

Fondamenti di Comunicazioni

Corso: Fondamenti di comunicazioni e Internet (canale I e II)
E Telecomunicazioni

Lezione 3: Valore medio, energia, potenza

Tiziana Cattai
email: tiziana.cattai@uniroma1.it



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Esempio di operazioni sui segnali e simmetria

$$x(t) = \text{tri}[(t+3)/2] - \text{tri}[(t-3)/2]$$

Esempi di operazioni su sequenze

- $z_n = \sum_{k=1}^3 \delta_{n+k}$
- $z_n = \sum_{k=1}^3 k \delta_{n+2k}$

Esempi di operazioni su sequenze

- $z_n = \sum_{k=1}^3 \delta_{n+k}$
- $z_n = \sum_{k=1}^3 k\delta_{n+2k}$

Operazioni sulle sequenze

Decimazione

- $x_n = \sum_{k=1}^{10} k\delta_{n-k}$
- $z_n = x_{3n}$

Valore medio di un segnale e di una sequenza

Segnale a durata finita

Il valore medio di un segnale continuo $x(t)$ è calcolato come l'integrale del segnale diviso per la sua durata totale $T=b-a$:

- $$\mu_x^I = \frac{1}{T} \int_a^b x(t) dt$$

Definizione analoga per una sequenza:

- $$\mu_x^I = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n$$

Segnale a durata infinita

- $$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

- Definizione analoga per una sequenza

- $$\mu_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{-N}^N x_n$$

Valore medio di un segnale: esempi

- $x(t) = c$
- $x(t) = A \sin(2\pi f t)$

Valore medio di un segnale: esempi

- $x(t) = c$
- $x(t) = A \sin(2\pi f t)$
- $x_n = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $x(t) = \text{rect}(\frac{t}{2})$ nell'intervallo $I=[-1,1]$
- $x(t) = \text{rect}(t)$ nell'intervallo $I=[-1,1]$

Qual è il valore medio?

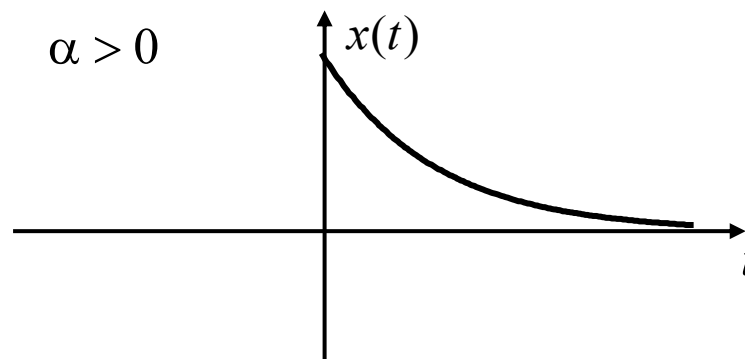
- a) 0
- b) 1
- c) $\frac{1}{2}$

Energia di un segnale

- Definition: $\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \geq 0$ $\varepsilon_x = \sum_n |x_n|^2$
- Definition: **Energy signal:** $0 < \mathcal{E}_x < +\infty$
- Definition: **Impulsive signal** $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$

Energia di un segnale: esempio di calcolo

$$x(t) = Ae^{-\alpha t} u_{-1}(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

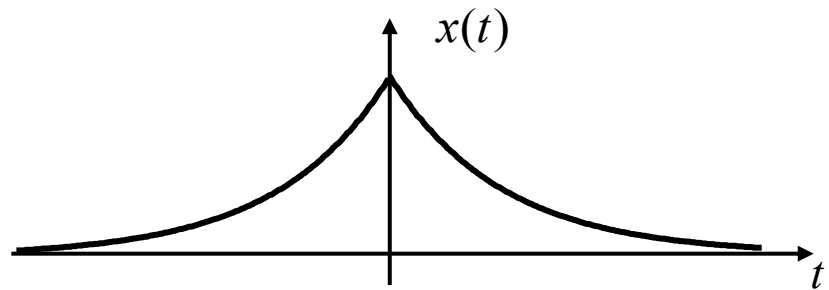


$$\mathcal{E}_x = \int_0^{+\infty} (Ae^{-\alpha t})^2 dt = A^2 \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha t} dt = \frac{A^2}{-2\alpha} e^{-2\alpha t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{A^2}{2\alpha} \rightarrow \text{Segnale di energia}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = \int_0^{+\infty} Ae^{-\alpha t} dt = \frac{A}{-\alpha} e^{-\alpha t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{A}{\alpha} \rightarrow \text{Segnale Impulsivo}$$

