Automorfizmy algebry macierzy

Marcin Ból

Politechnika Krakowska
ul. Warszawska 24, Kraków

14 maja 2021

Algebra nad ciałem

Definicja

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$. Jeżeli na V określono działanie mnożenia wektorów $* : V \times V \longrightarrow V$ spełniające warunki

- $\forall\, v, w, u \in V \qquad v * (w + u) = v * w + v * u,$
- $\forall\, v, w, u \in V \qquad (w + u) * v = w * v + u * v,$
- $\forall\, v, w \in V,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{F} \qquad \lambda(v * w) = (\lambda v) * w = v * (\lambda w),$

to V nazywamy algebrą nad ciałem $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$-algebrą).

Przykłady algebr nad ciałem

- Ciało liczb zespolonych $\mathbb{C}$ (dowolne ciało),

Przykłady algebr nad ciałem

- Ciało liczb zespolonych $\mathbb{C}$ (dowolne ciało),
- $\mathbb{R}^3$ z iloczynem wektorowym (algebra niełączna nad $\mathbb{R}$),

Przykłady algebr nad ciałem

- Ciało liczb zespolonych $\mathbb{C}$ (dowolne ciało),
- $\mathbb{R}^3$ z iloczynem wektorowym (algebra niełączna nad $\mathbb{R}$),
- $C[0,1]$ z działaniem mnożenia funkcji,

Przykłady algebr nad ciałem

- Ciało liczb zespolonych $\mathbb{C}$ (dowolne ciało),
- $\mathbb{R}^3$ z iloczynem wektorowym (algebra niełączna nad $\mathbb{R}$),
- $C[0, 1]$ z działaniem mnożenia funkcji,
- Algebra $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ wszystkich macierzy kwadratowych stopnia n o współczynnikach z ciała $\mathbb{F}$.

Homomorfizmy algebr

Definicja

Niech A, B będą $\mathbb{F}$-algebrami. Odwzorowanie $\phi : A \longrightarrow B$ nazywamy homomofizmem $\mathbb{F}$-algebr, jeżeli ϕ jest multiplikatywnym odwzorowaniem liniowym, czyli odwzorowaniem liniowym spełniającym warunek $\phi(x * y) = \phi(x) * \phi(y)$, dla dowolnych $x, y \in A$.

Homomorfizmy algebr

Definicja

Niech A, B będą $\mathbb{F}$-algebrami. Odwzorowanie $\phi : A \longrightarrow B$ nazywamy homomofizmem $\mathbb{F}$-algebr, jeżeli ϕ jest multiplikatywnym odwzorowaniem liniowym, czyli odwzorowaniem liniowym spełniającym warunek $\phi(x * y) = \phi(x) * \phi(y)$, dla dowolnych $x, y \in A$.

Definicja

Endomorfizmem $\mathbb{F}$-algebry nazywamy jej homomorfizm w siebie.

Homomorfizmy algebr

Definicja

Niech A, B będą $\mathbb{F}$-algebrami. Odwzorowanie $\phi : A \longrightarrow B$ nazywamy homomofizmem $\mathbb{F}$-algebr, jeżeli ϕ jest multiplikatywnym odwzorowaniem liniowym, czyli odwzorowaniem liniowym spełniającym warunek $\phi(x * y) = \phi(x) * \phi(y)$, dla dowolnych $x, y \in A$.

Definicja

Endomorfizmem $\mathbb{F}$-algebry nazywamy jej homomorfizm w siebie.
Automofizmem $\mathbb{F}$-algebry nazywamy jej bijektywny endomorfizm.

Twierdzenie strukturalne dla automorfizmów algebry macierzy

Twiedzenie

Niech $\mathbb{F}$ będzie dowolnym ciałem oraz $\phi : \mathrm{M_n}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ bijektywnym odwzorowaniem liniowym spełniającym warunek

$$\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$$

dla dowolnych $A, B \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$.

Twierdzenie strukturalne dla automorfizmów algebry macierzy

Twiedzenie

Niech $\mathbb{F}$ będzie dowolnym ciałem oraz $\phi : \mathrm{M_n}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ bijektywnym odwzorowaniem liniowym spełniającym warunek

$$\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$$

dla dowolnych $A, B \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$.
Wtedy istnieje macierz odwracalna $T \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ taka, że

$$\phi(A) = TAT^{-1}$$

dla każdego $A \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$.

