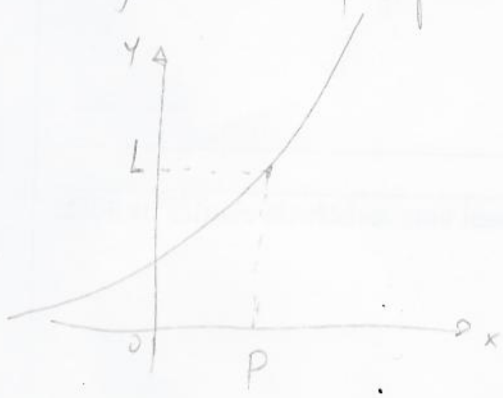
14.02.08 - Faculdade objetivo

Curso: Matemática com Álgebra Linear

• 1 - Noções de Limite: Estudo do comportamento de funções próximas à um ponto qualquer.

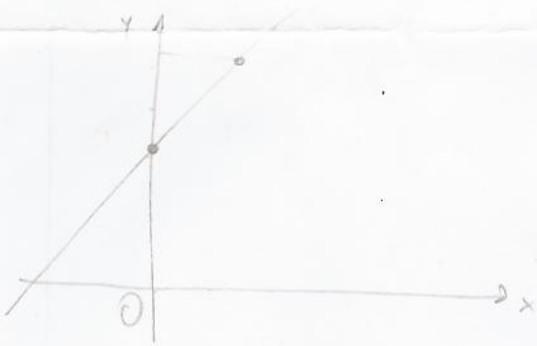
Ex: $y = f(x)$, quando x se aproxima de um ponto p.



fica: $\lim_{x \to p} f(x) = L$

Exemplos 1: $y = 3x+5$ e o ponto $p = 4$

x	$y = 3x+5$
0	5
1	8

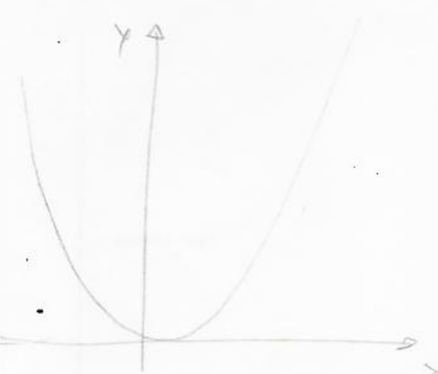


$$\lim_{x \to 4} (3x+5) = 3.4+5 = 12+5 = 17$$

$$\lim_{x \to 4} (3x+5) = 17$$

Exemplo 2.

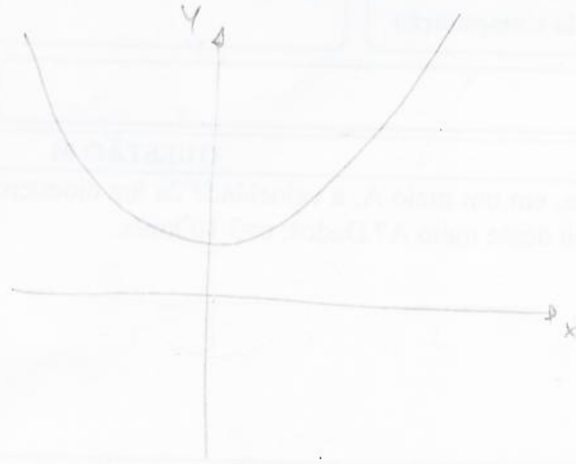
$f(x) = x^2$ e o ponto 2 e o ponto -2



$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 2} x^2 &= 4 \\ \lim_{x \to -2} x^2 &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Exemplo: $f(x) = x^2 - 2x + 1$ para o ponto $p = 3$.

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 2x + 1) \Rightarrow \lim_{x \to 3} = 9 - 6 + 1 \Rightarrow \lim_{x \to 3} = 4$$



$f(x) = x^2 - 2x + 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(1)$

$\Delta = 4 - 4 = 0$.

$$x = \frac{-(-2) \pm 0}{2} \quad x_1 = \frac{2}{2} = 1 \quad x_2 = \frac{-2}{2} = -1$$

$x_v = -\frac{b}{2a}$ $\quad Y_v = \frac{-\Delta}{4a}$

$Y_v = \frac{0}{4} = 0$.

