Uogólnione twierdzenie Engela-Jacobsona i kryterium śladowe Radjaviego

Marcin Ból

Politechnika Krakowska
ul. Warszawska 24, Kraków

12 maja 2022

Kilka definicji

Niech $V = V_{\mathbb{F}}$ będzie przestrzenią wektorową, $\dim(V) < \infty$.

Definicja

Operator liniowy $A \in \mathrm{End}(V)$ nazywamy triangularyzowalnym, jeśli istnieje taka baza $\mathcal{B}$ tej przestrzeni, że macierz operatora A w bazie $\mathcal{B}$ jest macierzą górnotrójkątną.

Kilka definicji

Niech $V = V_{\mathbb{F}}$ będzie przestrzenią wektorową, $\dim(V) < \infty$.

Definicja

Operator liniowy $A \in \mathrm{End}(V)$ nazywamy triangularyzowalnym, jeśli istnieje taka baza $\mathcal{B}$ tej przestrzeni, że macierz operatora A w bazie $\mathcal{B}$ jest macierzą górnotrójkątną.

Definicja

Zbiór operatorów liniowych $\mathcal{L} \subset \mathrm{End}(V)$ nazywamy (równocześnie) triangularyzowalnym, jeśli macierze w bazie $\mathcal{B}$ wszystkich operatorów ze zbioru $\mathcal{L}$ są górnotrójkątne.

Kilka definicji

Niech $V = V_{\mathbb{F}}$ będzie przestrzenią wektorową, $\dim(V) < \infty$.

Definicja

Operator liniowy $A \in \mathrm{End}(V)$ nazywamy triangularyzowalnym, jeśli istnieje taka baza $\mathcal{B}$ tej przestrzeni, że macierz operatora A w bazie $\mathcal{B}$ jest macierzą górnotrójkątną.

Definicja

Zbiór operatorów liniowych $\mathcal{L} \subset \mathrm{End}(V)$ nazywamy (równocześnie) triangularyzowalnym, jeśli macierze w bazie $\mathcal{B}$ wszystkich operatorów ze zbioru $\mathcal{L}$ są górnotrójkątne.

Definicja

Operator $A \in \mathrm{End}(V)$ nazywamy nilpotentnym, jeśli istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $A^n = 0$.

Twierdzenie Engela-Jacobsona

Twierdzenie Engela

Niech $\mathcal{L}$ będzie podalgebrą Liego w $\mathrm{End}(V)$ składającą się z operatorów nilpotentnych. Wtedy $\mathcal{L}$ jest triangularyzowalna.

Twierdzenie Engela-Jacobsona

Twierdzenie Engela

Niech $\mathcal{L}$ będzie podalgebrą Liego w $\mathrm{End}(V)$ składającą się z operatorów nilpotentnych. Wtedy $\mathcal{L}$ jest triangularyzowalna.

Twierdzenie Jacobsona

Niech $\mathcal{N} \subset \mathrm{End}(V)$ będzie zbiorem operatorów nilpotentnych. Jeśli dla każdej pary $A, B \in \mathcal{N}$ istnieje takie $c \in \mathbb{F}$, że $AB - cBA \in \mathcal{N}$, to $\mathcal{N}$ jest triangularyzowalny.

Twierdzenie Radjaviego

Twierdzenie Jacobsona

Niech $\mathcal{N} \subset \operatorname{End}(V)$ będzie zbiorem operatorów nilpotentnych. Jeśli dla każdej pary $A, B \in \mathcal{N}$ istnieje takie $c \in \mathbb{F}$, że $AB - cBA \in \mathcal{N}$, to $\mathcal{N}$ jest triangularyzowalny.

Twierdzenie Radjaviego

Niech $\mathcal{N} \subset \operatorname{End}(V)$ będzie zbiorem operatorów nilpotentnych. Jeśli dla każdej pary $A, B \in \mathcal{N}$ istnieje wielomian $p \in \mathbb{F}\langle x, y\rangle$, taki, że

$$AB - p(A, B)A \in \mathcal{N},$$

to $\mathcal{N}$ jest triangularyzowalny.