Energia di un segnale: esempio di calcolo

$$x(t) = Ae^{-\alpha|t|}, \quad \alpha > 0$$



$$\mathcal{E}_x = \frac{A^2}{\alpha}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = \frac{2A}{\alpha} \rightarrow \text{Segnale impulsivo e di energia}$$

Energia di un segnale: esempio di calcolo

- Calcolare l'energia di $x(t) = \text{rect}(t)$
- Calcolare l'energia di $x(t) = \text{tri}(t)$

Energia di un segnale: esempio di calcolo

- Calcolare l'energia di $z(t) = \text{rect}(t - 3) + 2\text{rect}(\frac{t}{2} - 1)$

Energia di un segnale: esempio di calcolo

- Calcolare l'energia di $z_n = \sum_{k=1}^3 k\delta_{n-3k}$

Potenza di un segnale

✓ Def:
$$P_x = \lim_{\Delta t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} |x(t)|^2 dt \geq 0$$

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^N |x_n|^2$$

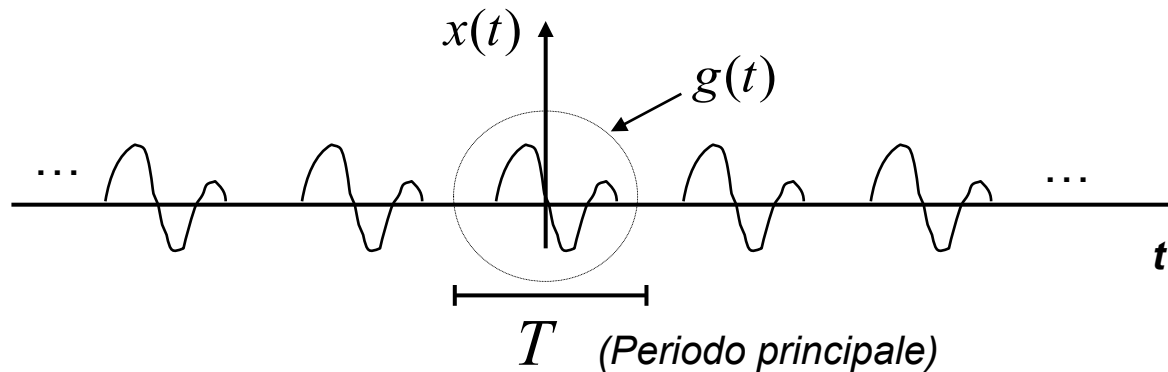
✓ Def: Power signal $0 < P_x < +\infty$

Constant: $x(t) = c$

$$P_x = \lim_{\Delta t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} |c|^2 dt = |c|^2 \lim_{\Delta t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Delta t} \Delta t = |c|^2$$

Segnale periodico

$$x(t) = x(t + nT) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \rightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t - nT) \quad T \equiv \text{periodo}$$



- ✓ Potenza di un segnale periodico

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

- ✓ Un segnale periodico è un segnale di potenza

Esempio di calcolo della Potenza di un segnale

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi), \quad T = 1/f_0$$

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi) dt = \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2} [1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi)] dt = \\ &= \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2} dt + \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi) dt = \\ &= \frac{A^2}{2T} \left(\frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right) + 0 \quad (\text{il coseno ha area nulla}) = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

Energia e Potenza: esempio di calcolo

- Calcolare l'energia di $z_n = \sum_{k=1}^3 k\delta_{n-3k}$
- Supponi sia periodico con periodo $T = 10$. Quanto vale la potenza?

Esempio codice matlab

```
main_SWSS_epanet_nodemand_01.m x example_energy_power.m x +
1      clc
2      close all
3      clear
4
5      % Definizione del segnale
6      n = 0:100; % Intervallo di campionamento da 0 a 100
7      x = sin(0.1*pi*n); % Esempio di un segnale sinusoidale discreto
8
9      % Calcolo dell'energia
10     E = sum(abs(x).^2); % Calcolo dell'energia utilizzando una sommatoria
11
12     % Calcolo della potenza
13     N = length(x); % Lunghezza del segnale
14     % DA implementare
15     %%%
16
17     % Visualizzazione dei risultati
18     fprintf('Energia del segnale: %.4f\n', E);
19     fprintf('Potenza del segnale: %.4f\n', P);
20
21     % Plot del segnale
22     subplot(2, 1, 1);
23     stem(n, x);
```

