Teoria dei Sistemi e Sistemi Dinamici

09/04/2024

Cognome e nome ....

1. Si traccino i diagrammi di Bode e polare per

$$F(s) = \frac{s-1}{(s^2+3s+2)(s^2+1)}$$

Si calcoli inoltre la risposta forzata e se esiste a regime permanente per l'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t-2)$

2. **(solo 9 cfu)** Dato il sistema descritto da

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{s^2+s+1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+1} \\ 1 & \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix}$$

a. determinarne una realizzazione minima;

b. calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente all'ingresso

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(2t)\delta_{-1}(t)$$

3. Dato un processo descritto dall'equazione differenziale del secondo ordine

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$$

Determinare una rappresentazione con lo spazio di stato associata al processo in cui y(t) e u(t) rappresentino rispettivamente l'uscita e l'ingresso del sistema. Studiare inoltre i modi naturali che caratterizzano il processo, tracciando i grafici che ne rappresentano il comportamento nel piano cartesiano, per generiche condizioni iniziali $y(0) = a$ e $\dot{y}(0) = b$ al variare di a e b.

4. La discretizzazione di un sistema lineare a tempo continuo (il processo, il modello come si ricava - dimostrazione -, come si trasformano autovalori e autovettori, considerazioni particolari che si desidera fare).

1. Si traccino i diagrammi di Bode e polare per

$$F(s) = \frac{s-1}{(s^2+3s+2)(s^2+1)}$$

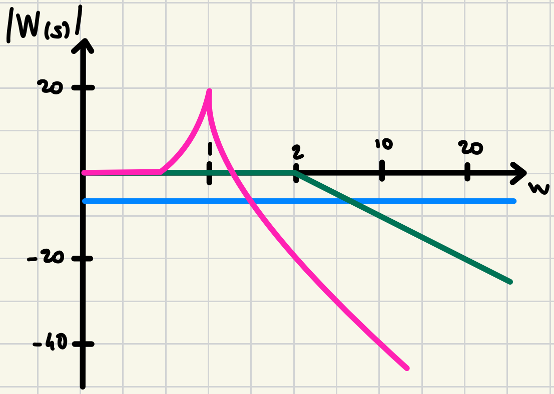
Si calcoli inoltre la risposta forzata e se esiste a regime permanente per l'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t-2)$

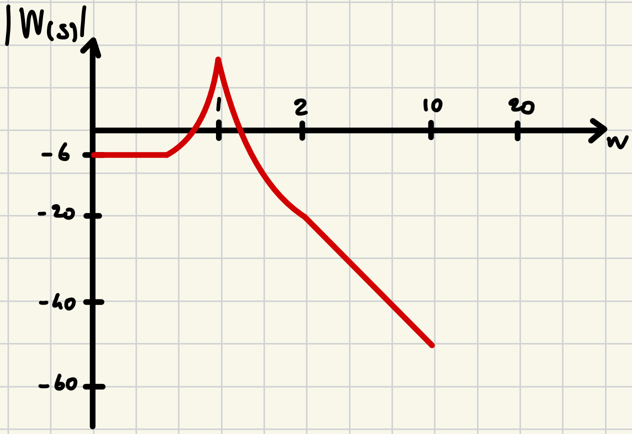
$$F(s) = \frac{(s-1)}{(s+1)(s+2)(s^2+1)} = -\frac{1}{2}\,\frac{(1-s)}{(1+s)(1+\frac{s}{2})(1+s^2)}$$

