Teoria della Stabilità per Sistemi Non Lineari

G. Oriolo

Sapienza Università di Roma

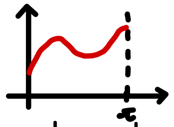
Introduzione

consideriamo un generico sistema dinamico **non lineare** stazionario

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x,u) \\ y &= g(x) \end{cases} \quad \text{vs} \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

con stato $x \in \mathbb{R}^n$, ingresso $u \in \mathbb{R}^p$, uscita $y \in \mathbb{R}^q$

problema tipico



calcolare, dati $x_0 = x(0)$ e $u_{[0,t]}$, lo stato $x(t)$ e l'uscita $y(t)$ per valori di $t > 0$

es: nei sistemi lineari, dove $f(x,u) = Ax + Bu$, si ha

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{\text{EVOL. LIBERA}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\text{EVOLUZIONE FORZATA}}$$

tuttavia

spesso non si ha interesse a stabilire esplicitamente la soluzione, ma piuttosto a determinarne alcune proprietà come **limitatezza**, **comportamento asintotico**, ...

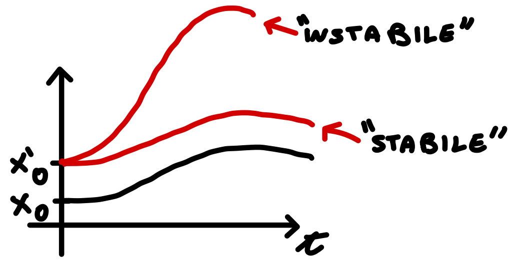
$\Longrightarrow$ teoria **qualitativa** delle equazioni differenziali (Poincaré 1880, Lyapunov 1892, LaSalle e Lefschetz 1947...)

idea di base

valutare il comportamento qualitativo del sistema in corrispondenza a **perturbazioni** dello stato iniziale e dell'ingresso del sistema rispetto a valori nominali

indicata con $x(t)$ l'evoluzione dello stato in corrispondenza a x_0 e $u_{[0,t]}$, ci si chiede:

- cosa succede se $x_0 \to x_0 + \Delta x_0$?
- cosa succede se $u(t) \to u(t) + \Delta u(t)$?



in particolare:

- quanto è **prossima** l'evoluzione perturbata a quella nominale?
- sotto quali condizioni le due soluzioni tendono a **coincidere** per $t \to \infty$?

qualitativamente, appare naturale chiamare

- **stabile** un sistema nel quale piccole perturbazioni danno luogo a piccoli scostamenti
- **instabile** un sistema nel quale piccole perturbazioni danno luogo ad ampi scostamenti

teoria della stabilità

definizioni

proprietà di stabilità (diversi tipi in relazione al comportamento del sistema e alle esigenze applicative) e di instabilità

condizioni

che un sistema deve soddisfare per godere dell'una o dell'altra di queste proprietà

criteri

per verificare la sussistenza o meno delle condizioni senza calcolare esplicitamente la soluzione perturbata del sistema

es: nei sistemi lineari

- definizione di stabilità, stabilità asintotica, instabilità
- condizione di stabilità asintotica: $\lim_{t\to\infty} x(t)|_{u\equiv 0} = \lim_{t\to\infty} e^{At}x_0 = 0$
- criteri di stabilità asintotica: $\sigma(A) \in \mathbb{C}^-$, criterio di Routh, oppure criterio di Nyquist per sistemi retroazionati

generalmente si considera il comportamento di sistemi **in evoluzione libera**

$$\dot{x} = f(x,u) \longrightarrow \boxed{\dot{x} = f(x)}$$

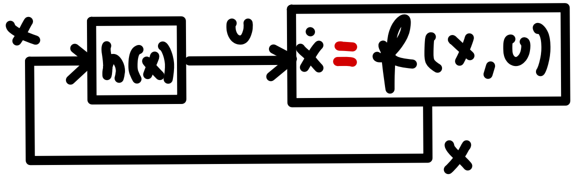
rispetto a perturbazioni dello stato iniziale x_0

infatti:

- scelta una legge di controllo in retroazione $u = h(x)$, la dinamica **ad anello chiuso** diventa

  $$\dot{x} = f(x, h(x)) = f'(x)$$

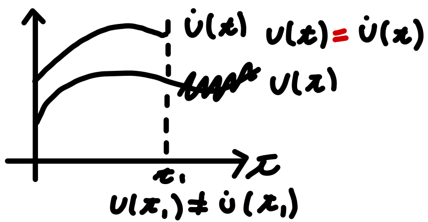
  cioè appunto un (nuovo) sistema in evoluzione libera



- anche ad anello aperto, se la perturbazione sull'ingresso è **non persistente**

  $$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) + \delta(t) & t \in [0, t_1] \\ u(t) & t > t_1 \end{cases}$$

  il problema si riconduce allo studio dell'effetto di una perturbazione (e cioè $x(t_1)$) sullo stato iniziale



Definizioni

un importante concetto preliminare: punto di equilibrio

uno stato $x_e \in \mathbb{R}^n$ è un **punto di equilibrio** (**pde**) per il sistema $\dot{x} = f(x)$ se, posto $x_0 = x_e$, si ha $x(t) \equiv x_e$, $\forall t > 0$

nota: si tratta di una traiettoria **degenere** del sistema $\left.\dot{x}\right|_{x=x_e} = 0 \rightarrow f(x_e) = 0$

matematicamente:

$$\boxed{x_e \quad \text{è un } \textbf{pde} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x_e) = 0}$$

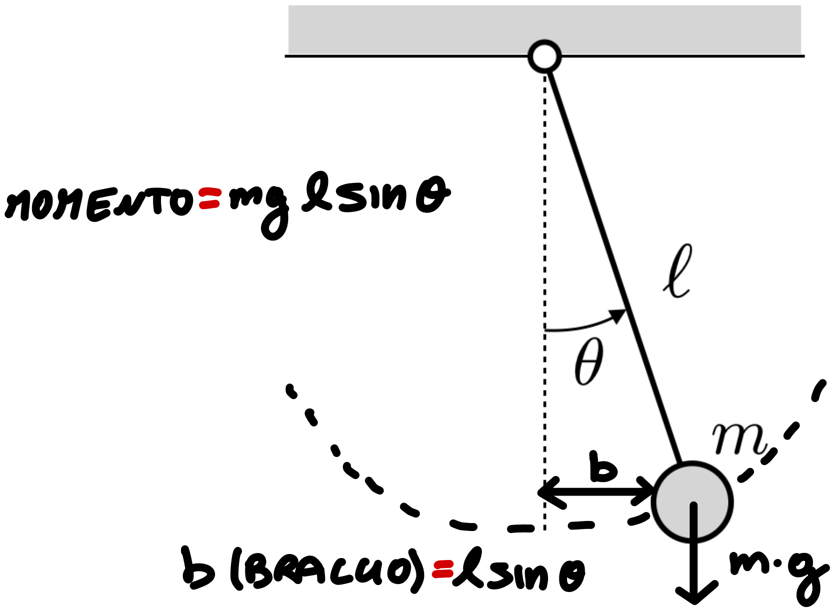
i pde sono perciò gli **zeri** della funzione vettoriale $f(x)$

es: nei sistemi lineari $\dot{x} = \overset{f(x)}{Ax}$, i pde sono i punti x_e tali che

$$Ax_e = 0, \qquad \text{cioè} \quad x_e \in \mathcal{N}(A)$$

- se A è non singolare, l'**unico** pde è l'origine DET$(A) \neq 0$
- se A è singolare, i pde sono **infiniti** e **contigui**: geometricamente, sono iperpiani passanti per l'origine (rette se $\dim(\mathcal{N}(A)) = 1$, piani se $\dim(\mathcal{N}(A)) = 2$, ...)
  DET$(A) = 0$

es: pendolo di lunghezza ℓ e massa m in presenza di attrito viscoso di coefficiente d



2^a LEGGE DI N PER SISTEMI ROTANTI

$J\ddot{\theta} = \sum$ MOMENTI

$$m\ell^2\ddot{\theta} = \underbrace{-mg\,\ell\sin\theta}_{\text{COPPIA PER GRAVITÀ}} \underbrace{-\,d\dot{\theta}}_{\text{COPPIA PER ATTRITO}}$$

$$m\,\ell^2\,\ddot{\theta} + d\,\dot{\theta} + m\,g\,\ell \sin\theta = 0$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{POSIZIONE} \\ \text{VELOCITÀ} \end{matrix}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -\frac{mg\,\ell\sin\theta}{m\ell^2} - \frac{d}{m\ell^2}\dot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{d}{m\ell^2}x_2$$

ponendo $x = (x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta})$, l'equazione nello spazio di stato è

$$f(x) = 0 \qquad \begin{cases} x_2 = 0 \\ -\frac{g}{\ell}\sin x_1 = 0 \end{cases} \downarrow \quad \begin{cases} \sin\theta = 0 \\ \theta = 0 \end{cases}$$

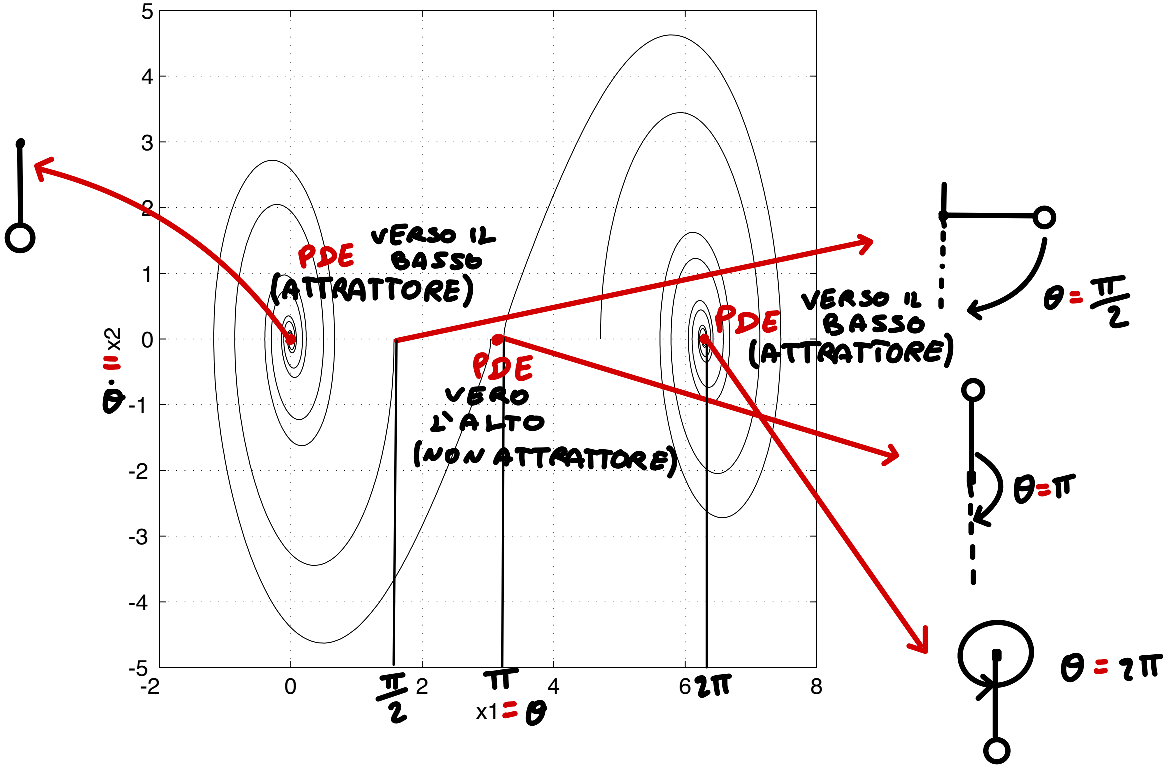
$$f(x)\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\dfrac{g}{\ell}\sin x_1 - \dfrac{d}{m\ell^2}x_2 \end{cases}$$

NON LINEARE A CAUSA DI $\sin x_1$

$\Longrightarrow f(x) = (x_2 \quad -\frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{d}{m\ell^2}x_2)^T$; sistema **non lineare**!

quindi, i punti di equilibrio sono caratterizzati come $x_1 = j\pi$ ($j = 0, 1$) e $x_2 = 0$ (e cioè, pendolo *(i)* verticale verso il basso/l'alto e *(ii)* fermo) ecco le traiettorie del pendolo nel piano $(x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta})$ (**piano delle fasi**)

ABBIAMO INFINITI PUNTI DI EQ (PDE)



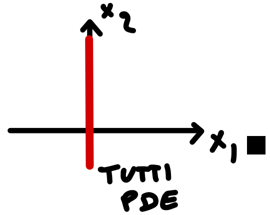
es: ancora un sistema non lineare

ES: $\dot{x} = 1 + x^2 \rightarrow \dot{x} = 0$ MAI, $\nexists$ PDE

$$f(x) = 0 \begin{cases} x_1^3 = 1 \rightarrow x_1 = 1 \\ 1 - x_2^2 = 0 \rightarrow x_2 = \pm 1 \end{cases}$$

$$f(x) \begin{cases} \dot{x}_1 = 1 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^2 \end{cases}$$ NON LIN.

