Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Disciplina: Resolução de Problemas com Lógica Matemática (RPLM)

Lista de Exercícios 7

Nome: João Vitor Palmonari, Loraine de Fátima Mendes, Lucas Gabriel Mendes De Castro, Marcio Vinicius de Souza da Rocha

Regras de Inferência:

Adição:

$\dfrac{A}{B \vee A}$ $\dfrac{A}{A \vee B}$

Simplificação:

$\dfrac{A \wedge B}{A}$ $\dfrac{A \wedge B}{B}$

Conjunção:

A A

B B

A ∧ B

B ∧ A

Modus Ponens:

A

A → B B

Modus Tollens:

A → B

$\dfrac{\neg B}{\neg A}$

Silogismo Disjuntivo:

A ∨ B A ∨ B

¬A ¬B B

A

Silogismo Hipotético:

A → B B

→ C A →

C

Dilema Construtivo:

A

→

B

C

→

D

A

∨

C

B

∨

D

Dilema Destrutivo:

A

→

B

C

→

D

¬B ∨ ¬D

¬A∨ ¬C

Exercícios:

1. Indique a regra de inferência que justifica a validade de:

a) { (p → q) } ⊨ (p → q) ∨ ¬ r

1A $\{(P \to Q)\} \vDash (P \to Q) \vee \neg R$

1. $(P \to Q)$
2. $(P \to Q) \vee \neg R$ $\dfrac{A}{A \vee B}$ *Adição

$A \equiv (P \to Q)$ $B \equiv \neg R$

b) $\{ \neg p \land (q \rightarrow r) \} \vDash \neg p$

b) 1. $\sim p \land (q \rightarrow r)$ hip.
2. $\sim p$

$A \land B$
A

Simplificação $\land$

c) $\{ (p \rightarrow q) , (q \rightarrow \neg r) \} \vDash (p \rightarrow \neg r)$

1c) $\{(P \rightarrow Q), (Q \rightarrow \neg R)\} \vDash (P \rightarrow \neg R)$

1. $P \rightarrow Q$ hip
2. $Q \rightarrow \neg R$ hip

$P \rightarrow \neg R$ SH 1, 2

$A \rightarrow B$
$B \rightarrow C$
$A \rightarrow C$

é silogismo hipotético

d) $\{ p \rightarrow (q \rightarrow r) , p \} \vDash q \rightarrow r$

1D) $\{ \overset{A}{P} \rightarrow \overset{B}{(Q \rightarrow R)}, \overset{A}{P} \} \vDash \overset{C}{Q \rightarrow R}$

1. $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
2. P
3. $Q \rightarrow R$ SH 1, 2

é SILOGISMO HIPOTÉTICO

$A \rightarrow B$
$A \rightarrow C$
$B \rightarrow C$

e) $\{ (q \lor r) \rightarrow \neg p , \neg \neg p \} \vDash \neg (q \lor r)$

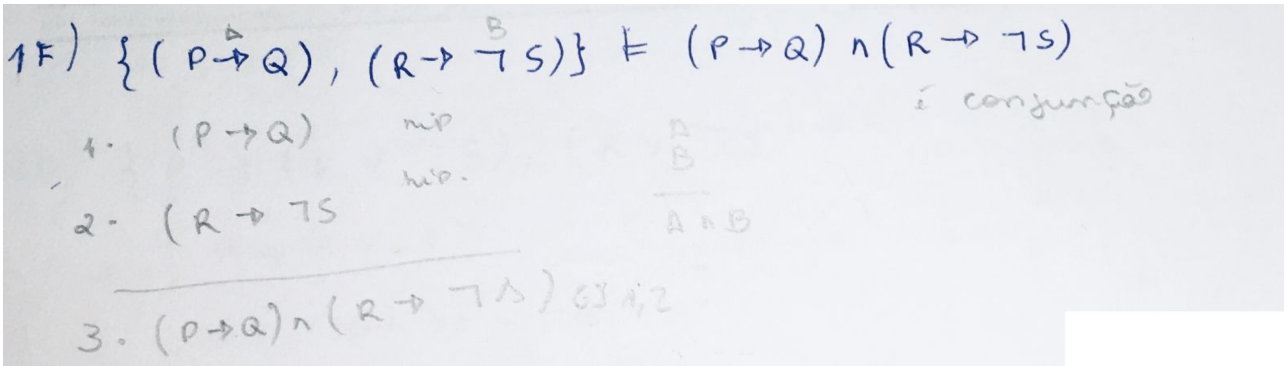
1E) $\{ \overset{A}{(Q \lor R)} \rightarrow \overset{B}{\neg P}, \neg \overset{B}{\neg P} \vDash \neg (Q \lor R)$ é MODUS TOLLENS

1. $(Q \lor R) \rightarrow \neg P$ hip
2. $\neg \neg P$ hip

$\neg (Q \lor R)$ MT 1, 2

$A \rightarrow B$
$\neg B$
$\neg A$

f) $\{(p \rightarrow q), (r \rightarrow \neg s)\} \vDash (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg s)$