Twierdzenie strukturalne dla automorfizmów algebry macierzy

Twiedzenie

Niech $\mathbb{F}$ będzie dowolnym ciałem oraz $\phi : \mathrm{M_n}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ bijektywnym odwzorowaniem liniowym spełniającym warunek

$$\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$$

dla dowolnych $A, B \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$.
Wtedy istnieje macierz odwracalna $T \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ taka, że

$$\phi(A) = TAT^{-1}$$

dla każdego $A \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$.

Innymi słowy, każdy automorfizm algebry macierzy jest jej automorfizmem wewnętrznym.

Poważna algebra...

- To twierdzenie wynika wprost z twierdzenia Skolema-Noether, jednak nie trzeba stosować tak zaawansowanej algebry, aby je udowodnić.

Poważna algebra...

- To twierdzenie wynika wprost z twierdzenia Skolema-Noether, jednak nie trzeba stosować tak zaawansowanej algebry, aby je udowodnić.
- My udowodnimy je używając mniej skomplikowanych metod.

Poważna algebra...

- To twierdzenie wynika wprost z twierdzenia Skolema-Noether, jednak nie trzeba stosować tak zaawansowanej algebry, aby je udowodnić.
- My udowodnimy je używając mniej skomplikowanych metod.
- Ale najpierw przypomnijmy sobie pewne twierdzenie z algebry liniowej, którego będziemy używać w dowodzie.

Szybkie przypomnienie

Twierdzenie o odwzorowaniu liniowym zadanym na bazie

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi, B bazą przestrzeni V, a $\bar{f} : B \longrightarrow W$ dowolnym odwzorowaniem.

Szybkie przypomnienie

Twierdzenie o odwzorowaniu liniowym zadanym na bazie

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi, B bazą przestrzeni V, a $\bar{f} : B \longrightarrow W$ dowolnym odwzorowaniem.

Istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $f : V \longrightarrow W$ takie, że $\bar{f} = f|_B$

Uwaga

Jeżeli wektory $u, y \in \mathbb{F}^n$, są niezerowe, to macierz

$$uy^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 y_1 & \dots & u_1 y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n y_1 & \dots & u_n y_n \end{bmatrix} \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$$

jest macierzą niezerową. (Jeżeli $u_i \neq 0, y_j \neq 0$, to $[uy^T]_{ij} \neq 0$).

Uwaga

Jeżeli wektory $u, y \in \mathbb{F}^n$, są niezerowe, to macierz

$$uy^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 y_1 & \dots & u_1 y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n y_1 & \dots & u_n y_n \end{bmatrix} \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$$

jest macierzą niezerową. (Jeżeli $u_i \neq 0, y_j \neq 0$, to $[uy^T]_{ij} \neq 0$).

Wspomniane wcześniej $\phi : \mathrm{M_n}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ jest automorfizmem, a więc w szczególności injekcją, czyli $\phi(uy^T) \neq \mathbf{0}_{nxn}$, gdyż jądro ϕ jest trywialne.

Dowód

Niech ϕ będzie dowolnym automorfizmem algebry macierzy $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$. Wybieramy i ustalamy dwa niezerowe wektory $u, y \in \mathbb{F}^n$. Ponieważ ϕ jest injekcją, możemy wybrać (i wybieramy) $z \in \mathbb{F}^n$ taki, że $\phi(uy^T)z \neq \mathbf{0}$.

Dowód

Niech ϕ będzie dowolnym automorfizmem algebry macierzy $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$. Wybieramy i ustalamy dwa niezerowe wektory $u, y \in \mathbb{F}^n$. Ponieważ ϕ jest injekcją, możemy wybrać (i wybieramy) $z \in \mathbb{F}^n$ taki, że $\phi(uy^T)z \neq \mathbf{0}$.

Definiujemy odwzorowanie $T : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ wzorem

$$Tx = \phi(xy^T)z, \qquad x \in \mathbb{F}^n.$$

Dowód

Niech ϕ będzie dowolnym automorfizmem algebry macierzy $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$. Wybieramy i ustalamy dwa niezerowe wektory $u, y \in \mathbb{F}^n$. Ponieważ ϕ jest injekcją, możemy wybrać (i wybieramy) $z \in \mathbb{F}^n$ taki, że $\phi(uy^T)z \neq \mathbf{0}$.

Definiujemy odwzorowanie $T : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ wzorem

$$Tx = \phi(xy^T)z, \qquad x \in \mathbb{F}^n.$$

Liniowość odwzorowania T wynika z liniowości ϕ.

