Badania operacyjne i systemy wspomagania decyzji
08 Programowanie liniowe - problemy dualne-objaśnienia

Postać dualna do postaci kanonicznej i zastosowania

Jeżeli mamy program liniowy w postaci kanonicznej, czyli wszystkie ograniczenia na nieujemnych zmiennych są postaci $\leqslant$, oraz funkcja celu ma być maksymalna:

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \max$$
$$x_i \geqslant 0$$

to można go zapisać w tak zwanej postaci dualnej:

$$a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \geqslant c_1$$
$$\ldots$$
$$a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \geqslant c_n$$
$$g(y_1, \ldots, y_m) = b_1y_1 + \cdots + b_my_m \to \min$$
$$y_i \geqslant 0$$

Postać dualna posiada szereg właściwości, w szczególności: jeżeli program pierwotny ma rozwiązanie to program dualny również je posiada; program dualny do dualnego jest programem pierwotnym; wartość funcji optymalizowaniej jest taka sama; wartości dla których rozwiązany jest problem dualny pomagają znaleźć współczynniki rozwiązujące problem pierwotny; jeżeli mamy stosować algorytm simpleks to zmiejszenie liczby ograniczeń za zwiększenie liczby zmiennych przyśpieszy obliczenia (ograniczenia spowalniają simpleks bardziej niż dodatkowe zmienne); jeżeli zaś mamy dwa ograniczenia i dużą liczbę zmiennych, program dualny będzie rozwiązywalny metodą geometryczną, zaś pierwotny nie.

Na potrzeby znajdowania rozwiązania problemu pierwotnego przydatne jest następujące twierdzenie:

Jeżeli w rozwiązaniu programu dualnego któraś z nierówności ograniczających jest spełniona ostro, to odpowiadająca temu ograniczeniu zmienna jest równa 0 dla dowolnego rozwiązania problemu pierwotnego. Można tej własności użyć, żeby wywnioskować, które ograniczenia i wartości są pomijalne w pierwotnym problemie i z pozostałych wartości i ograniczeń stworzyć układ równań których rozwiązanie będzie optymalizowało funkcję celu.