1F) $\{(P \overset{A}{\rightarrow} Q), (R \rightarrow \overset{B}{\neg S})\} \vDash (P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow \neg S)$

é conjunção

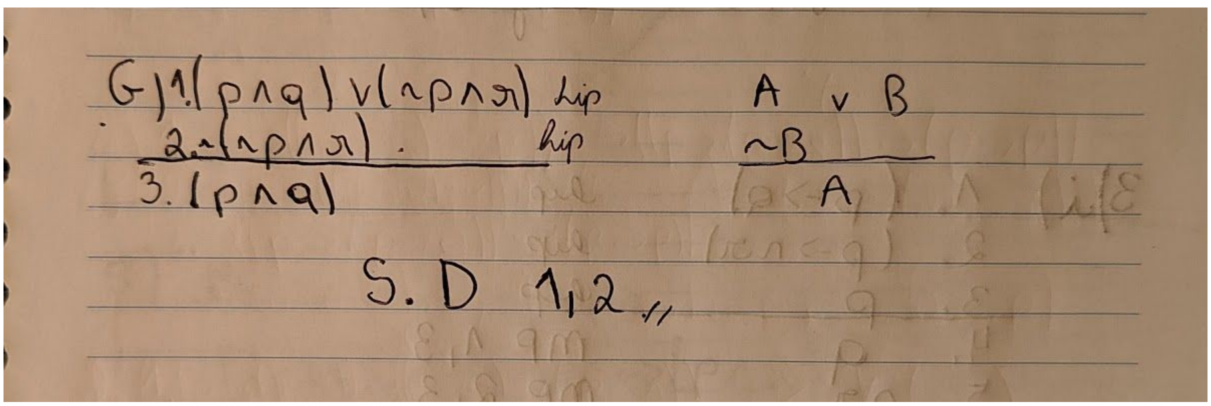
1. $(P \rightarrow Q)$ hip

2. $(R \rightarrow \neg S$ hip.

3. $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow \neg S)$ CJ 1,2

$$\frac{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}}{A \wedge B}$$

g) $\{(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r), \neg(\neg p \wedge r)\} \vDash (p \wedge q)$



G) 1. $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r)$ hip

2. $\sim(\sim p \wedge r)$. hip

3. $(p \wedge q)$

S.D 1,2 //

$$\frac{\begin{matrix} A \vee B \\ \sim B \end{matrix}}{A}$$

2. Indique uma possível conclusão para:

a) $\{ (s \lor t) \rightarrow (r \land q) , (r \land q) \rightarrow \neg p \}$

2A $\{(S \lor t) \rightarrow (R \land Q), (R \land Q) \rightarrow \neg P\}$

1	$(S \lor T) \rightarrow (R \land Q)$
2	$(R \land Q) \rightarrow \neg P$
3	$(S \lor T) \rightarrow \neg P$

Silogismo Hipotético

$$\frac{A \rightarrow B \qquad B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

$A \equiv (S \lor T)$

$B \equiv (R \land Q)$

$C \equiv \neg P$

b) $\{ (p \leftrightarrow q) \rightarrow \neg (r \land s) , \neg \neg (r \land s) \}$

2B $\{ (P \leftrightarrow Q) \rightarrow \neg(R \land S), \neg\neg(R \land S)\}$

1.	$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow \neg(R \land S)$
2.	$\neg\neg(R \land S)$
3.	$\neg(P \leftrightarrow Q)$

$A \equiv (P \leftrightarrow Q)$

$B \equiv \neg(R \land S)$

Modus Tollens

$$\frac{A \rightarrow B \qquad \neg B}{\neg A}$$

c) $\{ s \lor (r \land t) , \neg s \}$

2) c)

1. $s \lor (r \land t)$	hip	$A \lor B$
2. $\sim s$	hip.	$\sim A$
3. $(r \land t)$		$\cdot\, B$

S.D 1, 2,,

d) $\{ p \to (r \lor \neg s) , (r \lor \neg s) \to t \}$

2D) $\{ \overset{A}{P} \to \overset{B}{(R \lor \neg S)}, \overset{B}{(R \lor \neg S)} \to \overset{C}{T}$

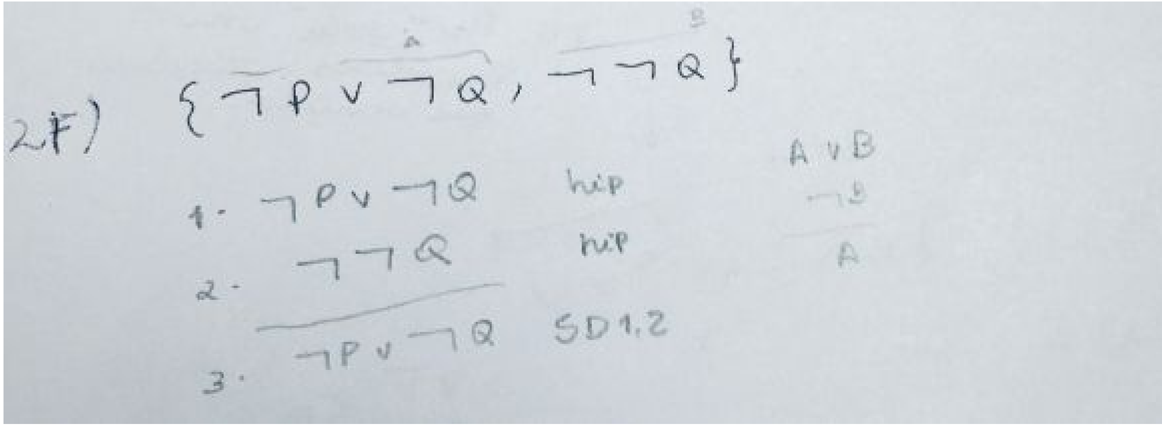
1.	$P \to (R \lor \neg S)$		$A \to B$
2.	$(R \lor \neg S) \to T$		$B \to C$
3.	$P \to T$	SH 1, 2	$A \to C$