$x_v = \frac{-(-2)}{2}$

$x_v = 1$

Exemplo

$$\frac{x^2-10x+16}{x-8} = \frac{64-80+16}{8-8} = \frac{0}{0}$$

Esquerda

$x = 7 \to y = 5$

$x = 7,9 \to y = 5,9$

Direita

$x = 9 \to y = 7$

$x = 8,9 \to y = 6,11$

Logo $\lim\limits_{x \to 8} \frac{x^2-10x+16}{x-8} = 6$

Exemplo

$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ para $p = 2$

Esquerda

$x = 1 \to y = \frac{1-4}{-1} \Rightarrow \frac{-3}{-1} = 3$

$x = 1,9 \to y = \frac{(1,9)^2-4}{1,9-2} \Rightarrow \frac{3,61-4}{-0,1} = 3,9$

Direita:

$x = 3 \to y = \frac{3^2-4}{3-2} \Rightarrow y = \frac{5}{1} =$

$x = 2,1 \to y = \frac{(2,1)^2-4}{2,1-2} = y = \frac{4,41-4}{0,1} = 4,1$

Logo $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$

20.02.08 Faculdade Objetivo (4)

2- Limites infinitos:

$\lim_{x \to p^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to p} f(x) = -\infty$

Exemplo 1: $f(x) = \frac{1}{x}$, para $p = 0$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Exemplo 3: $f(x) = \frac{5+x}{x^2}$, $p = 0$

$\lim_{x \to} \frac{5+x}{x} = \frac{5}{0}$??

pela esquerda

$x = -1 \to y = 4$

$x = -0,1 \to y = 490$

$x = -0,01 \to y = 49.900$

$x = -0,001 \to y = 4.999.000$

$\Downarrow$

$+\infty$

pela direita

$x = 1 \to y = 6$

$x = 0,1 \to y = 510$

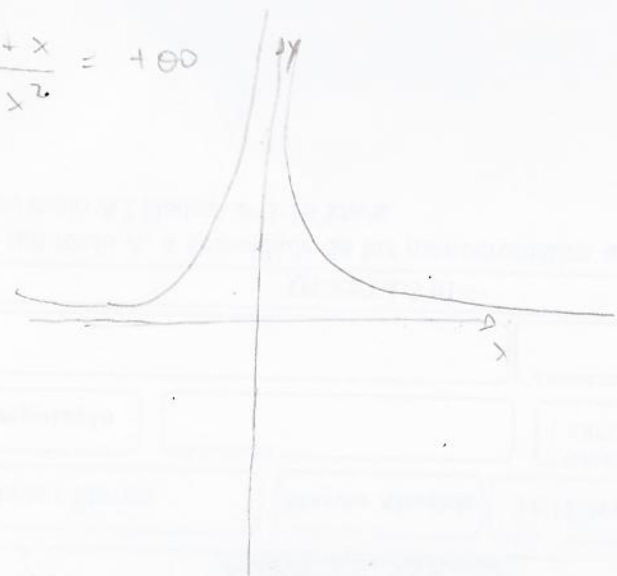
$x = 0,01 \to y = 50.100$

$x = 0,001 \to y = 5.001.000$

$\Downarrow$

$+\infty$

logo: $\lim_{x \to 0} \frac{5+x}{x^2} = +\infty$



Exemplo 3: $f(x) = \frac{1}{x^n}$, onde $n > 0$ e $p = \infty$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{1^n}{x^n} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = 0$$

Exemplo 4: $f(x)\ \frac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1}$, $p = \infty$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^5}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}\right)}{\cancel{x^5}\left(2 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right)} = \lim_{x \to \infty} = \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}}{2 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} = \frac{1}{2}$$

3 – Funções Contínuas e Descontínuas.

$f(x)$:

$g(x)$

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \qquad\qquad \lim_{x \to p} g(x) \neq L.$$

Exemplo 1. $f(x) = \frac{3x + 9}{x + 3}$ para $p = 2$

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x + 9}{x + 3} \Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{3(2) + 9}{2 + 3} \Rightarrow \lim_{x \to 2} = 3$$

logo: é contínua em $p = 2$.

