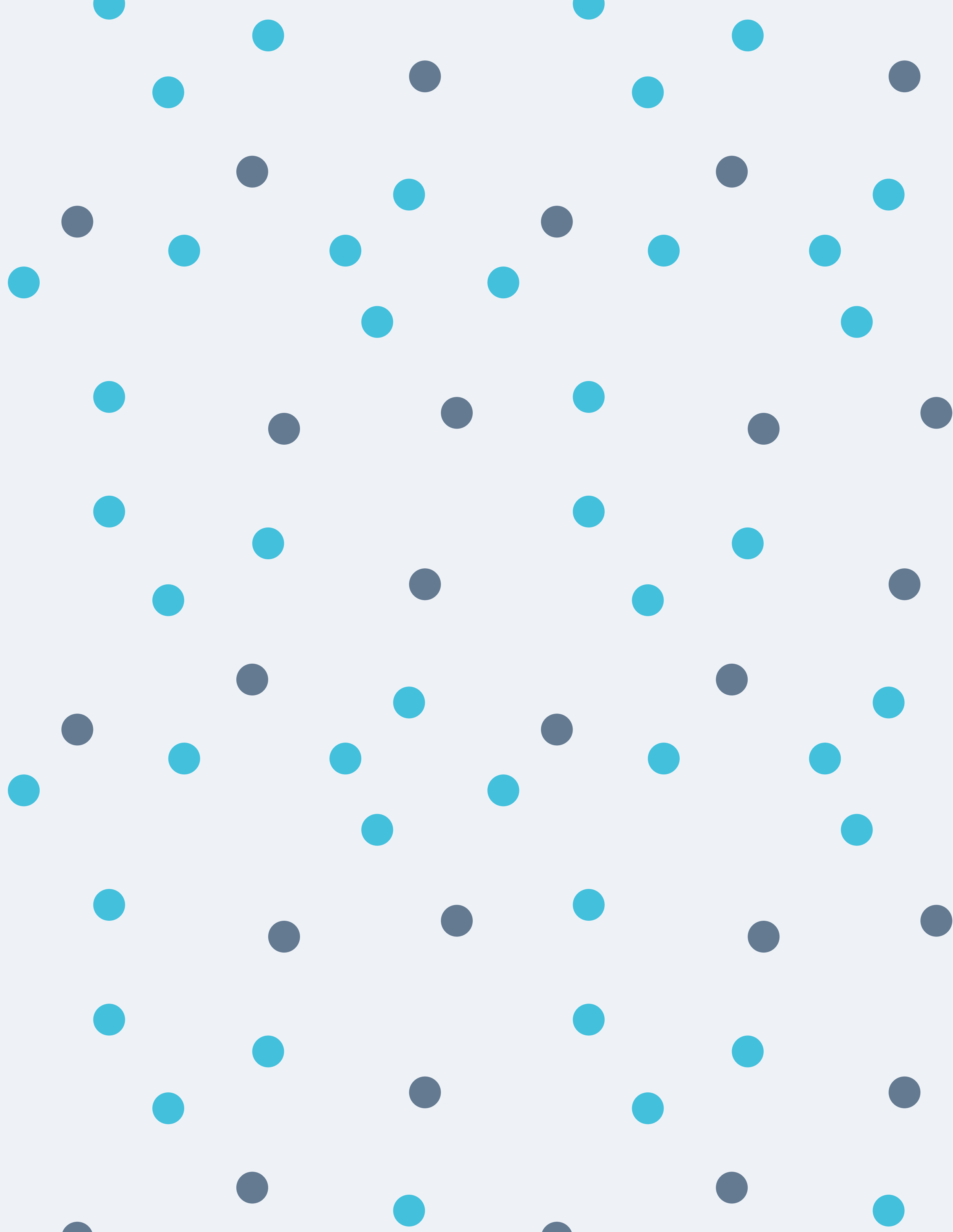


CAPITOLO 1

NUMERI COMPLESSI

ES 1.1

a $\frac{(1+2i)(1-2i)}{3-i} = \frac{5}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{5(3+i)}{10} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

b $\frac{\sqrt{3}i-2}{\sqrt{3}i+2} = \frac{\sqrt{3}i-2}{\sqrt{3}i+2} \cdot \frac{2-\sqrt{3}i}{2-\sqrt{3}i} = \frac{4\sqrt{3}i-1}{7} = -\frac{1}{7} + \frac{4\sqrt{3}}{7}i$

c $\frac{(1+2i)^4}{i} = \frac{(-3+4i)^2}{i} = \frac{-7-24i}{i} = -24+7i \qquad \frac{1}{i} = -i$

d $\frac{2+3i}{(3-i)^2} = \frac{2+3i}{8-6i} \cdot \frac{8+6i}{8+6i} = \frac{-2+36i}{100} = -\frac{1}{50} + \frac{36}{100}i$

ES 1.2

$$a+bi = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

a $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \rho = \sqrt{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$

b $-5 \rightarrow \qquad \rho = |-5| = 5 \qquad \theta = \pi$

c $-\sqrt{3}+i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \qquad \rho = 2 \quad \theta = \frac{5}{6}\pi$

d $2-i = \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i\right) \qquad \rho = \sqrt{5} \qquad \theta = ?$

ES 1.3

$$w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad z = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right) \quad k = 0, \dots n-1$$

a $\sqrt[3]{-i} \rightarrow w = -i \rightarrow 1(0 \; -1) \rightarrow \rho = 1 \quad \theta = \frac{3}{2}\pi \quad n = 3$

$$z = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k}{3}\pi\right)\right) \qquad k = 0,1,2$$

$z_1 = i \qquad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \qquad z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

b $\sqrt[3]{2\sqrt{3}-2i} \rightarrow w = 2\sqrt{3}-2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right) \quad \rho = 4 \quad \theta = \frac{11}{6}\pi\left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad n=3$

$$z = \sqrt[3]{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi\right)\right) \quad k=0,1,2$$

c $\sqrt[6]{-8} \rightarrow w=-8 \rightarrow \rho=8 \quad \theta=\pi \quad n=6$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)\right) \quad k=0,1,2,3,4,5$$

$z_0 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) \qquad z_1 = \sqrt{2}\,i \qquad z_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$

$z_3 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right) \qquad z_4 = -\sqrt{2}\,i \qquad z_5 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$

ES 1.4

$z = 1+i \rightarrow \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$(1+i)^{10} = 32i$

$\rho = \sqrt{2} \rightarrow \rho^{10} = 2^5 = 32$

$\theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow \theta^{10} = 10\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{5}{2}\pi = 2\pi+\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

---

1 42

$$\frac{(3+2i)(2-3i)}{(1+i)^3} = \frac{12-5i}{-2+2i}\cdot\frac{-2-2i}{-2-2i} = \frac{-34-14i}{8} = -\frac{17}{4}-\frac{7}{4}i$$

1.43

$(2+3i)^2 = 4-9+12i = -5+12i$

1 44

$(1+i)^3 = -2+2i$

1.45

$$\frac{(2-3i)(4+2i)}{i(2+i)^2} = \frac{14-8i}{-4+3i}\cdot\frac{-4-3i}{-4-3i} = \frac{-80-10i}{25} = -\frac{16}{5}-\frac{2}{5}i$$

1.46

$2-2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \rho = 2\sqrt{2} \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$

1.47

$$-2-2\sqrt{3}i = 4\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \quad \rho=4 \quad \theta=\frac{4}{3}\pi$$

1.48

$$-3i = 3(-i) \quad \rho=3 \quad \theta=\frac{3}{2}\pi$$

1.49

$$-3\sqrt{3}-3i = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right) \quad \rho=6 \quad \theta=\frac{7}{6}\pi$$

1.55

$$2i\,\bar{z} = 3+5i \qquad |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{25}{4}+\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

$$\bar{z} = \frac{3+5i}{2i}\cdot\frac{-2i}{-2i} = \frac{10-6i}{4} = \frac{5}{2}-\frac{3}{2}i = \frac{5}{2}+\frac{3}{2}i$$

1.56

$$(3+2i)z = 2+\sqrt{3}i \qquad |z| = \sqrt{\frac{48}{169}+\frac{43}{169}} = \frac{\sqrt{91}}{13}$$

$$z = \frac{2+\sqrt{3}i}{3+2i}\cdot\frac{3-2i}{3-2i} = \frac{2\sqrt{3}+6+(3\sqrt{3}-4)i}{13} = \frac{2\sqrt{3}+6}{13}+\frac{3\sqrt{3}-4}{13}i$$

1.62

$$\left(\frac{5-3i}{2+i}\right)\bar{z} = \frac{2-i}{1+i}$$

$$\bar{z} = \frac{2-i}{1+i}\cdot\frac{2+i}{5-3i} = \frac{5}{8+2i}\cdot\frac{8-2i}{8-2i} = \frac{40-10i}{68} = \frac{10}{17}+\frac{5}{34}i$$

1.63

$$\frac{3z+1+2i}{z+3} = \bar{z} \rightarrow 3z+1+2i = \bar{z}z+3\bar{z}$$

$z = x+iy$

$\bar{z} = x-iy$

$z\bar{z} = x^2+y^2$

$$3(x+iy)+1+2i = x^2+y^2+3(x-iy)$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+3x = 3x+1 \\ 6y+2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$z_1 = \frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{3}i$$

$$z_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{3}i$$

1.64

$$z^2 + 2\bar{z} - 2 = 0 \rightarrow x^2 + 2xyi - y^2 + 2x - 2yi - 2 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x - 2 = 0 \\ 2xy - 2y = 0 \end{cases} \qquad 2y(x-1) = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \vee y = 0$$

$$y = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \qquad x = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$x = 1 \rightarrow -y^2 + 1 = 0 \qquad y = \pm 1$$

$$z_1 = 1 + i \qquad z_2 = 1 - i \qquad z_3 = -1 + \sqrt{3} \qquad z_4 = -1 - \sqrt{3}$$

1.65

$$2z + 4i = \bar{z}\left(1 + (\operatorname{Re} z)^2 - \operatorname{Im} z\right)$$

$$2(x + iy) + 4i = (x - iy)(1 + x^2 - y)$$

$$\begin{cases} 2x = x(1 + x^2 - y) \rightarrow x = 0 \vee x^2 - y = 1 \\ 2y + 4 = -y(1 + x^2 - y) \end{cases}$$

$$x = 0 \rightarrow y^2 - 3y - 4 = 0 \rightarrow y = 4 \vee y = -1$$

$$x^2 - y = 1 \rightarrow 4y = 4 \rightarrow y = -1 \qquad z_1 = 4i \quad z_2 = -i$$

1.66

$$z^2 - 2iz - 1 + 9i = 0 \qquad z = \frac{2i \pm \sqrt{\cancel{-4} \cancel{+4} - 36i}}{2} = i \pm 3\sqrt{-i}$$

$$\sqrt{-i} = \sqrt{1\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)} \qquad k = 0,1$$

$$= \sqrt{1}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi + k\pi\right)\right)$$

$$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z = i + 3 \cdot z_{1/2} = \begin{cases} i + \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i \\ i - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

1.67

$$z^2+2iz-\sqrt{3}i=0$$

$$z=\frac{-2i\pm\sqrt{-4+4\sqrt{3}i}}{2}=-i\pm\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$$

$$w=-1+\sqrt{3}i \qquad \rho=\sqrt{a^2+b^2}=2 \quad \theta=\frac{2}{3}\pi \quad n=2$$

$$\sqrt{w}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)\right) \qquad k=0,1$$

$$z=-i\pm\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

1.68

$$z^4+z^2+1=0$$

$$z^2=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_{1,2}=\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)\right)=\pm\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$z_{3,4}=\sqrt{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=1\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+k\pi\right)\right)=\pm\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

1.69

$$z^6+2z^3-3=0 \qquad t=z^3$$

$$t^2+2t-3=0 \qquad t=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm4}{2}\begin{cases}-3\\1\end{cases}$$

$$z=\sqrt[3]{1}=\left(1,\ -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$z=\sqrt[3]{-3}=\left(-\sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)$$

1.70

$$|z^2|+1+2z^2=0$$

$$x^2+2xyi+y^2+1+2x^2+4xyi-2y^2=0$$

$$3x^2+6xyi+-y^2+1=0$$

$$\begin{cases}3x^2-y^2+1=0\\6xy=0 \rightarrow x=0 \vee y=0\end{cases}$$

$x=0 \rightarrow y=\pm1$

$y=0 \rightarrow 3x^2+1=0$ MAI

$z_1=+i \qquad z_2=-i$

1.71

$$3z+2i+3=\frac{2i+10}{1-z}$$

$$(3z+2i+3)(1-z)=2i+10$$

$$\cancel{3z}-3z^2\cancel{+2i}-2zi+3-\cancel{3z}=\cancel{2i}+10$$

$$3z^2+2zi+7=0$$

$$z=\frac{-2i\pm\sqrt{-4-84}}{6}=\frac{-2i\pm i\sqrt{88}}{6}=i\left(-\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{88}}{3}\right)$$

1.73

$z|z|=2\bar{z}$ $\qquad$ $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$\rho^2(\cos\theta+i\sin\theta)=2\rho(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$$

$$\begin{cases}\rho^2=2\rho\\ \theta=-\theta+2k\pi\end{cases}\qquad\begin{cases}\rho=0,\ \rho=2\\ \theta=k\pi\end{cases}\qquad z=0,\ 2,\ -2$$

CAPITOLO 3

LIMITI DI SUCCESSIONI

3.3

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{-n}+3n^3}{\log^6 n+2-n^5} \sim \frac{3n^3}{-n^5} = -\frac{3}{n^2} \to 0$$

3.4

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n+3n^3\log n}{2^{1/n}+n^5} \sim \frac{3n^3\log n}{n^5} = \frac{3\log n}{n^2} \to 0$$

3.5

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+\log^3 n}{n\log n+1} \sim \frac{n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}\log n} \to +\infty$$

3.6

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2+1/n}}{1+n^{3-2/n}} \sim \frac{\cancel{n^2}}{n^{\cancel{3}}} \to 0$$

3.7

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} = e^{2n\log\left(\frac{n}{n+1}\right)} \sim 2n\left(\frac{n}{n+1}-1\right) \sim \left(\frac{-2n}{n+1}\right) \sim \frac{-2\cancel{n}}{\cancel{n}} = -2 \to e^{-2}$$

3.8

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2} = e^{n^2\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)} \sim n^2\left(\frac{n+2}{n+1}-1\right) \sim \frac{n^2}{n+1} \sim \frac{n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}} \to e^n = +\infty$$

3.9

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^{-n} = e^{-n\log(1+3/n)} \sim -n\left(1+\frac{3}{n}-1\right) \sim -3 \to e^{-3}$$

3.10

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n} = e^{n\log(1-2/n)} \sim n\left(1-\frac{2}{n}-1\right) \sim -2 \to e^{-2}$$

3.11

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+\log(n^2)-2^n}{(\log n)^3+n^2} \sim \frac{-2^n}{n^2} = -\infty$$

3.12

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{8+2n-n^{4/3}}{n^{-1/3}+3n-n^{5/3}} \sim \frac{\cancel{-}n^{4/3}}{\cancel{-}n^{5/3}} = \frac{1}{n^{1/3}} \to 0$$

3.13

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n^2+3}-n\right) \sim n\,\frac{\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)} = \cancel{n}\,\frac{3}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+3/n}+1\right)} = 3/2$$

3.16

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^4+1}-n\sqrt{n^2+1}\right) \sim \frac{\left(\sqrt{n^4+1}-n\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^4+1}+n\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(\sqrt{n^4+1}+n\sqrt{n^2+1}\right)} \sim \frac{-n^2+1}{2n^2} \to -\frac{1}{2}$$

3.18

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\sin n+\sin(n^2)}{n^2+1} = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)\sin n + \frac{\sin n^2}{n^2+1} = \left|\frac{\sin(n^2)}{n^2+1}\right| \le \frac{1}{n^2+1} \to 0$$

3.19

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+2}{n-1}\right)^{2n} = e^{2n\log\left(\frac{n+2}{n-1}\right)} = 2n\left(\frac{n+2}{n-1}-1\right) \sim \frac{6n}{n} \to e^6$$

3.24

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{4n^2-n}-2n\right) \sim \frac{\left(\sqrt{4n^2-n}-2n\right)\left(\sqrt{4n^2-n}+2n\right)}{\left(\sqrt{4n^2-n}+2n\right)} = \frac{-n}{2n\left(\sqrt{1-\frac{1}{4n}}+1\right)} \sim \frac{-n}{4n} = -\frac{1}{4}$$

3.27

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\cdot 2^n}{n!} = \frac{(n+1)^3\cdot \cancel{2^{n+1}}}{(n+1)\cancel{!}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{n^3\cdot \cancel{2^n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3\cdot\frac{2}{n+1} \sim \frac{2}{n} \to 0$$

3.28

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)\cancel{!}}\cdot\frac{\cancel{(n+1)!}}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{n+1}{n+2} \sim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e>1 \to +\infty$$

3.29

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1/n}\,2^n}{(n+1)!} \sim \frac{2^n}{(n+1)!} = \frac{\cancel{2^{n+1}}}{(n+2)\cancel{!}}\cdot\frac{\cancel{(n+1)!}}{\cancel{2^n}} = \frac{2}{n+2} \to 0$$

3.30

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{(n-1)!} = \frac{n+2}{n\cancel{!}}\cdot\frac{\cancel{(n-1)!}}{n+1} = \frac{n+2}{n(n+1)} \sim \frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}} \to 0$$

3.31

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = \frac{\cancel{(n+1)!}}{(n+1)^{n+\cancel{1}}}\cdot\frac{n^n}{\cancel{n!}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to e^{-1}_{<0} \to 0$$

3.32

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{4^n} = \frac{(2n+2)!}{\cancel{4^{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{4^n}}{2n!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4} \sim \frac{\cancel{4}n^2}{\cancel{4}} = n^2 \to +\infty$$

3.33

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{3^n n!} = \frac{(n+1)^{n+\cancel{1}}}{\cancel{3^{n+1}}\cdot\cancel{(n+1)!}} \cdot \frac{\cancel{3^n}\cdot\cancel{n!}}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{3} \sim \frac{e}{3} < 1 \to 0$$

3.80

$$\lim_{x\to 0^\pm} e^{1/x} = +\infty,\ 0^+$$

3.81

$$\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = e^{-\infty} \to 0^+$$

3.82

$$\lim_{x\to 1^\pm} \left(\frac{2x+3}{x^2-1}\right) = \pm\infty$$

3.83

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{2x+3}{x(x^2-1)} = \mp\infty$$

3.84

$$\lim_{x\to 1^\pm} e^{-\frac{1}{x^2-1}} = e^{\mp\infty} \begin{cases} 0^+ \\ +\infty \end{cases}$$

3.85

$$\lim_{x\to 1^+} \log(\log x) = -\infty$$

3.86

$$\lim_{x\to 0^+} \sin(\log x) = \nexists$$

3.87

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sin\frac{1}{x} = 0^\pm$$

3.88

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} = \nexists$$

3.89

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \nexists$$

3.90

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = 0$$

3.91

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} = 0^\pm$$

3.92

$$\lim_{x\to 0^\pm} e^{\cos x/x} = \begin{cases} 0^+ \\ +\infty \end{cases}$$

3.93

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\sin x/x} = 1$$

3.94

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^\pm} e^{\operatorname{tg} x} = \begin{cases} 0^+ \\ +\infty \end{cases}$$

3.95

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \log(\log^2(\operatorname{tg} x)) = -\infty$$

LIMITI NOTEVOLI E STIME ASINTOTICHE

3.129

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^x \log|x| = +\infty, 0$$

3.130

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{2x}+2e^x}{e^{-x}+3e^{2x}} \sim \frac{e^{2x}}{3\cancel{e^{2x}}} = \frac{1}{3}$$

3.134

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x = e^{x\log\left(\frac{x+2}{x+3}\right)} = x\left(\frac{x+2}{x+3}-1\right) = -1 \to 1/e$$

3.139

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+3x-1}{x^2+2}\right)^x = e^{x\log('')} = x\left(\frac{x^2+3x-1}{x^2+2}-1\right) \sim \cancel{x}\left(\frac{3x}{\cancel{x^2}}\right) = 3 \to e^3$$

3.141

$$\lim_{x\to0^+} \sin x\cdot\sin\log x\cdot\log\sin x \xrightarrow{\sin x = t} \lim_{t\to0^+} t\log t = 0$$

3.142

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{x\sin x} = \frac{\cos x - 1}{x\sin x(\sqrt{\cos x}-1)} \sim \frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x^2} = -\frac{1}{4}$$

3.143

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2+3x}\right)^x = e^{x\log ''} = x\left(\frac{x^2+2}{x^2+3x}-1\right) \sim x\left(\frac{-3x}{x^2}\right) = -3 \to e^{-3}$$

3.144

$$\lim_{x\to0} \frac{(1-\cos\sqrt{3x})\sin^2 x}{x^3 \operatorname{tg} 2x} \sim \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3x})^2\cdot x^2}{x^3\cdot 2x} = \frac{\frac{3}{2}\cancel{x^4}}{2\cancel{x^4}} = \frac{3}{4}$$

3.145

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x|\log\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+2}\right) = |x|\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+2}-1\right) \sim \frac{|x|}{x} = \pm1$$

3.149

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right) = x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-1\right) = x\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$$

3.150

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x+\log(1+x^2)}{\log|x|}\sim\frac{\log(x^2)}{\log|x|}=\frac{2\log|x|}{\log|x|}=2$$

3.151

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x-1}=\frac{e^x-1}{e^x-1}+\frac{1-e^{-x}}{e^x-1}=1+\frac{1-e^{-x}}{e^x-1}\sim1+\frac{-(-x)}{x}\to2$$

3.154

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}\left(\sin\frac{1}{x}\right)(\sin x)^2\right]\Rightarrow\left|\frac{1}{x}\left(\sin\frac{1}{x}\right)(\sin x)^2\right|\le\frac{1}{|x|}(\sin x)^2\sim\frac{x^2}{|x|}=|x|=0$$

3.155

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^4}-x^{4/3}\right)=x^{4/3}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}+1}-1\right)=x^{4/3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}=\pm\infty$$

3.160

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[x\left(\sin\frac{1}{x^2}\right)(\sin x)^2\right]\Rightarrow\left|x\left(\sin\frac{1}{x^2}\right)(\sin x)^2\right|\le\left|x\left(\sin\frac{1}{x^2}\right)\right|\sim\frac{1}{|x|}\to0$$

3.161

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^4+x^2}-x^{4/3}\right)=x^{4/3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)\sim x^{4/3}\,\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{3x^{2/3}}\to0$$

3.173

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(\log x)+(\log x)^{1/2}}{\log(\log^3x)+x(\log x)^{1/3}}\sim\frac{(\log x)^{1/2}}{x(\log x)^{1/3}}=\frac{(\log x)^{1/6}}{x}\to0$$

3.175

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\overset{\nearrow 3}{\frac{1+3x}{1+x}}}-e^3\right)=xe^3\left(e^{\frac{1+3x}{1+x}-3}-1\right)\sim xe^3\left(\frac{1+3x}{1+x}-3\right)=-2e^3$$

3.177

$$\lim_{x\to+\infty}x\log\left(\overset{\nearrow 1}{\frac{1+x^2}{2x+x^2}}\right)=x\left(\frac{1+x^2}{2x+x^2}-1\right)=x\left(\frac{-2x+1}{2x+x^2}\right)\sim x\left(\frac{-2x}{x^2}\right)=-2$$

3.183

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\overset{\nearrow 1}{\frac{x^2+3x-1}{x^2-1}}\right)}{\sqrt[3]{x^3+2x}-x}\sim\frac{\frac{3}{x}}{x\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}}-1\right)}=\frac{\frac{3}{x}}{\cancel{x}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{x^{\cancel{2}}}}=\frac{3}{x}\cdot\frac{3x}{2}=\frac{9}{2}$$

3.187

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\overset{\nearrow \frac{1}{3}}{\frac{x+5}{3x-2}}}-\sqrt[3]{e}\right)=xe^{\frac{1}{3}}\left(e^{\frac{x+5}{3x-2}-\frac{1}{3}}-1\right)\sim xe^{1/3}\left(\frac{x+5}{3x-2}-\frac{1}{3}\right)\sim\frac{17}{9\cancel{x}}\cancel{x}e^{\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{7}{9}e^{\frac{1}{3}}$$

CAPITOLO 4

STUDIO DEL GRAFICO

4.116

$f(x) = \sqrt[3]{x}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)$ D: $x \neq -1$

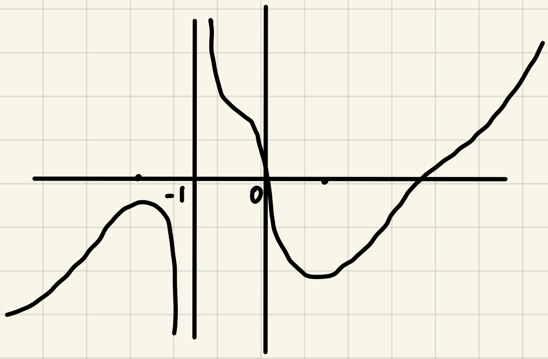
$\lim_{x \to -1^{\pm}} f(x) \sim \frac{3}{x+1} = \pm\infty$ -1 ASINTOTO VERTICALE

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \sim x^{\frac{1}{3}} = \pm\infty$

$f(0) = 0$, $\lim_{x \to 0} f(x) \sim -2\sqrt[3]{x}$ $x = 0$ PUNTO DI FLESSO A Tg VERT

$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \cdot \left(\frac{x-2}{x+1}\right) + \sqrt[3]{x} \cdot \left(\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+2}{(x+1)^2}\right) = \frac{x-2}{3x^{2/3}(x+1)} + \frac{3\sqrt[3]{x}}{(x+1)^2}$

$= \frac{(x+1)(x-2) + 9x}{3x^{2/3}(x+1)^2} = \frac{x^2+8x-2}{3x^{2/3}(x+1)^2} \geq 0$ PER $x \leq -4-3\sqrt{2}$ MIN, $x \geq -4+3\sqrt{2}$ MAX



4.117

$f(x) = \frac{5+x^{2/3}}{2+x^{1/3}}$ D: $x \neq -8$

$\lim_{x \to -8^{\pm}} f(x) \sim \frac{9}{2+x^{1/3}} = \pm\infty$ -8 ASINTOTO VERT

