Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie
AGH University of Science
and Technology

Programowanie liniowe 3

(BOiKWD 2019/20)

dr inż. Weronika T. Adrian

AGH University of Science and Technology

2.12.2019 r.

Część I

Analiza wrażliwości

1. Wprowadzenie

2. Badanie wrażliwości rozwiązania optymalnego na zmiany współczynników funkcji celu
   - Analiza wrażliwości metodą graficzną
   - Analiza wrażliwości metodą simpleks

3. Badanie wrażliwości rozwiązania optymalnego na zmiany wyrazów wolnych

Analiza postoptymalizacyjna

AGH

Rozwiązanie optymalne programu liniowego

- umożliwia podjęcie trafnej decyzji
- może stanowić punkt wyjścia do analizy, jak zmiany parametrów modelu mogą wpłynąć na rozwiązanie optymalne.

Analiza postoptymalizacyjna

AGH

Rozwiązanie optymalne programu liniowego

- umożliwia podjęcie trafnej decyzji
- może stanowić punkt wyjścia do analizy, jak zmiany parametrów modelu mogą wpłynąć na rozwiązanie optymalne.

Badanie wpływu zmian wartości parametrów na rozwiązanie optymalne programu liniowego nosi nazwę *analizy wrażliwości* lub *analizy postoptymalizacyjnej*.

Analiza wrażliwości

Przedmiotem analizy wrażliwości są zmiany:

1. współczynników funkcji celu – w jakich granicach mogą zmieniać się te parametry, aby dotychczasowe rozwiązanie pozostało optymalne,

Analiza wrażliwości

Przedmiotem analizy wrażliwości są zmiany:

1. współczynników funkcji celu – w jakich granicach mogą zmieniać się te parametry, aby dotychczasowe rozwiązanie pozostało optymalne,
2. wyrazów wolnych w warunkach ograniczających – w jakich granicach mogą się zmieniać wyrazy wolne, aby w rozw. opt. pozostały dotychczasowe zm. bazowe

Analiza wrażliwości

Przedmiotem analizy wrażliwości są zmiany:

1. współczynników funkcji celu – w jakich granicach mogą zmieniać się te parametry, aby dotychczasowe rozwiązanie pozostało optymalne,
2. wyrazów wolnych w warunkach ograniczających – w jakich granicach mogą się zmieniać wyrazy wolne, aby w rozw. opt. pozostały dotychczasowe zm. bazowe
3. współczynników występujących po lewej stronie układu warunków ograniczających

Analiza wrażliwości

Przedmiotem analizy wrażliwości są zmiany:

1. współczynników funkcji celu – w jakich granicach mogą zmieniać się te parametry, aby dotychczasowe rozwiązanie pozostało optymalne,
2. wyrazów wolnych w warunkach ograniczających – w jakich granicach mogą się zmieniać wyrazy wolne, aby w rozw. opt. pozostały dotychczasowe zm. bazowe
3. współczynników występujących po lewej stronie układu warunków ograniczających
4. dodanie nowych warunków ograniczających

Analiza wrażliwości

AGH

Przedmiotem analizy wrażliwości są zmiany:

1. współczynników funkcji celu – w jakich granicach mogą zmieniać się te parametry, aby dotychczasowe rozwiązanie pozostało optymalne,
2. wyrazów wolnych w warunkach ograniczających – w jakich granicach mogą się zmieniać wyrazy wolne, aby w rozw. opt. pozostały dotychczasowe zm. bazowe
3. współczynników występujących po lewej stronie układu warunków ograniczających
4. dodanie nowych warunków ograniczających

Analiza wrażliwości

Przedmiotem analizy wrażliwości są zmiany:

1. współczynników funkcji celu – w jakich granicach mogą zmieniać się te parametry, aby dotychczasowe rozwiązanie pozostało optymalne,
2. wyrazów wolnych w warunkach ograniczających – w jakich granicach mogą się zmieniać wyrazy wolne, aby w rozw. opt. pozostały dotychczasowe zm. bazowe
3. współczynników występujących po lewej stronie układu warunków ograniczających
4. dodanie nowych warunków ograniczających

W praktyce najczęściej ogranicza się do badania wrażliwości rozwiązania optymalnego na zmiany współczynników funkcji celu oraz wyrazów wolnych w warunkach ograniczających.

1 Wprowadzenie

2 Badanie wrażliwości rozwiązania optymalnego na zmiany współczynników funkcji celu
- Analiza wrażliwości metodą graficzną
- Analiza wrażliwości metodą simpleks

3 Badanie wrażliwości rozwiązania optymalnego na zmiany wyrazów wolnych

Analiza wrażliwości

Metody

Analizę wrażliwości można przeprowadzić przy użyciu:

1. metody graficznej (w przypadku, gdy w zadaniu występują dwie zmienne decyzyjne):

Analiza wrażliwości

Metody

Analizę wrażliwości można przeprowadzić przy użyciu:

1. metody graficznej (w przypadku, gdy w zadaniu występują dwie zmienne decyzyjne):
   1. analizując nachylenie izolinii funkcji celu,

Analiza wrażliwości

Metody

Analizę wrażliwości można przeprowadzić przy użyciu:

1. metody graficznej (w przypadku, gdy w zadaniu występują dwie zmienne decyzyjne):
    1. analizując nachylenie izolinii funkcji celu,
    2. analizując położenie i nachylenie prostych odpowiadających kolejnym warunkom ograniczającym

