INFERÊNCIA

FORMALISTMO NO CÁLCULO PROPOSICIONAL

Para se trabalhar de maneira formal, utiliza-se exclusivamente sentenças expressas de acordo com sintaxe rígida[1].

Assim, um sistema formal é uma abstração matemática, que consiste em uma coleção de símbolos e nas relações entre eles. Composto de: *alfabeto*, *gramática*, *axiomas*, *regras de inferência* (regras de derivação) e *semântica*[2]:

- **ALFABETO**: conjunto de símbolos que podem ser utilizados na construção de cadeias.
- **GRAMÁTICA**: define as cadeias de símbolos bem formadas.
- **AXIOMAS**: cadeias tautológicas especiais que constituem o conhecimento básico (inicial) do sistema. São apresentados por enumeração (listagem) ou por uma lei geral de formação.
- **REGRAS DE INFERÊNCIA** (**DERIVAÇÃO**): definem as formas válidas de gerar novas cadeias a partir dos axiomas.
- **TEOREMA**: qualquer cadeia tautológica (semântica) gerada a partir dos axiomas por aplicação das regras de inferência. Em particular, todo axioma é teorema do sistema.

DERIVAÇÃO DE TEOREMAS (PROVA)

É a seqüência na forma $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, ..., $\mathbf{e_n}$, em que $\mathbf{e_1}$ é um axioma, $\mathbf{e_n}$ é a cadeia que se deseja gerar e cada $\mathbf{e_i}$, ($\mathbf{2} \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{n-1}$) é um axioma ou um teorema previamente gerado.

PROCEDIMENTO DE DECISÃO

Procedimento efetivo (descrição finita e não ambígua de um conjunto finito de operações mecânicas) que determina, em tempo finito, se uma cadeia é ou não teorema em um sistema formal.

---

[1] **Sintaxe**: define a forma, ou estrutura, da linguagem; indica como as sentenças podem ser formadas como sequências de componentes básicos (alfabeto, gramática, ...); permite identificar quando uma sentença está correta ou não. A sintaxe não revela nada sobre o conteúdo (ou significado) da sentença.

[2] **Semântica**: é o significado de uma sentença escrita com sintaxe correta.

CORREÇÃO E COMPLETUDE

Existem duas propriedades que são desejáveis em um sistema formal e que dizem respeito à relação da sintaxe com a semântica:

1) **Correção**: diz-se que um sistema formal é *correto* se e somente se todas as cadeias que podem ser geradas como teoremas são verdadeiras (tautológicas) do ponto de vista semântico.

   ➔ Todo teorema é tautologia.

2) **Completude**: diz-se que um sistema formal é *completo* se e somente se qualquer cadeia que esteja correta do ponto de vista semântico (tautologia) pode ser gerada como um teorema do sistema, ou seja, a partir de um axioma pela aplicação das regras de inferência.

   ➔ Toda tautologia é teorema.

SISTEMA FORMAL – DEFINIÇÃO

Alfabeto: conjunto de todas as variáveis proposicionais, (,) , $\neg$ e $\rightarrow$.

Gramática: corresponde à definição de fórmula bem formada (fbf), mas apenas com os conectivos $\neg$ e $\rightarrow$:

1. Toda variável proposicional é uma fbf
2. Se **A** e **B** são fbfs, então $\neg$**A** e **(A $\rightarrow$ B)** também o são.
3. Uma fbf só pode ser obtida pelas regras acima.

Axiomas: consequências logicas, ou implicações lógicas (tautologias)

L1: $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$
L2: $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$
L3: $((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A))$

Todo **axioma** é uma tautologia, mas nem toda tautologia é **axioma**. Todo **teorema** é tautologia, e toda tautologia é **teorema**.

Exercício: demonstrar que os **axiomas** são tautologias.

