - iloczyn kartezjański n zbiorów

$\boldsymbol{BOOL(n)}$ – zbiór wszystkich n-argumentowych funkcji booleowskich

$\overline{\overline{\boldsymbol{BOOL(n)}}} = 2^{2^n}$ – liczebność (moc zbioru) $\boldsymbol{BOOL(n)}$

<u>Przykład:</u>

Liczba wszystkich trójargumentowych funkcji booleowskich wynosi

$$\overline{\overline{\boldsymbol{BOOL(n)}}} = 2^{2^3} = 256$$

Działania w algebrze Boole'a:

- suma (+)

+	0	1
0	0	1
1	1	1

- iloczyn (•)

•	0	1
0	0	0
1	0	1

- dopełnienie (')

x	x'
0	1
1	0

Przedstawienie działań:

$x+y=\max\{x,y\}$
$x \bullet y=\min\{x,y\}$
$x'=1-x$

Przykładowe reprezentacje:

Formuła (wyrażenie booleowskie):

$$f(x,y,z)=x'y'z+x'yz+xy'z+xyz'+xyz$$

Tablica prawdy:

x	y	z	x'	y'	z'	x'y'z	x'yz	xy'z	xyz'	xyz	f
0	0	0									
0	0	1									
0	1	0									
0	1	1									
1	0	0									
1	0	1									
1	1	0									
1	1	1									

Przykładowe reprezentacje:

Formuła (wyrażenie booleowskie):

$$f(x,y,z)=x'y'z+x'yz+xy'z+xyz'+xyz$$

Tablica prawdy:

x	y	z	x'	y'	z'	x'y'z	x'yz	xy'z	xyz'	xyz	f
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Algebra Boole'a - pojęcia

Atomem w algebrze Boole'a nazywamy niezerowy element, który nie może być przedstawiony w postaci sumy dwóch elementów różnych od niego

Przykład:

- atomami w zbiorze potęgowym 2^A są zbiory jednoelementowe;

- jedynym atomem algebry B={0;1} jest 1;

-atomem algebry B^n jest ciąg n-elementowy, w którym dokładnie jeden wyraz jest równy 1, a pozostałe są równe 0;

-atomami algebry BOOL(n) są funkcje przyjmujące wartość 1 dla dokładnie jednego elementu B^n

Algebra Boole'a - pojęcia

Wyrażeniami booleowskimi są np.: symbole 0, 1, zmienne x, y, a także wyrażenia z działaniami booleowskimi xy, $x+z$, $(x'y)'$

Symbolami atomowymi są wyrażenia booleowskie składające się tylko z jednej zmiennej lub jej dopełnienia. Odpowiadające im funkcje przyjmują wartość 1 dla połowy elementów algebry B^n.

Iloczyn minimalny n zmiennych jest to iloczyn dokładnie n symboli atomowych, z których każdy zawiera inną zmienną.

Przykład:

- wyrażenia $xy'z'$, $x'yz'$ są iloczynami minimalnymi trzech zmiennych, odpowiadające im funkcje ze zbioru BOOL(3) przyjmują wartość 1 odpowiednio w punktach (1,0,0) i (0,1,0)
- wyrażenie xz' jest iloczynem minimalnym dwóch zmiennych x, z, ale nie jest iloczynem minimalnym trzech zmiennych x, y, z

Algebra Boole'a - pojęcia

Dwa wyrażenia booleowskie nazywamy **równoważnymi**, jeśli odpowiadające im funkcje booleowskie są takie same

Postać kanoniczna wyrażenia booleowskiego
(postać normalna alternatywno-koniunkcyjna) jest to równoważne przedstawienie tego wyrażenia w postaci sumy różnych iloczynów minimalnych (przedstawienie jednoznaczne z dokładnością do porządku składników)

Przykład:

Wyrażenia x+(y•z) oraz (x+y)•(x+z) są równoważne

x	y	z	y•z	x+(y•z)	x+y	x+z	(x+y)•(x+z)
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Postać kanoniczna:

$f(x,y,z)=x'yz+xy'z'+xy'z+xyz'+xyz$

Przykład:

Wyrażenia $x+(y\bullet z)$ oraz $(x+y)\bullet(x+z)$ są równoważne

x	y	z	$y\bullet z$	$x+(y\bullet z)$	$x+y$	$x+z$	$(x+y)\bullet(x+z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Postać kanoniczna:

$f(x,y,z)=x'yz+xy'z'+xy'z+xyz'+xyz$

Przykład:

Wyrażenie $(x+yz')(yz)'$ ma następującą postać kanoniczną $x'yz'+xy'z'+xy'z+xyz'$

x	y	z	z′	yz′	x+yz′	yz	(yz)′	(x+yz′)(yz)′
0	0	0						
0	0	1						
0	1	0						
0	1	1						
1	0	0						
1	0	1						
1	1	0						
1	1	1						

Przykład:

Wyrażenie $(x+yz')(yz)'$ ma następującą postać kanoniczną $x'yz'+xy'z'+xy'z+xyz'$

x	y	z	z′	yz′	x+yz′	yz	(yz)′	(x+yz′)(yz)′
0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0	0

Przykład: sprawdzenie

Wyrażenie $(x+yz')(yz)'$ ma następującą postać kanoniczną $xyz'+xy'z+xy'z'+x'yz'$

x	y	z	xyz′	xy′z	xy′z′	x′yz′	xyz′+xy′z+xy′z′+x′yz′
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Przykład: sprawdzenie

Wyrażenie (x+yz’)(yz)’ ma następującą postać kanoniczną xyz’+xy’z+xy’z’+x’yz’

x	y	z	xyz’	xy’z	xy’z’	x’yz’	xyz’+xy’z+xy’z’+x’yz’
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0

Przykład:

Wyrażenie $(x+yz')(yz)'$ ma następującą postać kanoniczną $xyz'+xy'z+xy'z'+x'yz'$ (wyprowadzenie za pomocą przekształceń)

$(x+yz')(yz)'=$	
$=(x+yz')(y'+z')$	prawo de Morgana
$=x(y'+z')+yz'(y'+z')$	prawo rozdzielności
$=(xy'+xz')+(yz'y'+yz'z')$	prawo rozdzielności
$=(xy'+xz')+(0+yz')$	$yy'=0$, $z'z'=z'$
$=xy'+xz'+yz'=xy'1+x1z'+1yz'$	prawo $x=x\bullet 1$
$=xy'(z+z')+x(y+y')z'+(x+x')yz'$	prawa $x+x'=1$ i rozdzielności
$=xy'z+xy'z'+xyz'+xy'z'+xyz'+x'yz'$	prawo $x+x=x$
$=xy'z+xy'z'+xyz'+x'yz'$	

Wyrażenia optymalne – upraszczanie wyrażeń booleowskich

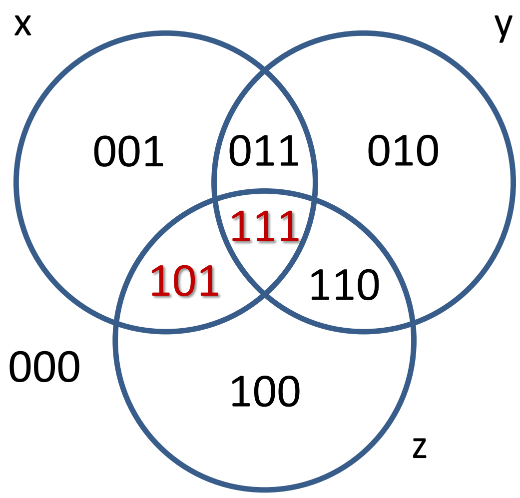
- Wyrażenia booleowskie mogą być realizowane jako układy elektroniczne
- Wyrażenia równoważne odpowiadają układom elektronicznym działającym identycznie (dającym te same wyniki dla tych samych danych)
- Upraszczanie wyrażeń booleowskich oznacza uzyskanie odpowiadających im uproszczonych układów elektronicznych

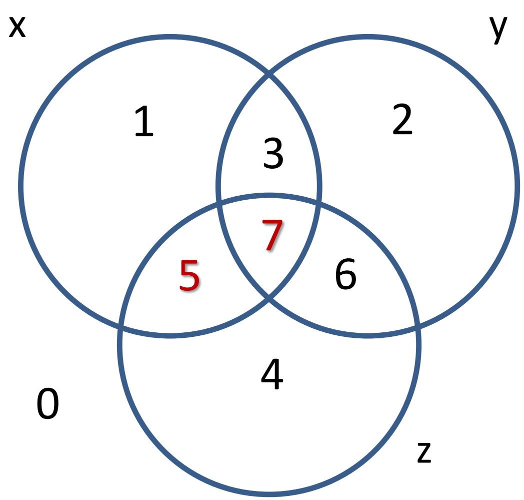
Suma iloczynów symboli atomowych jest optymalna, jeśli nie istnieje równoważne wyrażenie booleowskie będące sumą mniejszej liczby iloczynów oraz jeśli wśród wszystkich równoważnych sum tej samej liczby iloczynów nie istnieją wyrażenia z mniejszą liczbą symboli atomowych

