Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie
AGH University of Science
and Technology

Programowanie nieliniowe. Wybrane strategie projektowania algorytmów (BOiKWD 2019/20)

dr inż. Weronika T. Adrian

AGH University of Science and Technology

9.12.2019 r.

Programowanie matematyczne

Przypomnienie

Programowanie matematyczne to problem optymalizacyjny.
Zadanie brzmi: Dokonaj maksymalizacji (minimalizacji) funkcji $f(x)$ przy nałożonych warunkach:

$$g(x) \leqslant 0, (\geqslant 0)$$

$$h(x) = 0$$

gdzie $x \in X \subset \mathrm{R}^n$, zaś f, g i h są funkcjami zdefiniowanymi na tym podzbiorze.

Programowanie matematyczne

Przypomnienie

Programowanie matematyczne to problem optymalizacyjny. Zadanie brzmi: Dokonaj maksymalizacji (minimalizacji) funkcji $f(x)$ przy nałożonych warunkach:

$$g(x) \leqslant 0, (\geqslant 0)$$

$$h(x) = 0$$

gdzie $x \in X \subset \mathrm{R}^n$, zaś f, g i h są funkcjami zdefiniowanymi na tym podzbiorze.

Nałożone warunki – warunki ograniczające, funkcja f – funkcja celu, rozwiązania problemu – rozwiązania optymalne.

Programowanie matematyczne

Metody rozwiązywania

Problemy należące do różnych *klas* rozwiązywane są różnymi metodami.

Programowanie matematyczne

Metody rozwiązywania

Problemy należące do różnych *klas* rozwiązywane są różnymi metodami.

- programowanie liniowe

Programowanie matematyczne

Metody rozwiązywania

Problemy należące do różnych *klas* rozwiązywane są różnymi metodami.

- programowanie liniowe
- programowanie całkowitoliczbowe

Programowanie matematyczne

Metody rozwiązywania

Problemy należące do różnych *klas* rozwiązywane są różnymi metodami.

- programowanie liniowe
- programowanie całkowitoliczbowe
- programowanie zero-jedynkowe

Programowanie matematyczne

Metody rozwiązywania

Problemy należące do różnych *klas* rozwiązywane są różnymi metodami.

- programowanie liniowe
- programowanie całkowitoliczbowe
- programowanie zero-jedynkowe
- programowanie ilorazowe

Programowanie matematyczne

Metody rozwiązywania

Problemy należące do różnych *klas* rozwiązywane są różnymi metodami.

- programowanie liniowe
- programowanie całkowitoliczbowe
- programowanie zero-jedynkowe
- programowanie ilorazowe
- programowanie kwadratowe

Programowanie matematyczne

Metody rozwiązywania

Problemy należące do różnych *klas* rozwiązywane są różnymi metodami.

- programowanie liniowe
- programowanie całkowitoliczbowe
- programowanie zero-jedynkowe
- programowanie ilorazowe
- programowanie kwadratowe
- programowanie nieliniowe

Programowanie matematyczne

Metody rozwiązywania

Problemy należące do różnych *klas* rozwiązywane są różnymi metodami.

- programowanie liniowe
- programowanie całkowitoliczbowe
- programowanie zero-jedynkowe
- programowanie ilorazowe
- programowanie kwadratowe
- programowanie nieliniowe
- ...

Programowanie nieliniowe

Zadania programowania nieliniowego są identyczne jak dla programowania liniowego, ale w przeciwieństwie do programowania liniowego, nie istnieje jeden uniwersalny algorytm rozwiązywania. Dlaczego?

Programowanie nieliniowe

Zadania programowania nieliniowego są identyczne jak dla programowania liniowego, ale w przeciwieństwie do programowania liniowego, nie istnieje jeden uniwersalny algorytm rozwiązywania. Dlaczego?

Funkcje nieliniowe stanowią (w pewnym sensie) dużo bardziej obszerną rodzinę funkcji niż funkcje liniowe – funkcją nieliniową jest każda funkcja, która nie jest liniowa.

Programowanie nieliniowe

Funkcje nieliniowe charakteryzują się następującymi cechami, które mogą utrudniać obliczenia:

Programowanie nieliniowe

Funkcje nieliniowe charakteryzują się następującymi cechami, które mogą utrudniać obliczenia:

- występowanie tzw. ekstremów lokalnych (lokalne minima lub maksima),

Programowanie nieliniowe

Funkcje nieliniowe charakteryzują się następującymi cechami, które mogą utrudniać obliczenia:

- występowanie tzw. ekstremów lokalnych (lokalne minima lub maksima),
- występowanie tzw. punktów siodłowych, czyli takich, dla których funkcja osiąga maksimum dla jednej zmiennej, a minimum dla innej (na wykresie funkcji 2 zmiennych wyglądają one jak przełęcz lub siodło),

Programowanie nieliniowe

Funkcje nieliniowe charakteryzują się następującymi cechami, które mogą utrudniać obliczenia:

- występowanie tzw. ekstremów lokalnych (lokalne minima lub maksima),
- występowanie tzw. punktów siodłowych, czyli takich, dla których funkcja osiąga maksimum dla jednej zmiennej, a minimum dla innej (na wykresie funkcji 2 zmiennych wyglądają one jak przełęcz lub siodło),
- nieciągłości („przerwy” w wykresach),

Programowanie nieliniowe

Funkcje nieliniowe charakteryzują się następującymi cechami, które mogą utrudniać obliczenia:

- występowanie tzw. ekstremów lokalnych (lokalne minima lub maksima),
- występowanie tzw. punktów siodłowych, czyli takich, dla których funkcja osiąga maksimum dla jednej zmiennej, a minimum dla innej (na wykresie funkcji 2 zmiennych wyglądają one jak przełęcz lub siodło),
- nieciągłości („przerwy” w wykresach),
- osobliwości (funkcja dąży do plus lub minus nieskończoności dla skończonej wartości argumentu).

