Fisica I

MECCANICA

CINEMATICA DEL PUNTO

VELOCITÀ

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}; \quad m/s$$

SEMPRE TANGENTE ALLA TRAIETTORIA

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{u}_x + \frac{dy}{dt}\mathbf{u}_y + \frac{dz}{dt}\mathbf{u}_z = v_x\mathbf{u}_x + v_y\mathbf{u}_y + v_z\mathbf{u}_z.$$

SE HO v MA VOGLIO r →

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(t)dt.$$

$$\boldsymbol{v}_m = \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(t)dt.$$

ACCELERAZIONE

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \quad m/s^2$$

NON TANGENTE ALLA TRAIETTORIA

SE HO a MA VOGLIO V →

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}(t)dt.$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{u}_y + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{u}_z = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{u}_z = a_x\mathbf{u}_x + a_y\mathbf{u}_y + a_z\mathbf{u}_z.$$

MOTI PROIETTATI

$$v = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \leftrightarrow \quad v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(t)dt \quad \leftrightarrow \quad x = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(t)dt; \quad y = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_y(t)dt; \quad z = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_z(t)dt$$

$$a = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \quad \leftrightarrow \quad a_x = \frac{dv_x}{dt}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

$$v = \boldsymbol{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}(t)dt \quad \leftrightarrow \quad v_x = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_x(t)dt; \quad v_y = v_y(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_y(t)dt; \quad v_z = v_z(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_z(t)dt$$

COORDINATE POLARI

$$x = r\cos\theta \ , \ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \ , \ \mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x}.$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_\theta.$$

V_r = V RADIALE LUNGO r

V_θ: V TRASVERSA ORTOGONALE AD r

MOTO RETTILINEO

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

$$v = \frac{dx}{dt};$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt.$$

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt,$$

SE IL MOTO È VARIO
a NON È COSTANTE

MOTO RETTILINEO UNIFORME

V COSTANTE
a = 0

$$x(t) = x_0 + v\int_{t_0}^{t} dt = x_0 + v(t-t_0), \quad \text{se } t_0 = 0 \quad \boxed{x(t) = x_0 + vt.}$$

MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

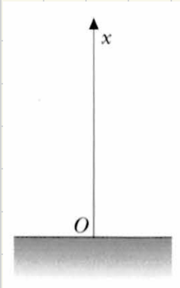
a COSTANTE

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0), \qquad \text{se } t_0 = 0 \qquad \boxed{v(t) = v_0 + at.}$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2, \qquad \text{se } t_0 = 0 \qquad \boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2.}$$

MOTO VERTICALE DI UN CORPO

TRASCURANDO L'ATTRITO DELL'ARIA, UN CORPO LASCIATO LIBERO DI CADERE HA UN'ACCELERAZIONE $g = 9.81\ m/s^2 =$ COST VERSO IL BASSO.



CON QUESTO SISTEMA DI RIFERIMENTO $a = -g$, E DALLE EQ DEL MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO:

$$v(t) = v_0 - gt, \quad x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

v_0, x_0 E $v_0 t$ DIPENDONO DALLE CONDIZIONI INIZIALI

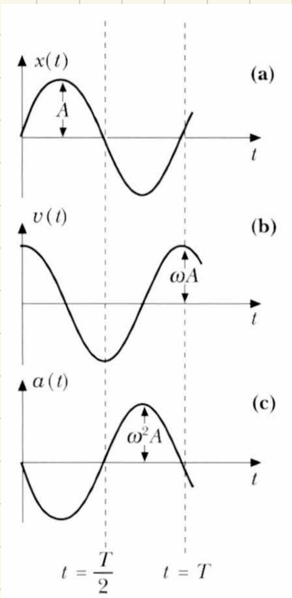
MOTO ARMONICO SEMPLICE

$$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \phi)$$

- A AMPIEZZA
- $\omega t + \phi$ FASE
- ϕ FASE INIZIALE
- ω PULSAZIONE

È UN MOTO RETTILINEO VARIO E PERIODICO. IL PUNTO DESCRIVE OSCILLAZIONI DI AMPIEZZA A RISPETTO AL CENTRO O, TUTTE EGUALI TRA LORO E CARATTERIZZATE DAL PERIODO T.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad \leftarrow \text{OSCILLAZIONI AL S}$$



$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \phi). \qquad a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\,\text{sen}(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t).$$

A E ϕ INDIVIDUANO LE CONDIZIONI INIZIALI:

$$x(0) = x_0 = A\,\text{sen}\,\phi, \quad v(0) = v_0 = \omega A \cos\phi.$$

NOTI x_0 E v_0 SI CALCOLANO A E ϕ:

$$\text{tg}\,\phi = \frac{\omega x_0}{v_0}, \qquad A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}.$$

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PERCHÈ UN MOTO SIA ARMONICO È:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0,$$

ACCELERAZIONE TANGENZIALE/NORMALE

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u}_T + \frac{v^2}{R}\mathbf{u}_N = \boldsymbol{a}_T + \boldsymbol{a}_N,$$

	a_T	a_N
CURVILINEO VARIO	$\neq 0$	$\neq 0$
CURVILINEO UNIF.	0	$\neq 0$
RETTILINEO VARIO	$\neq 0$	0
RETTILINEO UNIF	0	0

MOTO CIRCOLARE

- **UNIFORME:**

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R} : \frac{rad}{s}$$

$$a = a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R.$$

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t; \quad \theta = \theta_0 \quad \text{per} \quad t = 0;$$
$$s(t) = s_0 + vt; \quad s = s_0 \quad \text{per} \quad t = 0.$$

- **NON UNIFORME:**

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)\,dt,$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R}.$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)\,dt.$$

- **UNIFORMEMENTE ACCELERATO:**

α COSTANTE
a_T COSTANTE

$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2.$$

$$a_n = w^2 R = (w_0 + \alpha t)^2 \cdot R$$

MOTO PARABOLICO DEI CORPI

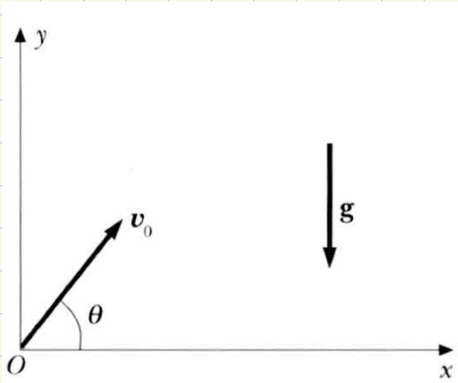
LEGGI:

$$x = v_0 t\cos\theta, \quad y = v_0 t\,\mathrm{sen}\theta - \frac{1}{2}gt^2:$$

ASSE x: UNIFORME
ASSE y: UNIF. ACCEL.

TRAIETTORIA:

$$y(x) = x\,\mathrm{tg}\theta - \frac{g}{2\,v_0^2\cos^2\theta}x^2,$$



ALTEZZA MASSIMA:

$$y(x_M) = y_M = \frac{v_0^2\,\mathrm{sen}^2\theta}{2\,g}.$$

GITTATA:

$$x_G = \frac{2\,v_0^2\cos^2\theta\,\mathrm{tg}\theta}{g} = \frac{2\,v_0^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\theta}{g} = \frac{v_0^2\,\mathrm{sen}2\theta}{g} = 2\,x_M$$

$$(x_G)_{\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

TEMPO DI VOLO:

$$t_G = 2\,x_M/v_0\cos\theta = 2\,v_0\,\mathrm{sen}\theta/g = 2\,t_M;$$

DINAMICA DEL PUNTO

PRINCIPIO DI INERZIA

un corpo non soggetto a forze non subisce cambiamenti di velocità, ovvero resta in stato di quiete se era fermo ($\boldsymbol{v} = 0$) oppure si muove di moto rettilineo uniforme ($\boldsymbol{v}$ costante non nulla).

la variazione di velocità, in modulo e/o in direzione, di un corpo è dovuta all'azione di una forza.

LA FORZA È LA GRANDEZZA CHE ESPRIME E MISURA L'INTERAZIONE TRA SISTEMI FISICI, ED È CIÒ CHE CAUSA LA VARIAZIONE DELLO STATO DI MOTO DI UN CORPO

LEGGI DI NEWTON

PRIMA LEGGE:

PRINCIPIO DI INERZIA

SECONDA LEGGE:

$$\mathbf{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \ N$$

L'interazione del punto con l'ambiente circostante, espresso tramite la forza **F**, determina l'accelerazione del punto, ovvero la variazione della sua velocità nel tempo, secondo un fattore di proporzionalità m che è la massa inerziale del punto.

È VALIDA SOLO SE STIAMO IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE

TERZA LEGGE:

- se un corpo A esercita una forza $\mathbf{F}_{A,B}$ su un corpo B, il corpo B reagisce esercitando una forza $\mathbf{F}_{B,A}$ sul corpo A;
- le due forze hanno la stessa direzione, lo stesso modulo e verso opposto, esse cioè sono vettorialmente uguali e contrarie:

$$\mathbf{F}_{A,B} = -\mathbf{F}_{B,A};$$

- le due forze hanno la stessa retta d'azione.

PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE

QUANTITÀ DI MOTO

$$\mathbf{p} = m\,\boldsymbol{v}; \rightarrow \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

N/s

L'azione di una forza determina la variazione nel tempo della quantità di moto ovvero di qualcuna o di tutte queste quantità: massa, direzione, verso e modulo della velocità.

IMPULSO DI UNA FORZA

$$\mathbf{J} = \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}\,dt = \int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} d\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \Delta\mathbf{p}.$$

N/s

- l'impulso di una forza applicata a un punto materiale provoca la variazione della quantità di moto;
- se la massa m è costante allora:

$$\mathbf{J} = m(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0) = m\Delta\boldsymbol{v}.$$

TEOREMA DELL'IMPULSO

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA P

$$\mathbf{F}_m = \frac{\Delta \mathbf{p}}{t - t_0}.$$

$F_m = 0 \rightarrow \Delta p = 0 \rightarrow p$ COSTANTE

in assenza di forze applicate la quantità di moto di un punto materiale rimane costante, ovvero si conserva. ← PRINCIPIO DI INERZIA

RISULTANTE DELLE FORZE ED EQUILIBRIO STATICO

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n = \Sigma_i \, \mathbf{F}_i; \rightarrow \boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \Sigma_i \frac{\mathbf{F}_i}{m} = \Sigma_i \, \boldsymbol{a}_i.$$

In particolare, affermare che la forza agente su un punto è nulla non significa necessariamente che sul punto non agiscono forze, ma spesso indica che la somma delle forze agenti su di esso, cioè la risultante, è nulla.

$$\mathbf{F} = \Sigma_i \, \mathbf{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_x = \Sigma_i \, F_{i,x} = 0 \\ F_y = \Sigma_i \, F_{i,y} = 0 \\ F_z = \Sigma_i \, F_{i,z} = 0 \end{cases}$$

AZIONE DINAMICA DELLE FORZE ED EQUILIBRIO DINAMICO

IN UN MOTO CURVILINEO SI HA: $\mathbf{F} = m\boldsymbol{a}_T + m\boldsymbol{a}_N = m\frac{dv}{dt}\mathbf{u}_T + m\frac{v^2}{R}\mathbf{u}_N.$

DOVE F_N FORZA CENTRIPETA DETERMINA L'ACCELERAZIONE CENTRIPETA. SE F_N COSTANTE IN MODULO IL MOTO È CIRCOLARE UNIFORME E SI HA EQUILIBRIO DINAMICO (L'AZIONE DI FORZE PROVOCA UN MOTO UNIFORME NON ACCELERATO)

FORZA PESO

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}.$$

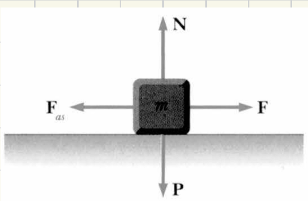
MOTO RETTILINEO SE IL CORPO PARTE DA FERMO O CON V_0 VERTICALE. MOTO PARABOLICO SE V_0 HA DIREZIONE DIVERSA. SE AGISCONO ALTRE FORZE, IN GENERALE, $a \neq g$.

REAZIONE VINCOLARE

È UNA FORZA UGUALE E CONTRARIA ALLA RISULTANTE DI FORZE AGENTI

In generale la reazione vincolare non è determinabile a priori, utilizzando una data formula, ma deve essere calcolata caso per caso dall'esame delle condizioni fisiche.

FORZA DI ATTRITO RADENTE



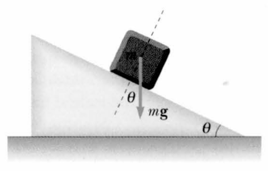
condizione di quiete	$F \le \mu_s N,$
condizione di moto	$F > \mu_s N.$

la forza di attrito radente statico non ha pertanto un valore prefissato, ma varia con il valore della forza **F** applicata, da zero fino al massimo $\mu_s N$.

IN CONDIZIONI DI MOTO A F SI OPPONE LA FORZA DI ATTRITO RADENTE DINAMICO, CON $\mu_d < \mu_s$. L'EQ DEL MOTO DIVENTA DEL TIPO:

$$F - \mu_d N = ma.$$

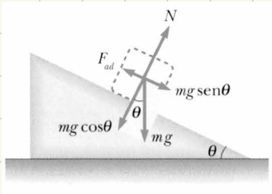
PIANO INCLINATO



SENZA ATTRITO SI HA $F_P + F_N = ma$, SCOMPONENDO F_P:

$$-mg\cos\theta + N = 0, \qquad mg\,\text{sen}\theta = ma,$$

DA SX SI CALCOLA N, DA DX a.



CON ATTRITO: $mg\,\text{sen}\theta \le F_{as,\max} = \mu_s N = \mu_s\, mg\cos\theta,$

CONDIZIONE DI EQ STATICO È $\text{tg}\theta \le \mu_s$. PER AVERE MOTO DOBBIAMO AUMENTARE θ.