e) $\{ p \to r , \neg q \to \neg s , p \lor \neg q \}$

2E) $\{ \underbrace{\overset{A}{p} \to \overset{B}{r}}, \underbrace{\neg \overset{C}{q} \to \neg \overset{D}{S}}, \underbrace{\overset{A}{P} \lor \overset{C}{\neg Q}} \}$

1. $P \to R$	hip	$A \to B$
2. $\neg Q \to \neg S$	hip	$C \to D$
3. $P \lor \neg Q$	hip	$A \lor C$
4. $R \lor \neg S$	Dilema construtivo	$B \lor D$

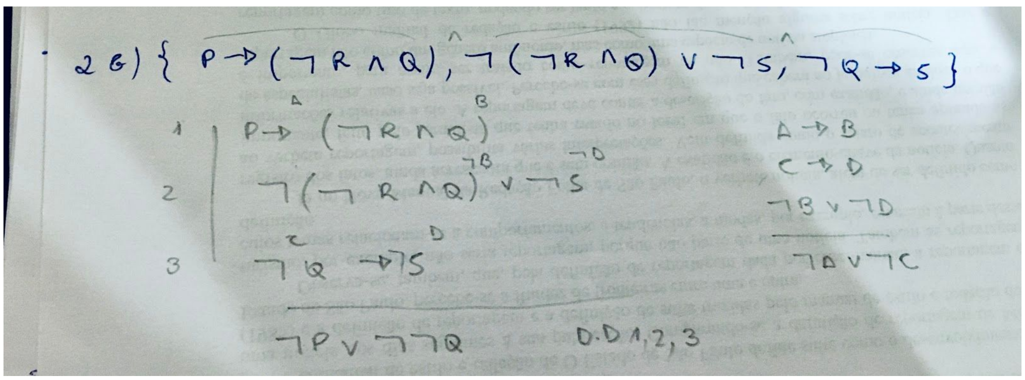
f) $\{ \neg p \vee \neg q , \neg \neg q \}$


2F) $\{ \neg P \vee \neg Q , \neg \neg Q \}$

1. $\neg P \vee \neg Q$ hip
2. $\neg \neg Q$ hip
3. $\neg P \vee \neg Q$ SD 1,2

$A \vee B$
$\neg B$
A

g) $\{ p \rightarrow (\neg r \wedge q) , \neg (\neg r \wedge q) \vee \neg s , \neg q \rightarrow s \}$


2G) $\{ P \rightarrow (\neg R \wedge Q), \neg(\neg R \wedge Q) \vee \neg S, \neg Q \rightarrow S \}$

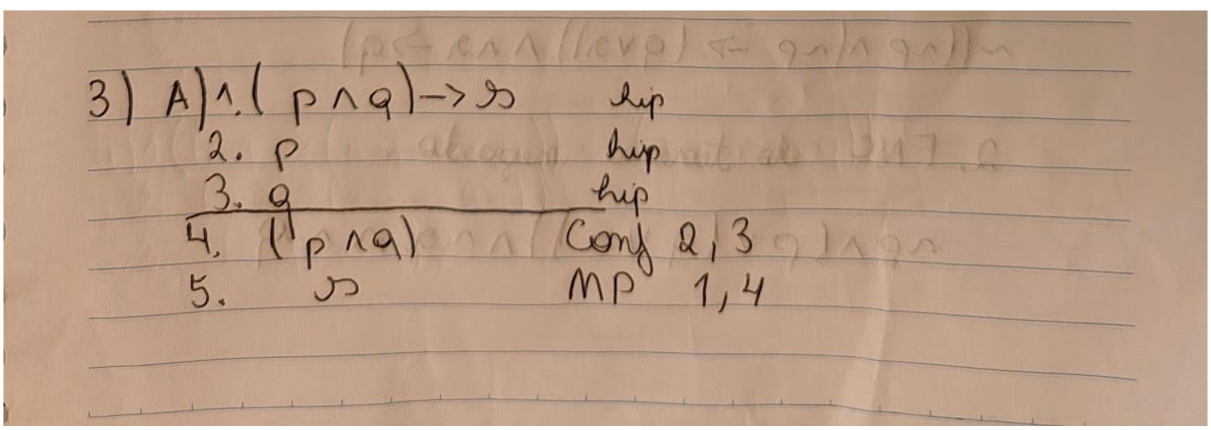
1 $P \rightarrow (\neg R \wedge Q)$
2 $\neg(\neg R \wedge Q) \vee \neg S$
3 $\neg Q \rightarrow \neg S$

