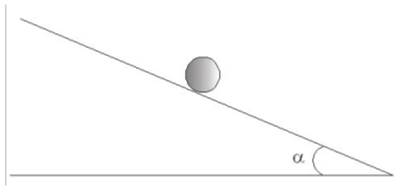
SAPIENZA, UNIVERSITA' di ROMA
Ingegneria Informatica e Automatica
Esame di FISICA – 26.01.2024
A.A. 2022-2023 (12 CFU) – Proff. M.Petrarca – M. Toppi

Esercizio 1

Su un piano inclinato partono da fermi e dalla stessa posizione i seguenti tre corpi rigidi: una sfera, un anello e un disco aventi stessa massa e raggio. Determinare l'ordine di arrivo dei corpi alla fine del percorso supponendo che il moto sia di puro rotolamento. Nel caso del disco, determinare l'accelerazione e la forza di attrito statico agente durante il moto. Quanto vale l'angolo di inclinazione massimo affinché il moto rimanga di puro rotolamento (si consideri un coefficienti di attrito statico pari a μ_s) ?

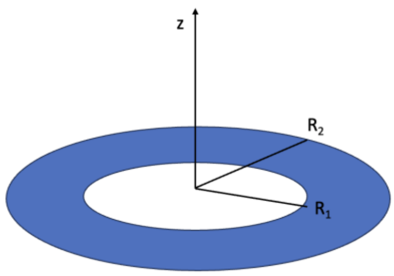


Esercizio 2

Un pezzo di ghiaccio di massa $m_1 = 30$ g e alla temperatura iniziale di $T_1 = 258$ K, viene immerso in un contenitore adiabatico contenente $m_2 = 50$ g di acqua alla temperatura $T_2 = 333$K. Determinare la temperatura di equilibrio T_e ricordando che: calore specifico acqua = 4186.8 J/kg K; calore specifico ghiaccio: 2051.5 J/kg K e il calore latente di fusione dell'acqua è $3.3 * 10^5$ K/kg)

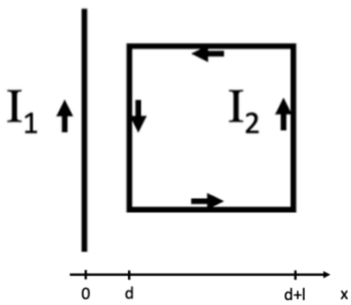
Esercizio 3

Una distribuzione di carica superficiale σ è distribuita su un sottile disco bucato di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2. Calcolare il modulo, direzione e verso del campo elettrico presente sull'asse del disco a distanza z.



Esercizio 4

Una spira quadrata di lato l=1cm è percorsa da una corrente I_2 =2A. Un filo rettilineo, coplanare alla spira, percorso da corrente I_1 =10 A è posto ad una distanza d=2 cm da uno dei lati della spira. Determinare la forza complessiva che agisce sul filo.



ES 1

TRASLATORIO	ROTATORIO
m	I
F	M
v	w
$P = mv$	$L = Iw$
$F = ma$	$M = I\alpha$
$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K = \frac{1}{2}Iw^2$

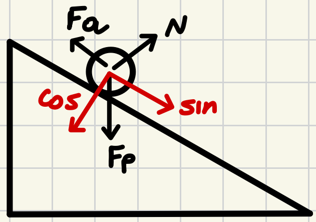
$I_{SFERA} = \frac{2}{5}mR^2$

$I_{DISCO} = \frac{1}{2}mR^2$

$I_{ANELLO} = mR^2$

$F_{TOT} = ma \rightarrow M_{TOT} = I\alpha$

$F_a R = I\alpha = I\frac{a}{R} \rightarrow F_a = \frac{Ia}{R^2}$



a) $mg\sin\alpha - F_a = ma \rightarrow mg\sin\alpha - \frac{I}{R^2}a = ma \rightarrow a = \frac{g\sin\alpha}{1+\frac{I}{mR^2}}$

