CÁLCULO PROPOSICIONAL

O **Cálculo Proposicional** (**CP –** também conhecido como **Lógica Proposicional**) é um dos mais simples formalismos lógicos existentes.

Este cálculo lida apenas com enunciados ou sentenças declarativas, que são chamadas de *proposições*.

As sentenças exclamativas, imperativas e interrogativas não são proposições, logo são excluídas.

PROPOSIÇÃO

É uma sentença que pode ser avaliada em **FALSO** ou **VERDADEIRO**. É uma frase **declarativa** (com sujeito e predicado) que representa uma ideia completa.
Proposições são representadas por letras maiúsculas: **A**, **B**, ...

Exemplos de proposições atômicas (átomos):

- Napoleão morreu.
- A Lua é o satélite natural da Terra.
- Dez é menor do que sete.
- 3 + 4 = 7
- O Japão fica na África.

Não são proposições:

- Onde você está? → Sentença interrogativa
- Não vá embora. → Sentença imperativa
- Que lindo! → Sentença exclamativa
- 3 + 4 → Não possui predicado
- foi à praia → Não possui sujeito

Valor-verdade ou valor lógico:

- VERDADEIRO (**V**)
- FALSO (**F**).

PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS DA LÓGICA

- **Princípio de identidade** - enunciados do princípio de identidade:
  - **I.** Uma coisa é o que é.
  - **II.** O que é, é; o que não é, não é.
  - **III.** A é A ("A" designando qualquer objeto do pensamento).
  - **IV.** Em termos de proposições: uma proposição é equivalente a si mesma.

- **Princípio da Não-Contradição**: Uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa.

- **Princípio do Terceiro Excluído**: Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, nunca ocorrendo um terceiro caso.

PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

É possível construir proposições compostas através do uso de conectivos, usados para construir proposições a partir de outras.
Os conectivos são:

Os primeiros elementos da tabela possuem maior precedência que os últimos.

O conectivo **¬** é o que possui a maior precedência, isto é, deve ser avaliado primeiro que os outros.

precedência

Conectivos (operadores lógicos) :				
Nome:	Símbolo:	Utilização:	Leitura:	Variações:
negação	~	~A	"não A"	A', ¬ A
conjunção	$\wedge$	$A \wedge B$	"A e B"	&, &&
disjunção	$\vee$	$A \vee B$	"A ou B"	||
implicação	$\rightarrow$	$A \rightarrow B$	"A implica B" ("se A então B; "B é conseqüência de A")	$\supset$
bicondicional	$\leftrightarrow$	$A \leftrightarrow B$	A se e somente se B	

Exemplos:

1) Napoleão não morreu.

Considerando que a proposição**:**

A é: "Napoleão morreu."

A frase acima é representada por: **¬ A**

Que significa:

“não é verdade que Napoleão morreu” ou

“é falso que Napoleão morreu”.

2) Dois é primo e três é par.

Considerando as proposições:

B : Dois é primo.

C : Três é par.

A frase é representada por: (**B ∧ C**)

3) A resposta é dois ou três.

D : A resposta é dois.

E : A resposta é três.

Fórmula: (**D ∨ E**)

Observe que neste caso, uma parte da proposição **E** está implícita na frase.

4) Se a chuva continuar, o rio vai transbordar.

F : A chuva continua.

G : O rio vai transbordar.

Fórmula: (**F → G**)

A palavra "então" está implícita

5) Os abacates estão maduros se e somente se estão escuros.

H : Os abacates estão maduros.

I : Os abacates estão escuros.

Fórmula: (**H ↔ I**)

Uma parte da proposição **I** está oculta na frase.

VARIÁVEIS PROPOSICIONAIS:

Podem assumir como valor qualquer proposição e, portanto, não possuem valor-verdade definido.

São representadas por letras minúsculas: **p**, **q**, ...

FÓRMULAS PROPOSICIONAIS:

São representadas por letras maiúsculas: **A** , **B** , **C** , ...

1) Qualquer variável proposicional é uma fórmula proposicional

2) Se **A** e **B** são fórmulas proposicionais, então: $\neg \mathbf{A}$, $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$ e $(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B})$ também são.

3) Nada mais é uma fórmula proposicional.

Este é um exemplo de definição indutiva.

