Domande Teoriche Esame TDS

Federico Coccarelli - Iris Curioso

Gennaio 2022

1 Cos'è il sistema a tempo discreto equivalente ad un dato sistema a tempo continuo

Il sistema tempo discreto equivalente ad un dato sistema a tempo continuo è una sua rappresentazione quando il segnale di ingresso è costante a tratti su intervalli di ampiezza fissa oppure campionato e si è interessati a calcolare le evoluzioni negli istanti, detti di campionamento, corrispondenti alla variazione dell'ingresso. Il problema del calcolo del sistema a tempo discreto equivalente è detto anche problema della discretizzazione. Dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{X} = Ax + Bu \\ \dot{Y} = Cx + Du \end{cases}$$

Il sistema a tempo discreto equivalente, detto T il tempo di campionamento è:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_D x(k) + B_D u(k) \\ y(k) = C_D(k) + D_D(k) \end{cases}$$

ove:
$A_D = e^A T \qquad B_D = \int_0^T e^{A\xi} d\xi B \qquad C_D = C \qquad D_D = D$

2 Definizione, condizioni e criteri stabilità interna per sistemi lineari

Un sistema è stabile se reagisce in modo positivo all'effetto delle perturbazioni, nel senso di contenere l'effetto dell'evoluzione libera. Per un sistema lineare $\dot{X}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ gli stati di equilibrio sono quelli che soddisfano l'equazione $A(t)x_e = 0$ ($x_e = 0$) e quindi l'origine dello spazio di stato è sempre lo stato di equilibrio. Esso è unico se e solo se la matrice dinamica è invertibile ($det(A) \neq 0$). Le proprietà di una stato di equilibrio sono equivalenti a quelle di ogni altro (per cui si ha la possibilità di limitare lo studio allo stato zero); come conseguenza si parla di stabilità interna come di una proprietà del sistema e non di un particolare stato di equilibrio.
Le condizioni di stabilità sono:

Un sistema è SEMPLICEMENTE STABILE se e solo se, preso un valore k finito si ha che $|e^{At}| \leq k$. Questa condizione richiede che tutti gli autovalori abbiano parte reale minore o uguale a zero solo se semplici (molteplicià unitaria).

Un sistema è STABILE ASINTOTICAMENTE se e solo se è stabile semplicemente, ovvero se $lim_{t->\infty}|e^{At}| = 0$, quindi gli autovalori devono essere strettamente minori di 0.

Lo studio della STABILITÀ INTERA si riduce allo studio della stabilità dell'origine (implica la stabilità di tutti i modi).

3 Definizione smorzamento e pulsazione

Nel caso di autovalori complessi si introducono due parametri che caratterizzano il modo in funione di α e ω. Si tratta della pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$ e dello smorzamento $\xi = \sin\theta = \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$.
Lo smorzamento rappresenta l'attenuazione a cui è sottoposto il processo oscillatorio del sistema. In base al suo valore è possibile capire alcune caratteristiche del sistema:
$\xi = \pm 1$ autovalori reali e coincidenti, nessun fenomeno oscillatorio.
$\xi = 0$ autovalori immaginari puri, moti oscillatori puri.
$0 < \xi < 1$ modo pseudoperiodico convergente.
$-1 < \xi < 0$ modo pseudoperiodico divergente.

4 Probelma della realizzazione

Il problema della realizzazione consiste nell'associare ad una data matrice di funzioni, una rappresentazione dello stato, cioè di simulare in tempo reale il comportamento del sistema. Assegnato un legame funzionale, definito dall'integrale di convoluzione con il nucleo K(t) cioè :
$Y(t) = \int_0^t K(t-\tau)u(\tau)$
il problema ammette soluzione se il nucleo appena descritto coincide con la matrice delle risposte impulsive di un sistema, cioè :
$K(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$
La CNES per la realizzazione è che $K(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ sia una matrice di funzioni razionali proprie. Ciò significa che se la trasformata di Laplace di K(t) non è una matrice di funzioni razionali proprie, il legame ingresso-uscita non può essere realizzato mediante un sistema lineare. Se ho che K(s) è una matrice razionale strettamente propria posso risolvere la realizzazione con delle forme canoniche raggiungibili o osservabili.