ES: $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 \end{cases}$ $f(x) = 0$ $x_1 = 0$



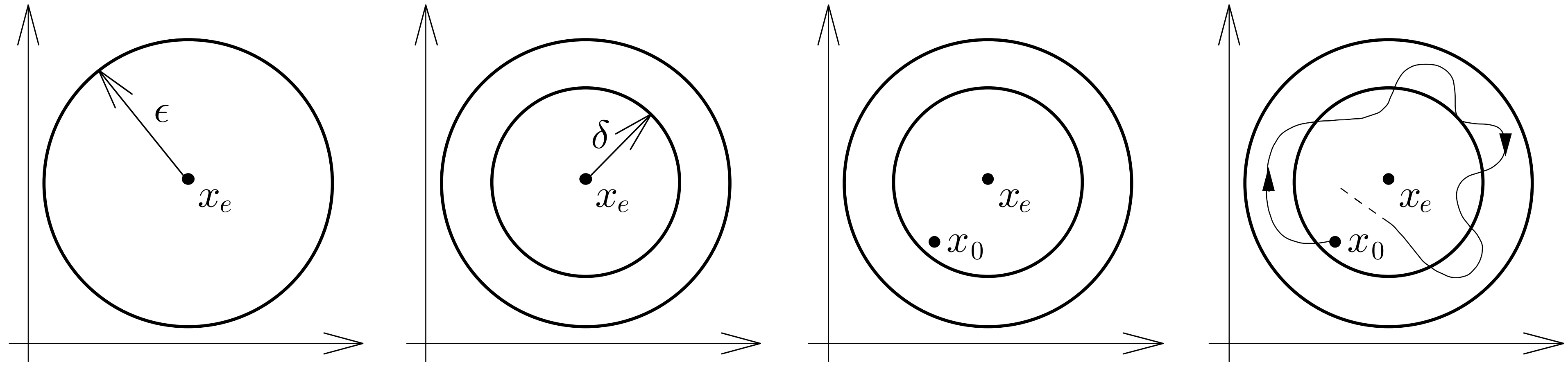
i pde sono caratterizzati da $x_1 = 1$ e $x_2 = \pm 1$

nota: i pde di un sistema non lineare possono essere in numero finito (2 nei precedenti esempi, ma eventualmente nullo) o infinito, ed essere punti **isolati** nello spazio di stato

definizioni di stabilità (secondo Lyapunov)

(nel seguito, $|\cdot|$ indica una qualsiasi norma di $\mathbb{R}^n$)

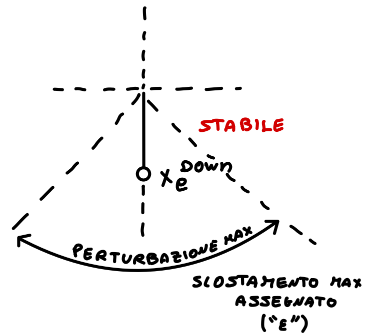
> un pde x_e si dice **stabile** (S) se:
>
> VALE IN QUALSIASI DIM
>
> $$\forall \epsilon, \exists\, \delta(\epsilon) : |x_0 - x_e| < \delta \Rightarrow |x(t) - x_e| < \epsilon, \forall t > 0$$

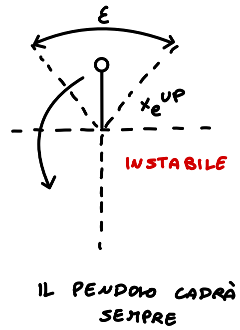


$\forall \epsilon$ | $\exists\, \delta(\epsilon)$ | $|x_0 - x_e| < \delta$ | $|x(t) - x_e| < \epsilon, \forall t > 0$

un pde x_e di un sistema dinamico è stabile se è possibile mantenere l'evoluzione del sistema **arbitrariamente vicina** a x_e prendendo la condizione iniziale x_0 **sufficientemente vicina** a x_e; ovvero, se nell'intorno di x_e è possibile limitare a piacimento lo scostamento limitando opportunamente la perturbazione

ovviamente: $\boxed{\text{un pde } x_e \text{ si dice } \textbf{instabile} \text{ se non è stabile}}$





- la stabilità è una **proprietà dei pde**, non del sistema: lo stesso sistema può avere sia pde stabili che instabili (accade nei sistemi non lineari, es: pendolo)

- nella definizione di stabilità **non** si richiede che lo stato perturbato tenda a convergere verso x_e

- d'altra parte, nella definizione di instabilità **non** si richiede che l'evoluzione perturbata tenda a divergere

  es: oscillatore di Van der Pol (sistema MMS con damping dipendente dalla posizione)

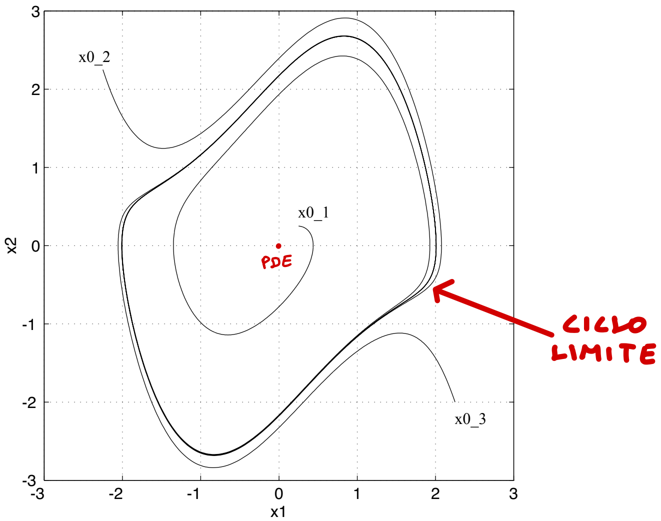
NL!

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + (1 - x_1^2)x_2 \end{cases}$$

MMS CLASSICO:

$K=1$, $m=1$, $b=1$

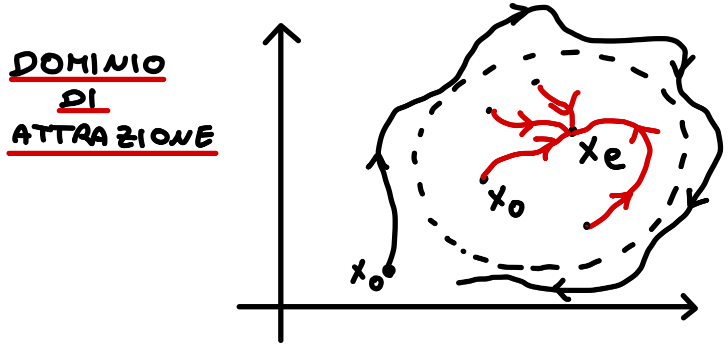
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$



le traiettorie nello spazio di stato mostrano che, indipendentemente dalla condizione iniziale, lo stato converge ad un **ciclo limite**: quindi, è impossibile limitare a piacimento lo scostamento da 0 (ad es., se si pone $\epsilon = 1$ non esiste alcun δ)

$\Rightarrow$ l'origine è un pde instabile per il sistema ■

in pratica, spesso la stabilità **semplice** non basta:



un pde x_e si dice **asintoticamente stabile** (AS) se:

1. è stabile
2. $\exists\, \delta_a : |x_0 - x_e| < \delta_a \Rightarrow \lim_{t\to\infty} |x(t) - x_e| = 0$

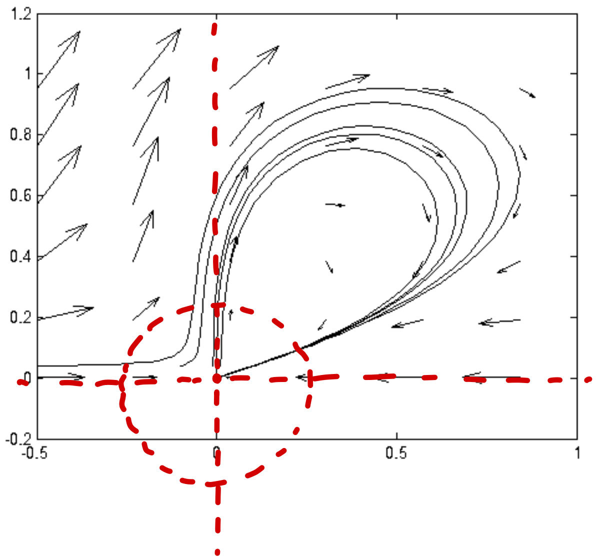
- in aggiunta alla stabilità, si richiede la convergenza a x_e se la condizione iniziale è sufficientemente vicina a x_e

- la stabilità asintotica è un concetto **locale**, nel senso che la convergenza si ha se x_0 appartiene all'intorno di x_e avente raggio δ_a (**dominio di attrazione**); all'esterno di tale intorno si può avere semplice limitatezza o **persino divergenza**!

- la 2. **non implica** la 1.; è possibile cioè avere la convergenza senza la stabilità (qualche volta pde di questo tipo si definiscono **quasi-stabili asintoticamente**, ma sono a tutti gli effetti pde instabili)

es: (dovuto a Vinograd)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^5}{(x_1^2 + x_2^2)(1 + (x_1^2 + x_2^2)^2)} \\ \dot{x}_2 = \dfrac{x_2^2(x_2 - 2x_1)}{(x_1^2 + x_2^2)(1 + (x_1^2 + x_2^2)^2)} \end{cases}$$



le traiettorie nello spazio di stato mostrano che, indipendentemente dalla distanza di x_0 dall'origine, se $x_{1,0} < 0$ lo stato converge all'origine dopo aver toccato una curva che si trova **a distanza finita** da 0: quindi, è impossibile limitare a piacimento lo scostamento dall'origine

$\Rightarrow$ l'origine è un pde quasi-stabile asintoticamente (ma instabile) per il sistema ■

tuttavia, nelle applicazioni, è spesso necessario disporre di una **stima** del tempo necessario perché lo stato perturbato ritorni in x_e:

> un pde x_e si dice **esponenzialmente stabile** (ES) se esistono costanti positive α, λ e c tali che:
>
> $$|x(t) - x_e| \le \alpha |x_0 - x_e| e^{-\lambda t}, \quad \forall t > 0, \quad \forall |x_0 - x_e| < c$$

- in pratica, si richiede che esista un intorno di x_e a partire dal quale la traiettoria perturbata converge a x_e con velocità almeno esponenziale (anche questo è un concetto locale)

- λ viene detto **tasso** di convergenza esponenziale; posto $\alpha = e^{\lambda \tau_0}$, si trova facilmente che dopo $(\tau_0 + 1/\lambda)$ secondi la distanza da x_e si è ridotta ad almeno $1/e$ (circa il 35%) del suo valore iniziale

- la stabilità esponenziale **implica** la stabilità asintotica (e quindi la stabilità); il viceversa **non è vero**

  es: l'origine è un pde asintoticamente ma non esponenzialmente stabile per il sistema

  $$\dot{x} = -x^2$$

  infatti, la soluzione è $x(t) = \dfrac{x_0}{1 + t x_0}$, che converge a zero più lentamente di qualsiasi funzione esponenziale ■

