Metody Optymalizacji: Przeszukiwanie Liniowe.

Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki Politechniki Poznańskiej
email: imię.nazwisko@cs.put.poznan.pl

pok. 2 (CW) tel. (61)665-2936 konsultacje: wtorek 15:00-16:30
Slajdy dostępne pod adresem: `http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/`

16.12.2013

Spis treści

Spis treści

Opis problemu

Znajdź minimum (maksimum) ciągłej funkcji jednej zmiennej $f(x)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

Opis problemu

Znajdź minimum (maksimum) ciągłej funkcji jednej zmiennej $f(x)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

- Nie zakładamy nic o różniczkowalności.
- Kształt funkcji nieznany (niekoniecznie wypukła).
- Zakładamy, że znamy dziedzinę funkcji $X = [a, b]$.

Rozwiązanie – metoda „siatki” (*grid*)

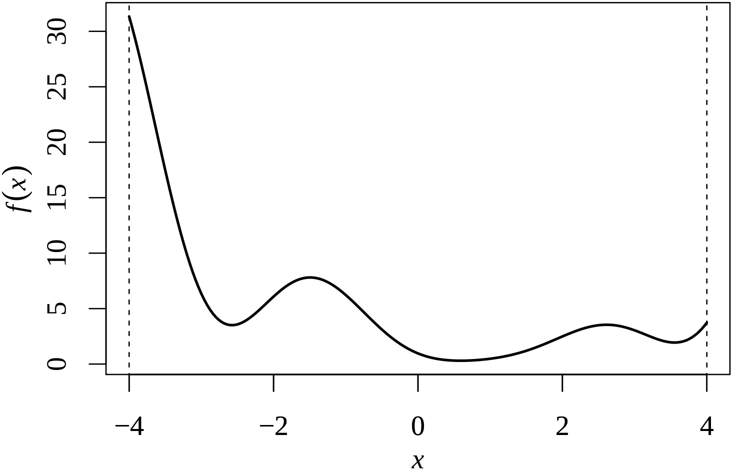
Podziel dziedzinę funkcji X na bardzo wiele krótkich odcinków i sprawdź wartość funkcji w każdym z odcinków.

Rozwiązanie – metoda „siatki” (*grid*)

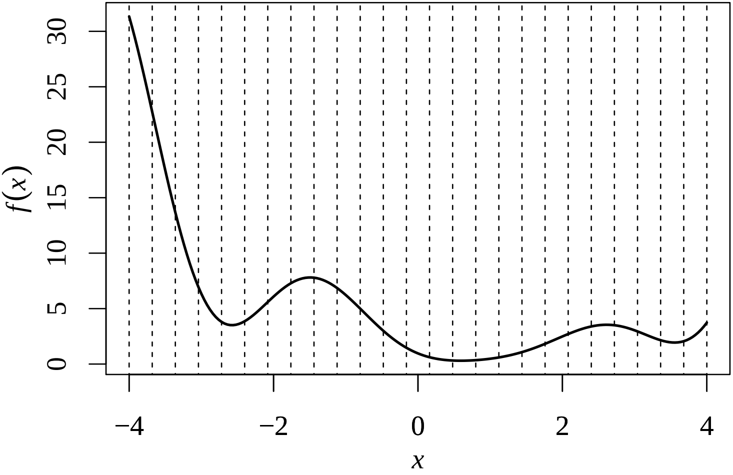
Podziel dziedzinę funkcji X na bardzo wiele krótkich odcinków i sprawdź wartość funkcji w każdym z odcinków.

- Metoda o złożoności liniowej z liczbą odcinków.
- Jakość rozwiązania silnie zależy od regularności funkcji.
- W przypadku gdy chcemy mieć lepszą dokładność, możemy rekurencyjnie rozbić „najlepszy” odcinek na pododcinki.

