Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

FISICA

Ingegneria Informatica e Automatica

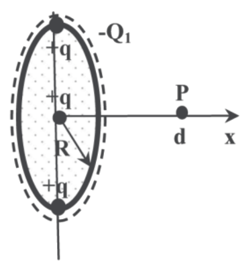
12.07.2024-A.A. 2023-2024 (12 CFU) C.Sibilia/L.Sciscione

N.1 In un gioco per bambini, un'astronave giocattolo di massa m= 50 g viene lanciata, per mezzo di una molla di costante elastica k=13N/m e con compressione iniziale *d* rispetto alla posizione di riposo, lungo una pista rettilinea. La pista è costituita da un tratto orizzontale liscio (AB), da un tratto in salita di altezza h= 0.3 m (BC) e da un tratto orizzontale scabro (CD) con coefficiente di attrito dinamico pari a 0.3. Si calcolino: a) la minima compressione iniziale *d* della molla affinché l'astronave arrivi in cima alla salita; b) la velocità dell'astronave in cima alla salita nel caso in cui la compressione iniziale della molla sia *d*=0.2 m; c) lo spazio *s* percorso dall'astronave lungo il tratto finale (CD) prima di arrestarsi, assumendo la situazione del punto b).

N.2 Una sbarra omogenea di massa *M* e lunghezza *L,* può ruotare liberamente in un piano verticale intorno ad un suo estremo. Sull'estremo libero della sbarra è vincolato un corpo puntiforme di massa di massa *m/2.* La sbarra si trova inizialmente in una posizione orizzontale in quiete, ad un certo istante viene lasciata ruotare. In posizione verticale la sbarra urta una massa *m* in quiete su di un piano orizzontale. Sapendo che dopo l'urto la sbarra di ferma, calcolare la velocità della massa *m* dopo l'urto. (Momento di inerzia della sbarra rispetto all'estremo è (1/3)ML^2).

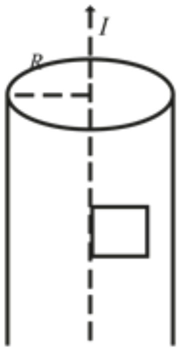
N.3 Due contenitori separati tra loro e di uguale dimensione contengono 3 moli di gas perfetto biatomico ad una temperatura T= 10 °C. Nel primo contenitore il gas è riscaldato a volume costante fino a triplicare la pressione del gas. Nel secondo contenitore è presente un pistone mobile, che permette al gas di triplicare il volume mantenendo costante la pressione. Determinare la variazione di entropia per ciascun contenitore.

N.4. Una carica negativa $-Q$ è disposta su un anello circolare di raggio R=5cm. Tre cariche puntiformi ciascuna di valore $q = 10\mu C$ sono disposte rispettivamente al centro dell'anello ed in due punti dell'anello diametralmente opposti. Determinare la carica che occorre disporre sull'anello in modo da annullare il campo elettrico in un punto P sull'asse dell'anello ad una distanza d=8cm dal centro.

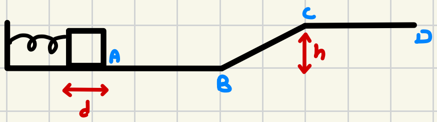


N.5. Si abbia un cilindro rettilineo indefinito di raggio R=1cm percorso uniformemente da una corrente I. All'interno del cilindo è posizionata, come da figura, una spira quadrata di lato a=3mm, la cui presenza influenza in maniera trascurabile la corrente I. Se la legge oraria della corrente è $I(t) = bt^2 + c$ $(b =$

$0{,}2\ A/s^2$), determinare: 1) il valore in modulo della fem indotta nella spira all'istante $t^* = 10s$; 2) il verso di percorrenza della corrente indotta.



