

9. Wyprowadzić równanie jednowymiarowego przewodzenia ciepła w płycie Równanie jednowymiarowego przewodzenia ciepła w płycie można wyprowadzić rozpatrując bilans energii dla płyty o

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x} + \dot{E}_{gen} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

grubości $(x+\Delta x)$ w krótkim przedziale czasu Δt :

$$\text{Zmianę energii elementu: } \Delta E = E_{t+\Delta t} - E_t = mc(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho c A \Delta x (T_{t+\Delta t} - T_t)$$

$$\text{Ciepło generowane w elemencie } \dot{E}_{gen} = \dot{e}_{gen} V = \dot{e}_{gen} A \Delta x$$

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x} + \dot{e}_{gen} A \Delta x = \rho c A \Delta x \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

Po podstawieniu

$$\frac{1}{A} \frac{\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \dot{e}_{gen} = \rho c \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

Po podzieleniu przez $A \Delta x$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{A} \frac{\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x}}{\Delta x} = - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \dot{Q}_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

Wyznaczając granicę lewej strony równania przy $\Delta x \rightarrow 0$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{e}_{gen} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Dla prawej strony równania przy $\Delta t \rightarrow 0$ otrzymujemy

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dot{e}_{gen} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Traktujemy przewodność cieplną jako stałą:

10. Wyprowadzić równanie jednowymiarowego przewodzenia ciepła w walcu

Równanie przewodzenia ciepła wyprowadzone jest z bilansu energii dla nieskończenie cienkiej powłoki cylindrycznej o grubości Δr . Przyjmijmy długość walca L , gęstość ρ i ciepło właściwe c . Powierzchnia przewodzenia ciepła w tym przypadku to powierzchnia powłoki, która jest funkcją zmiennej r : $A = 2\pi r L$.

$$\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} + \dot{E}_{gen} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

Bilans energii w krótkim przedziale czasu Δt można zapisać w postaci:

$$\text{Zmiana energii elementu: } \Delta E = E_{t+\Delta t} - E_t = mc(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho c A \Delta r (T_{t+\Delta t} - T_t)$$

$$\text{Ciepło generowane w elemencie } \dot{E}_{gen} = \dot{e}_{gen} V = \dot{e}_{gen} A \Delta r$$

$$\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} + \dot{e}_{gen} A \Delta r = \rho c A \Delta r \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

Po podstawieniu wyrażen:

Biorąc pod uwagę, że $A=2\pi r L$, czynnik $2\pi L$ można skrócić. otrzymujemy równanie przewodzenia ciepła

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{e}_{gen} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right) + \dot{e}_{gen} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

przy $\Delta t \rightarrow 0$

Traktujemy przewodność cieplną jako stałą: -----> ^^^

W równaniach stacjonarnej wymiany ciepła zastąpiono pochodną cząstkową, pochodną zwykłą, jest to poprawne, ponieważ temperatura zależy tylko od jednej zmiennej, promienia walca r .

11. Wyprowadzić ogólne równanie przewodzenia ciepła w układzie współrzędnych kartezjańskich w warunkach niestacjonarnych

Bilans energii dla takiego elementu w krótkim

$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_{z+\Delta z} + \dot{E}_{gen} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

przedziale czasu Δt zapisujemy

$$\text{Zmiana energii elementu: } \Delta E = E_{t+\Delta t} - E_t = mc(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z (T_{t+\Delta t} - T_t)$$

$$\text{Ciepło generowane w elemencie: } \dot{E}_{gen} = \dot{e}_{gen} V = \dot{e}_{gen} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{\dot{Q}_y - \dot{Q}_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{\dot{Q}_z - \dot{Q}_{z+\Delta z}}{\Delta z} + \dot{e}_{gen} = \rho c \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

Po podstawieniu:

Korzystając z definicji strumienia ciepła i wyznaczając granicę lewej strony równań przy $\Delta x \rightarrow 0$; $\Delta y \rightarrow 0$; $\Delta z \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x}}{\Delta x} = - \frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{\partial}{\partial x} \dot{Q}_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

$\Delta z \rightarrow 0$:

Dopisz 2 same tylko: $xz \rightarrow x$ na y , $xy \rightarrow x$ na

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Przy $\Delta t \rightarrow 0$ prawa strona równania bilansu energii przyjmuje postać:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{e}_{gen} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

11. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{e}_{gen} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{Brak źr. ciep} \quad \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Stał przew:

13. Wyprowadzić równanie rozkładu temperatury w płycie w warunkach

stacjonarnych Należy zastosować jednowymiarowe równanie przewodzenia ciepła w postaci $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$

Przy warunkach brzegowych $T = T_1$ dla $x = 0$ oraz $T = T_2$ dla $x = L$

Pierwsze całkowanie daje rozwiązanie ogólne $\frac{dT}{dx} = C_1$

Drugie całkowanie prowadzi do rozwiązania ogólnego z dwoma stałymi całkowania $T(x) = C_1 x + C_2$

Stałą całkowania C_2 określa się z warunku brzegowego na ścianie płyty dla $x = 0$ $T(0) = C_1 \cdot 0 + C_2$ skąd $C_2 = T_1$

Z drugiego warunku brzegowego dla $x = L$ otrzymujemy $T(L) = C_1 L + C_2$ skąd $T_2 = C_1 L + T_1$ | $C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L}$

Po podstawieniu stałych do rozwiązania ogólnego otrzymujemy $T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$

14. Wyprowadzić równanie rozkładu temperatury w walcu w warunkach

stacjonarnych Rozkład temperatury w walcu jest symetryczny względem osi walca, należy zastosować współrzędne cylindryczne i rozwiązać jednowymiarowe zagadnienie przewodzenia ciepła $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$