5 Relazione tra poli di W(s) e autovalori

le radici del polinomio a denominatore sono detti poli della funzione; sono un sottoinsieme degli autovalori della matrice dinamica del sistema, in particolare sono gli autovalori simultaneamente osservabili ed eccitabili.

6 Rappresentazione per sistemi a tempo discreto

Per rappresentare un sistema tempo discreto ricorriamo ad una rappresentazione con lo stato nel dominio complesso
$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ x(0) = \mathrm{x}_0 \end{cases}$$
allora con la trasformata Z ottengo Zx(z)-Zx_0=Ax_0+Bu(z)

$$\begin{cases} x(z) = (ZI-A)^{-1}z_0x_0 + (ZI-A)^{-1}\text{Bu(z)} \\ x(0) = C(\text{ZI-A})^{-1}z_0x_0 + [C(ZI-A)-1B+D]u(z) \end{cases}$$

dove :

$\Phi(z) = (ZI-A)^{-}1z$

$H(z) = (ZI-A)^{-}1B$

$\Psi(z) = C(ZI-A)^{-}1z$

$W(z) = C(ZI-A)^{-}1B+D$

quindi:

$$\begin{cases} x(z) = \Phi(\text{z})\text{x}_0 + Bu(z) \\ x(0) = \Psi(\text{z})\text{x}_0 + W(z)u(z) \end{cases}$$

7 Scomposizione canonica rispetto alla raggiungibilità

Uno stato x è raggiungibile al tempo t a partire dallo stato x_0 se esiste un istante di tempo t_0 ed un ingresso u, da t_0 a t, che porta lo stato x al tempo t. Nei sistemi lineari x è RAGGIUNGIBILE da x_0=0 $\longleftrightarrow x \in R = Im(B\vdots AB\vdots ...\vdots \text{A}^{n-1}B)$.

Se (B $\vdots$AB $\vdots$... $\vdots A^{n-1}B$)=m<n esiste una matrice T non singolare tale che:

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \qquad TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad CT^{-1} = (C_1 \quad C_2)$$

con A_{11} matrice (mxm), B_1 (mxp) e C_1(qxm). Inoltre, la terna (A_{11}, B_1, C_1) è tutta raggiungibile.

L'insieme degli stati raggiungibili coincide con il sottospazio generato dalle colonne linearmente indipendenti della matrice (B $\vdots$AB $\vdots$... $\vdots A^{n-1}B$) detta matrice di raggiungibilità. Se tale matrice ha rango n tutti gli stati sono raggiungibili ed il sistame stesso p detto completamente raggiungibile.

8 La risposta a regime permanente: definizione e condizioni di esistenza

La risposta a regime permanente è la funzione intorno alla quale tende la risposta di un sistema in presenza di un ingresso persistente e indipendentemente dallo stato iniziale. Si può scrivere come:

$lim_{t_0->+\infty} \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau)d\tau$

Affinché esista deve essere assicurata la sommabilità della funzione integranda, vale a dire che è necessaria la limitatezza delle evoluzioni interne (Stabilità asintotica) e quindi gli autovalori del sistema devono avere parte reale negativa.

9 Definire ecitabilità di un modo naturale e dimostrarne la condizione. Come sono legate l'eccitabilità dei modi naturali con la raggiungibilità del sistema?

Un modo naturale è eccitabile con impulsi in ingresso se la sua legge temporale compare nella H(t)=$e_i^{\lambda t}$B, quindi se influenza l'evoluzione dello stato. Considerando l'evoluzione libera:

$X_L(t) = \int_0^t e^(t-\tau)B\sigma(\tau) = e^{At}B = \sum_{i=1}^{n} e_i^{\lambda t}u_iv_iB$

si nota che l'i-esimo modo può comparire nella sommatoria solo se $v_iB \neq 0$

L'osservabilità di un sistema è legata all'eccitabilità dei modi in quanto è raggiungibile se è caratterizzato da tutti e soli i modi eccitabili.

