Appunti di

ELETTRONICA

INDICE

INTRODUZIONE

- STORIA DELL'ELETTRONICA:

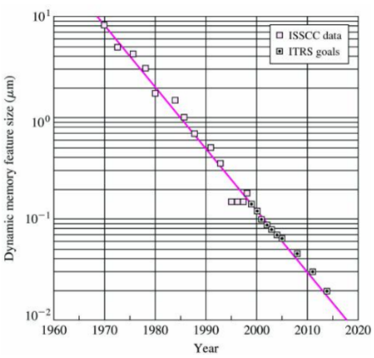
Tra gli eventi fondamentali della storia dell'elettronica troviamo:

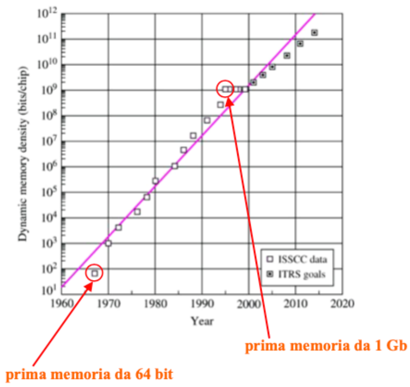
- invenzione del transistor bipolare a giunzione nel 1947;
- invenzione del circuito integrato nel 1958.

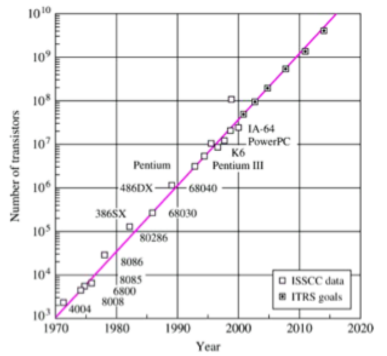
La tecnologia dei circuiti integrati ha reso possibile la miniaturizzazione dei circuiti elettronici permettendo di ottenere numerosi vantaggi: migliori prestazioni, maggiore affidabilità e minori costi di produzione.
Le Leggi di Moore hanno dato una previsione precisa dello sviluppo dell'elettronica e possono essere riassunte in:

	Legge	2004
Area IC	1.5x ogni 3 anni	6.5 cm^2
Minima dim.	-30% ogni 3 anni	0.13 μm
Trans/IC	2x ogni 1.5 anni	4Gb Dram
CK fr	1.5x ogni 3 anni	1GHz micro
Costo/tran	-50% ogni 3 anni	0.01 cent
Fab costo	2.3x ogni 3 anni	8B

Ad esempio, la prima legge di Moore è:
"La complessità di un microcircuito, misurata ad esempio tramite il numero di transistor per chip, raddoppia ogni 18 mesi (e quadruplica quindi ogni 3 anni)."
che è identificata dalla terza riga nell'immagine.
La dimensione caratteristica nei chip di memoria dinamica (sinistra), l'aumento della densità di un chip di memoria (centro) e l'aumento di complessità del microprocessore (destra) sono illustrati dai seguenti grafici (in funzione del tempo):



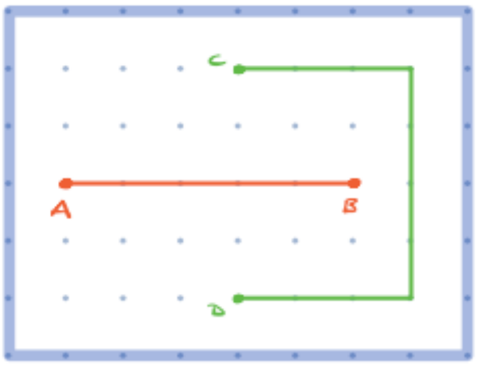




- Importanza di ridurre le dimensioni:

Ridurre le dimensioni permette di incrementare il numero transistor per unità di area ed inoltre riduce le capacità parassite.
Ad esempio, i transistor sono dei dispositivi con tre terminali, che devono essere collegati tra loro attraverso connessioni planari. Se in un dispositivo è presente un miliardo di transistor significa che ci sono tre miliardi di nodi che devono essere collegati tra loro in forma planare.

Un collegamento in forma planare è del tipo:



dove i collegamenti non possono incrociarsi tra loro.
Dovendo però collegare milioni di nodi, è impossibile non creare degli incroci; quindi, si progetta il circuito a strati, ovvero si creano dei collegamenti su livelli diversi separati da un isolante:

Quindi le due piste (verde e arancione) non si connettono tra loro. Maggiore sarà la complessità del circuito e maggiore sarà il numero di livelli.
Creando però questi livelli, in sostanza si vanno a creare dei condensatori, ovvero due piste metalliche isolate da un dielettrico (isolante). Un condensatore C ha una sua impedenza:

$$\boxed{Z_C = \frac{1}{j\omega C}}$$

dove, ω è la frequenza del segnale. Se la frequenza è molto alta, l'impedenza è molto bassa, ed equivale ad una resistenza molto bassa. Questo significa che le due piste AB e CD, sono effettivamente isolate dal dielettrico, ma se la frequenza del segnale aumenta (la tensione varia velocemente nel tempo) diminuisce sempre di più l'effetto dell'isolante, fino ad arrivare ad un punto in cui le due piste sono in cortocircuito (ovvero a contatto tra loro, perché il dielettrico non isola più).
Quindi queste capacità parassite stanno dando dei limiti fisici al circuito.

VANTAGGI

Riducendo le dimensioni, si riduce anche la capacità C del condensatore (che dipende direttamente dall'area) e quindi aumenta l'impedenza. La riduzione delle dimensioni quindi porta una riduzione delle capacità parassite e un proporzionale vantaggio fisico perché permette di far lavorare il circuito a frequenze più elevate.

SVANTAGGI

Uno svantaggio nella riduzione delle dimensioni sta nella dissipazione del calore. Infatti, più è piccola la superfice di un circuito e più è difficile dissipare il calore. Per questo si scelgono le tecnologie che consumano meno energia, così da produrre meno calore (tecnologia CMOS).

Quindi, nella costruzione di un circuito bisogna tenere conto di due fattori importanti:

- Area del chip: minore è l'area del chip e meglio è. Quindi bisogna ridurre le dimensioni.
- Potenza dissipata: minore è la potenza dissipata dal circuito e meglio è. Quindi bisogna scegliere tecnologie che consumano poca energia.

- SEGNALI:

- Sensori e Attuatori:

Un'informazione è un segnale elettrico che può essere o una corrente o una tensione. I segnali fisici non possono essere letti direttamente da un circuito elettrico (es. la voce è una variazione di pressione nell'aria). Quindi, i segnali fisici devono essere tradotti in segnali elettrici. Per fare questo si usano dei **sensori** (es microfono).
Il parametro fisico è continuo (es tutte le intensità di suoni, da zero ad un massimo). Il sensore dà in uscita un parametro analogico che è anche esso continuo.
Una volta tradotto il segnale fisico in un segnale elettrico, questo viene elaborato da una serie di moduli funzionali (es. amplificatore), che danno in uscita un segnale digitale.
Però, un segnale digitale deve essere ritrasformato in un segnale fisico per essere fruibile, quindi si usano degli **attuatori** (es. auricolare) che si occupano di trasformare il segnale digitale in segnale fisico.

Sensori: esempi

- Termistori e termocoppie per la misura della temperatura.
- Fototransistori e fotodiodi per la misura della luce.
- Estensimetro e materiali piezoelettrici per la misura di forza.
- Potenziometri, sensori induttivi, codificatori di posizione per la misura di spostamenti.
- Generatori tachimetrici, accelerometri e sensori a effetto Doppler per misure di movimenti.
- Microfoni per la misura del suono.

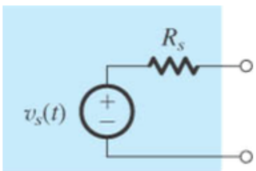
Attuatori: esempi

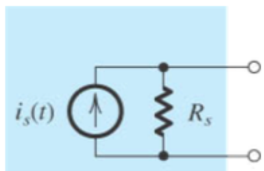
- Riscaldatori a resistenza ohmica per produrre calore.
- Diodi emettitori di luce e laser per controllare la luminosità.
- Solenoidi per produrre forze.
- Strumenti indicatori per mostrare spostamenti.
- Motori elettrici per produrre movimenti.
- Altoparlanti e trasduttori ultrasonici per produrre suoni.

- Segnali e generatori di segnale:

-SEGNALI CONTINUI:

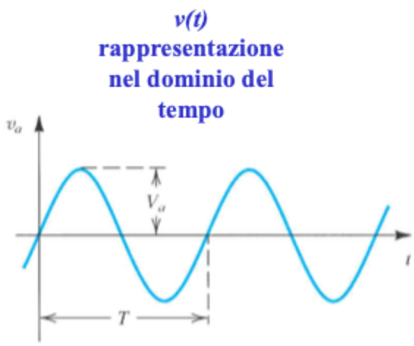
I segnali elettrici possono essere esclusivamente variazioni di tensione o di corrente.
Quindi per generare tali segnali servono dei generatori di tensione (sinistra) o dei generatori di corrente (destra):

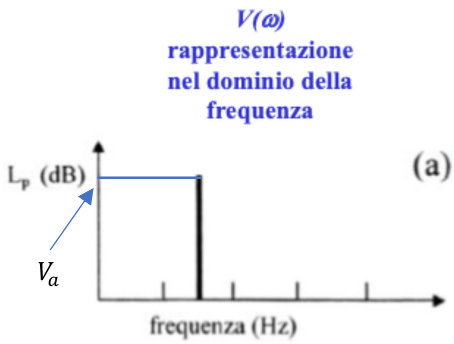




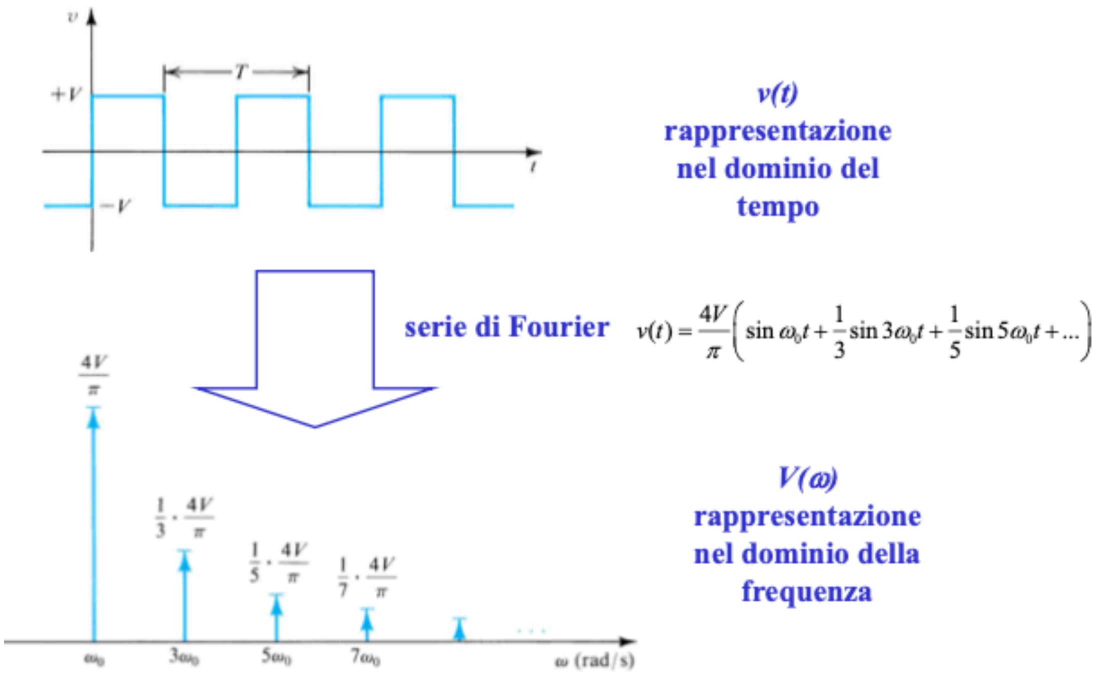
Il segnale elettrico più semplice è la sinusoide (una nota pura), ed è data da: $v_a(t) = V_a \sin(\omega t)$ dove $\omega = 2\pi f = 2\pi/T\ [rad/s]$ è la pulsazione del segnale, $f = 1/T\ \ [Hz = 1/s]$ è la frequenza del segnale e T è il periodo.

L'informazione di questo segnale sta nell'ampiezza massima V_a e nella frequenza. Nel caso della nota pura, l'ampiezza massima rappresenta il volume della nota e la frequenza rappresenta il tono. Nel dominio del tempo il segnale è una sinusoide, ma se lo vediamo nel dominio della frequenza, il segnale è una "riga verticale" nel piano, dove sulle ascisse sono rappresentate le frequenze e sulle ordinate le ampiezze.





Nella realtà non si hanno mai sinusoidi pure, ma si hanno altri tipi di forme d'onda. Quindi lo spettro in frequenza non è una singola riga verticale su una frequenza precisa, ma è una serie di righe verticali su più frequenze:



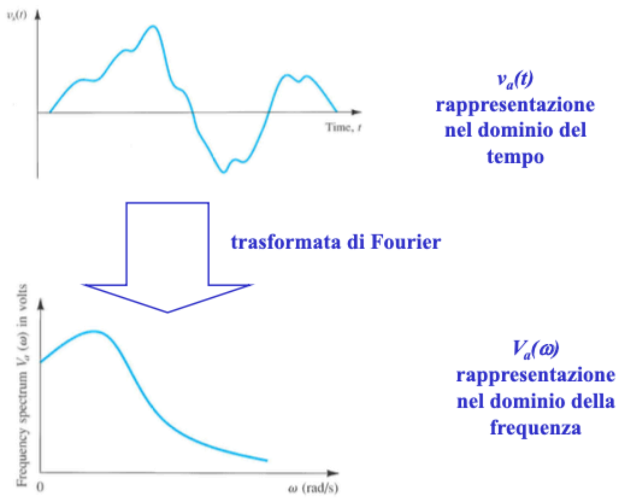
La forma d'onda quadra è composta da infinite componenti sinusoidali sommate tra loro. Le componenti in bassa frequenza hanno più peso, mentre quelle in alta frequenza hanno meno peso, però se si volesse ricostruire fedelmente l'onda quadra, bisognerebbe considerare il contributo di tutte le sinusoidi.

Il problema è che i circuiti elettrici possono lavorare fino ad una certa frequenza, sopra la quale i segnali non vengono visti dal circuito. Quindi, quando si ha un segnale analogico e lo si fa passare all'interno di un circuito elettrico che restituisce il corrispettivo segnale digitale, si perdono delle informazioni in alta frequenza e quindi la forma d'onda di uscita non sarà mai identica alla forma d'onda di ingresso.

Ad esempio, se si vuole amplificare un segnale (es un suono) di 10 volte, significa che tutte le componenti in frequenza devono essere amplificate di 10 volte, ma il circuito restituisce in uscita un segnale distorto, perché taglia le frequenze sopra una certa soglia. Fortunatamente, gli organi sensoriali umani non sono così precisi, quindi se si tagliano le sinusoidi dopo una certa frequenza, questo non cambierà il risultato dal punto di vista della percezione umana.

- SEGNALI NON PERIODICI

I segnali non periodici possono essere visti come segnali periodici ma con periodo infinito. Quindi la rappresentazione nel dominio della frequenza diventa una curva continua (perché se T è infinito, la distanza tra le frequenze tende a zero).

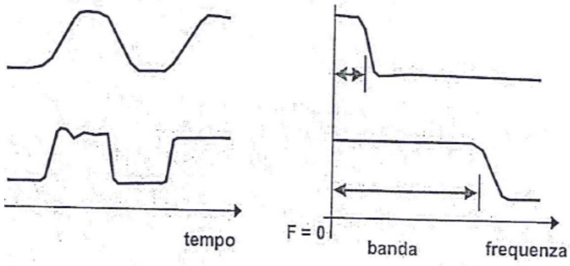


Quindi l'informazione è data da:

- la dinamica del segnale, identificata dalla differenza tra l'ampiezza massima e minima;
- la banda del segnale, ovvero componente spettrale significativa (dipende dall'applicazione). Tagliando le frequenze sopra la banda del segnale non si ha una variazione significativa.

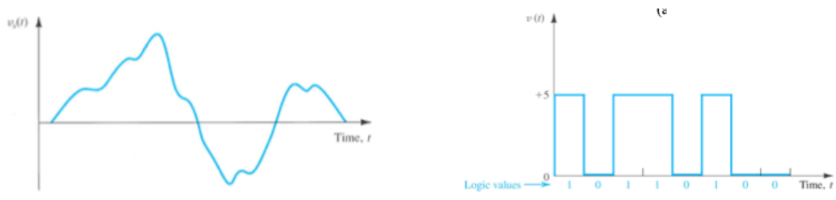
- LEGAME TEMPO-FREQUENZA

Se il segnale varia lentamente nel tempo, significa che le componenti significative del segnale stanno a frequenze più basse, ovvero la banda del segnale è minore.
Al contrario, se il segnale varia velocemente nel tempo, significa che la banda del segnale prende uno spettro più ampio di frequenze.



- Segnali analogici e segnali digitali:

I segnali analogici sono continui nel tempo e in ampiezza, mentre i segnali digitali sono continui nel tempo ma sono discreti in ampiezza.



segnale analogico

segnale digitale

- SEGNALI ANALOGI

Il segnale analogico è continuo:

- nel tempo: è definito per qualsiasi istante di tempo entro un certo intervallo;
- in ampiezza: può assumere qualsiasi valore entro un certo intervallo.

I parametri che lo definiscono sono:

- intervallo di ampiezza: valore massimo e minimo dell'ampiezza (dinamica del segnale);
- contenuto spettrale: limiti di banda e forma dello spettro.

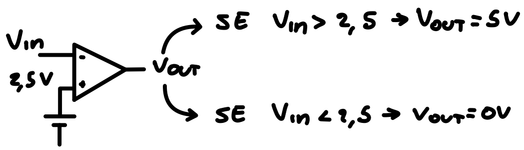
- SEGNALE DIGITALE

Il segnale digitale è binario, quindi:

- è continuo nel tempo, ovvero in ogni istante di tempo trovo un valore del segnale;
- è discreto in ampiezza, ovvero può assumere sono un determinato set di valori in ampiezza.

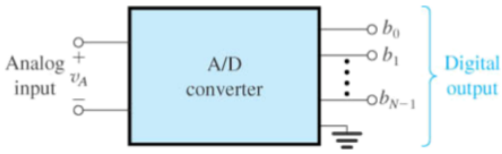
- RUMORE

Ogni elaborazione effettuata sul segnale introduce del rumore, che non trasporta informazione utile, ma si somma al segnale originale.
Per il segnale analogico, il rumore rappresenta una degradazione non recuperabile dell'informazione, poiché non c'è modo di risalire alla forma d'onda originale.
Per il segnale digitale, la degradazione del segnale dovuta al rumore è recuperabile (se contenuta entro certi limiti). Il segnale digitale viene fatto passare attraverso un blocco di ripristino che esegue una comparazione rispetto ad un riferimento posto a metà della dinamica del segnale. Campionando il segnale ed eseguendo la comparazione su ogni campione (segnale > riferimento -> 1, segnale < riferimento -> 0) si può ricostruire la forma d'onda originale.



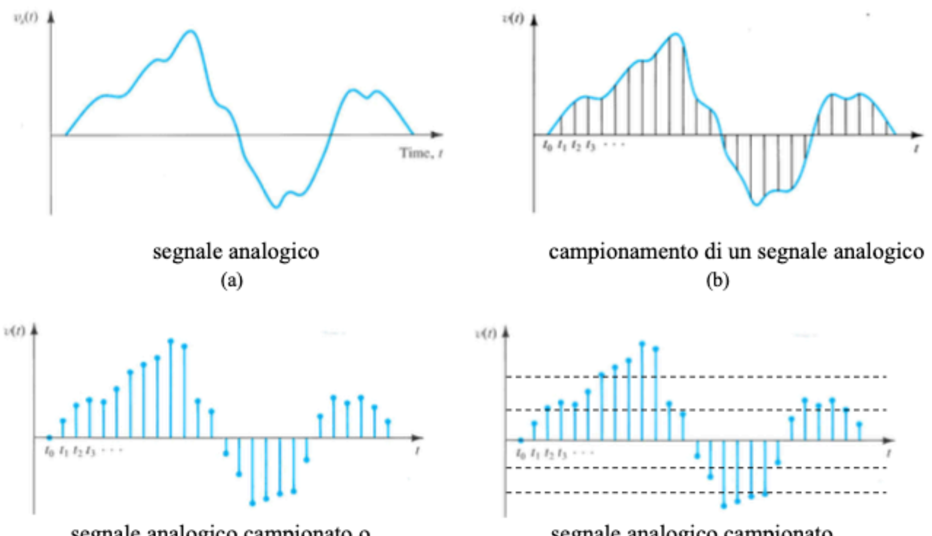
- CONVERTITORE ANALOGICO-DIGITALE

La prima trasformazione del segnale viene eseguita dai sensori, che portano il segnale da fisico ad elettrico (ma rimane sempre un segnale analogico).
La seconda trasformazione è eseguita da un convertitore analogico-digitale che, appunto, converte il segnale analogico in un segnale digitale, ovvero in una parola di n bit.



La conversione analogico-digitale avviene nel seguente modo:

1. si parte dal segnale analogico;
2. si esegue un campionamento del segnale ad istanti di tempo definiti. Il valore assunto dal segnale tra un istante di campionamento e un altro viene perso; quindi, più è piccolo il tempo di campionamento è più fedele è la rappresentazione;
3. si ottiene un segnale analogico campionato, ovvero una serie di punti sul piano caratterizzati da un certo valore in ampiezza e segnati su un certo istante di tempo;
4. si esegue la quantizzazione del segnale, ovvero si divide l'asse delle ordinate in fasce (in base al numero di bit disponibili) e si assegna ogni punto del segnale digitale alla fascia più vicina. Questo genera un errore di quantizzazione che è tanto minore quanti più sono i bit disponibili per rappresentare il segnale.
   Inoltre, se per scrivere un bit è necessario un tempo caratteristico t_1, per scrivere una parola di n bit è necessario $n*t_1$. Questo significa che se un valore analogico è rappresentato da n bit digitali, servono $n*t_1$ secondi per scrivere quel dato e finché non si è finito di scrivere quel dato non si può passare al successivo. Quindi il tempo di campionamento minimo deve essere maggiore al tempo di lettura di una parola di n bit.



segnale analogico
(a)

campionamento di un segnale analogico
(b)

segnale analogico campionato o segnale tempo-discreto
(c)

segnale analogico campionato errore di quantizzazione
(d)

- Riassunto:

La maggior parte dei sistemi elettronici comprende:

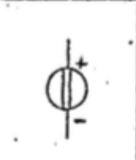
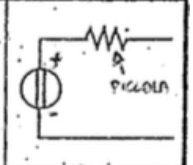
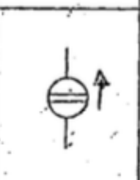
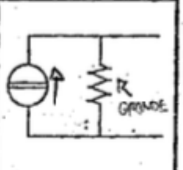
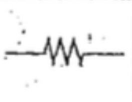
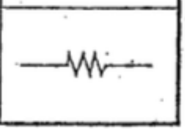
- interfacce verso il mondo esterno (front-end) analogico;
- conversione A/D;
- trattamento del segnale numerico;
- conversione D/A;
- interfacce verso il mondo esterno (back-end) analogico.

RICHIAMI DI TEORIA DEI CIRCUITI

- BIPOLI LINEARI:

Una rete lineare è formata da bipoli (dispositivi con due terminali) e la relazione tra la corrente che scorre tra i due terminali e la differenza di potenziali sugli stessi, è una relazione lineare.

I bipoli lineari di base sono:

Nome	Ideale	Reale
Generatore di tensione		
Generatore di corrente		
Resistore		

Nel generatore di tensione, la differenza ai capi del generatore (tensione nominale) è sempre la stessa a prescindere dal carico a cui è collegato il generatore. Un generatore reale si rappresenta aggiungendo una resistenza (R_S in serie al generatore, ovvero si crea un partitore di tensione)

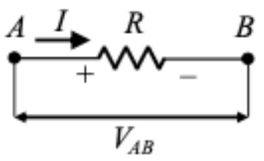
Nel generatore di corrente, la corrente che scorre spinta dal generatore è sempre la stessa a prescindere dal carico a cui è collegato in generatore. Un generatore reale si rappresenta con una resistenza R_S in parallelo al generatore, ovvero si crea un partitore di corrente.

Un resistore è un bipolo lineare tale che, la differenza di potenziale ai capi del bipolo e la corrente che scorre in esso sono collegati da una relazione lineare, ovvero la Legge di Ohm.

- Teoremi dei circuiti lineari:

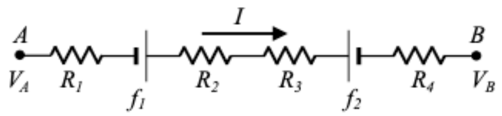
- LEGGE DI OHM:

La Legge di Ohm descrive la relazione lineare che lega la differenza di potenziale ai capi di una resistenza e la corrente che scorre in essa:



$$\boxed{V_{AB} = V_A - V_B = R * I}$$

Nella forma generalizzata, la Legge di Ohm è:



$$(V_A - V_B) + \sum_{ALG} f_i = \sum_{RAMO} R_i \cdot I$$

$$(V_A - V_B) + f_1 - f_2 = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + R_3 \cdot I + R_4 \cdot I$$

- LEGGI DI KIRCHOFF:

1. Prima legge di Kirchoff – Legge delle Correnti – Equazione al Nodo:
   La somma algebrica delle correnti entranti in un nodo è identicamente nulla in ogni istante di tempo, ossia la somma delle correnti entranti in un nodo è sempre uguale alla somma delle correnti uscenti:

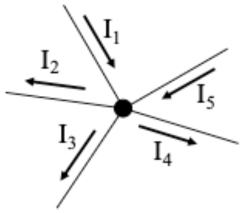
$$\sum I_i = 0$$

2. Seconda legge di Kirchoff – Legge delle Tensioni – Equazione alla Maglia:
La somma algebrica delle tensioni lungo qualsiasi percorso chiuso (maglia) è identicamente nulla in ogni istante di tempo, ossia la somma delle forze elettromotrici presenti nella maglia devono equilibrare le varie cadute di tensione nelle resistenze costituenti i rami della maglia stessa:

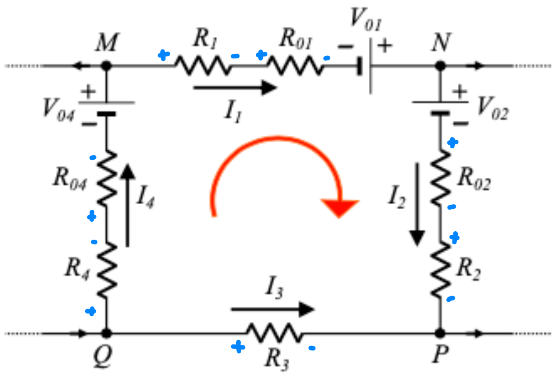
$$\sum f_i = \sum R_i * I_i$$

Esempio dell'equazione al nodo:

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 + I_5 = 0$$
$$I_1 + I_5 = I_2 + I_3 + I_4$$



Esempio di equazione alla maglia:



$$V_{01} - V_{02} + V_{04} = (R_1 + R_{01})I_1 + (R_{02} + R_2)I_2 - R_3 I_3 + (R_4 + R_{04})I_4$$

Osservazione: La caduta di potenziale ha segno positivo dove entra la corrente rispetto a dove esce (ovvero il potenziale nel nodo entrante è maggiore rispetto al potenziale nel nodo uscente).

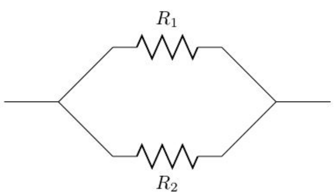
Osservazione: Se due generatori di tensione sono in serie secondo uno schema $(-+)(-+)$ oppure $(+-)(+-)$ allora i potenziali si sommano, altrimenti se sono in serie con uno schema $(-+)(+-)$ oppure $(+-)(-+)$ i potenziali di sottraggono.

- Resistenze equivalenti serie e parallelo:

- RESISTENZE IN SERIE: Due resistenze sono in serie se hanno un nodo in comune e se la corrente che scorre su R_1 è uguale alla corrente che scorre su R_2.

$$\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2}$$

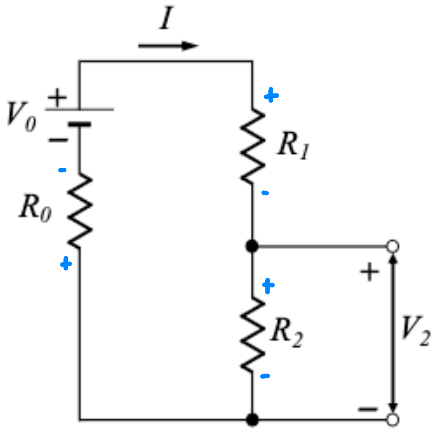
- RESISTENZE IN PARALLELO: Due resistenze sono in parallelo se seguono il seguente schema



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \rightarrow \boxed{R_{eq} = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2}}$$

- Partitore di tensione e partitore di corrente:

- PARTITORE DI TENSIONE:



La differenza ai capi di un generatore di tensione è quella nominale del generatore, In questo caso V_0. Nel disegno è presente una singola maglia.
È considerata corrente positiva quella che esce dal polo positivo del generatore di tensione. La corrente I ha una caduta di potenziale su R_1, poi su R_2 e in fine su R_3.
Applicando l'equazione alla maglia si ottiene:

$$V_0 = R_1 I + R_2 I + R_0 I \rightarrow V_0 - R_1 * I - R_2 * I - R_0 * I = 0$$

Da cui si può ricavare la corrente:

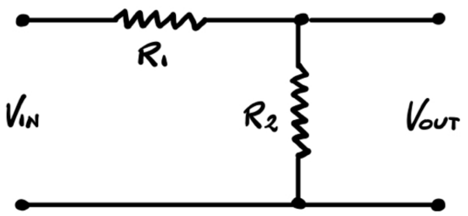
$$I = \frac{V_0}{R_1 + R_2 + R_0}$$

Conoscendo la corrente, ora si possono calcolare le cadute di potenziale sulle resistenze. Ad esempio, la caduta di potenziale su R_2 è data da:

$$V_{R_1} = R_1 I = V_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_0} \qquad V_{R2} = I * R_2 = V_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_0} \qquad V_{R_0} = R_0 I = V_0 \frac{R_0}{R_1 + R_2 + R_0}$$

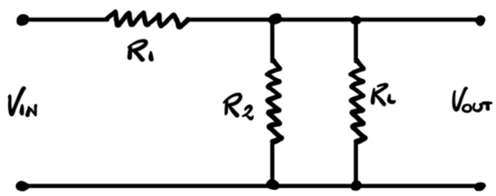
Questa regola spiega come la tensione di ripartisce nella maglia e si ha che questo avviene nel seguente modo: la tensione sulla resistenza considerata è pari alla tensione nominale della maglia (quella del generatore), per la resistenza considerata diviso la somma delle resistenze della maglia.

Un partitore di tensione che si usa spesso è il seguente:



$$V_{OUT} = V_{IN} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

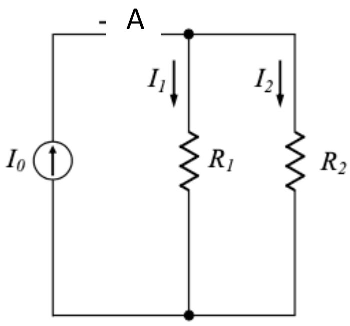
Per valere la regola del partitore di tensione, la corrente che scorre su R_1 deve essere la stessa che scorre su R_2. Infatti, se aggiungiamo un carico R_L ai capi della tensione di uscita, la tensione non si ripartisce più come descritto sopra, ma si ripartisce sulla resistenza equivalente calcolata tra R_2 e R_L, dato che la corrente che scorre nelle resistenze R_1 e R_2 non è la stessa, ma si divide nel nodo:



$$V_{OUT} = V_{IN} \frac{R_2//R_L}{R_2//R_L + R_1}$$

Dove $R_2//R_L$ è la resistenza equivalente calcolata dal parallelo di R_2 e R_L.

- PARTITORE DI CORRENTE:



La corrente erogata dal generatore di corrente è sempre la stessa a prescindere dal carico a cui è collegata. Quindi dal generatore di corrente esce la corrente I_0, che si ripartisce nei due rami in parallelo caratterizzati da R_1 e R_2. Quindi su questi due rami scorrono correnti I_1 e I_2 che dipendono dalle loro resistenze.
Applicando l'equazione al nodo nel nodo A, si ottiene:

$$I_0 = I_1 + I_2$$

Le due resistenze R_1 e R_2 sono in parallelo, quindi la differenza di potenziale ai loro capi è la stessa. Quindi per la legge di Ohm:

$$V_1 = V_2 \quad \rightarrow \quad R_1 * I_1 = R_2 * I_2$$

Sfruttando le due equazioni ed esprimendo, ad esempio, $I_2 = I_0 - I_1$ si ottiene: $R_1 I_1 = R_2(I_0 - I_1)$ da cui:

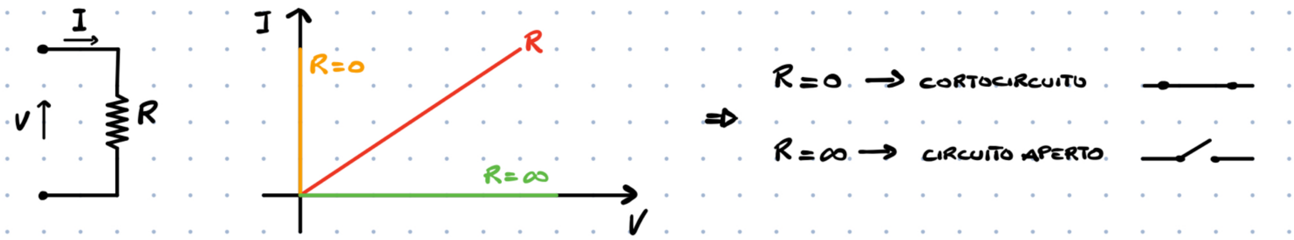
$$I_1 = I_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Quindi la corrente che scorre sulla resistenza R_1 dipende dalla resistenza R_2, in particolare più è grande R_2 e maggiore sarà la corrente che scorre su R_1 e viceversa.