Programowanie nieliniowe

Funkcje nieliniowe charakteryzują się następującymi cechami, które mogą utrudniać obliczenia:

- występowanie tzw. ekstremów lokalnych (lokalne minima lub maksima),
- występowanie tzw. punktów siodłowych, czyli takich, dla których funkcja osiąga maksimum dla jednej zmiennej, a minimum dla innej (na wykresie funkcji 2 zmiennych wyglądają one jak przełęcz lub siodło),
- nieciągłości („przerwy” w wykresach),
- osobliwości (funkcja dąży do plus lub minus nieskończoności dla skończonej wartości argumentu).

Programowanie nieliniowe

Funkcje nieliniowe charakteryzują się następującymi cechami, które mogą utrudniać obliczenia:

- występowanie tzw. ekstremów lokalnych (lokalne minima lub maksima),
- występowanie tzw. punktów siodłowych, czyli takich, dla których funkcja osiąga maksimum dla jednej zmiennej, a minimum dla innej (na wykresie funkcji 2 zmiennych wyglądają one jak przełęcz lub siodło),
- nieciągłości („przerwy” w wykresach),
- osobliwości (funkcja dąży do plus lub minus nieskończoności dla skończonej wartości argumentu).

Wszystko to powoduje, że poszukiwanie rozwiązania konkretnych zadań programowania nieliniowego zależy od szczególnej postaci tego zadania.

Programowanie nieliniowe

Metody rozwiązywania

Niektóre zadania programowania nieliniowego można rozwiązać:

- metodą simpleks, jeżeli istnieje możliwość przekształcenia w zadanie programowania liniowego np. tzw. programowanie ilorazowe;
- przekształcając do postaci zadania programowania liniowego całkowitoliczbowego – przykładem może być zadanie transportowo-produkcyjne ze stałym kosztem uruchomienia produkcji czy zadanie optymalnej diety ze stałymi kosztami zakupu;
- przy pomocy specjalnego algorytmu, jeśli zadanie zalicza się do jednego z podtypów, dla których takie algorytmy są znane

Programowanie ilorazowe

Zadanie programowania ilorazowego jest to maksymalizacja lub minimalizacja ilorazu dwóch funkcji liniowych przy ograniczeniach liniowych. Standardowa postać zadania to:

$$\frac{c_0 + c_1x_1 + \ldots + c_nx_n}{d_0 + d_1x_1 + \ldots + d_nx_n} \to \min / \max$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqslant b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqslant b_m \\ x_1, \ldots, x_n &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Programowanie ilorazowe

Zadanie programowania ilorazowego jest to maksymalizacja lub minimalizacja ilorazu dwóch funkcji liniowych przy ograniczeniach liniowych. Standardowa postać zadania to:

$$\frac{c_0 + c_1x_1 + \ldots + c_nx_n}{d_0 + d_1x_1 + \ldots + d_nx_n} \to \min / \max$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqslant b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqslant b_m \\ x_1, \ldots, x_n &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Jeśli $d_0 + d_1x_1 + \ldots + d_nx_n \neq 0$ dla $x_1, \ldots, x_n \in D$ to zadanie programowania ilorazowego można sprowadzić do zadania programowania liniowego.

Programowanie ilorazowe

Sprowadzenie do programowania liniowego

Wprowadźmy nowe zmienne:

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{d_0+d_1x_1+\ldots+d_nx_n}, \\ y_1 &= \frac{x_1}{d_0+d_1x_1+\ldots+d_nx_n}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \frac{x_n}{d_0+d_1x_1+\ldots+d_nx_n} \end{aligned}$$

Wtedy

$$x_i = \frac{y_i}{y_0}$$

i poszukiwanie rozwiązania zadania programowania ilorazowego sprowadza się do rozwiązania zadania programowania liniowego.

Programowanie ilorazowe

Przykład

Przedsiębiorstwo produkuje wyroby W_1 i W_2 z dwóch surowców S_1 i S_2. Zużycie surowców do produkcji każdego wyrobu podano w tablicy, w której przedstawiono stan zapasów obu surowców oraz zysk jednostkowy z produkcji każdego wyrobu i ilość zanieczyszczeń emitowanych przy produkcji danego wyrobu.

Surowiec	Zużycie surowca [kg/jednostkę wyrobu]		Zapas surowca
	W1	W2	
S1	1	1	4
S2	4	2	8
zysk jednostkowy w [zł/jednostkę wyrobu]	200	100	
emisja zanieczyszczeń w [kg/jednostkę wyrobu]	3	4	

Znaleźć taki plan produkcji, w którym **ilość zanieczyszczeń przypadająca na jednostkę zysku będzie najmniejsza**.

