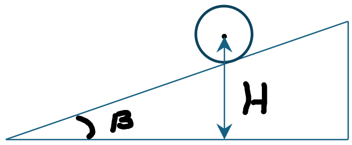
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Informatica e Automatica
Proff Massimo Petrarca e Marco Toppi
FISICA 5.6.2024

Si ricorda di svolgere i conti tutti in forma analitica verificando lo studio dimensionale; solo alla fine inserire i numeri dove richiesto.

Esercizio 1

Un anello di massa m=0.5 kg e raggio R=20 cm, rotola senza strisciare su di un piano inclinato di un angolo ß=30 gradi. Il corpo parte da fermo. Determinare l'accelerazione del corpo e la legge oraria in forma analitica. Determinare, usando il teorema di conservazione dell'energia meccanica, la velocità del centro di massa del corpo in fondo al piano inclinato sapendo che è partito da un'altezza del centro di massa pari a H=3 m. Determinare poi, il massimo angolo ß di inclinazione oltre il quale il corpo comincia a scivolare (si trascuri l'attrito volvente), sapendo che il coefficiente di attrito è μ=0,3.

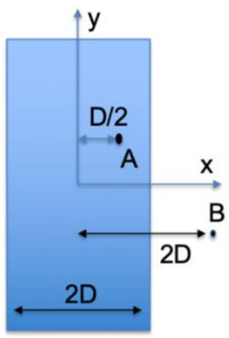


Esercizio 2

Un gas alla pressione atmosferica P_0 è contenuto in un cilindro con pistone termicamente isolato e di massa trascurabile, di volume V_i=5 L. Dentro il recipiente ci sono alcuni grammi di ghiaccio alla temperatura di 0 °C che lentamente si sciolgono. Si nota che il pistone si abbassa e il sistema raggiunge l'equilibrio quando si è sciolto m_s= 1 gr di ghiaccio e il volume del gas è diminuito trovandosi ora a V_f= 3.7 L. Quanto calore assorbe il ghiaccio? Quanto è il lavoro compiuto dall'esterno sul gas? Di quanto è variata l'energia interna del gas?

Esercizio 3

Uno strato piano indefinito di spessore 2D è uniformemente carico con densità di carica per unità di volume ρ. In un punto B esterno allo strato il campo elettrico è pari a E_B=100V/m. Ricavare il valore del campo elettrico nel punto A a distanza D/2 dal centro dello strato.

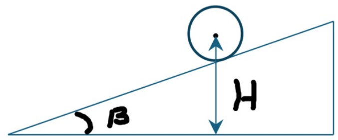


Esercizio 4

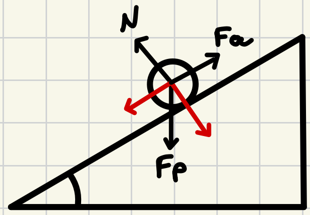
Si consideri un lungo conduttore cilindrico di raggio d=5 cm in cui scorra una corrente I, con direzione parallela all'asse del cilindro in ogni punto del conduttore. Supponendo che la corrente fluisca nel conduttore con densità di corrente eguale in modulo a $J=J_0(r/d)$, con J_0=1kA/m^2 e r distanza dall'asse del cilindro, ricavare il campo magnetico B in tutto lo spazio e calcolarne il valore massimo.

Esercizio 1

Un anello di massa m=0.5 kg e raggio R=20 cm, rotola senza strisciare su di un piano inclinato di un angolo ß=30 gradi. Il corpo parte da fermo. Determinare l'accelerazione del corpo e la legge oraria in forma analitica. Determinare, usando il teorema di conservazione dell'energia meccanica, la velocità del centro di massa del corpo in fondo al piano inclinato sapendo che è partito da un'altezza del centro di massa pari a H=3 m. Determinare poi, il massimo angolo ß di inclinazione oltre il quale il corpo comincia a scivolare (si trascuri l'attrito volvente), sapendo che il coefficiente di attrito è μ=0,3.