Analiza wrażliwości

Metody

Analizę wrażliwości można przeprowadzić przy użyciu:

1. metody graficznej (w przypadku, gdy w zadaniu występują dwie zmienne decyzyjne):
   1. analizując nachylenie izolinii funkcji celu,
   2. analizując położenie i nachylenie prostych odpowiadających kolejnym warunkom ograniczającym
2. metody simplex – wprowadzając do ostatniej tablicy simplex odpowiednie parametry i analizując wartości wiersza kryterium simplex

Analiza wrażliwości

Przykład

Zadanie 1

Przedsiębiorstwo produkuje dwa wyroby W_1 i W_2. Ograniczeniem w procesie produkcji są zapasy trzech surowców: S_1, S_2 i S_3. Informacje o zapasach surowców, jednostkowych nakładach surowców na produkcję wyrobów oraz ceny wyrobów:

Surowce	Zużycie surowca (w kg) na 1 szt. wyrobu		Zapas surowca (w kg)
	W_1	W_2	
S_1	2	1	1000
S_2	3	3	2400
S_3	1,5	–	600
Cena (w zł)	30	20	

Analiza wrażliwości

Przykład

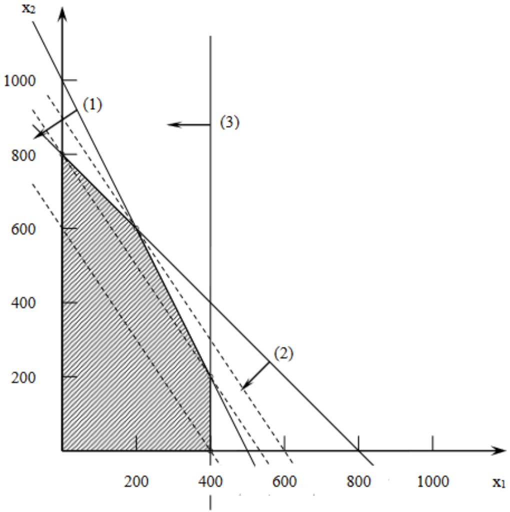
1. Znajdź rozmiary produkcji wyrobów W_1 i W_2, które gwarantują maksymalny przychód z ich sprzedaży przy istniejących zapasach surowców.
2. Ustal w jakich granicach mogą zmieniać się współczynniki funkcji celu, aby dotychczasowe rozwiązanie pozostało optymalne.
3. Ustal w jakich granicach mogą się zmieniać wyrazy wolne, aby w rozwiązaniu optymalnym pozostały dotychczasowe zmienne bazowe.

Analiza wrażliwości

Przykład: metoda graficzna

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 1000 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 2400 \\ 1{,}5x_1 \le 600 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2) = 30x_1 + 20x_2 \rightarrow \max$$



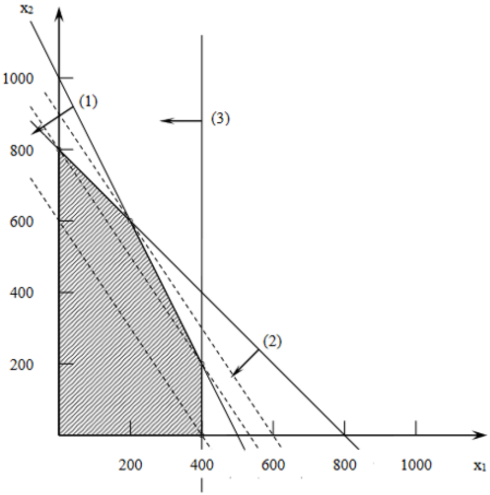
Analiza wrażliwości

Przykład: metoda graficzna

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 1000 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 2400 \\ 1{,}5x_1 \leq 600 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2) = 30x_1 + 20x_2 \rightarrow \max$$

W jakich granicach może się zmieniać zysk jednostkowy dla wyrobu W_1, aby rozw. nadal było optymalne?



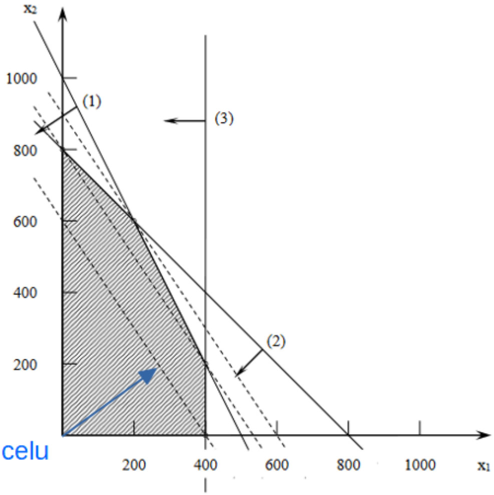
Analiza wrażliwości

Przykład: metoda graficzna

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 1000 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 2400 \\ 1{,}5x_1 \leq 600 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2) = 30x_1 + 20x_2 \to \max$$

W jakich granicach może się zmieniać zysk jednostkowy dla wyrobu W_1, aby rozw. nadal było optymalne?



