MANIPULAÇÃO E SUBSTITUIÇÃO

São princípios que permitem a obtenção de fórmulas proposicionais equivalentes a uma fórmula dada, através da substituição de suas subfórmulas.

1. Seja **A** uma fórmula que contém as variáveis $\mathbf{p_1, p_2, \ldots, p_n}$. Se **A** é uma tautologia, então a fórmula **B**, obtida pela substituição de $\mathbf{p_1, \ldots, p_n}$ por fórmulas $\mathbf{A_1, \ldots, A_n}$, é uma tautologia.

Exemplo: Fazer a tabela-verdade de $\mathbf{(p \rightarrow p)}$.
Substituindo a variável **p** pela fórmula $\mathbf{(q \vee r)}$, obtém-se a fórmula $\mathbf{((q \vee r) \rightarrow (q \vee r))}$.
Fazer a tabela-verdade.

2. Se $\mathbf{B_1}$ é uma fórmula obtida a partir de $\mathbf{A_1}$ pela substituição por **B** de uma ou mais ocorrências de **A** em $\mathbf{A_1}$ e se **B** é logicamente equivalente a **A** então $\mathbf{B_1}$ é logicamente equivalente a $\mathbf{A_1}$.
Exemplo:

$\mathbf{A_1 = (\neg p \rightarrow (q \rightarrow r))}$ $\mathbf{A = (q \rightarrow r)}$
$\mathbf{B = (\neg q \vee r)}$ $\mathbf{B_1 = (\neg p \rightarrow (\neg q \vee r))}$

LEIS DE DEMORGAN

Verifique que a fórmula $\neg (p \wedge q)$ é equivalente a $(\neg p \vee \neg q)$, e $\neg (p \vee q)$ é equivalente a $(\neg p \wedge \neg q)$. Isso é estendido pelas leis de De Morgan.

Sejam A1, A2, ... , An, fórmulas proposicionais.

I. $\neg(A1 \wedge A2 \wedge \ldots \wedge An)$ é equivalente a $(\neg A1 \vee \neg A2 \vee \ldots \vee \neg An)$

II. $\neg(A1 \vee A2 \vee \ldots \vee An)$ é equivalente a $(\neg A1 \wedge \neg A2 \wedge \ldots \wedge \neg An)$

PRINCÍPIO DA DUALIDADE

Dual:

Seja **A** uma fórmula que contém apenas os conectivos { **¬** , ∧ , ∨ }. A fórmula **A*** que resulta de **A** através da substituição de cada ∧ por ∨ e de cada ∨ por ∧ é denominada DUAL de **A**.

Exemplo: A fórmula dual de

$\mathbf{\neg((p \wedge q) \vee \neg r)}$ é $\mathbf{\neg((p \vee q) \wedge \neg r)}$

Princípio da Dualidade:

Se **A** e **B** são fórmulas equivalentes que contêm no máximo os conectivos { ∧, ∨ , **¬** }, então as duais respectivas **A*** e **B *** também são equivalentes.

Exemplos:

a) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

b) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Equivalências entre os conectivos:

1) $(A \rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$
2) $(A \rightarrow B) \equiv \neg (A \wedge \neg B)$
3) $(A \leftrightarrow B) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
4) $(A \veebar B) \equiv \neg (A \leftrightarrow B) \equiv (A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B)$
5) $(A \uparrow B) \equiv \neg (A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$
6) $(A \downarrow B) \equiv \neg (A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$
7) $\neg A \equiv (A \uparrow A) \equiv (A \downarrow A)$
8) $(A \wedge B) \equiv ((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B))$
9) $(A \vee B) \equiv ((A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B))$

PROPRIEDADES DOS CONECTIVOS:		
1. **Comutativa:**	$(A \lor B) \equiv (B \lor A)$	$(A \land B) \equiv (B \land A)$
2. **Associativa:**	$(A \lor B) \lor C \equiv A \lor (B \lor C)$	$(A \land B) \land C \equiv A \land (B \land C)$
3. **Distributiva:**	$A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C)$	$A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$
4. **Identidade (elemento neutro):**	$(A \lor F) \equiv A$	$(A \land V) \equiv A$
5. **Complementativas (elem. preponderante):**	$(A \lor V) \equiv V$	$(A \land F) \equiv F$
6. **De Morgan:**	$\neg(A \lor B) \equiv (\neg A \land \neg B)$	$\neg(A \land B) \equiv (\neg A \lor \neg B)$
7. **Idempotentes:**	$(A \lor A) \equiv A$	$(A \land A) \equiv A$
8. **Dupla Negação:**	$A \equiv \neg\neg A$	
9. **Absorção:**	$A \lor (A \land B) \equiv A$	$A \land (A \lor B) \equiv A$
10. **Contraposição:**	$(A \to B) \equiv (\neg B \to \neg A)$	
11. **Prova Condicional:**	$A \to (B \to C) \equiv (A \land B) \to C$	
12. **Tautologia:**	$(A \lor \neg A) \equiv V$	
13. **Contradição:**	$(A \land \neg A) \equiv F$	

CONJUNTOS ADEQUADOS DE CONECTIVOS

Um conjunto adequado de conectivos é aquele tal que qualquer proposição pode ser representada por uma fórmula que contém apenas os conectivos do conjunto.