- Rappresentazione grafica corrente-tensione:

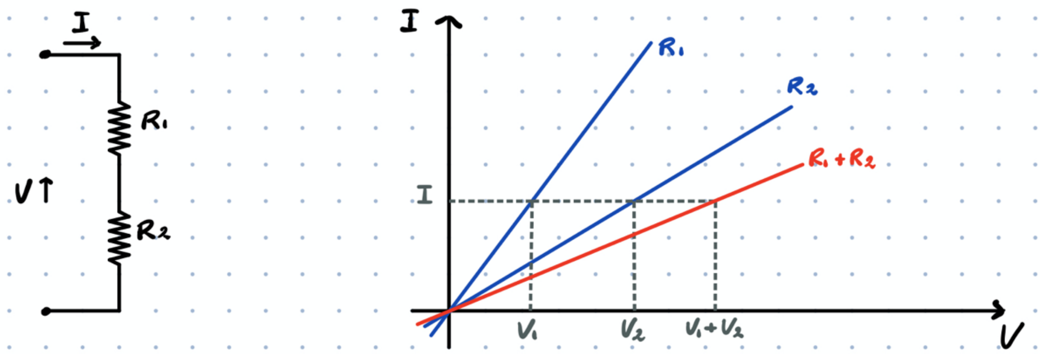
- RESISTENZA:

Una resistenza può essere rappresentata in un piano I-V come una retta passante per l'origine. Infatti, secondo la legge di Ohm, se la corrente è zero la tensione è zero, mentre per un determinato valore di corrente I, la tensione vale R*I.
Si ottiene quindi:



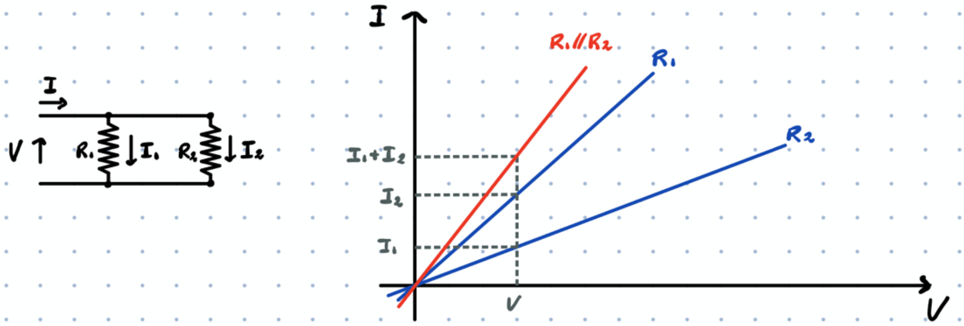
- SERIE DI RESISTENZE:

Due resistenze in serie si rappresentano nel seguente modo:



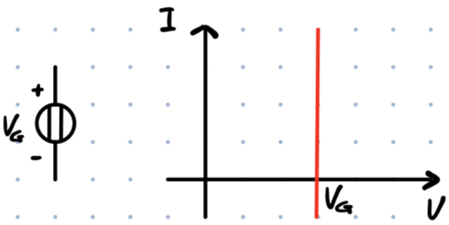
- PARALLELO DI RESISTENZE:

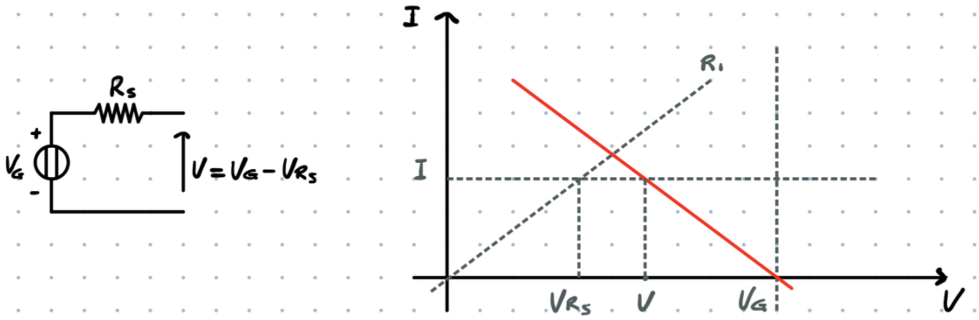
Due resistenze in parallelo si rappresentano come:



- GENERATORE DI TENSIONE:

Un generatore di tensione ideale è rappresentato nel piano I-V come una retta verticale, mentre un generatore di tensione reale tiene conto della resistenza interna:



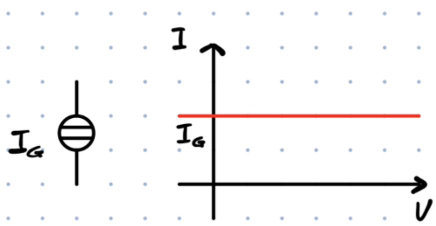


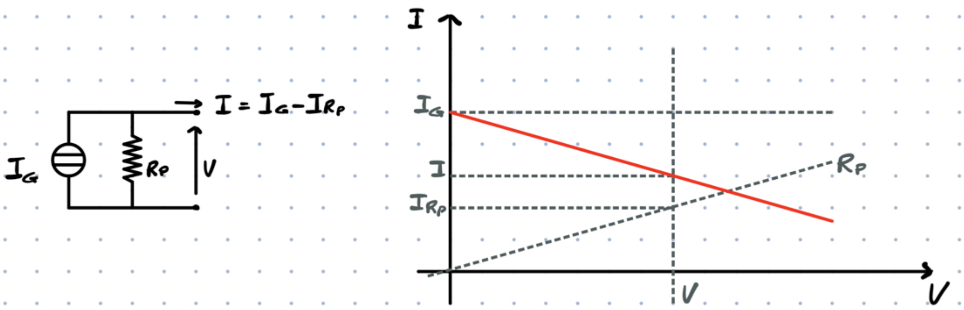
Nel generatore di tensione reale, se applichiamo un carico R_L, si ottiene che: $V_{OUT} = V_G \frac{R_L}{R_S+R_L}$

di conseguenza, se $R_L \gg R_S \rightarrow \quad V_{OUT} \approx V_G$.

- GENERATORE DI CORRENTE:

Un generatore di corrente ideale è rappresentato nel piano I-V come una retta orizzontale, mentre un generatore di corrente reale tiene conto della resistenza interna.





Nel generatore di corrente ideale, se applichiamo un carico R_L, si ottiene che: $I_{R_L} = I_G \frac{R_P}{R_P+R_L}$

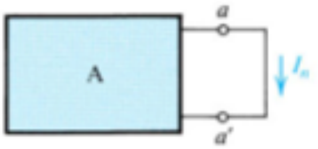
di conseguenza, se $R_P \gg R_L \rightarrow \quad I_{R_L} \approx I_G$.

- Teoremi dei circuiti lineari:

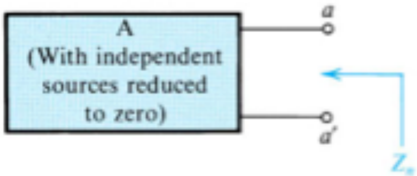
- TEOREMA DI NORTON:

Il teorema di Norton permette di rappresentare una parte di una qualsiasi rete elettrica con un generatore di corrente I_n e con una resistenza in parallelo Z_n (generatore reale di corrente).

Quindi, ad esempio, la rete A può essere composta in qualsiasi modo internamente, ma qualunque sia la sua composizione può essere modellizzata come un generatore di corrente in parallelo ad una resistenza, dove i valori della corrente e della resistenza vanno scelti accuratamente.



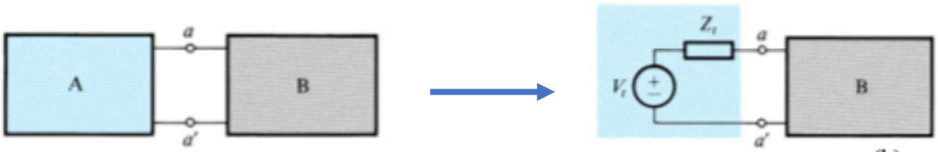
Per determinare la corrente I_n si chiudono in cc i terminali della rete e se ne misura (o calcola) la corrente, dopo aver considerato nulle tutte le eccitazioni interne alla rete A.



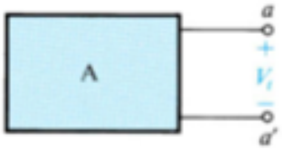
Per determinare Z_n si annullano tutti i generatori indipendenti che si trovano nella rete A (si mettono in cortocircuito tutti i generatori di tensione e in circuito aperto tutti i generatori di corrente) e si misura (o calcola) il valore della resistenza d'ingresso della rete.

- TEOREMA DI THEVENIN:

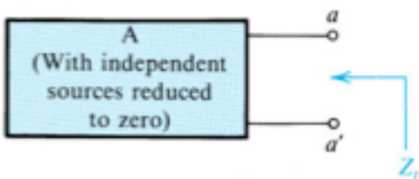
Il teorema di Thevenin permette di rappresentare una parte di una qualsiasi rete elettrica con un generatore di tensione V_t e con una resistenza in serie Z_t (generatore reale di tensione).



Quindi, ad esempio, la rete A può essere composta in qualsiasi modo internamente, ma qualunque sia la sua composizione può essere modellizzata come un generatore di tensione in serie ad una resistenza, dove i valori della tensione e della resistenza vanno scelti accuratamente.



Per determinare la tensione V_t si aprono i due terminali della rete e se ne misura (o calcola) la tensione, dopo aver considerato nulle tutte le eccitazioni interne alla rete A.

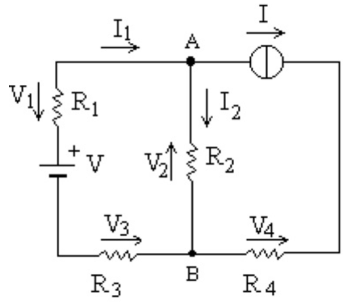


Per determinare Z_t si annullano tutti i generatori indipendenti che si trovano nella rete A (si mettono in cortocircuito tutti i generatori di tensione e in circuito aperto tutti i generatori di corrente) e si misura (o calcola) il valore della resistenza d'ingresso della rete.

- TEOREMA DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI:

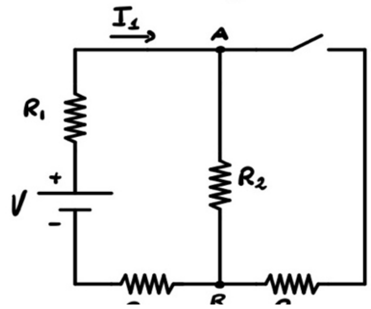
Il teorema di sovrapposizione degli effetti afferma che in una rete lineare la corrente in un elemento circuitale o la tensione ai suoi capi è uguale alla somma algebrica delle correnti o delle tensioni prodotte indipendentemente da ciascun generatore. Per calcolare l'effetto di ciascuno dei generatori, gli altri generatori indipendenti devono essere disattivati, cortocircuitando i generatori di tensione e lasciando aperti quelli di corrente. Devono tutta via essere considerate le resistenze dei generatori disattivati.

Esercizio:
Nel circuito sono presenti un generatore di tensione e un generatore di corrente. Per vedere l'effetto complessivo sul circuito usiamo il principio di sovrapposizione degli effetti, annullando prima il generatore di corrente, poi quello di tensione e infine sommando gli effetti prodotti:



$R1=50\Omega$, $R2=300\Omega$,
$R3=1k\Omega$, $R4=20\Omega$,
$I=3mA$, $V=10V$

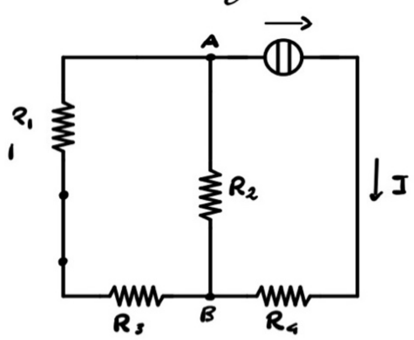
- Eliminare il generatore di corrente:



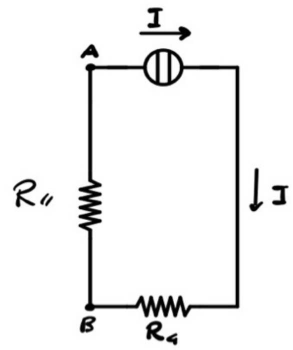
Dato che il generatore di corrente e' stato sostituito con un circuito aperto, si ottiene un'unica maglia. Quindi:

$$V = I_1R_1 + I_1R_2 + I_1R_3 \qquad V'_{AB} = V\frac{R_2}{R_1+R_2+R_3} = 2,\bar{2}\ V$$

- Eliminare il generatore di tensione:



Dato che la corrente che scorre su R_3 e' la stessa che scorre su R_1, sostituisco R_1 e R_3 con la loro serie. La serie di R_1 e R_3 e la resistenza R_2 sono in parallelo, quindi si possono sostituire.



Quindi si ottiene un'unica maglia dove $R_{//} = \frac{(R_1+R_3)\cdot R_2}{R_1+R_2+R_3}$.

La corrente che scorre su R_4 e' la stessa che scorre su $R_{//}$ e va da B verso A, quindi il nodo B si trova ad un potenziale maggiore rispetto al nodo A. Di conseguenza, dalla legge di Ohm, si ha:

$$V''_{AB} = V_A - V_B = -IR_{//}$$

(non si tiene conto di R_4 in V''_{AB} perche' si sta calcolando la differenza di potenziale tra A e B e la corrente che scorre sulla maglia e' la stessa sia per $R_{//}$ che per R_4).

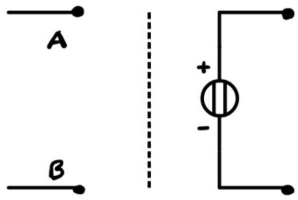
- Quindi usando il principio di sovrapposizione degli effetti si ottiene:

$$V_{AB} = V'_{AB} + V''_{AB} = V\frac{R_2}{R_1+R_2+R_3} - IR_{//}$$

- Generatori controllati:

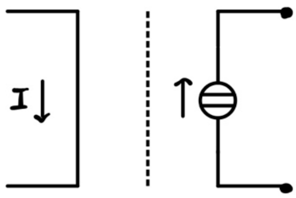
Nei generatori di tensione e di corrente controllati i valori delle grandezze elettriche generate è legato analiticamente al valore assunto da un'altra grandezza elettrica presente nel circuito.
I generatori controllati sono:

- generatore di tensione controllato in tensione: la tensione nominale del generatore è indipendente da qualsiasi carico R_L applicato, ma dipende dalla differenza di tensione presente tra due nodi A e B presenti nel circuito:



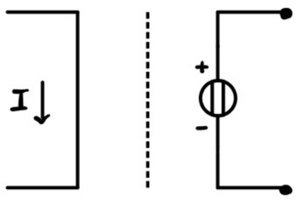
$$\boxed{V_G = \mu V_{AB}}$$

- generatore di corrente controllato in corrente: la corrente nominale del generatore è indipendente da qualsiasi carico R_L applicato, ma dipende dalla corrente che scorre in un altro ramo della rete:



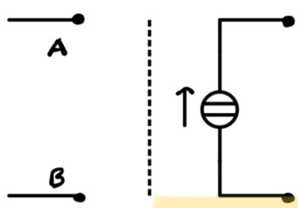
$$\boxed{I_G = \beta I}$$

- generatore di tensione controllato in corrente: la tensione nominale del generatore è indipendente da qualsiasi carico R_L applicato, ma dipende dalla corrente che scorre in un altro ramo della rete:



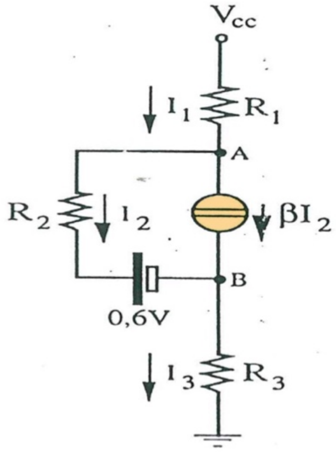
$$\boxed{V_G = R_m I}$$

- generatore di corrente controllato in tensione: la corrente nominale del generatore è indipendente da qualsiasi carico R_L applicato, ma dipende dalla differenza di tensione presente tra due nodi A e B presenti nel circuito:

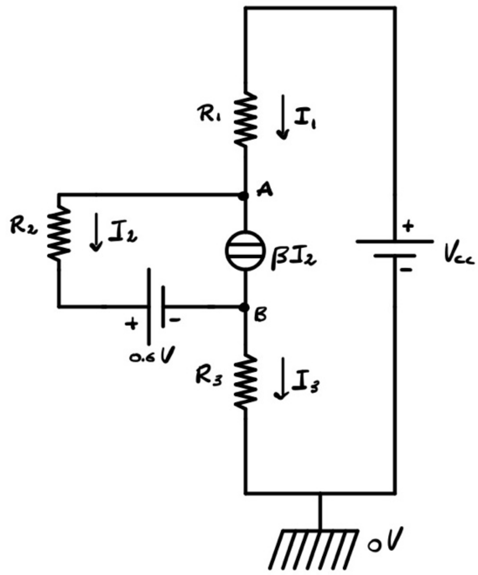


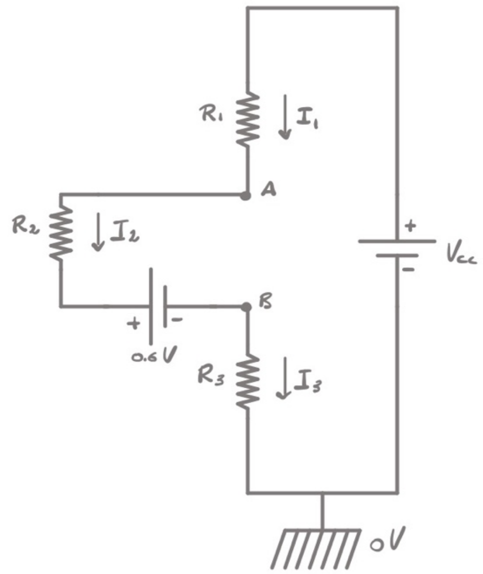
$$\boxed{I_G = g_m V_{AB}}$$

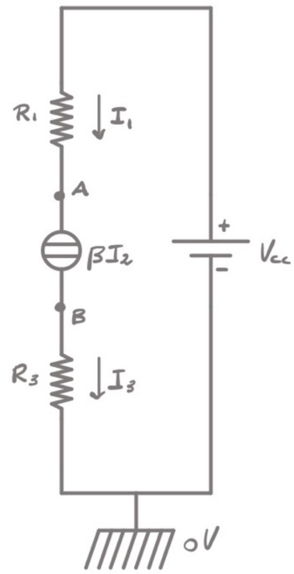
Esercizio:
Calcolare le tensioni ai nodi A e B e le correnti I_1, I_2 e I_3.
Si ha che $R_1 = 1k\Omega,\ R_2 = 2k\Omega,\ R_3 = 5k\Omega, \beta = 99, V_{CC} = 12V$.



Il generatore evidenziato e' un generatore di corrente controllato in corrente.
Nel circuito sono anche presenti due generatori di tensione indipendenti, uno da 0.6 V e uno Vcc.
Il generatore Vcc si trova a 12 V, mentre al capo opposto il circuito sta allacciato a terra, quindi 0 V.
Si può quindi modellizzare il circuito nel seguente modo, con un circuito con 2 maglie:







Utilizzando l'equazione della maglia sulla maglia che non passa per il generatore di corrente βI_2 (altrimenti non e' risolvibile perche' non si conosce la differenza di potenziale):

$$V_{cc} = I_1 R_1 + I_2 R_2 + 0.6 + I_3 R_3$$

e l'equazione ai nodi A e B:

$$A: \quad I_1 = I_2 + \beta I_2 = (\beta + 1) I_2$$

$$B: \quad I_3 = I_2 + \beta I_2 = (\beta + 1) I_2$$

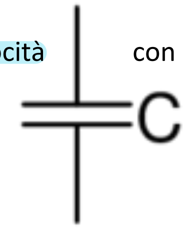
Mettendo a sistema queste tre equazioni si può risolvere il circuito.

Osservazione: la differenza di potenziale tra i nodi A e B non dipende dal generatore di corrente, perché appunto quello eroga sono una corrente fissa, ma dipende dal carico applicato ovvero $V_{AB} = I_2 R_2 + 0.6$. Analogo discorso vale per il generatore di tensione V_{CC}, che eroga una tensione fissa, ma la corrente che fa circolare grazie alla differenza di potenziale dipende dal carico applicato.

- Elementi reattivi:

Una resistenza è un elemento del circuito che non varia nel tempo, ovvero il suo valore resistivo non dipende dalle condizioni del circuito, ma è sempre lo stesso.
In circuiti reali sono presenti degli elementi, voluti o parassiti, di tipo capacitivo o induttivo che possono essere visti come delle resistenze, ma con il valore resistivo che non è sempre lo stesso a prescindere dalla frequenza con cui varia il segnale, ma appunto dipende dalla variazione del segnale nel tempo.

- CONDENSATORE:



Un condensatore è un bipolo, la cui corrente che scorre all'interno del condensatore dipende dalla velocità con cui varia nel tempo la tensione applicata sul condensatore. Ovvero, la corrente è data da:

$$\boxed{I = C\frac{dV}{dt}}$$

Considerando due situazioni estreme:

- Variazione istantanea della tensione:
  se si ha una variazione istantanea della tensione in un istante t_0, la derivata in quel punto è infinita e quindi la corrente in quell'istante è infinita. Una corrente infinita significa che il condensatore non oppone alcuna resistenza al passaggio delle cariche, ovvero si ha un cortocircuito all'istante t_0. Una variazione istantanea equivale ad un segnale con frequenza infinita e periodo nullo.

- Tensione costante nel tempo:
  in istanti di tempo dove la tensione è costante, si ha che la sua derivata nel tempo è nulla e di conseguenza, la corrente che scorre nel condensatore è zero. Quindi il condensatore di comporta come un circuito aperto. Un segnale costante ha una frequenza nulla e periodo infinito.

Un bipolo capacitivo si comporta quindi come un'impedenza che varia se varia la frequenza del segnale. In particolare, si ha che:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \rightarrow \begin{cases} se\ \omega = 0 \rightarrow Z_C = \infty \rightarrow circuito\ aperto \\ se\ \omega = \infty \rightarrow Z_C = 0 \rightarrow cortocircuito \end{cases}$$

dove Z_C è l'impedenza del segnale e C è la capacità.

- INDUTTANZA:

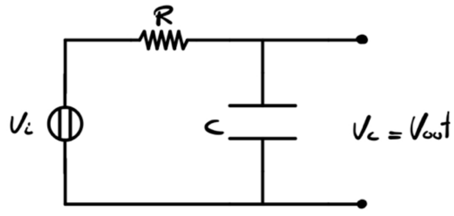
Un'induttanza si comporta come una resistenza, la cui tensione dipende dalla velocità con cui scorre la corrente al suo interno. Quindi, analogamente al condensatore, si comporta come un'impedenza che dipende dal valore ω, ovvero dipende dalla frequenza con cui varia il segnale.

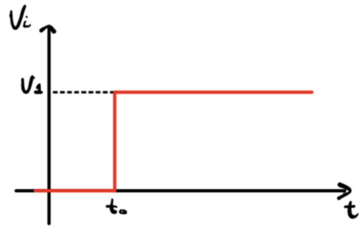
$$\boxed{V = L\frac{dI}{dt}}$$

Se il segnale varia istantaneamente nel tempo, la tensione ai capi dell'induttanza è infinita (circuito aperto), mentre se il segnale è costante nel tempo, la tensione ai capi dell'induttanza è nulla (cortocircuito).

- CARICA E SCARICA DI UN CONDENSATORE CON UN GENERATORE DI TENSIONE:

Analizziamo come varia nel tempo la tensione ai capi di un condensatore con un segnale di tipo gradino.





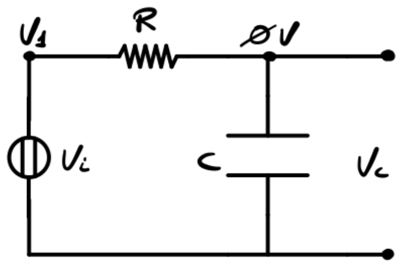
La tensione ai capi di un condensatore è data da:

$$\boxed{V_C = \frac{Q}{C} = \frac{\int I\,dt}{C}}$$

dove Q è la quantità di carica presente sulle armature.
Analizziamo cosa succede in istanti di tempo diversi:

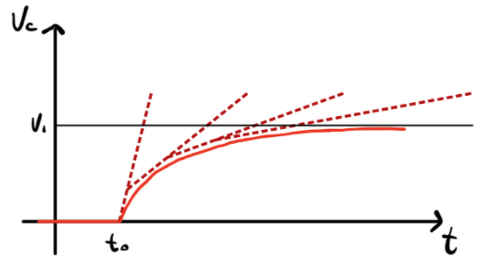
- Per $t < t_0$: $V_i = 0 \rightarrow V_C = 0$;

- Per $t = t_0^+$: si ha che $V_i = V_1$, ma dato che $Q = \int I\ dt$ ed è passato un tempo infinitesimo, Q = 0 dato che l'integrale in un tempo infinitesimo è nullo. Quindi $V_C = 0$.
  Quindi, per $t = t_0^+$, si è creata ai capi della resistenza una differenza di potenziale. Per la legge di si ha una corrente pari ha:



$$\boxed{I = \frac{V_1 - V_C}{R}}$$

quindi, la velocità di carica del condensatore dipende dalla corrente I ed è inversamente proporzionale alla resistenza R.
Nel grafico di V_C, si ha a t_0 una retta (tangente) tanto più verticale quanto più è veloce la carica, ma dato che I (e quindi la velocità di carica) dipende da V_C, più il condensatore **s**i carica e più la tangente alla curva diventa meno ripida, perché la corrente diminuisce e la carica aumenta. Questo termina quanto $V_C = V_1$.
Quindi si ha un andamento esponenziale di carica.



Se in ingresso arriva un gradino, in uscita di ha un esponenziale, la forma quindi cambia completamente. Questo perché un amplificatore riesce ad amplificare solo un certo set di segnali all'interno di frequenze definite; se il segnale supera una certa frequenza l'amplificatore non lo gestisce in modo corretto. Questo fenomeno è particolarmente evidente con un condensatore con in ingresso un gradino (segnale con frequenza infinita).

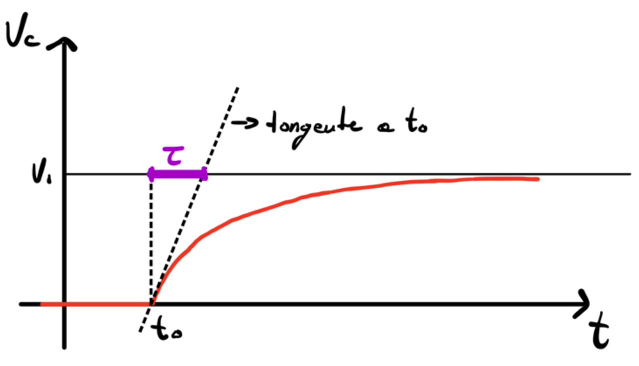
Sapendo quindi che l'andamento è esponenziale, per ricavare l'uscita conoscendo l'ingresso, si può applicare il metodo asintotico, che permette di calcolare la tensione sul condensatore nel tempo in funzione di tre parametri: la tensione di partenza (prima dell'arrivo del gradino), la tensione finale (dopo un tempo infinito), la costante di tempo (con che velocità arriva al valore finale):

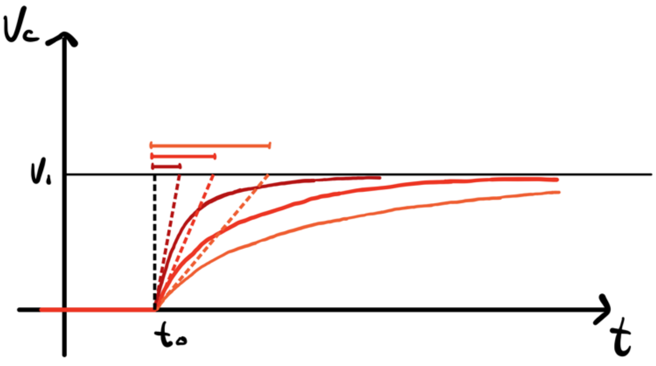
$$\boxed{V_C(t) = V(\infty) - [V(\infty) - V(t_0^-)]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}$$

dove $\tau = C * R_{eq}$, ovvero alla capacità per la resistenza equivalente vista dal condensatore.
Dato che $I = (V_1 - V_C)/R$, più è grande la R_{eq} e più il condensatore **s**i carica lentamente; quindi, per diminuire il tempo del transitorio bisogna utilizzare delle resistenze basse.
Inoltre, dato che $V_C = \ Q/C$, a parità di carica Q, più è grande la capacità C e minore sarà la tensione e quindi, a parità di flusso di corrente, più è grande la capacità e più è piccola la velocità con cui aumenta la tensione V_C.

Quindi, per velocizzare il tempo di carica la costante di tempo τ deve essere piccola, ovvero devono essere piccole sia R_{eq} che C.

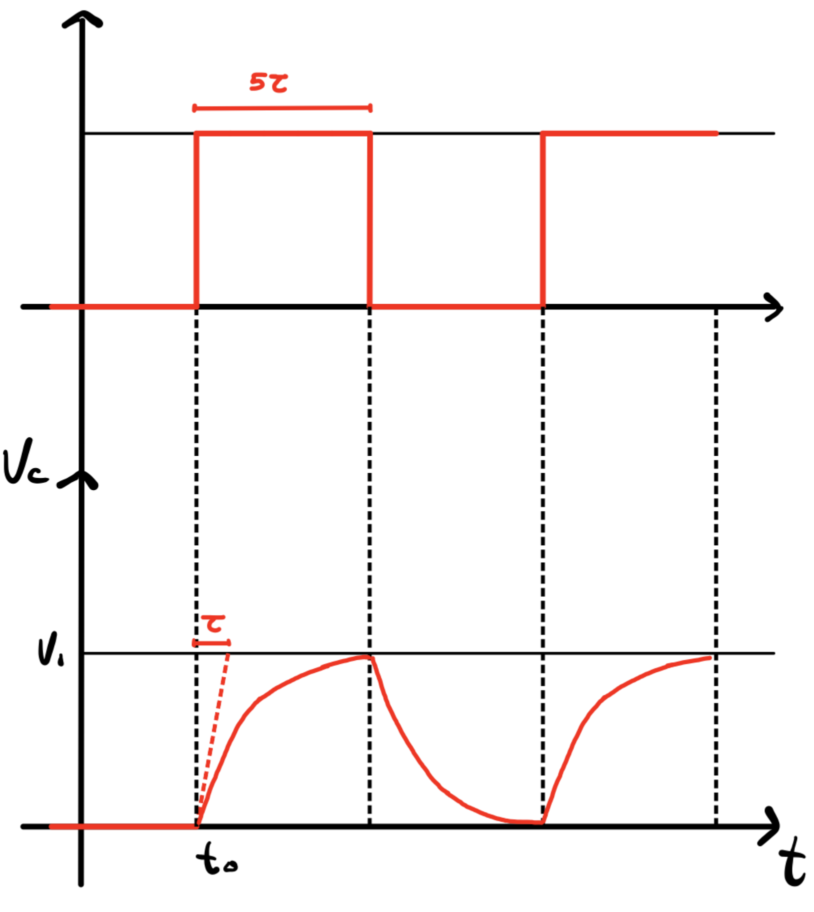
Graficamente τ può essere visto nel seguente modo. Più è piccolo τ e più il condensatore di carica velocemente.





Dopo un tempo pari a τ la carica del condensatore arriva circa al 60% del valore finale e dopo 5τ arriva al 99.9%, ovvero è completamente carico (l'andamento è asintotico e non raggiunge mai 100%).

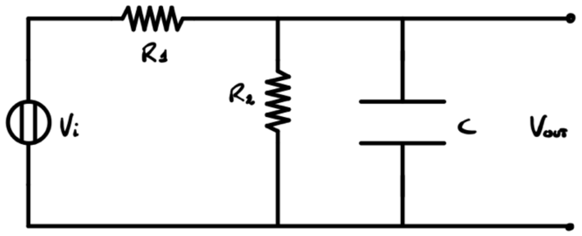
Se si ha una forma d'onda tipo "clock" (onda quadra) è necessario che il suo periodo sia almeno $T = 5\tau$, altrimenti il condensatore non fa in tempo a caricarsi che arriva già il momento di scarica.

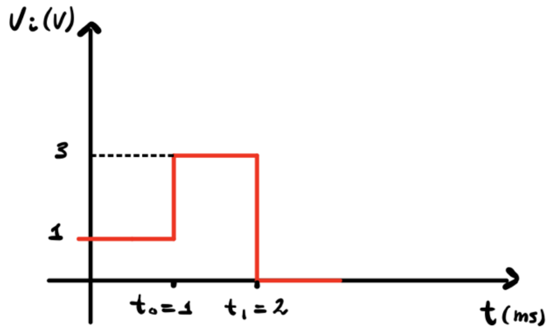


Quindi il periodo minimo di un segnale deve essere 5τ affinché il condensatore riesca ad elaborarlo correttamente, ovvero riesca a terminare il transitorio prima che inizi il successivo.