gradient funkcji celu

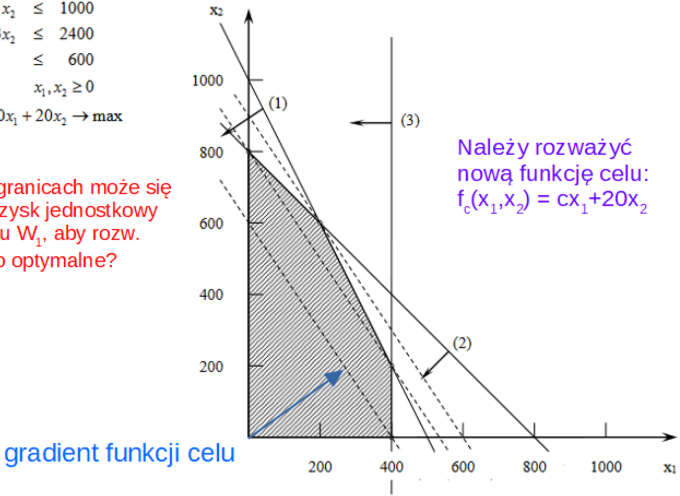
Analiza wrażliwości

Przykład: metoda graficzna

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 1000 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 2400 \\ 1,5x_1 \le 600 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2) = 30x_1 + 20x_2 \to \max$$

W jakich granicach może się zmieniać zysk jednostkowy dla wyrobu W_1, aby rozw. nadal było optymalne?



Należy rozważyć nową funkcję celu: $f_c(x_1,x_2) = cx_1+20x_2$

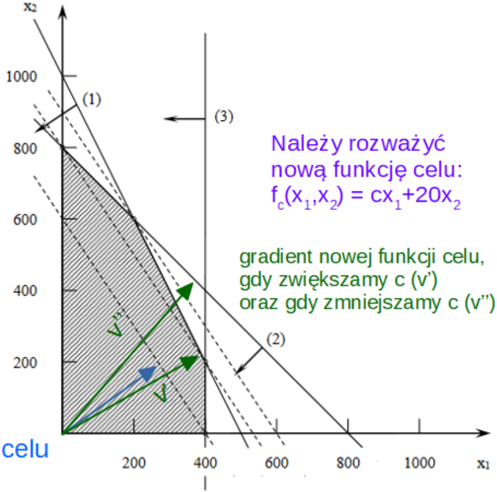
Analiza wrażliwości

Przykład: metoda graficzna

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 1000 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 2400 \\ 1{,}5x_1 \le 600 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2) = 30x_1 + 20x_2 \to \max$$

W jakich granicach może się zmieniać zysk jednostkowy dla wyrobu W_1, aby rozw. nadal było optymalne?



Należy rozważyć nową funkcję celu: $f_c(x_1,x_2) = cx_1+20x_2$

gradient nowej funkcji celu, gdy zwiększamy c (v') oraz gdy zmniejszamy c (v'')

gradient funkcji celu

Analiza wrażliwości

Przykład: metoda graficzna

$$f_c(x_1, x_2) = cx_1 + 20x_2$$

Zwiększanie wartości c w porównaniu do wyjściowej wartości powoduje, że gradient nowej funkcji celu – wektor v' znajduje się po prawej stronie wektora v. Widać, że zwiększać c możemy dotąd, aż kierunek wektora v' pokryje się z kierunkiem wektora prostopadłego do prostej z pierwszego ograniczenia ($2x_1 + x_2 \leqslant 1000$) czyli $[2; 1]$. Zatem musi zachodzić warunek:

$$\exists_{k \in \mathcal{R}} k \cdot [c; 20] = [2; 1]$$

stąd $\begin{cases} k \cdot c = 2 \\ 20 \cdot k = 1 \end{cases}$ więc $\begin{cases} k = 1/20 \\ c = 40 \end{cases}$

Analiza wrażliwości

Przykład: metoda graficzna

Analogicznie analizujemy zmniejszanie współczynnika c aż do pokrycia się gradientu funkcji z gradientem prostej ograniczającej $3x_1 + 3x_2 = 2400$ i otrzymujemy $c = 20$.

Analiza wrażliwości

Przykład: metoda graficzna

Analogicznie analizujemy zmniejszanie współczynnika c aż do pokrycia się gradientu funkcji z gradientem prostej ograniczającej $3x_1 + 3x_2 = 2400$ i otrzymujemy $c = 20$. Analogiczną analizę przeprowadzamy dla współczynnika przy zmiennej x_2 i otrzymujemy przedział $< 15; 30 >$.

Analiza wrażliwości

Przykład: metoda graficzna

Analogicznie analizujemy zmniejszanie współczynnika c aż do pokrycia się gradientu funkcji z gradientem prostej ograniczającej $3x_1 + 3x_2 = 2400$ i otrzymujemy $c = 20$. Analogiczną analizę przeprowadzamy dla współczynnika przy zmiennej x_2 i otrzymujemy przedział $< 15; 30 >$. Zatem rozwiązanie optymalne nie ulegnie zmianie, jeżeli cena wyrobu W_1 będzie przyjmować wartości z przedziału $< 20; 40 >$ a W_2 $< 15; 30 >$.

Analiza wrażliwości

Przykład: metoda graficzna

Analogicznie analizujemy zmniejszanie współczynnika c aż do pokrycia się gradientu funkcji z gradientem prostej ograniczającej $3x_1 + 3x_2 = 2400$ i otrzymujemy $c = 20$.
Analogiczną analizę przeprowadzamy dla współczynnika przy zmiennej x_2 i otrzymujemy przedział $< 15; 30 >$.
Zatem rozwiązanie optymalne nie ulegnie zmianie, jeżeli cena wyrobu W_1 będzie przyjmować wartości z przedziału $< 20; 40 >$ a W_2 $< 15; 30 >$.
Zmiana ceny spowoduje zmianę *wartości* funkcji celu.