FORZA DI ATTRITO VISCOSO

IN UN FLUIDO: $\mathbf{F} = -b\,\boldsymbol{v}$, $\rightarrow a = -\frac{bv}{m}$ $\qquad v(t) = v_0 e^{-bt/m} = v_0 e^{-t/\tau}$

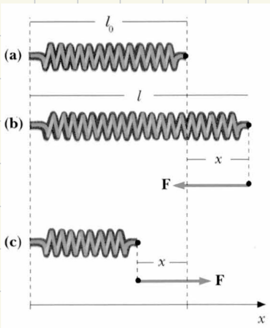
SI PUÒ SOLO AVERE EQUILIBRIO DINAMICO, NON STATICO

FORMULA DI STOKES (PER SFERA) → $F = 6\pi\eta r v = bv$

TENSIONE DEI FILI

UN FILO TESO ESERCITA UN TENSIONE T AGLI ESTREMI, VISTA COME LA REAZIONE DEL FILO ALLA FORZA CHE LO TENDE. T VA INSERITA NELLA LEGGE DI NEWTON

FORZA ELASTICA

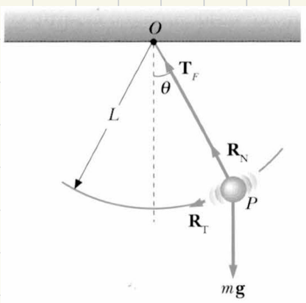


$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{u}_x, \rightarrow a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

OSCILLATORE ARMONICO SEMPLICE

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

PENDOLO SEMPLICE



$$R_T = -mg\,\text{sen}\theta = ma_T, \qquad R_N = T_F - mg\cos\theta = ma_N.$$

$$\downarrow$$

$$a_T = L\alpha = L\frac{d^2\theta}{dt^2}; \qquad a_N = \frac{v^2}{L}. \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\,\text{sen}\theta, \qquad m\frac{v^2}{L} = T_F - mg\cos\theta.$$

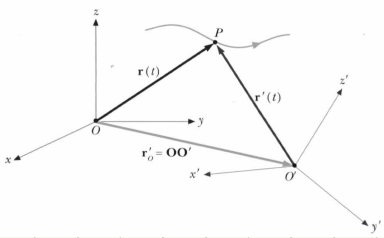
PER PICCOLE OSCILLAZIONI IL PENDOLO È UN OSCILLATORE ARMONICO:

$$T_F = m\left[g\cos\theta(t) + \frac{v^2(t)}{L}\right]. \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$s = L\theta = L\theta_0\,\text{sen}(\omega t + \phi) \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega\theta_0\cos(\omega t + \phi), \qquad v = \frac{ds}{dt} = L\frac{d\theta}{dt} = L\omega\theta_0\cos(\omega t + \phi).$$

MOTI RELATIVI

VELOCITÀ E ACCELERAZIONI RELATIVE



$$\mathbf{r} = x\,u_x + y\,u_y + z\,u_z \qquad S(x,y,z)$$

$$\mathbf{r}' = x'\,u_{x'} + y'\,u_{y'} + z'\,u_{z'} \qquad S(x',y',z')$$

$$\mathbf{r}_{O'} = OO' = x_{O'}\,u_x + y_{O'}\,u_y + z_{O'}\,u_z$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'. \rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{O'} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}. \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}' = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_t.$$

- Il sistema mobile non ruota rispetto a quello fisso ($\boldsymbol{\omega} = 0$); si parla di **moto relativo traslatorio** tra i due sistemi, ovvero di **moto di trascinamento traslatorio**, e (3.5) e (3.6) diventano

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_{O'}, \quad \boldsymbol{v}_t = \boldsymbol{v}_{O'}. \tag{3.7}$$

- Il sistema mobile non si sposta rispetto a quello fisso ($\boldsymbol{v}_{O'} = 0$), ma ruota:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}', \quad \boldsymbol{v}_t = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'; \tag{3.8}$$

si parla di **moto relativo rotatorio** tra i due sistemi, ovvero di **moto di trascinamento rotatorio**.

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \underbrace{\boldsymbol{a}_{O'} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}') + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}'}_{a_t} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'}_{a_c}. \rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_c.$$

In corrispondenza ai due casi particolari già evidenziati per la velocità abbiamo:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_{O'},$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}') + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'.$$

SISTEMI INERZIALI E NON

INERZIALE:

È UN SISTEMA IN CUI VALE LA LEGGE DI INERZIA → $V_0 = \text{COST}$, $a_0 = W = 0$

NON INERZIALE:

È UN SISTEMA ACCELERATO ($a_0 \neq 0$) O IN ROTAZIONE ($W \neq 0$)

$$\mathbf{F} = m\boldsymbol{a}' + m\boldsymbol{a}_t + m\boldsymbol{a}_c. \rightarrow \mathbf{F} - m\boldsymbol{a}_t - m\boldsymbol{a}_c = m\boldsymbol{a}'.$$

$$\mathbf{F}_{app} = -m\boldsymbol{a}_t - m\boldsymbol{a}_c = -m\boldsymbol{a}_{O'} - m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}' - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}') - 2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' \rightarrow \mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{app} = m\boldsymbol{a}'.$$

LAVORO, ENERGIA E MOMENTI

LAVORO

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F ds \cos\theta = F_T ds \quad J$$

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B F \cos\theta \, ds = \int_A^B F_T \, ds.$$

$$\begin{cases} \theta < \frac{\pi}{2}, \; W > 0 & \text{LAVORO MOTORE} \\ \theta > \frac{\pi}{2}, \; W < 0 & \text{LAVORO RESISTENTE} \\ \theta = \frac{\pi}{2}, \; W = 0 \end{cases}$$

POTENZA

$$\mathscr{P} = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{v} = F_T v. \quad W$$

ENERGIA CINETICA

$$W = \int_A^B m v dv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k,$$

il lavoro compiuto dalla risultante delle forze nello spostamento di un punto materiale dalla posizione A alla posizione B è uguale alla variazione dell'energia cinetica del punto materiale stesso.

$W > 0 \rightarrow E_{k,f} > E_{k,i}$, $W < 0 \rightarrow E_{k,f} < E_{k,i}$, $W = 0 \rightarrow E_k$ COST

LAVORO FORZA PESO

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot \int_A^B d\mathbf{s} = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_{AB}; \rightarrow W = -(mgz_B - mgz_A).$$

LAVORO DI UNA FORZA COSTANTE

COME PER LA F_p $\rightarrow$ $W = -(Fz_B - Fz_A).$

LAVORO FORZA ELASTICA

$$W = \int_A^B -kx\mathbf{u}_x \cdot dx\mathbf{u}_x = -k \int_A^B x \, dx = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right).$$

LAVORO FORZA DI ATTRITO RADENTE

$$W = \int_A^B \mathbf{F}_{ad} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B -\mu_d N \mathbf{u}_v \cdot d\mathbf{s} = -\mu_d \int_A^B N ds.$$

SE N COST $\rightarrow$ $W = -\mu_d N \int_A^B ds = -\mu_d N s_{AB}$

il lavoro della forza di attrito radente dipende dal percorso e non è esprimibile come differenza dei valori di una funzione delle coordinate nei punti A e B,

LAVORO RESISTENTE (SEMPRE NEGATIVO)

FORZE CONSERVATIVE

SE W NON DIPENDE DALLA TRAIETTORIA, MA SOLO DALLE POSIZIONI FINALI E INIZIALI, SI PARLA DI FORZA CONSERVATIVA E W SI PUÒ CALCOLARE UTILIZZANDO QUALSIASI PERCORSO DA A A B.

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \rightarrow \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_I + \int_B^A (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{II} = \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_I - \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{II} = 0.$$

LUNGO QUALSIASI PERCORSO CHIUSO $\rightarrow$ $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$

ENERGIA POTENZIALE

VALE SOLO PER FORZE CONSERVATIVE:

$E_p(x,y,z) = E_{p,P} = -\int_O^P \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$. $\rightarrow$ $W = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_A^O \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_O^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\int_O^A \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_O^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ $\rightarrow$ $W = E_{p,A} - E_{p,B} = -\Delta E_p$.

L'ENERGIA POTENZIALE DIMINUISCE IN DIREZIONE DELLA FORZA (A FAVORE DELL'ENERGIA CINETICA), E AUMENTA IN DIREZIONE OPPOSTA (A DISCAPITO DI E_K)

$E_{p,P} = mgz$. FORZA PESO

$E_{p,el} = \frac{1}{2}kx^2$. FORZA ELASTICA

- l'energia potenziale può essere definita solo per le forze conservative
- per tutte le forze conservative il lavoro si esprime sempre come l'opposto della variazione dell'energia potenziale relativa alla specifica forza;
- non esiste una espressione generale dell'energia potenziale, la sua espressione esplicita dipende dalla particolare forza conservativa cui essa si riferisce

CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA

SE AGISCONO SOLO FORZE CONSERVATIVE: $W = \Delta E_K$, $W = -\Delta E_p$

$$E_{k,A} + E_{p,A} = E_{k,B} + E_{p,B};$$

la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di un punto materiale che si muove sotto l'azione di forze conservative resta costante durante il moto, ossia si conserva.

in presenza di forze conservative l'energia meccanica di un punto materiale si conserva,

$$E_m = E_k + E_p = \text{costante}.$$

DURANTE IL MOTO AVVIENE UNA TRASFORMAZIONE DA UNA FORMA DI ENERGIA ALL'ALTRA, MA L'ENERGIA TOTALE E_m NON CAMBIA.

SE AGISCONO ANCHE FORZE NON CONSERVATIVE: $W = W_c + W_{NC}$

$$W_{nc} = (E_{k,B} + E_{p,B}) - (E_{k,A} + E_{p,A}) = E_{m,B} - E_{m,A};$$

E_m NON RIMANE COSTANTE MA $\Delta E_m = W_{NC}$

MOMENTO ANGOLARE, MOMENTO DELLA FORZA

$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = \mathbf{r}\times m\mathbf{v}$ $\rightarrow$ $\mathbf{L}_{O'} = \mathbf{L}_O + \mathbf{O'O}\times m\mathbf{v}$. $N\cdot m\cdot s$

$\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$. $\rightarrow$ $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{O'O}\times\mathbf{F}$. $N\cdot m$

$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$, $M=0 \rightarrow L$ COST $\int_{t_0}^{t} \mathbf{M}\,dt = \Delta\mathbf{L} = \mathbf{L}_{fin} - \mathbf{L}_{in}$. TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE

la derivata temporale del momento angolare è eguale al momento della forza se entrambi i momenti sono riferiti allo stesso polo fisso in un sistema di riferimento inerziale.

$\int_{t_0}^{t} \mathbf{M}\,dt = \int_{t_0}^{t} (\mathbf{r}\times\mathbf{F})dt = \mathbf{r}\times\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}\,dt = \mathbf{r}\times\mathbf{J} = \Delta\mathbf{L}$, la variazione di momento angolare è eguale al momento dell'impulso applicato al punto.

TEOREMA DEL MOMENTO DELL'IMPULSO

DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

FORZE INTERNE ED ESTERNE

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)}.$$

IL MOTO È DETERMINATO DALLA RISULTANTE F_i, NON POSSIAMO EVIDENZIARE SEPARATAMENTE I DUE TIPI DI FORZA.

IN GENERALE, LA RISULTANTE DELLE FORZE INTERNE AGENTI SULL'i-ESIMO PUNTO È DIVERSA DA 0, PERÒ LA RISULTANTE DI TUTTE LE FORZE INTERNE DEL SISTEMA È NULLA, PERCHÈ ESSE SONO A DUE A DUE UGUALI ED OPPOSTE (TERZA LEGGE DI NEWTON).

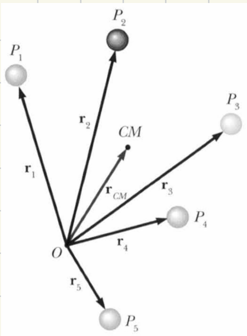
PER CIASCUN PUNTO P_i, DI MASSA m_i, SOGGETTO AD UNA F_i, SI HA:

posizione	$\mathbf{r}_i$	velocità	$\boldsymbol{v}_i$
accelerazione	$\boldsymbol{a}_i = \mathbf{F}_i/m_i$	quantità di moto	$\mathbf{p}_i = m_i\boldsymbol{v}_i,$
momento angolare	$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i$	energia cinetica	$E_{k,i} = \frac{1}{2} m v_i^2.$

PER IL SISTEMA COMPLESSIVO, INOLTRE:

quantità di moto totale	$\mathbf{P} = \Sigma_i \mathbf{P}_i = \Sigma_i m_i \boldsymbol{v}_i,$
momento angolare totale	$\mathbf{L} = \Sigma_i \mathbf{L}_i = \Sigma_i(\mathbf{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i),$
energia cinetica totale	$E_k = \Sigma_i E_{k,i} = \Sigma_i \frac{1}{2} m_i v_i^2.$

CENTRO DI MASSA



$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\Sigma_i m_i \mathbf{r}_i}{\Sigma_i m_i} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots + m_n\mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}; \rightarrow x_{CM} = \frac{\Sigma_i m_i x_i}{\Sigma_i m_i}, \quad y_{CM} = \frac{\Sigma_i m_i y_i}{\Sigma_i m_i}, \quad z_{CM} = \frac{\Sigma_i m_i z_i}{\Sigma_i m_i}.$$

$$\boldsymbol{v}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{\Sigma_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}}{\Sigma_i m_i} = \frac{\Sigma_i m_i \boldsymbol{v}_i}{\Sigma_i m_i} = \frac{\mathbf{P}}{m}. \rightarrow$$

la quantità di moto di un sistema di punti materiali è eguale alla quantità di moto $m\boldsymbol{v}_{CM}$ che avrebbe il centro di massa se considerato come un punto materiale che abbia la posizione $\mathbf{r}_{CM}$, la velocità $\boldsymbol{v}_{CM}$ e massa pari alla massa totale m del sistema.

$$\boldsymbol{a}_{CM} = \frac{d\boldsymbol{v}_{CM}}{dt} = \frac{\Sigma_i m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}}{\Sigma_i m_i} = \frac{\Sigma_i m_i \boldsymbol{a}_i}{\Sigma_i m_i} = \frac{\Sigma_i m_i \boldsymbol{a}_i}{m}. \rightarrow \mathbf{F}^{(E)} = m\boldsymbol{a}_{CM}$$

TEOREMA DEL MOTO DEL CENTRO DI MASSA

il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne.

$$\mathbf{F}^{(E)} = m\boldsymbol{a}_{CM} = m\frac{d\boldsymbol{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}_{CM}) = \frac{d\mathbf{P}}{dt}:$$

la risultante delle forze esterne è eguale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema.

PRIMA EQ CARDINALE DELLA DINAMICA DEI SISTEMI

IL MOTO DEL CENTRO DI MASSA È DETERMINATO SOLO DALLE $F^{(E)}$, QUELLO DI CIASCUN PUNTO SIA DA $F^{(E)}$ CHE DA $F^{(I)}$.

CONSERVAZIONE QUANTITÀ DI MOTO

$$\boldsymbol{a}_{CM} = 0, \quad \boldsymbol{v}_{CM} = \text{costante}, \quad \mathbf{P} = \text{costante}.$$

quando la risultante delle forze esterne è nulla, la quantità di moto totale del sistema rimane costante nel tempo e il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme o resta in quiete.

TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(E)} - \boldsymbol{v}_O \times M\boldsymbol{v}_{CM}$$

SE $-v_0 \times Mv_{CM}$ È NULLO →

$$\mathbf{M}^{(E)} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}.$$

SECONDA EQ CARDINALE DELLA DINAMICA DEI SISTEMI

Il termine $-\boldsymbol{v}_O \times m\boldsymbol{v}_{CM}$ è nullo in questi casi:

- il polo O è fisso nel sistema di riferimento inerziale, $\boldsymbol{v}_O = 0$;
- il centro di massa è in quiete nel sistema di riferimento inerziale, $\boldsymbol{v}_{CM} = 0$;
- il polo O coincide con il centro di massa, per cui $\boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{v}_{CM}$ e $\boldsymbol{v}_O \times \boldsymbol{v}_{CM} = 0$;
- $\boldsymbol{v}_O$ è parallelo a $\boldsymbol{v}_{CM}$.

se il polo O è fisso nel sistema di riferimento inerziale o coincide con il centro di massa, anche se quest'ultimo non è fisso, l'evoluzione nel tempo del momento angolare del sistema di punti è determinata dal momento delle forze esterne rispetto ad O; le forze interne non influenzano $\mathbf{L}$.

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

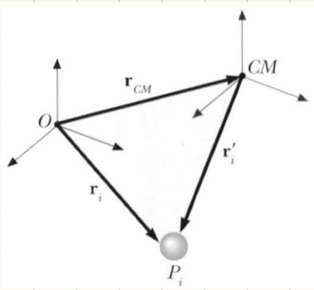
$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{L} = \text{costante}.$$

se è nullo il momento delle forze esterne che agiscono sul sistema il momento angolare si conserva.

La condizione $\mathbf{M}^{(E)} = 0$ si può verificare quando:

- non agiscono forze esterne, il sistema è isolato: allora $\mathbf{L}$ si conserva rispetto a qualsiasi polo per il quale $\boldsymbol{v}_O \times m\boldsymbol{v}_{CM} = 0$; in questa situazione, in cui è anche $\mathbf{F}^{(E)} = 0$, si ha pure la conservazione della quantità di moto, $\mathbf{P}$ = costante (si osservi che $\mathbf{F}^{(E)} = 0$ non ha come conseguenza, in generale, $\mathbf{M}^{(E)} = 0$);
- il momento delle forze esterne è nullo rispetto ad un determinato polo, ma non rispetto a qualsiasi polo, pure in presenza di forze esterne; pertanto si ha conservazione del momento angolare solo se calcolato rispetto a quel polo (mentre, in generale, non si conserva in tali casi la quantità di moto).

SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA



- l'origine è nel centro di massa;
- gli assi mantengono sempre la stessa direzione rispetto agli assi del sistema inerziale e, in particolare, possono essere assunti paralleli a questi;
- si tratta in generale di un sistema non inerziale: infatti il moto del sistema del centro di massa è traslatorio, ma non necessariamente rettilineo e uniforme; ciò avviene solo se $\mathbf{F}^{(E)} = 0$ così che $\boldsymbol{a}_{CM} = 0$.

$$\mathbf{r}'_{CM} = 0, \quad \boldsymbol{v}'_{CM} = 0, \quad \boldsymbol{a}'_{CM} = 0. \rightarrow \sum_i m_i \mathbf{r}'_i = 0, \quad \sum_i m_i \boldsymbol{v}'_i = 0, \quad \sum_i m_i \boldsymbol{a}'_i = 0.$$

la quantità di moto totale del sistema, $\mathbf{P}' = \sum_i m_i \boldsymbol{v}'_i$, risulta nulla se misurata nel sistema di riferimento del centro di massa, anche se i singoli termini $m_i \boldsymbol{v}'_i$ sono in generale diversi da zero.

TEOREMI DI KÖNIG

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{r}_{CM} \times m\boldsymbol{v}_{CM} = \mathbf{L}' + \mathbf{L}_{CM},$$

il momento angolare del sistema si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come somma del momento angolare dovuto al moto del centro di massa, $\mathbf{L}_{CM}$, e di quello del sistema rispetto al centro di massa.

PRIMO TEOREMA

$$E_k = E'_k + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = E'_k + E_{k,CM},$$

l'energia cinetica del sistema di punti si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come la somma dell'energia cinetica dovuta al moto del centro di massa, $E_{k,CM}$, e di quella del sistema rispetto al centro di massa.

SECONDO TEOREMA

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

$$W^{(E)} + W^{(I)} = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k,$$

il lavoro complessivo fatto dalle forze esterne ed interne che agiscono su un sistema di punti materiali è uguale alla variazione dell'energia cinetica dello stesso sistema tra la configurazione finale e quella iniziale.

SE FORZE INTERNE ED ESTERNE SONO CONSERVATIVE, SI HA:

$$W = \Delta E_k = -\Delta E_p = -(E_{p,B} - E_{p,A}),$$

$$E_{m,A} = (E_k + E_p)_A = E_{m,B} = (E_k + E_p)_B = \text{costante};$$

SE NON TUTTE SI CONSERVANO:

$$W_{nc} = (E_k + E_p)_B - (E_k + E_p)_A = E_{m,B} - E_{m,A};$$

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

DENSITÀ

$$\rho = \frac{dm}{dV}. \rightarrow m = \int dm = \int_V \rho\, dV,$$

SE ρ COST IL CORPO È OMOGENEO $\rightarrow$ $\rho = \frac{m}{V}, \quad m = \rho V.$ $\quad \frac{Kg}{m^3}$

$$\rho_s = \frac{dm}{dS} \Rightarrow m = \int \rho_s\, dS, \quad \rho_l = \frac{dm}{dl} \Rightarrow m = \int \rho_l\, dl.$$

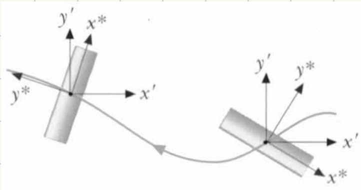
DENSITÀ SUPERFICIALE E LINEARE $\quad \frac{Kg}{m^2}, \frac{Kg}{m}$

CENTRO DI MASSA

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\int \mathbf{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int_V \mathbf{r}\, \rho\, dV}{\int_V \rho\, dV} = \frac{1}{m}\int_V \mathbf{r}\, \rho\, dV. \xrightarrow{\rho \text{ COST}} \mathbf{r}_{CM} = \frac{\rho}{m}\int \mathbf{r}\, dV = \frac{1}{V}\int \mathbf{r}\, dV.$$

QUI NON DIPENDE DA m, MA DALLA FORMA

MOTO DI UN CORPO RIGIDO



il moto rigido più generale è una rototraslazione: ogni spostamento infinitesimo può sempre essere considerato come somma di una traslazione e di una rotazione infinitesime, individuate da $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{\omega}$, variabili nel tempo.

EQUILIBRIO STATICO DEL CORPO RIGIDO

$$\mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{M} = 0.$$

$F=0 \rightarrow v_{CM}=0, \quad M=0 \rightarrow w=0$

ROTAZIONI RIGIDE ATTORNO A UN ASSE FISSO IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE

MOMENTO ANGOLARE E MOMENTO D'INERZIA:

$$L_z = \int dL_z = \int dm\, R^2\omega = I_z\omega \qquad I_z = \int dm R^2 = \int dm(x^2+y^2).$$

la componente del momento angolare rispetto all'asse di rotazione è proporzionale alla velocità angolare e dipende, tramite il coefficiente I_z, solo dalla forma del corpo e dalla posizione dell'asse rispetto al corpo.

EQUAZIONE DEL MOTO DI ROTAZIONE:

$$\mathbf{M} = I_z\boldsymbol{\alpha}.$$

ENERGIA CINETICA E LAVORO:

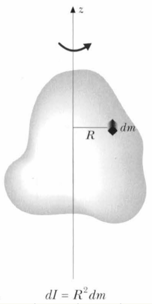
$$E_k = \int \frac{1}{2} dm v^2 = \int \frac{1}{2} dm\omega^2 R^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \int dm R^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} I_z \omega_{\text{fin}}^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_{\text{in}}^2. \rightarrow W = \int_0^\theta M\, d\theta.$$

POTENZA ISTANTANEA:

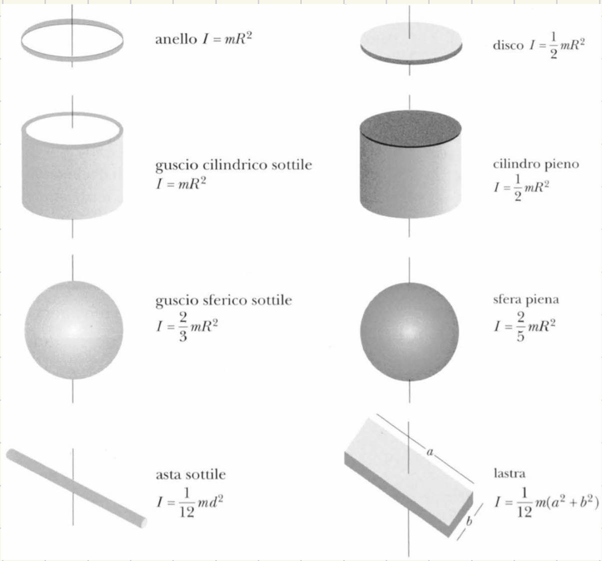
$$\mathscr{P} = \frac{dW}{dt} = M\frac{d\theta}{dt} = M\omega.$$

MOMENTO D'INERZIA



$$I = \int R^2\, dm = \int_V \rho R^2\, dV = \int_V \rho(x^2 + y^2)\, dV;$$

I DIPENDE, OLTRE CHE DALLA MASSA, DALLA FORMA, OSSIA DALLA DISTRIBUZIONE DELLA MASSA RISPETTO ALL'ASSE DI ROTAZIONE



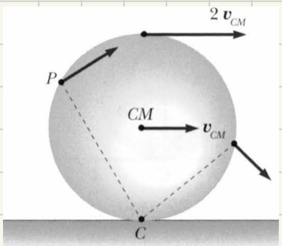
TEOREMA DI HUYGENS-STEINER

il momento d'inerzia di un corpo di massa m rispetto a un asse che si trova a una distanza a dal centro di massa del corpo è dato da

$$I = I_c + ma^2 \tag{6.21}$$

dove I_c è il momento d'inerzia del corpo rispetto a un asse parallelo al primo e passante per il centro di massa.

MOTO DI PURO ROTOLAMENTO



È PRESENTE UN ATTRITO STATICO f

PER IL PURO ROTOLAMENTO $V_c = 0$

$$v_C = v_{CM} + \omega \times r, \rightarrow v_{CM} = -\omega \times r:$$

ATTRITO VOLVENTE

$$M_v = hmg,$$

$$a_{CM} = \frac{F}{m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)}, \quad f = \frac{F}{1 + \frac{mr^2}{I}}.$$

$$a_{CM} = \frac{M}{mr\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)}, \quad f = \frac{M}{r\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)}. \Rightarrow a_{CM} = \frac{1}{m}\frac{F + \frac{M}{r}}{1 + \frac{I}{mr^2}}, \quad f = \frac{\frac{M}{r} - \frac{I}{mr^2}F}{1 + \frac{I}{mr^2}},$$

IMPULSO ANGOLARE E MOMENTO DELL'IMPULSO

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}\, dt = \mathbf{L}(t_2) - \mathbf{L}(t_1) = \Delta\mathbf{L}.$$

$$\int \mathbf{M}\, dt = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{F})dt = \mathbf{r} \times \int \mathbf{F}\, dt = \mathbf{r} \times \mathbf{J} = \Delta\mathbf{L}.$$

FENOMENI D'URTO

IN UN URTO LE QUANTITÀ DI MOTO SI MODIFICANO. SE NON CI SONO FORZE ESTERNE CHE AGISCONO, LA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE SI CONSERVA. INVECE, LA QUANTITÀ DI MOTO DEL CENTRO DI MASSA NON VARIA:

$$\mathbf{P}_{\text{in}} = m_1\boldsymbol{v}_{1,\text{in}} + m_2\boldsymbol{v}_{2,\text{in}} = m_1\boldsymbol{v}_{1,\text{fin}} + m_2\boldsymbol{v}_{2,\text{fin}} = \mathbf{P}_{\text{fin}}.\qquad \mathbf{P} = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}_{CM} = \mathbf{P}_{\text{in}} = \mathbf{P}_{\text{fin}} = \text{costante};$$

VARIANO LE QUANTITÀ DI MOTO DI CIASCUN PUNTO MATERIALE PER EFFETTO DELL'IMPULSO DELLA FORZA DI INTERAZIONE:

$$m_1\boldsymbol{v}_{1,\text{fin}} - m_1\boldsymbol{v}_{1,\text{in}} = \mathbf{J}_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{2,1}\,dt,$$

$$m_2\boldsymbol{v}_{2,\text{fin}} - m_2\boldsymbol{v}_{2,\text{in}} = \mathbf{J}_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{1,2}\,dt.$$

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{J}_{1,2} = -\mathbf{J}_{2,1};$$

È POSSIBILE CONSERVARE P IN PRESENZA DI FORZE ESTERNE SOLO SE NON SONO IMPULSIVE E LA DURATA τ DELL'URTO È MOLTO PICCOLA:

$$\Delta\mathbf{P} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}^{(\text{E})}\,dt = \mathbf{F}_m^{(\text{E})}\,\tau$$

TRASCURABILE PER τ MOLTO PICCOLO

Quindi definendo urto un processo in cui l'interazione tra i punti materiali abbia un'intensità molto grande rispetto alle eventuali forze esterne presenti si ha che:

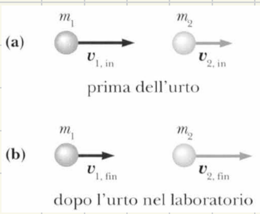
- un urto comporta uno scambio di quantità di moto tra due punti sotto forma di impulsi dovuti alle forze interne tra gli stessi;
- nell'urto la quantità di moto totale prima dell'urto è uguale alla quantità di moto totale dopo l'urto, la quantità di moto del sistema si conserva.

NON SI PUÒ ASSUMERE A PRIORI CHE E_K O E_m SI CONSERVINO.

URTO ELASTICO

SI CONSERVA P E E_K → FORZE INTERNE CONSERVATIVE

$$\mathbf{P}_{\text{in}} = \mathbf{P}_{\text{fin}},\quad E_{k,\text{in}} = E_{k,\text{fin}}$$



$$m_1v_{1,\text{in}} + m_2v_{2,\text{in}} = m_1v_{1,\text{fin}} + m_2v_{2,\text{fin}} = (m_1 + m_2)v_{CM},$$

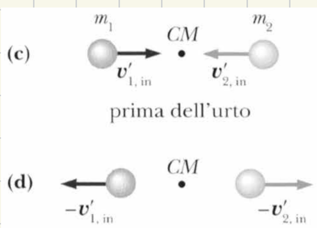
$$\frac{1}{2}m_1v_{1,\text{in}}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,\text{in}}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1,\text{fin}}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,\text{fin}}^2.$$

→

$$v_{1,\text{fin}} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,\text{in}} + 2\,m_2v_{2,\text{in}}}{m_1 + m_2},$$

$$v_{2,\text{fin}} = \frac{2\,m_1v_{1,\text{in}} + (m_2 - m_1)v_{2,\text{in}}}{m_1 + m_2}.$$

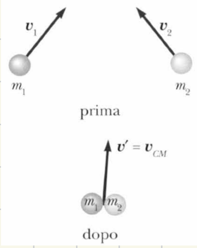
SE L'URTO VIENE CONSIDERATO NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CM:



$$\boldsymbol{v}'_{1,\text{fin}} = -\boldsymbol{v}'_{1,\text{in}},\quad \boldsymbol{v}'_{2,\text{fin}} = -\boldsymbol{v}'_{2,\text{in}}.$$

URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO

SI CONSERVA SOLO p → FORZE INTERNE NON CONSERVATIVE



$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}' = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}_{CM}\,, \rightarrow \boldsymbol{v}_{CM} = \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

$$\Delta E_k = E_{k,\text{fin}} - E_{k,\text{in}} = -E'_{k,\text{in}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}m v_2^2.$$

DOPO L'URTO I DUE CORPI RIMANGONO ATTACATI E IL LAVORO COMPIUTO, A SPESE DELL' $E_{K,IN}$, PER FAR AVVENIRE LA DEFORMAZIONE NON VIENE PIÙ RECUPERATO (FORZE INTERNE NON CONSERVATIVE)

URTO ANELASTICO

SI CONSERVA SOLO p. I PUNTI RITORNANO SEPARATI DOPO L'URTO.

$$e = -\frac{p'_{1,\text{fin}}}{p'_{1,\text{in}}} = -\frac{v'_{1,\text{fin}}}{v'_{1,\text{in}}} = -\frac{p'_{2,\text{fin}}}{p'_{2,\text{in}}} = -\frac{v'_{2,\text{fin}}}{v'_{2,\text{in}}}.$$

$$E'_{k,\text{fin}} = \frac{1}{2}m_1 v'^2_{1,\text{fin}} + \frac{1}{2}m_2 v'^2_{2,\text{fin}} = e^2\left(\frac{1}{2}m_1 v'^2_{1,\text{in}} + \frac{1}{2}m_2 v'^2_{2,\text{in}}\right) \Rightarrow E'_{k,\text{fin}} = e^2 E'_{k,\text{in}}.$$

$$\delta = \frac{E'_{k,\text{fin}} - E'_{k,\text{in}}}{E'_{k,\text{in}}} = e^2 - 1.$$

- ELASTICO: $e = 1$, $\delta = 0$ → E_K SI CONSERVA
- COMP. ANE: $e = 0$, $\delta = -1$ → TUTTA L'E_K DEL MOTO RELATIVO AL CM È ASSORBITA E TRASFORMATA
- ANELASTICO: $0 < e < 1$, $\delta = e^2 - 1$ → SI HA DISSIPAZIONE DI ENERGIA. $E'_{K,FIN} < E'_{K,IN}$

$$v_{1,\text{fin}} = \frac{(m_1 - e\,m_2)v_{1,\text{in}} + m_2(1+e)v_{2,\text{in}}}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2,\text{fin}} = \frac{m_1(1+e)v_{1,\text{in}} + (m_2 - e\,m_1)v_{2,\text{in}}}{m_1 + m_2}.$$

URTI TRA CORPI RIGIDI

SI CONSERVA E_K. P SI CONSERVA SOLO SE IL CORPO È LIBERO E NON VINCOLATO.