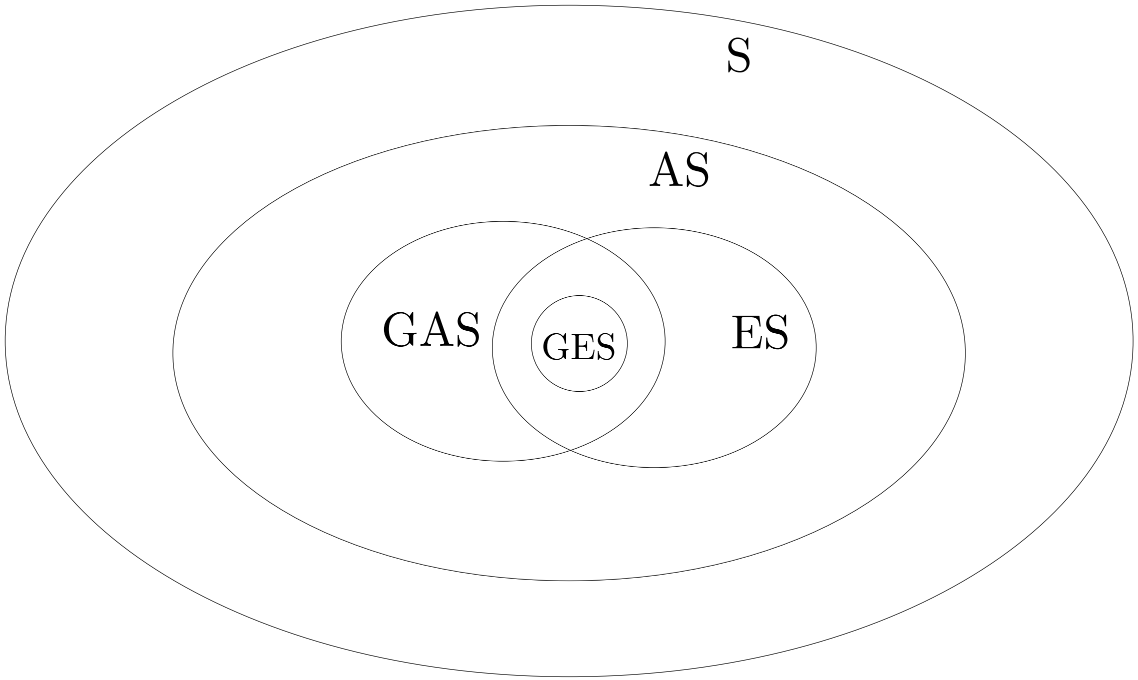
  $$\dot{x}(t) = -\frac{x_0}{(1+tx_0)^2} x_0 = -\left(\frac{x_0}{1+tx_0}\right)^2 = -x^2$$

le proprietà di stabilità asintotica e stabilità esponenziale, che sono intrinsecamente locali, possono anche essere **globali**

- un pde si dice **globalmente asintoticamente stabile** (GAS) se è stabile e lo stato converge a x_e per **qualsiasi** stato iniziale (il dominio di attrazione coincide con tutto $\mathbb{R}^n$)

- un pde si dice **globalmente esponenzialmente stabile** (GES) se lo stato converge esponenzialmente a x_e per **qualsiasi** stato iniziale

riassumendo, si ha la seguente classificazione dei pde **stabili**



nota: x_e può essere GAS solo se è l'**unico** pde del sistema (C.N.)

Stabilità dei sistemi lineari

Teorema

se un sistema lineare ammette più di un pde, la stabilità (instabilità) di uno di essi implica ed è implicata da quella di tutti gli altri

dim basta mostrare che, se il generico pde x_e è stabile, lo è anche l'origine, e viceversa

per ipotesi $\forall \epsilon, \exists\, \delta(\epsilon) : |x_0 - x_e| < \delta \Rightarrow |x(t) - x_e| < \epsilon, \forall t > 0$

$x(t) - x_e$ è la differenza tra la risposta a partire da x_0 e quella a partire da $x_e \Rightarrow$ per la linearità, $x(t) - x_e$ è la risposta a partire da $x_0 - x_e = z_0$, che indicheremo con $x_{z_0}(t)$

si ha dunque $\forall \epsilon, \exists\, \delta(\epsilon) : |z_0| < \delta \Rightarrow |x_{z_0}(t)| < \epsilon, \forall t > 0$, cioè la stabilità dell'origine

analogamente si prova il 'è implicata' ■

Teorema

in un sistema lineare:

1. si può avere stabilità asintotica solo per l'origine e solo nel caso in cui sia l'unico pde
2. se l'origine è AS, è anche GAS

A NON SINGOLARE

dim 1: l'origine è sempre un pde, se ci sono altri pde sono contigui all'origine (cfr. slide 5)

2: ovvia per sistemi stazionari a dimensione finita, considerando che affinchè l'evoluzione libera $x(t) = e^{At}x_0$ converga da un intorno dell'origine è necessario che gli autovalori di A abbiano parte reale negativa, il che implica che l'evoluzione libera converge da $\forall x_0$ ■

Teorema

in un sistema lineare, l'origine è ES se e solo se è AS

dim necessità: ovvia

sufficienza: ovvia per sistemi stazionari a dimensione finita, poiché se l'origine è AS l'evoluzione libera è combinazione di esponenziali convergenti ■

riassumendo, nei sistemi lineari:

- se l'origine è l'unico pde, può essere S, AS (in effetti ES), oppure I
- se ci sono più pde, sono infiniti, contigui e sono tutti S oppure tutti I
- in ogni caso, è lecito parlare di stabilità, stabilità asintotica (in effetti esponenziale) o instabilità **del sistema nel suo complesso**

il seguente criterio di stabilità è immediato per sistemi stazionari a dimensione finita

Teorema

un sistema lineare stazionario a dimensione finita è S se e solo se

1. gli autovalori di A con molteplicità geometrica pari a quella algebrica hanno $\mathrm{Re}[\,] \leq 0$
2. gli autovalori di A con molteplicità geometrica minore di quella algebrica hanno $\mathrm{Re}[\,] < 0$

il sistema è AS (in effetti ES) se e solo se tutti gli autovalori di A hanno $\mathrm{Re}[\,] < 0$

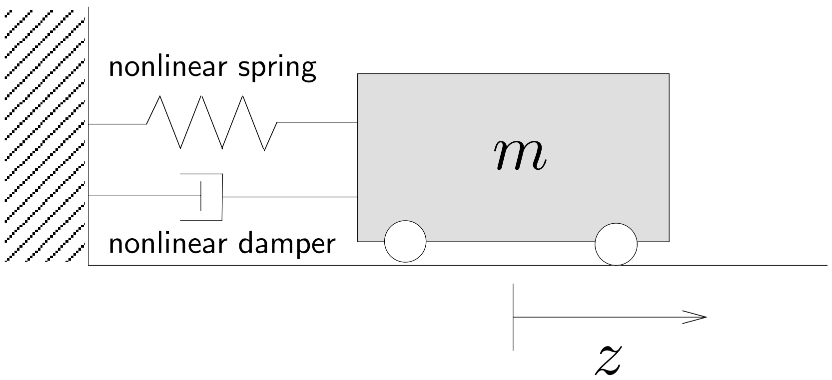
oppure, per evitare il calcolo degli autovalori: criterio di Routh

Criterio diretto di Lyapunov

idea di base

se l'energia totale di un sistema (meccanico, elettrico, . . .) viene continuamente **dissipata**, il sistema (lineare o non lineare) tende a un punto di equilibrio ⇒ è possibile determinare la stabilità/instabilità di un sistema esaminando un'**unica funzione scalare**

es: sistema MMS non lineare



$$m\ddot{z} = -(\underbrace{\overset{\text{LIN.}}{K_0 z} + \overset{\text{CUBICO}}{K_1 z^3}}_{\text{REAZIONE ELASTICA}}) - \underbrace{\phi\, \dot{z}|\dot{z}|}_{\text{ATTRITO}}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{K_0 x_1 + K_1 x_1^3}{m} - \dfrac{d}{m} x_2 |x_2| \end{cases}$$

$$m\,\underbrace{\ddot{z}}_{=0} + d\,\dot{z}|\dot{z}| + (k_0 z + k_1 z^3) = 0$$

unico pde: origine, ma è impossibile studiarne la stabilità usando le definizioni, poiché non siamo in grado di ottenere la soluzione dell'equazione:

invece: esaminiamo l'**energia meccanica**! posto $x = (z, \dot{z})$, si ha $\quad V_{spot} = -\int_0^x F(\xi)\, d\xi$

$$V(x) = V_{\text{cin}}(\dot{z}) + V_{\text{pot}}(z) = \frac{1}{2} m\dot{z}^2 + \int_0^z (k_0\zeta + k_1\zeta^3)d\zeta = \frac{1}{2} m\dot{z}^2 + \frac{1}{2} k_0 z^2 + \frac{1}{4} k_1 z^4$$

relazioni energia/stabilità

$\dot{V} = \frac{1}{2} m\, 2\dot{z}\ddot{z} + \frac{1}{2} k_0\, 2 z \dot{z} + \frac{1}{4} k_1\, 4 z^3 \dot{z} = m \dot{z}\ddot{z} + k_0 z \dot{z} + k_1 z^3 \dot{z}$

- si ha energia nulla **solo** se $z = 0$, $\dot{z} = 0$, cioè nell'origine
- se l'energia converge (sempre) a zero, ne segue la stabilità asintotica (globale) dell'origine
- se l'energia diverge, ne segue l'instabilità dell'origine

come varia l'energia durante il moto del sistema? basta derivare V rispetto a t (di cui è funzione composta) e sostituire a $\ddot{z}$ l'espressione che se ne ricava dal modello dinamico

$$\dot{V}(x) = m\dot{z}\ddot{z} + (k_0 z + k_1 z^3)\dot{z} = -d|\dot{z}|^3$$

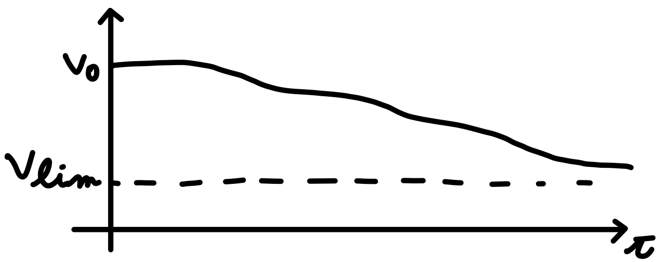
$\Rightarrow$ l'energia viene **continuamente dissipata** e il sistema converge ad uno stato con velocità nulla ($\dot{z} = 0$); d'altra parte, poiché in qualsiasi posizione diversa da $z = 0$ la massa sarebbe soggetta a una forza di richiamo $-k_0 z - k_1 z^3$ non nulla, è evidente che **il sistema converge in effetti all'origine** ($z = 0$, $\dot{z} = 0$) ■

il metodo diretto di Lyapunov si basa appunto su una generalizzazione (e una formalizzazione rigorosa) di questo concetto: si cerca un'opportuna funzione scalare *energy-like* per il sistema dinamico non lineare in esame, e se ne esamina la variazione nel tempo lungo le traiettorie del sistema

$V_{lim} \neq 0$ MAI

$V_{lim} = 0$ SEMPRE!

SICURAMENTE ←



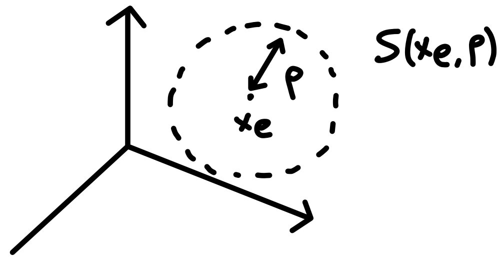
→ ORIGINE

nel seguito, faremo riferimento al generico sistema non lineare stazionario

$$\dot{x} = f(x) \qquad x \in I\!R^n$$

e indicheremo con x_e il pde da studiare; dunque, $f(x_e) = 0$

concetti preliminari: data una funzione scalare $V(x)$, continua e derivabile rispetto a x ($V \in C^1$), e detto $S(x_e, r)$ un intorno sferico di x_e di raggio r



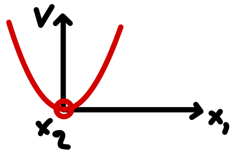
- $V(x)$ si dice **definita positiva** (DP) in $S(x_e, r)$ se
  - a) $V(x_e) = 0$

    SI DEVE ANNULLARE IN xe MA DEVE ESSERE POSITIVA IN TUTTI GLI ALTRI PUNTI
  - b) $V(x) > 0, \forall x \in S(x_e, r), x \neq x_e$

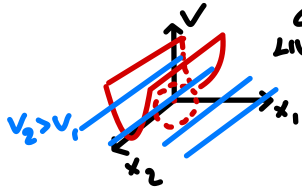
- $V(x)$ si dice **semidefinita positiva** (SDP) in $S(x_e, r)$ se
  - a) $V(x_e) = 0$

    SI DEVE ANNULLARE IN xe MA DEVE ESSERE POSITIVA (O NULLA) IN TUTTI GLI ALTRI PUNTI
  - b) $V(x) \geq 0, \forall x \in S(x_e, r), x \neq x_e$

ES: $V(x) = x_1^2$

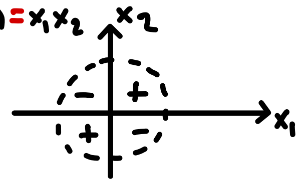


CURVE DI LIVELLO APERTE



- $V(x)$ si dice **definita negativa** (DN) in $S(x_e, r)$ se $-V(x)$ è definita positiva, **semidefinita negativa** (SDN) in $S(x_e, r)$ se $-V(x)$ è semidefinita positiva