Analiza wrażliwości

Przykład: metoda simpleks

Pierwsza tablica simpleks

c_b	Zm. bazowe	30	20	0	0	0	Rozwiązanie
0	s_1	2	1	1	0	0	1000
0	s_2	3	3	0	1	0	2400
0	s_3	1.5	0	0	0	1	600
	z_j	0	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$	30	20	0	0	0	

Analiza wrażliwości

Przykład: metoda simpleks

Druga tablica simpleks

c_b	Zm. bazowe	30	20	0	0	0	Rozwiązanie
0	s_1	0	1	1	0	$-\frac{4}{3}$	200
0	s_2	0	3	0	1	-2	1200
30	x_1	1	0	0	0	$\frac{2}{3}$	400
	z_j	30	0	0	0	20	12 000
	$c_j - z_j$	0	20	0	0	-20	

Analiza wrażliwości

Przykład: metoda simpleks

Trzecia tablica simpleks

c_b	Zm. bazowe	30	20	0	0	0	Rozwiązanie
20	x_2	0	1	1	0	$-\frac{4}{3}$	200
0	s_2	0	0	-3	1	2	600
30	x_1	1	0	0	0	$\frac{2}{3}$	400
	z_j	30	20	20	0	$-\frac{20}{3}$	16 000
	$c_j - z_j$	0	0	-20	0	$\frac{20}{3}$	

Analiza wrażliwości

Przykład: metoda simpleks

Czwarta tablica simpleks (ostatnia)

c_b	Zm. bazowe	30	20	0	0	0	Rozwiązanie
20	x_2	0	1	-1	$\frac{2}{3}$	0	600
0	s_3	0	0	-1.5	$\frac{1}{2}$	1	300
30	x_1	1	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	200
	z_j	30	20	10	$\frac{10}{3}$	0	18 000
	$c_j - z_j$	0	0	-10	$-\frac{10}{3}$	0	

Analiza wrażliwości

Przykład: metoda simpleks

Niech $c_j' = c_j + \delta_j$, gdzie δ_j jest dopuszczalną zmianą ceny c_j.

Analiza wrażliwości

Przykład: metoda simpleks

Niech $c_j' = c_j + \delta_j$, gdzie δ_j jest dopuszczalną zmianą ceny c_j. Zatem dla wyrobu W_1 przyjmujemy, że $c_1' = c_1 + \delta_1$ i wstawiamy c_1' do ostatniej tablicy simpleksowej:

c_b	Z.b.	$30+\delta_1$	20	0	0	0
20	x_2	0	1	-1	$\frac{2}{3}$	0
0	s_3	0	0	-1.5	$\frac{1}{2}$	1
$30+\delta_1$	x_1	1	0	1	$-\frac{1}{3}$	0
	z_j	$30+\delta_1$	20	$10+\delta_1$	$\frac{10}{3}-\frac{1}{3}\delta_1$	0
	$c_j - z_j$	0	0	$-10-\delta_1$	$-\frac{10}{3}+\frac{1}{3}\delta_1$	0

Analiza wrażliwości

Przykład: metoda simpleks

W zagadnieniach maksymalizaji wszystkie elementy wiersza zerowego ($c_j - z_j$) końcowej tablicy simpleksowej muszą być niedodatnie (a w minimalizacji – nieujemne).
Zatem z:

$c_j - z_j$	0	0	$-10 - \delta_1$	$-\frac{10}{3} + \frac{1}{3}\delta_1$	0

mamy: $\begin{cases} -10 - \delta_1 \leqslant 0 \\ -\frac{10}{3} + \frac{1}{3}\delta_1 \leqslant 0 \end{cases}$ czyli $\begin{cases} \delta_1 \geqslant -10 \\ \delta_1 \leqslant 10 \end{cases}$

$\delta_1 \in < -10; 10 >$ więc $c_1 \in < 20; 40 >$.

Analiza wrażliwości

Przykład: metoda simpleks

Analogicznie dla W_2 mamy:

c_b	Z.b.	30	$20+\delta_2$	0	0	0
$20+\delta_2$	x_2	0	1	-1	$\frac{2}{3}$	0
0	s_3	0	0	-1.5	$\frac{1}{2}$	1
30	x_1	1	0	1	$-\frac{1}{3}$	0
	z_j	30	$20+\delta_2$	$10-\delta_2$	$\frac{10}{3}+\frac{2}{3}\delta_2$	0
	$c_j - z_j$	0	0	$-10+\delta_2$	$-\frac{10}{3}-\frac{2}{3}\delta_2$	0

Zatem: $\begin{cases} -10+\delta_2 \leqslant 0 \\ -\frac{10}{3}-\frac{2}{3}\delta_2 \leqslant 0 \end{cases}$ czyli $\begin{cases} \delta_2 \geqslant -5 \\ \delta_2 \leqslant 10 \end{cases}$

$\delta_2 \in <-5; 10>$ więc $c_2 \in <15; 30>$.