TRASLATORIO	ROTATORIO
m	I
F	M
v	ω
$P = mv$	$L = I\omega$
$F = ma$	$M = I\alpha$
$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$



a)

$$I_{ANELLO} = mR^2 \qquad F_{TOT} = ma \rightarrow M_{TOT} = I\alpha \rightarrow F_a R = I\frac{a}{R} \Rightarrow F_a = I\frac{a}{R^2}$$

$$mg\sin\beta - F_a = ma \rightarrow mg\sin\beta - I\frac{a}{R^2} = ma \rightarrow a = \frac{g\sin\beta}{2} = 2.45\ m/s^2$$

$$\begin{cases} mg\sin\beta - F_a = ma \\ N - mg\cos\beta = 0 \end{cases}$$

b)

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgR$$

$$mgh - \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv^2 - mgR = 0$$

$$v^2 = -gR + gh \rightarrow v = \sqrt{g(h-R)} = 16,4\ m/s$$

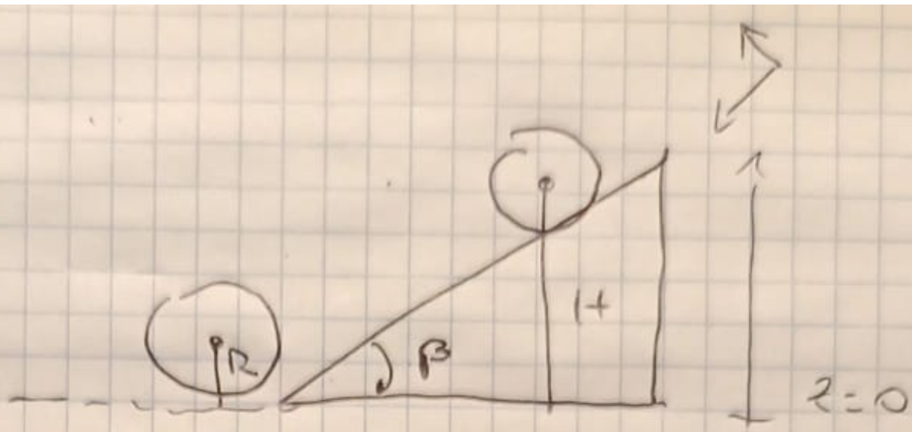
c)

$$F_A = \mu N = \mu mg\cos\beta$$

SCIVOLA QUANDO $F_{P//} > F_A \rightarrow mg\sin\beta > \mu mg\cos\beta$

$$\tan\beta > \mu = 0.3$$

Ex 1



$$\vec{M}^{(e)} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\vec{F}^{(e)} = M\vec{a}_{cm}$$

$$I_{cm} = mR^2$$

Polo in A:

$$M^{(e)} = mgR\sin\beta = I\alpha$$

$$mg\sin\beta - f_t = m a_{cm}$$

$$-mg\cos\beta + N = 0$$

$\Rightarrow$ $mgR\sin\beta = 2maR$ $\qquad a = \frac{g\sin\beta}{2}$

$$f_t = -mg\frac{\sin\beta}{2} \qquad N = mg\cos\beta$$

$$\frac{|f_t|}{N} = \frac{\tan\beta}{2} \leq \mu \qquad \tan\beta \leq 2\mu = 0.6$$

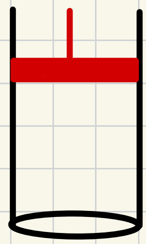
$\Rightarrow$ $U_i + K_i = U_f + K_f$ $\qquad mgh = mgR + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

$U(0) = 0$ quando l'anello è arrivato in basso ovvero per $z=0$ ma $z_{cm} = R$.

Esercizio 2

Un gas alla pressione atmosferica P_0 è contenuto in un cilindro con pistone termicamente isolato e di massa trascurabile, di volume V_i=5 L. Dentro il recipiente ci sono alcuni grammi di ghiaccio alla temperatura di 0 °C che lentamente si sciolgono. Si nota che il pistone si abbassa e il sistema raggiunge l'equilibrio quando si è sciolto m_s= 1 gr di ghiaccio e il volume del gas è diminuito trovandosi ora a V_f= 3.7 L. Quanto calore assorbe il ghiaccio? Quanto è il lavoro compiuto dall'esterno sul gas? Di quanto è variata l'energia interna del gas?

$P_0 = 1.013 \cdot 10^5 \ PA$



$Q_{ASS} = m_s \lambda = 1 \cdot 10^{-3} \ kg \cdot 3.3 \cdot 10^5 \ J/kg = 3.3 \cdot 10^2 \ J$

$V_i = 5L = 5 \ dm^3 = 5 \cdot 10^{-3} \ m^3$

$V_f = 3,7 \ L = 3,7 \cdot 10^{-3} m^3$

$W = 1,013 \cdot 10^5 (-1,3 \cdot 10^{-3}) = -1.32 \cdot 10^2 \ J = -132 \ J$

$\Delta U = Q - W = -3.3 \cdot 10^2 + 1,32 \cdot 10^2 \ J = -200 \ J$

Ex 2:

$$\Delta U_{gas} = Q - L$$

$Q_c = -\lambda m_f = -79,6$ calorie $= -79,6 \cdot 4.18 = -333$ J

metto il segno meno perché è ceduto dal gas

$Q_{ass.\ ghiaccio} = |Q_c|$ ed è (+) per il ghiaccio.

