Badania operacyjne i systemy wspomagania decyzji
04 Heuristic Rating Estimation - objaśnienie metod

HRE z wartością średnią arytmetyczną

Dla ustalenia uwagi będziemy zakładali, że w danych wejściowych obiekty dla których ranking znamy są ostatnimi k obiektami ze wszystkich. W przypadku zadań do liczenia metodą HRE na wejściu otrzymamy macierz porównań

$$\begin{pmatrix} 1 & m_{1,2} & \dots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & 1 & \dots & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix},$$

oraz wektor z rangami ostatnich k obiektów $W_k = \begin{pmatrix} w_{n-k+1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$. Przede wszystkim warto w przypadku metody ze średnią arytmetyczną policzyć indeks niespójności Koczkodaja dla wejściowej macierzy. Jest on potrzebny, żeby ustalić czy zadanie na pewno da się rozwiązać metodą HRE. Żeby znaleźć indeks Koczkodaja musimy dla każdej trójki indeksów i, j, k wyliczyć:

$$K_{i,j,k} = \min\{|1 - \frac{m_{ik}m_{kj}}{m_{ij}}|, 1 - \frac{m_{ij}}{m_{ik}m_{kj}}|\}.$$

Największa z pośród wyliczonych wartości jest indeksem Koczkodaja. Jeżeli wartość ta jest mniejsza niż

$$1 - \frac{1 + \sqrt{4(n-1)(n-k-2)}}{2(n-1)}$$

to metoda którą stosujemy na pewno ma poprawne rozwiązanie. Jeżeli wartość ta została przekroczona to i tak powinniśmy przeliczyć resztę zadania i, jeżeli rozwiązanie istnieje, zaznaczyć, że nie jest do końca godne zaufania.

Od teraz skupiamy się na pierwszych $n-k$ wierszach naszej macierzy początkowej. Macierz powstałą z tych początkowych wierszy dzielimy na dwie mniejsze macierze, jedną zawierającą porównania do obiektów które nie znamy i drugą do obiektów które znamy:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m_{1,2} & \dots & m_{1,n-k} \\ m_{2,1} & 1 & \dots & m_{2,n-k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n-k,1} & m_{n-k,2} & \dots & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} m_{1,n-k+1} & \dots & m_{1,n} \\ m_{2,n-k+1} & \dots & m_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n-k,n-k+1} & \dots & m_{n-k,n} \end{pmatrix}.$$

Żeby przygotować macierz A do wyliczeń należy pomnożyć każdy współczynnik w A leżący poza przekątną przez $\frac{-1}{n-1}$. Otrzymamy

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{n-1}m_{1,2} & \dots & \frac{-1}{n-1}m_{1,n-k} \\ \frac{-1}{n-1}m_{2,1} & 1 & \dots & \frac{-1}{n-1}m_{2,n-k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-1}{n-1}m_{n-k,1} & \frac{-1}{n-1}m_{n-k,2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Żeby przygotować macierz B do wyliczeń należy przemnożyć ją przez wektor znanych rankingów, następnie przemnożyć każdą wartość tego wektora przez $\frac{-1}{n-1}$:

$$\hat{b} = \frac{-1}{n-1} B\ W_k.$$

Dla tak otrzymanej macierzy $\hat{A}$ i wektora $\hat{b}$ rozwiązujemy układ $n-k$ równań liniowych z $n-k$ niewiadomymi:

$$\hat{A}\ W = \hat{b}.$$

Jeżeli indeks Koczkodaja był odpowiednio niski to na pewno istnieje rozwiązanie o wszystkich współczynnikach dodatnich $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{n-k} \end{pmatrix}$. Jeżeli indeks był większy, to rozwiązanie wciąż może istnieć, ale jeżeli chociaż jeden współczynnik nie jest dodatni to mówimy, że poprawny ranking nie istnieje. Zestawiamy teraz ranking otrzymany z rankingiem początkowym $\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ I to jest rozwiązanie naszego zadania. Pamiętajmy, że w przypadku metody HRE nie ma konieczności normowania rankingu do jedynki.