$a_{SFERA} = \frac{5}{7}g\sin\alpha > a_{DISCO} = \frac{2}{3}g\sin\alpha > a_{ANELLO} = \frac{1}{2}g\sin\alpha$

b) $I = \frac{1}{2}mR^2 \qquad F_a = \frac{I}{R^2}a = \frac{1}{2}ma = \frac{1}{3}mg\sin\alpha$

c) DISCO:

$F_a \leq \mu_s N \leq \mu_s F_{P\perp} \rightarrow \frac{1}{3}mg\sin\alpha \leq \mu_s mg\cos\alpha \rightarrow$

$\rightarrow tg\alpha \leq 3\mu_s \rightarrow \alpha \leq arctg(3\mu_s)$

SFERA:

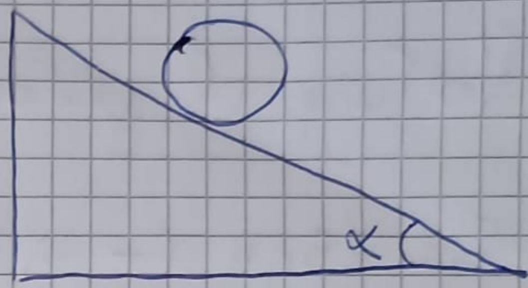
$F_a = I\frac{a}{R^2} \rightarrow F_a = \frac{2}{5}ma = \frac{2}{7}mg\sin\alpha$

$F_A \leq \mu_s N \rightarrow \frac{2}{7}mg\sin\alpha \leq \mu_s mg\cos\alpha \rightarrow tg\alpha \leq \frac{7}{2}\mu_s \rightarrow \alpha \leq arctg\left(\frac{7}{2}\mu_s\right)$

ANELLO:

$F_A = I\frac{a}{R^2} = \frac{1}{2}mg\sin\alpha \leq \mu_s N = \mu_s mg\cos\alpha \rightarrow \alpha \leq arctg(2\mu_s)$

Ex no 1



$$m g \sin\theta - f = m a_c$$

$$f R = I_c \alpha = \frac{a_{cm}}{R}$$

$$a_{cm} = \frac{g \sin\theta}{1 + \frac{k^2}{R^2}} \qquad f = \frac{m g \sin\theta}{1 + \left(\frac{k^2}{R^2}\right)^{-1}}$$

$$I = m k^2$$

$$f \le \mu_s m g \cos\theta \Longrightarrow tg\,\theta \le \mu_s\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)$$

$$\theta_{MAX} = \operatorname{arctg} \mu_s\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)$$

Ordine di Arrivo:

1) Sfera: $(k^2/r^2) = 2/5 \Rightarrow v_{cm} = \sqrt{1.43\, g h}$
2) Disco: $(k^2/r^2) = 1/2 \rightarrow v_{cm} = \sqrt{1.33\, g h}$
3) Anello: $(k^2/r^2) = 1 \Rightarrow v_{cm} = \sqrt{g h}$

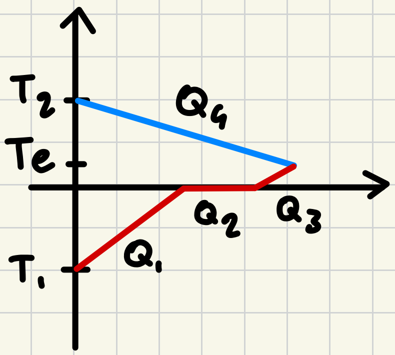
Conservazione Energia:

$$m g h = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{cm}^2 = \frac{1}{2} m k^2 \frac{v_{cm}^2}{R^2} + \frac{1}{2} m v_{cm}^2$$

$$v_{cm} = \frac{2 g h}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{R}\right)^2}}$$