Dowód twierdzenia Radjaviego

Przeprowadzimy indukcję ze względu na wymiar przestrzeni V. Twierdzenie jest trywialnie prawdziwe dla $n = 1$ ($\mathcal{N} = \{0\}$). Załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla przestrzeni o wymiarze mniejszym lub równym n, a $\dim(V) = n + 1$.

Dowód twierdzenia Radjaviego

Przeprowadzimy indukcję ze względu na wymiar przestrzeni V. Twierdzenie jest trywialnie prawdziwe dla $n = 1$ ($\mathcal{N} = \{0\}$). Załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla przestrzeni o wymiarze mniejszym lub równym n, a $\dim(V) = n + 1$.

Dla $S \subseteq \mathcal{N}$ połóżmy $\mathrm{Ker}(S) = \bigcap_{A \in S} \mathrm{Ker}(A)$.

Dowód twierdzenia Radjaviego

Przeprowadzimy indukcję ze względu na wymiar przestrzeni V. Twierdzenie jest trywialnie prawdziwe dla $n = 1$ ($\mathcal{N} = \{0\}$). Załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla przestrzeni o wymiarze mniejszym lub równym n, a $\dim(V) = n + 1$.

Dla $S \subseteq \mathcal{N}$ połóżmy $\operatorname{Ker}(S) = \bigcap_{A \in S} \operatorname{Ker}(A)$.

Rozważmy następnie zbiór $\{\, \operatorname{Ker}(S) \mid S \subseteq \mathcal{N} \,\}$. Wybieramy element $\mathcal{K}$ tego zbioru taki, że $0 < \dim(\mathcal{K}) \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(S))$ dla każdego $S \subseteq \mathcal{N}$.

Dowód twierdzenia Radjaviego

Przeprowadzimy indukcję ze względu na wymiar przestrzeni V. Twierdzenie jest trywialnie prawdziwe dla $n = 1$ ($\mathcal{N} = \{0\}$). Załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla przestrzeni o wymiarze mniejszym lub równym n, a $\dim(V) = n + 1$.

Dla $S \subseteq \mathcal{N}$ połóżmy $\mathrm{Ker}(S) = \bigcap\limits_{A \in S} \mathrm{Ker}(A)$.

Rozważmy następnie zbiór $\{\, \mathrm{Ker}(S) \,|\, S \subseteq \mathcal{N} \,\}$. Wybieramy element $\mathcal{K}$ tego zbioru taki, że $0 < \dim(\mathcal{K}) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(S))$ dla każdego $S \subseteq \mathcal{N}$.

Kolejno rozważmy zbiór $\{\, S \subseteq \mathcal{N} \,|\, \mathrm{Ker}(S) = \mathcal{K} \,\}$. Wybieramy następnie element maksymalny tego zbioru - oznaczmy go $\mathcal{N}_0$. (Można pokazać, że taki element istnieje)

Dowód twierdzenia Radjaviego

Dla $A \in \mathcal{N}_0$ definiujemy odwzorowanie

$$\overline{A} : V/\mathcal{K} \ni v + \mathcal{K} \longmapsto A(v) + \mathcal{K} \in V/\mathcal{K}.$$

Dowód twierdzenia Radjaviego

Dla $A \in \mathcal{N}_0$ definiujemy odwzorowanie

$$\overline{A} : V/\mathcal{K} \ni v + \mathcal{K} \longmapsto A(v) + \mathcal{K} \in V/\mathcal{K}.$$

Zauważmy, że nilpotentność odwzorowania A pociąga za sobą nilpotentność odwzorowania $\overline{A}$, gdyż jeśli $A^n = 0$, to

$$\overline{A}^n(v + \mathcal{K}) = A^n(v) + \mathcal{K} = 0 + \mathcal{K}.$$

Dowód twierdzenia Radjaviego

Dla $A \in \mathcal{N}_0$ definiujemy odwzorowanie

$$\overline{A} : V/\mathcal{K} \ni v + \mathcal{K} \longmapsto A(v) + \mathcal{K} \in V/\mathcal{K}.$$

Zauważmy, że nilpotentność odwzorowania A pociąga za sobą nilpotentność odwzorowania $\overline{A}$, gdyż jeśli $A^n = 0$, to

$$\overline{A}^n(v + \mathcal{K}) = A^n(v) + \mathcal{K} = 0 + \mathcal{K}.$$

Pokażemy, że zbiór $\overline{\mathcal{N}_0} = \{\, \overline{A} \mid A \in \mathcal{N}_0 \,\}$ jest triagularyzowalny.

