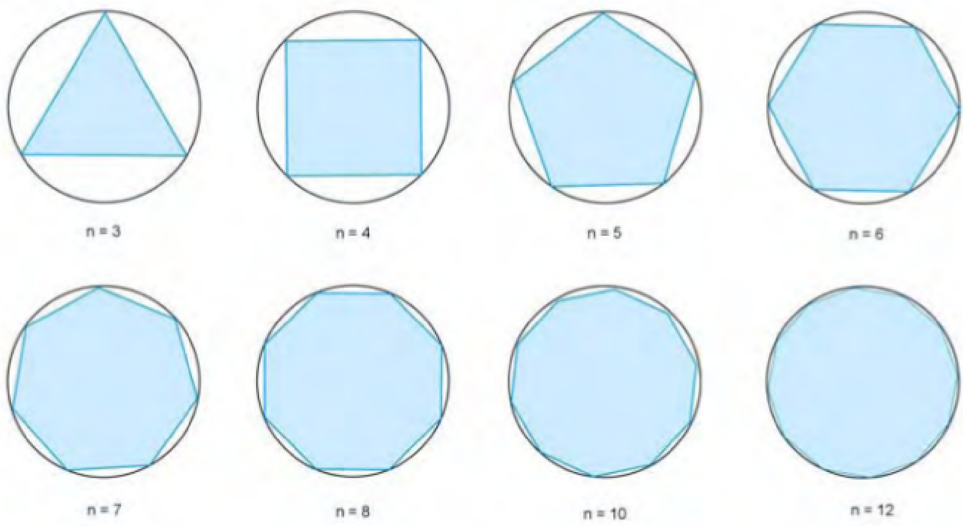
Introdução às Sequências Numéricas

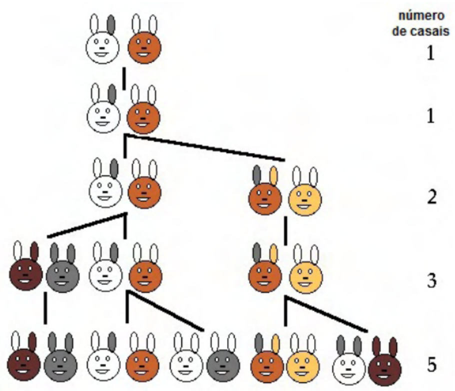
Método da Exaustão

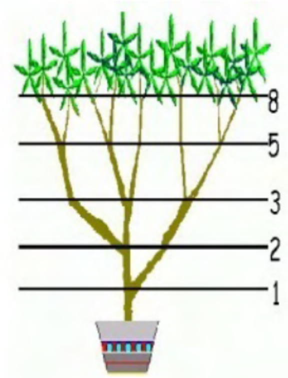


A ideia empregada por Arquimedes de Siracusa (287 a.C - 212 a.C) pode ser visualizada na sequência de polígonos inscritos num círculo de raio r. Parece que quanto maior for o número de lados do polígono inscrito na circunferência, mais a área deste e do círculo se aproximam. Se *n* crescer sem limite, a diferença entre as duas áreas deverá se tornar insigniante e, assim, poderemos considerar as duas áreas como sendo iguais.

Apesar dessas afirmações serem intuitivas, usamos aqui duas ideias que precisam ser exploradas de maneira precisa e rigorosa: a ideia de que o lado do polígono inscrito está crescendo sem limite (ou na linguagem usual, *n está tendendo ao infinito*) e a ideia de que a diferença entre as áreas está se tornando nula, ou seja, um valor está sendo "aproximado" por uma sucessão de outros.

Sequência de Fibonacci





Leonardo de Pisa "Fibonacci" (1170-1250) matemático italiano, propôs o seguinte problema:

> *Num pátio fechado, coloca-se um casal de coelhos. Supondo que, em cada mês, a partir do segundo mês de vida, cada casal dá origem a um novo casal de coelhos, ao final de um ano, quantos casais de coelhos haverão no pátio?*

A resolução deste problema:

1. O tempo **(t =1)** indica o momento em que o primeiro casal de coelhos nasceu e foi colocado no pátio fechado.
2. Um mês depois **(t= 2)** o casal ainda não é fértil, de modo que ainda existirá apenas um casal.
3. Decorrido mais um mês **(t=3)**, este casal já estará fértil e haverão agora dois casais de coelhos.
4. No mês seguinte **(t=4)**, o casal o casal nascido no mês anterior ainda não é fértil, mas o casal original gerará um novo casal de filhotes; portanto agora haverão três casais.
5. Decorrido mais um mês **(t = 5)**, os dois primeiros casais gerarão dois novos casais e, então, haverá um total de cinco casais de coelhos. É fácil perceber que, cada elemento desta sequência, a partir do terceiro, é igual a soma dos dois anteriores. Assim, prosseguindo na construção da sequência encontramos como solução do problema 144 casais de coelhos.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, . . .