N.1 In un gioco per bambini, un'astronave giocattolo di massa m= 50 g viene lanciata, per mezzo di una molla di costante elastica k=13N/m e con compressione iniziale *d* rispetto alla posizione di riposo, lungo una pista rettilinea. La pista è costituita da un tratto orizzontale liscio (AB), da un tratto in salita di altezza h= 0.3 m (BC) e da un tratto orizzontale scabro (CD) con coefficiente di attrito dinamico pari a 0.3. Si calcolino: a) la minima compressione iniziale *d* della molla affinché l'astronave arrivi in cima alla salita; b) la velocità dell'astronave in cima alla salita nel caso in cui la compressione iniziale della molla sia *d*=0.2 m; c) lo spazio *s* percorso dall'astronave lungo il tratto finale (CD) prima di arrestarsi, assumendo la situazione del punto b).



a) $\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv_c^2 + mgh$ MA V_c DEVE ESSERE 0 PER FERMARSI LI

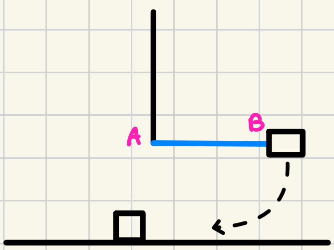
$\frac{1}{2}kd^2 = mgh \rightarrow \boxed{d = \sqrt{\frac{2mgh}{k}} = 0.15\,m}$

b) $\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv_c^2 + mgh \rightarrow \boxed{v_c = \sqrt{\frac{k}{m}d^2 - 2gh} = 2,12\,m/s}$

c) $W_{ATT} = F_A \cdot s = \mu mgs \qquad W_{ATT} = \frac{1}{2}mv_c^2 = \frac{1}{2}kd^2 - mgh$

$W_{ATT} = \frac{1}{2}kd^2 - mgh \rightarrow \boxed{s = \frac{\frac{1}{2}kd^2 - mgh}{\mu mg} = 0,76\,m}$

N.2 Una sbarra omogenea di massa *M* e lunghezza *L*, può ruotare liberamente in un piano verticale intorno ad un suo estremo. Sull'estremo libero della sbarra è vincolato un corpo puntiforme di massa di massa *m/2.* La sbarra si trova inizialmente in una posizione orizzontale in quiete, ad un certo istante viene lasciata ruotare. In posizione verticale la sbarra urta una massa *m* in quiete su di un piano orizzontale. Sapendo che dopo l'urto la sbarra di ferma, calcolare la velocità della massa *m* dopo l'urto. (Momento di inerzia della sbarra rispetto all'estremo è (1/3)ML^2).



IL MOMENTO ANGOLARE COST DURANTE L'URTO

$$I = \left(\frac{1}{3}M + \frac{m}{2}\right)L^2$$

PER CALCOLARE W USIAMO LA CONSERVAZIONE DELL' E_m

$E_{m_i} = MgL + \frac{m}{2}gL = \left(M + \frac{m}{2}\right)gL \qquad E_{m_f} = \frac{1}{2}Iw^2 + Mg\frac{L}{2}$

$E_{m_i} = E_{m_f} \rightarrow \left(M + \frac{m}{2}\right)gL = \left(\frac{1}{6}M + \frac{1}{4}m\right)L^2w^2 + Mg\frac{L}{2}$

$$w = \sqrt{\frac{(M+m)g}{\left(\frac{1}{3}M + \frac{1}{2}m\right)L}}$$

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE:

$$L_{A_i} = I\omega \qquad L_{A_f} = L\, m\, v_f^2$$

$$L_{A_i} = L_{A_f} \rightarrow \quad I\omega = L\, m\, v_f^2 \rightarrow v_f = \sqrt{\frac{I\omega}{Lm}}$$

?

