Teoria dei Sistemi

16/6/2022

Cognome e nome ....

1. Un sistema, con $x \in \mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, può essere rappresentato, nello spazio di stato, dalle equazioni

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} x(t) + Du(t)$$

con $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, $x_1 \in \mathbb{R}^2$ e $x_2 \in \mathbb{R}$.

A. Determinare possibili valori per i blocchi nella rappresentazione sapendo che

1) la funzione di trasferimento è pari a

$$W(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{s(s+1)}$$

2) esiste un sottospazio di stato non raggiungibile di dimensione uno, caratterizzato dall'autovalore $\lambda = 1$;

3) il sistema è completamente osservabile.

B. Come il punto A. aggiungendo la condizione che l'autovalore $\lambda = 1$ abbia autovettore $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Tracciare i diagrammi di Bode e quello polare per il sistema rappresentato da

$$W(s) = \frac{s^2 + 1}{s(s^2 - 1)(s^2 + 100)}$$

3. Calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente del sistema avente risposta indiciale

$$y_{-1}(t) = w_{-1}(t) = 2 + e^{-t} - 3e^{-2t}$$

per l'ingresso $u(t) = (t+1)\delta_{-1}(t)$.

4. Dato il sistema a tempo discreto descritto da

$$W(z) = \begin{pmatrix} \frac{z-2}{2z+1} & \frac{1}{4z-1} \\ 0 & \frac{(z-2)}{(2z-1)(2z+1)} \end{pmatrix}$$

A. determinarne una realizzazione minima;

B. studiarne la stabilità interna, esterna ed esterna nello stato zero.

1. Un sistema, con $x \in \mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, può essere rappresentato, nello spazio di stato, dalle equazioni

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} x(t) + Du(t)$$

con $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, $x_1 \in \mathbb{R}^2$ e $x_2 \in \mathbb{R}$.

$$W(s) = \frac{s^2+2s+2}{s(s+1)}$$

SOTTOSPAZIO NON RAGGIUNGIBILE $\lambda = 1$

SISTEMA COMPLETAMENTE OSSERVABILE

a)

IL SISTEMA È IN FORMA RAGGIUNGIBILE

$$\begin{array}{r|l} s^2+2s+2 & s^2+s \\ \hline -s^2-s & 1 \\ \hline s+2 & \end{array} \rightarrow W(s) = \frac{s+2}{s(s+1)} + \overset{D}{1}$$

$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D = 1$$

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x_3 \end{array}\right) \quad D = 1$$

VERIFICO LA COMPLETA OSS:

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 2x_1+x_2+x_3 \\ 0 & -1 & 2x_1+2x_2+x_3 \end{pmatrix}$$

DEVE RISULTARE rk PIENO CIOÈ DET O $\neq 0$

$$\text{DET}(O) = 2\Big((2x_1+2x_2+x_3)+(2x_1+x_2+x_3)\Big) = 2(4x_1+3x_2+2x_3)$$

$$= 8x_1+6x_2+4x_3 \neq 0$$ PONGO $x_1 = x_2 = 0$ E $x_3 = 1$

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad D = 1$$

VERIFICO CHE LA RAGGIUNGIBILITÀ NON SIA PIENA:

$$R = (B \;\; AB \;\; A^2B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ rk = 2 VA BENE!

2 MODI RAGG
1 MODO NON RAGG

b) $\lambda_1 = 1 \rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

AUTOVALORI:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 1) \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 1 \end{matrix}$$

AUTOVETTOR:

$$\lambda_1 = 0 \qquad (A - \lambda I)v_1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v_1 = 0 \qquad \begin{cases} v_b = 0 \\ v_c = 0 \end{cases} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \qquad (A - \lambda I)v_2 = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} v_2 = 0 \qquad \begin{cases} v_a = -v_b \\ v_c = 0 \end{cases} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 1 \qquad (A - \lambda I)v_3 = 0 \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_3 = 0 \qquad \begin{cases} v_a = 0 \\ v_b = 0 \\ v_c = 1 \end{cases} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