Przy warunkach brzegowych: $T(r_1) = T_1$ oraz $T(r_2) = T_2$

Jednokrotne całkowanie równania przewodzenia ciepła prowadzi do równania różniczkowego $\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r}$

Ponowne całkowanie daje rozwiązanie ogólne: $T(r) = C_1 \ln r + C_2$

Z warunków brzegowych wyzn. stał, całk: $T(r_1) = T_1 \Rightarrow C_1 \ln r_1 + C_2 = T_1$ $T(r_2) = T_2 \Rightarrow C_1 \ln r_2 + C_2 = T_2$

Rozwiązanie tych równań daje stałe: $C_1 = \frac{T_2 - T_1}{\ln(r_2/r_1)}$ $C_2 = T_1 - \frac{T_2 - T_1}{\ln(r_2/r_1)} \ln r_1$

Podst. do rów. przew. ciepła otrzymujemy rozkład temperatury ścianki rury $T(r) = T_1 - \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} (T_2 - T_1)$

16. Zdefiniować temperaturę powierzchni płyty, walca i kuli w układzie stacjonarnym z wewnętrznym źródłem ciepła

Porównując bilans energii dla układu stacjonarnego ze źródłem

ciepła oraz strumień ciepła dla konw. wymiany ciepła: $\dot{Q} = \dot{e}_{gen} V$ [W] $\dot{Q} = \alpha \cdot A_s (T_s - T_\infty)$

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{e}_{gen} V}{\alpha \cdot A_s}$$

Otrzymujemy temperaturę powierzchni ciała:

współczynnik przejmowania ciepła [W/(m²K)] A_s - powierzchnia bryły [m²] \dot{e}_{gen} - ciepło generowane [W/m³] | α -

temperatura powierzchni T_∞ - temperatura płynu w znacznej odległości od powierzchni

Wstawiając do rów. na objętość i powierzchnię podstawowych brył otrzymujemy rozwiązania określające

rozkłady ich temperatury w warunkach stacjonarnych.

płyta o grubości $2L$: $A_s = 2 \cdot A_{ściany}$; $V = 2L \cdot A_{ściany}$ $\rightarrow T_s = T_\infty + \frac{\dot{e}_{gen} L}{\alpha}$

walec o promieniu r_0 : $A_s = 2\pi r_0 L$; $V = \pi r_0^2 L$ $T_s = T_\infty + \frac{\dot{e}_{gen} r_0}{2\alpha}$

kula o promieniu r_0 : $A_s = 4\pi r_0^2$; $V = \frac{4}{3}\pi r_0^3$

17. Wyprowadzić stacjonarny rozkład temperatury w walcu z wewn. źródłem ciepła

$$\lambda \left(\frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{d^2 T}{dr^2} \right) + \dot{e}_{gen} = 0$$

Wyznaczenie rozkładu temperatury jest możliwe z równania różniczkowego

Równanie wymaga określenia dwóch warunków brzegowych, jednym jest temperatura powierzchni pręta T_s

$$\frac{dT(r=0)}{dr} = 0$$

Drugi w. brzegowy wyznaczamy z symetrii rozkładu temperatury względem osi pręta

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = \frac{\dot{e}_{gen}}{\lambda} r$$

Po przekształceniach r. różniczkowe przewodzenia ciepła w pręcie :

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{e}_{gen}}{2\lambda} r$$

17. Ponieważ st. całkowania jest równa zero, można pierwszą całkę podzielić przez r :

$$T(r) = -\frac{\dot{e}_{gen}}{4\lambda} r^2 + C_2 \quad ||| \quad T_s = -\frac{\dot{e}_{gen}}{4\lambda} r_0^2 + C_2 \quad \text{skąd} \quad C_2 = T_s + \frac{\dot{e}_{gen}}{4\lambda} r_0^2$$

Całka równania ma postać:

Z w. brzeg. na pow. b. grzałki dla $r = r_0, T = T_s$ wyz. st. cał $\rightarrow \wedge \wedge \wedge$

$$T(r) = T_s + \frac{\dot{e}_{gen}}{4\lambda} (r_0^2 - r^2)$$

Ostatecznie rozkład temperatury przewodzenia ciepła przyjmuje postać

Przez podstawienie $r = 0$ otrzymujemy maksymalną wartość temperatury w osi pręta.

18. Wyprowadzić rozkład temperatury w płycie o współczynniku przewodzenia ciepła liniowo zależnym od temperatury w warunkach stacjonarnych Wzór na współczynnik przewodzenia ciepła liniowo zależny od temperatury wyprowadzamy ze wzoru na średnią przewodność

$$\lambda_{sr} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} \lambda(T) dT}{T_2 - T_1}$$

Istotne jest zastosowanie średniej całkowitej, a nie przewodności cieplnej

wyznaczonej dla średniej wartości temperatury. W przypadku, gdy możliwe jest zastosowanie liniowej aproksymacji przewodności cieplnej $\lambda(T) = \lambda_0(1 + b \cdot T)$ gdzie λ_0 jest wsp. przewodzenia ciepła przy temperaturze 0°C , a T temperaturą w stopniach C, to średni całkowity współczynnik przewodzenia ciepła

$$\lambda_{sr} = \lambda(T_{sr}) = \lambda_0(1 + b \frac{T_1 + T_2}{2})$$

W takiej sytuacji strumień ciepła: $Q = \lambda_{sr} A \frac{T_1 - T_2}{L}$ Z pr. Fouriera w postaci,

$$Q = - \lambda(T) \cdot A \frac{dT}{dx}$$

Rozdzielając zmienne i całkując w granicach od 0 do x oraz od T_1 do T otrzymujemy całkę $\int_0^x Q dx = - A \int_{T_1}^T \lambda(T) dT = - A \int_{T_1}^T \lambda_0(1 + b \cdot T) dT$