N.3 Due contenitori separati tra loro e di uguale dimensione contengono 3 moli di gas perfetto biatomico ad una temperatura T= 10 °C. Nel primo contenitore il gas è riscaldato a volume costante fino a triplicare la pressione del gas. Nel secondo contenitore è presente un pistone mobile, che permette al gas di triplicare il volume mantenendo costante la pressione. Determinare la variazione di entropia per ciascun contenitore.

n: 3 mol $\quad c_v = \frac{5}{2}R \quad c_p = \frac{7}{2}R \quad \gamma = \frac{7}{5} \qquad T = 10°C = 283.15\,K$

a) ISOCORA $\rightarrow \frac{T_f}{T_i} = \frac{P_f}{P_i}$

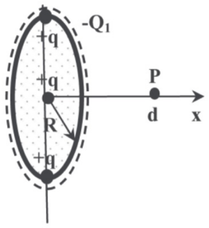
$$\Delta S_1 = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_i}^{T_f} n c_v \frac{dT}{T} = n c_v \ln \frac{T_f}{T_i} = n c_v \ln\left(\frac{3P_i}{P_i}\right) =$$

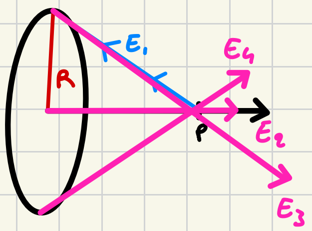
$$= 3 \cdot \frac{5}{2} R \ln 3 = 68{,}47\ J/K$$

b) ISOBARA $\rightarrow \frac{V_f}{V_i} = \frac{T_f}{T_i}$

$$\Delta S_2 = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_i}^{T_f} n c_p \frac{dT}{T} = n c_p \ln \frac{3V_i}{V_i} = 3 \cdot \frac{7}{2} R \ln 3 = 95{,}8\ J/K$$

N.4. Una carica negativa $-Q$ è disposta su un anello circolare di raggio R=5cm. Tre cariche puntiformi ciascuna di valore $q = 10\mu C$ sono disposte rispettivamente al centro dell'anello ed in due punti dell'anello diametralmente opposti. Determinare la carica che occorre disporre sull'anello in modo da annullare il campo elettrico in un punto P sull'asse dell'anello ad una distanza d=8cm dal centro.





$$E_1(d) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qd}{(R^2+d^2)^{3/2}}$$

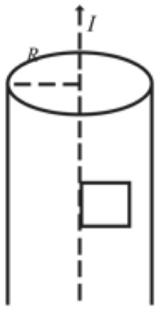
$$E_2(d) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{d^2} \qquad E_3(d) = E_4(d) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(R^2+d^2)}$$

$$E_{TOT}(d) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d^2} + \frac{2d}{(R^2+d^2)^{3/2}}\right) \quad E_2 + E_3 + E_4$$

$$E_1(d) = E_{TOT}(d) \rightarrow \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qd}{(R^2+d^2)^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d^2} + \frac{2d}{(R^2+d^2)^{3/2}}\right)$$

$$Q = q\left[2 + \left(\frac{\sqrt{R^2+d^2}}{d}\right)^3\right] \approx 36{,}4\ \mu C$$

N.5. Si abbia un cilindro rettilineo indefinito di raggio R=1cm percorso uniformemente da una corrente I. All'interno del cilindo è posizionata, come da figura, una spira quadrata di lato a=3mm, la cui presenza influenza in maniera trascurabile la corrente I. Se la legge oraria della corrente è $I(t) = bt^2 + c$ $(b = 0{,}2\ A/s^2)$, determinare: 1) il valore in modulo della fem indotta nella spira all'istante $t^* = 10s$; 2) il verso di percorrenza della corrente indotta.



a) $\oint B(r)\, ds = \mu_0 I \rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 j \pi r^2 \rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$

$\rightarrow B(r) = \mu_0 \frac{I(t)\, r}{2\pi R^2}$

$d\Phi B = B(t)\, a\, dr \rightarrow \Phi B = \int_0^a B(r)\, a\, dr = \mu_0 \frac{I(t)\, a^3}{4\pi R^2}$

$FEM = -\frac{d\Phi B}{dt} = -\frac{\mu_0 a^3}{4\pi R^2} \cdot \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\mu_0 a^3 b t}{2\pi R^2}$