Exemplo: Identificar os axiomas (instâncias de axiomas) – observe que existem infinitos axiomas, pois cada **A**, **B** ou ***C*** pode ser representando qualquer fórmula:

a) L1: $((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)))$

Nesta instância do axioma L1, escolhemos $\mathbf{A \equiv (p \rightarrow q)}$ e $\mathbf{B \equiv \neg p}$

b) L1: $(p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p))$

Nesta instância do axioma L1, escolhemos $\mathbf{A \equiv p}$ e $\mathbf{B \equiv (p \rightarrow p)}$.

c) L2: $((\neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg p)) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg p)))$

Nesta instância do axioma L2, escolhemos $\mathbf{A \equiv B \equiv \mathit{C} \equiv \neg p}$

d) L3: $((\neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg r) \rightarrow (r \rightarrow (p \rightarrow q)))$

Nesta instância do axioma L3, escolhemos $\mathbf{A \equiv (p \rightarrow q)}$ e $\mathbf{B \equiv r}$

Regra de inferência: *Modus Ponens* (afirmação direta / dedução direta); permite deduzir teoremas a partir de axiomas.

A	v	***Condicional associada***		
(A → B)	v	***à regra de inferência***	→	$\mathbf{(A \land (A \rightarrow B)) \rightarrow B}$
B	v	***Modus Ponens***		

Exemplos:

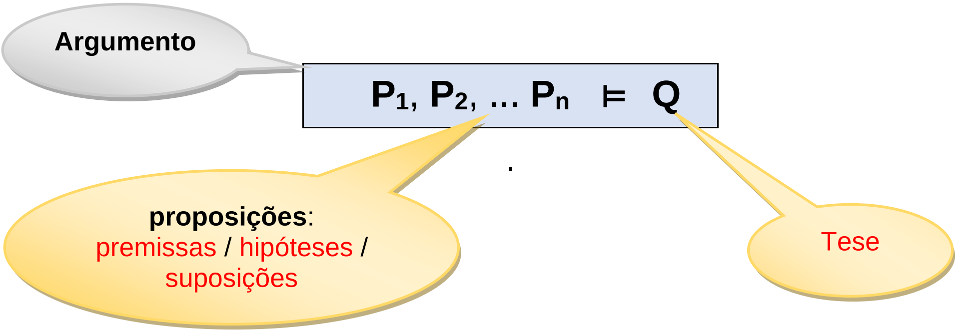
Se chove, então fico em casa.	***Se é terça, então Júlia tem aula de piano.***
Chove	***Hoje é terça.***
Então fico em casa.	***Então Júlia tem aula de piano.***

Exercício: Demonstre que toda regra de inferência é um teorema.

Semântica:

- **Correção**: Todos os teoremas de L são tautologias.
- **Completude**: Todas as tautologias são teoremas de L.

Argumento: toda afirmação de que uma dada sequência finita de proposições $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, ... $\mathbf{P_n}$ ($n \geq 1$) tem como consequência, ou acarreta, uma proposição final **Q** (tese).



Leitura:

- **I.** **Q** se deduz de $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, ... $\mathbf{P_n}$.
- **II.** **Q** se infere de $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, ... $\mathbf{P_n}$.
- **III.** $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, ... $\mathbf{P_n}$ acarretam **Q**.
- **IV.** **Q** decorre de $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, ... $\mathbf{P_n}$.

Fórmula Condicional associada a um argumento:

Argumento →	$P_1 , P_2 , \ldots , P_n \models Q$
Condicional associada →	$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$

Um **argumento é válido** se e somente se sua **condicional associada** é tautológica, ou seja, é uma implicação lógica, ou uma consequência lógica.

Exemplo de uma inferência: derivação da cadeia $(p \rightarrow p)$

1. $((p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)))$ instância do axioma L2
2. $(p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p))$ L1
3. $((p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$ MP 1,2
4. $(p \rightarrow (p \rightarrow p))$ L1
5. $(p \rightarrow p)$ MP 3,4

Uma seqüência de prova semelhante poderia provar que $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A})$ é um teorema para qualquer fbf **A**.

Por exemplo.: $(\neg q \rightarrow \neg q)$ ou então $((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q))$.