Dowód twierdzenia Radjaviego

Niech $A, B \in \mathcal{N}_0$. Pokażemy, że $AB - p(A, B)A \in \mathcal{N}_0$. Weźmy dowolne $v \in \mathcal{K}$. Wtedy

$$(AB - p(A, B)A)v = ABv - p(A, B)Av = 0.$$

Dowód twierdzenia Radjaviego

Niech $A, B \in \mathcal{N}_0$. Pokażemy, że $AB - p(A, B)A \in \mathcal{N}_0$. Weźmy dowolne $v \in \mathcal{K}$. Wtedy

$$(AB - p(A, B)A)v = ABv - p(A, B)Av = 0.$$

Stąd otrzymujemy następującą implikację

$$\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}(B) \implies \mathcal{K} \subseteq \mathrm{Ker}(AB - p(A, B)A).$$

Dowód twierdzenia Radjaviego

Niech $A, B \in \mathcal{N}_0$. Pokażemy, że $AB - p(A,B)A \in \mathcal{N}_0$. Weźmy dowolne $v \in \mathcal{K}$. Wtedy

$$(AB - p(A,B)A)v = ABv - p(A,B)Av = 0.$$

Stąd otrzymujemy następującą implikację

$$\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}(B) \implies \mathcal{K} \subseteq \mathrm{Ker}(AB - p(A,B)A).$$

Stąd zaś wynika, że

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{N}_0 \cup \{\, AB - p(A,B)A \,\}) = \mathcal{K} \cap \mathrm{Ker}(AB - p(A,B)A) = \mathcal{K},$$

Dowód twierdzenia Radjaviego

Niech $A, B \in \mathcal{N}_0$. Pokażemy, że $AB - p(A,B)A \in \mathcal{N}_0$. Weźmy dowolne $v \in \mathcal{K}$. Wtedy

$$(AB - p(A,B)A)v = ABv - p(A,B)Av = 0.$$

Stąd otrzymujemy następującą implikację

$$\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}(B) \implies \mathcal{K} \subseteq \mathrm{Ker}(AB - p(A,B)A).$$

Stąd zaś wynika, że

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{N}_0 \cup \{\, AB - p(A,B)A \,\}) = \mathcal{K} \cap \mathrm{Ker}(AB - p(A,B)A) = \mathcal{K},$$

co jest sprzeczne z maksymalnością $\mathcal{N}_0$.

Otrzymaliśmy zatem, że $AB - p(A,B)A \in \mathcal{N}_0$.

Dowód twierdzenia Radjaviego

Możemy zatem dla $A, B \in \mathcal{N}_0$ rozważać operator indukowany operatora $AB - p(A, B)A \in \mathcal{N}_0$.

Dowód twierdzenia Radjaviego

Możemy zatem dla $A, B \in \mathcal{N}_0$ rozważać operator indukowany operatora $AB - p(A,B)A \in \mathcal{N}_0$.

Ponieważ operatory indukowane spełniają równości $\overline{cA} = c\overline{A}$, $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$ otrzymujemy, że

$$\overline{AB - p(A,B)A} = \overline{A}\,\overline{B} - p(\overline{A}, \overline{B})\overline{A} \in \overline{\mathcal{N}_0}.$$

Dowód twierdzenia Radjaviego

Możemy zatem dla $A, B \in \mathcal{N}_0$ rozważać operator indukowany operatora $AB - p(A,B)A \in \mathcal{N}_0$.