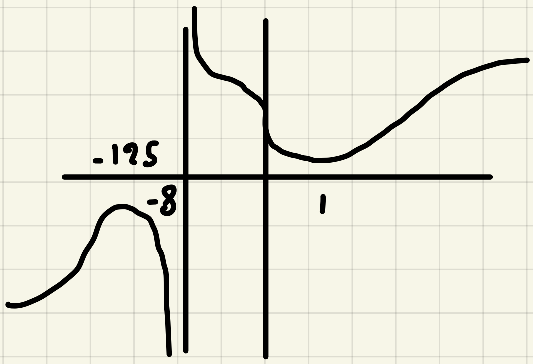
$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \sim x^{1/3} = \pm\infty$

$f'(x) = \frac{\frac{2}{3x^{1/3}}(2+x^{1/3}) - \frac{1}{3x^{2/3}}(5+x^{2/3})}{(2+x^{1/3})^2} = \frac{x^{2/3}+4x^{1/3}-5}{3x^{2/3}(2+x^{1/3})^2}$

$t = x^{1/3}$ t^2+4t-5 $f'(x) \geq 0$ PER $x \leq -125$, $x \geq 1$

$f(0) = \frac{5}{2}$

$f'(0) = -\infty$



4.118

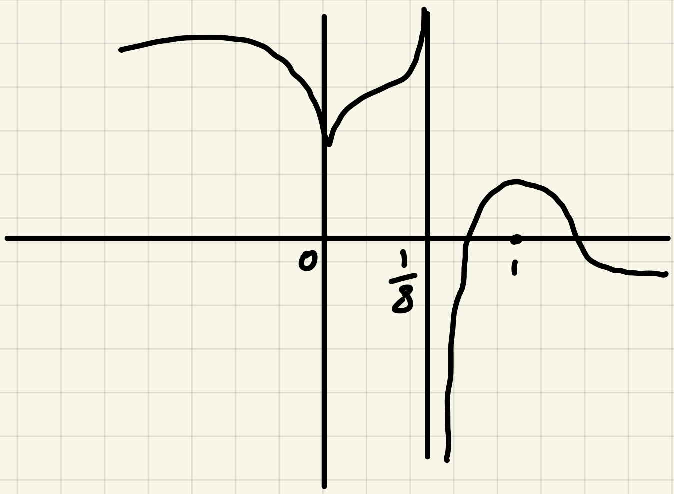
$$f(x) = \frac{x^{2/3}}{1 - 2\sqrt[3]{x}} + \frac{4}{3} \qquad D: \; x \neq \frac{1}{8}$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{8}^{\pm}} f(x) \sim \frac{1}{4(1 - 2\sqrt[3]{x})} = \pm\infty \qquad \frac{1}{8} \text{ ASINT VERT}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \sim -\sqrt[3]{x} = \pm\infty$$

$$f'(x) = \frac{2(1 - \sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x}\,(1 - 2\sqrt[3]{x})^2} \geq 0 \text{ PER } 0 < x < \frac{1}{8}, \; \frac{1}{8} < x < 1$$

$$f(0) = \frac{4}{3} \qquad f'(0) = \pm\infty \qquad 0 \text{ CUSPIDE}$$



4.119

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{\cos^4 x}\right) - tg^2 x \qquad \pi\text{-PERIODICA} \qquad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

f SIMMETRICA E PARI

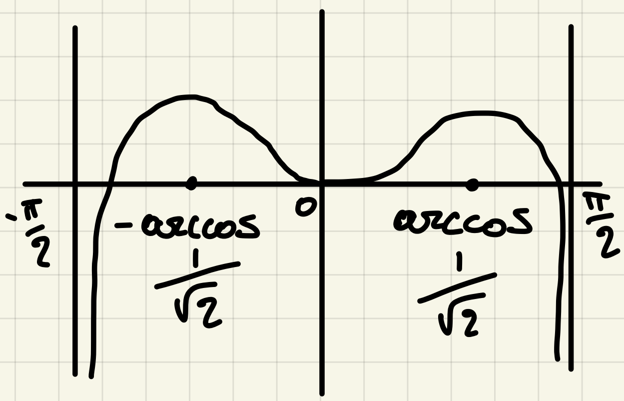
$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^{+}} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{-}} f(x) = -\infty \qquad \pm\frac{\pi}{2} \text{ ASINT VERT}$$

$$f'(x) = \frac{2\, tg\, x}{\cos^2 x}(2\cos^2 x - 1) \geq 0 \text{ PER}$$

MAX: $-\frac{\pi}{2} < x < -\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$

MAX: $0 < x < \arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$

MIN



4.120

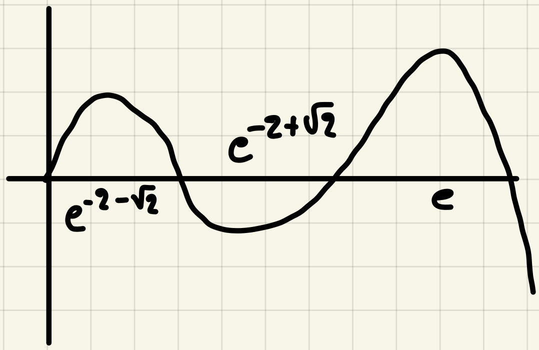
$f(x) = x(2\log x - \log^3 x)$ D. $x>0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) \sim -x\log^3 x = 0^+$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) \sim -x\log^3 x = -\infty$

$f'(x) = 2x\log x - x\log^3 x = 2\log x + 2 - \log^3 x - 3\log^2 x$
$= (1-\log x)(\log^2 x + 4\log x + 2) \geq 0$

PER $0<x<e^{-2-\sqrt{2}}$ MAX
$e^{-2+\sqrt{2}}<x<e$ MIN MAX

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) \sim -\log^3 x = +\infty$ → IN $x=0$ tg VERT

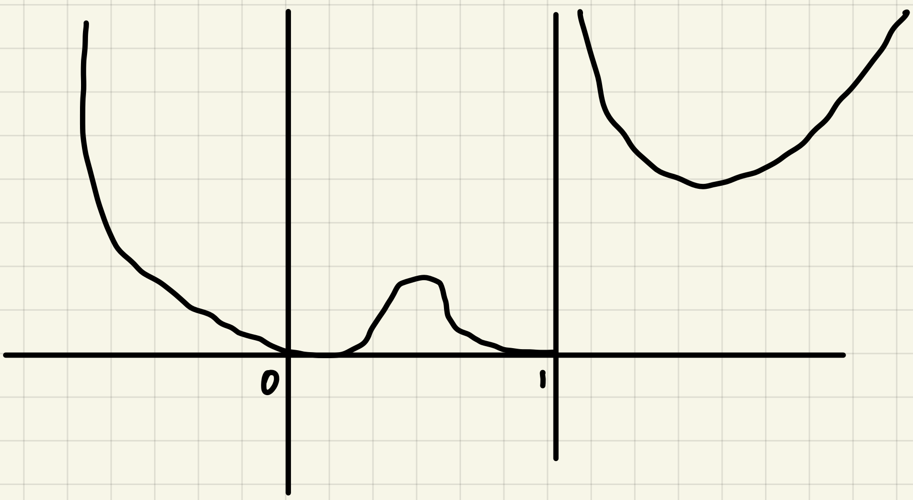


4.121

$f(x) = x^2 e^{1/(x^3-1)}$ D: $x \neq 1$

$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = e^{1/(x^3-1)}$ $\begin{cases} +\infty \\ 0^+ \end{cases}$ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \sim x^2 = +\infty$

$f'(x) = \dfrac{xe^{1/(x^3-1)}}{(x^3-1)^2}(2x^6 - 7x^3 + 2) \geq 0$ PER $\sqrt[3]{\dfrac{7-\sqrt{33}}{4}} < x < 0 \vee x \geq \sqrt[3]{\dfrac{7+\sqrt{33}}{4}}$ MAX MIN MIN



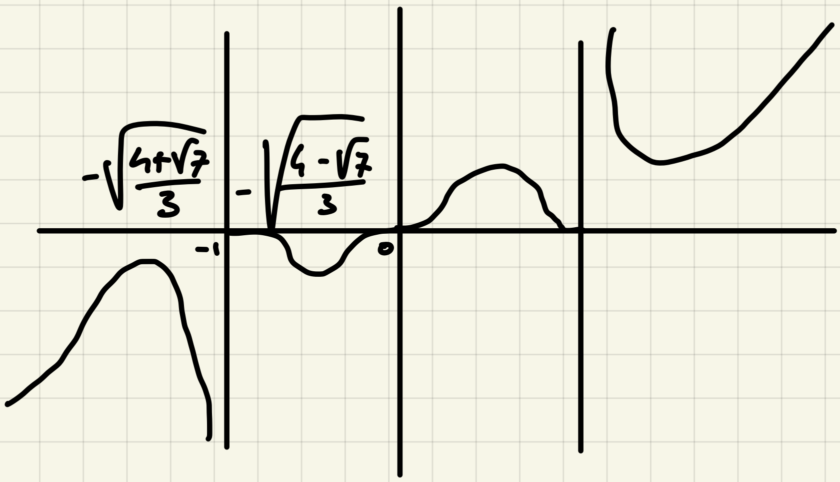
4.122

$f(x) = x^3 e^{1/(x^2-1)}$ $\qquad D: x \neq \pm 1$

$\lim_{x \to 1^\pm} f(x) \sim e^{1/(x^2-1)} \begin{cases} +\infty \\ 0^+ \end{cases}$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) \sim x^3 = +\infty$

$f'(x) = \dfrac{x^2 e^{1/(x^2-1)}}{(x^2-1)^2}(3x^4 - 8x^2 + 3) \geq 0$ PER $\begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}} \\ x \geq \sqrt{\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}} \end{cases}$

$f'(0) = 0$ $\qquad x = 0$ PUNTO DI FLESSO A tg VERT



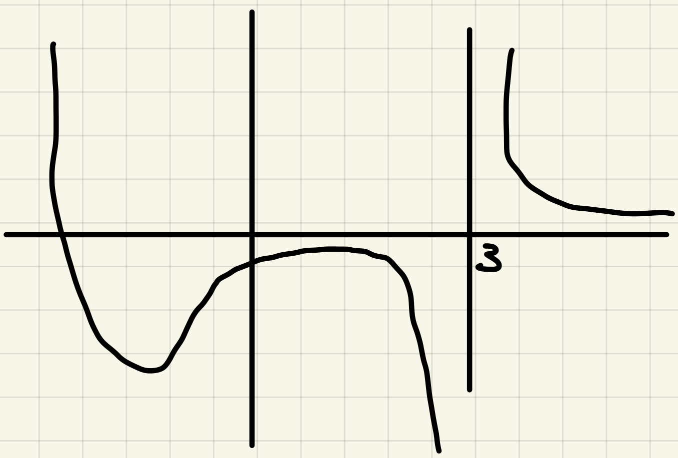
Marco & Martina ♥

4.123

$f(x) = e^{-2x}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)$ $\qquad D: x \neq 3$

$\lim_{x \to 3^\pm} f(x) \sim \dfrac{5e^{-6}}{x-3} = \pm\infty$ $\qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) \sim e^{-2x} \begin{cases} 0^+ \\ +\infty \end{cases}$

$f'(x) = e^{-2x}\dfrac{(-2x^2 + 2x + 7)}{(x-3)^2} \geq 0$ PER $\underset{\text{MIN}}{\dfrac{1-\sqrt{15}}{2}} \leq x \leq \underset{\text{MAX}}{\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}}$



4.124

$f(x) = \frac{1}{\log^2 x} - \frac{2}{\log x} + 1$ D. $x > 0$, $x \neq 1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ $y = 1$ ASINT ORIZZ

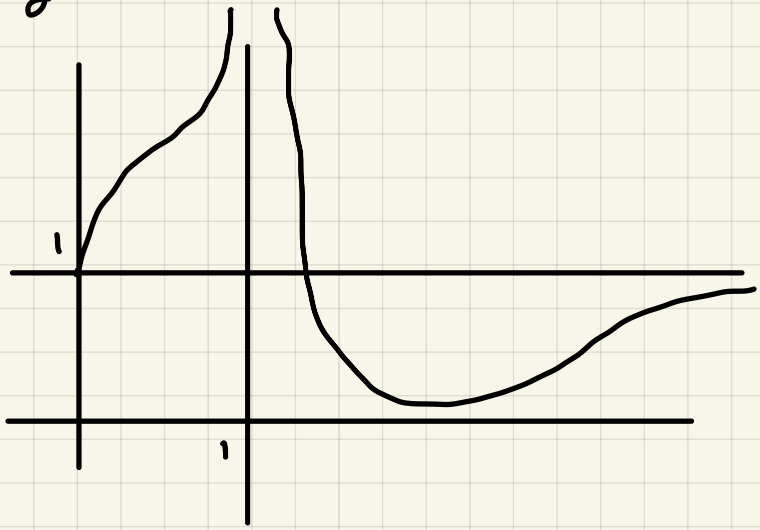
$\lim_{x \to 1^\pm} f(x) \sim \frac{1}{\log^2 x} = +\infty$ $x = 1$ ASINT VERT

$f'(x) = \frac{2(\log x - 1)}{x \log^3 x} \geq 0$ PER $0 < x < 1$, $x \geq e$ MIN MIN

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) \sim \frac{2}{x \log^2 x} = +\infty$ $x = 0$ tg VERT

$f''(x) = -\frac{2(\log^2 x + \log x - 3)}{x^2 \log^4 x} \geq 0$ PER $e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}} \leq x \leq e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}}$ $x \neq \pm 1$

FLEX FLEX



DE L'HOSPITAL

4.176

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+\log x-e^{x-1}}{(x-1)^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\to\frac{\frac{1}{x}-e^{x-1}}{2(x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{-\frac{1}{x^2}-e^{x-1}}{2}=-1$$

4.177

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}\sim\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]\to\frac{\cancel{\cos x}-x\sin x-\cancel{\cos x}}{3x^2}\sim\frac{-x}{3x}=-\frac{1}{3}$$

4.178

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+2\cos x-2}{x^2\sin^2 x}\sim\frac{x\sin x+2\cos x-2}{x^4}=\left[\frac{0}{0}\right]\to\frac{\sin x+x\cos x-2\sin x}{4x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]\to$$

$$\frac{\cancel{\cos x}+\cancel{\cos x}-x\sin x-\cancel{2\cos x}}{12x^2}\sim-\frac{1\cancel{x^2}}{12\cancel{x^2}}$$

4.179

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x+x^3)-\sin x}{x\sin x}\sim\frac{''}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\to\frac{\frac{1+3x^2}{1+x+x^3}-\cos x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]\to$$

$$\frac{\frac{6x(1+x+x^3)-(1+3x^2)^2}{(1+x+x^3)^2}+\sin x}{2}=-\frac{1}{2}$$

4.180

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\log(1-x)}{x^2\sin 3x}\sim\frac{e^x-1+\log(1-x)}{3x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]\to\frac{e^x-\frac{1}{1-x}}{9x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\to$$

$$\frac{e^x-\frac{1}{(1-x)^2}}{18x}=\left[\frac{0}{0}\right]\to\frac{e^x+\frac{2}{(x-1)^3}}{18}=-\frac{1}{18}$$

4.181

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)(x^3+x^2+x-3)}{\log^2 x}=\left[\frac{0}{0}\right]\sim\frac{\sin(\pi x)(x^3+x^2+x-3)}{(x-1)^2}\xrightarrow{H}$$

$$\frac{\pi\cos(\pi x)(x^3+x^2+x-3)+\sin(\pi x)(3x^2+2x+1)}{2(x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]\to$$

$$\frac{-\pi^2\sin(\pi x)(x^3+x^2+x-3)+2\pi\cos(\pi x)(3x^2+2x+1)+\sin(\pi x)(6x+2)}{2}=-6\pi$$

4.182

$$\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\log^2(1+x-\pi)}{x\sin x\cos x/2}\right)\sim\frac{(x-\pi)^2}{x\sin x\cos x/2}=\left[\frac{0}{0}\right]\to\frac{2(x-\pi)}{x(\cos x\cos x/2-\frac{1}{2}\sin x\sin x/2)}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\to\frac{2}{x(-\sin x\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cos x\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cos x\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin x\cos\frac{x}{2})}=\frac{2}{\pi}$$

MAC LAURIN

4.214

$$e^x\,(4°) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

4.215

$$\log(1+x)\,(4°) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

4.216

$$\text{Sh}x\,(5°) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

4.217

$$\cos x\,(6°) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$$

4.218

$$\cos x\,(7°) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^7)$$

4.219

$$\sqrt[3]{1+x}\,(3°) = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{6}x^3 + o(x^3)$$

4.220

$$(1+x)^{-1}\,(5°) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5)$$

4.221

$$\text{Tg}\,x\,(3°) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

4.222

$$\arcsin x\,(3°) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

4.223

$$\sin(x^2)\,(6°) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

4.224

$$\log(1-x)\,(3°) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

4.225

$$\frac{1}{1+x^2}\,(6°) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6)$$

4.226

$$e^{2x}\,(3°) = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{6} + o(x^3)$$

4.227

$$\sqrt{1-x}\,(3°) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{6}x^3 + o(x^3)$$

TAYLOR CON PEANO

4.228

$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ $x_0=1$ $f'(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ $f''(x)=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$

$f(1)=\frac{1}{2}$ $f'(1)=-\frac{1}{2}$ $f''(1)=\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{4}(x-1)^2+(o(x-1)^2)$

4.229

$f(x)=\log(1+x^2)$ $x_0=2$ $f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ $f''(x)=\frac{-2x^2+2}{(1+x^2)^2}$

$f(2)=\log 5$ $f'(2)=\frac{4}{5}$ $f''(2)=-\frac{6}{25}$

$f(x)=\log 5+\frac{4}{5}(x-2)-\frac{6}{25}\frac{(x-2)^2}{2}+(o(x-2)^2)$

4.230

$f(x)=e^{x^2+x}$ $x_0=1$ $f'(x)=2e^{x^2+x}+e^{x^2+x}$ $f''(x)=6e^{x^2+x}+3e^{x^2+x}$

$f(1)=e^2$ $f'(1)=3e^2$ $f''(1)=9e^2$

$f(x)=e^2+3e^2(x-1)+9e^2\frac{(x-1)^2}{2}+(o(x-1)^2)$

4.231

$f(x)=\operatorname{arctg}(x^2)$ $x_0=1$ $f'(x)=\frac{2x}{1+x^4}$ $f''(x)=\frac{-6x^4+2}{(1+x^4)^2}$

$f(1)=\pi/4$ $f'(1)=1$ $f''(1)=-1$

$f(x)=\pi/4+(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+o(x-1)^2$

4.232

$f(x)=\log(\cos x)$ $x_0=\pi/3$ $f'(x)=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\operatorname{tg}x$ $f''(x)=-(1+\operatorname{tg}^2x)$

$f(\pi/3)=-\log 2$ $f'(\pi/3)=-\sqrt{3}$ $f''(\pi/3)=-4$

$f(x)=-\log 2-\sqrt{3}(x-\pi/3)-2(x-\pi/3)^2+(o(x-\pi/3)^2)$

4.233

$f(x)=x^x$ $x_0=e^{-1}$ $f'(x)=x^x(1+\log x)$ $f''(x)=x^x(\log^2x+2\log x+1+1/x)$

$f(e^{-1})=e^{-1/e}$ $f'(e^{-1})=0$ $f''(x_0)=e^{1-1/e}$

$f(x)=e^{-1/e}+e^{1-1/e}\frac{(x-e^{-1})^2}{2}+(o(x-e^{-1})^2)$

4.234

$f(x) = \log(1+2x^2) + 4(\cos x - 1)$

a $f(x) = 2x^2 - \frac{4x^4}{2} + o(x^4) + 4\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = -\frac{11}{6}x^4 + o(x^4)$

b $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+f(x)} - 1}{x^4} \sim \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{11}{6}x^4\right)}{x^4} = -\frac{11}{12}$

4.235

$f(x) = \frac{\log(1+x)}{x} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

a $f(x) = \cancel{1} - \cancel{\frac{x}{2}} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) - \cancel{1} + \cancel{\frac{x}{2}} - \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) = -\frac{1}{24}x^2 + o(x^2)$

b $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{|f(x)|}}{x} = \frac{1}{\sqrt{24}}$

4.236

a $f(x) = \sqrt[3]{1+x} - Ch(\sqrt{6x})$

$f(x) = \cancel{1} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2) - \cancel{1} - 3x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) = -\frac{8}{3}x - \frac{29}{18}x^2 + o(x^2)$

4.237

a $f(x) = \log(1-x^2) - 2\cos x$

$f(x) = -\cancel{x^2} - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) - 2\left(1 - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = -2 - \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)$

4.239

$f(x) = e^x - e^{-x^2} - \sin x$

$f(x) = \left(\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(\cancel{1} - x^2 + o(x^3)\right) - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

4.251

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 2\cos x + 1}{x^2 \log(1+3x^2)} \sim \frac{e^{-x^2} - 2\cos x + 1}{3x^4} = \left[\frac{0}{0}\right]$

NUM $= \cancel{1} - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - 2\left(\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \cancel{1} = \frac{5}{12}x^4 + o(x^4)$

$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{5}{12}x^4}{3x^4} = \frac{5}{36}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{5}{12}x^4}{3x^4} = \frac{5}{36}$

4.253

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-e^x}{\sqrt[3]{x^2}\,(e^{\sqrt[3]{x}}-1)} \sim \frac{\sqrt[3]{1+x}-e^x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \to \frac{\cancel{1}+\frac{1}{3}x+o(x)-\cancel{1}-x+o(x)}{x} = -\frac{2}{3}$$

4.254

$$\lim_{x\to 1}\frac{(e^x-e)^2}{x^3+3x^2-9x+5} = \frac{e^2(e^{x-1}-1)^2}{x^3+3x^2-9x+5} \sim \frac{e^2(x-1)^2}{x^3+3x^2-9x+5} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\xrightarrow{H} \frac{2e^2(x-1)}{3x^2+6x-9} = \frac{2e^2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(3x+9)} = \frac{e^2}{6}$$

4.255

$$\lim_{x\to\pi/6}\frac{(2\sin x+\cos(6x))^2}{(6x-\pi)\sin(6x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \xrightarrow{H} \frac{2(2\sin x+\cos(6x))(2\cos x-6\sin(6x))}{6\sin(6x)+6(6x-\pi)\cos(6x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\xrightarrow{H} \frac{1}{3}\cdot\frac{(2\cos x-6\sin 6x)^2+(2\sin x+\cos(6x))(-2\sin x-36\cos(6x))}{12\cos(6x)-6(6x-\pi)\sin(6x)} = -\frac{1}{12}$$

4.256

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x-1}-\frac{3}{\log x}\right) \xrightarrow{x=1+h} \lim_{h\to 0}\left(\frac{h+3}{h}-\frac{3}{\log(1+h)}\right) = \frac{(h+3)\log(1+h)-3h}{h\log(1+h)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\sim \frac{(h+3)\left(h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)-3h}{h^2} = \frac{-\frac{1}{2}h^2}{h^2} = -\frac{1}{2}$$

4.257

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos 2x-x+2x^3}{x^2\log(1+4x^3)} \sim \frac{\cos 2x-1+2x^2}{4x^4}$$

$$\frac{1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)-1+2x^2}{4x^4} = \frac{1}{6}$$

4.258

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-\cos x)}{x(\sqrt[3]{x}-\sin\sqrt[3]{x})} = \frac{(\cancel{1}+x^2+o(x^2))-(\cancel{1}-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{x(\sqrt[3]{x}-(\sqrt[3]{x}-\frac{x}{6}+o(x)))} = \frac{\frac{3}{2}x^2}{\frac{1}{6}x^2} = 9$$

4.260

$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{arctg} x-\pi/4}{\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\cdot \operatorname{tg}(\pi x)} = \frac{\operatorname{arctg} x-\pi/4}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\operatorname{tg}(\pi x)} =$$

$$\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\operatorname{tg}^2(\pi x))\pi} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}$$

4.261

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\log(1+x)}{x}-e^{-x/2}\right)\frac{1}{\operatorname{Ch}x-1}=$$

$$\left[\frac{1}{x}\left(\cancel{x}-\cancel{\frac{x^2}{2}}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-\left(\cancel{1}-\cancel{\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2+o(x^2)\right)\right]\cdot\frac{1}{\cancel{1}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\cancel{1}}=$$

$$=\frac{5x^2}{24}\cdot\frac{2}{x^2}=\frac{5}{12}$$

4.264

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{e^{x^2}+e^2(1-x^2)}{[\log(x^2-3\sqrt{2}x+5)]^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\to$$

DEN: $[(x^2-3\sqrt{2}x+5)-1]^2=(x^2-3\sqrt{2}x+4)^2=$
$=[(x-\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})]^2\sim[(x-\sqrt{2})(-\sqrt{2})]^2$
$=2(x-\sqrt{2})^2$

$$\hookrightarrow\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{e^{x^2}+e^2(1-x^2)}{2(x-\sqrt{2})^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\xrightarrow{H}\frac{2xe^{x^2}-2xe^2}{4(x-\sqrt{2})}=\left[\frac{0}{0}\right]\to\frac{xe^2(e^{x^2-2}-1)}{2(x-\sqrt{2})}$$

$$\sim\frac{\sqrt{2}e^2(x^2-2)}{2(x-\sqrt{2})}=\frac{e^2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{\sqrt{2}(x-\sqrt{2})}=\frac{e^2(2\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=2e^2$$

4.269

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-x+\frac{1}{2}\right)=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1+\frac{1}{2x}\right)=$$

$$\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1+\frac{1}{2x}\right)}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]\xrightarrow{H}\frac{\frac{1}{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)-\frac{1}{2x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{1}{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)}\left(1+\frac{2}{x}\right)+\frac{1}{2}=1$$

4.270

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(e^{1/ex}-\log(e+1/x)\right)=x^2\left(e^{1/ex}-\log\left[e\left(1+1/ex\right)\right]\right)=$$

$$=x^2\left(e^{1/ex}-1-\log(1+1/ex)\right)=x^2\left(\cancel{\frac{1}{ex}}+\frac{1}{2(ex)^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-\cancel{\frac{1}{ex}}+\frac{1}{2(ex)^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$\sim x^2\cdot\frac{1}{e^2x^2}=\frac{1}{e^2}$$