Programowanie ilorazowe

Przykład - model

Model matematyczny:

- x_1 – liczba jednostek wyrobu W_1 w planie produkcji
- x_2 – odpowiednio planowana produkcja wyrobu W_2
- zysk z produkcji: $200x_1 + 100x_2$
- całkowita emisja zanieczyszczeń: $3x_1 + 4x_2$

Programowanie ilorazowe

Przykład - model

Model matematyczny:

- x_1 – liczba jednostek wyrobu W_1 w planie produkcji
- x_2 – odpowiednio planowana produkcja wyrobu W_2
- zysk z produkcji: $200x_1 + 100x_2$
- całkowita emisja zanieczyszczeń: $3x_1 + 4x_2$

Otrzymujemy następujący model decyzyjny:

zminimalizować $z = \frac{3x_1+4x_2}{200x_1+100x_2}$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 4 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leqslant 8 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Programowanie ilorazowe

Przykład - rozwiązanie

Zauważmy, że dla $x_1, x_2 \geqslant 0$, gdzie jedna ze zmiennych ma wartość dodatnią mianownik funkcji celu jest większy od zera. Niech $v = 200x_1 + 100x_2$. Wprowadźmy podstawienia:

$$y_0 = \frac{1}{200x_1 + 100x_2}, y_1 = \frac{x_1}{200x_1 + 100x_2}, y_2 = \frac{x_2}{200x_1 + 100x_2}$$

Programowanie ilorazowe

Przykład - rozwiązanie

W wyniku tego podstawienia otrzymujemy następujące zadanie programowania liniowego:

zminimalizować $z = 3y_1 + 4y_2$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 - 4y_0 &\leqslant 0 \\ 4y_1 + 2y_2 - 8y_0 &\leqslant 0 \\ 200y_1 + 100y_2 &= 1 \\ y_0, y_1, y_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Programowanie ilorazowe

Przykład - rozwiązanie

Zadanie rozwiązujemy dowolną metodą programowania liniowego (np. za pomocą algorytmu sympleks) i otrzymujemy następujące rozwiązanie optymalne:

$$y_1^* = 1/200, y_2^* = 0, y_0^* = 1/400, z^* = 3/200$$

Na mocy wzorów definiujących zmienne y znajdujemy optymalne rozwiązanie zadania początkowego:

$$x_1^* = \frac{1/200}{1/400} = 2, x_2^* = \frac{0}{1/400} = 0$$

W optymalnym planie produkcji zakład będzie produkował 2 jednostki W_1 i przy tym będzie emitował 3 kg zanieczyszczeń na 200 zł zysku.

Programowanie ilorazowe

Programowanie ilorazowe jest stosowane przy problemach decyzyjnych wymagających pogodzenia ze sobą dwóch sprzecznych kryteriów optymalności np.

$$\frac{\text{zysk}}{\text{pracochłonność}} \longrightarrow \max$$

$$\frac{\text{przychód}}{\text{koszty}} \longrightarrow \max$$

$$\frac{\text{koszty paszy}}{\text{dzienny przyrost masy zwierząt}} \longrightarrow \min$$

Zadanie programowania kwadratowego

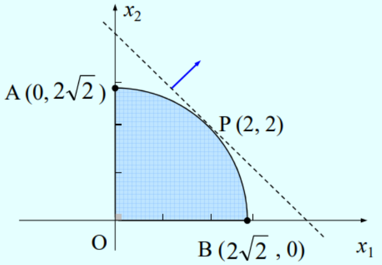
Funkcja celu i/lub co najmniej jedno z ograniczeń jest funkcją kwadratową.

$$f(x) = x_1 + x_2$$

$$g_1(x) = 8 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$

$$g_2(x) = x_1 \geq 0$$

$$g_3(x) = x_2 \geq 0$$



Zadanie programowania kwadratowego

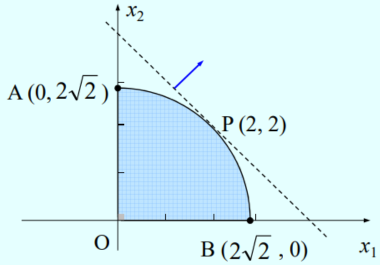
Funkcja celu i/lub co najmniej jedno z ograniczeń jest funkcją kwadratową.

$$f(x) = x_1 + x_2$$

$$g_1(x) = 8 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$

$$g_2(x) = x_1 \geq 0$$

$$g_3(x) = x_2 \geq 0$$



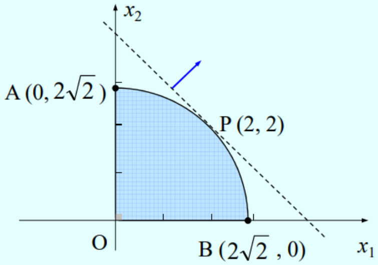
Nie ma uniwersalnej metody rozwiązywania.

Zadanie programowania kwadratowego

Funkcja celu i/lub co najmniej jedno z ograniczeń jest funkcją kwadratową.

$$f(x) = x_1 + x_2$$

$$g_1(x) = 8 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$
$$g_2(x) = x_1 \geq 0$$
$$g_3(x) = x_2 \geq 0$$



Nie ma uniwersalnej metody rozwiązywania.
W szczególnym przypadku (muszą być spełnione warunki Kuhna-Tuckera) problem programowania kwadratowego można sprowadzić do problemu zastępczego i rozwiązać go zmodyfikowaną metodą simpleks (metoda Wolfe'a).

Programowanie dyskretne

Programowanie dyskretne to zadanie maksymalizacji (minimalizacji) funkcji $f(x)$ przy ograniczeniach:

$$g(x) \leqslant 0, (\geqslant 0)$$

gdzie $x \in D$, D jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym, zaś f, g i h są funkcjami zdefiniowanymi na tym podzbiorze.

