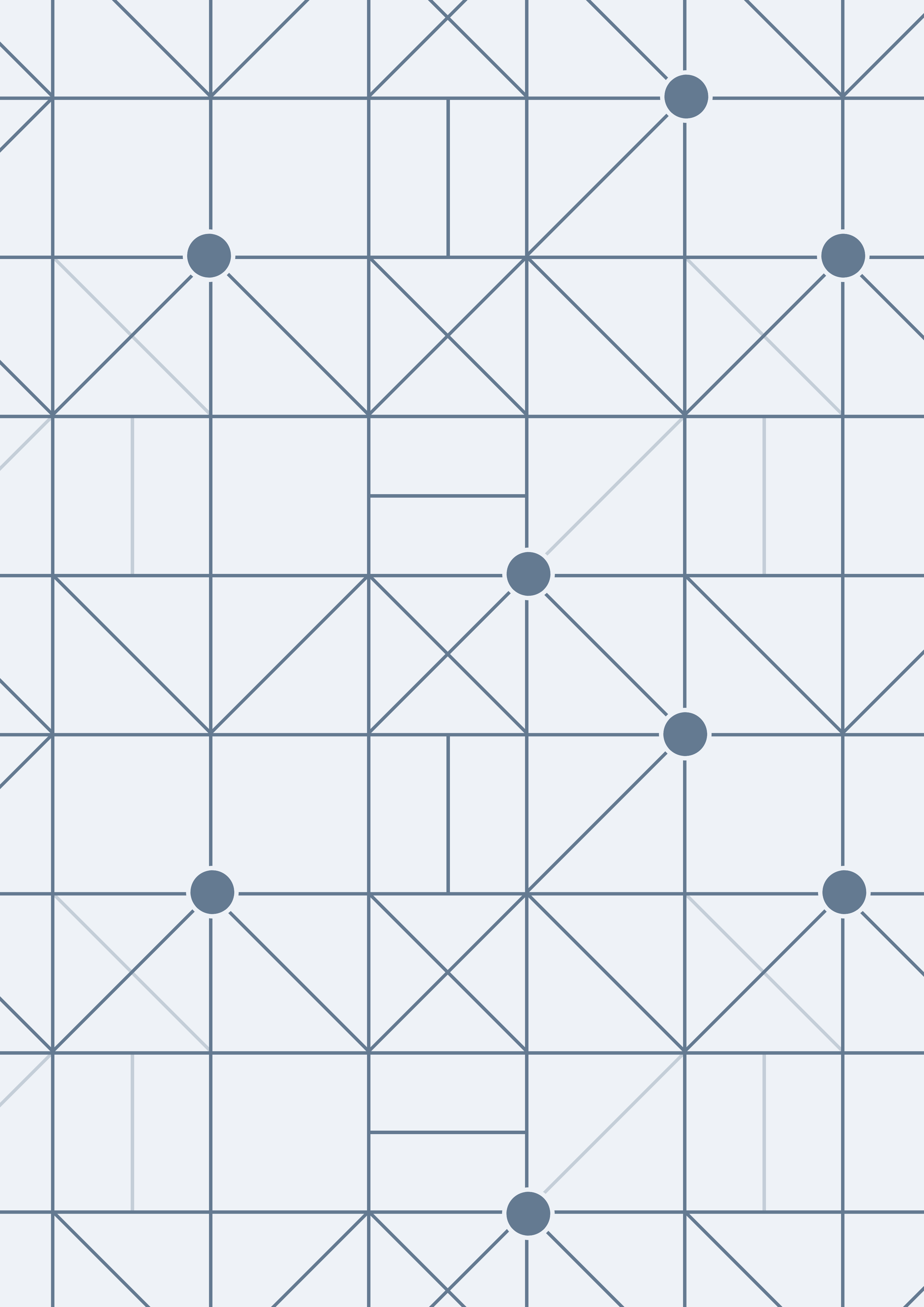


CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE

P.2.1.

La posizione di una particella che si muove lungo l'asse x dipende dal tempo secondo l'equazione $x(t) = At^2 - Bt^3$, dove x è espresso in metri e t in secondi.

(i) Quali devono essere le dimensioni delle costanti positive A e B ?

(ii) Quanto valgono la velocità istantanea e l'accelerazione istantanea?

(iii) In quale istante la particella raggiunge la massima ascissa?

i DEVONO AVERE STESSA DIM.

$$A = \frac{x}{t^2} = m/s^2 \qquad B = \frac{x}{t^3} = m/s^3$$

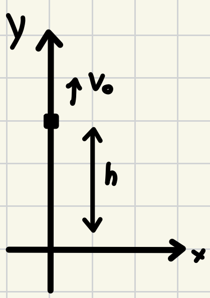
ii $v = \frac{dx}{dt} = 2At - 3Bt^2 \qquad a = \frac{dv}{dt} = 2A - 6Bt$

iii $v = 2At^* - 3Bt^{*2} = 0 \rightarrow t^*(2A - 3Bt^*) = 0 \left\langle \begin{array}{l} t^* = 0 \\ t^* = \frac{2A}{3B} \end{array} \right.$

P.2.2.

Un sasso viene lanciato verticalmente verso l'alto, con velocità iniziale $v_0 = 10$ m/s, da una piattaforma ad altezza $h = 3$ m da terra. Sapendo che, in prossimità della superficie terrestre, il sasso si muove, per effetto del peso, con accelerazione verticale costante, diretta verso il basso e di modulo $g = 9.8$ m/s^2, si calcoli dopo quanto tempo il sasso raggiunge il suolo.

MOTO UNI ACC



$$v_y = V_0 - gt$$

$$y = h + V_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$\frac{1}{2} g t^2 - V_0 t - h = 0$$

$$t = \frac{V_0 \pm \sqrt{V_0^2 + 2gh}}{g} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 58,8}}{9,81} = 2,3\,s$$

P.2.3.

Si sta progettando una nuova tratta di metropolitana sotterranea. Schematicamente la tratta è la seguente:

A : treno fermo;

A - B : tratto di 500 m percorso ad accelerazione costante a_1;

B - C : tratto di 4 km percorso a velocità costante $v_2 = 72$ km/h;

C - D : tratto di 250 m percorso con decelerazione costante a_3;

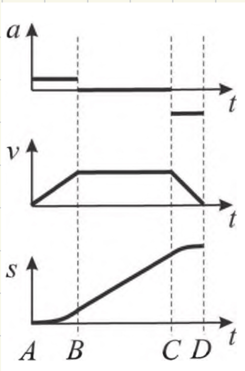
(i) si rappresenti su un grafico l'accelerazione, la velocità e la posizione in funzione del tempo in modo qualitativo;

(ii) si calcoli il valore dell'accelerazione a_1 in m/s^2 necessaria per raggiungere in B la velocità prevista sul tratto BC;

(iii) si calcoli il valore della decelerazione a_3 in m/s^2 necessaria al treno per arrestarsi nel punto D, cominciando a frenare in C;

(iv) si determini il tempo di percorrenza del tratto AD;

i



ii $a_1 = \frac{V_2 - V_0}{\Delta t_1} = \frac{V_2}{\Delta t_1} \rightarrow a_1 = \frac{V_2^2}{2S_1} = 0.4\ m/s^2$

$s_1 = \frac{1}{2} a_1 \Delta t_1^2 \rightarrow \Delta t_1 = \frac{2s_1}{V_2}$

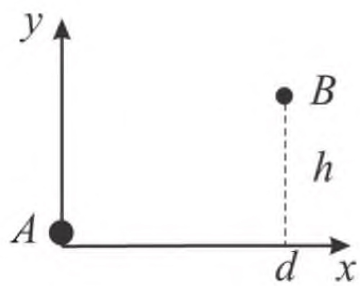
iii $a_3 = \frac{V_f - V_2}{\Delta t_3} = -\frac{V_2}{\Delta t_3} \rightarrow -\frac{V_2^2}{2S_3} = -0.8\ m/s^2$

$s_3 = \frac{1}{2} a_3 \Delta t_3^2 + V_2 \Delta t_3 = -\frac{1}{2} V_2 \Delta t_3 + V_2 \Delta t_3 = \frac{1}{2} V_2 \Delta t_3 \rightarrow \Delta t_3 = \frac{2s_3}{V_2}$

iv $\Delta t_2 = \frac{S_2}{V_2} = 200 s$ $\quad \Delta_{TOT} = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = 275 s$

P.2.4.

Si calcoli la velocità a cui deve muoversi di moto rettilineo uniforme un corpo A su un piano orizzontale per raccogliere un corpo B che viene lasciato cadere verticalmente da un'altezza $h = 120$ m. Il corpo B cade con accelerazione verticale costante, diretta verso il basso e di modulo $g = 9.8$ m/s^2. All'inizio della caduta il corpo B si trova ad una distanza $d = 7$ m dalla verticale di caduta.



$y = h - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$d = V_0 t \rightarrow V_0 = \frac{d}{t} = d\sqrt{\frac{g}{2h}} = 1.4\ m/s$

P.2.5.

Si determini la profondità di un pozzo sapendo che tra l'istante in cui si lascia cadere un sasso (con velocità iniziale nulla) e quello in cui si ode il rumore, in conseguenza dell'urto del sasso con il fondo del pozzo, trascorre un tempo $T = 4.8$ s . Si trascuri la resistenza dell'aria e si assuma la velocità del suono pari a $v_s = 340$ m/s. Il sasso cade con accelerazione verticale costante, diretta verso il basso e di modulo $g = 9.8$ m/s^2.

$$y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \qquad T = \tau_c + \tau_s$$

$$y(t) = h - \frac{1}{2} g \tau_c^2 = 0 \rightarrow \tau_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad \tau_s = \frac{h}{v_s}$$

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v_s} \rightarrow T^2 + \frac{h^2}{v_s^2} - \frac{2hT}{v_s} = \frac{2h}{g}$$

$$v_s^2 T^2 g + h^2 g - 2hTv_s g - 2hv_s^2$$

$$g h^2 - 2v_s(Tg + v_s)h + T^2 v_s^2 g = 0 \qquad h_1 = 99.6 \text{ m} \qquad \tau_c = 4.5\text{s} \quad \tau_s = 0.3\text{s}$$

P.2.7.

Un'automobile A, inizialmente ferma, viene superata da un'altra automobile B in moto con velocità costante $v_B = 100$ km/h. Al momento del sorpasso l'automobile A si mette in moto con accelerazione costante pari ad $a_A = 5$ m/s^2. Determinare il tempo impiegato dall'automobile A per raggiungere l'automobile B e la distanza dal punto di partenza a cui ciò avviene.

$$x_A = \frac{1}{2} a t^2 \quad x_B = v_B t \quad x_A = x_B \rightarrow \frac{1}{2} a t^2 = v_B t \rightarrow \bar{t} = \frac{2v_B}{a} = 11,\bar{1}\text{ s}$$

$$\bar{x} = x_B = v_B \bar{t} = 309\text{ m}$$

P.2.8.

Due automobili A e B viaggiano nella stessa direzione con velocità $v_A = 130$ km/h e $v_B = 70$ km/h. Quando la macchina A si trova alla distanza d dietro B, comincia a frenare con decelerazione $a = -4$ m/s^2. Si calcoli il minimo valore di d affinché sia evitato l'urto.

$$x_A = v_a t - \frac{1}{2}|a| t^2 \qquad x_B = v_b t + d$$

$$x_A = x_B \rightarrow \quad \frac{1}{2}|a| t^2 + (v_b - v_a) t + d = 0$$

$\Delta < 0$ PERCHÈ NON SI URTINO, QUINDI: $(v_b - v_a)^2 - 2|a|d > 0$

CIOÈ $\qquad d < \dfrac{(v_b - v_a)^2}{2|a|} = 34,7$ m

P.2.9.

Un punto materiale si muove di moto rettilineo partendo dalla posizione $x = 0$. La velocità iniziale è nulla e l'accelerazione varia nel tempo secondo la legge $a = a_0 \cos \omega t$. Si calcolino:

(i) la legge oraria del moto;

(ii) gli istanti temporali nei quali il punto materiale ripassa per l'origine;

(iii) il modulo della velocità del punto in tali istanti.

i

$$\int_0^{v_t} dv = a_0 \int_0^{t} \cos(wt)\,dt \rightarrow v(t) = \frac{a_0}{w}\sin(wt)$$

$$\int_0^{x(t)} dx = \frac{a_0}{w}\int_0^{t} \sin(wt)\,dt \rightarrow x(t) = -\frac{a_0}{w^2}\left[\cos(wt) - 1\right]$$

P.2.10.

