

Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Disciplina: Resolução de Problemas com Lógica Matemática (RPLM)

Lista de Exercícios 8

Nome: João Vitor Palmonari, Loraine de Fátima Mendes, Lucas Gabriel Mendes De Castro, Marcio Vinicius de Souza da Rocha

1) Construa as deduções:

a) $\{(p \rightarrow q), (p \wedge r)\} \models q$

Handwritten deduction for problem a):

1. $p \rightarrow q$	hip
2. $p \wedge r$	hip
<hr/>	
3. $p \rightarrow q$	SH 1, 2
4. q	conjunção 3

b) $\{(p \wedge q), ((p \vee r) \rightarrow s)\} \models (p \wedge s)$

Handwritten deduction for problem b):

1. $p \wedge q$	hip
2. $p \vee r$	hip
3. s	hip
<hr/>	
4. p	simplificação 1
5. s	simplificação 2
6. $p \wedge s$	conjunção 4, 5

c) $\{(p \rightarrow (q \rightarrow r)), (p \rightarrow q), p\} \models r$

Handwritten deduction for problem c):

1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$	hip
2. $p \rightarrow q$	hip
3. p	hip
<hr/>	
4. $p \rightarrow r$	SH 1, 2
5. r	simplificação 4

d) $\{((p \vee q) \rightarrow r), ((r \vee q) \rightarrow (p \rightarrow (s \leftrightarrow t))), (p \wedge s)\} \models (s \leftrightarrow t)$

①

1	$(p \vee q) \rightarrow r$	
2	$((r \vee q) \rightarrow (p \rightarrow (s \leftrightarrow t)))$	
3	$p \wedge s$	
4	p	Simplificação 1
5	$p \vee q$	Adição 4
6	r	Modus Ponens 1, 5
7	$r \vee q$	Adição 6
8	$p \rightarrow (s \leftrightarrow t)$	Modus Ponens 2, 6
9	$(s \leftrightarrow t)$	Modus Ponens 8, 4

e) $\{(p \rightarrow \neg q), (\neg p \rightarrow (r \rightarrow \neg q)), ((\neg s \vee \neg r) \rightarrow \neg \neg q), \neg s\} \models \neg r$

E) $\{(p \rightarrow \neg q), (\neg p \rightarrow (r \rightarrow \neg q)), ((\neg s \vee \neg r) \rightarrow \neg \neg q), \neg s\} \models \neg r$

1.	$p \rightarrow \neg q$	hip.
2.	$\neg p \rightarrow (r \rightarrow \neg q)$	hip.
3.	$(\neg s \vee \neg r) \rightarrow \neg \neg q$	hip.
4.	$\neg s$	hip.
5.	$\neg q$	S.D. 1
6.	$\neg p \rightarrow \neg q$	S.H. 2
7.	$\neg p \rightarrow (r \rightarrow \neg q) \vee \neg r$	D.C. 2, 4
8.	$r \vee \neg r$	D.C. 7
9.	$\neg r$	m.p. 8

f) $\{((p \wedge q) \rightarrow r), (r \rightarrow s), (t \rightarrow \neg u), t, (\neg s \vee u)\} \models \neg(p \wedge q)$

F) $\{((p \wedge q) \rightarrow r), (r \rightarrow s), (t \rightarrow \neg u), t, (\neg s \vee u)\} \models \neg(p \wedge q)$

1.	$(p \wedge q) \rightarrow r$	hip.
2.	$r \rightarrow s$	hip.
3.	$(t \rightarrow \neg u)$	hip.
4.	t	hip.
5.	$\neg s \vee u$	hip.
6.	u	simp. 5
7.	$\neg t$	MT 4, 5
8.	s	simp. 2
9.	$(p \wedge q) \rightarrow s$	S.H. 1, 5
10.	$\neg(p \wedge q)$	MT 9

g) $\{(p \rightarrow q), (q \rightarrow r), (s \rightarrow t), (p \vee s)\} \models (r \vee t)$

g) $\{(p \rightarrow q), (q \rightarrow r), (s \rightarrow t), (p \vee s)\} \models (r \vee t)$

1. $p \rightarrow q$	hip.
2. $q \rightarrow r$	hip.
3. $s \rightarrow t$	hip.
4. $p \vee s$	hip.
<hr/>	
5. $r \rightarrow s$	D.C. 2,4
6. $p \rightarrow r$	S.H. 1,2
7. t	Simp. 3
8. $p \rightarrow t$	S.H. 6,7
9. $s \rightarrow r$	D.C. 5,6
10. $t \rightarrow r$	D.C. 8,9
11. r	M.P. 10
12. $r \vee t$	adições 11,7

h) $\{(p \rightarrow q), (\neg r \rightarrow (s \rightarrow t)), (r \vee (p \vee s)), \neg r\} \models (q \vee t)$

