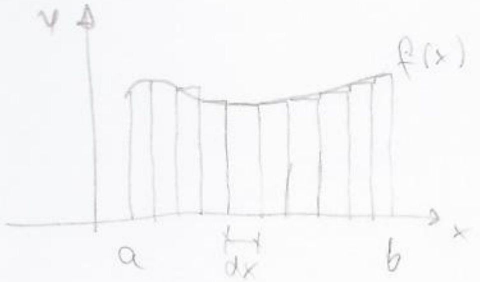
Antiderivadas e Integrais. Aplicação de Integrais Definidas (1)

- O Teorema fundamental do Cálculo, diz que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad ; \quad F \text{ é a primitiva de } f(x)$$

- Cálculo de Áreas



$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \text{Soma de Riemann}$$

$$\text{área} \Rightarrow A = \int_a^b f(x)\,dx$$

- Aplicações de cálculo integral na física:

a) mecânica

i) Problema da queda livre de um corpo sob ação de g próximo à superfície da Terra. Adotando referencial $\downarrow^{0}_{y}$

$$v_y = \int_0^t g\,dt \Rightarrow v_y = gt\Big|_0^t \Rightarrow v_y = gt$$

$$y = \int_0^T v(t)\,dt \Rightarrow y = \int_0^T gt\,dt \Rightarrow y = g\frac{t^2}{2}\Big|_0^T \Rightarrow y = g\frac{T^2}{2}$$

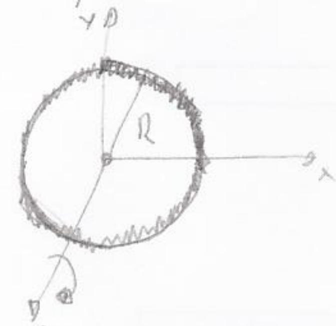
ii) Teorema do Trabalho e da Energia Cinética

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx \Rightarrow \text{como } F = ma \text{ e podemos escrever } a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \text{ e}$$

ainda $\frac{dx}{dt} = v$, fica que $a = v\frac{dv}{dx}$, voltando: $W = \int_{x_1}^{x_2} m.v\frac{dv}{dx}\,dx \Rightarrow$

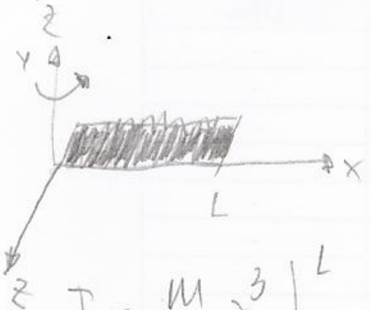
$$W = \int_{v_1}^{v_2} m.v\,dv \Rightarrow W = \frac{mv^2}{2}\Big|_{v_1}^{v_2} \Rightarrow \left[W = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}\right]$$

iii) Momento de Inercia de um Sólido



$$I = \int_0^R r^2\, dm$$, como toda a massa se concentra a mesma distância de R, fica:

$$I = \frac{r^3 M}{3} \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{3} M R^3}$$



$$dm = \frac{M}{L} dx \; ; \; I = \int_0^L x^2\, dm \Rightarrow I = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx \Rightarrow$$

$$I = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_0^L \Rightarrow I = \frac{1}{3} \frac{M}{L} . L^3 - 0 \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{3} M L^2}$$

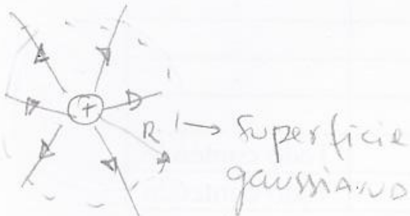
b) Termodinâmica

i) Cálculo do Trabalho de um gás ideal numa isoterma num diagrama PV

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P . dV \Rightarrow W = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV \Rightarrow W = nRT \ln|V| \Big|_{V_1}^{V_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{W = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$$

c) Eletrostática: Cálculo do Campo elétrico através da lei de Gauss gerado por uma carga +q



$$\oint_S \vec{E} . \vec{da} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \oint_0^{R} \vec{da} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E} . 4\pi r^2 = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$