Aula - Sobre a Transformada de Laplace ①

- Porque Aprender
- Reconhecer a estrutura da Transformada
- Exemplo de Aplicação da Transformada
- Uso da Tabela.

---

*Oferece soluções mais simples convertendo problemas com dependência do tempo em problemas algébricos com soluções mais fáceis.

Ex: Circuito RC, ao invés de uma fonte de Tensão constante, usa-se uma função periódica

$$\underset{T}{\text{EDO}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \underset{S}{\text{Eq. Algébrica}}$$

??

$$\text{Solução} \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} \text{Solução}$$

* Transformada de Laplace ($\mathcal{L}$)

$$\mathcal{L}\{f(\tau)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(\tau)\,d\tau$$

função imprópria

$$\int_0^{\infty} g(\tau)\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b g(\tau)\,d\tau$$

②

$$\mathcal{L}\{f(\tau)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau$$

* Exemplo – Tabela função 4 : $f(\tau) = e^{K\tau}$

$$\mathcal{L}\{e^{K\tau}\} = \int_0^{\infty} e^{-s\tau}\cdot e^{K\tau}\,d\tau = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-s\tau}\cdot e^{K\tau}\,d\tau =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-(s-K)\tau}\,d\tau = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{-s-K} e^{-(s-K)\tau} \Big|_0^b \right] =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{-s-K} e^{-(s-K)b} - \left(\frac{1}{-(s-K)} \underbrace{e^{-(s-K)0}}_{1} \right) \right] =$$

Para $s-K>0 \to s>K \to \lim \to 0$

Para $s-K<0 \to s<K \to \lim \to \infty$ (diverge)

solução: $\mathcal{L}\{e^{K\tau}\} = \frac{1}{s-K}$ para $s-K>0$ ou $s>K$

$$\int e^{-(s-K)\tau}\,d\tau = \int e^{u} \frac{du}{-(s-K)} = \frac{1}{-s-K} e^{-(s-K)} + c$$

$$u = -(s-K)\tau \to \frac{du}{dt} = -(s-K) \to d\tau = \frac{du}{-(s-K)}$$

$$e^{-s\tau+K\tau} = e^{\tau(-s+K)} = e^{-(s-K)\tau}$$

③

* Exemplo 2: $f(t) = 3$

$$\mathcal{L}\{3\} = F(s) = \frac{3}{s}$$

* Exemplo 3: $f(t) = t^2$

$$\mathcal{L}\{t^2\} = F(s) = \frac{2}{s^3}$$

Para a próxima aula!

- Transformadas inversas $\mathcal{L}^{-1}$
- condição de existência da Transformada
- Propriedade da Linearidade
- Propriedade da Transformada Derivada
- Propriedade de Transformada da Integral

④

Exemplo: $f(t) = 5 + \frac{t^3}{6} + 2\,\text{sen}\,4t$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{1\} + \frac{1}{6}\mathcal{L}\{t^3\} + 2\mathcal{L}\{\text{sen}\,4t\}$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{3!}{s^4} = \frac{3.2.1}{s^4} = \frac{6}{s^4}$$

$$\mathcal{L}\{\text{sen}\,4t\} = \frac{4}{s^2+16}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{5}{s} + \frac{1}{6}\cdot\frac{6}{s^4} + 2\cdot\frac{4}{s^2+16}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{5}{s} + \frac{1}{s^4} + \frac{8}{s^2+16}$$

PVI $\begin{cases} \text{Equações Diferenciais} \\ \text{Condições Iniciais} \end{cases}$

Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra
Tabela de Transformadas de Laplace

	Função	Transformada de Laplace	Domínio
1.	k, constante	$\frac{k}{s}$	$s > 0$
2.	$t^n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
3.	$t^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$	$s > 0$
4.	$e^{k\,t}$	$\frac{1}{s-k}$	$s > k$
5.	$\sin kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$	$s > 0$
6.	$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	$s > 0$
7.	$\sinh\, kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$	$s > \|k\|$
8.	$\cosh\, kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$	$s > \|k\|$
9.	$e^{k\,t} f(t)$	$F(s-k)$	$s-k \in D_F$
10.	$f(t-a)\, u_a(t)$	$e^{-as} F(s)$	$s \in D_F$
11.	$t^n f(t),\ n = 1, 2, 3, \ldots$	$(-1)^n \, \frac{d^n F(s)}{ds^n}$	
12.	$f^{(n)}(t),\ n = 1, 2, 3, \ldots$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$	$s \in D_F$
13.	$\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$	$s \in D_F \cap D_G$
14.	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$	$s \in D_F \cap]0, +\infty[$
15.	$f(kt),\ k \in \mathbb{R}^+$	$\frac{1}{k}\, F(\frac{s}{k})$	$\frac{s}{k} \in D_F$

Observação : $F(s)$ designa a Transformada de Laplace da função $f(t)$, D_F designa o domínio de F e $u_a(t)$ representa a função de Heaviside.