4.278

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^x}{2^{x^2}}=e^{(x\log x-x^2\log 2)}=e^{h(x)}$$

$$e^{h(x)}\sim-x^2\log 2=-\infty\to e^{h(x)}\to 0$$

4.296

$f(x) = 2 - x^2 + 3x^4 + o(x^4) \quad x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 2 + x\sin x}{x^4} = \frac{\cancel{2} - \cancel{x^2} + 3x^4 - \cancel{2} + x(\cancel{x} - x^3/6 + o(x^4))}{x^4} = \frac{\frac{17}{6}x^4}{x^4} = \frac{17}{6}$$

4.302

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\operatorname{Sh} x) + \operatorname{Ch}(\sin x) - 2}{x^\alpha}$$

$$\cos(\operatorname{Sh} x) = \cos\left(x + x^3/6 + o(x^4)\right) = 1 - \tfrac{1}{2}\left(x + x^3/6 + o(x^4)\right)^2 +$$

$$+ \tfrac{1}{24}\left(x + x^3/6 + o(x^4)\right)^4 + o(x^4) = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$\operatorname{Ch}(\sin x) = \operatorname{Ch}\left(x - x^3/6 + o(x^4)\right) = 1 + \tfrac{1}{2}\left(x - x^3/6 + o(x^4)\right)^2 +$$

$$+ \tfrac{1}{24}\left(x - x^3/6 + o(x^4)\right)^4 = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$f(x) = \frac{-\frac{1}{4}x^4}{x^\alpha} \qquad f(x) \sim -\frac{x^{4-\alpha}}{4} \begin{cases} 0 & \alpha < 4 \\ -1/4 & \alpha = 4 \\ -\infty & \alpha > 4 \end{cases}$$

4.303

$$f(x) = \frac{1}{1 - x + x^2} \qquad z = x - x^2 \qquad \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + o(z^3)$$

$$f(x) \sim 1 + (x - x^2) + (x - x^2)^2 + (x - x^2)^3 + o(x - x^2)^3 =$$

$$= 1 + x \cancel{- x^2} \cancel{+ x^2} - 2x^3 + x^3 + o(x^3) = 1 + x - x^3 + o(x^3)$$

4.304

$$\log(\cos x)(4^\circ) = (\cancel{1} - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)) - \frac{(\cancel{1} - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4))^2}{2} + o(x^4) =$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

4.305

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Sh}(\sin x) - x}{x^4 \sin x}$$

$$\operatorname{Sh}(\sin x) - x = \left(\cancel{x} - \cancel{\frac{x^3}{6}} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) + \frac{\left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)^3}{6} + \frac{(x + o(x^5))^5}{120} + o(x^5) \cancel{- x}$$

$$= x^5\left(\frac{2}{120} - \frac{3}{36}\right) + o(x^5) = -\frac{x^5}{15} + o(x^5)$$

$$f(x) \sim \frac{-\frac{1}{15}x^5}{x^5} = -1/15$$

SERIE NUMERICHE

5.1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2n^3+2n+2} \sim \frac{n}{2n^3} = \frac{1}{2n^2} \quad \text{CONV PER CONFRONTO CON } \frac{1}{n^\alpha}$$

5.2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^2+n+1}} \sim \frac{n^{1/3}}{n} = n^{-2/3} \quad \text{DIV} \quad \alpha = \tfrac{2}{3} < 1 \quad \frac{1}{n^\alpha}$$

5.3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^3} = \frac{\log n}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n^2} \quad \text{CONV}$$

5.4

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+\log^3 n}{n!+2^n} \sim \frac{n}{n!} = \frac{n}{n(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} \quad \text{CONV}$$

5.5

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{\frac{2+n^2}{n+1}}}{2^{2n}} = \frac{3^{n-1+\frac{3}{n+1}}}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 3^{-1+\frac{3}{n+1}} \sim \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \text{CONV}$$

5.6

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^2 n + 1}{n\log^2 n + n^2 \log n} \sim \frac{\log^2 n}{n^2 \log n} = \frac{\log n}{n^2} \le \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{CONV}$$

5.7

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\, 3^{n+1}}{n!} = \frac{\sqrt{n+1}\, 3^{\cancel{n}+2}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\sqrt{n}\, 3^{\cancel{n+1}}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{3}{n+1} \sim \frac{3}{n} \to 0 \quad \text{CONV}$$

5.8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{n/2}} = \sqrt[n]{x} = \frac{2}{\sqrt{n}} \to 0 \quad \text{CONV}$$

5.9

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\overset{\to 1}{\frac{n^2+2n}{n^2+1}}} - e\right) = e\left(\frac{n^2+2n}{n^2+1} - 1\right) = e\left(\frac{2n-2}{n^2+1}\right) \sim \frac{2e}{n} \quad \text{DIV}$$

5.10

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\overset{\to 1}{\frac{n^2+3\sqrt{n}}{n^2+4}}\right) \sim \left(\frac{n^2+3\sqrt{n}}{n^2+4} - 1\right) = \frac{3\sqrt{n}-4}{n^2+4} \sim \frac{3}{n^{3/2}} \quad \text{CONV}$$

5.11

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{n!} = \frac{(n+1)^2 \cdot 3^{\cancel{n}+1}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^2 \cancel{3^n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{3}{n+1} \sim \frac{3}{n} \to 0 \quad \text{CONV}$$

5.12

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\log n}{n+3\sqrt{n}+5}\right) \sim \frac{\log n}{n} > \frac{1}{n} \quad \text{DIV}$$

5.13

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{n+1}{3-n^2}}-e^{1/n}\right)\sim\left(\frac{n+1}{3-n^2}-\frac{1}{n}\right)=\frac{2n^2+n-3}{n(3-n^2)}\sim\frac{2n^2}{-n^3}=-\frac{2}{n}\quad \text{DIV}$$

5.14

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(\sqrt{n})^n}=\frac{\cancel{\sqrt{(n+1)!}}}{(\sqrt{n+1})^{n+1}}\cdot\frac{(\sqrt{n})^n}{\cancel{\sqrt{n!}}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}<1\quad \text{CONV}$$

5.15

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\Big(\overbrace{\frac{n^3+1}{n^3-3n}}^{\to 1}\Big)\log n\sim\left(\frac{n^3+1}{n^3-3n}-1\right)\log n\sim\frac{3}{n^2}\log n\le\frac{1}{n^{3/2}}\quad \text{CONV}$$

5.16

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}\cdot n!}{(2n+1)!}=\frac{27^{\cancel{n+1}}\cdot(n+1)\cancel{!}}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{\cancel{27^n}\cdot\cancel{n!}}=\frac{27(n+1)\cancel{(2n+1)}}{(2n+3)(2n+2)\cancel{(2n+1)}}\sim\frac{27\cancel{n}}{4n^{\cancel{2}}}\to 0\quad \text{CONV}$$

5.18

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}=\frac{2^{\cancel{n+1}}\cancel{(n+1)!}}{(n+1)^{n+\cancel{1}}}\cdot\frac{n^n}{\cancel{2^n}\cancel{n!}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot 2=2\cdot\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}<1\quad \text{CONV}$$

5.20

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}\to\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}\quad \text{CONV ASSOL}$$

5.21

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n+\sqrt{n}}\quad \downarrow 0\quad \text{CONV SEMPL}$$

5.22

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{1/n}$$ OSCILLA POICHÉ $e^{1/n}\to 1$

5.24

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n\sqrt{n}}=|a_n|\le\frac{1}{n^{3/2}}\quad \text{CONV}$$

5.25

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\log n}=|a_n|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n}>\frac{1}{n}\quad \text{DIV}$$

5.26

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{\sin n}\left(\sin\frac{1}{n}\right)\left(e^{1/\sqrt{n}}-1\right)\cos n=|a_n|\le e\left(\sin\frac{1}{n}\right)\left(e^{1/\sqrt{n}}-1\right)\sim\frac{e}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{e}{n^{3/2}}\quad \text{CONV}$$

5.27

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\cdot\sin\frac{1}{n}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)=|a_n|\le\sin\frac{1}{n}\left|\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right|\sim\frac{1}{n}\left|-\frac{1}{2n}\right|=\frac{1}{2n^2}\quad \text{CONV}$$

5.31

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^n} = \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}\,\log n} \sim \frac{1}{\log n} \to 0 \quad \text{CONV}$$

5.33

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} = \frac{2^{\cancel{n+1}}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} = \frac{2}{n+1} \to 0 \quad \text{CONV}$$

5.35

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n+\sqrt{n}} \downarrow 0 \quad \text{CONV}$$

5.36

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^n}{n!} = \frac{(n+1)^2 2^{n+1}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^2 \cancel{2^n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{n+1} \sim \frac{2}{n} \to 0 \quad \text{CONV}$$

5.37

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^3 \log n + 3} \sim \frac{1}{n^2 \log n} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{CONV}$$

5.39

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{DIV}$$

5.41

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n + \log^3 n}{n!} \sim \frac{2^n}{n!} = \frac{2^{\cancel{n+1}}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} = \frac{2}{n+1} \sim \frac{2}{n} \to 0 \quad \text{CONV}$$

5.44

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + n^2}{2^n + n!} = \frac{3^{\cancel{n+1}} + (n+1)^2}{2^{n+1} + (n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{2^n + n!}}{\cancel{3^n} + n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{3}{2(n+1)} \sim \frac{3}{2n} \to 0 \quad \text{CONV}$$

5.45

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{[(n+1)\cancel{!}]^2}{(2n+2)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{2n!}}{\cancel{(n!)^2}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \sim \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4} < 1 \quad \text{CONV}$$

5.55

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\Big(\underbrace{\frac{n^3}{n^3+2n}}_{\to 1}\Big) = \left(\frac{n^3}{n^3+2n} - 1\right) = -\frac{2n}{n^3+2n} \sim -\frac{2}{n^2} \quad \text{CONV}$$

5.74

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(e^{1/n^2} - \cos \tfrac{1}{n}\right) \log n = \left[\left(1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right] \log n =$$

$$= \left(\frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \cdot \log n \sim \frac{3 \log n}{2n^2} \leq \frac{3}{2n^{3/2}} \quad \text{CONV}$$

5.75

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\cos \tfrac{1}{n} - \operatorname{Ch} \tfrac{1}{n}\right) = \sqrt{n}\left[\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right] =$$

$$= \sqrt{n}\left(-\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim -\frac{\sqrt{n}}{n^2} = -\frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{CONV}$$

INTEGRALI

6.1

$$\int\left(5x^2-\sqrt{x}+\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+4\right)dx=\frac{5}{3}x^3-\frac{2}{3}x^{3/2}+\log|x|-3x^{2/3}+4x+c$$

6.2

$$\int(x^2-1)^2dx=\int(x^4+1-2x^2)dx=\frac{x^5}{5}+x-\frac{2}{3}x^3+c$$

6.3

$$\int\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=\log|1+x|+2\,\text{arctg}\,x-2\arcsin x+c$$

6.4

$$\int(2x+1)^3dx\to t=2x+1\ |\ dt=2dx\to\int\frac{t^3}{2}dt=\frac{t^4}{8}+c=\frac{(2x+1)^4}{8}+c$$

6.5

$$\int\left(\frac{3}{1-5x}+2\sqrt{3x+1}\right)dx=\frac{3}{5}\log|1-5x|+\frac{4}{9}(3x+1)^{3/2}+c$$

6.6

$$\int(3^x-2^{3x+1}+5e^{-7x})dx=\frac{3^x}{\log 3}-\frac{2^{3x+1}}{3\log 2}-\frac{5}{7}e^{-7x}+c$$

6.7

$$\int(2\sin 3x+5\cos 2x)dx=-\frac{2}{3}\cos 3x+\frac{5}{2}\sin 2x+c$$

6.8

$$\int(\text{tg}\,x+3\cot x)dx=-\log|\cos x|+3\log|\sin x|+c$$

6.9

$$\int(2\,\text{Th}x-5\,\text{Coth}x)dx=2\log|\text{Ch}x|-5\log|\text{Sh}x|+c$$

6.10

$$\int(\text{Sh}2x-4\,\text{Ch}3x)dx=\frac{1}{2}\text{Ch}2x-\frac{4}{3}\text{Sh}3x+c$$

RAZIONALI

$$\int\frac{1}{a^2+(x+b)^2}=\frac{1}{a}\,\text{arctg}\left(\frac{x+b}{a}\right)+c\qquad\qquad\int\frac{1}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\,\text{arctg}\,\frac{x}{a}+c$$

6.11

$$\int\frac{1+x}{x^2+3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+3}dx+\int\frac{1}{x^2+3}dx=\frac{1}{2}\log|x^2+3|+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{3}}+c$$

6.12

$$\int_{-1}^{1}\frac{3x}{x^2+2x+5}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}-3\int\frac{1}{(x+1)^2+4}dx=$$

$$\left[\frac{3}{2}\log|x^2+2x+5|-\frac{3}{2}\,\text{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]_{-1}^{1}=\frac{3}{2}\log 2-\frac{3}{8}\pi$$

6.13

$$\int \frac{x^2}{x^2+3x+2}\,dx = 1 - \frac{3x+2}{x^2+3x+2} \Rightarrow \frac{3x+2}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x+2)}$$

$$3x+2 = a(x+2) + b(x+1) \rightarrow 3x+2 = x(a+b) + (2a+b)$$

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 2a+b=2 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \end{cases} \rightarrow$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+3x+2}\,dx = \int 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x+2}\,dx = x + \log|x+1| - 4\log|x+2| + c$$

6.16

$$\int_0^{1/2} \frac{x^3}{x^2-1}\,dx = x + \frac{x}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$$

$$x = a(x-1) + b(x+1) \rightarrow x = x(a+b) + (-a+b)$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -a+b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int_0^{1/2} \frac{x^3}{x^2-1}\,dx = \int x + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log|x^2-1|\right]_0^{1/2} = \frac{1}{8} + \log\frac{\sqrt{3}}{2}$$

6.20

$$\int_0^2 \frac{x^3}{x^2+4x+3}\,dx = (x-4) + \frac{13x+12}{x^2+4x+3} = \frac{13x+12}{(x+3)(x+1)} = \frac{a}{(x+3)} + \frac{b}{(x+1)}$$

$$13x+12 = x(a+b) + (a+3b) \rightarrow \begin{cases} a+b=13 \\ a+3b=12 \end{cases} \quad \begin{cases} a=\frac{27}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int_0^2 \frac{x^3}{x^2+4x+3}\,dx = \int x - 4 + \frac{27}{2}\cdot\frac{1}{x+3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$\left[\frac{x^2}{2} - 4x + \frac{27}{2}\log|x+3| - \frac{1}{2}\log|x+1|\right]_0^2 = -6 + \frac{27}{2}\log 5/3 - \log\sqrt{3} \quad X$$

PER PARTI

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx + c$$

6.22

$$\int_0^1 x^2 Shx\,dx = x^2 Chx - 2\int x\,Chx\,dx + c = x^2 Chx - 2\left(x\,Shx - \int Shx\,dx\right) + c$$

$$= \left[x^2 Chx - 2x\,Shx + 2Chx\right]_0^1 = 3Ch1 - 2Sh1 - 2$$

6.23

$$\int x \log_2 x \, dx = \frac{x^2}{2}\log_2 x - \frac{1}{2}\int x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}\log 2} dx + c =$$

$$= \frac{x^2}{2}\log_2 x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log 2}\cdot \int x \, dx\right) + c = \frac{x^2}{2}\log_2 x - \frac{1}{4}\frac{x^2}{\log 2} + c$$

6.26

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = -x\cos x + \int \cos x \, dx = \left[-x\cos x + \sin x\right]_0^{\pi} = \pi$$

6.28

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2} dx = -\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x + \int \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x + \log|x| - \frac{1}{2}\log|1+x^2| + c$$

IRRAZIONALI

6.41

$$\left[\sqrt{3-x^2} = \tau;\ 3-x^2 = \tau^2;\ x\,dx = -\tau\, d\tau;\ x^2 = 3-\tau^2\right]$$

$$\int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x^2} x\, dx = -\int \frac{\tau}{3-\tau^2}\tau\, d\tau = \int \frac{\tau^2}{\tau^2-3} d\tau = \int 1 + \frac{3}{\tau^2-3} d\tau$$

$$= \tau + \frac{\sqrt{3}}{2}\int\left(\frac{1}{\tau-\sqrt{3}} - \frac{1}{\tau+\sqrt{3}}\right) d\tau = \tau + \frac{\sqrt{3}}{2}\log\left|\frac{\tau-\sqrt{3}}{\tau+\sqrt{3}}\right| + c =$$

$$= \sqrt{3-x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\log\left|\frac{\sqrt{3-x^2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3-x^2}+\sqrt{3}}\right| + c$$

6.45

$$\left[x = 2\sin\tau;\ dx = 2\cos\tau\, d\tau\right]$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^{\pi/6} \frac{4\sin^2\tau \cdot 2\cos\tau}{\sqrt{4-4\sin^2\tau}} d\tau = 4\int_0^{\pi/6} \sin^2\tau\, d\tau =$$

$$4\left[\frac{\tau - \sin\tau\cos\tau}{2}\right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

SIMMETRIE

6.52

$$\int_{-1}^{1} \frac{|x| + \sin x}{1+x^2} dx = \int_{-1}^{1} \frac{|x|}{1+x^2} dx + \int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{1+x^2} dx = 2\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\log|1+x^2|\right]_0^1 = \log 2$$

6.53

$$\int_0^{2\pi} e^{-2x}|\sin x|\,dx = \int_0^{\pi} e^{-2x}\sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-2x}\sin x\,dx =$$

$$\left[-\tfrac{1}{5}e^{-2x}(\cos x + 2\sin x)\right]_0^{\pi} - \left[-\tfrac{1}{5}e^{-2x}(\cos x + 2\sin x)\right]_{\pi}^{2\pi} = \tfrac{1}{5}\left(1 + 2e^{-2\pi} + e^{-4\pi}\right)$$

6.54

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-|x|}\cos x\,dx = 2\int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx = \left[e^{-x}(\sin x - \cos x)\right]_0^{\pi} = e^{-\pi} + 1$$

$$\int e^{x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\cos x\,dx$$

$$2\int e^{x}\cos x\,dx = e^{-x}(-\cos x + \sin x)$$

VARI

6.56

$$\int \frac{3x}{x^2+2x-3}\,dx = \frac{3x}{(x-1)(x+3)} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x+3)}$$

$$3x = x(a+b) + (3a-b)$$

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 3a-b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 3/4 \\ b = 9/4 \end{cases} \quad \int F(x) = \int \frac{3}{4(x-1)} + \frac{9}{4(x+3)}\,dx = \frac{3}{4}\log|x-1| + \frac{9}{4}\log|x+3| + c$$

6.58

$$\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\log|x^2+2x+2| - \operatorname{arctg}(x+1) + c$$

6.59

$$[e^x = t;\ e^x dx = dt;\ t \in [1,e]]$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+3}\,dx = \int_1^e \frac{1}{t+3}\,dt = \left[\log|t+3|\right]_1^e = \log\left(\frac{e+3}{4}\right)$$

6.61

$$[\log x = t;\ \frac{dx}{x} = dt;\ t \in [1,2]]$$

$$\int_e^{e^2} \frac{\log(\log x)}{x}\,dx = \int_1^2 \log t\,dt = \left[x\log x - x\right]_1^2 = 2\log 2 - 1$$

6.63

$$\int_1^2 x^3\log x\,dx = \frac{x^4}{4}\log x - \frac{1}{4}\int x^4\frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\log x - \frac{x^4}{16}\right]_1^2 = 4\log 2 - \frac{15}{16}$$

GENNAIO 2023 - A

DOMANDA 1

a. Enunciare la disuguaglianza di Bernoulli. [3 pt]

b. Dimostrare la disuguaglianza di Bernoulli spiegando i passaggi e le ipotesi usate. [7 pt]

a $(1+x)^n \geq 1+xn \quad \forall x \geq -1, \ \forall n \in \mathbb{N}$

b POSSO DIMOSTRARLO PER INDUZIONE

CASO BASE: $P(0) \rightarrow (1+x)^n = 1, \quad 1+x\,0=1 \qquad 1 \geq 1$

CASO INDUTTIVO:

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\geq (1+xn)(1+x) \\ &= 1+xn+x+x^2n \\ &= 1+x(n+1)+x^2n \qquad x^2n \geq 0 \\ &\geq 1+x(n+1)\end{aligned}$$

$(1+x)^n(1+x) \geq 1+x(n+1)$

DOMANDA 2

a. Dare la definizione di *successione divergente a* $-\infty$. [4pt]

b. Dimostrare, usando la definizione, che la successione $\{-\sqrt{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$. [6pt]

a SI DICE CHE UNA SUCCESSIONE $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ DIVERGE A $-\infty$ E SCRIVEREMO $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ SE: $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n < M$

b $a_n = -\sqrt{n}$ SIA $M>0$ $\quad n_M = (\lceil M \rceil + 1)^2 \quad n_M > M > 0$

SI HA QUINDI: $n > n_M \iff \sqrt{n} > \sqrt{n_M}$

$\iff -a_n > \sqrt{(\lceil M \rceil+1)^2} = |\lceil M \rceil + 1| = \lceil M \rceil + 1 > M$

$\iff -a_n > M \iff a_n < -M$

DOMANDA 3

a. Enunciare il Teorema Fondamentale del Calcolo integrale. [4 pt]

b. Dimostrare il Teorema Fondamentale del Calcolo integrale[a] [6 pt]

a SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f \in C([a,b])$. DEFINITA $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ COME

$$F(x) = \int_a^x f(\tau)\,d\tau$$

ALLORA F È UNA PRIMITIVA DI f IN $[a,b]$. OVVERO F DERIVABILE IN $[a,b]$ E VALE: $\quad F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$

b CONSIDERIAMO UN PUNTO GENERICO x IN [a,b] E FACCIAMO VEDERE CHE ∃ ED È FINITO:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(\tau)d\tau - \int_a^x f(\tau)d\tau}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{\int_a^x f(\tau)d\tau} + \int_x^{x+h} f(\tau)d\tau - \cancel{\int_a^x f(\tau)d\tau}}{h}$$

PER IL TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE CON $a=x$, $b=x+h$ ESISTERÀ UN $c \in [x,x+h]$: $f(c)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(\tau)d\tau \Rightarrow h f(c)=\int_x^{x+h} f(\tau)d\tau$

ESSENDO f CONTINUA IN [a,b], OTTENIAMO.

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)+F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c) = \lim_{c\to x} f(c) = f(x)$$

ESERCIZIO 1

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione convergente e sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$. Sia $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dire quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera:

1. $\ell = \infty \vee \ell = -\infty$
2. $\inf A = \sup A = \ell$
3. $\inf A < \ell < \sup A$
4. A è limitato

4 OGNI SUCCESSIONE CONV È LIMITATA

ESERCIZIO 2

Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $z + z\bar{z} = 4$. Quali delle seguenti è vera[a]:

1. $\Im(z) = 0$
2. $\Re(z) = 0$
3. $|z| = 1$
4. $\Im(z) = \Re(z)$

$z = a+ib$ $\qquad a+ib+a^2+b^2=4$

$\bar{z} = a-ib$ $\qquad (a+a^2+b^2)+ib=4$

$\Im(4)=0 \Rightarrow \Im(z)=0$

ESERCIZIO 3

Studiare il carattere della serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$.

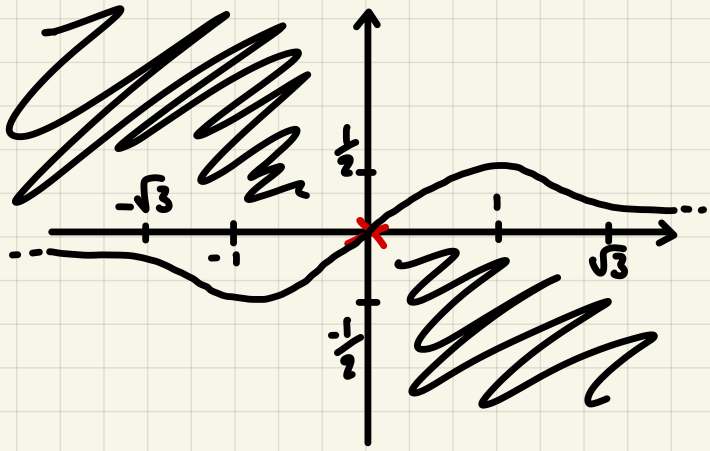
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(2n)!} \quad \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{\cancel{(n+1)}}{2\cancel{(n+1)}(2n+1)} \sim \frac{e}{4n} \to 0 \quad \text{CONV}$$

ESERCIZIO 4

Studiare la funzione $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ e tracciarne un grafico qualitativo studiandone

- il dominio, le proprietà della funzione, il comportamento nei punti di accumulazione, monotonia ed estremi locali e assoluti,
- concavità e flessi.

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ $\qquad$ $D: \mathbb{R}$



POSITIVITÀ:

$f(x) \geq 0$ PER $x \geq 0$

SIMMETRIA:

$f(-x) = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x)$ DISPARI

LIMITI:

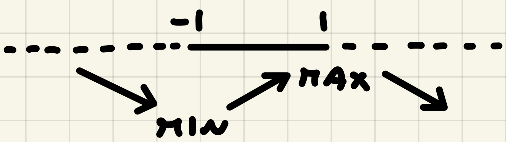
$\lim_{x \to +\infty} f(x) \sim \frac{1}{x} \to 0$ STESSA COSA PER $-\infty$

INTERSEZIONI:

PER $x=0 \to y=0$ $\qquad$ PER $y=0 \to f(x)=0 \iff x=0$

MAX E MIN:

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \geq 0$$



$1 - x^2 \geq 0$

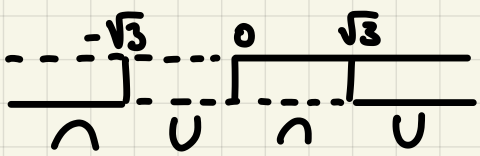
$x \leq \pm\sqrt{1} \to -1 \leq x \leq 1$

$f(\pm 1) = \frac{1}{2} \wedge -\frac{1}{2}$

FLESSI:

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (-x^2+1)\,2(x^2+1)\,2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2x^5 - 4x^3 - 6x}{(x^2+1)^4} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} \geq 0$$

$$2x(x^2-3) \geq 0 \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq \pm\sqrt{3} \end{cases}$$



ESERCIZIO 5

Calcolare l'integrale definito $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x dx$.