Esercizio:

Prendiamo in considerazione la seguente rete, con il seguente segnale d'ingresso:



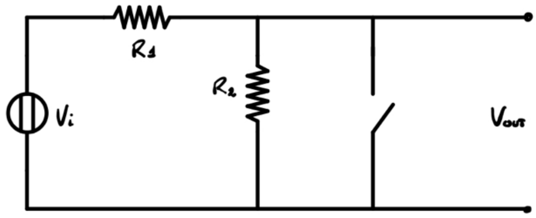


dove: $R_1 = 1k\Omega, R_2 = 2k\Omega, C = 1\mu F$. Calcolare V_{out}.
Sappiamo che:

$$V_C(t) = V(\infty) - [V(\infty) - V(t_0^-)]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

dove $V(t_0^-) = V(t_0^+)$, perché il condensatore non riesce a cambiare istantaneamente tensione. ($V_C = V_{out}$)

Per $t = t_0^-$: la tensione è costante nel tempo (pari a 1 V), quindi la ω del segnale è pari a zero. Dato che l'impedenza del condensatore è $Z_C = 1/j\omega C$, si ha che per $\omega = 0 \rightarrow Z_C = \infty$, quindi il condensatore equivale ad un circuito aperto:



con il condensatore aperto, la corrente che scorre in R_1 è la stessa che scorre in R_2, quindi si ha un'unica maglia con R_1
e R_2 in serie. Si può quindi applicare la regola del partitore di tensione per calcolare la tensione ai capi di R_2 (che è la stessa che c'è ai capi dell'uscita, ovvero è V_C). Si ottiene:

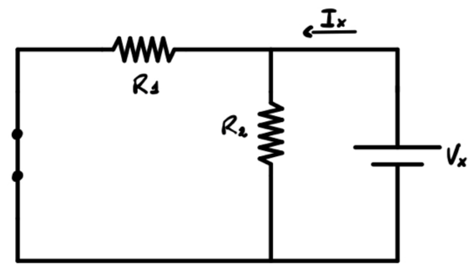
$$V_C(t_0^-) = V_{in}\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 1 * \frac{2}{3} = 0.66\,V$$

Quindi per $t = t_0^-$ il condensatore è carico a 0.66 V.

Per $t = \infty$: il condensatore, non sapendo che a t_1 la tensione cala a zero, si carica (tra gli istanti t_1 e t_2) come se per tempo infinito la tensione fosse pari a 3 V. Quindi la tensione a tempo infinito è quella che raggiunge il condensatore se i 3 V presenti tra t_1 e t_2 rimanessero costante per tempo infinito.
A tempo infinito la tensione è costante pari a 3 V, quindi il condensatore di comporta sempre come se fosse un circuito aperto; quindi, si calcola come il caso precedente, ma considerando 3 V invece che 1:

$$V_C(\infty) = V_{in}\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 3 * \frac{2}{3} = 2\,V$$

Ora bisogna calcolare $\tau = CR_{eq}$, dove R_{eq} è la resistenza equivalente vista dal condensatore.
Per calcolare la resistenza equivalente vista dal condensatore bisogna sostituire il condensatore con un generatore di tensione costante V_x, che fa circolare nel circuito una corrente I_x, e inoltre bisogna rimuovere tutte le eccitazioni preesistenti nel circuito, come i generatori di tensione variabili.
Quindi si ha che la resistenza equivalente è pari a:



$$R_x = \frac{V_x}{I_x}$$

La corrente I_x si divide nei due rami di R_1 e R_2, quindi il condensatore vede le due resistenze R_1 e R_2 in parallelo. Quindi la resistenza equivalente è il parallelo tra R_1 e R_2:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

da cui si ha che la costante di tempo è:

$$\tau = CR_{eq} = C * \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 66\mu s$$

Quindi il transitorio del condensatore dura circa: $5\tau = 330\mu s = 0.33\ ms$.

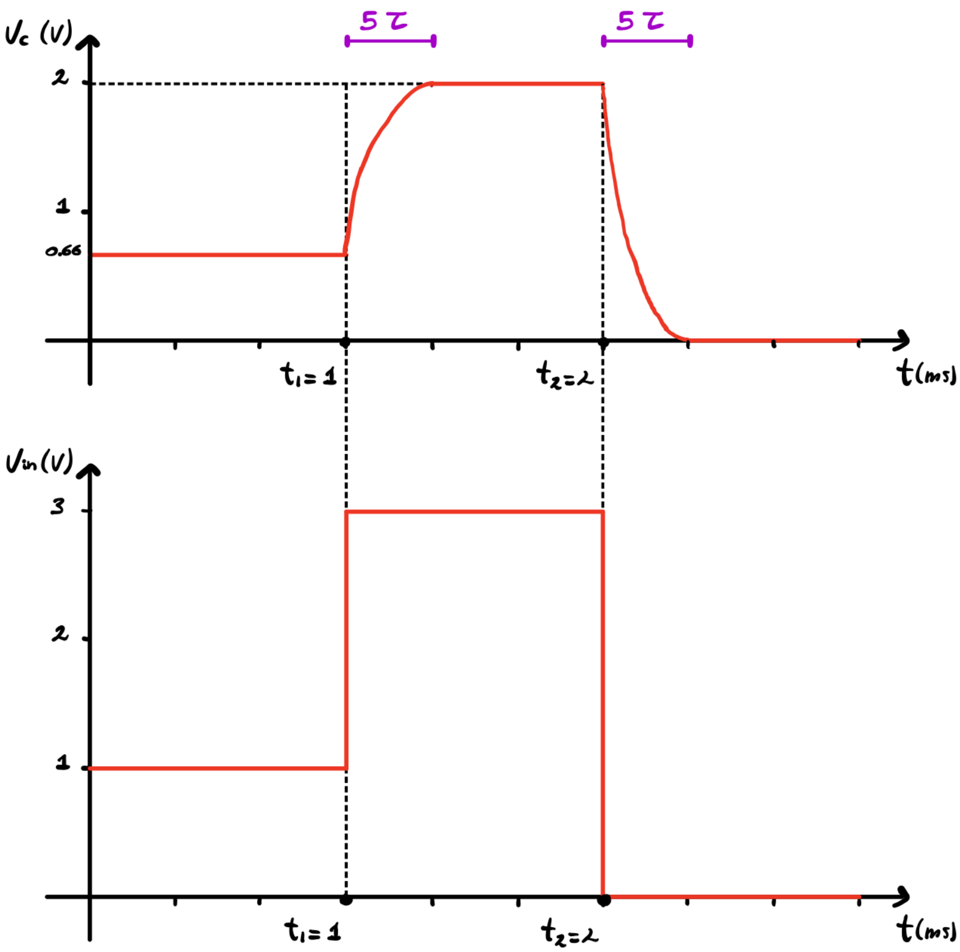
Per $t = t_1^-$: il condensatore raggiunge la tensione pari a 2 V a t = 1.33 ms circa, e la mantiene fino a t = 2 ms, quando la tensione in ingresso va a zero. Quindi a $t = t_1^-$ la tensione sul condensatore pari a: $V_C(t_1^-) = 2\ V$.

Per $t = \infty$: con lo stesso ragionamento di prima, si ha che la tensione a tempo infinito sul condensatore è pari a:

$$V_C(\infty) = V_{in} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0 * \frac{2}{3} = 0\ V$$

Mentre la costante di tempo è analoga al caso precedente, perché il circuito è sempre lo stesso (stessa resistenza equivalente) e la costante di tempo è indipendente dalla tensione in ingresso. Si ha quindi $\tau = 66\mu s$ e il transitorio pari a $5\tau = 330\mu s = 0.33\ ms$.

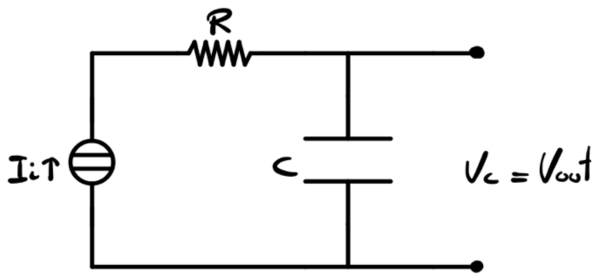
Nel grafico seguente è riportata in alto la tensione di uscita $V_{out} = V_C$ e in basso la tensione di ingresso V_{in}:

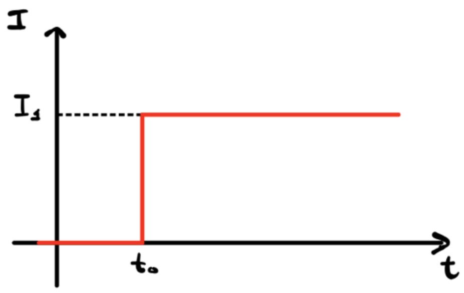


- CARICA E SCARICA DI UN CONDENSATORE CON UN GENERATORE DI CORRENTE:

Analogamente al caso del generatore di tensione, analizziamo la carica e la scarica di un condensatore nel caso di un generatore di corrente.

Prendiamo in esame il seguente circuito, e il seguente ingresso a gradino:



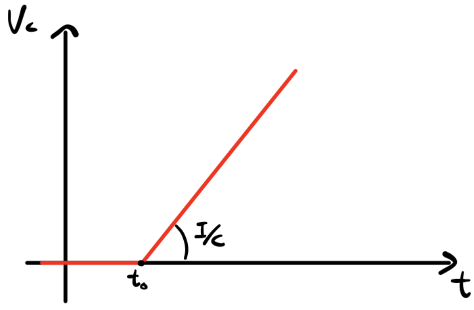


Per $t = t_0^-$: dato che $I = 0$, si ha che il generatore di corrente è equivalente ad un circuito aperto, ovvero non scorre corrente nel circuito. Quindi la tensione in uscita $V_C = V_{out} = 0$.

Per $t = t_0^+$: il generatore di corrente emette istantaneamente una corrente pari a $I = I_1$. Quindi, il condensatore inizia a caricarsi. La tensione ai capi di un condensatore è pari a:

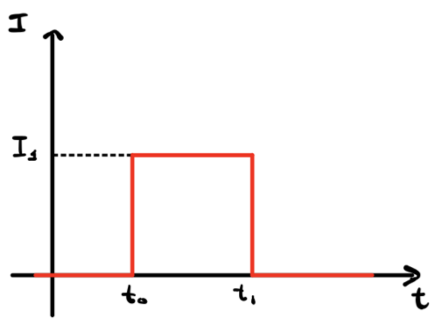
$$V_C = \frac{Q}{C} = \frac{\int I \, dt}{C}$$

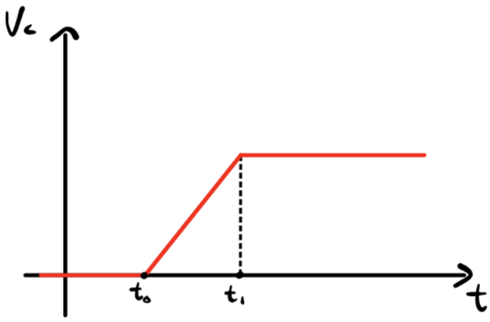
e dipende dalla corrente. Se la corrente è costante nel tempo si ha:
$V_C = \frac{Q}{C} = \frac{\int I dt}{C} = \frac{I}{C} t$, ovvero, la tensione ai capi del condensatore cresce linearmente nel tempo, senza raggiungere un valore limite. Quindi, non ha un andamento esponenziale con un limite come nel caso del generatore di tensione.
La pendenza della retta è determinata dal valore della corrente fornita dal generatore e dalla capacità del condensatore.



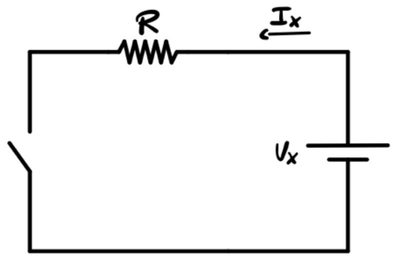
Se la corrente del generatore rimane costante nel tempo senza mai decrescere, si arriva ad un punto tale che si ha la rottura del condensatore poiché il dielettrico che separa le armature non riesce a sostenere il campo elettrico e si ha una scarica (fulmine) tra le due armature, attraverso il dielettrico.

Se invece la corrente, ad un istante t_1 va istantaneamente a zero, si ha che il flusso di cariche verso il condensatore si annulla, ma non si annulla la quantità di carica che si era precedentemente accumulata sulle armature; quindi, la differenza di potenziale ai capi del condensatore rimane costante nel tempo.





Quindi, l’andamento esponenziale si ha solo quando la corrente con cui si carica il condensatore varia nel tempo.
L’andamento lineare si può trovare anche nel seguente modo:
se si vuole calcolare la costante di tempo bisogna rimuovere il condensatore e sostituirlo con generatore di tensione costante (come visto prima). Bisogna inoltre annullare tutte le eccitazioni preesistenti interne al circuito; quindi, in questo caso va annullato il generatore di corrente, ovvero va messo a zero. Mettere a zero un generatore di corrente significa sostituirlo con un circuito aperto (perché un generatore di corrente che non fa circolare corrente equivale ad un interruttore aperto). Un circuito aperto è equivalente ad una resistenza di valore infinito.

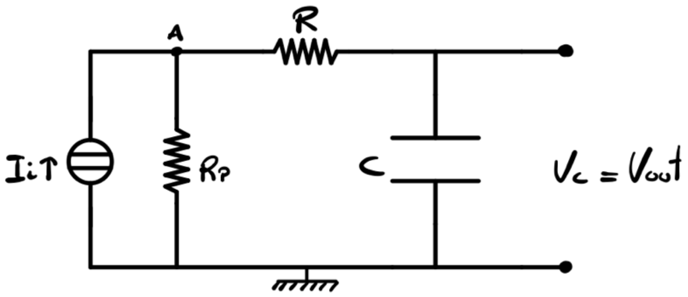


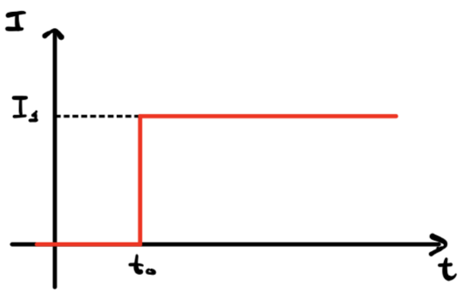
Quindi, la resistenza equivalente è la serie tra la resistenza R e una resistenza di valore infinito, da cui: $R_{eq} = \infty$.
Di conseguenza, si ha che:

$$\tau = C * R_{eq} = \infty$$

quindi il transitorio non termina mai e questo implica che si ha un comportamento lineare, dato che non c’è un valore limite V_1.

Nel caso di un generatore di corrente ideale, si ha che il generatore ha in parallelo una resistenza R_P. Quindi, considerando il segnale in ingresso come in figura, si ha il seguente comportamento.





Per $t = t_0^-$: la corrente emessa dal generatore è zero; quindi, la tensione ai capi del condensatore è nulla, poiché non c’è flusso di cariche verso le armature.

Per $t = t_0^+$: la corrente scorre inizialmente solo su R e il condensatore inizia a caricarsi ed aumenta la tensione ai suoi capi. All’aumentare della tensione ai capi del condensatore, si ha che diminuisce la corrente che scorre su R verso il condensatore ed aumenta la corrente che scorre in R_P.
Il condensatore smette di caricarsi quando la corrente scorre solo su R_P e la corrente che scorre su R si annulla.
Quindi, la tensione ai capi del condensatore dipende dalla corrente che lo carica (I_R, la corrente che scorre su R), che però varia nel tempo, perché la corrente totale del generatore scorre anche su R_P (I_P, la corrente che scorre su R_P).
Il valore finale a cui tende la tensione ai capi del generatore è pari a $I_1 R_P$, perché la tensione V_C finale è la stessa che è presente sul nodo A, che è appunto $I_1 R_P$.

Quindi con un generatore di corrente reale si ha il comportamento di carica e scarica esponenziale, come nel caso del generatore di tensione.

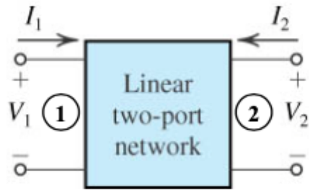
- OSSERVAZIONE IMPORTANTE CARICA E SCARICA DI UN CONDENSATORE:

Il transitorio di un condensatore, che ne descrive la carica la scarica, dipende direttamente dalla corrente che fornisce le cariche alle armature:
- se la corrente è variabile nel tempo, si ha un andamento esponenziale;
- se la corrente è costante nel tempo, si ha un andamento lineare.

Generatori di tensione (ideali e reali) e generatori di corrente reali, portano il condensatore ad avere un andamento esponenziale, mentre i generatori di corrente ideali (che forniscono corrente costante nel tempo) portano il condensatore ad avere un andamento lineare.

RETI A DUE PORTE

- RETE LINEARE A DUE PORTE:

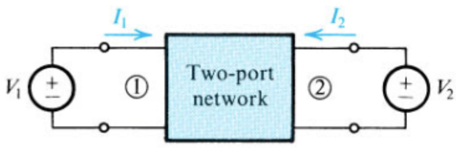


Una qualsiasi rete lineare può essere vista come una rete lineare a due porte, dove tutti gli elementi interni alla rete vengono riassunti in quattro elementi lineari, guardando la rete esclusivamente dalla porta di ingresso e dalla porta di uscita.
Questo deriva dal fatto che la rete è lineari, si ha una porta di ingresso con una differenza di potenziale $V_{in} = V_1$, che permette lo scorrimento di una corrente I_1 (la corrente che entra nel morsetto positivo è la stessa che esce dal morsetto negativo, perché si ha un'unica maglia nella porta di ingresso), e si ha una porta di uscita con una differenza di potenziale $V_{out} = V_2$, che permette lo scorrimento di una corrente I_2 (la corrente che entra nel morsetto positivo è la stessa che esce dal morsetto negativo, perché si ha un'unica maglia nella porta di uscita).

Se la rete è lineare, esistono relazioni lineari tra le correnti e tensioni di ingresso e di uscita.
La rete lineare dipende da quattro parametri, la tensione in ingresso, la tensione in uscita, la corrente in ingresso e la corrente in uscita. Due di questi parametri sono indipendenti, ovvero dipendono dalle scelte di progetto, mentre gli altri due dipendono da quelli indipendenti. I parametri dipendenti sono legati ai parametri indipendenti da relazioni lineari. I parametri che presenti nelle relazioni lineari possono essere:
- parametri y, o ammettenze di corto circuito;
- parametri z, o impedenze a circuito aperto;
- parametri h, o parametri ibridi;
- parametri g, o parametri ibridi inversi.

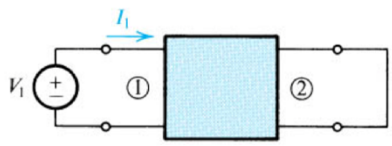
- Parametri y (o ammettenze di corto circuito):

Presa in considerazione la rete lineare in figura, dove V_1 e V_2 sono i parametri indipendenti, si ha:

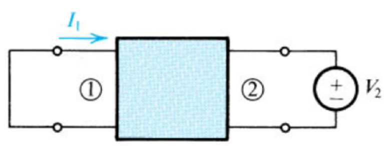


$$\boxed{\begin{cases} I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{cases}}$$

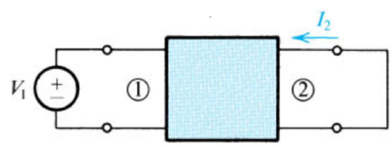
dove le y sono ammettenze (Ω^{-1}), e si calcolano nel seguente modo;



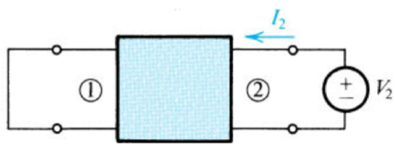
$y_{11} = \frac{I_1}{V_1}$ per $V_2 = 0$, rappresenta l'ammettenza di ingresso con l'uscita in cc, ovvero l'inverso della resistenza vista dai morsetti di ingresso.



$y_{12} = \frac{I_1}{V_2}$ per $V_1 = 0$, rappresenta il parametro di retroazione con l'ingresso in cc ovvero la funzione di trasferimento inversa del sistema (come l'uscita modifica l'ingresso).



$y_{21} = \frac{I_2}{V_1}$ per $V_2 = 0$, rappresenta il parametro di trasmissione con l'uscita in cc, ovvero la funzione di trasferimento del sistema (come l'ingresso modifica lo stato dell'uscita).



$y_{22} = \frac{I_2}{V_2}$ per $V_1 = 0$, rappresenta l'ammettenza in uscita con l'ingresso in cc, ovvero l'inverso della resistenza vista dai morsetti di uscita.

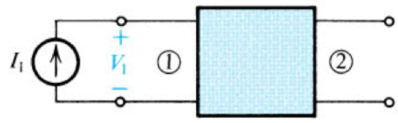
- Parametri z (o impedenze a circuito aperto):

Presa in considerazione la rete lineare in figura, dove I_1 e I_2 sono i parametri indipendenti, si ha:

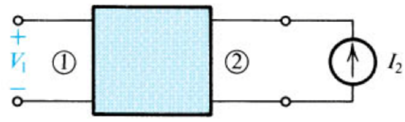
$$\begin{cases} V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{cases}$$

dove le z sono impedenze (Ω), e si calcolano nel seguente modo;

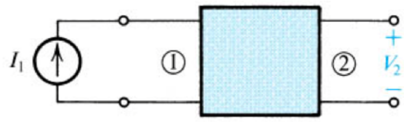
$z_{11} = \frac{V_1}{I_1}$ per $I_2 = 0$, rappresenta l'impedenza di ingresso con l'uscita in ca, ovvero la resistenza vista dai morsetti di ingresso.



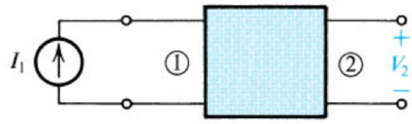
$z_{12} = \frac{V_1}{I_2}$ per $I_1 = 0$, rappresenta il parametro di retroazione con l'ingresso in ca, ovvero la funzione di trasferimento inversa del sistema (come l'uscita modifica l'ingresso).



$z_{21} = \frac{V_2}{I_1}$ per $I_2 = 0$, rappresenta il parametro di trasmissione con l'uscita in ca, ovvero la funzione di trasferimento del sistema (come l'ingresso modifica lo stato dell'uscita).

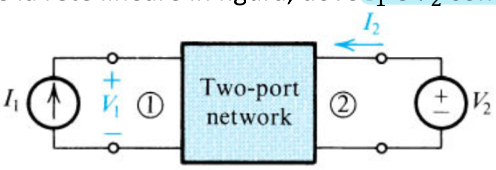


$z_{22} = \frac{V_2}{I_2}$ per $I_1 = 0$, rappresenta l'impedenza in uscita con l'ingresso in ca, ovvero la resistenza vista dai morsetti di uscita.



- Parametri h (o parametri ibridi):

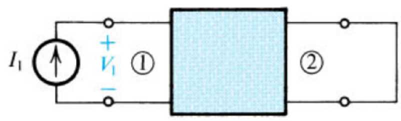
Presa in considerazione la rete lineare in figura, dove I_1 e V_2 sono i parametri indipendenti, si ha:



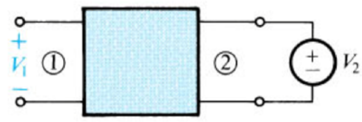
$$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases}$$

dove le h si calcolano nel seguente modo;

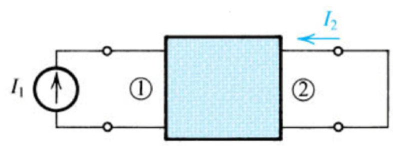
$h_{11} = \frac{V_1}{I_1}$ per $V_2 = 0$, rappresenta l'impedenza di ingresso con l'uscita in cc.



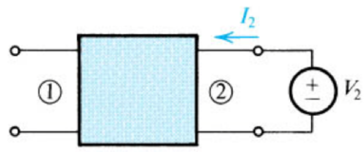
$h_{12} = \frac{V_1}{V_2}$ per $I_1 = 0$, rappresenta il rapporto di retroazione tra le tensioni con l'ingresso in ca.



$h_{21} = \frac{I_2}{I_1}$ per $V_2 = 0$, rappresenta il guadagno di corrente con l'uscita in cc.

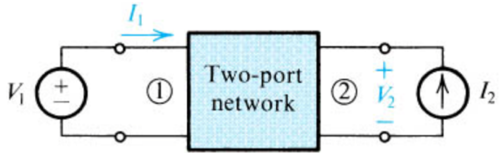


$h_{22} = \frac{I_2}{V_2}$ per $I_1 = 0$, rappresenta l'ammettenza in uscita con l'ingresso in ca.



- Parametri g (o parametri ibridi inversi):

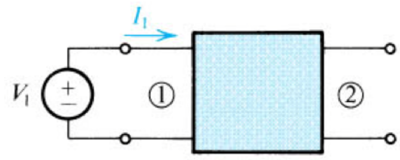
Presa in considerazione la rete lineare in figura, dove I_2 e V_1 sono i parametri indipendenti, si ha:



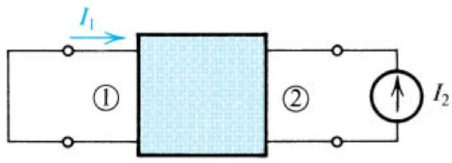
$$\begin{cases} I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \\ V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \end{cases}$$

dove le g si calcolano nel seguente modo;

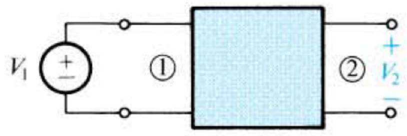
$g_{11} = \frac{I_1}{V_1}$ per $I_2 = 0$, rappresenta l'ammettenza di ingresso con l'uscita a ca.



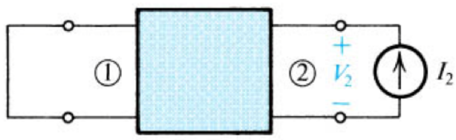
$g_{12} = \frac{I_1}{I_2}$ per $V_1 = 0$, rappresenta il rapporto di retroazione tra le correnti con l'ingresso in cc.



$g_{21} = \frac{V_2}{V_1}$ per $I_2 = 0$, rappresenta il guadagno di tensione a vuoto con l'uscita a ca.



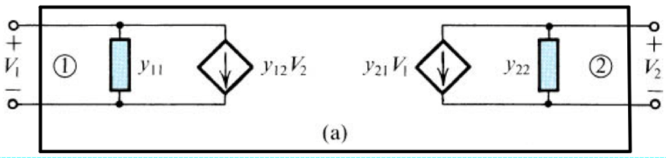
$g_{22} = \frac{V_2}{I_2}$ per $V_1 = 0$, rappresenta l'impedenza dn uscita con l'ingresso in cc.



- Circuito due porte equivalente:

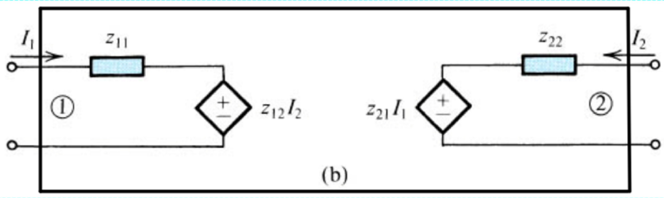
I parametri descritti sopra possono essere utilizzati per semplificare reti lineari in reti due porte equivalenti, secondo gli schemi che seguono (i rettangoli azzurri rappresentano resistenze, i rombi con freccia rappresentano generatori di corrente e i rombi con +/- rappresentano generatori di tensione):

parametri y $\begin{cases} I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{cases}$



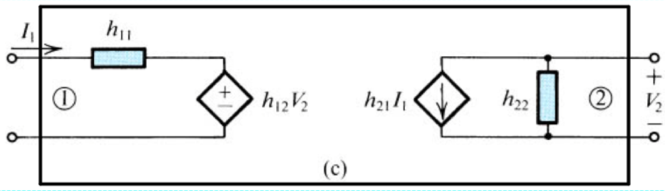
(a)

parametri z $\begin{cases} V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{cases}$



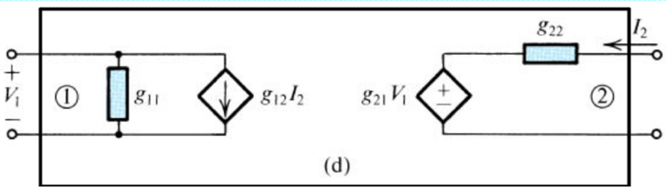
(b)

parametri h $\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases}$



(c)

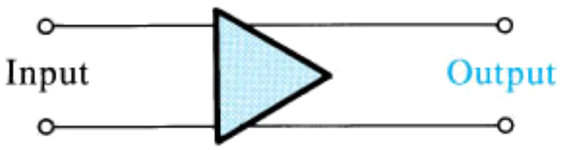
parametri g $\begin{cases} I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \\ V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \end{cases}$

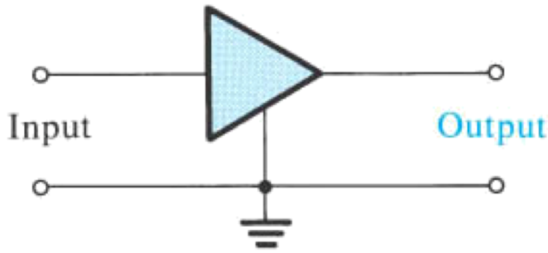


(d)

AMPLIFICATORI

Un amplificatore è un circuito lineare che prende in ingresso un segnale e restituisce in uscita lo stesso segnale amplificato, senza che vengano introdotte distorsioni, ovvero con la forma d'onda di uscita uguale alla forma d'onda d'ingresso.
L'amplificatore può essere visto come una rete due porte lineare, nella quale in ingresso e in uscita si hanno una tensione o una corrente, in base alle specifiche di progetto.
Il simbolo circuitale dell'amplificatore in generale è quello a sinistra, ma dato che nella maggior parte dei casi il potenziale in ingresso e uscita si calcola rispetto al ground, si usa anche il simbolo a destra:





I parametri (in riferimento alle reti due porte) di interesse per gli amplificatori sono: l'impedenza d'ingresso, l'impedenza di uscita e la funzione di trasferimento, ovvero il guadagno dell'amplificatore (quanto amplifica il circuito).

- CARATTERISTICHE DEI PARAMENTRI DI UN AMPLIFICATORE:

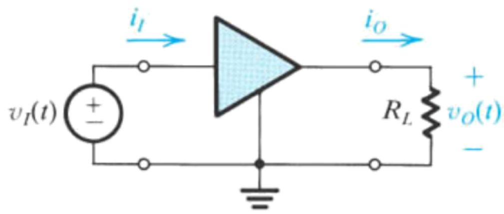
Come detto, i parametri di interesse in un amplificatore sono, l'impedenza di ingresso, l'impedenza di uscita e la funzione di trasferimento.

- Caratteristica di trasferimento e guadagni:

Il seguente circuito rappresenta un amplificatore con ingresso e in uscita una tensione, collegato ad un carico.

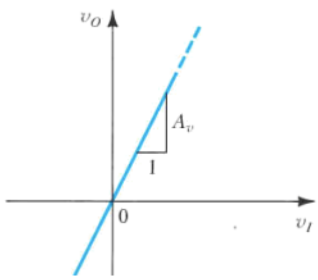
Il guadagno di tensione di questo amplificatore è dato da:

$$\boxed{A_v = \frac{v_o}{v_i}}$$



ovvero dalla tensione di uscita fratto la tensione in ingresso.
Quindi, la funzione che lega la tensione in uscita alla tensione in ingresso è lineare, e il grafico è una retta la cui pendenza è proprio il guadagno A_v:

$$v_o = A_v * v_i$$



In modo analogo, si ha un guadagno di corrente:

$$\boxed{A_i = \frac{i_o}{i_i}} \rightarrow \quad i_o = A_i * i_i$$

L'amplificazione di corrente o tensione si può anche avere banalmente attraverso un circuito fisico come il trasformatore. Il problema del trasformatore è che non riesce ad amplificare la potenza (prodotto corrente-tensione), perché è un circuito passivo e il rendimento non permette di avere una potenza in uscita maggiore di quella in ingresso.

Un circuito attivo (ovvero alimentato) come quello di un amplificatore, invece riesce a prendere una potenza in ingresso molto bassa e restituire una potenza in uscita molto più alta. Questo si chiama guadagno di potenza:

$$\boxed{A_p = \frac{potenza\ in\ uscita}{potenza\ in\ ingresso} = \frac{v_o i_o}{v_i i_i} = A_v A_i}$$

Quindi, la differenza fondamentale tra un trasformatore (che riesce a dare un guadagno di tensione e corrente, ma non di potenza) e un amplificatore (che riesce a dare anche un guadagno di potenza) sta nel fatto che l'amplificatore è alimentato e quindi può fornire in uscita un prodotto tensione-corrente maggiore rispetto all'ingresso.

Espressi in forma logaritmica, i guadagni sono:

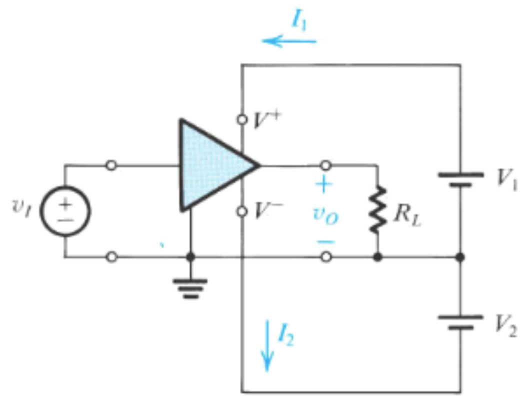
$$Guagagno\ di\ tensione\ di\ dB = 20\log|A_v|\ dB$$

$$Guagagno\ di\ corrente\ di\ dB = 20\log|A_i|\ dB$$

$$Guagagno\ di\ potenza\ di\ dB = 10\log|A_p|\ dB$$

- ALIMENTAZIONE E RENDIMENTO NEGLI AMPLIFICATORI:

Un amplificatore, come detto prima, deve essere alimentato affinché funzioni. In genere, l'alimentazione avviene tramite due generatori di tensione (ma se ne può mettere anche uno) come nel seguente schema:



Quindi la potenza fornita in ingresso all'amplificatore è data da:

$$\boxed{P_{dc} = V_1 I_1 + V_2 I_2}$$

(dc sta per direct current, ovvero corrente continua).
Il bilancio energetico del sistema è dato da:

$$P_{dc} + P_i = P_L + P_{diss}$$

ovvero dalla potenza fornita dall'alimentazione, dalla potenza fornita dal segnale in ingresso, dalla potenza fornita al carico e dalla potenza dissipata sotto forma di calore. Dato che la potenza fornita dal segnale di ingresso è di ordini di grandezza inferiore rispetto alla potenza dell'alimentazione, può essere trascurata e si ottiene:

$$\boxed{P_{dc} = P_L + P_{diss}}$$

L'efficienza dell'amplificatore (il rendimento) è dato da:

$$\boxed{\eta = \frac{P_L}{P_{dc}} * 100}$$

- SATURAZIONE DELL'AMPLIFICATORE:

L'alimentazione fornita all'amplificatore permette di amplificare il segnale, ma fornisce anche un limite all'escursione massima della tensione all'interno del circuito, e quindi limita la dinamica del segnale. Ad esempio, se ai capi dell'amplificatore sono forniti +12V e -12V, all'interno del circuito tutte le componenti dovranno stare in quel range di tensione.
Quindi, se il segnale in ingresso supera una certa soglia che porterebbe il segnale in uscita ad andare oltre il limite imposto dall'alimentazione, si ha che fino al limite il segnale viene amplificato linearmente, ma come raggiunge questo limite l'amplificatore va in saturazione e il segnale non viene più amplificato.
Questo è descritto dal seguente grafico tensione di uscita-tensione di ingresso:

la dinamica della funzione di trasferimento è lineare, ma ad un certo valore L^+ ed L^-, la dinamica diventa costante. Se il segnale in ingresso supera una certa soglia, descritta da

$$\frac{L^-}{A_v}, \frac{L^+}{A_v}$$

il segnale in uscita va in saturazione e quindi il segnale non viene amplificato.