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

FISICA

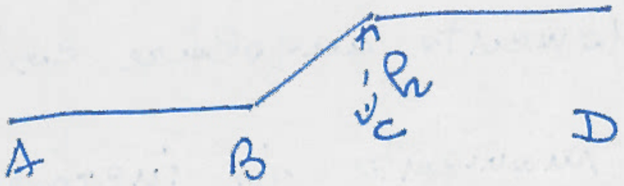
Ingegneria Informatica e Automatica1

12.07.2024-A.A. 2023-2024 (12 CFU) C.Sibilia/L.Sciscione

Soluzioni

N. 1

a) Assenza di attrito e quindi conservazione energia meccanica nel tratto A → B → C



$$E_{m0} = \frac{1}{2} k d^2 = E_{mA} = \frac{1}{2} m v_A^2 = E_{mB} = \frac{1}{2} m v_B^2 =$$

$$= E_{mC} = \frac{1}{2} m v_C^2 + m g h$$

per cui la minima compressione della molla per cui l'astronave arrivi in cima con velocità nulla è ($V_C = 0$)

$$\frac{1}{2} k d_0^2 = m g h \Rightarrow \quad d_0 = \sqrt{\frac{2 m g h}{k}} = 0.15 m$$

b) L'energia cinetica in C non è nulla:

$$E_{m0} = \frac{1}{2} k d^2 = E_{mC} = \frac{1}{2} m v_C^2 + m g h \Rightarrow$$

$$V_C = \sqrt{\frac{k}{m} d^2 - 2 g h} = 2.14 m/s$$

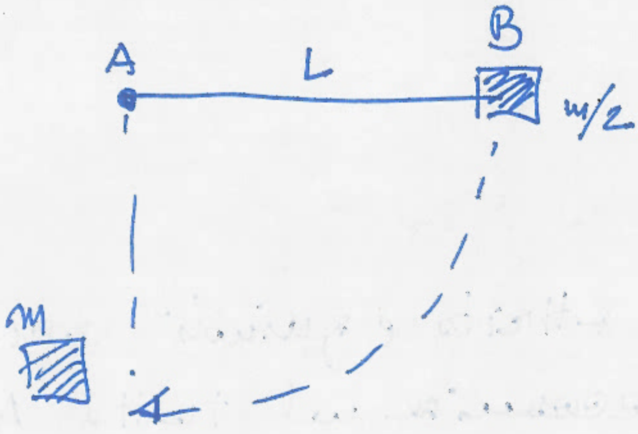
c) nel tratto finale l'energia non si conserva

Per cui ⇒

$$W_{attr} = E_{mD} - E_{mC} = E_{mD} - E_{m0} = m g h - \frac{1}{2} k d^2$$

$$W_{attr} = \mu_d m g s \Rightarrow \quad s = \frac{\frac{1}{2} k d^2 - m g h}{\mu_D m g} = 0.767 m$$

N2



Momento angolare costante durante l'urto

Il momento di inerzia totale è

$$I = \left(\frac{1}{3}M + \frac{m}{2}\right)L^2$$

Per calcolare la velocità angolare ω della sbarra prima dell'urto si applica la conservazione dell'energia meccanica

$$E_{mi} = 0 + \left(MgL + \frac{m}{2}gL\right) = \left(M + \frac{m}{2}\right)gL$$

$$E_{mf} = \frac{1}{2}I\omega^2 + \left(Mg\frac{L}{2} + 0\right)$$

(energia potenziale della sbarra)

$$E_{mi} = E_{mf} \quad \Rightarrow$$

$$\left(M + \frac{m}{2}\right)gL = \frac{1}{2}I\omega^2 + Mg\frac{L}{2} \qquad \text{dove} \qquad I = \left(\frac{1}{3}M + \frac{m}{2}\right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{(M+m)g}{\left(\frac{1}{3}M + \frac{m}{2}\right)L}}$$

Per calcolare la velocità delle masse dopo l'urto, si sfrutta la conservazione del momento angolare.