Essa sequência é conhecida como sequência de Fibonacci. E o que a torna tão especial é o fato de que ela aparece não só no estudo da reprodução dos coelhos, mas também em inúmeros fenômenos naturais. Por exemplo, algumas plantas (como a *Achillea Ptarmica*) mostram esta sequência no crescimento de seus galhos.

Sequências Numéricas

Seja $a_n \in \mathbb{R}$, n $\in \mathbb{N}$. É representada por:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n)$$

Todos os termos que compõe uma sequência são chamados de elementos e ainda chamamos o a_1 de 1º temo, o a_2 de 2º termo e assim por diante. Pode ser classificada como finita, infinita, crescente, decrescente, constante, recursiva. Os elementos que compõe uma sequência podem serem determinados por uma ***Lei de Formação,*** *exemplos:*

Atribuindo valores permitidos para n, encontramos os temos procurados que são:

$a_n = 3n^2 + 2, \quad n \in \mathbb{N}$	$n=1 \Rightarrow a_1 = 3 \cdot 1^2 + 2$ $n=2 \Rightarrow a_1 = 3 \cdot 2^2 + 2$ $n=3 \Rightarrow a_1 = 3 \cdot 3^2 + 2$ $n=4 \Rightarrow a_1 = 3 \cdot 4^2 + 2$ $n=5 \Rightarrow a_1 = 3 \cdot 5^2 + 2$	$a_1 = 5$ $a_2 = 14$ $a_3 = 29$ $a_4 = 50$ $a_5 = 77$
(5, 14, 29, 50, 77, …, a_n)		

Umas das várias maneiras de determinarmos os termos de uma sequência é através da ***Lei de Recorrência***. Essa Lei permite encontrar um termo qualquer da sequência a partir do termo anterior, segue:

$\begin{cases} a_1 = 1 \, e \, a_2 = 1 \\ a_n = a_{(n-2)} + a_{(n-1)} \end{cases}, para \, n \geqslant 3$	$n=3 \Rightarrow a_1 + a_2 = 1+1$ $n=4 \Rightarrow a_2 + a_3 = 1+2$ $n=5 \Rightarrow a_3 + a_4 = 3+2 = 5$ $n=6 \Rightarrow a_4 + a_5 = 3+5 = 8$	$a_1 = 1$ $a_2 = 1$ $a_3 = 2$ $a_4 = 3$ $a_5 = 5$ $a_6 = 8$
(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …,)		

Exercícios sobre Sequências Numéricas

1) Determine os 6 primeiros termos da sequência definida por $a_n = 1 + 2n,\ n \in \mathbb{N}^*$

2) Qual o 9º termo da sequência definida por $a_n = 3n^2 - 2n + 1,\ n \in \mathbb{N}^*$

3) Consideremos a sequência definida por $a_n = 3n - 16,\ n \in \mathbb{N}^*$. Qual o valor da soma de a_5 com a_6?

4) Na mesma sequência definida por $a_n = 3n - 16,\ n \in \mathbb{N}^*$. O número 113 pertence a mesma? Se sim em qual posição?

5) **(UFRN)** Uma pessoa que "pesa" 140 kg submete-se a um regime alimentar, obtendo o seguinte resultado:
   - nas 4 primeiras semanas, perde 3 kg por semana
   - nas 4 seguintes, 2 kg por semana
   - daí em diante, apenas 0,5 kg por semana

   Calcule em quantas semanas essa pessoa pesará:

a) 22 kg
b) 72 kg

Progressão Aritmética (PA)

Seja a sequência (1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ….). A diferença entre o um termo qualquer a_n e seu antecessor $a_{(n-1)}$ se mantém constante e, nesse exemplo, é igual a 3. Essa constante é chamada de **razão da PA** e adotamos a letra ***r*** para representá-la. Exemplos:

- PA: (3, 6, 9,12, …) a **razão r = 3** → 6 – 3 = 3 ou 12 – 9 = 3
- PA: (23, 20, 17, 14, 11, …) a **razão r = -3** → 20 –(23) = -3 ou 14 - (-17) = -3
- PA: (5, 5, 5, 5, …) a **razão r = 0**

Conforme o sinal da razão (r), podemos classificá-la de: constante, crescente e decrescente.