Przypomnienie:

$$T : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n, \quad Tx = \phi(xy^T)z, \quad y, z \in \mathbb{F}^n, \text{ust.}$$

Dowód

Rzeczywiście,

$$T(\lambda x) = \phi((\lambda x)y^T)z = \phi(\lambda(xy^T))z = \lambda\phi(xy^T)z = \lambda T(x)$$

Przypomnienie:

$$T : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n, \quad Tx = \phi(xy^T)z, \quad y, z \in \mathbb{F}^n, \text{ust.}$$

Dowód

Rzeczywiście,

$$T(\lambda x) = \phi((\lambda x)y^T)z = \phi(\lambda(xy^T))z = \lambda\phi(xy^T)z = \lambda T(x)$$

oraz

$$T(x_1 + x_2) = \phi((x_1 + x_2)y^T)z = \phi(x_1y^T + x_2y^T)z =$$

$$= (\phi(x_1y^T) + \phi(x_2y^T))z = \phi(x_1y^T)z + \phi(x_2y^T)z = Tx_1 + Tx_2.$$

Dowód

Ponadto, T nie jest odwzorowaniem zerowym, gdyż $Tu = \phi(uy^T)z \neq \mathbf{0}$.

Dowód

Ponadto, T nie jest odwzorowaniem zerowym, gdyż $Tu = \phi(uy^T)z \neq \mathbf{0}$.

Dla dowolnej macierzy $A \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ oraz $x \in \mathbb{F}^n$ mamy

$$TAx = \phi((Ax)y^T)z = \phi(A \cdot xy^T)z = \phi(A)\phi(xy^T)z = \phi(A)Tx$$

a zatem

$$TA = \phi(A)T.$$

Dowód

Niech w będzie dowolnym wektorem z $\mathbb{F}^n$. Ponieważ $Tu \neq \mathbf{0}$ oraz ϕ jest surjekcją, możemy znaleźć $B \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ takie, że

$$\phi(B)Tu = w = TBu.$$

Dowód

Niech w będzie dowolnym wektorem z $\mathbb{F}^n$. Ponieważ $Tu \neq \mathbf{0}$ oraz ϕ jest surjekcją, możemy znaleźć $B \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ takie, że

$$\phi(B)Tu = w = TBu.$$

Dzieje się tak dzięki twierdzeniu o odwzorowaniu liniowym zadanym na bazie: Tu jest elementem pewnej bazy przestrzeni $\mathbb{F}^n$ (tw. o uzupełnieniu do bazy).

Dowód

Niech w będzie dowolnym wektorem z $\mathbb{F}^n$. Ponieważ $Tu \neq \mathbf{0}$ oraz ϕ jest surjekcją, możemy znaleźć $B \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ takie, że

$$\phi(B)Tu = w = TBu.$$

Dzieje się tak dzięki twierdzeniu o odwzorowaniu liniowym zadanym na bazie: Tu jest elementem pewnej bazy przestrzeni $\mathbb{F}^n$ (tw. o uzupełnieniu do bazy).

Istnieje wtedy takie odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$, że $f(Tu) = w$. Teraz wystarczy przyjąć $\phi(B) = [f]$, gdzie $[f]$ jest macierzą odwzorowania f w bazie kanonicznej.

Dowód

Niech w będzie dowolnym wektorem z $\mathbb{F}^n$. Ponieważ $Tu \neq \mathbf{0}$ oraz ϕ jest surjekcją, możemy znaleźć $B \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ takie, że

$$\phi(B)Tu = w = TBu.$$

Dzieje się tak dzięki twierdzeniu o odwzorowaniu liniowym zadanym na bazie: Tu jest elementem pewnej bazy przestrzeni $\mathbb{F}^n$ (tw. o uzupełnieniu do bazy).

Istnieje wtedy takie odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$, że $f(Tu) = w$. Teraz wystarczy przyjąć $\phi(B) = [f]$, gdzie $[f]$ jest macierzą odwzorowania f w bazie kanonicznej. Mamy zatem

$$\forall\, w \in \mathbb{F}^n\, \exists\, B \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F}) : \quad w = TBu,$$

czyli T jest surjekcją.

Dowód

Przypomnijmy, że $T : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$. Ponieważ surjektywność, injektywność i bijektywność są równoważne dla odwzorowań liniowych między przestrzeniami tego samego, skończonego wymiaru, to T jest bijekcją, a zatem T jest odwracalne.