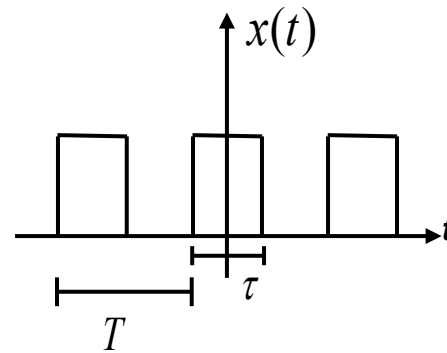
Command Window

Segnali periodici

Treno di “impulsi” rettangolari:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \text{rect}_{\tau}(t - nT)$$

$$\tau / T \equiv \text{"duty cycle"} \leq 1$$



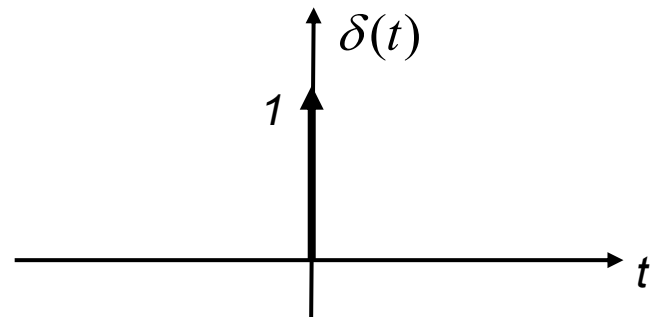
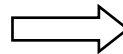
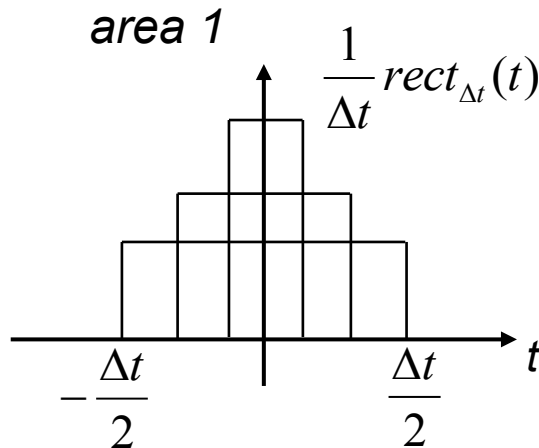
$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [\text{rect}_{\tau}(t - nT)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1^2 dt = \frac{1}{T} \left(\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2} \right) = \frac{\tau}{T}$$

Impulso matematico

- ✓ E' un segnale di durata brevissima (al limite, zero) e di ampiezza elevatissima (al limite, infinita) con integrale unitario in un intervallo comprendente l'origine unitario

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{\Delta t} \text{rect}_{\Delta t}(t)}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$



Proprietà dell'impulso matematico

✓ $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ (l'impulso matematico ha area unitaria)

✓ $\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t - t_0) dt = 1,$ per ogni $\varepsilon > 0$

✓ $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$ (proprietà di campionamento)