$$Qx = - A \lambda_0 \left[(T - T_1) + \frac{b(T^2 - T_1^2)}{2} \right]$$

Podstawiamy równanie na strumień ciepła $Q \lambda_{sr} \frac{A(T_1 - T_2)}{L} x = - A \lambda_0 \left[(T - T_1) + \frac{b(T^2 - T_1^2)}{2} \right]$

$$A \text{ następnie rozpisujemy } \lambda_{sr} \frac{A(T_1 - T_2)}{L} x = - A \lambda_0 T + A \lambda_0 T_1 - \frac{A \lambda_0 b T^2}{2} + \frac{A \lambda_0 b T_1^2}{2}$$

$$\lambda_{sr} \frac{A(T_1 - T_2)}{L} x + A \lambda_0 T - A \lambda_0 T_1 + \frac{A \lambda_0 b T^2}{2} - \frac{A \lambda_0 b T_1^2}{2} = 0$$

$$\text{Mnożymy całość wyrażenia przez } 2 / (b A \lambda_0) \quad \frac{2 \lambda_{sr} x (T_1 - T_2)}{b \lambda_0 L} + \frac{2T}{b} - \frac{2T_1}{b} + T^2 - T_1^2 = 0$$

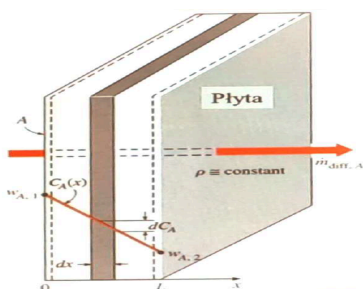
Jest to równanie kwadratowe ze względu na T , po rozw. otrzymujemy rozkład temperatury w płycie o wsp.

$$\text{przew. ciepła liniowo zależnym od temp } T(x) = - \frac{1}{b} \pm \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{2 \lambda_{sr} x}{\lambda_0 b L} (T_1 - T_2)^2 + T_1^2 + \frac{2}{b} T_1}$$

λ_0 - współczynnik przewodzenia ciepła dla 0°C λ_{sr} - średni współczynnik przewodzenia ciepła

L - grubość płyty T_1, T_2 - temperatury powierzchni płyty b - stała, jeśli $b > 0$ to współczynnik przewodzenia ciepła rośnie wraz z temperaturą, jeśli $b < 0$ to współczynnik przewodzenia ciepła maleje wraz z temperaturą

24. Wyprowadzić rozwiązania zagadnienia stacjonarnej dyfuzji masy przez ściankę płaską



Powierzchnie graniczne dla $x = 0$ i $x = L$ należą do ścianki, gdzie stężenie substancji A wynosi odpowiednio $w_{A,1}$ i $w_{A,2}$. Stężenie to nie ulega zmianie w czasie. W takim przypadku występuje jednowymiarowa, stacjonarna dyfuzja masy. Obliczymy gęstość strumienia masy substancji A dyfundującej przez przegrodę. Ponieważ nie występuje zmiana warunków brzegowych w czasie, nie ma źródeł masy w przegrodzie, możemy zastosować prawo zachowania masy substancji A w postaci strumienia masy

$$\dot{m}_{diff,A} = j_A A = \text{constant} \quad \text{kg/s}$$

Prawo dyfuzji Ficka ma postać gęstości strumienia masy

$$j_A = \frac{\dot{m}_{diff,A}}{A} = - \rho D_{AB} \frac{dw_A}{dx} = \text{constant}$$

$$\frac{\dot{m}_{diff,A}}{A} \int_0^L dx = - \int_{w_{A,1}}^{w_{A,2}} \rho D_{AB} dw_A$$

Rozdzielając zmienne i wyp. stałe przed znaki całek otrzymujemy

Jeżeli gęstość przegrody ρ i współczynnik dyfuzji D_{AB} , nie zmieniają się wtedy można łatwo wyznaczyć całki

$$\dot{m}_{diff,A} = \rho D_{AB} A \frac{w_{A,1} - w_{A,2}}{L} = D_{AB} A \frac{\rho_{A,1} - \rho_{A,2}}{L} \quad \text{kg/s}$$

i otrzymujemy

$$\dot{N}_{diff,A} = C D_{AB} A \frac{y_{A,1} - y_{A,2}}{L} = D_{AB} A \frac{C_{A,1} - C_{A,2}}{L} \quad \text{kmol/s}$$

W zapisie molowym równanie przyjmie postać

Strumień masy substancji **A** dyfundującej przez przegrodę płaską jest proporcjonalny do gęstości tej substancji po obu stronach przegrody i odwrotnie proporcjonalny do grubości przegrody.

25. Migracja pary wodnej w budynkach Wilgoć w powietrzu (para wodna) wpływa na trwałość i własności użytkowe budynków. W konsekwencji zagrożenie migracji pary wodnej w materiałach konstrukcyjnych jest istotne. Przykładowo drewno zmienia swoje wymiary wraz z wzrostem wilgotności, dodatkowo wilgotność przyspiesza proces próchnienia, powoduje zmianę barwy i powstawanie grzybów i pleśni. W przypadku metali wilgotność przyspiesza proces korozji powoduje szybsze niszczenie pokryw ochronnych i ozdobnych. Istotny jest wpływ na przewodność cieplną materiałów (wzrost wilgotności powoduje znaczny wzrost przewodności cieplnej). W celu zatrzymania pary wodnej stosuje się:
-bariery pary wodnej (paro-nieprzepuszczalne), są to zwykle grube folie z tworzyw sztucznych i metali -szereg materiałów spowalniających transport pary wodnej. Zaliczamy do nich cienkie folie z tworzyw sztucznych i metali, farby, materiały impregnowane. Materiały te stosuje się w większym stopniu z powodu niższych kosztów niż bariery. W chłodnych budynkach para wodna skrapla się w pobliżu chłodnych powierzchni i pozostaje tam w postaci wody – istotna jest więc izolacja. Dalszy spadek temperatury powoduje zamarznięcie wody i szybkie niszczenie konstrukcji. Ilość wilgoci w powietrzu jest zwykle podawana w postaci wilgotności względnej, ciśnienie parcjale pary wodnej możemy wtedy wyznaczyć ze wzoru: $P_w = \phi P_{sat}$ ϕ - wilgotność względna (zawiera się w przedziale 1% - 100%) P_w - ciśnienie pary wodnej w powietrzu (ciśnienie parcjale) P_{sat} - ciśnienie pary wodnej przy maksymalnym nasyceniu (ciśnienie nasycenia)