Un corpo si muove di moto armonico con frequenza $\nu = 3$ Hz. All'istante $t = 0$ il corpo è ad una distanza $d = 10$ cm dalla posizione di equilibrio e la sua velocità è $v_0 = 1$ m/s. Si determini il minimo intervallo di tempo per cui il corpo raggiunge il massimo modulo della velocità e si calcoli quanto vale quest'ultimo.

$$x = A\cos(wt + \varphi)$$

$$v = -Aw\sin(wt + \varphi)$$

$$\begin{cases} x(0) = A\cos\varphi = d \rightarrow \cos\varphi = \frac{d}{A} \\ v(0) = -Aw\sin\varphi = V_0 \rightarrow \sin\varphi = -\frac{V_0}{Aw} \end{cases}$$

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \rightarrow \frac{d^2}{A^2} + \frac{V_0^2}{A^2 w^2} = 1 \rightarrow A = \sqrt{d^2 + \frac{V_0^2}{w^2}} = 0.113\,m$$

$$\varphi = \arccos\frac{d}{A} = -0.488\ \text{rad}$$

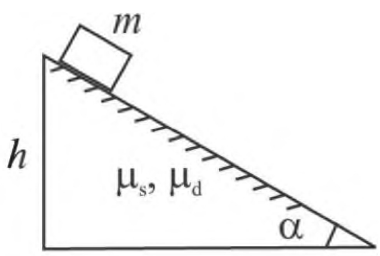
DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

P.3.1.
La legge del moto di un corpo di massa $m = 6$ kg in funzione del tempo t è $\mathbf{r}(t) = (3t^2 - 6t)\mathbf{u}_x - 4t^3\mathbf{u}_y + (3t+2)\mathbf{u}_z$, dove le componenti di $\mathbf{r}(t)$ sono espresse in metri. Si determini la forza che agisce sul corpo.

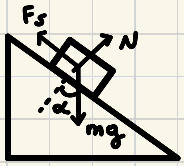
$$a = \frac{d^2r}{dt^2} \qquad F = ma = 36u_x - 144t\,u_y \text{ N}$$

$$\frac{dr}{dt} = (6t-6)u_x - 12t^2 u_y + 3u_z \rightarrow \frac{d^2r}{dt^2} = 6u_x - 24t\,u_y$$

P.3.2.
Un corpo di massa m è posto sulla sommità di un piano inclinato (angolo di inclinazione α) ad altezza h dal suolo. Il piano è scabro con coefficienti di attrito statico μ_s e dinamico μ_d. Si calcolino:
(i) il valore α_0 dell'angolo di inclinazione tale per cui il corpo resta in equilibrio per $\alpha \leq \alpha_0$;
(ii) l'accelerazione del corpo se $\alpha = 2\alpha_0$;
(iii) il tempo necessario per raggiungere il suolo se $\alpha = 2\alpha_0$.



i

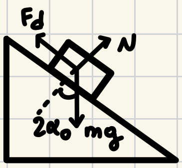


$$F_s + N + mg = 0 \qquad \begin{cases} mg\sin\alpha - F_s = 0 \rightarrow F_s = mg\sin\alpha \\ N - mg\cos\alpha = 0 \rightarrow N = mg\cos\alpha \end{cases}$$

$$F_s \leq \mu_s N \rightarrow F_s = \mu_s N = \mu_s mg\cos\alpha_0$$

$$\mu_s mg\cos\alpha_0 = mg\sin\alpha_0 \rightarrow \mu_s = \operatorname{tg}\alpha_0 \rightarrow \alpha_0 = \operatorname{arctg}(\mu_s)$$

ii SE $\alpha = 2\alpha_0$ IL CORPO SCIVOLA



$$F_d + N + mg = ma$$

$$ma = mg\sin 2\alpha_0 - F_d = mg\sin 2\alpha_0 - \mu_d N$$

$$0 = N - mg\cos 2\alpha_0 \rightarrow N = mg\cos 2\alpha_0$$

$$ma = mg\sin 2\alpha_0 - \mu_d mg\cos 2\alpha_0 \rightarrow a = g(\sin 2\alpha_0 - \mu_d\cos 2\alpha_0)$$

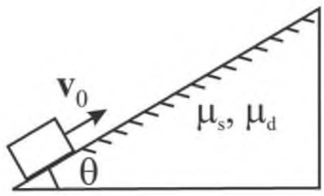
iii

$$d = \frac{1}{2}at \qquad t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{g\sin 2\alpha_0(\sin 2\alpha_0 - \mu_d\cos 2\alpha_0)}}$$

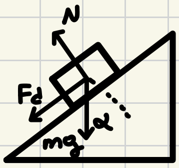
$$d = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{h}{\sin 2\alpha_0}$$

P.3.3.

Un corpo è lanciato su un piano scabro, inclinato di un angolo $\vartheta = 30°$ rispetto all'orizzontale, con velocità iniziale $v_0 = 3$ m/s. Il coefficiente di attrito dinamico fra il piano ed il corpo è $\mu_d = 0.3$ mentre il coefficiente di attrito statico è $\mu_s = 0.7$. Si calcoli l'intervallo di tempo necessario affinché la velocità del corpo si riduca a zero. Si discuta inoltre quale sarà il moto del corpo dopo tale istante.



$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_d$

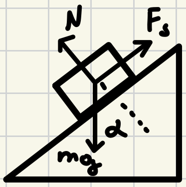


$$\begin{cases} ma = -mg\sin\alpha - F_d = -mg\sin\alpha - \mu_d N \\ N - mg\cos\alpha \rightarrow N = mg\cos\alpha \end{cases} \rightarrow a = -g(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)$$

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELLERATO

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = a\int_0^t dt \rightarrow v(t) = v_0 + at$$

V SI ANNULLA QUANDO $v_0 + at^* = 0 \rightarrow t^* = -\frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)} = 0.4\,s$



ORA CHE È FERMO ABBIAMO

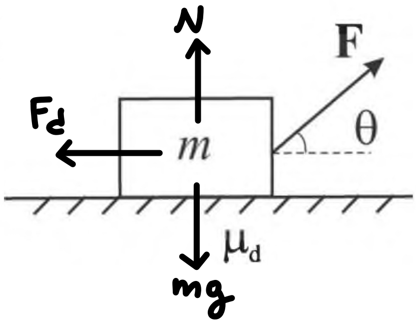
$$\begin{cases} ma = -mg\sin\alpha + F_s \\ N - mg\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$a=0$ PER RESTARE FERMO QUINDI $F_s = mg\sin\alpha$

MA $F_s = \mu_s N$ MASSIMO $\rightarrow mg\sin\alpha \leq \mu_s mg\cos\alpha$

CONDIZIONE DI EQ. $\mu_s \geq tg\,\alpha$

P.3.4.
Un corpo di massa m è trascinato lungo un piano orizzontale scabro (coefficiente di attrito dinamico μ_d) da una forza **F** inclinata di un angolo ϑ rispetto all'orizzontale. Si determinino:
(i) il modulo della forza affinché il corpo si muova di moto rettilineo uniforme;
(ii) l'angolo ϑ_0 per cui la forza necessaria è minima.



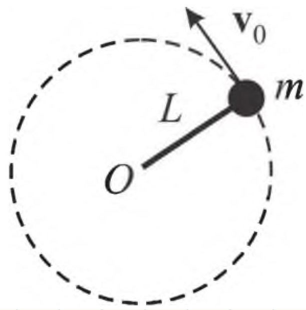
i LA RISULTANTE DI TUTTE LE FORZE DEVE ESSERE NULLA

$$\begin{cases} N + F\sin\alpha = mg \rightarrow N = mg - F\sin\alpha \\ F\cos\alpha = F_d = \mu_d N \rightarrow F\cos\alpha = \mu_d(mg - F\sin\alpha) \end{cases} \qquad F = \frac{\mu_d mg}{\cos\alpha + \mu_d \sin\alpha}$$

ii DERIVIAMO F E CERCHIAMO I PUNTI STAZIONARI

$$\frac{dF}{d\alpha} = -\frac{\mu_d mg(-\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu_d\sin\alpha)^2} = 0 \rightarrow \begin{array}{l} \mu_d\cos\alpha = \sin\alpha \\ \mu_d = \operatorname{tg}\alpha \\ \alpha = \operatorname{arctg}\mu_d \end{array}$$

P.3.5.
Un corpo di massa $m = 2$ kg è posto in rotazione con velocità iniziale $v_0 = 10$ m/s su un piano orizzontale liscio mediante una fune inestensibile di lunghezza $L = 4$ m vincolata ad un punto fisso O. Si determini la frequenza di rotazione e la tensione della fune.



MOTO CIRCOLARE UNIF

$$f = \frac{V_0}{2\pi L} = 0.39 \text{ GIRI/s}$$ 2 GIRI OGNI 5 SECONDI

$$a_N = \frac{V_0^2}{L} \qquad F = ma = m\frac{V_0^2}{L} = 50N = T$$

P.3.6.

In una giostra, un seggiolino di massa $m = 5$ kg è collegato mediante una fune ideale lunga $L = 5$ m alla cima di un palo, posto in rotazione con velocità angolare uniforme $\omega = 1.5$ rad/s; durante il moto, l'angolo tra la fune ed il palo si mantiene costante. Si determini la distanza dal palo a cui si trova il seggiolino e la tensione nella fune.

$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$ MOTO CIRCOLARE UNIF LUNGO IL RAGGIO $d = L\sin\alpha$

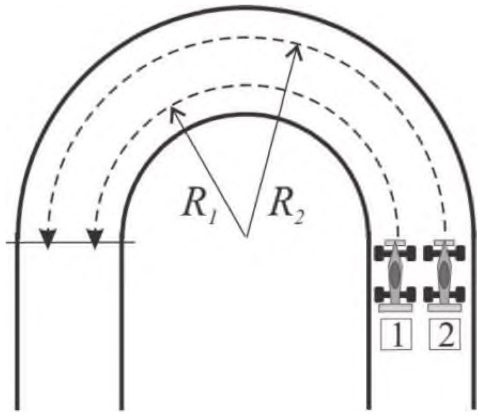
$mg - T\cos\alpha = 0$ (IN VERTICALE)

$m\frac{v^2}{d} = T\sin\alpha \rightarrow T = m\frac{v^2}{d\sin\alpha} = m w^2 L = 56.25\ N$ $\cos\alpha = \frac{g}{w^2 L}$

$d = L\sin\alpha = L\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{w^4 L^2 - g^2}}{w^2} = 2.45\ m$

P.3.7.

Due automobili da corsa arrivano affiancate prima di una curva semicircolare, che entrambe percorrono a velocità costante lungo due traiettorie di raggio, rispettivamente, $R_1 = 95$ m e $R_2 = 105$ m (vedi figura). Sapendo che il coefficiente di attrito statico tra ruote ed asfalto vale $\mu_s = 0.7$, si determini la massima velocità con cui ognuna delle due macchine può percorrere la curva senza slittare e quale automobile, in queste condizioni, arrivi prima al termine della curva.



$N = mg$ VERTICALE

$m\frac{v^2}{r} = F_s$ ORIZZONTALE $F_s \leq \mu_s N = \mu_s mg$

$m\frac{v^2}{r} \leq \mu_s mg \rightarrow v = \sqrt{\mu_s g r}$

$v_1 = \sqrt{\mu_s g r_1} = 25.5\ m/s = 92\ Km/h$ $t_1 = \frac{\pi r_1}{v_1} = 11.7\ s$

$v_2 = \sqrt{\mu_s g r_2} = 26.8\ m/s = 97\ Km/h$ $t_2 = \frac{\pi r_2}{v_2} = 12.3\ s$

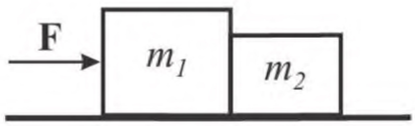
LA M_1 ARRIVA PRIMA MA M_2 È PIÙ VELOCE IN CURVA

P.3.8.

Due blocchi di massa m_1 ed m_2 sono posti a contatto tra loro su un piano orizzontale liscio, come mostrato in figura. Una forza costante $\mathbf{F}$ viene applicata alla prima massa. Si determinino:

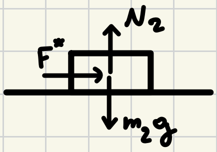
(i) l'accelerazione del sistema;

(ii) il modulo della forza di interazione tra i blocchi.



i $\quad F = (m_1 + m_2)a \rightarrow a = \dfrac{F}{m_1 + m_2}$

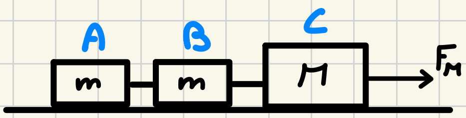
ii



$F^* = m_2 a \rightarrow F^* = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} F$

P.3.9.

Un convoglio ferroviario è composto da una motrice di massa $M = 10^5$ kg e da due vagoni identici di massa $m = 3 \times 10^4$ kg. Nell'intervallo di tempo compreso tra $t_i = 0$ e $t_f = 60$ s la velocità cresce linearmente dal valore $v_i = 100$ km/h a $v_f = 200$ km/h. I vagoni sono collegati da ganci rigidi. Trascurando tutti gli attriti si calcolino le tensioni nei ganci e la forza motrice nell'intervallo di tempo considerato.

