EQUAÇÕES Diferenciais de 1ª Ordem

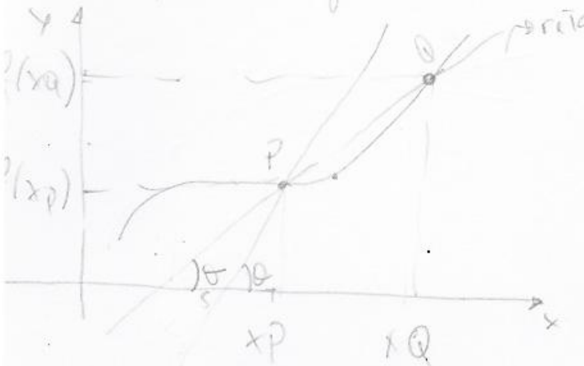
Revisão: Equação porque existe o sinal de igualdade (=). Diferencial porque na sua estrutura tem uma derivada, de 1ª ordem porque se refere ao grau da derivada, nesse caso, 1ª derivada.

Equações diferenciais estudam problemas, com grandezas que variam no tempo. Suas soluções são sempre funções, ao contrário de equações algébricas que sempre são números.

O desenvolvimento de suas soluções envolvem o conceito de derivada e do T.F.C (Teorema Fundamental do Cálculo), ambos alicerçados no conceito de limite.

Tem grande aplicações em física, engenharia, biologia, finanças.

- Interpretação geométrica de Derivadas.



$$Tg\theta_s = \frac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P}$$

Se aproximarmos o ponto Q do ponto P a reta secante PQ se tornará uma reta tangente P, formando um ângulo θ_T, segue:

$f(x_Q) = f(x_P + \Delta x)$, logo: $Tg\theta_s = \dfrac{f(x_P + \Delta x) - f(x_P)}{x_P + \Delta x - x_P} \Rightarrow Tg\theta_s = \dfrac{f(x_P + \Delta x) - f(x_P)}{\Delta x}$

Se tomarmos o limite de ambos os lados:

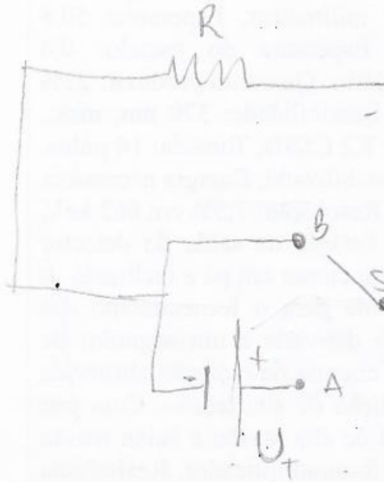
$$\lim_{\Delta x \to 0} Tg\theta_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_P + \Delta x) - f(x_P)}{\Delta x}$$

Chamamos o lado esquerdo da igualdade de derivada e representamos por algumas notações, como: y' ; $\dfrac{dy}{dx}$.

O T.F.C nos diz que $\int f(x)dx = F(x) + C$, onde $F(x)$ é chamada de primitiva ou antiderivada. Segue:

$$T.F.C: \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

→ Exemplo de Aplicações de Equações Diferenciais: Circuito Elétrico RC



$$U = R\,i$$

$$U_c = \frac{q}{C}$$

$$i = \frac{dq}{dT}.$$

Usando a 2ª Lei de Kirchoff (Lei das Malhas) para o circuito, Temos:

$$U_T = U_R + U_c \Rightarrow U_T = R.\frac{dq}{dT} + \frac{q}{C}$$

$$\frac{U_T}{R} = \frac{dq}{dT} + \frac{q}{RC}$$

$$\frac{dq}{dT} = \frac{U_T}{R} - \frac{q}{RC}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{CU_T - q}{RC}$$

$$\frac{dq}{CU_T - q} = \frac{dT}{RC} \Rightarrow \int_0^q \frac{dq}{CU_T - q} = \int_{T_0}^{t} \frac{1}{RC}\,dT \Rightarrow -\ln(CU_T - q)\Big|_0^q = \frac{T}{RC}$$

$$= \frac{T}{Rc}\Big|_0^{\tau} = \frac{T}{Rc} - \cancel{\frac{T_0}{Rc}}_{\to 0}.$$

$$= \ln\left(CU_T - q\right)\Big|_0^{q} = \ln\left(CU_T - q\right) - \ln\left(CU - 0\right)$$

$$= \ln\frac{\left(CU_T - q\right)}{CU}$$

$$\ln\left(\frac{CU_T - q}{CU_T}\right) - \frac{T}{RC}$$

$$\frac{CU_T - q}{CU_T} = e^{-\frac{T}{RC}}$$

$$CU_T - q = CU_T\, e^{-\frac{T}{RC}}$$

$$q = CU_T\, e^{-\frac{T}{RC}} - CU_T$$

$$q = CU_T\left(e^{-\frac{T}{RC}} - 1\right)$$

Carga do capacitor $= \boxed{q = CU_T\left(e^{-\frac{T}{\sigma}} - 1\right)}$, $\sigma = RC$