10 I modi naturali dei sistemi lineari a tempo continuo: definizione e parametri caratteristici

I modi naturali sono le evoluzioni nello spazio di stato attraverso le quali è possibile esprimere l'evoluzione libera. In base agli autovalori che vi sono associati si hanno due casi:
- modi naturali aperitivi in presenza di autovalori reali e distinti , Il parametro caratteristico è λ che determina l'andamento temporale. Se $\lambda < 0$ il modo è convergente, se $\lambda > 0$ si ha un andamento divergente e se $\lambda = 0$ si ha un andamento costante.
-modi naturali pseudoperiodici associati a coppie di autovalori complessi coniugati, i cui parametri caratteristici sono : α (ampiezza) , se $\alpha > 0$ il modo è una spirale divergente, se $\alpha < 0$ il modo è una spirale convergente e se $\alpha = 0$ il modo rimane costante sulla traiettorie di un ellisse. ξ (smorzamento) al suo aumento corrisponde un maggior inviluppo della fase oscillatoria. ω_n (pulsazione naturale) rappresenta la pulsazione del modo quando lo smorzamento è nullo.

$$\xi = sen(\theta) = -\alpha/\omega_n \qquad \omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} = \sqrt{1 + \xi^2}/\omega$$

11 Modi naturali per sistemi a tempo discreto

I modi naturali per il caso discreto,così come per i sitemi tempo continuo, sono le evoluzioni nello spazio di stato attraverso le quali è possibile esprimere l'evoluzione libera. In base agli autovalori che vi sono associati si hanno tre casi:
-Modi naturali aperiodici associati ad autovalori reali positivi. Il parametro caratteristico è λ che determina l'andamento temporale. Se $|\lambda| = 1$ si ha un modo costante, se $|\lambda < 1$ si ha un modo convergente a 0 e se $|\lambda > 1$ si ha un modo divergente.
-Modi natuarli alternanti in presenza di autovalori reali negativi, anche quì il parametro caratteristico è λ e: se $\lambda = -1$ il modo oscilla tra -1 e 1 , se $\lambda > -1$ converge a 0 oscillando e se $\lambda < -1$ converge oscillando. -modi naturali pseudoperiodici associati a coppie di autovalori complessi coniugati, i cui parametri caratteristici sono : α (ampiezza) , se $\alpha > 0$ il modo è una spirale divergente, se $\alpha < 0$ il modo è una spirale convergente e se $\alpha = 0$ il modo rimane costante sulla traiettorie di un ellisse. ξ (smorzamento) al suo aumento corrisponde un maggior inviluppo della fase oscillatoria. ω_n (pulsazione naturale) rappresenta la pulsazione del modo quando lo smorzamento è nullo.

12 L'osservabilità dei sistemi lineari a tempo discreto: definizione e condizioni

L'osservabilità riguarda il comportamento stato-uscita , è una proprietà che si occupa di ricostruire l'evoluzione interna a partire dall'osservazione dell'uscita, si traduce perciò nell'assenza di stati indistinguibili . L' insieme degli stati inosservabili nel tempo discreto è:

$$x \in R^n : CA^k x = 0 = ker \begin{pmatrix} C \\ CA \\ .... \\ CA^n - 1 \end{pmatrix}$$

Nel tempo discreto, se uno stato non è osservabile nei primi n passi certamente dopo non sarà osservabile.

13 Il problema della discretizzazione e calcolo del modello a tempo discreto equivalente

A partire da un sistema a tempo continuo si vuole ottenere il sistema a tempo discreto equivalente che descriva il comportamento campionato del sistema a tempo continuo. Il sistema tempo discreto deve avere stato e uscita che si ottengono campionando stato e uscita del sistema a tempo continuo a intevalli costanti T, quando si ha un ingresso costante a tratti nello stesso intervallo T e sincrono con i campionamenti.
Partendo da un sistema a tempo continuo della forma:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ \dot{Y}(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

si può calcolare il modello esplicito: $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$
ponendo $t_0 = kT$ e $t = (k+1)T$ e considerando l'ingresso costante nell' intervallo si ottiene:
$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}d\tau Bu(kT)$
con il cambio $\xi = (k+1)T - \tau$ e considerando l'intervallo unitario diventa:
$x(k+1) = e^{A}x(k) + \int_{k}^{k+1} e^{A\xi}d\xi Bu(k)$
In uscita l'equazione è istantanea e si ha:
y(k)=Cx(k)+Du(k)
e quindi le matrici C e D rimangono le stesse.