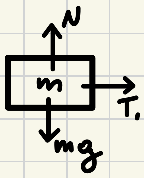


a COST PERCHÈ v VARIA LINEARMENTE

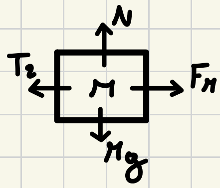
$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{27.7\ m/s}{60s} = 0.46\ m/s^2$$

$$\begin{cases} F_M = (2m + M)a \rightarrow F_M = 7.4 \cdot 10^4\ N \\ (2m + M)g = N \end{cases}$$

PER IL VAGONE A $\rightarrow$ $ma = T_1 = 1.39 \cdot 10^4\ N$

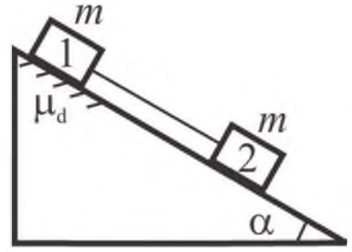


PER IL VAGONE C $\rightarrow$ $Ma = F_M - T_2 \rightarrow T_2 = F_M - Ma = 2.8 \cdot 10^4\ N$

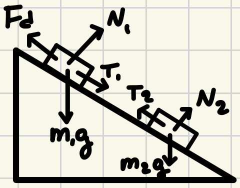


P.3.10.

Due corpi di massa m legati da una fune inestensibile scivolano lungo un piano, inclinato di un angolo α. Sapendo che tra il corpo 2 ed il piano non c'è attrito mentre tra il corpo 1 ed il piano il coefficiente di attrito dinamico è μ_d, si determini la tensione della fune. Si discuta inoltre per quale valore di α le due masse scivolano a velocità costante.



FUNE SEMPRE TESA, $a_1 = a_2$



CORPO 1:

$m a_1 = mg + F_d + N_1 + T_1$ $\qquad$ $F_d \le \mu_d N_1 = \mu_d mg\cos\alpha$

$$\begin{cases} N_1 - mg\cos\alpha \rightarrow N_1 = mg\cos\alpha \\ m a_1 = T_1 + mg\sin\alpha - F_d = T_1 + mg\sin\alpha - \mu_d mg\cos\alpha \end{cases}$$

CORPO 2:

$m a_2 = mg + N_2 + T_2$

$$\begin{cases} N_2 - mg\cos\alpha \rightarrow N_2 = mg\cos\alpha \\ m a_2 = mg\sin\alpha - T_2 \end{cases}$$

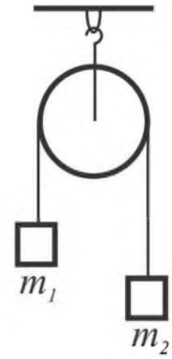
1 $\quad ma = T + mg(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha)$ $\qquad$ $T = \frac{1}{2} mg\mu_d\cos\alpha$

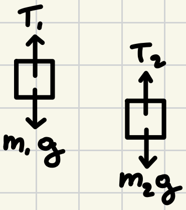
2 $\quad ma = mg\sin\alpha - T$ $\qquad$ $a = g\sin\alpha - \frac{1}{2}\mu_d g\cos\alpha$

$a = 0$ PER SCIVOLARE CON LA STESSA VELOCITÀ:

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\mu_d\cos\alpha \rightarrow \mu_d = 2\operatorname{tg}\alpha$$

P.3.11.
La macchina di Atwood è composta da due corpi, di masse m_1 ed m_2, sospesi verticalmente ad una puleggia liscia e di massa trascurabile. Si calcolino l'accelerazione del sistema, la tensione nella fune e la tensione nel gancio che tiene appesa la puleggia.





$$\begin{cases} m_1 a_1 = m_1 g + T_1 \\ m_2 a_2 = m_2 g + T_2 \end{cases}$$

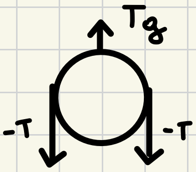
$$y \begin{cases} m_1 a_1 = -m_1 g + T_1 \\ m_2 a_2 = -m_2 g + T_2 \end{cases}$$

$T_1 = T_2 = T$ vy $\qquad a_1 = -a_2 = a$ vy

$$y' \begin{cases} m_1 a = -m_1 g + T \\ -m_2 a = -m_2 g + T \end{cases}$$

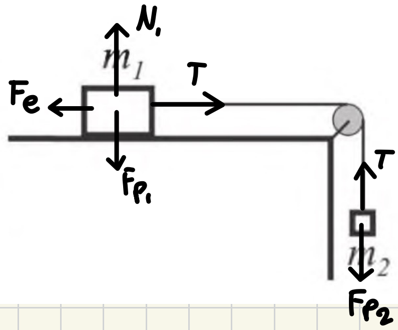
$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

$$T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$



$$T_g = 2T = \frac{4 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

P.3.12.
Un corpo di massa $m_1 = 1$ kg è posto su di un piano orizzontale liscio. Il corpo è collegato mediante una fune ideale ed una carrucola liscia ad un secondo corpo di massa $m_2 = 50$ g libero di scorrere in verticale. Si determinino:
(i) la forza che bisogna applicare alla massa m_1 per mantenere il sistema in equilibrio;
(ii) la variazione nella tensione della fune quando il sistema è lasciato libero di scorrere.



$m_1 = 1\ Kg \qquad m_2 = 50g = 0.05\ kg$

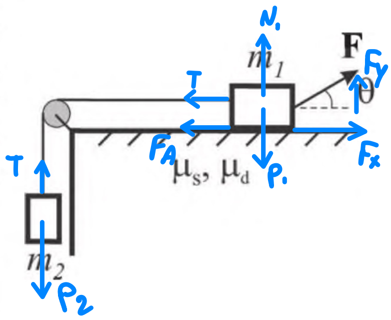
i $\quad F_e = F_{p_2} = m_2 g = 0.49N = T$

ii $\quad F_{TOT} = F_{p_2} = 0.49N \rightarrow F_{TOT} = Ma \rightarrow a = \dfrac{F_{TOT}}{M} = \dfrac{0.49}{1.05} = 0.47\ m/s^2$

$$\begin{cases} F_{TOT1} = m_1 a = T = 0.47\ N \\ F_{TOT2} = m_2 a = F_{p_2} - T \rightarrow T = F_{p_2} - m_2 a = 0{,}47\ N \end{cases}$$

$|\Delta T| = 0.49 - 0.47 = 0.02\ N$

P.3.13.
Una massa m_1 è posta su un piano orizzontale scabro con coefficiente di attrito statico μ_s e coefficiente di attrito dinamico μ_d. Una seconda massa m_2 è collegata alla prima mediante una fune ideale ed è libera di muoversi in verticale mediante una carrucola liscia. Alla massa m_1 è inoltre applicata una forza costante $\mathbf{F}$ con direzione formante un angolo ϑ con l'orizzontale.
(i) Si discuta per quali valori di $|\mathbf{F}|$ il sistema si sposta vincendo l'attrito statico.
(ii) Si determini l'accelerazione a con cui il sistema si muove nelle condizioni discusse nel punto (i).



x, y

1 $$\begin{cases} P_1 - N - F_y = 0 \rightarrow \underline{N = P_1 - F_y = m_1 g - F\sin\alpha} \\ F_x - T - F_A = 0 \rightarrow \underline{F_A = F_x - T = F\cos\alpha - m_2 g} \end{cases}$$

2 $\quad P_2 - T = 0 \rightarrow \underline{T = P_2 = m_2 g}$

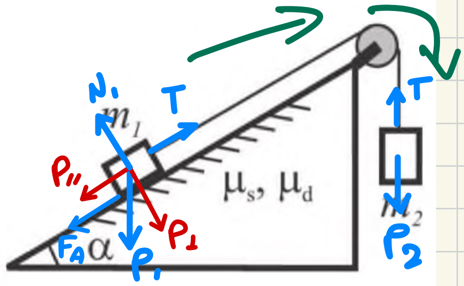
i $\quad \mu_s(m_1 g - F\sin\alpha) = F\cos\alpha - m_2 g \rightarrow \mu_s m_1 g - \mu_s F\sin\alpha - F\cos\alpha + m_2 g = 0$

$F(\mu_s \sin\alpha + \cos\alpha) = \mu_s m_1 g + m_2 g \rightarrow F = \dfrac{\mu_s m_1 g + m_2 g}{\mu_s \sin\alpha + \cos\alpha}$

ii $$\begin{cases} F_x - T - F_d = m_1 a \rightarrow F\cos\alpha - m_2(g+a) - \mu_d(m_1 g - F\sin\alpha) = m_1 a \\ -T + P_2 = -m_2 a \rightarrow T = m_2(g+a) \end{cases}$$

$$a = \frac{F\cos\alpha - m_2 g - \mu_d m_1 g + \mu_d F\sin\alpha}{(m_1 + m_2)}$$

P.3.14.
Due masse $m_1 = 5$ kg ed $m_2 = 10$ kg sono collegate come in figura. Il piano, inclinato di $\alpha = 30°$, è scabro con coefficienti di attrito statico $\mu_s = 0.5$ e dinamico $\mu_d = 0.3$. Determinare se le due masse, inizialmente in quiete, si muovono ed in caso affermativo con che accelerazione.



$P_2 = m_2 g = 98\,N$

$P_{1\parallel} = m_1 g \sin\alpha = 24,5\,N$ $\qquad$ $P_2 > P_{1\parallel} + F_S$ SI MUOVONO CON a

$F_{a\,s} = \mu_s\, m_1 g \cos\alpha = 21,2\,N$

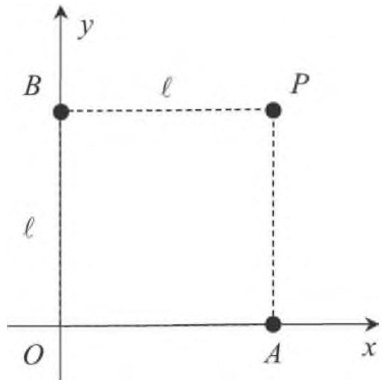
$F_{A\,d} = \mu_d\, m_1 g \cos\alpha = 12,7\,N$

$F_{TOT} = P_2 - P_{\parallel} - F_{Ad}$

$$F_{TOT} = m_{TOT}\, a \rightarrow a = \frac{F_{TOT}}{m_{TOT}} = \frac{98 - 24,5 - 12,7}{15} = 4,05\ m/s^2$$

LAVORO ED ENERGIA

P.4.1.
Una particella è sottoposta ad una forza $\mathbf{F} = axy\mathbf{u_x} - ax^2\mathbf{u_y}$, dove a= 60 N/m^2 e $\mathbf{u_x}$, $\mathbf{u_y}$ sono i versori degli assi x e y.
(i) Si calcoli il lavoro compiuto dalla forza $\mathbf{F}$ quando la particella si sposta dall'origine O al punto P di coordinate $x_P = \ell$, $y_P = \ell$ ($\ell = 0.1$ m) lungo le due traiettorie OAP, OBP dove A=(ℓ,0) e B=(0,ℓ).
(ii) Sulla base dei risultati ottenuti è possibile stabilire se il campo di forze assegnato è conservativo ?



i

$$W = \int_{\gamma, OP} F \cdot dr \qquad dr = dx\,u_x + dy\,u_y + dz\,u_z$$

$$W = \int_{\gamma, OP} (F_x u_x + F_y u_y + F_z u_z)(dx\,u_x + dy\,u_y + dz\,u_z) = \int_{\gamma, OP} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

NEL NOSTRO CASO ABBIAMO. $W = \int_{\gamma, OP} (axy\,dx - ax^2 dy)$

OAP:

OA: $F_x = axy = 0 \qquad dy = 0 \qquad W = 0$

AP: $F_y = -a\ell^2 \qquad dx = 0 \qquad W = \int_0^\ell -a\ell^2 dy = -a\ell^3 = -0.06\,J$

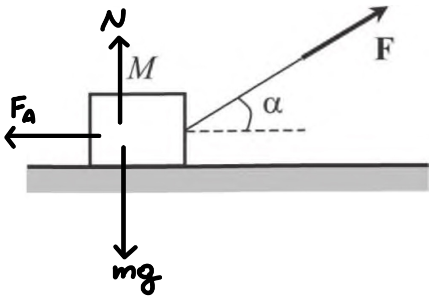
OBP:

OB: $F_y = -ax^2 = 0 \qquad dx = 0 \qquad W = 0$

BP: $F_x = a\ell x \qquad dy = 0 \qquad W = a\ell \int_0^\ell x\,dx = a\ell^3/2 = 0.03\,J$

ii W DIPENDE DAL PERCORSO → CAMPO DI FORZE ASSEGNATO NON CONSERVATIVO

P.4.2.
Un blocco di massa $M = 30$ kg viene trascinato mediante una fune su un piano orizzontale scabro, per un tratto $d = 10$ m. Alla fune, che forma un angolo $\alpha = 40°$ con l'orizzontale, è applicata una forza costante $\mathbf{F}$ di modulo F $= 5$ N. Sapendo che il blocco si muove con velocità costante si determinino:
(i) il lavoro compiuto sul blocco dalla forza d'attrito;
(ii) il coefficiente di attrito dinamico fra blocco e piano.



i $F\cos\alpha - F_A = 0 \rightarrow F_A = -F\cos\alpha$

$$W = \int_0^d F_A \cdot dr = -F\cos\alpha \int_0^d dx = -Fd\cos\alpha = -38.3 \text{ J}$$

ii $F_A = \mu_d N$

$$F\sin\alpha + N - mg = 0 \rightarrow N = mg - F\sin\alpha$$

$$F_A = \mu_d (mg - F\sin\alpha) = F\cos\alpha \rightarrow \mu_d = \frac{F\cos\alpha}{mg - F\sin\alpha} = 0.013$$

P.4.3.
Una forza agente su un corpo puntiforme di massa m, ne causa il moto descritto dalle seguenti equazioni parametriche: $x(t) = c_1 t^3, y(t) = c_2 t^2, z(t) = c_3 t$, dove c_1, c_2 e c_3 sono delle costanti. Si determini la potenza sviluppata dalla suddetta forza applicata.

$$P = \frac{dW}{dt} = F \cdot \frac{dr}{dt} = F \cdot v$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3c_1 t^2 \qquad a_x = \frac{dv_x}{dt} = 6c_1 t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 2c_2 t \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = 2c_2$$

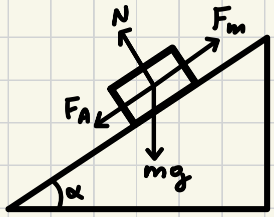
$$v_z = \frac{dz}{dt} = c_3 \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0$$

$$P = F \cdot v = ma \cdot v = m(a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z) = m(18c_1^2 t^3 + 4c_2^2 t)$$

P.4.4.