Ponieważ operatory indukowane spełniają równości $\overline{cA} = c\overline{A}$, $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$ otrzymujemy, że

$$\overline{AB - p(A,B)A} = \overline{A}\,\overline{B} - p(\overline{A}, \overline{B})\overline{A} \in \overline{\mathcal{N}_0}.$$

To z kolei oznacza, że założenie twierdzenia Radjaviego jest spełnione na zbiorze $\overline{\mathcal{N}_0}$ operatorów określonych na przestrzeni $V/\mathcal{K}$ wymiaru niższego niż wymiar przestrzeni V, co z założenia indukcyjnego daje triangularyzowalność zbioru $\overline{\mathcal{N}_0}$.

Dowód twierdzenia Radjaviego

Możemy zatem dla $A, B \in \mathcal{N}_0$ rozważać operator indukowany operatora $AB - p(A, B)A \in \mathcal{N}_0$.

Ponieważ operatory indukowane spełniają równości $\overline{cA} = c\overline{A}$, $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$ otrzymujemy, że

$$\overline{AB - p(A,B)A} = \overline{A}\,\overline{B} - p(\overline{A}, \overline{B})\overline{A} \in \overline{\mathcal{N}_0}.$$

To z kolei oznacza, że założenie twierdzenia Radjaviego jest spełnione na zbiorze $\overline{\mathcal{N}_0}$ operatorów określonych na przestrzeni $V/\mathcal{K}$ wymiaru niższego niż wymiar przestrzeni V, co z założenia indukcyjnego daje triangularyzowalność zbioru $\overline{\mathcal{N}_0}$.

Bazę triangularyzującą zbioru $\mathcal{N}_0$ otrzymujemy z elementów bazowych przestrzeni $\mathcal{K}$ oraz z wyciągnięcia bazy triangularyzującej $\overline{\mathcal{N}_0}$ z przestrzeni ilorazowej przez rzutowanie kanoniczne.

Dowód twierdzenia Radjaviego

Pokażemy teraz, że $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}$. Załóżmy, że tak nie jest, czyli istnieje operator $B \in \mathcal{N}$ taki, że $B\mathcal{K} \neq 0$.

Dowód twierdzenia Radjaviego

Pokażemy teraz, że $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}$. Załóżmy, że tak nie jest, czyli istnieje operator $B \in \mathcal{N}$ taki, że $B\mathcal{K} \neq 0$.

Zauważmy, że $B\mathcal{K} \nsubseteq \mathcal{K}$, bo gdyby $B\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, to operator $B|_{\mathcal{K}}$ byłoby operatorem nilpotentnym określonym na $\mathcal{K}$, co implikowałoby że

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{N}_0 \cup \{B\}) = \mathcal{K} \cap \mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}(B|_{\mathcal{K}}) \subset \mathcal{K},$$

co byłoby w sprzeczności z minimalnością wymiaru $\mathcal{K}$.

Dowód twierdzenia Radjaviego

Pokażemy teraz, że $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}$. Załóżmy, że tak nie jest, czyli istnieje operator $B \in \mathcal{N}$ taki, że $B\mathcal{K} \neq 0$.

Zauważmy, że $B\mathcal{K} \nsubseteq \mathcal{K}$, bo gdyby $B\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, to operator $B|_{\mathcal{K}}$ byłoby operatorem nilpotentnym określonym na $\mathcal{K}$, co implikowałoby że

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{N}_0 \cup \{B\}) = \mathcal{K} \cap \mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}(B|_{\mathcal{K}}) \subset \mathcal{K},$$

co byłoby w sprzeczności z minimalnością wymiaru $\mathcal{K}$.

Skoro $B\mathcal{K} \nsubseteq \mathcal{K}$, to istnieje przynamniej jeden operator $A_1 \in \mathcal{N}_0$ taki, że $A_1 B\mathcal{K} \neq 0$.

Dowód twierdzenia Radjaviego

Niech wielomian $p_1 \in \mathbb{F}\langle x, y\rangle$ będzie taki, że $B_1 = A_1 B - p_1(A_1, B)A_1 \in \mathcal{N}$. Wtedy $B_1\mathcal{K} \neq 0$, zatem $\mathcal{K}$ nie jest niezmienniczy względem B_1, tak jak we wcześniejszym przypadku operatora B.

