Álgebra de Boole, Conjuntos Clássicos e Lógica

Índice

1. Introdução

- O nome do matemático inglês George Boole (1815 – 1864) se vincula a uma idéia bastante ousada e interessante: a de "matematizar" o raciocínio lógico. De certa forma, essa idéia o coloca numa linha que envolve pensadores como Aristóteles e Leibniz, e que desemboca na "lógica clássica", da qual a lógica nebulosa pode ser considerada uma extensão.
- Em nosso curso, começaremos a lidar com algumas extensões de idéias que se relacionam à álgebra de Boole e à interpretação dessa álgebra em termos de teoria de conjuntos. Tendo isso em vista, julgamos apropriado fazer uma revisão de conceitos subjacentes a essas idéias: tal é a finalidade do presente tópico.

2. Álgebra de Boole

- Sem a pretensão de adotar uma perspectiva de extremo rigor matemático, tentaremos imediatamente definir o que é uma álgebra de Boole.

- Definamos a sêxtupla {S, +, . , ’, 0, 1}, sendo S um conjunto com elementos x, y, z, ..., “+” / “.” / “ ’ ” três operações envolvendo elementos desse conjunto e 0 / 1 dois elementos específicos de S. Essa sêxtupla será uma álgebra de Boole se forem válidos os seguintes axiomas [Stoll, 1961]:

  - Associatividade: $x + (y + z) = (x + y) + z$ e $x.(y.z) = (x.y).z$
  - Comutatividade: $x + y = y + x$ e $x.y = y.x$
  - Distributividade: $x+(y.z) = (x+y).(x+z)$ e $x.(y+z) = x.y + x.z$
  - $x + 0 = x$ e $x.1 = x$
  - $x + x' = 1$ e $x.x' = 0$

A partir desses axiomas, diversos resultados importantes podem ser demonstrados [Stoll, 1961][McCluskey, 1965]:

- Os elementos 0 e 1 são únicos
- Cada elemento tem um único complemento
- $(x')' = x$
- $x + x = x$ e $x.x = x$
- $x + 1 = 1$ e $x.0 = 0$
- $x+(x.y) = x$ e $x.(x+y) = x$
- Leis de De Morgan: $(x+y)' = x'.y'$ e $(x.y)' = x' + y'$

2.1 Interpretação Lógica

- Por se tratar de uma definição algébrica geral, é possível interpretar a construção acima de várias formas. Uma delas, de enorme relevância, é considerar a álgebra de Boole como sendo uma descrição de um sistema lógico em que são atribuídos apenas dois "valores-verdade" (*truth values*) para as proposições (verdadeiro ou falso, T ou F, 1 ou 0), e no qual as operações vistas (+, ., ') acima correspondem às operações lógicas OR, AND e NOT.
- Em tal caso, percebemos que o conjunto S passa a ser simplesmente o conjunto {0,1}, ou seja, as variáveis - que se associam a proposições - só podem assumir dois valores. Perceba que é exatamente uma extensão dessa idéia que nos levará ao contexto fuzzy no futuro.
- A interpretação lógica da álgebra de Boole jaz na essência da teoria que fundamenta o projeto de sistemas digitais, sendo parte integrante do currículo de cursos de Engenharia Elétrica e de Computação. Um marco na fusão desses dois mundos foi o

trabalho de mestrado de um pesquisador já mencionado em nosso curso, Claude Elwood Shannon.