Esercizio 2

Un pezzo di ghiaccio di massa $m_1 = 30$ g e alla temperatura iniziale di $T_1 = 258$ K, viene immerso in un contenitore adiabatico contenente $m_2 = 50$ g di acqua alla temperatura $T_2 = 333$K. Determinare la temperatura di equilibrio T_e ricordando che: calore specifico acqua = 4186.8 J/kg K; calore specifico ghiaccio: 2051.5 J/kg K e il calore latente di fusione dell'acqua è $3.3 * 10^5$ K/kg)



$$|Q_1| + |Q_2| + |Q_3| = |Q_4|$$

$$c_G m_1 (273 - 258) + \lambda m_1 + c_a m_1 (T_e - 273) = c_a m_2 (333 - T_e)$$

$$(2051.5)\cdot(0,03)\,15 + (3.3\cdot 10^5)(0,03) + (4186.8)(0.03)T_e - (4186.8)(0.03)\,273 =$$

$$= (4186.8)\cdot(0.05)\,333 - (4186.8)\cdot(0.05)T_e$$

$$923,17 + 9900 - 34289,9 + 125,6\,T_e = 69710,2 - 209,3\,T_e$$

$$T_e = \frac{93160}{334,9} = 278\,K \approx 5°$$

Portare il ghiaccio a fusione ($T_1 \Rightarrow T_0$)

$T_1 = 258K$ ($-15°C$)

$T_0 = 273K$ ($0°C$)

$Q_1 = m\, c_g (T_0 - T_1)$

c_g = calore specifico ghiaccio

Per fondere una massa m di ghiaccio

$Q_2 = m_1 \lambda$

λ = calore latente fusione

L'acqua può cedere al massimo il calore

$Q_3 = m_2\, c\, (T_2 - T_0)$ portandosi (l'acqua) a temperatura T_0.

Se $Q_3 > Q_1 + Q_2$ ghiaccio fonde tutto e $T_e > T_0$

Altrimenti $T_e = T_0$ e solo una frazione del ghiaccio fonde. Oppure l'acqua potrebbe solidificare tutta o solo in parte.

$Q_1 = 0.03 \times 2051.5 \times 15 = 923$ J

$Q_2 = 0.03 \times 3.3 \cdot 10^5 = 9900$ J

$Q_3 = 0.05 \times 4186.8 \times 60 = 12560$ J

Quindi: $Q_3 > Q_1 + Q_2$

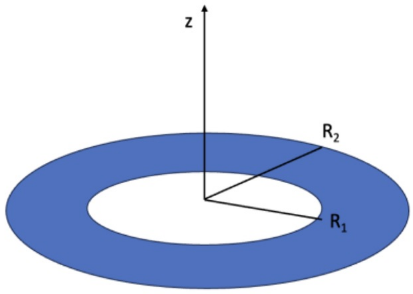
Quindi:

$$m_1 c_g (T_0 - T_1) + m_1 \lambda + m_1 c (T_e - T_0) = - m_2 c (T_e - T_2)$$

$$T_e = 279.8 K = 6.6 °C$$

Esercizio 3

Una distribuzione di carica superficiale σ è distribuita su un sottile disco bucato di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2. Calcolare il modulo, direzione e verso del campo elettrico presente sull'asse del disco a distanza z.



$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r_{TOT}^2} \qquad dq = \sigma 2\pi r\,dr, \quad r_{TOT} = \sqrt{r^2+z^2}, \quad dE_z = dE \cdot \cos\alpha,$$

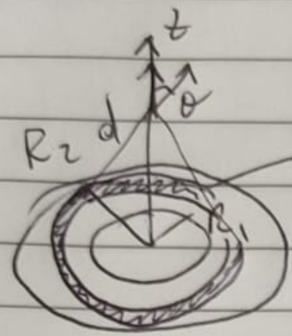
$$\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma 2\pi r\,dr}{(r^2+z^2)}\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\,\sigma 2\pi r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$E_z = \int_{R_1}^{R_2}\frac{\sigma z r\,dr}{2\varepsilon_0(r^2+z^2)^{3/2}} \rightarrow E_z = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right)$$