Impulso matematico: esempio

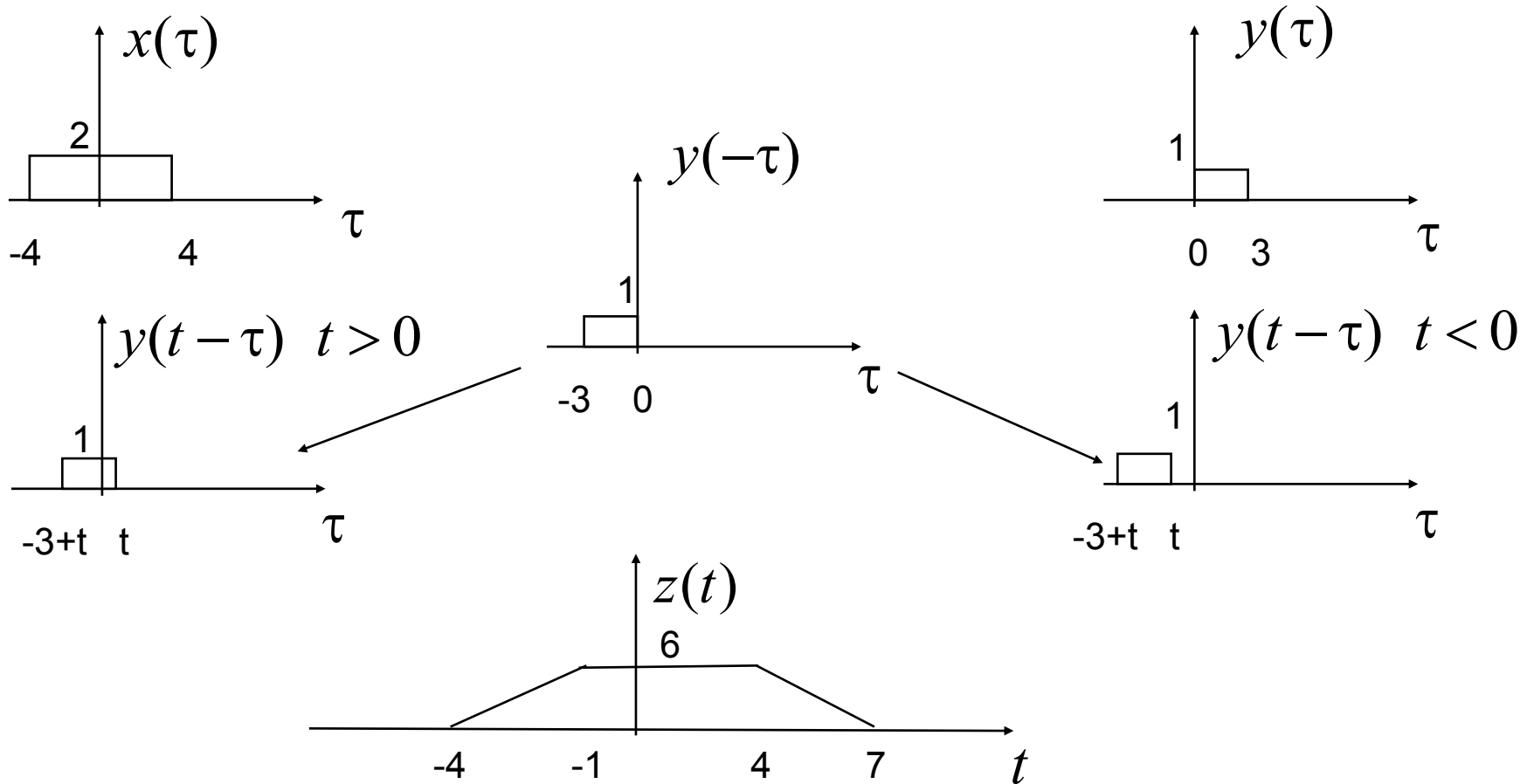
- Calcolare $\int rect(t)\delta(t - 1)$
- Calcolare $\int 2rect(t)\delta(t - 1/4)$
- Calcolare $\int tri(t)\delta(t)$
- Calcolare $\int tri(t)\delta(t + 1/4)$

Convoluzione: Definizione e calcolo

✓ Def:
$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$
$$z_n = \sum_k x_k y_{n-k}$$

1. Graficare i due segnali $x(\cdot)$ e $y(\cdot)$ come funzioni di τ ottenendo così $x(\tau)$ ed $y(\tau)$
2. Ribaltare il segnale $y(\tau)$ rispetto all'asse delle ordinate ottenendo $y(-\tau)$
3. Traslare $y(-\tau)$ della quantità t lungo l'asse τ . Quando $t > 0$ allora $y(t-\tau)$ va traslato di t verso destra. Quando invece $t < 0$, $h(-\tau)$ va traslata di t verso sinistra
4. Per ogni valore di $\tau \in (-\infty, +\infty)$ si calcola il prodotto $x(\tau)y(t-\tau)$
5. Si integra rispetto a τ la funzione $x(\tau)y(t-\tau)$ e cioè si calcola l'area sottesa dalla funzione $x(\tau)y(t-\tau)$. La suddetta area è proprio il valore $z(t)$ assunto dalla convoluzione all'istante t .

Convoluzione: Esempio di calcolo



Convoluzione: Proprietà

- ✓ L'operazione di convoluzione è commutativa, ossia

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

- ✓ L'operazione di convoluzione è associativa, cioè

$$[x(t) * y(t)] * z(t) = x(t) * [y(t) * z(t)]$$

- ✓ L'operazione di convoluzione è distributiva rispetto alla somma di segnali

$$[x(t) + z(t)] * y(t) = [x(t) * y(t)] + [y(t) * z(t)]$$

- ✓ La convoluzione di $x(t)$ con $\delta(t - t_0)$ trasla $x(t)$ di t_0 , ossia

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

- ✓ Dati due segnali $x(t)$, $y(t)$ di durata Δ_x e Δ_y , la convoluzione dei due segnali ha durata

$$\Delta_x + \Delta_y$$