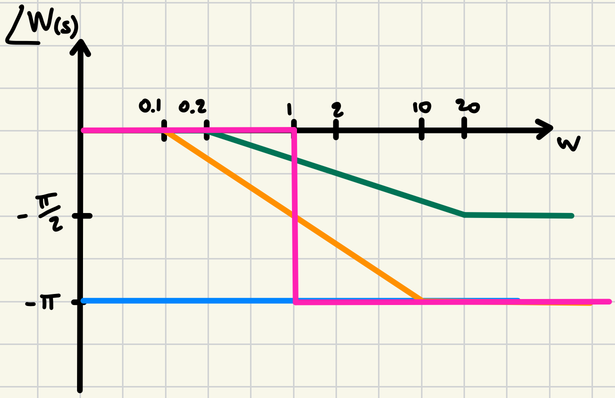
$\omega_n = 1 \quad \xi = 0$

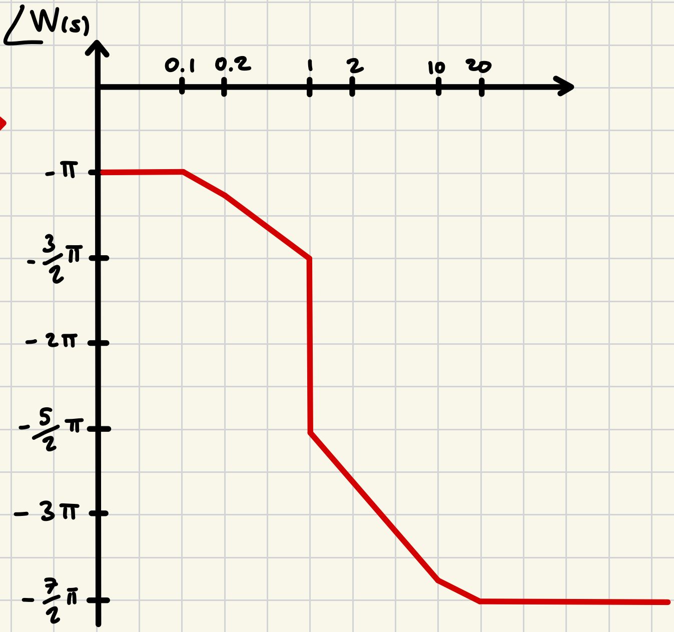
$20\log|k| = -6\ dB$

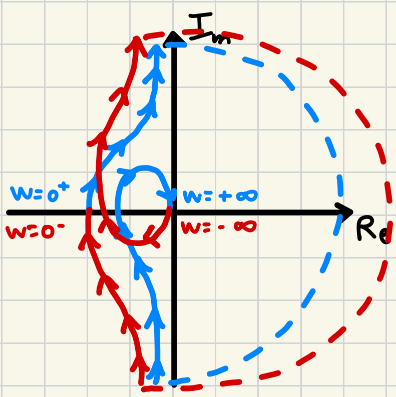
a)











b) $u(t) = \delta_{-1}(t-2)$ CONSIDERO PRIMA SOLO $u(t) = \delta_{-1}(t) \rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$

$$Y_F(s) = W(s) \cdot U(s) = \frac{(s-1)}{s(s+1)(s+2)(s^2+1)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+1} + \frac{R_3}{s+2} + \frac{2R_a s - 2R_B}{s^2+1}$$

$$R_1 = \lim_{s \to 0} s \cdot W(s) = \lim_{s \to 0} \frac{(s-1)}{(s+1)(s+2)(s^2+1)} = -\frac{1}{2}$$

$$R_2 = \lim_{s \to -1} (s+1) \cdot W(s) = \lim_{s \to -1} \frac{(s-1)}{s(s+2)(s^2+1)} = 1$$

$$R_3 = \lim_{s \to -2} (s+2)\, W(s) = \lim_{s \to -2} \frac{(s-1)}{s(s+1)(s^2+1)} = -\frac{3}{10}$$

$$R_4 = \lim_{s \to -j} (s+j) \cdot W(s) = \lim_{s \to -j} \frac{(s-1)}{s(s+1)(s+2)(s-j)} = \frac{-1-j}{-2+6j} = \frac{-1-j}{-2+6j} \cdot \frac{-2-6j}{-2-6j} = \frac{-4+8j}{40}$$

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_F(s)] = -\frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{3}{10} e^{-2t} + \left(\frac{-4+8j}{40}\right) e^{-jt} + \left(\frac{-4-8j}{40}\right) e^{jt} =$$
$$= -\frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{3}{10} e^{-2t} + 2R_a \cos t + 2R_b \sin(t)$$

c) POICHÈ TUTTI I POLI HANNO $Re(\lambda) \leq 0$ $\exists$ y_{RP}:

$$y_{RP}(t) = \lim_{t \to \infty} y(t-2) = \lim_{t \to \infty} \left[R_1 + R_2 e^{-(t-2)} + R_3 e^{-2(t-2)} + 2R_a \cos t + 2R_b \sin t\right] =$$

$$= R_1 + 2R_a \cos t + 2R_b \sin t$$

2. (solo 9 cfu) Dato il sistema descritto da

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{s^2+s+1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+1} \\ 1 & \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix}$$

a. determinarne una realizzazione minima;
b. calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente all'ingresso