Lei de Formação do Termo Geral de uma PA

Será possível encontrar qualquer termo de uma PA a partir do primeiro termo (a_1) e a razão (r). Isso ocorre devido à regularidade que a razão impõe na obtenção dos termos. Segue:

Seja a sequência (a_1, a_2, a_3, a_4, …, $a_{(n-1)}$, a_n)

$a_2 - a_1 = r$	$a_2 = a_1 + r$	$a_2 = a_1 + 1r$
$a_3 - a_2 = r$	$a_3 = a_2 + r$, como $a_2 = a_1 + r$, fica: $a_3 = a_1 + r + r$	$a_3 = a_1 + 2r$
$a_4 - a_3 = r$	$a_4 = a_3 + r$, como $a_3 = a_1 + 2r$, fica: $a_4 = a_1 + 3r + r$	$a_4 = a_1 + 3r$
$a_5 - a_4 = r$	$a_5 = a_4 + r$, como $a_4 = a_1 + 3r$, fica: $a_5 = a_1 + 4r + r$	$a_5 = a_1 + 4r$

De forma análoga as construções acima, o termo a_n que ocupa a n-ésima posição será dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Pode-se ainda determinar qualquer termo de uma PA, a partir de qualquer outro termo, obtendo uma extensão da **Lei de Formação do Termo Geral**. Essa extensão da Lei de Formação é útil quando se queremos encontrar um termo de uma PA, mesmo sem saber o termo a_1. Segue a mesma sequência:

(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, ..., a_n)	$a_8 = a_5 + 3r$
	$a_{10} = a_2 + 8r$

$$a_n = a_k + (n-k)r$$

Somas Parciais dos Termos de uma PA

Seja a sequência dos 100 números naturais positivos: (1, 2, 3, 4, 5, 6, …, 100). Tem-se uma PA com razão r=1. Agora, para calcular a soma dos termos dessa sequência, ou seja, a soma dos 100 primeiros números naturais, fica:

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{100}$

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Exercícios sobre PA

1) Calcule o 20º termo da PA: (26, 31, 36, 41, …)

2) Vamos determinar a PA que possui as seguintes características: $\begin{cases} a_{10} = 16 \\ a_5 + a_9 = 2 \end{cases}$

3) Calcule a soma dos números naturais entre 1 e 100

4) Em ralação aos números naturais ímpares, calcule a soma dos 50 primeiros termos.

Progressão Geométrica (PG)

Seja a sequência (3, 6, 12, 24, 48, ….). Nota-se que, dividindo um termo qualquer pelo seu antecessor, o resultado sempre será 2.

Progressão Geométrica (PG) é a sequência de números reais não nulos em que o quociente entre um termo (a partir do 2º) e seu antecessor será sempre o mesmo: uma constante. A essa constante chamamos de razão da PG e é representada pela letra *q*. Exemplos:

- PG: (2, 6, 18, 54, …) a **razão q = 3** → 6 : 2 = 3 ou 54 : 18 = 3
- PG: (-5, 15, -45, 135, …) a **razão q = -3** → 15 : (-5) = -3 ou -45 : 15 = -3

- PG: (4, -4, 4, -4, 4, …) a **razão q= -1**

Conforme o sinal da razão (q), podemos classificá-la de: constante, crescente e decrescente.