Exemplos:

$\{\neg, \land, \lor, \to, \leftrightarrow\}$
$\{\neg, \land, \lor\}$
$\{\neg, \land\}$
$\{\neg, \lor\}$
$\{\neg, \to\}$

Mas será que não pode existir um conjunto adequado de conectivos unitário?
Para que isso fosse possível, foram criados dois outros conectivos: a **negação conjunta** (**NAD**) e a **negação disjunta** (**NOR**).

Com estes dois conectivos, é possível formar os conjuntos adequados: $\{\uparrow\}$ e $\{\downarrow\}$.

Suas relações com os outros operadores são:

$\neg A \equiv (A \uparrow A) \equiv (A \downarrow A)$
$(A \land B) \equiv ((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B))$
$(A \lor B) \equiv ((A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B))$

Exercício:

Representar a fórmula **$(p \to q)$** utilizando os conjuntos **$\{ \uparrow \}$** e **$\{ \downarrow \}$**:

$(p \to q) \equiv$

$\neg p \lor q$

$\equiv \neg p \lor \neg \neg q$

$\equiv \neg (p \land \neg q)$

$\equiv p \uparrow \neg q$

$\equiv \mathbf{p \uparrow (q \uparrow q)}$

$(p \to q) \equiv$

$\neg p \lor q$

$\equiv \neg \neg (\neg p \lor q)$

$\equiv \neg(\neg p \downarrow q)$

$\equiv \neg ((p \downarrow p) \downarrow q)$

$\equiv \mathbf{((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)}$

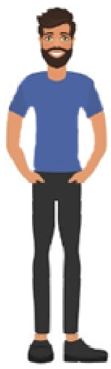
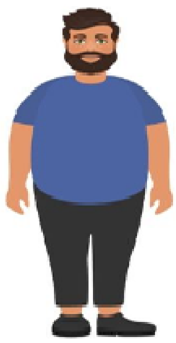
CONJUNÇÃO NEGADA (NEGATIVE AND = NAND)

É a negação da operação de conjunção (do conectivo de conjunção), representado pelo símbolo ↑.

Veja o exemplo: considere as proposições:

> **A** = "*Pedro é alto*"
> **M** = "*Pedro é magro*"

Na **Sentença 1) "***É falso que Pedro seja alto e magro*" , que pode ser representada como:

É falso que Pedro seja alto e magro	*Pedro é não alto e magro*	*Pedro é não alto e não magro*	*Pedro é alto e não magro*
$\neg(A \wedge M)$ $\equiv$	$((\neg A \wedge M)$ $\vee$	$(\neg A \wedge \neg M)$ $\vee$	$(A \wedge \neg M))$
			

Da **Sentença 1)**, temos as seguintes equivalências:

$$\neg(p \wedge q) \equiv ((\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)) \equiv (\neg p \vee \neg q)$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv (p \uparrow q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$$

NAND

⇓ ⇓ ⇓

	p	q	¬	(p	∧	q)	↔	(p	↑	q)	↔	(¬ p	∨	¬ q)
1ª	V	V	F	V	V	V	V	V	F	V	V	F	F	F
2ª	V	F	V	V	F	F	V	V	V	F	V	F	V	V
3ª	F	V	V	F	F	V	V	F	V	V	V	V	V	F
4ª	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V

DISJUNÇÃO NEGADA (NEGATIVE OR = NOR)

É a negação da operação de disjunção (do conectivo de disjunção), representado pelo símbolo $\downarrow$.
Pelo princípio da Dualidade sabemos que:

NAND ➔ $\neg(p \wedge q) \equiv ((\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)) \equiv (\neg p \vee \neg q)$

NOR ➔ $\neg(p \vee q) \equiv ((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \wedge \neg q)) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$

Logo:

NAND ➔ $\neg(p \wedge q) \equiv (p \uparrow q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$

NOR ➔ $\neg(p \vee q) \equiv (p \downarrow q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$

NOR

	p	q	¬	(p	∨	q)	↔	(p	↓	q)	↔	(¬ p	∧	¬ q)
1ª	V	V	F	V	V	V	V	V	F	V	V	F	F	F
2ª	V	F	F	V	V	F	V	V	F	F	V	F	F	V
3ª	F	V	F	F	V	V	V	F	F	V	V	V	F	F
4ª	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V

DISJUNÇÃO EXCLUSIVA (EXCLUSIVE OR = XOR = $\veebar$)

Na linguagem comum (coloquial), a palavra "**ou**" tem **dois significados**. Veja os exemplos:

Sentença 1) "*Carlos é médico ou professor*". (OU inclusivo)
Sentença 2) "*Mário é alagoano ou gaúcho*". (OU exclusivo)

Na **Sentença 1)**, pelo menos uma proposição "*Carlos é médico*", "*Carlos é professor*" é verdadeira, podendo ambas ser verdadeiras simultaneamente.

Na **Sentença 2)**, apenas uma proposição "*Mário é alagoano*", "*Mário é gaúcho*" pode ser verdadeira, pois não é possível que ambas sejam verdadeiras ao mesmo tempo.

OU inclusivo

	p	q	(p	∨	q)
1ª	V	V	V	V	V
2ª	V	F	V	V	F
3ª	F	V	F	V	V
4ª	F	F	F	F	F

OU exclusivo

	p	q	(p	⊻	q)
1ª	V	V	V	F	V
2ª	V	F	V	V	F
3ª	F	V	F	V	V
4ª	F	F	F	F	F