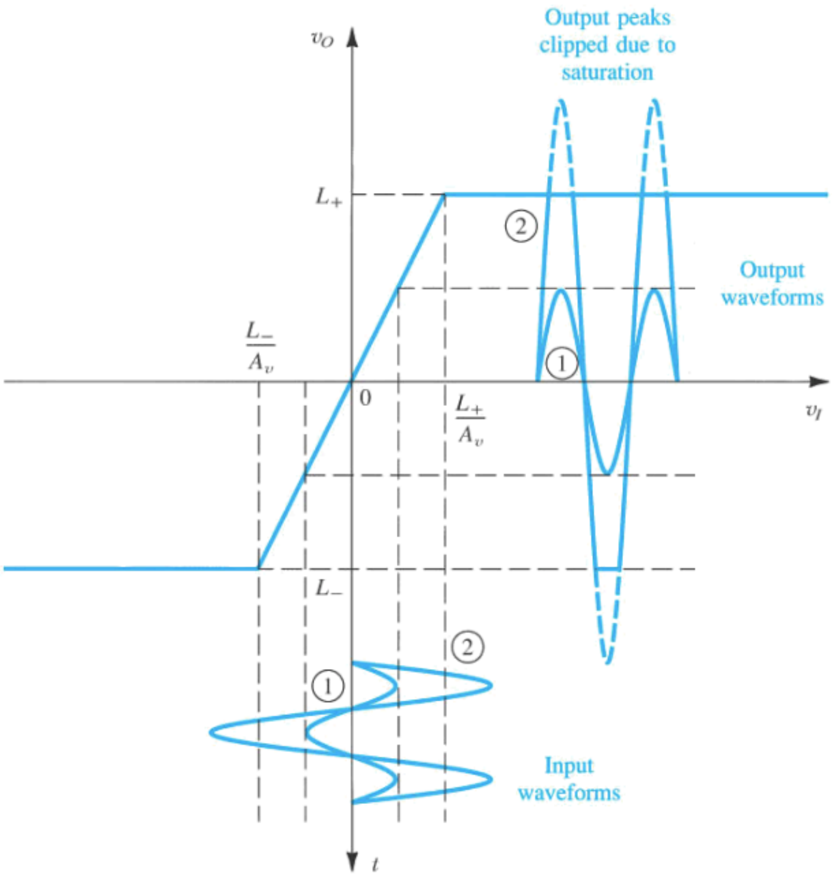
I valori L^+ e L^- sono praticamente uguali alle due tensioni V_1 e V_2 utilizzate per alimentare il circuito.

Quindi la dinamica di ingresso è limitata dai valori:

$$\boxed{\frac{L^-}{A_v}, \frac{L^+}{A_v}}$$

e la dinamica di uscita è limitata dai valori:

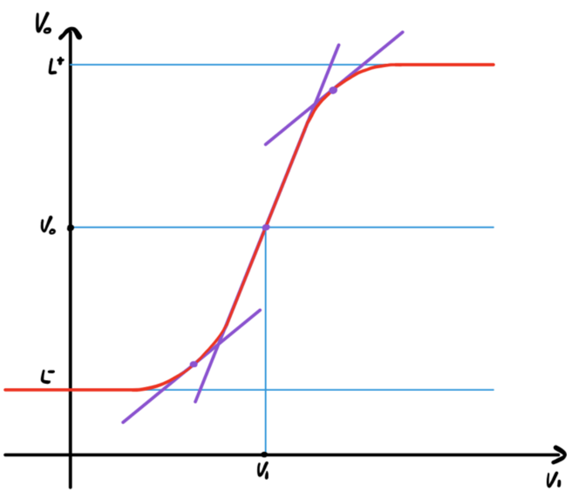
$$\boxed{L^-, L^+}$$



Per aumentare la dinamica si potrebbe aumentare la tensione in ingresso, ma questo porterebbe ad aumentare la potenza in ingresso e quindi anche la potenza da dissipare. In alternativa, si può diminuire il guadagno, perché una retta meno in pendenza porta ad avere una dinamica di ingresso più ampia.

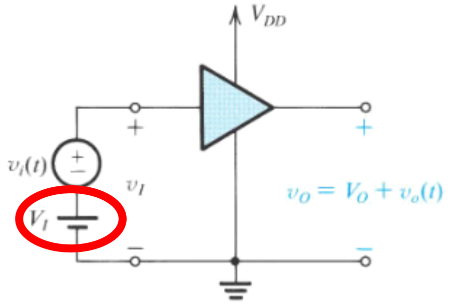
- CARATTERISTICA DI TRASFERIMENTO NON LINEARE E POLARIZZAZIONE:

In generale, non è detto che la funzione di trasferimento lavori sull'origine (tensione in ingresso 0 -> tensione in uscita zero), ma può avere il punto di lavoro spostato. Inoltre, il passaggio dalla zona lineare di amplificazione alla zona di saturazione non è così netto come descritto prima, ma la curva ha gli angoli più smussati. Questo significa che la zona di amplificazione perfetta è ancora maggiormente ridotta, perché nella parte dove la curva si avvicina alla zona di saturazione il guadagno è ridotto (il guadagno A_v è descritto dalla tangente alla curva).
Nel grafico, in rosso la transcaratteristica (ovvero il grafico della funzione di trasferimento), in viola il guadagno nei diversi punti della transcaratteristica.



Inoltre, come detto prima, non sempre l'amplificatore lavora sull'origine, ma spesso il suo punto di lavoro è spostato. Quindi se in questa situazione si riceve un segnale in ingresso (non noto), questo va a colpire la zona di saturazione dell'amplificatore (o comunque non va a colpire il punto centrale della transcaratteristica) e quindi non viene amplificato.

Per risolvere questo problema viene effettuata la polarizzazione dell'amplificatore, aggiungendo nel circuito una batteria, ovvero una tensione costante. In questo modo, quando arriva un segnale in ingresso v_i ha che il sengale fornito all'amplificatore sarà:

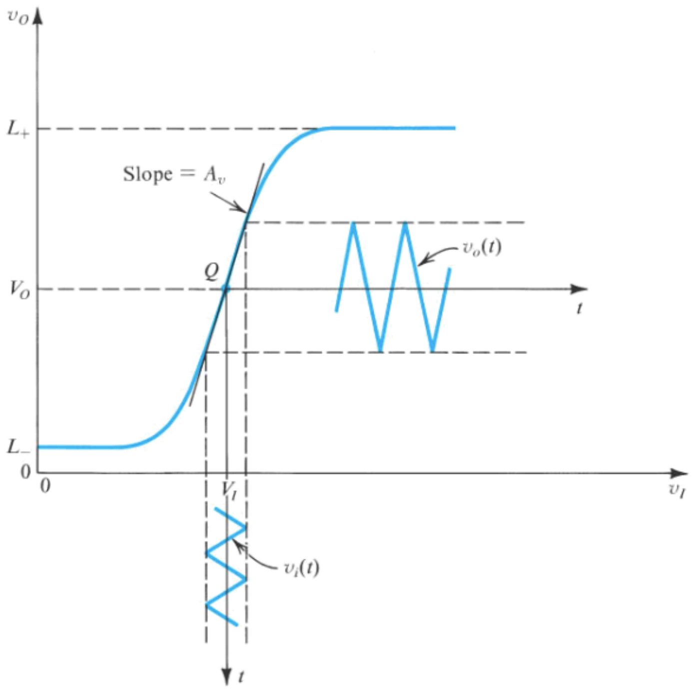


$$\boxed{v_I(t) = V_I + v_i(t)}$$

ovvero si sposta il punto di lavoro del segnale in ingresso, sul punto di lavoro forzato attraverso la batteria V_I.
Di conseguenza, si ottiene:

$$\boxed{v_O(t) = V_O + v_o(t)}$$

Quindi, l'uscita sarà la forma d'onda dell'ingresso, centrata in V_O, che è il valore provocato dalla presenza di una tensione costante in ingresso.
La componente costante nel tempo, di polarizzazione, si indica con la lettera e il pedice maiuscoli.



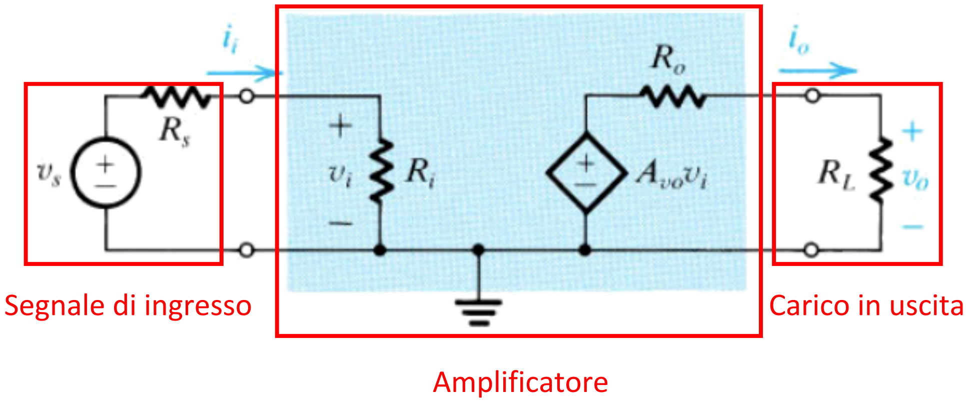
Quindi, con la polarizzazione si sposta il punto di lavoro dell'amplificatore al centro della transcaratteristica. In questo modo, qualsiasi segnale in ingresso va a colpire il punto centrale della transcaratteristica e viene amplificato.

- Caratteristica delle impedenze di ingresso e uscita:

Gli altri due parametri, oltre la funzione di trasferimento, da scegliere per progettare un amplificatore, sono l'impedenza di ingresso e l'impedenza di uscita.

- AMPLIFICATORE DI TENSIONE:

Nel caso di un amplificatore di tensione, si ha una tensione in ingresso e una tensione in uscita amplificata. Modellando l'amplificatore con una rete due porte si ottiene (considerando anche il segnale di ingresso e il carico in uscita) il seguente schema:



Come si vede dallo schema, il segnale in ingresso v_s (non noto) ha con sé una resistenza R_s (perché è un generatore di tensione reale), quindi la v_i in ingresso non è pari alla v_s, ma segue la regola del partitore di tensione:

$$v_i = v_s \frac{R_i}{R_i + R_s}$$

Quindi, per avere in ingresso all'amplificatore una tensione quanto più vicina possibile a quella del segnale, è necessario che il rapporto $\frac{R_i}{R_i+R_s} \to 0$, e quindi che:

$$R_i \gg R_s$$

Dato che la resistenza in ingresso non è nota, l'obiettivo è fare $R_i \to \infty$.

Per quanto riguarda l'uscita, il segnale v_o non è pari al segnale $A_v v_i$, ma segue la regola del partitore di tensione:

$$v_0 = A_v v_i \frac{R_L}{R_L + R_o}$$

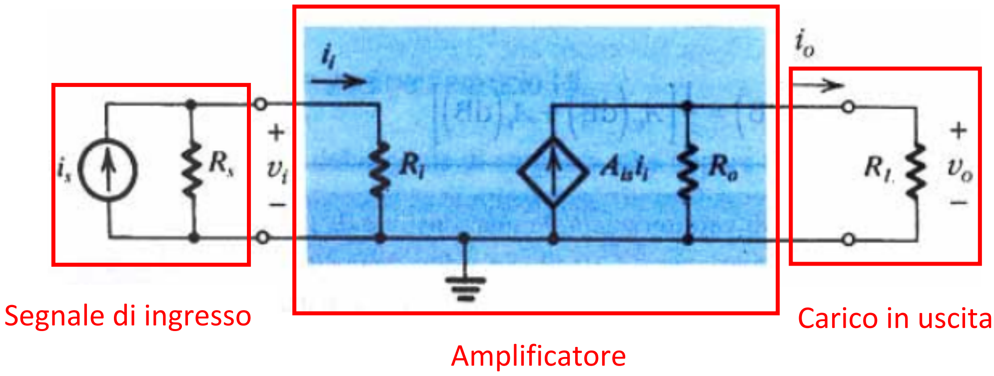
Quindi, per avere in uscita all'amplificatore una tensione quanto più vicina possibile a quella effettivamente amplificata, è necessario che il rapporto $\frac{R_L}{R_L+R_o} \to 0$, e quindi che:

$$R_o \ll R_L$$

Dato che la resistenza in uscita non è nota, l'obiettivo è fare $R_o \to 0$.

- AMPLIFICATORI DI CORRENTE:

In modo analogo all'amplificatore di tensione, abbiamo che un amplificatore di corrente (con il segnale in ingresso e il carico in uscita) si presenta nel seguente modo:



Come si vede dallo schema, il segnale in ingresso i_s (non noto) ha con sé una resistenza R_s (perché è un generatore di corrente reale), quindi la i_i in ingresso non è pari alla i_s, ma segue la regola del partitore di corrente:

$$i_i = i_s \frac{R_s}{R_s + R_i}$$

Quindi, per avere in ingresso all'amplificatore una corrente quanto più vicina possibile a quella del segnale, è necessario che il rapporto $\frac{R_s}{R_s+R_i} \to 0$, e quindi che:

$$R_i \ll R_s$$

Dato che la resistenza in ingresso non è nota, l'obiettivo è fare $R_i \to 0$.

Per quanto riguarda l'uscita, il segnale i_o non è pari al segnale $A_i i_i$, ma segue la regola del partitore di corrente:

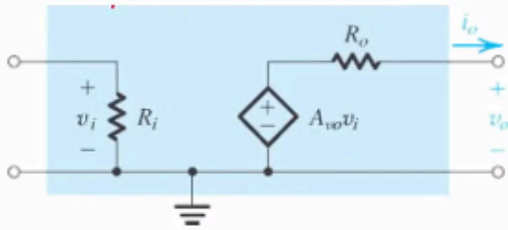
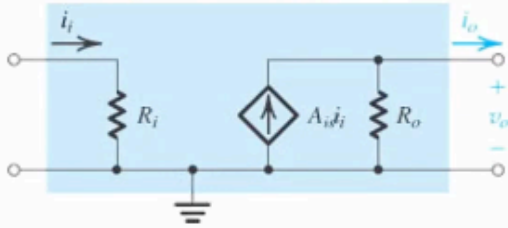
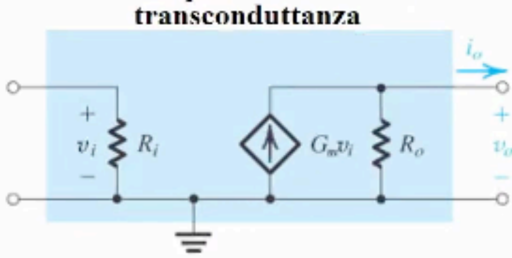
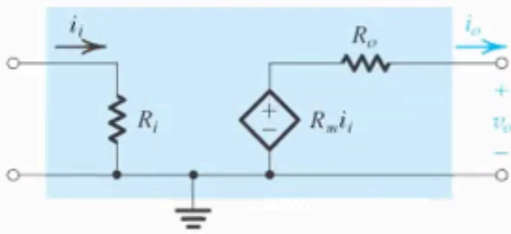
$$i_0 = A_i i_i \frac{R_o}{R_o + R_L}$$

Quindi, per avere in uscita all'amplificatore una corrente quanto più vicina possibile a quella effettivamente amplificata, è necessario che il rapporto $\frac{R_o}{R_o+R_i} \to 0$, e quindi che:

$$R_o \gg R_L$$

Dato che la resistenza in uscita non è nota, l'obiettivo è fare $R_o \to \infty$.

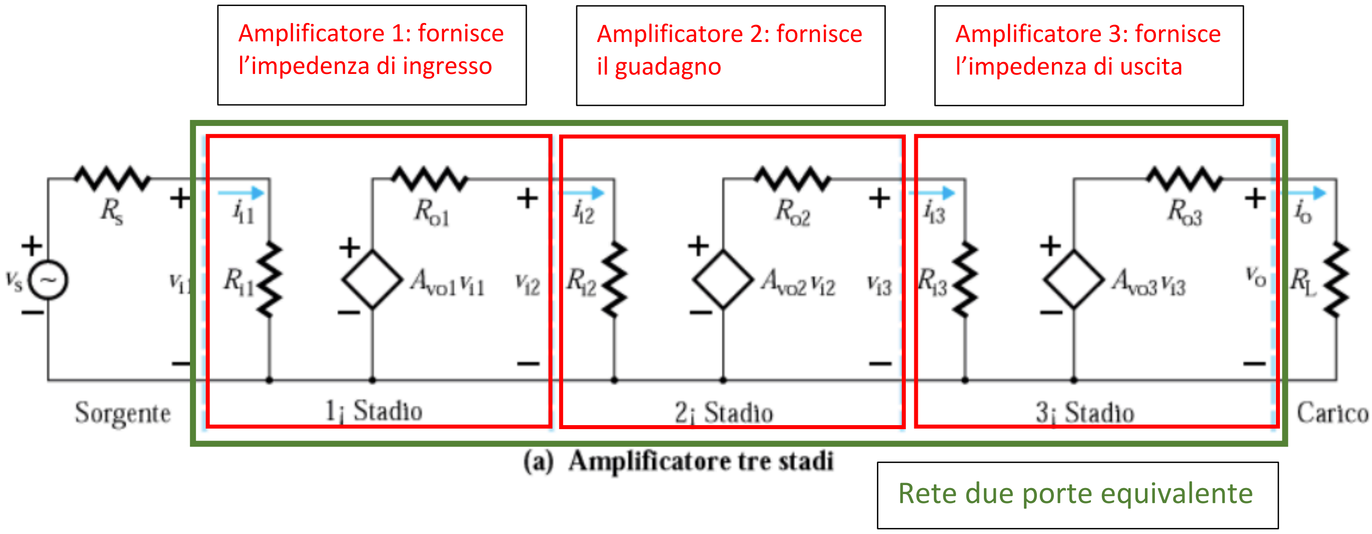
- I QUATTRO TIPI DI AMPLIFICATORE:

	parametri di guadagno	caratteristiche ideali
amplificatore di tensione  	guadagno di tensione a circuito aperto $A_{vo} \equiv \left.\frac{v_o}{v_i}\right\|_{i_o=0}$ (V/V)	$R_i = \infty$ $R_o = 0$
amplificatore di corrente  	guadagno di corrente in cortocircuito $A_{is} \equiv \left.\frac{i_o}{i_i}\right\|_{v_o=0}$ (A/A)	$R_i = 0$ $R_o = \infty$
amplificatore di transconduttanza  	transonduttanza in cortocircuito $G_m \equiv \left.\frac{i_o}{v_i}\right\|_{v_o=0}$ (A/V)	$R_i = \infty$ $R_o = \infty$
amplificatore di transresistenza  	transresistenza a circuito aperto $R_m \equiv \left.\frac{v_o}{i_i}\right\|_{i_o=0}$ (V/A)	$R_i = 0$ $R_o = 0$

- Amplificatore composto da stadi in cascata:

Soddisfare tutte le richieste di progetto per la funzione di trasferimento (il guadagno), per la resistenza in ingresso e per la resistenza in uscita in un singolo amplificatore è praticamente impossibile. Per questo si progettano degli amplificatori composti da stadi in cascata, ovvero una serie di amplificatori, ognuno dei quali svolge una funzione.

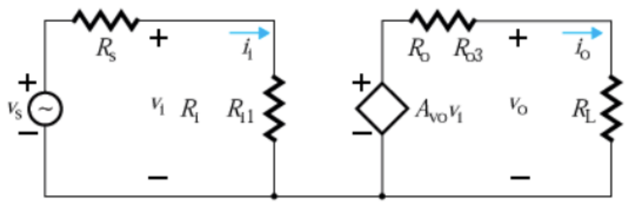
Il seguente circuito è un amplificatore composto da tre stadi, ognuno dei quali è anche esso un amplificatore. Tutto il circuito può essere visto come una rete due porte equivalente:



(a) Amplificatore tre stadi

Il primo stadio, corrispondente al primo amplificatore, fornisce l'impedenza in ingresso.
Il secondo stadio, corrispondente al secondo amplificatore, fornisce il guadagno.
Il terzo stadio, corrispondente al terzo amplificatore, fornisce l'impedenza in uscita.

La rete due porte equivalente può essere schematizzata nel seguente modo:



(b) Amplificatore di tensione equivalente

Dato che l'uscita di uno stadio è l'ingresso di quello successivo, si ottiene che il guadagno complessivo è:

$$\boxed{A_{vo} = A_{v1}A_{v2}A_{v3}}$$

infatti, dato che in generale il guadagno è definito come: $A_v = \frac{tensione\ in\ uscita}{tensione\ del\ segnale\ in\ ingresso} = \frac{v_o}{v_s}$, si ottiene che:

$$\boxed{A_{v1} = \frac{v_{o1}}{v_{i1}} \qquad A_{v2} = \frac{v_{o2}}{v_{i2}} = \frac{v_{o2}}{v_{o1}} \qquad A_{v3} = \frac{v_{o3}}{v_{i3}} = \frac{v_{o3}}{v_{o2}}}$$

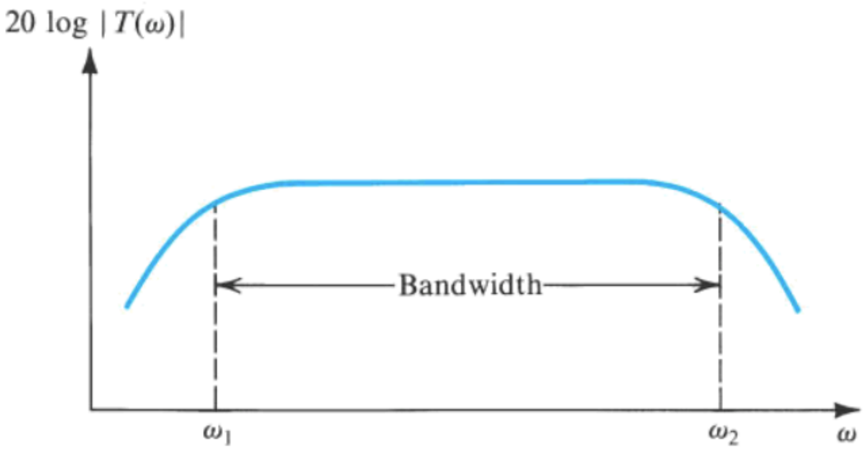
facendo il prodotto di A_{v1}, A_{v2} e A_{v3}, si ottiene quanto scritto sopra.
Quindi, imponendo i guadagni $A_{v1} = A_{v3} = 1$, si ottiene che il guadagno totale è solo quello dato dal secondo stadio.

L'impedenza complessiva di ingresso è solo quella di ingresso dello stadio uno, mentre l'impedenza complessiva di **USCITA** è solo quella di uscita dello stadio tre:

$$\boxed{R_i = R_{i1}} \quad \boxed{R_o = R_{o3}}$$

- Larghezza di banda di un amplificatore:

Un amplificatore è caratterizzato da una larghezza di banda (o banda passante), ovvero da un set di frequenze entro il quale l'amplificatore funziona bene amplificando del valore A_v. Se la frequenza del segnale si trova sopra o sotto al set di frequenze della banda passante, il segnale viene amplificato di meno o non viene amplificato affatto.



La banda del segnale deve essere compresa tra ω_1 $(o\ \omega_L - low)$ e ω_2 $(o\ \omega_H - high)$.

- FREQUNZA ω_H – COMPORTAMENTO PASSA-BASSO:

La frequenza ω_H deriva dal fatto che il circuito che compone l'amplificatore (come tutti i circuiti moderni VLSI – Very Large Scale Integration) hanno dei problemi derivanti dalle capacità parassite. Come già descritto, questi circuiti sono composti da diversi strati di piste elettriche che formano le connessioni, separate da un isolante. In questo modo, le due piste elettriche e l'isolante vanno a formare un condensatore. Quindi i due collegamenti elettrici non sono effettivamente isolati, ma sono in contatto tra loro attraverso un condensatore.
In generale, un condensatore è caratterizzato da una impedenza:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

dove, $\omega = 2\pi f$ è la pulsazione del segnale. Se $\omega \to 0$ si ottiene $Z_C = \infty$ e quindi il condensatore si comporta come una resistenza di valore infinito, ovvero un circuito aperto. Questo significa che le due piste sono effettivamente isolate tra loro.
Ma se ω cresce, l'impedenza Z_C tende a diminuire e quindi le due piste tendono a "parlare" tra loro. Sopra una certa soglia descritta dalla frequenza di taglio ω_H, le due piste elettriche non sono più isolate tra loro, ma vanno in corto circuito.
Quindi, l'amplificatore ha un comportamento passa-basso che deriva dalla frequenza di taglio ω_H, sotto la quale le piste del circuito sono effettivamente isolate tra loro.

- FREQUNZA ω_L – COMPORTAMENTO PASSA-ALTO:

La frequenza ω_L deriva dal fatto che nel circuito vengono inserite di proposito delle capacità (dei condensatori) per svolgere un lavoro preciso.
Come detto prima, gli amplificatori vengono costruiti mettendo in cascata più amplificatori, ognuno dei quali ha una sua dinamica. Questo significa che ogni funzione di trasferimento dei sotto-amplificatori dovrà essere polarizzata con una tensione costante V_I, affinché il punto di lavoro cada al centro della dinamica.

Però, dato che l'uscita di un amplificatore è uguale all'ingresso dell'amplificatore successivo, ognuno di questi in ingresso si trova sia il segnale effettivo da amplificare, sia la componente costante V_O, dovuta dalla polarizzazione dello stadio precedente. La componente V_O si somma alla componente V_{I+1} che effettua la polarizzazione nello stadio successivo, e quindi la altera.
Questo comportamento si ha anche quando il segnale in ingresso è composto da una componente variabile nel tempo e una componente costante, la quale si va a sommare alla componente di polarizzazione del primo amplificatore.

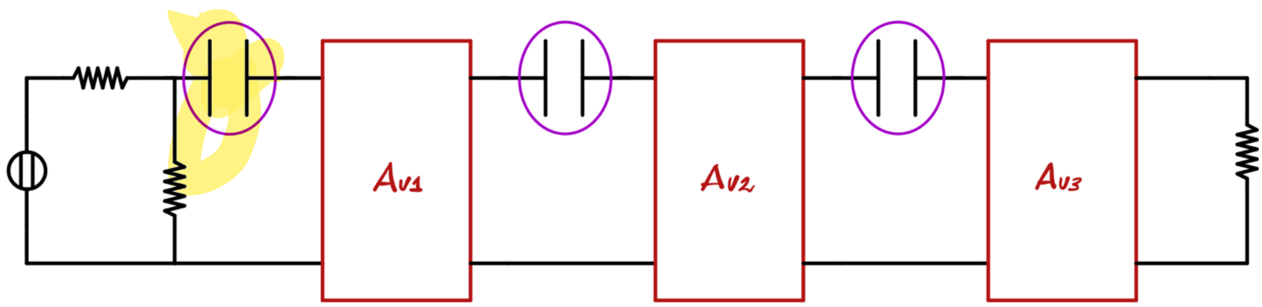
Per evitare questo comportamento si sfruttano dei condensatori. Infatti, un condensatore è caratterizzato da un'impedenza

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

che per $\omega \to 0$ si comporta come un circuito aperto, mentre per $\omega \to \infty$ si comporta come un circuito chiuso. Quindi, un condensatore blocca le componenti costanti nel tempo e fa passare quelle variabili.

Per questo motivo viene introdotta una frequenza ω_L, sopra la quale i segnali passano indisturbati nei condensatori, e sotto la quale i segnali vengono bloccati. Quindi tutti i segnali costanti vengono bloccati tra uno stadio e l'alto.
In questo modo il condensatore ha un comportamento passa-alto.

Lo schema dell'amplificatore a tre stadi in cascata con i condensatori per il comportamento passa-alto è il seguente:



In questo modo, ogni componente costante tra uno stadio e il successivo viene bloccata e la polarizzazione dei vari amplificatori non è alterata dai segnali provenienti dallo stadio precedente.

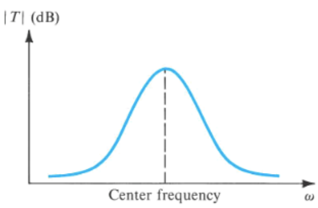
- COMPORTAMENTO DELL'AMPLIFICATORE:

Quindi il comportamento complessivo di un amplificatore è di due tipi:
- passa-basso a causa di capacità parassite;
- passa-alto a causa di capacità inserite appositamente nel circuito.

L'obiettivo è aumentare il più possibile la banda passante, in modo che tutte le frequenze che caratterizzano un segnale siano amplificate correttamente. Inoltre, in un segnale hanno più peso le componenti a bassa frequenza rispetto a quelle ad alta frequenza e di conseguenza, è importante avere ω_L abbastanza bassa. Per avere ω_L sufficientemente bassa, senza che il condensatore diventi un circuito aperto per frequenze piccole ma comunque maggiori di zero, si punta ad aumentare la capacità del condensatore (l'obiettivo è bloccare le frequenze con $\omega = 0$, non quelle con $\omega > 0$ anche se piccola).

In generale, comunque, la banda passante è molto ampia, perché la ω_H si riesce a portarla nell'ordine dei teraHz, mentre la ω_L in genere ha un valore di poche decine di Hz, o anche minore.

Si possono anche gestire le pulsazioni ω_L e ω_H affinché $\omega_L = \omega_H$. In questo modo si ottiene un filtro, ovvero la funzione di trasferimento è centrata su una singola frequenza e passano nell'amplificatore solo le sinusoidi su quella frequenza, mentre le altre vengono bloccate.

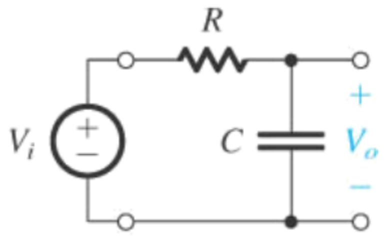


RETI STC

- RETI STC (Single Time Constant):

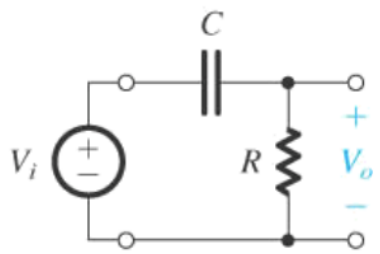
Un esempio di reti STC sono quelle che si hanno utilizzando dei condensatori per gestire le frequenze di taglio degli amplificatori.

Una rete STC passa-basso è composta nel seguente modo:



ed è la rete che si ha negli amplificatori per identificare il comportamento passa-basso. Le capacità parassite sono raggruppate tutte nella capacità C, posta in parallelo all'uscita, ovvero l'uscita viene presa ai capi del condensatore.

Una rete STC passa-alto è composta nel seguente modo:



ed è la rete che si ha negli amplificatori per causare il comportamento passa-alto. La capacità C serve a fare da filtro alle basse frequenze, ed è posta in serie all'uscita, ovvero l'uscita viene presa ai capi della resistenza.

Le due reti sono equivalenti (serie di generatore-resistenza-condensatore, l'ordine della serie non cambia il risultato), la differenza sta dove viene presa l'uscita: nel passa-basso viene presa sul condensatore, nel passa alto viene presa sulla resistenza.
Per capire se una rete è passa-alto o passa-basso basta guardare come è disposta la capacità: se è posta in parallelo all'uscita significa che è una rete passa-basso, se è posta in serie all'uscita significa che è una rete passa-alto.

In alternativa, si può applicare il seguente metodo: si verifica il comportamento del circuito per $\omega = 0$ e per $\omega = \infty$.

Es Circuito Passa-Basso:

- $\omega = \infty$: significa che $Z_C = 0 \rightarrow C$ è un cortocircuito $\rightarrow$ il potenziale in uscita è $V_o = 0$ perché il potenziale preso ai capi di un cortocircuito è nullo.
- $\omega = 0$: significa che $Z_C = \infty \rightarrow C$ è un circuito aperto $\rightarrow$ il potenziale in uscita è $V_o = V_i$.

Quindi abbiamo che per frequenze basse il potenziale in uscita è pari al potenziale in ingresso, mentre per frequenze alte il potenziale in uscita è zero. Quindi questo è un circuito passa-basso.

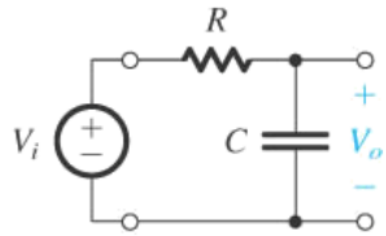
Es Circuito Passa-Alto:

- $\omega = \infty$: significa che $Z_C = 0 \rightarrow C$ è un cortocircuito $\rightarrow$ il potenziale in uscita è $V_o = V_i$ perché il potenziale sarebbe (dal partitore di tensione) $V_o = V_i(R/(R + Z_C))$, ma con $Z_C = 0$ viene $V_o = V_i$.
- $\omega = 0$: significa che $Z_C = \infty \rightarrow C$ è un circuito aperto $\rightarrow$ il potenziale in uscita è $V_o = 0$.

Quindi abbiamo che per alte frequenze il potenziale è pari a quello di ingresso e per basse frequenze il potenziale è pari a zero. Quindi questo è un circuito passa-alto.

- Circuito RC passa-basso:

Analizziamo un circuito RC passa-basso.