Como: $i = \dfrac{dq}{dT}$

$$\cancel{i = CU_T\left(e^{-\frac{T}{\sigma}} - 1\right)}$$

$$i = \frac{d}{dt}\left[CU_T\left(e^{-\frac{T}{\sigma}} - 1\right)\right]$$

$$i = \frac{dq}{dT} \Rightarrow i = \frac{d}{dT}\left[CV_0\left(1 - e^{-\frac{T}{RC}}\right)\right] \Rightarrow i = \cancel{\frac{d}{dT}CV_0}_{\Rightarrow 0} - \frac{d}{dT}CV_0\, e^{-\frac{T}{RC}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = -\frac{d}{dT}CV_0\, e^{-\frac{T}{RC}} \Rightarrow i = -\cancel{C}V_0\left(e^{-\frac{T}{RC}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{R\cancel{C}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = \frac{V_0}{R}\, e^{-\frac{T}{RC}} \quad \text{ou} \quad i = \frac{V_0}{R}\, e^{-\frac{T}{\tau}} \quad //$$

Corrente Elétrica do Circuito. (OK)

$$i = -\frac{d}{dT}CV_0\, e^{-\frac{T}{RC}} \Rightarrow y' = e^{-\frac{T}{RC}} \Rightarrow y' = e^{-\frac{T}{RC}}\cdot\left(-\frac{1}{RC}\right)$$

$$y' = -\frac{1}{RC}\, e^{-T/RC}$$

$$i = \frac{dq}{dT} = CV_0\left(1 - e^{-T/RC}\right) \Rightarrow i = \frac{d}{dT}\left[CV_0\left(1 - e^{-T/RC}\right)\right] \Rightarrow$$

$$i = \cancel{\frac{d}{dT}CV_0}_{\Rightarrow 0} - \frac{d}{dT}CV_0\, e^{-T/RC} \Rightarrow i = -\cancel{C}V_0\left[e^{-T/RC}\cdot\left(-\frac{1}{R\cancel{C}}\right)\right] \Rightarrow$$

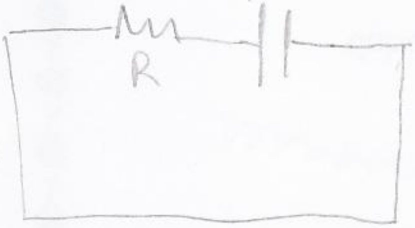
$$i = \frac{V_0}{R}\, e^{-T/RC} \quad // \quad \text{ou} \quad i = \frac{V_0}{R}\, e^{-T/\tau} \quad //$$

$$\int \frac{1}{3-x}\,dx \Rightarrow \int (3-x)^{-1}\,dx = \ln(3-x)\cdot -1 = -\ln(3-x)$$

$$\int (1-x)^{-1} = \int \frac{1}{1-x}$$

$$\int \frac{dq}{CV_0-q} = \int (CV_0-q)^{-1}\,dq \Rightarrow -\ln(CV_0-q)\Big|_0^q =$$

descarga do Capacitor



condição capacitor carregado.

$$V_R + V_C = 0.$$

$$\frac{R}{R}\frac{dq}{dT} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\frac{dq}{dT} + \frac{q}{RC} = 0.$$

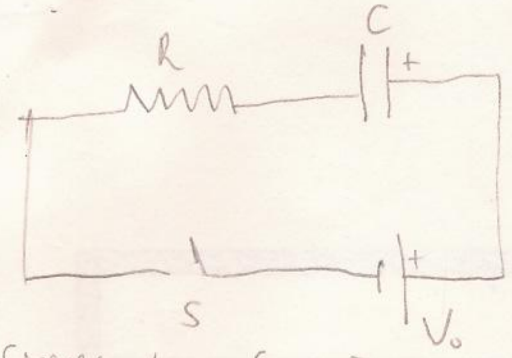
$$\frac{dq}{dT} = -\frac{q}{RC}$$

$$\int_{CV_0}^{q} \frac{dq}{q} = -\int_0^T \frac{dT}{RC}$$

$$\ln q\Big|_{CV_0}^{q} = -\frac{T}{RC} \Rightarrow \ln q - \ln CV_0 = -\frac{T}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{q}{CV_0}\right) = -\frac{T}{RC} \Rightarrow \frac{q}{CV_0} = e^{-T/RC} \Rightarrow q = CV_0\, e^{-T/RC} \Rightarrow$$

$$q(T) = CV_0\, e^{-T/RC} \Rightarrow q(T) = \frac{CV_0}{e^{T/RC}}, \quad T \gg 0 \rightarrow q(T) = 0.$$