FLUIDI

LEGGE DI STEVINO

LA PRESSIONE IN UN FLUIDO È $p = p_0 + \rho g h$

CON $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5\ Pa$ E h: PROFONDITÀ FINO AL PUNTO IN CUI SI CALCOLA p

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

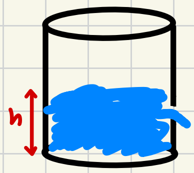
AFFERMA CHE UN CORPO IMMERSO IN UN FLUIDO RICEVE UNA SPINTA VERSO L'ALTO PARI AL PESO DEL FLUIDO SPOSTATO:

$$F_b = \rho_{FLUIDO} \cdot V_{SPOSTATO} \cdot g$$

SE $F_b > m$ IL CORPO GALLEGGIA, ALTRIMENTI AFFONDA

SERBATOIO CHE SI SVUOTA

VELOCITÀ:



R: RAGGIO CILINDRO
r: RAGGIO FORO

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgh \rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

TEMPO DI SVUOTAMENTO:

$$Q = A_{FORO} \cdot v = \pi r^2 \cdot \sqrt{2gh}$$

$dV = Q\, d\tau$ MA $dV = A\, dh \rightarrow A\, dh = \pi r^2 \sqrt{2gh}\, d\tau$

$$\int_0^T d\tau = \int_{h_0}^0 \frac{A}{\pi r^2 \sqrt{2gh}}\, dh \rightarrow T = \frac{A}{\pi r^2 \sqrt{2g}} \int_{h_0}^0 \frac{1}{\sqrt{h}}\, dh \rightarrow T = \frac{2A\sqrt{h_0}}{\pi r^2 \sqrt{2g}} = \frac{2R^2\sqrt{h_0}}{r^2\sqrt{2g}}$$

TERMODINAMICA

INTRODUZIONE

DA KELVIN A °C

$$t(°\mathrm{C}) = T(\mathrm{K}) - 273.15.$$

CALORE SCAMBIATO

$$Q = mc(T_{\mathrm{fin}} - T_{\mathrm{in}}).$$

$$|Q_1| = |Q_2|$$

DI MOLI

$$n = \frac{M}{A} = \frac{M}{N_A m}$$

$N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ molecole/mol

CALORI SPECIFICI

TABELLA 11.4 Calori specifici

Sostanza	Temperatura (K)	Temperatura (°C)	Calore specifico (J/kg K)
acqua	288	15	4186.8
alcool etilico	293	20	2240.0
alluminio	293	20	896.0
argento	298	25	234.0
ferro	293	20	448.0
ghiaccio	273	0	2051.5
mattone	293	20	837.0
oro	298	25	129.0
piombo	14	–259	29.3
piombo	173	–100	117.2
piombo	293	20	129.8
rame	298	25	387.0
silicio	298	25	703.0
vetro per finestre	293	20	628.0

CAMBIAMENTI DI FASE

TABELLA 11.6 Cambiamenti di fase

Cambiamento di fase	Terminologia
solido ⇒ liquido	fusione
liquido ⇒ solido	solidificazione
liquido ⇒ evaporazione	evaporazione
evaporazione ⇒ liquido	condensazione
solido ⇒ vapore	sublimazione
vapore ⇒ solido	brinamento (sublimazione)

$$Q = m\lambda.$$

λ = CALORE LATENTE

TABELLA 11.7 Calori latenti

Sostanza	Cambiamento di fase	Temperatura (K)	Calore latente (J/kg)
acqua	fusione	273	$3.3 \cdot 10^5$
acqua	ebollizione	373	$22.6 \cdot 10^5$
alcool etilico	fusione	159	$10.4 \cdot 10^4$
alcool etilico	ebollizione	351	$85.4 \cdot 10^4$
alluminio	fusione	933	$9.0 \cdot 10^4$
alluminio	ebollizione	2723	$11.4 \cdot 10^6$
anidride carbonica	sublimazione	213	$3.7 \cdot 10^5$
azoto	fusione	63.3	$25.5 \cdot 10^3$
elio	fusione	3.5	$5.2 \cdot 10^3$
elio	ebollizione	4.2	$20.9 \cdot 10^3$
ferro	fusione	1803	$2.1 \cdot 10^5$
oro	fusione	1336	$64.5 \cdot 10^3$
ossigeno	fusione	54.4	$13.8 \cdot 10^3$
piombo	fusione	600	$24.5 \cdot 10^3$
piombo	ebollizione	2023	$87.1 \cdot 10^4$
platino	fusione	2046	$1.1 \cdot 10^5$
rame	fusione	1356	$13.4 \cdot 10^4$
rame	ebollizione	1460	$506.5 \cdot 10^4$
stagno	fusione	505	$6.0 \cdot 10^4$
zolfo	fusione	392	$38.1 \cdot 10^3$

UNA SORGENTE DI CALORE HA CAPACITÀ TERMICA INFINITA

TRASFORMAZIONI

- una trasformazione è detta reversibile se essa avviene attraverso stati di equilibrio e in assenza di qualsiasi forza dissipativa;
- una trasformazione è detta irreversibile qualora non si svolga secondo le modalità precedenti, ossia passi attraverso stati di non equilibrio o avvenga in presenza di forze dissipative oppure si verifichino, durante il suo svolgimento, entrambe queste situazioni.

LAVORO TERMODINAMICO

$$W = \int_A^B p(V)dV,$$

APPLICABILE QUANDO SI CONOSCE P

$$W = p_{\text{amb}}(V_B - V_A);$$

PER PROCESSI CHE AVVENGONO A P ATMOSFERICA
$P_{ATM} = 1,01325$ Pa

PER TRASFORMAZIONI ISOCORE (V COST) $W = 0$

- SE IL SISTEMA SI ESPANDE: $V_B > V_A \rightarrow W > 0$
- SE IL SISTEMA SI COMPRIME: $V_B < V_A \rightarrow W < 0$

IN UN CICLO COMPIUTO IN SENSO ORARIO $W > 0$, IN SENSO ANTIORARIO $W < 0$

IN UNA TRASFORMAZIONE REVERSIBILE PRIMA DA A A B, E POI DA B A A ABBIAMO $W_{BA} = -W_{AB}$. IN UNA IRREVERSIBILE QUESTO NON VALE.

PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

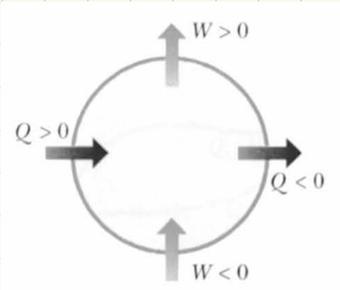
$$W_{ad} = -\Delta U = U_{in} - U_{fin}, \rightarrow Q = \Delta U_i = -W_{ad}.$$

1 Cal = 4186,6 J

PRIMO PRINCIPIO

$$\Delta U = Q - W.$$

IN UNA TRASFORMAZIONE CICLICA $\rightarrow \Delta U = 0 \Rightarrow Q = W;$



calore che entra in un sistema dall'esterno	segno positivo
lavoro che è compiuto da un sistema sull'esterno	segno positivo
calore che esce da un sistema verso l'esterno	segno negativo
lavoro che è compiuto dall'esterno sul sistema	segno negativo

EQUAZIONE DI STATO DEI GAS IDEALI

$$pV = nRT$$

R = 8,314 J/mol k

bar ≈ 10^5 Pa

LEGGE ISOTERMA DI BOYLE

T COSTANTE

$$pV = \text{costante}; \rightarrow p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

$$\Delta U = 0 \rightarrow Q = W = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = nRT \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

LEGGE ISOBARA DI VOLTA-GAY LUSSAC

P COSTANTE

$$\frac{V}{T} = \text{COSTANTE} \rightarrow \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1}$$

$\Delta U = n c_v \Delta T$

$Q = n c_p \Delta T$

$W = p \Delta V$

MONO ATOMICI $\rightarrow c_p = 5/2\, R$

POLI ATOMICI $\rightarrow c_p = 7/2\, R$

LEGGE ISOCORA DI VOLTA-GAY LUSSAC

V COSTANTE

$$\frac{P}{T} = \text{COSTANTE} \rightarrow \frac{P_2}{T_2} = \frac{P_1}{T_1}$$

$\Delta U = n c_v \Delta T$

$Q = n c_v \Delta T$

$W = 0$

MONO ATOMICI $\rightarrow c_v = 3/2\, R$

POLI ATOMICI $\rightarrow c_v = 5/2\, R$

LEGGE DI AVOGADRO

volumi eguali di gas diversi, alla stessa temperatura e pressione, contengono lo stesso numero di moli.

$V_m = 0.02241\ m^3 = 22.41$ litri. $p_0 = 101325$ Pa

CALORI SPECIFICI

RELAZIONE DI MAYER $c_p - c_V = R.$ $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ $c_p > c_v$

TABELLA 12.1 Calori specifici molari di alcuni gas

Gas	c_p	c_V	$c_p - c_V$	$\gamma = c_p/c_V$
Gas monoatomici				
He	20.8	12.5	8.33	1.67
Ar	20.8	12.5	8.33	1.67
Ne	20.8	12.7	8.12	1.64
Kr	20.8	12.3	8.49	1.69
Gas biatomici				
H_2	28.8	20.4	8.33	1.41
N_2	29.1	20.8	8.33	1.40
O_2	29.4	21.1	8.33	1.40
CO	29.3	21.0	8.33	1.40
Cl_2	34.7	25.7	8.96	1.35

I valori dei calori specifici sono espressi in J/mol K.

IN GENERALE:

$$c = \frac{1}{n}\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)$$

TRASFORMAZIONI ADIABATICHE

Q COSTANTE

$\Delta U = n c_v \Delta T$

$Q = 0$

$W = n c_v \Delta T$

$$\begin{cases} pV^{\gamma} = \text{COSTANTE} \\ TV^{\gamma-1} = \text{COSTANTE} \\ p^{1-\gamma}T^{\gamma} = \text{COSTANTE} \\ W = -\Delta U = \frac{1}{\gamma-1}(p_B V_B - p_A V_A) \end{cases}$$

TRASFORMAZIONI CICLICHE

$\Delta U = 0 \Rightarrow Q = W;$

$$\begin{cases} \text{CICLO TERMICO} \rightarrow W > 0 \\ \text{CICLO FRIGORIFERO} \rightarrow W < 0 \end{cases}$$

$Q = Q_A + Q_C,$

$Q_A > 0$ CALORI ASSORBITI
$Q_c < 0$ CALORI CEDUTI

$W = W_F + W_S,$

$W_F > 0$ LAVORI COMPIUTI
$W_S < 0$ LAVORI SUBITI

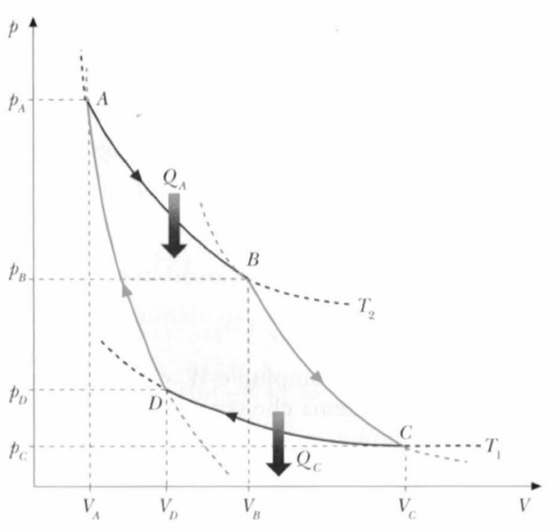
$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}.$$

IL **RENDIMENTO** RAPPRESENTA LA FRAZIONE DI CALORE ASSORBITO TRASFORMATO IN CALORE

$0 \leq \eta < 1$

IN UN CICLO TERMICO SOLO UNA PERCENTUALE DEL CALORE ASSORBITO VIENE TRASFORMATA IN LAVORO, IL RESTO VIENE SEMPRE CEDUTO (MA NON ALLA STESSA SORGENTE).

CICLO DI CARNOT



a TRASFORMAZIONE AB:
ESPANSIONE ISOTERMA REVERSIBILE ALLA TEMPERATURA T_2;

b TRASFORMAZIONE BC:
ESPANSIONE ADIABATICA REVERSIBILE

c TRASFORMAZIONE CD:
COMPRESSIONE ISOTERMA REVERSIBILE ALLA TEMPERATURA T_1;

d TRASFORMAZIONE DA:
COMPRESSIONE ADIABATICA REVERSIBILE

$$Q = Q_A + Q_C = W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = W_{AB} + W_{CD},$$

COINCIDE CON L'AREA DEL CICLO

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}.$$

UN CICLO DI CARNOT PERCORSO AL CONTRARIO COSTITUISCE UN **CICLO FRIGORIFERO** CON $|Q_c| > Q_A$, $W < 0$ ED EFFICIENZA:

$$\xi = \frac{Q_A}{|W|},$$

SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Enunciato di Kelvin-Planck
È impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato la trasformazione in lavoro del calore fornito da una sorgente a temperatura uniforme.

Enunciato di Clausius
È impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato il trasferimento di una quantità di calore da un corpo a un altro a temperatura maggiore.

QUESTI PROCESSI SONO POSSIBILI SE NON COSTITUISCONO L'UNICO RISULTATO

REVERSIBILITÀ E IRREVERSIBILITÀ

una trasformazione reversibile non comporta alterazioni permanenti, nel senso che è sempre possibile riportare nei rispettivi stati iniziali il sistema e l'ambiente che con esso interagisce.

quando avviene una trasformazione irreversibile non è più possibile ritornare allo stato di partenza senza modificare il resto dell'universo.

IL SISTEMA PUÒ ESSERE RIPORTATO ALLO STATO INIZIALE ATTRAVERSO ALTRE TRASFORMAZIONI, MA L'AMBIENTE SUBISCE UNA MODIFICA IRR.

TEOREMA DI CARNOT

AFFERMA CHE:

- tutte le macchine reversibili che lavorano tra le stesse sorgenti alle temperature T_1 e T_2 hanno rendimento eguale;
- qualsiasi altra macchina che lavori tra le stesse sorgenti non può avere rendimento maggiore;
- il risultato è indipendente dal particolare sistema che compie il ciclo.

$$\eta_R = \eta_{max} = 1 - \frac{T_1}{T_2};$$

$T_2 > T_1$

A PARITÀ DI CALORE ASSORBITO Q_A, LA MACCHINA REVERSIBILE È QUELLA CHE FORNISCE IL LAVORO MASSIMO:

$$W_{max} = Q_A \eta_R = Q_A \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)$$

A PARITÀ DI LAVORO FORNITO, LA MACCHINA REVERSIBILE È QUELLA CHE ASSORBE IL MINIMO CALORE:

$$Q_{min} = \frac{W}{\eta_R} = \frac{W}{1 - \frac{T_1}{T_2}}.$$

TEOREMA DI CLAUSIUS

- per una macchina che compie un **ciclo reversibile** si verifica:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{Q_j}{T_j}\right)=0 \quad \text{oppure} \quad \oint \frac{dQ}{T}=0;$$

- per una macchina che compie un **ciclo irreversibile** si verifica:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{Q_j}{T_j}\right)<0 \quad \text{oppure} \quad \oint \frac{dQ}{T}<0.$$

LA FUNZIONE DI STATO ENTROPIA

Il valore dell'integrale $\int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{\text{rev}}$, esteso a una qualunque trasformazione reversibile che congiunge due stati di un sistema termodinamico, è sempre lo stesso, cioè non dipende dalla particolare trasformazione reversibile scelta per eseguire il calcolo, ma solamente dagli stati termodinamici iniziale e finale.