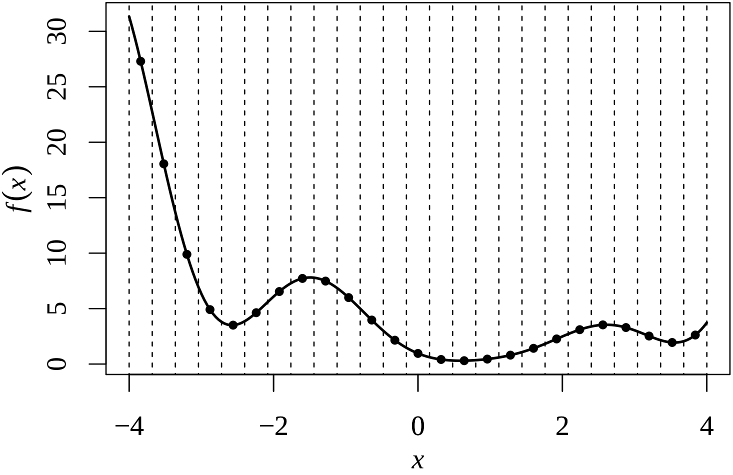
Przeszukiwanie liniowe – przykład



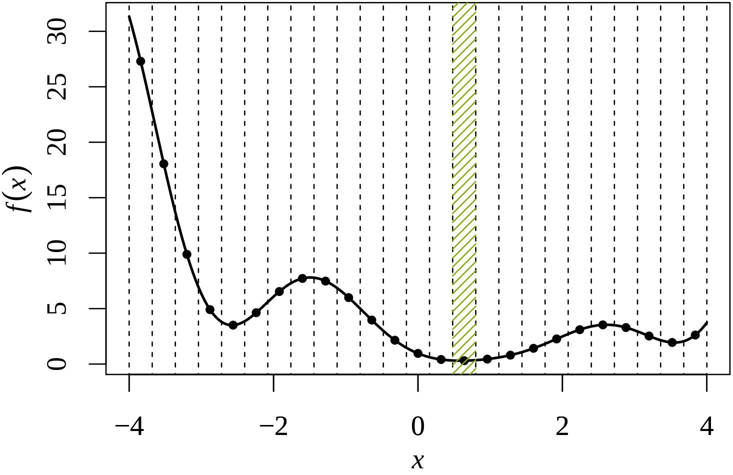
Przeszukiwanie liniowe – przykład



Przeszukiwanie liniowe – przykład

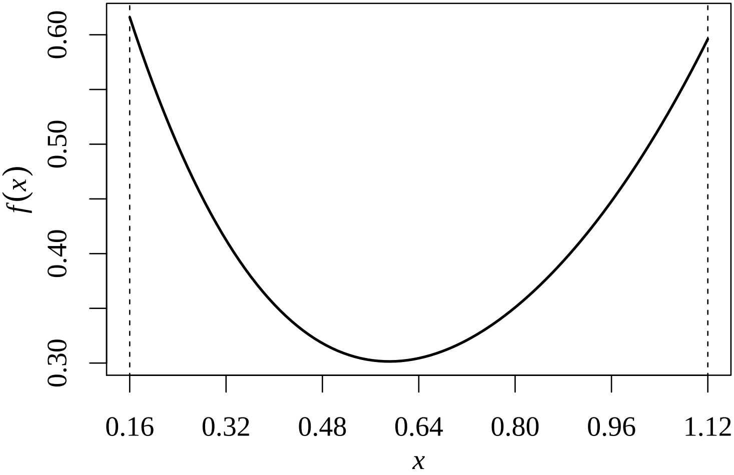


Przeszukiwanie liniowe – przykład



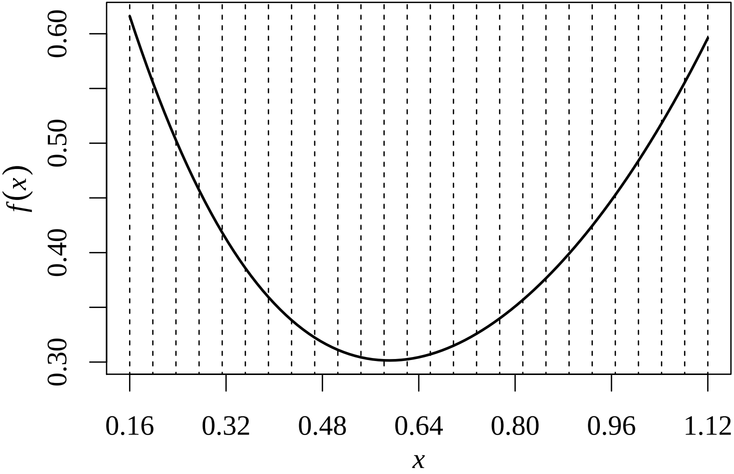
Przeszukiwanie liniowe – przykład

