Badania operacyjne i systemy wspomagania decyzji
06 Elementy teorii gier - objaśnienia

Równowaga Nasha w grach w postaci normalnej

Gry w postaci normalnej dla dwóch graczy, opisują gry w których każdy z graczy ma pewne dostępne dla siebie ruchy, wybiera je niezależnie od drugiego z graczy, a efekt końcowy wynika z porównania tych wyborów (naturalnym przykładem jest tu kamień-papier-nożyce). Gry te można opisać przy użyciu macierzy. Każdy z wierszy odpowiada jednemu z możliwych ruchów gracza pierwszego, zaś każda z kolumn jednemu z możliwych ruchów gracza drugiego. W przecięciach wpisujemy spodziewane zyski każdego z graczy. Rozważać tu będziemy gry o sumie zero, to jest takie w których zysk jednego gracza jest stratą drugiego i w takim przypadku w przecięciach macierzy wystarczy wpisać ile zyskał gracz pierwszy. Przy tak opisanej grze powstaje pytanie jak powinno się grać, żeby dobrze na tym wyjść, cokolwiek to "dobrze" by nie oznaczało. Z pomocą tu przychodzi koncepcja równowagi Nasha, to jest takiego wyboru ruchów przez obu graczy, żeby żaden z nich w pojedynkę nie mógł zmienić ruchu na lepszego.

W ogólnym przypadku często okazuje się że równowaga Nasha jest uzyskiwana tylko przez strategie mieszane, to jest takie w których opisuje się rozkład prawdopodobieństwa po wszystkich dostępnych dla gracza opcjach. W takich okolicznościach potrzeba nam programowania liniowego do znalezienia strategi i powrócimy do takich sytuacji po wykładzie z tego zagadnienia. Sa jednak sytuacje w których można równowagę Nasha znaleźć wprostszy sposób. Mając daną macierz wypłat dla każdego z graczy przeprowadzamy następujące obliczenia: dla każdej jego strategii sprawdzamy jaki jest najmniejszy możliwy zysk i wybieramy strategię dla która daje największą spośród tych najmniejszych wartości. Taka wartość nazywa się minimaksem, gdyż spośród minimalnych możliwych zysków wybiera maksymalny. Okazuje się, że jeżeli wartość takiego minimaksowania jest identyczna dla obu graczy, to powinni oni wybrać strategie otrzymane w tym rozumowaniu i dają one równowagę Nasha. W przypadku gier o sumie zero bardzo łatwo taki warunek sprawdzić gdyż wystarczy dla każdego wiercza wybrać wartość minimalną i wybrać maksymalną z nich (minimaks pierwszego gracza), oraz dla każdej kolumny wybrać wartość maksymalną i wziąć minimalną spośród nich (minimaks dla gracza drugiego).

Algorytm minimax dla gier sekwencyjnych

Koncepcja minimaksowania przenosi się również sensownie na gry sekwencyjne, to jest takie w których gracze wykonują ruchy naprzemiennie. Takie gry stosunkowo łatwo wyobrazić sobie w postaci drzewa, gdzie każdy wierzchołek, który nie jest liściem odpowiada stanowi planszy (w tym zawarta jest informacja, który gracz ma wykonać ruch), każda krawędź odpowiada możliwemu ruchowi, a każdy liść zawiera informację o końcowym stanie gry (jeżeli gra jest o sumie zero wystarczy wypisać wynik końcowy dla pierwszego gracza). Jeżeli jesteśmy w jednym z wierzchołków grafu, to w przypadku gracza pierwszego będziemy wybierać ruch który przyniesie nam najwyższy zysk, czyli sprawdzamy dla którego z dzieci spodziewana wartość końcowa gry jest największa. W przypadku gracza drugiego będziemy chcieli znaleźć wartość najmniejszą. Tym samym widać że proces szukania wartości końcowej można opisać prostą funkcją rekurencyjną: jeżeli jesteś w liściu zwróć wartość gry; jeżeli ruch jest gracza pierwszego i istnieją dzieci zwróć maksymalną wartość końcową spośród dzieci; jeżeli ruch jest gracza drugiego zwróć minimalną wartość końcową spośród dzieci.

W przypadku gry zadanej na laboratorium warto testować poprawność na tych przykładowych grach : trzy stosy po dwie monety: wynik remis; trzy stosy po trzy monety: 2 punkty dla 2 gracza; jedna, dwie i sześć monet: 1 punkt dla pierwszego gracza.