#Esercizi

Teoria dei sistemi

26/10/2022

1) Dato il sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \end{pmatrix}$$

a) Condurre l'analisi modale al variare di $c, b \in \mathbb{R}$;

b) Fissati $b = 1$ e $c = 0$, calcolare la risposta libera in uscita a partire da

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) Calcolare il sistema tempo-discreto equivalente per periodo di campionamento $T_s = 2$ secondi.

2) Un processo è descritto dall'equazione differenziale

$$y^{(3)} + 3y^{(2)} + (2+k)\dot{y} + ky = u$$

Studiare la stabilità interna del processo al variare di k dopo avere determinato una rappresentazione nello spazio di stato associata al sistema.

3) Si consideri il sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}\overset{75}{25} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = 1.$$

a) Si effettui l'analisi modale

b) si tracci lo schema di simulazione

c) si determini l'equazione alle differenze che descrive il processo

d) si tracci la traiettoria a partire dalla condizione iniziale $x(0) = (1,1)^T$

e) Si calcolino le matrici $\Phi(k)$, $H(k)$, $\Psi(k)$ e $W(k)$

1) Dato il sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \end{pmatrix}$$

a) Condurre l'analisi modale al variare di $c, b \in \mathbb{R}$;

b) Fissati $b = 1$ e $c = 0$, calcolare la risposta libera in uscita a partire da

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) Calcolare il sistema tempo-discreto equivalente per periodo di campionamento $T_s = 2$ secondi.

a)

AUTOVALORI:

$$\det(A-\lambda I)=0 \rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda^2+2\lambda+2)=0 \qquad \lambda_1=-1 \quad \lambda_{2,3}=-1\pm j$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ È IN FORMA } \begin{pmatrix} \alpha & w \\ -w & \alpha \end{pmatrix}$$

AUTOVETTORI DESTRI.

λ_1:

$$(A-\lambda_1 I)u_1=0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{pmatrix}=0 \quad \begin{cases} 2u_a - u_c = 0 \\ -u_a + u_b = 0 \end{cases} \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_{2,3}$:

$$(A-\lambda_2 I)u_2=0 \rightarrow \begin{pmatrix} j & 0 & 0 \\ 2 & j & -1 \\ -1 & 1 & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases} ju_a=0 \\ 2u_a+ju_b-u_c=0 \\ -u_a+u_b+ju_c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_a=0 \\ u_b=-ju_c \end{cases} \qquad u_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ j \end{pmatrix} = u_{2a} \pm j u_{2b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm j \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

AUTOVETTORI SINISTRI:

$$U^{-1} = (u_1 \ u_a \ u_b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \frac{1}{\det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1' \\ v_a' \\ v_b' \end{matrix}$$

ECC E OSS:

$$v_1' B = (1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \qquad C u_1 = (1\ 0\ c)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2c+1$$

$$v_a' B = (-1\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = b-1 \qquad C u_a = (1\ 0\ c)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$v_b' B = (-2\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \qquad C u_b = (1\ 0\ c)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c$$

	ECC	OSS
λ_1	✓	$c \neq -\frac{1}{2}$
λ_2	$b \neq 1$	×
λ_3	✓	$c \neq 0$
	$H(z)$	$\psi(z)$

PER $\lambda_1 = -1$ ABBIAMO UN MODO APERIODICO CONVERGENTE ($\lambda < 0$)
PER $\lambda_{2,3}$ ABBIAMO UN MODO PSEUDOPERIODICO CONVERGENTE ($\alpha < 0$)

b) $b = 1 \quad c = 0 \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ NELLA $\psi(\tau)$ COMPARE SOLO IL MODO APERIODICO

$$\psi(\tau) = C \left\{ e^{\lambda_1 \tau} u_1 v_1' + \cancel{e^{\alpha \tau} \left[\cos(w\tau)(u_a v_a' + u_b v_b') + \sin(w\tau)(u_a v_b' - u_b v_a') \right]} \right\}$$