Rekurencyjnie rozbijamy nalepszy odcinek i dwa wokół niego na pododcinki.



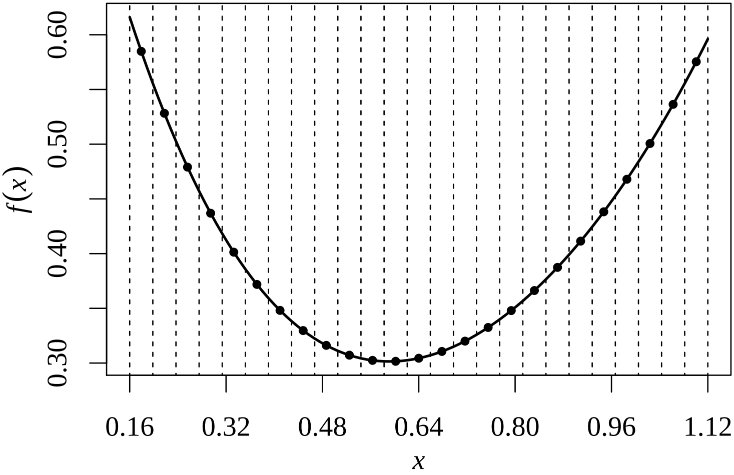
Przeszukiwanie liniowe – przykład

Rekurencyjnie rozbijamy nalepszy odcinek i dwa wokół niego na pododcinki.



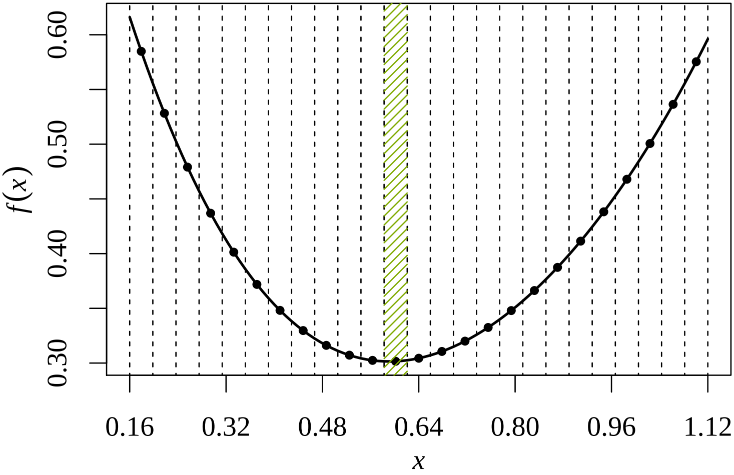
Przeszukiwanie liniowe – przykład

Rekurencyjnie rozbijamy nalepszy odcinek i dwa wokół niego na pododcinki.