Ex. Fórmulas proposicionais bem-formadas - fbf (ou wff - well-formed formula):

P

$\neg$ p

q

$(p \wedge q)$

$(\neg \neg p \vee q)$

$\neg (p \wedge q)$

$(\neg (p \wedge q) \rightarrow p)$

$((p \wedge q) \rightarrow (\neg (q \vee r)))$

Exercícios

1. Identifique quais das frases abaixo são proposições:
   a) Dez é um número primo.
   b) Como vai você?
   c) O número 16 é um quadrado perfeito.
   d) Existem formas de vida em outros planetas do universo.
   e) 2312 > (45 * 13) + 7

2. Identifique quais das expressões abaixo são fórmulas lógicas:
   a) $(p \wedge (q \vee p))$
   b) $(p \wedge (q \neg p))$
   c) $(\vee p \vee q)$
   d) $(\neg (\neg p \rightarrow \neg (q \vee r)) \wedge \neg q)$

4. Sejam as proposições:

   A : Pedro saiu.
   B : Maria está aqui.

   Forme sentenças na linguagem natural que correspondam às fórmulas:

   a) $\neg A$
   b) $\neg B$
   c) $A \wedge B$
   d) $A \vee B$
   e) $\neg A \vee B$
   f) $\neg (A \wedge B)$
   g) $\neg A \wedge \neg B$
   h) $\neg A \vee \neg B$
   i) $A \rightarrow B$
   j) $\neg B \rightarrow \neg A$
   k) $(A \wedge B) \rightarrow \neg A$
   l) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
   m) $\neg A \leftrightarrow B$

5. Represente as frases abaixo através de fórmulas lógicas:
   a) Se a demanda permaneceu constante e os preços subiram, então a oferta diminuiu.
   b) Nós ganharemos a eleição somente se João for eleito o líder do partido.
   c) Se João não for o líder do partido, então Manoel ou Joaquim deixarão o posto e perderemos a eleição.
   d) Se x é um número racional e y é inteiro, então z não é real.
   e) O assassino já deixou o país ou alguém o está escondendo.
   f) Se o assassino não deixou o país, então alguém o está escondendo.
   g) A soma de dois números é par se e somente se ambos forem pares ou ambos forem ímpares.
   h) Se y é inteiro então z não é real, desde que x seja um número racional.

6. No exercício anterior, existem frases com o mesmo significado?

TABELA-VERDADE DE FÓRMULAS BEM-FORMADAS

Sintaxe de uma fbf: maneira que a fórmula é construída com os conectivos **e**, **não**, **ou**, ...
Semântica de uma fbf: significado da fórmula; é o valor verdade a ela associado.

Para analisar o valor-verdade de uma fórmula proposicional em função dos valores das variáveis proposicionais, utiliza-se a tabela-verdade.

Existe uma tabela para cada **conectivo**:

Exemplos de TABELAS-VERDADE e seus CONECTIVOS:

p	~ p
V	F
F	V

➔ NEGAÇÃO:
Napoleão **não** morreu

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

➔ CONJUNÇÃO:
Neste fim-de-semana, vou estudar Lógica **e** Cálculo.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

➔ DISJUNÇÃO:
Neste fim-de-semana, vou estudar Lógica **ou** Cálculo.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

➔ CONDICIONAL ou IMPLICAÇÃO
Se chover, **então** vou estudar Lógica.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

➔ BICONDICIONAL
Vou estudar Lógica **somente se** chover.

O objetivo é analisar o **valor-verdade** de uma fórmula para cada combinação possível de valores-verdade das variáveis que a compõem. Assim, é necessária uma linha para cada combinação de valores-verdade, e o total de linhas da tabela será $\mathbf{2^n}$, onde **n** é o número de variáveis diferentes que aparecem na fórmula.

Uma forma segura de não esquecer nenhuma combinação possível é começar, na primeira variável, colocando **V** na primeira metade das linhas, e **F** na segunda metade. Para a segunda variável, deve-se começar com a metade de valores **V** utilizados na primeira, e assim por diante.

Exemplos:

Fórmula **(p → (q ∨ r))** na tabela-verdade abaixo:

p	q	r	(q ∨ r)	(p → (q ∨ r))
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V
F	F	F	F	V

Observe que a tabela nos mostra que só há um caso em que a fórmula (p → (q ∨ r)) é falsa: quando a variável p é verdadeira e as variáveis q e r são falsas.

Outra forma de representar esta mesma tabela é:

⇓

(p	→	(q	∨	r))
V	V	V	V	V
V	V	V	V	F
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	V	V	F
F	V	F	V	V
F	V	F	F	F

Nesta representação, o resultado de cada operação é escrito abaixo do próprio operador. Assim, o resultado de (q ∨ r) está abaixo do operador ∨, e o resultado da fórmula inteira está abaixo do operador principal, que é →. Em qualquer fórmula, denomina-se operador principal aquele que deve ser o último a ser resolvido, e o resultado da análise da fórmula sempre estará abaixo dele. Por isso, deve ser marcado de algum modo. Aqui, utilizamos o símbolo ⇓.