DIREZIONE LUNGO Z

VERSO: SE $\sigma > 0$, CAMPO LUNGO Z POSITIVO
SE $\sigma < 0$, CAMPO LUNGO Z NEGATIVO



$$dq_{SPIRA} = 2\pi r \sigma dr$$

$$d = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$\cos\theta = \frac{z}{d}$$

$$dE_{SPIRA}(z) = \frac{dq^{SPIRA}}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\cos\theta = \frac{2\pi r \sigma dr}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+z^2)} \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \Rightarrow$$

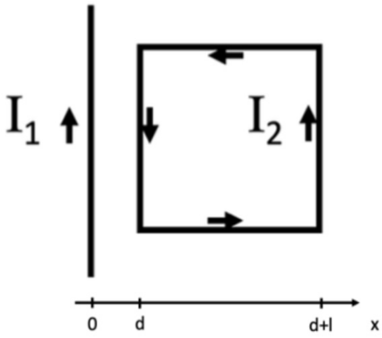
$$E_z^{DISCO}(z) = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} z \int_{R_1}^{R_2} \frac{2r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \dots \quad \begin{cases} y = r^2 + z^2 \\ dy = 2r\,dr \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_z^{DISCO}(z) = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} 2z \left(\frac{1}{\sqrt{z^2+R_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R_2^2}} \right)}$$

$$\boxed{E_z^{DISCO}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\frac{z}{\sqrt{z^2+R_1^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R_2^2}} \right]}$$

Esercizio 4

Una spira quadrata di lato l=1cm è percorsa da una corrente I_2 =2A. Un filo rettilineo, coplanare alla spira, percorso da corrente I_1 =10 A è posto ad una distanza d=2 cm da uno dei lati della spira. Determinare la forza complessiva che agisce sul filo.



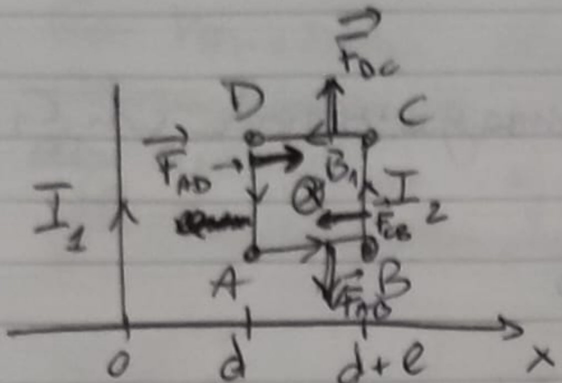
$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d}$$

$$F_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d}\cdot l \qquad F_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d+l}\cdot l$$

$$F_{SPIRA} = F_2 - F_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 l \left(\frac{1}{d+l} - \frac{1}{d}\right) \approx -6,67\cdot 10^{-6} N \qquad F_{FILO} = -F_{SPIRA}$$

$$|F_{FILO}| = 6,67\cdot 10^{-7} N$$

Esercizio 4



Dalla II legge di Laplace

$$d\vec{F} = i\, d\vec{s} \wedge \vec{B}$$

Calcolo la forza esercitata dal filo sui 4 lati della spira quadrata

$\vec{F}_{DC} = -\vec{F}_{AB} \Rightarrow$ risultante nulla $(|\vec{F}_{DC}| = |\vec{F}_{AB}|)$

Dovremmo $\vec{F}_{AD}$ e $\vec{F}_{BC}$: $\quad B_1(x) = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$

$$\vec{F}_{AD} = \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}\right) I_2 l \, \hat{u}_x$$

$$\vec{F}_{BC} = \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi (d+l)}\right) I_2 l \, (-\hat{u}_x) \qquad |\vec{F}_{AB}| > |\vec{F}_{BC}|$$

La forza risultante esercitata dal filo sulla spira sarà:

$$\vec{F}_{SPIRA} = \left(\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} l\right)\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+l}\right)\hat{u}_x$$

$$\vec{F}_{FILO} = -\vec{F}_{SPIRA} \quad \text{con} \quad |\vec{F}_{FILO}| \cong 6.7 \times 10^{-7}\ N$$