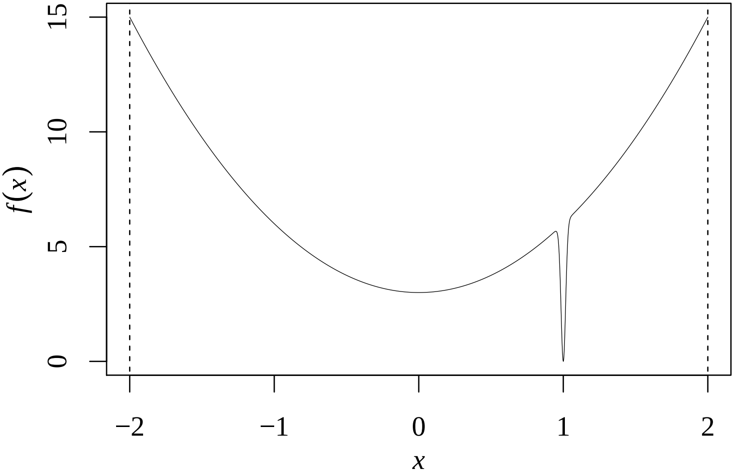


Przeszukiwanie liniowe – przykład

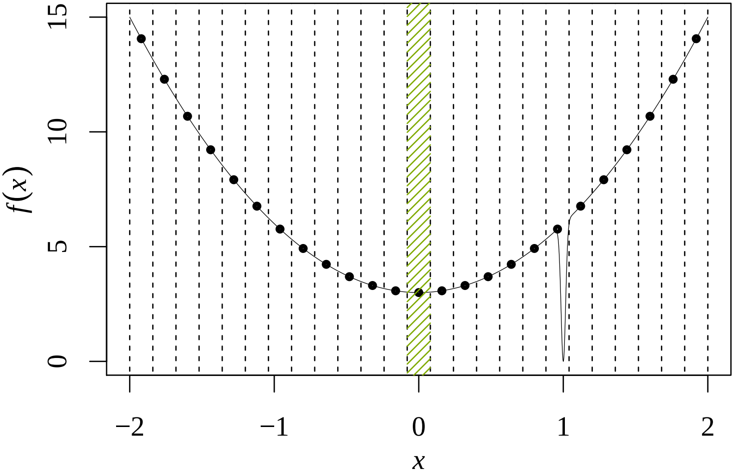
Rekurencyjnie rozbijamy nalepszy odcinek i dwa wokół niego na pododcinki.



Czy przeszukiwanie liniowe gwarantuje znalezienie minimum?



Czy przeszukiwanie liniowe gwarantuje znalezienie minimum?



Czy przeszukiwanie liniowe gwarantuje znalezienie minimum?

- Nie!

Czy przeszukiwanie liniowe gwarantuje znalezienie minimum?

- Nie!
- Jakość rozwiązania zależy od tzw. stałej Lipschitza.

Czy przeszukiwanie liniowe gwarantuje znalezienie minimum?

- Nie!
- Jakość rozwiązania zależy od tzw. stałej Lipschitza.
- Jest to najmniejsza stała L taka, że dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

Stała Lipschitza daje górne ograniczenie na szybkość zmian funkcji (wzrostu lub spadku).

Czy przeszukiwanie liniowe gwarantuje znalezienie minimum?

- Nie!
- Jakość rozwiązania zależy od tzw. stałej Lipschitza.
- Jest to najmniejsza stała L taka, że dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

  Stała Lipschitza daje górne ograniczenie na szybkość zmian funkcji (wzrostu lub spadku).
- Jeśli podzielimy dziedzinę na odcinki o długości ϵ, to dla x_1, x_2 z tego samego odcinka, $|x_1 - x_2| \leq \epsilon$, a stąd $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\epsilon$.

Czy przeszukiwanie liniowe gwarantuje znalezienie minimum?

- Nie!
- Jakość rozwiązania zależy od tzw. stałej Lipschitza.
- Jest to najmniejsza stała L taka, że dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

  Stała Lipschitza daje górne ograniczenie na szybkość zmian funkcji (wzrostu lub spadku).
- Jeśli podzielimy dziedzinę na odcinki o długości ϵ, to dla x_1, x_2 z tego samego odcinka, $|x_1 - x_2| \leq \epsilon$, a stąd $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\epsilon$.
- Metoda przeszukiwania liniowego gwarantuje rozwiązanie nie gorsze niż $L\epsilon$ od optymalnego!

