Torque e Momento Angular

Nos ateremos ao estudo de movimento de rotação de "corpos rígidos" que garante que a distância entre suas partículas é invariável. Nessa abordagem não estudaremos o Sol, por exemplo, por ser um "bola de gás" em todo o sistema, suas partículas tem velocidades angulares (ω) diferentes.

Na cinemática do movimento angular de um corpo rígido em torno de um eixo fixo, a questão se reduz num movimento circular, nesse caso pode-se estabeler uma analogia com o movimento linear.

Deslocamento linear $= \Delta X \rightarrow$ Deslocamento Angular $= \Delta\theta$

Velocidade linear $= v \rightarrow$ velocidade angular $= \omega$

aceleração linear $= a \rightarrow$ aceleração angular $= \alpha$

Para a dinâmica do movimento angular, devemos achar uma grandeza equivalente à força no movimento linear. A definição de Trabalho nos dá um caminho:

Mov. linear: $\Delta W = F.\Delta X$ $\rightarrow$ Movimento Angular: $\Delta W = \tau.\Delta\theta$

O τ (torque, que quer dizer torcer) equivale a força no movimento linear.

Torque e Momento Angular

→ Movimento Geral de um corpo rígido: Mov. Translação + Mov. Rotação (rolar um corpo)

→ eixo de rotação → eixo fixo

→ Sentido anti-horário (+) e sentido horário (−)

→ Variáveis rotacionais.

- → posição angular (θ) → referência
- → distância percorrida pelo ponto $S = r\theta$ (θ em radianos) → arco
- → deslocamento angular
  - → $|\theta_2 - \theta_1| = \Delta\theta$
- → velocidade angular média (escalar)
  - → $\Delta\theta(t) = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$ → $\theta(t)$ indo para $\theta(t+\Delta t)$

    $\bar{\omega} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ (escalar)
- → velocidade angular instantânea (vetor)

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\hat{n} = \frac{d\theta}{dt}\hat{n}$$

(característica de um corpo como um todo)

↳ aceleração angular média ($\bar{\alpha}$)

$$\bar{\alpha}_m = \omega(t+\Delta t) - \omega(t) \rightarrow \Delta\vec{\omega} = \vec{\omega}(t+\Delta t) - \vec{\omega}(t)$$

↳ aceleração angular instantânea ($\vec{\alpha}$)

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Relação com as variáveis lineares.

- Posição

↳ $S = R\theta$

- Velocidade

↳ $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v = r\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow v = r\omega.$

↳ é tangente a trajetória

↳ Vetorialmente $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$. $v = \omega r$ (em módulo) $\vec{\omega} \perp \vec{R}$

- aceleração

↳ $a_c = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r})$

$$a_c = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$a_c = \alpha\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$a_c = \alpha\times\vec{r} + \cancelto{0}{(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{\omega}} - \omega^2\vec{r}$$

$$a_c = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

$$a_c = \alpha r(\hat{\theta}) + -\omega^2 r(\hat{r})$$

$$a_c = \alpha r\hat{\theta}$$

$$a_c = -\omega^2 r\hat{r}$$

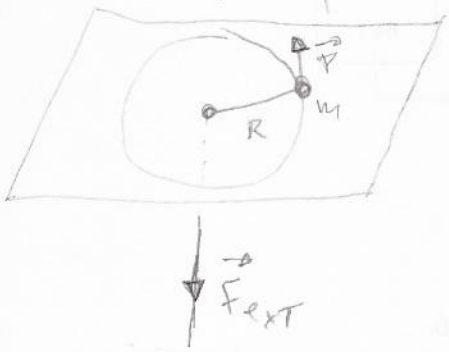
- Conservação de Momento angular em Forças Centrais.

