1. E' dato un sistema con funzione di trasferimento

$$F(s) = k\frac{s^2 - 3s + 2}{s(s+10)^2}$$

a) Tracciare i diagrammi qualitativi di Bode e polare
b) Studiare la stabilità del sistema a ciclo chiuso, retroazionato con guadagno d'anello unitario

2.(Solo 9 cfu) E' dato il sistema con rappresentazione nello spazio di stato

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(y) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Calcolare la rappresentazione nello spazio di stato del sistema a tempo discreto equivalente ottenuto mediante campionamento con tempo di campionamento $T = 3sec$

3. Dare la rappresentazione nello spazio di stato di un sistema di dimensione 4 con un ingresso e due uscite, caratterizzato

a. Da un modo aperiodico associato all'autovalore $\lambda = -1$ contenuto nel sottosistema raggiungibile ed osservabile
b. Da un modo pseudoperiodico caratterizzato da pulsazione naturale $\omega_n = 1$ e smorzamento nullo, contenuto nel sottosistema raggiungibile e inosservabile
c. Un modo aperiodico associato all'autovalore $\lambda = 0$ contenuto nel sottosistema irragiungibile ed osservabile

Si discuta la stabilità interna, esterna in ogni stato e esterna nello stato zero del sistema ottenuto.

4. Dato un sistema rappresentato dalla matrice delle funzioni di trasferimento

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s-2} & -1 \end{pmatrix}$$

a. determinarne una realizzazione minima.
b. Calcolare la risposta forzata e, se esiste, a regime permanente, all'ingresso

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t\delta_{-1}(t-3)$$

Giustificare la risposta

5 La risposta a regime permanente ad ingressi sinusoidali per sistemi a tempo continuo. Enunciare le condizioni necessarie e sufficienti dimostrando in modo dettagliato come si arriva all'espressione finale della risposta a regime

Colonna

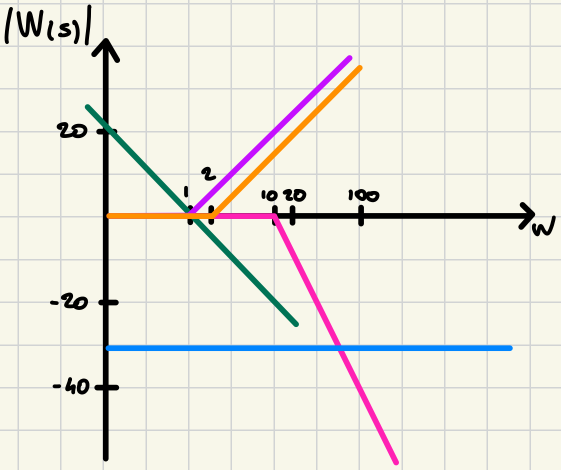
1. E' dato un sistema con funzione di trasferimento

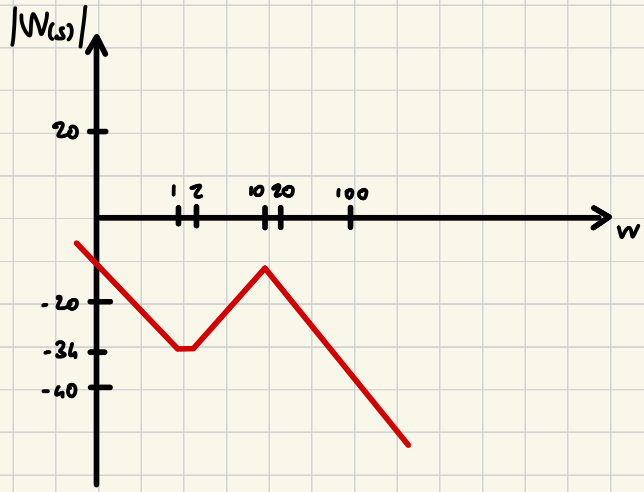
$$F(s) = k\frac{s^2 - 3s + 2}{s(s+10)^2}$$

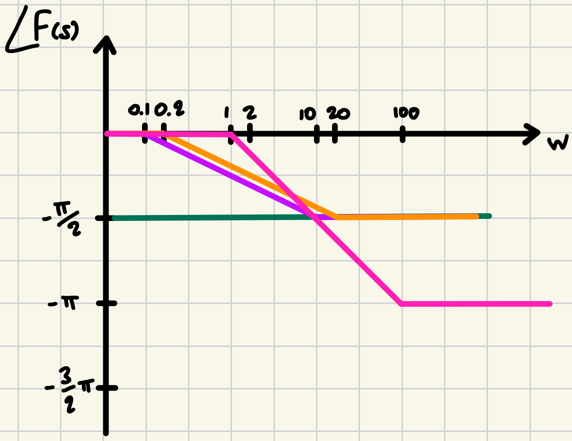
a) Tracciare i diagrammi qualitativi di Bode e polare