14 Per un sistema tempo discreto dimostrare che l'insieme degli stati inosservabili è : Ker $\begin{pmatrix} C \\ ... \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$

Se considero l'evoluzione di un sistema $y_L(k) = CA^{K}x(0)$, affinché lo stato x(0) sia inosservabile $y_L(0) = 0\ \forall k$.
Considero il caso in cui k=0 $\rightarrow$ L'evoluzione è $y_L(k) = CA^0c(0) = CIX(0) = Cx(0)eCx(0) = 0$ se $x(0) \in Ker(C)$
Considero ora il caso k=1 $\rightarrow$ $y_L(k) = CAx(0)$ e CAx(0)=0 se $x(0) \in Ker(CA)$
Quindi per il generico (passo n) gli stati inosservabili appartengono a Ker(CA^{n-1})
Per un sistema lineare l'insieme degli stati inosservabili è dato da tutti gli stati inosservabili che non si osservano in nessuno dei passi, quindi:
I=Ker $\begin{pmatrix} C \\ CA \\ ... \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$

15 Dimostrare la formula della risposta a regime permanente all'ingresso u(k) = sin(θk) per un sistema a tempo discreto.

Si ricorda che per i sistemi tempo discreto
$Y_r(k) = \sum_{\tau=-\infty}^{k} W(k-\tau)u(\tau)$ e che $u(k) = \frac{e^{j\theta k} - e^{-j\theta k}}{2j}$
Considero inizialmente l'ingresso $u(k) = e^{j\theta k}$ e ottengo:
$Y_r(k) = \sum_{\tau=-\infty}^{k} W(k-\tau)e^{-j\theta\tau}$

DISCRETIZZAZIONE

DA UN SISTEMA A TEMPO CONTINUO VOGLIAMO OTTENERE IL SISTEMA A TEMPO DISCRETO EQUIVALENTE CHE DESCRIVE IL COMPORTAMENTO CAMPIONATO DI QUELLO CONTINUO.

IL SISTEMA DISCRETO DEVE AVERE STATO E USCITA OTTENUTI CAMPIONANDO STATO E USCITA DEL CONTINUO A INTERVALLI COST T.

PARTIAMO DAL SISTEMA CONTINUO NELLA FORMA:
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

CON MODELLO ESPLICITO. $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$

PONIAMO $t_0 = kT$ E $t = (k+1)T$ E CONSIDERANDO L'INGRESSO COST NELL'INTERVALLO:
$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(kT)\,d\tau$$

PONENDO $\xi = ((k+1)T - \tau)$ E CONSIDERANDO L'INTERVALLO UNITARIO:
$$x(k+1) = e^{A}x(k) + \int_{k}^{k+1} e^{A\xi}Bu(k)\,d\xi$$

IN USCITA:

$y_d(kT) = C_d x(kT) + D_d u(kT)$ $\qquad y_c(t) = Cx + Du \rightarrow C_d = C_c$ E $D_d = D_c$

LE MATRICI C E D RIMANGONO LE STESSE

I MODI NATURALI SI DIVIDONO IN:

MODI APERIODICI ASSOCIATI AD AUTOVALORI REALI POSITIVI:

- $|\lambda| = 1$ MODO COST — STABILITÀ SEMPLICE
- $|\lambda| < 1$ MODO CONVERGENTE A 0 — STABILITÀ ASINTOT
- $|\lambda| > 1$ MODO DIVERGENTE — INSTABILITÀ

MODI ALTERNATI ASSOCIATI AD AUTOVALORI REALI NEGATIVI:

- $\lambda = -1$ MODO OSCILLA TRA -1 E 1 — STABILITÀ SEMPLICE
- $\lambda > -1$ MODO CONVERGENTE A 0 OSCILLANDO — STABILITÀ ASINTOT
- $\lambda < -1$ MODO DIVERGENTE OSCILLANDO — INSTABILITÀ

MODI PSEUDOPERIODICI ASSOCIATI AD AUTOVALORI CC:

- $\rho = 1$ MODO SU TRAIETTORIA COST DI UN'ELLISSE — STABILITÀ SEMPLICE
- $\rho < 1$ MODO SPIRALE CONVERGENTE — STABILITÀ ASINTOT
- $\rho > 1$ MODO SPIRALE DIVERGENTE — INSTABILITÀ

