Lógica Computacional

Álgebra de Conjuntos

Profª. Ms. Adriane Ap. Loper

1

- Unidade de Ensino: 2
- Competência da Unidade: Conhecer a teoria de conjuntos, simbologia associada, negação de sentenças, operações entre conjuntos, propriedades, produto cartesiano .
- Resumo :Conhecer a teoria de conjuntos, simbologia associada, negação de sentenças, operações entre conjuntos, propriedades, produto cartesiano
- Palavras-chave :Conjuntos; Operações entre conjuntos; Conjuntos numéricos; Produto cartesiano;
- Título da Teleaula: Álgebra de Conjuntos
- Teleaula nº: 2

2

Contextualização

Trabalhamos com conjuntos em nosso dia a dia e será que esses conjuntos constituem a lógica?

Como se estabelecem as relações?

Vamos aprender?

3

Álgebra de Conjuntos

4

Teoria de Conjuntos

Conjunto: podemos entender intuitivamente como sendo uma coleção, um agrupamento, uma reunião ou um grupo de elementos que possui alguma característica em comum.

Pode-se ter:

Conjunto finito: conjunto dos estados do Brasil;

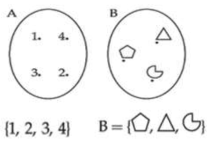
Conjunto infinito: conjunto dos números ímpares.

Geralmente usa-se letras maiúsculas para denotar conjuntos e letras minúsculas para denotar elementos de conjuntos.

5

Teoria de Conjuntos

Conjunto: coleção qualquer de objetos, números, formas ou outros elementos com características semelhantes e que pode receber o nome que se desejar.



6

Teoria de Conjuntos

Há duas maneiras de especificar um conjunto particular:

- ✓ Listar seus elementos: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- ✓ Enunciar as propriedades que caracterizam os elementos do conjunto:

$A = \{x \mid x$ é um número ímpar positivo menor que $10\}$.
$A = \{x \in N | x \text{ é ímpar}, x < 10\}$.

7

Tipos especiais de conjuntos

Conjunto unitário: contém um único elemento
Exemplo: $A = \{4\}$
Conjunto vazio: $\emptyset$ – não possui elementos
Exemplo: $A = \{x \in \mathbb{R} | \, x^2 < 0\}$
Conjunto universo: $\mathcal{U}$ – conjunto ao qual pertence todos os elementos que pretendemos utilizar
Exemplo: $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$ e
$A = \{x \in \mathcal{U} | -2 \le x \le 2\}$

8

Princípio da extensão

Igualdade de conjuntos :
Dois conjuntos, A e B, são iguais se possuem os mesmos elementos (LIPSCHUTZ; LIPSON, 2008).

Exemplo:
Conjunto A dos números naturais menores que 4;
$B = \{0, 1, 2, 3\}$

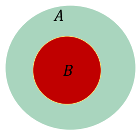
A = B

9

SUBCONJUNTOS

A é subconjunto de B se, e somente se, todos os elementos de A pertencerem a B.

$A{=}B \Leftrightarrow A \subset B$ e $B \subset A$



10

Relação de Pertinência

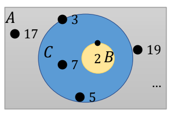
Quando x pertence ao conjunto A: $x \in A$
Quando x não pertence a A: $x \notin A$
Exemplos: se $A = \{1, 10, 13, 60\} \rightarrow 10 \in A$ e $2 \notin A$

Descrição dos elementos de um conjunto:
Listando seus elementos;
Propriedades de seus elementos:
$A = \{x | x \text{ possui a propriedade } P\}$
Exemplo: $N = \{x \in \mathbb{R} | \, x \ge 2\}$

11

Relação de Pertinência

Exemplo:



$C \subset A$
$C \supset B$

$B = \{x | x$ é um número primo par$\}$
$C = \{x | x$ é um número primo menor que $10\}$
$A = \{x | x$ é um número primo$\}$

