

Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Disciplina: Resolução de Problemas com Lógica Matemática (RPLM)

Lista de Exercícios 6

Nome: João Vitor Palmonari, Loraine de Fátima Mendes, Lucas Gabriel Mendes De Castro, Marcio Vinicius de Souza da Rocha

Sistema L: Axiomas:

L1: $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$

L2: $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$

L3: $((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A))$

Regra de inferência: Modus Ponens

X

$(X \rightarrow Y)$

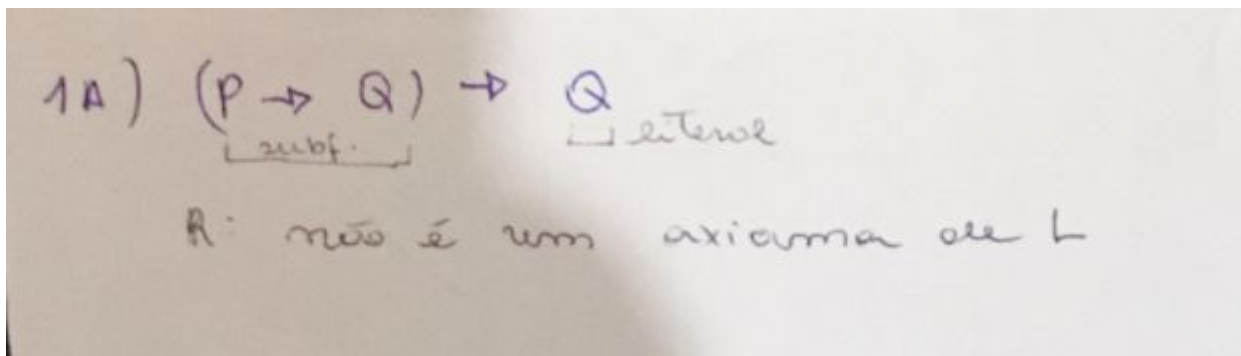
Y

Os teoremas gerados pelo sistema L contêm apenas os conectivos $\{\neg, \rightarrow\}$. Para provar outras fbfs, são utilizadas as equivalências.

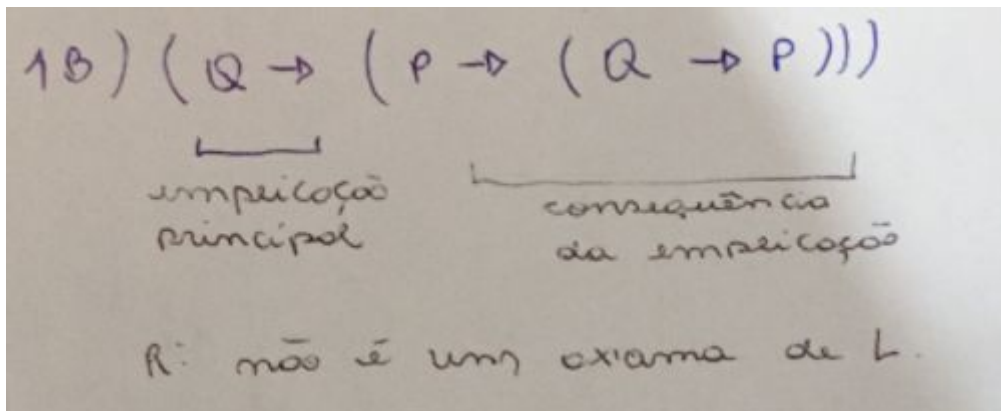
Exercícios:

1) Verifique se as fórmulas são ou não axiomas de L:

a) $((p \rightarrow q) \rightarrow q)$



b) $(q \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow p)))$



$$c) ((q \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow p))) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow (q \rightarrow p))))$$

1c) $((Q \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow P))) \rightarrow ((Q \rightarrow P) \rightarrow (Q \rightarrow (Q \rightarrow P))))$

R: É ~~axioma~~ L2, sendo $A \equiv Q$, $B \equiv P$, $C \equiv Q \rightarrow P$

$$d) (p \rightarrow p)$$

1D) $(P \rightarrow P)$

R: não é axioma por fazer de sentido, mas é tautologia, logo, é Teorema.

$$e) ((\neg p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow \neg p)) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow p))$$

1E) $((\neg p \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow \neg p)) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow p))$

como tem negação, ir p/e L3.

R: É axioma L3, sendo $A \equiv p$, $B \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$

$$f) (((s \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow p)) \rightarrow (((s \rightarrow p) \rightarrow r) \rightarrow ((s \rightarrow p) \rightarrow p)))$$

1 F) $((S \rightarrow P) \rightarrow (R \rightarrow P)) \rightarrow (((S \rightarrow P) \rightarrow R) \rightarrow ((S \rightarrow P) \rightarrow P))$

R: É axioma L2.

2) Escreva uma prova para os seguintes teoremas de L

a) $(p \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow q)))$

Dica: L1, L1, MP

Handwritten proof for theorem a):

$$\begin{array}{l}
 2) a) \quad 1. (q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow q))) \\
 \quad \quad 2. (q \rightarrow (p \rightarrow q)) \\
 \hline
 \quad \quad 3. (p \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow q))) \quad \text{MP, 1, 2}
 \end{array}$$

b) $((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (p \rightarrow q)))$

Handwritten proof for theorem b):

$$\begin{array}{l}
 b) \quad 1. (p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (p \rightarrow q))) \\
 \quad \quad 2. (p \rightarrow (p \rightarrow q)) \\
 \hline
 \quad \quad 3. ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (p \rightarrow q))) \quad \text{MP 1, 2}
 \end{array}$$

c) $((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow p)))$

Dica: L1, L1, MP

Handwritten proof for theorem c):

$$\begin{array}{l}
 c) \quad 1. (p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow p))) \\
 \quad \quad 2. (p \rightarrow (q \rightarrow p)) \\
 \hline
 \quad \quad 3. ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow p)))
 \end{array}$$

d) $(q \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)))$

Dica: L1, L3, MP

Handwritten proof for theorem d):

$$\begin{array}{l}
 20 \\
 (q \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p))) \\
 \hline
 L1 \quad | ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (q \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p))) \\
 L3 \quad | ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \\
 \hline
 MP \quad | (q \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)))
 \end{array}$$

e) $((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow p)$

Dica: L2,L3,MP

<u>2E</u>	
$((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow p)$	
L2	$ ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow p)$
L3	$ ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p))$
MP	$ ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow p)$
$A \equiv (\neg p \rightarrow \neg q)$	
$B \equiv q$	
$C \equiv p$	

f) $((p \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow p))$

Dica: L2,L1,MP

<u>2F</u>	
$((p \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow p))$	
L2	$ (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow p))$
L1	$ p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)$
MP	$ ((p \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow p))$
$A \equiv p$	
$B \equiv \neg p$	
$C \equiv p$	

g) $((p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow p))$

Dica: igual ao anterior

2G) $((p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow p))$
 Dica: L2, L1, MP

1. $p \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$ L1
2. $p \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p)$ L2
3. $((p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow p))$ MP 1, 2

h) $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Dica: L2, L2, MP

2H) $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r))$
 Dica: L2, L2, MP

1. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ L2
2. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ L2
3. $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r))$ MP 1, 2

i) $(\neg q \rightarrow \neg q)$

Dica: resolvida no material didático.

i) 1. $(\neg q \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg q)) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg q)$
 2. $(\neg q \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg q))$
 3. $(\neg q \rightarrow \neg q)$ MP 1, 2