$$\dot{m}_w = PA \frac{P_{w,1} - P_{w,2}}{L} = PA \frac{\phi_1 P_{sat,1} - \phi_2 P_{sat,2}}{L} \text{ kg/s}$$

Strumień masy wilgoci wyznaczamy ze wzoru:

Przepuszczalność pary wodnej P () jest cechą materiału i jest podawana w jednostkach [ng/(s m Pa)] gdzie ng = 10^{-12} kg, Pa = 10^5 bar. Należy zauważyć, że para wodna migruje od powierzchni o wyższym ciśnieniu parcjale do powierzchni o niższym ciśnieniu parcjale. Przepuszczalność pary wodnej materiałów konstrukcyjnych jest zwykle odnoszona do ich typowej grubości. Mówimy wtedy o przenikalności.

$$\text{Przenikalność} = \frac{\text{przepuszczalność}}{\text{grubość}} \left[\frac{\text{ng}}{\text{sm}^2 \text{ Pa}} \right] \text{ Prz} = \text{przep/grub} \quad \text{ng/sm}^2 \text{ Pa}$$

26. Omówić zagadnienie niestacjonarnej dyfuzji masy na przykładzie nawęglania powierzchni elementów stalowych

Nawęglaniu poddajemy przedmioty ze stali niskowęglowej w celu wzbogacenia warstwy powierzchniowej w węgiel. Węgiel dyfunduje w głąb materiału i wzbogaca warstwę o grubości kilku milimetrów w węgiel, w rezultacie jest możliwe zahartowanie tej warstwy i osiągnięcie zwiększonej twardości i odporności na ścieranie. Niektóre zagadnienia niestacjonarnej dyfuzji mają rozwiązania analityczne. Wymagane są następujące uproszczenia: -Współczynnik dyfuzji jest stały. To założenie wymaga przyjęcia stałej temperatury w objętości substancji, ponieważ współczynnik dyfuzji D_{AB} jest funkcją temperatury. -W objętości kontrolnej nie występują źródła masy -W chwili początkowej ($t=0$) stężenie substancji **A** jest jednakowe w całej objętości kontrolnej.

Dla jednowymiarowego zagadnienia dyfuzji rozwiązanie ma postać: $\frac{C_A(x,t) - C_{A,i}}{C_{A,s} - C_{A,i}} = \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_{AB}t}}\right)$

$C_{A,i}$ - początkowe stężenie składnika **A** dla $t=0$ $C_{A,s}$ - stężenie składnika **A** na wewnętrznej stronie pow. i S po czasie t W przypadku roztworów rozcieńczonych rozwiązanie można zapisać w postaci gęstości, udziałów

masowych lub molowych substancji: $\frac{C_A(x,t) - C_{A,i}}{C_{A,s} - C_{A,i}} = \frac{\rho_A(x,t) - \rho_{A,i}}{\rho_{A,s} - \rho_{A,i}} = \frac{w_A(x,t) - w_{A,i}}{w_{A,s} - w_{A,i}} = \frac{y_A(x,t) - y_{A,i}}{y_{A,s} - y_{A,i}}$

27. Klasyfikacja mechanizmów transportu masy w płynach będących w ruchu

| Opis | Mechanizmy transportu | Substancje | Gęstość | Prędkość | Wymiana strumienia masy |
|---|-----------------------|--|--|---|--|
| Jednorodna substancja, bez makroskopowego ruchu ośrodka | brak transportu masy | Substancja A Substancja B Mieszanina A+B | $\rho_A = \text{constant}$ $\rho_B = \text{constant}$ $\rho = \rho_A + \rho_B = \text{constant}$ | $V_A = 0$ $V_B = 0$ $V = 0$ | $m_A = 0$ $m_B = 0$ $m = 0$ |
| Jednorodna substancja, podczas makroskopowego ruchu ośrodka | konwekcja | Substancja A Substancja B Mieszanina A+B | $\rho_A = \text{constant}$ $\rho_B = \text{constant}$ $\rho = \rho_A + \rho_B = \text{constant}$ | $V_A = V$ $V_B = V$ $V = V$ | $m_A = \rho_A V_A$ $m_B = \rho_B V_B$ $m = \rho V A = m_A + m_B$ |
| Niejednorodna substancja, brak makroskopowego ruchu ośrodka | dyfuzja | Substancja A Substancja B Mieszanina A+B | $\rho_A \neq \text{constant}$ $\rho_B \neq \text{constant}$ $\rho = \rho_A + \rho_B = \text{constant}$ | $V_A = V_{\text{diff, A}}$ $V_B = V_{\text{diff, B}}$ $V = 0$ | $m_A = \rho_A V_{\text{diff, A}} A$ $m_B = \rho_B V_{\text{diff, B}} A$ $m = \rho V A = 0$ ($m_A = -m_B$) |
| Niejednorodna substancja, makroskopowy ruch ośrodka | dyfuzja i konwekcja | Substancja A Substancja B Mieszanina A+B | $\rho_A \neq \text{constant}$ $\rho_B \neq \text{constant}$ $\rho = \rho_A + \rho_B = \text{constant}$ | $V_A = V + V_{\text{diff, A}}$ $V_B = V + V_{\text{diff, B}}$ $V = V$ | $m_A = \rho_A V_{\text{diff, A}} A$ $m_B = \rho_B V_{\text{diff, B}} A$ $m = \rho V A = m_A + m_B$ |