Dowód twierdzenia Radjaviego

Niech wielomian $p_1 \in \mathbb{F}\langle x, y\rangle$ będzie taki, że $B_1 = A_1 B - p_1(A_1, B)A_1 \in \mathcal{N}$. Wtedy $B_1\mathcal{K} \neq 0$, zatem $\mathcal{K}$ nie jest niezmienniczy względem B_1, tak jak we wcześniejszym przypadku operatora B.
Stąd istnieje takie $A_2 \in \mathcal{N}_0$, że $A_2 B_1 \mathcal{K} \neq 0$ oraz wybieramy wielomian p_2 taki, że $B_2 = A_2 B_1 - p_2(A_2, B_1)A_2 \in \mathcal{N}$.

Dowód twierdzenia Radjaviego

Niech wielomian $p_1 \in \mathbb{F}\langle x, y\rangle$ będzie taki, że $B_1 = A_1 B - p_1(A_1, B)A_1 \in \mathcal{N}$. Wtedy $B_1\mathcal{K} \neq 0$, zatem $\mathcal{K}$ nie jest niezmienniczy względem B_1, tak jak we wcześniejszym przypadku operatora B.
Stąd istnieje takie $A_2 \in \mathcal{N}_0$, że $A_2 B_1 \mathcal{K} \neq 0$ oraz wybieramy wielomian p_2 taki, że $B_2 = A_2 B_1 - p_2(A_2, B_1)A_2 \in \mathcal{N}$.

Kontynuując ten proces otrzymujemy ciąg operatorów $A_i \in \mathcal{N}_0$ taki, że

$$A_{n+1}A_n \cdot \ldots \cdot A_2 A_1 B\mathcal{K} \neq 0,$$

jednak triagularyzowalność $\mathcal{N}_0$ implikuje, że $A_{n+1}A_n \cdot \ldots \cdot A_2 A_1 = 0$, co daje nam sprzeczność.

Ostatecznie $\mathcal{N} = \mathcal{N}_0$ i tym samym zbiór $\mathcal{N}$ jest triangularyzowalny. $\square$

Wniosek

Twierdzenie 2

Niech V będzie przestrzenią liniową skończonego wymiaru nad ciałem algebraicznie domkniętym $\mathbb{F}$. Niech ponadto $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{End}(V)$ będzie zbiorem dowolnych operatorów liniowych zamkniętym względem brania komutatorów.
Wtedy $\mathcal{L}$ jest triangularyzowalny wtedy i tylko wtedy, gdy operator $AB - BA$ jest nilpotentny dla dowolnych $A, B \in \mathcal{L}$.

Wniosek

Twierdzenie 2

Niech V będzie przestrzenią liniową skończonego wymiaru nad ciałem algebraicznie domkniętym $\mathbb{F}$. Niech ponadto $\mathcal{L} \subseteq \operatorname{End}(V)$ będzie zbiorem dowolnych operatorów liniowych zamkniętym względem brania komutatorów.
Wtedy $\mathcal{L}$ jest triangularyzowalny wtedy i tylko wtedy, gdy operator $AB - BA$ jest nilpotentny dla dowolnych $A, B \in \mathcal{L}$.

Dowód.
Jeśli $\mathcal{L}$ jest triangularyzowalny, to każdy komutator jest rzeczywiście nilpotentny. W drugą stronę dowodzimy przez indukcję - zauważmy, że zbiór $\mathcal{N}$ komutatorów operatorów z $\mathcal{L}$ spełnia założenia Twierdzenia Jacobsona z $c = 1$.

Dowód

Możemy założyć, że $\mathcal{N} \neq 0$, bo gdyby $\mathcal{N} = 0$, to $\mathcal{L}$ byłby zbiorem operatorów przemiennych. Jeśli natomiast ciało jest algebraicznie domnięte, to przemienny zbiór operatorów jest triangularyzowalny.

Dowód

Możemy założyć, że $\mathcal{N} \neq 0$, bo gdyby $\mathcal{N} = 0$, to $\mathcal{L}$ byłby zbiorem operatorów przemiennych. Jeśli natomiast ciało jest algebraicznie domnięte, to przemienny zbiór operatorów jest triangularyzowalny.
Niech $\mathcal{K} = \mathrm{Ker}(\mathcal{N})$. Dla dowolnych $A \in \mathcal{N}$ oraz $B \in \mathcal{L}$ mamy

$$\underbrace{(AB - BA)}_{\in \mathcal{N}} \mathcal{K} = AB\mathcal{K} = 0,$$

a zatem $B\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ dla każdego operatora $B \in \mathcal{L}$.