$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$

e posto $k-\tau=\xi$
$Y_r=(k)=\sum_{\xi=0}^{\infty}W(\xi)e^{j\theta(k-\xi)}=e^{-j\theta k}\sum_{\xi=0}^{\infty}W(\xi)e^{-j\theta\xi}=e^{-j\theta k}W(Z)|_{e^{j\theta}}$ Di conseguenza la risposta a regime permanente a questo ingresso è:
$Y_r(k)=e^{j\theta k}W(e^{j\theta})$
Considero ora l'ingresso $u(k)=e^{-j\theta k}$ seguendo calcoli molto simili al caso precedente e grazie a questi due risultati ottengo la risposta nel caso di ingresso sinusoidale:
$Y_r(k)=\frac{e^{j\theta k}W(e^{j\theta})-e^{-j\theta k}W(e^{j\theta})}{2j}$

16 Si dimostri che, se esiste, la risposta a regime permanente a u(t) = δ_{-1}(t) è uguale al guadagno del sistema

Considerando l'ingresso u(t) = δ_{-1}(t) un ingresso costante la risposta a regime sarà del tipo $Y_r(t)=\lim_{t_0->+\infty}\int_{t_0}^{t}W(t-\tau)u(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}W(\tau)d\tau$, applicando il cambio di variabile $t-\tau=\theta$ ottengo $Y_r(t)=\int_0^{+\infty}W(\theta)d\theta$
Questo integrale assomiglia al calcolo della trasformata di Laplace W(s); manca però il termine $e^{-s\theta}$ che tuttavia è nulla per s=0, quindi posso moltiplicare l'integrale per $e^{-s\theta}$ e poi calcolarlo per s=0:
$Y_r(t)=\int_0^{+\infty}W(\theta)d\theta$=$Y_r(t)=\int_0^{+\infty}W(\theta)e^{-s\theta}d\theta|_{s=0}$
Come sappiamo W(0) mi restituisce il guadagno della funzione perciò la risposta a regime permanente dell'ingresso costante è pari al guadagno.

17 Dimostrare che la funzione di trasferimento W(s) non dipende dalla scelta delle coordinate

Sappiamo che W(t) = $Ce^{At}B+D$
Se effettuo il cambio di coordinate z=Tx $\tilde{A}=TAT^{-}1\tilde{B}=TB\tilde{C}=CT^{-}1\tilde{D}=D$
ottengo: $\tilde{W}=\tilde{C}e^{At}\tilde{B}+\tilde{D}=CT^{-}1Te^{At}T^{-}1TB+D=W(t)$

18 Risposta a regime permanente per sistemi a tempo discreto

La risposta a regime permanente, ad un assegnato ingresso, è quella funzione del tempo intorno alla quale, indipendentemente dallo stato iniziale, tende ad arrestarsi la risposta in uscita al crescere del tempo. Per sistemi tempo discreto si definisce con:
$Y_r(k)=\sum_{\tau=-\infty}^{k}W(k-\tau)u(\tau)$
Si assume anche in questo caso che il sistema sia stabile internamente (modulo minore o uguale a uno degli autovalori con ordine geometrico unitario, strettamente inferiore ad uno gli altri), per evitare che vi siano evoluzioni che crescono indefinitamente impedendone il funzionamento, inoltre valgono le ipotesi che i modi osservabili siano asintoticamente stabili (i corrispondenti autovalori a modulo inferiore ad uno), per assicurare l'indipendenza dallo stato iniziale, e che il sistema sia esternamente stabile nello stato zero (modulo inferiore ad uno dei poli della funzione di trasferimento).

19 Definire l'eccitabilità di un modo naturale e dimostrarne la condizione. Come sono legate l'eccitabilità dei modi naturali con la raggiungibilità del sistema?

Un modo viene detto eccitabile se compare in $e^{At}B$, cioè quando la risposta coincide con l'evoluzione forzata $x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\delta(\tau)d\tau$, più precisamente viene detto che un modo è eccitabile se la sua legge temporale compare nella H(t) con condizione che $V_iB \neq 0$. Il legame tra eccitabilità di un modo e la raggiungibilità di un sistema viene dal fatto che se un sistema è tutto raggiungibile equivale a dire che tutti i modi sono eccitabili essendo entrambe nell'evoluzione forzata.