Lei de Formação do Termo Geral de uma PG

Será possível encontrar qualquer termo de uma PG, a partir do primeiro termo (a_1) e a razão (q). Isso ocorre devido à regularidade que a razão impõe na obtenção dos termos. Segue:

Seja a sequência (a_1, a_2, a_3, a_4, …, $a_{(n-1)}$, a_n)

$\frac{a_2}{a_1}=q$	$a_2 = a_1 . q$	$a_2 = a_1 . q^1$
$\frac{a_3}{a_2}=q$	$a_3 = a_2 . q$, como $a_2 = a_1 . q^1$, fica: $a_3 = a_1 . q . q$	$a_3 = a_1 . q^2$
$\frac{a_4}{a_3}=q$	$a_4 = a_3 . q$, como $a_3 = a_1 . q^2$, fica: $a_4 = a_1 .q^2 . q$	$a_4 = a_1 . q^3$
$\frac{a_5}{a_4}=q$	$a_5 = a_4 . q$, como $a_4 = a_1 . q^3$, fica: $a_5 = a_1 .q^4 . q$	$a_5 = a_1 . q^4$

De forma análoga as construções acima, o termo a_n que ocupa a n-ésima posição será dado por:

$$a_n = a_1\, q^{n-1}$$

Somas Parciais dos Termos de uma PG

Seja a sequência (a_1, a_2, a_3, a_4, …, $a_{(n-1)}$, a_n) uma PG de razão $q \neq 1$

Quer-se encontrar uma expressão para: $S_n = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{(n-1)} + a_n)$, fica:

$$S_n = \frac{a_1\,(q^n - 1)}{q-1}$$

Exercícios sobre PG

1)Determine o 10º termo da PG ($^1/_3$, 1, 3, 9, ….)

2)Numa PG, o 4º termo é igual a 32 e o 1º termo é igual a ½. Determine a razão da PG e, em seguida, obtenha o 8º termo.

3) Determine os termos da PG formada de acordo com as informações que seguem: $\begin{cases} a_3 + a_5 = \frac{5}{4} \\ a_7 + a_9 = 20 \end{cases}$

4) Calcule a soma dos oito primeiros termos da PG (320, 160, 80, ….)

Introdução as Séries Numéricas

Diferença fundamental entre sequências numéricas e séries numéricas:

Sequências	Séries
$a_n = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n - 1, a_n$	$s_n = a_1 + a_2 + a_3, + \ldots + a_n - 1 + a_n$
sucessão de termos	soma dos termos

As séries numéricas, na prática, é a soma dos termos de uma sequência! Isso, de certa forma, já foi constatado quando se estudou a soma dos termos de sequências do tipo: PA e PG.

Para que se trabalhe com séries, é preciso saber se a sequência que compõe essa série converge ou diverge.

Condição de Convergência ou Divergência de Sequências Numéricas

Segue a condição:

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L \text{, } com\ L \in \mathbb{Z}$	a sequência a_n **converge**
$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \pm \infty\ ou\ oscilar$	a sequência a_n **diverge**

Exemplo: Verifique se as sequências abaixo converge ou divergem

---

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$ — aplicando o limite na sequência, fica:

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{+1}{\sqrt{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$ — como o limite dessa sequência é igual a 0, ela **converge**

$a_n = 2^n$, $n \geq 0$ — aplicando o limite na sequência, fica:

$\lim\limits_{n \to \infty} 2^n = 2^{\infty} = \infty$ — como o limite dessa sequência é igual a ∞, ela **diverge**

$a_n = \frac{n+1}{n}$ — aplicando o limite na sequência, fica:

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{\infty + 1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$ — agora, utilizando a regra de L´hospital para limite, temos:

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1+0}{1} = 1$ — como o limite dessa sequência é igual a 1, ela **converge**

Teorema do Confronto aplicado às Sequências Numéricas (Teorema do Sanduíche)

$$L \leq \lim_{n \to \infty} a_n \leq L \;\; , L \in \mathbb{Z} \quad , \text{logo}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

Exemplo de aplicação do Teorema do Confronto:

Seja a sequência $a_n = \dfrac{\sin n}{n^2}$, determine se a mesma converge ou diverge:

O domínio da função seno se encontra entre $-1 \leq \sin n \leq 1$, logo aplicando o teorema do confronto, fica:

$-1 \leq \sin n \leq 1$	analisando o domínio da função seno e dividindo todos os membros da inequação por n², fica:
$\dfrac{-1}{n^2} \leq \sin \dfrac{n}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$	agora, aplicando o limite em todos os membros da inequação, temos:
$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{-1}{n^2} \leq \lim\limits_{n \to \infty} \sin \dfrac{n}{n^2} \leq \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n^2}$	Segue que substituindo n por ∞, temos:
$\underbrace{\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{-1}{n^2}}_{0} \leq \lim\limits_{n \to \infty} \sin \dfrac{n}{n^2} \leq \underbrace{\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n^2}}_{0}$	Aplicando o limite em n→∞ nos extremos “do sanduíche”, temos:
$0 \leq \lim\limits_{n \to \infty} \sin \dfrac{n}{n^2} \leq 0$	Concluímos que:
$\lim\limits_{n \to \infty} \sin \dfrac{n}{n^2} = 0$	Que a sequência $a_n = \dfrac{\sin n}{n^2}$ é convergente