Dowód

Przypomnijmy, że $T : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$. Ponieważ surjektywność, injektywność i bijektywność są równoważne dla odwzorowań liniowych między przestrzeniami tego samego, skończonego wymiaru, to T jest bijekcją, a zatem T jest odwracalne. Mamy zatem

$$TA = \phi(A)T \iff \phi(A) = TAT^{-1},$$

co kończy dowód.

Uogólnienie

Twierdzenie to da się uogólnić, rozważając $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ tylko jako pierścień. Od teraz przedmiotem naszego zainteresowania będą automorfizmy pierścienia $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$, czyli bijekcje postaci

$$\phi : \mathrm{M_n}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$$

takie, że

$$\phi(A+B) = \phi(A) + \phi(B)$$

oraz

$$\phi(AB) = \phi(A)\phi(B),$$

dla $A, B \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$

Przypomnijmy, że centrum pierścienia macierzy jest równe zbiorowi macierzy skalarnych.

$$Z(\mathrm{M_n}(\mathbb{F})) = \{A \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F}) \,|\, AB = BA \quad \text{dla każdego} \;\; B \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})\} =$$

$$= \{\lambda \mathbb{I} \,|\, \lambda \in \mathbb{F}\} \cong \mathbb{F}.$$

Ponieważ ϕ jest automorfizmem, przeprowadza ono centrum $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ na siebie.

Przypomnijmy, że centrum pierścienia macierzy jest równe zbiorowi macierzy skalarnych.

$$Z(\mathrm{M_n}(\mathbb{F})) = \{A \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F}) \,|\, AB = BA \quad \text{dla każdego} \;\; B \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})\} =$$

$$= \{\lambda \mathbb{I} \,|\, \lambda \in \mathbb{F}\} \cong \mathbb{F}.$$

Ponieważ ϕ jest automorfizmem, przeprowadza ono centrum $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ na siebie. Stąd mamy

$$\phi(\lambda\mathbb{I}) = f(\lambda)\mathbb{I}$$

dla pewnej funkcji $f : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$.

Przypomnijmy, że centrum pierścienia macierzy jest równe zbiorowi macierzy skalarnych.

$$Z(\mathrm{M_n}(\mathbb{F})) = \{A \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F}) \,|\, AB = BA \quad \text{dla każdego} \quad B \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})\} =$$

$$= \{\lambda\,\mathbb{I} \,|\, \lambda \in \mathbb{F}\} \cong \mathbb{F}.$$

Ponieważ ϕ jest automorfizmem, przeprowadza ono centrum $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ na siebie. Stąd mamy

$$\phi(\lambda\mathbb{I}) = f(\lambda)\mathbb{I}$$

dla pewnej funkcji $f : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$.

Funkcja f jest automorfizmem ciała $\mathbb{F}$, ponieważ

$$f = \phi|_{Z(\mathrm{M_n}(\mathbb{F}))}.$$

Dla dowolnej macierzy A, oznaczmy przez $A_{f^{-1}}$ macierz otrzymaną przez zastosowanie automorfizmu f^{-1} po współrzędnych, czyli

$$A_{f^{-1}} = [a_{ij}]_{f^{-1}} = [f^{-1}(a_{ij})].$$

Dla dowolnej macierzy A, oznaczmy przez $A_{f^{-1}}$ macierz otrzymaną przez zastosowanie automorfizmu f^{-1} po współrzędnych, czyli

$$A_{f^{-1}} = [a_{ij}]_{f^{-1}} = [f^{-1}(a_{ij})].$$

Odwzorowanie $A \longmapsto A_{f^{-1}}$ jest automorfizmem pierścienia $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ (wynika to z własności f).

Dla dowolnej macierzy A, oznaczmy przez $A_{f^{-1}}$ macierz otrzymaną przez zastosowanie automorfizmu f^{-1} po współrzędnych, czyli

$$A_{f^{-1}} = [a_{ij}]_{f^{-1}} = [f^{-1}(a_{ij})].$$

Odwzorowanie $A \longmapsto A_{f^{-1}}$ jest automorfizmem pierścienia $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ (wynika to z własności f). Odwzorowanie

$$\psi : \mathrm{M_n}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$$

zdefiniowane wzorem

$$\psi(A) = \phi(A_{f^{-1}})$$

również jest automorfizmem pierścienia $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ (jako złożenie automorfizmów). Co więcej, jest to odworowanie liniowe.