20 Definizione di raggiungibilità di uno stato; caratterizzare l'insieme degli stati raggiungibili per sistemi dinamici lineari stazionari; confrontare il caso tempo continuo e tempo discreto

Uno stato x è detto raggiungibile a T da x_0 se $\exists\ t_0 < T$, ed un ingresso sull'intervallo si tempo [t_0,T) che porta lo stato x_0 a x. Per la rappresentazione lineare stazionaria viene considerato lo stato x(t_0)=0. L'insieme degli stati raggiungibili è denotato con R(T) cioè :
$R(T) = x : x = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad , \quad u[t_0, T] \to R = Im(B \quad AB.....A^{n-1}B)$.
Per i sistemi a tempo continuo la raggiungibilità è differenziale e ha equivalenza con la controllabilità, invece nei sistemi a tempo discreto la raggiungibilità implica la controllabilità ma non viceversa e se uno stato non si riesce a raggiungere in n passi allora non si può più raggiungere.

21 Un sistema dinamico può esser rappresentato tramite un modello implicito o esplicito.
(a) Illustrare i diversi vantaggi e svantaggi delle due rappresentazioni;
(b) Per sistemi a tempo discreto lineari e stazionari, indicare i passaggi matematici che permettono di passare da una rappresentazione all'altra e viceversa.

Un sistema implicito ha una struttura del tipo:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ Y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Nel tempo continuo permette una simulazione in tempo reale del modello del sistema, è più completo in quanto permette di condurre l'analisi modale con tutti gli autovalori e di analizzare le proprietà del sistema come eccitabilità e osservabilità , ma non fornisce le espressioni dello stato e dell'uscita.
Il modello esplicito ha una struttura del tipo:

$$\begin{cases} (t) = \Phi(t-t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ (t) = \Psi(t-t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau \end{cases}$$

e permette di analizzare il comportamento complessivo forzato e libero. Tuttavia nella rappresentazione esplicita compaiono solo gli autovalori eccitabili o osservabili.

22 definizione di guadagno e interpretazione fisica

Il guadagno è il fattore costante che compare nella forma di Bode della funzione di trasferimento, esso è definito per ogni elemento ed è pari al valore che assume la W(s) in s=0 dopo aver eliminato l'eventuale eccesso di poli in zero. Il guadagno della funzione di trasferimento di un sistema ha, nel caso in cui esista la risposta a regime permanente, il significato fisico di valore di regime della risposta al gradino unitario, cioè $W(s)|_{s=0}$.

23 definizione di raggiungibilità ed inosservabilità; caratterizzazione e proprietà degli insiemi di tali stati

L'osservabilità riguarda il comportamento stato-uscita. Uno stato è detto inosservabile quando corrisponde ad un'evoluzione libera in uscita identicamente nulla, cioè $Ce^{At}X_I = 0$ dove $X_I = X_a - X_b$ ovvero due stati indistinguibili.
L'insieme degli stati inosservabili è definito come $I = x \in R^n \quad : \quad Ce^{At}x = 0 \quad , \quad \forall t \geq 0$
che equivale al I=ker $\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \ldots \\ CA^n \end{pmatrix}$
dove (C...CA) è la matrice di osservabilità del sistema. Il sistema viene detto tutto osservabile se il rango di questa matrice è pari alla dimensione del sistema e di conseguenza tutti i modi naturali sono osservabili.
Uno stato x è detto raggiungibile a T da x_0 se $\exists\ t_0 < T$, ed un ingresso sull'intervallo si tempo [t_0,T) che porta lo stato x_0 a x. Per la rappresentazione lineare stazionaria viene considerato lo stato x(t_0)=0. L'insieme degli stati raggiungibili è denotato con R(T) cioè :
$R(T) = x : x = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, u[t_0, T] \rightarrow R = Im(B \quad AB.....A^{n-1}B)$.