Dowód

Możemy założyć, że $\mathcal{N} \neq 0$, bo gdyby $\mathcal{N} = 0$, to $\mathcal{L}$ byłby zbiorem operatorów przemiennych. Jeśli natomiast ciało jest algebraicznie domknięte, to przemienny zbiór operatorów jest triangularyzowalny.
Niech $\mathcal{K} = \mathrm{Ker}(\mathcal{N})$. Dla dowolnych $A \in \mathcal{N}$ oraz $B \in \mathcal{L}$ mamy

$$\underbrace{(AB - BA)}_{\in \mathcal{N}}\mathcal{K} = AB\mathcal{K} = 0,$$

a zatem $B\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ dla każdego operatora $B \in \mathcal{L}$.
Zatem jeśli weźmiemy dowolne $A, B \in \mathcal{L}$, możemy otrzymać z nich odwzorowania

$$A|_{\mathcal{K}}, B|_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K},$$

a z założenia $[A|_{\mathcal{K}}, B|_{\mathcal{K}}]$ jest operatorem nilpotentnym. Stąd przez indukcję triangularyzowalność zachodzi dla operatorów indukowanych ze zbioru $\overline{\mathcal{L}}$, a w konsekwencji dla całego $\mathcal{L}$. $\square$

Lemat 1

Niech $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$. Jeśli macierz $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ spełnia warunek

$$\mathrm{tr}(N) = \mathrm{tr}(N^2) = \ldots = \mathrm{tr}(N^n) = 0,$$

to N jest macierzą nilpotentną.

Lemat 1

Niech $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$. Jeśli macierz $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ spełnia warunek

$$\mathrm{tr}(N) = \mathrm{tr}(N^2) = \ldots = \mathrm{tr}(N^n) = 0,$$

to N jest macierzą nilpotentną.

Szkic dowodu.
Powyższy warunek równoważny jest układowi równań

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 0, \quad \ldots \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^n = 0.$$

Z tożsamości Newtona elementarne wielomiany symetryczne można wyrazić za pomocą powyższych sum potęgowych, z czego wynika, że wielomian charakterystyczny macierzy N jest postaci $P_N(\lambda) = \lambda^n$, a stąd już wynika teza. $\square$

Tożsamości Newtona

$$p_k(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k = x_1^k + \cdots + x_n^k,$$

$$\begin{aligned}
e_1 &= p_1,\\
e_2 &= \tfrac{1}{2}p_1^2 - \tfrac{1}{2}p_2\\
e_3 &= \tfrac{1}{6}p_1^3 - \tfrac{1}{2}p_1p_2 + \tfrac{1}{3}p_3\\
e_4 &= \tfrac{1}{24}p_1^4 - \tfrac{1}{4}p_1^2p_2 + \tfrac{1}{8}p_2^2 + \tfrac{1}{3}p_1p_3 - \tfrac{1}{4}p_4\\
&\vdots\\
e_n &= (-1)^n \sum_{\substack{m_1+2m_2+\cdots+nm_n=n\\ m_1\ge 0,\ldots,m_n\ge 0}} \prod_{i=1}^{n} \frac{(-p_i)^{m_i}}{m_i!\,i^{m_i}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_0(x_1,\ldots,x_n) &= 1,\\
e_1(x_1,\ldots,x_n) &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n,\\
e_2(x_1,\ldots,x_n) &= \sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j,\\
&\vdots\\
e_n(x_1,\ldots,x_n) &= x_1x_2\cdots x_n,\\
e_k(x_1,\ldots,x_n) &= 0, \quad \text{for } k > n.
\end{aligned}$$

Kryterium śladowe Radjaviego

Definicja

Mówimy, że zbiór operatorów liniowych $\mathcal{L}$ ma permutowalny ślad, jeśli dla każdego skończonego ciągu operatorów $A_1, \ldots, A_k$ i dla każdej permutacji $\sigma \in S_k$ zachodzi warunek

$$\operatorname{tr}(A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_k) = \operatorname{tr}(A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot A_{\sigma(k)}).$$