$$\psi(A) = \phi(A_{f^{-1}})$$

Rzeczywiście,

$$\psi(\lambda A) = \phi([\lambda A]_{f^{-1}}) = \phi([f^{-1}(\lambda a_{ij})]) =$$

$$= \phi([f^{-1}(\lambda) f^{-1}(a_{ij})]) = \phi(f^{-1}(\lambda)\, \mathbb{I}\, A_{f^{-1}}) =$$

$$= \phi(f^{-1}(\lambda)\, \mathbb{I})\, \phi(A_{f^{-1}}) = \lambda \phi(A_{f^{-1}}) = \lambda \psi(A).$$

$$\psi(A) = \phi(A_{f^{-1}})$$

Rzeczywiście,

$$\psi(\lambda A) = \phi([\lambda A]_{f^{-1}}) = \phi([f^{-1}(\lambda a_{ij})]) =$$

$$= \phi([f^{-1}(\lambda) f^{-1}(a_{ij})]) = \phi(f^{-1}(\lambda)\,\mathbb{I}\,A_{f^{-1}}) =$$

$$= \phi(f^{-1}(\lambda)\,\mathbb{I})\,\phi(A_{f^{-1}}) = \lambda\phi(A_{f^{-1}}) = \lambda\psi(A).$$

A zatem ψ jest multiplikatywnym odwzorowaniem liniowym, do którego możemy zastosować wcześniej udowodnione twierdzenie.

Zauważmy dwie proste rzeczy, których za chwilę użyjemy.

$$A = A_{id}$$
$$(A_f)_g = A_{g \circ f}$$

Zauważmy dwie proste rzeczy, których za chwilę użyjemy.

$A = A_{id}$
$(A_f)_g = A_{g \circ f}$

Teraz stosujemy nasze twierdzenie do odwzorowania ψ. Otrzymujemy w ten sposób

$$\psi(A) = TAT^{-1}$$

$$\phi(A_{f^{-1}}) = TAT^{-1}$$

Zauważmy dwie proste rzeczy, których za chwilę użyjemy.

$A = A_{id}$
$(A_f)_g = A_{g \circ f}$

Teraz stosujemy nasze twierdzenie do odwzorowania ψ. Otrzymujemy w ten sposób

$$\psi(A) = TAT^{-1}$$

$$\phi(A_{f^{-1}}) = TAT^{-1}$$

Stąd mamy

$$\phi(A) = \phi(\,(A_f)_{f^{-1}}) = \psi(A_f) = TA_f T^{-1}$$

Udowodniliśmy w ten sposób następujący wniosek.

Twierdzenie strukturalne dla automorfizmów pierścienia macierzy

Wniosek

Niech $\mathbb{F}$ będzie dowolnym ciałem oraz $\phi : \mathrm{M_n}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ addytywną bijekcją spełniającą warunek $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$, dla $A, B \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$. Wtedy istnieje automorfizm f ciała $\mathbb{F}$ i macierz odwracalna $T \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ takie, że

$$\phi(A) = TA_f T^{-1}$$

dla każdego $A \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$.

Jeszcze jedno uogólnienie

Niech $f : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ będzie automorfizmem ciała $\mathbb{F}$. Odwzorowanie $A \longmapsto A_f$ będziemy nazywać automorfizmem pierścienia $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ indukowanym przez f.

Jeszcze jedno uogólnienie

Niech $f : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ będzie automorfizmem ciała $\mathbb{F}$. Odwzorowanie $A \longmapsto A_f$ będziemy nazywać automorfizmem pierścienia $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ indukowanym przez f.

Z naszego twierdzenia o automorfizmach algebry macierzy wynika jeszcze jeden prosty wniosek dla antyautomorfizmów algebry $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$, czyli bijektywnych odwzorowań liniowych

$$\phi : \mathrm{M_n}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$$

spełniających warunek

$$\phi(AB) = \phi(B)\phi(A).$$

Jeszcze jedno uogólnienie

Niech $f : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ będzie automorfizmem ciała $\mathbb{F}$. Odwzorowanie $A \longmapsto A_f$ będziemy nazywać automorfizmem pierścienia $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ indukowanym przez f.

Z naszego twierdzenia o automorfizmach algebry macierzy wynika jeszcze jeden prosty wniosek dla antyautomorfizmów algebry $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$, czyli bijektywnych odwzorowań liniowych

$$\phi : \mathrm{M_n}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$$

spełniających warunek

$$\phi(AB) = \phi(B)\phi(A).$$

Przykładem antyautomorfizmu jest odwzorowanie $A \overset{t}{\longmapsto} A^T$.