DA CAMBIARE

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow T = \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \end{array}$$

$$A = T\tilde{A}T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

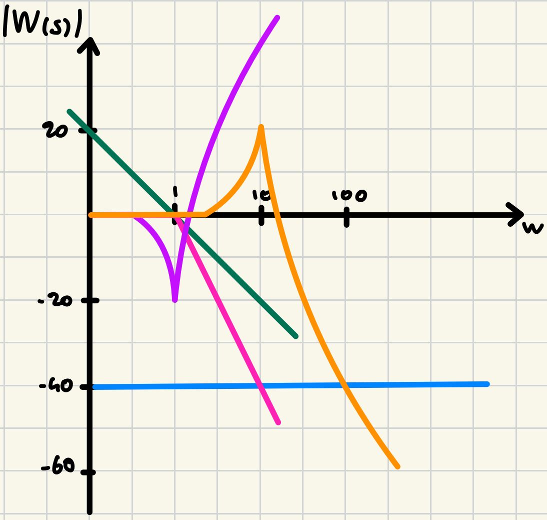
$$B = T\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = \tilde{C}T^{-1} = (2 \;\; 1 \;\; 1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (2 \;\; -1 \;\; 4)$$

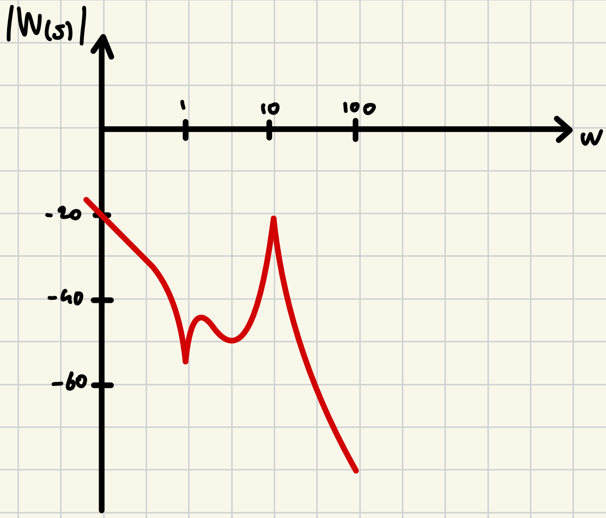
2. Tracciare i diagrammi di Bode e quello polare per il sistema rappresentato da

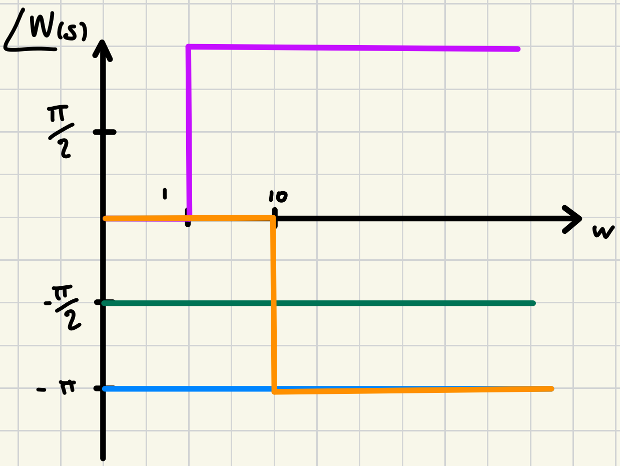
$$W(s) = \frac{s^2+1}{s(s^2-1)(s^2+100)}$$

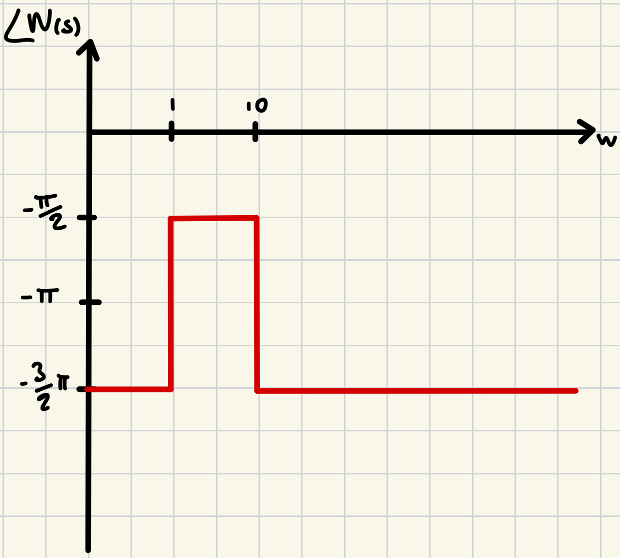
$$W(s) = \frac{s^2+1}{s(s^2-1)(s^2+100)} = \frac{s^2+1}{s(s+1)(s-1)(s^2+100)} = -\frac{1}{100}\,\frac{1+s^2}{s(1+s)(1-s)(1+0.01s^2)}$$