$\neg P \vee \neg\neg Q$ D.D 1,2,3

$A \rightarrow B$
$C \rightarrow D$
$\neg B \vee \neg D$
$\neg A \vee \neg C$

3. Construa as deduções:

a) $\{ (p \wedge q) \rightarrow s , p , q \} \vDash s$


3) A) 1. $(p \wedge q) \rightarrow s$ hip
2. p hip
3. q hip
4. $(p \wedge q)$ Conj 2,3
5. s MP 1,4

b) { p → q , ¬ p → r , ¬ q } ⊨ r

3B $\{P \to Q,\ \neg P \to R,\ \neg Q\} \vDash R$

1. $P \to Q$
2. $\neg P \to R$
3. $\neg Q$

---

4. $\neg P$ (Modus tollens 1,3)
5. R (Modus Ponens 4, 2)

Modus tollens 1, 3

$$\frac{\begin{array}{l}1.\ P \to Q\\ 3.\ \neg Q\end{array}}{\neg P}$$

Modus Ponens 4, 2

$$\frac{\begin{array}{l}4.\ \neg P\\ 2.\ \neg P \to R\end{array}}{5.\ R}$$

c) { p → q , q → ¬ ¬ r , s → ¬ r , p } ⊨ ¬s

3C $\{P \to Q,\ Q \to \neg\neg R,\ S \to \neg R,\ P\} \vDash \neg S$

1. $P \to Q$
2. $Q \to \neg\neg R$
3. $S \to \neg R$
4. P

---

5. Q Modus Ponens (1,4)
6. $\neg\neg R$ Modus Ponens (2,5)
7. $\neg S$ Modus tollens (6,3)

MP(1,4)

$$\frac{\begin{array}{l}P \to Q\\ P\end{array}}{Q}$$

MP(2,5)

$$\frac{\begin{array}{l}Q \to \neg\neg R\\ Q\end{array}}{\neg\neg R}$$

MT(6,3)

$$\frac{\begin{array}{l}S \to \neg\neg R\\ \neg\neg\neg R\end{array}}{\neg S}$$

d) { p ∧ q , p → r , q → s } ⊨ r ∧ s

d)

1. $(p \wedge q)$ hip
2. $(p \to r)$ hip
3. $(q \to s)$ hip

---

4. p simp. $\wedge$
5. q simp $\wedge$
6. r MP 2, 4
7. s MP 3, 5
8. $r \wedge s$ Conj 6, 7.

e) $\{ p \rightarrow (\neg q \wedge r) , p , s \rightarrow q , s \vee t \} \vDash t$

3E) $\{ \underbrace{P \rightarrow (\neg Q \wedge R)}_{A}, \underbrace{P}_{B}, \underbrace{S \rightarrow Q}_{C}, \underbrace{S \vee T}_{D} \} \vDash T$

1. $P \rightarrow (\neg Q \wedge R)$
2. P
3. $S \rightarrow Q$
4. $S \vee T$

---

5. P simpl. 1
6. $P \rightarrow Q$ MP 3,4
7. T S.D. 4

f) $\{ (p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow (s \wedge t)) , p \wedge r \} \vDash t \vee u$

3F) $\{(P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow (S \wedge T)), P \wedge R\} \vDash T \vee U$

1. $(P \vee Q) \rightarrow (P \rightarrow (S \wedge T))$ hip.
2. $P \wedge R$ hip.

---

3. P simp. 2
4. $P \vee Q$ adição 3
5. $P \rightarrow (S \wedge T)$ MP 1,4
6. $S \wedge T$ MP 3,5
7. T simplif. 6
8. $T \vee U$ adição 7

g) $\{ p \rightarrow q , \neg q , (\neg p \vee \neg r) \rightarrow s \} \vDash s$

3G) $\{ \overbrace{P \rightarrow Q}^{A}, \overbrace{\neg Q}^{B}, \overbrace{(\neg P \vee \neg R) \rightarrow S}^{C} \} \vDash S$

1. $P \rightarrow Q$
2. $\neg Q$
3. $(\neg P \vee \neg R) \rightarrow S$

---

4. $\neg P$ MT 1,2
5. S SH 2,3

h) $\{ p \rightarrow \neg r , p , s \rightarrow r \} \vDash \neg s$

$\{ \underbrace{P \rightarrow \neg R}_{1}, \underbrace{P}_{2}, \underbrace{S \rightarrow R}_{3} \} \vDash \neg S$

1. $P \rightarrow \neg R$
2. P
3. $S \rightarrow R$

---

4. $\neg S$ — MT 3

i) $\{ p \rightarrow q , p \rightarrow \neg r , p \} \vDash q \wedge \neg r$

i)