Un'automobile di massa m, percorre con moto uniforme una strada in salita inclinata di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Supponendo che il modulo della forza di attrito $\mathbf{F_A}$ dipenda dal modulo della velocità $\mathbf{v}$ dell'automobile secondo la relazione $F_A = (a + bv)$, si calcoli la potenza erogata dal motore.

Dati numerici: $m = 1000$ kg, $\theta = 15°$, $a = 500$ N, $b = 60$ N s/m, $v = 70$ Km/h.



$$F_m - mg\sin\alpha - F_A = 0 \rightarrow F_m = mg\sin\alpha + a + bv$$

$$P = F \cdot v = v(mg\sin\alpha + a + bv) = 8.17 \cdot 10^4 \text{ W}$$

P.4.5.

Una locomotiva, che sviluppa una potenza costante $\mathcal{P} = 1.5$ MW, accelera un treno da una velocità iniziale $v_0 = 10$ m/s ad una velocità finale $v_f = 25$ m/s in un intervallo di tempo $\Delta t = 6$ min. Trascurando ogni forma di attrito, si calcoli la massa del treno.

$$W = \Delta E_K = E_{K,f} - E_{K,i} = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)$$

$$W = \int_0^{\Delta t} P\, dt = P\Delta t = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) \rightarrow m = \frac{2P\Delta t}{v_f^2 - v_i^2} = 2 \cdot 10^6 \text{ Kg}$$

P.4.6.

Un punto materiale di massa m si muove di moto rettilineo lungo un asse x, sotto l'azione di una forza con potenza costante $\mathcal{P}$. Sapendo che all'istante $t = 0$ il punto materiale parte da fermo dalla posizione $x = 0$, si determini la sua legge oraria $x = x(t)$.

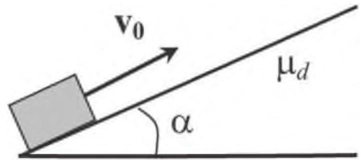
$$dE_K = dW \qquad P = \frac{dW}{dt} = \frac{dE_K}{dt}$$

$$\int_0^{E_K(t)} dE_K = \int_0^{t} P\, dt \rightarrow E_K(t) = Pt \rightarrow \frac{1}{2} m v^2(t) = Pt \rightarrow v = \sqrt{\frac{2Pt}{m}}$$

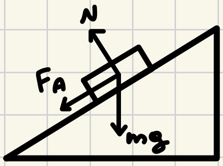
$$v(t) = dx/dt \rightarrow \int_0^x dx = \sqrt{\frac{2P}{m}} \int_0^t \sqrt{t}\, dt \rightarrow x(t) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2P}{m} t^3}$$

P.4.7.

Un corpo di massa m viene lanciato con velocità iniziale $\mathbf{v_0}$ lungo un piano inclinato scabro, con coefficiente di attrito dinamico μ_d, partendo dal bordo inferiore del piano. Sapendo che l'angolo di inclinazione del piano è α, si calcoli la massima altezza raggiunta dal corpo e il corrispondente lavoro della forza d'attrito.



$\Delta E_K = W = W_C + W_{NC}$ $\qquad$ $\Delta E_K = E_{K,f} - E_{K,i} = -\frac{1}{2} m v_i^2 \quad (v_f = 0)$



F_P CONSERVATIVA, F_A NON CONSERVATIVA

$W_C = W_{F_P} = -\Delta U_P = U_{P,i} - U_{P,f} = -mgh$

$N - mg\cos\alpha = 0 \rightarrow N = mg\cos\alpha$ $\qquad$ $F_A = -\mu_d N = -\mu_d mg\cos\alpha$

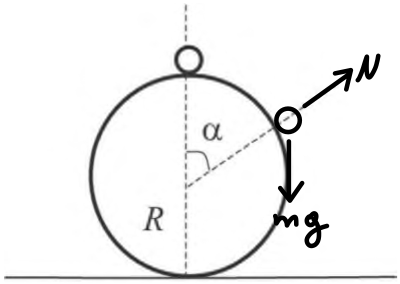
$W_{NC} = W_{ATT} = \int F_A \cdot dr = -\mu_d mg\cos\alpha \int_0^l dx = -\mu_d mg\, l \cos\alpha$ $\qquad$ $l = \frac{h}{\sin\alpha}$

$-\frac{1}{2} v_0^2 = -hg\left(1 + \mu_d \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) \rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g} \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha}$

$W_{ATT} = -\mu_d m\cancel{g} \frac{\cos\alpha}{\cancel{\sin\alpha}} \cdot \frac{v_0^2}{2\cancel{g}} \frac{\cancel{\sin\alpha}}{\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha} = -\frac{v_0^2 \mu_d m\cos\alpha}{2(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)}$

P.4.8.

Un corpo puntiforme viene lasciato scivolare da fermo dalla sommità di una superficie cilindrica liscia di raggio R. Si calcoli l'angolo α in corrispondenza del quale il corpo si stacca dal cilindro.



$ma = mg + N \qquad a = -\frac{v^2}{R}$

$-m\frac{v^2}{R} = -mg\cos\alpha + N \rightarrow N = m\left(g\cos\alpha - \frac{v^2}{R}\right)$

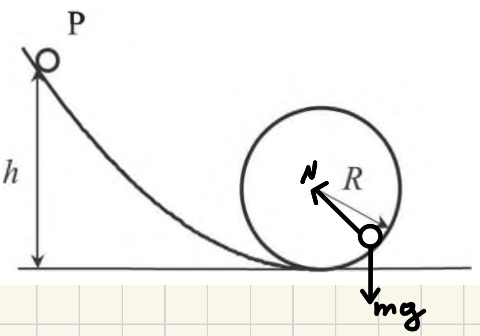
PER NON STACCARSI $g\cos\alpha - \frac{v^2}{R} \geq 0$ 1

$\Delta E = E(\alpha) - E(0) = 0 \rightarrow \begin{cases} E(0) = 2mgR \\ E(\alpha) = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1+\cos\alpha) \end{cases}$

$\frac{1}{2}mv^2 + mgR + mgR\cos\alpha - 2mgR \rightarrow v^2 = 2gR(1-\cos\alpha)$ 2

1 E 2 $\quad \cos\alpha \geq \frac{2}{3} \qquad 0 \leq \alpha \leq 48°$

P.4.9.
Un corpo puntiforme parte da fermo da un punto P e scivola lungo una guida liscia che forma un anello di raggio R, come mostrato in figura. Si determini la minima quota h del punto di partenza P affinchè il corpo possa percorrere l'anello rimanendo sempre a contatto con la guida.



$$ma = mg + N \qquad a = -\frac{v^2}{R}$$

$$-m\frac{v^2}{R} = mg\cos\alpha - N \rightarrow N = m\left(g\cos\alpha + \frac{v^2}{R}\right)$$

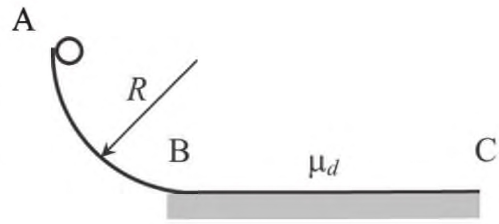
PER RIMANERE ATTACCATA $N \geq 0$ MINIMO VALORE DI $\alpha = \pi$

$$m\left(\frac{v^2}{R} - g\right) \geq 0 \rightarrow v^2 \geq gR$$

$$U(P) = mgh \qquad E(A) = \frac{1}{2}mv^2 + 2mgR$$

$$U(P) = E(A) \rightarrow v^2 = 2g(h - 2R) \rightarrow h \geq \frac{5}{2}R$$

P.4.10.
Una guida ABC è costituita da un arco di circonferenza AB di raggio $R = 3$ m e da un tratto rettilineo BC. Il tratto curvilineo è liscio, mentre il tratto rettilineo presenta attrito, con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.3$. Un corpo viene lasciato scivolare da fermo dal punto A. Si determini la distanza percorsa dal corpo sul tratto rettilineo prima di fermarsi.



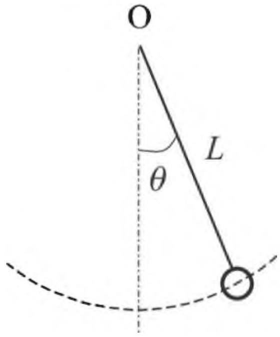
$$\Delta E_K = W_c + W_{NC} \quad \text{MA} \quad W_c = -\Delta U \rightarrow E_A = mgR \qquad \Delta E = W_{NC} = -mgR$$

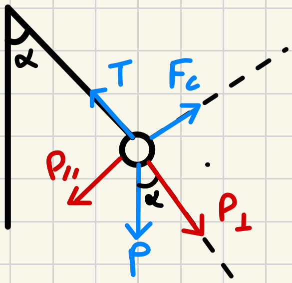
$$F_A = -\mu_d N \qquad N = mg \qquad W_{NC} = \int F_A \cdot dr = -\mu_d mg \int_0^{\ell} dx = -\mu_d mg \ell$$

$$-mgR = -\mu_d mg \ell \rightarrow \ell = \frac{R}{\mu_d} = 10\,m$$

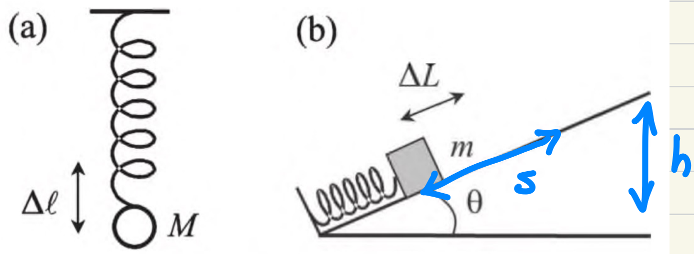
P.4.11.

Un pendolo semplice è costituito da una pallina sospesa ad un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza L. Nel punto inferiore della traiettoria la velocità della pallina è $v_0 = \sqrt{3gL}$.
(i) Si calcoli la tensione della fune in funzione dell'angolo θ formato dal filo con la verticale.
(ii) Si dica, giustificando la risposta, se il filo rimane teso durante tutto il moto della pallina.



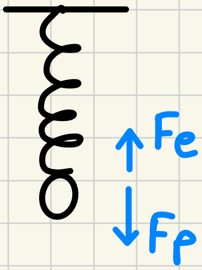


P.4.13.



Una molla ideale, priva di massa, è appesa ad un estremo in posizione verticale (figura a). All'estremo libero viene agganciato un blocco di massa $M = 10$ kg. All'equilibrio l'allungamento subito dalla molla è $\Delta\ell = 9.8$ cm. La stessa molla viene poi disposta su un piano inclinato di un angolo $\theta = 20°$ e privo di attrito, come mostrato in figura b. Un corpo di massa $m = 2$ kg è appoggiato alla molla e spinto in modo da comprimerla di un tratto $\Delta L = 10$ cm. Il corpo viene poi lasciato libero di muoversi sul piano inclinato, partendo da fermo. Si calcoli la distanza percorsa dal corpo lungo il piano inclinato prima di invertire il suo moto.

a



$F_p = F_e$ IN EQUILIBRIO $\rightarrow$ $Mg = k\Delta\ell$

$$k = \frac{Mg}{\Delta\ell} = 1000\ N/m$$

b

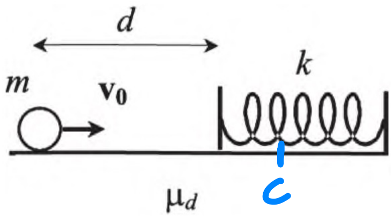
$$U_e = U_p \rightarrow \frac{1}{2}k\Delta L^2 = mgh \rightarrow \frac{k\Delta L^2}{2mg} = 0.25\ m$$

$$h = s\sin\alpha \rightarrow s = \frac{h}{\sin 20} = 0.73\ m$$

$$\text{CATETO} = \begin{cases} \text{IPOTENUSA} \cdot \sin\alpha\ (\text{OPPOSTO}) \\ \text{IPOTENUSA} \cdot \cos\alpha\ (\text{ADIACENTE}) \end{cases}$$

P.4.14.