Metoda podziału i ograniczeń

Wprowadzenie

- zaproponowana w 1960 r. przez A. H. Land'a i A. G. Doig'a w pracy pod tytułem *An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems*

Metoda podziału i ograniczeń

Wprowadzenie

- zaproponowana w 1960 r. przez A. H. Land'a i A. G. Doig'a w pracy pod tytułem *An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems*
- jej działanie opiera się na analizie drzewa przestrzeni stanów. Drzewo to reprezentuje wszystkie możliwe ścieżki jakimi może pójść algorytm rozwiązując dany problem. Algorytm zaczyna w korzeniu drzewa i przechodząc do któregoś liścia konstruuje rozwiązanie

Metoda podziału i ograniczeń

Wprowadzenie

- zaproponowana w 1960 r. przez A. H. Land'a i A. G. Doig'a w pracy pod tytułem *An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems*
- jej działanie opiera się na analizie drzewa przestrzeni stanów. Drzewo to reprezentuje wszystkie możliwe ścieżki jakimi może pójść algorytm rozwiązując dany problem. Algorytm zaczyna w korzeniu drzewa i przechodząc do któregoś liścia konstruuje rozwiązanie
- w każdym węźle oblicza *granicę*, która pozwala określić go jako *obiecujący* bądź nie (w dalszej fazie algorytm przegląda tylko potomków węzłów obiecujących)

Metoda podziału i ograniczeń

Wprowadzenie

AGH

- zaproponowana w 1960 r. przez A. H. Land'a i A. G. Doig'a w pracy pod tytułem *An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems*
- jej działanie opiera się na analizie drzewa przestrzeni stanów. Drzewo to reprezentuje wszystkie możliwe ścieżki jakimi może pójść algorytm rozwiązując dany problem. Algorytm zaczyna w korzeniu drzewa i przechodząc do któregoś liścia konstruuje rozwiązanie
- w każdym węźle oblicza *granicę*, która pozwala określić go jako *obiecujący* bądź nie (w dalszej fazie algorytm przegląda tylko potomków węzłów obiecujących)
- wymaga zdefiniowania *strategii* odwiedzania wierzchołków oraz liczenia granicy

Metoda podziału i ograniczeń

Sformułowanie ogólne

Rozważmy zadanie

$$f(x) \to min, x \in D$$

gdzie D – zbiór rozwiązań dopuszczalnych.
Jeżeli $B \subset A \subset D$, to prawdziwa jest nierówność:

$$min_{x \in A} f(x) \leqslant min_{x \in B} f(x)$$

Definicja

Liczbę $g(A)$ nazywamy ograniczeniem funkcji $f(x)$ na zbiorze A, jeżeli:

$$g(A) \leqslant f(x), x \in A$$

Metoda podziału i ograniczeń

Sformułowanie ogólne

AGH

Postępowanie prowadzące do wyznaczenia minimum funkcji $f(x)$ na zbiorze D jest następujące:

Metoda podziału i ograniczeń

Sformułowanie ogólne

Postępowanie prowadzące do wyznaczenia minimum funkcji $f(x)$ na zbiorze D jest następujące:

1. Wyznacz wartość $g(D)$. Jeżeli istnieje takie $x_0 \in D$, że $f(x_0) = g(D)$ to x_0 jest rozwiązaniem optymalnym. W przeciwnym wypadku przejdź do kroku 2:

Metoda podziału i ograniczeń

Sformułowanie ogólne

Postępowanie prowadzące do wyznaczenia minimum funkcji $f(x)$ na zbiorze D jest następujące:

1. Wyznacz wartość $g(D)$. Jeżeli istnieje takie $x_0 \in D$, że $f(x_0) = g(D)$ to x_0 jest rozwiązaniem optymalnym. W przeciwnym wypadku przejdź do kroku 2:
2. Podziel zbiór D na r_1 podzbiorów takich, że $D = \bigcup_{i=1}^{r_1} D_i^1$. Jest to podział 1. rzędu. Wyznacz wartość $g(D_i^1)$ dla każdego i. Jeżeli istnieje x_1 takie, że $f(x_1) =$ wartości minimalnej któregoś z podzbiorów, to x_1 jest rozwiązaniem optymalnym. Jeżeli nie to:

Metoda podziału i ograniczeń

Sformułowanie ogólne

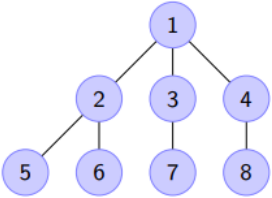
Postępowanie prowadzące do wyznaczenia minimum funkcji $f(x)$ na zbiorze D jest następujące:

1. Wyznacz wartość $g(D)$. Jeżeli istnieje takie $x_0 \in D$, że $f(x_0) = g(D)$ to x_0 jest rozwiązaniem optymalnym. W przeciwnym wypadku przejdź do kroku 2:
2. Podziel zbiór D na r_1 podzbiorów takich, że $D = \bigcup_{i=1}^{r_1} D_i^1$. Jest to podział 1. rzędu. Wyznacz wartość $g(D_i^1)$ dla każdego i. Jeżeli istnieje x_1 takie, że $f(x_1) =$ wartości minimalnej któregoś z podzbiorów, to x_1 jest rozwiązaniem optymalnym. Jeżeli nie to:
3. W kolejnych krokach dzieli się (*branch*) podzbiory o najniższej wartości funkcji celu oraz ponownie wyznacza wartości minimalne (*bound*).