1.	$(p \rightarrow q)$	hip
2.	$(p \rightarrow \neg r)$	hip
3.	p	hip
4.	q	MP 1, 3
5.	$\neg r$	MP 2, 3
6.	$q \wedge \neg r$	Conj 4, 5

j) $\{ \neg p \vee \neg\neg q , \neg\neg p , \neg r \rightarrow \neg q \} \vDash \neg\neg r$

3J $\{ \neg P \vee \neg\neg Q, \neg\neg P, \neg R \} \vDash Q \wedge \neg R$

1.	$\neg P \vee \neg\neg Q$		$A \equiv \neg P$
2.	$\neg\neg P$		$B \equiv Q$
3.	$\neg R$		$C \equiv \neg R$
4.	Q	SD (1)	
5.	$Q \wedge \neg R$	Conj (4,3)	

Silogismo Disjuntivo (1)

$$\frac{\neg P \vee \neg\neg Q \qquad \neg P}{\neg\neg Q \equiv Q}$$

Conjunção (4,3)

$$\frac{Q \qquad \neg R}{Q \wedge \neg R}$$

k) { p ∧ ¬ q , q ∨ ¬ r , s → r } ⊨ p ∧ ¬s

k) $\{ p \wedge \neg Q, Q \vee \neg R, S \to R \} \vDash p \wedge \neg S$

1. $p \wedge \neg Q$
2. $Q \vee \neg R$
3. $S \to R$

---

4. p simpl 1
5. $\neg Q$ simpl. 1
6. $\neg R$ SD 2,5
7. $\neg S$ MT 3,6
8. $p \wedge \neg S$ conj 4,7

4. Verificar se é um teorema. Fazer a prova através da **Negação do Teorema** e demonstrar utilizando a **Árvore de Resolução** (utilizar manipulação sintática):

   Dicas:
   1. *Transformar a fórmula em argumento:* ***conjunção*** *de cláusulas com* ***implicação*** *em uma TESE*
   2. *Chegar a uma* ***cláusula vazia •****, por derivação.*

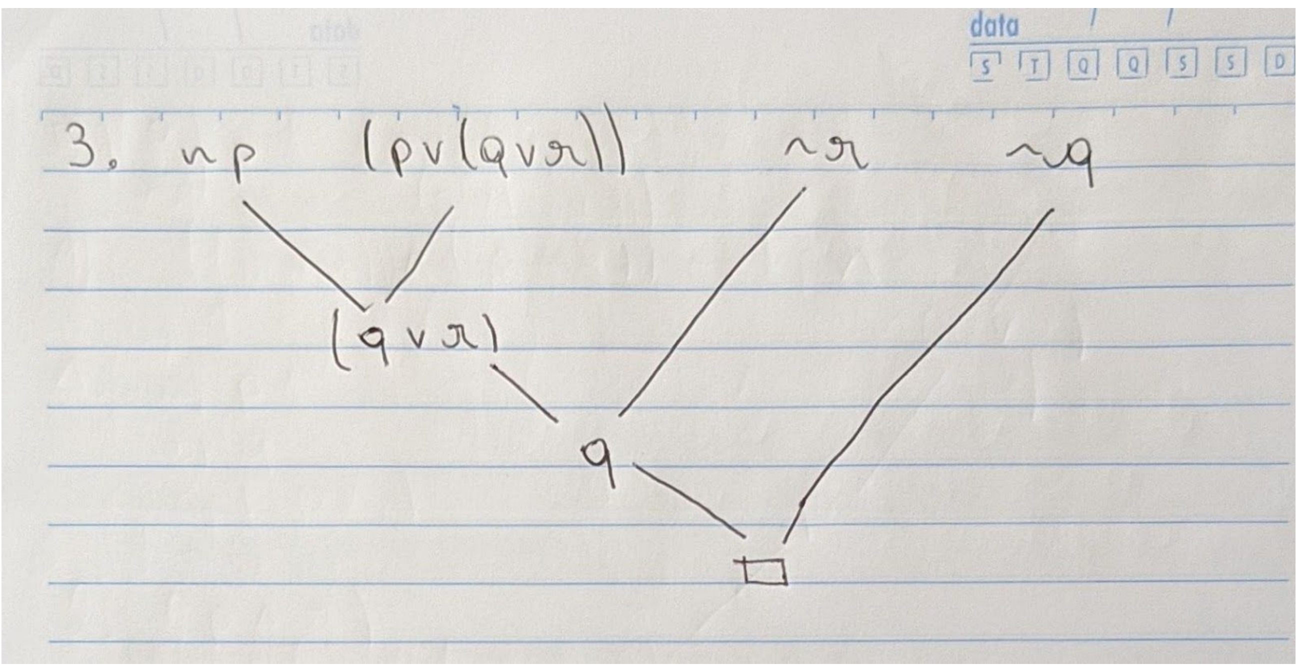
a) $(\neg p \wedge (\neg p \rightarrow (q \vee r)) \wedge \neg r) \rightarrow q$

A) 1. negação do teorema

$\sim((\sim p \wedge (\sim p \rightarrow (q \vee r)) \wedge \sim r \rightarrow q)$

2. FNC do teorema negado.

$\sim p \wedge (p \vee (q \vee r)) \wedge \sim r \wedge \sim q$



b) ¬((p ∨ ¬ q) ∧ ¬ ¬ q ∧ (p → (r ∧ s))) ∨ s

NEGAÇÃO DO TEOREMA:

$(P \vee \neg Q) \wedge Q \wedge (P \rightarrow (R \wedge S)) \wedge \neg S$

$(P \vee \neg Q) \wedge Q \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee S) \wedge \neg S$

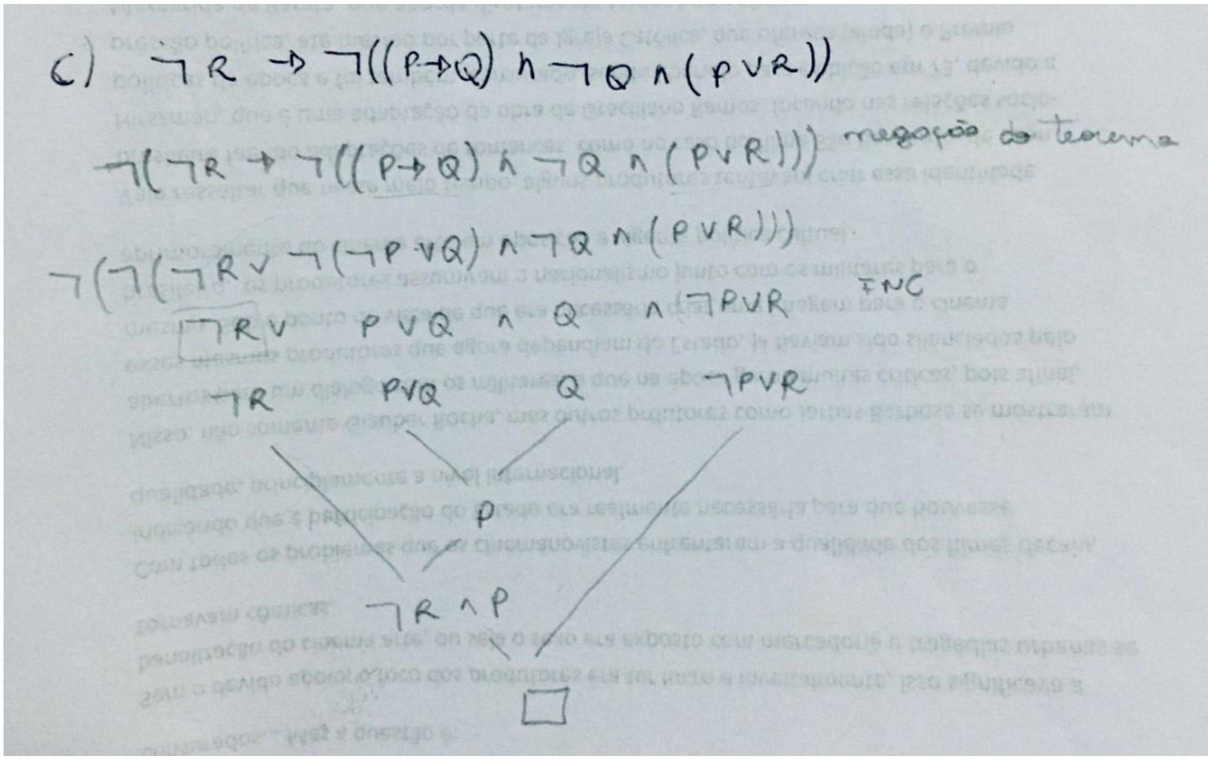
$P \vee \neg Q \quad Q \quad \neg P \vee R \quad \neg P \vee S \quad \neg S$

$\neg P$

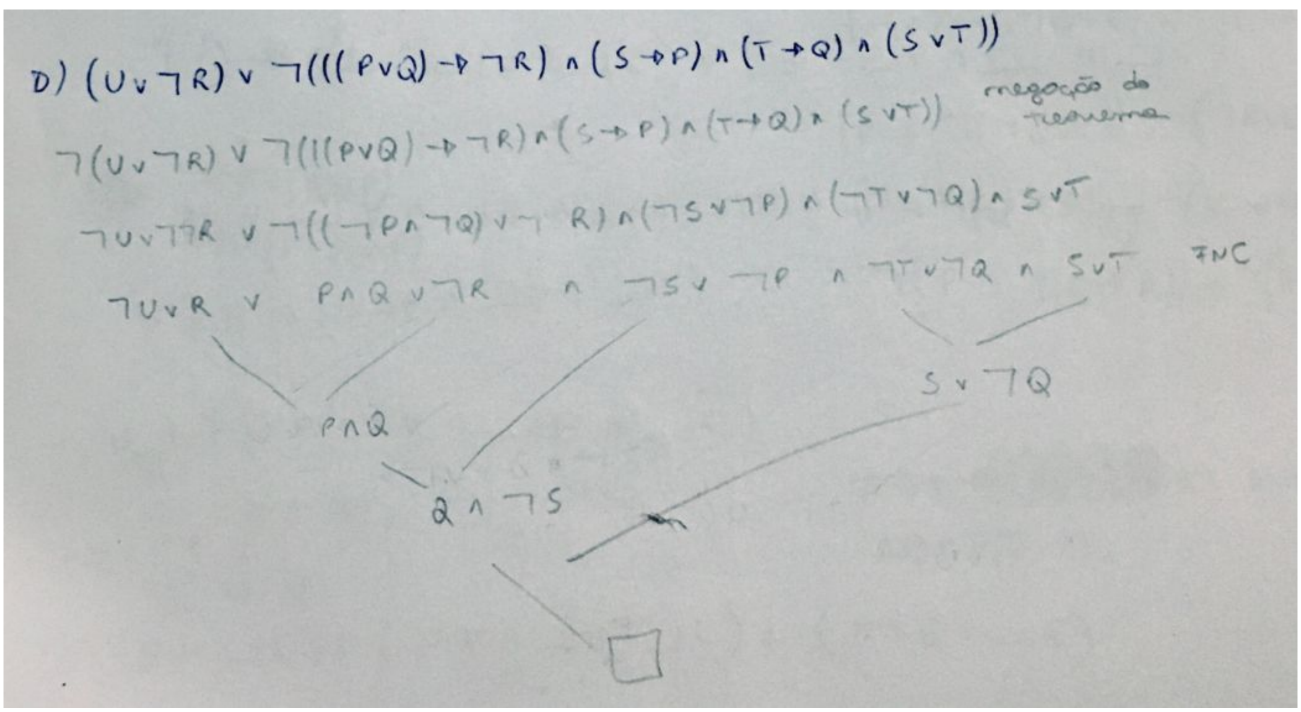
$\neg Q$

$\square$

c) ¬r → ¬ ((p → q) ∧ ¬ q ∧ (p ∨ r))



d) $(u \vee \neg r) \vee \neg(((p \vee q) \rightarrow \neg r) \wedge (s \rightarrow p) \wedge (t \rightarrow q) \wedge (s \vee t))$



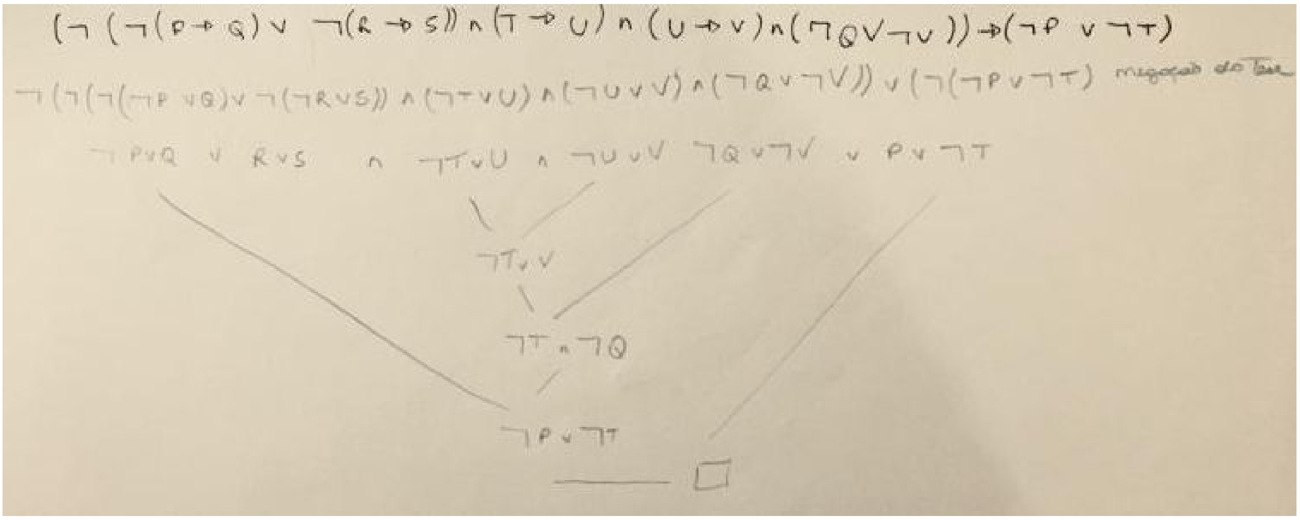
5. Verificar se é um teorema. Fazer a prova através da **Negação da Tese** e demonstrar utilizando a **Árvore de Resolução** (utilizar manipulação sintática):

   Dicas:

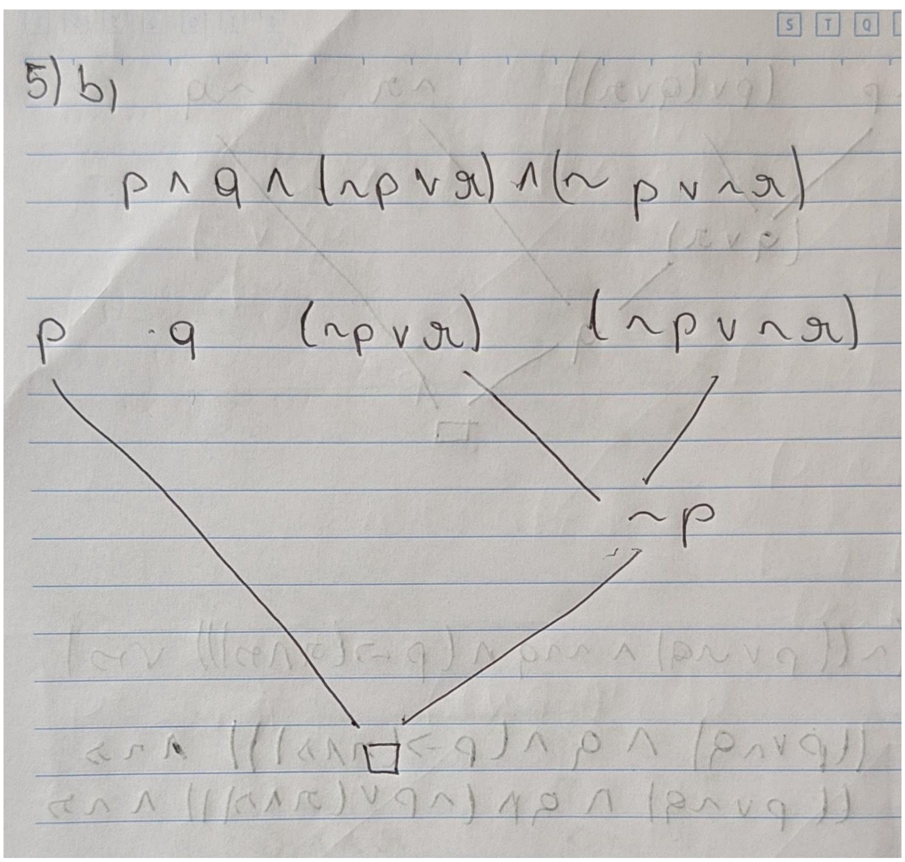
   1. *Transformar a fórmula em argumento:* ***conjunção*** *de cláusulas com* ***implicação*** *em uma TESE*

2. *Chegar a uma* ***cláusula vazia •****, por derivação.*

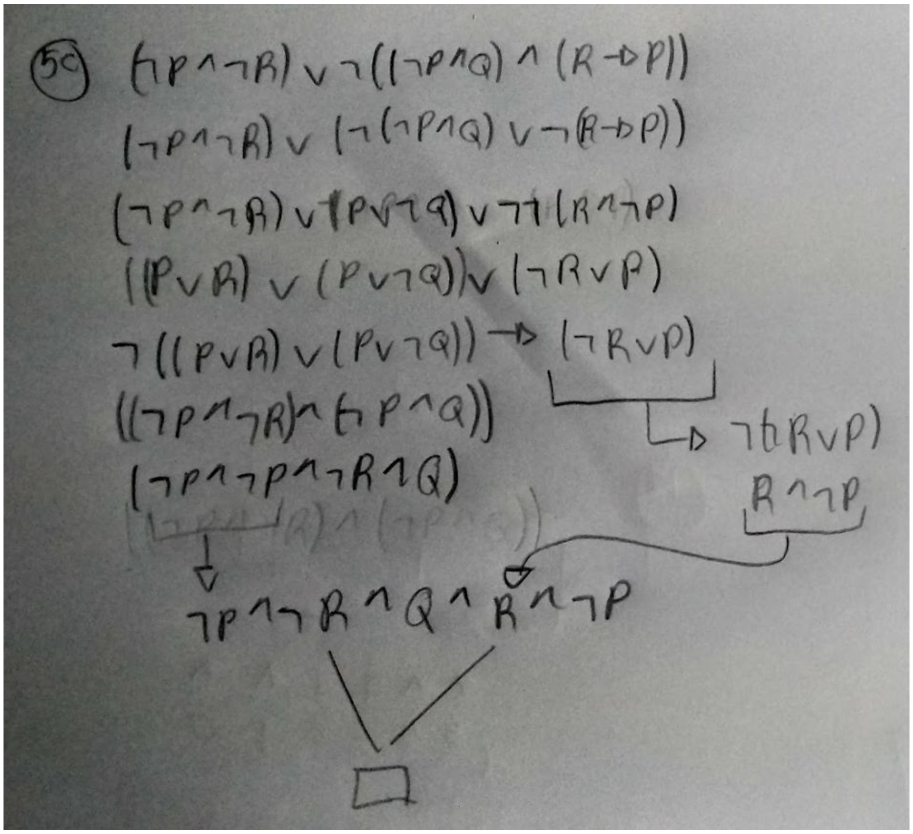
a)(¬(¬(p → q) ∨ ¬(r → s)) ∧ (t → u) ∧ (u → v) ∧ (¬ q ∨ ¬ v)) → (¬ p ∨ ¬ t)



b) ((p ∧ q) ∧ (p → r)) → (p ∧ r)



c) $(\neg p \wedge \neg r) \vee \neg((\neg p \wedge q) \wedge (r \rightarrow p))$



d) $((\neg p \rightarrow q) \wedge \neg(r \wedge s) \wedge (p \rightarrow (r \wedge s))) \rightarrow \neg p \wedge q$