---

Exercícios sobre convergência e divergência de sequências:

Verifique se a sequências abaixo converge ou diverge.

a) $a_n = \dfrac{5+6n^2}{9+2n^2}$

b) $a_n = \dfrac{n}{e^n}$, $n \geq 0 \;\; e \;\; e = 2{,}71$

Séries Infinitas

Definição:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Condição de Convergência e Divergência de Séries Infinitas

Se a sequência a_n **converge,** a série S_n **pode convergir**	
Se a sequência a_n **diverge**, a série S_n **diverge**	

Lembre-se: só se pode somar séries que convergem, pois as séries que divergem tende ao ∞

Soma Parcial de Séries Infinitas

Partindo da definição: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, temos:

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$s_n = \text{n-ésima soma parcial} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Séries Geométricas

Definição: são séries com a seguinte estrutura

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = aq^n$$

Abrindo a definição de séries geométricas, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = aq^0 + aq^1 + aq^2 + aq^3 + \ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq^1 + aq^2 + aq^3 + \ldots$$

Exemplo: Seja a soma dos termos de uma sequência $s_n = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots$

Escreve-se essa soma, em função do 1º termo e da razão: $a_1 = 1$ e $q = 2$, fica:

$$1 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + \ldots$$

Condição de Convergência e Divergência de Séries Geométricas

$\lvert q \rvert < 1$	**converge**
$\lvert q \rvert \geq 1$	**diverge**

Soma Parcial de Séries Geométricas

Definição:

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{para} \quad q \neq 1$$

Exemplo: Seja uma sequência $a_n = 2(2)^n$, calcule a soma dos 3 primeiros termos:

$\sum_{n=1}^{3} 2(2)^n = 4 + 8 + 16 = 28$ A soma dos 3 primeiros termos e $a_1 = 4$ e $q = 2$

$s_1 = a_1 = 4$

$s_2 = a_1 + a_2 = 4 + 8 = 12$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 4 + 8 + 16 = 28$

$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{4(2^3 - 1)}{2 - 1} = \frac{4(8 - 1)}{1} = 28$ portanto, verificamos que a soma dos 3 primeiros termos é 28

Soma Infinita de Séries Geométricas

Uma vez que se somam séries geométricas convergem, então sua soma será:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = aq^n = \frac{a_1}{1 - q} \quad \text{para} \quad |q| \leq 1 \quad \text{(condição para convergência)} \quad \text{e} \quad \sum_{n \neq 0}^{\infty} aq^n = \frac{1^{\text{o}} \text{ termo}}{1 - \text{razão}}$$

e, relembrando: essa solução somente é válida diretamente para uma soma infinita dos n-termos de uma série geométrica, desde que o n =0. Caso, o n inicie com número ≠ 0, procura-se o 1º termo da série

É importantíssimo que fique claro: ao se analisar uma série geométrica, quem são o 1º termo e a razão

Exemplo: seja a sequência geométrica a_n infinita, calcule a soma de seus termos:

$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ verifica-se na sequência a_n que $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$

$\sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ aplica-se a soma infinita dos termos das séries geométricas, fica:

$\sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ fica-se, após substituir os valores de n iniciando com 0 até 3, por exemplo

$\frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$ aplica-se, a fórmula de soma infinita de séries geométricas com n = 0

$\frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ portanto, pela fórmula, a soma dos n termos da sequência $a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$

Exercícios

1) Verifique se as séries geométricas infinitas abaixo convergem ou divergem. Se converge, calcule sua soma:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{4^n}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{9^n}$

2) Encontre todos os valores de x da $s_n = \frac{7}{x} + \frac{21}{x^3} + \frac{63}{x^5}$ que tem sua soma igual a $\frac{7}{2}$

Análise de mais alguns Tipos de Séries

Serão analisadas algumas estruturas de formação de séries para obter seu comportamento quanto a sua convergência.

1 – Séries Harmônicas

São séries do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{n}$ e **sempre divergem!** Verifica-se, por comparação.