Os teoremas gerados pelo **sistema L** contêm apenas os conectivos { ¬ , → }. Para provar outras fbfs, são utilizadas as **equivalências entre os conectivos**.

Exemplo:

Quando obtemos uma conclusão (demonstramos uma tese) a partir de **P_1, P_2, ... P_n** (observe que, em um argumento **válido**, essas proposições sempre são **verdades** quando a conclusão **– tese –** também é **verdade**, pois a **condicional associada ao argumento é tautológica**) demonstramos que as premissas de um argumento podem ser utilizadas como axiomas temporários.

Demonstre que $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ é um argumento válido.

Manipulação sintática:

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$	fórmula original
2. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r))$	PC em 1
3. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge p) \rightarrow r)$	PC em 2

PC = Prova Condicional: $A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \rightarrow C$

Novo argumento que, pela **equivalência**, também é **válido**:

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge p) \rightarrow r)$$

Dedução:

1. $p \rightarrow q$	premissa / hipótese	as **premissas** de um argumento
2. $q \rightarrow r$	premissa / hipótese	podem ser utilizadas como
3. p	premissa / hipótese	**axiomas temporários**.
4. q	MP 1, 3	
5. r	MP 2, 4 = tese	

Logo, por equivalência:

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$	argumento válido
2. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r))$	argumento válido
3. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge p) \rightarrow r)$	argumento válido

De 2. (argumento válido) podemos extrair mais uma Regra de Inferência: Silogismo Hipotético

$(A \rightarrow B)$	v	***Condicional associada***		
$(B \rightarrow C)$	v	***à regra de inferência***	→	**$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$**
$(A \rightarrow C)$	v	***Silogismo Hipotético***		

NOTAÇÃO CLAUSAL

A Forma Normal Conjuntiva (**FNC**) é muito interessante para o entendimento da linguagem **Prolog**, utilizada principalmente em aplicações de **Inteligência Artificial**.

Importante: uma **Cláusula** é uma disjunção de literais, isto é:

$$F_i = (L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n)$$

Na **FNC**, uma fórmula é escrita como uma ***conjunção de cláusulas***.

$$F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n$$

Como a **FNC** de uma fórmula ***A*** do Cálculo Proposicional sempre é uma conjunção de cláusulas, e a ordem em que estas cláusulas são escritas é irrelevante (propriedade *comutativa da conjunção* $\wedge$).

Sendo assim, também pode-se dizer que a **FNC** é uma ***coleção de cláusulas***. Escreve-se a **FNC** de uma fórmula como:

$$\{ F_1 , F_2 , \ldots , F_n \},$$

sendo que a **conjunção** $\wedge$ entre as cláusulas fica **implícita**.

Neste sentido, pode-se dizer que qualquer fórmula do **Cálculo Proposicional** pode ser representada também por **coleção de cláusulas**.

Exercício: obter a **FNC** pela manipulação sintática de: $((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow s$

Resp. **FNC**: $(\underbrace{(s \vee p \vee \neg q)}_{F_1} \wedge \underbrace{(s \vee \neg p \vee \neg r)}_{F_2} \wedge \underbrace{(s \vee \neg q \vee \neg r)}_{F_3})$

SISTEMA FORMAL - RECAPITULANDO

Argumento

Raciocínio de que se tira uma conclusão / consequência.

Coleção de cláusulas (*conjunção de cláusulas*) que implicam (têm como consequência) uma tese.

Argumento válido

Argumento cuja condicional associada é uma tautologia (**consequência lógica**).

Axioma

Proposição tão evidente que não precisa ser demonstrada.

Dilema

Circunstância difícil (sem saída conveniente).

Argumento formado por duas proposições que se contradizem mutuamente.

Lógica

Ciência de raciocinar.

Proposição

Afirmativa, tese.

Silogismo

Argumento formado de três proposições; a maior, a menor (ambas premissas) e a conclusão deduzida da maior, por intermédio da menor.

Teorema

Qualquer cadeia gerada a partir dos axiomas por aplicação das regras de inferência. Em particular, todo *axioma é teorema do sistema*.