28. Omówić zagadnienie dyfuzji pary w gazie nieruchomym Jeżeli gaz nad cieczą nie jest nasycony parą cieczy, nastąpi transport par cieczy znad powierzchni w górę naczynia. Wynika to z różnicy ciśnień parcjalnych przy powierzchni ($x=0$) i na wysokości krawędzi naczynia ($x=L$) co możemy zapisać w postaci: $P_{A,0} > P_{A,L}$ W warunkach stacjonarnych transport pary cieczy przez kolumnę wyrażony jest przez

molowy strumień masy, przyjmuje wartość stałą i wynosi: $\bar{J}_A = \dot{N}_A / A$

28 Ponieważ przyjmujemy, że ciśnienie i temperatura gazu są stałe, to stężenie molowe mieszaniny gazów również jest stałe $C = C_A + C_B$. Analogicznie do udziałów molowych możemy zapisać $y_A + y_B = 1$ oraz $y_{B,L} > y_{B,0}$. Oznacza to, że udział molowy gazu musi się zmniejszać w kierunku dna zbiornika.

Założyliśmy jednak, że gaz nie rozpuszcza się w cieczy, co oznacza, że w warunkach stacjonarnych strumień masy gazów przemieszczającego się musi być równy zero. Taka sytuacja jest możliwa tylko wtedy gdy występuje jednocześnie konwekcyjny ruch mieszaniny gazów w górę z prędkością v która dokładnie równoważy dyfuzyjny strumień masy gazu B. Oznacza to, że jeżeli jedna molekula powietrza przemieści się dyfuzyjnie w dół to jedna molekula powietrza przemieści się konwekcyjnie w górę. W rezultacie wydaje się,

$$\bar{j}_B = \frac{\dot{N}_B}{A} = 0$$

że powietrze (gaz B) jest stojące:

Prędkość parowania par cieczy jest określana przez

$$\dot{N}_A = \frac{PD_{AB}}{LRT_u} \ln \frac{P - P_{A,L}}{P - P_{A,0}} \quad \frac{\text{kmol}}{\text{s}}$$

prawo Stefana i wynosi

zmiany udziału molowego pary w funkcji wysokości słupa gazu nad cieczą

Prawo Stefana pozwala również na wyznaczenie

33. Wyprowadzić równanie jednowymiarowego stacjonarnego rozkładu temperatury

w kuli Do wyprowadzenia rozkładu temperatury w kuli będziemy potrzebować równania $\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$

Przy założeniu warunków granicznych $T(r_1) = T_1 \quad T(r_2) = T_2$

Pierwsze całkowanie względem r daje nam wynik, który dzielimy przez $r^2 \quad r^2 \frac{dT}{dr} = C_1 \Rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2}$

Następne całkowanie daje nam w wyniku funkcję temperatury zależną od $r \quad T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$

Stosując warunki brzegowe $T(r_1) = T_1 \Rightarrow -\frac{C_1}{r_1} + C_2 = T_1 \quad T(r_2) = T_2 \Rightarrow -\frac{C_1}{r_2} + C_2 = T_2$

Z których otrzymujemy $C_1 = -\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} (T_1 - T_2) \quad \text{oraz} \quad C_2 = \frac{r_2 T_2 - r_1 T_1}{r_2 - r_1}$

Podstawiając do funkcji temperatury rozkład temp. w kuli $T(r) = \frac{r_1 r_2}{r(r_2 - r_1)} (T_1 - T_2) + \frac{r_2 T_2 - r_1 T_1}{r_2 - r_1}$

15. Zdefiniować bilans ciepła układów stacjonarnych ze źródłem ciepła

W zagadnieniach inżynierskich wymiany ciepła występują procesy zmiany innych form energii na energię cieplną. Jeżeli zamiana ta następuje w części lub całej objętości ciała to mamy do czynienia z generowaniem ciepła. Typowymi przykładami generowania ciepła są urządzenia oporowego nagrzewania prądem elektrycznym, reakcje chemiczne, spalanie paliw, reakcje jądrowe, źródła geotermalne.

Pochłanianie ciepła promieniowania słonecznego przez ciecze i gazy też może być modelowane za pomocą źródła ciepła. Bilans energii dla układu stacjonarnego ze źródłem ciepła ma postać:

$$\dot{Q} = \dot{e}_{gen} V \quad [\text{W}] \quad \dot{Q} - \text{strumień ciepła [W]} \quad e_{gen} - \text{ciepło generowane [W/m}^3] \quad V - \text{objętość bryły [m}^3]$$

Strumień ciepła przejmowanego na powierzchni ciała równy jest prędkości generowania ciepła w objętości ciała. Dlatego, że stacjonarna wymiana ciepła zakłada brak zmiany energii układu w czasie.

19. Opisać podstawy wymiany masy w wyniku dyfuzji Ilość danej substancji przypadającej na elementarną objętość przez nią zajmowaną to stężenie substancji C . Różnica stężeń jest siłą napędową mechanizmu dyfuzji i przebiega zawsze z obszaru o wyższym stężeniu do obszaru o niższym stężeniu.