Exemplo: analisando a sequência $a_n = \frac{1}{n}$ e aplicando o conceito de limite nessa sequência, fica:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

temos que essa sequência $a_n = \frac{1}{n}$ converge! Mas, isso não afirma que a série $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ também converge!

Veja-se: expandindo a série $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e, sempre separando os termos em 2^k onde de k =1, 2, 3, etc., a partir do 3º termo:

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\text{2 termos}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\text{4 termos}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots}_{\text{8 termos}}$$

$$2^k = 2^1 = 2 \rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$2^k = 2^2 = 4 \rightarrow \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

$$2^k = 2^3 = 8 \rightarrow \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}$$

e assim por diante

Constrói-se uma nova série T_n, a partir da série S_n e adotando, a partir do 2º termo, a substituição dos termos selecionados em 2^k , **<u>sempre selecionando o menor termo dessa faixa de termos</u>**, fica:

$$T_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{\text{2 termos}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{\text{4 termos}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\dots}_{\text{8 termos}}$$ adotando o menor termo que foi separado por 2^k

$$T_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{\frac{2}{4}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{\frac{4}{8}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\dots}_{\frac{8}{16}=\frac{1}{2}}$$ simplificando os termos separados por 2^k

$$T_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots$$ conclui-se que a série harmônica T_n **diverge!**

Verifica-se que a série T_n diverge e como seus termos, a partir do 3º termo, são sempre menores que os termos da série S_n, logo, por comparação e sendo a série **$S_n > T_n$**, conclui-se que a série harmônica S_n também diverge.

Condição de Convergência e Divergência das Séries Harmônicas

Toda série harmônica diverge!

2 - P-Séries

São séries do tipo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, onde p = 1, 2, 3, 4, ...

para p = 2

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots$$

Condição de Convergência e Divergência das P-Séries

Verificar de forma direta o valor de p

$p > 1$	**converge**
$0 < p \leq 1$	**diverge**

Exemplos:

a) para p = 7 temos: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7}$ a série converge, pois p > 1

b) para p = $\frac{1}{2}$ temos: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ a série diverge, pois p está entre 0 e 1

3 – Séries Alternadas

São séries do tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n = -a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+\ldots$$

onde a parte $(-1)^n$ é que alterna os sinais dos termos da série

Exemplos:

a) seja a série $S_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n$ e expandindo-a:

$$S_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n$$

lembrando que $(-1)^{n+1}$ é o que alterna o sinal dos termos

$$S_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n=+a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-\ldots$$

$$S_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n=+1-2+3-4+5-\ldots$$

b) também a série $S_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$ e expandindo-a, fica:

$$S_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$$

lembrando que $(-1)^{n+1}$ é o que alterna o sinal dos termos

$$S_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}=+a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-\ldots$$

$$S_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}=+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$$

Condição de Convergência e Divergência das Séries Alternadas (Critério de Leibniz)

Para que uma série alternada seja convergente, é necessário respeitar duas condições:

1ª condição $a_1>a_2>a_3>a_4>\ldots$ (sem a parte $(-1)^{n+1}$ que alterna o sinal da série)

2ª condição $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ (sem a parte $(-1)^{n+1}$ que alterna o sinal da série)

Exemplos:

a) seja a série $S_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n$ e aplicando as condições de convergência, temos:

	$S_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n=+1-2+3-4+5-...$	
1ª condição	$a_1>a_2>a_3>a_4>....=1,2,3,4,5,...$	analisar sem a parte que alterna o sinal da série como a 1ª condição não é satisfeita, a série **diverge**

b) seja a série $S_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$ também aplicando as condições de convergência, fica:

	$S_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}=+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...$	
1ª condição	$a_1>a_2>a_3>a_4>....=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},....$	analisar sem a parte que alterna o sinal da série os termos são decrescentes, a série **converge**
2ª condição	$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0$	analisar sem a parte que alterna o sinal da série como a 2ª condição é satisfeita, a série **converge**

4 – Séries de Potências

As séries de potências são as séries de funções mais importantes em Análise Matemática. São séries do tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n=c_0(x-x_0)^0+c_1(x-x_0)^1+c_2(x-x_0)^2+c_3(x-x_0)^3+...$$

sendo **c_0, c_1, c_2, c_3, … e x_0 constantes** e, ainda, x **uma variável.**

Exemplo: seja a sequência $c_n(x-x_0)^n$, onde temos $c_n = 1$ e $x_0 = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}1(x-x_0)^n=1(x-0)^0+1(x-0)^1+1(x-0)^2+1(x-0)^3=...$	substituindo $c_n = 1$ e $x_0 = 0$
$\sum_{n=0}^{\infty}1(x-x_0)^n=1+x^1+x^2+x^3+...$	