24 Può un sistema lineare essere caratterizzato da modi naturali aventi la stessa legge di moto?

Si, se la matrice A ha autovalori coincidenti ma è regolare ($M_G = 1$), si hanno in corrispondenza di ogni autovalore con molteplicità algebrica > 1, altrettanti modi naturali con leggi temporali coincidenti. In corrispondenza di ogni autovalore reale è possibile calcolare tanti autovettori quanto è la M_A dello stesso e in corrispondenza di autovalori complessi e coniugati è possibile calcolare tanti autospazi di dimensione 2 quanta è la M_A della coppia di autovalori.

25 è possibile che un sistema abbia funzione di trasferimento uguale a zero? Se si, sotto quali condizioni?

Si, è possibile perché essendo $W(s) = \mathscr{L}[W(t)]$ e $W(t) = Ce^{At}B = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda i}Cu_iv_iB$ affinché un modo non compaia nella W(t) deve essere non eccitabile oppure non osservabile.

26 Definizione di stabilità esterna e condizioni

La stabilità esterna è anche detta stbilità ingresso-uscita ed è una proprietà che indica come un sistema risponde a fronte di ingressi limitati.Le condizioni affinché un sistema sia stabile esternamente sono:

-CONDIZIONE NECESSARIA (Stabilità esterna nello stato zero): $\int_0^t |W(\tau)d\tau| < K \ \forall t$, quindi gli autovalori che sono simultaneamente eccitabili e osservabili devono avere parte reale negativa.
-CONDIZIONE SUFFICIENTE: $|\Psi| < k \ \forall t$, quindi gli autovalori osservabili in uscita devono essere a parte reale strettamente negativa se con molteplicità geometrica maggiore di 1 o parte reale non positiva se con molteplicità geometrica pari a 1.

27 Dato un sistema a tempo continuo (A, B, C, D) con D = 0 si denoti con Λ l'insieme degli autovalori del sistema e con Λe e Λo l'insieme degli autovalori associati ai modi eccitabili e osservabili. Dimostrare che se $\Lambda e \cap \Lambda o = \emptyset$ allora la risposta impulsiva ‘e nulla

La risposta impulsiva dipende dalla matrice delle risposte impulsive $W(t) = Ce^{At}B = \sum_{i=1}^{n} Cu_i v_i B$. In questa rappresentazione Cu_i e l'osservabilità e $v_i B$ è l'eccitabilità, quidni se un autovalore non è né osservabile ($Cu_i = 0$) e nè eccitabile ($v_i B = 0$) non compare in W(t). Se nessun autovalore compare in W(t), quest'ultima è nulla e allora la risposta impulsiva è nulla.

28 Il ruolo dell'osservabilità nella ricostruzione del comportamento interno

la proprietà di osservabilità svolge in questo problema il ruolo della proprietà di raggiungibilità nel problema di assegnazione degli autovalori con retroazione dallo stato.

29 Risposta a regime permanente ad ingressi sinusoidali per sistemi a tempo continuo

La risposta a regime permanente è quell'andamento nel tempo al quale tende ad assestarsi la risposta quando l'ingresso è persistente e indipendente dallo stato. La risposta a regime permandente per ingressi sinusoidali è una funzione simile all'ingresso, ma modificata in modulo e fase , assume la forma :
$Y_r(t) = M(\omega)sen(\omega t + \Phi(\omega))$.
Il modulo è dato da $|W(j\omega)| = \sqrt{Re^2 + Im^2}$, lo sfasamento invece è $L(W(j\omega)) = \Phi(\omega) = arctan\frac{Im}{Re}$.

30 W(t), W(s) e W($j\omega$): cosa rappresentano e qual è il loro significato fisico.

-W(t) è la matrice delle risposte impulsive in uscita e descrive il comportamento forzato ingresso-uscita. Permette di calcolare la risposta forzata ad un ingresso u(t) andando ad eseguire l'integrale di convoluzione $Y_F(t) = \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau)d\tau$
-W(s) è la trasformata di Laplace di W(t) ed è detta funzione di trasferimento, è un modello forzato di un sistema dinamico lineare stazionario. Conoscendo W(s) si può calcolare una qualsiasi risposta forzata ad un dato ingresso.
-W($j\omega$) è la risposta armonica e descrive il comportamento in frequenza di un sistema e allo stesso tempo consente di dare alla funzione di trasferimento un'interpretazione fisica. Il modulo e la fase della risposta armonica, per una data pulsazione, rendono conto del comportamento a regime permanente a quella pulsazione.