Dall'esterno viene compiuto un lavoro sul gas:

$L = -P_0(V_i - V_f) = -P_0 \cdot 1.3 L = -132$ J

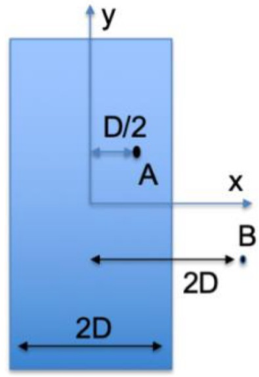
$(\Delta V < 0)$

Quindi per il gas

$$\Delta U_{gas} = Q - L = -333 - (-132) = 201 \text{ J}$$

Esercizio 3

Uno strato piano indefinito di spessore 2D è uniformemente carico con densità di carica per unità di volume ρ. In un punto B esterno allo strato il campo elettrico è pari a E_B=100V/m. Ricavare il valore del campo elettrico nel punto A a distanza D/2 dal centro dello strato.

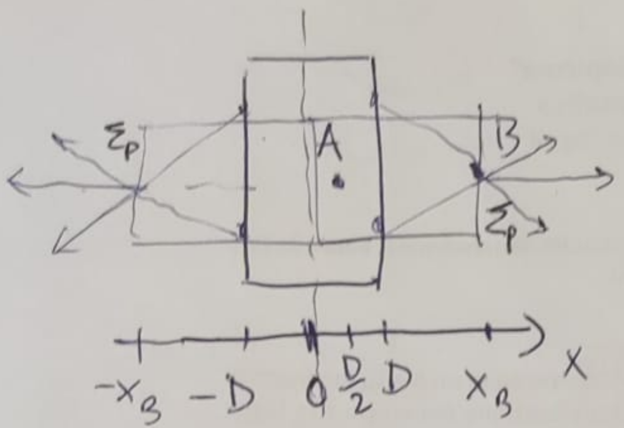


UTILIZZIAMO UN PARALLELEPIPEDO A FACCE PARALLELE:

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{PARAL} \vec{E}\, d\Sigma = 2E_B \Sigma_p = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow 2E_B \Sigma_p = \frac{\rho \Sigma_p 2D}{\varepsilon_0} \rightarrow E_B = \frac{\rho D}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi(\vec{E}) = \int_p \vec{E}\, d\Sigma = 2E_A \Sigma_p = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow 2E_A \Sigma_p = \frac{\rho \Sigma_p 2\frac{D}{2}}{\varepsilon_0} \rightarrow E_A = \frac{\rho D}{2\varepsilon_0} = \frac{E_B}{2} = 50 \frac{V}{m}$$

ESERCIZIO 3



Per simmetria il campo $\vec{E}$ sarà diretto come $\hat{u}_x$ per $x>0$ e come $-\hat{u}_x$ per $x<0$ e avrà stesso valore su piani $x = \text{cost}$ (paralleli al piano yz)

Uso Gauss prendendo ad esempio un parallelepipedo con facce parallele al piano yz in $\pm x_B$ di superficie Σ_P

$$\phi(\vec{E}) = \int_{\text{PARALLELEP.}} \vec{E}\cdot\hat{u}_n\, d\Sigma = 2E_B\Sigma_P = \frac{\rho\,\Sigma_P\, 2D}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

[CONTRIBUTI NON NULLI SOLO PER IL FLUSSO ATTRAVERSO LE 2 FACCE IN x_B E $-x_B$]

$$\Rightarrow E_B = \frac{\rho D}{\varepsilon_0}$$

Faccio lo stesso per un parallelepipedo passante in $\pm x_A$

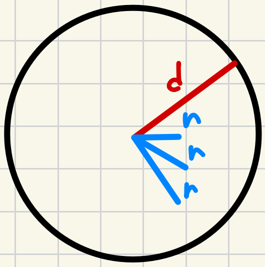
$$\phi(E) = \int_{\text{PARALLELEP.}} \vec{E}\cdot\hat{u}_n\, d\Sigma = 2E_A\Sigma_P = \frac{\rho\,\Sigma_P}{\varepsilon_0} 2x_A =$$

$$= \frac{\rho\,\Sigma_P}{\varepsilon_0} 2\frac{D}{2} = \frac{\rho\,\Sigma_P D}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_A = \frac{\rho D}{2\varepsilon_0} = \frac{E_B}{2} = \frac{100\,\text{V/m}}{2} = 50\,\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Esercizio 4