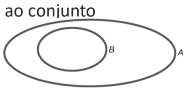
12

Continência

Relação de continência: sejam dois conjuntos A e B

$B \subset A$: todo elemento de B pertencer ao conjunto A

Exemplo: $B = \{1,2\}$ e $A = \{1,2,3,4\}$

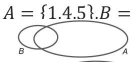


Assim, $B \subset A$

$B \not\subset A$: existe elemento de B que não pertence a A

Exemplos:, $A = \{1,4,5\}, B = \{1,3\}$, $C = \{7,9\}$

$B \not\subset A$



$B \not\subset C$

13

Tipos especiais de conjuntos

Conjunto das partes de A: conjunto composto por todos os subconjuntos de A

Exemplos:

$A = \{2,4\}$ e $P(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{2,4\}\}$

$B = \{1,2,3\}$ e $P(B) =$
$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

14

Conjuntos

15

1) Considere o conjunto $A = \{1, \{2\}, \{1,2\}\}$. Julgue em verdadeiro (V) ou falso (F) as sentenças a seguir:

( ) $1 \in A$

( ) $2 \in A$

( ) $\emptyset \subset A$

( ) $\{1,2\} \supset A$

16

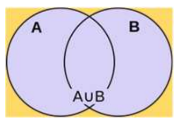
Operações com conjuntos

17

Operações com conjuntos – União U

União de conjuntos : dados os conjuntos A e B, a união de A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou a B.

$$A \cup B = \{x |\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

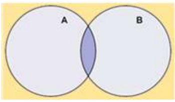


18

Operações com conjuntos – Intersecção ∩

Intersecção de conjuntos : dados os conjuntos A e B, a interseção de A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B

$A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}$

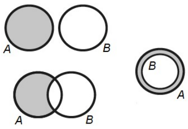


19

Operações com conjuntos – Diferença

Diferença de conjuntos: dados os conjuntos A e B, a diferença de A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A, mas não a B.

$A - B = \{x \in A \text{ e } x \notin B\}$

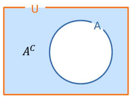


20

Operações com conjuntos – Complementar

Complementar : dados dois conjuntos A e B, tais que $B \subset A$ chama-se complementar de B em relação a A (C_A^B ou $\bar{B}$ ou $(A^C)_B$) o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B.

$A^C = C_U^A = U - A$



21

Teoria de Conjuntos

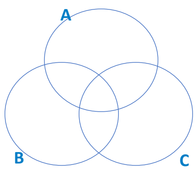
22

Marca	Nº de consumidores
A	105
B	200
C	160
A e B	25
A e C	25
B e C	40
A, B e C	5
Nenhuma	120

(PUC – RJ) Uma população consome 3 marcas de sabão em pó: A, B e C. Feita uma pesquisa de mercado, colheram-se os resultados tabelados ao lado. Determine o número de pessoas consultadas.

23

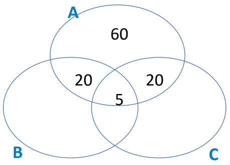
- Marcas A, B e C: 5
- Apenas A e B: 25 – 5 = 20
- Apenas A e C: 25 – 5 = 20



- Apenas A:
  105 – 5 – 20 – 20 = 60

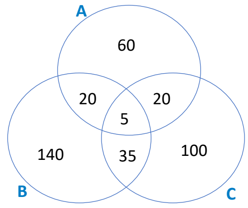
24

- Apenas B e C: 40 – 5 = 35
- Apenas B: 200 – 5 – 20 – 35 = 140
- Apenas C: 160 – 5 – 35 – 20 = 100



25

- Nenhuma marca: 120
- Total: 120 + 60 + 140 + 100 + 20 + 20 + 35 + 5 = 500



26

Entenderam como aliar a lógica e conjuntos para resolver problemas de nosso cotidiano?

27

Conjuntos enumeráveis

28

Números Naturais

Chama-se conjunto enumerável a todo conjunto equivalente a $\mathbb{N}$.