Un blocco di massa $m = 5$ kg si muove su un piano orizzontale scabro avente un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.2$. Inizialmente il blocco è dotato di una velocità $v_0 = 6$ m/s e si trova ad una distanza $d = 8$ m da una molla ideale di costante elastica $k = 100$ N/m. Si dica, giustificando la risposta, se il blocco urta contro la molla. In caso affermativo, si calcoli la massima compressione della molla.



$$E_{m_A} = \frac{1}{2} m v_0^2 = 90\ J$$

$$F_a = \mu N = \mu m g = 9{,}8\ N \qquad W = F_a \cdot d = 78{,}4\ J$$

$$E_{m_B} = E_{m_A} - W = 11{,}6\ J$$

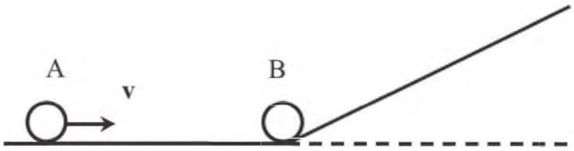
$$E_{m_B} - E_{m_C} = W' \rightarrow E_{m_B} - \frac{1}{2} k \Delta x^2 = \mu m g \cdot \Delta x$$

$$11{,}6 - 50 \Delta x^2 = 9{,}8 \Delta x \rightarrow 50 \Delta x^2 + 9{,}8 \Delta x - 11{,}6 = 0$$

$$\Delta x_{1,2} = \frac{-9{,}8 \pm \sqrt{9{,}8^2 + 200 \cdot 11{,}6}}{100} = 0{,}48\ m$$

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

P.5.1.
Un corpo puntiforme A in moto con velocità **v** su un piano orizzontale liscio, urta un corpo B, uguale al primo, inizialmente fermo ai piedi di un piano inclinato liscio. Si trovi la massima quota a cui giunge il corpo B sul piano inclinato nei due casi di urto elastico e completamente anelastico



ELASTICO:

QUANTITÀ DI MOTO ED ENERGIA CINETICA SI CONSERVANO

$$\begin{cases} mv = mv_A + mv_B \\ \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_A = 0 & \text{SI FERMA} \\ v_B = v & \text{CONTINUA} \end{cases}$$

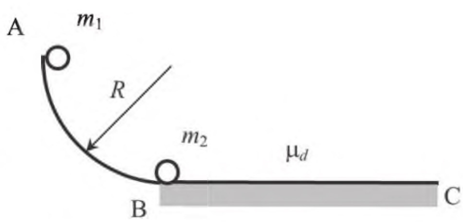
$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh \rightarrow h = \frac{v^2}{2g}$$

COMPL ANELASTICO:

RIMANGONO UNITI DOPO L'URTO, P SI CONSERVA

$$mv = mv_f + mv_f = 2mv_f \rightarrow v_f = \frac{v}{2} \rightarrow \frac{1}{2}(2m)v_f^2 = 2mgh \rightarrow h = \frac{v^2}{8g}$$

P.5.2.
Una guida ABC è costituita da un arco di circonferenza AB di raggio R = 3 m e da un tratto rettilineo BC (vedi figura). Il tratto curvilineo è liscio, mentre il tratto rettilineo presenta attrito con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.3$. Un corpo di massa $m_1 = 2$ kg viene lasciato scivolare dal punto A. Esso urta in modo completamente anelastico un corpo di massa $m_2 = 3$ kg, inizialmente fermo in B. Si determinino:
(i) la velocità dei due corpi subito dopo l'urto;
(ii) la distanza percorsa dai due corpi sul tratto rettilineo della guida prima di fermarsi.



i $\quad m_1 g R = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \rightarrow v_1 = \sqrt{2gR}$ $\qquad$ P SI CONSERVA, CORPI ATTACCATI

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v_f \rightarrow v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 3.06 \text{ m/s}$$

ii $\quad N = (m_1 + m_2)g \qquad F_A = -\mu_d N = -\mu_d (m_1 + m_2)g$

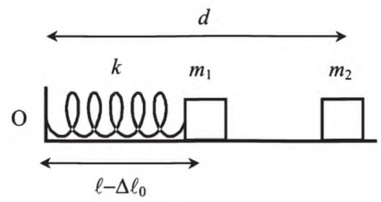
$$\Delta E_K = W = \int F_A \cdot dr = -\mu_d (m_1 + m_2) g \int_0^d dx = -\mu_d (m_1 + m_2) g d$$

$$\Delta E_K = E_K(f) - E_K(0) = 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2$$

$$-\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{2gR}\right)^2 = -\mu_d (m_1 + m_2) g d \rightarrow d = \frac{R}{\mu_d}\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = 1.6 \text{ m}$$

P.5.3.

Un corpo puntiforme di massa $m_1 = 1$ kg, posto su un piano orizzontale liscio, è vincolato ad una molla di lunghezza a riposo $\ell = 50$ cm e costante elastica $k = 500$ N/m, vincolata all'altro estremo in un punto O (vedi figura). La molla viene compressa di un tratto $\Delta\ell_0 = 5$ cm e successivamente viene lasciata libera. Il corpo urta in modo elastico un secondo corpo di massa $m_2 = m_1$, inizialmente fermo, posto a distanza $d = 53$ cm dal punto O. Si calcoli la velocità del secondo corpo dopo l'urto e l'ampiezza di oscillazione del corpo di massa m_1 dopo l'urto.



$E_{K_0} = \frac{1}{2} K \Delta\ell_0^2$ $\quad E_{K_1} = \frac{1}{2} K (d-\ell)^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2$ $\quad$ P, E_K SI CONSERVANO

$E_{K_0} = E_{K_1} \rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{K}{m_1}\left(\Delta\ell_0^2 - (d-\ell)^2\right)} = 0.89 \, m/s$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$m_1 v_1 = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \xrightarrow{m_1 = m_2} v_{1f} = 0 \quad V_{2f} = v_1$$

AMPIEZZA: $d - \ell = 3$ cm

P.5.4.

Un corpo A di massa $m = 50$ g, in moto su un piano orizzontale scabro, urta un secondo corpo B, di massa M, inizialmente fermo. L'urto è elastico e, dopo l'urto, il corpo B percorre una distanza $D = 0.6$ m prima di fermarsi. Il coefficiente di attrito dinamico fra il piano e i due corpi è $\mu = 0.3$ e la velocità di A all'istante dell'urto è $v = 5$ m/s. Si determinino:

(i) la massa M del corpo B;

(ii) la velocità del corpo A immediatamente dopo l'urto.

i SI CONSERVA P: $\quad mv = m V_A + M v_B \quad 1$

SI CONSERVA E_K (URTO ELASTICO): $\quad \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m V_A^2 + \frac{1}{2} M v_B^2 \quad 2$

SERVE UNA TERZA EQ $\rightarrow \Delta E_K = W \quad , \quad E_{K_i} = \frac{1}{2} M v_B^2 \quad E_{K_f} = 0$

$F_A = -\mu_d N = -\mu_d M g \qquad W = \int F_A \cdot dr = -\mu_d M g \int_0^D dx = -\mu_d M g D$

$\frac{1}{2} M v_B^2 = \mu_d M g D \rightarrow v_B = \sqrt{2 \mu_d g D} \quad 3$

UTILIZZANDO 1, 2 E 3 $\rightarrow V_B = \frac{2m}{m+M} v \rightarrow M = \frac{2mv}{V_B} - m = \frac{2mv}{\sqrt{2\mu_d g D}} - m = 216 g$

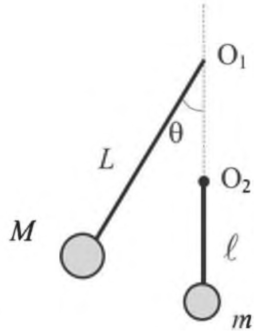
ii

$mv = m V_A + M v_B$

$V_A = \frac{mv - M v_B}{m} = -3.11 \, m/s$ $\quad$ SI INVERTE IL MOTO

P.5.6.

Un pendolo semplice è costituito da una massa $M = 2$ kg appesa a un filo di massa trascurabile e lunghezza $L = 50$ cm. Il pendolo viene spostato di un angolo $\theta = 30°$ rispetto alla direzione verticale e poi lasciato libero. Nel punto inferiore dell'oscillazione la massa M urta elasticamente una massa $m = 1$ kg, appesa ad un filo di lunghezza $\ell = 20$ cm, inizialmente ferma. Si determini l'angolo massimo raggiunto dal secondo pendolo dopo l'urto.



$$MgL(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}MV^2 \rightarrow V = \sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}$$

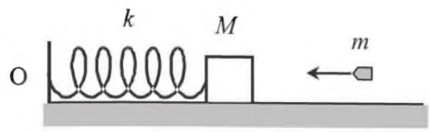
P E E_K SI CONSERVANO:

$$\begin{cases} MV = MV_F + mv_f \\ \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV_F^2 + \frac{1}{2}mv_f^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} v_f &= \frac{2M}{m+M}V \\ V_F &= \frac{M-m}{m+M}V \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mg\ell(1-\cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{L}{\ell}\left(\frac{2M}{m+M}\right)^2(1-\cos\alpha) \qquad \alpha = 66°$$

P.5.7.

Una molla di costante elastica k ha un'estremità collegata a un supporto fisso mentre l'altra è collegata ad un blocco di massa M. Il blocco, inizialmente in quiete su un piano orizzontale scabro con coefficiente di attrito dinamico μ, subisce un urto completamente anelastico con un proiettile di massa m. Sapendo che il massimo spostamento subito dal blocco a seguito dell'urto è ΔL, si determini la velocità del proiettile immediatamente prima dell'urto.



RIMANGONO ATTACCATI E SI CONSERVA P $\quad mv = (m+M)V \rightarrow V = \frac{mv}{m+M}$

PRESENZA DI ATTRITO = FORZA NON CONSERVATIVA $\rightarrow \Delta E_K = W_{NC}$

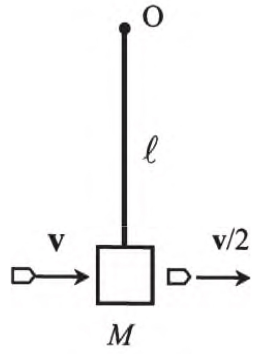
$$F_A = -\mu N = -\mu(m+M)g \qquad \Delta E_K = E_{Kf} - E_{Ki} = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 - \frac{1}{2}(m+M)V^2$$

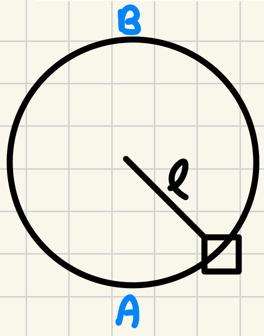
$$W_{NC} = \int F_A \cdot dr = -\mu(m+M)g\int_0^{\Delta\ell} dx = -\mu(m+M)g\Delta\ell$$

$$\frac{1}{2}k\Delta\ell^2 - \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m}{m+M}v\right)^2 = -\mu(m+M)g\Delta\ell$$

$$v = \frac{m+M}{M}\sqrt{\frac{k\Delta\ell^2}{m+M} + 2\mu g\Delta\ell}$$

P.5.8.
Un proiettile di massa m e velocità $\mathbf{v}$ attraversa un blocchetto di legno di massa M, sospeso ad un filo di lunghezza ℓ, e ne fuoriesce con velocità $\mathbf{v}/2$. Si calcoli il minimo valore di v tale che il blocchetto, inizialmente fermo, compia un giro completo intorno al centro di sospensione.





IN B ABBIAMO $M\frac{V_B^2}{\ell} = Mg + T_B$

PER GIRARE IL FILO DEVE RIMANERE TESO:

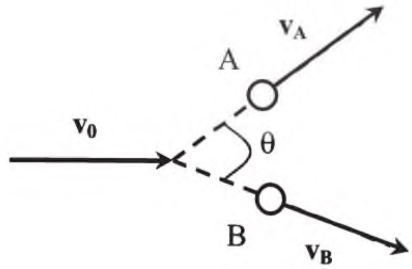
$$T_B = M\frac{V_B^2}{\ell} - Mg \geq 0 \rightarrow V_B = \sqrt{g\ell}$$

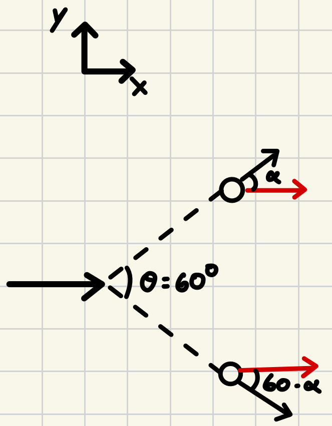
CONS E_M TOT: $E_A = E_B \rightarrow \frac{1}{2}MV_A^2 = \frac{1}{2}MV_B^2 + Mg\,2\ell$

$$V_A = \sqrt{V_B^2 + 4g\ell} \rightarrow V_A \geq \sqrt{5g\ell}$$

SI CONSERVA P. $mv = MV_A + m\frac{V}{2} \rightarrow V_A = \frac{m}{2M}V \rightarrow V \geq \frac{2M}{m}\sqrt{5g\ell}$

P.5.9.
Un corpo A di massa $m = 10$ g in moto con velocità $\mathbf{v}_0$, colpisce un secondo corpo identico, B, inizialmente fermo. Dopo l'urto le due particelle si muovono con velocità $v_A = 3$ m/s e $v_B = 5$ m/s, lungo due direzioni che formano tra di loro un angolo $\theta = 60°$. Si calcoli la velocità iniziale v_0 del corpo A.