Dyfuzja jest proporcjonalna do gradientu stężenia, może zachodzić w cieczach, gazach, a także ciałach stałych. Istotnym czynnikiem wpływającym na prędkość dyfuzji jest temperatura, która zwiększa ruchliwość molekuł. Duże znaczenie ma także odległość między molekułami, im większa odległość tym łatwiejszy proces dyfuzji, zatem najszybciej następuje w gazach, a najwolniej w ciałach stałych. Dyfuzję opisuje prawo

$$\dot{m}_{diff} = -D_{AB} A \frac{dC_A}{dx}$$

dyfuzji Ficka:

\dot{m}_{diff} - strumień masy [kg/s] D_{AB} - współczynnik dyfuzji składnika A w mieszaninie AB [m^2/s] C_A - stężenie składnika A w mieszaninie AB A - powierzchnia normalna do kierunku dyfuzji [m^2] Identyczna formuła matematyczna prawa Ficka w porównaniu do prawa Fouriera sprawia, że rozwiązanie zagadnienia dyfuzji można otrzymać w identyczny sposób jak rozwiązanie przewodzenia ciepła.

20. Opisać podobieństwa między transportem ciepła i masy

| | Wymiana Ciepła | Wymiana Masy |
|-----------------------|--------------------|----------------|
| Siła napędowa procesu | Różnica temperatur | Różnica stężeń |

| | | |
|---|---|--|
| Temperaturę możemy uznać za miarę ilości ciepła zgromadzonego w danej objętości. Analogicznie stężenie jest miarą ilości składnika zgromadzonego w danej objętości. Zatem przepływ masy zachodzi w sposób analogiczny do transportu ciepła – w kierunku ujemnej wartości gradientu. | | |
| Mechanizmy transportu | <ul style="list-style-type: none"> - przewodzenie - konwekcja - promieniowanie | <ul style="list-style-type: none"> - dyfuzja (przewodzenie) - konwekcja masy |
| Prawa | Prawo Fouriera przewodzenia ciepła $\dot{Q}_{cond} = -k A \frac{dT}{dx}$ | Prawo Ficka $\dot{m}_{diff} = -D_{AB} A \frac{dC_A}{dx}$ |
| Oba prawa mają taką samą postać matematyczną, zatem z rozwiązania zagadnienia dyfuzji masy możemy otrzymać zagadnienie przewodzenia ciepła | | |
| Źródło Ciepła/Masy | Zjawisko to miało charakter objętościowy i skutkowało wzrostem lub spadkiem temperatury w określonej objętości ośrodka | W wypadku np. reakcji chemicznej jesteśmy w stanie generować składniki substancji w określonej objętości |
| Konwekcja | Ruch płynu powoduje zwiększenie transportu ciepła. Przykładowo gorące powietrze przemieszcza się w dane miejsce i tam wzrasta temperatura. | Makroskopowy ruch ośrodka przyczynia się do zmiany stężeń składników. Przykładowo ruch powietrza przyczynia się istotnie do przenoszenia zanieczyszczeń nawet w odległe rejony od źródła |
| Konwekcyjny warunek brzegowy (Konwekcyjny warunek brzegowy transportu masy definiowany jest w analogiczny sposób do prawa Newtona) | $\dot{Q}_{conv} = \alpha_{conv} A_s (T_s - T_\infty)$ α_{conv} - współczynnik przejmowania ciepła [W/(m²K)] A_s - powierzchnia przejmowania ciepła [m²] T_s - temperatura powierzchni T_∞ - temperatura płynu w znacznej odległości od powierzchni | $\dot{Q}_{conv} = \alpha_{mass} A_s (C_s - C_\infty)$ α_{mass} - współczynnik wymiany masy C_s - stężenie składnika na powierzchni C_∞ - stężenie w znacznej odległości od powierzchni brzegowej |

21. Masowy i molowy opis dyfuzji

Opisu dyfuzji możemy dokonać na podstawie gęstości składników (kg / m³) lub na podstawie ilości substancji (kmol / m³) | gęstość składnika i : $\rho_i = \frac{m_i}{v}$ [kg / m³] gęstość

mieszaniny: $\rho = \frac{m}{v} = \frac{\sum m_i}{v} = \sum \rho_i$ Zatem gęstość mieszaniny jest sumą gęstości składników ją

tworzących. Stężenie masy składników można zapisać w postaci bezwymiarowej, w postaci udziałów

masowych składników. $w_i = \frac{m_i}{m} = \frac{\rho_i}{\rho}$ Stężenie molowe może być wyrażone w postaci bezwymiarowej w

postaci udziałów molowych składników y_i : $y_i = \frac{N_i}{N} = \frac{C_i}{C}$ y_i - udział molowy składnika C - stężenie Udział

molowy składnika może zmieniać się w zakresie od 0 do 1. Suma udziałów molowych składników y_i wynosi zawsze 1. Związek masy m składnika z liczbą molową N jest następujący: $m = N \cdot M$ Gdzie: M jest masą molową składnika, N liczbą kmol substancji. Masa N kmol substancji wynosi $N \cdot M$ kg. Zatem można określić

związek stężenia masowego ze stężeniem molowym: dla składnika i : $C_i = \frac{\rho_i}{M_i}$ oraz dla mieszaniny $c = \frac{\rho}{M}$

Masa molowa mieszaniny może być obliczona ze wzoru: $M = \frac{m}{N} = \frac{\sum N_i M_i}{N} = \sum y_i M_i$ udziały masowe i

molowe związane są ze sobą równaniami: $w_i = \frac{\rho_i}{\rho} = \frac{C_i M_i}{C M} = y_i \frac{M_i}{M}$ Przy niskich ciśnieniach gazy i

mieszaniny gazów można uznać za gazy doskonałe. Całkowite ciśnienie P mieszaniny gazów doskonałych jest równe sumie ciśnień parcyjnych P_i składników $P = \sum P_i$ Ciśnienie parcyjne to ciśnienie jakie by zostało

wytworzone przez składnik i gdyby zajmował on samodzielnie objętość V , zajmowaną przez mieszaninę gazów, przy tej samej temperaturze T . Z równania gazów doskonałych $PV = nR_u T$ (R_u - uniwersalna stała gazowa) Otrzymujemy $\frac{P_i}{P} = \frac{N_i R_u T / V}{N R_u T / V} = \frac{N_i}{N} = y_i$. Zatem udział ciśnienia parcyjnego składnika i w ciśnieniu całkowitym jest taki sam jak udział molowy składnika i w mieszaninie gazów doskonałych.