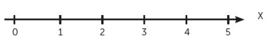
Conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ e } \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Operações:

Adição, Multiplicação: Operações fechadas

Subtração, Divisão: Operações não fechadas



29

Números inteiros

Conjunto dos números inteiros:

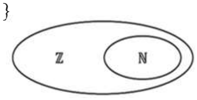
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

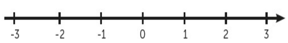
$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -2, -1, 1, 2, \quad \dots\}$$

$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$





30

Módulo

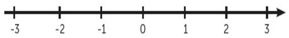
Módulo ou valor absoluto de um número x: distância do número até à origem da reta numérica

$$|x| = \begin{cases} x, \text{se } x > 0 \\ 0, \text{se } x = 0 \\ -x, \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplos:

$|3| = 3; |-3| = 3$

$|3| + |-3| = 3 + 3 = 6$



31

Números racionais

Conjunto dos números racionais:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z} \; e \; q \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

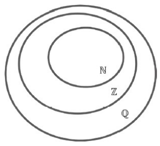
$\mathbb{Q}_+$ - racionais não negativos

$\mathbb{Q}_-$ - racionais não positivos

$\mathbb{Q}^*$ - racionais não nulos

$\mathbb{Q}_+^*$ - racionais positivos

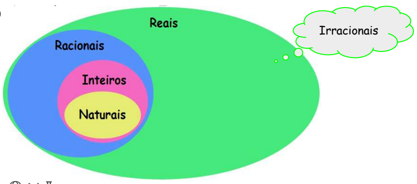
$\mathbb{Q}_-^*$ - racionais negativos



32

Conjunto

Conjunto



$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$

33

Intervalos Limitados

Dado $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, denotamos

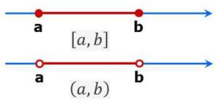
Intervalos limitados:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$

$]a, b[= (a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$



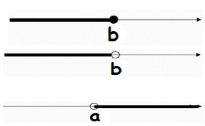
34

Intervalos ilimitados

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\}$

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$



$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$

35

Conjuntos com números

36

1)Um dos conteúdos abordados são as operações de conjuntos. Dados os conjuntos A= {0, 1, 2, 3, 4}, o conjunto B= { 2, 5) e C= {2, 6}, a operação de união e intersecção entre os três conjuntos, são respectivamente:

a) U ={1, 2, 3}; ∩ = {ø }
b) U ={1, 2, 3, 4, 5, 6}; ∩ = {0,2}
c) U ={ ø }; ∩ = { ø }
d) U ={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}; ∩ = {2}
e) U ={1, 2, 5, 6}; ∩ = {0, 2}

37

Os elementos dos conjuntos A e B e C que fazem união são: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} reunindo todos os elementos de ambos conjuntos. Já a intersecção é dada pelo {2}, está presente tanto no conjunto A, como no B e no C.

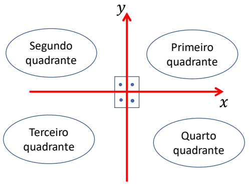
38

Produto Cartesiano

39

Plano Cartesiano

É formado por uma região geométrica plana, cortada por duas retas perpendiculares entre si.



Retas perpendiculares formam ângulos de 90^0 entre si!

40

Abscissas e Ordenadas

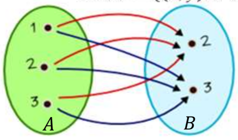
Reta horizontal: eixo das abscissas – representado por x, $x \in \mathbb{R}$.
Reta vertical: eixo das ordenadas – representado por y, $y \in \mathbb{R}$
Ponto de encontro das retas x e y: origem – indicado pelo par ordenado $(0,0)$, ou seja, $x = 0$ e $y = 0$.
Par ordenado: par (x, y), no qual o primeiro elemento pertence ao domínio (ou ao 1º conjunto) e o segundo elemento pertence a imagem (ou ao 2º conjunto).