(H)

1	$p \rightarrow q$	
2	$\neg r \rightarrow (s \rightarrow t)$	
3	$r \vee (p \vee s)$	
4	$\neg r$	
<hr/>		
5	$p \vee s$	Silogismo destrutivo 3,4
6	$s \rightarrow t$	Modus Ponens 2,4
7	$t \vee q$	Dilema Construtivo 1,6,5

i) $\{(p \rightarrow r), (q \rightarrow s), \neg r, (p \vee q) \wedge (r \vee s)\} \models s$

i) $\{(p \rightarrow r), (q \rightarrow s), \neg r, (p \vee q) \wedge (r \vee s)\} \models s$

1. $p \rightarrow r$	hip.
2. $q \rightarrow s$	hip.
3. $\neg r$	hip.
4. $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$	hip.
<hr/>	
5. $\neg p \vee \neg r$	D.D. 1
6. $q \vee s$	D.C. 4
7. s	simp. 6

j) $\{(p \rightarrow q), (q \rightarrow r), (r \rightarrow s), \neg s, (p \vee t)\} \models t$

5) $\{(p \rightarrow q), (q \rightarrow r), (r \rightarrow s), \neg s, (p \vee t)\} \models t$

1. $p \rightarrow q$	h.p.
2. $q \rightarrow r$	h.p.
3. $r \rightarrow s$	h.p.
4. $\neg s$	h.p.
5. $p \vee t$	h.p.
<hr/>	
6. p	S.D. 1
7. t	S.D. 5

k) $\{(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s), (t \rightarrow u), (u \rightarrow v), \neg q \vee \neg v\} \models \neg p \vee \neg t$

k) $\{(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s), (t \rightarrow u), (u \rightarrow v), \neg q \vee \neg v\} \models \neg p \vee \neg t$

1. $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$	h.p.
2. $t \rightarrow u$	h.p.
3. $u \rightarrow v$	h.p.
4. $\neg q \vee \neg v$	h.p.
<hr/>	
5. $q \rightarrow s$	D.C. 1
6. t	Simp 2
7. $t \rightarrow v$	S.H. 2, 3
8. $\neg p \vee \neg r$	D.D. 1
9. $\neg t$	M.T. 7, 8
10. $\neg p$	S.D. 8
11. $\neg p \vee \neg t$	addition 10, 9

l) $\{(p \wedge q), (p \rightarrow r)\} \models (p \wedge r)$

②

1	$p \wedge q$	
2	$p \rightarrow r$	
<hr/>		
3	p	Simplification 1
4	r	Modus Ponens 2, 3
5	$p \wedge r$	Conjunction 3, 4

$$m) \{(\neg p \wedge q), (r \rightarrow p)\} \models (\neg p \wedge \neg r)$$

$m) \{(\neg p \wedge q), (r \rightarrow p)\} \models (\neg p \wedge \neg r)$
 1. $\neg p \wedge q$ hip.
 2. $r \rightarrow p$ hip.

 3. $\neg r$ MT 2
 4. $\neg p$ simp. 1
 5. $\neg p \wedge \neg r$ conjunção 4, 3

$$n) \{(\neg p \rightarrow q), \neg(r \wedge s), (p \rightarrow (r \wedge s))\} \models \neg p \wedge q$$

$n) \{(\neg p \rightarrow q), \neg(r \wedge s), (p \rightarrow (r \wedge s))\} \models \neg p \wedge q$
 1. $\neg p \rightarrow q$ hip.
 2. $\neg(r \wedge s)$ hip.
 3. $p \rightarrow (r \wedge s)$ hip.

 4. R MT 2
 5. $p \rightarrow s$ SH 3
 6. Q simp. 1
 7. $\neg p$ MT 6
 8. $\neg p \wedge Q$ conj. 7, 6

$$o) \{(p \vee q), \neg r, (q \rightarrow r)\} \models p$$

$o) \{(p \vee q), \neg r, (q \rightarrow r)\} \models p$
 1. $p \vee q$ hip.
 2. $\neg r$ hip.
 3. $q \rightarrow r$ hip.