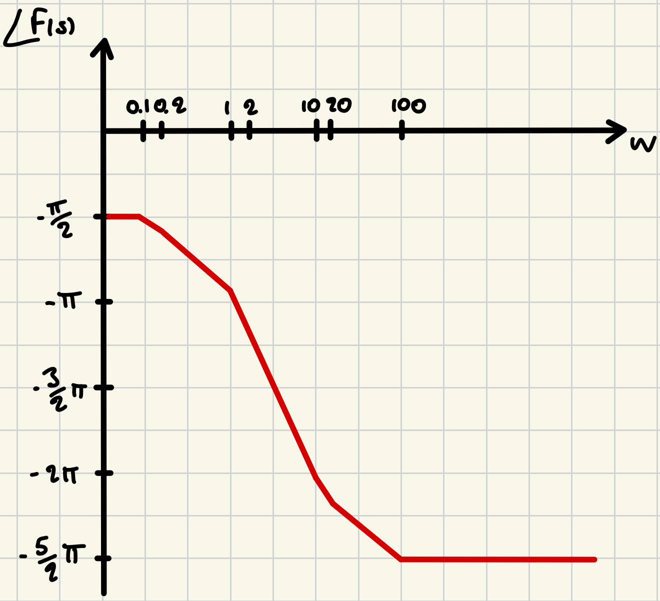
b) Studiare la stabilità del sistema a ciclo chiuso, retroazionato con guadagno d'anello unitario

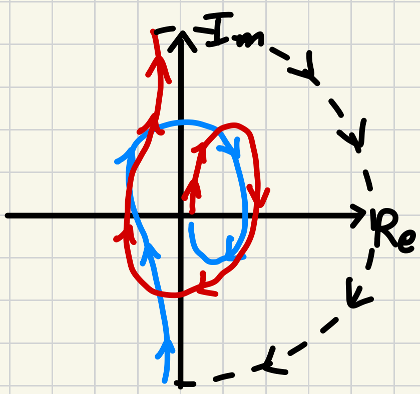
$$F(s) = K\frac{s^2-3s+2}{s(s+10)^2} = \frac{2}{100}K\frac{(1-s)(1-\frac{s}{2})}{s(1+0.1s)^2} \qquad K>0 \qquad 20\log_{10}\frac{1}{50} = -34\,dB$$











b)
$$F'(s) = \frac{F(s)}{1+F(s)} = \frac{K\,\dfrac{s^2-3s+2}{s(s+10)^2}}{1 + K\,\dfrac{s^2-3s+2}{s(s+10)^2}} = \frac{K\,\dfrac{s^2-3s+2}{\cancel{s(s+10)^2}}}{\dfrac{s(s+10)^2 + K(s^2-3s+2)}{s\cancel{(s+10)^2}}} =$$

$$P(s) = s(s+10)^2 + K(s^2-3s+2) = s^3 + s^2(20+K) + s(100 \cdot 3K) + 2K$$

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 100-3K \\
2 & 20+K & 2K \\
1 & \dfrac{3K^2 \cdot 38K - 2000}{-(20+K)} & \\
0 & 2K &
\end{array}$$

$$b_1 = \frac{2K \cdot \left[(100-3K)(20+K)\right]}{-(20+K)} = \frac{3K^2 \cdot 38K - 2000}{-(20+K)}$$

... con guadagno d'anello unitario

2. (Solo 9 cfu) E' dato il sistema con rappresentazione nello spazio di stato

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

Calcolare la rappresentazione nello spazio di stato del sistema a tempo discreto equivalente ottenuto mediante campionamento con tempo di campionamento $T = 3sec$

$$\begin{cases} x(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x(\tau) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(\tau) \\ y(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(\tau) \end{cases} \qquad T = 3s$$

AUTOVALORI: $\qquad \alpha = 0 \quad W = 3$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 10 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 9 = 0 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-9} \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3j$$

AUTOVETTORI:

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 10\alpha_2 = -3\beta_1 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 = -3\beta_2 \\ \beta_1 + 10\beta_2 = 3\alpha_1 \\ -\beta_1 - \beta_2 = 3\alpha_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = -3\beta_1 - 10\alpha_2 \\ 3\beta_1 + 9\alpha_2 = -3\beta_2 \\ \beta_1 = -3\alpha_2 + \beta_2 \\ 3\alpha_2 - \beta_2 - \beta_2 = 3\alpha_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 \\ \beta_2 = 0 \\ \beta_1 = -3\alpha_2 \\ \beta_2 = 0 \end{cases} \qquad U_a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad U_b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} V_a \\ V_b \end{array}$$

$$\Phi(T) = e^{AT} = e^{\alpha T}(\cos WT(U_a V_a + U_b V_b) + \sin WT(U_a V_b - U_b V_a)) =$$
$$= \cos 9\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\right) + \sin 9\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \cos 9 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin 9 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 9 & 0 \\ 0 & \cos 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sin 9 & \frac{2}{3}\sin 9 \\ -\frac{1}{3}\sin 9 & -\frac{1}{3}\sin 9 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos 9 + \frac{1}{3}\sin 9 & \frac{2}{3}\sin 9 \\ -\frac{1}{3}\sin 9 & \cos 9 - \frac{1}{3}\sin 9 \end{pmatrix} = A_d$$