41

Produto Cartesiano

O produto cartesiano $(A \times B)$ dos conjuntos A e B é formado pelos pares ordenados (x, y) com $x \in A$ e $y \in B$.

$$A \times B = \{(x, y): x \in A \text{ e } y \in B\}$$

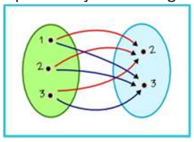


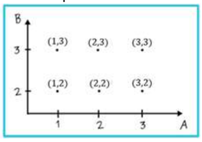
$A \times B = \{ (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$

42

Diagramas e Plano Cartesiano

Representação em diagramas e no plano cartesiano:





$A \times B = \{ (1,2),\ (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$

43

Produto Cartesiano

44

Valores em reais direcionados ao saneamento básico, por pessoa, por ano:

Ano	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
R$/ pessoa	100	100	200	300	400	500	600

Relação:

$R = \{(2009,100), (2010,100), (2011,200), (2012,300)\ \ (2013,400), (2014,500), (2015,600)\}$

45

Número de consultas registradas mensalmente nos postos de saúde com diagnóstico de doenças relacionadas ao saneamento básico:

Ano	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Nº de consultas	700	700	500	400	400	300	200

Relação:

$S = \{(2010,700), (2011,700), (2012,500), (2013,400), (2014,400), (2015,300), (2016,200)\}$

46

Os resultados na saúde sofrem impacto no ano seguinte ao que houve o investimento em saneamento.

Exemplo: o valor gasto com saneamento do ano de 2009 com o numero de consultas registradas em 2010

O indicativo de uma população sadia é o menor número de consultas nos postos de saúde.

47

- Saneamento:

$R = \{\mathbf{(2009, 100)}, (2010,100), (2011,200), (2012,300), (2013,400), (2014,500), (2015,600)\}$

- Consultas:

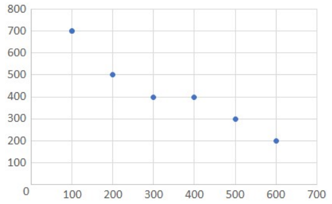
$S = \{\mathbf{(2010, 700)}, (2011,700), (2012,500), (2013,400), (2014,400), (2015,300), (2016,200)\}$

- Associação entre saneamento e consultas:

$T = \{\mathbf{(100, 700)}, (100,700), (200,500), (300,400), (400,400), (500,300), (600,200)\}$

48

Representação gráfica da relação T
Tendência: queda nas consultas com o aumento nos investimentos



49

- Percentual de redução nas consultas:

Percentual (%)		Número de consultas
100	----------	w
y	----------	$x - w$

$$y = \frac{100(x - w)}{w}$$

50

Ano	Consultas	Percentual de redução
2010	700	-
2011	700	
2012	500	
2013	400	
2014	400	
2015	300	
2016	200	

$$y = \frac{100(x - w)}{w}$$

$$y = \frac{100(700 - 700)}{700}$$

$$y = 0$$

51

Ano	Consultas	Percentual de redução
2010	700	-
2011	700	0
2012	500	
2013	400	
2014	400	
2015	300	
2016	200	

$$y = \frac{100(x - w)}{w}$$

$$y = \frac{100(500 - 700)}{700}$$

$$y \approx -28{,}57$$

52

Ano	Consultas	Percentual de redução
2010	700	-
2011	700	0
2012	500	-28,57
2013	400	
2014	400	
2015	300	
2016	200	

$$y = \frac{100(x - w)}{w}$$

$$y = \frac{100(400 - 500)}{500}$$

$$y = -20$$

53

Ano	Consultas	Percentual de redução
2010	700	-
2011	700	0
2012	500	-28,57
2013	400	-20
2014	400	0
2015	300	-25
2016	200	-33,33

54

Podemos aplicar esses conhecimentos em diversas áreas!

55

Recapitulando

56

- Teoria dos Conjuntos;
- Álgebra dos Conjuntos;
- Aplicação da Teoria dos Conjuntos.

57

58