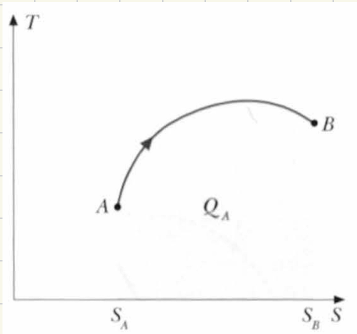
$$S_B - S_A = \Delta S = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{\text{rev}} \quad J/K$$

$$dS = \left(\frac{dQ}{T}\right)_{\text{rev}};$$

per il calcolo della variazione di entropia in una trasformazione irreversibile da A a B è necessario scegliere una qualsiasi altra trasformazione reversibile che colleghi A a B e applicare a questa (13.14).

L'ENTROPIA È UNA FUNZIONE DI STATO, E INSIEME ALLA T SI HA:

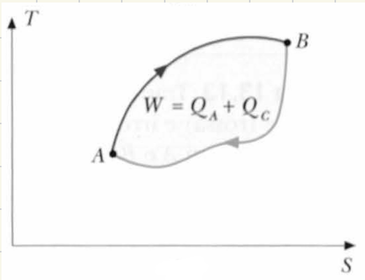
$$dQ_{\text{rev}} = T\,dS \quad \Rightarrow \quad Q_{\text{rev}} = \int_A^B T\,dS,$$



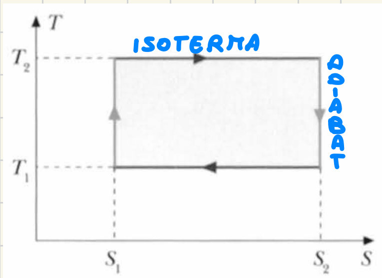
$$Q_A = \int_{S_1}^{S_2} T\,dS = T_2(S_2-S_1), \quad Q_C = \int_{S_2}^{S_1} T\,dS = T_1(S_1-S_2),$$

$$Q = Q_A + Q_C = (T_2-T_1)(S_2-S_1) = W,$$

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{T_1}{T_2}.$$



$$W = (T_2-T_1)(S_2-S_1) = (T_2-T_1)\frac{Q_A}{T_2},$$



$\Delta S = \dfrac{Q}{T}$ **isoterma reversibile,**

$\Delta S = 0$ **adiabatica reversibile.**

$\Delta S = 0$ **trasformazione ciclica.**

PRINCIPIO DI AUMENTO DELL'ENTROPIA

L'entropia di un sistema termicamente isolato non può diminuire: essa aumenta se la trasformazione è irreversibile, resta costante solo se la trasformazione è reversibile.

$$S_B - S_A \geq 0 \quad \Rightarrow \quad S_B \geq S_A.$$

ogni processo naturale si svolge necessariamente nel verso che determina un aumento dell'entropia complessiva del sistema e del suo ambiente.

CALCOLI DI VARIAZIONI DI ENTROPIA

- **TRASFORMAZIONI ADIABATICHE:**

$\Delta S_u \geq 0 \quad \text{con} \quad \Delta S_u = \Delta S_{sist} + \Delta S_{amb}.$ MA $\Delta S_{AMB} = 0$ PERCHÈ NON CI SONO SCAMBI DI CALORE

$$\Delta S_{sist} = \Delta S_u \geq 0.$$

REVERSIBILE → $\Delta S_{SIST} = 0$ ISOENTROPICA

IRREVERSIBILE → $\Delta S_{SIST} > 0$ AUMENTO ENTROPIA

- **SCAMBI DI CALORE CON SORGENTI:**

$$\Delta S_1 = \int_A^B \frac{dQ}{T_1} = \frac{1}{T_1}\int_A^B dQ = \frac{Q}{T_1},$$

SORGENTE CHE ASSORBE

$$\Delta S_2 = -\frac{Q}{T_2}.$$

CEDE

$$\Delta S_u = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{Q}{T_1} - \frac{Q}{T_2} = Q\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right);$$

UNIVERSO

$$\Delta S_u = \Delta S_{amb} = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = -\left(\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}\right).$$

CON UNA MACCHINA

$\Delta S_u \geq 0$

REVERSIBILE → $\Delta S_u = 0$

IRREVERSIBILE → $\Delta S_u > 0$

CONSIDERO UN CORPO DI MASSA m E CALORE SPECIFICO c A TEMPERATURA T_1 E A CONTATTO CON T_2:

$$\Delta S_{sist} = S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} mc\frac{dT}{T} = mc\ln\frac{T_2}{T_1}.$$

$$\Delta S_{amb} = -\frac{Q}{T_2} = \frac{mc(T_1 - T_2)}{T_2};$$

$$\Delta S_u = \Delta S_{sist} + \Delta S_{amb} = mc\ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{mc(T_1 - T_2)}{T_2}$$

- **SCAMBI DI CALORE TRA DUE CORPI:**

$$\Delta S_1 = m_1 c_1 \ln\frac{T_e}{T_1} > 0, \quad \Delta S_2 = m_2 c_2 \ln\frac{T_e}{T_2} < 0.$$

PROCESSO ADIABATICO

$\Delta S_u = \Delta S_1 + \Delta S_2 > 0$

- **CAMBIAMENTI DI FASE.**

$$\Delta S = \frac{m\lambda}{T}.$$

- **RISCALDAMENTO PER ATTRITO:**

$$\Delta S_{amb} = -\frac{Q}{T_{amb}} = -\frac{W}{T_{amb}} = \Delta S_u > 0.$$

Fisica II

ELETTROMAGNETISMO

FORZA ELETTROSTATICA, CAMPO ELETTROSTATICO

LEGGE DI NEWTON GRAVITAZIONALE

$$F_g = \gamma \frac{m_1 \, m_2}{r^2}$$

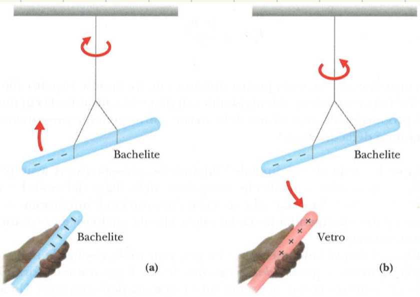
$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \, N m^2/kg^2$

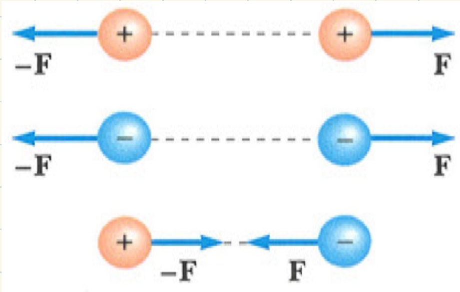
due corpi di masse m_1 e m_2, posti a distanza r molto grande rispetto alle dimensioni dei corpi stessi, interagiscono con una forza attrattiva la cui intensità è proporzionale al prodotto delle masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

CARICA ELETTRICA

ISOLANTI → SI CARICANO PER STROFINIO E TRATTENGONO CARICA ELETTRICA
CONDUTTORI → NON TRATTENGONO LA CARICA

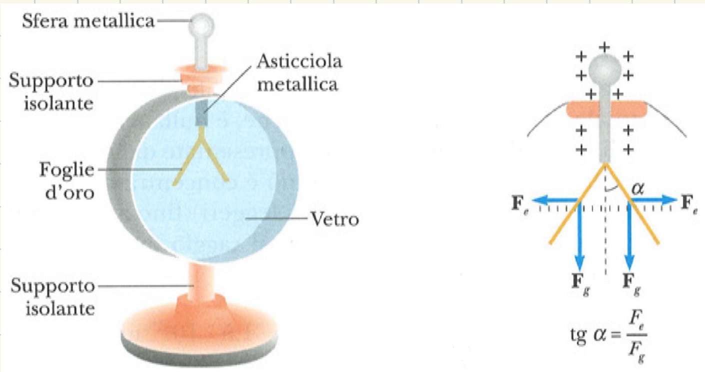
- due corpi isolanti carichi entrambi positivamente o entrambi negativamente si respingono;
- un corpo isolante carico positivamente e uno carico negativamente si attraggono;
- nel processo di carica per strofinio i due corpi, la bacchetta di isolante e il panno, acquistano sempre una carica di segno opposto.





in un sistema elettricamente isolato la somma algebrica di tutte le cariche elettriche rimane costante nel tempo ovvero si conserva.

ELETTROSCOPIO A FOGLIE



SE È STATO CARICATO CON UNA CARICA +, E LO TOCCHIAMO CON UNA BACCHETTA CARICA POSITIVAMENTE LA DEFLESSIONE DELLE FOGLIE AUMENTA, SE USIAMO UNA BACCHETTA CARICA NEGATIVAMENTE LA DEFLESSIONE DIMINUISCE.
L'ELETTROSCOPIO PERMETTE QUINDI DI RICONOSCERE LA CARICA DI UN CORPO.

LA LEGGE DI COULOMB

DUE CORPI HANNO LA STESSA CARICA QUANDO, POSTI SUCCESSIVAMENTE A CONTATTO CON L'ELETTROSCOPIO SCARICO, FANNO DEVIARE LE FOGLIE DELLO STESSO ANGOLO. UNA CARICA SARÀ MAGGIORE DI UN'ALTRA QUANDO FARÀ DIVERGERE LE FOGLIE DI UN ANGOLO MAGGIORE DELL'ALTRA.

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

la forza è direttamente proporzionale al prodotto delle cariche elettriche e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9\ Nm^2/C^2$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.8542\cdot 10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2}$$

COSTANTE DIELETTRICA NEL VUOTO

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

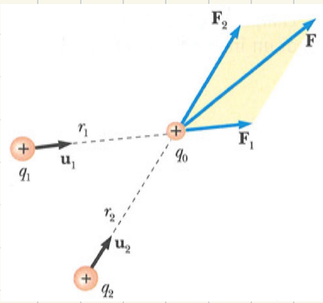
1 COULOMB È PARI ALLA CARICA TRASPORTATA DA UNA CORRENTE DI 1 A IN 1 SECONDO

$$\#e = \frac{q}{e}$$

TABELLA 1.1 Carica e massa di elettrone, protone, neutrone

	Carica (C)	Massa (kg)
elettrone **e**	$-1.602177335\cdot 10^{-19}$	$9.10938975\cdot 10^{-31}$
protone **p**	$+1.602177335\cdot 10^{-19}$	$1.67262311\cdot 10^{-27}$
neutrone **n**	0	$1.67492866\cdot 10^{-27}$

CAMPO ELETTROSTATICO



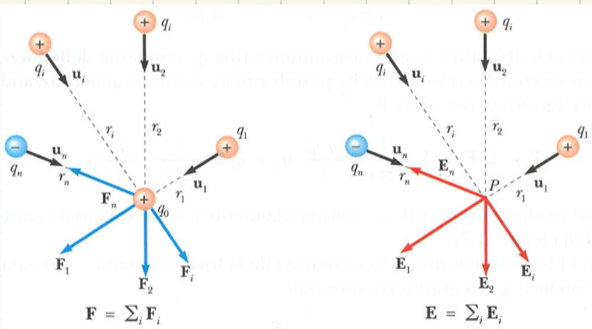
$$\mathbf{F} = \Sigma_i \mathbf{F}_i = \Sigma_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_0}{r_i^2}\mathbf{u}_i = q_0 \Sigma_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\mathbf{u}_i \rightarrow \mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}\quad N/C$$

il campo elettrostatico prodotto in un punto P da un sistema di cariche ferme è definito come la forza elettrostatica risultante **F** che agisce su una carica di prova q_0 posta in P divisa per la carica q_0 stessa.

$$\mathbf{E} = \Sigma_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\mathbf{u}_i$$

Il campo elettrostatico in un punto P prodotto da un sistema discreto di cariche è uguale alle somma dei campi elettrostatici prodotti singolarmente dalla cariche.

$$\mathbf{F}(x,y,z) = q_0\,\mathbf{E}(x,y,z)\ .$$

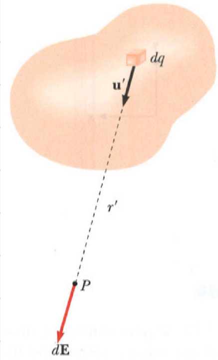


SE q_i È POSITIVO, E È USCENTE DA q_i

SE q_i È NEGATIVO, E È ENTRANTE IN q_i

q_0 DEVE ESSERE PICCOLA PERCHÈ CREA PERTURBAZIONI

CAMPO ELETTROSTATICO PRODOTTO DA UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA DI CARICHE



$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r'^2}\mathbf{u}'$$

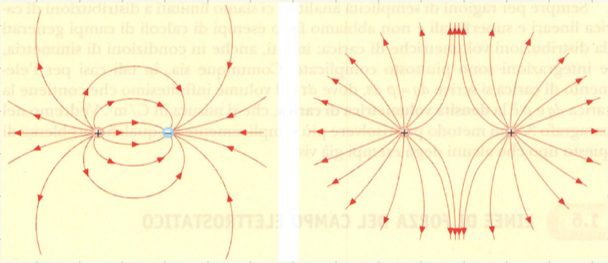
$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathbf{u}_x$$ DUE PIANI INDEFINITI CARICHI

$$\mathbf{E}(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}\mathbf{u}_x$$ ANELLO CARICO

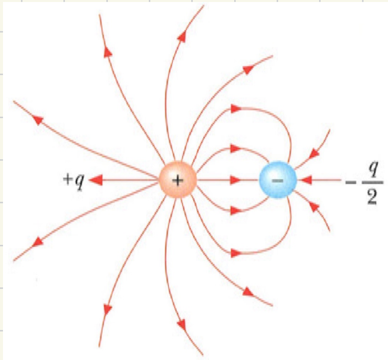
$$\mathbf{E} = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{u}_x$$ DISCO CARICO

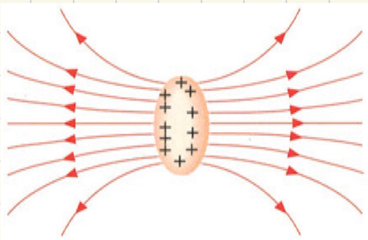
LINEE DI FORZA DEL CAMPO



- una linea di forza in ogni suo punto è tangente e concorde al campo elettrostatico in quel punto;
- le linee di forza si addensano dove l'intensità del campo elettrostatico è maggiore;
- le linee di forza non si incrociano mai, in quanto in ogni punto il campo elettrostatico è definito univocamente e non può avere due direzioni distinte;
- le linee di forza hanno origine dalle cariche positive e terminano sulle cariche negative; qualora ci siano solo cariche di uno stesso segno le linee di forza si chiudono all'infinito.

SE LE CARICHE NON SONO UGUALI IN MODULO, ALCUNE LINEE TERMINANO O PROVENGONO DALL'INFINITO





UN CAMPO ELETTROSTATICO UNIFORME, COSTANTE IN MODULO, DIREZIONE E VERSO, TIPICO DI UN PIANO INDEFINITO UNIFORMEMENTE CARICO.

