

INF1608 – Análise Numérica

Lab 9: Integração Numérica

Prof. Waldemar Celes
Departamento de Informática, PUC-RIO

A Regra de Simpson aproxima a integração de uma função pela integração de uma parábola:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_{[a,b]} = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right], \quad h = b - a$$

onde o erro da aproximação é dado por:

$$E_{[a,b]} = -\frac{1}{90} \left(\frac{h}{2}\right)^5 f^{iv}(c)$$

Se adotarmos um passo igual a $\frac{h}{2}$, fazendo duas aproximações de Simpson, chegamos a:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_{[a,c]} + S_{[c,b]}, \quad c = \frac{a+b}{2}$$

com erro dado por:

$$E'_{[a,b]} = E_{[a,c]} + E_{[c,b]} = \frac{E_{[a,b]}}{16}$$

Podemos então fazer:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= S_{[a,b]} - E_{[a,b]} = S_{[a,c]} + S_{[c,b]} \frac{E_{[a,b]}}{16} \\ S_{[a,b]} - S_{[a,c]} - S_{[c,b]} &= \frac{15}{16} E_{[a,b]} \end{aligned}$$

Logo, a avaliação de $S_{[a,b]} - S_{[a,c]} - S_{[c,b]}$ nos fornece um valor 15 vezes maior que o erro de $S_{[a,c]} + S_{[c,b]}$. Com isso, podemos implementar um procedimento para realizar Integração de Simpson Adaptativa. Tentamos integrar o intervalo de a a b em dois passos, avaliando a diferença $S_{[a,b]} - S_{[a,c]} - S_{[c,b]}$. Se esta diferença for menor que 15 vezes a tolerância, podemos assumir o valor $S_{[a,c]} + S_{[c,b]}$ como resultado da integral; senão, dividimos o intervalo em 2 e repetimos o processo, avaliando as integrais e suas respectivas diferenças nos sub-intervalos. Para cada sub-intervalo, a tolerância deve ser reduzida à metade, a fim de garantir que o erro total esteja dentro da tolerância original.

Para construir este procedimento passo a passo, pede-se:

1. Implemente uma função que calcule a integral pela Regra de Simpson ($S_{[a,b]}$):

```
double Simpson (double a, double b, double (*f) (double x));
```

2. Implemente uma função que calcule o valor de integral adotando dois passos de integração, usando a Regra de Simpson ($S_{[a,c]} + S_{[c,b]}$):

```
double DoubleSimpson (double a, double b, double (*f) (double x));
```

3. Implemente uma função recursiva que implemente a Integração por Simpson Adaptativa. Sua função deve receber o intervalo de integração, a função e a tolerância de erro desejada.

```
double AdaptiveSimpson (double a, double b, double (*f) (double x), double tol);
```

4. Escreva um programa que use Simpson Adaptativo para calcular:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx \quad \text{e} \quad \int_0^\pi x^2 \sin x dx$$

A tolerância do erro da integração deve ser 0.5×10^{-5} . Exiba os resultados na tela.

5. Escreva uma segunda versão da Integração Adaptativa de Simpson de forma a minimizar o número de avaliações da função. Junto com o valor da integral, imprima na tela o número de avaliações da função necessárias para o cálculo das integrais acima. Nesta segunda versão, você pode escolher que funções auxiliares usar. Você também pode usar uma variável global para atualizar este contador.

Entrega:

Os códigos fonte deste trabalho devem ser enviado para celes@inf.puc-rio.br até
domingo, dia 24 de maio (prazo final).