$V(x) = x_1 x_2$

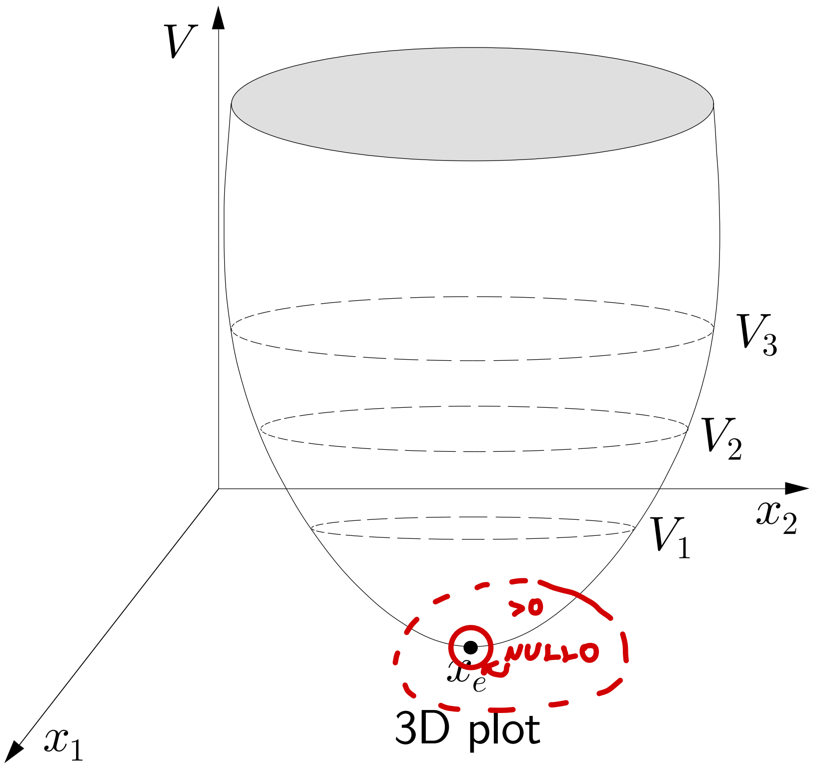


- $V(x)$ si dice **indefinita** (I) in $S(x_e, r)$ se non è DP, SDP, DN o SDN

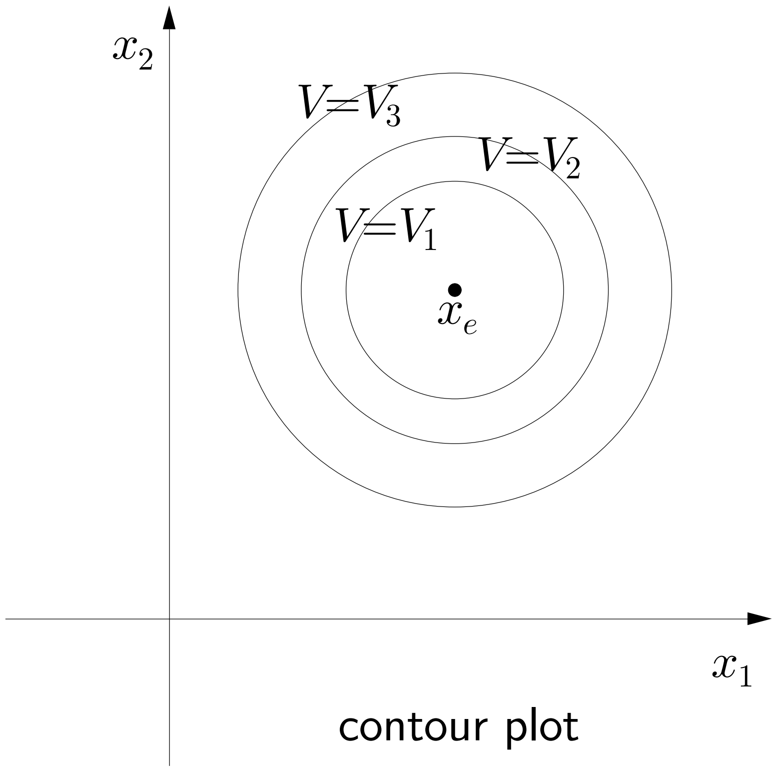
nota: $V(x)$ DP (DN) in $S(x_e, r) \Rightarrow V(x)$ SDP (SDN) in $S(x_e, r)$

caso $n = 2$: rappresentazione grafica **locale** di una funzione V DP in x_e

in $\mathbb{R}^2$



3D plot



contour plot

es: in $\mathbb{R}^2$, la funzione $V(x) = x^T x = x_1^2 + x_2^2$ è DP in qualsiasi intorno dell'origine (le curve di livello sono **chiuse**)

es: in $\mathbb{R}^2$, la funzione $V(x) = x_1^2$ è SDP in qualsiasi intorno dell'origine (si annulla su tutto l'asse x_2; le curve di livello sono **aperte**)

es: in $\mathbb{R}^2$, la funzione $V(x) = x_1 x_2$ è I in qualsiasi intorno dell'origine (ci sono sempre punti dell'intorno dove è positiva e punti dove è negativa)

es: per il sistema MMS non lineare, l'energia meccanica $V(x)$ è DP in qualsiasi intorno dell'origine LA SUA DERIVATA $\dot{V}$ È SDN NEGLI STESSI INTORNI data una funzione $V(x)$, e considerata una soluzione $x(t)$ della $\dot{x} = f(x)$, si può riguardare la $V(x(t))$ come una funzione **composta** di t, continua e derivabile per ogni t; si ha quindi

$$\boxed{\dot{V}(t) = \frac{dV(x(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x(t)) = \dot{V}(x)}$$

dove $f_i(x(t))$ è la i-esima componente della funzione vettoriale $f(x)$

la $\dot{V}(x)$, considerata come una funzione della sola x, viene chiamata la **derivata di V lungo le traiettorie del sistema**

alla $\dot{V}(x)$ è quindi ancora possibile attribuire le proprietà di definitezza positiva, negativa, semidefinitezza positiva, etc.

es: si consideri il sistema dinamico

$f(x)=0 \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ NON SINGOLARE UNICO PDE È L'ORIGINE

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

il cui unico pde è l'origine, e si ponga $V = x_1^2 + x_2^2$, che è DP intorno all'origine; si ha

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = \cancel{2x_1x_2} - \cancel{2x_1x_2} - 2x_2^2 = -2x_2^2$$

che è SDN intorno all'origine ■

SI ANNULLA IN TUTTI I PUNTI DI x_1

Teorema

CONDIZIONE SUFFICIENTE

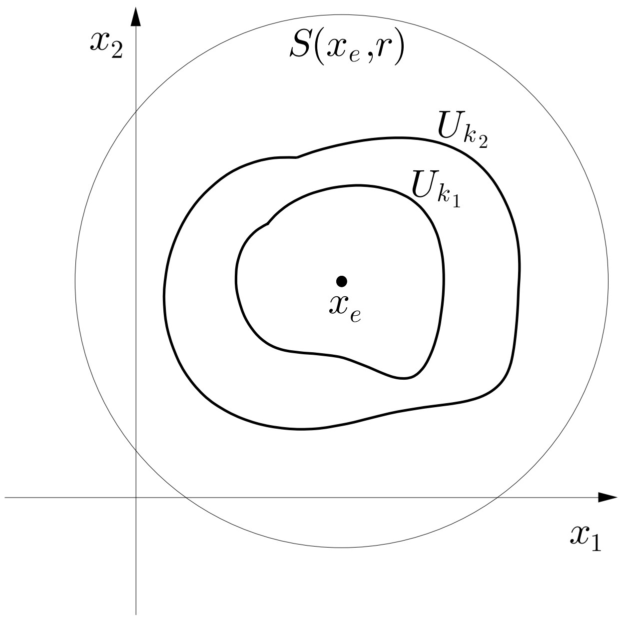
un pde x_e di un sistema $\dot{x} = f(x)$ è **stabile** se esiste una funzione $V(x) \in C^1$ tale che

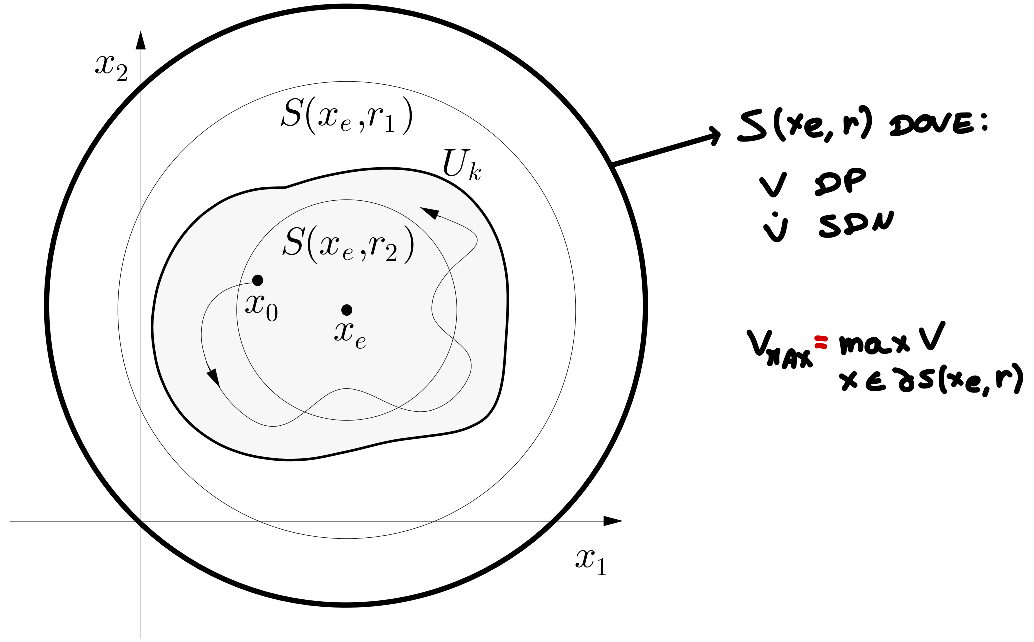
1. $V(x)$ sia DP in un intorno $S(x_e, r)$ → ENERGIA
2. $\dot{V}(x)$ sia SDN nello stesso intorno → DISSIPAZIONE

V: FZ DI LYAPUNOV

dim di tipo geometrico, per $n = 2$ (ma valida in generale)

si noti intanto che, poiché $V(x)$ è DP in $S(x_e, r)$, le linee di livello $U_k = \{x \in I\!R^2 : V(x) = k\}$ sono **chiuse** per k sufficientemente piccolo; inoltre, se $k_1 < k_2$, U_{k_1} è **interna** a U_{k_2}





scelto r_1 tale che $0 < r_1 \leq r$, esiste certamente un valore k tale che U_k è interna a $S(x_e, r_1)$ (basta prendere il valore minimo di V lungo la frontiera di $S(x_e, r_1)$, che esiste ed è positivo perché V è continua, e scegliere k minore di tale valore); dunque U_k è chiusa

$k < V_{max}$

inoltre, poiché U_k è una curva chiusa che contiene x_e, è sempre possibile trovare r_2 tale che $S(x_e, r_2)$ è interno a U_k

si consideri una traiettoria che origina da $x_0 \in S(x_e, r_2)$; si ha $V(x_0) < k$ ed essendo $\dot{V}$ negativa o nulla lungo le traiettorie del sistema contenute in $S(x_e, r)$, la $V(x(t))$ è **non crescente** nello stesso intorno

$\Rightarrow$ si ha $V(x(t)) < k$, $\forall t > 0$, e dunque lo stato $x(t)$ si mantiene all'interno di $S(x_e, r_1)$ **indefinitamente**

quindi:

$$|x_0 - x_e| < \overset{\delta\varepsilon}{r_2} \quad \Rightarrow \quad |x(t) - x_e| < \overset{\varepsilon}{r_1}, \quad \forall t > 0 \qquad \text{c.d.d.}$$

■

- una funzione $V(x)$ che gode delle proprietà richieste dal teorema (cioè tale che V sia DP e $\dot{V}$ sia SDN in un intorno di x_e) si definisce **funzione di Lyapunov**

- il teorema stabilisce dunque che l'**esistenza** di una funzione di Lyapunov è condizione **sufficiente** per la stabilità; in effetti, per sistemi stazionari a dimensione finita si può mostrare che la condizione è anche **necessaria**

- l'applicazione del teorema passa attraverso due fasi, eventualmente ripetute:

  1. costruzione di una $V(x)$ DP in un intorno di x_e (detta **candidata** di Lyapunov)
  2. calcolo della $\dot{V}$ lungo le traiettorie del sistema e verifica della sua SDN nell'intorno

     nota: se la $V(x)$ scelta non risulta essere una funzione di Lyapunov, non si può concludere nulla; potrebbe esisterne un'altra