$$B_d = A^{-1}(A_d - I)B = \begin{pmatrix} -1/9 & -10/9 \\ 1/9 & 1/9 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \cos 9 + \frac{1}{3}\sin 9 & \frac{2}{3}\sin 9 \\ -\frac{1}{3}\sin 9 & \cos 9 - \frac{1}{3}\sin 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/9 & -10/9 \\ 1/9 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 9 + \frac{1}{3}\sin 9 - 1 & \frac{2}{3}\sin 9 \\ -\frac{1}{3}\sin 9 & \cos 9 - \frac{1}{3}\sin 9 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/9 & -10/9 \\ 1/9 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 9 + \frac{1}{3}\sin 9 - 1 \\ -\frac{1}{3}\sin 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3\sin 9 - \cos 9 + 1}{9} \\ \dfrac{\cos 9 - 1}{9} \end{pmatrix}$$

$C_d = C = (1 \quad 0) \qquad D_d = D = 0$

3. Dare la rappresentazione nello spazio di stato di un sistema di dimensione 4 con un ingresso e due uscite, caratterizzato

a. Da un modo aperiodico associato all'autovalore $\lambda = -1$ contenuto nel sottosistema raggiungibile ed osservabile

b. Da un modo pseudoperiodico caratterizzato da pulsazione naturale $\omega_n = 1$ e smorzamento nullo, contenuto nel sottosistema raggiungibile e inosservabile

c. Un modo aperiodico associato all'autovalore $\lambda = 0$ contenuto nel sottosistema irragiungibile ed osservabile

Si discuta la stabilità interna, esterna in ogni stato e esterna nello stato zero del sistema ottenuto.

$\lambda = -1$ RAGG E OSS $\qquad$ $\omega_n = 1,\ \xi = 0$ $\qquad$ $\lambda = 0$ NON RAGG E OSS

a)

$$A = \left(\begin{array}{c|c|cc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \\ 0 \end{array}\right) \qquad C = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

b)

$$\left.\begin{array}{llll} (s+1) & \rightarrow & \lambda = -1 & Re(\lambda) < 0 \\ (s^2+1) & \rightarrow & \lambda = \pm j & Re(\lambda) = 0 \\ s & \rightarrow & \lambda = 0 & Re(\lambda) = 0 \end{array}\right\}$$

STABILE SEMPLICEMENTE INTERNAMENTE

STABILE ESTERNAMENTE POICHÈ $Re(\lambda_o) \leq 0$ E $Re(\lambda_{E,O}) < 0$

STABILITÀ EST $\Rightarrow$ STABILITÀ EST NELLO STATO ZERO:

$$y(t) = \psi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau \xrightarrow{t_0 = 0} y(t) = \int_0^{t} W(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

4. Dato un sistema rappresentato dalla matrice delle funzioni di trasferimento

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s-2} & -1 \end{pmatrix}$$

a. determinarne una realizzazione minima.

b. Calcolare la risposta forzata e, se esiste, a regime permanente, all'ingresso

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t\delta_{-1}(t-3)$$

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{3}{s-2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$W'(s) = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}}{(s-2)} = \frac{R_1}{s-2}$$

$$R_1 = \lim_{s \to 2} (s-2) \cdot W'(s) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad rk = 1 \qquad \lambda = 2$$

$$R_1 = C_{1\times1} B_{1\times2} = (1)\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = 2 \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = 1 \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t \delta_{-1}(t-3)$ CONSIDERO PRIMA $u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t \delta_{-1}(t)$

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{3}{s-2} & 0 \end{pmatrix} \qquad U(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{s^2}$$

$$Y_F(s) = W(s) \cdot U(s) = \frac{3}{s^2(s-2)} = \frac{R_1}{s^2} + \frac{R_2}{s} + \frac{R_3}{s-2}$$

$$R_1 = \lim_{s \to 0} s^2 \cdot Y_F(s) = \lim_{s \to 0} \frac{3}{s-2} = -\frac{3}{2}$$

$$R_2 = \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds}\left[s^2 \cdot Y_F(s)\right] = \lim_{s \to 0} \left(-\frac{3}{(s-2)^2}\right) = -\frac{3}{4}$$

$$R_3 = \lim_{s \to 2} (s-2) \cdot Y_F(s) = \lim_{s \to 2} \frac{3}{s^2} = \frac{3}{4}$$

$$Y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y_F(s)\right] = -\frac{3}{2} t - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} e^{2t} \overset{D}{+} 2t$$

$$Y_F(t-3) = -\frac{3}{2}(t-3) - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} e^{2(t-3)} + 2(t-3)$$