 4. $q \rightarrow \neg r$ SH 3, 2
 5. $p \rightarrow \neg r$ SH 3, 1
 6. p simplificação 5

$$p) \{(p \wedge q), (r \vee s), (p \rightarrow \neg s)\} \models r$$

$p) \{(p \wedge q), (r \vee s), (p \rightarrow \neg s)\} \models r$
 1. $p \wedge q$
 2. $r \vee s$
 3. $p \rightarrow \neg s$

 4. p Simplificação 1
 5. $\neg s$ Modus Ponens 3, 4
 6. r Silogismo disjuntivo 2, 5

q) $\{p, (p \rightarrow \neg q), (q \vee r)\} \models p \wedge r$

Q) $\{p, (p \rightarrow \neg q), (q \vee r)\} \models p \wedge r$

1.	p	
2.	$p \rightarrow \neg q$	hip
3.	$q \vee r$	hip
<hr/>		
4.	p	
5.	r	SD 2
6.	$p \wedge r$	SD 3

Comp. 4,5

r) $\{\neg p, (p \vee (q \vee r)), \neg r\} \models q$

R) $\{\neg p, (p \vee (q \vee r)), \neg r\} \models q$

1.	$\neg p$	hip
2.	$p \vee (q \vee r)$	hip
3.	$\neg r$	hip
<hr/>		
4.	$\neg p \rightarrow \neg r$	SH 1,3
5.	$q \vee r$	MP 2
6.	q	simp 5

s) $\{p \vee \neg q, \neg \neg q, (p \rightarrow (r \wedge s))\} \models s$

S) $\{p \vee \neg q, \neg \neg q, (p \rightarrow (r \wedge s))\} \models s$

1.	$p \vee \neg q$	hip
2.	$\neg \neg q$	hip
3.	$p \rightarrow (r \wedge s)$	hip
<hr/>		
4.	$p \rightarrow s$	SH 3
5.	s	MP 4

t) $\{(p \rightarrow q), \neg q, (p \vee r)\} \models r$

1	$p \rightarrow q$	
2	$\neg q$	
3	$p \vee r$	
<hr/>		
4	$\neg p$	Modus tollens 1,2
5	r	Silogismo Disjuntivo 3,4

u) $\{(p \vee \neg q), (r \rightarrow \neg p), r\} \models \neg q$

1. $p \vee \neg q$	h.p.
2. $r \rightarrow \neg p$	h.p.
3. r	h.p.
<hr/>	
4. $p \rightarrow r$	S.H. 1, 3
5. $\neg q$	M.P. 1

v) $\{\neg p \vee \neg q, \neg \neg q, (r \rightarrow p)\} \models \neg r$

v) $\{\neg p \vee \neg q, \neg \neg q, (r \rightarrow p)\} \models \neg r$	
1. $\neg p \vee \neg q$	h.p.
2. $\neg \neg q$	h.p.
3. $r \rightarrow p$	h.p.
<hr/>	
4. $\neg r$	M.T. 3

w) $\{(p \rightarrow \neg q), \neg \neg q, (\neg p \rightarrow (r \vee s))\} \models (r \vee s)$

1. $p \rightarrow q$	
2. $\neg \neg q$	
3. $\neg p \rightarrow (r \vee s)$	
<hr/>	
4. $\neg \neg q \vee \neg q$	Adição 2
5. $\neg q$	Silogismo Distintivo 4
6. $\neg p$	Modus Tollens 1, 5
7. $(r \vee s)$	Modus Ponens 3, 6

x) $\{(p \wedge q), (p \rightarrow r), (r \wedge s) \rightarrow \neg t, (q \rightarrow s)\} \models \neg t$

x) $\{(p \wedge q), (p \rightarrow r), (r \wedge s) \rightarrow \neg t, (q \rightarrow s)\} \models \neg t$	
1. $p \wedge q$	h.p.
2. $p \rightarrow r$	h.p.
3. $r \wedge s \rightarrow \neg t$	h.p.
4. $q \rightarrow s$	h.p.
<hr/>	
5. s	M.P. 4
6. $r \rightarrow \neg t$	S.H. 3
7. $\neg t$	M.P. 6

y) $\{\neg p, (q \rightarrow p), ((\neg q \vee r) \rightarrow s)\} \models s$

$$Y) \{ \neg p, (q \rightarrow p), ((\neg q \vee r) \rightarrow s) \} \vdash s$$

1. $\neg p$	
2. $q \rightarrow p$	hip.
3. $(\neg q \vee r) \rightarrow s$	hip.
<hr/>	
4. $\neg q \rightarrow s$	hip.
5. $\neg q$	MT 2
6. s	simplificação 4

z) $\{((p \wedge q) \rightarrow s), r, (r \rightarrow (p \wedge q))\} \models (s \vee q)$

$$Z) \{ ((p \wedge q) \rightarrow s), r, (r \rightarrow (p \wedge q)) \} \vdash (s \vee q)$$

1. $(p \wedge q) \rightarrow s$	hip.
2. r	hip.
3. $r \rightarrow (p \wedge q)$	hip.
<hr/>	
4. $(p \wedge q) \rightarrow r$	S.H. 1,3
5. $p \rightarrow r$	S.H. 4
6. $r \rightarrow q$	S.H. 5
7. q	Simp 6
8. $p \rightarrow s$	S.H. 1
9. s	Simp 8
10. $s \vee q$	adição 9,7

aa) $\{(p \wedge \neg q), (r \rightarrow q), (r \vee s), (p \vee s) \rightarrow t\} \models t$

$$AA) \{ (p \wedge \neg q), (r \rightarrow q), (r \vee s), (p \vee s) \rightarrow t \} \vdash t$$