Exemplo 2. $f(x) = \sqrt{x}$ para $p = 0$

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$$

Esquerda

???

???

Direita

$x = 1 \rightarrow y = 1$

$x = 0,1 \rightarrow y = 0,32$

$x = 0,001 \rightarrow y = 0,032$

Exemplo 3: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$ para $p = 3$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2+1}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{3^2+1}{3-3} \Rightarrow \lim_{x \to 3} \frac{10}{0} \quad ???$$

esquerda

$x = 2 \rightarrow y = -5$

$x = 2{,}9 \rightarrow y = -94{,}1$

$x = 2{,}99 \rightarrow y = -999{,}04$

$\rightarrow y = -\infty$

direita

$x = 4 \rightarrow y = 17$

$x = 3{,}1 \rightarrow y = 106{,}1$

$x = 3{,}001 \rightarrow y = 10.006{,}001$

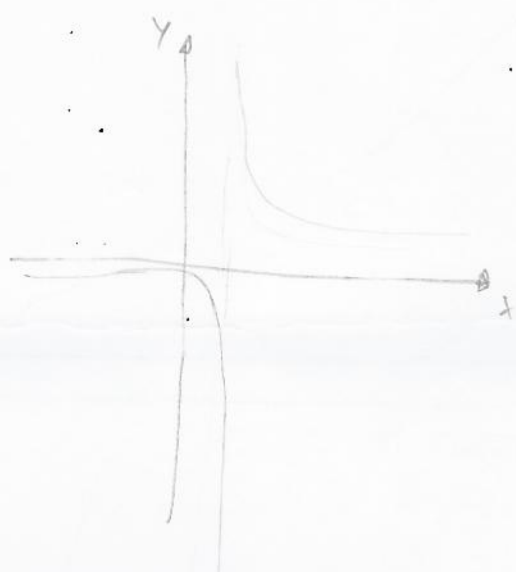
$\rightarrow y = +\infty$

logo limite esquerda de $p = -\infty$

limite direita de $p = +\infty$

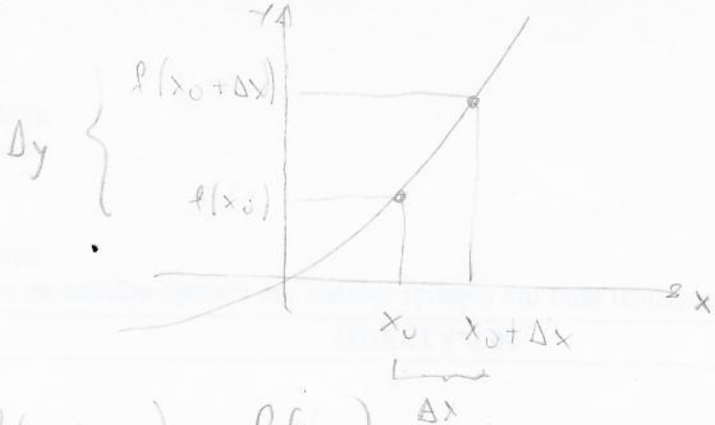
Portanto

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2+1}{x-3} = \nexists$$



- Taxa Média de Variação: (TVM) – Tangente – Reta Osculatória

Seja o gráfico de $f(x)$:



$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

$$\Delta x = (x_0+\Delta x) - x_0$$

$$TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{(x_0+\Delta x) - x_0}$$

Exemplo 1: $f(x) = 3x+1$ para $x_0 = 1$ e $\Delta x = 3$

$f(x_0) = 3(1)+1 = 4$

$f(x_0+\Delta x) = 3(1+3)+1 \Rightarrow 13$

$$TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{(x_0+\Delta x) - x_0} \Rightarrow \frac{13-4}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Exemplo 2: $f(x) = x^2+1$ para $x_0 = 1$ e $x_1 = 3$.