$g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = e^x \mid f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$

$$\int_0^{\pi/4} e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

$$2 \int_0^{\pi/4} e^x \sin x dx = \left[e^x (\sin x - \cos x)\right]$$

$$\int_0^{\pi/4} e^x \sin x dx = \left[\frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x)\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}$$

GENNAIO 2023 - B

DOMANDA 1

a. Scrivere la formula per la somma geometrica con le sue ipotesi [3 pt],

b. e dimostrarla per induzione spiegando con cura i passaggi eseguiti. [7 pt]

a $$\sum_{k=0}^{n} q^k \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$$

b CASO BASE: $n=0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{0} q^k = \dfrac{1-q}{1-q} = q^0 = 1$

CASO INDUTTIVO: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} =$$

$$= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{(n+1)+2}}{1-q}$$

DOMANDA 2

a. Dare la definizione di *successione divergente a* $+\infty$. [4pt]

b. Dimostrare, usando la definizione, che la successione $\{\sqrt{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$. [6pt]

a SI DICE CHE UNA SUCCESSIONE $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ DIVERGE A $+\infty$, CIOÈ

$\lim_{x\to+\infty} a_n = +\infty$ SE: $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0\ \ a_n > M$

b $a_n = \sqrt{n}$ SIA $M > 0$ E $n_M = (\lceil M \rceil + 1)^2$ CON $n_M > M > 0$

$n > n_M \Leftrightarrow \sqrt{n} > \sqrt{n_M}$

$a_n > |\lceil M \rceil + 1| = \lceil M \rceil + 1 > M$

$a_n > M$

DOMANDA 3

a. Enunciare il Teorema della Media Integrale. [4 pt]

b. Dimostrare il Teorema della Media Integrale[a] [7 pt]

a SIA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C([a,b])$ ALLORA ESISTE UN $c \in [a,b]$:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

b f È CONTINUA E DERIVABILE IN $[a,b]$, PERCIÒ $\int_a^b f(x)dx$ È BEN DEFITO IN $\mathbb{R}$.

SICCOME $f \in C([a,b])$ PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$:

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall x \in [a,b]$$

PER MONOTONIA DELL' INTEGRALE

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

E PER IL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI.

$$\exists\, c \in [a,b] : f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

ESERCIZIO 1

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione convergente e sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$. Sia $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dire quali delle seguenti è necessariamente vera

1. $\inf A = \sup A = \ell$
2. $\ell = \infty \vee \ell = -\infty$
3. A è limitato
4. $\inf A < \ell < \sup A$

3 OGNI SUCCESSIONE CONV È ANCHE LIMITATA

ESERCIZIO 2

Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $z + z\bar{z} = \frac{i}{2}$. Quali delle seguenti è necessariamente vera[a]:

1. $\Re(z) = \frac{1}{2}$
2. $\Im(z) = \frac{1}{2}$
3. $\Im(z) = 0$
4. nessuna delle precedenti

$z = a + ib$

$z\bar{z} = a^2 + b^2$

$(a + a^2 + b^2) + ib = \frac{1}{2}i$

$$\begin{cases} a + a^2 + b^2 = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} a + a^2 + \frac{1}{4} = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 4a + 4a^2 + 1 = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2a+1)^2 = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Im(z) = \frac{1}{2}$ $\quad z = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

ESERCIZIO 3

Studiare il carattere della serie numerica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a}{n!}$, con $a \in \mathbb{R}$.

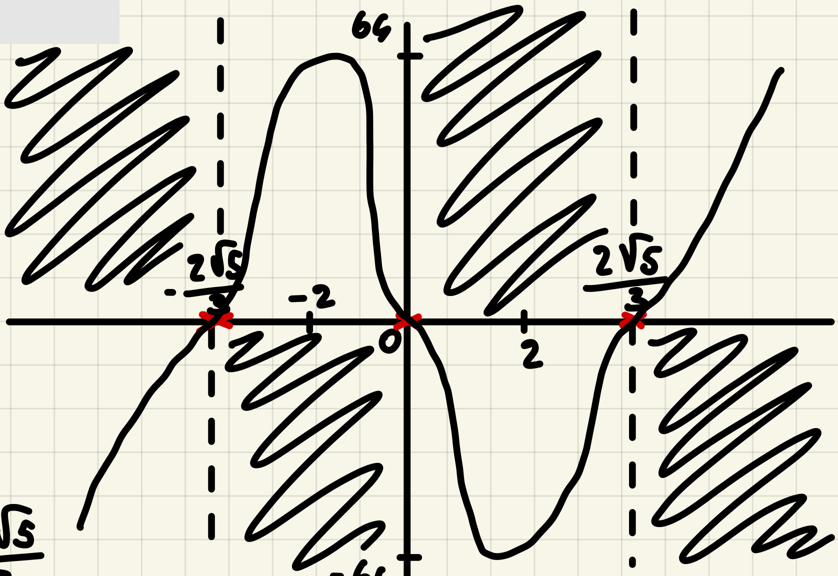
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{n!} = \frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^\alpha} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{1}{n+1} \to \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{CONV } \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

ESERCIZIO 4

Studiare la funzione $f(x) = 3x^5 - 20x^3$ e tracciarne un grafico qualitativo studiandone

- il dominio, le proprietà della funzione, il comportamento nei punti di accumulazione, monotonia ed estremi locali e assoluti (6,5 pt),
- concavità e flessi.

$f(x) = 3x^5 - 20x^3 \quad D: \mathbb{R}$



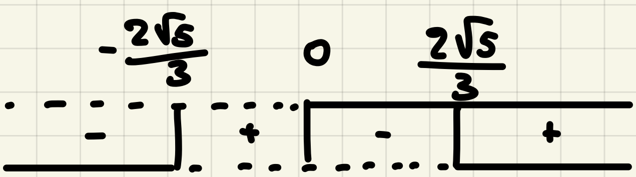
SIMMETRIE:

$f(-x) = -f(x)$ DISPARI

POSITIVITÀ:

$f(x) > 0$

$$x^3(3x^2 - 20) > 0 \begin{cases} x > 0 \\ x < -\frac{2\sqrt{5}}{3} \vee x > \frac{2\sqrt{5}}{3} \end{cases}$$



INTERSEZIONI:

PER $x=0$ $\quad y=0$

PER $y=0$ $\quad f(x)=0 \iff x^3(3x^2-20)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\frac{2\sqrt{5}}{3} \end{cases}$

LIMITI:

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ NO ASINT ORIZZ

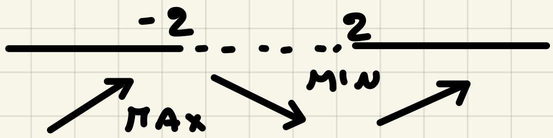
POICHÉ $D:\mathbb{R}$ NO ASINT VERT

$m=\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = +\infty$ NO ASINT OBL

MAX E MIN:

$f'(x)= 15x^4-60x^2 \geq 0$

$15x^2(x^2-4)\geq 0 \begin{cases} 15x^2\geq 0 \text{ SV} \\ x\leq -2 \vee x\geq 2 \end{cases}$

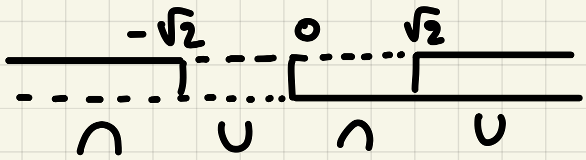


$f(2)=-64 \qquad f(-2)=64$

FLESSI:

$f''(x)= 60x^3-120x \geq 0$

$60x(x^2-2)\geq 0 \begin{cases} x\geq 0 \\ x<-\sqrt{2} \vee x>\sqrt{2} \end{cases}$



ESERCIZIO 5

Calcolare l'integrale definito $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$.

$$\int_0^{\pi/2} x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx = x^2\sin x - 2\left(-x\cos x + \int \cos x\,dx\right)$$

$$= \left[x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

FEBBRAIO 2023 - A

T.V.B. ♥

DOMANDA 1

Domanda 1 (10 pt)

a. Dare la definizione di convergenza di una serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. (3 pt)

b. Dimostrare la convergenza della serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ quando $|q| < 1$. (7 pt)

a DATA UNA SUCCESSIONE $\{a_n\}_{n\in}$, DIREMO CHE LA SUA SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CONVERGE SE $\lim_{n\to+\infty} S_n$ (SOMME PARZIALI $\sum_{n=0}^{K} a_K$) $= S \in \mathbb{R}$

b DOBBIAMO STUDIARE IL $\lim_{n\to+\infty} \sum_{n=0}^{K} q^K$

PER $q \neq 1$ $\sum_{n=0}^{K} q^K = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. STUDIAMO IL lim PER $|q|<1$

$\rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$

DOMANDA 2

Domanda 2 (11 pt)

a. Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $x_0 \in \overline{X}$. Dare la definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. (4 pt)

b. Dimostrare che $f(x) = \operatorname{sgn} x$ per x che tende a $x_0 = 0$ non ammette limite. (7 pt)

a SIANO $f: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{X}$ PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER $X \in \mathbb{R}$.

ℓ SI DICE $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ SE:

$$\forall I \in \mathcal{I}(\ell),\ f(x) \in I \text{ DEF PER } x \to x_0$$

b $f(x) = \operatorname{sgn} x \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x$

NON AMMETTE LIMITE IN 0

DOMANDA 3

Domanda 3 (10 pt)

a. Enunciare il Teorema di Lagrange. (4 pt)

b. Dimostrare il Teorema di Lagrange. (6 pt)

a SIA $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, f CONTINUA IN $[a,b]$, f DERIVABILE IN (a,b).

ALLORA ESISTE $c \in (a,b)$: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

b SIA $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$. VERIFICA LE IPOTESI DEL TEOREMA DI ROLLE IN $[a,b]$. DEV'ESSERE $g(a) = g(b)$, MA SI VEDE CHE $g(a) = g(b) = f(a)$. QUINDI $\exists\, c \in [a,b] : g'(c) = 0$, CIOÈ:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

ESERCIZIO 1

Esercizio 1 (3 pt)

Sia $f(x) = \sqrt{\log \cos x}$. Quale delle seguenti è vera ?

1. dom $f = \{x : x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
2. ✓ dom $f = \{x : x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
3. rng $f = [0, 1]$
4. dom $f = (0, \infty)$

$$\begin{cases} \log \cos x \geq 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \qquad -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ESERCIZIO 2

Esercizio 2 (3 pt) Per quale $x \in \mathbb{R}$ si ha che $\int_e^{\sqrt{x}} f(t)dt$ è esattamente 0 ?

1. e
2. e^2
3. $\sqrt{e}$
4. $2e$

SAPPIAMO CHE $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ QUINDI:

$\sqrt{x} = e$

$x = e^2 \rightarrow \int_e^e f(x)\,dx = 0$

ESERCIZIO 3

Esercizio 3 (8 pt)
Usando lo sviluppo di Mc Laurin calcolare, se esiste, il

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2(e^{x^2}-1))}{x^6+x^4}$$

$$(e^{x^2}-1) = 1 + x^2 + o(x^2) - 1 = x^2 + o(x^2)$$

$$\sim \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^4)}{x^4} \xrightarrow{x^4 = t} \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} \to 1$$

ESERCIZIO 4

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx \qquad t = x^2$$
$$dt = 2x\,dx$$

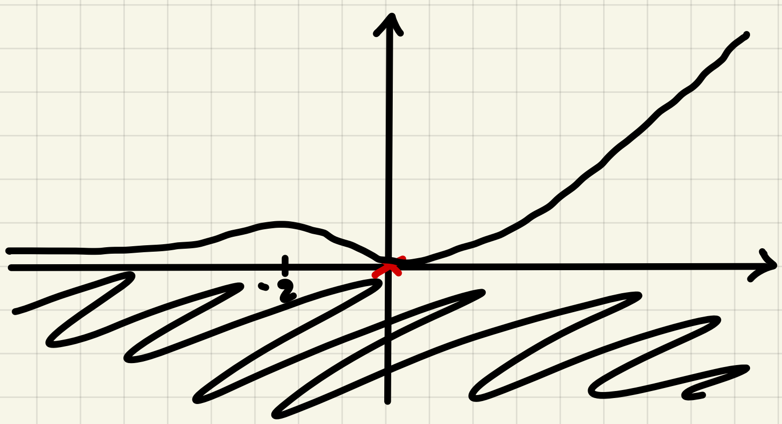
$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2} \arcsin t + c = \frac{1}{2} \arcsin x^2 + c$$

ESERCIZIO 5

Esercizio 5 (10 pt)
Studiare la funzione $f(x) = x^2e^x$ e tracciarne un grafico qualitativo studiandone

- il dominio, le proprietà della funzione, continuità, il comportamento nei punti di accumulazione, monotonia ed estremi locali e assoluti (6,5 pt),
- concavità e flessi (3,5 pt).

$f(x) = x^2 e^x \qquad D: \mathbb{R}$



SIMMETRIE:

$f(-x) = x^2 e^{-x}$ NO PARI/DISP

POSITIVITÀ:

$f(x) > 0$ SEMPRE PER $x \neq 0$

INTERSEZIONI:

PER $x=0 \quad y=0$

PER $y=0 \quad f(x)=0 \iff x=0$

LIMITI:

PER IL D NON CI SONO ASINT VERT

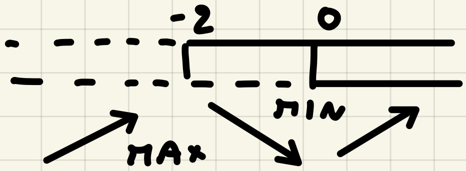
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{x^2}{e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \xrightarrow{H} -\frac{2x}{e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \xrightarrow{H} \frac{2}{e^{-x}} \to 0^+$$

$$m = \lim_{x\to+\infty} f(x)/x = +\infty$$ NO ASINT OBL

MAX E MIN:

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x =$$

$$= xe^x(2+x) \geq 0 \quad \begin{cases} x > 0 \\ x > -2 \end{cases}$$



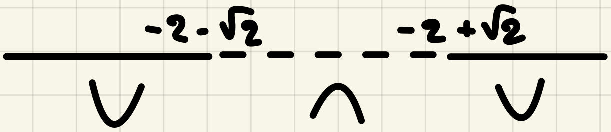
$$f(0) = 0 \qquad f(-2) = 4e^{-2} \approx 0{,}54$$

FLESSI:

$$f''(x) = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x = e^x(2+4x+x^2) \geq 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = -2 \pm \sqrt{2}$$

$$x \leq -2-\sqrt{2} \lor x \geq -2+\sqrt{2}$$



FEBBRAIO 2023 - B

DOMANDA 1

Domanda 1 (10 pt)

a. Dare la definizione formale di serie numerica divergente. (3 pt)

b. Studiare la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ dimostrando il risultato. (7 pt)

a DATA UNA SUCCESSIONE $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, SI DICE CHE LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ DIVERGE SE $\lim_{n\to+\infty} S_n$ (SOMME PARZIALI $\sum_{k=0}^{n} a_k$) $= \pm\infty$

b È LA SERIE DI MENGOLI, UNA SERIE TELESCOPICA CHE POSSIAMO SCRIVERE COME:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \left(1-\cancel{\tfrac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}-\cancel{\tfrac{1}{3}}\right)\left(\cancel{\tfrac{1}{3}}-\cancel{\tfrac{1}{4}}\right)\cdots\left(\cancel{\tfrac{1}{k}}-\frac{1}{k+1}\right) = 1-\frac{1}{k+1}$$

$$\lim_{k\to+\infty} 1-\frac{1}{k+1} = 1-0 = 1$$

DOMANDA 2

Domanda 2 (11 pt)

a. Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $x_0 \in \overline{X}$. Dare la definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, usando il concetto di successione (tramite il Teorema Ponte). (4 pt)

b. Usando la precedente definizione, dimostrare che $f(x) = \sin x$ per $x_0 = +\infty$ non ammette limite. (7 pt)

a $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \Big\{$ $\forall$ SUCC $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ CHE TENDE A x_0 COMPATIBILMENTE CON X, SI HA CHE $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\ell$

b BASTA TROVARE DUE SUCC a_n, b_n : $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$

MA $\lim_{n\to+\infty} \sin(a_n) \neq \lim_{n\to+\infty} \sin(b_n)$

SCEGLIAMO $\begin{cases} a_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi & n\in\mathbb{N} \\ b_n = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi & n\in\mathbb{N} \end{cases}$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ E $\lim_{n\to+\infty} \sin(a_n) = 1 \neq -1 = \lim_{n\to+\infty} \sin(b_n)$

DOMANDA 3

Domanda 3 (10 pt)

a. Enunciare il Teorema di Rolle. (4 pt)

b. Dimostrare il Teorema di Rolle (6 pt)

a SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f CONTINUA IN $[a,b]$ E DERIVABILE IN (a,b) E TALE CHE $f(a) = f(b)$. ALLORA $\exists$ ALMENO UN PUNTO CRITICO PER f IN $[a,b]$. OVVERO $\exists c \in [a,b] : f'(c) = 0$

b DAL TEOREMA DI WEIERSTRASS CONCLUDO CHE $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$: $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ $\forall x \in [a,b]$. CI SONO DUE POSSIBILITÀ:

1. O ENTRAMBI I PUNTI SONO SUGLI ESTREMI $[a,b]$, CIOÈ $x_1 = a$ E $x_2 = b$ E QUINDI $f(x_1) = f(x_2)$, MA ALLORA LA FUNZIONE È COSTANTE MA SICCOME LA DER DI UNA FUNZIONE COST È SEMPRE 0, IN OGNI PUNTO $x \in (a,b)$ LA DER $= 0$, QUINDI SONO TUTTI PUNTI CRITICI

2. UNO DEI PUNTI È INTERNO AD $[a,b]$, SUPPONIAMO x_1. QUINDI ESSENDO MINIMO ASSOLUTO È ANCHE MINIMO LOCALE, E DAL TEOREMA DI FERMAT LA SUA DERIVATA SI DEVE ANNULLA, PERCIÒ x_1 È UN PUNTO CRITICO

ESERCIZIO 1

Esercizio 1 (3 pt) Sia $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x+1}}{e^{\left(\frac{x}{1+x^2}\right)} - 1}$. Quale delle seguenti è vera ?

1. $\text{dom } f = (-\infty, +\infty) \setminus \{0\}$
2. $\text{dom } f = (-\infty, 1] \setminus \{0\}$
3. $\text{rng } f = (0, 1]$
4. $\text{dom } f = [-1, +\infty) \setminus \{0\}$

$x+1 \geq 0$

$x \geq -1$

$$e^{\left(\frac{x}{1+x^2}\right)} - 1 \neq 0 \iff x \neq 0$$

ESERCIZIO 2

Esercizio 2 (3 pt)

Per quale $x \in \mathbb{R}$ si ha che $\displaystyle\int_1^{\ln x} f(t)dt$ è esattamente 0 ?.

1. e
2. 0
3. 1
4. $-e$

$$\int_1^{\ln x} f(t)dt = 0 \iff \ln x = 1 \to x = e^1 = e$$

ESERCIZIO 3

Esercizio 3 (8 pt) Usando lo sviluppo di Mc Laurin calcolare, se esiste, il

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2(e^{x^2}-1))}{x^6+x^4}$$

$$e^{x^2}-1 = 1+x^2+o(x^2)-1 = x^2+o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^4}{x^6+x^4} \sim \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4} = 1$$

ESERCIZIO 4

Esercizio 4 (7 pt)

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{8x^3+3}{1+(2x^4+3x)^2}dx$$

$$t = 2x^4+3x$$
$$dt = 8x^3+3dx$$

$$\int \frac{1}{1+t^2}dt = \operatorname{arctg} x + c = \operatorname{arctg}(2x^4+3x)+c$$

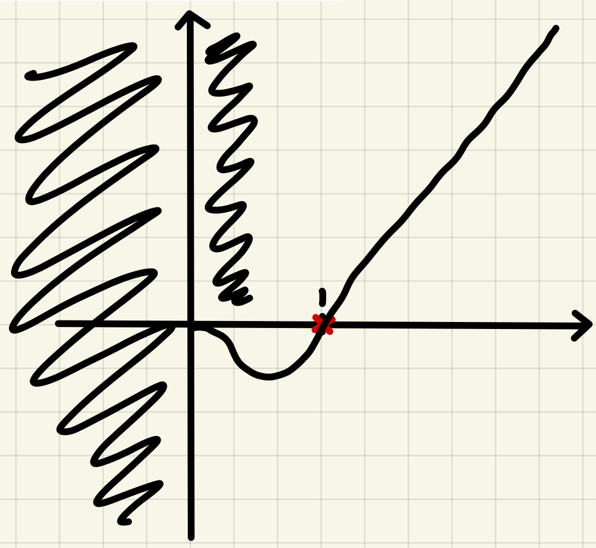
ESERCIZIO 5

Esercizio 5 (10 pt)

Studiare la funzione $f(x) = x^2 \ln x$ e tracciarne un grafico qualitativo studiandone

- il dominio, le proprietà della funzione, il comportamento nei punti di accumulazione, monotonia ed estremi locali e assoluti (6,5 pt),
- concavità e flessi (3,5 pt).

$f(x) = x^2 \log x$ D: $x>0$



SIMMETRIE:

NE PARI NE DISP PER IL D

POSITIVITÀ:

$$f(x)>0 \quad \begin{cases} x^2>0 \text{ S.P.} \\ \ln x > 0 \to x > e^0 \to x>1 \end{cases}$$

INTERSEZIONI:

PER $y=0$ $\quad f(x)=0 \iff \begin{cases} x=0 \text{ NON PUÒ} \\ x=1 \end{cases}$

LIMITI:

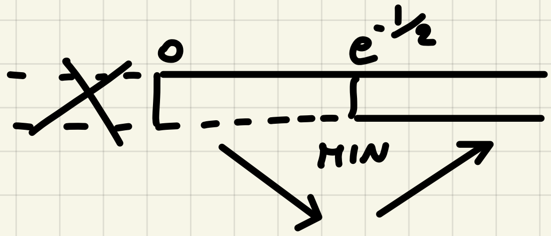
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-2}} \overset{H}{\to} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = -\frac{1}{2}x^2 = 0$$ NO ASINT VERT

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$ NO ASINT ORIZZ

$m = \lim_{x \to +\infty} f(x)/x = +\infty$ NO ASINT OBL

MAX E MIN:

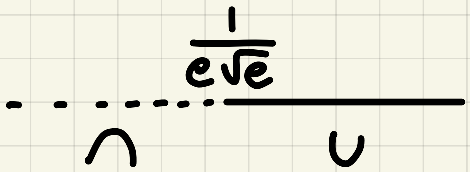
$f'(x) = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1) > 0 \begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$



$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$

FLESSI:

$f''(x) = 2\ln x + 3 > 0 \iff \ln x > -\frac{3}{2} \rightarrow x > \frac{1}{\sqrt{e^3}} = \frac{1}{e\sqrt{e}}$



$f\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right) = -\frac{3}{2e^3}$

APRILE 2023

DOMANDA 1

Domanda 1 (11 pt)

a. Dare la definizione di *maggiorante*, *estremo superiore* e *massimo* di un insieme numerico A. (4 pt)

b. Dimostrare che una condizione sufficiente perché risulti $a = \sup A = \max A$ è che a è un maggiorante per A e che $a \in A$. (7 pt)

a SIA $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

$S \in \mathbb{R}$ È UN MAGGIORANTE DI A SE $\forall a \in A$, $a \leq S$

$S \in \mathbb{R}$ SI DICE ESTREMO SUPERIORE SE S È IL PIÙ PICCOLI DEI MAGGIORANTI DI A E SE $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A : S - \varepsilon < a$

$S = \max A \iff S = \sup A$ CON $S \in A$

b È SUFF FAR VEDERE CHE $a = \sup A$. PER ESSERLO a DEVE ESSERE IL PIÙ PICCOLO DEI MAGGIORANTI

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE NON LO SIA, OVVERO CHE $\exists\, \varepsilon > 0\ !\ \forall x \in A\ \ x \leq a - \varepsilon$. MA SICCOME $a \in A$ ALLORA LA RELAZIONE VALE ANCHE PER $x = a$. QUINDI SI AVREBBE $a \leq a - \varepsilon$ PER $\varepsilon > 0$ (CONTRADDIZIONE)

DOMANDA 2

Domanda 2 (10 pt)

a. Enunciare con precisione il Teorema di esistenza delle radici complesse di un numero $w \in \mathbb{C}$ (3 pt).

b. Calcolare le radici complesse di $w = \sqrt[3]{i}$. (7 pt)

a SIA $w = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) \in \mathbb{C}$ UN NUMERO COMPLESSO, SIA $n \in \mathbb{N}^+$. ALLORA ESISTONO ESATTAMENTE n RADICI COMPLESSE DISTINTE z_k, $k \in [n]$ DI w

$$z_k = r(\cos\theta_k + i \sin\theta_k) \begin{cases} r = \rho^{\frac{1}{n}} \\ \theta_k = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases} \quad k = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

b

$$w = \sqrt[3]{i} = i = 1(0 + i) = i \qquad \rho = 1 \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad n = 3$$

$$z = 1\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)\right)$$

$$z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi\right)\right) \qquad k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \qquad z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \qquad z_2 = -i$$

DOMANDA 3

Domanda 3 (10 pt)

a. Enunciare il Teorema degli Zeri (4 pt)

b. Mostrare che la funzione $f(x) = x^2 - \arctan(x) - 2$ ha uno zero positivo (6 pt)

a SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, SIA $f(a)\cdot f(b)<0$, ALLORA f AMMETTE UNO 0 IN $[a,b]$

b $f(x)=x^2-\text{arctg}(x)-2$

1) $f(0)=-2$ 2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 3) f È CONTINUA

IN $[-2,+\infty)$ f GARANTISCE ALMENO UNO ZERO POSITIVO

ESERCIZIO 1

Esercizio 1 (3 pt)
Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è invertibile, allora

1. f è continua;
2. f è limitata;
3. f è strettamente crescente;
4. $f(a) \neq f(b)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq b$

f INVERTIBILE $\Rightarrow$ f INIETTIVA

QUINDI $f(a)\neq f(b)$ $\forall a,b\in\mathbb{R}$ $a\neq b$

ESERCIZIO 2

Esercizio 1 (3 pt) Siano f, g, h le seguenti funzioni: $f(x) = e^x x^4$, $g(x) = 2^{2x}\sqrt{x}$, $h(x) = e^{\sqrt{x}} x^6$. Dire quale delle tre è di ordine superiore e quale di ordine inferiore.