MOTO DI UNA CARICA IN UN CAMPO ELETTROSTATICO

$$q\mathbf{E} = m\,\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q}{m}\mathbf{E}$$

NOTE v_0 E r_0, INTEGRANDO SI OTTENGONO VELOCITÀ E POSIZIONE DI q

SE E UNIFORME (MODULO E DIREZIONE COST) → a COST

SE $q>0$, a SEGUE IL VERSO DI E; SE $q<0$, a SEGUE IL VERSO OPPOSTO

LAVORO ELETTRICO, POTENZIALE ELETTROSTATICO

CAMPO ELETTROMOTORE

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \Rightarrow \mathbf{F} = q_0 \mathbf{E}$$

la forza che agisce su una carica elettrica, che come tale prende il nome di forza elettrica, si esprime sempre come prodotto della carica per un certo campo elettrico.

LAVORO E POTENZIALE ELETTROSTATICO

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q_0 E \cos\theta = q_0 E_s \, ds$$

$$W_1 = \int_{C_1} dW_1 = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\mathcal{T}_1 (A \to B \text{ lungo } C_1) = \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

TENSIONE ELETTRICA

$$\mathcal{T}_1 (A \to B \text{ lungo } C_1) \neq \mathcal{T}_2 (A \to B \text{ lungo } C_2)$$

PER UN PERCORSO CHIUSO $W \neq 0$ (F.E.M. $\neq 0$):

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \mathcal{E} \quad \rightarrow \quad \mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

FORZA ELETTROMOTRICE

POICHÈ IL CAMPO ELETTROSTATICO È CONSERVATIVO, IL W LUNGO UN PERCORSO CHIUSO È NULLO.

$\int E \, ds$ PUÒ ESSERE ESPRESSO COME DIFFERENZA DI POTENZIALE:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \ \ V \quad \rightarrow \quad W_{AB} = -q_0 (V_B - V_A) = -q_0 \Delta V$$

il lavoro svolto dalla forza elettrostatica per portare q_0 da A a B è dato dall'opposto del prodotto di q_0 per la differenza di potenziale $(V_B - V_A)$ tra il punto di arrivo e il punto di partenza.

AD OGNI FORZA CONSERVATIVA È ASSOCIATA UN'ENERGIA POTENZIALE

$$\Delta U_e = q_0 \Delta V$$

LUNGO QUALSIASI PERCORSO CHIUSO IN CUI È DEFINITO E (ELETTROSTATICO):

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad , \quad W = q_0 \mathcal{E} = 0$$

In un campo elettrostatico la forza elettromotrice è uguale a zero, ovvero è nullo il lavoro compiuto dalla forza elettrostatica per qualsiasi percorso ciclico.

DIFFERENZA DI POTENZIALE ELETTROSTATICO E ΔU ELETTROSTATICO

$$V_B - V_A = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} \right) \qquad U_e(B) - U_e(A) = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} - \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r_A}$$

$$V_B - V_A = \left(\Sigma_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{B,i}} - \Sigma_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{A,i}} \right) \rightarrow W = -q_0(V_B - V_A) = -\left(\Sigma_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{B,i}} - \Sigma_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{A,i}} \right) = -\Delta U_e$$

$$V(x, y, z) = -\int_\infty^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \Sigma_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

il potenziale elettrostatico prodotto da un sistema discreto di cariche è uguale alla somma dei potenziali elettrostatici prodotti singolarmente dalle cariche.

SE LE CARICHE SONO DISTRIBUITE IN MODO CONTINUO:

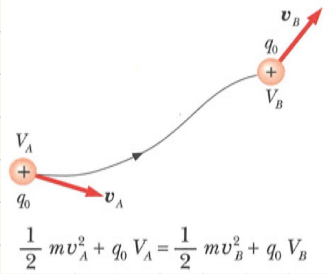
$$V(P) = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r} \qquad U_e(x, y, z) = q_0 V(x, y, z)$$

ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA

$$U_e(r) = q_0 V(r) = -q_0 \int_\infty^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad U_e(\text{sistema}) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \qquad U_e = U_e(\text{sistema}) + U_e(q_0)$$

l'energia potenziale elettrostatica del sistema di due cariche rappresenta il lavoro di una forza esterna per portare le due cariche dall'infinito alla distanza r; il lavoro è positivo se fatto contro la forza repulsiva tra cariche dello stesso segno, negativo se le cariche sono di segno opposto.

MOTO DI UNA CARICA, CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA



$$\frac{1}{2} m v_A^2 + q_0 V_A = \frac{1}{2} m v_B^2 + q_0 V_B \rightarrow E = E_k + U_e = \frac{1}{2} m v^2 + q_0 V$$

durante il moto della particella l'energia totale, somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, rimane costante.

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = q_0 E (z_B - z_A)$$

IN UN CAMPO UNIFORME

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = -\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

CAMPO DI UNA CARICA PUNTIFORME

quando una particella carica viene accelerata guadagna energia cinetica e perde la stessa quantità di energia potenziale; l'energia totale rimane costante.

IL CAMPO COME GRADIENTE DEL POTENZIALE

SE CONOSCIAMO ΔV IN OGNI PUNTO, POSSIAMO CALCOLARE E:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\ V$$

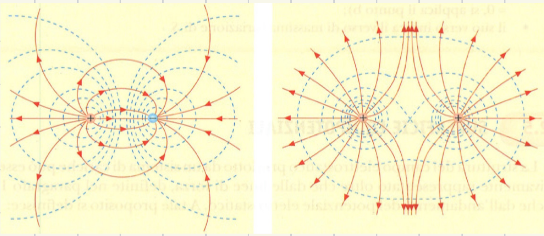
il campo elettrostatico è uguale in ogni punto al gradiente del potenziale elettrostatico calcolato in quel punto cambiato di segno.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{u}_z \qquad \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{u}_z = \mathbf{grad}\ V$$

$$V_B - V_A = \int_A^B \nabla V \cdot d\mathbf{s}$$

TEOREMA DEL GRADIENTE

SUPERFICI EQUIPOTENZIALI



superficie equipotenziale una superficie dello spazio tridimensionale nei cui punti il potenziale elettrostatico ha lo stesso valore

$$V(x, y, z) = \text{costante} .$$

- per un punto passa una ed una sola superficie equipotenziale;
- le linee di forza sono in ogni punto ortogonali alle superficie equipotenziali.

ROTORE DEL CAMPO ELETTROSTATICO

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \int_\Sigma \nabla\times\mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n\, d\Sigma \rightarrow \mathbf{rot\ E} = \nabla\times\mathbf{E}$$

IL CAMPO ELETTROSTATICO, CONSERVATIVO, È IRROTAZIONALE (ROTORE SEMPRE NULLO)

DIPOLO ELETTRICO

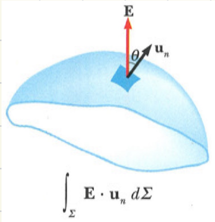
$\mathbf{p} = q\boldsymbol{a}$ C·m MOMENTO

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_1\times\mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_2 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\times\mathbf{F}_2 = q\boldsymbol{a}\times\mathbf{E} = \mathbf{p}\times\mathbf{E}$$

$$U_e(\theta) = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$$

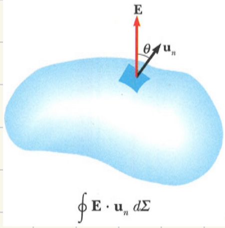
LA LEGGE DI GAUSS

FLUSSO DEL CAMPO ELETTROSTATICO



$$d\Phi(\mathbf{E}) = \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n\, d\Sigma = E\cos\theta\, d\Sigma = E_n\, d\Sigma$$

$$\Phi(\mathbf{E}) = \int_\Sigma \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n\, d\Sigma \quad \mathrm{V\cdot m}$$



$$\Phi(\mathbf{E}) = \oint_\Sigma \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n\, d\Sigma$$

LEGGE DI GAUSS

il flusso del campo elettrostatico **E** prodotto da un sistema di cariche attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma algebrica delle cariche elettriche contenute all'interno della superficie, divisa per ε_0.

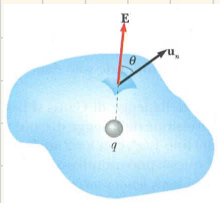
$$\Phi(\mathbf{E}) = \oint \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n\, d\Sigma = \frac{1}{\varepsilon_0}(\Sigma_i\, q_i)_{int} \qquad \Phi(\mathbf{E}) = \oint \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n\, d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$\Phi(E)$ DI UNA CARICA PUNTIFORME q DIPENDE SOLO DALL'ANGOLO SOLIDO E NON DALLA SUPERFICIE, NÈ DALLA SUA DISTANZA CON LA CARICA.

$$d\Phi(\mathbf{E}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega \;\rightarrow\; \Phi(\mathbf{E}) = \int_\Sigma \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n\, d\Sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\Omega$$

ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA:

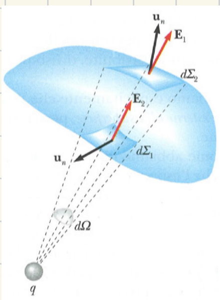
- **CARICA INTERNA:**



$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{cases} q_{INT} \rightarrow \Phi(E) = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \\ q_{EST} \rightarrow \Phi(E) = 0 \end{cases}$$

- **CARICA ESTERNA:**



$$d\Phi_1(\mathbf{E}) = \mathbf{E}_1\cdot\mathbf{u}_n\, d\Sigma_1 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega\,,$$

$$d\Phi_2(\mathbf{E}) = \mathbf{E}_2\cdot\mathbf{u}_n\, d\Sigma_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega = -d\Phi_1(\mathbf{E})$$

$$\Rightarrow d\Phi_1(\mathbf{E}) + d\Phi_2(\mathbf{E}) = 0\,.$$

$$\rightarrow \Phi(\mathbf{E}) = \oint \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n\, d\Sigma = 0$$

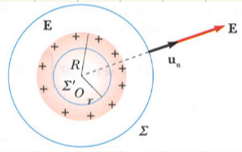
$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}(\Sigma_i\, q_i)_{\text{int}} \qquad \Phi(\mathbf{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_\tau dq$$

TEOREMA DI GAUSS

il flusso del campo elettrostatico **E** attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma algebrica delle cariche contenute dentro la superficie, comunque siano distribuite, diviso per ε_0.

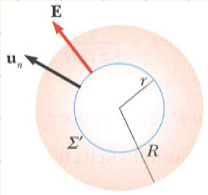
E È PRODOTTO DA CARICHE INTERNE ED ESTERNE, MA IL SUO FLUSSO $\Phi(E)$ DIPENDE SOLO DA CARICHE INTERNE.

ALCUNE APPLICAZIONI



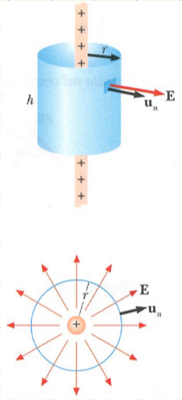
DISTRIBUZIONE SFERICA SUPERFICIALE DI CARICA

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{u}_r$$



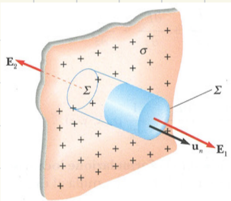
SFERA UNIFORMEMENTE CARICA

$$E = \frac{q r}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$



CILINDRO UNIFORMEMENTE CARICO

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad V(r) - V(R) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R} \qquad \lambda = \rho\pi R^2 = \frac{q}{h}$$



PIANO INDEFINITO UNIFORMEMENTE CARICO

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}(x>0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{u}_x \quad , \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}(x<0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{u}_x$$

$$V(x_2) - V(x_1) = -\int_{x_1}^{x_2} E\,dx = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1)$$

DIVERGENZA DEL CAMPO ELETTROSTATICO

$$\oint \mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n\,d\Sigma = \int_\tau \nabla\cdot\mathbf{E}\,d\tau$$

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\,(x, y, z)$$

$$\nabla\cdot\nabla V = \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

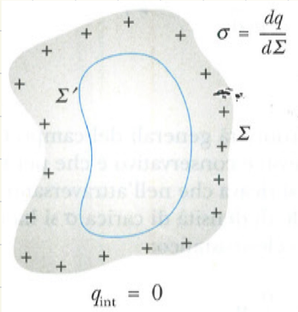
EQUAZIONE DI POISSON

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

EQUAZIONE DI LAPLACE ← NELLO SPAZIO VUOTO $\rho = 0$

CONDUTTORI, DIELETTRICI, ENERGIA ELETTROSTATICA

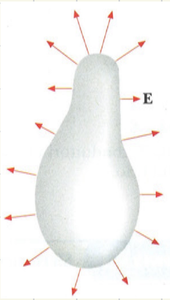
CONDUTTORI IN EQUILIBRIO



$$\mathbf{E} = 0 \qquad \text{all'interno}$$

- l'eccesso di carica elettrica in un conduttore può stare solo sulla superficie del conduttore;
- il potenziale elettrostatico è costante su tutto il conduttore;
- il campo elettrostatico in un punto delle vicinanze della superficie del conduttore è perpendicolare alla superficie e ha intensità σ/ε_0, con σ densità di carica superficiale in quel punto.

TEOREMA DI COULOMB

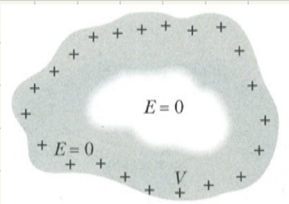


$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathbf{u}_n$$

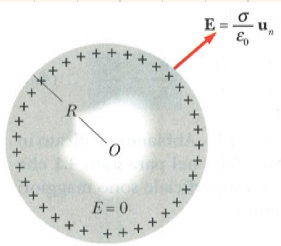
SE σ È POSITIVA, IL VERSO È USCENTE
SE σ È NEGATIVA, IL VERSO È ENTRANTE

σ È MAGGIORE DOVE IL RAGGIO DI CURVATURA È MINORE (PUNTE)

CONDUTTORE CAVO



- la carica di un conduttore in equilibrio elettrostatico si distribuisce sempre e soltanto sulla superficie esterna, anche in presenza di una o più cavità all'interno del conduttore;
- il campo elettrostatico è nullo e il potenziale elettrostatico è costante in ogni punto interno alla superficie del conduttore, anche in presenza di cavità.



$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathbf{u}_n = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathbf{u}_n$$

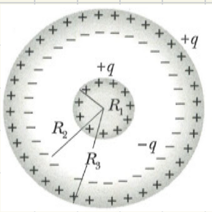
FIN QUANDO SPAZIO INTERNO ED ESTERNO NON COMUNICANO:

- il conduttore cavo costituisce uno schermo elettrostatico perfetto tra spazio interno e spazio esterno.

CONDENSATORI

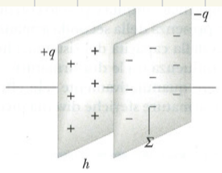
$$C = \frac{q}{\Delta V}, \ \mathrm{F}$$

dove $\pm q$ è la carica presente sulle due armature e ΔV la differenza di potenziale tra le stesse.



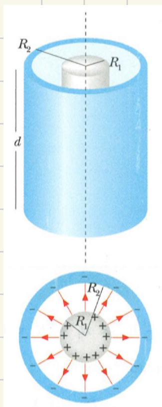
CONDENSATORE SFERICO

$$C = 4\pi\varepsilon_0\frac{R^2}{h} = \frac{\varepsilon_0\Sigma}{h}$$



CONDENSATORE PIANO

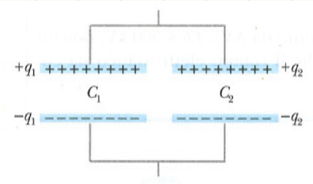
$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0\Sigma}{h}$$



CONDENSATORE CILINDRICO

$$C_d = \frac{C}{d} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

- IN PARALLELO:

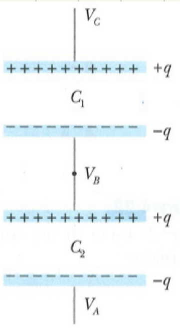


$$C_{eq} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

in un sistema di condensatori in parallelo ai capi di ciascuno c'è la stessa differenza di potenziale e la capacità equivalente è somma delle singole capacità.