$$L_{Ai} = I\omega + 0$$

$$L_{Af} = 0 + L m v_f \Rightarrow$$

$$v_f = \frac{1}{m}\sqrt{\left(\frac{1}{3}M + \frac{m}{2}\right)(M+m) g L}$$

N, 3

a)

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{p\,dV}{T} + \int \frac{n c_v\,dT}{T} =$$

$$= \int_{T_{in}}^{T_{fin}} n c_v \frac{dT}{T} = n c_v \ln \frac{T_{fin}}{T_{in}}$$

poiché $\frac{T_{fin}}{T_{in}} = \frac{P_{fin}}{P_{in}} \Rightarrow \Delta S = n c_v \ln\left(\frac{P_{fin}}{P_{in}}\right) =$

$$= \frac{5}{2} n R \ln 3 = 68.5\ J/K$$

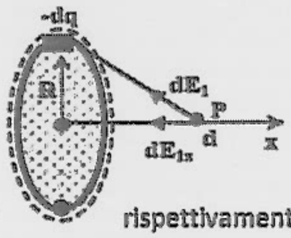
$c_v = \frac{5}{2} R$

b) $$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_{in}}^{T_{fin}} n c_p \frac{dT}{T} = n c_p \ln \frac{T_{fin}}{T_{in}} =$$

$$= n c_p \ln\left(\frac{V_{fin}}{V_{in}}\right) = \frac{7}{2} n R \ln 3 = 95.8\ J/K$$

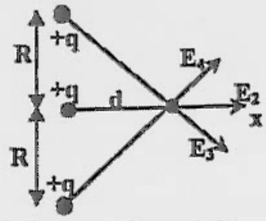
N.4Il campo elettrico sull'asse dell'anello a distanza di dal centro è:

$E_1(d) = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0(R^2+d^2)^{3/2}}$



Le tre cariche positive producono sempre nel punto P rispettivamente i campi:

$E_2(d) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$ ed $E_3(d) = E_4(d) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R^2+d^2)}$



La somma vettoriale di questi tre campi produce in P un campo totale lungo x di modulo:

$$E_{tot}(d) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d^2} + \frac{2d}{(R^2+d^2)^{3/2}}\right)$$

La condizione di bilanciamento tra il campo prodotto dalle tre cariche in P e quello dell'anello negativo si ha quando:

$$\frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0(R^2+d^2)^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d^2} + \frac{2d}{(R^2+d^2)^{3/2}}\right)$$

Da cui:

$$Q = q\left[2 + \left(\frac{\sqrt{R^2+d^2}}{d}\right)^3\right] = 36.4\mu C$$

1) N.5 Calcolo del vettore induzione magnetica all'interno del cilindro percorso da corrente, dal teorema della circuitazione di Ampere si ha:

$r < R \oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I_{conc}$ che in questo caso diventa $2\pi B(r) = \mu_0 I_{conc} = \mu_0 J\pi r^2$ dove J è la densità di corrente definita come:$J = \frac{I}{\pi R^2}$. Quindi il valore del vettore B all'interno del cilindro percorso da corrente è:

$B(r) = \mu_0 \frac{I(t)r}{2\pi R^2}$ con verso normale alla spira ed entrante nel foglio nel lato della spira.

Il flusso elementare del vettore B attraverso la spira è:

$d\phi(\vec{B}) = \mu_0 B(t) a dr$ il flusso totale di B attraverso la spira si ottiene integrando il flusso elementare:

$\phi(\vec{B}) = \int_0^a \mu_0 \frac{I(t)r}{2\pi R^2} a dr = \mu_0 \frac{I(t)a^3}{4\pi R^2}$.

Il modulo della fem indotta per $t = t^*$ è:

$$|f_i| = \left|-\frac{\partial \phi}{\partial t}\right| = \mu_0 \frac{a^3 b t^*}{2\pi R^2} = 1{,}08 \cdot 10^{-10} V$$

Il verso della corrente è anti orario.