PROCEDIMENTO DE DEDUÇÃO

Em um **argumento**, uma **dedução a partir do conjunto de suas premissas (proposições)** é uma **prova** em que essas **premissas** podem ser utilizadas como "*axiomas temporários*", também chamadas de **hipóteses** ou **suposições**.

Exemplos: sejam as fórmulas (a), (b) e (c) equivalentes.

a) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Montagem do **argumento**:

Hipótese: $(p \rightarrow q)$ e Tese: $((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Logo: $\{(p \rightarrow q)\} \vDash ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

b) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

Montagem do **argumento**:

Hipóteses: $(p \rightarrow q)$ e $(q \rightarrow r)$; Tese: $(p \rightarrow r)$

Logo: $\{(p \rightarrow q), (q \rightarrow r)\} \vDash (p \rightarrow r))$

Dedução:

1. $(p \rightarrow q)$	hipótese
2. $(q \rightarrow r)$	hipótese
3. $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$	L2
4. $((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)))$	L1
5. $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$	MP 2,4
6. $((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$	MP 3,5
7. $(p \rightarrow r)$	MP 1,6

c) $((p \to q) \wedge (q \to r) \wedge p) \to r$

Montagem do **argumento**:

Hipóteses: $(p \to q)$, $(q \to r)$ e p ; Tese: r

Logo: $\{(p \to q), (q \to r), p\} \vDash r$

Dedução:

1. $(p \to q)$	hipótese
2. $(q \to r)$	hipótese
3. p	hipótese
4. q	MP 1,3
5. r	MP 2,4

REGRAS DE INFERÊNCIA

Para simplificar ainda mais, podemos utilizar "atalhos", que são deduções já provadas, para provar outras fórmulas. No exemplo anterior, foi provado que:

$$\{(p \to q), (q \to r)\} \vDash (p \to r)$$

Podemos estender essa dedução para, ao invés de **p**, **q** e **r**, quaisquer fórmulas **A**, **B** e **C**, e provar que:

$(A \to B)$

$\underline{(B \to C)}$

$(A \to C)$

Agora podemos utilizar isso como uma nova regra de inferência. A regra acima é denominada ***Silogismo Hipotético***. Do mesmo modo, podemos incluir regras para os outros operadores, como $\wedge$ e $\vee$.

Assim, o conjunto completo de regras de inferência que podemos utilizar é:

Adição:

$$\frac{A}{B \lor A} \qquad \frac{A}{A \lor B}$$

Simplificação:

$$\frac{A \land B}{A} \qquad \frac{A \land B}{B}$$

Conjunção:

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ \hline A \land B \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \\ B \\ \hline B \land A \end{array}$$

Modus Ponens:

$$\begin{array}{c} A \\ A \to B \\ \hline B \end{array}$$

Modus Tollens:

$$\begin{array}{c} A \to B \\ \neg B \\ \hline \neg A \end{array}$$

Silogismo Disjuntivo:

$$\begin{array}{c} A \lor B \\ \neg A \\ \hline B \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \lor B \\ \neg B \\ \hline A \end{array}$$

Silogismo Hipotético:

$$\begin{array}{l} A \to B \\ B \to C \\ \hline A \to C \end{array}$$

Dilema Construtivo:

$$\begin{array}{l} A \to B \\ C \to D \\ A \lor C \\ \hline B \lor D \end{array}$$

Dilema Destrutivo:

$$\begin{array}{c} A \to B \\ C \to D \\ \neg B \lor \neg D \\ \hline \neg A \lor \neg C \end{array}$$

PROVA POR RESOLUÇÃO

<u>Objetivo</u>: demonstrar que uma fórmula é um **teorema** (tautologia).

<u>Critérios</u>: transformar a fórmula em uma *coleção de cláusulas* com implicação em uma *tese*; ou seja, deixar a fórmula no formato de *argumento.*

<u>Método de Redução ao Absurdo</u>: chegar a uma ***cláusula vazia*** □, por derivação, obtida por uma **contradição** denotada por $\mathbf{p} \wedge \neg \mathbf{p}$ (contradição entre dois literais).