- Quando se lida com lógica formal, é comum usar o símbolo “$\vee$” em vez de “+” para o operador OR, os símbolos “$\wedge$” e “&” em vez de “.” para o operador AND e os símbolos “~” ou “–” em vez de “ ’ ” para o operador NOT.
- Tendo em vista as propriedades da álgebra de Boole e a interpretação lógica exposta, é possível obter as tabelas-verdade das operações mencionadas.
- A operação OR diz respeito a duas proposições, ou seja, analisa-se o valor de $p \vee q$. Para que $p \vee q$ seja verdadeira, basta que uma das proposições seja verdadeira, o que nos leva à seguinte tabela:

p	**q**	**p $\vee$ q**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- A operação AND também diz respeito a duas proposições: lidamos com p $\wedge$ q. Para que p $\wedge$ q seja verdadeira, é preciso que as duas proposições sejam verdadeiras, o que nos leva à seguinte tabela:

p	**q**	**p $\wedge$ q**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- A operação NOT, por sua vez, é aplicada a uma proposição, ou seja, considera-se ~p. A operação, em termos simples, inverte o valor-verdade de uma proposição, o que leva à seguinte tabela:

p	**~p**
0	1
1	0

- Um ponto que gostaríamos de enfatizar diz respeito aos últimos axiomas da álgebra de Boole. Por exemplo, analisemos o axioma x + x’ = 1. Em nossa “notação lógica”, o axioma equivale a dizer que p ∨ ~p é sempre uma proposição verdadeira: ou uma proposição é verdadeira ou a sua negação é verdadeira ... não há um “meio-termo” aqui, ao contrário do que ocorre num contexto fuzzy. Esse axioma é um pilar da lógica clássica (lei do terceiro excluído – *tertium non datur – law of excluded middle*). Outro axioma que desejamos destacar é o que é dado por $x.x' = 0$. Numa notação mais próxima da usada em lógica, teríamos que $p \wedge \sim p$ é sempre uma proposição falsa: a lógica clássica não aceita que uma proposição e sua negação sejam simultaneamente verdadeiras (isso se vincula à idéia de não-contradição).

- Finalmente, gostaríamos de mencionar como é geralmente representada, em termos lógicos, a idéia de implicação. A análise da proposição $p \rightarrow q$ obedece à seguinte tabela-verdade:

p	**q**	**$p \rightarrow q$**
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Note que o único meio de se obter uma proposição falsa é quando o antecedente é verdadeiro e o conseqüente é falso. Sabemos que uma definição desse tipo causará estranheza, mas pedimos ao leitor que mantenha a cabeça aberta. Perceba ainda que, na definição exposta, a implicação corresponde à proposição $\sim p \vee q$.

2.2 Álgebra de Boole e Conjuntos Clássicos

- Conforme mencionamos, um aspecto muito bonito de uma construção algébrica é que ela se presta a múltiplas interpretações (isso se vincula à idéia de isomorfismo, por exemplo).
- Interessantemente, podemos interpretar a álgebra de Boole em termos da teoria clássica de conjuntos. Nesse caso, voltando às definições dadas no início da seção 2, temos que os elementos de S são vistos como conjuntos, a operação "+" corresponde à união ($\cup$), a operação "." corresponde à intersecção ($\cap$), a operação " ' " corresponde à operação de complemento (relativamente ao conjunto universo), o elemento "0"

corresponde ao conjunto vazio (∅) e o elemento “1” corresponde ao conjunto universo (U). Volte agora aos axiomas e propriedades e analise-os dessa perspectiva!

- Uma representação útil para capturar a essência desses resultados é a baseada em diagramas de Venn (que vimos no tópico 2 do curso).
- Já vimos que a teoria clássica de conjuntos pode ser estendida por meio da teoria de conjuntos nebulosos. De certa forma, a relação com a álgebra de Boole já indica que essa extensão tem implicações ainda mais profundas. Voltaremos a isso mais adiante.

3. Referências

G. J. KLIR, B. YUAN, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*, Prentice Hall, 1995.

E. J. MCCLUSKEY, *Introduction to the Theory of Switching Circuits*, McGraw-Hill, 1965.

W. PEDRYCZ, F. GOMIDE, *Fuzzy Systems Engineering*, Wiley, 2007.

A. TARSKI, *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*, Dover, 1995.

R. R. STOLL, *Set Theory and Logic*, Dover, 1961.