Outro exemplo:

~ (p ↔ (~ q ∧ ~ p))

⇓

~	(p	↔	(~	q	∧	~	p))
V	V	F	F	V	F	F	V
V	V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	V	F
V	F	F	V	F	V	V	F

Observe que se deve deixar uma coluna separada para a negação. E também que quando se trata da mesma variável (no caso p), deve-se repetir a coluna dos valores-verdade. Nesta fórmula, o conectivo principal é a negação, na primeira coluna.

Mais um exemplo:

⇓

	(p	**∨**	**q)**	**→**	**(p**	**∧**	**q)**
1ª	V	V	V	V	V	V	V
2ª	V	V	F	F	V	F	F
3ª	F	V	V	F	F	F	V
4ª	F	F	F	V	F	F	F

VALIDADE & INCONSISTÊNCIA

O valor-verdade (ou simplesmente *valor*) de uma fórmula diz respeito a uma interpretação particular. Assim, é possível encontrar as seguintes situações:

1. Se uma fórmula ***A*** tem o valor **VERDADEIRO** numa certa interpretação I, diz-se que "***A*** *é verdadeira na interpretação I*".

   No exemplo anterior, a fórmula **(p ∨ q) → (p ∧ q)** é **VERDADEIRA** nas interpretações 1 e 4.

2. Se uma fórmula ***A*** é **VERDADEIRA** segundo alguma interpretação, diz-se que ***A*** é ***satisfatível*** (ou ***consistente***).
   A fórmula **(p ∨ q) → (p ∧ q)** é ***consistente*** ou ***satisfatível***.

3. Uma fórmula ***A*** é ***válida*** quando for **VERDADEIRA** em todas as suas interpretações. São chamadas de **TAUTOLOGIA**.

   Exemplos:

   a) (p ∨ ¬p)
   b) (p → (q ∨ p))

(p	∨	~	p)
V	V	F	V
F	V	V	F

(p	→	(~	q	∨	p))
V	V	F	V	V	V
V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F

Observe que na coluna do conectivo principal (∨ para a primeira fórmula e → para a segunda) todas as linhas possuem o valor-verdade V. Isto significa que estas fórmulas nunca serão falsas. Isto pode ser compreendido quando se substitui as variáveis por uma proposição qualquer. A primeira fórmula é um ∨ de uma proposição com sua negação. É como: "Ou isto ocorre ou não ocorre." Esta frase sempre será verdadeira.

4. Se uma fórmula ***A*** tem o valor **FALSO** numa certa interpretação **I**, diz-se que "***A*** *é falsa na interpretação **I***".

5. Se uma fórmula ***A*** é **FALSA** segundo alguma interpretação, diz-se que ***A*** é ***inválida***.
   No exemplo anterior, a fórmula (p ∨ q) → (p ∧ q) é **FALSA** nas interpretações 2 e 3.

6. Uma fórmula ***A*** é ***insatisfatível*** (ou ***inconsistente***) quando for FALSA em todas as suas interpretações. São chamadas de **CONSTRADIÇÕES**.

Exemplos:

a) $(p \wedge \neg p)$

b) $\neg(p \rightarrow (\neg q \vee p))$

(p	∧	~	P)
V	F	F	V
F	F	V	F

~	(p	→	(~	q	∨	p))
F	V	V	F	V	V	V
F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	F

Observe que na coluna do conectivo principal (∧ para a primeira fórmula e ~ para a segunda) todas as linhas possuem o valor-verdade F. Isto significa que estas fórmulas sempre serão falsas. Um exemplo de proposição deste tipo é: "Três é ímpar e três não é ímpar." Esta frase sempre será falsa. Observe a segunda fórmula: a negação de uma tautologia é sempre uma contradição, e vice-versa.

7. Uma fórmula que não é TAUTOLOGIA nem CONTRADIÇÃO é denominada fórmula **CONTINGENTE** ou **CONTINGÊNCIA**.

Exemplos:

a) $p \wedge q$

b) $p \vee q$

c) $p \rightarrow q$

RESUMO: VALIDADE E INCONSISTÊNCIA	
I.	Uma fórmula ***A*** é ***satisfatível*** (ou ***consistente***) = ao menos 1 VERDADEIRO
II.	Uma fórmula ***A*** é ***válida*** = tudo VERDADE = **TAUTOLOGIA**
III.	Uma fórmula ***A*** é ***inválida*** = ao menos 1 FALSO
IV.	Uma fórmula ***A*** é ***insatisfatível*** (ou ***inconsistente***) = tudo FALSO = **CONTRADIÇÃO**

As seguintes observações podem então ser constatadas:

- Uma fórmula é **inconsistente** se, e somente se, sua negação for **válida**.
- Uma fórmula é **inválida** se, e somente se, existe pelo menos uma interpretação na qual ela é FALSA.
- Uma fórmula é **consistente** se, e somente se, existe pelo menos uma interpretação na qual ela é VERDADEIRA.
- Se uma fórmula é **válida** então ela é **consistente**, mas não vice-versa.
- Se uma fórmula é **inconsistente**, então ela é **inválida**, mas a não vice-versa.