- se $V(x)$ è una funzione di Lyapunov per un sistema, lo è anche la funzione

$$V'(x) = \beta V^{\gamma}(x) \qquad\qquad \beta > 0, \gamma > 1$$

- la scelta della candidata di Lyapunov è ovviamente cruciale: nei sistemi meccanici ed elettrici si può provare a scegliere l'energia totale, ma possono esistere scelte migliori che non hanno un'immediata interpretazione fisica

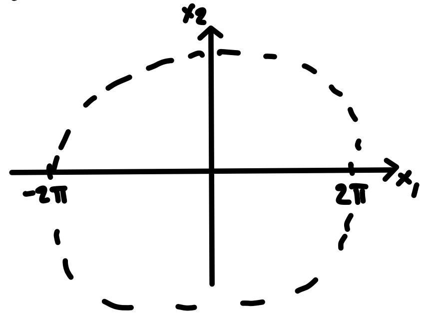
1)

$V_{pot.} = -\int_0^x f_2$ CONSERVATIVA $= \int_0^{x_1} g \sin y \, dy = g(1-\cos x_1)$

SI ANNULLA QUANDO x_2 (VELOCITÀ) $= 0$

$\cos x_1 = 1 \rightarrow x_1 = 0, 2\pi, 4\pi$
$-2\pi, -4\pi$

È DP ESCLUDENDO 2π E -2π



es: pendolo (per semplicità, $m = 1$, $d = 1$, $\ell = 1$)

il vettore di stato è $x = (x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta})$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g \sin x_1 - x_2 \end{cases}$$

posto $x_e^{\text{down}} = (0, 0)$, proviamo con l'energia meccanica

2)

$$V(x) = \underbrace{\frac{1}{2} x_2^2}_{\text{EN. CINETICA}} + g(1 - \cos x_1) \qquad \text{DP in } S(0, 2\pi^-)$$

si ha

$\ldots = x_2(-\cancel{g \sin x_1} - x_2) + \cancel{g \sin x_1} \cdot x_2$

$$\dot{V}(x) = x_2 \dot{x}_2 + g \sin x_1 \dot{x}_1 = -x_2^2 \qquad \text{SDN in } S(0, 2\pi^-) \text{ (in effetti, in qualsiasi intorno)}$$

dunque x_e^{down} è un pde **stabile** per il pendolo (e $\dot{V}$ è la potenza dissipata) ■

però: l'intuizione fisica ci dice che, in presenza di attrito, l'origine è un pde **asintoticamente** stabile per il pendolo $\Rightarrow$ ci serve un teorema più forte

Teorema

un pde x_e di un sistema $\dot{x} = f(x)$ è **asintoticamente stabile** se esiste una funzione $V(x) \in C^1$ tale che

1. $V(x)$ sia DP in un intorno $S(x_e, r)$
2. $\dot{V}(x)$ sia DN nello stesso intorno

dim intanto, x_e è certamente stabile; in particolare, se $x_0 \in S(x_e, r_2)$ (cfr. dimostrazione precedente) la traiettoria rimane in $S(x_e, r_1)$ indefinitamente $\Rightarrow$ $V(t)$ lungo la traiettoria tende a un valore limite $\bar{V} \geq 0$ (perché $\dot{V} < 0$ e V è limitata inferiormente da zero)

supponiamo $\bar{V} > 0$; poiché V è continua e si azzera solo in x_e, esiste un intorno $S(x_e, \sigma)$ in cui la traiettoria non entra mai $\Rightarrow$ poiché anche $\dot{V}$ è continua e si azzera solo in x_e, esiste un $\alpha > 0$ tale che $\dot{V} \leq -\alpha$ indefinitamente

ma allora avremmo

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \dot{V}(\tau) d\tau \leq V(0) - \alpha t$$

e quindi V diventerebbe negativa dopo un tempo finito, contraddicendo l'assunzione $\bar{V} > 0$

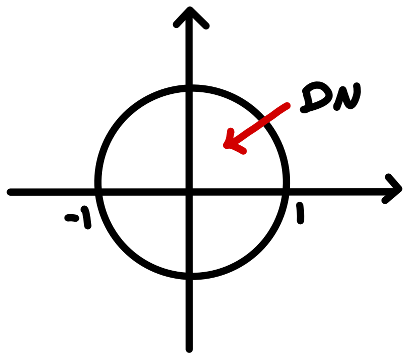
quindi, se $x_0 \in S(x_e, r_2)$ si ha $\lim_{t\to\infty} V(t) = 0$; quindi, essendo $V(x)$ nulla solo per $x = x_e$, implica che $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_e$, c.d.d. ■

nota: estrapolando le proprietà di $S(x_e, r_2)$ dalla prova del criterio di stabilità precedente, si conclude che **qualsiasi intorno di x_e contenuto in U_{V^*}** (dove V^* è il valore minimo di V lungo la frontiera di $S(x_e, r)$) è una **stima** (per difetto) del **dominio di attrazione** di x_e

$\dot{V} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1^2(x_1^2+x_2^2-1) - \cancel{x_1x_2} + \cancel{x_1x_2} + x_2^2(x_1^2+x_2^2-1) = (x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_2^2-1)$

es: si consideri il sistema

$$\begin{cases}\dot{x}_1 &= x_1(x_1^2+x_2^2-1) - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(x_1^2+x_2^2-1)\end{cases}$$



per il quale l'origine è un punto di equilibrio

scelta

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \qquad \text{DP in qualsiasi intorno dell'origine}$$

si ha

$$\dot{V}(x) = \underbrace{(x_1^2+x_2^2)}_{\text{SEMPRE} \geq 0}\underbrace{(x_1^2+x_2^2-1)}_{x_1^2+x_2^2>1} \qquad \text{DN per } x : x_1^2+x_2^2 < 1, \text{ ovvero in } S(0,1^-)$$

l'origine è dunque asintoticamente stabile per il sistema in questione

per stimare il dominio di attrazione:

si ponga $U_{V^*} = \{x \in I\!R^2 : V(x) \leq 1/2\} = S(0,1^-)$; scelto $\rho \in (0,1)$, qualunque intorno $S(0,\rho)$ è contenuto in U_{V^*} e dunque costituisce una stima (per difetto) del **dominio di attrazione** dell'origine ■

$V = 1/2$ su $\partial S(0,1)$

es: pendolo; prendiamo la seguente candidata di Lyapunov (nessuna interpretazione fisica)

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + 2g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 \qquad \text{DP in qualsiasi intorno dell'origine}$$

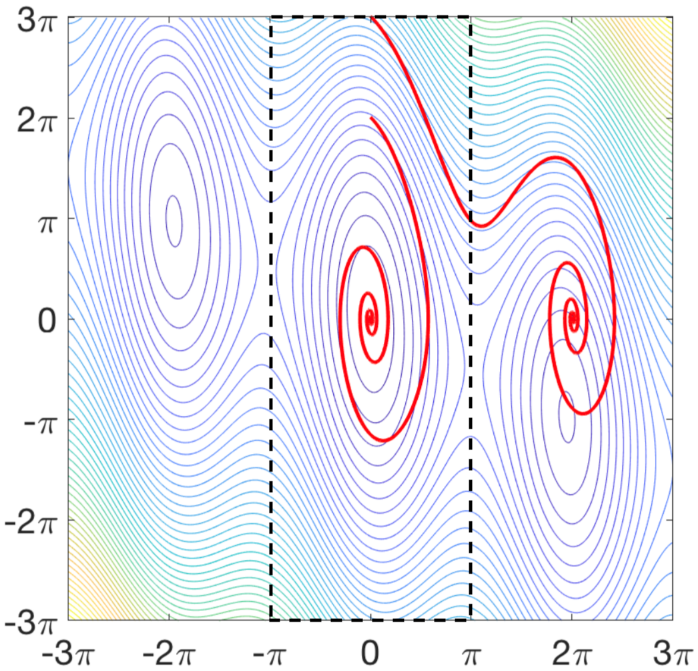
si trova

$$\dot{V}(x) = -x_2^2 - gx_1 \sin x_1 \qquad \text{DN in qualsiasi intorno dell'origine tale che } x_1 \in (-\pi, \pi)$$

NUOVO

dunque x_e^{down} è un pde **asintoticamente stabile** per il pendolo

dominio di attrazione: la convergenza all'origine è garantita da stati iniziali **interni a linee di livello interamente contenute nella regione dove $\dot{V}$ è DN**, ma **non** a partire da stati iniziali interni a linee di livello che **escono** da tale regione, da cui **può** verificarsi divergenza



■

cosa succede se cerchiamo di applicare i teoremi precedenti al punto di equilibrio $x_e^{\text{up}} = (\pi, 0)$ del pendolo? l'intuizione fisica ci dice che x_e^{up} è **instabile**, ma la condizione necessaria (e sufficiente) di stabilità è l'**esistenza** di una funzione di Lyapunov, che non possiamo escludere a priori ⇒ è utile disporre di un **criterio di instabilità**

Teorema [Cetaev]

$\dot{x} = f(x)$, x_e PDE; x_e I SE $\exists\, V(x) \in C^1$:
1 V DP IN $S(x_e, r)$ 2 $\dot{V}$ DP NELLO STESSO INTORNO

un pde x_e di un sistema $\dot{x} = f(x)$ è **instabile** se esiste una funzione $V(x) \in C^1$ tale che

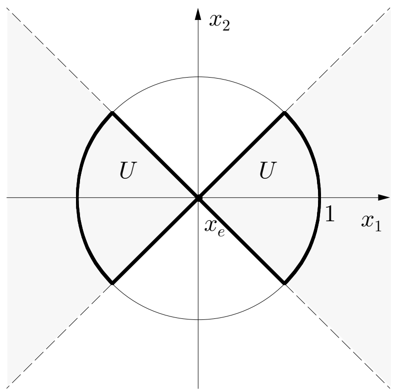
1. l'insieme $P = \{x : V(x) > 0\}$ ha x_e come punto di accumulazione (pda)
2. $\dot{V}(x)$ sia DP in $U = P \cap S(x_e, r)$, per qualche $r > 0$ LOCALE

es: il teorema di Cetaev mostra che il pde $x_e = (0, 0)$ è **instabile** per il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{cases}$$

UNICO PDE $x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

si consideri $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2$, che è positiva in $P = \{x : |x_1| > |x_2|\}$, di cui x_e è pda



si ha $\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 - x_2\dot{x}_2 = x_1^2 + x_1x_2^2 + x_2^2 = \underbrace{x_1^2}_{>0} + x_2^2\underbrace{(x_1+1)}_{x_1 > -1 \rightarrow x_1 < 1}$

$$\dot{V}(x) = x_1^2 + x_1x_2^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2(1 + x_1)$$

che è chiaramente DP in $U = P \cap S(x_e, 1)$

■

è disponibile anche un criterio di stabilità asintotica **globale**

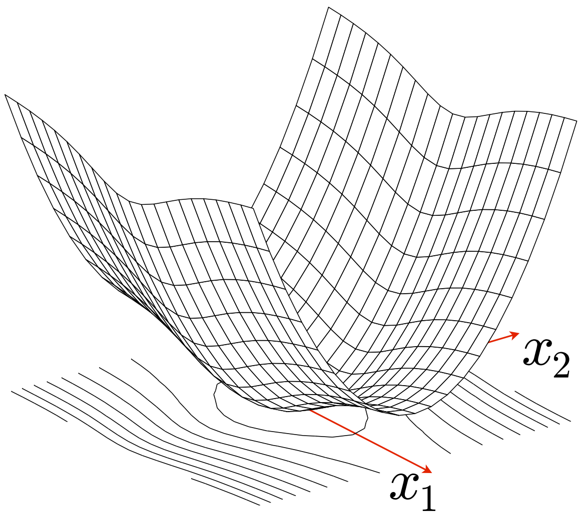
Teorema

un pde x_e di un sistema $\dot{x} = f(x)$ è **globalmente asintoticamente stabile** se esiste una funzione $V(x) \in C^1$ tale che

1. $V(x)$ sia DP in qualsiasi intorno di x_e
2. $\dot{V}(x)$ sia DN in qualsiasi intorno di x_e
3. $V(x)$ sia **radialmente illimitata**, cioè $\lim_{|x-x_e|\to\infty} V(x) = \infty$