Metoda podziału i ograniczeń

Drzewo przestrzeni stanów

- reprezentuje przestrzeń rozwiązań
- każdy wierzchołek reprezentuje stan algorytmu
- algorytm rozpoczyna w korzeniu drzewa i przechodząc drzewo konstruuje rozwiązanie



Wada: wykładniczy rozmiar drzewa

Metoda podziału i ograniczeń

Drzewo przestrzeni stanów

- dobrze byłoby więc “przyciąć” drzewo, żeby nie przeglądać go całego
- wyliczamy **ograniczenia** na wartość rozwiązania, które możemy uzyskać z potomków danego węzła
- pamiętamy najlepsze dotychczas znalezione rozwiązanie
- możemy dzięki temu **dzielić** (przycinać) drzewo przestrzeni poszukiwań i przeglądać tylko obiecujące obszary

Metoda podziału i ograniczeń

Granice ora węzły obiecujące i nieobiecujące

Granica

Liczba ta jest ograniczeniem wartości rozwiązania jakie można uzyskać dzięki rozwinięciu danego węzła (przeglądaniu jego potomków)

Węzeł obiecujący

Węzeł jest **obiecujący** jeśli jego granica jest *lepsza* niż wartość najlepszego znalezionego do tej pory rozwiązania

Węzeł nieobiecujący

Wartość jego granicy jest *gorsza* od wartości najlepszego znalezionego do tej pory rozwiązania

Metoda podziału i ograniczeń

Składowe metody podziału i ograniczeń

Algorytm korzystający z metody podziału i ograniczeń musi zapewnić dwa elementy:

1. **funkcję obliczającą granicę**, która potrafi dla rozwiązywanego problemu wyznaczyć granicę najlepszego rozwiązania jakie można otrzymać z poddrzewa danego węzła
2. **strategię odwiedzania wierzchołków** w drzewie przestrzeni stanów, gdyż ma ona istotny wpływ na szybkość znalezienia rozwiązania

Metoda podziału i ograniczeń

Programowanie całkowitoliczbowe

- Jednym z najpopularniejszych zastosowań metody podziału i ograniczeń jest użycie jej do wyznaczenia rozwiązań programowania liniowego całkowitoliczbowego.

Metoda podziału i ograniczeń

Programowanie całkowitoliczbowe

AGH

- Jednym z najpopularniejszych zastosowań metody podziału i ograniczeń jest użycie jej do wyznaczenia rozwiązań programowania liniowego całkowitoliczbowego.
- Algorytm ten można traktować jako znacznie ulepszoną wersję metody pełnego przeglądu.

Metoda podziału i ograniczeń

Programowanie całkowitoliczbowe

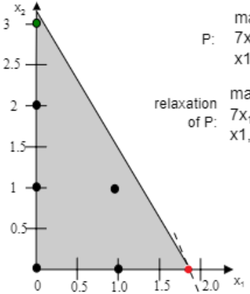
AGH

- Jednym z najpopularniejszych zastosowań metody podziału i ograniczeń jest użycie jej do wyznaczenia rozwiązań programowania liniowego całkowitoliczbowego.
- Algorytm ten można traktować jako znacznie ulepszoną wersję metody pełnego przeglądu.
- Jeżeli w zadaniu programowania liniowego tylko niektóre zmienne muszą być całkowite, to zadanie takie nazywamy mieszanym zadaniem programowania liniowego całkowitoliczbowego.

Metoda podziału i ograniczeń

Zastosowanie w programowaniu liniowym całkowitoliczbowym

Jeżeli usuniemy ograniczenia na całkowitość zmiennych w problemie P, to otrzymamy zadanie programowania liniowego, które nazywamy relaksacją P. Dla problemu maksymalizacji, optymalna wartość funkcji celu relaksacji jest górnym ograniczeniem na wartość funkcji celu optymalnego rozwiązania P.



P: max z = $21x_1 + 12x_2$
$7x_1 + 4x_2 \leqslant 13$
x1, x2 $\geqslant 0$, integer

relaxation of P: max z = $21x_1 + 12x_2$
$7x_1 + 4x_2 \leqslant 13$
x1, x2 $\geqslant 0$

Optymalnym rozwiązaniem P jest $(0,3)$, $z = 36$. Optymalnym rozwiązaniem relaksacji P jest $(13/7, 0)$, $z^R = 39$.

Metoda podziału i ograniczeń

Zastosowanie w programowaniu liniowym całkowitoliczbowym

AGH

1. Algorytm konstruuje binarne drzewo przeszukiwania. W każdym wierzchołku tego drzewa rozwiązywane jest zadanie programowania liniowego.
2. Istnieje kilka metod wyboru kolejnego wierzchołka do podziału. Jedną z najbardziej popularnych jest wybór wierzchołka z największą wartością z_R^*.
3. Wierzchołek drzewa zamykamy jeżeli:
    1. rozwiązanie otrzymane w tym wierzchołku jest całkowitoliczbowe;
    2. problem odpowiadający temu wierzchołkowi jest sprzeczny;
    3. wartość funkcji celu optymalnego rozwiązania w tym wierzchołku jest niewiększa niż wartość funkcji celu dla pewnego znanego rozwiązania dopuszczalnego.
4. Jeżeli wszystkie wierzchołki są zamknięte, to najlepsze znalezione rozwiązanie całkowitoliczbowe jest optymalne.

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Rozważmy następujący przykład:

FC:
$$Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{MAX}$$

O:
$$① \quad 9x_1 + 7x_2 \leq 63$$
$$② \quad x_1 + x_2 \leq 8$$
$$③ \quad 3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

WB:
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

$$x_2 \in \text{C}$$

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Szukamy rozwiązania nie uwzględniając warunku całoliczbowości (patrz: metoda geometryczna lub simplex)

Zadanie 1.

$$Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2 \to MAX$$

① $9x_1 + 7x_2 \le 63$

② $x_1 + x_2 \le 8$

③ $3x_1 + 2x_2 \ge 6$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Rozwiązanie: $x_1 = 3.5 \quad x_2 = 4.5 \quad Z(x_1, x_2) = 43.5$

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Zadanie umieszczamy na liście zadań:

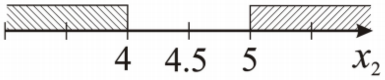
Nr zadania	Wartość FC	Czy spełnione są warunki całkowitoliczbowości	Numery zadań, na które zadanie zostało podzielone	
1	43.5	Nie		

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Zmienna x_2 nie spełnia nałożonego na nią w zadaniu głównym warunku $x_2 \in C$.