De $\{ p , \neg p \}$ deduz-se *falso, ou* ***cláusula vazia*** □

PROVA POR RESOLUÇÃO PELA NEGAÇÃO DA TESE

<u>Exercício</u>:

Provar que a fórmula $((p \vee q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)) \rightarrow (r \vee s)$ é um *teorema* (*tautologia*).

Alternativas:

- Provar que $(r \vee s)$ é *consequência lógica* de $(p \vee q)$, $(q \rightarrow r)$, $(q \rightarrow s)$.
- Provar que $\{(p \vee q), (q \rightarrow r), (q \rightarrow s)\} \models (r \vee s)$ é um *argumento válido*.

Passos a serem seguidos:

1. Converter as premissas para **FNC** (cláusulas, ou disjunção de literais).

   (a) $(p \vee q)$

   (b) $(\neg p \vee r)$

   (c) $(\neg q \vee s)$

2. Negar a conclusão (tese) e convertê-la para **FNC**.

   $\neg (r \vee s) \equiv \neg r \wedge \neg s$

   (d) $\neg r$

   (e) $\neg s$

3. Deduzir a cláusula vazia □ por resolução.

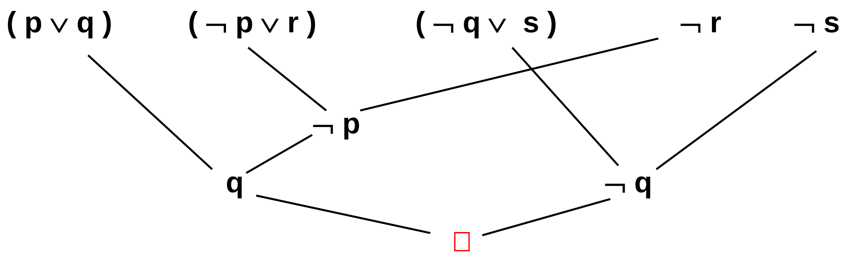
(f) $\neg$ **p** de (d) e (b)

(g) **q** de (f) e (a)

(h) $\neg$ **q** de (e) e (c)

(i) □ de (e) e (h)

A cláusula vazia □ sempre é gerada de 2 cláusulas na forma: $\mathbf{q} \wedge \neg \mathbf{q}$ que é uma contradição (absurdo) => prova por redução ao absurdo.



PROVA POR RESOLUÇÃO PELA NEGAÇÃO DO TEOREMA

Exemplo:

Provar que a fórmula $\mathbf{((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))}$ é um *teorema*.

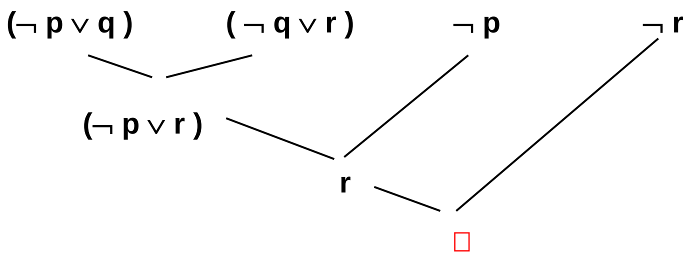
1. Negação do teorema

$$\neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

2. Obtenção da FNC do teorema negado

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg p \wedge \neg r$$

3. Seguir os passos de resolução até chegar à cláusula vazia □



<u>Propriedades do Cálculo Proposicional</u>

O Cálculo Proposicional, embora insuficiente para o formalismo do Raciocínio Lógico, possui propriedades muito importantes que o distinguem:

- **Consistência**: não é possível derivar simultaneamente uma fórmula **Q** e sua negação ¬**Q**;
- **Completude**: todo *teorema* é uma *tautologia* e toda *tautologia* é um *teorema*;
- **Decidibilidade**: há um algoritmo que permite verificar se uma fórmula é ou não um *teorema.*