TABLICE LOGICZNE

Diagram Johnstona – interpretacja zbiorów na diagramie Venna jako zmiennych logicznych. Przynależność do zbioru oznacza, że dana zmienna logiczna ma wartość 1, w przeciwnym przypadku 0

Obraz funkcji $f(x,y,z)=xyz+xy'z=xz$





Metody upraszczania wyrażeń logicznych

Procedura Quine'a–McCluskeya – metoda tworzenia wyrażeń optymalnych za pomocą systematycznego grupowania iloczynów różniących się jednym symbolem atomowym.

Metoda tablic logicznych – metoda łącząca metodę diagramów Venna i wartości logicznych

- mapy Karnaugha (stosowane najczęściej dla wyrażeń booleowskich trzech lub czterech zmiennych)
- diagramy Michalskiego (stosowane dla większej liczby zmiennych)

Uwaga:
Diagram GLD (Generalized Logic Diagram) – uogólniona postać diagramu logicznego pozwalająca reprezentować funkcje o argumentach mających więcej niż dwie wartości (zastosowania: rozpoznawanie obrazów, maszynowe uczenie się, wizualizacja wiedzy).

Tablica Karnaugha dla funkcji booleowskiej trzech zmiennych x, y, z:

- tablica taka jest tabelą o wymiarach (2×4),
- każdy z ośmiu kwadratów odpowiada iloczynowi minimalnemu,
- znak „+” wskazuje, które iloczyny minimalne występują w funkcji opisanej tabelą,
- sąsiednie kolumny różnią się tylko jednym symbolem atomowym,
- jeśli zwiniemy tabelę i skleimy lewą krawędź z prawą, otrzymamy walec, którego kolumny nadal mają tę samą własność,
- symbolom atomowym x i x′ odpowiadają bloki o wymiarach (1×4),
- symbolom atomowym y, z, y′, z′ odpowiadają bloki o wymiarach (2×2),
- iloczynom dwóch symboli atomowych odpowiadają bloki o wymiarach (1×2) lub (2×1),
- iloczynom trzech symboli atomowych odpowiadają bloki o wymiarach (1×1).

Przykład:

a) $xyz'+x'y'$

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x		+		
x'			+	+

b) x

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x	+	+	+	+
x'				

c) z'

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x		+	+	
x'		+	+	

d) $xy'+z$

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x	+		+	+
x'	+			+

Procedura znajdowania wyrażenia optymalnego dla funkcji booleowskiej zmiennych x, y, z

Krok 1. Zaznaczyć w tablicy Karnaugha kwadraty odpowiadające danej funkcji.

Krok 2. (a) Zakreślić każdy blok składający się z ośmiu zaznaczonych kwadratów (jeśli wszystkich 8 kwadratów zostało zaznaczonych, funkcją booleowską jest 1 – koniec procedury).

(b) Zakreślić każdy blok składający się z czterech zaznaczonych kwadratów, niezawierający się w większym zakreślonym bloku.

(c) Zakreślić każdy blok składający się z dwóch zaznaczonych kwadratów, niezawierający się w większym zakreślonym bloku.

(d) Zakreślić każdy zaznaczony kwadrat, niezawierający się w większym zakreślonym bloku.

Procedura znajdowania wyrażenia optymalnego dla funkcji booleowskiej zmiennych x, y, z

Krok 3. Wybrać zbiór zakreślonych bloków tak, by:

- każdy zaznaczony kwadrat znalazł się w co najmniej jednym wybranym bloku,
- liczba wybranych bloków była jak najmniejsza,
- wśród wszystkich zbiorów spełniających warunek (b) wyrażenie odpowiadające wybranemu zbiorowi zawierało jak najmniej symboli atomowych.

Uwaga:

Jeśli zwiększymy liczbę zmiennych do czterech: w, x, y, z, tablica będzie mieć wymiary (4×4) i wtedy będziemy ją „sklejać” zarówno wzdłuż krawędzi górnej i dolnej, jak lewej i prawej (uzyskując kształt „torusa”), a procedurę w kroku 2 zaczniemy od poszukiwania bloków składających się z 16 kwadratów.