Exemplo: seja a sequência $a_n=c_n\frac{(x-x_0)^n}{n!}$, onde também adota-se $c_n = 1$ e $x_0 = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}1\frac{(x-x_0)^n}{n!}=\frac{(x-0)^0}{0!}+\frac{(x-0)^1}{1!}+\frac{(x-0)^2}{2!}+\frac{(x-0)^3}{3!}+...$	substituindo $c_n = 1$ e $x_0 = 0$
$\sum_{n=0}^{\infty}1\frac{(x-x_0)^n}{n!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...$	

Condição de Convergência e Divergência das Séries de Potências (Raio e Intervalo de Convergência)

A condição básica é verificar se é possível cancelar os termos da série com expoente ≠ 0.

Exemplo: seja uma série de potência do tipo: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = c_0 \underbrace{(x-x_0)^0}_{1} + c_1(x-x_0)^1 + c_2(x-x_0)^2 + c_3(x-x_0)^3 + \ldots$	expandido a série
$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0)^1 + c_2(x-x_0)^2 + c_3(x-x_0)^3 + \ldots$	reescrevendo a expansão
$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = c_0 + \underbrace{c_1(x-x_0)^1}_{x-x_0=0} + \underbrace{c_2(x-x_0)^2}_{x-x_0=0} + \underbrace{c_3(x-x_0)^3}_{x-x_0=0} + \ldots$	fazendo $x-x_0=0$ para com o objetivo de “zerar” os termos com potências da série
$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = c_0 + \underbrace{c_1(x-x_0)^1}_{x=x_0} + \underbrace{c_2(x-x_0)^2}_{x=x_0} + \underbrace{c_3(x-x_0)^3}_{x=x_0} + \ldots$	Quando $x=x_0$ resta somente o coeficiente c_0
$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = c_0 + \underbrace{c_1(x_0-x_0)^1}_{0} + \underbrace{c_2(x_0-x_0)^2}_{0} + \underbrace{c_3(x_0-x_0)^3}_{0} + \ldots$	e $x_0-x_0=0$ verificamos que essa série **converge** para a constante c_0

Série de Taylor (Polinômios de Taylor)

É uma técnica para reescrever uma função matemática em uma série de potência.

Consiste em reescrever os termos da sequência a_n por uma função matemática onde, soma-se suas derivadas de ordem e-nésima $\frac{f^n(x_0)}{n!}$.

A partir de uma série de potência clássica, tipo: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

expandindo a série e obtendo seus termos, a partir das derivadas de ordem n da função $f(x)$, fica:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)(x-x_0)^1}{1!}+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!}+\frac{f''''(x_0)(x-x_0)^4}{4!}+\ldots$$

Série de Maclaurin

A série de Maclaurin é um caso particular da série de Taylor, quando se usa $x_0 = 0$.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(0)}{n!}(x)^{n}$$

expandindo a série e obtendo seus termos, a partir das derivadas de ordem n da função $f(X)$, fica:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)x^{1}}{1!}+\frac{f''(0)x^{2}}{2!}+\frac{f'''(0)x^{3}}{3!}+\frac{f''''(0)x^{4}}{4!}+\ldots$$

Nas expressões acima, $f^{n}(x)$ é a derivada de ordem n da função $f(x)$:

- $f'(x)$ é a derivada de 1ª ordem da função $f(x)$
- $f''(x)$ é a derivada de 2ª ordem da função $f(x)$ e assim por diante
- $n!=n(n-1).(n-2).(n-3)\ldots$