Czy przeszukiwanie liniowe gwarantuje znalezienie minimum?

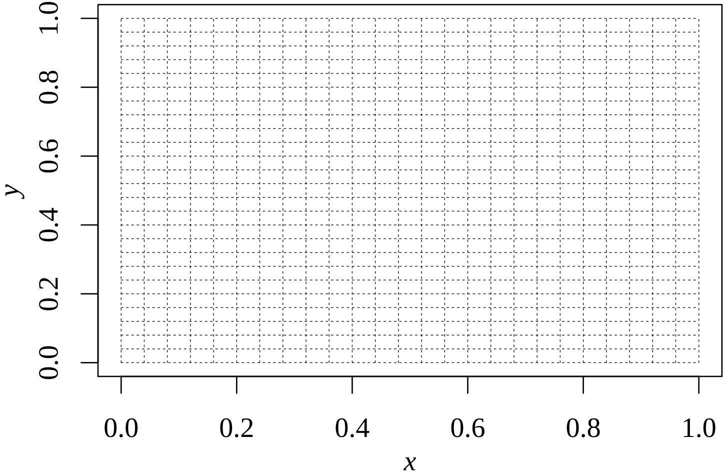
- Nie!
- Jakość rozwiązania zależy od tzw. stałej Lipschitza.
- Jest to najmniejsza stała L taka, że dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

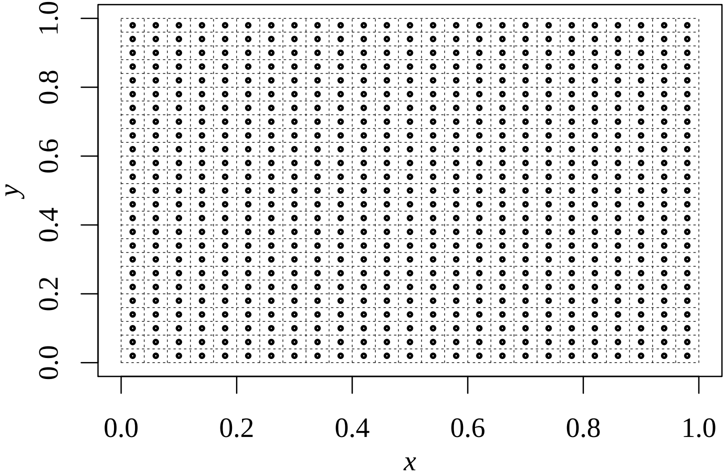
  Stała Lipschitza daje górne ograniczenie na szybkość zmian funkcji (wzrostu lub spadku).
- Jeśli podzielimy dziedzinę na odcinki o długości ϵ, to dla x_1, x_2 z tego samego odcinka, $|x_1 - x_2| \leq \epsilon$, a stąd $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\epsilon$.
- Metoda przeszukiwania liniowego gwarantuje rozwiązanie nie gorsze niż $L\epsilon$ od optymalnego!
- Uwaga: dla niektórych funkcji, L może być bardzo duże lub nawet nieskończone!

Funkcje wielu zmiennych

Przykład dziedziny dla funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$



Przykład dziedziny dla funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$



Funkcje wielu zmiennych

- Liczba „oczek” siatki rośnie wykładniczo z liczbą zmiennych!
- Metoda efektywnie daje się zastosować do maksymalnie $3-4$ zmiennych (w zależności od gęstości siatki i zakładanej jakości rozwiązania).
- Dla większej liczby zmiennych zamiast dzielić dziedzinę na oczka siatki, lepiej losować wielokrotnie punkty z dziedziny (Monte Carlo), a następnie wybrać najlepszy punkt i rekurencyjnie losować kolejne punkty wokół niego.

Koniec na dzisiaj :)