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \operatorname{sen}(2t)\delta_{-1}(t)$$

a)

$$\frac{s^2+s+1}{s^2+3s+2} \rightarrow \begin{array}{r|l} s^2+s+1 & s^2+3s+2 \\ -s^2-3s-2 & 1 \\ \hline -2s-1 & \end{array} \rightarrow 1 - \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}$$

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+1} \\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix} + \overset{D}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$W(s') = \frac{\begin{pmatrix} s+2 & -2s-1 & s+2 \\ 0 & s+1 & 0 \end{pmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2}$$

$$R_1 = \lim_{s\to -1} (s+1)\cdot W(s') = \lim_{s \to -1} \frac{\begin{pmatrix} s+2 & -2s-1 & s+2 \\ 0 & s+1 & 0 \end{pmatrix}}{(s+2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad rk = 1 \quad \lambda_1 = -1$$

$$R_2 = \lim_{s\to -2} (s+2)\cdot W(s') = \lim_{s \to -2} \frac{\begin{pmatrix} s+2 & -2s-1 & s+2 \\ 0 & s+1 & 0 \end{pmatrix}}{(s+1)} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} rk = 1 \\ \lambda_2 = -2 \end{array}$$

$$C_1 B_1 = R_1 \rightarrow \overset{C_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \overset{B_1}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \qquad C_2 B_2 = R_2 \rightarrow \overset{C_2}{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}} \overset{B_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\exists$ PERCHÈ I POLI HANNO $Re(\lambda_i)<0$

$$y_{RP}(t) = A \cdot \Pi(2i)\sin(2t+\varphi(2i)) + D\sin(2t)$$

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+1} \\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix} + \overset{D}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$W(2i) = \left.\begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+1} \\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix}\right|_{s=2i} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2i+1} & \frac{-4i-1}{(2i+1)(2i+2)} & \frac{1}{2i+1} \\ 0 & \frac{1}{2i+2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1-2i}{5} & \frac{-11+7i}{20} & \frac{1-2i}{5} \\ 0 & \frac{1-i}{4} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} e^{i\,\mathrm{arctg}(-2)} & \sqrt{\frac{17}{40}}\, e^{i\,\mathrm{arctg}(-7/11)} & \frac{\sqrt{5}}{5} e^{i\,\mathrm{arctg}(-\frac{1}{2})} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\,\mathrm{arctg}(-1)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin(2t)\,\delta_{-1}(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ 0 \\ -\sin(2t) \end{pmatrix} \delta_{-1}(t)$$

$$y_{PR}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5}\sin(2t+\mathrm{arctg}(-1)) & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5}\sin(2t+\mathrm{arctg}(-1)) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sin 2t\, \delta_{-1}(t)$$

$$y_{PR}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5}\sin(2t+\mathrm{arctg}(-1)) & \sin 2t & -\frac{\sqrt{5}}{5}\sin(2t+\mathrm{arctg}(-1)) \\ \sin 2t & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Dato un processo descritto dall'equazione differenziale del secondo ordine

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$$

Determinare una rappresentazione con lo spazio di stato associata al processo in cui y(t) e u(t) rappresentino rispettivamente l'uscita e l'ingresso del sistema. Studiare inoltre i modi naturali che caratterizzano il processo, tracciando i grafici che ne rappresentano il comportamento nel piano cartesiano, per generiche condizioni iniziali $y(0) = a$ e $\dot{y}(0) = b$ al variare di a e b.

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = u(t)$$

$$\begin{cases} y = x_1 \\ \dot{y} = x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = u - 4x_1 - 5x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \quad x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - 5x_2 + u \\ y = \quad x_1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = 0$$

AUTOVALORI:

$$DET(A - \lambda I) = 0 \qquad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 4 \rightarrow \quad \lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = -1$$

AUTOVETTORI:

$$(A - \lambda_i I)u_i = 0$$

$$\lambda_1 = -4 \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} u_1 = 0 \qquad \begin{cases} 4u_a + u_b = 0 \\ -4u_a - u_b = 0 \end{cases} \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} u_2 = 0 \qquad \begin{cases} u_a + u_b = 0 \\ -4u_a - 4u_b = 0 \end{cases} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad T = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -4/3 & -1/3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array}$$