$\Delta x = 3 - 1 = 2$

$f(x_0) = (1)^2+1 = 2$

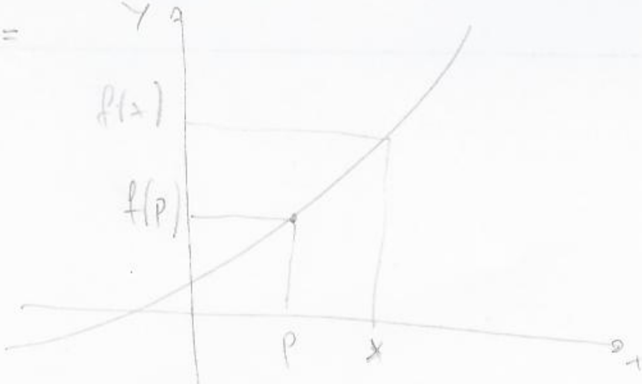
$f(x_0+\Delta x) = (1+2)^2+1 \Rightarrow 10$

$$TVM = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{(x_0+\Delta x) - x_0} = \frac{10-2}{2} = 4$$

Conclusão: No intervalo $[1, 3]$ a função $f(x) = x^2+1$ está crescendo à uma taxa média de 4 unidades de y para uma de x.

• Conceito de Derivada.

Seja o gráfico $f(x) =$



$\Delta y = f(x) - f(L)$

$\Delta x = x - p$

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = f'(x)$$

Exemplo 1: Seja $f(x) = 3x + 1$, para $p = 1$ e $x = 4$

$$f'(x) = \frac{13 - 4}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{3} = 3.$$

→ Regras de Derivação:

- Função Constante: Seja $f(x)=K$, fica: $f'(x)=0$

Ex: $f(x)=8 \rightarrow f'(x)=0$

- Derivada de potência: Seja $f(x)=x^n$, $n \in \mathbb{R}$, fica $f'(x)=n\,x^{n-1}$

Ex1: $f(x)=x^3 \rightarrow f'(x)=3x^2$ Ex2 $f(x)=x^3+2x^2 \Rightarrow f'(x)=3x+4x$

- Derivada de funções exponenciais e logaritmos.

Seja: $f(x)=e^x$ $\qquad f(x)=\ln x$

$f'(x)=e^x$. $\qquad f'(x)=\frac{1}{x}$.

- Derivada do produto de funções.

Seja $f(x)=a(x)+b(x)$.

$f'(x)=a'(x).b(x)+a(x).b'(x)$

Ex1: $f(x)=x.e^x$

$f'(x)=(x)'.e^x+x.(e^x)'$

$f'(x)=1.e^x+xe^x$

$f'(x)=e^x(1+x)$ //

Ex 2: $f(x)=2x\ln x$

$f'(x)=(2x)'\ln x+2x(\ln x)'$

$f'(x)=2\ln x+2x.\frac{1}{x}$

$f'(x)=2\ln x+2$

$f'(x)=2(\ln x+1)$

Derivada do Quociente de 2 funções:

Seja $f(x) = \dfrac{a(x)}{b(x)}$

$$f'(x) = \frac{a'(x) \cdot b(x) - a(x) \cdot b'(x)}{b^2(x)}$$

Ex 1: $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $x \neq -1$

$$f'(x) = \frac{x'(x+1) - x \cdot (x-1)'}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot (1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{+1}{(x+1)^2}$$

//

Ex 2: $f(x) = \dfrac{10}{x^2+2x+1}$, $x \neq -1$.

$$f'(x) = \frac{(10)' \cdot (x^2+2x+1) - 10(x^2+2x+1)'}{(x^2+2x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-10(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-20x-20}{(x^2+2x+1}$$

$$f'(x) = \frac{-20(x-1)}{(x^2+2x+1)}$$

//

- Derivadas de funções Trigonométricas:

Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad f(x) = \cos x$ $\quad f(x) = \operatorname{tg} x$

$f'(x) = \cos x$ $\quad f'(x) = -\operatorname{sen} x$ $\quad f'(x) = \sec^2 x$

- Regra da Cadeia para Derivação de função Composta

Ex 1: $f(x) = e^{3x}$

$f'(x) = e^{3x} \cdot (3x)'$

$f'(x) = e^{3x} \cdot 3$

$f'(x) = 3e^{3x}$

Ex 2: $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

$f'(x) = \operatorname{sen}' x^2 \cdot (x^2)'$

$f'(x) = \cos x^2 \cdot 2x$

$f'(x) = 2x \cos x^2$ //

Ex 3: $f(x) = e^{4x+3}$

$f'(x) = (e^{4x+3})^2 \cdot (4x+3)'$

$f'(x) = e^{4x+3} \cdot 4$

$f'(x) = 4e^{4x+3}$

Ex 4: $f(x) = (3x^2+1)^3$

$f(x) = 3(3x^2+1)^2 \cdot (3x^2+1)'$

$f'(x) = 3(3x^2+1)^2 \cdot 6x$

$f'(x) = 18x(3x^2+1)^2$

Ex 5: $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

$f(x) = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{-1}{2}} \cdot (x^2+1)'$