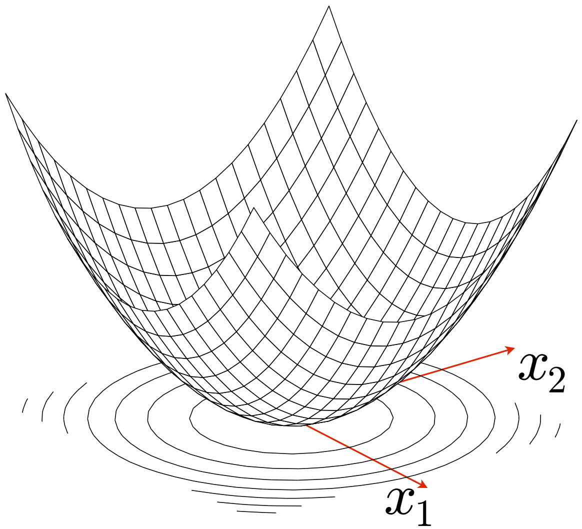
es:

$$V = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$$



radialmente limitata

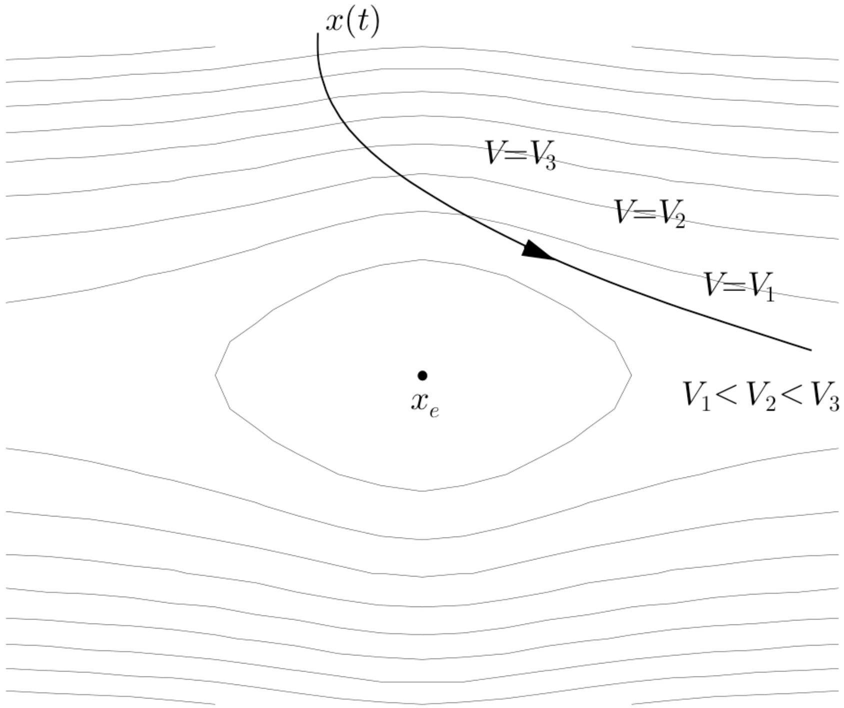
$$V = x_1^2 + x_2^2$$



radialmente illimitata

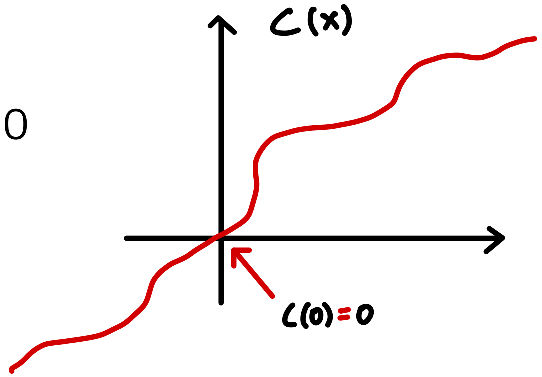
dim come nel caso locale, osservando che la illimitatezza radiale di V, combinata con il fatto che $\dot{V}$ è DN in tutto $\mathbb{R}^n$, implica che per qualsiasi condizione iniziale x_0 le traiettorie rimangono all'interno della regione **limitata** definita da $V(x) \leq V(x_0)$ ■

nota: nel caso in cui V sia radialmente limitata, le curve di livello 'lontane' da x_e non sono chiuse; di conseguenza, è possibile che lo stato si allontani indefinitamente da x_e pur rimanendo all'interno della regione definita da $V(x) \leq V(x_0)$, e anzi attraversando curve di livello relative a valori progressivamente decrescenti di V



$\Rightarrow$ quando x_0 è sufficientemente lontano, $x(t)$ può **non** convergere a x_e

es: si consideri la famiglia di sistemi non lineari descritta da



$$\dot{x} = -c(x), \qquad \text{con} \quad x\,c(x) > 0, \forall x \neq 0, \;\; c(0) = 0$$

e la candidata di Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2$$

che è DP in qualsiasi intorno di $x_e = 0$ e radialmente illimitata

essendo

$$\dot{V}(x) = x\,\dot{x} = -x\,c(x) > 0$$

la $\dot{V}(x)$ è DN in qualsiasi intorno di $x_e = 0$

$\Rightarrow$ x_e è un pde globalmente asintoticamente stabile ■

riassumendo, il **criterio diretto di stabilità di Lyapunov** si basa sulle seguenti condizioni:

	x_e è S	x_e è AS	x_e è GAS	x_e è instabile
$V(x)$	DP in un $S(x_e, r)$	DP in un $S(x_e, r)$	DP in $\forall\ S(x_e, r)$ e rad. illim.	x_e è punto di accum. di $P = \{x : V(x) > 0\}$
$\dot{V}(x)$	SDN in $S(x_e, r)$	DN in $S(x_e, r)$	DN in $\forall\ S(x_e, r)$	DP in $P \cap S(x_e, r)$

Costruzione di funzioni di Lyapunov

la maggiore difficoltà nell'applicare il metodo diretto di Lyapunov per studiare un pde x_e di un sistema non lineare $\dot{x} = f(x)$ consiste nella **scelta** della funzione $V(x)$; a volte la fisica del problema fornisce un'ispirazione, ma in generale è utile procedere sistematicamente

una scelta spesso efficace consiste nello scegliere come candidata di Lyapunov una **forma quadratica** del tipo

V(xe)=0
V(x)>0 PER x≠xe PURCHÈ

$$V(x) = \frac{1}{2}(x - x_e)^T Q(x - x_e)$$

con la matrice $Q : n \times n$ **simmetrica** e **definita positiva** (tale cioè che $w^T Q w > 0$, $\forall w \neq 0$)

per garantire la definitezza positiva di Q si può utilizzare la **C.N.&S. di Sylvester**

$$Q_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{vmatrix} > 0, \qquad \ldots \qquad \det(Q) > 0$$

essendo Q simmetrica, la $\dot{V}(x)$ risulta essere

$$\dot{V}(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^T Q(x - x_e) + \frac{1}{2}(x - x_e)^T \dot{Q}(x - x_e) + \frac{1}{2}(x - x_e)^T Q\dot{x} = (x - x_e)^T Q\dot{x} + \overbrace{\frac{1}{2}(x - x_e)^T \dot{Q}(x - x_e)}^{\text{NON C'È SE } Q=\text{COST}}$$

es: si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= & -k_1\, x_1 \\ \dot{x}_2 &= & -x_2^3 + k_2\, x_3 \\ \dot{x}_3 &= & -2\, x_2 - x_3^3 \end{cases}$$

con $k_1, k_2 > 0$; l'origine è l'unico pde

- posto

  $$V(x) = \frac{1}{2}(x - x_e)^T I_{3\times 3}(x - x_e) = \frac{1}{2}\, x^T x = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

  INDEFINII

  che è DP in qualsiasi intorno dell'origine e radialmente illimitata, si trova

  $$\dot{V}(x) = x^T \dot{x} = x_1\, \dot{x}_1 + x_2\, \dot{x}_2 + x_3\, \dot{x}_3 = \overset{\text{OK}}{-k_1\, x_1^2} - \overset{\text{OK}}{x_2^4} + \overset{\text{NO}}{(k_2 - 2) x_2\, x_3} - \overset{\text{OK}}{x_3^4}$$

  per $k_2 = 2$, $\dot{V}(x)$ è DN in qualsiasi intorno dell'origine, che è in questo caso GAS

- si può fare un'analisi molto più generale ponendo $Q = \text{diag}(1, \frac{2}{k_2}, 1)$

  $$V(x) = \frac{1}{2}\, x^T Q x = \frac{1}{2}(x_1^2 + \frac{2}{k_2}\, x_2^2 + x_3^2) \quad \Longrightarrow \quad \dot{V}(x) = k_2\, x_1^2 - \frac{2}{k_1}\, x_2^4 - x_3^4$$

  che per $k_1, k_2 > 0$ è sempre DN $\Rightarrow$ l'origine è GAS in ogni caso! ■

$$V = \frac{1}{2}(\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2) = \frac{1}{2} x^T \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} x$$

AL POSTO DI I

V DP PER $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$
IN OGNI INTORNO DELL'ORIGINE + RI

$$\dot V = \alpha x_1 \dot x_1 + \beta x_2 \dot x_2 + \gamma x_3 \dot x_3 = -K_1 \alpha x_1^2 + \beta x_2(-x_2^3 + K x_3) + \gamma x_3(-2x_2 - x_3^3)$$
$$= -\alpha K_1 x_1^2 - \beta x_2^4 + \beta K_2 x_2 x_3 - 2\gamma x_2 x_3 - \gamma x_3^4$$

OK OK !OK !OK OK

→ $\beta K_2 = 2\gamma$ $\quad \alpha$ QUALSIASI $\quad \beta = 1 \quad \gamma = K_2/2$

↳ $\dot V$ DN IN QUALSIASI INTORNO

metodo di Krasovski

assumendo che l'origine sia un pde per $\dot{x} = f(x)$ (altrimenti: traslazione $x_e \to O$), provare come candidata di Lyapunov la $V(x) = f^T(x) f(x)$, chiaramente DP in un intorno di x_e

Teorema

> indicata con $J(x) = df/dx$ la matrice Jacobiana della funzione f:
>
> - se la matrice $F(x) = J(x) + J^T(x)$ è definita negativa in un intorno $S(x_e, r)$ allora x_e è **asintoticamente stabile**
> - se $F(x) = J(x) + J^T(x)$ è definita negativa in tutto $\mathbb{R}^n$ e $V(x) = f^T(x) f(x)$ è radialmente illimitata, allora x_e è **globalmente asintoticamente stabile**

dim posto $V(x) = f^T(x) f(x)$, si ha $\dot{V} = 2 f^T(x) \dot{f}(x) = 2 \dot{x}^T \frac{df}{dx} \dot{x}$ che, se $F(x)$ è definita negativa, è anch'essa DN $\Rightarrow V$ è una funzione di Lyapunov ■

es: l'origine è un pde GAS per il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_2^3 \end{aligned}$$

infatti si ha

$$J(x) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 - 3x_2^2 \end{pmatrix} \implies F(x) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2 - 6x_2^2 \end{pmatrix}$$

dalla condizione di Sylvester, $-F(x)$ è definita positiva in tutto $\mathbb{R}^n$; quindi $F(x)$ è definita negativa in tutto $\mathbb{R}^n$ e inoltre

$$V(x) = f^T(x) f(x) = (-3x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2 - x_2^3)^2 \to \infty \text{ per } |x| \to \infty$$ ■

metodo del gradiente variabile

si basa sull'osservazione che, se $V(x)$ è una funzione di Lyapunov per il pde x_e del sistema $\dot{x} = f(x)$, allora

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dx}\,\dot{x} = \nabla V^T(x)\dot{x} \qquad \nabla V(x) : \text{gradiente di } V \text{ rispetto a } x$$

l'idea di base è di **scegliere direttamente $\nabla V(x)$** (invece che $V(x)$), in modo da ottenere V DP e $\dot{V}$ DN; generalmente si pone

$$\nabla V_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) x_j$$

affinché $\nabla V(x)$ sia un gradiente, si deve imporre la condizione che (Th. di Schwartz)

$$\frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i} \qquad i,j = 1,\ldots,n$$

si cerca di scegliere gli a_{ij} in modo che *(i)* sia verificata questa condizione; *(ii)* $\dot{V}(x)$ sia DN in un intorno $S(x_e, r)$; e infine

$$\textit{(iii)} \quad V(x) = \int_0^x \frac{dV}{dx} dx = \int_0^x \nabla V^T(x) dx \qquad \text{sia DP in } S(x_e, r)$$

nota: poiché $V(x)$ dipende solo da x, l'integrale è indipendente dal percorso di integrazione; conviene dunque usare un percorso di integrazione allineato di volta in volta con gli assi $x_1, \ldots, x_n$, cioè

$$V(x) = \int_0^{x_1} \nabla V_i^T(x_1, 0, \ldots, 0) dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2^T(x_1, x_2, 0, \ldots, 0) dx_2 + \ldots + \int_0^{x_n} \nabla V_n^T(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_n$$

es: si consideri il sistema

$$\begin{array}{rcl}\dot{x}_1 & = & -x_1 \\ \dot{x}_2 & = & -x_2 + x_1 x_2^2\end{array}$$

e si scelga la seguente forma per $\nabla V(x)$

$$\begin{array}{rcl}\nabla V_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \nabla V_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{array}$$

la condizione di simmetria

$$x_1 \frac{\partial a_{11}}{\partial x_2} + a_{12} + x_2 \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} = x_2 \frac{\partial a_{22}}{\partial x_1} + a_{21} + x_1 \frac{\partial a_{21}}{\partial x_1}$$

si può soddisfare ponendo $a_{12} = a_{21} = \text{cost}$ e $a_{11} = \text{cost}$, $a_{22} = \text{cost}$. Ad esempio, si può provare con $a_{12} = a_{21} = 0$, cioè $\nabla V_1 = a_{11}x_1$ e $\nabla V_2 = a_{22}x_2$. Ne segue

$$\dot{V}(x) = (a_{11}x_1 \;\; a_{22}x_2)^T \dot{x} = -a_{11}x_1^2 - a_{22}x_2^2(1 - x_1 x_2)$$

che, se $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, risulta DN in qualsiasi intorno dell'origine tale che $x_1 x_2 < 1$ (ad esempio, la crf di raggio 1). Proviamo dunque a porre $a_{11} = a_{22} = 1$. Troviamo

$$V(x) = \int_0^{x_1} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 dx_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \qquad \text{DP in qualsiasi intorno dell'origine}$$