$V_R = R.I$

$V_c = \frac{q}{C}$

$i = \frac{dq}{dT}$

→ Carregando o Capacitor

Pela lei das Malhas, fica:

$V_0 - V_R - V_c = 0 \Rightarrow V_0 - R\frac{dq}{dT} - \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{V_0}{R} - \frac{dq}{dT} - \frac{q}{RC} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{dq}{dT} = -\frac{V_0}{R} + \frac{q}{RC} \Rightarrow \frac{dq}{dT} = \frac{V_0}{R} - \frac{q}{RC} \Rightarrow \frac{dq}{dT} = \frac{CV_0 - q}{RC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dq}{dT} = \frac{1}{RC}(CV_0 - q) \Rightarrow dq \cdot RC = (CV_0 - q) \cdot dT \Rightarrow \frac{dq}{CV_0 - q} = \frac{dT}{RC} \Rightarrow$

$\int_0^q \frac{1}{CV_0 - q}\, dq = \int_0^T \frac{1}{RC}\, dT \Rightarrow -\ln(CV_0 - q)\Big|_0^q = \frac{T}{RC}\Big|_0^T \Rightarrow$

$\Rightarrow -\ln(CV_0 - q) - (-\ln CV_0) = \frac{T}{RC} \Rightarrow +\ln\left(\frac{CV_0 - q}{CV_0}\right) = -\frac{T}{RC} \Rightarrow$

$\frac{CV_0 - q}{CV_0} = e^{\frac{-T}{RC}} \Rightarrow CV_0 - q = CV_0 e^{-\frac{T}{RC}} \Rightarrow$

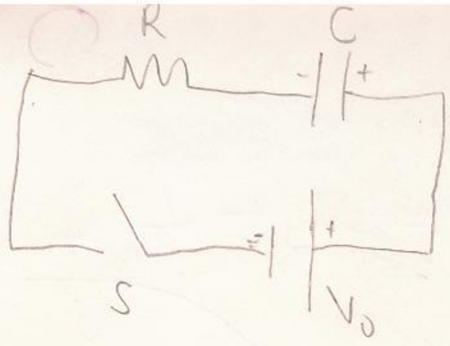
$-q = CV_0 e^{-\frac{T}{RC}} - CV_0 \Rightarrow -q = CV_0\left(e^{-\frac{T}{RC}} - 1\right) \Rightarrow q = CV_0\left(1 - e^{-\frac{T}{RC}}\right)$

logo, a carga do capacitor se dá por: $\boxed{q(T) = CV_0\left(1 - e^{-\frac{T}{RC}}\right)}$ //

como $RC = \tau$ (constante de Tempo Capacitiva), fica:

$q(T) = CV_0\left(1 - e^{\frac{-T}{\tau}}\right)$ //

⇒ Para acharmos a corrente, fica que: $i = \frac{dq}{dT}$, derivando, Temos.



$V_R = R \cdot i$

$V_C = \dfrac{q}{C}$

$i = \dfrac{dq}{dT}$

Cálculo da carga do capacitor.

Condições iniciais $T_0 = 0$ e o capacitor está descarregado.
e funciona como um curto para quando $T_0 = 0$

$$V_0 - V_R - V_C = 0 \Rightarrow V_0 - R\frac{dq}{dT} - \frac{q}{C} = 0.$$

$$\frac{V_0}{R} - \frac{dq}{dT} - \frac{q}{RC} = 0 \Rightarrow -\frac{dq}{dT} = -\frac{V_0}{R} + \frac{q}{RC}$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{dT} = \frac{V_0}{R} - \frac{q}{RC} \Rightarrow \frac{dq}{dT} = \frac{CV_0 - q}{RC}$$

$$\Rightarrow dq \cdot RC = (CV_0 - q)\,dT \Rightarrow \frac{dq}{CV_0 - q} = \frac{dT}{RC} \Rightarrow$$

$$\int_0^{q} \frac{dq}{CV_0 - q} \overset{??}{=} \int_0^{T} \frac{dT}{RC} \Rightarrow -\ln(CV_0 - q)\Big|_0^{q} = \frac{T}{RC}\Big|_0^{T} \Rightarrow$$

$$\left[-\ln(CV_0 - q) - \ln CV_0\right] = \frac{T}{RC} \Rightarrow +\ln\left(\frac{CV_0 - q}{CV_0}\right) = -\frac{T}{RC}$$

$$\frac{CV_0 - q}{CV_0} = e^{-T/RC} \Rightarrow CV_0 - q = CV_0 e^{-T/RC} \Rightarrow$$

$$-q = CV_0 e^{-T/RC} - CV_0 \Rightarrow q = -CV_0 e^{-T/RC} + CV_0.$$