$V_{Ax} = V_A\cos\alpha = 3\cos\alpha \qquad V_{Ay} = V_A\sin\alpha = 3\sin\alpha$

$V_{Bx} = V_B\cos(60-\alpha) = 5(\cos 60\cdot\cos\alpha + \sin 60\cdot\sin\alpha)$
$= 5(0.5\cos\alpha + 0.87\sin\alpha) = 2{,}5\cos\alpha + 4{,}35\sin\alpha$

$V_{By} = V_B\sin(60-\alpha) = 5(\sin 60\cos\alpha - \cos 60\sin\alpha)$
$= -4{,}35\cos\alpha + 2.5\sin\alpha$

$P_{ix} = P_{fx} \rightarrow \cancel{m_A}V_0 = \cancel{m_A}V_{Ax} + \cancel{m_B}V_{Bx}$

$P_{iy} = P_{fy} \rightarrow 0 = \cancel{m_A}V_{Ay} + \cancel{m_B}V_{By}$

$$\begin{cases} 3\cos\alpha + 2{,}5\cos\alpha + 4{,}35\sin\alpha = V_0 \\ 3\sin\alpha - 4{,}35\cos\alpha + 2{,}5\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

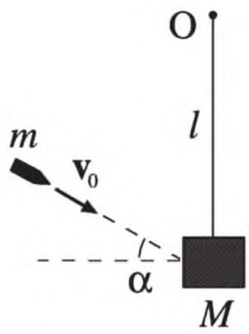
$$\begin{cases} V_0 = 5.5\cos\alpha + 4.35\sin\alpha \rightarrow V_0 = 6.6 \text{ m/s} \\ 5.5\sin\alpha = 4.35\cos\alpha \rightarrow tg\alpha = \frac{4{,}35}{5.5} \rightarrow \alpha = 38° \end{cases}$$

$E_{K_i} = \frac{1}{2} m_A V_0^2 = 0.22\ J$

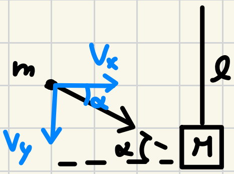
$E_{K_f} = \frac{1}{2} m_A V_A^2 + \frac{1}{2} m_B V_B^2 = 0.17\ J$

E_K NON SI CONSERVA
URTO ANELASTICO

P.5.10.
Un blocchetto di massa M è appeso ad una fune inestensibile, dotata di massa trascurabile e di lunghezza l, vincolata ad un perno O. Il sistema è in quiete, col filo in posizione verticale. Un proiettile di massa m in moto con velocità di modulo v_0 e con direzione formante un angolo α con l'orizzontale, urta in modo completamente anelastico il blocchetto. Si calcolino:
(i) la velocità del sistema comprendente proiettile e blocchetto subito dopo l'urto;
(ii) l'impulso fornito dalla tensione della fune all'atto dell'urto;
(iii) il minimo valore di v_0 affinché il pendolo compia un giro completo dopo l'urto.



URTO COMPL ANE → P E E_K SI CONSERVANO



i) $\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2}(m+M) v_f^2 \rightarrow v_f = \sqrt{\frac{m}{m+M}}\, v_0$

ii) $I_x = P_{f,x} - P_{i,x} = (m+M) v_f - m v_0 \cos\alpha$

$= \sqrt{m(m+M)}\, v_0 - m v_0 \cos\alpha$

$I_y = P_{f,y} - P_{i,y} = 0 - m v_0 \sin\alpha$

$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} = \sqrt{m^2 v_0^2 \sin^2\alpha + m(m+M) v_0^2 + m^2 v_0^2 \cos^2\alpha - 2m\sqrt{m(m+M)}\, v_0^2 \cos\alpha}$$

$$= v_0 \sqrt{2m^2 + mM - 2m\sqrt{m^2 + mM}\cos\alpha}$$

iii) $T + F_P = (m+M)\frac{v_f^2}{L}$

TRASLATORIO	ROTATORIO
m	I
F	M
v	w
$P = mv$	$L = Iw$
$F = ma$	$M = I\alpha$
$K = \frac{1}{2} m v^2$	$K = \frac{1}{2} I w^2$

PRIMO PRINCIPIO TERMODINAMICA

P.6.1.
In un termometro a mercurio la colonna di fluido è alta $h_1 = 5$ cm quando il termometro è immerso in ghiaccio fondente a pressione atmosferica ed $h_2 = 10$ cm quando il termometro è posto in equilibrio con acqua in ebollizione. Stimare le costanti termometriche del termometro e dire a quale temperatura la colonna di mercurio sarà alta $h_3 = 8$ cm.

$h_1 = 5\ cm = 0.05\ m$ $\quad p_0 = 1.013 \cdot 10^5\ Pa$ $\quad T = 0°C = 273.15K$

$h_2 = 10\ cm = 0.1\ m$ $\quad T = 100°C = 373.15K$

$h_3 = 8\ cm = 0.08\ m$ $\quad V?$

$$\Delta V = V_0 \gamma \Delta T = S(h_2 - h_1) = S h_1 \gamma \Delta T \rightarrow \gamma = \frac{h_2 - h_1}{h_1 \Delta T} = 100\ K^{-1}$$

$$S(h_3 - h_1) = S h_1 \gamma \Delta T \rightarrow \underset{T_3 - T_1}{\underset{\downarrow}{\Delta T}} = \frac{h_3 - h_1}{h_1 \gamma} \rightarrow$$

$$T_3 = T_1 + \frac{h_3 - h_1}{h_1 \gamma} = T_1 + \frac{h_3 - h_1}{h_1} \cdot \frac{h_1 (T_2 - T_1)}{h_2 - h_1} = T_1 + \frac{(h_3 - h_1)(T_2 - T_1)}{h_2 - h_1} =$$

$$T_3 = 273.15 + \frac{3}{0.05} = 313.15\ K$$

P.6.2.
Un termometro di capacità C alla temperatura t_1 viene immerso in un fluido di massa m e temperatura t avente calore specifico massico c. Si calcoli la temperatura misurata dal termometro, precisando in quali condizioni tale temperatura è prossima a t.

$C = c_t m_t$

$|Q_1| = |Q_2|$

$Q_1 = cm(t - t_m)$

$Q_2 = C(t_m - t_1)$

$cmt - cmt_m = Ct_m - Ct_1$

$t_m(cm + C) = Ct_1 + cmt$

$$t_m = \frac{Ct_1 + cmt}{cm + C}$$

P.6.3.

Una massa $m_1 = 2$ kg di ghiaccio a temperatura $t_1 = -10$ °C viene mescolata con una massa m_2 di acqua alla temperatura $t_2 = 20$ °C. Sapendo che dopo il mescolamento si ottiene acqua alla temperatura $t = 5$ °C, si calcoli la massa m_2 trascurando ogni dissipazione di calore con l'ambiente.

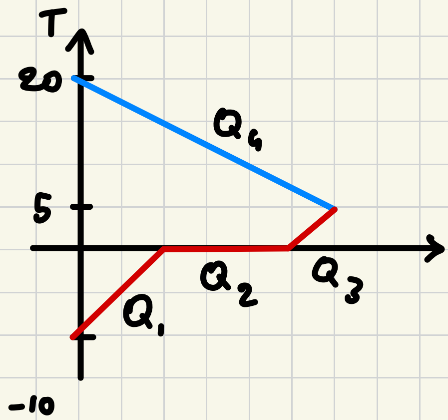
(Calore latente di fusione del ghiaccio: $\lambda_{gh} = 3.3 \times 10^5$ J/kg. Calore specifico del ghiaccio $c_{gh} = 2051$ J/Kg °C.)

$m_1 = 2\,Kg \quad m_2\ ?$

$t_1 = -10\,°C \quad t_2 = 20\,°C \quad t_e = 5\,°C$

$|\Delta T_1| = (-10 - 0) = 10K \quad Q = m\lambda$

$|\Delta T_3| = 5K \quad |\Delta T_4| = 15K$



$|Q_1| + |Q_2| + |Q_3| = |Q_4|$

$c_g m_1 |\Delta T_1| + m_g \lambda_g + c_a m_1 |\Delta T_3| = c_a m_2 |\Delta T_4|$

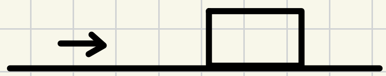
$$m_2 = \frac{c_g m_1 |\Delta T_1| + m_g \lambda_g + c_a m_1 |\Delta T_3|}{c_a |\Delta T_4|} = 11{,}8\,Kg$$

P.6.4.

Un proiettile di piombo di massa $m = 0.05$ kg alla temperatura $t_{Pb} = 20$ °C, dotato di velocità $v_0 = 100$ m/s, si conficca orizzontalmente in un blocco di ghiaccio fondente di massa $M = 0.5$ kg, posto su un piano orizzontale liscio. Sapendo che il calore specifico del piombo è $c_{Pb} = 130$ J/kg°C ed il calore latente di fusione del ghiaccio $\lambda_{gh} = 3.3 \times 10^5$ J/kg, si calcoli la massa di ghiaccio che si è fusa.

$m = 0.05$ Kg $T_{PB} = 20\,°C$ $V_0 = 100$ m/s

$M = 0.5$ Kg



URTO COMPLETAMENTE ANEL.

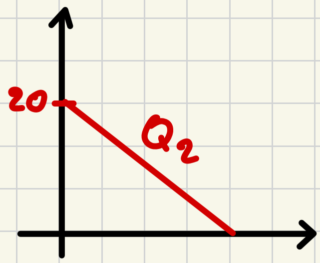
$$m_P V_0 = (m_P + M_G) V_f \rightarrow V_f = \frac{m_P}{m_P + M_G} V_0 = 9.1 \text{ m/s}$$

$$E_{Ki} = \frac{1}{2} m_P V_0^2 = 250 \text{ J}$$

$$E_{Kf} = \frac{1}{2}(m_P + M_G) V_f^2 = 22.8 \text{ J}$$

$$|\Delta E_K| = Q_1 = 227.2 \text{ J}$$

$$Q_2 = c_{PB}\, m_P\, \Delta T = 130 \cdot 0.05 \cdot |20| = 130 \text{ J}$$



$$Q_{TOT} = Q_1 + Q_2 = 357.2 \text{ J}$$

$$Q_{TOT} = \lambda m' \rightarrow m' = \frac{Q_{TOT}}{\lambda} = \frac{357.2}{3.3 \cdot 10^5} = 1.1 \cdot 10^{-2} \text{ Kg}$$

P.6.5.

Una massa $m_1 = 0.1$ kg di ghiaccio alla temperatura $t_1 = -10$ °C viene mescolata adiabaticamente con una massa $m_2 = 0.2$ kg di vapor d'acqua a temperatura $t_2 = 160$ °C a pressione atmosferica. Si dica quale sarà la composizione finale della miscela una volta raggiunto l'equilibrio termico. Si assumano, per i calori specifici ed i calori latenti, le seguenti espressioni: calore specifico del ghiaccio $c_{gh} = 0.5$ cal/g °C; calore specifico dell'acqua $c_{ac} = 1$ cal/g °C; calore specifico del vapor d'acqua a pressione costante $c_{va} = 0.44$ cal/g °C; calore latente di condensazione del vapor d'acqua $\lambda_{va} = 540$ cal/g; calore latente di fusione del ghiaccio $\lambda_{gh} = 80$ cal/g.