ECC E OSS:

$$C u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 1 \qquad v_1 B = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1/3$$

$$C u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \qquad v_2 B = \begin{pmatrix} -4/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1/3$$

	ECC	OSS
λ_1	✓	✓
λ_2	✓	✓
	$H(t)$	$\Psi(t)$

ESERCIZIO RANDOM

2) Un sistema è descritto dall'equazione differenziale

$$y^{(3)} + 6y^2 + 11\dot{y} + 6y = u$$

Si determini una rappresentazione con lo spazio di stato per il sistema dato con uscita y ed ingresso u.

$$\begin{cases} y = x_1 \\ \dot{y} = x_2 \\ \ddot{y} = x_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ \dot{x}_3 = \dddot{y} = -6\ddot{y} - 11\dot{y} - 6y + u \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

4. La discretizzazione di un sistema lineare a tempo continuo (il processo, il modello come si ricava - dimostrazione -, come si trasformano autovalori e autovettori, considerazioni particolari che si desidera fare).

DATO UN SISTEMA A TEMPO CONTINUO, ATTRAVERSO UN CONTROLLORE ED UN HOLDER DI ORDINE ZERO, POSSO MANDARE IMPULSI CAMPIONATI AD UN SISTEMA A TEMPO CONTINUO E TRAMITE UN SENSORE POSSO CONTROLLARE L'USCITA E CAMPIONARLA CON UN TRAMUTATORE IN UN SEGNALE DISCRETO CON UN TEMPO DI CAMPIONAMENTO T. QUINDI VOGLIAMO CHE:

SISTEMA CONTINUO $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$ $\rightarrow$ SISTEMA DISCRETO $\begin{cases} x(k+1) = A_d x(k) + B_u(k) \\ y(kT) = C_d x(k) + D_u(k) \end{cases}$

CONSIDERANDO CHE IL TRAMUTATORE CAMPIONA PER T, ALLORA CONSIDERIAMO UN INTERVALLO $[kT, (k+1)T]$:

$$x((k+1)T) = e^{A[(k+1)T - kT]} x_0 + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{[(k+1)T - \tau]} Bu(\tau) d\tau = e^{A[\cancel{Tk} + T - \cancel{kT}]} x_0 + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{[(k+1)T - \tau]} Bu(\tau) d\tau$$

POICHÉ L'OPERAZIONE DI CAMPIONAMENTO E QUELLA DI TENUTA SONO SINCRONE, ALLORA PER UN INTERVALLO $[kT, (k+1)T]$ L'INGRESSO RIMANE COSTANTE:

$$x((k+1)T) = \underbrace{e^{AT}}_{A_d} x_0 + u(kT) \underbrace{\int_{kT}^{(k+1)T} e^{[(k+1)T - \tau]} B d\tau}_{B_d}$$

PER QUANTO RIGUARDA L'USCITA:

$y_d(kT) = C_d x(KT) + D_d u(kT)$ $\quad$ $y_c(\tau) = Cx + Du$ $\rightarrow$ $C_d = C_c$ E $D_d = D_c$

CONSIDERANDO CHE SE A È DIAGONALE: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \rightarrow e^{AT} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 T} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 T} \end{pmatrix}$.
QUINDI $\lambda_d = e^{\lambda T}$, NOTO QUINDI:

- SE $\lambda > 0 \rightarrow \lambda_d = e^{\lambda T}$ DIVERGE
- SE $\lambda = 0 \rightarrow \lambda_d = 1$ LIMITATA
- SE $\lambda < 0 \rightarrow \lambda_d = 0$ CONVERGE

SE ABBIAMO AUTOVALORI C.C:

$\lambda_d = e^{\lambda T} = e^{\alpha T}(\cos(wT) + i\sin(wT))$ SE $|\lambda_d| < 1$ CONVERGE E SE $\cos(wT) = -1$ ABBIAMO DUE AUTOVALORI COINCIDENTI $\rightarrow T = \pi/w$

ANALIZZIAMO B_d:

$$B_d = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T - \tau]} B d\tau = -\int_T^0 e^{A\xi} B d\xi = \int_0^T e^{A\xi} B d\xi = \int_0^T (I_d + A\xi + A^2 \xi^2/2! \dots) B d\xi =$$
$$= [I_d \xi + A\xi^2/2 + A^2 \xi^3/3! + \dots]_0^T B$$