1. g, f,
2. f h, ×
3. g, h,
4. h,f.

$f(x)=e^x x^4$ $g(x)=e^{x\log 4}\sqrt{x}$ $h(x)=e^{\sqrt{x}}x^6$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{h(x)}=\frac{e^x \cancel{x^4}}{e^{\sqrt{x}}x^6}=\frac{e^{x-\cancel{\sqrt{x}}}}{x^2}=+\infty \quad f>h$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{e^{x\log 4}\sqrt{x}}{e^x x^4}=\frac{e^{x\log 4-x}}{x^{7/2}}=+\infty \quad f>g>h$$

ESERCIZIO 3

Esercizio 2 (8 pt) Calcolare l'area della regione piana T compresa tra le due parabole di equazioni: $y^2 = 9x$ e $x^2 = 9y$.

1) $x^2 = 9y \rightarrow y = \frac{x^2}{9}$ $\quad V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

2) $y^2 = 9x \rightarrow x = \frac{y^2}{9}$ $\quad V\left(\frac{4ac-b^2}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$

$V_1 = (0,0) \qquad V_2 = (0,0)$

1) PONGO $P_1(3,1) \quad P_2(-3,1)$

2) PONGO $P_3(1,3) \quad P_4(1,-3)$

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{9} \\ y^2 = 9x \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2/9 \\ x^4/81 - 9x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2/9 \\ x^4 - 729x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2/9 \\ x(x^3 - 729) = 0 \end{cases} \begin{matrix} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{729} \end{matrix}$$

$$x = \sqrt[3]{3^6} = 3^2 = 9$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 9 \\ y = 9 \end{cases}$$

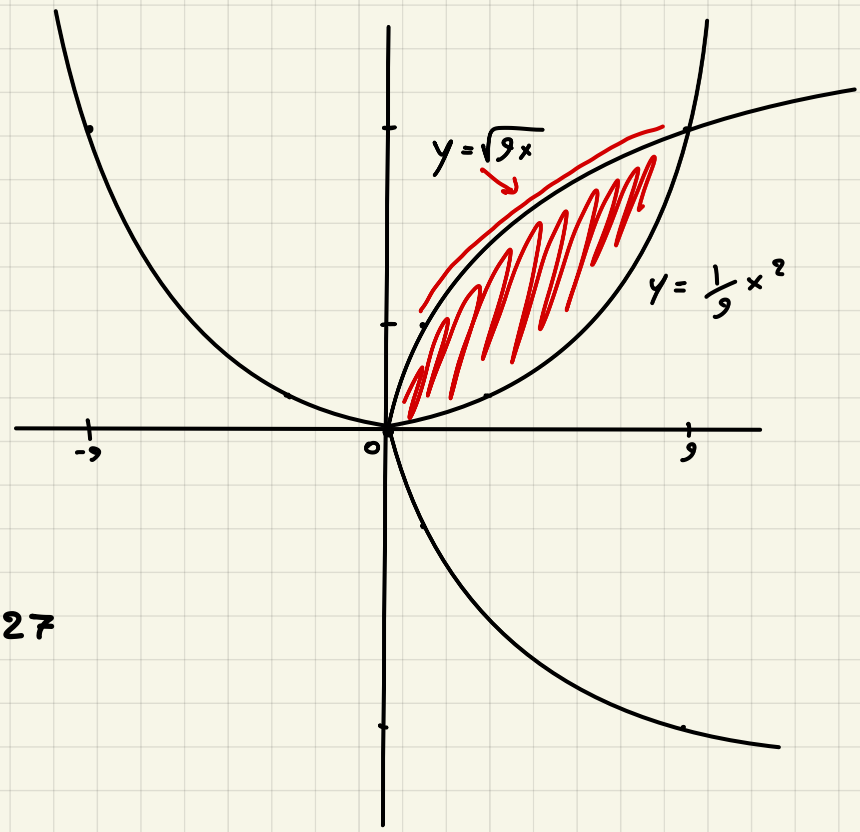
$$A = \int_0^9 \sqrt{9x} - \frac{1}{9}x^2 \, dx =$$

$$= 3\int_0^9 x^{1/2} dx - \frac{1}{9}\int_0^9 x^2 dx =$$

$$= \left[3\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^9 =$$

$$= \left[2x^{3/2} - \frac{1}{27}x^3\right]_0^9 =$$

$$= \left[2x\sqrt{x} - \frac{1}{27}x^3\right]_0^9 = (54 - 27) = 27$$



ESERCIZIO 4

Esercizio 3 (7 pt)

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{x+3}{x^2-6x}dx$$

$$\int \frac{x+3}{x^2-6x}\,dx : \frac{x+3}{x(x-6)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-6} \rightarrow x+3 = x(a+b) - 6a$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -6a=3 \end{cases} \quad \begin{cases} b=3/2 \\ a=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int F(x)dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-6}dx = -\frac{1}{2}\log|x| + \frac{3}{2}\log|x-6| + c$$

ESERCIZIO 5

Esercizio 4 (10 pt)

Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{8}{x}}$ e tracciarne un grafico qualitativo studiandone

- il dominio, le proprietà della funzione, continuità, il comportamento nei punti di accumulazione, monotonia ed estremi locali e assoluti (6,5 pt),
- concavità e flessi (3,5 pt).

$f(x) = \sqrt{x^2 - 8/x}$ $\qquad D: (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$

$$D: \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 - \frac{8}{x} \geq 0 \end{cases} \rightarrow \frac{x^3-8}{x} \geq 0 \begin{cases} x>0 \\ x>\sqrt[3]{8}>2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} & 0 & & 2 \\ - - - - & | & & \\ - + - & | & - - - & + \end{array}$$

SIMMETRIE.

NÈ PARI NÈ DISP POICHÈ D NON SIMMETRICO

INTERSEZIONI:

0 ∉ D QUINDI FACCIO SOLO → $\begin{cases} y=0 \\ f(x)=0 \Leftrightarrow x=2 \end{cases}$

POSITIVITÀ:

$f(x)>0 \qquad x<0 \vee x>2$

UNA RADICE PARI È >0 SOLO DOVE ESISTE TRANNE I PUNTI IN CUI È 0

LIMITI:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \qquad x=0$ ASINT VERT A SX

$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = +\infty \qquad$ NO ASINT ORIZZ

$$m=\lim_{x\to\infty} f(x)/x = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3-8}{x}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^3-8}{x^3}} = \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{1-8/x^3} = \begin{cases} +\infty & +1 \\ -\infty & -1 \end{cases}$$

$$q=\lim_{x\to\infty} f(x)-mx = \sqrt{\frac{x^3-8}{x}} - x = \infty-\infty$$

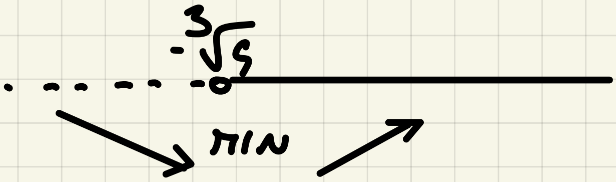
$$\hookrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{x^3-8}{x}}-x\right)\left(\sqrt{\frac{x^3-8}{x}}+x\right)}{\left(\sqrt{\frac{x^3-8}{x}}+x\right)} = \frac{\frac{x^3-8}{x}-x^2}{\sqrt{\frac{x^3-8}{x}}+x} = \frac{-\frac{8}{x}\to 0}{\underbrace{\sqrt{\frac{x^3-8}{x}}+x}_{\to\infty}} = 0$$

$y=x$ ASINT OBL DX / $y=-x$ ASINT OBL SX

MAX E MIN:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3-8}{x}}} \cdot \frac{3x^3-x^3+8}{x^2} = \frac{\sqrt{x}}{\cancel{2}\sqrt{x^3-8}} \cdot \frac{\cancel{2}(x^3+4)}{x^2} > 0$$

$x^3+4>0 \quad x > -\sqrt[3]{4}$



FLESSI:

$$f'(x) = \sqrt{\frac{x}{x^3-8}} \cdot \frac{x^3+4}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x^3-8}}} \cdot \frac{x^3-8-3x^3}{(x^3-8)^2} \cdot \frac{x^3+4}{x^2} + \sqrt{\frac{x}{x^3-8}} \cdot \frac{3x^4-2x^4-8x}{x^4} =$$

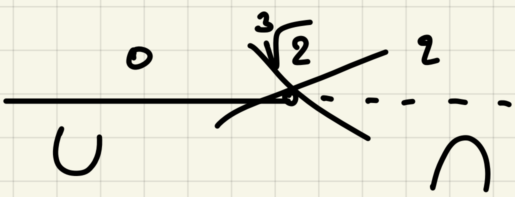
$$= \frac{\sqrt{x^3-8}}{\cancel{2}\sqrt{x}} \cdot \frac{-\cancel{2}(x^3+4)}{(x^3-8)^2} \cdot \frac{x^3+4}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3-8}} \cdot \frac{\cancel{x}(x^3-8)}{x^{\cancel{4}3}} =$$

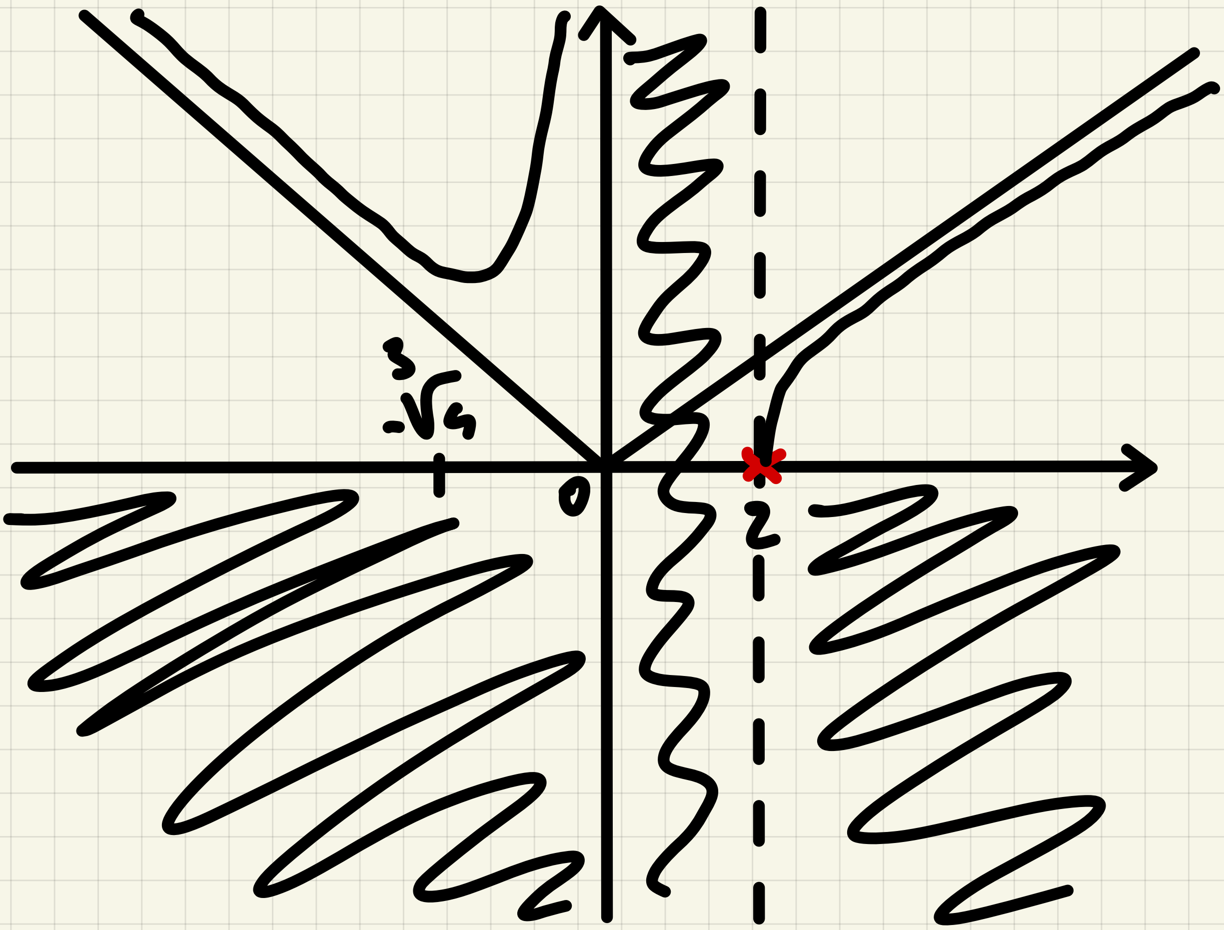
$$= -\frac{(x^3+4)^2\sqrt{x^3-8}}{x^2\sqrt{x}\,(x^3-8)^2} + \frac{\sqrt{x}\sqrt{(x^3-8)}}{x^3\,\cancel{\sqrt{x^3-8}}} = \frac{-x(x^3+4)^2\sqrt{x^3-8}+x(x^3-8)^2\sqrt{x^3-8}}{x^3\sqrt{x}\,(x^3-8)^2}$$

$$= \frac{x\sqrt{x^3-8}\left(\cancel{x^6}-8x^3-16+\cancel{x^6}-16x^3+64\right)}{x^3\sqrt{x}\,(x^3-8)^2} = \frac{24\cancel{x}(-x^3+2)\sqrt{x^3-8}}{x^{\cancel{3}2}\sqrt{x}\,(x^3-8)^2} > 0$$

$-x^3+2>0$

$x < \sqrt[3]{2}$





$-\sqrt[3]{4}$
0
2

GIUGNO 2023

DOMANDA 1

Domanda 1 (10 pt)

a. Enunciare il *Principio di Induzione*. (4 pt)

b. Dimostrare che la somma dei primi n numeri dispari è n^2. (6 pt)

a SIA $n_0 \in \mathbb{Z}$ E SIA $P(n)$ UN PREDICATO CHE DIPENDE DA UN INDICE $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{SE } P(n_0) \text{ È VERA} \\ \text{E } P(n) \Rightarrow P(n+1) \text{ È VERA } \forall n > n_0 \end{array}\right\} \text{ ALLORA } \forall n \geq n_0 : P(n)$$

b SIA $S(n): 1+3+5\ldots$ $\quad S(1)=1 \quad S(2)=1+3 \quad S(3)=1+3+5$

$$\begin{cases} S(1)=1 \\ S(n+1)=S(n)+(2n+1) & n>1 \end{cases}$$

DIMOSTRIAMO CHE $S(n)=n^2$

CASO BASE: $n=1 \quad S(n)=1=1^2$

CASO INDUTTIVO: $n>1 \quad S(n+1)=S(n)+(2n+1)$
$= n^2+2n+1 = (n+1)^2$

DOMANDA 2

Domanda 2 (10 pt)

a. Dare la definizione di *minorante*, *estremo inferiore* e *minimo* di un insieme numerico. (4 pt)

b. Sia $A = \{x \in \mathbb{R} \;:\; 9^x + 3^{x+1} - 4 \geq 0\}$. Determinare $\inf A$ e $\sup A$ e dire se se sono minimo e/o massimo di A. (6 pt).

a SIA $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

$s \in \mathbb{R}$ SI DICE MINORANTE PER A SE $\forall a \in A$, $s \leq a$

$s \in \mathbb{R}$ SI DICE ESTREMO INF SE È IL PIU GRANDE TRA I MINORANTI E SE $\forall \varepsilon > 0 \; \exists a \in A : s+\varepsilon > a$

$s = \min A \iff s = \inf a \quad s \in A$

b RISOLVIAMO $3^{2x} + 3^x \cdot 3 - 4 \geq 0$ CON $t = 3^x$

$t^2 + 3t - 4 \geq 0 \iff t \leq -4 \vee t \geq 1$

CIOÈ $3^x \leq -4$ (MAI) $\vee$ $3^x \geq 1 \rightarrow 3^x \geq 3^0 \rightarrow x \geq 0$

$D(A) = [0, +\infty) \quad \inf A = \min A = 0$, $\sup A = +\infty$, $\nexists \max A$

DOMANDA 3

Domanda 3 (11 pt)

a. Enunciare il criterio del confronto per serie a termini non negativi. (4 pt)

b. Dire per quali valori di b la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{k}$ (con $b > 0$) è convergente, argomentando la dimostrazione. (7 pt)

a SIANO $\sum_{K=0}^{+\infty} a_K$ E $\sum_{K=0}^{+\infty} b_K$ DUE SERIE A TERMINI POSITIVI TALE CHE $a_K < b_K$, $\forall K \in \mathbb{N}$. ALLORA VALGONO:

SE $\sum_{K=0}^{+\infty} a_K = +\infty \Rightarrow \sum_{K=0}^{+\infty} b_K = +\infty$ / SE $\sum_{K=0}^{+\infty} b_K < +\infty \Rightarrow \sum_{K=0}^{+\infty} a_K < +\infty$

b LA SERIE È A TERMINI POSITIVI

$\frac{b^K}{K} \to 0$ SOLO SE $0 < b < 1$

$\frac{b^K}{K} \to +\infty$ SOLE SE $b > 1$

SE $b = 1$ LA SERIE È QUELLA ARMONICA CHE DIVERGE A $+\infty$

ESERCIZIO 1

Esercizio 1 (3 pt)

Sia θ è l'argomento del numero complesso z, qual è (a meno di multipli di 2π) l'argomento del numero complesso $\frac{1}{z}$?

1. $-\theta$;
2. $-\theta + \frac{\pi}{2}$;
3. -2θ ;
4. θ.

$z = e(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\quad z^n = e^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

$\frac{1}{z} = z^{-1} \to e^{-1}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ $\quad \mathrm{ARG}(z^{-1}) = -\theta$

ESERCIZIO 2

Esercizio 2 (3 pt) Qual è il dominio della funzione: $f(x) = \sqrt{1 - \ln(x - x^2)}$?

1. $\mathbb{R} \setminus \{e\}$,
2. $x \in (0, e)$,
3. $x \in (0, 1)$,
4. $x \in (e, +\infty)$.

$$f(x)\begin{cases} 1-\ln(x-x^2) \geq 0 \\ x-x^2 \geq 0 \end{cases}$$

$\ln(x-x^2) \leq 1$ $\quad x - x^2 \leq e$ $\quad$ SV PER $x^2 \geq x$

$x(1-x) \geq 0$ $\quad x \geq 0$, $x \leq 1$ $\quad 0 \leq x \leq 1$ $\quad$ 3

ESERCIZIO 3

Esercizio 2 (8 pt) Calcolare il

$$f(x) = \frac{\cos^2 x + 2\cos x - 3}{\tan x \ \ln(1+\sin x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x + 2\cos x - 3}{\tan x \ln(1 + \sin x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x + 2\cos x - 3}{tg\,x\, \ln(1+\sin x)} = \frac{(\cos x + 3)(\cos x - 1)}{tg\,x\, \ln(1+\sin x)} \cdot \frac{\sin x}{\sin x} \cdot \frac{x^3}{x^3}$$

$$= (\cos x + 3)\ \frac{(\cos x - 1)}{x^2}\ \frac{\sin x}{\ln(1+\sin x)} \cdot \frac{x^2}{x\, tg\, x} \cdot \frac{x}{\sin x} \sim 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -2$$

ESERCIZIO 4

Esercizio 3 (7 pt)

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int e^x \log(1 + e^x) dx$$

$$\int e^x \log(1+e^x)dx = e^x \log(1+e^x) - \int e^x \cdot \frac{e^x}{1+e^x} dx = e^x \log(1+e^x) - \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$$

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx \rightarrow \begin{matrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{matrix} \rightarrow \int \frac{t}{1+t} dt = \int \frac{t+1-1}{1+t} dt =$$

$$= \int dt - \int \frac{1}{1+t} dt = t - \ln|1+t| + c = e^x - \log(1+e^x) + c$$

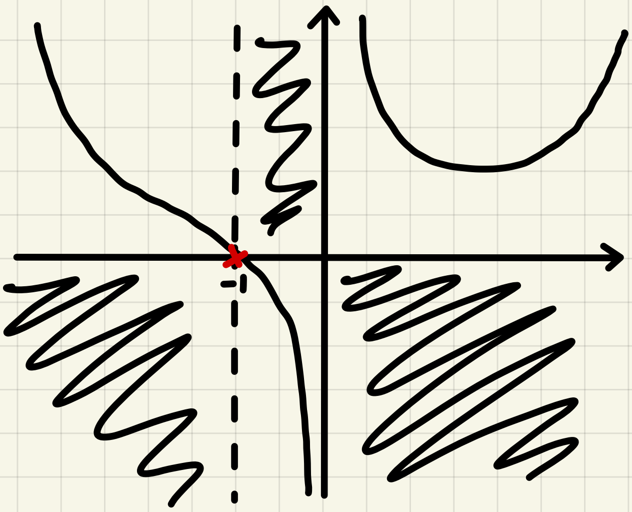
$$\int e^x \log(1+e^x) dx = e^x \log(1+e^x) - e^x + \log(1+e^x) + c$$

ESERCIZIO 5

Esercizio 4 (10 pt)
Studiare la funzione $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ e tracciarne un grafico qualitativo studiandone

- il dominio, le proprietà della funzione, continuità, il comportamento nei punti di accumulazione, monotonia ed estremi locali e assoluti (6,5 pt),
- concavità e flessi (3,5 pt).

$f(x) = x^2 + \frac{1}{x} = \frac{x^3+1}{x}$ $\quad$ D: $\mathbb{R} / \{0\}$



SIMMETRIE:

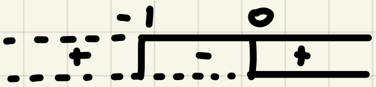
$f(-x) = \frac{x^3-1}{x}$ $\quad$ NÈ PARI NÈ DISP

INTERSEZIONI:

PER $y=0$ $\quad f(x)=0 \Leftrightarrow x^3+1=0 \quad x^3=-1$
$x=-1$

POSITIVITÀ:

$f(x) > 0 \begin{cases} x^3+1>0 & x>-1 \\ x>0 \end{cases}$



LIMITI:

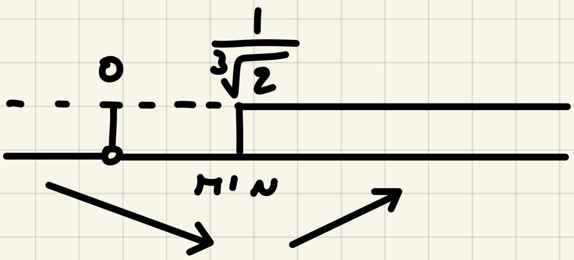
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \;/\; \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ $\quad x=0$ ASINT VERT

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \sim x^2 = +\infty$ $\quad$ NO ASINT ORIZZ

$m = \lim_{x \to \infty} f(x)/x \sim x = \pm\infty$ $\quad$ NO ASINT OBL

MAX E MIN:

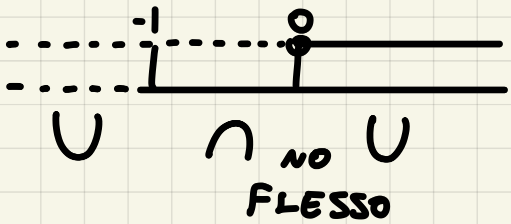
$f'(x) = \frac{2x^3-1}{x^2} \geq 0 \begin{cases} 2x^3-1 \geq 0 & x \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x^2 \geq 0 \text{ S.V.} \end{cases}$



FLESSI:

$f''(x) = \frac{2x^4+2x}{x^4} \geq 0 \begin{cases} 2x^4+2x \geq 0 \\ x^4 \geq 0 \text{ SV.} \end{cases}$

$2x(x^3+1) \geq 0 \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$



LUGLIO 2023

DOMANDA 1

Domanda 1 (10 pt)

a. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$. Dare la definizione di f *iniettiva, suriettiva e biiettiva.* (3 pt)

b. Definire quando f è invertibile e dimostrare che se f è biiettiva esiste ed unica la inversa di f. (7 pt)

a INIETTIVA: SE $\forall a, a' \in A \quad a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

SURIETTIVA: SE $\forall b \in B \, \exists a \in A : f(a) = b$

BIETTIVA: SIA INIETTIVA CHE SURIETTIVA, CIOÈ $\forall b \in B \, ! \exists a \in A : f(a) = b$

b DATA $f: x \to y$ BIETTIVA, $\exists$ ED È UNICA LA SUA f INVERSA

SIA $f: x \to y$ E $g: y \to x$ TALE CHE $\forall y \in Y$, $g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$,
OSSERVIAMO CHE $f(g(y)) = f(x) = y$ E $g(f(x)) = g(y) = x$.