22. Zdefiniować warunki brzegowe równania transportu masy Równanie dyfuzji masy jest podobne do równania przewodzenia ciepła. Występuje zatem podobieństwo warunków brzegowych.

Pierwszemu warunkowi brzegowemu w postaci zadanej temperatury na powierzchni brzegowej odpowiada zadane stężenie składnika na powierzchni brzegowej.

Drugiemu warunkowi brzegowemu w postaci gęstości strumienia ciepła na powierzchni brzegowej odpowiada warunek brzegowy w postaci gęstości strumienia masy na powierzchni brzegowej.

Szczególnym przypadkiem drugiego warunku brzegowego jest zerowy strumień ciepła na powierzchni izolowanej lub zerowy strumień masy przez przegrodę nieprzepuszczalną. Występują jednak różnice w interpretacji tych warunków brzegowych. Temperatura jest z natury rzeczy uznawana za funkcję ciągłą, Przykładowo, temperatura ściany i powietrza w laminarnej warstwie brzegowej na powierzchni ściany jest jednakowa. Natomiast stężenie substancji po obu stronach powierzchni brzegowej jest zazwyczaj różne, należy zatem podać z której strony zbliżamy się do powierzchni brzegowej. Stężenie wody po obu stronach powierzchni brzegowej ciecz-gaz podajemy w następujący sposób: $y_{H_2O, \text{ciecz}} = y_1$; $y_{H_2O, \text{gaz}} = y_2$

Na podstawie prawa Ficka dla dyfundującej substancji **A** warunek brzegowy w postaci gęstości strumienia

masy na powierzchni brzegowej dla $x=0$ możemy zapisać:

$$-C D_{AB} \frac{dy_A}{dx} \Big|_{x=0} = \bar{j}_{A,0} \quad \text{lub} \quad -\rho D_{AB} \frac{dw_A}{dx} \Big|_{x=0} = j_{A,0}$$

Gdzie $\text{dyfuzyjny strumień masy } j_{A,0} = D_{AB} \frac{d\rho_A}{dx} \text{ kg/(s m}^2\text{)}$ molowy strumień masy $\bar{j}_{A,0} = D_{AB} \frac{dC_A}{dx} \text{ kmol/(s m}^2\text{)}$

Zastosowanie warunku brzegowego w postaci gęstości strumienia masy na powierzchni brzegowej wymaga znajomości stężenia składnika na powierzchni brzegowej. Dane te uzyskujemy z warunku równowagi termodynamicznej składników na powierzchni brzegowej.

23. Zdefiniować pojęcie rozpuszczalności, podać prawo Henry'ego Poprzez rozpuszczalność rozumiemy maksymalną ilość składnika (masa składnika) jaką można rozpuścić w cieczy. Określamy ją z równowagi termodynamicznej na granicy układu. Udział molowy składnika A gazu rozpuszczonego w cieczy jest wprost proporcjonalny do udziału molowego składnika A rozpuszczonego w gazie: $y_{A, \text{gaz}} \propto y_{A, \text{ciecz}}$

ciecz

Dla gazów idealnych prawdziwe jest stwierdzenie: $y_{A, \text{gaz}} = \frac{P_{A, \text{gaz}}}{P}$ Zachodzi zatem równość zwana prawem

Henry'ego: $y_{A, \text{ciecz}} = \frac{P_{A, \text{gaz}}}{H}$ na powierzchni ciecz-gaz | gdzie H to stała Henry'ego, zależna od

temperatury dla danego składu roztworu, a niezależna praktycznie od ciśnienia. –Stała H jest odwrotnie proporcjonalna do stężenia gazu rozpuszczonego w cieczy –Stała H rośnie wraz z temperaturą, oznacza to, że rozpuszczalność gazu w cieczy maleje wraz ze wzrostem temperatury –Stężenie jest proporcjonalne do ciśnienia parcyjnego, zatem ilość gazu w cieczy można zwiększyć poprzez zwiększenie ciśnienia (przykład: pianka w piwie) Prawo Henry'ego dotyczy tylko powierzchni brzegowej, ale może być rozszerzone do całej objętości cieczy po osiągnięciu równowagi termodynamicznej.

29. Narysować schemat hydrodynamicznej warstwy przyściennej i omówić rodzaje przepływu płynu w tej warstwie Hydrodynamiczna warstwa przyścienna wytwarza się na skutek działania sił lepkości w płynie w pobliżu opływanej powierzchni ciała stałego, w tym obszarze prędkość płynu zmienia się od wartości zero na powierzchni płyty do prędkości niezakłóconego przepływu Warstwa laminarna to obszar przepływu płynu, w którym cząsteczki poruszają się wzdłużnie, warstwowo i w uporządkowany sposób. Warstwa ta charakteryzuje się niską lepkością i małym chaosem w ruchu cząsteczek. Warstwa turbulentna to obszar przepływu płynu, gdzie cząsteczki poruszają się chaotycznie, co generuje wiry i nieregularności w strumieniu. Warstwa ta ma zwykle większą lepkość niż warstwa laminarna i cechuje się dynamicznymi zmianami prędkości. Obszar przejściowy to strefa między warstwą laminarną a turbulentną, gdzie dochodzi do stopniowego przekształcania się przepływu. W tym obszarze może występować mieszane zachowanie

płynu, a charakterystyki przepływu mogą ulegać zmianom. Podwarstwa laminarna to obszar przepływu płynu pod warstwą turbulentną, gdzie cząsteczki poruszają się w uporządkowany sposób tak samo jak w zwykłej warstwie laminarnej.

