Badania operacyjne i systemy wspomagania decyzji
11-Programowanie kwadratowe - pomoc

Programowanie wypukłe

Jak już wiemy wiele problemów optymalizacyjnych da się zaprogramować zapisać korzystając tylko z funkcji liniowych i w tej sytacji mamy algorytmy któree w sensownym czasie potrafią podać nam wynik (przy mniejszych problemach wykorzystać algorytm simpleks można również spokojnie samemu rozpisać na kartce). Rozważaliśmy również sytuację kiedy sam problem nie był liniowy, ale korzystając z prostego podstawienia, można było utworzyć problem liniowy którego rozwiązanie pozwalało łatwo wyznaczyć rozwiązanie naszego problemu pierwotnego.

Niestety nie wszystkie problemy można sprowadzić do programu liniowego. Na szczęście, chociaż znalezienie jednej metody dla wszystkich możliwych zestawów funkcji jest niemożliwe, istnieje wiele podklas dla których możemy ułatwić sobie obliczenia. Pierwszym naturalnym rozszeżeniem klasy problemów liniowych są problemy wypukłe. To tej klasy problemów zaliczamy takie, których zbiór potencjalnych rozwiązań dany przez funkcje ograniczające jest wypukły (tak też było w przypadku programowania liniowego) zaś funkcja celu jest (przynajmniej zgodnie z polską nomenklaturą) wklęsła (funkcja liniowa jest zarówno wypukła jak i wklęsła, więc jak widzimy każdy problem liniowy jest również problemem wypukłym). Jeżeli mamy do czynienia z takim problemem to mamy do dyspozycji tak zwane warunki Kuhna-Tuckera, które za cenę dodania kilku zmiennych pozwalają rozważać pochodne cząstkowe pierwotnych funkcji. Ma to szczególne zastosowanie jeżeli ograniczenia i funkcja celu były dane jako wielomiany, gdyż wówczas pochodne cząstkowe zawsze zmniejszą nam stopień wielomianu (co z zasady ułatwia obliczenia). Najprostszą klasą problemów z wielomianami, która rozszerza problemy liniowe jest programowanie kwadratowe. W tym przypadku wszystkie ograniczenia są dane funkcjami liniowymi, zaś funkcja celu jest funkcją kwadratową. W przypadku tym warunki Kuhna Tuckera pozwalają niemal cały problem sprowadzić do równań liniowych, z tym że pewne zmienne będą parami miały własność, że w rozwiązaniu co najmniej jedna z nich będzie musiała być równa zero. Taki problem już nie jest programem libiowym, na szczęście drobna modyfikacja do algorytmu simpleks, zwana metodą Wolfe'a, pozwala już takie problemy rozwiązać. Metody do rozwiązywania programów kwadratowych zostały też zaimplementowane w bibliotekach Pythona: CVXOPT i quadprog.

Portfel akcji

Klasycznym zastosowaniem programowania kwadratowego jest używanie tak zwanego modelu Markowitza do określenia portfela akcji minimalizującego ryzyko. Żeby utworzyć program kwadratowy do rozwiązania takiego problemu potrzebujemy tyle zmiennych ile spółek rozważamy, ponadto wyliczyć oczekiwane zyski z akcji każdej spółki oraz macierz wariancji i kowariancji stóp zysku. Ograniczenia w takim problemie będą następujące: wszystkie zmienne muszą być nieujemne (jak zawsze), oraz muszą sumować się do jedynki (ponieważ reprezentują procentowy udział każdego typu akcji w naszym portfelu, a ponieważ rozkładamy go tylko po rozważanych spółkach to musi się sumować do 100 procent). Jeżeli w zadaniu mamy założoną minimalną oczekiwaną stopę zysku to dostajemy ograniczenie liniowe, które można wyliczyć jako sumę oczekiwanych zysków przemnożonych przez odpowiadające im zmienne. Forma kwadratowa którą minimalizujemy w takim zadaniu jest podana wprost w postaci macierzy wariancji i kowariancji.