Dokonujemy podziału:



Otrzymujemy dwa przedziały:

$$x_2 \in [0,4] \qquad x_2 \in [5,\infty)$$

$$x_2 \leq 4 \qquad x_2 \geq 5$$

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Na podstawie otrzymanych przedziałów budujemy dwa zadania:

Zadanie 2.

$$Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{MAX}$$

① $9x_1 + 7x_2 \leq 63$

② $x_1 + x_2 \leq 8$

③ $3x_1 + 2x_2 \geq 6$

④ $x_2 \leq 4$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

Zadanie 3.

$$Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{MAX}$$

① $9x_1 + 7x_2 \leq 63$

② $x_1 + x_2 \leq 8$

③ $3x_1 + 2x_2 \geq 6$

④ $x_2 \geq 5$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

Metoda podziału i ograniczeń

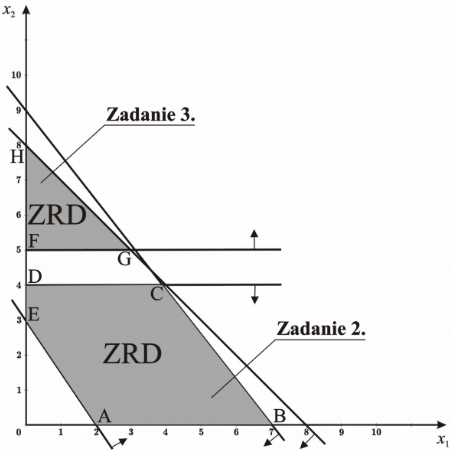
Przykład

Numery zadań umieszczamy na liście zadań:

Nr zadania	Wartość FC	Czy spełnione są warunki całkowitoliczbowości	Numery zadań, na które zadanie zostało podzielone	
1	43.5	Nie	2	3

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład



Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Dla **Zadania 2:**

Maksimum w punkcie: $C(\frac{35}{9}, 4)$

Wartość funkcji celu: $Z(\frac{35}{9}, 4) = 43\frac{1}{3}$

Dla **Zadania 3:**

Maksimum w punkcie: $G(3,5)$

Wartość funkcji celu: $Z(3,5) = 43$

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Lista zadań wygląda teraz tak:

Nr zadania	Wartość FC	Czy spełnione są warunki całkowitoliczbowości	Numery zadań, na które zadanie zostało podzielone	
1	43.5	Nie	2	3
2	$43\frac{1}{3}$	Tak		
3	43	Tak		

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Porządkowanie listy zadań

Z listy usuwamy:

Zadanie 1. - bo zostało już podzielone

Zadanie 3. – spełnione są wszystkie warunki całkowitoliczbowości, ale ma mniejszą wartość funkcji celu niż **Zadanie 2.**

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Lista zadań wygląda teraz tak:

Nr zadania	Wartość FC	Czy spełnione są warunki całkowitoliczbowości	Numery zadań, na które zadanie zostało podzielone	
2	$43\frac{1}{3}$	Tak		

Na liście pozostało tylko jedno zadanie.

Ponieważ spełnia ono wszystkie warunki całkowitoliczbowości, to jego rozwiązanie jest rozwiązaniem optymalnym zadania pierwotnego.

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Niech teraz obydwie zmienne $x_1, x_2 \in$

Model matematyczny:

FC: $Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2 \to MAX$

O:

① $9x_1 + 7x_2 \leq 63$

② $x_1 + x_2 \leq 8$

③ $3x_1 + 2x_2 \geq 6$

WB:

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

$x_1 \in C, \quad x_2 \in C$

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Szukamy rozwiązania nie uwzględniając warunku całkowitoliczbowości

Zadanie 1.

$$Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2 \to \text{MAX}$$

① $9x_1 + 7x_2 \leq 63$

② $x_1 + x_2 \leq 8$

③ $3x_1 + 2x_2 \geq 6$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Rozwiązanie: $x_1 = 3.5 \quad x_2 = 4.5 \quad Z(x_1, x_2) = 43.5$

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Zadanie umieszczamy na liście zadań:

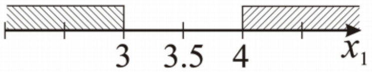
Nr zadania	Wartość FC	Czy spełnione są warunki całkowitoliczbowości	Numery zadań, na które zadanie zostało podzielone	
1	43.5	Nie		

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Ponieważ obydwie zmienne nie spełniają warunków całkowitoliczbowości wybieramy, względem której z nich dokonamy podziału.