Pode ser facilmente verificado através do uso de tabelas-verdade que:

a) **(p ∧ ¬ p)** é inconsistente (contradição), portanto inválida (pelo menos uma interpretação F);
b) **(p ∨ ¬ p)** é válida (tautologia), portanto consistente (pelo menos uma interpretação V);
c) **(p → ¬ p)** é inválida, ainda que consistente.

CONSEQUÊNCIA LÓGICA (OU IMPLICAÇÃO LÓGICA)

Diz-se que uma fórmula ***A* implica logicamente *B*** (ou ***B* é implicada logicamente por *A***, ou ainda que ***B* é consequência lógica de *A***), se e somente se a fórmula **(*A* → *B*)** é uma TAUTOLOGIA.

Se **A implica logicamente B** (ou **B é consequência lógica de A**), isso significa que sempre que ***A*** for VERDADE, ***B*** também será VERDADE.
A fórmula **(p ∧ q)** → **(p ∨ q)** é uma tautologia.

((p	∧	q)	→ ⇓	(p	∨	q))
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	F
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	F	F

Exemplo:

Fórmulas **(p ∧ q)** e **(p ∨ q)**

Logo: **(p ∧ q) ⊨ (p ∨ q)**

EQUIVALÊNCIA LÓGICA

Diz-se que duas fórmulas ***A*** e ***B*** são **logicamente equivalentes** (**A ≡ B**) se e somente se a fórmula **(A ↔ B)** é uma tautologia.

((p	→	q)	↔	(~	p	∨	q))
V	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V	F

Exemplo:

Fórmulas **(p → q)** e **(¬p ∨ q)**

Logo: **(p → q) ≡ (¬ p ∨ q)**

FORMAS NORMAIS

Algumas vezes, pode-se desejar expressar diversas fórmulas em um mesmo formato – um formato único, padronizado. Para isso, existem diversos procedimentos. Um deles consiste em encontrar o equivalente da fórmula na **Forma Normal Disjuntiva** ou na **Forma Normal Conjuntiva**.

*Forma Normal Disjuntiva (**FND**):*

1. Contém, no máximo, os conectivos ¬, ∧ e ∨ .
2. Não contém negação sobre ∧ nem sobre ∨.
3. Não contém ∧ sobre ∨ .

Exemplos:

p

¬p

(p ∨ q)

(p ∨ q) ∨ r

(p ∧ q) ∨ r

(p ∧ q) ∨ (p ∧ r)

Não estão na FND:

$(p \rightarrow q)$	(não é FND, pois contém $\rightarrow$)
$\neg (p \vee q)$	(não é FND, pois contém $\neg$ sobre $\vee$)
$r \vee \neg(p \wedge q)$	(não é FND, pois contém $\neg$ sobre $\wedge$)
$(p \vee q) \wedge r$	(não é FND, pois contém $\wedge$ sobre $\vee$)
$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	(não é FND, pois contém $\wedge$ sobre $\vee$)

Para encontrar a fórmula **FND** equivalente a uma fórmula dada, partimos de sua tabela-verdade. Seja, por exemplo, a tabela-verdade a seguir, da qual <u>não se conhece a fórmula</u>. O objetivo é encontrar uma fórmula **FND** que possua <u>na coluna do resultado</u> os valores abaixo.

	p	q	r	Resultado desejado
1º	V	V	V	**V**
2º	V	V	F	F
3º	V	F	V	F
4º	V	F	F	F
5º	F	V	V	F
6º	F	V	F	**V**
7º	F	F	V	F
8º	F	F	F	**V**

Para encontrar a **FND**, <u>parte-se das linhas em que o valor do resultado é V</u> (verdadeiro). Para esta fórmula, são as linhas **1**, **6** e **8**. Para cada uma destas linhas será necessário escrever uma <u>componente FND</u>, encontrada com base nos valores das variáveis (**p**, **q** e **r**).

Na primeira linha, os valores são: **p = V**, **q = V** e **r = V**. Assim, a componente FND fica simplesmente $\mathbf{(p \wedge q \wedge r)}$.