Przykład:

Znaleźć wyrażenie optymalne dla funkcji

a) $f(x,y,z) = xyz+xyz'+xy'z'+x'yz+x'yz'+x'y'z$

	yz	yz’	y’z’	y’z
x	+	+	+	
x’	+	+		+

Wyrażenie optymalne: $y + xz' + x'z$

b) f(w,x,y,z)=wxyz+…

	yz	yz'	y'z'	y'z
wx	+	+		
wx'	+	+		+
w'x'		+	+	
w'x		+	+	

Wyrażenie optymalne: …

b) $f(w,x,y,z)=wxyz+wxyz'+wx'yz+wx'yz'+w'x'yz'$
$+w'x'y'z'+w'xyz'+w'xy'z'$

	yz	yz’	y’z’	y’z
wx	+	+		
wx’	+	+		+
w’x’		+	+	
w’x		+	+	

Wyrażenie optymalne: wy + w’z’ + wx’z

SIECI LOGICZNE

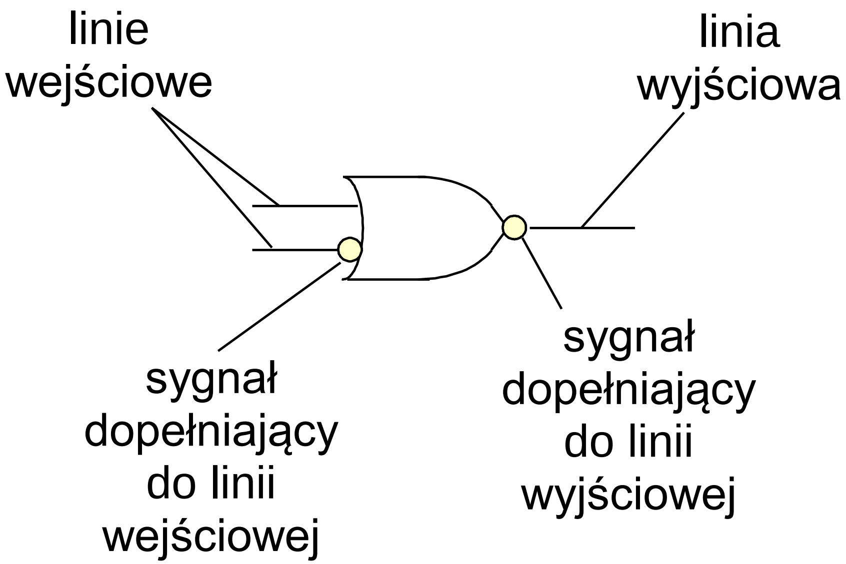
Na poziomie sprzętowym informatyka zajmuje się projektowaniem urządzeń, które mają dawać właściwe wyniki dla określonych danych wejściowych.

Jeśli dane wejściowe i wyjściowe są zerami lub jedynkami, problem polega na zaprojektowaniu układu przetwarzającego dane wejściowe zgodnie z regułami określonymi za pomocą funkcji booleowskich.

Bramki

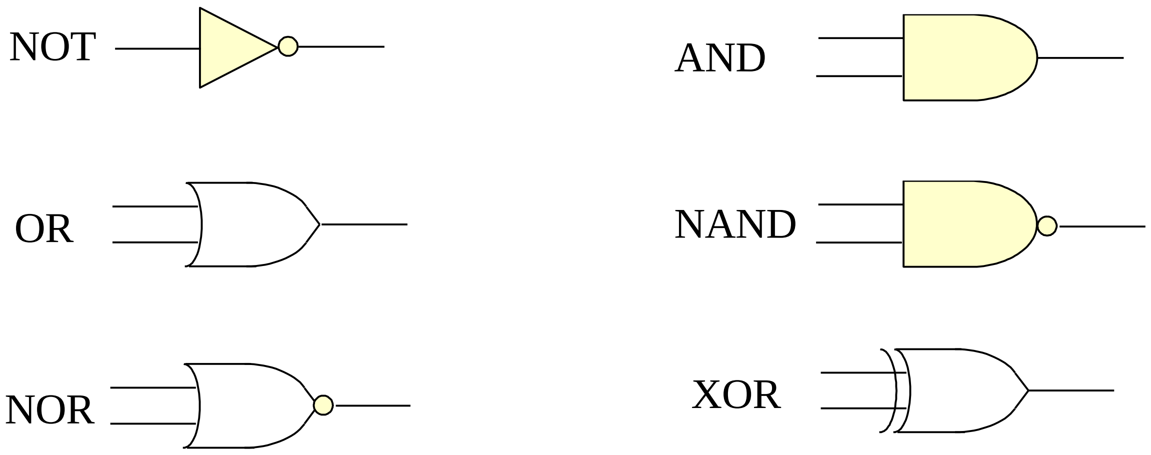
Podstawowymi cegiełkami, z których buduje się sieci logiczne, są małe jednostki zwane **bramkami**, odpowiadające prostym funkcjom booleowskim.