- IN SERIE:



$$V_C - V_B = \frac{q}{C_1} \quad , \quad V_B - V_A = \frac{q}{C_2} ,$$

$$V = V_C - V_A = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{q}{C_{eq}}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad , \quad C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} .$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \frac{1}{C_n}$$

in un sistema di condensatori in serie la carica è la stessa su ciascuno, l'inverso della capacità equivalente è somma degli inversi delle singole capacità.

ENERGIA DEL CAMPO ELETTROSTATICO

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} qV$$

$$U_e = \int dU_e = \int \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \, d\tau$$

$$u_e = \frac{U_e}{\tau} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

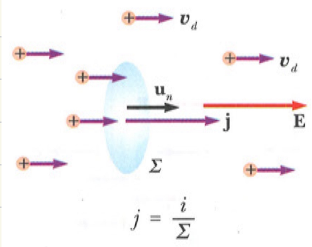
CORRENTE ELETTRICA

$\mathbf{j} = n_+ e \mathbf{v}_d$ DENSITÀ DI CORRENTE

$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$ A

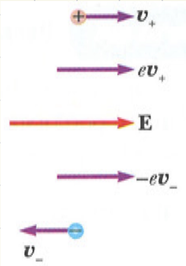
$i = \int_\Sigma \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n \, d\Sigma$ INTENSITÀ DI CORRENTE

SE LA SUPERFICIE Σ È ORTOGONALE A j E j HA LO STESSO VALORE OVUNQUE:



$$i = j\Sigma \quad , \quad j = \frac{i}{\Sigma}$$

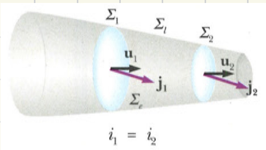
la densità di corrente è la corrente che attraversa l'unità di superficie perpendicolare alla direzione del moto delle cariche (e resta così giustificato il nome densità di corrente).



$$\mathbf{j} = -n_- e \mathbf{v}_-$$

$$\mathbf{j} = n_+ e \mathbf{v}_+ - n_- e \mathbf{v}_-$$

STAZIONARIA



$i_1 = i_2$ i COST ATTRAVERSO OGNI SEZIONE DEL CONDUTTORE

LEGGE DI OHM

$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ CONDUTTIVITÀ ELETTRICA $\rightarrow$ $\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$ $\rho = \frac{1}{\sigma}$ RESISTIVITÀ

$R = \rho \frac{h}{\Sigma}$ Ω $R = \int_A^B \rho \frac{dh}{\Sigma}$ $\longrightarrow$ $V = R\, i$ PER CONDUTTORI METALLICI

- EFFETTI TERMICI.

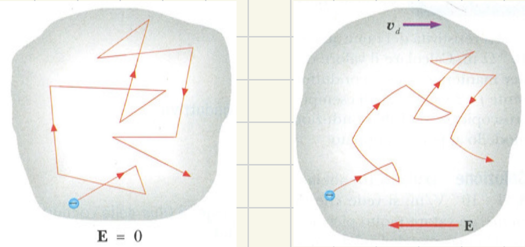
$\rho = \rho_{20}\,(1 + \alpha \Delta t)$ $\alpha = \frac{1}{\rho_{20}} \frac{\Delta \rho}{\Delta t}$ $\Delta t = t - 20$

- POTENZA ED EFFETTO JOULE:

$\mathscr{P} = \frac{dW}{dt} = V i = R i^2 = \frac{V^2}{R}$ $W = \int_0^t \mathscr{P}\, dt = \int_0^t R i^2\, dt$ $W = R i^2 t$

NEI SUPERCONDUTTORI SI PUÒ MANTENERE UNA CORRENTE ELEVATA SENZA UNA ΔV COST APPLICATA E QUINDI SENZA DISSIPAZIONE DI ENERGIA

MODELLO CLASSICO (NON ADEGUATO)



$$\tau = l/v$$

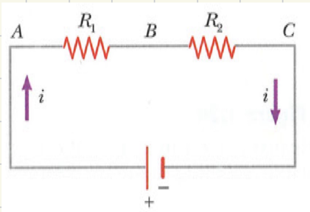
$$\boldsymbol{v}_d = -\frac{e\tau}{m}\mathbf{E}$$

τ E l TEMPO E CAMMINO LIBERO MEDIO TRA DUE URTI

$$\mathbf{j} = -n\,e\,\boldsymbol{v}_d = \frac{n\,e^2\,\tau}{m}\mathbf{E} \;\rightarrow\; \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} \qquad \sigma = \frac{n\,e^2\,\tau}{m}$$

RESISTORI

- **IN SERIE:**

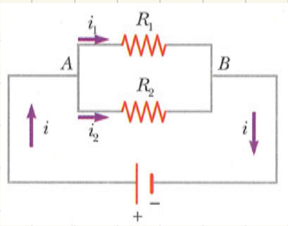


$$R_{eq} = R_1 + R_2 \qquad R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots R_n$$

in un collegamento in serie ciascun resistore è attraversato dalla stessa corrente; la resistenza equivalente è somma della resistenza dei singoli componenti.

$$\mathscr{P} = (V_A - V_C)\,i = (R_1 + R_2)\,i^2 = R_{eq}\,i^2 = \mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_2$$

- **IN PARALLELO:**



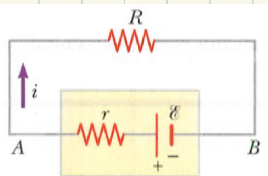
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \frac{1}{R_n}$$

in un collegamento in parallelo la differenza di potenziale è la stessa ai capi di ciascun resistore; l'inverso della resistenza equivalente è uguale alla somma degli inversi di ciascun componente.

$$i_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\,i \quad , \quad i_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\,i$$

$$\mathscr{P} = R_1\,i_1^2 + R_2\,i_2^2 = R_1\frac{V^2}{R_1^2} + R_2\frac{V^2}{R_2^2} = V^2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{V^2}{R_{eq}} = R_{eq}\,i^2$$

FORZA ELETTROMOTRICE



$$\mathscr{E} = \oint \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{l} \qquad \mathscr{E} = (r + R)\,i = R_T\,i \quad , \quad i = \frac{\mathscr{E}}{R + r}$$

$$V_A - V_B = Ri = \mathscr{E} - ri \qquad \mathscr{P} = \mathscr{E}\,i = R\,i^2 + r\,i^2 = R_T\,i^2$$

CARICA CONDENSATORE

$$q(t) = C\mathscr{E}\,(1 - e^{-t/RC})$$

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathscr{E}\,(1 - e^{-t/RC})$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathscr{E}}{R}\,e^{-t/RC}$$

$$V_R(t) = R\,i(t) = \mathscr{E}\,e^{-t/RC}\,.$$

$$W_{gen} = \int \mathscr{E}\,dq = \mathscr{E}\int_0^{q_0} dq = \mathscr{E}\,q_0 = C\,\mathscr{E}^2$$

$$\mathscr{P}_{gen} = \mathscr{P}_R(t) + \mathscr{P}_C(t)$$

SCARICA DI UN CONDENSATORE

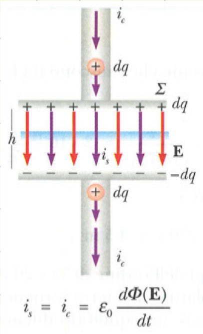
$$q(t) = q_0\, e^{-t/RC} \quad , \quad V_C(t) = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C}\, e^{-t/RC} = V_0\, e^{-t/RC}$$

$$i(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{RC}\, e^{-t/RC} = \frac{V_0}{R}\, e^{-t/RC} = \frac{V_C}{R} \,.$$

$$W_R = \int_0^\infty \mathscr{P}_R(t)\, dt = \frac{V_0^2}{R}\int_0^\infty e^{-2t/RC}\, dt = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{q_0^2}{2C}$$

$$\mathscr{P}_R(t) = R i^2 = \frac{V_0^2}{R}\, e^{-2t/RC}$$

CORRENTE DI SPOSTAMENTO



$$i_s = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CV) = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\Sigma V}{h}\right) = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}(\Sigma E) = \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\mathbf{E})}{dt}$$

PER UN CAMPO ELETTROSTATICO $i_s = 0$

l'origine della corrente i_s è la variazione nel tempo del flusso del campo elettrico attraverso la sezione del condensatore.

$$j_s = \frac{i_s}{\Sigma} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$$ DENSITÀ DI SPOSTAMENTO

$$i = i_c + \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\mathbf{E})}{dt} \qquad \mathbf{j} = \mathbf{j}_c + \varepsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt}$$

LEGGI DI KIRCHOFF

PRIMA LEGGE: LA SOMMA ALGEBRICA DELLE CORRENTI CHE CONFLUISCONO IN UN NODO È NULLA

$$\Sigma_k\, i_k = 0$$

SECONDA LEGGE: LA SOMMA ALGEBRICA DELLE F.E.M. PRESENTI NEI RAMI DELLA MAGLIA È UGUALE ALLA SOMMA ALGEBRICA DEI PRODOTTI $R_k i_k$

$$\Sigma_k\, R_k\, i_k = \Sigma_k\, \mathcal{E}_k$$

CAMPO MAGNETICO E FORZA MAGNETICA

FORZA MAGNETICA SU UNA CARICA IN MOTO

LE AZIONI MAGNETICHE SONO IL RISULTATO DELL'INTERAZIONE TRA CARICHE IN MOTO
SE LA PARTICELLA È FERMA NON AGISCONO FORZE, ALTRIMENTI:

$$\mathbf{F} = q\boldsymbol{v} \times \mathbf{B}$$

FORZA DI LORENTZ

$B \rightarrow T$ (TESLA)

F È SEMPRE ORTOGONALE A V, E QUINDI:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m v_Q^2 - \frac{1}{2} m v_P^2 = W = \int_P^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

V CAMBIA IN DIREZIONE MA NON IN MODULO

VIENE COMPIUTO LAVORO SOLO IN UN CAMPO ELETTROSTATICO:

$$W = \int_P^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -q\,(V_Q - V_P)$$

ΔE_K VARIA
V CAMBIA SIA IN DIREZIONE CHE IN MODULO

F_e PARALLELA A E, F_M ORTOGONALE A B

F_M SU UN CONDUTTORE PERCORSO DA CORRENTE

A CIASCUN ELETTRONE È APPLICATA LA FORZA DI LORENTZ: $\mathbf{F}_L = -e\,\boldsymbol{v}_d \times \mathbf{B}$

CONDUTTORE FILIFORME INDEFORMABILE E DI LUNGHEZZA FINITA:

$$d\mathbf{F} = i\, d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$$

SECONDA LEGGE ELEMENTARE DI LAPLACE

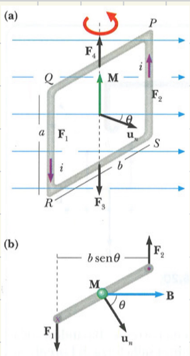
$$\rightarrow \quad \mathbf{F} = i \int_P^Q d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$$

CONDUTTORE CURVILINEO IN UN PIANO: $\mathbf{F} = i \int_P^Q d\mathbf{s} \times \mathbf{B} = i\,\mathbf{PQ} \times \mathbf{B}$

la forza su un filo percorso da corrente che giace in un piano in cui agisce un campo magnetico uniforme **B** non dipende dalla forma del filo, ma solo dalla lunghezza del segmento che unisce i suoi estremi.

CIRCUITO CHIUSO: la forza su un circuito che sta su un piano in cui agisce un campo magnetico **B** uniforme è nulla.

MOMENTI MECCANICI SU CIRCUITI PIANI



$$M = b\,\mathrm{sen}\theta\, F = i\,a\,b\,B\,\mathrm{sen}\theta = i\,\Sigma\,B\,\mathrm{sen}\theta$$

MOMENTO MECCANICO

$$\mathbf{m} = i\,\Sigma\,\mathbf{u}_n$$

MOMENTO MAGNETICO

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = i\,\Sigma\,\mathbf{u}_n \times \mathbf{B}$$

VALIDO PER CIRCUITI PIANI DI FORMA QUALUNQUE

$M = 0 \Leftrightarrow m \parallel B$

$$U_p = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = -m\,B\cos\theta = -i\,\Sigma\,B\cos\theta$$

$$M = -\frac{dU_p}{d\theta} = -m\,B\,\mathrm{sen}\theta$$

EFFETTO HALL

$$\mathbf{E}_H = \frac{\mathbf{F}}{e} = \boldsymbol{v}_d \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{ne} \times \mathbf{B}$$

CAMPO ELETTROMOTORE NON CONSERVATIVO

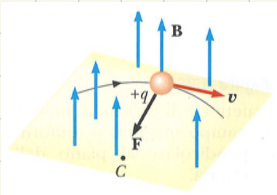
PROVOCA UNA DEFLESSIONE NEL MOTO DELLE CARICHE, AGGIUNGENDO UNA COMPONENTE PERPENDICOLARE ALLA v_d, E DI CONSEGUENZA TENDE AD ACCUMULARE CARICHE DI SEGNO OPPOSTO SULLE DUE FACCE ORTOGONALI A E_H (ASSE z). SI RAGGIUNGE SUBITO UN EQUILIBRIO IN QUANTO TALE ACCUMULO DA ORIGINE AD UN CAMPO ELETTROSTATICO E_{el} CHE SI OPPONE A UN ULTERIORE ACCUMULO: $\mathbf{E}_H + \mathbf{E}_{el} = 0$

IN EQUILIBRIO IL DISPOSITIVO SI COMPORTA COME UN GENERATORE IN CUI NON CIRCOLA CORRENTE. LA TENSIONE DI E_H È:

$$\mathscr{E}_H = E_H\, b = \frac{j\,B\,b}{n\,e} = \frac{i\,B}{n\,e\,a}$$

MOTO DI UNA PARTICELLA CARICA IN UN CAMPO MAGNETICO

$\theta = \pi/2$:



IL MOTO LUNGO LA TRAIETTORIA È CIRCOLARE UNIFORME CON:

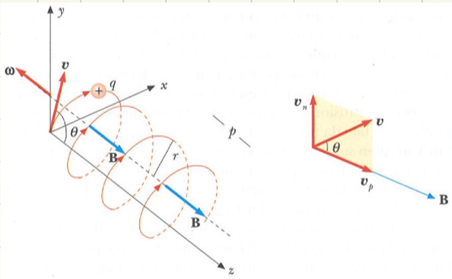
$$r = \frac{m\,v}{q\,B} = \frac{p}{q\,B}$$ RAGGIO DI CURVATURA

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{q}{m}\mathbf{B}$$ // B

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\, m}{q\,B}, \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{q\,B}{2\pi\, m}$$

$$B = \frac{m\,v}{q\,r}$$

θ GENERICO:



$$r = \frac{m\,v_n}{q\,B} = \frac{m\,v\,\mathrm{sen}\theta}{q\,B} \qquad \boldsymbol{\omega} = -\frac{q}{m}\mathbf{B}$$

ABBIAMO UN MOTO ELICOIDALE UNIFORME:

$$p = v_p\, T = \frac{2\pi\, m\, v\cos\theta}{q\,B}$$

PASSO DELL'ELICA

SORGENTI DEL CAMPO MAGNETICO, LEGGE DI AMPERE

CAMPO MAGNETICO PRODOTTO DA UNA CORRENTE

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0\, i}{4\pi}\frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\, ds}{r^2}\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_r$$