Dokonujemy podziału względem x_1:



Otrzymujemy dwa przedziały:

$$x_1 \leq 3 \qquad\qquad x_1 \geq 4$$

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Na podstawie otrzymanych przedziałów budujemy dwa zadania:

Zadanie 2.

$$Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2 \rightarrow MAX$$

① $9x_1 + 7x_2 \leq 63$

② $x_1 + x_2 \leq 8$

③ $3x_1 + 2x_2 \geq 6$

④ $x_1 \leq 3$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Zadanie 3.

$$Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2 \rightarrow MAX$$

① $9x_1 + 7x_2 \leq 63$

② $x_1 + x_2 \leq 8$

③ $3x_1 + 2x_2 \geq 6$

④ $x_1 \geq 4$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Rozwiązanie **Zadania 2:**

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 5 \quad Z(x_1, x_2) = 43$$

Rozwiązanie **Zadania 3:**

$$x_1 = 4 \quad x_2 = 3.8 \quad Z(x_1, x_2) = 43.2851$$

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Lista zadań wygląda teraz tak:

Nr zadania	Wartość FC	Czy spełnione są warunki całkowitoliczbowości	Numery zadań, na które zadanie zostało podzielone	
1	43.5	Nie	2	3
2	43	Tak		
3	43.2851	Nie		

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Porządkowanie listy zadań

Z listy usuwamy:

Zadanie 1. - bo zostało już podzielone

Na liście pozostaje:

Zadanie 2. – spełnia wszystkie warunki całkowitoliczbowości

Zadanie 3. – nie spełnia warunków całkowitoliczbowości, ale ma większą wartość funkcji celu niż **Zadanie 2.**

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Lista zadań wygląda teraz tak:

Nr zadania	Wartość FC	Czy spełnione są warunki całkowitoliczbowości	Numery zadań, na które zadanie zostało podzielone	
2	43	Tak		
3	43.2851	Nie		

Zadanie 3. musi zostać podzielone

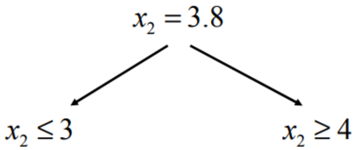
Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Rozwiązanie **Zadania 3**:

$$x_1 = 4 \quad x_2 = 3.8$$

Ponieważ zmienna x_2 nie spełnia warunków całkowitoliczbowości, dokonujemy podziału ze względu na tą zmienną.



Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Na podstawie otrzymanych przedziałów budujemy dwa zadania:

Zadanie 4.

$$Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2 \to MAX$$

① $9x_1 + 7x_2 \le 63$

② $x_1 + x_2 \le 8$

③ $3x_1 + 2x_2 \ge 6$

④ $x_1 \ge 4$

⑤ $x_2 \le 3$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

Zadanie 5.

$$Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2 \to MAX$$

① $9x_1 + 7x_2 \le 63$

② $x_1 + x_2 \le 8$

③ $3x_1 + 2x_2 \ge 6$

④ $x_1 \ge 4$

⑤ $x_2 \ge 4$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Rozwiązanie **Zadania 4:**

$$x_1 = 4.66667 \quad x_2 = 3 \quad Z(x_1, x_2) = 43$$

Rozwiązanie **Zadania 5:**

Zadanie jest sprzeczne

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Lista zadań wygląda teraz tak:

Nr zadania	Wartość FC	Czy spełnione są warunki całkowitoliczbowości	Numery zadań, na które zadanie zostało podzielone	
2	43	Tak		
3	43.2851	Nie	4	5
4	43	Nie		
5	Zadanie sprzeczne			

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Porządkowanie listy zadań

Z listy usuwamy:

Zadanie 3. - bo zostało już podzielone

Zadanie 5. - bo jest sprzeczne

Na liście pozostaje:

Zadanie 2. – spełnia wszystkie warunki całkowitoliczbowości

Zadanie 4. – nie spełnia warunków całkowitoliczbowości, ale wartość funkcji celu jest taka sama jak w **Zadaniu 2.**

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Lista zadań wygląda teraz tak:

Nr zadania	Wartość FC	Czy spełnione są warunki całkowitoliczbowości	Numery zadań, na które zadanie zostało podzielone	
2	43	Tak		
4	43	Nie		

Zadanie 4. musi zostać podzielone

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Rozwiązanie **Zadania 4**:

$$x_1 = 4.66667 \quad x_2 = 3$$

Ponieważ zmienna x_1 nie spełnia warunków całkowitoliczbowości, dokonujemy podziału ze względu na tą zmienną.

$$x_1 = 4.66667$$

$$x_1 \leq 4 \qquad\qquad x_1 \geq 5$$

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Na podstawie otrzymanych przedziałów budujemy dwa zadania:

Zadanie 6.

$$Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2 \to \text{MAX}$$

① $9x_1 + 7x_2 \le 63$

② $x_1 + x_2 \le 8$

③ $3x_1 + 2x_2 \ge 6$

④ $x_1 \ge 4$

⑤ $x_2 \le 3$

⑥ $x_1 \le 4$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Zadanie 7.

$$Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2 \to \text{MAX}$$

① $9x_1 + 7x_2 \le 63$

② $x_1 + x_2 \le 8$

③ $3x_1 + 2x_2 \ge 6$

④ $x_1 \ge 4$

⑤ $x_2 \le 3$

⑥ $x_1 \ge 5$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Rozwiązanie **Zadania 6:**

$$x_1 = 4 \quad x_2 = 3 \quad Z(x_1, x_2) = 39$$

Rozwiązanie **Zadania 7:**

$$x_1 = 5 \quad x_2 = 2.57143 \quad Z(x_1, x_2) = 42.85714$$

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Lista zadań wygląda teraz tak:

Nr zadania	Wartość FC	Czy spełnione są warunki całkowitoliczbowości	Numery zadań, na które zadanie zostało podzielone	
2	43	Tak		
4	43	Nie	6	7
6	39	Tak		
7	42.85714	Nie		

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

AGH

Porządkowanie listy zadań

Z listy usuwamy:

Zadanie 4. - bo zostało już podzielone

Zadanie 6. - warunki całkowitoliczbowości spełnione, ale wartość funkcji celu jest mniejsza niż w **Zadaniu 2.**

Zadanie 7. – nie spełnia warunków całkowitoliczbowości, a wartość funkcji celu jest mniejsza niż w **Zadaniu 2.**

Metoda podziału i ograniczeń

Przykład

Lista zadań wygląda teraz tak:

Nr zadania	Wartość FC	Czy spełnione są warunki całkowitoliczbowości	Numery zadań, na które zadanie zostało podzielone	
2	43	Tak		

Na liście pozostało tylko jedno zadanie.

