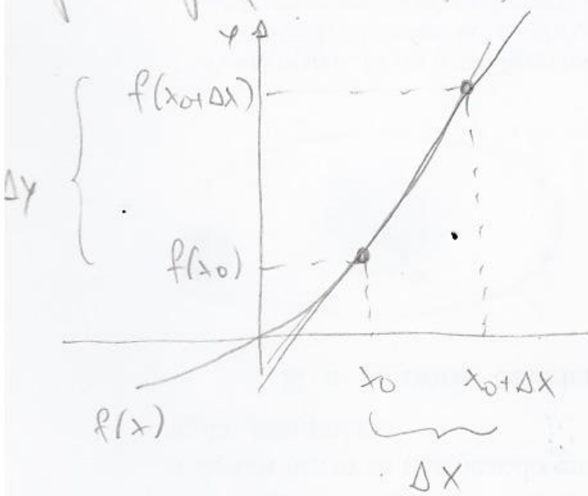
Funções Reais de Várias Variáveis - Derivadas.

- Taxa Média de Variação: (TVM) -

Seja o gráfico da função f(x):



$$TVM: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\cancel{x_0} + \Delta x - \cancel{x_0}}$$

$$TVM = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

<u>Exemplo</u>: Seja: $f(x) = x^2+1$ para $x_0 = 1$ e $x_1 = 3$

$f(x_0) = 1^2+1 = 2$; $\Delta x = 3-1 = 2$; $f(x_0+\Delta x) = (1+2)^2+1 = 10$ -

$$TVM = \frac{10-2}{2} \Rightarrow TVM = \frac{8}{2} \Rightarrow TVM = 4 //$$

interpretação do resultado: Para a função $f(x) = x^2+1$ no intervalo. $[1,3]$ está crescendo a uma Taxa de 4 unidades em y para 1 em x.

- Derivada de uma função com uma variável

Se Tomarmos o limite de TVM para uma função f(x) para uma pequena variação de Δx e $\Delta x \to 0$ é definida como a Derivada nesse ponto e indicamos por $f'(x)$, logo:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Podemos interpretar a derivada como a medida de inclinação de uma Tangente a f(x) no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Exemplo de Aplicação de Derivada: Um objeto cai em queda livre, a partir do repouso, sob ação do campo gravitacional Terrestre, com $g = 10\,m/s^2$ através da equação $y(T) = \frac{gT^2}{2}$. Verifique como se altera a altura ao longo da queda.

Aplicando a Técnica de derivação de polinômios, fica:

$$y(T) = \frac{gT^2}{2} \Rightarrow y'(T) = \frac{2gT}{2} \Rightarrow y'(T) = gT.$$

Esse resultado mostra que para cada segundo esse corpo cai 10 m.

Agora vamos Trabalhar com funções de várias variáveis, $f(x,y,z)$, por exemplo. Como se dá a derivada desse Tipo de função? como fica a reta Tangente (inclinação) de uma função em $\mathbb{R}3$?

Para responder esses questionamentos vamos introduzir um "operador vetorial" $\vec{\nabla}$ para usarmos as Técnicas de derivadas parciais. Segue:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)$$

Usaremos o "operador del" $\vec{\nabla}$ para obtermos o gradiente, divergente e o rotacional de funções de mais de uma variável.

- Gradiente de $f(x,y,z)$: $\vec{\nabla} f(x,y,z)$

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

O gradiente operando numa função escalar nos dará um vetor com a direção de máxima variação para essa função.

Exemplo de Aplicação do Gradiente: Uma sala de aula Tem sua Temperatura definida por $T(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4$. Como se dá o aumento de Temperatura ao longo dessa sala?

$$\vec{\nabla} T = \frac{\partial}{\partial x}x^2\,\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}y^3\,\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}z^4\,\hat{z}$$

$\vec{\nabla} T = 2x\,\hat{x} + 3y\,\hat{y} + 4z\,\hat{z}$

Veja que aplicando o gradiente numa função escalar obtemos um vetor e esse vetor resultante nos dá a direção de maior aumento de Temperatura nessa sala.

OBS: Se o $\vec{\nabla} T = 0$, significa que temos um ponto crítico da função $T(x,y,z)$.
· Pode ser um ponto de máximo, mínimo, etc. de forma análoga à uma função de 1 variável, tipo: $f(x)$. Em eletrodinâmica, o gradiente está relacionado a potenciais, ex: $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

· Divergente de $T(x,y,z) \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{T}(x,y,z)$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{T} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z} \right) \cdot \left(T_x\hat{x} + T_y\hat{y} + T_z\hat{z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial T_z}{\partial z}$$

O divergente operando numa função vetorial gera um escalar, devido ao produto escalar.

Uma representação para o divergente seriam as linhas de campo elétrico de um corpo eletrizado.

Para uma carga positiva teríamos um divergente positivo, poderíamos fazer uma analogia com uma "Torneira" e para uma carga negativa, a analogia seria um "ralo".

Exemplo de divergente em função $\vec{T}(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{T} = \left(\frac{\partial}{\partial x} x^2 + \frac{\partial}{\partial y} y^3 + \frac{\partial}{\partial z} z^4 \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{T} = 2x + 3y^2 + 4z^3$$

Em eletrodinâmica, o gradiente está ligado à campos, exemplo: (4)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \quad e \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 .$$

- Rotacional de uma função vetorial do tipo $T(x,y,z)$: $\vec{\nabla} \times \vec{T}(x,y,z)$

Rotacional mede o quanto um vetor "gira em torno" de um ponto em questão. Não faz sentido em falarmos em rotacional de uma grandeza escalar. A direção do vetor gerado pelo rotacional é dado pela regra da mão direita

$$\vec{\nabla} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ T_x & T_y & T_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{T} = \hat{x}\left(\frac{\partial T_z}{\partial y} - \frac{\partial T_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial T_z}{\partial x} - \frac{\partial T_x}{T_z}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial T_y}{\partial x} - \frac{\partial T_x}{\partial y}\right)$$

→ Exemplo de Aplicação de Rotacional

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$,

Como o campo elétrico é um campo radial, como o gravitacional, seu rotacional é $\emptyset$.

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 I$