Tarea 04 - Método de la bisección

Conjunto de Ejercicios

1. Use el método de bisección para encontrar soluciones precisas dentro de 10^{-2} para $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ en cada intervalo.

Para poder usar el método de bisección de mejor manera y aseverar mis respuestas, primero realizaré la representación gráfica de la función $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6$.

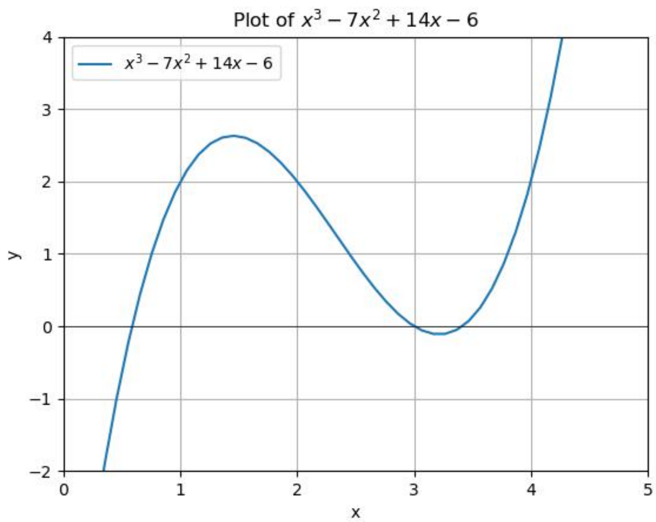

Figura 1: Representación gráfica de la función $f(x)$.

a. [0,1]

Para este intervalo, luego de 7 iteraciones se logró obtener la siguiente solución: $p_7 = 0.5859375$

b. [1,3.2]

Para este intervalo, luego de 8 iteraciones se logró obtener la siguiente solución: $p_8 = 3.0023$

c. [3.2,4]

Para este intervalo, luego de 7 iteraciones se logró obtener la siguiente solución: $p_7 = 3.41875$

2. a. Dibuje las gráficas para $y = x$ y $y = sin(x)$.

La gráfica de ambas funciones nos queda de la siguiente manera:

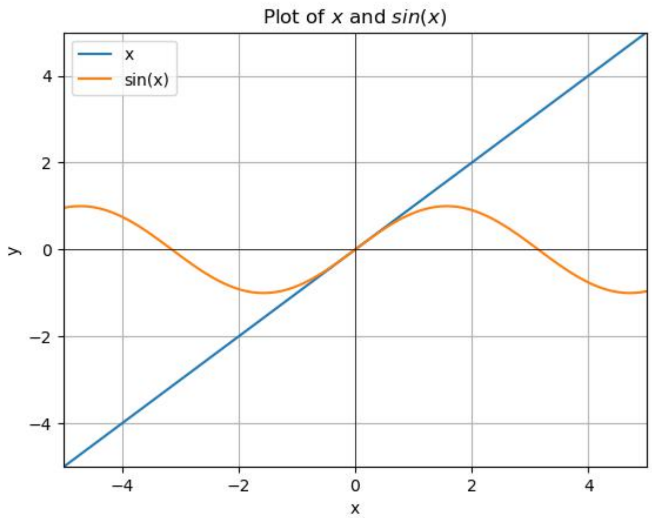

Figura 2: Representación gráfica de las funciones $y = x$ y $y = sin(x)$.

b. Use el método de bisección para encontrar soluciones precisas dentro de 10^{-5} para el primer valor positivo de x con $x = 2sin(x)$.

Para poder usar el método de la bisección es necesario saber cuál es nuestra función. En este caso, dicha función es $f(x) = x - 2sin(x)$ y su gráfica se muestra a continuación.

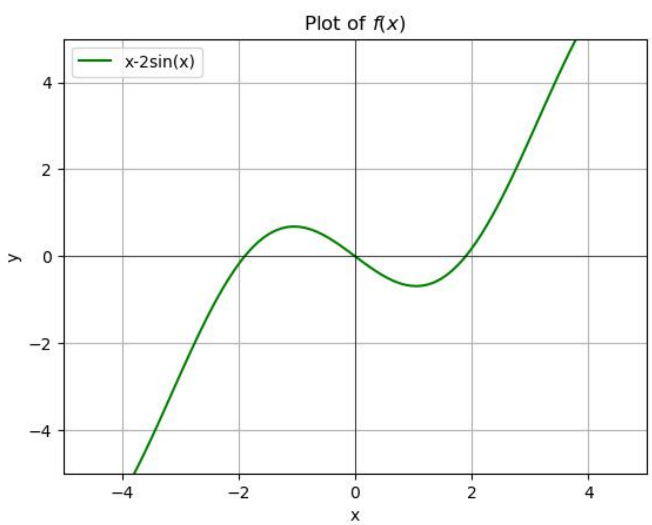

Figura 3: Representación gráfica de la función f(x)

En esta gráfica se puede observar que el valor de la raíz buscado se encuentra a la derecha, por lo que dentro mi algoritmo de bisección he escogido el intervalo de $[1.5, 2.5]$ para encontrar la solución. Luego de 17 iteraciones el valor obtenido para la raíz y que cumple con la precisión solicitada es $p_{17} = 1.8955$.

3. a. Dibuje las gráficas para $y = x$ y $y = tan(x)$.

La gráfica para ambas funciones nos queda de la siguiente manera:

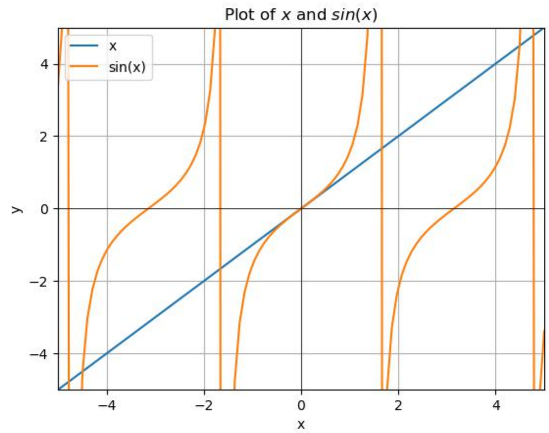

Figura 4: Representación gráfica de las funciones $y = x$ y $y = tan(x)$

b. Use el método de bisección para encontrar una aproximación dentro de 10^{-5} para el primer valor positivo de x con $x = tan(x)$.

Para poder usar el método de la bisección es necesario saber cuál es nuestra función. En este caso, dicha función es $f(x) = x - tan(x)$ y su gráfica se muestra a continuación.

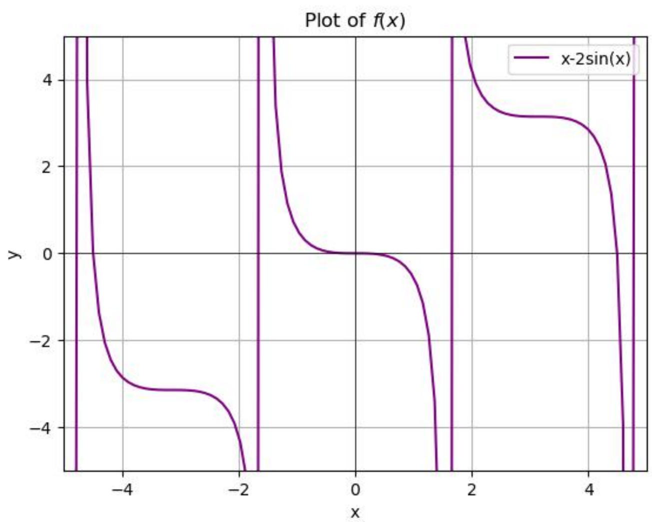

Figura 5: Representación gráfica de la función f(x)

En esta gráfica se puede observar que el valor de la raíz buscado se encuentra dentro del segundo rango periódico de la función tangente, por lo que dentro de mi algoritmo de bisección he escogido el intervalo de $[3.5, 4.5]$ para encontrar la solución. Luego de 17 iteraciones el valor obtenido para la raíz y que cumple con la precisión solicitada es $p_{17} = 4.4934$.

4. a. Dibuje las gráficas para $y = x^2 - 1$ y $y = e^{1-x^2}$.

Para facilitar el manejo de las expresiones consideraremos $g(x) = x^2 - 1$ y $h(x) = e^{1-x^2}$. Las gráficas obtenidas para dichas funciones es:

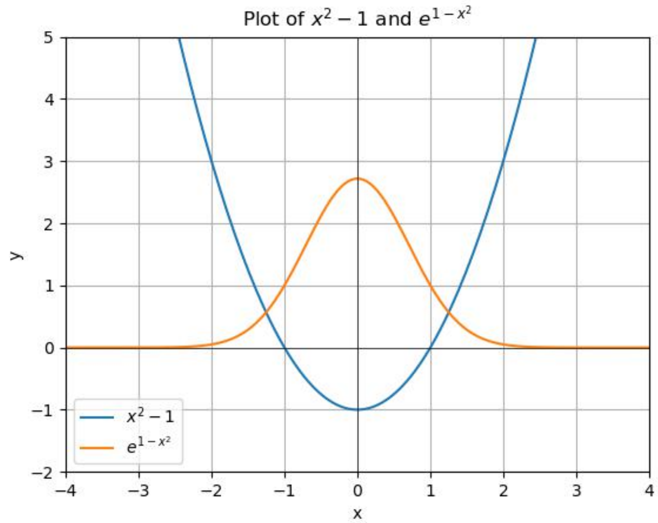

Figura 6: Representación gráfica de las funciones $g(x)$ y $h(x)$.

b. Use el método de bisección para encontrar una aproximación dentro de 10^{-3} para un valor en [-2,0] con $x^2 - 1 = e^{1-x^2}$.

Para poder usar el método de bisección de mejor manera y aseverar mis respuestas, primero realizaré la representación gráfica de las función $f(x)$ a la cual la considero como $f(x) = g(x) - h(x)$.

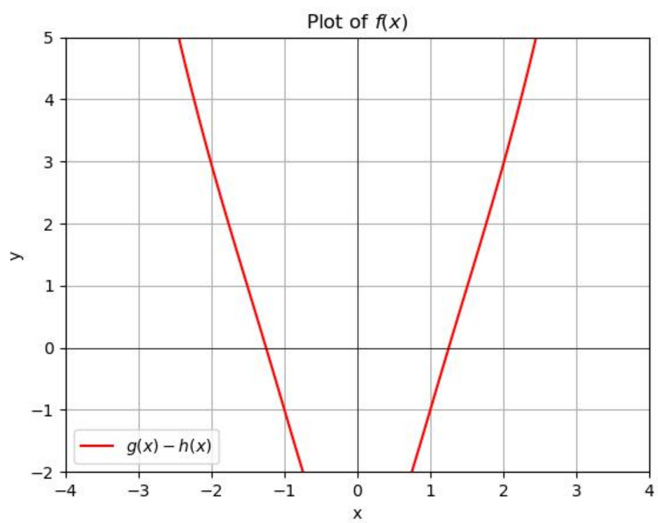

Figura 7: Representación gráfica de la función f(x).

En este gráfico se puede observar que para el rango solicitado la solución se encuentra a la izquierda. Luego de 11 iteraciones el valor obtenido para la raíz y que cumple con la precisión solicitada es $p_{11} = -1.2509765625$.

5. Sea $f(x) = (x+3)(x+1)^2 x(x-1)^3(x-3)$. ¿En qué cero de f converge el método de bisección cuando se aplica en los siguientes intervalos?

Para poder usar el método de bisección de mejor manera y aseverar mis respuestas, primero realizaré la representación gráfica de la función $f(x)$. En el primer gráfico se puede observar como se comporta la función cerca del eje x y cuáles son sus ceros, por otro lado, en el segundo gráfico podemos observar el comportamiento completo de la función $f(x)$ y sus valores tomados a lo largo de los intervalos de interés.

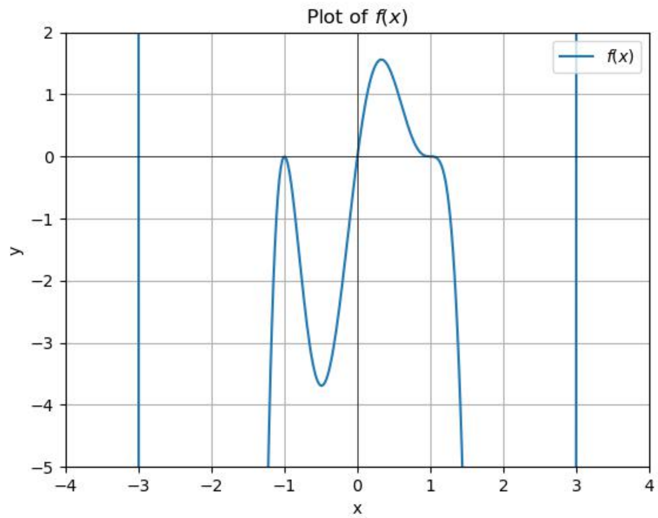

Figura 8: Representación gráfica de la función $f(x)$ con ampliación en la zona media.

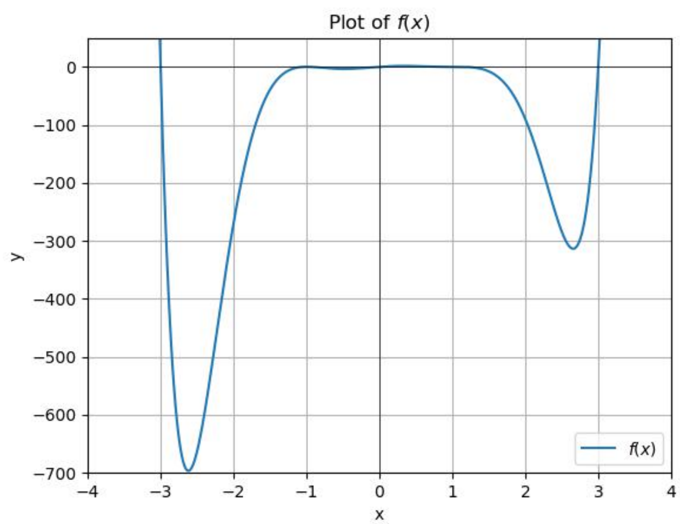

Figura 9: Representación gráfica de la función $f(x)$ completa.

a. [-1.5,2.5]

Luego de observar las gráficas y realizar el respectivo análisis con el algoritmo, se llegó a la conclusión de que el método de bisección no puede sre aplicado para ver a qué cero converge, ya que el evaluar la función $f(x)$ en los límites del intervalo se puede observar que poseen el mismo signo.

b. [-0.5,2.4]

Luego de observar las gráficas y realizar el respectivo análisis con el algoritmo, se llegó a la conclusión de que el método de bisección no puede sre aplicado para ver a qué cero converge, ya que el evaluar la función $f(x)$ en los límites del intervalo se puede observar que poseen el mismo signo.

c. [-0.5,3]

En este caso, el algoritmo de bisección converge al valor de $x = 3$ a medida de que se exige una precisión mayor, en mi caso, al realizar la evaluación del algoritmo con una precisión del 10^{-5} obtuve el valor de $x = 2.999993324279785$

d. [-3,-0.5]

En este caso, el algoritmo de bisección converge al valor de $x = -3$ a medida de que se exige una precisión mayor, en mi caso, al realizar la evaluación del algoritmo con una precisión del 10^{-5} obtuve el valor de $x = -2.999993324279785$

Ejercicios aplicados

1. Un abrevadero de longitud L tiene una sección transversal en forma de semicírculo con radio r. (Consulte la figura adjunta.) Cuando se llena con agua hasta una distancia h a partir de la parte superior, el volumen V de agua es

$$V = L\left[0.5\pi r^2 - r^2 arcsen\left(\frac{h}{r}\right) - h\left(r^2 - h^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

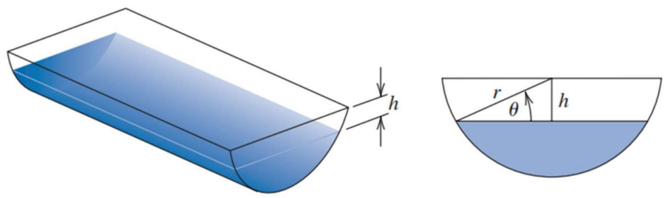

Figura 10: Esquema del abrevadero.

Suponga que $L = 10\ cm$, $r = 1\ cm$ y $V = 12.4\ cm^3$. Encuentre la profundidad del agua en el abrevadero dentro de $0.01\ cm$.

Consideraré la profundidad del agua en el abrevadero como x tal que siempre se cumple que $h + x = r$. De este modo, para poder aplicar el Método de bisección a este ejercicio primero debo hallar una función que dependa de h para poder obtener sus soluciones. Por esta razón, empezaré desarrollando la ecuación planteada hasta obtener el resultado deseado.

$$\frac{V}{L} = 0.5\pi r^2 - r^2 arcsen\left(\frac{h}{r}\right) - h\left(r^2 - h^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$0.5\pi r^2 - r^2 arcsen\left(\frac{h}{r}\right) - h\left(r^2 - h^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{V}{L} = 0$$

Reemplazando los valores previstos tenemos que:

$$0.5\pi(1)^2 - (1)^2 arcsen\left(\frac{h}{1}\right) - h\left((1)^2 - h^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{12.4}{10} = 0$$

$$0.5\pi - arcsen\left(h\right) - h\left(1 - h^2\right)^{\frac{1}{2}} - 1.24 = 0$$

$$(0.5\pi - 1.24) - arcsen\left(h\right) - h\left(1 - h^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

Lo que es lo mismo que:

$$arcsen\left(h\right) + h\left(1 - h^2\right)^{\frac{1}{2}} - (0.5\pi - 1.24) = 0$$

Por tanto, consideraré

$$f(h) = arcsen\left(h\right) + h\left(1 - h^2\right)^{\frac{1}{2}} - (0.5\pi - 1.24)$$

Una vez obtenida la función, realizaré su gráfica para observar y poder comprobrar dónde se encuentran los ceros de la función.

Debido a la función arcoseno en $f(h)$ los valores permitidos son $[-1, 1]$, bajo este intervalo realizaré mi gráfica y aplicaré el método de la bisección.

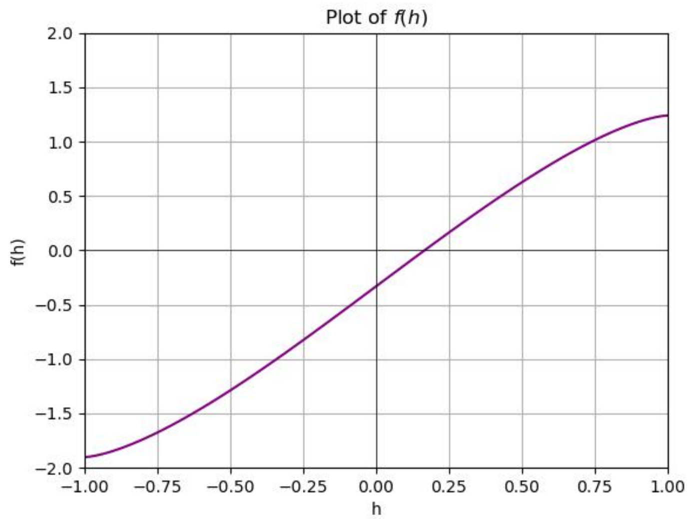

Figura 11: Representación gráfica de la función $f(h)$.

De la gráfica anterior se puede observar que la solución a la función hallada se encuentra entre 0 y 0.25. Al momento de aplicar el método de la bisección utilicé el intervalo de $[0, r]$ para h, ya que al ser un ejercicio aplicado el abrevadero tiene dimensiones límites que no se pueden superar. Entonces el valor de la profundidad del agua en el abrevadero dentro de 0.01cm es de $h = 0.1640625\ cm$, lo que bajo mi consideración inicial implica que la profundidad del agua en el abrevadero es de $x = r - h = 1 - 0.164 = 0.836\ cm$.

2. Un objeto que cae verticalmente a través del aire está sujeto a una resistencia viscosa, así como a la fuerza de gravedad. Suponga que un objeto con masa m cae desde una altura s_0 y que la altura del objeto después de t segundos es

$$s(t) = s_0 - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{\dfrac{-kt}{m}}\right),$$

donde $g = 9.81\ \dfrac{m}{s^2}$ y k representa el coeficiente de la resistencia del aire en $\dfrac{Ns}{m}$. Suponga $s_0 = 300\ m$, $m = 0.25\ kg$ y $k = 0.1\ \dfrac{Ns}{m}$. Encuentre, dentro de 0.01 de precisión, el tiempo que tarda un cuarto de kg en golpear el piso.

Reemplazando los datos obtenemos:

$$s(t) = 300 - \frac{0.25 * 9.81}{0.1}t + \frac{0.5^2 * 9.81}{0.1^2}\left(1 - e^{\dfrac{-0.1}{0.25}t}\right)$$

$$s(t) = 300 - 24.525t + 245.25\left(1 - e^{-0.4t}\right)$$

$$s(t) = 300 - 24.525t + 245.25 - 245.25e^{-0.4t}$$

$$s(t) = -245.25e^{-0.4t} - 24.525t + 545.25$$

Para determinar el tiempo que tarda el objeto en llegar al suelo debemos hacer que $s(t) = 0$, es decir que la altura sea cero. Para visualizar de mejor manera este hecho, realizaré la representación gráfica de la altura

$s(t)$ en función del tiempo. La primera gráfica corresponde a la función $s(t)$ desde el tiempo inicial $t = 0$, de aquí se puede observar que el objeto fue lanzado en un principio hacia arriba, hasta que alcanza una altura máxima de aproximadamente 400 m desde comienza su descenso al suelo pasando nuevamente por la posición inicial s_0. Por otro lado, la segunda gráfica representa a la función $s(t) - s_0$ la cual nos indica el tiempo que tarda el objeto en alcanzar la altura máxima y pasar nuevamente por el punto inicial s_0.

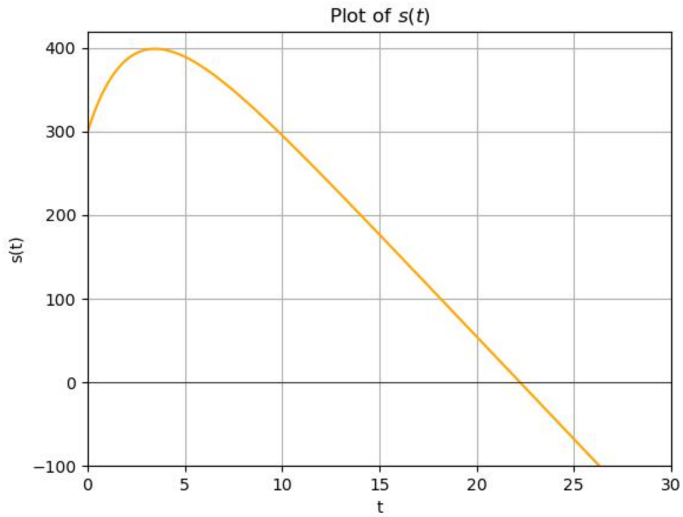

Figura 12: Representación gráfica de la función $s(t)$.

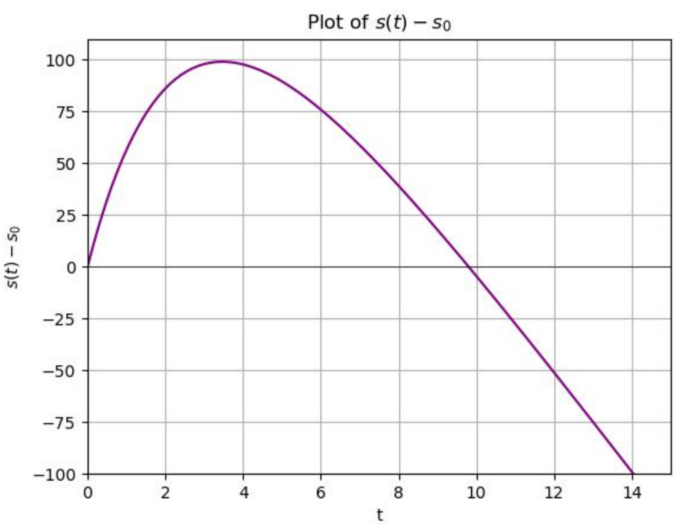

Figura 13: Representación gráfica de la función $s(t) - s_0$

Para hallar el tiempo que le toma al objeto caer desde la altura inicial s_0 hasta el suelo, hice uso del algoritmo del método de bisección para hallar las soluciones de las funciones $s(t)$ y $s(t) - s_0$, es decir, $t_{s(t)}$ y $t_{s(t)-s_0}$ y poder determinar el tiempo de caída libre como: $t_{caida} = t_{s(t)} - t_{s(t)-s_0}$.

- La solución obtenida para la función $s(t)$ es: $t_{s(t)} = 9.8042$ *segundos*
- La solución obtenida para la función $s(t) - s_0$ es: $t_{s(t)-s_0} = 22.233$ *segundos*

Por tanto, el tiempo que le toma al objeto en caer desde la altura inicial s_0 hasta llegar al suelo es de: $t_{caida} = 12.429$ *segundos*

Ejercicios Teóricos

1. Use el teorema 2.1 para encontrar una cota para el número de iteraciones necesarias para lograr una aproximación con precisión de 10^{-4} para la solución de $x^3 - x - 1 = 0$ que se encuentra dentro del intervalo [1,2]. Encuentre una aproximación para la raíz con este grado de precisión.

El teorema 2.1 nos indica que para $f \in C[a,b]$ si $f(a) \cdot f(b) <$ entonces el método de bisección genera una sucesión $\{p_n - p\}_{n=1}^{\infty}$ que se aproxima a cero p de f con

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

cuando $n \geq 1$.

Despejemos n para encontrar la cota inferior para el número de iteraciones:

$$|p_n - p| \leq 2^{-n}(b-a)$$
$$|p_n - p| \leq 2^{-n} < 10^{-4}$$

Aplicamos el logaritmo en base 10 ya que el término de la tolerancia se determina como una potencia de 10.

$$log_{10}(2^{-n}) < log_{10}(10^{-4})$$
$$-nlog_{10}(2) < -4$$
$$n \geq \frac{4}{log_{10}(2)} \approx 13.288$$

Por lo tanto, a partir de 14 iteraciones se tiene una aproximación precisa dentro de 10^{-4} para la solución de $x^3 - x - 1 = 0$ dentro del intervalo $[1, 2]$.

Al aplicar el método de bisección para 20 iteraciones pude observar que se detenía al completar la 14va iteración. El valor aproximado para la raiz es: $p_{14} = 1.3248$

2. La función definida por $f(x) = sin(\pi x)$ tiene ceros en cada entero. Muestre que cuando $-1 < a < 0$ y $2 < b < 3$, el metodo de bisección converge a:

Para poder usar el método de bisección de mejor manera y aseverar mis respuestas, primero realizaré la representación gráfica de la función $f(x)$.

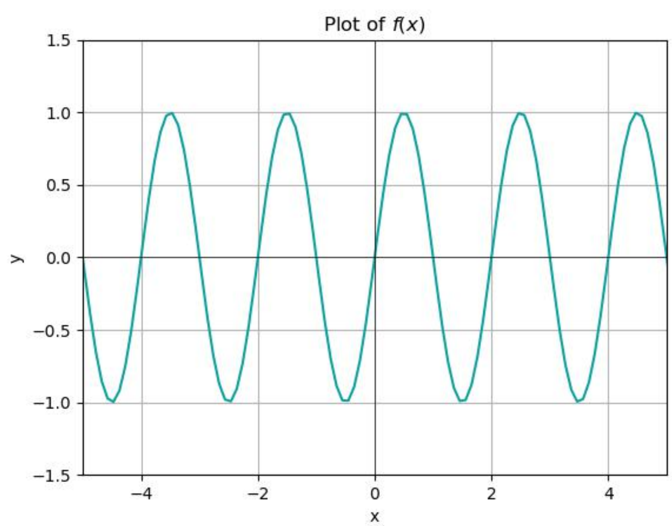

Figura 14: Representación gráfica de la función $f(x)$.

a. 0, si $a + b < 2$

Para este caso tengo que $b < 2 - a$, si considero $a = -0.8$ entonces $b < 2 - (-0.8) = 2.8$. Por tanto, considerando el intervalo $[a, b] = [-0.8, 2.5]$ y haciendo uso del método de bisección dentro de una precisión de 10^{-5} obtuve que si $a + b < 2$ entonces la solución converge a cero.

b. 2, si $a + b > 2$

Para este caso tengo que $b > 2 - a$, si considero $a = -0.8$ entonces $b > 2 - (-0.8) = 2.8$. Por tanto, considerando el intervalo $[a, b] = [-0.8, 3]$ y haciendo uso del método de bisección dentro de una precisión de 10^{-5} obtuve que si $a + b > 2$ entonces la solución converge dos.

c. 1, si $a + b = 2$

Para este caso tengo que $b = 2 - a$, si considero $a = -0.8$ entonces $b = 2 - (-0.8) = 2.8$. Por tanto, considerando el intervalo $[a, b] = [-0.8, 2.8]$ y haciendo uso del método de bisección dentro de una precisión de 10^{-5} obtuve que si $a + b = 2$ entonces la solución converge a cero, mas no a uno.

Link del repositorio