1. Wprowadzenie
2. Badanie wrażliwości rozwiązania optymalnego na zmiany współczynników funkcji celu
   - Analiza wrażliwości metodą graficzną
   - Analiza wrażliwości metodą simpleks
3. Badanie wrażliwości rozwiązania optymalnego na zmiany wyrazów wolnych

Badanie wrażliwości rozwiązania optymalnego

Zmiany wyrazów wolnych

AGH

Czy i jak rozwiązanie optymalne ulegnie zmianie, jeżeli:

1. zasób surowca S_1 wzrośnie to 1200?
2. zasób surowca S_2 zmniejszy się do 2100?

Badanie wrażliwości rozwiązania optymalnego

Zmiany wyrazów wolnych

AGH

Czy i jak rozwiązanie optymalne ulegnie zmianie, jeżeli:

1. zasób surowca S_1 wzrośnie to 1200?
2. zasób surowca S_2 zmniejszy się do 2100?

Wyraz wolny i-tego równania można zapisać jako $b_i' = b_i + \epsilon_i$, gdzie ϵ_i jest dopuszczalną zmianą i-tego wyrazu wolnego, nie powodującego zmiany bazy optymalnej (w bazie pozostaną dotychczasowe zmienne decyzyjne, mogą się zmienić ich wartości).

Badanie wrażliwości rozwiązania optymalnego

Zmiany wyrazów wolnych

Jeżeli zastąpimy b_1 wyrażeniem $b_1 + \epsilon_1$, wektor wyrazów wolnych $\mathbf{b}_1'$ będzie miał postać: $\mathbf{b}_1' = \begin{bmatrix} 1000 + \epsilon_1 \\ 2400 \\ 600 \end{bmatrix}$

Badanie wrażliwości rozwiązania optymalnego

Zmiany wyrazów wolnych

Jeżeli zastąpimy b_1 wyrażeniem $b_1 + \epsilon_1$, wektor wyrazów wolnych $\mathbf{b}'_1$ będzie miał postać: $\mathbf{b}'_1 = \begin{bmatrix} 1000 + \epsilon_1 \\ 2400 \\ 600 \end{bmatrix}$

Tablica simpleks w postaci macierzowej:

	Zm. bazowe	c		Rozwiązanie
c_b	x_b	$\mathbf{B^{-1}A}$	$\mathbf{B^{-1}}$	$B^{-1}b$
	z_j	$c_b^T B^{-1} A$	$c_b^T B^{-1}$	$c_b^T B^{-1} b$
	$c_j - z_j$	$c - c_b^T B^{-1} A$	$c_b^T B^{-1}$	

Badanie wrażliwości rozwiązania optymalnego

Zmiany wyrazów wolnych

c_b	Zm. bazowe	30	20	0	0	0	Rozwiązanie
20	x_2	0	1	-1	$\frac{2}{3}$	0	600
0	s_3	0	0	-1.5	$\frac{1}{2}$	1	300
30	x_1	1	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	200
	z_j	30	20	10	$\frac{10}{3}$	0	18 000
	$c_j - z_j$	0	0	-10	$-\frac{10}{3}$	0	

Badanie wrażliwości rozwiązania optymalnego

Zmiany wyrazów wolnych

c_b	Zm. bazowe	30	20	0	0	0	Rozwiązanie
20	x_2	0	1	-1	$\frac{2}{3}$	0	600
0	s_3	0	0	-1.5	$\frac{1}{2}$	1	300
30	x_1	1	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	200
	z_j	30	20	10	$\frac{10}{3}$	0	18 000
	$c_j - z_j$	0	0	-10	$-\frac{10}{3}$	0	

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}_1' = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -1.5 & 0.5 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 + \epsilon_1 \\ 2400 \\ 600 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1000 - \epsilon_1 + 1600 \\ -1500 - 1.5\epsilon_1 + 1200 + 600 \\ 1000 + \epsilon_1 - 800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 - \epsilon_1 \\ 300 - 1.5\epsilon_1 \\ 200 + \epsilon_1 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Badanie wrażliwości rozwiązania optymalnego

Zmiany wyrazów wolnych

AGH

ϵ_1 musi spełniać następujący układ nierówności liniowych:

$$\begin{cases} 600 - \epsilon_1 \geqslant 0 \\ 300 - 1.5\epsilon_1 \geqslant 0 \\ 200 + \epsilon_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest $\epsilon_1 \in < -200; 200 >$.

Badanie wrażliwości rozwiązania optymalnego

Zmiany wyrazów wolnych

ϵ_1 musi spełniać następujący układ nierówności liniowych:

$$\begin{cases} 600 - \epsilon_1 \geqslant 0 \\ 300 - 1.5\epsilon_1 \geqslant 0 \\ 200 + \epsilon_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest $\epsilon_1 \in < -200; 200 >$.

Wobec tego $b_1 \in < 1000 - 200; 1000 + 200 >$ czyli $b_1 \in < 800; 1200 >$.

Badanie wrażliwości rozwiązania optymalnego

Zmiany wyrazów wolnych

ϵ_1 musi spełniać następujący układ nierówności liniowych:

$$\begin{cases} 600 - \epsilon_1 \geqslant 0 \\ 300 - 1.5\epsilon_1 \geqslant 0 \\ 200 + \epsilon_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest $\epsilon_1 \in < -200; 200 >$.

Wobec tego $b_1 \in < 1000 - 200; 1000 + 200 >$ czyli $b_1 \in < 800; 1200 >$.