Ponieważ spełnia ono wszystkie warunki całkowitoliczbowości, to jego rozwiązanie jest rozwiązaniem optymalnym zadania pierwotnego.

Metoda podziału i ograniczeń

Inne problemy, do których można zastosować metodę podziału i ograniczeń:

- Problem plecakowy: dzielimy przestrzeń rozwiązań na sytuacje, w których bierzemy / nie bierzemy danego przedmiotu, obliczamy sumaryczną wartość załadunku (granica) kontrolując pojemność plecaka;

Metoda podziału i ograniczeń

Inne problemy, do których można zastosować metodę podziału i ograniczeń:

- Problem plecakowy: dzielimy przestrzeń rozwiązań na sytuacje, w których bierzemy / nie bierzemy danego przedmiotu, obliczamy sumaryczną wartość załadunku (granica) kontrolując pojemność plecaka;
- Problem komiwojażera: kolejne węzły w drzewie przeszukiwań wyznaczane są przez kolejne miasta, które możemy odwiedzić biorąc pod uwagę dotychczasową trasę, granicą jest długość trasy

Metoda podziału i ograniczeń

Problem plecakowy

AGH

Dany jest następujący problem załadunku plecaka o pojemności 15 przedmiotami $x_1, ..., x_5$:

$$\begin{aligned} \max z = \quad & 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 2x_5 \\ & 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 2x_5 \leq 15, \\ & x_1, .., x_5 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Relaksacja:

$$\begin{aligned} \max z = \quad & 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 2x_5 \\ & 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 2x_5 \leq 15, \\ & 0 \leq x_i \leq 1, \;\; i = 1, \ldots, 5 \end{aligned}$$

Metoda podziału i ograniczeń

Problem plecakowy

Relaksacja może być efektywnie rozwiązana za pomocą algorytmu zachłannego:

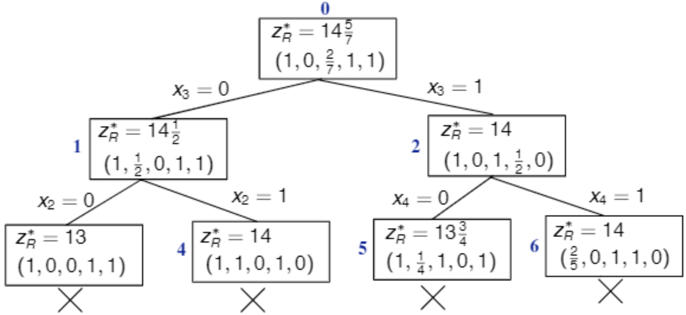
i	c_i	w_i	c_i/w_i
1	5	5	1
2	3	4	3/4
3	6	7	6/7
4	6	6	1
5	2	2	1

Wybieramy przedmioty zgodnie z nierosnącą wartością c_i/w_i. Zatem bierzemy całe przedmioty 1, 4, 5 i 2/7 przedmiotu 3.

W optymalnym rozwiązaniu relaksacji co najwyżej jedna zmienna jest niecałkowita.

Metoda podziału i ograniczeń

Problem plecakowy



W każdym wierzchołku wybieramy zmienną niecałkowitą x_i i rozpatrujemy dwa przypadki $x_i = 1$ (bierzemy przedmiot i) oraz $x_i = 0$ (nie bierzemy przedmiotu i). Optymalne rozwiązanie znajduje się w wierzchołku 4. Zatem bierzemy przedmioty 1, 2 i 4.

Podsumowanie

- Nie istnieją uniwersalne algorytmy rozwiązywania zadań programowania nieliniowego

Podsumowanie

- Nie istnieją uniwersalne algorytmy rozwiązywania zadań programowania nieliniowego
- Istnieją konkretne typy problemów, które można sprowadzić do programowania liniowego lub wykorzystać programowanie liniowe jako jeden z etapów rozwiązywania zadania

Podsumowanie

- Nie istnieją uniwersalne algorytmy rozwiązywania zadań programowania nieliniowego
- Istnieją konkretne typy problemów, które można sprowadzić do programowania liniowego lub wykorzystać programowanie liniowe jako jeden z etapów rozwiązywania zadania
- Metoda podziału i ograniczeń służy do rozwiązywania problemów optymalizacji dyskretnej

Podsumowanie

- Nie istnieją uniwersalne algorytmy rozwiązywania zadań programowania nieliniowego
- Istnieją konkretne typy problemów, które można sprowadzić do programowania liniowego lub wykorzystać programowanie liniowe jako jeden z etapów rozwiązywania zadania
- Metoda podziału i ograniczeń służy do rozwiązywania problemów optymalizacji dyskretnej
- Istnieje szereg wariantów tej metody, w zależności od zdefiniowania sposobu *podziału* problemu, wyliczania *ograniczeń* oraz strategii przeszukiwania drzewa podproblemów.

Materiały

Wykład przygotowany na podstawie:

- Romuald Kotowski, *Programowanie nieliniowe i całkowitoliczbowe*
- Joanna Józefowska, *Programowanie nieliniowe*
- Mateusz Łyczek, *Metoda podziału i ograniczeń*
- Bogusław Filipowicz, *Badania operacyjne*
- Adam Kasperski, *Badania operacyjne*