Já na linha **6**, os valores são: **p = F**, **q = V** e **r = F**. Para esta linha, a componente **FND** será $\mathbf{(\neg p \wedge q \wedge \neg r)}$. Observa-se que quando o valor da variável aparece falso em determinada linha, esta aparecerá negada na componente FND.

Na linha **8**, que possui todos os valores falsos, a componente FND = $\mathbf{(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)}$

	p	**q**	**r**	**Resultado desejado**	**Componente FND**
1º	V	V	V	**V**	**$(p \wedge q \wedge r)$**
2º	V	V	F	F	
3º	V	F	V	F	
4º	V	F	F	F	
5º	F	V	V	F	
6º	F	V	F	**V**	**$(\neg p \wedge q \wedge \neg r)$**
7º	F	F	V	F	
8º	F	F	F	**V**	**$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$**

Componente FND: é uma *conjunção de literais*, ou apenas um único *literal*.

Não é necessário adotar procedimento com as outras linhas, as de resultado falso. A fórmula FND resultante será: **$(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$**. Esta fórmula, se resolvida, apresentará os valores da tabela na coluna do resultado.

*Forma Normal Conjuntiva (**FNC**):*

1. Contém, no máximo, os conectivos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$.
2. Não contém negação sobre $\wedge$ nem sobre $\vee$.
3. Não contém $\vee$ sobre $\wedge$.

Exemplos:

p

$\neg p$

$(p \vee q)$

$(p \vee q) \vee r$

$(p \wedge q) \wedge r$

$(p \vee q) \wedge r$

$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Não estão na FNC:

$(p \leftrightarrow q)$	(não é FNC, pois contém $\leftrightarrow$)
$\neg (p \vee q)$	(não é FNC, pois contém $\neg$ sobre $\vee$)
$r \vee \neg(p \wedge q)$	(não é FNC, pois contém $\neg$ sobre $\wedge$)
$(p \wedge q) \vee r$	(não é FNC, pois contém $\vee$ sobre $\wedge$)
$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	(não é FNC, pois contém $\vee$ sobre $\wedge$)

Para encontrar a fórmula **FNC** equivalente a uma fórmula dada, o procedimento é semelhante ao da FND. Também partimos de sua tabela-verdade.

Para a tabela-verdade a seguir, da qual não se conhece a fórmula, agora as linhas selecionadas são as de resultado falso (F). Elas é que terão uma componente FNC.

	p	q	r	Resultado desejado
1º	V	V	V	V
2º	V	V	F	**F**
3º	V	F	V	V
4º	V	F	F	V
5º	F	V	V	V
6º	F	V	F	**F**
7º	F	F	V	**F**
8º	F	F	F	V

Para encontrar a **FNC**, parte-se das linhas em que o valor do resultado é F (falso). Para esta fórmula, são as linhas **2**, **6** e **7**. Para cada uma destas linhas será necessário escrever uma componente **FNC**, encontrada com base nos valores das variáveis (**p**, **q** e **r**).

Na linha **2**, os valores são: **p = V**, **q = V** e **r = F**. Agora, o procedimento é o contrário do anterior: as variáveis com valor V é que ficam negadas na componente FNC. Assim, a componente FNC será**: (¬p ∨ ¬q ∨ r).** Observe também que agora utiliza-se o conectivo ∨ entre as variáveis.

Já na linha **6**, os valores são: **p = F**, **q = V** e **r = F**. Para esta linha, a componente FNC será **(p ∨ ¬q ∨ r)**.

Para a linha **7**, então, que possui p e q falsos, a componente FNC = **(p ∨ q ∨ ¬r)**

	p	q	r	Resultado desejado	Componente FNC
1º	V	V	V	V	
2º	V	V	F	**F**	**(¬p ∨ ¬q ∨ r)**
3º	V	F	V	V	
4º	V	F	F	V	
5º	F	V	V	V	
6º	F	V	F	**F**	**(p ∨ ¬q ∨ r)**
7º	F	F	V	**F**	**(p ∨ q ∨ ¬r)**
8º	F	F	F	V	

Componente FNC: é uma *disjunção de literais*, ou apenas um único *literal*.

A fórmula **FNC** resultante será: $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$. Esta fórmula, se resolvida, apresentará os valores da tabela na coluna do resultado.

As fórmulas **FNC** e **FND** podem ser maiores ou menores, dependendo da quantidade de valores verdadeiros (para a FND) e falsos (para a FNC) na coluna do resultado.

Também é possível calcular as fórmulas **FND** e **FNC** para uma dada fórmula qualquer, bastando para isso construir sua tabela-verdade e seguir o procedimento aqui descrito.