1. $p \wedge \neg q$	hip.
2. $r \rightarrow q$	hip.
3. $r \vee s$	hip.
4. $p \vee s$	hip.
5. t	hip.
<hr/>	
6. $p \rightarrow t$	S.H. 4,5
7. q	SD 2
8. $q \vee t$	adição 7,5
9. t	MP 8

bb) $\{(p \vee \neg q), (\neg q \rightarrow r), (p \rightarrow s), \neg r\} \models s$

1	$P \vee \neg Q$	
2	$\neg Q \rightarrow R$	
3	$P \rightarrow S$	
4	$\neg R$	
5	$\neg \neg Q$	Modus Tollens 2,4
6	$\neg \neg Q \vee \neg Q$	Adição 5
7	$\neg Q$	Silogismo disjuntivo 6
8	P	Modus Ponens 1,7
9	S	Modus Ponens 3,8

cc) $\{(p \rightarrow q), (q \rightarrow \neg r), \neg \neg r, (p \vee (s \wedge t))\} \models s$

1.	$P \rightarrow Q$	hip.
2.	$(Q \rightarrow \neg R)$	hip.
3.	$\neg \neg R$	hip.
4.	$P \vee (S \wedge T)$	hip.
5.	$P \rightarrow T$	SH 4
6.	$Q \rightarrow \neg \neg R$	SH 2,3
7.	P	simp. 5
8.	$S \vee P$	DC 4,7
9.	S	simp. 8

dd) $\{(p \vee q), (q \rightarrow r), (p \rightarrow s), \neg s\} \models (r \wedge (p \vee q))$

1.	$P \vee Q$	
2.	$Q \rightarrow R$	
3.	$P \rightarrow S$	
4.	$\neg S$	
5.	$\neg P \vee Q \vee \neg \neg S$	DD 1,4
6.	$Q \rightarrow R \vee \neg S$	DC 2,4
7.	R	MT 2
8.	$R \wedge (P \vee Q)$	conj. 7,1

ee) $\{(\neg p \vee \neg q), (\neg q \rightarrow \neg r), (\neg p \rightarrow t), \neg t\} \models \neg r \wedge \neg t$

EE) $\{(\neg p \vee \neg q), (\neg q \rightarrow \neg r), (\neg p \rightarrow t), \neg t\} \vdash \neg r \wedge \neg t$

1. $\neg p \vee \neg q$
2. $\neg q \rightarrow \neg r$
3. $\neg p \rightarrow t$
4. $\neg t$

5. $\neg p \rightarrow \neg r$ SH 1,2
6. $\neg r$ MPS
7. $\neg r \wedge \neg t$ conj. 6,4

ff) $\{(r \rightarrow t), (s \rightarrow q), (t \vee q) \rightarrow \neg p, (r \vee s)\} \models \neg p$

1. $R \rightarrow t$

2. $S \rightarrow Q$

3. $(t \vee Q) \rightarrow \neg p$

4. $R \vee S$

5. $(t \vee Q)$ Dilemma Constructive 1,2,4

6. $\neg p$ Modus Ponens 3,5

gg) $\{(p \rightarrow \neg q), (\neg q \rightarrow \neg s), ((p \rightarrow \neg s) \rightarrow \neg t), (r \rightarrow t)\} \models \neg r$

GG) $\{(p \rightarrow \neg q), (\neg q \rightarrow \neg s), ((p \rightarrow \neg s) \rightarrow \neg t), (r \rightarrow t)\} \vdash \neg r$

1. $p \rightarrow \neg q$ m.p.
2. $\neg q \rightarrow \neg s$ m.p.
3. $p \rightarrow \neg s$ m.p.
4. $r \rightarrow t$ m.p.

5. $\neg p \vee \neg r$ D.D. 3,4
6. $\neg r$ MPS

hh) $\{((p \vee q) \rightarrow \neg r), (s \rightarrow p), (t \rightarrow q), (s \vee t)\} \models \neg r$

HH) $\{((p \vee q) \rightarrow \neg r), (s \rightarrow p), (t \rightarrow q), (s \vee t)\} \vdash \neg r$

1. $(p \vee q) \rightarrow \neg r$
2. $(s \rightarrow p)$
3. $t \rightarrow q$
4. $s \vee t$

5. $\neg s$ MT 4,2
6. $p \rightarrow \neg r$ SH 1
7. $\neg r$ simplif. 6
8. $\neg r$ adição 7