La tensione ai capi dell'uscita, seguendo la regola del partitore di tensione, è la seguente:

$$\boxed{V_o = V_i \frac{Z_C}{R + Z_C} = V_i \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}}$$

quindi, la funzione di trasferimento (uscita su ingresso) è la seguente:

$$\boxed{T(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}}$$

dove $\tau = RC$, ovvero la costante di tempo del condensatore.

Il modulo (ovvero il guadagno) della funzione di trasferimento è dato da:

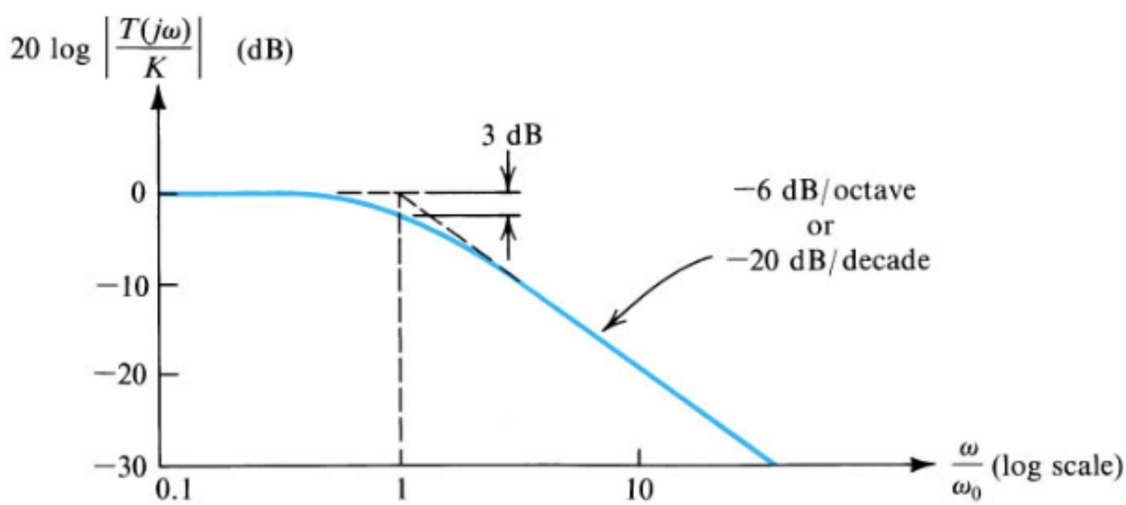
$$\boxed{|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}}$$

dove $\omega_0 = 1/\tau$.

Analizzando asintoticamente il guadagno si ottiene:

- $\omega \ll \omega_0$: $|T(j\omega)| = 1 \quad \rightarrow \quad 20log_{10}|T(j\omega)| = 0$;
- $\omega \gg \omega_0$: $|T(j\omega)| = \frac{\omega_0}{\omega} \quad \rightarrow \quad 20log_{10}|T(j\omega)| = 20log_{10}\left|\frac{\omega_0}{\omega}\right|$;
- $\omega = \omega_0$: $|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad 20log_{10}|T(j\omega)| = 20log_{10}\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = -3dB$;

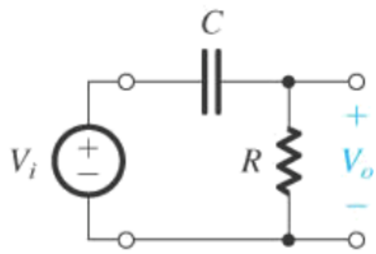
Definendo con K il valore nominale del guadagno (guadagno della funzione di trasferimento per $\omega = 0$) che caratterizza la rete, il diagramma di bode del modulo della funzione di trasferimento è il seguente:



dove si ha:

$$|T(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{2}} \ (\omega = \omega_0) \qquad |T(j\omega)| = \frac{K\omega_0}{\omega} \ (\omega \gg \omega_0) \qquad |T(j\omega)| = K \ (\omega \ll \omega_0)$$

- Circuito RC passa-alto:



Analizziamo un circuito RC passa-basso.

La tensione ai capi dell'uscita, seguendo la regola del partitore di tensione, è la seguente:

$$\boxed{V_o = V_i \frac{R}{R + Z_C} = V_i \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}}$$

quindi, la funzione di trasferimento (uscita su ingresso) è la seguente:

$$\boxed{T(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}}$$

dove $\tau = RC$, ovvero la costante di tempo del condensatore.

Il modulo (ovvero il guadagno) della funzione di trasferimento è dato da:

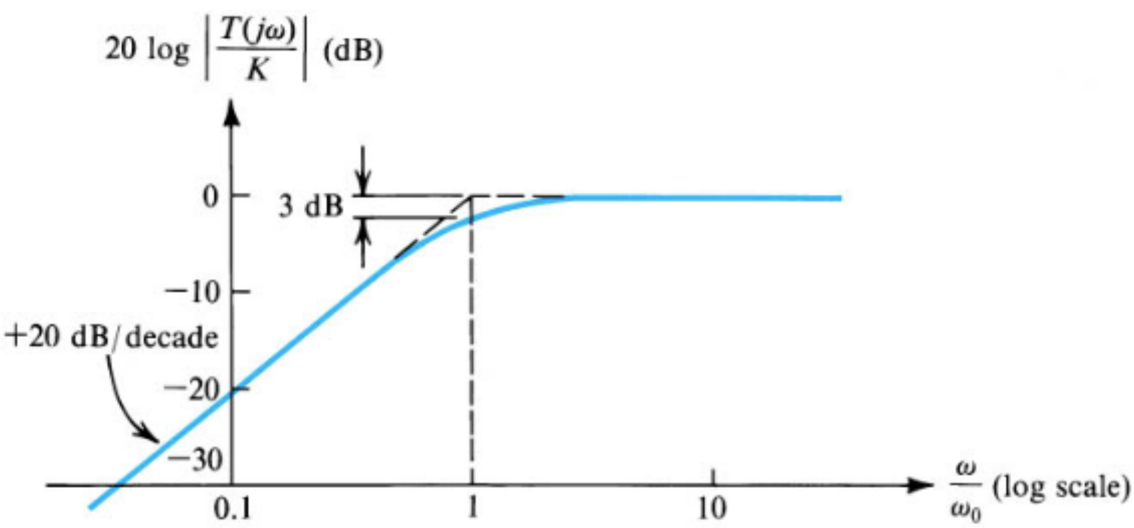
$$\boxed{|T(j\omega)| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} = \frac{\omega/\omega_0}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}}$$

dove $\omega_0 = 1/\tau$.

Analizzando asintoticamente il guadagno si ottiene:

- $\omega \ll \omega_0$: $|T(j\omega)| = \frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow 20log_{10}|T(j\omega)| = 20log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$;
- $\omega \gg \omega_0$: $|T(j\omega)| = 1 \rightarrow 20log_{10}|T(j\omega)| = 0$;
- $\omega = \omega_0$: $|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow 20log_{10}|T(j\omega)| = 20log_{10}\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = -3dB$;

Definendo con K il valore nominale del guadagno (guadagno della funzione di trasferimento per $\omega = 0$) che caratterizza la rete, il diagramma di bode del modulo della funzione di trasferimento è il seguente:



dove si ha:

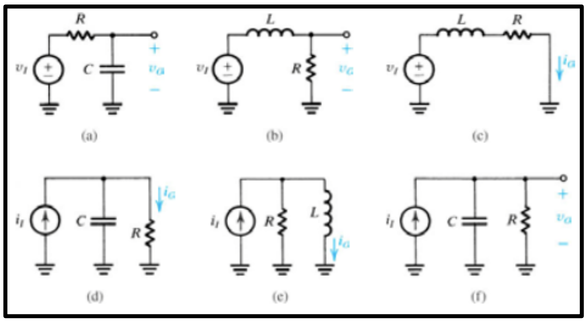
$$|T(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{2}}\ (\omega = \omega_0) \qquad |T(j\omega)| = \frac{K\omega}{\omega_0}\ (\omega \ll \omega_0) \qquad |T(j\omega)| = K\ (\omega \gg \omega_0)$$

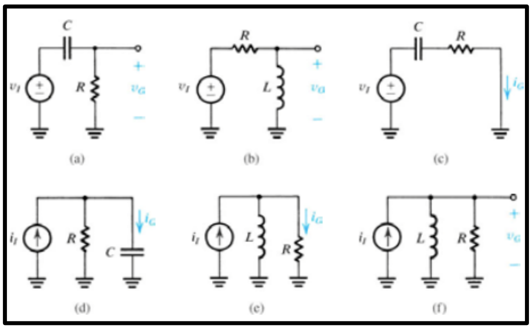
- Regole per trovare il tipo di circuito STC:

In generale, la regola per capire se un circuito STC è di tipo passa-basso o passa-alto è la seguente:

Verifica per	Sostituire	Il circuito è passa-basso se	Il circuito è passa-alto se
$\omega = 0$	C con un circuito aperto	L'uscita è finita	L'uscita è zero
	L con un cortocircuito		
$\omega = \infty$	C con un cortocircuito	L'uscita è zero	L'uscita è finita
	L con un circuito aprto		

Degli esempi di reti STC passa-basso (sinistra) e passa-alto (destra) sono:



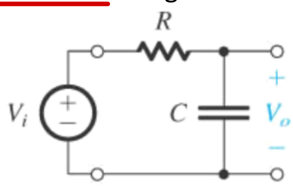


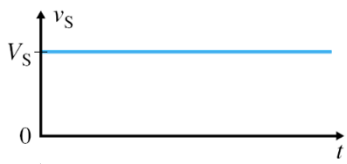
- Risposta al gradino nei circuiti STC:

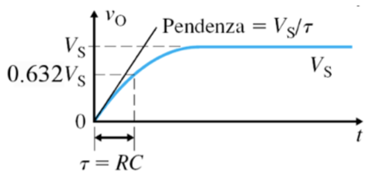
- RISPOSTA AL GRADINO PER UN CIRUCITO RC PASSA-BASSO:

In un circuito RC di tipo passa-basso, passano le frequenze sotto una certa soglia; quindi, una frequenza infinita non riesce a passare, mentre delle frequenze costanti si. Per questo la risposta al gradino è fatta nel seguente modo:

- per $t < t_0$: il segnale è zero e la risposta è zero;
- per $t = t_0^+$: il segnale è pari a V_S, ma nel circuito non passa la variazione istantanea; quindi, si ha un transitorio fino a 5τ;
- per $t > 5\tau$: il segnale è sempre pari a V_S e la risposta è pari a V_S.



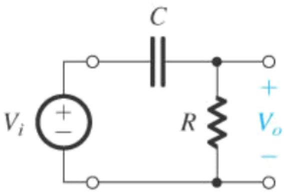


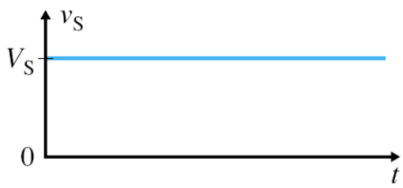


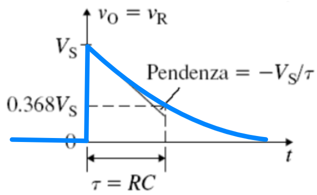
- RISPOSTA AL GRADINO PER UN CIRUCITO RC PASSA-BASSO:

In un circuito RC di tipo passa-alto, passano le frequenze sopra una certa soglia; quindi, una frequenza costante non riesce a passare, mentre delle frequenze infinite si. Per questo la risposta al gradino è fatta nel seguente modo:

- per $t < t_0$: il segnale è costante (zero) e la risposta è zero;
- per $t = t_0$: il segnale è pari a V_S. Si ha un cambio istantaneo quindi il segnale in quell'istante ha frequenza infinita. Questo segnale passa, quindi la risposta è pari a V_S.
- per $t = t_0^+$: il segnale è di nuovo costante; quindi, questa componente non passa nel circuito. Si ha un transitorio di 5τ che porta il segnale da V_S a 0. Per $t > 5\tau$: il segnale è sempre pari a V_S e la risposta è 0.



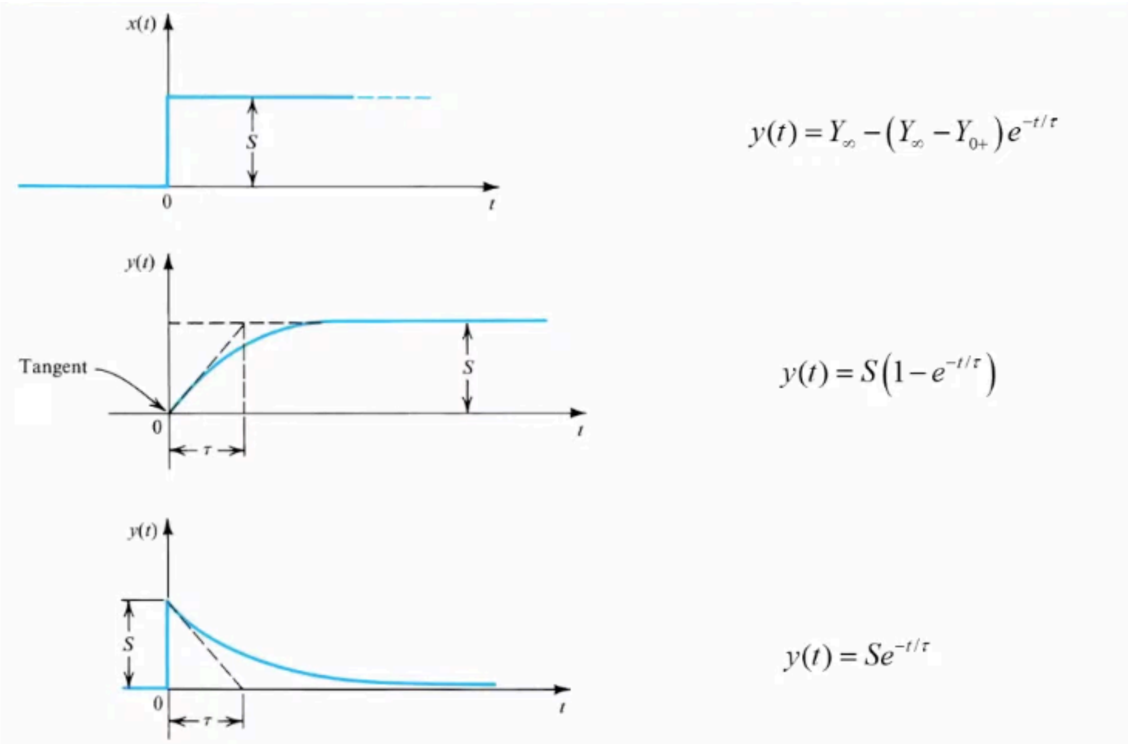




Quindi, riassumendo, l'andamento esponenziale si ha sia nel passa-basso che nel passa alto. Come detto prima, il circuito è lo stesso, ma cambia solo il punto di vista da dove viene presa l'uscita. Il circuito, quindi, può essere descritto dall'equazione:

$$\boxed{V_S = V_R + V_C}$$

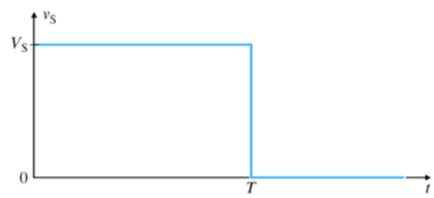
Se V_C, ovvero il potenziale preso ai capi del condensatore (circuito passa-basso), segue un andamento esponenziale crescente, allora V_R, ovvero il potenziale preso ai capi della resistenza (circuito passa-alto), segue un andamento esponenziale decrescente (tutto in risposta al gradino).

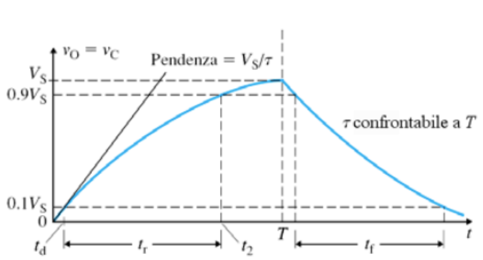


- Risposta all'impulso nei circuiti STC:

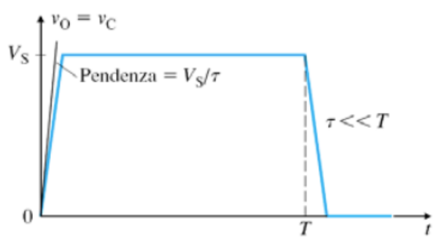
- RISPOSTA ALL'IMPULSO PER UN CIRCUTO RC PASSA-BASSO:

Un impulso è una forma d'onda come il gradino, ma che dopo un certo tempo torna a zero. La risposta all'impulso quindi presenta due esponenziali, il primo crescente e il secondo decrescente. A seconda di quanto il periodo dell'impulso è confrontabile rispetto alla durata del transitorio, la forma d'onda in uscita è più o meno deformata rispetto a quella dell'ingresso:

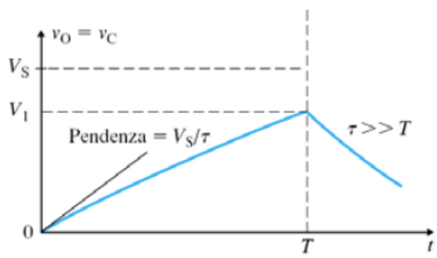




Periodo confrontabile al transitorio



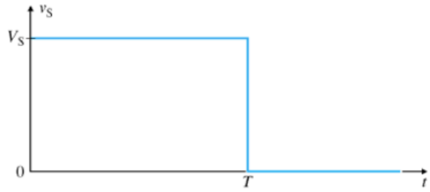
Periodo molto maggiore del transitorio



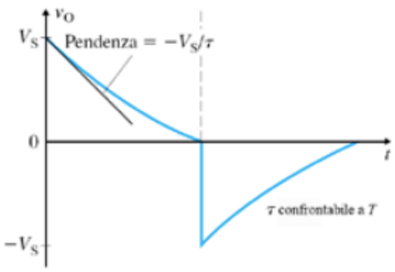
Periodo molto minore del transitorio

Per fare in modo che τ sia molto minore del periodo, e quindi per avere un'uscita simile all'ingresso, devo fare in modo che le capacità parassite siano molto piccole.

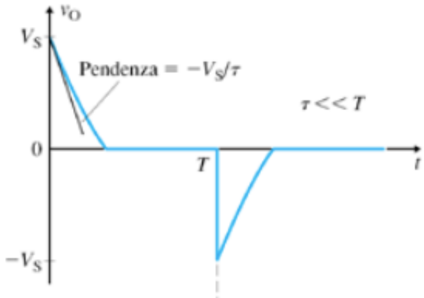
- RISPOSTA ALL'IMPULSO PER UN CIRCUTO RC PASSA-ALTO:



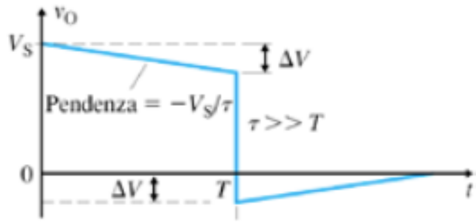
Un impulso è una forma d'onda come il gradino, ma che dopo un certo tempo torna a zero. La risposta all'impulso, quindi, presenta un esponenziale decrescente che parte da V_S e va a zero e successivamente un esponenziale crescente che parte da $-V_S$ e torna a zero. Il primo parte da V_S perché l'impulso va da 0 a V_S istantaneamente, mentre il secondo parte da $-V_S$ perché l'impulso va da 0 a $-V_S$ istantaneamente. A seconda di quanto il periodo dell'impulso è confrontabile rispetto alla durata del transitorio, la forma d'onda in uscita è più o meno deformata rispetto a quella dell'ingresso:



Periodo confrontabile al transitorio



Periodo molto maggiore del transitorio



Periodo molto minore del transitorio

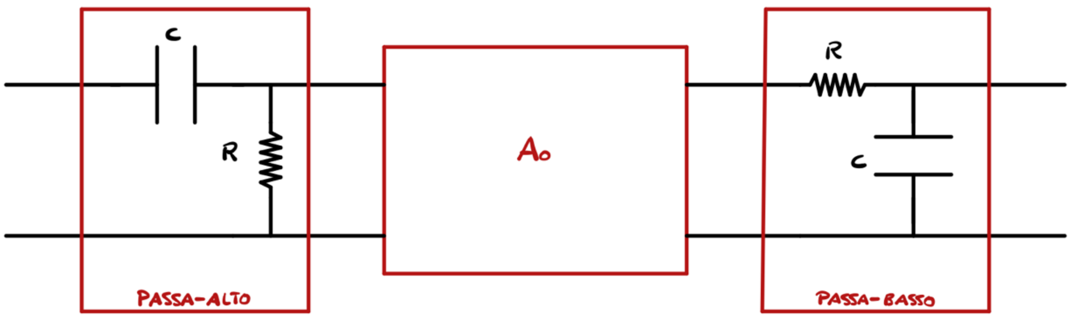
Per fare in modo che τ sia molto maggiore del periodo, e quindi per avere un'uscita simile all'ingresso, devo fare in modo che le capacità aggiunte nel circuito siano molto alte (fare questo è difficile perché si occupa area di chip, quindi se si può si evita).

- Calcolare il guadagno di un amplificatore:

Come detto, un amplificatore ha un comportamento bivalente:

- passa-basso a causa delle capacità parassite;
- passa-alto a causa delle capacità aggiunte;

Quindi, schematizzando il circuito di un amplificatore si ottiene:

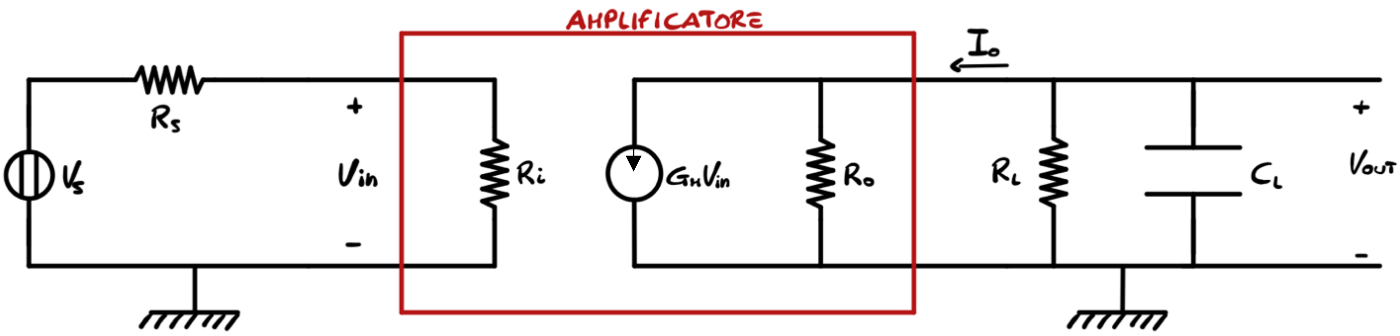


dove nei circuiti passa-alto e passa-basso sono state riassunti i comportamenti di questo tipo dell'amplificatore.
I circuiti passa-alto e passa-basso hanno un loro guadagno, ed il guadagno complessivo è dato dal prodotto dei tre guadagni (passa-alto - A_0 - passa-basso). Quindi, per analizzare quando vale il guadagno dell'amplificatore nella banda passante (ovvero A_0 , il guadagno che si ha tra il comportamento passa-alto e passa-basso) bisogna mettere i guadagni del passa-alto e del passa-basso pari a 1. Per mettere il guadagno a 1 nel:

- passa-alto: bisogna sostituire il condensatore con un cortocircuito;
- passa-basso: bisogna sostituire il condensatore con un circuito aperto.

Esercizio:

Calcoliamo il guadagno a centro banda (banda passante) del seguente amplificatore



dove conosciamo $G_M = \frac{I_0}{V_{in}} = 5\ \frac{mA}{V}$, $R_s = 50\Omega$, $R_{in} = R_o = R_L = 10k\Omega$, $C_L = 10nF$. Calcolare $A_V = \frac{V_{out}}{V_s}$, ovvero il guadagno a centro banda. Calcolare il guadagno a centro banda significa calcolare il rapporto tra l'uscita e l'ingresso, quando l'ingresso ha una frequenza compresa nella banda passante; quindi, bisogna annullare gli effetti dei condensatori che introducono un comportamento di tipo passa-alto o passa-basso.

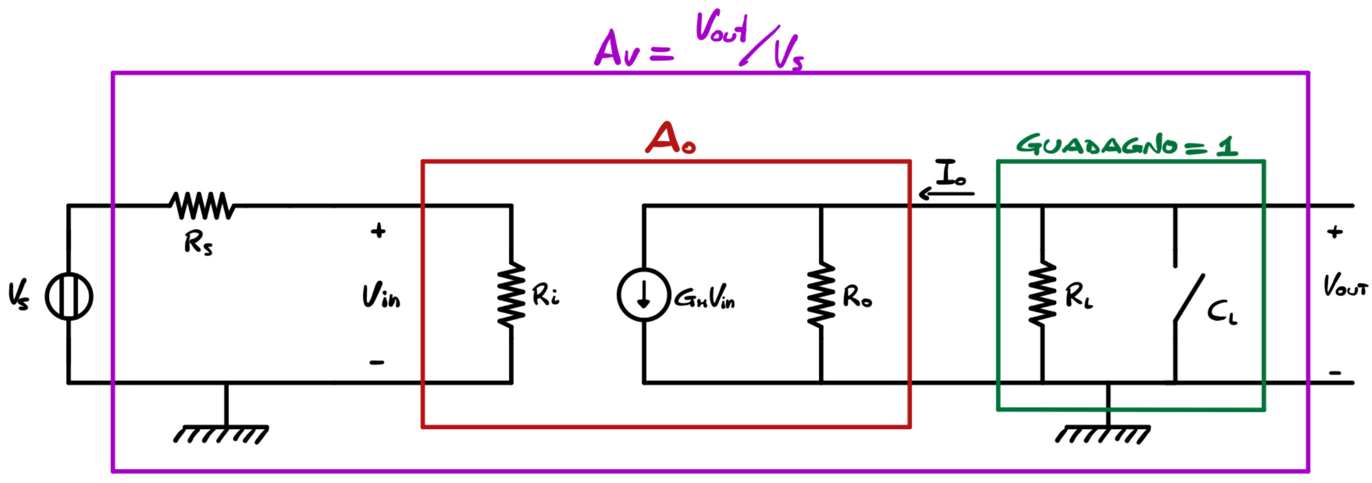
In questo circuito è presente un solo condensatore C_L, il quale introduce un comportamento passa-basso perché è in parallelo all'uscita. In alternativa si può fare la seguente analisi:

- $\omega = 0 \rightarrow Z_C = \infty \rightarrow C_L$ è un circuito aperto $\rightarrow$ $V_{out} = I * R_o // R_L$;
- $\omega = \infty \rightarrow Z_C = o \rightarrow C_L$ è un cortocircuito $\rightarrow$ $V_{out} = 0$;

quindi non passano le frequenze alte, mentre le frequenze basse si → comportamento passa-basso.

Quindi, il condensatore C_L non interviene quando le frequenze sono minori di un certo valore ω_H (perché ha un comportamento passa-basso), entro le quali il condensatore ha un'impedenza molto più alta delle altre in gioco e quindi può essere trascurata.
Quindi per calcolare il guadagno bisogna sostituire il condensatore un circuito aperto, così da trascurarne l'effetto.

In questo modo, si ha che:

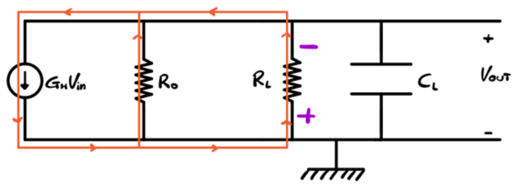


il guadagno del circuito passa basso diventa pari a 1, e quindi il guadagno dell'amplificatore diventa pari al guadagno di tutto il circuito, quindi: $A_0 = \frac{V_{out}}{V_s}$.

Calcoliamo V_{out}: in generale $V_{out} = I_L * R_L$, dove I_L è la corrente che scorre su R_L prodotta dal generatore di corrente $I = G_M V_{in}$. Per la regola del partitore di corrente, e tenendo conto del verso della corrente si ottiene:

$$I_L = -I\frac{R_o}{R_o + R_L}$$

Il segno meno deriva dal fatto che il generatore di corrente fa scorrere la corrente dall'alto verso massa, e quando questa passa in R_L va da massa verso l'alto, e genera una caduta di potenziale positiva dove entra rispetto a dove esce, ovvero di segno opposto rispetto a quello scelto per V_{out}.



Quindi si ottiene:

$$V_{out} = \left(-I\frac{R_o}{R_o + R_L}\right) * R_L$$

In alternativa, si poteva vedere le due resistenze R_o e R_L sono in parallelo, ottenendo lo stesso risultato.
Quindi:

$$V_{out} = \left(-I\frac{R_o}{R_o + R_L}\right) * R_L = -G_M V_{in} * \frac{R_o}{R_o + R_L} * R_L = -25 * V_{in}$$

La tensione V_{in} può essere vista come una partizione di V_s tra le due resistenze R_s e R_i:

$$V_{in} = V_s\frac{R_i}{R_s + R_i}$$

essendo $R_i \ll R_s$, si deve semplificare la relazione, in quanto R_i è a tutti gli effetti trascurabile:

$$V_{in} = V_s\frac{R_i}{R_s + R_i} \approx V_s$$

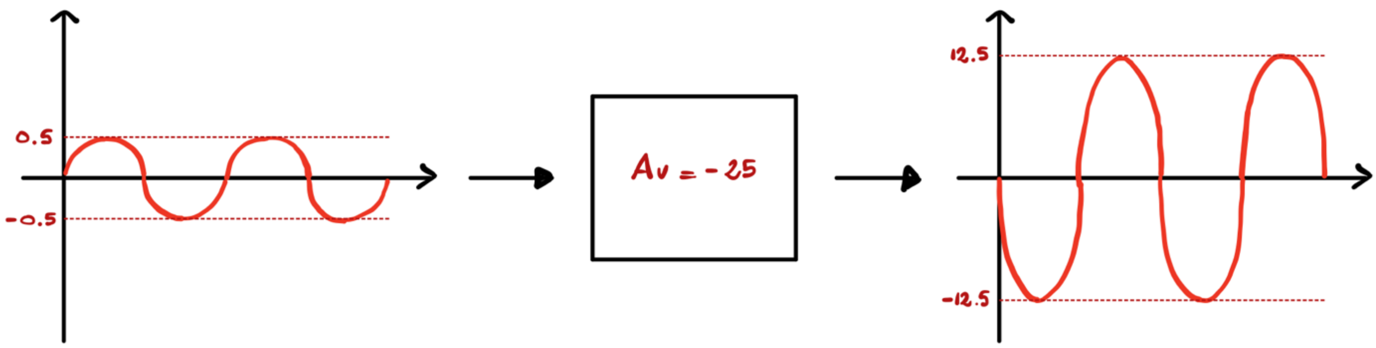
Sostituendo questa relazione in V_{out}:

$$V_{out} = \left(-I\frac{R_o}{R_o + R_L}\right) * R_L = -G_M V_{in} * \frac{R_o}{R_o + R_L} * R_L = -25 * V_{in} = -25 * V_s$$

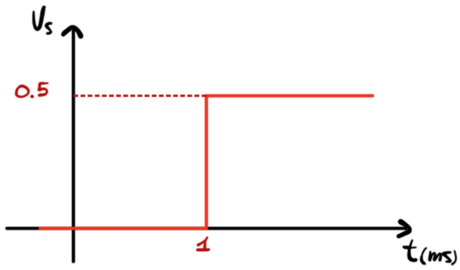
Quindi, il guadagno dell'amplificatore è dato da:

$$A_v = \frac{V_{out}}{V_s} = -25$$

Un guadagno negativo evidenzia uno sfasamento di $-180°$. Quindi, ad esempio, con un ingresso come quello in figura (a sinistra) si ottiene l'uscita in figura (a destra):



Analizziamo ora come si comporta il circuito iniziale quando l'ingresso V_s è un gradino di tensione, calcolando la tensione in uscita V_{out}.



La tensione V_{out} è la tensione ai capi di un condensatore quindi si può applicare il metodo asintotico per calcolarla:

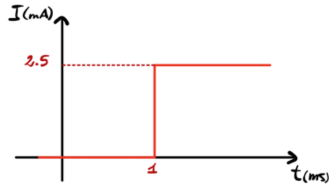
$$V_{out} = V_C = V_C(\infty) - [V_C(\infty) - V_C(t_0^-)]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

sapendo che tra l'istante t_0^- e t_0^+ non cambia il potenziale sulle armature del condensatore.

Calcolare la tensione in uscita a t_0^- e a $t = \infty$, ovvero dove il segnale in ingresso è costante, equivale a considerare il condensatore come un circuito aperto.
Abbiamo che:

- $t = t_0^-$: la tensione in ingresso è $V_s = 0$ e quindi $V_{out} = 0$;
- $t = \infty$: la tensione in ingresso è pari a $V_s = 0.5\ V$. Per lo stesso discorso di prima $V_{out} = \left(-I\frac{R_o}{R_o+R_L}\right) * R_L$.
  La corrente $I = G_M V_{in} = G_M V_s$ (perché $V_{in} \approx V_s$ per il discorso fatto prima), segue il seguente andamento:
  - per $t < t_0 \rightarrow I = 0$;
  - per $t > t_o \rightarrow I = G_M V_s = 5\ \frac{mA}{V} * 0.5\ V = 2.5\ mA$

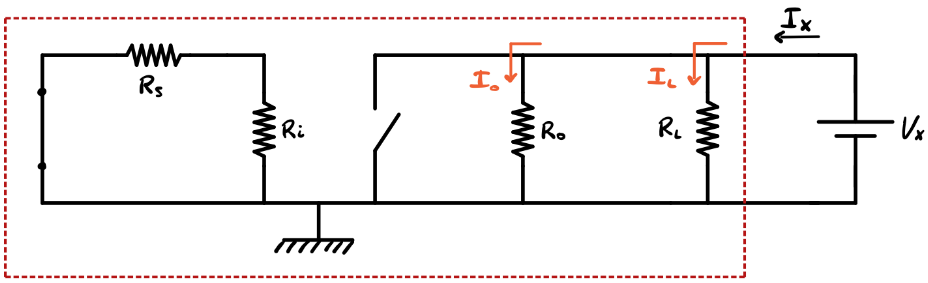
  e rimane a $2.5\ mA$ per $t = \infty$.