HRE z wartością średnią geometryczną

W tym przypadku mamy takie same dane wejściowe. Nie ma konieczności liczenia indeksów spójności, gdyż rozwiązanie zawsze będzie istnieć, jednak warto jeden policzyć, żeby sprawdzić na ile rozwiązanie to jest wiarygodne (im mniej spójne, tym mniej wiarygodne).

Dla każdej nieznanej wartości musimy policzyć wartość pomocniczą:

$$\hat{b_i} = \log_{10}(m_{i,1} \cdot \ldots \cdot m_{i,n} \cdot w_{n-k+1} \cdot \ldots \cdot w_n).$$

Składamy wartości te w wektor pomocniczy

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} \hat{b_1} \\ \vdots \\ \hat{b}_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Ponadto potrzebujemy macierzy pomocniczej rozmiarów $n-k$ na $n-k$ w postaci:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & n-1 & \ldots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \ldots & n-1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązujemy układ $n-k$ równań liniowych z $n-k$ niewiadomymi

$$\hat{A}\hat{W} = \hat{b}.$$

Rozwiązanie na pewno istnieje, ale nie tworzy ono jeszcze rankingu, gdyż w metodzie geometrycznej używaliśmy logarytmu, więc każdą z otrzymanych wartości musimy użyć jako wykładnika 10:

$$W = \begin{pmatrix} 10^{\hat{w_1}} \\ \vdots \\ 10^{\hat{w}_{n-k}} \end{pmatrix}.$$

Dopiero ten wektor można zestawić z początkowym, aby otrzymać rozwiązanie.

Co zrobić kiedy znane wartości nie są ostatnimi

Omówimy taką sytuację na przykładzie z pięcioma obiektami, gdzie znamy wartości dla obiektów drugiego i trzeciego. Czyli na wejściu mamy macierz:

$$\begin{pmatrix} 1 & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} & m_{1,5} \\ m_{2,1} & 1 & m_{2,3} & m_{2,4} & m_{2,5} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & 1 & m_{3,4} & m_{3,5} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & 1 & m_{4,5} \\ m_{5,1} & m_{5,2} & m_{5,3} & m_{5,4} & 1 \end{pmatrix},$$

oraz wektor wartości $\begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$. Pamiętajmy, że jeżeli potrzebujemy policzyć indeks niespójności możemy to zrobić już teraz, gdyż żadna z przeprowadzonych przez nas operacji nie wpłynie na jego wartość.

Musimy tak przekształcić macierz, żeby znane nam wartości były w ostatnich wierszach i kolumnach macierzy. Żeby tak zrobić wpierw przestawiamy w kolejności wiersze odpowiadające znanym wartościom na spód macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & m_{1,2} & m_{1,3} & m_{1,4} & m_{1,5} \\ m_{4,1} & m_{4,2} & m_{4,3} & 1 & m_{4,5} \\ m_{5,1} & m_{5,2} & m_{5,3} & m_{5,4} & 1 \\ m_{2,1} & 1 & m_{2,3} & m_{2,4} & m_{2,5} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & 1 & m_{3,4} & m_{3,5} \end{pmatrix}.$$

Następnie przestawiamy w kolejności kolumny odpowiadające znanym nam wartościom na koniec macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & m_{1,4} & m_{1,5} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{4,1} & 1 & m_{4,5} & m_{4,2} & m_{4,3} \\ m_{5,1} & m_{5,4} & 1 & m_{5,2} & m_{5,3} \\ m_{2,1} & m_{2,4} & m_{2,5} & 1 & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,4} & m_{3,5} & m_{3,2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Tak przygotowaną macierz rozwiązujemy wybraną przez nas metodą i otrzymany przez nas wynik będzie w postaci $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix}$. Teraz wystarczy wstawić wartości nam znane od początku na właściwe miejsca by otrzymać wektor $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix}$.