Si consideri un lungo conduttore cilindrico di raggio d=5 cm in cui scorra una corrente I, con direzione parallela all'asse del cilindro in ogni punto del conduttore. Supponendo che la corrente fluisca nel conduttore con densità di corrente eguale in modulo a $J=J_0(r/d)$, con $J_0=1 kA/m^2$ e r distanza dall'asse del cilindro, ricavare il campo magnetico B in tutto lo spazio e calcolarne il valore massimo.



$r>d$

$$\Phi B = \oint \vec{B}\,\vec{ds} = \mu_0 I \rightarrow B(r)\cdot 2\pi r = \mu_0 \int J_0\left(\frac{r}{d}\right) d\Sigma = \frac{\mu_0 J_0}{d}\int_0^d r\, 2\pi r\, dr$$

$$= \frac{2\pi\mu_0 J_0}{d}\int_0^d r^2 dr = \frac{2\pi\mu_0 J_0}{d}\cdot\frac{d^3}{3} = \frac{2\pi\mu_0 J_0 d^2}{3}$$

$$\rightarrow B(r)\cdot 2\pi r = \frac{2\pi\mu_0 J_0 d^2}{3} \rightarrow B(r) = \mu_0 J_0\cdot\frac{d^2}{3r}$$

$r<d$

$$\Phi B = \oint \vec{B}\,\vec{ds} = \mu_0 I \rightarrow B(r)\cdot 2\pi r = \mu_0 \int J_0\left(\frac{R}{d}\right) d\Sigma = \frac{\mu_0 J_0}{d}\int_0^r R\, 2\pi R\, dR =$$

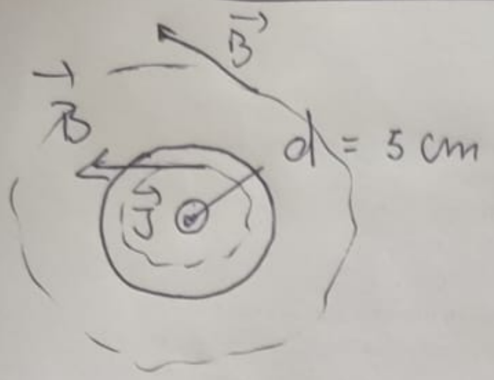
$$= \frac{2\pi\mu_0 J_0}{d}\cdot\frac{r^3}{3} = 2\pi\frac{\mu_0 J_0}{d}\cdot\frac{r^3}{3}$$

$$\rightarrow B(r)\cdot 2\pi r = 2\pi\frac{\mu_0 J_0}{d}\cdot\frac{r^3}{3} \rightarrow B(r) = \mu_0 J_0\frac{r^2}{3d}$$

$r=d$

$$B_{MAX} = \mu_0 J_0\cdot\frac{d}{3}$$

ESERCIZIO 4



Calcola il campo $\vec{B}$ usando la legge di Ampere dentro e fuori il conduttore:

- $r > d$ $\quad \Gamma(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma$

$$\Rightarrow B\, 2\pi r = \mu_0 \int J_0 \left(\frac{r}{d}\right) d\Sigma =$$

$$= \frac{\mu_0 J_0}{d} \int_0^d r \; 2\pi r \, dr = \frac{2\pi \mu_0 J_0}{d} \int_0^d r^2 dr =$$

$$= \frac{2\pi \mu_0 J_0}{d} \frac{d^3}{3} \Rightarrow \boxed{B = \mu_0 J_0 \frac{d^2}{3r}}$$

- $r < d$ $\quad \Gamma(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma$.

$$\Rightarrow B\, 2\pi r = \mu_0 \int_0^r J_0 \left(\frac{r'}{d}\right)(2\pi r' dr') =$$

$$= \frac{\mu_0 J_0}{d} 2\pi \frac{r^3}{3} \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 J_0}{d} \frac{r^2}{3}}$$

$$\boxed{B_{MAX} = B(r = d) = \frac{\mu_0 J_0 d}{3}}$$