PER DIMOSTRARE CHE È UNICA SUPPONIAMO CHE $\exists$ $h: Y \to x$, $h \neq g$ CHE È ANCHE INVERSA DI f. MA h E g HANNO LO STESSO VALORE SU $h(y)$ E $g(y)$ $\forall y \in Y$. MA SICCOME $h \neq g$ DOVREBBE $\exists$ UN VALORE $y \in Y$ SU CUI DIFFERISCONO (CONTRADDIZIONE)

DOMANDA 2

Domanda 2 (10 pt)

a. Dare la definizione di *insieme limitato.* (3 pt)

b. Verificare che un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ è limitato se e solo se *esiste un reale M tale che $|x| \leq M$ per ogni $x \in X$.* (7 pt)

a UN INSIEME LIMITATO SIA SUPERIORMENTE CHE INFERIORMENTE SI DICE LIMITATO E CIOÈ QUANDO $\forall \ell, L \in \mathbb{R}$, $\ell \leq a \leq L \ \forall a \in A$

b A LIMITATO $\Rightarrow \exists M : |a| \leq M \quad \forall a \in A$

PRENDO $M = \max\{|\ell|, |L|\}$

$L \leq |L| \leq M \quad \Rightarrow \quad a \leq M \quad \forall a \in A$

$-\ell \geq -|\ell| \geq -M \Rightarrow a \geq -M \quad \forall a \in A$

QUINDI $\forall a \in A : -M \leq a \leq M \Leftrightarrow |a| \leq M$

DOMANDA 3

Domanda 3 (11 pt)

a. Sia $f : (a, b) \longrightarrow R$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Dare la definizione di f *è derivabile in* x_0. (3 pt)

b. Dimostrare che le seguenti due proprietà sono equivalenti (8 pt)

(a) f derivabile in x_0,

(b) esiste una costante A tale che $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$.

a f DERIVABILE IN x_0 SE $\exists$ ED È FINITO $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

b SICCOME PER Hp f È DERIVABILE IN x_0, ALLORA $\exists$ ED È FINITO

$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. DUNQUE:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x)(x - x_0)}{x - x_0} =$$

$$= f(x) - f(x_0) - f'(x)(x - x_0) = o(x - x_0)$$

$$\iff f(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$\iff f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \qquad f'(x) = A$$

ESERCIZIO 1

Esercizio 1 (3 pt)

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione limitata. Allora

1. $\lim_{n \to +\infty} a_n$ esiste ed è finito;
2. $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ è limitata;
3. $\left\{\frac{1}{1+|a_n|}\right\}$ è limitata;
4. $\left\{\left|\frac{1}{1+a_n}\right|\right\}$ è limitata;

POICHÈ $|a_n| \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ALLORA $\quad 1 + |a_n| \geq 1 \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{1+|a_n|} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ESERCIZIO 2

Esercizio 2 (3 pt) Siano A e B due insiemi limitati e non vuoti. Quale delle seguenti affermazioni è equivalente dire che $\inf A \leq \inf B$?

1. $\forall a \in A\ \exists b \in B$ tale che $a \leq b$,
2. $\forall a \in A\ \exists b \in B$ tale che $a \geq b$,
3. $\exists b \in B$ tale che $\forall a \in A a \leq b$,
4. $\forall \epsilon > 0\ \forall b \in B\ \exists a \in A$ tale che $a \leq b + \epsilon$

1) FALSO PER $A = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ $B = [0, 1]$

2) FALSO PERCHÈ SI AVREBBE $\inf B \leq \inf A$

3) IDENTICO A 1)

ESERCIZIO 3

Esercizio 3 (8 pt) Calcolare la derivata della seguente funzione integrale

$$F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt$$

PER IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

$$\int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt \Rightarrow F'(x) = G'(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = e^x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ESERCIZIO 4

Esercizio 4 (7 pt)

Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\ln x)^{1/3} + (1 - x^2)^{2/3}}{[\sin(1 - x)]^{1/3}}$$

$t = 1 - x$ $x = 1 - t$ $t = 0$ PER $x \to 1$

$$\lim_{t \to 0} \frac{(\ln(1-t))^{1/3} + (2t - \overset{\nearrow 0}{t^2})^{2/3}}{(\sin t)^{1/3}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\left(-\overset{-1}{\overset{\uparrow}{\frac{\log(1-t)}{-t}}}\right)^{1/3} + \left(\frac{t^2(2-t)^2}{t}\right)^{1/3}_{\nearrow 0}}{\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{1/3}_{\searrow 1}} = -1$$

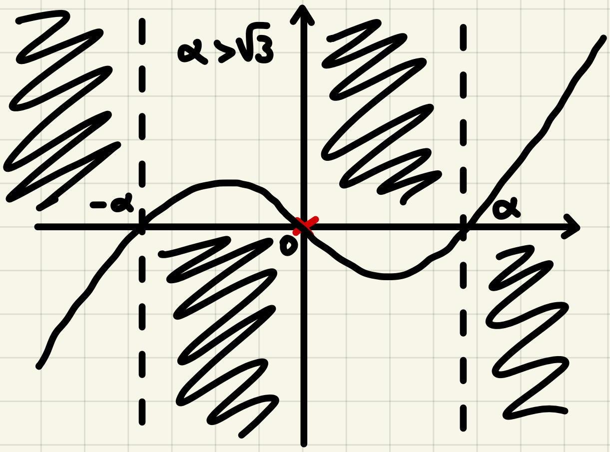
ESERCIZIO 5

Esercizio 5 (10 pt)

Studiare la funzione $f(x) = \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x^2}{4}\right) + \arctan x - x$ e tracciarne un grafico qualitativo studiandone

- il dominio, le proprietà della funzione, continuità, il comportamento nei punti di accumulazione, monotonia ed estremi locali e assoluti (6,5 pt),
- concavità e flessi (3,5 pt).

$f(x) = \frac{x}{2}\log\left(\frac{1+x^2}{4}\right) + \operatorname{arctg} x - x$



D: $\mathbb{R}$

SIMMETRIE:

$f(-x) = -f(x)$ DISPARI

INTERSEZIONE:

PER $x=0$ $y=0$

PER $y=0$ $f(x)=0 \Leftrightarrow x=\alpha$ $0<\alpha<1$

POSITIVITÀ:

$f(x)>0$ $\frac{x}{2}\log\left(\frac{1+x^2}{4}\right) - x > -\operatorname{arctg} x$ PER $x>0$

LIMITI:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} + \lim_{x\to\infty} x\left(\log\frac{\sqrt{x^2+1}}{2} - 1\right) = \infty$ NO ASINT ORIZZ

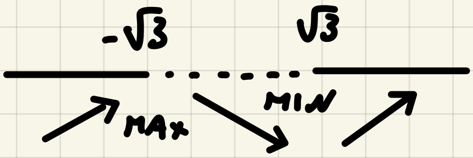
$m = \lim_{x\to+\infty} f(x)/x = \lim_{x\to+\infty} \log\frac{\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1 = +\infty$ NO ASINT OBL

MAX E MIN:

$f'(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x^2}{4}\right) + \frac{x}{2}\cdot\frac{4}{1+x^2}\cdot\frac{x}{2} + \frac{1}{1+x^2} - 1 =$

$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x^2}{4}\right) + \cancel{\frac{x^2+1}{x^2+1}}\, \cancel{-1} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x^2}{4}\right) > 1$

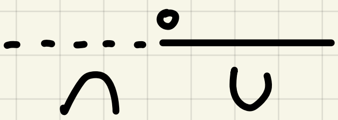
$\frac{1+x^2}{4} > 1 \rightarrow 1+x^2>4 \rightarrow x<-\sqrt{3} \vee x>\sqrt{3}$



FLESSI:

$f''(x) = \frac{1}{2}\,\frac{4}{1+x^2}\cdot\frac{x}{2} = \frac{x}{1+x^2} > 0$

$x>0$



SETTEMBRE 2023

DOMANDA 1

Domanda 1 (10 pt)

a. Dare la definizione di primitiva di una funzione reale $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (3 pt)

b. Enunciare e dimostrare il *Teorema di unicità della primitiva* (7 pt)

a SIA $f: I \to \mathbb{R}$. UNA $F: I \to \mathbb{R}$ SI DICE PRIMITIVA DI f SE F È DERIVABILE IN I E SE $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$

b SIANO F E G DUE PRIMITIVE DI $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. ALLORA $\exists$ UNA $c \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = G(x) + c$$

PONIAMO $H(x) = F(x) - G(x)$. POICHÈ F E G SONO PRIMITIVE DI f, SONO DERIVABILI IN $[a,b]$, E QUINDI ANCHE H LO È. INOLTRE $F'(x) = G'(x) = f(x)$, ALLORA $H'(x) = 0$. DUNQUE $H(x) = c$ E CIÒ IMPLICA CHE $F(x) = G(x) + c$

DOMANDA 2

Domanda 2 (10 pt)

a. Enunciare il *Teorema di Weierestrass*. (3 pt)

b. Argomentare con precisione se il Teorema di Weierestrass è applicabile alla funzione $f(x) = \sin x + \cos x$ nell intervallo $I = [0, \pi]$ e calcolare, ove possibile, massimi e minimi assoluti di f in I. (7 pt)

a SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f CONTINUA IN $[a,b]$. ALLORA $\exists\, x_m, x_M \in [a,b]$ TALI CHE $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ $\forall x \in [a,b]$

b f È CONTINUA IN $[0, \pi]$ QUINDI È APPLICABILE

IN $[0, \pi]$ $f'(x) = \cos x - \sin x$ SI ANNULLA IN $x = \pi/4$.

QUINDI I PUNTI ESTREMI VANNO CERCATI TRA I PUNTI CRITICI E GLI ESTREMI.

$f(0) = 1$ $\qquad f(\pi/4) = \sqrt{2}$ $\qquad f(\pi) = -1$

DUNQUE AVREMO $\quad$ MAX $= (\pi/4, \sqrt{2})$, MIN $= (\pi, -1)$

DOMANDA 3

Domanda 3 (11 pt)

a. Dare la definizione di *successione convergente a un* $\ell \in \mathbb{R}$. (3 pt)

b. Dimostrare il *Teorema di unicità del limite di successione*. (8 pt)

a UNA SUCC $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ CONVERGE A ℓ PER n CHE TENDE A PIÙ INFINITO $\left(\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell\right)$ SE: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \; |a_n - \ell| < \varepsilon$

b SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE ESISTANO $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, ED $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ TALI CHE $\ell_1 \neq \ell_2$, E CHE VALGANO:

1 $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell_1$

2 $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell_2$

ESSENDO $\ell_1 \neq \ell_2$ PONGO $\delta = |\ell_1 - \ell_2| > 0$ E $\bar{\varepsilon} = \frac{\delta}{2}$. PER LA DEF DEI LIMITI 1 E 2 AVREMO CHE:

1 $\exists n_1 : \forall n > n_1 \; |a_n - \ell_1| < \bar{\varepsilon}$

2 $\exists n_2 : \forall n > n_2 \; |a_n - \ell_2| < \bar{\varepsilon}$

SCELGO $\bar{n} = \max\{n_1, n_2\}$, DUNQUE $\forall n > \bar{n}$ DEVONO VALERE:

1 $|a_n - \ell_1| < \bar{\varepsilon}$

2 $|a_n - \ell_2| < \bar{\varepsilon}$

AVREMO QUINDI CHE $\forall n > \bar{n}$

$$
\begin{aligned}
2\bar{\varepsilon} &= \delta \\
&= |\ell_1 - \ell_2| \\
&= |\ell_1 - a_n + a_n - \ell_2| \\
&\leq |\ell_1 - a_n| + |a_n - \ell_2| \qquad \text{(DISUG. TRIANG)} \\
&= |a_n - \ell_1| + |a_n - \ell_2| \\
&< \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}
\end{aligned}
$$

IL RISULTA $2\bar{\varepsilon} < 2\bar{\varepsilon}$ È UNA CONTRADDIZIONE

ESERCIZIO 1

Esercizio 1 (3 pt)
Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata. Allora

1. a_n non è monotona;
2. $\lim_{n\to+\infty} a_n$ esiste ed è finito;
3. $|a_n| \leq 10 \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
4. $\exists \alpha > 0$ tale che $e^{a_n} > \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

1) F SIN n LIMITATA MA NON MONOTONA
2) F SIN n LIMITATA MA $\nexists$ LIMITE
3) F $a_n = 20\cos n$ LIMITATA, MA PER $n=0$ $a_n = 20$

ESERCIZIO 2

Esercizio 2 (3 pt) Siano A e B due insiemi limitati e non vuoti. Quale delle seguenti affermazioni è equivalente dire che $\inf A \leq \inf B$?

1. $\forall a \in A\ \exists b \in B$ tale che $a \leq b$,
2. $\forall a \in A\ \exists b \in B$ tale che $a \geq b$,
3. $\exists b \in B$ tale che $\forall a \in A a \leq b$,
4. $\forall \epsilon > 0\ \forall b \in B\ \exists a \in A$ tale che $a \leq b + \epsilon$

1) F PER $A = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ $B = [0, 1]$
2) F PERCHÈ IMPLICA $\inf B \leq \inf A$
3) UGUALE A 1)

ESERCIZIO 3

Esercizio 3 (8 pt) Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = |\sin x| + |\cos x|.$$

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] + 2k\pi, \ k \in \mathbb{N} \\ \sin x & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] + 2k\pi, \ k \in \mathbb{N} \\ -\sin x & x \in [\pi, \frac{3}{2}\pi] + 2k\pi, \ k \in \mathbb{N} \\ -\sin x & x \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi] + 2k\pi, \ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] + 2k\pi, \ k \in \mathbb{N} \\ -\cos x & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] + 2k\pi, \ k \in \mathbb{N} \\ -\cos x & x \in [\pi, \frac{3}{2}\pi] + 2k\pi, \ k \in \mathbb{N} \\ \cos x & x \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi] + 2k\pi, \ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x - \sin x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] + 2k\pi, \ k \in \mathbb{N} \\ \cos x + \sin x & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] + 2k\pi, \ k \in \mathbb{N} \\ -\cos x + \sin x & x \in [\pi, \frac{3}{2}\pi] + 2k\pi, \ k \in \mathbb{N} \\ -\cos x - \sin x & x \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi] + 2k\pi, \ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ESERCIZIO 4

Esercizio 4 (7 pt)

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\right|$$

SIA $a_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ $\quad a_k \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$

QUINDI $\sum_{k=0}^{+\infty} |(-1)^k a_k| = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

MA $a_k \sim \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} = b_k \rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ SERIE ARMONICA CON $\alpha = \frac{1}{2}$ E QUINDI DIVERGE

QUINDI $\sum a_k$ DIVERGE PER IL CONFRONTO ASINTOTICO

ESERCIZIO 5

Esercizio 5 (10 pt)

Studiare la convergenza dell'integrale improprio giustificando con cura i passaggi effettuati

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^5(\frac{1}{x})}{\ln(x^2+1) - 2\ln x} dx$$

PER $x \to +\infty$

$$\sin^5\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x^5}$$

$$\log(x^2+1) - \log x^2 = \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x^2}$$

OTTENGO $\frac{1}{x^5} \cdot \frac{x^2}{1} = \frac{1}{x^3}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{CONVERGE PER } \alpha > 1 \\ \text{DIVERGE PER } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}$ CONVERGE E PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO ANCHE L'INTEGRALE DI PARTENZA

GENNAIO 2024 - A

DOMANDA 1

Domanda 1 (10 pt)

a. Dare la definizione di serie numerica convergente e assolutamente convergente. (4 pt)

b. Studiare la convergenza assoluta della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ al variare di $x \in \mathbb{R}$. (6 pt)

a UNA SERIE NUM CONVERGE SE $\lim_{n \to +\infty} S_n$ (SOMME PARZIALI) $= S \in \mathbb{R}$

CONVERGE ASSOLUTAMENTE SE CONVERGE LA SERIE DEI VAL ASSOL

b $\left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ $\qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ SERIE ARMONICA CON $\alpha > 1$ CONVERGE

PER CRITERIO DEL CONFRONTO ASINT ANCHE $\frac{\sin(nx)}{n^2}$ CONV

DOMANDA 2

Domanda 2 (11 pt)

a. Dare la definizione di successione limitata.(3 pt)

b. Studiare la successione definita per ricorrenza (8 pt):

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = a_n^2$$

a UNA SUCC $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ SI DICE LIMITATA $\exists\, M \in \mathbb{R}$:

$$|a_n| < M \rightarrow -M < a_n < M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

DOMANDA 3

Domanda 3 (10 pt)

a. Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione in X. Dimostrare che se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0 (4 pt)

b. La funzione $f(x) = |x|^{\frac{1}{2}}$ è derivabile in $x = 0$? Motivare la risposta. (6 pt)

a DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$.

MA $\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$. SICCOME f È DERIVABILE IN x_0 ALLORA, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x)$ E PER $x \to x_0$ $(x - x_0) \to 0$. QUINDI $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = 0$.

b NON È DERIVABILE POICHÈ $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \text{SIGN}(x) = 1 \Big/ \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \text{SIGN}(x) = -1$$

ESERCIZIO 1

Esercizio 1 (4 pt)
Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$. Dire quale delle seguenti è vera, giustificando la riposta

1. $f(-1) \cdot f(1) < 0$.
2. $\exists c \in (-1, 1)$ tale che $f(c) = 0$.
3. $\forall c \in (-1, 1)$ si ha che $f(c) = 0$.
4. Se F è una primitiva di f, allora $F(-1) = 0$.

DAL TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE SI HA CHE

$\exists c \in (-1,1)$: $\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(c)(1-(-1)) = 2f(c)$. SICCOME $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$

ALLORA $2f(c)=0 \Leftrightarrow f(c)=0$. QUINDI $\exists c \in (-1,1): f(c)=0$

ESERCIZIO 2

Esercizio 2 (4 pt) Se z è il numero complesso $6 - 6i$, quale delle seguenti è vera ?

1. $z = 6\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi) - i\sin(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi))$, $k \in \mathbb{Z}$
2. $z = 6\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + i\sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi))$, $k \in \mathbb{Z}$
3. $z = 6\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{2}+2ki\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$
4. $z = 6\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi) + i\sin(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi))$, $k \in \mathbb{Z}$

$z = 6-6i \qquad z = 6\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \qquad \rho = 6\sqrt{2} \qquad \theta = -\pi/4 + 2k\pi$

$$z = 6\sqrt{2}\left(\cos\left(-\pi/4 + 2k\pi\right) + i\sin\left(-\pi/4 + 2k\pi\right)\right)$$

ESERCIZIO 3

Esercizio 3 (6 pt) Per quali valori di $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ risulta $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{k^3}x - \ln(1+\sqrt{k^3}x)}{kx^2} = 2$?

$t = \sqrt{k^3}x \qquad \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

$$\log(1+\sqrt{k^3}x) = \sqrt{k^3}x - \frac{k^3x^2}{2} + o((\sqrt{k^3}x)^2)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\sqrt{k^3}x} - \cancel{\sqrt{k^3}x} + \frac{k^3x^2}{2}}{kx^2} = \frac{k^3\cancel{x^2}}{2\cancel{k}\cancel{x^2}} = \left[\frac{k^2}{2} = 2\right] \to$$

$k^2 = 4$

$k = \pm\sqrt{4}$

$k = 2$

ESERCIZIO 4

Esercizio 4 (7 pt)
Calcolare
$$\int_{e^{-2}}^{e} |\ln x| dx.$$

$\ln x \geq 0$ PER $x>1$ E $\ln x<0$ PER $0<x<1$

$$\int_{e^{-2}}^{e} |\ln x| dx = \int_{1}^{e} \ln x \, dx - \int_{e^{-2}}^{1} \ln x \, dx$$

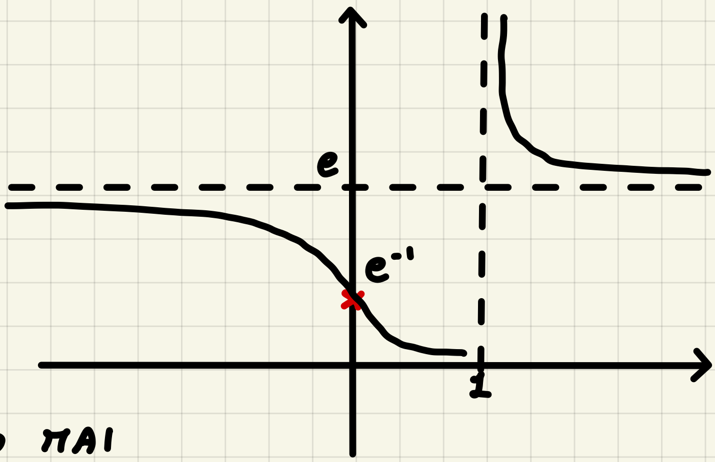
$$\int_{1}^{e} \ln x \, dx = [x\ln x - x]_{1}^{e} = 1 \; / \; \int_{e^{-2}}^{1} \ln x \, dx = [x\ln x - x]_{e^{-2}}^{1} = -1+3e^{-2}$$

$$1-(-1+3e^{-2}) = 2-3e^{-2}$$

ESERCIZIO 5

Esercizio 5 (10 pt)
Studiare la funzione $f(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}$ tracciandone il grafico.

$f(x)= e^{\frac{x+1}{x-1}}$ D: $x-1\neq 0$, $x\neq 1$ $\rightarrow \mathbb{R}\setminus\{1\}$



SIMMETRIE:

NÈ PARI NÈ DISP

POSITIVITÀ:

$f(x)>0$ e^x S.P.

INTERSEZIONI

PER $x=0$ $y=\frac{1}{e}$ PER $y=0$ $f(x)=0$ MAI

LIMITI:

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = e^{+\infty} = +\infty$ / $\lim_{x\to 1^-} f(x) = e^{-\infty} = 0$ $x=1$ ASINT VERT

$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) \sim e^1 = e$ $y=e$ ASINT ORIZZ

MAX E MIN:

$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} \geq 0$ SEMPRE ≤ 0

FLESSI:

$$f''(x) = -\frac{\frac{-4}{\cancel{(x-1)^2}} e^{\frac{x+1}{x-1}} \cancel{(x-1)^2} - 2e^{\frac{x+1}{x-1}} 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4x e^{\frac{x+1}{x-1}}}{(x-1)^4} \geq 0 \text{ PER } x\geq 0$$

0

$\cap$ $\cup$

GENNAIO 2024 - B

DOMANDA 1

Domanda 1 (10 pt)

a. Dare la definizione formale di serie numerica convergente e assolutamente convergente. (4 pt)

b. Studiare la convergenza assoluta della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)n^{-2}$ al variare di $x \in \mathbb{R}$. (6 pt)

a UNA SERIE NUM CONVERGE SE $\lim_{n \to +\infty} S_n$ (SOMME PARZIALI) $= S \in \mathbb{R}$

CONVERGE ASSOLUTAMENTE SE CONVERGE LA SERIE DEI VAL ASSOL

b $\left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ QUINDI CONVERGE PER LA SERIE ARMONICA CON $\alpha > 1$

DOMANDA 2

Domanda 2 (11 pt)

a. Dare la definizione di successione limitata.(3 pt)

b. Studiare la successione definita per ricorrenza (8 pt):

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad a_{n+1} = a_n^2$$

a UNA SUCC $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ SI DICE LIMITATA $\exists M \in \mathbb{R}$:

$|a_n| < M \to -M < a_n < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ESERCIZIO 1

Esercizio 1 (4 pt)

Sia $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $\int_0^2 g(x)dx = 0$. Dire quale delle seguenti è vera, giustificando la riposta

1. ✓ $\exists c \in (0,2)$ tale che $g(c) = 0$.
2. $g(0) \cdot g(2) < 0$.
3. $\forall c \in (0,2)$ si ha che $g(c) = 0$.
4. Se G è una primitiva di g, allora $G(0) = 0$.

$\exists c \in (0,2)$: $f(c)(2-0) \to 2f(c)=0 \to f(c)=0$

ESERCIZIO 2

Esercizio 2 (4 pt) Se z è il numero complesso $4 - 4i$, quale delle seguenti è vera ?