$f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}}(x^2+1)^{\frac{-1}{2}} \cdot \cancel{2}x$

$f'(x) = (x^2+1)^{\frac{-1}{2}} \cdot x$

$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} \cdot x$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot x$

Derivadas sucessivas de uma função.

Seja $y = f(x)$

$y' = f'(x)$ 1ª derivada

$y'' = f''(x)$ 2ª derivada

$y''' = f'''(x) = $ 3ª derivada

Exemplo 1: $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2$

$f'''(x) = 0$

Exemplo 2. $f(x) = x^4 - x^3$

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2$

$f''(x) = 12x^2 - 6x$

$f'''(x) = 24x - 6$

$f^{iv}(x) = 24$

Exemplo 3. $f(x) = e^x$

$f'''(x) = e^x$

Exemplo 4 $f(x) = e^{2x}$

$f'(x) = 2e^{2x}$

$f''(x) = 4e^{2x}$

$f'''(x) = 8e^{2x}$

$f^{iv}(x) = 16e^{2x}$

Introdução ao Cálculo Variacional

Aspectos Gerais de Estudos de funções Matemáticas

função crescente : 1ª derivada positiva
curvatura para cima 2ª derivada positiva

função crescente : 1ª derivada positiva
curvatura para baixo. 2ª derivada negativa

função decrescente : 1ª derivada negativa
curvatura para cima . 2ª derivada positiva.

função decrescente . 1ª derivada negativa
curvatura para baixo. 2ª derivada negativa.

A derivada mede a tendência ao crescimento ou decrescimento da função $y = f(x)$ estudada.

1ª Derivada: $f'(x)$ = avalia o crescimento ou decrescimento de $f(x)$

2ª Derivada: $f''(x)$ = avalia a concavidade de $f(x)$. Se é positiva concavidade para cima e se negativa concavidade para baixo.

Exemplo 1: $f(x) = 2x+10$, $x \in \mathbb{R}$

1ª Derivada $f'(x) = 2$ → $2 > 0$, logo crescente.

2ª Derivada $f''(x) = 0$ → função sem concavidade

Esboço do gráfico $f(x)$:

Exemplo 2: $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$

1ª Derivada: $f'(x) = 2x$, iguala à zero.

$2x = 0$

$x = \frac{0}{2}$

$x = 0$ → ponto de mínimo.

Análise do sinal de $f'(x)$

Se $\begin{cases} x > 0 \rightarrow f'(x) > 0 \\ x < 0 \rightarrow f'(x) < 0. \end{cases}$

Conclusão: $- - - - - - - \underset{0}{|} + + + + + + +$

2ª Derivada $f''(x) = 2$, como $2 > 0$

C.V.C em $\mathbb{R}$

Exemplo 3: $f(x) = x^2 - 6x, \quad x \in \mathbb{R}$

1º Derivada: $f'(x) = 2x - 6$, iguala à zero

$$2x - 6 = 0$$
$$2x = 6$$
$$x = 3 \rightarrow \text{ponto de Mínimo.}$$

Análise do final de $f'(x) \rightarrow$ crescente ou decrescente

$$\text{Se} \begin{cases} x > 3 \rightarrow f'(x) > 0 \\ x < 3 \rightarrow f'(x) < 0 \end{cases}$$

− − − − − − − | + + + + + +

3

2º Derivada $f''(x) = 2$,

Análise do final de $f''(x) =$ concavidade. Sem ponto de inflexão.

Como $f''(x) > 0 \rightarrow$ em todo $\mathbb{R}$, concavidade voltada para cima.