PRIMA LEGGE ELEMENTARE DI LAPLACE

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0\, i}{4\pi}\oint \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{u}_r}{r^2}$$

LEGGE DI AMPERE-LAPLACE

$$k_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \qquad \mu_0 = 4\pi\, k_m = 4\pi \cdot 10^{-7} \simeq 1.26 \cdot 10^{-6}\, \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$$

PERMEABILITÀ MAGNETICA NEL VUOTO

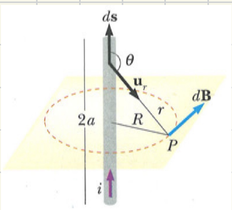
CAMPO MAGNETICO DI UNA CARICA IN MOTO

CON UNA SINGOLA CARICA: $\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\boldsymbol{v} \times \mathbf{u}_r}{r^2}$

PIÙ CARICHE NEL VOLUME $d\tau = \Sigma ds$: $d\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\boldsymbol{v} \times \mathbf{u}_r}{r^2}\, n\, d\tau$

CAMPI MAGNETICI PRODOTTI DA CIRCUITI PARTICOLARI

- **FILO RETTILINEO:**

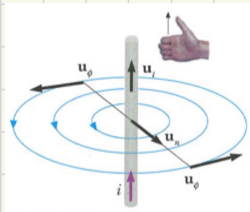


$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0\, i\, a}{2\pi R\sqrt{R^2 + a^2}}\mathbf{u}_\phi$$

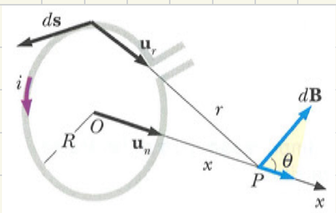
IN UN TRATTO DI FILO

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0\, i}{2\pi R}\mathbf{u}_\phi = \frac{\mu_0\, i}{2\pi R}\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_n$$

LEGGE DI BIOT-SAVART



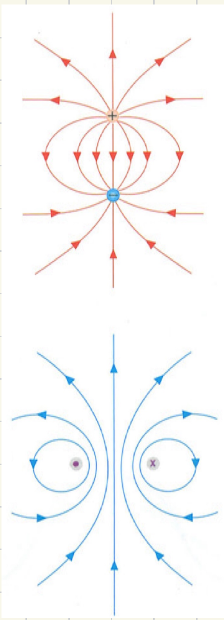
- **SPIRA CIRCOLARE:**



$$\mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0\, i\, R^2}{2r^3}\mathbf{u}_n = \frac{\mu_0\, i\, R^2}{2\,(x^2 + R^2)^{3/2}}\mathbf{u}_n$$

PER $x \to \infty$, $B \to 0$

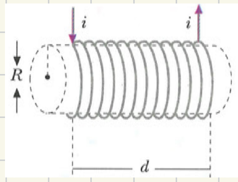
NEL CENTRO ($x=0$) IL CAMPO È MASSIMO: $\mathbf{B}_{\max} = \dfrac{\mu_0\, i}{2R}\mathbf{u}_n$

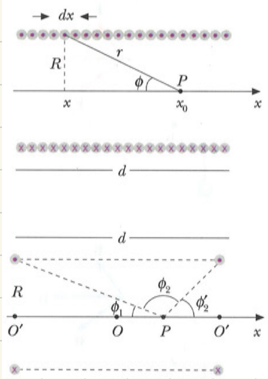


CI SONO DIFFERENZA TRA LINEE DEL CAMPO ELETTROSTATICO E LINEE DEL CAMPO MAGNETICO:

- le linee di forza del campo elettrostatico **E** escono ed entrano nelle cariche sorgenti;
- le linee del campo magnetico **B** sono linee chiuse, senza inizio e senza fine.

- SOLENOIDE RETTILINEO:





AL CENTRO DEL SOLENOIDE ABBIAMO B_{MAX}:

$$B_O = \mu_0 n i \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4R^2}}$$

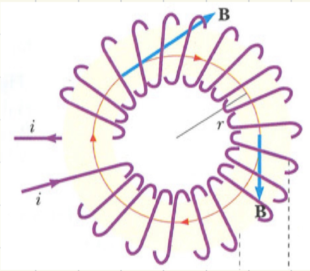
NEL CENTRO DI UNA SPIRA ESTREMA:

$$B_{O'} = \frac{\mu_0 n i}{2} \frac{d}{\sqrt{d^2 + R^2}}$$

SE $d \gg R$, DAL CENTRO O LE DUE SPIRE TERMINALI VENGONO VISTE SOTTO ANGOLI QUASI NULLI:

$$B_\infty = \mu_0 n i$$

- SOLENOIDE TOROIDALE:



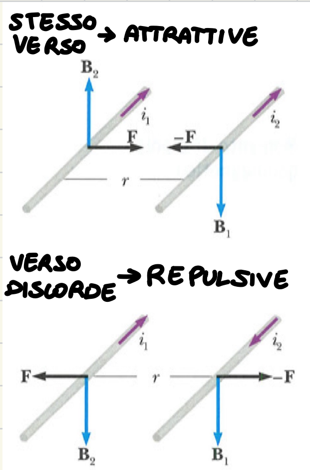
N SPIRE

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}$$

- SOLENOIDE RETTILINEO INDEFINITO:

$$B = \mu_0 n i$$

AZIONI ELETTRODINAMICHE TRA FILI PERCORSI DA CORRENTE

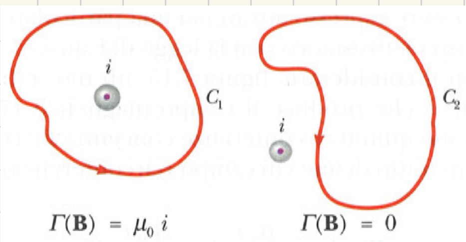


$$\left.\begin{aligned} \mathbf{F}_{1,2} &= i_2 \mathbf{u}_2 \times \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{F}_{2,1} &= i_1 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_2 \end{aligned}\right\} \quad F_{1,2} = F_{2,1} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r}$$

SE I FILI SONO PERPENDICOLARI LA F È NULLA

HA L'INTENSITÀ DI 1A QUELLA CORRENTE CHE CIRCOLANDO IN DUE FILI RETTILINEI PARALLELI DISTANTI r: 1m DA LUOGO A UNA FORZA $F = \mu_0 / 2\pi$ PER METRO DI CIASCUN CONDUTTORE

LEGGE DI AMPERE



$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i$$

l'integrale di linea del campo magnetico **B** lungo una linea chiusa, ovvero la circuitazione $\Gamma(\mathbf{B})$ è uguale alla somma delle correnti concatenate, moltiplicata per μ_0.

B NON È CONSERVATIVO E LA LEGGE DI AMPERE È VALIDA SOLO PER CORRENTI IN CONDUZIONE, DOVUTE AL MOTO DI CARICA

LEGGE DI GAUSS PER IL CAMPO MAGNETICO

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n \, d\Sigma = 0$$

il flusso del campo magnetico **B** attraverso una superficie chiusa è sempre nullo.

CAMPI ELETTRICI E MAGNETICI VARIABILI NEL TEMPO

LEGGE DI FARADAY DELL'INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

IN UNA SPIRA COMPARE UNA CORRENTE INDOTTA OGNI QUALVOLTA C'È UN MOTO RELATIVO TRA LA SPIRA E UN CAMPO MAGNETICO B QUINDI, DA QUESTO MOTO HA ORIGINE UNA F.E.M. INDOTTA.

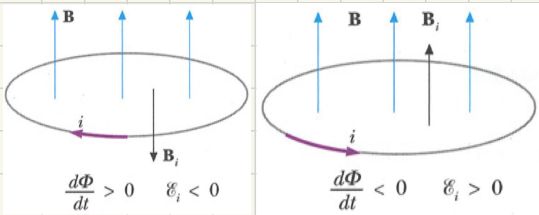
$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \rightarrow i = \frac{\mathscr{E}_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$$

ogni qualvolta il flusso del campo magnetico $\Phi(\mathbf{B})$ concatenato con un circuito varia nel tempo si ha nel circuito una forza elettromotrice indotta data dall'opposto della derivata del flusso nel tempo.

$$\mathscr{E}_i = \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$$

CAMPO ELETTRICO INDOTTO

LEGGE DI LENZ



l'effetto della forza elettromotrice indotta è sempre tale da opporsi alla causa che l'ha generata; pertanto la forza elettromotrice che si manifesta nel circuito è tale da produrre una corrente indotta i cui effetti magnetici si oppongono alle variazioni del flusso $\Phi(\mathbf{B})$ concatenato con il circuito stesso.

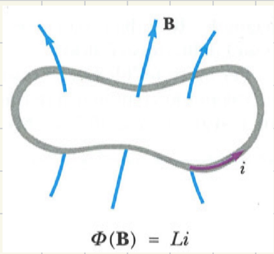
LEGGE DI FELICI

$$q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)\, dt = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$$

$$B = \frac{q R}{N\Sigma}$$

N SPIRE DI AREA Σ

AUTOINDUZIONE



B E Φ(B) SONO PROPORZIONALI ALLA CORRENTE, QUINDI:

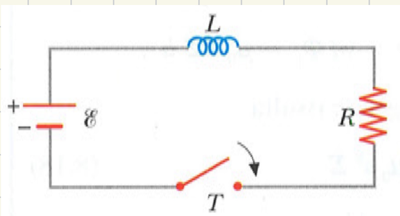
$$\Phi = Li$$

AUTOFLUSSO

L INDUTTANZA (H), COSTANTE SE IL CIRCUITO È INDEFORMABILE.

SE LA i NEL CIRCUITO VARIA NEL TEMPO, VARIA ANCHE IL FLUSSO CONCATENATO, E COMPARE UNA F.E.M. INDOTTA (AUTOINDUZIONE)

$$\mathscr{E}_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$



$$\mathscr{E} + \mathscr{E}_L = R\,i \Rightarrow \mathscr{E} = L\frac{di}{dt} + R\,i$$

ENERGIA MAGNETICA

$$U_L = \frac{1}{2} L i^2$$ ENERGIA INTRINSECA DELLA CORRENTE

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \frac{1}{2} HB$$ DENSITÀ DI ENERGIA MAGNETICA

$$U_m = \int_\tau \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$ ENERGIA MAGNETICA

INDUZIONE MUTUA

$$\Phi_{1,2} = M i_1 \quad , \quad \Phi_{2,1} = M i_2$$

$$\mathscr{E}'_1 = -\frac{d\Phi_{2,1}}{dt} = -M\frac{d i_2}{dt} \quad , \quad \mathscr{E}'_2 = -\frac{d\Phi_{1,2}}{dt} = -M\frac{d i_1}{dt}$$

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$ ENERGIA MAGNETICA DI DUE CIRCUITI ACCOPPIATI

LEGGE DI AMPERE-MAXWELL

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \left(i_c + \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\mathbf{E})}{dt} \right)$$

i campi magnetici sono prodotti sia dalle correnti di conduzioni che da variazioni temporali del campo elettrico.

LE EQUAZIONI DI MAXWELL

TABELLA 8.1 Le equazioni di Maxwell nel vuoto

	Forma integrale	Forma differenziale
Legge di Gauss	$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
Legge di Faraday	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
Legge di Gauss	$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Legge di Ampère-Maxwell	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \left(i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\mathbf{E})}{dt} \right)$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(j + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$

NELLO SPAZIO VUOTO CON $q = i = 0$:

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 0 \quad , \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} ,$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 0 \quad , \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi(\mathbf{E})}{dt}$$

CONSERVAZIONE QUANTITÀ DI CARICA

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$ EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

$$i = \oint \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = -\frac{\partial q_{int}}{\partial t}$$ TEOREMA DI CONSERVAZIONE

SE ρ E q NON VARIANO NEL TEMPO: $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ $\quad i = \oint \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 0$

in ogni istante la carica che entra attraverso una superficie chiusa è pari a quella che esce.

ONDE ELETTROMAGNETICHE

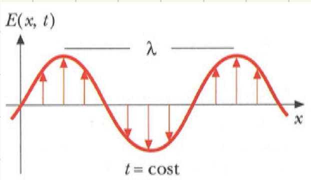
UN ONDA È UNA QUALSIASI PERTURBAZIONE, IMPULSIVA O PERIODICA, CHE SI PROPAGA CON UNA VELOCITÀ BEN DEFINITA, PARTENDO DA UNA SORGENTE. HANNO BISOGNO DI UN MEZZO MATERIALE PER PROPAGARSI, E TRASPORTANO ENERGIA.

UN ONDA PIANA È UNIDIMENSIONALE:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

EQUAZIONI DI D'ALEMBERT

ONDE PIANE ARMONICHE



$$E(x,t) = E_0 \operatorname{sen} k(x - v\,t) \quad \text{oppure} \quad E(x,t) = E_0 \cos k(x - v\,t)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \left(\Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}\right) \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \lambda = v\,T \qquad \lambda\nu = v$$

ONDE ELETTROMAGNETICHE PIANE

$$\mathbf{E}(x,t) = E_{0y}\cos(kx - \omega t)\mathbf{u}_y + E_{0z}\cos(kx - \omega t)\mathbf{u}_z \qquad \mathbf{B}(x,t) = -\frac{E_{0z}}{c}\cos(kx - \omega t)\mathbf{u}_y + \frac{E_{0y}}{c}\cos(kx - \omega t)\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = E_y B_y + E_z B_z = -\frac{E_{0y}E_{0z}}{c} + \frac{E_{0z}E_{0y}}{c} = 0 \qquad \mathbf{E}\times\mathbf{B} = \frac{1}{c}(E_y^2 + E_z^2)\mathbf{u}_x = \frac{E^2}{c}\mathbf{u}_x = cB^2\mathbf{u}_x = EB\mathbf{u}_x \qquad B = \frac{E}{c}$$

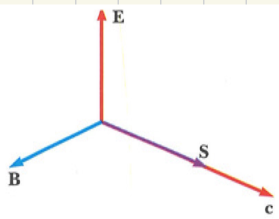
- **E** e **B** si propagano con la stessa velocità $c = \sqrt{1/\varepsilon_0\,\mu_0} = 3\cdot 10^8$ m/s;
- i moduli dei campi sono legati dalla relazione di proporzionalità $B = E/c$;
- **E** e **B** sono ortogonali tra loro e alla direzione di propagazione: le onde elettromagnetiche sono onde **trasversali** e per esse è significativo il concetto di **polarizzazione**;
- il verso del prodotto vettoriale **E** × **B** definisce il verso di propagazione dato da **c**;
- le onde elettromagnetiche obbediscono al **principio di sovrapposizione**; è questa una proprietà generale che dipende dal fatto che nelle equazioni di Maxwell i campi **E** e **B** compaiono in forma lineare (alla prima potenza).

ENERGIA DI UN'ONDA ELETTROMAGNETICA PIANA

$$u = 2\,u_e = \varepsilon_0 E^2$$

DENSITÀ DI ENERGIA

DOVUTA PER METÀ AL CAMPO ELETTRICO E METÀ AL CAMPO MAGNETICO

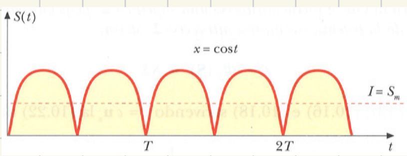


$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 E B \mathbf{u} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$$

VETTORE DI POYNTING

$$I = S_m = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 = \varepsilon_0 c E_{\text{eff}}^2$$

INTENSITÀ DELL'ONDA ELETTROMAGNETICA PIANA



- l'intensità di un'onda elettromagnetica piana è la potenza media per unità di superficie trasportata dall'onda,
- l'intensità è data dal prodotto della densità d'energia media per la velocità di propagazione c.