Analogicznie można wyznaczyć granice przedziałów dla wyrazów wolnych b_2 i b_3.

$$b_2 \in < 1800; 3000 >, \; b_3 \in < 300; \infty >$$

Badanie wrażliwości rozwiązania optymalnego

Zmiany wyrazów wolnych

Uwaga: Jeżeli zmiany zapasów surowców mieścić się będą w wyznaczonych granicach (zasób surowca S_1 będzie przyjmował wartości z przedziału $< 800; 1200 >$, zasób surowca S_2 z przedziału $< 1800; 3000 >$, a zasób surowca S_3 z przedziału $< 300; \infty >$), nie zmieni się baza optymalna, zmienią się jednak optymalne wartości zmiennych decyzyjnych. Aby je obliczyć należy rozwiązać układ równań

$$\mathbf{x}^{*\prime} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}_i^{\prime}$$

gdzie $b_i^{\prime}$ jest nowym wektorem wyrazów wolnych.

Badanie wrażliwości rozwiązania optymalnego

Zmiany wyrazów wolnych

Jeżeli zasób surowca S_1 wzrośnie do 1200, rozwiązanie optymalne będzie następujące:

$$\mathbf{x}^{*\prime} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_1 \end{bmatrix} = \mathrm{B}^{-1} b_1' = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -1.5 & 0.5 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1200 \\ 2400 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \\ 400 \end{bmatrix}.$$

Badanie wrażliwości rozwiązania optymalnego

Zmiany wyrazów wolnych

AGH

Jeżeli zasób surowca S_1 wzrośnie do 1200, rozwiązanie optymalne będzie następujące:

$$\mathbf{x}^{*\prime} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_1 \end{bmatrix} = \mathrm{B}^{-1} b_1' = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -1.5 & 0.5 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1200 \\ 2400 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \\ 400 \end{bmatrix}.$$

Jeżeli zasób surowca S_2 zmniejszy się do 2100, optymalne wartości zmiennych decyzyjnych będą następujące:

$$\mathbf{x}^{*\prime\prime} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_1 \end{bmatrix} = \mathrm{B}^{-1} b_2' = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -1.5 & 0.5 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 2100 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 150 \\ 300 \end{bmatrix}.$$

www.agh.edu.pl

Część II

Programowanie całkowitoliczbowe

Przykład

Producent dwóch typów szynobusów planuje produkcję na najbliższy miesiąc. Każdy z szynobusów przynosi taki sam zysk, ale wymagają do produkcji różnych zasobów. Zapotrzebowanie na zasoby oraz ich dostępność przedstawiono w Tablicy.

	Typ A	Typ B	dostępna ilość zasobu
Zasób I	4	5	20
Zasób II	2	1	6

Znaleźć optymalny plan produkcji szynobusów.

Przykład

$$\text{zmaksymalizować} \quad z = x_1 + x_2 \tag{1}$$

$$2x_1 + x_2 \leqslant 6 \tag{2}$$

$$4x_1 + 5x_2 \leqslant 20 \tag{3}$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0 \tag{4}$$

$$x_1, x_2 \in \mathcal{Z} \tag{5}$$

Przykład

$$\text{zmaksymalizować} \quad z = x_1 + x_2 \tag{6}$$
$$2x_1 + x_2 + s_1 = 6 \tag{7}$$
$$4x_1 + 5x_2 + s_2 = 20 \tag{8}$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0 \tag{9}$$
$$x_1, x_2 \in \mathcal{Z} \tag{10}$$

i	B	c	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
1	s_1	0	2	1	1	0	6
2	s_2	0	4	5	0	1	20
3			1	1	0	0	0

Przykład

i	B	c	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
1	x_1	1	1	0	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{3}$
2	x_2	1	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
3			0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{13}{3}$

Metody rozwiązywania zadań PLC

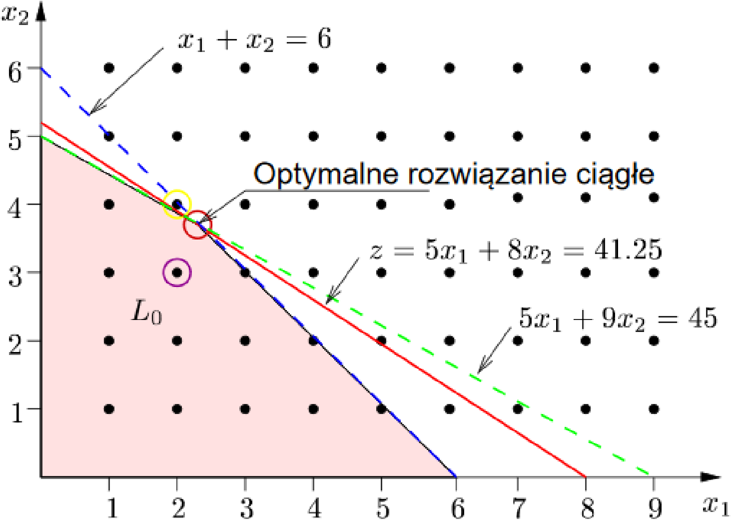
- Metody uproszczone
  - Przegląd zupełny zbioru rozwiązań dopuszczalnych X
  - Zaokrąglenie rozwiązania optymalnego zadania PL do zmiennych całkowitych
- Metody złożone
  - Metoda odcięć Gomory'ego (metoda płaszczyzn odcinających)
  - Metoda podziału i ograniczeń (branch & bound)
  - Metody przybliżone - heurystyczne