Exemplo 4. $f(x) = x^3 - 12x^2 + 6, \quad x \in \mathbb{R}$

1º Derivada $f'(x) = 3x^2 - 24x$, igualando a zero

$$3x^2 - 24x = 0$$
$$x(3x - 24) = 0$$
$$x = 0$$
$$3x - 24 = 0$$
$$3x = 24$$
$$x = \frac{24}{3} \therefore x = 8$$

logo: $x_1 = 0$ e $x_2 = 8$

Análise do final da 1º Derivada: → crescente decrescente.

+ + + + + + + | − − − − − − − | + + + + + + +

0 8

$$\text{Se} \begin{cases} x < 0 \rightarrow f'(x) > 0 \quad\quad x > 8 \rightarrow f'(x) > 0 \\ 0 < x < 8 \rightarrow f'(x) < 0 \end{cases}$$

2ª Derivada $f''(x) = 6x - 24$, igualando a zero.

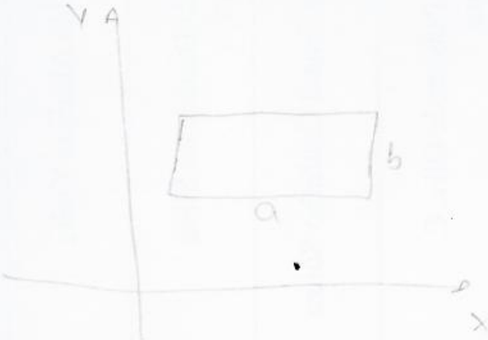
$$6x - 24 = 0$$
$$6x = 24$$
$$x = \frac{24}{6}$$
$$x = 4 \rightarrow \text{ponto de inflexão}$$

Análise de Sinal do $f''(x) \rightarrow$ Concavidade

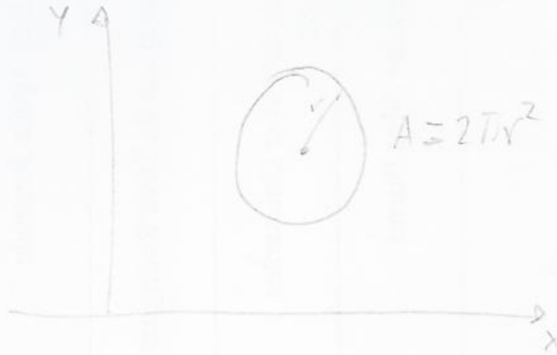
Se $\begin{cases} x > 4 \rightarrow f''(x) > 0 \\ x < 4 \rightarrow f''(x) < 0 \end{cases}$

$$- - - - - - - - - - - - \quad + + + + + + + + + + + +$$
$$4$$

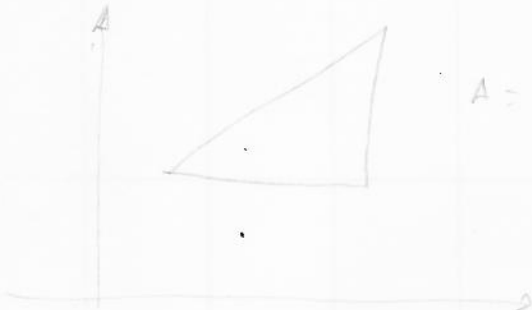
Cálculo de Áreas (Integral de Riemann)



$A = a.b$



$A = 2\pi r^2$



$A = \frac{b.h}{2}$

∘ Integral Indefinida ou Primitiva.

Seja $f(x)$ uma função derivável num intervalo I. Chamaremos de $P(x)$ sua primitiva em I, quando

$$P'(x) = f(x), \quad x \in I$$

→ Técnicas de Integração

∘ Integral de constante

$\int K dx \rightarrow x + C$

∘ Integral de Potência

$\int x \, dx \rightarrow \frac{x^2}{2} + C$

$\int x^3 \, dx \rightarrow \frac{x^4}{4} + C$

$\int x^n dx, \; n \neq -1 \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

- Integral de e^x

$\int e^x dx \Rightarrow e^x + C$

- Integral de $\ln x$

$\int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln|x| + C$

- Integral do Tipo a^x

$\int a^x dx \Rightarrow \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\int a x^2 dx \Rightarrow a \int x^2 dx \Rightarrow a \frac{x^3}{3} + C$

Exemplos:

1) $\int 5 dx \rightarrow 5x + C$

2) $\int 4x dx \rightarrow 4 \int x dx \Rightarrow 4 \frac{x^2}{2} \Rightarrow 2x^2 + C$

3) $\int 3x^2 + 5 dx \Rightarrow \int 3x^2 dx + \int 5 dx \Rightarrow 3 \frac{x^3}{3} + 5x \Rightarrow x^3 + 5x + C$

4) $\int \sqrt{x} dx \Rightarrow \int x^{\frac{1}{2}} dx \Rightarrow \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C \Rightarrow \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt[3]{x^2} + C$

5 $\int \operatorname{sen} x \, dx \Rightarrow -\cos x + C$

6) $\int \cos x \, dx \Rightarrow \operatorname{sen} x + C$

7) $\int (x^2 + x^3) dx \Rightarrow \int x^2 dx + \int x^3 dx \Rightarrow \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + C$

→ Técnica de Substituição:

Exemplo 1: $\int (2x+1)^3 dx$

$u = 2x+1 \rightarrow u' = 2$

$\frac{du}{dx} = 2$

$du = 2\,dx$

$dx = \frac{du}{2}$

$\int u^3 \cdot \frac{1}{2} du$

$\frac{1}{2} \int u^3 du$

$\frac{1}{2} \frac{u^4}{4} + k$

$\frac{u^4}{8} + k$

$\frac{(2x+1)^4}{8} + k \rightarrow \frac{4(2x+1)^3 \cdot 2 \cdot 8 - (2x+1)^4 \cdot 0}{64} = \frac{\cancel{64}(2x+1)^3}{\cancel{64}}$

$= (2x+1)^3$

Exemplo 2: $\int \frac{x}{1+x^2} dx$

$u = 1+x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$du = 2x\,dx$

$dx = \frac{du}{2x}$

$\int \frac{x}{u} \frac{1}{2x} du$

$\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du$

$\frac{1}{2} \ln|u| + k$

$\frac{1}{2} \ln|2x+1|^3 + K$

Exemplo 3: $\int e^{3x}\,dx$

$u = 3x$

$\frac{du}{dx} = 3$

$du = 3dx$

$dx = \frac{du}{3}$

$\int e^{u} \cdot \frac{1}{3}\,du$

$\frac{1}{3}\int e^{u}\,du$

$\frac{1}{3} e^{u} + K$

$\frac{1}{3} e^{3x} + K$

Exemplo 4: $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$

$u = 1+x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$du = 2x\,dx$

$dx = \frac{du}{2x}$

$\int x \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2x}\,du$

$\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,.\,du$

$\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + K.$

$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot u^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3}$

$\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} + K$

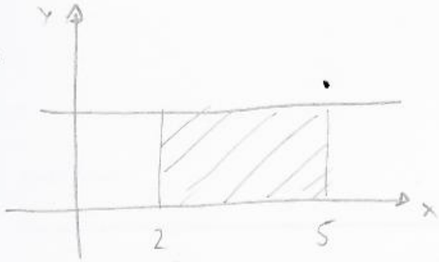
$\frac{\left|(1+x)^2\right|^{\frac{3}{2}}}{3} + K \Rightarrow \frac{1}{3}\sqrt{\left((1+x)^2\right)^3} + K$