Quindi, si ottiene $V_{out} = \left(-I\frac{R_o}{R_o+R_L}\right) * R_L = -2.5\ mA * \frac{10\ k\Omega}{(10+10)\ k\Omega} * 10\ k\Omega = -12.5\ V$.

Questi valori potevano essere calcolati come $V_{out} = A_v * V_s$, dato che sono a frequenza costante e quindi rientrano sicuramente nella banda passante dell'amplificatore e vengono amplificati con il guadagno a centro banda calcolato in precedenza.

Quindi il segnale in uscita parte da $0\ V$ e arriva a $-12.5\ V$ seguendo un andamento esponenziale descritto dalla costante di tempo τ.
La costante di tempo è pari a $\tau = C * R_{eq}$. Per il calcolo della resistenza equivalente, si sostituisce il condensatore C_L con un generatore di tensione costante V_X e si misura la corrente I_X. La resistenza equivalente è data da $R_{eq} = V_X/I_X$. Bisogna anche eliminare tutte le eccitazioni presenti nel circuito, ovvero tutti i generatori di tensione/corrente indipendenti. Quindi bisogna mettere pari a zero V_s e di conseguenza anche V_{in} diventa pari a zero. Dato che il generatore di corrente controllato di questo circuito è pari a $G_M V_{in}$, se $V_{in} = 0 \rightarrow G_M V_{in} = 0$, ovvero non eroga corrente. Un generatore di corrente che non eroga corrente è pari ad un circuito aperto.
Quindi si ottiene:



Quindi, quello che vede V_X è il parallelo tra le due resistenze R_o, R_L. Quindi:

$$R_{eq} = \frac{R_o R_L}{R_o + R_L} = \frac{10 * 10\ k\Omega}{(10+10)k\Omega} = 5k\Omega$$

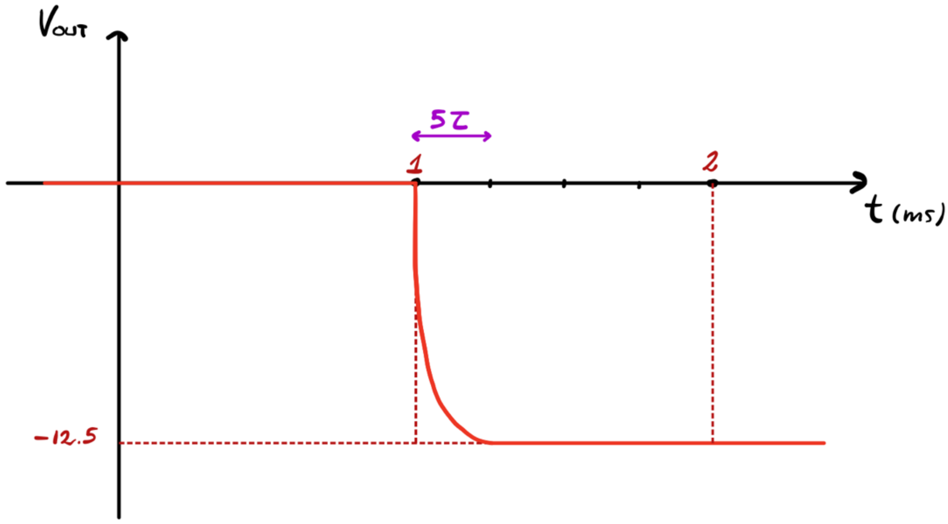
da cui si ottiene:

$$\tau = C * R_{eq} = 10\ nF * 5\ k\Omega = 50\ \mu s$$

Dato che il transitorio di un condensatore è di 5τ, si ottiene che:

$$transitorio = 5\tau = 250\ \mu s = 0.25\ ms$$

Si ottiene quindi il seguente andamento in uscita:



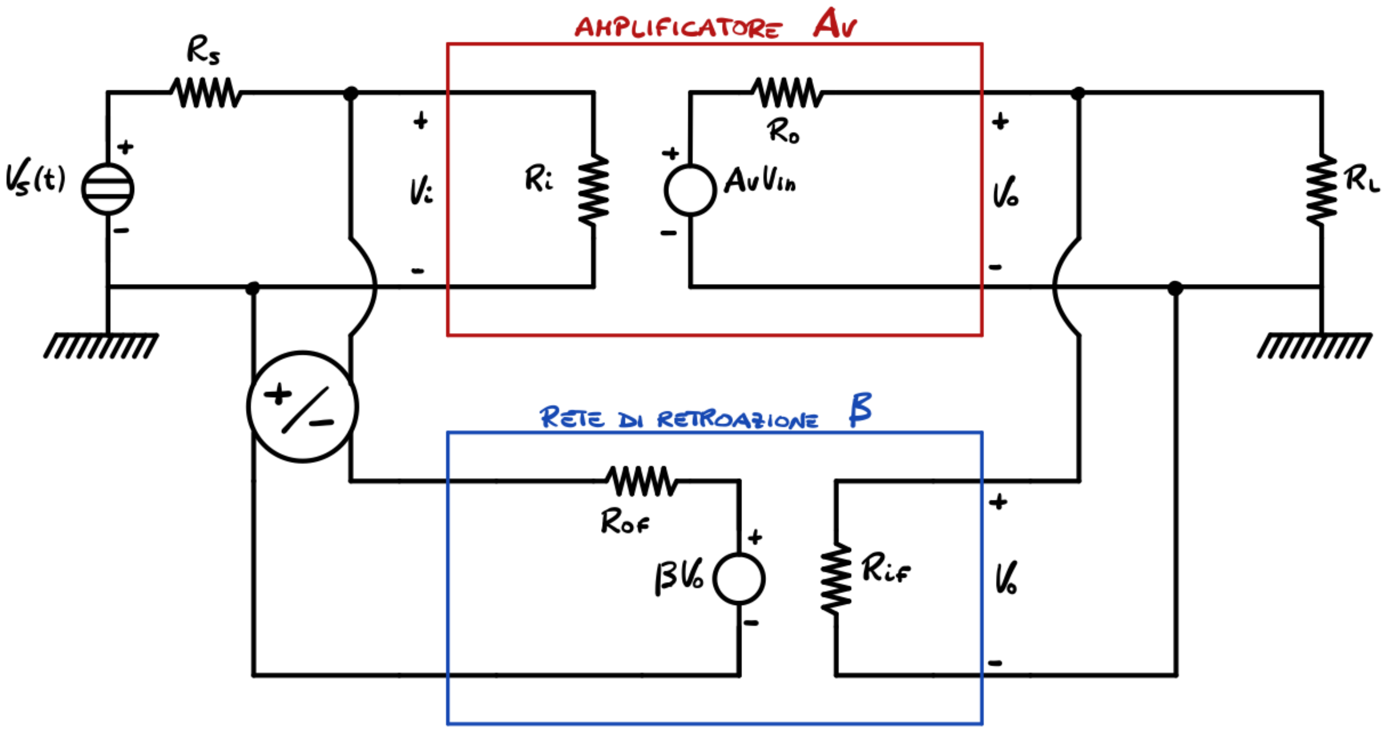
Un analogo esercizio può essere fatto considerando una rete passa-alto prima dell'amplificatore, ovvero considerando un condensatore in serie alla resistenza R_s.

RETROAZIONE

- LA RETROAZIONE PER GLI AMPLIFICATORI:

Nella retroazione l'uscita del sistema viene sommata o sottratta all'ingresso in modo da fornire in ingresso all'amplificatore un segnale derivato da un confronto. La retroazione può essere positiva o negativa e in base a questo può diventare un elemento di stabilità o instabilità per il sistema.

La retroazione in amplificatore si applica nel seguente modo. La rete di retroazione è un amplificatore con guadagno β che prende in ingresso l'uscita dell'amplificatore principale. In uscita restituisce un valore che viene sommato/sottratto attraverso un sommatore al segnale di ingresso dell'amplificatore principale.



- retroazione positiva: in questo caso l'uscita della retroazione si somma all'ingresso dell'amplificatore principale. Se le condizioni di lavoro di A_v cambiano, facendo aumentare V_o, questo tipo di rete porta a divergere, perché si ha un aumento della tensione di uscita, che viene sommata all'ingresso che a sua volta ripassando nell'amplificatore aumenta.
  Con questo tipo di rete l'instabilità viene amplificata, perché basta una piccola variazione di V_o che si arriva alla divergenza del segnale dopo una serie di loop, ovvero porta alla saturazione dell'amplificatore fino ad arrivare a L^+. Analogamente, si ha una saturazione verso L^- se si ha una diminuzione di V_o.

- retroazione negativa: in questo caso l'uscita della retroazione si sottrae all'ingresso dell'amplificatore principale. Una variazione in positivo di V_o entra quindi nella rete di retroazione e all'uscita si sottrae all'ingresso dell'amplificatore; quindi, il segnale in ingresso ad A_v sarà più piccolo e di conseguenza anche la variazione di V_o sarà più piccola. Dopo una serie di loop si arriva al punto tale che la variazione di V_o è stata annullata completamente e la situazione è di nuovo stabile.
  In modo analogo si ha per una variazione in negativo di V_o, che dopo una serie di loop viene annullata.
  Quindi una retroazione negativa riesce a stabilizzare il sistema ed evita di portarlo in saturazione.

Riassumendo, si ha:

In un sistema retroazionato, un segnale proporzionale all'uscita viene riportato in ingresso e viene sommato o sottratto al segnale di ingresso stesso per ottenere l'uscita desiderata.

Retroazione positiva

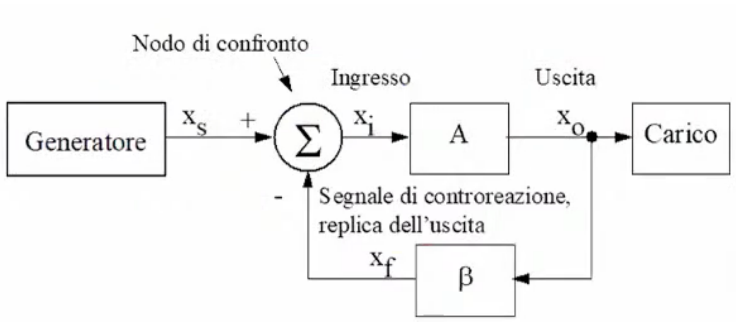
- ✓ *utile per realizzare:*
  - *oscillatori*
  - *multivibratori bistabili*
  - *filtri attivi*
- ✗ *sgradita negli amplificatori lineari*

Retroazione negativa

- ✓ *stabilizzazione del guadagno*
- ✓ *riduzione delle distorsioni non lineari*
- ✓ *aumento o riduzione delle impedenze di ingresso e di uscita*
- ✓ *estensione della banda passante*
- ✗ *riduzione del guadagno*
- ✗ *possibilità di oscillazione*

- Retroazione negativa:

Lo schema di una retroazione negativa è il seguente: l'amplificatore principale guadagna A, mentre quello di retroazione guadagna β.
Tutto questo sistema può essere visto dall'esterno come una rete due porte equivalente che vede in ingresso il segnale x_s e in uscita dà al carico il segnale x_o.



In generale si ha: $\boxed{\begin{cases} x_o = Ax_i \\ x_f = \beta x_o \\ x_i = x_s - x_f \end{cases}}$ e la funzione di trasferimento della rete due porte complessiva è data da:

$$\boxed{A_f = \frac{x_o}{x_s} = \frac{x_o}{x_i + x_f} = \frac{Ax_i}{x_i + \beta x_o} = \frac{Ax_i}{x_i + A\beta x_i} = \frac{A}{1 + \beta A}}$$

dove $1 + \beta A$ è detto *tasso di retroazione* ed è sempre maggiore di 1. Quindi, il guadagno complessivo della rete con retroazione (A_f) è sempre minore del guadagno nominale dell'amplificatore principale della rete (A).
Il *guadagno di anello* è βA, ovvero è il guadagno dopo un singolo loop. Nel caso di retroazione negativa, il guadagno di anello deve essere positivo, in questo modo il segnale di retroazione x_f ha lo stesso segno di x_s, e il segnale differenza x_i risulta minore di x_s.

L'instabilità dell'amplificatore A è dovuta alle condizioni di utilizzo, ma la rete di retroazione è scelta in modo da essere sempre stabile. Nel caso in cui $\beta A \gg 1$ (il guadagno ad anello è molto elevato) risulta:

$$\boxed{A_f = \frac{A}{1 + \beta A} = \frac{1}{\beta}}$$

ovvero, il guadagno della rete complessiva dipende quasi esclusivamente dalla rete di retroazione e quindi è un guadagno molto stabile nel tempo.

- STABILIZZAZIONE DEL GUADAGNO:

Nell'ipotesi che β sia costante, di può determinare analiticamente la stabilizzazione del guadagno. Differenziando entrambi i membri dell'espressione del guadagno si ottiene:

$$dA_f = d\left(\frac{A}{1+\beta A}\right) = \frac{1+\beta A-\beta A}{(1+\beta A)^2}dA = \frac{dA}{(1+\beta A)^2}$$

e dividendo per $A_f = \frac{A}{1+\beta A}$ si ottiene che:

$$\boxed{\frac{dA_f}{A_f} = \frac{dA}{(1+\beta A)^2} * \frac{1+\beta A}{A} = \frac{1}{1+\beta A}\frac{dA}{A}}$$

ovvero, la variazione relativa di A_f è pari alla variazione relativa di A diviso $1+\beta A$. Di conseguenza, la variazione relativa di A è sempre minore della variazione relativa di A_f, quindi si ha stabilità.
Per questo motivo il fattore $1+\beta A$ viene anche chiamato *fattore di stabilizzazione*.

- ALLARGAMENTO DELLA BANDA PASSANTE:

Sappiamo che un amplificatore ha un comportamento passa-basso per le alte frequenze, caratterizzato dalla pulsazione ω_H. Il guadagno di un amplificatore con comportamento passa-basso può essere espresso come:

$$\boxed{A(s) = \frac{A_M}{1+s/\omega_H}}$$

dove $s=j\omega$, A_M è il guadagno a centro banda e ω_H è la frequenza di taglio del comportamento passa-basso.

Applicando a questo amplificatore la retroazione negativa si ottiene:

$$\boxed{A_f(s) = \frac{A(s)}{1+\beta A(s)}}$$

con i seguenti passaggi:

$$A_f(s) = \frac{A(s)}{1+\beta A(s)} = \frac{A_M}{1+s/\omega_H}\frac{1}{1+\beta\frac{A_M}{1+s/\omega_H}} = \frac{A_M}{1+s/\omega_H}\frac{1+s/\omega_H}{1+s/\omega_H+\beta A_M} = \frac{A_M}{1+\beta A_M+s/\omega_H}$$

da cui:

$$A_f(s) = \frac{A_M}{1+\beta A_M} * \frac{1}{1+\frac{s}{\omega_H(1+\beta A_M)}}$$

quindi questo amplificatore ha un guadagno a centro banda pari a:

$$\boxed{A_{Mf} = \frac{A_M}{1+\beta A_M}}$$

ovvero (come visto prima) il guadagno è diminuito, ed ha una frequenza di taglio pari a:

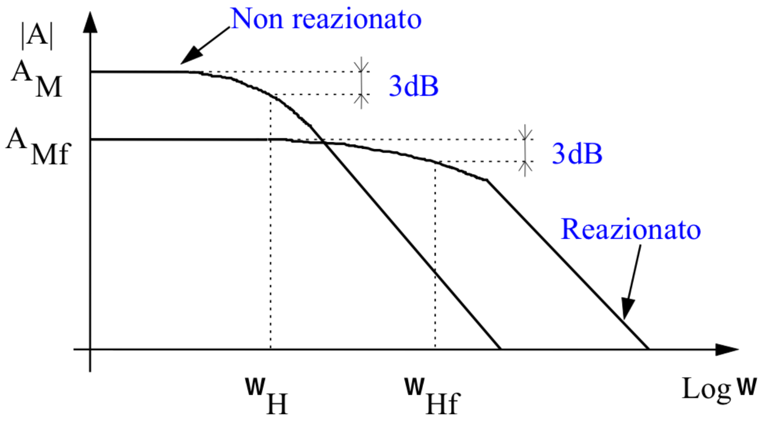
$$\boxed{\omega_{Hf} = \omega_H(1+\beta A_M)}$$

ovvero la frequenza di taglio è aumentata.

Quindi il guadagno diminuisce e la frequenza di taglio aumenta, ma il fattore per cui sono moltiplicate è lo stesso, di conseguenza il prodotto banda-guadagno (che è una caratteristica dell'amplificatore) è invariante qualunque sia il valore β della retroazione:

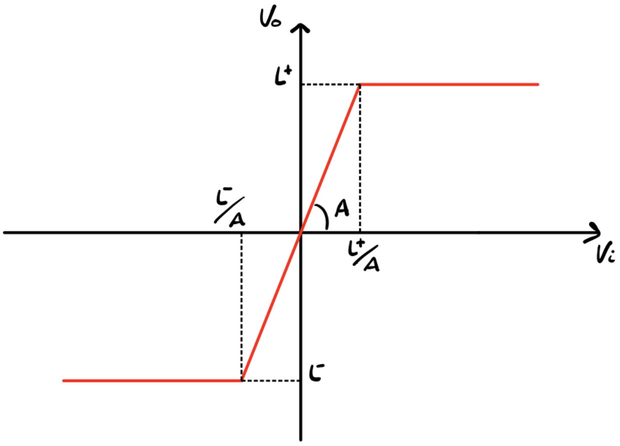
$$\frac{A_M}{1+\beta A_M} * \omega_H(1+\beta A_M) = A_M * \omega_H$$

di conseguenza l'area sotto la curva è sempre la stessa. Ne risulta una curva più "schiacciata e allungata" rispetto a quella originale.

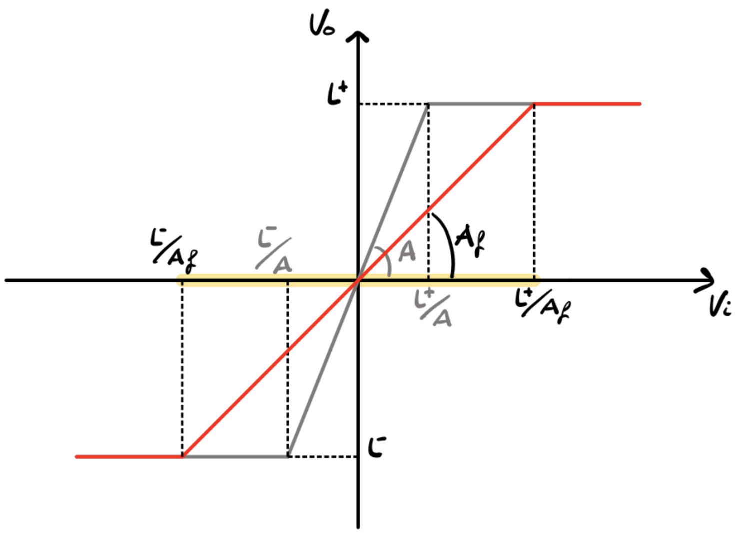


- RIDUZIONE DELLA DISTORSIONE:

La retroazione negativa ha come altro effetto positivo la riduzione della distorsione, ovvero l'aumento della dinamica di ingresso dell'amplificatore.
Un amplificatore non retroazionato ha una dinamica in uscita compresa tra L^+ e L^- e di conseguenza, la dinamica in ingresso è compresa tra L^+/A e L^-/A, ovvero se arrivano in ingresso segnali che hanno un'ampiezza maggiore di L^+/A o minore di L^-/A vanno in saturazione:



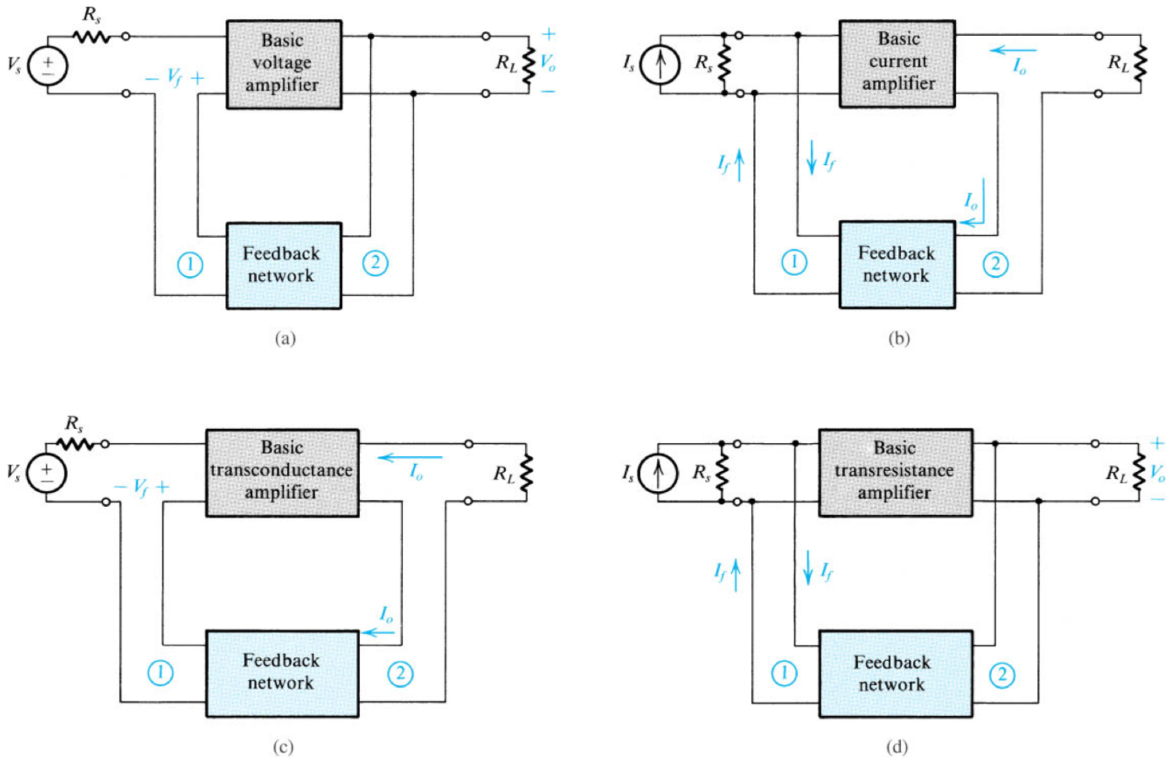
Lo stesso amplificatore, se viene retroazionato ha una diminuzione del guadagno e di conseguenza la zona lineare ha una pendenza minore. Dato che la dinamica di uscita è sempre compresa tra L^+ e L^-, si ha un aumento della dinamica di ingresso che diventa compresa tra L^+/A_f e L^-/A_f. Graficamente:



- AUMENTO O DIMINUZIONE DELLE IMPEDENZE DI INGRESSO E USCITA:

Un altro effetto positivo della retroazione negativa è che modifica le impedenze di ingresso e uscita della rete due porte complessiva in accordo a come servirebbero per i relativi tipo di amplificatore. Ad esempio, un amplificatore di tensione ha bisogno di un'impedenza di uscita molto bassa e attraverso la retroazione questa di abbassa.

Questo avviene se le connessioni vengono fatte nel modo corretto, ovvero come segue:



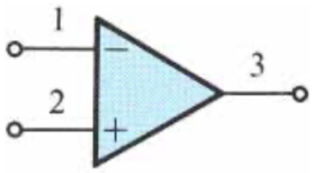
Ad esempio, nell'amplificatore di tensione la connessione in uscita va eseguita come nel disegno perché di va a prendere la tensione in uscita e la si fa entrare nel ramo di retroazione, quindi la tensione deve essere la stessa e di conseguenza la connessione deve avvenire in parallelo. Eseguendo la connessione in parallelo però si ha che l'impedenza di uscita (vista dal carico) è diminuita perché l'impedenza che deriva da due impedenze poste in parallelo. Al contrario, in ingresso la connessione deve essere eseguita in serie perché la tensione in uscita dal ramo di retroazione deve sommarsi (sottrarsi) alla tensione di ingresso e questo avviene solo le tensioni sono in serie. L'impedenza equivalente vista dal segnale di ingresso è quindi la serie di due impedenze (quella del ramo di retroazione e quella dell'amplificatore) e di conseguenza è maggiore di quella del singolo amplificatore; dato che un'impedenza grande in ingresso è desiderata per un amplificatore di tensione, questo è un vantaggio.

Analogo discorso si può fare per le altre configurazioni.

AMPLIFICATORI OPERAZIONALI

- AMPLIFICATORE OPERAZIONALE IDEALE:

Il simbolo circuitale di un amplificatore operazionale è il seguente:

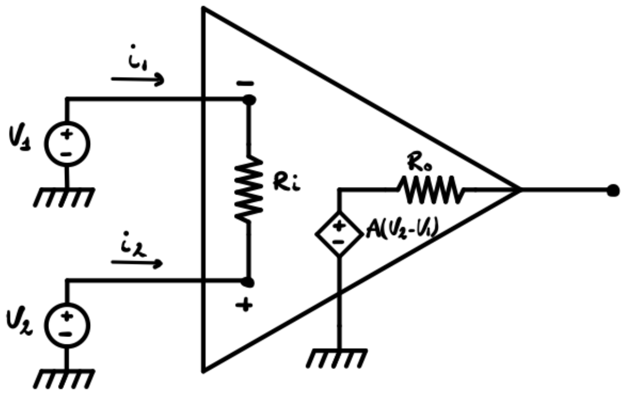


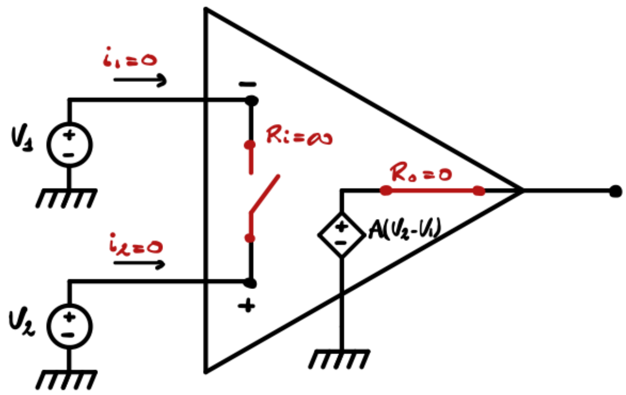
dove la tensione in ingresso è la differenza di potenziale tra il morsetto 2 (a potenziale più alto), detto *non invertente*, e il morsetto 1 (a potenziale più basso), detto *invertente*. Mentre la tensione in uscita è la differenza di potenziale tra il morsetto 3 e la massa (ovvero è il potenziale sul morsetto tre).

Come in qualsiasi amplificatore, è rappresentabile attraverso una rete due porte equivalente dove i parametri di interesse sono impedenza di ingresso e uscita e guadagno.

I parametri di un amplificatore operazionale sono:

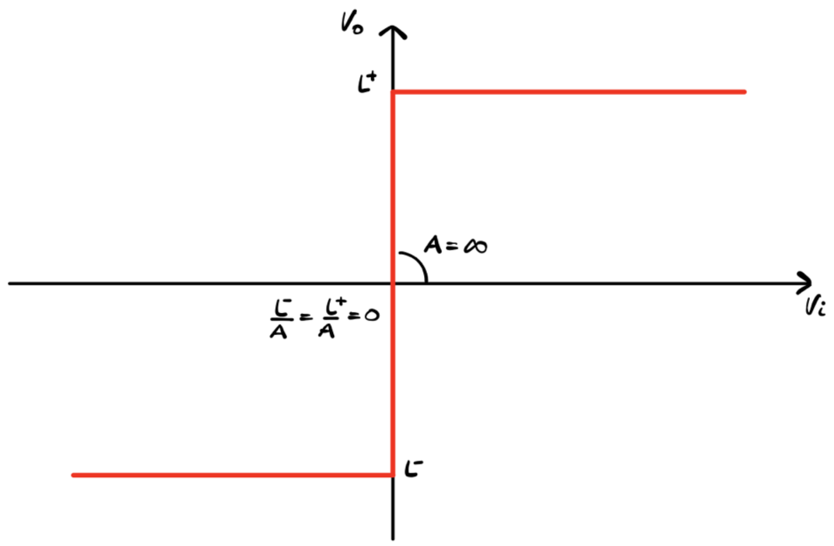
- $R_i = \infty$: l'impedenza di ingresso è tanto alta rispetto alle altre impedenze in gioco da poter essere considerata infinito. Questo significa che tra i due morsetti di ingresso è praticamente presente un circuito aperto, per cui la corrente che entra ed esce nei morsetti 1 e 2 si può considerare nulla: $i_i = 0$.
- $R_o = 0$: l'impedenza di uscita è si può praticamente considerare nulla, ovvero in uscita è presente un cortocircuito. Questo significa che la tensione prodotta dal generatore di tensione controllato $A(V_2 - V_1)$ va totalmente a finire sul carico in uscita e quindi il generatore controllato di comporta come un generatore di tensione ideale.
- $A = \infty$: il guadagno dell'amplificatore operazionale è tanto alto da poter essere considerato infinito, ovvero va molto oltre le tensioni comunemente usate in elettronica. Questo significa che anche un piccolo segnale in ingresso porta immediatamente l'amplificatore in saturazione.





- Dinamica dell’amplificatore operazionale:

Dato che un amplificatore operazionale ha guadagno praticamente infinito ed essendo la dinamica di uscita sempre compresa tra due valori L^+ e L^-, si ha che la dinamica di ingresso diventa nulla:



Dato che $V_i = V_2 - V_1$, questa dinamica permette di verificare solo due cose:

- se $V_i > 0 \rightarrow V_2 > V_1$;
- se $V_i < 0 \rightarrow V_2 < V_1$

ovvero l’amplificatore va in saturazione per qualsiasi segnale in ingresso. L’unico caso in cui lavora in zona lineare è quando $V_2 = V_1 \rightarrow V_i = 0$.
Quindi un amplificatore operazionale semplice può essere solamente usato come comparatore delle tensioni di ingresso.

L’unico modo per risolvere il problema del guadagno infinito è fare una retroazione negativa dell’amplificatore operazionale, che, come visto, riduce il guadagno e di conseguenza aumenta la dinamica di ingresso.
Per creare una retroazione negativa di un amplificatore operazionale bisogna connettere la rete di retroazione al morsetto invertente (ovvero al $-$), mentre se si vuole creare una retroazione positiva bisogna connettere la rete di retroazione al morsetto non invertente (ovvero al $+$).
Quindi, dopo aver retroazionato negativamente l’amplificatore operazionale si ottiene una rete complessiva (amplificatore + retroazione negativa) che ha una dinamica di ingresso non nulla.

L’amplificatore operazionale (preso singolarmente) ha sempre la sua dinamica come descritta sopra, e di conseguenza lavora in zona lineare solo se $V_2 = V_1$.
Se i due morsetti di ingresso sono allo stesso potenziale, significa che questi sono in cortocircuito e di conseguenza la corrente che scorre tra questi dovrebbe essere infinita (perché un cortocircuito è equivalente ad una resistenza nulla e $I = V/R$). Ma, come visto prima, l’impedenza in ingresso di un amplificatore operazionale è infinita ($R_i = \infty$), e quindi non scorre corrente tra i morsetti 1 e 2.
Questo fenomeno tipico dell’amplificatore operazionale è chiamato **cortocircuito virtuale** (stesso potenziale ma corrente nulla).

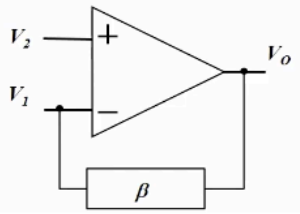
Quindi, quando un amplificatore operazionale lavora in zona lineare (per qualsiasi motivo, ad esempio per una retroazione negativa) si deve applicare il principio del cortocircuito virtuale per il quale i due morsetti di ingresso si trovano allo stesso potenziale (solitamente si segna 0 V su entrambi) e la corrente che scorre attraverso questi è nulla.

Il cortocircuito virtuale vale solo se l’amplificatore operazionale viene portato in qualche modo a lavorare nella sua zona lineare (questo è possibile solo se viene applicata una retroazione negativa).

- Retroazioni degli amplificatori operazionali:

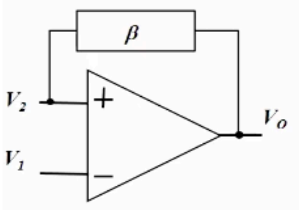
Un amplificatore operazionale può essere retroazionato negativamente o positivamente:

- la retroazione negativa si ottiene collegando il circuito di retroazione β al morsetto invertente $(-)$. Questo perché l'ingresso è $V_i = V_2 - V_1$ (dove 2 è il morsetto $+$ e 1 è il morsetto $-$), quindi se aumenta V_o, aumenta anche V_1 e di conseguenza diminuisce V_i. Questo tipo di circuiti sono utilizzati per gli amplificatori lineari.



Controreazione negativa
(amplificatori lineari)

- La retroazione positiva si ottiene collegando il circuito di retroazione β al morsetto non invertente $(+)$. Questo perché l'ingresso è $V_i = V_2 - V_1$ (dove 2 è il morsetto $+$ e 1 è il morsetto $-$), quindi se aumenta V_o, aumenta anche V_2 e di conseguenza aumenta V_i. Questo tipo di circuiti sono utilizzati per i multivibratori e consentono solo di oscillare tra L^+ e L^-.



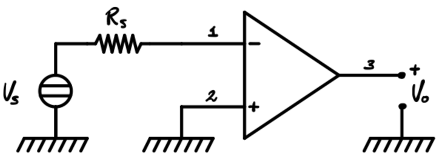
Controreazione positiva
(multivibratori)

Quindi per utilizzare un amplificatore operazionale come elemento lineare è necessaria una retroazione negativa, mentre per utilizzarlo come un elemento non lineare è necessaria una retroazione positiva.