Exemplos:

a) Obter a série de Maclaurin para a função exponencial $f(x)=e^{x}$

$$f(x)=e^{x} \qquad f(0)=e^{0}=1$$

$$f'(x)=e^{x} \qquad f'(0)=e^{x}=1$$

$$f''(x)=e^{x} \qquad f''(0)=e^{x}=1$$

$$f'''(x)=e^{x} \qquad f'''(0)=e^{x}=1$$

$$f''''(x)=e^{x} \qquad f''''(0)=e^{x}=1$$

verifica-se que os valores das derivadas de ordem n voltam a repetir, então a série fica:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)x^{1}}{1!}+\frac{f''(0)x^{2}}{2!}+\frac{f'''(0)x^{3}}{3!}+\frac{f''''(0)x^{4}}{4!}+\ldots$$

série de Maclaurin e substituindo as derivadas de ordem n obtidas, fica:

$$e^{x}=1+\frac{1x^{1}}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{4}}{4!}$$

reescrevendo os termos encontrados

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{4}}{4!}$$

e seu termo geral é:

$$e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n} \quad = \quad e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}$$

a partir do resultado acima, calcule $e^{1,5}$. Com o uso da calculadora obtêm-se: **4,48168907033806**

e aplicando a série de Maclaurin, fica:

$$e^{1,5}=1+1,5+\frac{1,5^{2}}{2!}+\frac{1,5^{3}}{3!}+\frac{1,5^{4}}{4!}+\ldots \quad = \quad e^{1,5}=1+1,5+\frac{1,5^{2}}{2}+\frac{1,5^{3}}{6}+\frac{1,5^{4}}{24}+\ldots$$

$e^{1,5}\approx 4,40$ até a derivada de ordem 4.

se utilizarmos mais termos da série de Maclaurin para $f(x)=e^{x}$, chega-se ao resultado da calculadora

b) Obter a série de Maclaurin para a função trigonométrica $f(x)=sinx$

$f(x)=sinx$ $\quad f(0)=\sin(0)=0$

$f'(x)=cosx$ $\quad f'(0)=\cos(0)=1$

$f''(x)=-sinx$ $\quad f''(0)=-\sin(0)=0$

$f'''(x)=-cosx$ $\quad f'''(0)=-\cos(0)=-1$

$f''''(x)=-cosx$ $\quad f''''(0)=\sin(0)=0$

verifica-se que os valores das derivadas de ordem n voltam a repetir, então a série fica:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)x^1}{1!}+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\frac{f'''(0)x^3}{3!}+\frac{f''''(0)x^4}{4!}+...$$

série de Maclaurin e substituindo as derivadas obtidas de ordem n, fica:

$$sinx=0+\frac{1x^1}{1!}+\frac{0x^2}{\underbrace{2!}_{0}}-\frac{1x^3}{3!}+\frac{0x^4}{\underbrace{4!}_{0}}+...$$

eliminando os termos que “zeram”

$$sinx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-....+...-...$$

e seu termo geral é:

$$sinx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n \quad = \quad sinx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

a partir do resultado acima, calcule $\sin(30^o)$

primeiramente, converte-se 30º em radianos, usando a regra de três: $\frac{180}{30}=\frac{\pi}{x}\rightarrow x=\frac{\pi}{6}\rightarrow\frac{3,1416}{6}\rightarrow 0,5236\,\text{rad}$

logo $30^o=0,5236\,\text{rad}$ e, substituindo na série de Maclaurin, fica:

$$\sin(30^o)\approx 0,5236-\frac{0,5236^3}{3!}+\frac{0,5236^5}{5!}-\frac{0,5236^7}{7!}+\frac{0,5236^9}{9!}-....+...-...$$

$$\sin(30^o)\approx 0,5236-0,0239+0,0003-0,0000...+...-...$$

$$\sin(30^o)\approx 0,5000$$

Exercícios:

1) Obtenha o termo geral da série de Maclaurin para a função trigonométrica $f(x)=cosx$

2) Calcule o $\cos 20^o$

Referências Bibliográficas

ÁVILA, Geraldo. **Análise Matemática para Licenciatura, 3 ed.** São Paulo: Edgard Blücher, 2011

CERQUEIRA, Ana Cecília Sanches. **Um Estudo sobre Sequências e Séries**. Rio Claro, 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Campus de Rio Claro, UNESP - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

IEZZI, Gerson. *et al*. **Matemática – Ciências e Aplicações**. São Paulo: ed Ática, 2001

Séries. Disponível em <https://www.youtube.com/playlist?list=PLf1lowbdbFIAbulZbN0vdz9lDNb41q5Ms> acesso em 01 de outubro de 2017

Séries e Sequências. Disponível em <https://www.youtube.com/playlist?list=PLF2E932B3349C96A4> acesso em 01 de outubro de 2017