Integral Definida

• Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Exemplo 1: $f(x) = 3$



$A = a \cdot b$
$A = 3 \cdot 3$
$A = 9$

$A = \int f(x)\,dx$

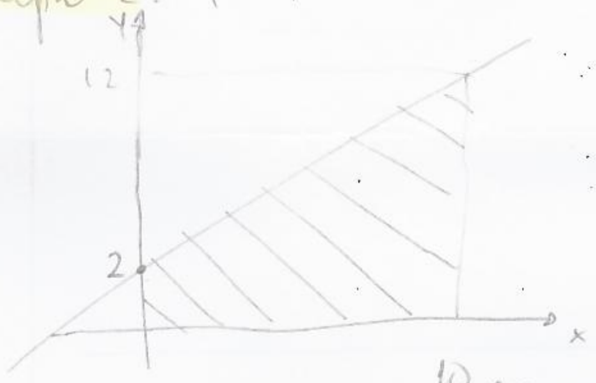
$A = \int_2^5 3\,dx$

$A = 3x \Big|_2^5$

$A = 3(5) - 3(2)$

$A = 15 - 6 \therefore A = 9$ //

Exemplo 2: $f(x) = x + 2$



$A = \dfrac{B + b}{2} \cdot h$

$A = \dfrac{12 + 2}{2} \cdot 10$

$A = \dfrac{14}{2} \cdot 10$

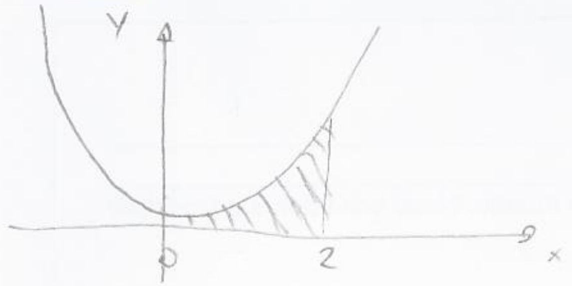
$A = 70$

$A = \int f(x)\,dx \Rightarrow A = \int_0^{10} (x+2)\,dx \Rightarrow A = \int_0^{10} x\,dx \; \int_0^{10} 2\,dx \Rightarrow$

$A \Rightarrow \dfrac{x^2}{2}\Big|_0^{10} + 2x\Big|_0^{10} \Rightarrow A = \dfrac{10^2}{2} - 0 + 2.10 - 0 \Rightarrow A = 50 + 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 70$ //

Exemplo 3: $f(x) = x^2$



$$A = \int f(x)\,dx$$

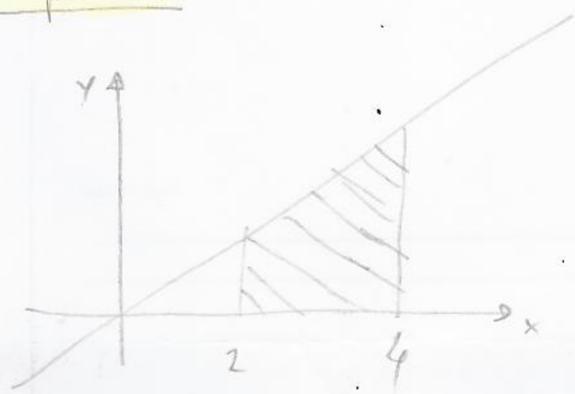
$$A = \int_0^2 x^2\,dx$$

$$A = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2$$

$$A = \frac{2^3}{3} - 0$$

$$A = \frac{8}{3}$$

Exemplo 4: $f(x) = x$



$$A = \int f(x)\,dx$$

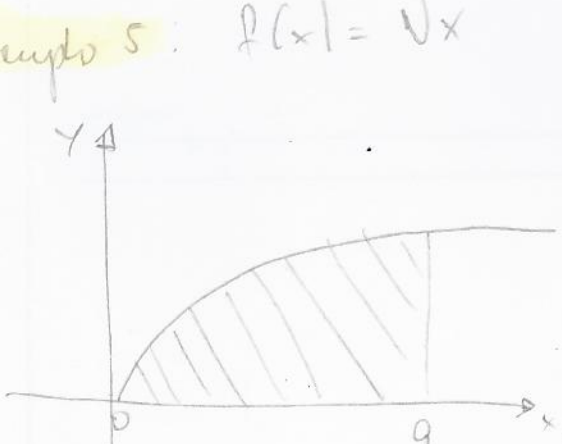
$$A = \int_2^4 x\,dx$$

$$A = \left.\frac{x^2}{2}\right|_2^4$$

$$A = \frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2}$$

$$A = \frac{16}{2} - \frac{4}{2} \Rightarrow A = 8 - 2 \Rightarrow A = 6$$

Exemplo 5: $f(x) = \sqrt{x}$



$$A = \int f(x)\,dx$$

$$A = \int_0^9 x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$A = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$A = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}$$

$$A = \left.\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right|_0^9$$

$$A = \frac{2}{3}\sqrt{9^3}$$

$$A = \frac{2}{3}\sqrt{729}$$

$$A = \frac{2}{3}\cdot 27$$

$$A = 18$$