Metody uproszczone

Zaokrąglenie rozwiązania optymalnego zadania PL

- W praktyce często stosowane podejście: Zaokrąglenie do części całkowitych rozwiązania optymalnego zadania PL w celu zyskania rozwiązania zadania PCL
- W ten sposób można uzyskać rozwiązanie PCL nie spełniające zbioru rozwiązań dopuszczalnych X.
- Należy sprawdzić miarę niedopuszczalności rozwiązania zaokrąglonego mierząc procentowe niespełnienie ograniczeń

Przykład


x_2
$x_1 + x_2 = 6$
Optymalne rozwiązanie ciągłe
$z = 5x_1 + 8x_2 = 41.25$
$5x_1 + 9x_2 = 45$
L_0
x_1
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Przykład

	Rozwiązanie optymalne ciągłe	Rozwiązanie zaokrąglone	Rozwiązanie najbliższe całkowite	Rozwiązanie optymalne całkowite
x_1	$\frac{9}{4} = 2.25$	2	2	0
x_2	$\frac{15}{4} = 3.75$	4	3	5
z	41.25	niedopuszcz.	34	40

Metoda Gomory'ego

Algorytm

AGH

krok 1 Rozwiąż metodą sympleks zadanie PL bez uwzględniania warunku dyskretności zmiennych.

krok 2 Jeżeli rozwiązanie uzyskane w wyniku ostatniego zastosowania metody sympleks jest całkowitoliczbowe, to jest ono rozwiązaniem wyjściowego zadania całkowitoliczbowego programowania liniowego; w przeciwnym razie przejdź do kroku 3.

krok 3 Wyeliminuj wszystkie zmienne sztuczne (bazowe i niebazowe) z równań wynikających z ostatniej tablicy sympleksowej, po czym wybierz zmienną x_k, która ma wartość ułamkową w ostatnim rozwiązaniu.

Metoda Gomory'ego

Algorytm

krok 4 W układzie równań wynikającym z ostatniej tablicy sympleks jeden ze współczynników przy x_k, powiedzmy w l-tym równaniu jest równy 1, a pozostałe są równe zero. Zastąp współczynniki i stałą w l-tym równaniu ich częściami ułamkowymi.

krok 5 Dodaj 1 do każdego ujemnego ułamka wynikającego z kroku 4. Zapisz otrzymane równanie jako ograniczenie nierównościowe ze znakiem "$\geqslant$".

Metoda Gomory'ego

Algorytm

krok 6 Odejmij zmienną osłabiającą i dodaj zmienną sztuczną do zmodyfikowanego l-tego ograniczenia w celu sprowadzenia go do równania. Dołącz to równanie na koniec układu równań wynikającego z ostatniej tablicy sympleks i przydziel nowej zmiennej sztucznej dowolnie duży współczynnik w funkcji celu. Uaktualnij wiersz wskaźnikowy tablicy sympleks.

krok 7 Wykonaj dodatkowe iteracje metody sympleks dla nowego układu równań utworzonego w kroku 6. Po uzyskaniu rozwiązania przejdź do kroku 2.

http://www.ms.unimelb.edu.au/ moshe/620-362/gomory/

Przykład 1

Problem plecakowy

W kolejce do serwera oczekuje 8 zadań obliczeniowych, które bezwzględnie trzeba zakończyć w ciągu godziny. Za niewykonanie zadania należy zapłacić karę zleceniodawcy. Czasy realizacji oraz kary za niewykonanie poszczególnych zadań zawarto w tablicy. Które zadania należy wykonać, aby zminimalizować całkowitą karę?

zadanie	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8
czas [min]	6	8	11	20	28	35	25	9
kara [tys.zł]	6	5	9	10	11	12	9	8

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy zadanie } i \text{ zostanie wykonane} \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases} \tag{26}$$

Przykład 1

Problem plecakowy

zadanie	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8
czas [min]	6	8	11	20	28	35	25	9
kara [tys.zł]	6	5	9	10	11	12	9	8

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy zadanie } i \text{ zostanie wykonane} \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases} \tag{27}$$

$$\text{zmin.} \quad 6(1-x_1)+5(1-x_2)+9(1-x_3)+10(1-x_4)+ \tag{28}$$

$$11(1-x_5)+12(1-x_6)+9(1-x_7)+8(1-x_8) \tag{29}$$

$$\text{p.o.} \quad 6x_1+8x_2+11x_3+20x_4+28x_5+35x_6+25x_7+9x_8 \leqslant 60 \tag{30}$$

$$x_i \in \{0,1\}, i = 1,\ldots,8 \tag{31}$$

Przykład 1

Problem plecakowy

AGH

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy zadanie } i \text{ zostanie wykonane} \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
\text{zmin.} \quad & 6(1-x_1)+5(1-x_2)+9(1-x_3)+10(1-x_4)+ && (33)\\
& 11(1-x_5)+12(1-x_6)+9(1-x_7)+8(1-x_8) && (34)\\
\text{p.o.} \quad & 6x_1+8x_2+11x_3+20x_4+28x_5+35x_6+25x_7+9x_8 \leqslant 60 && (35)\\
& x_i \in \{0,1\}, i=1,\dots,8 && (36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{zmaks.} \quad & 6x_1+5x_2+9x_3+10x_4+11x_5+12x_6+9x_7+8x_8 && (37)\\
\text{p.o.} \quad & 6x_1+8x_2+11x_3+20x_4+28x_5+35x_6+25x_7+9x_8 \leqslant 60 && (38)\\
& x_i \in \{0,1\}, i=1,\dots,8 && (39)
\end{aligned}$$

Problem plecakowy

AGH

Dany jest skończony zbiór elementów $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, z których każdy ma całkowitoliczbową wagę w_i i wartość v_i oraz całkowitoliczbową pojemność plecaka b. Które elementy należy włożyć do plecaka, aby nie przekraczając jego pojemności zmaksymalizować wartość zapakowanych elementów?