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{r})\,\hat{r}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau = 0 \longrightarrow \vec{L} = cte$$

Exemplo 2. Um peso puxando um corpo através de um furo na mesa



a) Força central é constante $\vec{\tau} = 0$ e $\vec{L} = cte$

$$\vec{L}_R = \vec{L}_r$$

$$m v_i R = m v_f r$$

$$v_f = \frac{R}{r} v_i$$

b) W_f

$$W_f = \int_R^r \vec{F}\, d\vec{l} = \Delta K$$

$$W_f = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

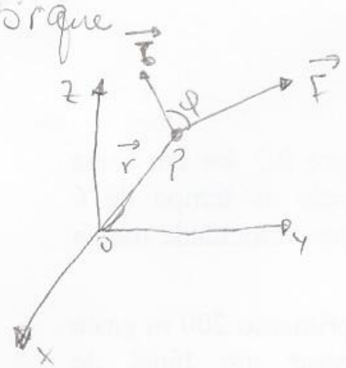
$$W_f = \frac{1}{2} m \left(\frac{R}{r} v_i\right)^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$W_f = \frac{1}{2} m \left(\frac{R^2}{r^2} v_i^2\right) - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$\boxed{W_f = \frac{1}{2} m v_i^2 \left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right)}$$

• Torque

Módulo do Torque: $\vec{\tau} = rF\sin\varphi$

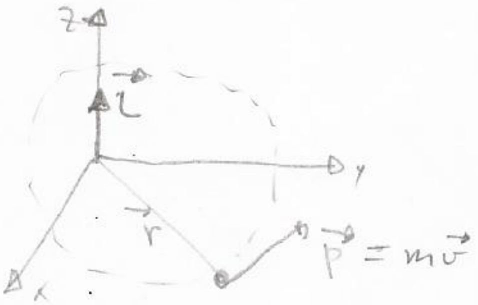


• Momento Angular

Dada uma partícula m com velocidade $\vec{v}$, a definição é:

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$, $\vec{L} \perp (\vec{r}, \vec{p})$



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \cancel{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}^{\,0} + \vec{r} \times \frac{d}{dt}\vec{p}$$

$\frac{d\vec{r}}{dt} = v$ e $\vec{v} // \vec{p}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \underbrace{\frac{d(m\vec{v})}{dt}}_{F}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{res}$ // → Senão houver $\vec{\tau}_{res}$ sobre a partícula, $\vec{L}$ = cte //

• Conservação do Momento Angular de um corpo em M.R.U   Exemplo 1.

↳ respeitando a 1ª Lei de Newton

Exemplo. Queda no Despenhadeiro.

Calcule: $\vec{L}$ e $\vec{\tau}$

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$\vec{L} = r_{\perp} \times \vec{p}$

Tabela de Referência entre Mov. Linear e Movimento Angular.

É extremamente importante que se faça a relação entre as grandezas que definem o movimento linear e o movimento Angular.

Movimento Linear		Movimento Angular	
Deslocamento linear	Δx	Deslocamento Angular:	$\Delta\theta$
Velocidade	$v = \frac{dx}{dT}$	Velocidade angular:	$w = \frac{d\theta}{dT}$
aceleração	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dT^2}$	Aceleração angular:	$\alpha = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\theta}{dT^2}$
MRU	$x = x_0 + v_0T$	MCU	$\theta = \theta_i + wT$
MRUA	$\begin{cases} V = v_0 + aT \\ x = x_0 + v_0T + \frac{aT^2}{2} \\ V^2 = V_0^2 + 2a\Delta S \end{cases}$	MCUA	$\begin{cases} w = w_0 + \alpha T \\ \theta = \theta_0 + w_0T + \frac{\alpha T^2}{2} \\ W^2 = w_0^2 + 2\alpha\Delta\theta \end{cases}$
Massa	m	momento Inércia	I
momento linear	$\vec{p} = m\vec{v}$	momento angular	$\vec{L} = I\vec{W}$
força	$\vec{F}$	Torque	τ
Energia Cinética	$K = \frac{mv^2}{2}$	Energia Cinética:	$K = \frac{Iw^2}{2}$
Potência	$P = Fv$	Potência	$P = \tau . w$
2ª Lei de Newton	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$	2ª Lei de Newton	$\tau = \frac{dL}{dt} = I\alpha$