Kryterium śladowe Radjaviego

Definicja

Mówimy, że zbiór operatorów liniowych $\mathcal{L}$ ma permutowalny ślad, jeśli dla każdego skończonego ciągu operatorów $A_1, \ldots, A_k$ i dla każdej permutacji $\sigma \in S_k$ zachodzi warunek

$$\mathrm{tr}(A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_k) = \mathrm{tr}(A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot A_{\sigma(k)}).$$

Twierdzenie (Kryterium śladowe Radjaviego)

Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem algebraicznie domkniętym oraz $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$. Wtedy dowolny zbiór operatorów liniowych $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{End}(V_{\mathbb{F}})$ jest triangularyzowalny wtedy i tylko wtedy gdy jego ślad jest permutowalny.

Dowód

(=>) Załóżmy, że zbiór $\mathcal{L}$ jest triangularyzowalny.

$$\mathrm{tr}(A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_k) = a_{11}^1 \ldots a_{11}^k + \ldots + a_{nn}^1 \ldots a_{nn}^k =$$

$$a_{11}^{\sigma(1)} \ldots a_{11}^{\sigma(k)} + \ldots + a_{nn}^{\sigma(1)} \ldots a_{nn}^{\sigma(k)} = \mathrm{tr}(A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot A_{\sigma(k)})$$

z przemienności ciała $\mathbb{F}$.

Dowód

($<=$) Załóżmy, że ślad na zbiorze $\mathcal{L}$ jest permutowalny. Zauważmy, że algebra łączna $\mathcal{U}$ generowana przez zbiór $\mathcal{L}$ również ma permutowalny ślad.

Dowód

($<=$) Załóżmy, że ślad na zbiorze $\mathcal{L}$ jest permutowalny. Zauważmy, że algebra łączna $\mathcal{U}$ generowana przez zbiór $\mathcal{L}$ również ma permutowalny ślad. Jeśli teraz pokażemy, że zbiór $\mathcal{N} = \{AB - BA \,|\, A, B \in \mathcal{U}\}$ składa się z operatorów nilpotentnych, to dowód zostanie zakończony na mocy Twierdzenia 2.

Dowód

(<=) Załóżmy, że ślad na zbiorze $\mathcal{L}$ jest permutowalny. Zauważmy, że algebra łączna $\mathcal{U}$ generowana przez zbiór $\mathcal{L}$ również ma permutowalny ślad. Jeśli teraz pokażemy, że zbiór $\mathcal{N} = \{AB - BA \mid A, B \in \mathcal{U}\}$ składa się z operatorów nilpotentnych, to dowód zostanie zakończony na mocy Twierdzenia 2.

Jednak jeśli przyjmiemy oznaczenie $X_i \in \{AB, BA\}$, to

$$\mathrm{tr}(AB - BA)^m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \mathrm{tr}(X_1 X_2 \dots X_m) =$$

Dowód

(<=) Założmy, że ślad na zbiorze $\mathcal{L}$ jest permutowalny. Zauważmy, że algebra łączna $\mathcal{U}$ generowana przez zbiór $\mathcal{L}$ również ma permutowalny ślad. Jeśli teraz pokażemy, że zbiór $\mathcal{N} = \{AB - BA \,|\, A, B \in \mathcal{U}\}$ składa się z operatorów nilpotentnych, to dowód zostanie zakończony na mocy Twierdzenia 2.

Jednak jeśli przyjmiemy oznaczenie $X_i \in \{AB, BA\}$, to

$$\mathrm{tr}(AB - BA)^m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \mathrm{tr}(X_1 X_2 \ldots X_m) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \mathrm{tr}(A^m B^m) = 0,$$

co kończy dowód na mocy Lematu 1. $\square$

Literatura

H. Radjavi, *The Engel-Jacobson Theorem Revisited*, Journal of Algebra 111, 427-430 (1987).

H. Radjavi, P. Rosenthal, *Simultaneous Triangularization (2000).*