1. $z = 6\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + i\sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi))$, $k \in \mathbb{Z}$
2. $z = 4\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi) + i\sin(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi))$, $k \in \mathbb{Z}$
3. $z = 4\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{2} + 2ki\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$
4. $z = 4\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi) - i\sin(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi))$, $k \in \mathbb{Z}$

$z = 4-4i \quad z = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \quad \rho = 4\sqrt{2} \quad \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

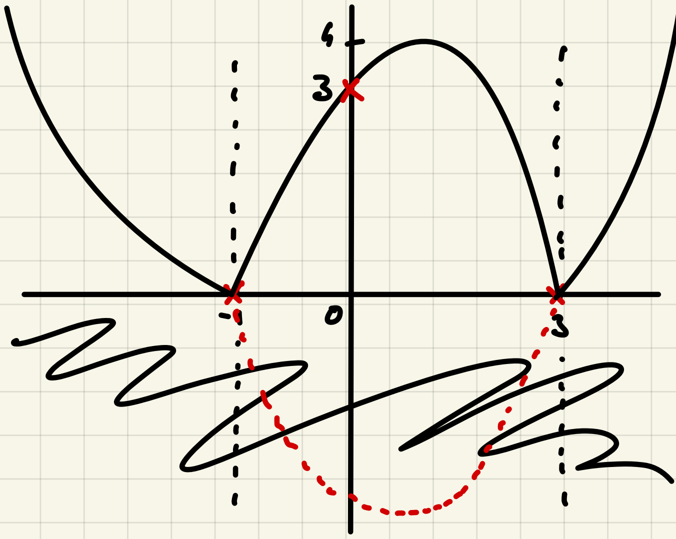
$z = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)$

ES:

$f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ $\qquad x^2 - 2x - 3 \geq 0$ PER $x \leq -1 \vee x \geq 3$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & x \leq -1 \vee x \geq 3 \\ -x^2 + 2x + 3 & -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

D: $\mathbb{R}$



NĒ PARI, NÈ DISP

INTERS:

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$ $(0, 3)$ $\qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \wedge x = 3 \end{cases}$ $(-1, 0)$ $(3, 0)$

SEGNO:

$f(x) > 0$ VALORE ASSOLUTO SEMPRE POS. TRANNE NEI PUNTI IN CUI È 0 $\rightarrow$ $x \neq -1$, $x \neq 3$

RIBALTO IL GRAFICO NEGATIVO

LIMITI:

$\lim_{x \to \pm\infty} (x^2 - 2x - 3) = +\infty$ NO ASINT ORIZZ

NO ASINT VERT POICHÉ D: $\mathbb{R}$

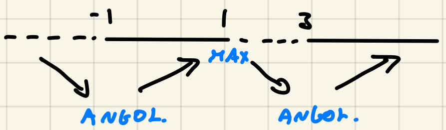
$m = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{x} = \infty$ NO ASINT OBL

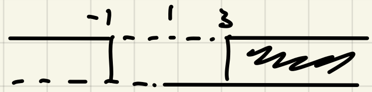
MAX E MIN:

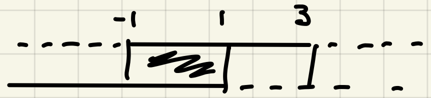
$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x \leq -1 \vee x \geq 3 \\ -2x + 2 & -1 < x < 3 \end{cases}$$

$\begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 3 \\ 2x - 2 > 0 \end{cases}$ $\cup$ $\begin{cases} -1 < x < 3 \\ -2x + 2 > 0 \end{cases}$

$x > 1$ $\qquad x < 1$







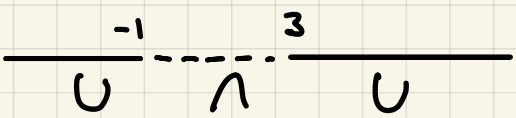
$f(-1) = f(3) = 0$ $\qquad f(1) = 4$ $\qquad$ $-1, 3$ PUNTI ANGOLOSI POICHÉ LIMITE DESTRO $\neq$ LIMITE SX

$f(x)$ NON DERIVABILE IN $x = -1 \wedge x = 3$

FLESS:

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & x \leq -1 \vee x \geq 3 \\ -2 & -1 < x < 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 3 \\ 2 > 0 \quad \text{S.V.} \end{cases} \cup \cancel{\begin{cases} -1 < x < 3 \\ -2 > 0 \end{cases}} \text{ MAI}$$

$x \leq -1 \vee x \geq 3$



Esercizio 5 **[4 punti]**

Calcolare l'integrale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (7x-6)\cos(3x)dx$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overset{f}{(7x-6)}\cos(\overset{g'}{3x})dx = \frac{1}{3}\int_a^b (7x-6)\,3\cos(3x)dx =$$

$$\frac{1}{3}\left[(7x-6)\sin(3x) - 7\int_a^b \sin 3x\,dx\right] = \frac{1}{3}\left[(7x-6)\sin(3x) + \frac{7}{3}\int_a^b -3\sin 3x\,dx\right] =$$

$$\frac{1}{3}\left[(7x-6)\sin(3x) + \frac{7}{3}\cos(3x)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{3}\Big($$

$$\frac{1}{3}\left[\left(\frac{7}{2}\pi-6\right)\sin\frac{3}{2}\pi + \cancel{\frac{7}{3}\cos\frac{3}{2}\pi}\right] - \frac{1}{3}\left[\left(-\frac{7}{2}\pi-6\right)\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)+\cancel{\frac{7}{3}\cos-\frac{3}{2}\pi}\right]$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{7}{2}\pi-6\right) - \frac{1}{3}\left(-\frac{7}{2}\pi-6\right) = -\cancel{\frac{7}{6}\pi}+2+\cancel{\frac{7}{6}\pi}+2 = 4$$

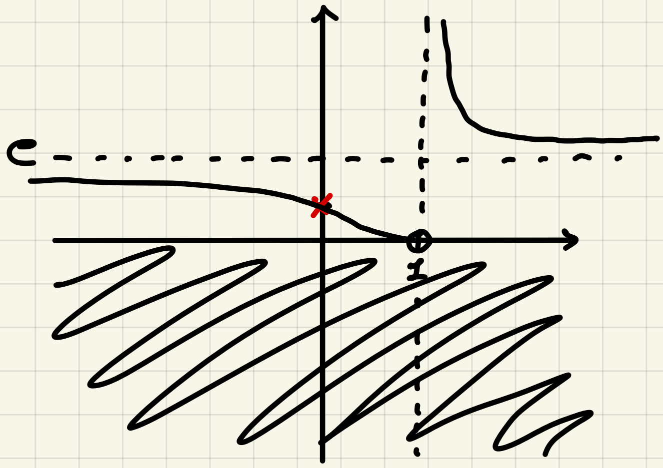
Esercizio 6 [4 punti]

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

e disegnarne un grafico approssimativo.

$f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$ D: $\mathbb{R} / \{1\}$



NÈ PARI, NÈ DISP DATO D

INTER:

$\begin{cases} x=0 \\ y=e^{-1} \end{cases}$ $(0, e^{-1})$ $\begin{cases} y=0 \\ \text{MAI} \end{cases}$

SEGNO:

$f(x) > 0$ SEMPRE $\forall x \neq 1$

LIMITI:

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = e^{-\infty} \to 0$ ASINT VERT SOLO PER 1^+

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = e^{+\infty} \to +\infty$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = e$ $y = e$ ASINTOTO ORIZZ COMPLETO

MAX E MINIMI:

$f'(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}} > 0$ SEMPRE < 0

1

FLESSI:

$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^4} \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{4(x-1)}{(x-1)^4} \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{4}{(x-1)^4} \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}} (\cancel{1} + x \cancel{-1})$

$= \frac{4}{(x-1)^4} \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}} \cdot x > 0$ PER $x > 0$

0 1

$\cap$ $\cup$ $\cup$

$F(0, 1/e)$

Esercizio 4 [4 punti]

Calcolare
$$\int \frac{2x+4}{x^2+5x+4}dx$$

$$\int \frac{2x+4}{x^2+5x+4}\,dx = \frac{2x+4}{(x+1)(x+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4} = \frac{Ax+4A+Bx+B}{(x+1)(x+4)}$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 4A+B=4 \end{cases} \quad \begin{cases} B=2-A \\ 4A+2-A=4 \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{2}{3} \\ B=\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\frac{2}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{4}{3}\int \frac{1}{x+4}\,dx = \frac{2}{3}\ln|x+1| + \frac{4}{3}\ln|x+4| + c$$

ES

$$\Delta < 0$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2-6x+10}\,dx = \frac{2x+3}{x^2-6x+10} = \frac{2x-6+9}{x^2-6x+10} = \frac{2x-6}{x^2-6x+10} + \frac{9}{x^2-6x+10}$$

$$\int \frac{2x-6}{x^2-6x+10}\,dx + 9\int \frac{1}{x^2-6x+10}\,dx$$

$$x^2-6x+10 = (x^2-6x+9)+1 = (x-3)^2+1$$

$$I = \ln|x^2-6x+10| + 9\int \frac{1}{1+(x-3)^2}\,dx = \ln|x^2-6x+10| + 9\,\mathrm{arctg}(x-3)+c$$

ES

$$\int \frac{8}{x^3+4x}\,dx = \frac{8}{x^3+4x} = \frac{8}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4)+x(Bx+C)}{x(x^2+4)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ 4A=8 \end{cases} \quad \begin{cases} A=2 \\ B=-2 \\ C=0 \end{cases} \qquad I = 2\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{2x}{x^2+4}\,dx$$

$$= 2\ln|x| - \ln|x^2+4| + c$$

3 MODI

ES

$$\int \frac{x^4-3x^3+5x-3}{x^2-4x+4}\,dx$$

$$\begin{array}{l|l} x^4-3x^3+5x-3 & x^2-4x+4 \\ \hline -x^4+4x^3-4x^2 & x^2+x \\ 0 \quad x^3-4x^2+5x-3 & \\ \quad -x^3+4x^2-4x & \\ \hline 0 \quad 0 \quad x-3 & \end{array}$$

$$\frac{x^4-3x^3+5x-3}{x^2-4x+4} = \frac{\cancel{(x^2-4x+4)}(x^2+x)}{\cancel{x^2-4x+4}} + \frac{(x-3)}{x^2-4x+4} \leftarrow P = D\cdot Q + R$$

$$= x^2+x+\frac{x-3}{(x-2)^2}$$

$$I = \int x^2\,dx + \int x\,dx + \int \frac{x-3}{(x-2)^2}\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+$$

$$\frac{x-3}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2} = \frac{Ax-2A+B}{(x-2)^2} \rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$= \int \frac{1}{x-2}\,dx - \int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx =$$

$$\int f(x)^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1}+c$$

$$-\int (x-2)^{-2}\,dx = -\frac{(x-2)^{-1}}{-1} = \frac{1}{x-2}$$

$$I = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\ln|x-2|+\frac{1}{x-2}+c$$

Esercizio 5 [4 punti]

Studiare la convergenza dell' integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+2}dx$$

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{(x+2)(x+1)}\,dx$$

$$\frac{1}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x+A+2B}{(x+2)(x+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A+2B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases} \rightarrow I = -\int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$I = \Big[-\ln|x+2|+\ln|x+1|\Big]_0^t = \left(-\ln|t+2|+\ln|t+1|\right)-\left(-\ln(2)+\ln(1)\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} -\ln(t+2)+\ln(t+1)+\ln(2) =$$

$$\ln 2 + \lim_{t\to+\infty} \ln\Big(\underbrace{\frac{t+1}{t+2}}_{\nearrow 1}\Big) = \ln 2$$

Esercizio 6

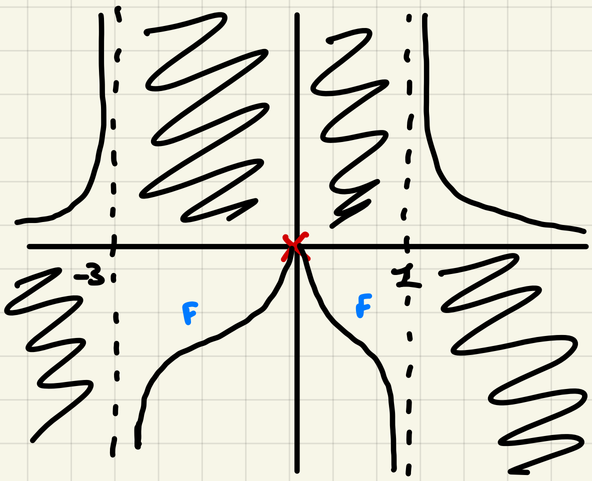
[5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \frac{|x|}{x^2+2x-3}$ e tracciarne un grafico approssimativo

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2+2x-3} \qquad D: \begin{array}{l} x^2+2x-3 \neq 0 \\ (x+3)(x-1) \neq 0 \\ x \neq -3 \ \wedge \ x \neq 1 \end{array}$$

$x > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+2x-3} & x > 0 \\[2ex] \dfrac{-x}{x^2+2x-3} & x < 0 \end{cases}$$



NÈ PARI, NÈ DISP PER IL D

INTER:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \qquad (0,0)$$

SEGNO:

$$\frac{|x|}{x^2+2x-3} > 0 \qquad x^2+2x-3 > 0 \qquad \text{POICHE } |x| > 0 \text{ SEMPRE}$$

$$x < -3 \ \vee \ x > 1$$

LIMITI:

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{-x}{(x+3)(x-1)} = \frac{3}{0^+} = +\infty \ \Big/ \ \lim_{x \to -3^+} \frac{-x}{(x+3)(x-1)} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$x = -3$ ASINT VERT COMPLETO

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{(x+3)(x-1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty \ \Big/ \ \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{(x+3)(x-1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$x = 1$ ASINT VERT COMPL

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x^2+2x-3} \sim -\frac{1}{x} = 0^+ \ \Big/ \ \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+2x-3} \sim \frac{1}{x} = 0^+$$

$y=0$ ASINT ORIZZ COMPLETO

NO ASINT OBL ALLORA

MAX E MIN:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+\cancel{2x}-3-2x^2-\cancel{2x}}{(x^2+2x-3)^2} = \dfrac{-x^2-3}{(x^2+2x-3)^2} & x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{-x^2-\cancel{2x}+3+2x^2+\cancel{2x}}{(x^2+2x-3)^2} = \dfrac{x^2+3}{(x^2+2x-3)^2} & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+3}{(x^2+2x-3)^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2-3}{(x^2+2x-3)^2} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$f(x)$ NON DERIVABILE IN $x=0$

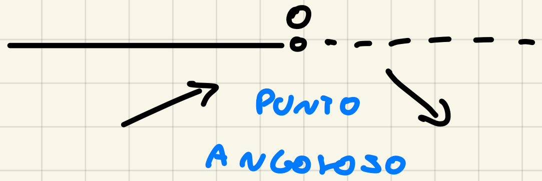
DIVERSI $\Rightarrow$ $x=0$ PUNTO ANGOLOSO

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \dfrac{-x^2-3}{(x^2+2x-3)^2} > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ \dfrac{x^2+3}{(x^2+2x-3)^2} > 0 \end{cases}$$

S.P. QUINDI $x<0$

NUM S.N. (<0)

QUINDI $\emptyset$



FLESS:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x(x^2+2x-3)^2 + 2(x^2+2x-3)(2x+2)(x^2+3)}{(x^2+2x-3)^4} & x>0 \\ \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2(\cancel{x^2+2x-3})\left(-x^3 \cancel{-2x^2} + 3x + 2x^3 + 6x \cancel{+2x^2} + 6\right)}{(x^2+2x-3)^{\cancel{4}\,3}} & x>0 \\ \end{cases}$$

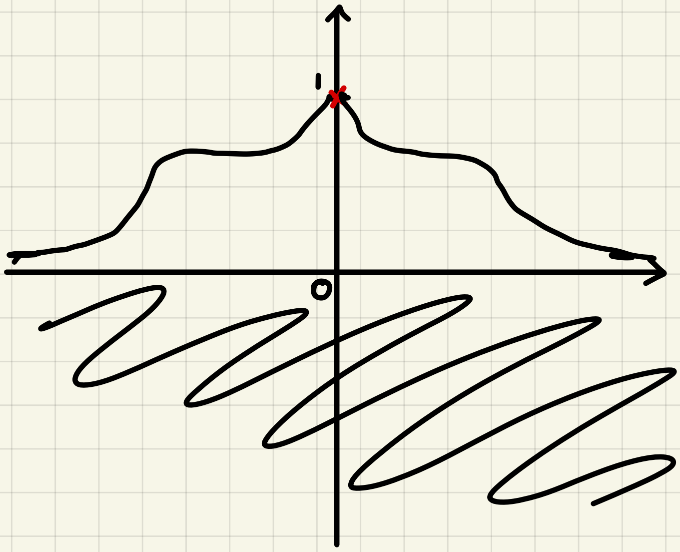
$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x^3+9x+6)}{(x^2+2x-3)^3} & x>0 \\ \dfrac{-2(x^3+9x+6)}{(x^2+2x-3)^3} & x<0 \end{cases}$$

Esercizio 6 [5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = (x^2+1)e^{-|x|}$ e tracciarne un grafico qualitativo.

$f(x) = (x^2+1)e^{-|x|}$ D: $\mathbb{R}$

$x > 0$



$$f(x) = \begin{cases} (x^2+1)e^{-x} & x > 0 \\ (x^2+1)e^{x} & x < 0 \end{cases}$$

$f(-x) = f(x) \rightarrow$ PARI

INTERS:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad (0, 1) \qquad \begin{cases} y = 0 \\ f(x) = 0 \text{ MAI} \end{cases}$$

SEGNO:

$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, NON SI ANNULLA MAI

LIMITI:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

MAX E MINIMI:

$$f'(x) = \begin{cases} (x^2+1)e^{-x} = 2x e^{-x} - (x^2+1)e^{-x} & x > 0 \\ (x^2+1)e^{x} = 2x e^{x} + (x^2+1)e^{x} & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ e^{-x}(-x^2+2x-1) > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ e^{x}(x^2+2x+1) > 0 \end{cases}$$

$x^2 - 2x + 1 < 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$$

f'

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+6}}dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x+6}}dx = \quad 2x+6=t^2 \quad = \int_0^1 \frac{1}{\cancel{t}} \cdot \cancel{t}\,dt = \quad t = \left[\sqrt{2x+6}\right]_0^1 = 2\sqrt{2}-\sqrt{6}$$

$$x = \frac{1}{2}t^2 - 3$$

$$dx = t\,dt$$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{3x+6}}dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{3x+6}}dx = \quad 3x+6 = t^3 \quad = \int \frac{1}{\cancel{t}} \cdot t^{\cancel{2}} dt = \frac{t^2}{2} = \left[\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+6)^2}\right]_0^1 =$$

$$x = \frac{1}{3}t^3 - 2$$

$$dx = t^2\,dt$$

$$t = \sqrt[3]{3x+6}$$

$$t^2 = \sqrt[3]{(3x+6)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{3^3 \cdot 3} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{36}\right) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{3} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{36}$$

Esercizio 4

[5 punti]

Verificare se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{2+x}\right)^{\frac{1}{x}}, & -2 < x < 0; \\ \frac{1}{\sqrt{x+e}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

é continua in 0.

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e \rightarrow \lim_{f(x)\to 0} (1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e$$

$$\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{2}{2+x}\right)^{1/x} = \left(\frac{2+x}{2}\right)^{-1/x} = \lim_{x\to 0^-} \left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1/x} =$$

$$\lim_{x\to 0^-} \left\{\left[\underbrace{\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}}_{e}\right]^{\frac{x}{2}}\right\}^{-\frac{1}{x}} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+e}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

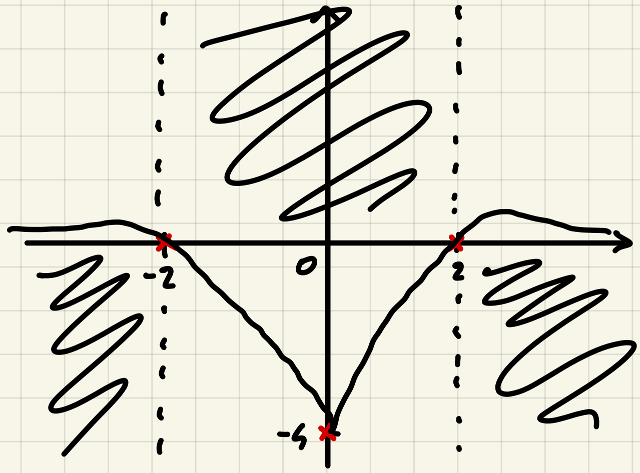
CONTINUA IN $x=0$

Esercizio 6 [5 punti]

Discutere dominio, asintoti, monotonia e tracciare un grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = (x^2 - 4)e^{-|x|}.$$

$f(x) = (x^2-4)e^{-|x|}$ $\quad x \geq 0 \quad$ D: $\mathbb{R}$



$$f(x) = \begin{cases} (x^2-4)e^{-x} & x \geq 0 \\ (x^2-4)e^{x} & x < 0 \end{cases}$$

$f(-x) = f(x)$ PARI RISPETTO ALL'ASSE Y

INTERS:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-4 \end{cases} \quad (0,-4) \qquad \begin{cases} y=0 \\ f(x)=0 \end{cases} \rightarrow x^2-4=0 \quad \begin{matrix} (-2,0) \\ (2,0) \end{matrix}$$

$x = \pm 2$

SEGNO:

$f(x)>0 \qquad x^2-4>0$

$x<-2 \vee x>2$

$$\overset{}{\underset{+}{\text{———}}}\ \overset{-2}{}\ \underset{-}{\text{- - - - -}}\ \overset{2}{}\ \underset{+}{\text{———}}$$

LIMITI:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2-4)e^{-x} = \frac{x^2-4}{e^x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \xrightarrow{H} \frac{2x}{e^x} \xrightarrow{H} \frac{2}{e^x} = 0^+ \quad \text{SIMM}$$

$y=0$ ASINT ORIZZ COMPLETO $\rightarrow$ NO ASINT VERT / OBL

MAX E MINIMI:

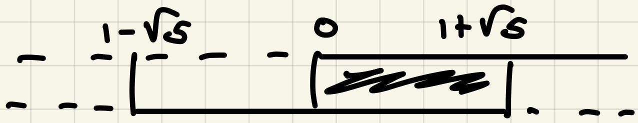
$$f'(x) = \begin{cases} 2xe^{-x} - (x^2-4)e^{-x} & x \geq 0 \\ 2xe^{x} + (x^2-4)e^{x} & x<0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-x}(2x - x^2+4) & x \geq 0 \\ e^{x}(2x+x^2-4) & x<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -x^2+2x+4>0 \end{cases} \cup \begin{cases} x<0 \\ x^2+2x-4>0 \end{cases} *$$

$0 \leq x \leq 1+\sqrt{5}$

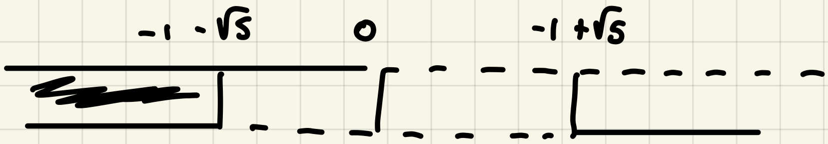
$x^2-2x-4<0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

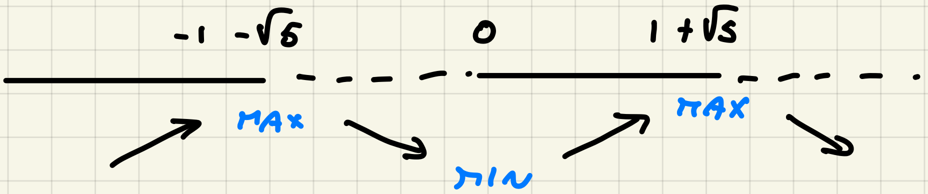


*

$x = -1 \pm \sqrt{5}$



$x < -1-\sqrt{5}$



MIN $(0,-4)$

MAX $(1+\sqrt{5}, 0.25)$

$$f(1+\sqrt{5}) = (1+5+2\sqrt{5}-4)\, e^{-1-\sqrt{5}} = (2+2\sqrt{5})\, e^{-1-\sqrt{5}} \approx 0.25$$

FLESSI:

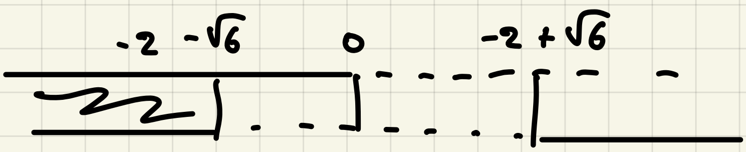
$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x}(2x - x^2+4) = e^{-x}(-2x+2) - e^{-x}(-x^2+2x+4) = e^{-x}(x^2-4x-2) & x \geq 0 \\ e^{x}(2x+x^2-4) = e^{x}(2x+2) + e^{x}(x^2+2x-4) = e^{x}(x^2+4x-2) & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-4x-2 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ x^2+4x-2 > 0 \end{cases}$$

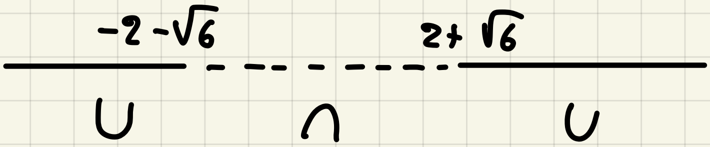
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+8}}{2} = 2 \pm \sqrt{6}$$

$x > 2+\sqrt{6}$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}$$



$x < -2-\sqrt{6}$



$$f(2+\sqrt{6}) = (\cancel{4}+6+4\sqrt{6}\cancel{-4})\, e^{-2-\sqrt{6}} = (6+4\sqrt{6})\, e^{-2-\sqrt{6}} = f(-2-\sqrt{6})$$

$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = e^{x}(x^2+2x-4) = -4 \;/\; \lim_{x \to 0^+} f'(x) = e^{-x}(-x^2+2x+4) = 4$ DIVERSI

PUNTO ANGOLOSO

Esercizio 5 [4 punti]

Calcolare

$$\int e^x(1+e^x)\ln(1+e^x)dx$$

$$\int e^x(1+e^x)\ln(1+e^x)dx \Rightarrow \tau = 1+e^x \Rightarrow \int \overset{g'}{\tau}\,\overset{f}{\ln(\tau)}\,d\tau =$$

$$d\tau = e^x dx$$

$$\frac{1}{2}\tau^2\ln(\tau) - \frac{1}{2}\int \tau^{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{\tau}}\,d\tau = \frac{1}{2}\tau^2\ln(\tau) - \frac{\tau^2}{4} = \frac{1}{2}(1+e^x)^2\ln(1+e^x) - \frac{(1+e^x)^2}{4} + c$$

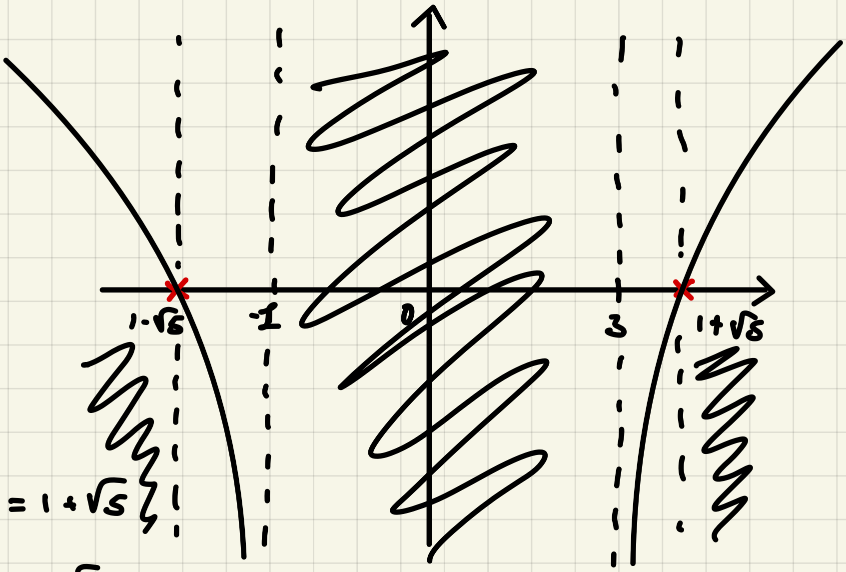
Esercizio 6 [4 punti]

Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 3)$.

