Integrais Curvilíneas e de Superfície

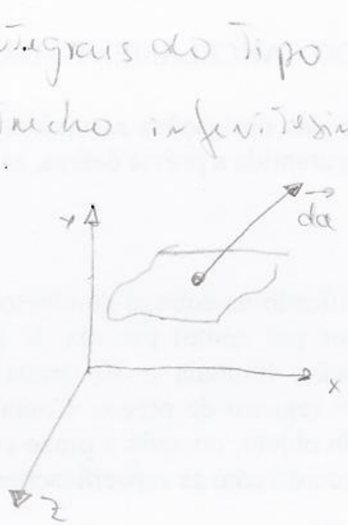
Na eletrodinâmica, encontramos muitas integrais, entre os quais os mais importantes são os integrais de linha (caminho), superfície (fluxo) e de volume.

- Integrais de linha: São integrais do tipo: $\int_{a\,C}^{b} \vec{E}\cdot\vec{dl}$, sendo $\vec{E}$ uma função vetorial e $\vec{dl}$ um vetor deslocamento infinitesimal, sendo a integração ao longo do caminho C. Se a integração for num circuito fechado, ficamos co: $\oint_{a}^{b} \vec{E}\cdot\vec{dl}$.

Exemplo de aplicação de uma integral de linha: O Trabalho (W) realizado por uma força ($\vec{F}$), ao longo de um percurso ($\vec{dl}$)

$$W = \int_{a\,C}^{b} \vec{F}\cdot\vec{dl}$$

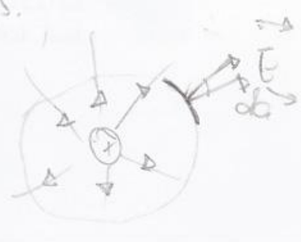
- Integral de Superfície: São integrais do tipo $\int_s \vec{v}\cdot\vec{da}$, onde $\vec{v}$ é uma função vetorial e $\vec{da}$ é um trecho infinitesimal de área com direção perpendicular à superfície.



Por convenção, adotamos o sentido para fora como positivo e caso a superfície seja fechada, temos: $\oint \vec{v}\cdot\vec{da}$

Exemplo de aplicação de uma integral de superfície: Campo elétrico gerado por uma carga puntiforme através da lei de Gauss.

$$\phi_E = \oint_s \vec{E}\cdot\vec{da} =$$



$\Phi = \oint \vec{E} \cdot \vec{da} \Rightarrow \Phi = \oint E_{\perp} \cdot da \Rightarrow \Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow \phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$,

para carga positiva $+q$ e carga negativa $-q$.

- Integral de volume: São integrais do tipo $\int_V T \cdot dv$, onde T é uma função escalar e dv é um volume infinitesimal. Se dv estiver em coordenadas cartesianas $\int_V T \cdot dx\,dy\,dz$.

Exemplo de aplicação de uma Integral de volume. Seja T uma função escalar da densidade de uma substância, logo a integral do volume dará a massa total dessa substância.

- Teorema fundamental para Gradientes.

$$\int_{a\,C}^{b} (\vec{\nabla} T) \cdot \vec{dl} = T(a) - T(b)$$

- Teorema fundamental para Divergente (Teorema de Green)

$$\oint_S \vec{T} \cdot \vec{da} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{T})\, dv.$$

- Teorema fundamental para Rotacionais (Teorema de Stoks)

$$\oint_C \vec{T} \cdot \vec{dl} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{T}) \cdot \vec{da}$$

→ Exemplo 1: Conversão da lei de Gauss da forma integral para a forma diferencial (Uso do Teorema de Green) $\oint_S \vec{E} \cdot \vec{da} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$.

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{da} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\, dv$$

escrevendo $q_{enc} = \int_V \rho\, dv$ → carga total em função da ρ (densidade de carga)

logo

$$\int_V \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) dv = \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\, dv$$

então:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\varepsilon_0}}\;//$$

→ Exemplo 2: Lei de Faraday da forma integral para a forma diferencial. (3)

(Teorema do Rotacional ou de Teorema de Stokes)

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_C \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}$$

Pelo Teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \, d\vec{a}$$

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \, d\vec{a}$$

logo

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

//