$m_1 = 0.1$ Kg $\quad T_1 = -10$ °C $\qquad P_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Pa

$m_2 = 0.2$ Kg $\quad T_2 = 160$ °C

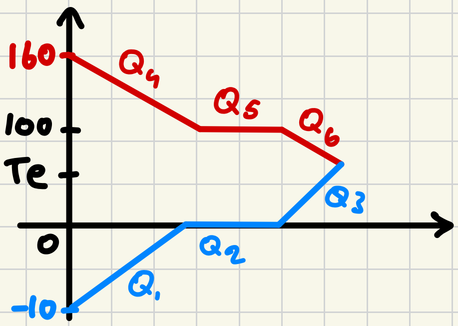
$c_g = 0.5$ cal/g °C $= 0.5 \cdot \dfrac{4{,}186 \text{ J}}{10^{-3} \text{ Kg °C}} = 2093$ J/Kg °C

$c_a = 4186$ J/Kg °C

$c_v = 0.44 \cdot \dfrac{4{,}186 \text{ J}}{10^{-3} \text{ Kg °C}} = 1842$ J/Kg °C

$\lambda_{VA} = 540$ cal/g $= 2260{,}4$ J/Kg

$\lambda_G = 334880$ J/Kg



$|Q_1| + |Q_2| + |Q_3| = |Q_4| + |Q_5| + |Q_6|$

$c_G m_G \Delta T_1 + \lambda_G m_G + c_a m_G \Delta T_3 = c_{VA} m_{VA} \Delta T_4 + \lambda_V m_V + c_a m_{VA} \Delta T_6$

$2093 + 33000 + 418.6\, T_e = 22104 + 452 + 83720 - 837{,}2\, T_e$

$1255{,}8\, T_e = 71183 \rightarrow T_e = 56{,}7$ °C

P.6.6.

Un gas ideale alla temperatura $T = 300$ K ha una densità molecolare di $\mathcal{N} = 10^{25}$ molecole/m^3. Si calcoli la pressione del gas.

$$PV = nRT \rightarrow P = \frac{nRT}{V} = \mathcal{N}\,\frac{RT}{N_a} = 10^{\cancel{25}\,2} \cdot \frac{8{,}31 \cdot 300}{6.022 \cdot \cancel{10^{23}}} = 41400 \text{ Pa}$$

$$n = \frac{\mathcal{N} V}{N_a}$$

P.6.7.

Un gas ideale è costituito da n_1 moli di elio (He) e da n_2 moli di azoto (N_2). Calcolare il calore specifico molare del gas a volume costante.

$$n = n_1 + n_2 \qquad \delta Q = dU = dU_1 + dU_2 \qquad U = n c_V T \qquad c_{V_1} = \frac{3}{2} R \,/\, c_{V_2} = \frac{5}{2} R$$

$$c_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\delta Q}{dT}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{dU}{dT}\right) = \frac{n_1 c_{V_1} + n_2 c_{V_2}}{n_1 + n_2} = \frac{3n_1 + 5n_2}{2(n_1 + n_2)} R$$

P.6.8.

Un gas perfetto esegue una espansione adiabatica reversibile nella quale il gas triplica la sua pressione e dimezza il suo volume. Determinare il calore specifico a volume costante c_V del gas.

$$P V^\gamma = P_0 V_0^\gamma$$

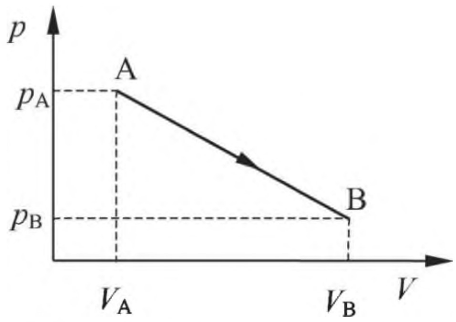
$$V = V_0/2 \quad P = 3P_0 \rightarrow 3P_0 \left(\frac{V_0}{2}\right)^\gamma = P_0 V_0^\gamma \rightarrow 2^\gamma = 3 \rightarrow \gamma = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.585$$

$$\gamma = c_p / c_v \qquad c_p - c_v = R$$

$$c_p = \gamma c_v \rightarrow \gamma c_v - c_v = R \rightarrow c_v = \frac{R}{\gamma - 1} = 1.7 R$$

P.6.9.

n moli di gas ideale compiono una trasformazione quasistatica dal volume iniziale V_A e pressione p_A al volume finale V_B e pressione p_B, con $V_B > V_A$ e $p_B < p_A$, rappresentata nel piano (p, V) dal segmento AB di figura. Si determini:



(i) la temperatura assoluta T del gas lungo la trasformazione quando il volume del gas assume un valore V compreso fra V_A e V_B;

(ii) quale condizione deve sussistere fra V_A, p_A, V_B e p_B affinchè la temperatura massima del gas nella trasformazione sia raggiunta nello stato di equilibrio corrispondente al punto medio del segmento AB.

i

$A\,(V_A, p_A) \quad B\,(V_B, p_B) \qquad x = V' \; y = p'$

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \rightarrow \frac{p' - p_A}{p_B - p_A} = \frac{V' - V_A}{V_B - V_A} \rightarrow p' = p_A + \frac{V' - V_A}{V_B - V_A}(p_B - p_A)$$

$$T' = \frac{p'V'}{nR} = \frac{V'}{nR} \cdot \left(p_A + \frac{V' - V_A}{V_B - V_A}(p_B - p_A)\right)$$

ii

$$M_{AB} = \left(\frac{V_A + V_B}{2}, \frac{p_A + p_B}{2}\right)$$

$$T'' = \frac{V_A + V_B}{2nR} \cdot \left(p_A + \frac{\frac{V_A + V_B}{2} - V_A}{V_B - V_A}(p_B - p_A)\right) =$$

$$= \frac{V_A + V_B}{2nR}\left(p_A + \frac{p_B - p_A}{2}\right) = \frac{(V_A + V_B)(p_A + p_B)}{4nR}$$

P.6.10.

Si consideri la trasformazione quasistatica di un gas perfetto descritta nel problema precedente. Assumendo che il gas sia monoatomico, si determini l'espressione del calore specifico $c = c(V)$ del gas lungo la trasformazione da A a B come funzione del volume V del gas.

$$\Delta U = Q - W \rightarrow Q = \Delta U + W = n c_v \Delta T + p \Delta V$$

$$c = \frac{1}{n}\left(\frac{dQ}{dT}\right) = \frac{3}{2}R + \frac{p\Delta V}{n\Delta T} = \frac{3}{2}R + \frac{\left[p_A + \frac{V - V_A}{V_B - V_A}(p_B - p_A)\right](V_B - V_A)}{\left(\frac{p_B V_B}{nR} - \frac{p_A V_A}{nR}\right)n} =$$

$$= \frac{3}{2}R + \left[p_A + \frac{V - V_A}{V_B - V_A}(p_B - p_A)\right] \cdot \frac{R(V_B - V_A)}{p_B V_B - p_A V_A} = \;\ldots\ldots$$

P.6.12.

Una mole di gas ideale monoatomico alla temperatura $T_1 = 300$ K compie una espansione adiabatica reversibile che ne aumenta il volume dal valore iniziale $V_1 = 1$ m^3 al valore finale $V_2 = 2$ m^3. Calcolare la temperatura finale del gas ed il lavoro compiuto dal gas nella espansione.

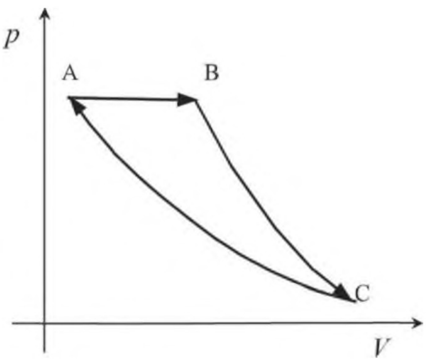
$c_v = \frac{3}{2}R \quad c_p = \frac{5}{2}R \quad \gamma = c_p/c_v = 5/3 \quad \gamma - 1 = 2/3$

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 300 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = 189 K$$

$$\Delta U = \underbrace{\cancel{Q}}_{0} - W \rightarrow W = -n c_v \Delta T = -\frac{3}{2}R(189 - 300) = 1.38 \cdot 10^3 J$$

SECONDO PRINCIPIO TERMODINAMICA

P.7.1.
Un gas perfetto biatomico compie un ciclo motore *reversibile* ABCA costituito da una espansione isobara AB, una espansione adiabatica BC ed una compressione isoterma CA che chiude il ciclo (si veda la figura). Sapendo che $V_B/V_A = 2$, si calcoli il rendimento termodinamico del ciclo. Varierebbe il risultato del problema se il gas fosse monoatomico? SI



$c_v = \frac{5}{2}R \quad c_p = \frac{7}{2}R \quad \gamma = \frac{7}{5} \quad T_C = T_A \quad p_A = p_B$

AB:

$W_{AB} = p_A(V_B - V_A)$

$\frac{nRT_A}{V_A} = \frac{nRT_B}{V_B} \rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{T_B}{T_A} \rightarrow \frac{T_B}{T_A} = 2 \qquad V_B = 2V_A,\ T_B = 2T_A = 2T_C$

BC:

$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \rightarrow \frac{T_B}{T_C} = \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma-1} = 2 \rightarrow V_C = \sqrt[\gamma-1]{2} \cdot V_B = 2^{5/2} V_B = 2^{7/2} V_A$

$p_C = \frac{nRT_A}{2^{7/2} V_A} \qquad p_B V_B^{\gamma} = p_C V_C^{\gamma} \rightarrow \frac{p_B}{p_C} = \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma} = \left(\frac{2^{7/2} \cancel{V_A}}{2\cancel{V_A}}\right)^{7/5} = 2^{7/2}$

ISOBARA:

$Q_{AB} = nc_p\Delta T = n \cdot \frac{7}{2}R(T_B - T_A) = n \cdot \frac{7}{2}R \cdot T_A$

$W = p_A \Delta V = \frac{nRT_A}{V_A}(2V_A - V_A) = nRT_A$

ADIABATICA:

$Q_{BC} = 0 \qquad W_{BC} = nc_v\Delta T = n \cdot \frac{5}{2}R(T_A - 2T_A) = -n\frac{5}{2}RT_A$

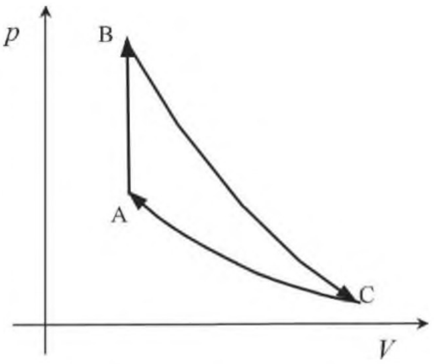
ISOTERMA:

$Q_{CA} = W_{CA} = nRT_A \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) = nRT_A \ln 2^{-7/2} = -2.4 \cdot n \cdot R \cdot T_A$

$W_{TOT} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = nRT_A - n\frac{5}{2}RT_A - 2.4\,nRT_A \approx 1.1\,nRT_A$

$Q_A = \frac{7}{2}nRT_A \qquad \eta = \frac{W_{TOT}}{Q_A} = 0.31$

P.7.2.



Un gas perfetto biatomico compie un ciclo motore *reversibile* ABCA costituito da un riscaldamento isocoro AB, una espansione adiabatica BC ed una compressione isoterma CA che chiude il ciclo (si veda la figura). Sapendo che $T_B/T_A = 2$, si calcoli il rendimento termodinamico del ciclo. Varierebbe il risultato del problema se il gas fosse monoatomico?

$V_A = V_B$ $\quad T_B/T_A = 2$ $\quad T_A = T_C$ $\quad T_B = 2T_A = 2T_C$ $\quad c_V = \frac{5}{2}R$ $\quad c_p = \frac{7}{2}R$ $\quad \gamma = \frac{7}{5}$

AB: $Q_{AB} > 0$

$W = 0 \qquad Q_{AB} = \Delta U = n c_V \Delta T = n \frac{5}{2} R T_A$

BC: $V_C > V_A$ $\quad Q_{BC} = 0$

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \to \frac{T_B}{T_C} = \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma-1} = 2 \to V_C = \sqrt[2/5]{2}\, V_B = 2^{5/2} V_B = 2^{5/2} V_A$$

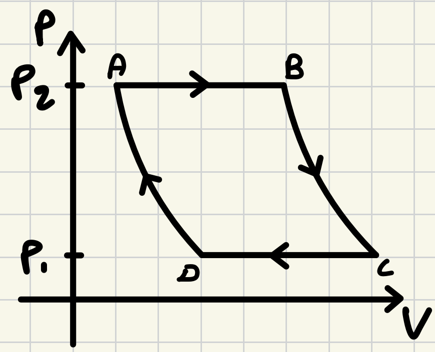
CA: $Q_{CA} = W_{CA} = nRT_A \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) = nRT_A \ln 2^{-5/2} = -1.7\, nRT_A$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{CED}|}{|Q_{ASS}|} = 1 - \frac{1.7\, nRT_A}{2.5\, nRT_A} = 0.32$$

P.7.3.

Un gas perfetto monoatomico compie un ciclo motore reversibile formato da due adiabatiche e da due isobare a pressione p_1 e $p_2 > p_1$. Si tracci un diagramma qualitativo nel piano (p, V) del ciclo e se ne calcoli il rendimento termodinamico in funzione del rapporto p_2/p_1.