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy element } i \text{ zostanie zapakowany} \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} \text{zmaksymalizować} \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{n} v_i x_i && (41) \\ \text{przy ograniczeniach} \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leqslant b && (42) \\ & x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, n && (43) \end{aligned}$$

Problem jest NP-trudny w zwykłym sensie.

Przykład 2

Zagadnienie transportowe

AGH

Firma produkująca nawozy sztuczne ma trzy zakłady produkcyjne zlokalizowane w Kluczborku, Białymstoku i Pile. Kwartalna produkcja poszczególnych zakładów wynosi odpowiednio: 5000 kg, 6000 kg, i 2500 kg. Firma ma cztery centra dystrybucji, zlokalizowane w Lublinie, Elblągu, Łodzi i Opolu. Przewidywany popyt na nawozy w poszczególnych centrach dystrybucji wynosi odpowiednio: 6000 kg, 4000 kg, 2000 kg oraz 1500 kg. Jednostkowe koszty transportu (w zł/kg) z każdego zakładu do poszczególnych centrów dystrybucji podano w tablicy.

	Lublin	Elbląg	Łódź	Opole
Kluczbork	3	2	7	6
Białystok	7	5	2	3
Piła	2	5	4	5

Przykład 2

Zagadnienie transportowe

x_{ij} — ilość towaru przewieziona od dostawcy i do odbiorcy j

$$
\begin{aligned}
\text{zminimalizować}\quad & 3x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 6x_{14} + \\
& 7x_{21} + 5x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24} + \\
& 2x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} + 5x_{34} && (44)\\
\text{przy ograniczeniach}\quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leqslant 5000 && (45)\\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leqslant 6000 && (46)\\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leqslant 2500 && (47)\\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} \geqslant 6000 && (48)\\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} \geqslant 4000 && (49)\\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} \geqslant 2000 && (50)\\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} \geqslant 1500 && (51)\\
& x_{ij} \geqslant 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4 && (52)\\
& x_{ij} \in \mathcal{Z}, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4 && (53)
\end{aligned}
$$

Zagadnienie transportowe

Mamy m dostawców, których możliwości wysyłki wynoszą $a_i, i = 1, \ldots m$ i n odbiorców, których zapotrzebowania wynoszą $b_j, j = 1, \ldots n$. Koszt przesłania jednostkowej porcji towaru od dostawcy i do odbiorcy j wynosi c_{ij}. Wyznaczyć plan przewozów minimalizujący całkowite koszty.

$$
\begin{array}{rcr}
\text{zminimalizować} & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} & (54) \\
\text{przy ograniczeniach} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, i = 1, \ldots, m & (55) \\
 & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j, j = 1, \ldots, n & (56) \\
 & x_{ij} \geqslant 0, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n & (57) \\
 & x_{ij} \in \mathcal{Z}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n & (58)
\end{array}
$$

Istnieje algorytm wielomianowy o złożoności $O(n^3)$ znajdujący optymalne rozwiązanie problemu.

Przykład 3

Zagadnienie przydziału

Firma zatrudniła do sprzątania po remoncie 3 pracowników: Armonda, Francine, i Herberta. Jeden z nich musi posprzątać łazienkę, drugi umyć podłogi, a trzeci umyć okna, ale każdy z nich otrzymuje inne wynagrodzenie za te same czynności (tablica). Należy tak rodzielić zadania między pracowników, aby zminimalizować całkowity koszt sprzątania.

	Armond	Francine	Herbert
łazienka	2	3	3
podłogi	3	2	3
okna	3	3	2

Przykład 3

Zagadnienie przydziału

AGH

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pracownik } i \text{ wykonuje zadanie } j \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

$$\text{zmin.} \quad 2x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 3x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} + 3x_{31} + 3x_{32} + 2x_{33} \tag{59}$$

$$\text{p.o.} \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \tag{60}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \tag{61}$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \tag{62}$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \tag{63}$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \tag{64}$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \tag{65}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n \tag{66}$$

Zagadnienie przydziału

Mamy n pracowników (maszyn, procesorów) i n zadań do wykonania. Koszt (czas) wykonania zadania i przez pracownika j wynosi c_{ij}. Przydzielić zadania do pracowników w taki sposób, aby całkowity koszt wykonania wszystkich zadań był minimalny.

$$\text{zminimalizować} \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \tag{67}$$

$$\text{przy ograniczeniach} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geqslant 1, i = 1, \ldots, m \tag{68}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant 1, j = 1, \ldots, n \tag{69}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n \tag{70}$$

Istnieje algorytm wielomianowy o złożoności $O(log^2(n))$ znajdujący optymalne rozwiązanie problemu.

Materiały

Wykład przygotowany na podstawie:

- Tomasz Jastrzębski, *Wrażliwość rozwiązania optymalnego na zmiany uwarunkowań*
- Karol Kukuła (red.), *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*
- A. Męczyńska, *Programowanie matematyczne*
- Joanna Józefowska, *Całkowitoliczbowe programowanie liniowe*