

¿Con qué frecuencia aparece cada dígito en el desarrollo decimal del número π ?

Karla Patricia de la Cruz Medel¹, Gustavo González Ramos², Ricardo Medel Esquivel³
karla.medel05@gmail.com

Introducción

En algunos sitios de internet⁴ es posible consultar el valor numérico de π con una enorme lista de cifras decimales. Observarla con algo de atención puede despertar la curiosidad y encaminarnos a preguntas interesantes.

Los 10 dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9) aparecen en la expansión decimal de π , pero ¿aparecen con la misma frecuencia? ¿O uno en particular aparece más frecuentemente que los demás? Siendo infinita la expansión decimal de π , ¿existe una manera de saberlo?

En este artículo exploramos estas cuestiones. Tras investigar el tema, dimos con el concepto de número normal. Un número normal, en base 10, es aquel en cuya expansión decimal los 10 dígitos aparecen con la misma frecuencia. Entonces la pregunta inicial (la del título) puede reformularse así: ¿es π un número normal?

Una manera práctica e interesante de buscar la respuesta, aunque no puede tomarse como una prueba definitiva, es contar directamente la aparición de cada dígito en una lista como la mencionada al principio. Esto implica programar una computadora para que realice esta tarea. Nosotros procedimos así, escribimos un programa que calcula la expansión decimal de π y genera tablas y gráficas de la frecuencia con que aparecen los dígitos; el código está disponible libremente en internet (en las siguientes secciones damos más detalles sobre él).

```
3.1415926535897932384626433
8327950288419716939937510
5820974944592307816406286
2089986280348253421170679
8214808651328230664709384
4609550582231725359408128
4811174502841027019385211
0555964462294895493038196
4428810975665933446128475
6482337867831652712019091
4564856692346034861045432
6648213393607260249141273
7245870066063155881748815
2092096282925409171536436
7892590360011330530548820
4665213841469519415116094
3305727036575959195309218
6117381932611793105118548
0744623799627495673518857
5272489122793818301194912
9833673362440656643086021
3949463952247371907...
```

¹ Medio Superior, primer año

² Maestría concluida, profesor de la FES-Acatlán, UNAM

³ Doctorado, cuarto año. CICATA-Legaria, IPN

⁴ Por ejemplo en The World of π : <http://www.pi314.net/eng/accueildecimales.php>

Números normales

Nuestro sistema de numeración usual tiene como base al 10, de modo que para escribir cualquier número podemos emplear 10 cifras (símbolos) distintas, los dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Existen sistemas de numeración distintos, como el binario (base 2), cuyos dígitos son 0 y 1. Cualquier número puede escribirse en binario como una cadena de ceros y unos. Tal es el sistema que utilizan internamente las computadoras para su funcionamiento, como es bien sabido. Otros sistemas útiles tienen como base al 8, al 16, al 20 o al 60, estos últimos empleados en culturas antiguas.

Un número, cualquiera, puede escribirse en cualquier base y también puede convertirse de una base a otra. Lo anterior nos lleva a precisar algunas definiciones.

Definición 1: Un *número normal*, en base 10, es aquel en cuya expansión decimal los 10 dígitos aparecen con la misma frecuencia.

Definición 2: Un *número absolutamente normal* es un número que es normal en cualquier base.

Estos conceptos fueron introducidos por Émile Borel en 1909 y estudiados por W. Sierpinsky. En 1992 se dio a conocer un manuscrito incompleto de Alan Turing que contiene resultados muy importantes sobre este tema (Morales, 2013).

Otra manera de expresar el concepto de número normal es considerar que en su expansión decimal toda secuencia de dígitos tiene la misma probabilidad de aparecer. De modo que si estas secuencias se piensan como resultados posibles de un juego de azar entonces un número normal sería como el historial de un juego no trukeado sino completamente legal (Morales-Luna, 2013).

Se sabe que casi todos los números irracionales son normales pero no ha sido posible hasta ahora demostrar que π , Φ , e , $\sqrt{2}$ o $\ln(2)$ son normales, (Navarro, 2011). Naturalmente, tampoco se sabe si son absolutamente normales. Así pues, tan solo se sospecha que π es normal y las pruebas computacionales refuerzan esta idea.

Exploración computacional del número π

Existen muchos algoritmos para calcular los dígitos de π . Entre todos ellos el preferido por su alta eficiencia es el de los hermanos Chudnovsky⁵. Nosotros usamos este algoritmo para calcular varias cantidades de dígitos de π y elaborar algunas de las tablas y graficas de frecuencias mostradas en la siguiente página⁶.

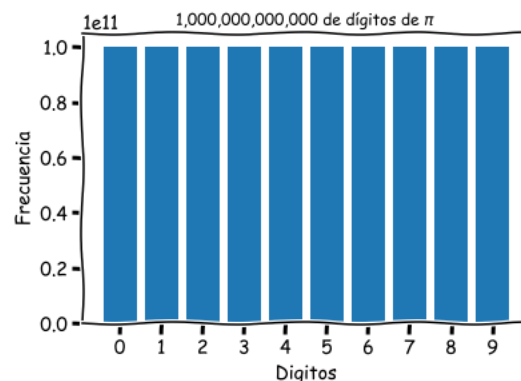
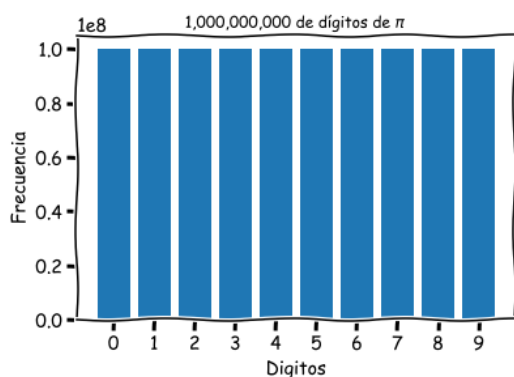
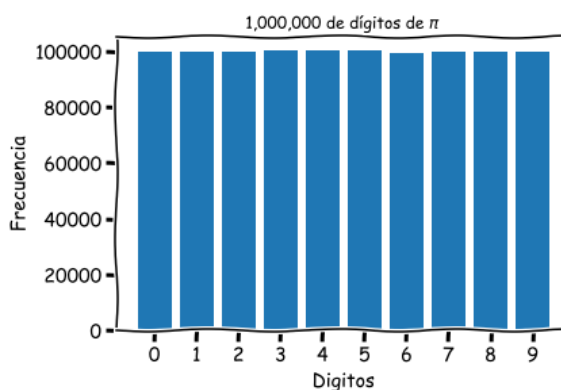
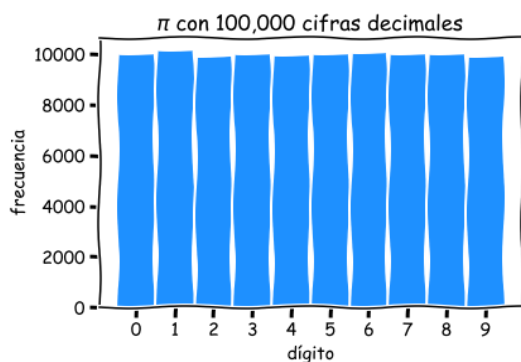
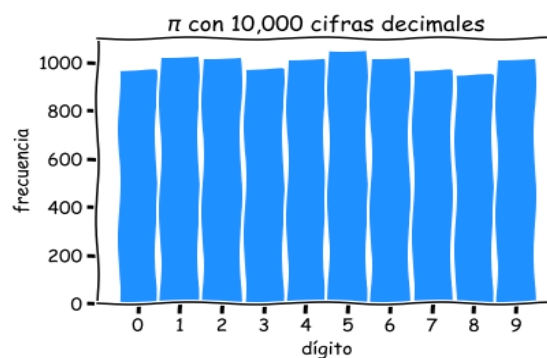
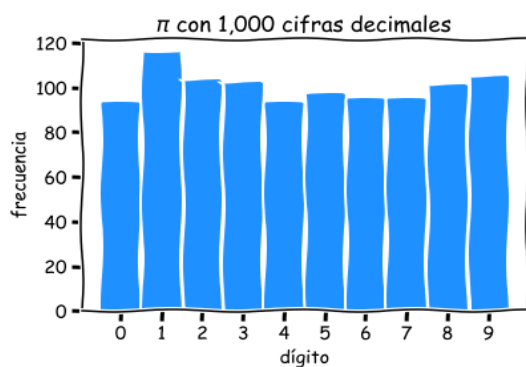
⁵ Ver “¿Qué importancia tiene calcular la expansión digital de π ?” en este mismo número de la revista de las Jornadas Académicas de Didáctica de las Ciencias 2020 para mayores detalles sobre este tema.