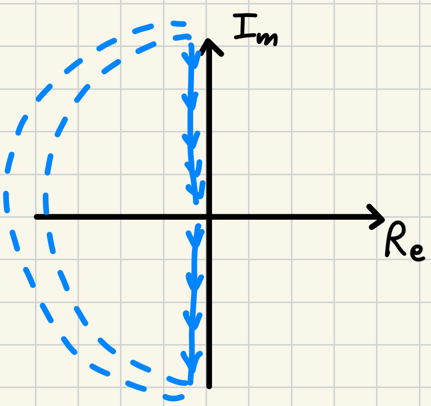
$20 \log |K| = -20 \log 100 = -40\,dB$ $\qquad \omega_n = 10 \quad \xi = 0 \;/\; \omega_n = 1 \quad \xi = 0$











3. Calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente del sistema avente risposta indiciale

$$y_{-1}(t) = w_{-1}(t) = 2 + e^{-t} - 3e^{-2t}$$

per l'ingresso $u(t) = (t+1)\delta_{-1}(t)$.

$y_{-1}(t) = w_{-1}(t) = 2 + e^{-t} - 3e^{-2t}$ $\qquad$ $u(t) = (t+1)\delta_{-1}(t)$

$y_{-1}(s) = W(s) \cdot U(s)$ $\qquad$ CONSIDERO $u(t) = \delta_{-1}(t) \rightarrow U(s) = 1/s$

$$y_{-1}(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{3}{s+2}$$

$$W(s) = y_1(s)/U(s) = y_1(s)\, s = 2 + \frac{s}{s+1} - \frac{3s}{s+2} = \frac{5s+4}{(s+1)(s+2)}$$

y_{RP} $\exists$ PERCHÈ I POLI HANNO $Re(\lambda_i) < 0$

$u(t) = (t+1)\delta_{-1}(t) = t\delta_{-1}(t) + \delta_{-1}(t)$ $\qquad$ $y_{RP}(t) = y_{RP_1}(t) + y_{RP_2}(t)$

$$\left.\begin{aligned} y_{RP_1}(t) &= c_0 t + c_1 \\ y_{RP_2}(t) &= c_0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} c_0 &= W(s)\big|_{s=0} = 2 \\ c_1 &= \frac{d}{ds}\left[W(s)\right]\Big|_{s=0} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} y_{RP_1}(t) &= 2t - \frac{1}{2} \\ y_{RP_2}(t) &= 2 \end{aligned}\right\} \quad y_{RP}(t) = 2t + \frac{3}{2}$$

4. Dato il sistema a tempo discreto descritto da

$$W(z) = \begin{pmatrix} \frac{z-2}{2z+1} & \frac{1}{4z-1} \\ 0 & \frac{(z-2)}{(2z-1)(2z+1)} \end{pmatrix}$$

A. determinarne una realizzazione minima;

B. studiarne la stabilità interna, esterna ed esterna nello stato zero.

$$W(z) = \begin{pmatrix} \frac{z-2}{2z+1} & \frac{1}{4z-1} \\ 0 & \frac{(z-2)}{(2z-1)(2z+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2(2z+1)} - \frac{1}{2} & \frac{1}{(2z+1)(2z-1)} \\ 0 & \frac{(z-2)}{(2z-1)(2z+1)} \end{pmatrix}$$

$$W(z) = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{5}{2}(2z-1) & 1 \\ 0 & z-2 \end{pmatrix}}{4\left(\frac{1}{2}+z\right)\left(-\frac{1}{2}+z\right)} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{5}{8}(2z-1) & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{z-2}{4} \end{pmatrix}}{(z^2 - \frac{1}{4})} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}{(z^2 - \frac{1}{4})} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

POICHÈ NON HO INFO SUL SISTEMA E NON POSSO USARE GILBERT, E POICHÈ HO UNA 2x2 DI W(S), CONSIDERO MINIMA SIA LA FORMA CANONICA RAGG CHE OSS:

RAGGIUNGIBILITÀ:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{array}\right) \quad B = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \quad C = \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OSSERVABILITÀ:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad B = \left(\begin{array}{cc} \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} \\ \hline -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \quad C = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\left(\frac{1}{2}+z\right)\left(-\frac{1}{2}+z\right) \rightarrow Re(\lambda_i) > 0$

INSTABILE INT, EST E NELLO STATO ZERO $(Re(\lambda_{E,0}) > 0)$