$f(x) = \ln(x^2-2x-3)$

$D: \{x \in \mathbb{R} : x < -1 \ \vee\ x > 3\}$

$x^2-2x-3 > 0$



$f(-x)$ NÈ PARI NÈ DISP

INTERS:

$$\begin{cases} y = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-2x-3 = 1 \ \Big< \begin{matrix} x = 1+\sqrt{5} \\ x = 1-\sqrt{5} \end{matrix}$$

SEGNO:

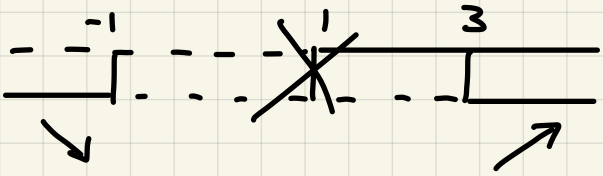
$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2-2x-3 > 1 \ \Big< \begin{matrix} x < 1-\sqrt{5} \\ x > 1+\sqrt{5} \end{matrix}$$

LIMITI:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty \ \Big/ \lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty \ \Big/ \lim_{x\to \pm\infty} f(x) =$$

MAX E MIN:

$$f'(x) = \frac{2(x-1)}{x^2-2x-3} > 0 \qquad \begin{matrix} x > 1 \\ x < -1 \ \vee\ x > 3 \end{matrix}$$



Esercizio 4 **[4 punti]**

Determinare le eventuali soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^3 = |z|^2 .$$

$z = a + ib \qquad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$(a+ib)^3 = a^2 + b^2$

$a^3 + 3a^2 ib + 3a(ib)^2 + (ib)^3 = a^2 + b^2$

$a^3 + 3a^2 bi - 3ab^2 - b^3 i = a^2 + b^2$

$(a^3 - 3ab^2) + i(3a^2 b - b^3) = (a^2+b^2) + i0$

$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = a^2 + b^2 \\ 3a^2 b - b^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} // \\ b(3a^2 - b^2) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} b = 0 \\ a^3 - a^2 = 0 \end{cases} \rightarrow a^2(a-1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} z_1 = 0 \\ z_2 = 1 \end{matrix}$

$\begin{cases} 3a^2 - b^2 = 0 \\ a^3 - 3ab^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2 = 3a^2 \\ a^3 - 9a^3 = a^2 + 3a^2 \end{cases}$

$8a^3 + 4a^2 = 0$

$4a^2(2a+1) = 0 \begin{cases} a = 0 & b = 0 \\ a = -\frac{1}{2} & b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad z_4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

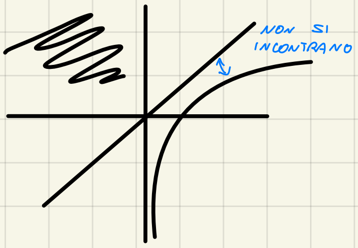
Esercizio 6 [4 punti]

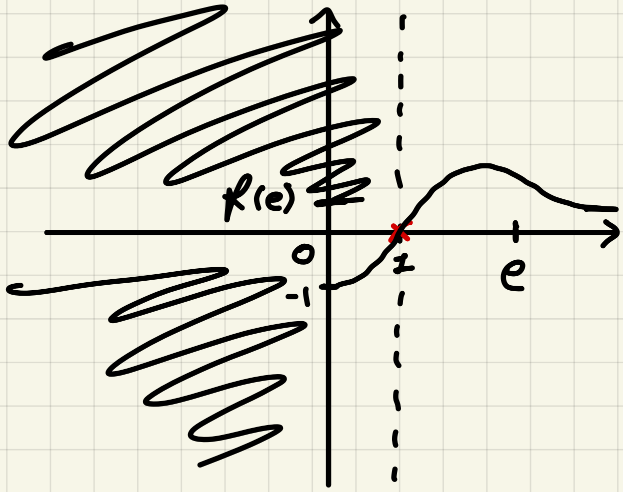
Studiare la funzione $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x-\ln(x)}$ e tracciarne un grafico approssimato.

$f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x-\ln(x)}$ D: $\mathbb{R}^+$ $x>0$

D: $x>0$

$x \neq \ln(x)$





NÈ PARI NÈ DISP PER IL D: $x>0$

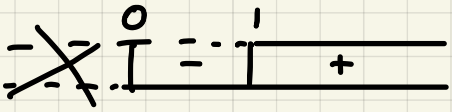
INTERS:

$(1,0)$

$\begin{cases} y=0 \\ f(x)=0 \end{cases} \iff \ln(x)=0 \iff x=1$

SEGNO:

$f(x)>0 \iff \begin{cases}\ln x>0\\ x-\ln x>0\end{cases} \quad \begin{cases}x>1\\ x>\ln x\end{cases} \quad \begin{cases}x>1\\ x>0\end{cases}$



$f(x)>0$ PER $x>1$ / $f(x)<0$ PER $0<x<1$

LIMITI:

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \left[\frac{-\infty}{+\infty}\right] \overset{H}{\to} \dfrac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \dfrac{\frac{1}{\cancel{x}}}{\frac{x-1}{\cancel{x}}} = \dfrac{1}{x-1} = -1$ NO ASINT VERT

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{\to} \dfrac{1}{x-1} = 0^+$ $y=0$ ASINT ORIZ DESTRO

↳ NO ASINT OBL

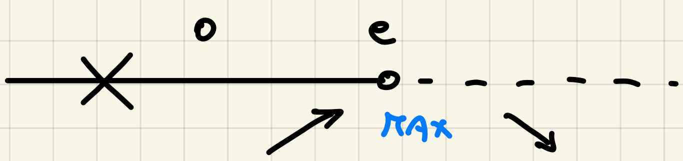
MAX E MIN:

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(x-\ln x) - \ln x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln x)^2} = \dfrac{1 - \cancel{\frac{\ln x}{x}} - \ln x + \cancel{\frac{\ln x}{x}}}{(x-\ln x)^2} > 0$

$1-\ln x>0$

$\ln x<1$

$x<e$



$f(e) = \dfrac{1}{e-1} \approx 0.5$

FLESSI:

$$f''(x) = \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2} = \frac{-\frac{1}{x}(x-\ln x)^2 - 2(x-\ln x)(1-\frac{1}{x})(1-\ln x)}{(x-\ln x)^4} =$$

$$= \frac{\cancel{(x-\ln x)}\left[-\frac{1}{x}(x-\ln x) - (2-\frac{2}{x})(1-\ln x)\right]}{(x-\ln x)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$\frac{-1+\frac{1}{x}\ln x - 2 + 2\ln x + \frac{2}{x} - \frac{2}{x}\ln x}{(x-\ln x)^3} = \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}\ln x + \frac{2}{x} - 3}{(x-\ln x)^3} > 0$$

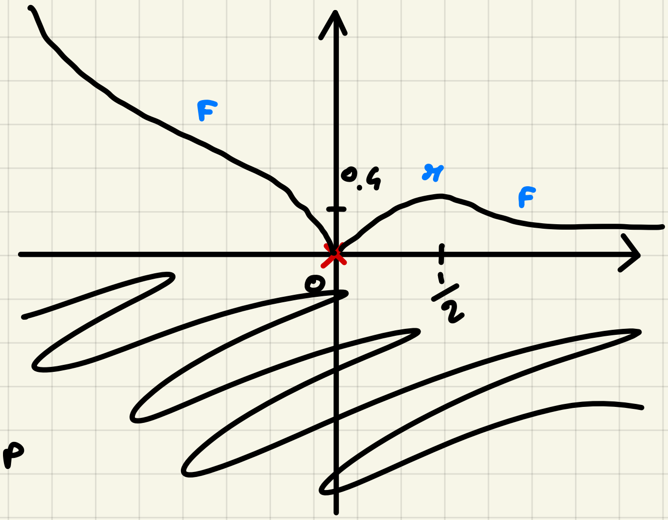
$$2\ln x - \frac{1}{x}\ln x + \frac{2}{x} - 3 > 0$$

$$\ln x\left(2-\frac{1}{x}\right) > 3 - \frac{2}{x}$$

$$\ln x > \frac{\frac{3x-2}{\cancel{x}}}{\frac{2x-1}{\cancel{x}}} \Rightarrow \ln x > \frac{3x-2}{2x-1}$$

Esercizio 6 [4 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{|x|} \cdot e^{-x}$.



$f(x) = \sqrt{|x|} \cdot e^{-x}$ D: $\mathbb{R}$

$x \geq 0$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \cdot e^{-x} & x \geq 0 \\ \sqrt{-x} \cdot e^{-x} & x < 0 \end{cases}$$

$f(-x) = \sqrt{x} \cdot e^{x}$ NÈ PARI NÈ DISP

INTERS:

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $(0,0)$ $\begin{cases} y=0 \\ f(x)=0 \iff x=0 \end{cases}$

SEGNO:

$f(x) > 0$ $x \neq 0$

LIMITI:

NO ASINT VERT ($D:\mathbb{R}$)

$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{-x}\, e^{-x} = +\infty$ / $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\, e^{-x} = [+\infty \cdot 0] = \frac{\sqrt{x}}{e^{x}} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \xrightarrow{H} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^{x}} = 0^+$

$y=0$ ASINT ORIZZ DESTRO → PUÒ ESSERCI QUELLO OBLIQ SX

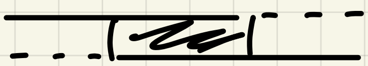
$m = \lim_{x \to -\infty} f(x)/x = \frac{\sqrt{-x} \cdot e^{-x}}{x} \sim \frac{e^{-x}}{x} = +\infty$ NO ASINT OBL

MAX E MIN:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x} - \sqrt{x}\, e^{-x} = e^{-x} \frac{1-2x}{2\sqrt{x}} & x \geq 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{-x}} e^{-x} - \sqrt{-x}\, e^{-x} = e^{-x} \frac{-1+2x}{2\sqrt{-x}} & x < 0 \end{cases}$$

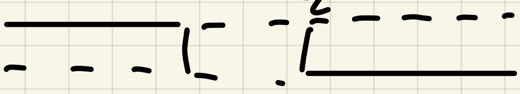
$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-2x > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ -1+2x \end{cases}$

$x < \frac{1}{2}$

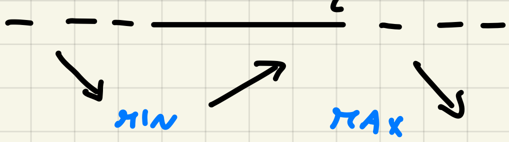


$0 < x < \frac{1}{2}$

$x > \frac{1}{2}$



$\emptyset$



$$\lim_{x \to 0^-} e^{-x} \cdot \frac{-1+2x}{2\sqrt{-x}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} e^{-x} \cdot \frac{1-2x}{2\sqrt{-x}} = +\infty$$

$x=0$
CUSPIDE

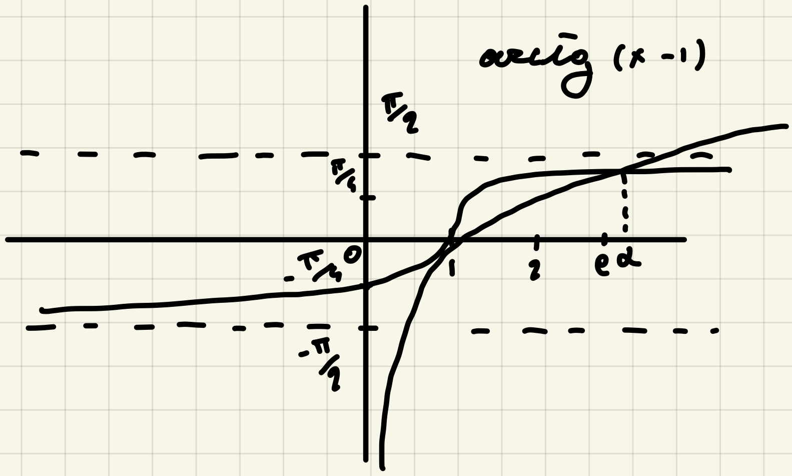
$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2e}} \approx 0.4$$

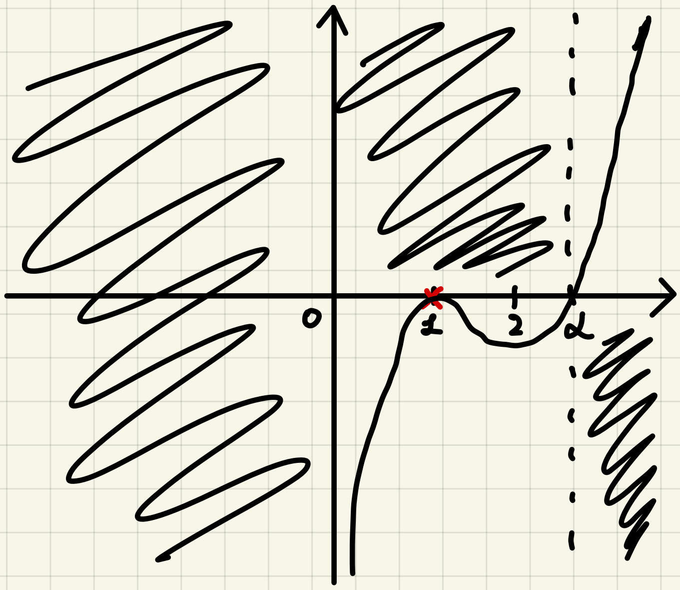
Esercizio 6 [5 punti]

Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \ln(x) - \arctan(x-1)$$

$f(x) = \ln x - \operatorname{arctg}(x-1)$ D: $x>0$





NÈ PARI NÈ DISP POICHÈ $x>0$

INTERS:

$$\begin{cases} y=0 \\ f(x)=0 \end{cases} \iff \ln x = \operatorname{arctg}(x-1) \qquad (\alpha, 0) \quad (1,0)$$

SEGNO:

$f(x) > 0$ $\ln x > \operatorname{arctg}(x-1)$ $x > \alpha$

LIMITI:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty + \frac{\pi}{4} = -\infty$ $x=0$ ASINT VERT DESTRO

NO ASINT ORIZZ

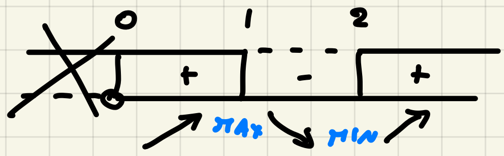
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty - \frac{\pi}{4} = +\infty$

$m = \lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 0 \;/\; q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - \cancel{mx} = +\infty$ NO ASINT OBL

MAX E MIN:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+(x-1)^2}\cdot 1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2-2x+2} = \frac{x^2-2x+2-x}{x(x^2-2x+2)} = \frac{x^2-3x+2}{x(x^2-2x+2)} > 0$$

$$\begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ x>0 \\ x^2-2x+2>0 \quad \text{S.P.} \end{cases} \qquad x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm 1}{2} \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$



FLESS:

$$f''(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2+2x} \Rightarrow \frac{(2x-3)(x^3-2x^2+2x)-(3x^2-4x+2)(x^2-3x+2)}{x^2(x^2-2x+2)^2}$$

$$2x^4 - \cancel{4x^3} + 4x^2 - 3x^3 + \cancel{6x^2} - \cancel{6x} - 3x^4 + 9x^3 - \cancel{6x^2} + \cancel{4x^3} - 12x^2 + 8x - 2x^2 + \cancel{6x} - 4$$

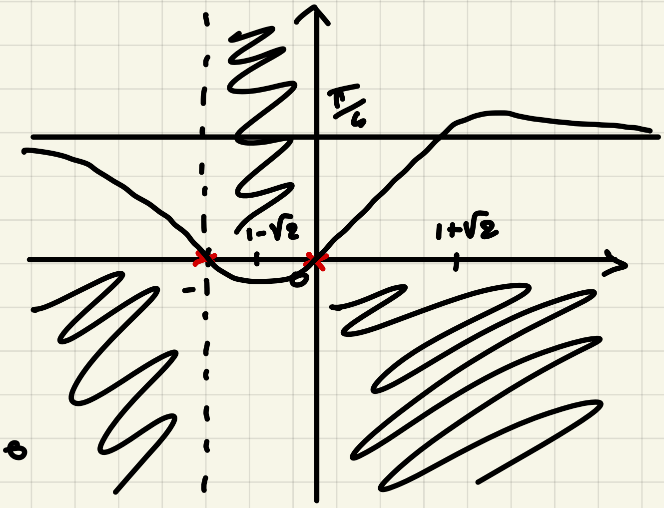
$$\frac{-x^4+6x^3-10x^2+8x-4}{x^2(x^2-2x+2)^2}$$

Esercizio 6 [5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2+x}{x^2+1}\right)$ e tracciarne un grafico approssimativo

$f(x) = \text{arctg}\left(\frac{x^2+x}{x^2+1}\right)$ D: $\mathbb{R}$

$f(-x) = \text{arctg}\left(\frac{x^2-x}{x^2+1}\right)$ NÈ P NÈ D



INTERS:

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $(0,0)$ $\begin{cases} y=0 \\ f(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x(x+1)=0$ → $x=0$, $x=-1$ $(-1,0)$

SEGNO:

$f(x)>0$ $\frac{x^2+x}{x^2+1}>0$ $x(x+1)>0$

$x<-1 \lor x>0$

-1 0

\+ − +

LIMITI:

NO ASINT VERT NO ASINT OBL ↑

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \text{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$ $y=\frac{\pi}{4}$ ASINT ORIZZ COMPL

MAX E MIN:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{(x^2+x)^2}{(x^2+1)^2}} \cdot \frac{(2x+1)(x^2+1)-2x(x^2+x)}{(x^2+1)^2} =$$

$$\frac{\cancel{(x^2+1)^2}}{\underbrace{2x^4+2x^3+3x^2+1}_{S.P.}} \cdot \frac{-x^2+2x+1}{\cancel{(x^2+1)^2}} > 0$$

$x^2-2x-1<0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{\cancel{2} \pm \cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 1 \pm \sqrt{2}$

1-√2 0 1+√2

↘ MIN ↗ MAX ↘

Esercizio 4 [4 punti]

Calcolare

$$\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-4}dx.$$

$$\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-4}\,dx = \int_0^1 \frac{x-1}{(x-2)(x+2)}\,dx \rightarrow \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-2B=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1-B \\ 2-4B=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1/4 \\ B = 3/4 \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{3}{4}\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx = \left[\frac{1}{4}\ln|x-2| + \frac{3}{4}\ln|x+2|\right]_0^1 = \frac{3}{4}\ln 3 - \ln 2$$

Esercizio 4 [4 punti]

Calcolare

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{2x+3}}\,dx$$

$$\int_{-1}^{1/2} e^{\sqrt{2x+3}}\,dx \Rightarrow 2x+3 = t^2 \qquad = \int e^{\sqrt{2x+3}}\,dx = \int \overset{g'}{e^t}\cdot \overset{f}{t}\,dt =$$

$$x = \frac{1}{2}t^2 - 3/2$$

$$dx = t\,dt$$

$$t e^t - \int e^t\,dt = t e^t - e^t + c$$

$$I = \left[\sqrt{2x+3}\,e^{\sqrt{2x+3}} - e^{\sqrt{2x+3}}\right]_{-1}^{1/2} = (2e^2 - e^2) - (e - e) = e^2$$

Esercizio 6 [5 punti]

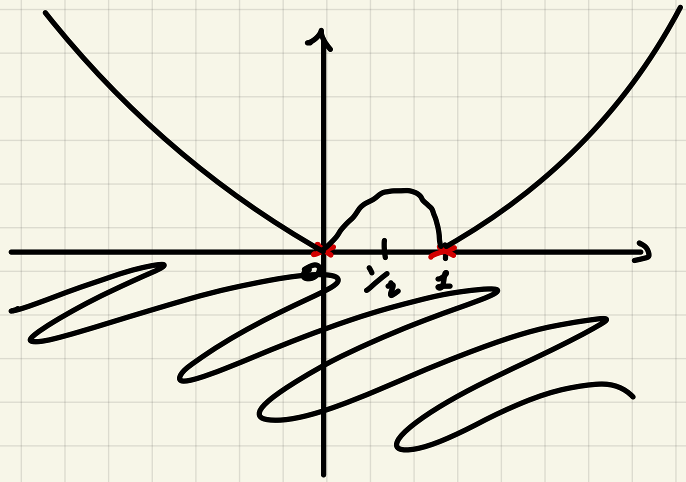
Studiare la funzione $f(x) = |e^{x^2-x} - 1|$ e tracciarne un grafico qualitativo.

$f(x) = |e^{x^2-x} - 1|$

$e^{x^2-x} - 1 > 0$ $\quad x^2 - x > 0$

$e^{x^2-x} > e^0$ $\quad x(x-1) > 0 \;<\; \begin{matrix} x = 0 \\ x = 1 \end{matrix}$ $\quad x < 0 \vee x > 1$

$$f(x) \begin{cases} e^{x^2-x} - 1 & x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ 1 - e^{x^2-x} & 0 < x < 1 \end{cases}$$



D: $\mathbb{R}$

$f(-x)$ NÈ PARI NÈ DISP

INTERS:

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $(0,0)$ $\quad \begin{cases} y=0 \\ f(x)=0 \end{cases} < \begin{matrix} x=0 \\ x=1 \end{matrix}$ $\quad (1,0)$

SEGNO:

$f(x) > 0$ SEMPRE TRANNE IN 0 E 1

LIMITI:

NO ASINT VERT

$\lim_{x \to \infty} |e^{x^2-x} - 1| = +\infty$ $\qquad m = \lim_{x \to \infty} f(x)/x = +\infty$

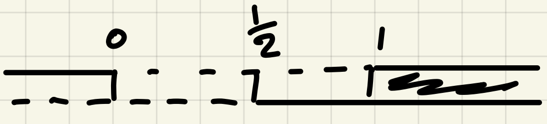
NO ASINT ORIZZ $\qquad$ NO ASINT OBL

MAX E MIN:

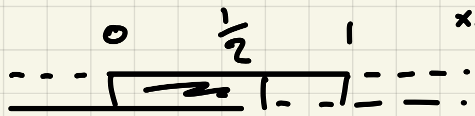
$$f'(x) \begin{cases} e^{x^2-x}(2x-1) & x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ -e^{x^2-x}(2x-1) & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$\begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases}$ $\quad \cup \quad$ $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 1 - 2x > 0 \end{cases}$

$x > \frac{1}{2}$

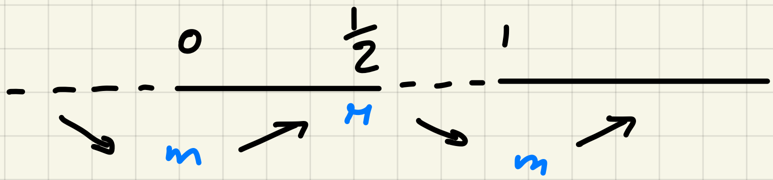


$x > 1$



$x < \frac{1}{2}$

$0 < x < \frac{1}{2}$



$f(0) = f(1) = 0 \qquad f(1/2) \approx 0.2$

$\lim_{x \to 0^-} e^{x^2-x}(2x-1) = -1 \;/\; \lim_{x \to 0^+} e^{x^2-x}(1-2x) = 1$ $\quad x=0$ PUNTO ANGOLOSO

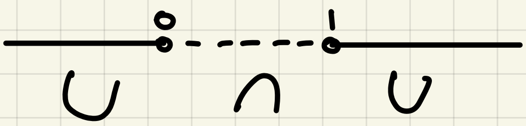
$\lim_{x \to 1^-} e^{x^2-x}(1-2x) = -1 \;/\; \lim_{x \to 1^+} e^{x^2-x}(2x-1) = 1$ $\quad x=1$ PUNTO ANGOLOSO

FLESSI:

$$f''(x) \begin{cases} e^{x^2-x}(2x-1)^2 + 2e^{x^2-x} = e^{x^2-x}(4x^2-4x+3) & x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ e^{x^2-x}(-4x^2+4x-3) & 0 < x < 1 \end{cases}$$

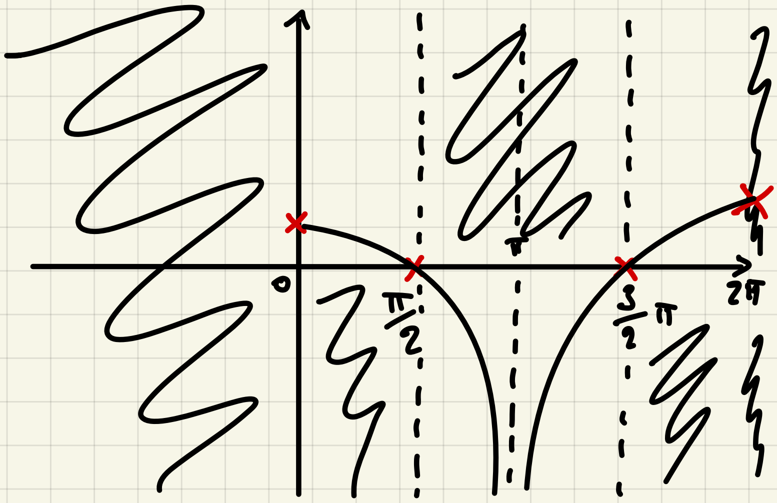
$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-48}}{8} \Rightarrow$ SE $\Delta < 0$ E LA DISEQ. È >0 $\mathbb{R}$

SE $\Delta < 0$ E LA DISEQ È <0 $\emptyset$



ES

$f(x) = \frac{\cos x}{1+\cos x}$ $[0, 2\pi]$



$D: \cos x \neq -1 \rightarrow x \neq \pi$

$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{1+\cos(-x)} = \frac{\cos x}{1+\cos x} = f(x)$

SIMM RISPETTO A y

INTERS:

$\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ $(0, \frac{1}{2})$ $\begin{cases} y=0 \\ f(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3}{2}\pi$

SEGNO:

$f(x) > 0$ $\begin{cases} \cos x > 0 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi \\ \cos x > -1 & x \neq \pi \end{cases}$

LIMITI:

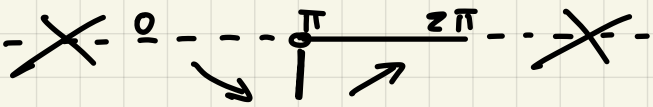
$\lim_{x \to \pi^{\pm}} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ $x = \pi$ ASINT VERT COMPLETO

NO ASINT OBL O ORIZZ
PERCHÈ NON STUDIO A ∞

MAX E MIN:

$f'(x) = \frac{-\sin x(1+\cos x) + \sin x \cos x}{(1+\cos x)^2} = -\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2} > 0$

$\sin x < 0$ $\pi < x < 2\pi$



FLESSI:

$f''(x) = \frac{-\cos x(1+\cos x)^2 + \sin x \cdot 2(1+\cos x)\cdot(-\sin x)}{(1+\cos x)^4} =$

$= \frac{(1+\cos x)(-\cos x - \cos^2 x - 2\sin^2 x)}{(1+\cos x)^4} =$

$= \frac{(1+\cos x)(\cos^2 x - \cos x - 2)}{(1+\cos x)^4} > 0$ MAI POS.

$(1+\cos x)^4 \searrow$ POS

$\cos^2 x - \cos x - 2 > 0$ $t = \cos x$

$t^2 - t - 2 > 0$ $t = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \left\langle \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \right.$

NO!
$\cos x < -1$
$\cos x > 2$