31. Opisać konwekcyjną wymianę ciepła w szczelinie poziomej

W przypadku szczeliny poziomej możliwe są dwie sytuacje: płyta gorąca jest na górze szczeliny i wtedy nie występuje konwekcja. Jest to spowodowane tym, że płyn cieplejszy (lżejszy) jest na górze i nie będzie opadał w dół. W sytuacji gdy płyta zimna jest na górze występuje krążenie płynu w sposób pokazany na rysunku. Tworzą się wtedy dość regularne sześciokątne komórki, tzw. komórki Benarda, w środku których płyn porusza się do góry, a na powierzchniach bocznych do dołu

32. Omówić konwekcyjną wymianę ciepła w szczelinie pionowej

W przypadku szczeliny pionowej, płyn ogrzewany od gorącej płyty będzie unosił się do góry, a płyn omywający zimną płytę będzie opadał na dół. Wynika to z różnicy gęstości między płynem ogrzanym, a chłodnym

12. Zdefiniować warunki brzegowe wymiany ciepła

I rodzaju (tzw. Dirichleta) - określone przez rozkład temperatury na powierzchni ciała w każdej chwili.

$T(0, t) = T_1$ $T(L, t) = T_2$ $T(x, t) = f(t)$ II rodzaju (tzw. Neumanna) - podane przez rozkład gęstości strumienia ciepła na powierzchni ciała w każdej chwili. $\dot{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ lub ogólniej $q = -\lambda \text{grad} T$ III

rodzaju (tzw. Fouriera) - określone poprzez podanie temperatury płynu otaczającego ciało i współczynnika przejmowania ciepła w każdym miejscu powierzchni i w każdej chwili. $-\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \alpha_1 [T_\infty - T(0, t)]$ IV

rodzaju - występuje, gdy przewodzenie ciepła po obydwu stronach powierzchni styku dwóch ciał jest

opisywane przez prawo Fouriera $q_s = -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \alpha_s (T_{s1} - T_{s2})$ Radiacyjny warunek

brzegowy - jest używany wtedy, gdy wymiana ciepła zachodzi wyłącznie lub głównie przez promieniowanie. np. w próżni i przestrzeni kosmicznej (brak płynu w otoczeniu układu nagrzewanego lub chłodzonego) oraz w procesach przemysłowych nagrzewania materiałów w wysokich temperaturach. Radiacyjny warunek

brzegowy jest wyprow. z bilansu energii dla powierzchni brzegowej: $-\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \varepsilon_1 \sigma [T_{sur1}^4 - T(0, t)^4]$

3. Opisać bilans energii układów zamkniętych, układów stacjonarnych oraz bilans energii

powierzchni Układy zamknięte i stacjonarne W systemach zamkniętych masa nie ulega zmianie. W przypadku takich systemów całkowita energia jest równa energii wewnętrznej U . Dotyczy to zwłaszcza układów stacjonarnych, ponieważ w ich przypadku nie występuje zmiana prędkości lub położenia układu. Bilans energii takich układów znacznie się upraszcza. Zamknięty układ stacjonarny: $E_{in} - E_{out} = \Delta U = m \cdot C_v \cdot \Delta T$ Jeżeli w systemie zamkniętym mamy do czynienia tylko z wymianą ciepła (praca nie jest wykonywana na układzie) to bilans upraszcza się do: $Q = m \cdot C_v \cdot \Delta T$ W przypadku gdy mamy do czynienia z przepływem masy przez układ (wymenniki ciepła) wybieramy wyodrębniony obszar który określamy objętością kontrolną V . W systemach stacjonarnych w objętości kontrolnej V energia całkowita nie zmienia się. W takim przypadku energia całkowita dostarczona do układu musi być równa energii opuszczającej układ. Masę przepływającą w jednostce czasu przez granicę systemu (powierzchnię ograniczającą objętość kontrolną) określamy strumieniem masy. Jeśli rozważymy przykładowo przepływ przez przewód, wtedy strumień masy jest proporcjonalny do powierzchni przekroju przewodu A_c , gęstości płynu i prędkości przepływu: Objętość płynu przepływająca w jednostce czasu przez objętość kontrolną nazywamy strumieniem objętości (V - strumień objętości [m^3/s]): W przepływach stacjonarnych strumień masy dopływającej jest równy strumieniowi masy wypływającej z objętości kontrolnej. Jeżeli zaniedbamy zmianę energii kinetycznej i potencjalnej w czasie przepływu przez objętość kontrolną, to bilans energii cieplnej dla przepływów stacjonarnych wynosi:

$$\dot{Q} = \dot{m} c_p \Delta T \quad \dot{m}_{in} = \dot{m}_{out} = \dot{m} \quad \dot{V} = v A_c = \frac{\dot{m}}{\rho} \quad \dot{m} = \rho v A_c$$

Bilans dla powierzchni kontrolnej Rysunek przedstawia przykładowy bilans energii cieplnej dla powierzchni kontrolnej, która jest zewnętrzną ścianą budynku. Powierzchnia kontrolna nie posiada masy, więc nie może

gromadzić energii. Bilans energii zapisujemy jako: $\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 + \dot{Q}_3 \quad \dot{E}_{in} = \dot{E}_{out}$