Przykład:



Symbole logiczne

Najczęściej stosowane symbole logiczne:

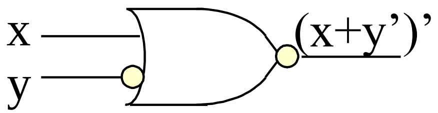


Wartości funkcji booleowskich

x	y	x′ NOT	x+y OR	(x+y)′ NOR	x•y AND	(x•y)′ NAND	x⊕y XOR
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	0

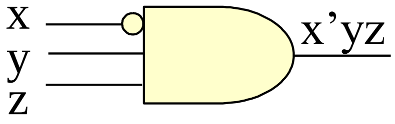
Przykład:

(a) Bramka odpowiadająca funkcji booleowskiej (x+y')'
- równoważnie x'y



(a)

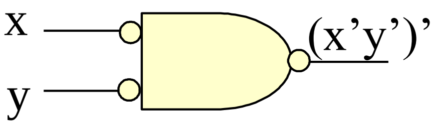
(b) Bramka AND z trzema wejściami dla funkcji x'yz



(b)

Przykład:

(c) Bramka dla funkcji (x’y’)’
    - równoważnie x+y (działa tak samo, jak bramka OR)



(c)

Częste wymagania stawiane przy projektowaniu bramek:

- możliwie mała liczba bramek,
- „mała” długość najdłuższego ciągu bramek (długie ciągi bramek skutkują wolniejszym działaniem całej sieci).

Wyrażenia optymalne

UWAGA!

Wyrażenia optymalne nie zawsze dają najprostsze sieci.

Przykład:

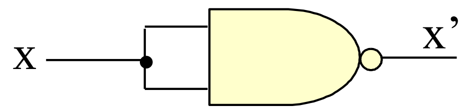
Wyrażenie xy+zy jest pewnym optymalnym wyrażeniem zmiennych x, y, z, ale wymaga zastosowania dwóch bramek AND oraz bramki OR, natomiast równoważne mu wyrażenie (x+z)y wymaga zastosowania jednej bramki OR i jednej bramki AND.

Zastępowanie bramek

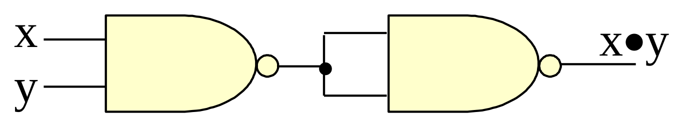
W pewnych sytuacjach chcemy mieć wszystkie bramki tego samego typu lub co najwyżej dwóch typów.

Zawsze wystarczają tylko bramki NAND lub NOR.

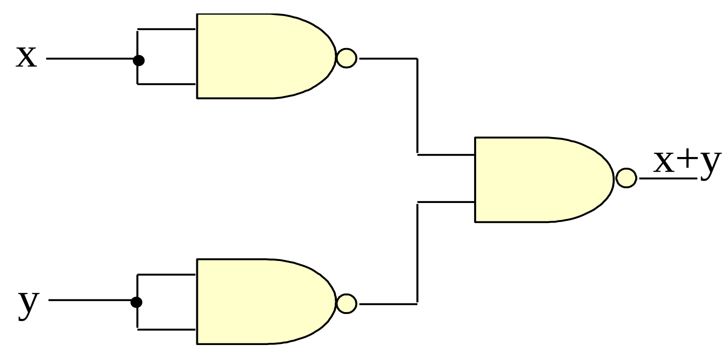
NOT $x' = (x \bullet x)'$



AND $x \bullet y = ((x \bullet y)')'$



OR $x + y = (x' \bullet y')'$



Przykład:

Podaj wzór funkcji booleowskiej odpowiadającej sieci logicznej: