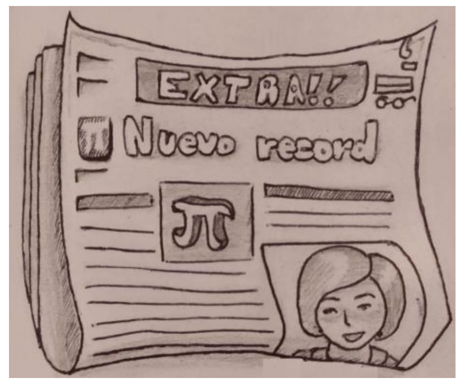
¿Qué importancia tiene calcular la expansión decimal de π?

Abigail de la Cruz Medel[1], Gustavo González Ramos[2], Ricardo Medel Esquivel[3]
adelacruzmedel@gmail.com

Introducción

El 14 de marzo de 2019 Google anunció haber alcanzado un nuevo récord mundial: el cálculo de más de 31 billones de cifras decimales de π (Haruka, 2019). Esta noticia plantea varias interrogantes, entre las que podemos mencionar: ¿Qué importancia tiene este nuevo récord? ¿Por qué alguien se tomaría la molestia de calcular π con tanta precisión? ¿Cuál es la utilidad de un cálculo como este? Y, por supuesto, ¿cómo se realiza?



El presente artículo tiene su origen en estas o parecidas interrogantes. Para responderlas investigamos un poco acerca del número π: su historia, los métodos que han servido para calcularlo y la importancia de este cálculo en nuestros días. Con la intención de tener una mayor claridad de ideas, también escribimos sendos programas en lenguaje Python que ejecutan algunos de los algoritmos para calcular las cifras de π, entre ellos el de los hermanos Chudnovsky, en el cual está basado el cálculo de Google; estos programas están disponibles libremente para todo lector motivado que desee experimentar por sí mismo este cálculo[4].

La estructura del artículo es la siguiente: en la sección 1 se presenta una síntesis de la historia de las aproximaciones del número π, desde el antiguo Egipto hasta la actualidad; en la sección 2 comparamos el desempeño (en términos del número de cifras exactas que dan por cada iteración) de algunos algoritmos para aproximar el valor de π, lo cual nos da una mejor idea de por qué el algoritmo de los hermanos Chudnovsky es el preferido actualmente para batir records; como conclusión, en la última sección y con base en lo expuesto en las secciones precedentes, ofrecemos una respuesta a la pregunta del título.

---

[1] Secundaria, tercer año

[2] Maestría. Profesor en la FES-Acatlán, UNAM

[3] Doctorado, cuarto año. CICATA-Legaria, IPN

[4] El código que implementamos está alojado en https://github.com/Medetl/Pi

1. Historia de las aproximaciones para el valor numérico de π

En cualquier círculo plano, la razón de la circunferencia al diámetro da siempre el mismo valor. Por eso decimos "el círculo", pues no es necesario clasificar a los círculos, como se hace con los triángulos: hay un solo tipo de círculo; dos círculos cualesquiera solamente se pueden distinguir por la escala en que están dibujados. Esa razón constante, de la circunferencia al diámetro de la circunferencia, es el número π.

El símbolo π (pi) es una letra del alfabeto griego, inicial de la palabra "περιΦρεια" que significa periferia, y es usada oficialmente en la simbología matemática desde 1706 (Navarro, 2011).

El número π interviene en las fórmulas para calcular el perímetro (circunferencia) y el área de un círculo, así como en la del volumen de una esfera. En la escuela se acostumbra usar $\pi = 3.1416$ como buena aproximación para fines prácticos. Sin embargo, sus cifras decimales no terminan allí; de hecho, nunca terminan porque π es un número irracional: no existe una fracción exactamente igual a π. Esto fue demostrado por Johann Heinrich Lambert en 1761 (Blatner, 2003).

En la expansión decimal de un número irracional no es posible hallar un periodo, esa cadena de cifras que se repita una y otra vez hasta el infinito en la expansión decimal de algunas fracciones[5].

En general, hallar aproximaciones al valor de números irracionales no es asunto sencillo (Niven, 1961). En el caso de π, la búsqueda de mejores aproximaciones se ha intentado desde hace unos cuatro mil años, primero por su utilidad práctica y luego por el interés matemático y computacional del problema en sí mismo. En estos cuatro mil años de historia podemos reconocer tres épocas, caracterizadas por la técnica matemática usada o los recursos empleados.

1.1 Primera época: aproximaciones geométricas.

En la antigüedad los métodos para calcular el valor de π estaban basados en la geometría, porque el problema de verdadero interés era hallar el cuadrado de área equivalente a un círculo dado. En muchos lugares se aproximó el valor numérico de π mediante alguna fracción adecuada, y fue utilizado principalmente en la construcción de templos (Blatner, 2003). Estas fracciones ofrecían poca exactitud: una o dos cifras decimales correctas; poco a poco fueron desarrollándose mejores cálculos, como puede apreciarse en la Tabla I, que resume los hechos más notables sobre la aproximación de π en la antigüedad.

[5] Ver "¿Existen patrones en la expansión decimal de las fracciones?" en este mismo número de la revista de las Jornadas Académicas de Didáctica de las Ciencias 2020 para mayores detalles sobre la expansión decimal de las fracciones.

Arquímedes desarrolló un método para calcular la circunferencia, y con esto encontró una aproximación al número π (Torija, 2007). Su método consiste en aproximar la circunferencia mediante dos polígonos, uno inscrito, de perímetro menor que el círculo, y otro circunscrito, de perímetro mayor; el valor real de la circunferencia debe ser un valor intermedio entre los perímetros de los dos polígonos empleados. Al aumentar la cantidad de lados de los polígonos mejora la aproximación. Arquímedes usó polígonos de 96 lados en sus cálculos. Posteriormente, otros matemáticos usaron este método para mejorar el cálculo de π.

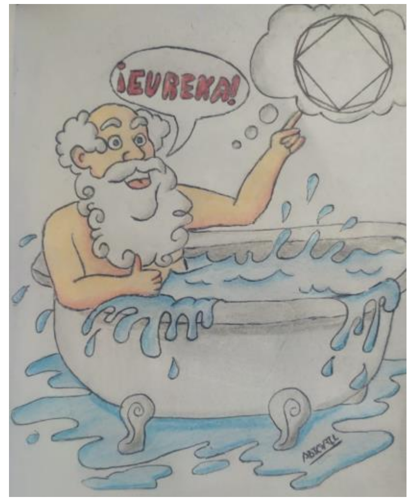


Tabla I.

Cronología de los cálculos más notables de π en la antigüedad.

Año	**Pueblo o personaje**	**Aproximación para π**
2000 a. C.	Babilonia	25/8 = 3.125
1650 a. C.	Egipto	22/7 = 3.14285714...
900 a. C.	India	339/108 = 3.13888...
200 a. C.	Arquímedes	223/71 = 3.14084507
150 d. C.	Claudio Ptolomeo	377/120 = 3.141666...
475 d. C.	Zu Chongzhi	355/113 = 3.14159292

Nota: Se señalan en rojo las cifras correctas de la aproximación registrada.

1.2 Segunda época: aproximaciones analíticas.

A partir del siglo XV los cálculos de π comenzaron a cimentarse en el empleo de series infinitas y tener un interés puramente matemático. Madhava fue el primero en realizar un cálculo de este tipo, basándose en su propio descubrimiento de lo que luego se conocería como la serie de Leibniz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

aunque su fórmula tenía, al parecer, más bien esta otra forma (Navarro, 2011):

$$\frac{\pi}{4} = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3 \times 3} + \frac{1}{5 \times 3^2} - \frac{1}{7 \times 3^3} + \ldots\right)$$

La Tabla II registra los cálculos más notables de esta segunda etapa histórica.

Tabla II.

Cronología de los cálculos más notables de π basados en series infinitas.

Año	**Personaje**	**Decimales correctos de π**
1400	Madhava de Sangamagrama	13
1593	Adriaan van Roomen	16
1596	Ludolph van Ceulen	35
1699	Abraham Sharp	71
1719	Thomas Fantet de Lagny	112
1844	Johann Martin Zacharias Dase	200
1847	Thomas Clausen	250
1854	Richter	500
1875	William Shanks	527
1947	D. F. Ferguson	808
1949	D. F. Ferguson y J. W. Wrench	1,120

Nota: van Ceulen logró fama por su cálculo y por un tiempo π fue llamado número de Ludolph; Shanks publicó 707 decimales, pero no todos resultaron ser correctos; Ferguson realizó sus cálculos con la ayuda de una calculadora.

1.3 Tercera época: aproximaciones calculadas mediante computadoras.

El cálculo de π tuvo un gran impulso a principios del siglo XVIII, cuando James Gregory descubrió la serie:

$$arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots,$$

y John Machin dedujo la fórmula que lleva su nombre:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \times arctan(\frac{1}{5}) - arctan(\frac{1}{239})$$

El éxito creciente motivó el estudio de nuevas series, más eficientes para el cálculo de π. En el siglo XX, Srinivasa Ramanujan (ver imagen) descubrió una asombrosa cantidad de fórmulas en las que interviene π.

En 1989 David y Gregory Chudnovsky publicaron una fórmula basada en uno de los resultados de Ramanujan que, cuando se programa en una computadora, se convierte en un algoritmo de gran eficiencia para el cálculo de π:

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(6k)!\,(13591409 + 545140134k)}{(3k)!\,(k!)^3 640320^{3k\,+\,3/2}}$$

La Tabla III resume los hechos sobre el cálculo de π que se han realizado mediante el uso de computadoras.

Tabla III.

Cronología de los cálculos más notables de π en la era de las computadoras.

Año	**Personaje**	**Decimales de π**
1949	J. W. Wrench y L. B. Smith	2,037
1958	Francois Genuys	10,000
1961	Daniel Shanks y J. W. Wrench	100,265
1973	Jean Gilloud y Martin Bouyer	1,001,250
1983	Yasumasa Kanada y Yasunori Ushiro	10,013,395
1987	Yasumasa Kanada, et. al.	134,214,700
1989	Hermanos Chudnovsky	1,011,196,691
2002	Yasumasa Kanada	1,241,100,000,000
2009	Daisuke Takahashi	2,576,980,370,000
2010	Fabrice Bellard	2,699,999,989,951
2011	Shigeru Kondo	10,000,000,000,000
2018	Peter Trueb	22,400,000,000,000
2019	Emma Haruka Iwao	31,000,000,000,000
2020	Timothy Mullican	50,000,000,000,000

Notas: Cada nuevo cálculo a menudo implicó el uso de técnicas novedosas; en el caso de Haruka, es la primera vez que se usa computación en la nube (tomó 121 días de cómputo). Fuente para los hechos más recientes: http://www.numberworld.org/y-cruncher/

2. Comparación de algunos algoritmos utilizados para calcular π

Podemos utilizar las fórmulas de Leibniz, Madhava u otras similares (existe una gran cantidad de ellas) para calcular el número π. Recordemos también que la fórmula de Leibniz tiene este aspecto:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Observándola, podemos convencernos de que la precisión del cálculo aumenta al incrementarse el número de términos considerados en la suma. No recomendamos comprobarlo mediante un cálculo manual, más práctico e interesante es programar un algoritmo que haga este cálculo en una computadora[6].

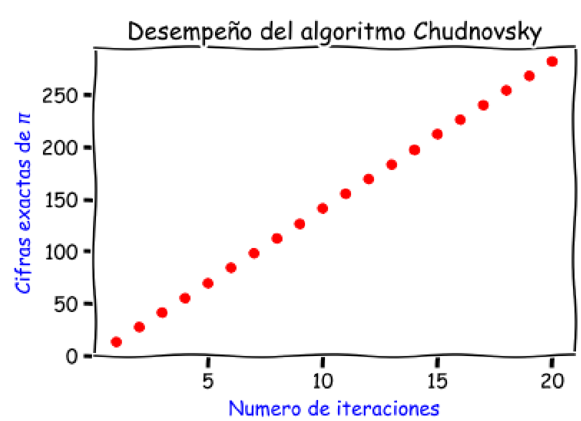
Un algoritmo es una secuencia ordenada de pasos que permiten realizar un cálculo o resolver un problema; las operaciones que se repiten una y otra vez en un algoritmo se conocen como iteraciones.

En fórmulas como la de Leibniz podemos ver que la suma de una nueva fracción corresponde a una iteración más en el algoritmo. Así, a mayor cantidad de iteraciones esperaríamos mayor precisión en el valor calculado de π. Bien, pero ¿cuánta precisión exactamente?

Al correr el algoritmo que implementa la fórmula de Leibniz encontramos que son necesarias 100 iteraciones para obtener el primer decimal correcto en el desarrollo de π. 10,000 iteraciones dan apenas 3 cifras correctas y para obtener 5 necesitamos 1,000,000 de iteraciones. Por tanto, el algoritmo basado en la fórmula de Leibniz no parece ser bueno.

La fórmula de Madhava da mejores resultados. En este caso 3 iteraciones nos dan la primera cifra decimal correcta del número π y el número de cifras correctas aumentan a razón promedio de 1 por cada 2 iteraciones.

La situación mejora notablemente con el algoritmo basado en la fórmula de los hermanos Chudnovsky, cuyo desempeño hemos graficado en la figura adjunta. En este caso cada iteración aumenta en promedio 14 cifras decimales exactas al cálculo, de modo que bastan 8 iteraciones para obtener más de 100 cifras correctas de π.



Existen otros algoritmos eficientes para calcular π, como los de Brent-Salamin y

[6] El código que implementamos está alojado en https://github.com/Medetl/Pi

el de los hermanos Jonathan y Peter Borwein, sin embargo, el más utilizado es el de los hermanos Chudnovsky.

Para seleccionar un algoritmo dedicado a un cálculo tan exhaustivo es necesario considerar no solamente su desempeño (en términos de las cifras exactas por cada iteración), sino también los recursos computacionales utilizados, y aquí es donde el Chudnovsky parece superar a todos los demás. En nuestro caso, usando una laptop calcular 100,000 dígitos de π tomó 6 horas de cálculo.

Conclusión:

Existe una fascinación permanente por el número π, como podemos comprobarlo con la historia resumida en este artículo. Sin embargo, el cálculo de π tiene un interés puramente matemático pues, como vimos, las series que nos sirven como fórmulas para este cálculo tienen desempeños muy diferentes, lo que sin duda debe plantear problemas de investigación a los matemáticos de nuestra época.

Determinar millones de cifras decimales de π no tiene la finalidad práctica de emplear el resultado en ningún cálculo. Su importancia radica, más bien, en que sirve para poner a prueba los límites de la capacidad de supercomputadoras, así como la eficiencia de nuevas técnicas de cómputo. Fines para los cuales es útil plantear problemas de respuesta conocida que exijan un trabajo intensivo del equipo, y π reúne esos elementos. Y seguramente también se calcula por el solo placer de conocerlo mejor.

Ilustraciones: Abigail de la Cruz Medel

Referencias

Blatner, D. (2003). *El encanto de* ***π****.* Aguilar.

Haruka, E. (2019). *Pi in the sky: Calculating a record-breaking 31.4 trillion digits of Archimedes' constant on Google Cloud*. Google Cloud. Recuperado el 05/02/2020: https://cloud.google.com/blog/products/compute/calculating-31-4-trillion-digits-of-archimedes-constant-on-google-cloud

Navarro, J. (2011). *Los secretos del número* ***π****: ¿por qué es imposible la cuadratura del círculo?* RBA.

Niven, I. (1961). *Numbers: rational and irrational*. Random House.

Torija, R. (2007). *Arquímedes: Alrededor del círculo*. Nivola.