- CONFIGURAZIONI FONDAMENTALI DEI CIRCUITI CON AO:

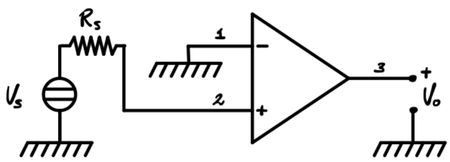
Un amplificatore operazionale che vede in ingresso un segnale V_s può essere usato con una delle seguenti configurazioni:

Configurazione invertente



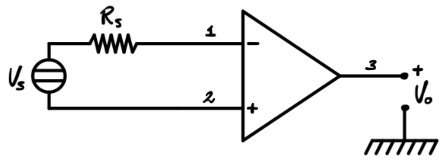
$V_2 = 0 \rightarrow V_o = -AV_1$

Configurazione non invertente



$V_1 = 0 \rightarrow V_o = AV_2$

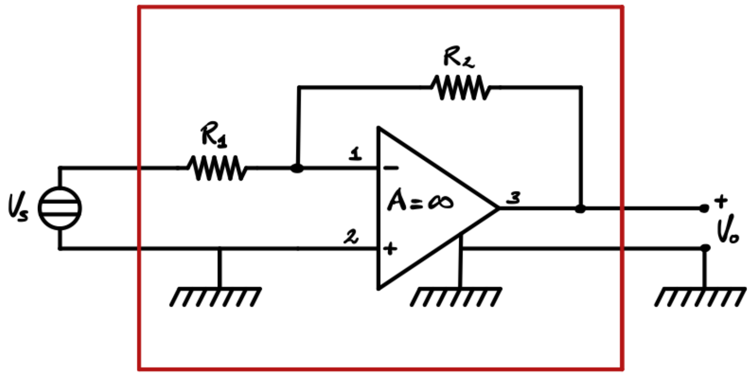
Amplificatore differenziale



$V_o = A(V_2 - V_1)$

- Configurazione invertente:

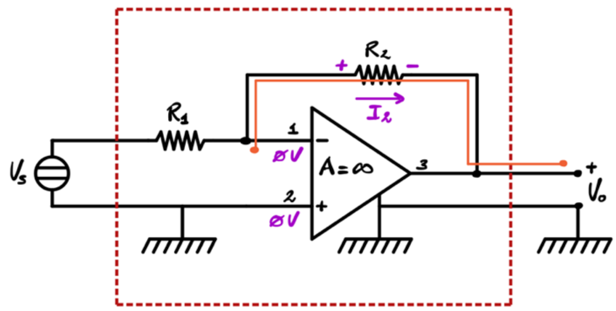
Nel caso della configurazione invertente, il generatore di tensione è connesso direttamente al morsetto invertente. Per far si che l'amplificatore lavori in zona lineare (o che comunque abbia una zona lineare dove lavorare, con una dinamica di ingresso non nulla) bisogna fare una retroazione negativa, ovvero collegata al morsetto invertente:



Osserviamo che la resistenza R_1 è quella del generatore di tensione (reale), ma è considerata all'interno dello schema del circuito complessivo perché è essenziale affinché l'amplificatore funzioni. Infatti, se si dovesse usare un generatore di tensione ideale, quindi con $R_1 = 0$ (cortocircuito), si avrebbe sul morsetto invertente direttamente il valore del potenziale fornito dal generatore, mentre sul morsetto non invertente si avrebbe per forza zero perché è connesso a massa. Questo porta l'amplificatore operazionale sicuramente in saturazione perché i due morsetti non potranno mai raggiugere lo stesso potenziale e quindi non si potrà mai applicare il principio del cortocircuito virtuale.
Con questa connessione, il valore della tensione sul morsetto invertente è $V_1 = V_S - I_1 R_1$ quindi per determinati valori può diventare uguale a quella sul morsetto non invertente, e può valere il principio del cortocircuito virtuale.

- CALCOLO DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (GUADAGNO):

Supponiamo che l'amplificatore operazionale lavori in zona lineare (vale il principio del cortocircuito virtuale).
Per calcolare la tensione di uscita V_o, bisogna trovare una maglia chiusa che porta da V_o a massa, ovvero a $0\,V$. Dato che sul morsetto 2 ci sono $0\,V$, per il principio del cortocircuito ci sono $0\,V$ anche su morsetto 1 e di conseguenza una maglia che porta da V_o a massa è quella che passa per R_2. Dato che la corrente scorre da sinistra a destra, crea una caduta di potenziale che è positiva dove entra rispetto a dove esce in R_2.



Dato che si sta considerando la tensione sul morsetto positivo di V_o e la caduta di potenziale su R_2 va nel verso opposto (V_o è connesso alla caduta di potenziale minore su R_2) si ha che il valore della tensione di uscita è pari a:

$$\boxed{V_o = -I_2 R_2}$$

Il generatore V_s produce una tensione nominale che genera una differenza di potenziale ai capi di R_1 pari proprio a V_s (dato che l'altro capo della resistenza sta a $0\ V$). La corrente, quindi, passa in R_1 e poi trova un nodo nel quale si divide: una parte va verso R_2 e una parte verso l'amplificatore operazionale. Dato che la resistenza di ingresso dell'amplificatore operazionale è considerabile infinita, la corrente non può seguire il percorso che la porta dentro l'amplificatore. Per questo motivo, tutta la corrente $I_1 = V_s/R_1$, che scorre su R_1, va a finire su R_2. Quindi:

$$\boxed{I_2 = I_1 = \frac{V_s}{R_1} = \frac{V_{in}}{R_1}}$$

Si ottiene che la tensione di uscita è pari a:

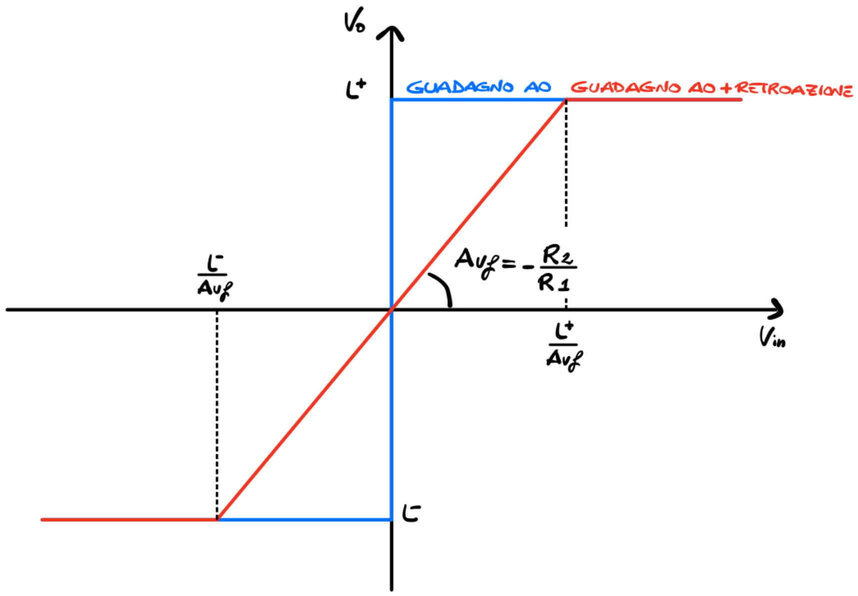
$$\boxed{V_o = -I_2 R_2 = -\frac{R_2}{R_1} V_{in}}$$

Il guadagno complessivo della rete è pari a:

$$\boxed{A_{Vf} = \frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{R_2}{R_1}}$$

Il guadagno complessivo della rete è indipendente dal guadagno dell'amplificatore operazionale; infatti, il guadagno complessivo è dato da $A_{Vf} = A/(1+\beta A)$, ma se $\beta A \gg 1$ si semplifica a $A_{Vf} = 1/\beta$, ovvero ad un guadagno indipendente da quello dell'amplificatore. Nel caso dell'amplificatore operazionale $A = \infty$ e di conseguenza $\beta A = \infty$ e quindi vale il principio appena descritto.

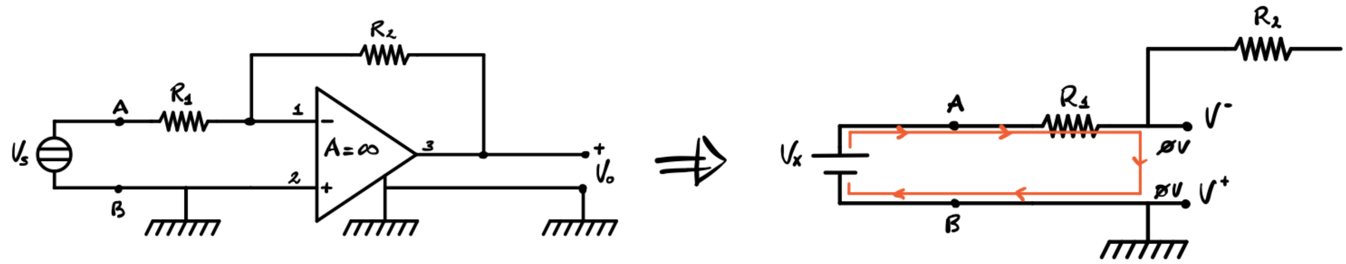
Il guadagno A_{Vf} è negativo, ovvero l'amplificatore è invertente. Il morsetto negativo si chiama morsetto invertente proprio perché se viene applicata la retroazione su esso, si inverte di fase il segnale.



Quindi abbiamo trovato il valore della funzione di trasferimento della rete due porte equivalente. Gli altri due parametri che caratterizzano il sistema sono le impedenze di ingresso e uscita della rete due porte equivalente.

- CALCOLO DELL'IMPEDENZA DI INGRESSO:

Per calcolare la resistenza equivalente, si sostituisce il generatore di tensione V_s con un generatore di tensione costante (nota) V_x e si calcola la corrente I_x che scorre nel circuito.
Il circuito, quindi, può essere visto nel seguente modo:

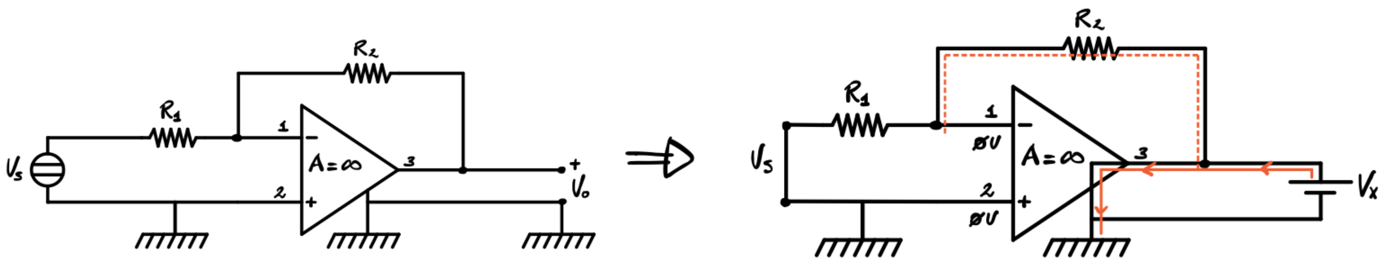


Quindi la resistenza equivalente vista dall'ingresso è pari a: $R_{eq} = R_1 + V^-$, ma $V^- = 0V$ per il principio del cortocircuito virtuale, quindi:

$$\boxed{R_{if} = R_1}$$

- CALCOLO DELL'IMPEDENZA DI USCITA:

Per calcolare l'impedenza di uscita del circuito equivalente bisogna annullare tutti i generatori indipendenti, ovvero va messo a cortocircuito il generatore di tensione V_s. A questo punto si calcola la resistenza equivalente guardando il circuito dall'uscita. Dato che $V_s = 0$, il generatore controllato in tensione interno all'amplificatore operazionale è pari a zero, ovvero non produce tensione in uscita qualunque sia il guadagno. Quindi anche esso è in cortocircuito.
Applicando un generatore di tensione V_x sull'uscita e seguendo il percorso della corrente I_x dal generatore a massa, si ottiene:



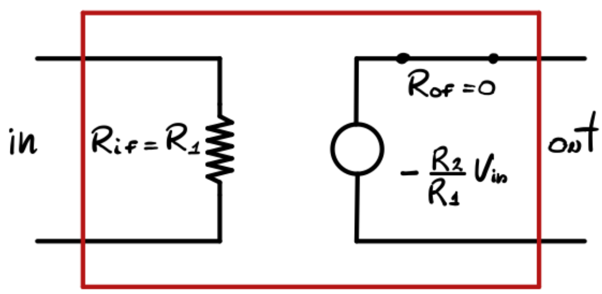
La corrente esce da generatore e incontra un nodo: un percorso va verso R_2, mentre un altro percorso entra nell'amplificatore operazionale dall'uscita e attraversa il generatore controllato (che è in cortocircuito) fino a massa. La corrente seguirà solo il percorso che passa per il cortocircuito; quindi, l'impedenza di uscita del circuito equivalente è:

$$\boxed{R_{of} = 0}$$

- RETE DUE PORTE EQUIVALENTE:

La rete due porte equivalente dell'amplificatore operazionale in configurazione invertente è la seguente. I parametri caratteristici sono:

- $A_f = -{}^{R_2}/_{R_1}$
- $R_{if} = R_1$
- $R_{of} = 0$



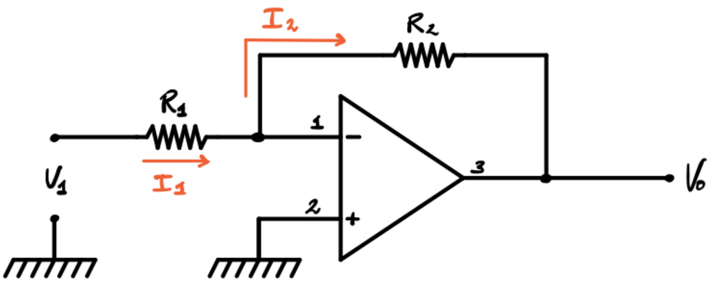
La rete trovata ha il seguente problema: se in ingresso si ha un segnale di tensione è necessaria una resistenza in ingresso molto alta, dato che $V_{in} = V_s\,(R_1/R_1 + R_s)$ e se $R_1 \gg R_s \rightarrow V_{in} = V_s$. Ma se si aumenta R_1 diminuisce il guadagno, a meno che non viene aumentata anche R_2.
Quindi questo tipo di rete è *poco* adatta a segnale di tensione in ingresso. È molto più adatta a **segnali di corrente** in ingresso, che a prescindere dalle resistenze in gioco offrono una corrente nominale I_s.

Al contrario, in uscita il segnale migliore è un **segnale di tensione**, perché la resistenza in uscita è nulla e quindi il generatore di tensione controllato si comporta come un generatore di tensione ideale, fornendo al carico tutta la tensione prodotta.

Quindi, l'utilizzo ideale di un amplificatore operazionale in configurazione invertente è quando in ingresso si ha un segnale di corrente e in uscita si ha un segnale di tensione, ovvero si comporta bene come un amplificatore di transconduttanza.
Può funzionare anche come amplificatore di tensione, ma c'è il problema delle resistenze, che potrebbero diventare molto elevate.

- APPLICAZIONE DELLA CONFIGURAZIONE INVERTENTE COME GENERATORE DI CORRENTE:

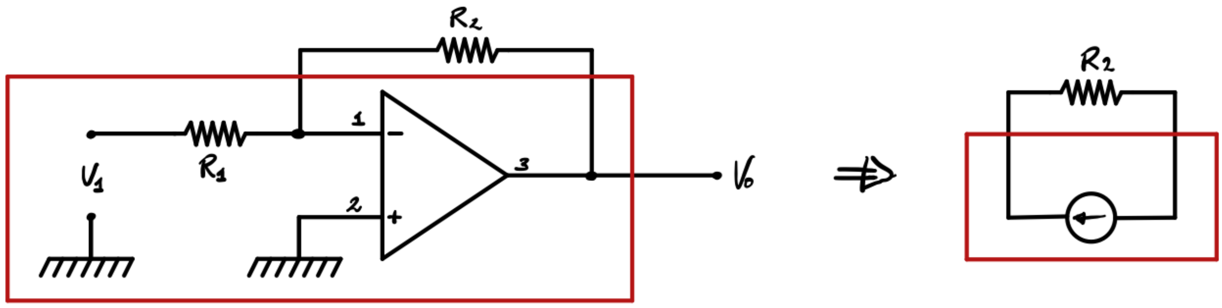
La configurazione invertente si presenta nel seguente modo:



dove:

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = I_2$$

ovvero, la corrente I_2 è indipendente dal carico R_2. Questo è quello che avviene nei generatori di corrente.
Questa configurazione, nei confronti di R_2, si comporta come un generatore di corrente. Infatti, i generatori di corrente vengono costruiti nel seguente modo, dove il carico sui quali vengono applicati è rappresentabile attraverso R_2:



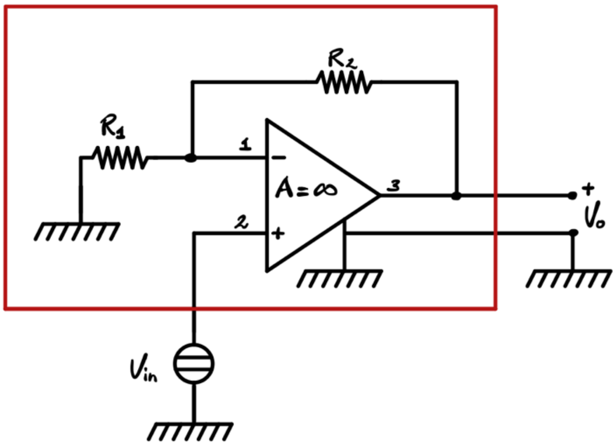
questo è vero finché vale il principio del cortocircuito virtuale.

- OSSERVAZIONE:

Quando la corrente scorre partendo dal generatore di tensione, attraverso R_1, virtualmente si interrompe al morsetto 1 dove è presente la massa virtuale (per il principio del cortocircuito virtuale), ma in realtà il percorso che fa la corrente è attraverso R_2, e poi entrando nell'amplificatore operazionale dall'uscita e attraversandolo (visto che sta in cortocircuito) fino a massa.

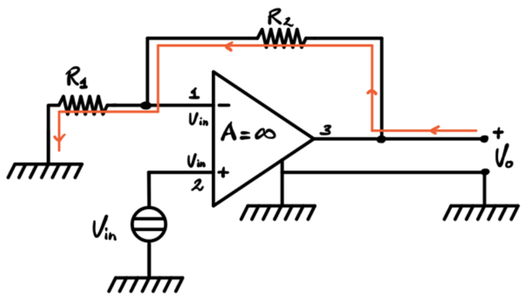
- Configurazione non invertente:

Nella configurazione non invertente si ha sempre un amplificatore operazionale retroazionato negativamente (altrimenti sarebbe sempre saturo), ma l'ingresso entra nel morsetto non invertente, ovvero quello positivo. Il morsetto negativo non deve essere connesso direttamente a massa, ma deve esserci una resistenza prima della connessione a massa, altrimenti si forza il morsetto non invertente ad un valore di tensione V_{in} e il morsetto invertente a $0\ V$ e non potranno mai essere uguali, di conseguenza l'amplificatore andrebbe in saturazione.



Questo schema può essere modellato sempre come una rete due porte equivalente, calcolandone i tre parametri fondamentali: funzione di trasferimento, impedenza di ingresso e impedenza di uscita.

- CALCOLO DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (GUADAGNO):



Per calcolare la funzione di trasferimento $A_{Vf} = V_o/V_{in}$ è necessario calcolare V_o e per fare questo bisogna trovare un percorso che connetta il nodo di uscita a massa. Si assume che l'amplificatore operazionale lavori in zona lineare (vale il principio del cortocircuito virtuale).
L'unico percorso disponibile che connette V_o a massa è il seguente: partendo dal nodo V_o, la corrente scorre nella resistenza R_2 lasciando una caduta di potenziale positiva dove entra rispetto a dove esce e arriva al nodo del morsetto non invertente. Dato che vale il principio del cortocircuito virtuale, essendo il morsetto non invertente connesso ad un generatore di tensione V_{in}, anche sul morsetto invertente il potenziale è V_{in}. Quindi si ottiene

$$\boxed{V_o = I_2R_2 + V_{in}} = I_2R_2 + I_1R_1$$

Per arrivare a massa la corrente deve attraversare anche R_1, dato che non può entrare nell'amplificatore operazionale perché questo ha impedenza di ingresso infinita. Quindi, le due resistenze si trovano sulla stessa maglia e si ha $I_2 = I_1$. La differenza di potenziale ai capi di R_1 è proprio pari a V_{in} dato che l'altro capo è connesso a massa, quindi la corrente $I_1 = V_{in}/R_1$. Quindi si ottiene:

$$\boxed{V_o = \frac{V_{in}}{R_1}R_2 + V_{in} = V_{in}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}$$

La funzione di trasferimento della configurazione non invertente è:

$$\boxed{A_{Vf} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}$$

È un guadagno positivo perché la caduta di potenziale su R_2 dal lato dove è connesso V_o ha lo stesso segno di V_o. Questo perché il verso della corrente è fissato dalla I_1 che scorre dal nodo del morsetto invertente fino a massa attraverso R_1.

Anche questo caso si ottiene che la funzione di trasferimento della rete due porte complessiva è indipendente dal guadagno dell'amplificatore operazionale. Infatti, in generale $A_{Vf} = A_M/(1 + \beta A_M)$, ma se $\beta A_M \gg 1$ (e nel caso dell'amplificatore operazionale lo è, dato che $A_M = \infty$), si ottiene $A_{Vf} = 1/\beta$, ovvero il guadagno complessivo è indipendente da A_M.

- CALCOLO DELL'IMPEDENZA DI INGRESSO:

Sostituendo a V_{in} un generatore di tensione V_x e calcolando la corrente I_x che scorre nel circuito, si ottiene:

$$\boxed{I_x = 0}$$

sempre, dato che il generatore di tensione è connesso al morsetto non invertente e basta (è indifferente se è un generatore di tensione ideale o reale), di conseguenza la corrente può scorrere perché per farlo dovrebbe entrare nell'amplificatore operazionale, ma questo non è possibile. Quindi si ottiene:

$$\boxed{R_{in} = \infty}$$

- CALCOLO DELL'IMPEDENZA DI USCITA:

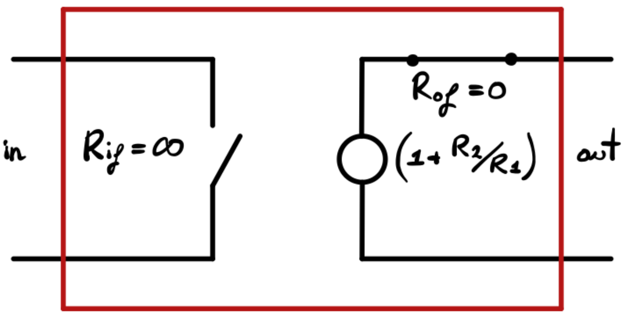
Mettendo in uscita un generatore di tensione V_x e annullando tutte le eccitazioni presenti nel circuito si deve calcolare il percorso che fa la corrente I_x per arrivare a massa. Dato che sono state annullate tutte le eccitazioni presenti nel circuito, $V_{in} = 0$ e di conseguenza il generatore di tensione controllato dell'amplificatore ($A_v V_{in}$) è pari a zero, ovvero equivale ad un cortocircuito.
Quindi la corrente che scorre del generatore V_x trova due percorsi in parallelo, uno attraverso la resistenza R_2 e uno attraverso l'uscita dell'amplificatore operazionale. La corrente sceglie il percorso attraverso l'operazionale dato che è a resistenza nulla (il generatore controllato è in cortocircuito) e quindi va a massa attraversando una resistenza pari a zero:

$$\boxed{R_{of} = 0}$$

- RETE DUE PORTE EQUIVALENTE:

La rete due porte equivalente dell'amplificatore operazionale in configurazione non invertente è la seguente. I parametri caratteristici sono:

- $A_f = 1 + {}^{R_2}/_{R_1}$
- $R_{if} = \infty$
- $R_{of} = 0$



Osserviamo che l'unica applicazione possibile è quella di un **amplificatore di tensione**, perché l'impedenza di ingresso infinita fa in modo che $V_{in} = V_s$, qualunque sia il segnale in ingresso (anche con una resistenza R_s), e l'impedenza di uscita nulla fa in modo che V_o è sempre uguale a $A_{Vf} V_{in}$ qualunque sia il carico in uscita.

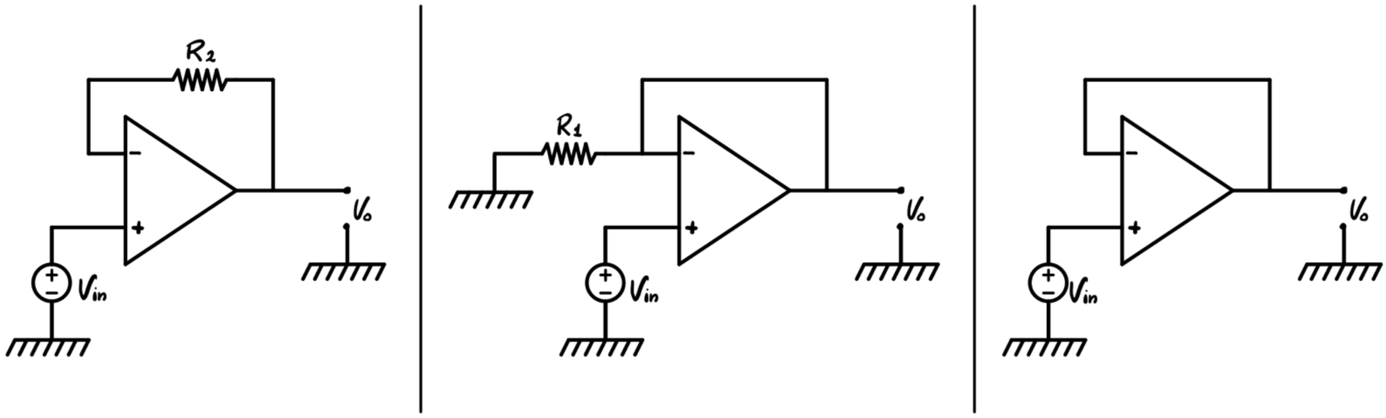
Un segnale di corrente non riuscirebbe neanche ad entrare nell'amplificatore, dato che la resistenza interna del segnale di corrente è posta in parallelo al generatore e la resistenza dell'amplificatore è infinita. Quindi questa configurazione non è utilizzabile con segnali di corrente.

- APPLICAZIONE DELLA CONFIGURAZIONE NON INVERTENTE COME STADIO SEPARATORE DI IMPEDENZE:

Una delle applicazioni della configurazione non invertente è come stadio separatore di impedenze (buffer a guadagno unitario). In questa particolare applicazione si vuole ottenere guadagno unitario. Dato che il guadagno dell'amplificatore in configurazione non invertente è:

$$A_{Vf} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

per ottenere guadagno unitario bisogna avere $R_1 = \infty$, oppure $R_2 = 0$ o entrambe le condizioni:

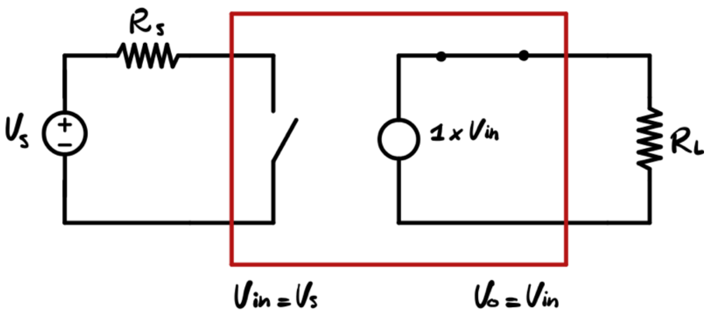


$R_1 = \infty \,, R_2 \neq 0$ | $R_1 \neq 0 \,, R_2 = 0$ | $R_1 = \infty \,, R_2 = 0$

Queste tre configurazioni hanno tutte guadagno unitario. L'utilità di questi circuiti si ha quando si vuole collegare un segnale direttamente al carico senza amplificarlo, ma non si vuole perdere tensione nella partizione sulle resistenze. Infatti, se si collega un generatore di tensione V_s, con una sua resistenza interna R_s direttamente ad un carico R_L, la tensione sul carico seguirà la regola del partitore di tensione: $V_o = V_s \frac{R_L}{R_s + R_L}$.

Invece, mettendo uno di questi circuiti come stadio separatore tra il generatore di tensione e il carico, si ottiene che $V_o = V_s$, perché:

- $V_{in} = V_s$, visto che l'impedenza di ingresso dell'amplificatore è infinita;
- $V_o = V_{in}$, visto che l'impedenza di uscita dell'amplificatore è nulla.



Esercizio

Calcolare la corrente I_L che, nel seguente circuito, scorre nella resistenza R_L, in presenza di una tensione d'ingresso V_{in} = 2 V.

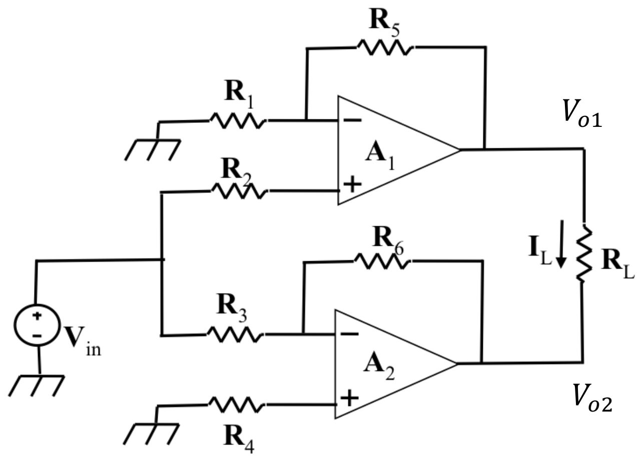
Amplificatore operazionale ideale V+ = -V- = 12V

$\mathbf{R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 4\ k\Omega}$

$\mathbf{R_5 = 2\ k\Omega}$

$\mathbf{R_6 = 12\ k\Omega}$

$\mathbf{R_L = 6\ k\Omega}$



L'amplificatore A_1 lavora in configurazione non invertente, mentre l'amplificatore A_2 lavora in configurazione invertente.
Quindi:

$$V_{o1} = V_1^+\left(1+\frac{R_5}{R_1}\right) \quad V_{o2} = V_{in}\left(-\frac{R_6}{R_3}\right)$$

Osserviamo che, le resistenze R_2 e R_4 sono ininfluenti perché:

- per quanto riguarda R_2, dato che l'impedenza di ingresso dell'amplificatore è infinita, non fa variare il potenziale, ovvero non c'è una caduta di potenziale. Quindi si ha $V_1^+ = V_{in}$;
- per quanto riguarda R_4, si hanno $0\ V$ a sinistra della resistenza e dal morsetto non invertente di A_2 potrebbe uscire una corrente, ma sappiamo che la corrente che entra ed esce da un amplificatore operazionale è sempre nulla. Quindi, ci sono $0\ V$ anche a destra di R_4.

Lo schema equivalente vede R_2 e R_4 come cortocircuiti.

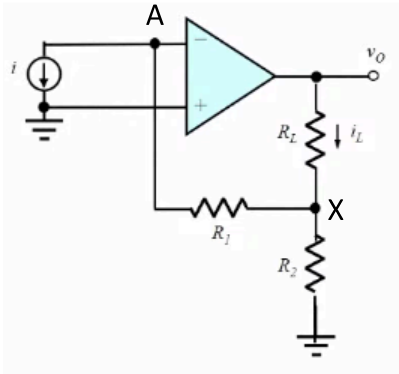
Quindi:

- $V_{o1} = V_{in}\left(1+\frac{R_5}{R_1}\right) = 2\ V * \left(1+\frac{2\ k\Omega}{4\ k\Omega}\right) = 3\ V$
- $V_{o2} = V_{in}\left(-\frac{R_6}{R_3}\right) = 2\ V * \left(-\frac{12\ k\Omega}{4\ k\Omega}\right) = -6\ V$

La corrente che scorre sul carico è data da:

$$I_L = \frac{(V_{o1} - V_{o2})}{R_L} = \frac{[3\ V - (-6\ V)]}{6\ k\Omega} = 1.5\ mA$$

Esercizio



Il circuito in figura è caratterizzato dai seguenti parametri: $i = 1\,mA, R_1 = 6\,k\Omega, R_2 = 2\,k\Omega$. L'amplificatore un operazionale ideale con dinamica $L^+ = |L^-| = 12\,V$.
Determinare la corrente i_L che scorre sulla resistenza di carico R_L nel caso in cui:

- $R_L = 1\,k\Omega$;
- $R_L = 2\,k\Omega$.

Lo schema in figura è un amplificatore operazionale in configurazione invertente. Si assume che si sta lavorando in zona lineare.

La corrente che scorre che scorre nel nodo A è pari alla somma delle correnti entranti e delle correnti uscenti. La corrente uscente è quella del generatore di corrente. Le correnti entranti sono I_1, ovvero la corrente che scorre su R_1 e la corrente che esce dall'amplificatore, che però è sempre nulla. Di conseguenza si ha che $I_1 = i = 1\,mA$.
Per il principio del cortocircuito virtuale, dato che ci sono $0\,V$ sul morsetto non invertente, ci sono $0\,V$ anche sul morsetto invertente.

Il potenziale al nodo X è pari a: $V_X = I_1 R_1 = 1\,mA * 6\,k\Omega = 6\,V$. Conoscendo il potenziale al nodo X, si può calcolare la corrente I_2 che scorre su R_2: $I_2 = V_X/R_2 = 6\,V/2\,k\Omega = 3\,mA$.

Quindi si può calcolare la corrente i_L applicando l'equazione al nodo X: $i_L = I_1 + I_2 = 1\,mA + 3\,mA = 4\,mA$.
Come possiamo vedere, la corrente i_L, che scorre sul carico R_L è indipendente dal carico, perché è definita dal generatore di corrente in ingresso.
Quello che non è indipendente da R_L è il potenziale in uscita. L'analisi eseguita si basa sul fatto che l'amplificatore operazionale lavori in zona lineare, ovvero che il potenziale di uscita sia compreso tra $+12\,V$ e $-12\,V$.
Quindi bisogna effettuare la verifica calcolando il potenziale V_o, per entrambi i valori di R_L richiesti:

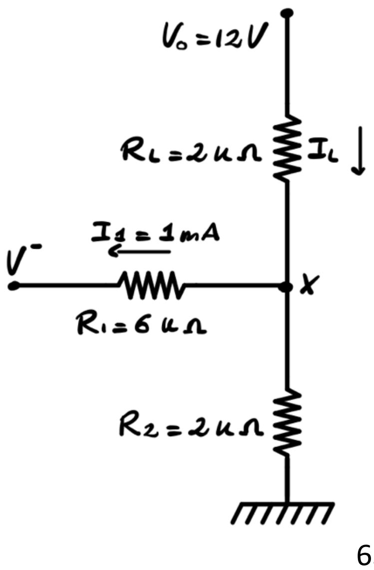
$$V_o = i_L R_L + V_X$$

Per:

- $R_L = 1\,k\Omega \rightarrow\ V_o = 4\,mA * 1\,k\Omega + 6\text{ V} = 10\text{ V} \rightarrow$ La tensione in uscita è all'interno della dinamica, quindi l'analisi eseguita è corretta perché vale l'ipotesi del cortocircuito virtuale.
- $R_L = 2\,k\Omega \rightarrow\ V_o = 4\,mA * 2\,k\Omega + 6\text{ V} = 14\text{ V} \rightarrow\ V_o = 12\,V$ perché l'amplificatore è in saturazione. La tensione in uscita non è all'interno della dinamica, quindi l'analisi eseguita è sbagliata perché non vale l'ipotesi del cortocircuito virtuale.