⁶ El código que implementamos está alojado en <https://github.com/Medetl/Pi>

Tabla I: Frecuencia de aparición de los dígitos en π para varias cantidades de decimales.

Dígitos Frec.	1,000	10,000	100,000	1,000,000	1,000,000,000	1,000,000,000,000
0	93	968	10,000	99,959	99,993,942	99,999,485,134
1	116	1026	10,138	99,758	99,997,334	99,999,945,664
2	103	1021	9,908	100,026	100,002,410	100,000,480,057
3	102	974	10,025	100,229	99,986,911	99,999,787,805
4	93	1012	9,970	100,230	100,011,958	100,000,357,857
5	97	1048	10,026	100,359	99,998,885	99,999,671,008
6	95	1021	10,028	99,548	100,010,387	99,999,807,503
7	95	969	10,025	99,800	99,996,061	99,999,818,723
8	101	947	9,978	99,985	100,001,839	100,000,791,469
9	105	1014	9,902	100,106	100,000,273	99,999,854,780

Nota: Elaboración propia hasta 100,000 dígitos; en adelante, Fuente: Posamentier, 2013.



Aunque 1 billón de dígitos puede parecer una cantidad enorme, hay que recordar que la expansión decimal completa de π tiene una infinidad de ellos. Por tanto, aunque las tablas y gráficas anteriores nos muestran que los dígitos aparecen con frecuencias muy similares esto no puede tomarse como una prueba de que π es un número normal; dicha prueba tendría que realizarse, al parecer, mediante argumentos puramente matemáticos.

También es necesario notar que, aunque las tablas anteriores parecen indicar que π es normal en base 10, nada nos dicen acerca de su normalidad en otras bases; sería necesario convertir π a una nueva base para darnos una idea de si en ella es o no normal.



Conclusión

La cuestión de si los 10 dígitos aparecen con la misma frecuencia en la expansión decimal de π (en base 10) permanece abierta, en este momento nadie conoce la respuesta. Se cree que π es un número normal, es decir, que los dígitos aparecen con la misma frecuencia, pero todavía no se dispone de un argumento contundente. Construir argumentos de esta naturaleza ha mostrado ser tremendamente difícil, al grado de que solo existen para casos muy particulares de números contruidos específicamente para esos fines.

Por ejemplo, se ha demostrado que el número:

$$C_{10} = 0.123456789101112131415 \dots,$$

llamado Constante de Champernowne, es normal. Pero el caso de π todavía es un misterio.

Ilustraciones: Karla Patricia de la Cruz Medel

Referencias

Morales-Luna, G. (2013). *Números computables y números normales*. Miscelánea Matemática **56** 27-39.

Navarro, J. (2011). *Los secretos del número π : ¿por qué es imposible la cuadratura del círculo?* RBA.

Posamentier, A. S., & Lehmann, I. (2013). *Pi: A Biography of the World's Most Mysterious Number*. Prometheus Books.