$\Rightarrow$ l'origine è un pde AS ■

Teorema dell'insieme invariante

spesso la funzione di Lyapunov scelta ha una derivata $\dot{V}(x)$ che è **solo SDN** (e non DN); in queste condizioni, si può concludere la stabilità semplice di x_e ma non l'eventuale stabilità asintotica (cfr: la prima funzione di Lyapunov per il pendolo)

in queste condizioni, il **teorema dell'insieme invariante** consente di analizzare più a fondo la situazione

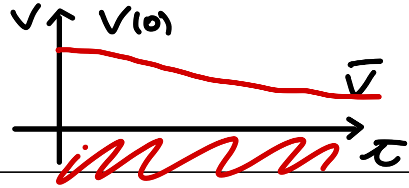
un sottoinsieme $G \subset \mathbb{R}^n$ dello spazio di stato si dice **insieme invariante** per un sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ se qualsiasi traiettoria $x(t)$ del sistema che parte da un punto $x_0 \in G$ rimane indefinitamente in G

è una generalizzazione del concetto di punto di equilibrio; esempi di insiemi invarianti:

- qualsiasi punto di equilibrio
- il dominio di attrazione di un punto di equilibrio AS
- qualsiasi traiettoria del sistema (purché questo sia stazionario)
- $\mathbb{R}^n$ stesso

idea di base

se $V(x)$ è DP in un intorno di x_e e $\dot{V}(x)$ è SDN nello stesso intorno $\Rightarrow$ partendo da qualunque punto dell'intorno, $\dot{V}(t)$ tende a zero e $V(t)$ tende a un valore limite



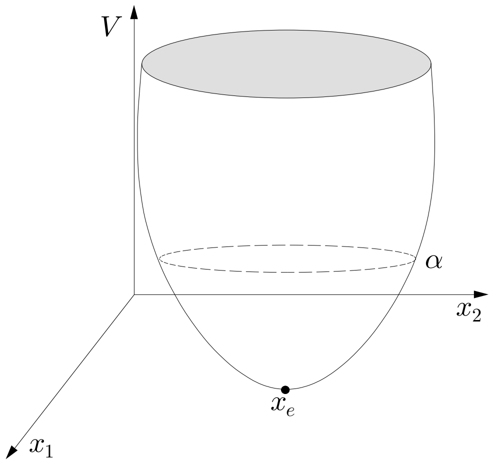
Teorema locale dell'insieme invariante [LaSalle]

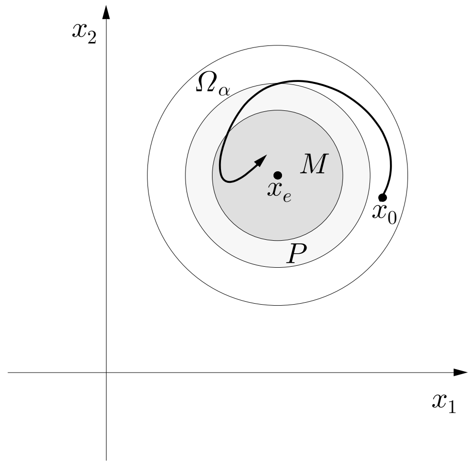
per un sistema $\dot{x} = f(x)$, si assuma che esista una funzione $V(x) \in C^1$ tale che:

1. la regione $\Omega_\alpha = \{x \in I\!R^n : V(x) \leq \alpha\}$ sia limitata, per qualche $\alpha > 0$ LINEA DI LIVELLO α CHIUSA
2. $\dot{V}(x) \leq 0$ in Ω_α

allora, ogni traiettoria del sistema che parte da Ω_α tende asintoticamente all'insieme M, il **massimo insieme invariante** contenuto in P, l'insieme dei punti di Ω_α dove $\dot{V} = 0$

qui: massimo insieme invariante contenuto in P = unione di tutti i sottoinsiemi invarianti di P





si noti come il criterio di AS sia un caso particolare di questo teorema con $P = M = x_e$

l'uso del teorema dell'insieme invariante consente, in certi casi, di concludere la stabilità asintotica anche in presenza di una $\dot{V}$ SDN

in particolare, si può enunciare il seguente

Corollario [LaSalle]

un pde x_e di un sistema $\dot{x} = f(x)$ è **asintoticamente stabile** se esiste una funzione $V(x) \in C^1$ tale che

1. $V(x)$ sia DP in un insieme D che contiene x_e al suo interno
2. $\dot{V}(x)$ sia SDN nello stesso insieme
3. il massimo insieme invariante M contenuto in P (l'insieme dei punti di D per cui $\dot{V} = 0$) contenga solo x_e

inoltre, detta Ω_α una regione limitata definita dalla $V(x) \leq \alpha$, $\alpha > 0$ e contenuta in D, si ha che Ω_α costituisce una stima per difetto del **dominio di attrazione** per x_e

- rispetto al criterio diretto di AS di Lyapunov, questo corollario 'rilassa' la condizione 2 (DN $\rightarrow$ SDN) ma aggiunge la 3; inoltre la condizione 1 del corollario garantisce la condizione 1 del Teorema Locale dell'Insieme Invariante

- l'insieme D di per sé non è una stima del dominio di attrazione (in sostanza, alcune delle curve di livello che cadono in D possono essere aperte, e dunque esso risulterebbe non invariante)

es: riprendiamo in esame il pendolo con la prima funzione di Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + g(1 - \cos x_1) \qquad \text{DP in } S(0, 2\pi^-)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -g\sin x_1 - x_2 \end{cases}$$

si ha

$$\dot{V}(x) = x_2\dot{x}_2 + g\sin x_1\dot{x}_1 = -x_2^2 \qquad \text{SDN in qualsiasi intorno dell'origine}$$

dunque $x_e^{\text{down}} = (0,0)$ è un pde stabile per il pendolo; ma il teorema dell'insieme invariante **dice qualcosa in più**

l'insieme P è costituito dagli stati per cui $\dot{V} = 0$, ovvero dai punti aventi $x_2 = 0$; qual è il massimo insieme invariante M contenuto in P?

VELOCITÀ

la dinamica del sistema in P è

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = -g\sin x_1 \end{cases}$$

ACCELL. $\ddot{\theta}$ $\quad\dot{\theta} \neq 0$

se $x_1 \neq 0$, si ha $\dot{x}_2 \neq 0$ e quindi x_2 varia, facendo uscire la traiettoria $x(t)$ dall'insieme P

$\Rightarrow$ l'insieme M consiste solo dell'origine, cui dunque converge qualsiasi traiettoria

dunque x_e^{down} è un pde **asintoticamente stabile** per il pendolo

dominio di attrazione: poiché secondo il teorema dall'insieme invariante la regione Ω_α deve essere limitata, è necessario prendere $\alpha < 2g$; infatti Ω_{2g} è illimitata, poiché include tutto l'asse x_1, compreso il pde $x_e^{\text{up}} = (\pi, 0)$ e le sue copie (pendolo verticale verso l'alto) ∎

il teorema dell'insieme invariante ammette ovviamente una versione globale

Teorema globale dell'insieme invariante [LaSalle]

per un sistema $\dot{x} = f(x)$, si assuma che esista una funzione $V(x) \in C^1$ tale che:

1. $V(x)$ sia radialmente illimitata
2. $\dot{V}(x) \leq 0$ in tutto $\mathbb{R}^n$

allora, ogni traiettoria del sistema tende asintoticamente all'insieme M, il **massimo insieme invariante** contenuto in P, l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ dove $\dot{V} = 0$

nota: il fatto che $V(x)$ sia radialmente illimitata garantisce che qualsiasi regione $\Omega_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < \alpha\}$, con $\alpha > 0$, sia limitata

cui corrisponde il seguente

Corollario [LaSalle]

un pde x_e di un sistema $\dot{x} = f(x)$ è **globalmente asintoticamente stabile** se esiste una funzione $V(x) \in C^1$ tale che

1. $V(x)$ sia DP in qualsiasi intorno di x_e e radialmente illimitata
2. $\dot{V}(x)$ sia SDN in qualsiasi intorno di x_e
3. il massimo insieme invariante M contenuto in P (l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ per cui $\dot{V} = 0$) contenga solo x_e

es: si consideri la famiglia di sistemi non lineari del secondo ordine descritta da

IMPORRE $\dot{z} = \ddot{z} = 0$

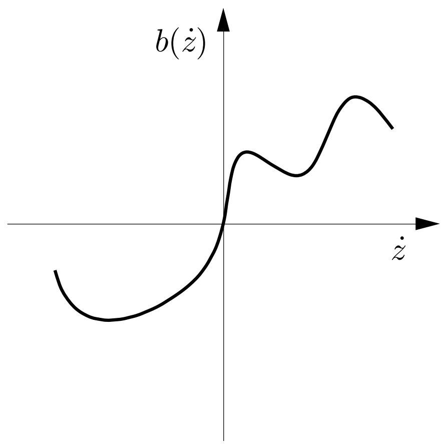
$$\ddot{z} + b(\dot{z}) + c(z) = 0 \rightarrow c(z) = 0 \iff z = 0 \rightarrow$$

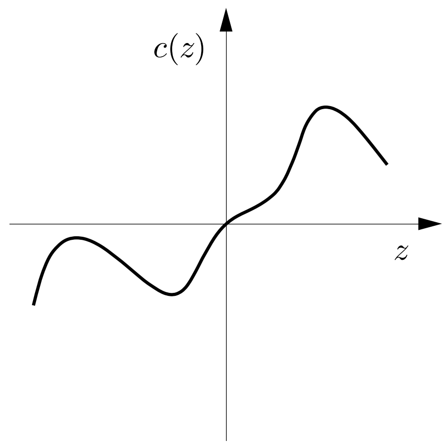
UNICO PDE ORIGINE $x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

dove le funzioni generiche b e c sono continue e verificano le condizioni

$$\dot{z}\, b(\dot{z}) > 0, \forall \dot{z} \neq 0 \qquad z\, c(z) > 0, \forall z \neq 0$$

si noti che queste condizioni, insieme alla continuità, implicano che $b(0) = 0$, $c(0) = 0$





fanno parte di questa famiglia i sistemi meccanici massa-molla-smorzatore (con molla e smorzatore non lineari, rappresentati rispettivamente dalla forza di richiamo elastica $c(z)$ e dalla forza di attrito $b(\dot{z})$) e i circuiti elettrici RLC (con resistenza $b(\dot{z})$ e capacità $c(z)$ non lineari) si consideri il punto di equilibrio $x_e = (z_e, \dot{z}_e) = (0, 0)$; una candidata di Lyapunov è l'energia totale del sistema (ad esempio, cinetica + potenziale)

$$V(x) = \frac{1}{2}\dot{z}^2 + \int_0^z c(y)dy$$

EN POT $= -\int_0^z f_{z\ \text{conser.}}\, dy = \int_0^z c(y)dy$

che è DP in qualsiasi intorno di x_e

$\ddot{z} = -b(\dot{z}) - c(z)$ DA SU ↑

si ha

$$\dot{V}(z) = \dot{z}\ddot{z} + c(z)\dot{z} = -\dot{z}b(\dot{z}) - \dot{z}\cancel{c(z)} + \cancel{c(z)}\dot{z} = -\dot{z}b(\dot{z})$$

che nelle ipotesi del problema è SDN in qualsiasi intorno di $x_e = 0$

l'insieme P è costituito dagli stati per cui $\dot{V} = 0$, ovvero dai punti aventi $\dot{z} = 0$; qual è il massimo insieme invariante M contenuto in P?