$c_V = \frac{3}{2}R$ $\quad c_p = \frac{5}{2}R$ $\quad \gamma = \frac{5}{3}$ $\qquad p_A = p_B$ $\quad p_C = p_D$



AB: $Q_{AB} = n c_p \Delta T = \frac{5}{2} R n (T_B - T_A) =$

$= \frac{5}{2} R n \left(\frac{p_B V_B}{nR} - \frac{p_A V_A}{nR}\right) = \frac{5}{2} p_2 (V_B - V_A)$

CD: $Q_{CD} = n c_p \Delta T = \frac{5}{2} p_1 (V_C \cdot V_D)$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{BC: } Q = 0 & p_2 V_B^{\gamma} = p_1 V_C^{\gamma} \to \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma} \to \frac{V_C}{V_B} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ \text{DA: } Q = 0 & p_2 V_A^{\gamma} = p_1 V_D^{\gamma} \to \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_D}{V_A}\right)^{\gamma} \to \frac{V_D}{V_A} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \end{array}\right\} \frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C}$$

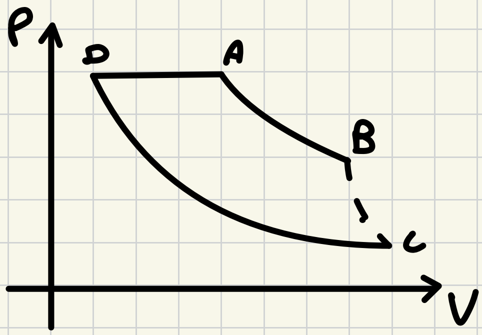
$$\eta = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_A|} = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)\frac{V_C - V_D}{V_B - V_A} = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)\left(\frac{V_C}{V_B}\right)\frac{1 - V_D/V_C}{1 - V_A/V_B} = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

P.7.4.
Un gas perfetto monoatomico, inizialmente nello stato di equilibrio A, compie un ciclo motore costituito dalle seguenti trasformazioni:
(i) espansione isoterma reversibile dallo stato A allo stato B, con $V_B = 2V_A$;
(ii) espansione adiabatica *irreversibile* dallo stato B allo stato C, con $V_C = 3V_B$ e $T_C = T_B/2$;
(iii) compressione isoterma reversibile dallo stato C allo stato D, con $p_D = p_A$;
(iv)riscaldamento isobaro reversibile dallo stato D allo stato iniziale A.

Si tracci un diagramma qualitativo del ciclo nel piano (p, V) e se ne calcoli il rendimento termodinamico.

$c_V = \frac{3}{2}R$, $c_p = \frac{5}{2}R$, $T_C = T_B/2 = T_D$, $T_B = 2T_C = 2T_D$

$V_B = 2V_A$, $V_C = 3V_B = 6V_A$, $p_D = p_A$



AB: $T_A = T_B = 2T_C$

$$Q_{AB} = nRT_A \ln\left(\frac{2V_A}{V_A}\right) \approx 0.69\, nRT_A = 1.38\, nRT_C \quad \text{ASS}$$

DA:
$$Q_{DA} = nc_p\Delta T = \frac{5}{2}nR(T_A - T_D) = \frac{5}{2}nRT_C \quad \text{ASS}$$

CD: $T_C = T_D = T_B/2$
$$|Q_{CD}| = nRT_C \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) \quad \text{CED}$$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{|Q_A|} = 1 - \frac{\cancel{nRT_c}\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)}{3,9\,\cancel{nRT_c}} = 1 - \frac{\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)}{3.9} \approx 0,63$$

DA: $$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_D}{T_D} \rightarrow \frac{V_A}{V_D} = \frac{T_A}{T_D} = 2 \rightarrow \frac{V_C}{6V_D} = 2 \rightarrow \frac{V_C}{V_D} = 12 \rightarrow V_C = 12V_D$$

P.7.5.

Un frigorifero viene utilizzato per congelare acqua a 0^0C scambiando calore con l'ambiente a 40^0C. Assumendo che il frigorifero sia una macchina reversibile e che il costo dell'energia elettrica sia $C = 0.5$ Euro/kWh, si calcoli quanto costa congelare 100 litri di acqua. (calore latente di fusione del ghiaccio a pressione atmosferica $\lambda = 3.3 \times 10^5$ J/kg)

$T_1 = 0°C = 273.15K \qquad T_2 = 40°C = 313.15K \qquad m = 100\,kg$

$C = 0.5\ €/kWh = 0.5 \cdot \frac{€}{3.6 \cdot 10^6 J} = 1{,}4 \cdot 10^{-7}\ €/J$

$\Delta S = 0 \qquad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \rightarrow Q_2 = \frac{T_2}{T_1} Q_1 \qquad Q_1 = m\lambda$

$CW = Q_2 - Q_1 = Q_1\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = m\lambda C\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = 0.67\ €$

P.7.6.

Se si deve mantenere all'interno di un frigorifero una temperatura di -3^0C con una temperatura esterna dell'ambiente di 27^0C, quanto vale il minimo lavoro che occorre spendere per trasferire, con una trasformazione ciclica, una quantità di calore pari a 10 J dall'interno della cella frigorifera all'ambiente esterno?

$T_1 = 270.15K \qquad T_2 = 300.15K \qquad \Delta S = 0$

$\frac{Q_1}{T_1} \le \frac{Q_2}{T_2} \rightarrow Q_2 \ge \frac{T_2}{T_1} Q_1 \qquad W = Q_2 - Q_1 \ge Q_1\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) \approx 1.11 J$

P.7.8.

Un fluido termodinamico compie un ciclo motore reversibile assorbendo calore da due sorgenti termiche alle temperature $T_1 = 1000$ K e $T_2 = 800$ K, e cedendone ad una terza a temperatura $T_3 = 500$ K. Si dica, giustificando la risposta, se il rendimento termodinamico η del ciclo è minore, maggiore od uguale a 0.5.

$T_1 = 1000K \qquad T_2 = 800K \qquad T_3 = 500K$

$\Delta S = 0 \qquad \frac{Q_3}{T_3} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \rightarrow Q_3 = \frac{T_3}{T_1} Q_1 + \frac{T_3}{T_2} Q_2$

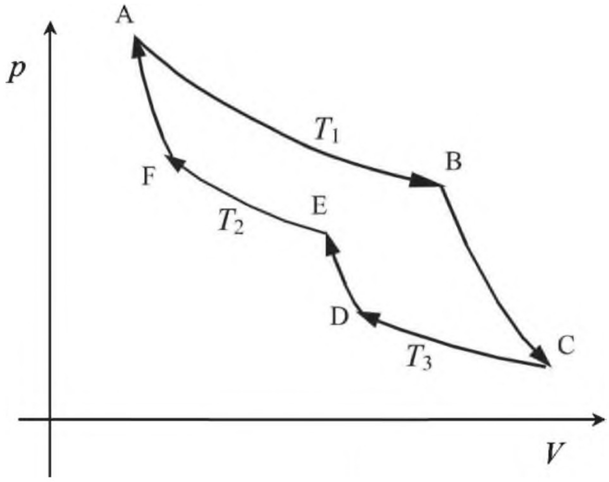
$$\eta = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_A|} = 1 - \left(\frac{\frac{T_3}{T_1} Q_1 + \frac{T_3}{T_2} Q_2}{\frac{T_1}{T_3} Q_3 - \frac{T_1}{T_2} Q_2 + \frac{T_2}{T_3} Q_3 - \frac{T_2}{T_1} Q_1} \right) = 1 - \frac{T_3}{T_1 T_2} \frac{T_2 Q_1 + T_1 Q_2}{Q_1 + Q_2}$$

$$T_2 < \frac{T_2 Q_1 + T_1 Q_2}{Q_1 + Q_2} < T_1 \rightarrow 1 - \frac{T_3}{T_2} < \eta < 1 - \frac{T_3}{T_1} \rightarrow 0.375 < \eta < 0.5$$

P.7.9.

Un fluido termodinamico compie reversibilmente il ciclo motore ABCDEFA mostrato in figura. Le trasformazioni AB, EF e CD sono isoterme a temperature T_1, T_2 e T_3, rispettivamente, con $T_1 > T_2 > T_3$, mentre BC, DE ed FA sono trasformazioni adiabatiche. Si dimostri che il rendimento η del ciclo soddisfa la seguente disuguaglianza:

$$1 - \frac{T_2}{T_1} < \eta < 1 - \frac{T_3}{T_1}.$$



$\Delta S = 0$ $\quad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} \rightarrow Q_1 = \frac{T_1}{T_2} Q_2 + \frac{T_1}{T_3} Q_3$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_A|} = 1 - \frac{Q_2 + Q_3}{Q_1} = 1 - \frac{T_2 T_3}{T_1} \frac{Q_2 + Q_3}{T_3 Q_2 + T_2 Q_3}$$

$$T_3 < \frac{T_3 Q_2 + T_2 Q_3}{Q_2 + Q_3} < T_2 \rightarrow 1 - \frac{T_2}{T_1} < \eta < 1 - \frac{T_3}{T_1}$$

P.7.10.

Si abbiano tre sorgenti di calore le cui temperature siano rispettivamente $T_1 = 1000$ K, $T_2 = 600$ K e $T_3 = 500$ K. Si stabilisca se un sistema termodinamico possa compiere una trasformazione ciclica reversibile assorbendo una quantità di calore $Q_1 = 1000$ cal dalla prima sorgente e cedendo le quantità di calore $Q_2 = 500$ cal e $Q_3 = 50$ cal alla seconda ed alla terza sorgente, rispettivamente. Si giustifichi la risposta.

$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_3}{T_3} = 0 \rightarrow \approx 0.067$ cal/k $\quad$ IMPOSSIBILE

P.7.13.

Una macchina frigorifera compie 4 cicli al secondo assorbendo una potenza $\mathcal{P} = 1.2$ kW. Essa funziona in modo irreversibile, scambiando calore con due sorgenti alle temperature $T_1 = 300$ K e $T_2 = 250$ K. Sapendo che in ogni ciclo si ha una variazione di entropia $\Delta S = 0.4$ J/K, si determini il tempo necessario per sottrarre alla sorgente fredda una quantità di calore $Q = 250$ kJ.

$P_i = 0.3 \text{ kWh} = 0.3 \cdot 10^3$ W

$P = \frac{W}{\tau} \rightarrow W = P_i \cdot \tau = 0.3 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{4} = 0.075 \cdot 10^3 \text{ J} = 75 \text{ J} \qquad Q_1 = W_i + Q_2$

$$\Delta S = -\overset{\text{CED}}{\frac{Q_2}{T_2}} + \overset{\text{ASS}}{\frac{W + Q_2}{T_1}} \rightarrow \frac{Q_2}{T_2} + \frac{W}{T_1} + \frac{Q_2}{T_1} = \Delta S \rightarrow Q_2\left(\frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_1}\right) = \Delta S - \frac{W}{T_1}$$

$$Q_2 = \left(\Delta S - \frac{W}{T_1}\right) \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} = |Q_{CED}| = 225 \rightarrow Q_{Ai} \cdot 4 = 900 \text{ J} \;/\; \frac{250000}{900} = 277 \text{ s}$$

P.7.14.

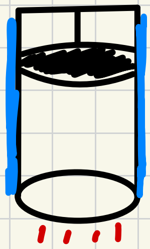
Un recipiente cilindrico, che contiene $n = 3$ moli di un gas perfetto biatomico, con la base capace di condurre calore e con la parete laterale costituita di materiale adiatermano, è chiuso con un pistone senza peso, anch'esso adiatermano, scorrevole senza attrito. La pressione esterna agente sul pistone è costante e pari alla pressione atmosferica $p = 1$ atm. Inizialmente il recipiente è posato su una sorgente di calore alla temperatura $T_1 = 300$ K ed il gas si trova in uno stato di equilibrio. Il recipiente viene successivamente spostato e posto su un'altra sorgente di calore a temperatura $T_2 = 400$ K, raggiungendo un nuovo stato di equilibrio. Si calcolino:

(i) la variazione di energia interna subita dal gas nella trasformazione, precisando se questa è reversibile oppure no;

(ii) il lavoro termodinamico compiuto dal gas sull'ambiente;

(iii) la variazione di entropia del gas e della sorgente termica a temperatura T_2;

(iv) la variazione di entropia dell'universo.



$n = 3 \quad c_v = \frac{5}{2}R \quad c_p = \frac{7}{2}R \quad \gamma = 7/5 \quad p = 1.013 \cdot 10^5\ Pa$

$T_1 = 300\ K \quad T_2 = 400 K$

i $\Delta U = n c_v \Delta T = 3 \cdot \frac{5}{2} R \cdot 100 = 6,2 \cdot 10^3 J$

ii $\Delta U = Q - W \qquad W = Q - \Delta U = 2.5 \cdot 10^3 J$

$Q = n c_p \Delta T = 3 \cdot \frac{7}{2} R \cdot 100 = 8,7 \cdot 10^3 J$

iii $\Delta S_{SIST} = n c_p \ln \frac{T_2}{T_1} = 3 \cdot \frac{7}{2} R \cdot \ln \frac{400}{300} = 25 \quad J/K$

$\Delta S_{AMB} = \frac{n c_p (T_1 - T_2)}{T_2} = -21,8 \ J/K$

iV $\Delta S_U = \Delta S_{SIST} + \Delta S_{AMB} \approx 3,3 \ J/K$