$$y_L(\tau) = \psi(\tau) x_0 = C e^{\lambda_1 \tau} u_1 v_1' x_0 = (1\ 0\ 0)\, e^{-\tau} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$
$$= e^{-\tau} (1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (e^{-\tau}\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

c) CALCOLO LE MATRICI DISCRETE CON $T = 2s$

$$\begin{cases} x((k+1)T) = A_d x(kT) + B_d u(kT) \\ y(kT) = C_d x(kT) + D_d u(kT) \end{cases} \qquad \begin{matrix} C_d = C = (1\ 0\ c) \\ D_d = D = 0 \end{matrix}$$

$$A_d = e^{AT} = e^{\lambda_1 T} u_1 v_1' + e^{\alpha T} \left[\cos(wT)(u_a v_a' + u_b v_b') + \sin(wT)(u_a v_b' - u_b v_a') \right] =$$
$$= e^{-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1\ 0\ 0) + e^{-2} \left[\cos(-2) \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (-1\ 1\ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (-2\ 0\ 1) \right) + \right.$$
$$\left. + \sin(-2) \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (-2\ 0\ 1) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (-1\ 1\ 0) \right) \right] =$$
$$= e^{-2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cos(-2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin(-2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$B_d = (e^{AT} - I) A^{-1} B = (A_d - I) A^{-1} B =$$
$$= \left\{ e^{-2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cos(-2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin(-2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} - \frac{b}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{b}{2} \end{pmatrix}$$

2) Un processo è descritto dall'equazione differenziale

$$y^{(3)} + 3y^{(2)} + (2+k)\dot{y} + ky = u$$

Studiare la stabilità interna del processo al variare di k dopo avere determinato una rappresentazione nello spazio di stato associata al sistema.

FACCIO ASSOCIAZIONI

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ x_3 = \ddot{y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ \dot{x}_3 = \dddot{y} = u - kx_1 - x_2(2+k) - 3x_3 \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & -2-k & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = 0$$

STUDIO GLI AUTOVAL DI A E USO ROUTH·

$$\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -k & -2-k & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + 3\lambda + k + 2) - k : \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda(k+2) + k$$

$$CN: \begin{cases} 2+k > 0 \;.\; k > -2 \\ k > 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & k+2 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & \frac{2}{3}k + 2 & \\ 0 & k & \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} k > -3 \\ k > 0 \end{array}$$

$P(\lambda)$ STABILE ASINTOTICAMENTE PER $k > 0$

IL CASO LIMITE È $k = 0 \rightarrow \lambda(\lambda^2 + 3\lambda + 2)$ NESSUN CAMBIO DI SEGNO

3) Si consideri il sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}75 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = 1.$$

a) Si effettui l'analisi modale
b) si tracci lo schema di simulazione
c) si determini l'equazione alle differenze che descrive il processo
d) si tracci la traiettoria a partire dalla condizione iniziale $x(0) = (1, 1)^T$
e) Si calcolino le matrici $\Phi(k)$, $H(k)$, $\Psi(k)$ e $W(k)$

a) **AUTOVALORI:**

$$\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{3}{4} \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 + \frac{3}{4} \rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

AUTOVETTORI DESTRI:

$$(A - \lambda_1 I)u_1 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} \frac{1}{2}u_a - \frac{3}{4}u_b = 0 \\ u_a - \frac{3}{2}u_b = 0 \end{cases} \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 I)u_2 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} \frac{3}{2}u_a - \frac{3}{4}u_b = 0 \\ u_a - \frac{1}{2}u_b = 0 \end{cases} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

AUTOVETTORI SINISTRI:

$$U^{-1} = (u_1 \;\; u_2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad U = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1' \\ v_2' \end{matrix}$$

ECC E OSS:

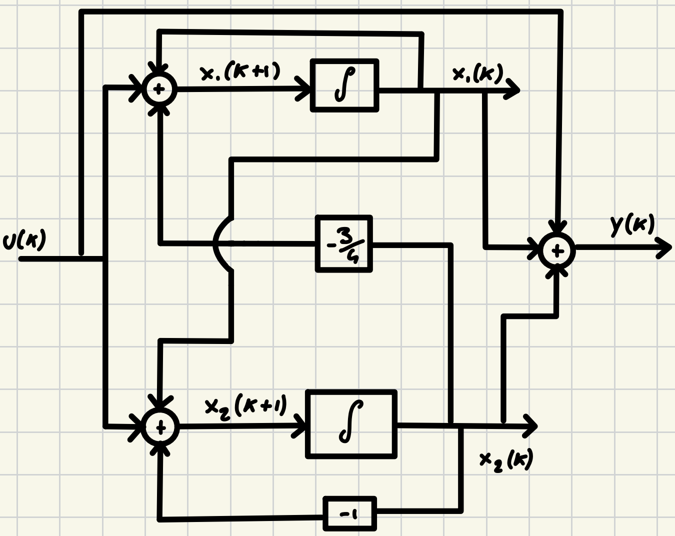
$$v_1'B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \qquad Cu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 5$$

$$v_2'B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \qquad Cu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3$$

	ECC	OSS
λ_1	✓	✓
λ_2	✓	✓
	$H(z)$	$\Psi(z)$

b)

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1 - \frac{3}{4}x_2 + u \\ x_2(k+1) = x_1 - x_2 + u \\ y(k) = x_1 + x_2 + u \end{cases}$$



c) $\begin{cases} x_1(k+1) = x_1 - \frac{3}{4}x_2 + u \\ x_2(k+1) = x_1 - x_2 + u \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) + u(k) \end{cases}$

$$y(k+1) = x_1(k+1) + x_2(k+1) + u(k+1) =$$
$$= x_1(k) - \frac{3}{4}x_2(k) + u(k) + x_1(k) - x_2(k) + u(k) + u(k+1) =$$
$$= 2x_1(k) - \frac{7}{4}x_2(k) + 2u(k) + u(k+1)$$

$$y(k+2) = 2x_1(k+1) - \frac{7}{4}x_2(k+1) + 2u(k+1) + u(k+2) =$$
$$= 2x_1(k) - \frac{3}{2}x_2(k) + 2u(k) - \frac{7}{4}x_1(k) + \frac{7}{4}x_2(k) - \frac{7}{4}u(k) + 2u(k+1) + u(k+2) =$$
$$= \frac{1}{4}x_1(k) + \frac{1}{4}x_2(k) + \frac{1}{4}u(k) + 2u(k+1) + u(k+2)$$

$$\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -7/4 \end{bmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k+1) \quad \longleftarrow \quad \text{RICAVIAMO } x(k)$$

$$x(k) = \begin{pmatrix} \frac{7}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{8}{15} & -\frac{4}{15} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} y(k) \\ y(k+1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(k) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k+1) \right] =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{8}{15} & -\frac{4}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(k) \\ y(k+1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(k) - \begin{pmatrix} \frac{4}{15} \\ -\frac{4}{15} \end{pmatrix} u(k+1)$$

$$y(k+2) = \frac{1}{4}\left[\frac{7}{15}y(k) + \frac{4}{15}y(k+1) - u(k) - \frac{4}{15}u(k+1)\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{8}{15}y(k) - \frac{4}{15}y(k+1) + \frac{4}{15}u(k+1)\right] +$$
$$+ \frac{1}{4}u(k) + 2u(k+1) + u(k+2) =$$
$$= \frac{1}{4}y(k) + 2u(k+1) + u(k+2)$$

e)

$$\Phi(k) = A^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k u_i v_i' = \left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} 3/2 & -3/4 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$H(k) = A^{k-1}B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{k-1} u_i v_i' B = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\psi(k) = CA^k = C\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k u_i v_i' = 5\left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$W(k) = \begin{cases} CA^{k-1}B & k \geq 1 \\ D & k = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} & k \geq 1 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$