SE $\dot{z} = 0 \rightarrow \ddot{z} = -\cancel{b(\dot{z})} - c(z)$

DINAMICA DEI RESIDUI

la dinamica del sistema in P è

$$\ddot{z} = -c(z)$$

se $z \neq 0$, si ha $\ddot{z} \neq 0$ e quindi $\dot{z}$ varia, facendo uscire la traiettoria $x(t)$ dall'insieme P $\Rightarrow$ l'insieme M consiste solo dell'origine, cui dunque converge qualsiasi traiettoria

dunque l'origine è un pde **asintoticamente stabile** per il sistema

inoltre, se $\int_0^z c(y)dy$ è illimitato per $|z| \to \infty$, $V(x)$ risulta essere radialmente illimitata, e quindi x_e è un pde **globalmente asintoticamente stabile** ■

Criterio indiretto di Lyapunov

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

idea di base $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$

> analizzare la stabilità dell'**approssimazione lineare** del sistema intorno al punto di equilibrio x_e: in certe condizioni, è possibile trarre da ciò conclusioni sulla stabilità o meno di x_e **per il sistema originario**

si consideri il generico sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x) \qquad \text{con } x_e \text{ pde, cioè } f(x_e) = 0$$

nell'ipotesi che $f \in C^\infty$, la si può sviluppare in serie di Taylor nell'intorno di x_e

$$f(x) = f(x_e) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_e} (x - x_e) + h(x - x_e) = J(x_e)(x - x_e) + h(x - x_e)$$

dove $h(x - x_e)$ raccoglie gli (infiniti) termini di grado superiore al primo e $J(x_e)$ è la matrice Jacobiana di f rispetto a x, calcolata in x_e

effettuiamo una trasformazione di coordinate

SPOSTAMENTO RISPETTO AL PDE

$$\xi = x - x_e \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\xi} = \dot{x} = f(x) = \underbrace{J(x_e)\xi}_{\text{PARTE LINEARE}} + \underbrace{h(\xi)}_{\text{PARTE NON LINEARE}}$$

nell'intorno di x_e, i termini di ordine superiore sono trascurabili rispetto a quello lineare $\Rightarrow$ si può associare al sistema non lineare originario la seguente **approssimazione lineare**

$$\boxed{\dot{\xi} = J(x_e)\xi}$$

PURAMENTE LINEARE

che è naturalmente tanto più accurata quanto più lo stato è prossimo a x_e

l'analisi dell'approssimazione lineare $\dot{\xi} = J(x_e)\xi$ conduce a risultati interessanti sul sistema non lineare originario $\dot{x} = f(x)$

Teorema

se la matrice $J(x_e)$ è **non singolare**, x_e è un pde **isolato** del sistema non lineare

dim per assurdo: se ciò non fosse vero, in qualsiasi intorno di x_e cadrebbe almeno un punto x'_e tale che $f(x'_e) = f(x_e) = 0$; si avrebbe allora

$$f(x'_e) = f(x_e) + J(x_e)(x'_e - x_e) + h(x'_e - x_e) = 0 \implies J(x_e)(x'_e - x_e) + h(x'_e - x_e) = 0$$

poiché x'_e varia, tale condizione richiede di fatto che siano nulli entrambi gli addendi, in particolare, deve essere $J(x_e)(x'_e - x_e) = 0$, che però contraddice il fatto che $J(x_e)$ sia non singolare ■

il viceversa non è vero; può accadere che x_e sia isolato e $J(x_e)$ risulti singolare

es: si consideri il sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \overbrace{x_1^2}^{f(x)} \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases} \qquad J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui unico pde è l'origine; tuttavia

$$J(x_e) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{x_e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{DET} = 0$$

$x_1 = 0$
$x_2 = 0$

che è singolare ■

il risultato più forte è il seguente

Teorema (**criterio indiretto di stabilità di Lyapunov**)

si consideri l'approssimazione lineare $\dot{\xi} = J(x_e)\xi$ di un sistema non lineare $\dot{x} = f(x)$ intorno a un suo punto di equilibrio x_e

1. se tutti gli autovalori di $J(x_e)$ hanno parte reale negativa ($\Rightarrow$ l'approssimazione lineare è AS) x_e è un pde **asintoticamente stabile** per il sistema non lineare
2. se almeno uno degli autovalori di $J(x_e)$ ha parte reale positiva ($\Rightarrow$ l'approssimazione lineare è I) x_e è un pde **instabile** per il sistema non lineare

dim basata sull'applicazione del criterio diretto di Lyapunov: in particolare, si dimostra che una funzione di Lyapunov per l'approssimazione lineare risulta essere tale anche per il sistema non lineare

comunque: la tesi è intuitiva per **continuità** ■

- la stabilità asintotica dell'origine dell'approssimazione lineare (che è sempre globale) consente di concludere solo la stabilità asintotica **locale** di x_e per il sistema non lineare
- in effetti il teorema contiene anche un criterio di **instabilità**
- se nessun autovalore di $J(x_e)$ ha parte reale positiva, ma qualcuno di essi ha parte reale nulla ($\Rightarrow$ l'approssimazione lineare è SS o I, a seconda della relazione tra molteplicità geometrica e algebrica per questi autovalori) si è nel **caso critico**: non si può concludere **nulla** sulla natura del pde x_e per il sistema non lineare (sono decisivi i termini di ordine superiore al primo)

es: riprendiamo ancora in esame il pendolo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \\ \dot{x}_2 &= \end{cases} \overset{f(x)}{\boxed{\begin{array}{l} x_2 \\ -g\sin x_1 - x_2 \end{array}}}$$

la matrice Jacobiana è

$$J(x) = \frac{df}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g\cos x_1 & -1 \end{pmatrix}$$

- nell'intorno del pde $x_e^{\text{down}} = (0,0)$ si ha $\quad \text{DET}\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -g & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^2+\lambda+g$

  $$J_e^{\text{down}}(x) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_e^{\text{down}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g & -1 \end{pmatrix}$$

  il cui polinomio caratteristico è $\lambda^2 + \lambda + g$; quindi l'approssimazione lineare del pendolo nell'intorno di x_e^{down} è AS POICHÈ TUTTI GLI AUTOVALORI HANNO Re[ ]<0

  $\Longrightarrow$ x_e^{down} è un pde asintoticamente stabile per il pendolo

- nell'intorno del pde $x_e^{\text{up}} = (\pi, 0)$ si ha $\quad \text{DET}\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ g & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^2+\lambda-g$

  $$J_e^{\text{up}}(x) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_e^{\text{up}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & -1 \end{pmatrix}$$

  il cui polinomio caratteristico è $\lambda^2 + \lambda - g$; quindi l'approssimazione lineare del pendolo nell'intorno di x_e^{up} è I POICHÈ UN AUTOVALORE HA Re[ ]>0

  $\Longrightarrow$ x_e^{up} è un pde instabile per il pendolo ■

spesso, tuttavia, il criterio indiretto **non è risolutivo** perché ci si trova nel caso critico; in questi casi si deve ricorrere al criterio diretto, che è più potente (e, con l'aiuto del teorema dell'insieme invariante, consente anche di stabilire l'eventuale dominio di attrazione, che non è direttamente analizzabile con il metodo indiretto)

es: si consideri il sistema non lineare

$$\dot{x} = -x^3$$

avente come unico pde $x_e = 0$

la Jacobiana è in questo caso uno scalare

$$J(x_e) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_e} = -3x^2\big|_{x_e} = 0 \qquad \lambda = 0$$

e dunque l'approssimazione lineare del sistema intorno a x_e è $\dot{\xi} = 0 \Rightarrow$ siamo nel **caso critico**

si consideri allora la seguente candidata di Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{DP in qualsiasi intorno dell'origine, e radialmente illimitata}$$

si ha

$$\dot{V}(x) = -x^4 \qquad \text{DN in qualsiasi intorno dell'origine}$$

$\Rightarrow$ $x_e = 0$ è dunque un pde GAS per il sistema (prevedibile, cfr. esempio slide 31) ■

ES

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1^2 + 2a x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

1 DETERMINARE I PDE
2 STUDIARE LA STABILITÀ AL VARIARE DI a

1 $f(x)=0$ $\quad \dot{x}_2 = 0 \rightarrow x_1 = 0$
$\quad \dot{x}_1 = 0 \rightarrow x_2 = 0$ $\rightarrow$ UNICO PDE $x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2 CRITERIO INDIRETTO:

$$J(x_e) = \left.\begin{pmatrix} 2a x_1 + 2a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right|_{x_e} = \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 2a & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2a\lambda + 1$$

ABBIAMO 3 CASI:
- $a>0 \rightarrow x_e$ È I
- $a<0 \rightarrow x_e$ È A.S
- $a=0 \rightarrow$ SISTEMA S, DIVENTA LINEARE (NON CRITICO)

CASO DIRETTO PER DOMINIO DI ATTRAZIONE:

$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ DP $\forall S(x_e, r)$ E R I. (RADIALMENTE ILLIM.)

$$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = a x_1^3 + 2a x_1^2 + \cancel{x_1 x_2} - \cancel{x_1 x_2} = \overset{<0}{a} x_1^2 (x_1 + 2) \rightarrow x_1 > -2 \text{ SDN}$$

POSSO SCEGLIERE INTORNI $S(x_e, r)$ CON $r \in (0, 2^-)$

SE $x_1 = 0 \rightarrow \dot{V} = 0 \quad \forall x_2$ SDN

L'ORIGINE È S, APPLICO IL TEOREMA DELL'INSIEME INVARIANTE

TEOREMA DI LASALLE:

$$R = \{x : \dot{V}(x) = 0\} = \{x_1 : x_1 = 0\}$$

DINAMICA RESIDUA
$$\dot{x}_1 = x_2 \rightarrow x_2 \neq 0 \rightarrow \dot{x}_1 \neq 0$$
$$\dot{x}_2 = 0$$

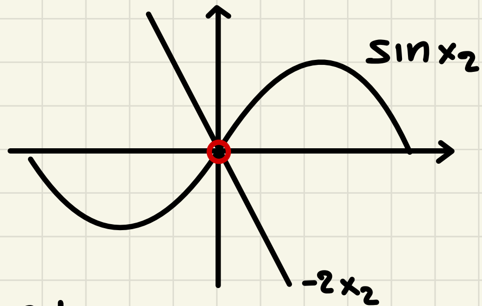
$$M(x) = \{(0,0)\} \qquad x_e \text{ È A.S.}$$

LA STIMA DEL DOMINIO DI ATTRAZIONE È $S(0, 2^-)$, STIMA PER DIFETTO

ES

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1-2x_2\\ \dot{x}_2 = x_1-\sin x_2\end{cases}$$

1 PDE
2 STABILITÀ



1 $f(x)=0$ $\quad \dot{x}_2=0,\ \dot{x}_1=0 \rightarrow x_1 = \sin x_2,\ -2x_2 = \sin x_2$

UNICO PDE $x_e=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

2 CASO INDIRETTO:

$$J(x_e)=\left.\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & -\cos x_2\end{pmatrix}\right|_{x_e}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}\lambda+1 & -2\\ 1 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2+2=\lambda^2+2\lambda+3$$

↳ PDE A.S.

CRITERIO DIRETTO PER BACINO DI ATTRAZIONE

$V(x)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2$ $\quad$ DP $\forall S(x_e,r)$

INDEFINITA
NON VA BENE

$$\dot{V}(x)= x_1\dot{x}_1+x_2\dot{x}_2=-x_1^2-2x_1x_2+x_1x_2-x_2\sin x_2=\overset{\text{OK}}{-x_1^2}\ \overset{\text{!OK}}{-x_1x_2}\ \overset{\text{OK}}{-x_2\sin x_2}$$

$$V'(x)=\frac{1}{2}x_1^2+x_2^2 \qquad \dot{V}'(x)=\overset{\text{OK}}{-x_1^2}-\cancel{2x_1x_2}+\cancel{2x_1x_2}\overset{\text{OK}}{-2x_2\sin x_2} \quad \text{DN } \forall S(x_e,\pi)$$

QUALUNQUE CURVA DI LIVELLO CONTENUTA IN $S(0,\pi^-)$ È UNA STIMA DEL DOMINIO DI ATTRAZIONE

TEOREMA DI LASALLE:

$P=\{x:\dot{V}=0\}=\{x_1=0 \wedge x_2=k\pi\}$

$-3\pi(-1)$

$4\pi>0$

DINAMICA RESIDUA $\quad \dot{x}_1=-2k\pi \rightarrow k\neq 0 \rightarrow$ VARIAZIONI
$\dot{x}_2=0$

$M(x)=\{(0,0)\}\rightarrow$ L'ORIGINE È UN PDE G.A.S.