Co więcej, jeżeli złożymy dowolny antyautomorfizm $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ z transpozycją, otrzymujemy automorfizm $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$. Rzeczywiście, $(\phi \circ t)(AB) = \phi(B^T A^T) = \phi(A^T)\phi(B^T) = (\phi \circ t)(A)(\phi \circ t)(B)$.

Co więcej, jeżeli złożymy dowolny antyautomorfizm $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ z transpozycją, otrzymujemy automorfizm $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$. Rzeczywiście,

$$(\phi \circ t)(AB) = \phi(B^T A^T) = \phi(A^T)\phi(B^T) = (\phi \circ t)(A)(\phi \circ t)(B).$$

Do odwzorowania $\phi \circ t$ możemy teraz zastosować twierdzenie strukturalne dla automorfizmów algebry macierzy, otrzymując następujący wniosek.

Co więcej, jeżeli złożymy dowolny antyautomorfizm $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ z transpozycją, otrzymujemy automorfizm $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$. Rzeczywiście,

$$(\phi\circ t)(AB) = \phi(B^TA^T) = \phi(A^T)\phi(B^T) = (\phi\circ t)(A)(\phi\circ t)(B).$$

Do odwzorowania $\phi \circ t$ możemy teraz zastosować twierdzenie strukturalne dla automorfizmów algebry macierzy, otrzymując następujący wniosek.

Wniosek

Niech $\mathbb{F}$ będzie dowolnym ciałem oraz $\phi : \mathrm{M_n}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ będzie bijektywnym odwzorowaniem liniowym spełniającym warunek $\phi(AB) = \phi(B)\phi(A)$, $A, B \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$. Wtedy istnieje nieosobliwa macierz $T \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ taka, że

$$\phi(A) = TA^TT^{-1}$$

dla każdego $A \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$.

Na koniec pokażemy, dlaczego nasze twierdzenie wynika z twierdzenia Skolema-Noether.

Na koniec pokażemy, dlaczego nasze twierdzenie wynika z twierdzenia Skolema-Noether.

Definicja

Niech A będzie $\mathbb{F}$-algebrą. Ideałem obustronnym algebry A nazywamy taką podprzestrzeń liniową B tej przestrzeni, że

$$\forall x \in A \forall y \in B \quad x * y \in B \quad \text{oraz} \quad y * x \in B$$

Na koniec pokażemy, dlaczego nasze twierdzenie wynika z twierdzenia Skolema-Noether.

Definicja

Niech A będzie $\mathbb{F}$-algebrą. Ideałem obustronnym algebry A nazywamy taką podprzestrzeń liniową B tej przestrzeni, że

$$\forall x \in A \forall y \in B \quad x * y \in B \quad \text{oraz} \quad y * x \in B$$

Definicja

Łączną $\mathbb{F}$-algebrę A z jedynką nazywamy centralną algebrą prostą, jeżeli A nie posiada nietrywialnych ideałów obustronnych oraz $Z(A) = \mathbb{F}$.

Twierdzenie

Algebra macierzy $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{F})$ jest centralną algebrą prostą.

Twierdzenie

Algebra macierzy $\mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ jest centralną algebrą prostą.

Twierdzenie Skolema-Noether

Niech B będzie centralną algebrą prostą skończonego wymiaru nad ciałem $\mathbb{F}$ oraz niech A będzie $\mathbb{F}$-algebrą prostą. Wtedy dla dowolnych homomorfizmów $\mathbb{F}$-algebr

$$f, g : A \longrightarrow B$$

istnieje element odwracalny $b \in B$ taki, że dla każdego $a \in A$

$$g(a) = b * f(a) * b^{-1}.$$

W szczególności każdy automorfizm centralnej algebry prostej jest automorfizmem wewnętrznym.

Przygotowując tę prezentację opierałem się na pracy P. Šemrl, *Maps on matrix spaces*, Linear Algebra Appl. 413: 364-393 (2006).

Inny elementarny dowód twierdzenia Skolema-Noether dla algebry macierzy można znaleźć w pracy Jeno Szigettiego oraz Leona van Wyka *A Constructive Elementary Proof of the Skolem-Noether Theorem for Matrix Algebras*.

Bardzo dziękuję doktorowi Marcinowi Skrzyńskiemu za pomoc w tworzeniu tej prezentacji.