Quindi, nel secondo caso, il circuito equivalente che si ottiene è quello in figura.
Ricavando il seguente sistema attraverso le equazioni al nodo e alla maglia si può ricavare il valore di i_L nel caso di amplificatore in saturazione:

$$\begin{cases} i_L = \dfrac{12\,V - V_X}{R_L} \\ i_L = I_1 + I_2 = 1\,mA + \dfrac{V_X}{R_L} \end{cases}$$

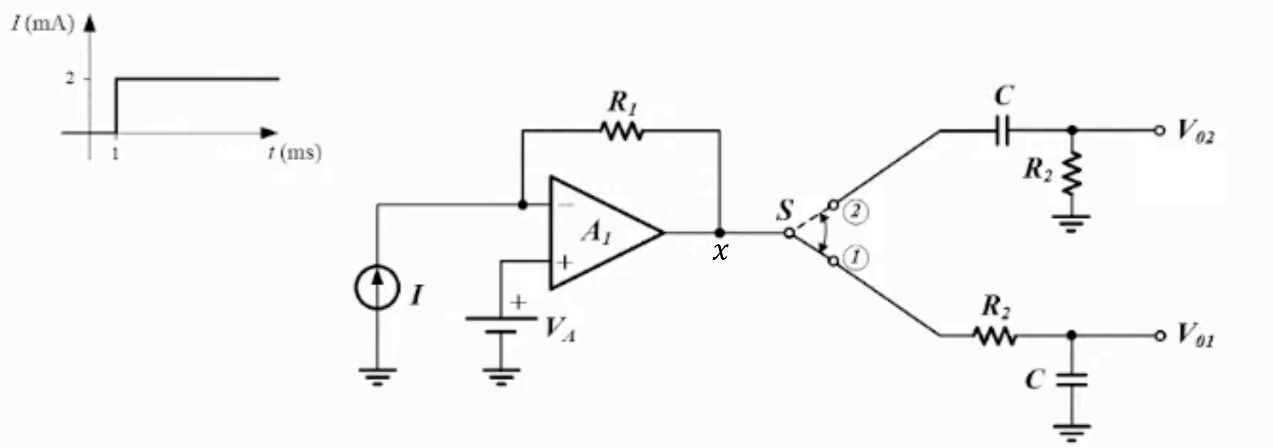


Esercizio

Dato il circuito seguente, in presenza del gradino di corrente riportato in figura, determinare e graficare l'andamento nel tempo delle tensioni di uscita V_{01} e V_{02} quando il commutatore S si trova in posizione 1 o 2 rispettivamente.

$V_A = 2$ V $\qquad R_1 = 3$ kΩ $\qquad R_2 = 5$ kΩ $\qquad C = 0{,}1$ μF

Considerare l'amplificatore operazionale A_1 ideale con $L^+ = |L^-| = 12$ V.



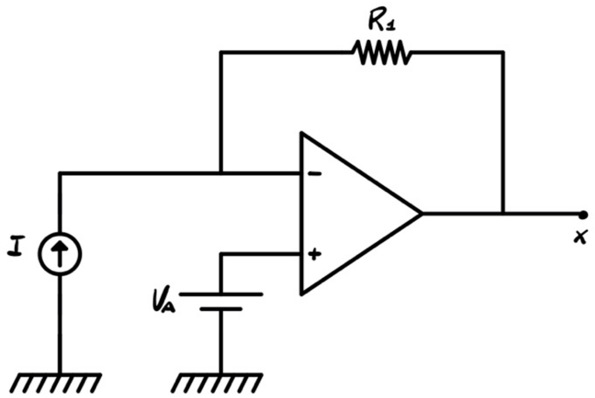
Considerare l'amplificatore operazionale ideale significa: impedenza di ingresso infinita (la corrente che entra ed esce dall'operazionale è nulla), impedenza di uscita nulla (tutta la tensione in uscita va a finire sul carico ed è indipendente da questo), guadagno infinito (vale il principio del cortocircuito virtuale).

L'amplificatore ha in ingresso sul morsetto non invertente una tensione costante V_A, mentre sul morsetto ha in ingresso un generatore di corrente che segue l'andamento del grafico.
In uscita all'amplificatore è presente un commutatore che può collegarsi o al ramo 1 o al ramo 2. Entrambi i rami sono circuiti RC, uno è passa-alto e uno è passa-basso.

Per verificare quale è un passa-basso e quale un passa-alto basta osservare che il ramo 1 ha il condensatore in parallelo all'uscita e quindi è un passa basso, mentre il ramo 2 ha il condensatore il serie all'uscita e quindi è un passa alto. In alternativa, si può analizzare il comportamento dei due rami al variare di ω.

Per analizzare quanto valgono le tensioni V_{01} e V_{02} è necessario prima analizzare quanto vale la tensione in uscita all'amplificatore $V_o = V_x$. Infatti, conoscendo la tensione al nodo x, ed essendo l'amplificatore operazionale ideale, si ha che tutta la tensione V_x va sul carico (ramo 1 o ramo 2) indipendentemente da quanto vale il carico.

Per analizzare quanto vale V_x bisogna capire come agiscono i due generatori in ingresso sull'amplificatore. Dato che è una rete lineare si può usare il principio di sovrapposizione degli effetti, ovvero si va a vedere come agisce il generatore di tensione sull'uscita annullando quello di corrente e poi viceversa. Infine, si sommano gli effetti.



Principio di sovrapposizione degli effetti:

- effetto di V_A (annullando il generatore di corrente): annullare il generatore di corrente significa sostituirlo con un circuito aperto. Quindi si ottiene: $V_x(I = 0) = V_A * A_V$. Il guadagno dell'operazionale è pari a:

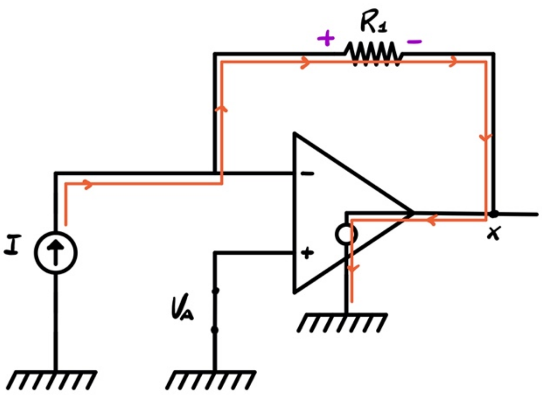
$$A_V = 1 + \frac{R_1}{\infty} = 1$$

dove $R = \infty$ è la resistenza che è presente guardando dal morsetto invertente verso massa (dato che non c'è nessuna resistenza è come se fosse infinita).
Quindi si ottiene:

$$V_x(I = 0) = V_A * A_V = V_A = 2\ V$$

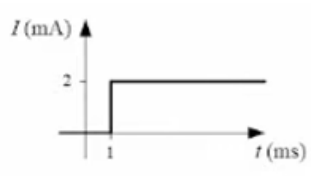
In alternativa, si poteva vedere nel seguente modo: $V_x = V_{R1} + V_A$, dove $V_{R1} = I_1 R_1$, ma la corrente I_1 quando arriva al nodo che precede il morsetto invertente trova due percorsi verso massa, il primo verso l'operazionale ma sappiamo che la corrente non può entrare dentro l'amplificatore e quindi quel percorso non lo può seguire, il secondo verso massa attraverso il generatore di corrente, che però è un circuito aperto e quindi non può seguire neanche quel percorso. Questo significa che $I_1 = 0 \rightarrow V_x = V_A$.

- effetto del generatore di corrente (annullando V_A): annullare un generatore di tensione significa sostituirlo con un cortocircuito. Il percorso che fa la corrente dal generatore fino a massa è quello che passa per R_1 entra nell'uscita dell'operazionale e va a massa. Quindi la tensione presente al nodo x è quella che si ha dalla caduta di potenziale sulla resistenza R_1 per l'attraversamento della corrente I:



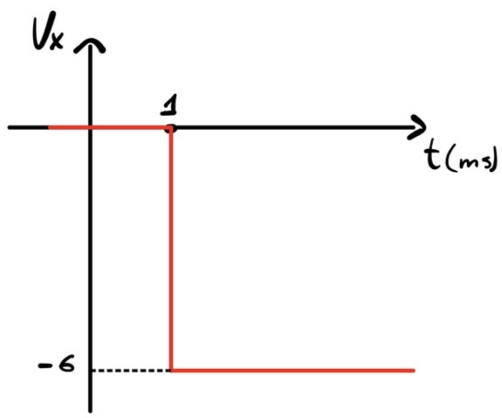
$$V_X = -IR_1$$

Il meno è dovuto al fatto che la caduta di potenziale sulla resistenza è minore dove esce rispetto a dove entra e dato che il nodo x è connesso alla parte minore della caduta di potenziale su R_1 si ha che il potenziale al nodo x è negativo.
La corrente I segue l'andamento in figura: quindi per $t < 1\ ms \rightarrow I = 0$ quindi la tensione al nodo x è nulla $\rightarrow$ $V_x(t < 1) = 0$.
Per $t \geq 1\ ms \rightarrow I = 2\ mA$ quindi la tensione al nodo x è



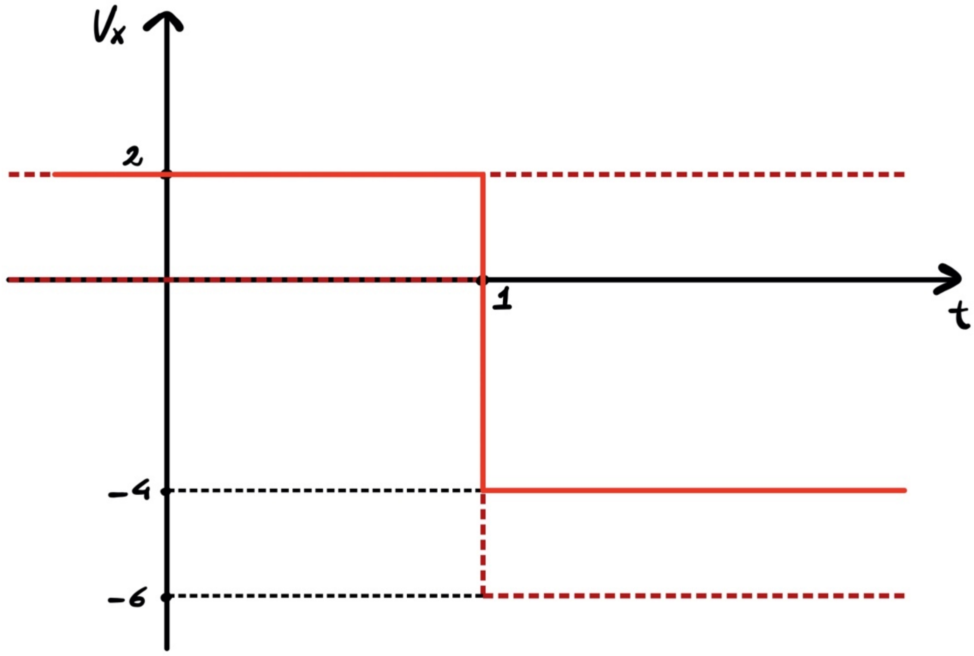
$$V_x(t \geq 1) = -IR_1 = -2\ mA * 3\ k\Omega = -6\ V$$

Graficamente si ottiene:



Applicando la sovrapposizione degli effetti si ottiene che:
- V_A contribuisce con una tensione costante di $2\ V$;
- il generatore di corrente contribuisce con una tensione costante di $-6\ V$ per $t \geq 1\ ms$.

Graficando il risultato:



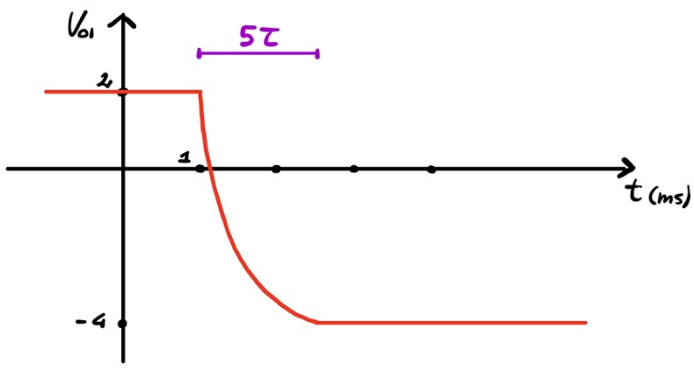
Quindi: $V_x = 2\ V$ fino a $1\ ms$ e per $t \geq 1\ ms$ si ha $V_x = -4\ V$.

Analizziamo ora l'effetto della V_x sui due rami in uscita:

- ramo passa-basso: in un circuito passa-basso le frequenze costanti passano indisturbate, mentre le frequenze alte seguono un andamento esponenziale. Quindi la commutazione di tensione all'istante $t_0 = 1\ ms$ si allunga nel tempo seguendo un andamento esponenziale:

$$V_{01} = V_c = V_c(\infty) - [V_c(\infty) - V_c(t_0^-)]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

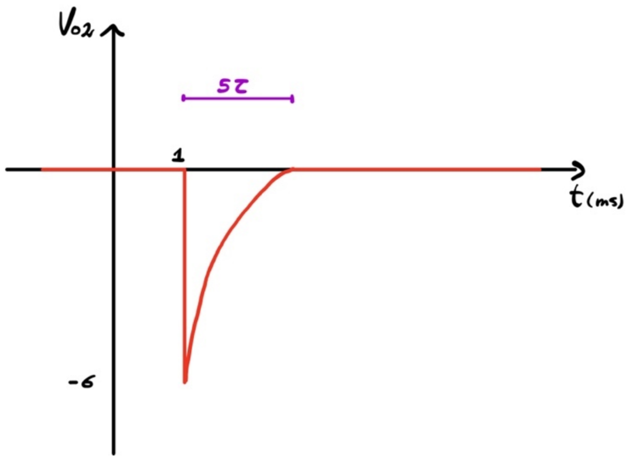
  Per $t < 1\ ms$: è presente una tensione costante di $2\ V$ e quindi il condensatore è carico a tale tensione.
  Per $t = \infty$: è presente una tensione costante di $-4\ V$ e quindi il condensatore è carico a tale tensione.
  Per $t = t_0^- = t_0^+$: si ha una variazione di tensione con frequenza infinita che non si riflette direttamente in uscita, ma ha un andamento esponenziale caratterizzato dalla costante di tempo $\tau = R_{eq}C$.
  Per il calcolo della resistenza equivalente vista dal condensatore, eliminiamo tutti i generatori indipendenti e sostituiamo il condensatore con un generatore di tensione costante che fa scorrere una corrente, che scorre verso il nodo x. Al nodo x la corrente incontra due percorsi verso massa, uno attraverso R_1 e uno entrando nell'amplificatore operazionale, nel quale c'è resistenza nulla (perché l'amplificatore operazionale ha impedenza di uscita nulla e non scorre corrente all'interno). Tutta la corrente entra nell'operazionale e va a massa attraverso una resistenza nulla. Quindi l'unica resistenza che incontra la corrente è $R_2 \rightarrow R_{eq} = R_2$.
  Si ottiene: $\tau = R_{eq}C = R_2C = 5\ k\Omega * 0.1\ \mu F = 0.5\ ms$. Il transitorio si completa dopo $5\tau = 2.5\ ms$.



- ramo passa-alto: in un circuito passa-alto le frequenze costanti sono bloccate, mentre quelle infinite passano completamente. Quindi in uscita al ramo passa-alto ci sarà tutta la commutazione di tensione da $2\ V$ a $-4\ V$, ovvero ci sarà un gradino di $\Delta V = -4\ V - (2\ V) = -6\ V$. Dopo il gradino, la tensione in ingresso diventa nuovamente costante, quindi in uscita ci sarà un andamento esponenziale fino a $0\ V$ che segue l'andamento asintotico:

$$V_{02} = V_c = V_c(\infty) - [V_c(\infty) - V_c(t_0^-)]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

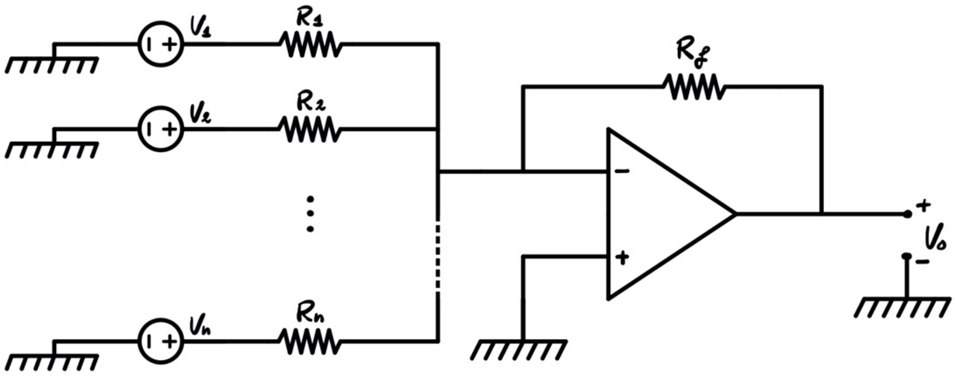
Per $t < 1\ ms$: la tensione in ingresso al ramo è costante e quindi la tensione in uscita è zero.
Per $t = \infty$: la tensione in ingresso al ramo è costante e quindi la tensione in uscita è zero.
Per $t = t_0^- = t_0^+$: la variazione di tensione è pari a $\Delta V = -4\ V - (2\ V) = -6\ V$ con frequenza infinita, che si riflettono totalmente in uscita. L'andamento per tornare a $0\ V$ è descritto dalla costante di tempo $\tau = R_{eq}C$.
La resistenza equivalente vista dal condensatore è pari a R_2 perché sostituendo il condensatore con un generatore di tensione ed eliminando tutti i generatori indipendenti preesistenti nel circuito si ha che la corrente scorre da massa (alla quale è connessa R_2) attraverso il generatore di tensione che sostituisce il condensatore e va a massa passando all'interno dell'amplificatore operazionale.
Si ottiene: $\tau = R_{eq}C = R_2C = 5\ k\Omega * 0.1\ \mu F = 0.5\ ms$. Il transitorio si completa dopo $5\tau = 2.5\ ms$.



Una volta completata l'analisi bisogna verificare che la dinamica trovata sia interna alla dinamica dell'operazionale per la quale vale l'ipotesi di linearità. Dato che la dinamica dell'amplificatore è compresa tra $+12\ V$ e $-12\ V$ e la dinamica trovata varia da $2\ V$ a $-4\ V$ (quella fino al nodo V_x), risulta vera l'ipotesi di linearità fatta all'inizio e quindi si può confermare l'analisi del circuito.

- Sommatore pesato invertente:

Un sommatore pesato invertente usa un amplificatore operazionale in configurazione invertente e restituisce in uscita una tensione che è somma di n tensioni in ingresso, ognuna delle quali è pesata con la propria resistenza.



Dato che è una rete lineare si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, considerando un generatore di tensione alla volta e cortocircuitando gli altri. Ipotizzando che l'amplificatore operazionale lavori in zona lineare, per il principio del cortocircuito virtuale, dato che il morsetto non invertente sta a massa ($0\,V$), ci sono $0\,V$ anche sul morsetto invertente. L'unico percorso che la corrente trova da V_o a massa è quello che passa attraverso la resistenza R_f. Quindi si ottiene:

$$\boxed{V_0(V_1 \neq 0) = -\,I * R_f}$$

La corrente I dipende dalla corrente che scorre dal generatore di tensione V_1 fino a massa. Ai capi della resistenza R_1 è presente una differenza di potenziale di $V_1 - 0 = V_1$ (dato che a destra della resistenza il circuito è massa virtuale). Quindi sulla resistenza R_1 scorre una corrente $I_1 = V_1/R_1$. La corrente I_1, una volta attraversata la resistenza trova diversi percorsi: n-1 percorsi attraverso le altre resistenze, un percorso attraverso l'amplificatore operazionale e un percorso attraverso R_f. Dato che tutti gli alti generatori sono circuitati e connessi direttamente a massa, ai capi di ogni resistenza sono presenti $0\,V$ sia a sinistra che a destra e quindi non scorre corrente. Inoltre, sappiamo che la corrente non può entrare nell'amplificatore operazionale; quindi, l'unico percorso che rimane è passare attraverso R_f ed andare a massa passando dall'uscita dell'amplificatore operazionale. Quindi, la corrente che scorre su R_f è la stessa che scorre su R_1. Si ottiene:

$$\boxed{V_0(V_1 \neq 0) = -\,I * R_f = -I_1 * R_f = -\frac{R_f}{R_1}V_1}$$

Analogo discorso si può fare con gli altri generatori di tensione. Si ottiene:

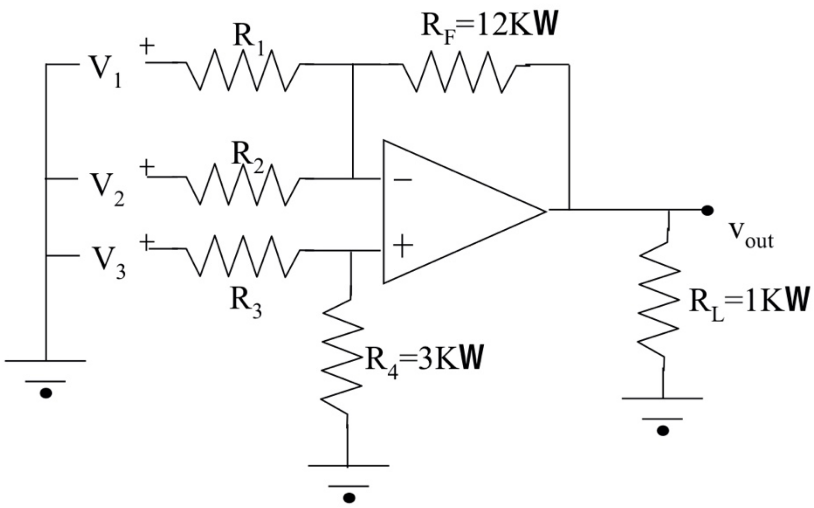
$$V_0(V_1 \neq 0) = -\frac{R_f}{R_1}V_1 \;, \quad V_0(V_2 \neq 0) = -\frac{R_f}{R_2}V_2 \quad , \dots , \quad V_n(V_1 \neq 0) = -\frac{R_f}{R_n}V_n$$

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\boxed{V_0 = -\left[\frac{R_f}{R_1}V_1 + \frac{R_f}{R_2}V_2 + \cdots + \frac{R_f}{R_n}V_n\right]}$$

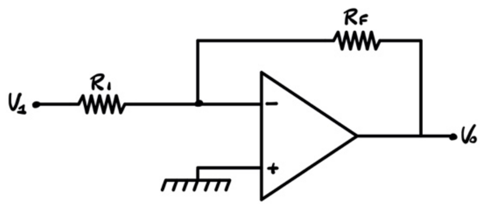
Esercizio

Del seguente circuito, con l'amplificatore operazionale ideale, determinare le resistenze R_1, R_2 e R_3 affinché la tensione di uscita dell'amplificatore valga:
$V_{out} = 3V_3 - 4V_2 - 2V_1$



Il circuito è un sommatore pesato, dove due ingressi V_1 e V_2 entrano nella configurazione invertente, mentre V_3 entra nella configurazione non invertente.
Bisogna calcolare le resistenze R_1, R_2 e R_3 in modo che la tensione di uscita sia pari a $V_o = -2V_1 - 4V_2 + 3V_3$.
Osserviamo che, essendo l'operazionale un amplificatore *ideale* l'uscita è indipendente dal carico connesso e di conseguenza la resistenza R_L è ininfluente nel calcolo.
Dato che è una rete lineare si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.

- Analisi del circuito con $V_1 \neq 0$ e $V_2 = V_3 = 0$:
  dato che $V_3 = 0$, sul morsetto non invertente ci sono $0\ V$ e quindi si può semplificare il circuito connettendolo direttamente a massa. Se ci sono $0\ V$ sul morsetto non invertente, per il principio del cortocircuito virtuale, ci sono $0\ V$ anche sul morsetto invertente e quindi dato che $V_2 = 0$, si può semplificare il circuito togliendo anche R_2. Ciò che rimane è la classica configurazione invertente, e quindi si ottiene:



$$V_o(V_1 \neq 0) = -\frac{R_F}{R_1} V_1$$

  ovvero si ha il classico guadagno della configurazione invertente. Dato che il peso di V_1 deve essere -2 si ha che:

$$\frac{R_F}{R_1} = 2 \rightarrow R_1 = 6\ k\Omega$$

- Analisi del circuito con $V_2 \neq 0$ e $V_1 = V_3 = 0$:
  dato che V_2 è connesso al morsetto invertente esattamente come V_1, l'analisi è speculare alla precedente.
  Si ottiene:

$$V_o(V_2 \neq 0) = -\frac{R_F}{R_2} V_2$$

  Dato che il peso di V_2 deve essere -4 si ha che:

$$\frac{R_F}{R_2} = 4 \rightarrow R_2 = 3\ k\Omega$$

- Analisi del circuito con $V_3 \neq 0$ e $V_1 = V_2 = 0$:
  in questo caso si possono semplificare le resistenze R_1 e R_2 con la resistenza parallelo equivalente $R_1//R_2$:

$$R_1//R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 2\ k\Omega$$

La tensione al morsetto non invertente è data dalla tensione generata da V_3 seguendo la regola del partitore di tensione su R_3 e R_4:

$$V_+ = V_3 * \frac{R_4}{R_3 + R_4} = V_3 * \frac{3}{3 + R_3}$$

Per il principio del cortocircuito virtuale $V_+ = V_-$, ovvero le tensioni sui due morsetti sono uguali.

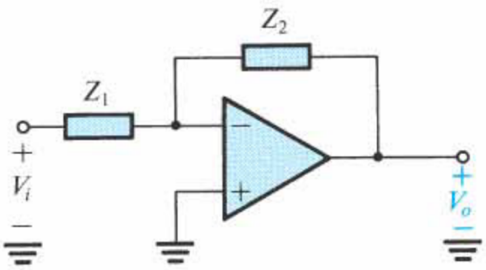
Il circuito che rimane è un classico circuito con amplificatore operazionale in configurazione non invertente e quindi la tensione in uscita è data dalla tensione in ingresso per il guadagno della configurazione non invertente, ovvero:

$$V_o(V_3 \neq 0) = V_+ * \left(1 + \frac{R_F}{R_1//R_2}\right) = V_3 * \frac{3}{3 + R_3} * \left(1 + \frac{12}{2}\right) = 3V_3$$

Quindi, si ottiene:

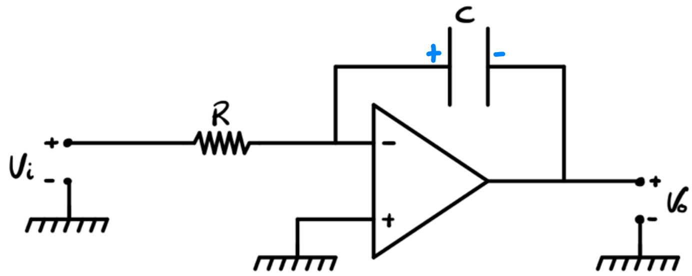
$$\frac{3}{3 + R_3} * \left(1 + \frac{12}{2}\right) = 3 \rightarrow \frac{21}{3 + R_3} = 3 \rightarrow R_3 = 4\ k\Omega$$

- Amplificatore operazionale con impedenze generiche:



Vediamo l'utilizzo dell'amplificatore operazionale con delle impedenze generiche al posto delle resistenze. In particolare, vediamo il caso in cui una delle due impedenze è un condensatore e l'altra una resistenza. A seconda dei casi si ottiene che l'uscita è l'integrale o la derivata dell'ingresso.
Trattiamo il caso in configurazione invertente, ma è analogo per la configurazione non invertente.

- INTEGRATORE DI MILLER ($Z_2 = C$):



Vediamo il caso in cui $Z_2 = C$ e $Z_1 = R$. In generale, sappiamo che $V_o = -V_{Z_2}$, perché supponendo che l'amplificatore operazionale lavori in zona lineare, si ha che entrambi i morsetti sono a $0\,V$ (per il principio del cortocircuito virtuale) e di conseguenza, una maglia chiusa per arrivare dalla tensione di uscita fino a massa vede come impedenza sono Z_2. Il segno meno deriva dal fatto che la corrente scorre da sinistra a destra in Z_2, lasciando una caduta di potenziale positiva dove entra rispetto a dove esce. Di conseguenza, la tensione di uscita è uguale alla tensione ai capi del condensatore cambiata di segno:

$$\boxed{V_o = -V_C = -\frac{Q}{C} = -\frac{\int I(t)dt}{C}}$$

La corrente $I(t)$ che carica il condensatore è quella che scorre nella resistenza R, quindi: $I(t) = V_i(t)/R$ dato che la differenza di potenziale ai capi di R è esattamente $V_i(t)$. Si ottiene quindi:

$$\boxed{V_o = -\frac{1}{RC}\int V_i(t)dt}$$

Quindi la tensione di uscita è proporzionale all'integrale della tensione di ingresso (Integratore di Miller).

In generale, il guadagno di una configurazione invertente è dato da $A_V = -\frac{Z_2}{Z_1}$, di conseguenza, nel caso dell'integratore di Miller, si ottiene:

$$\boxed{A_V = -\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R} = -\frac{1}{j\omega RC}}$$

Al variare della pulsazione:

- per $\omega \to \infty$ si ha $A_V \to 0$;
- per $\omega \to 0$ si ha $A_V \to \infty$;

Quindi, l'integratore di Miller è un filtro passa-basso.

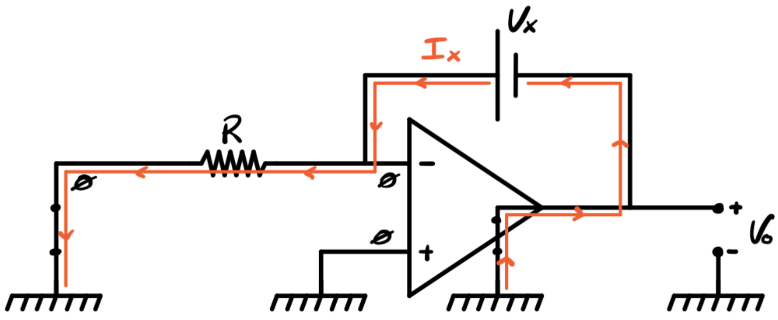
Per graficare il guadagno di questo circuito su un diagramma di bode (modulo-pulsazione), è necessario calcolare la frequenza di taglio ω_H caratteristica dei passa-basso. In generare:

$$\boxed{\omega_H = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{CR_{eq}}}$$

quindi, per calcolare ω_H bisogna prima calcolare R_{eq}, ovvero la resistenza equivalente vista dal condensatore.

Per calcolare R_{eq} bisogna sostituire il condensatore con un generatore di tensione V_X e calcolare la corrente I_X che scorre nel circuito, mettendo a zero tutte le eccitazioni preesistenti.

Annullando il generatore di tensione V_i (ovvero sostituendolo con un cortocircuito), si ha che il generatore di tensione controllato interno all'amplificatore diventa anche esso un cortocircuito. La corrente I_X deve trovare un percorso che parte da massa, passa attraverso V_X e torna a massa. L'unico percorso disponibile è quello che passa attraverso il generatore di tensione controllato dell'amplificatore, passa attraverso V_X e poi attraverso R fino a massa.



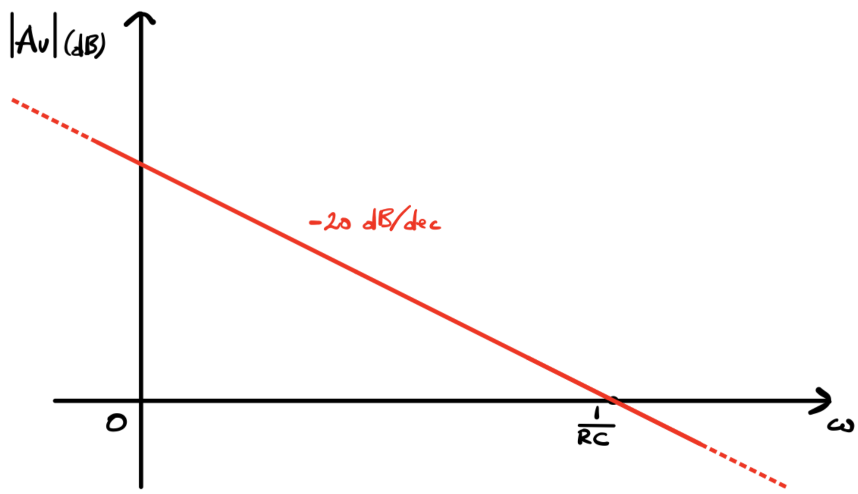
Quando arriva al nodo del morsetto invertente, la corrente ha già raggiunto $0\ V$, ma essendo una massa virtuale deve passare attraverso R per raggiungere una massa reale. Quindi, l'unica resistenza che incontra la corrente è R, ma dato che ad entrambi i capi di R ci sono $0\ V$ (è come se R fosse un cortocircuito, quindi $R = 0$), la caduta di potenziale su questa resistenza è nulla e di conseguenza la corrente che scorre nel circuito è $I_X = 0$. Per cui si ha:

$$\boxed{R_{eq} = \frac{V_X}{0} = \infty}$$

Quindi, si ottiene che:

$$\boxed{\omega_H = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{CR_{eq}} = 0}$$

ovvero, la frequenza di taglio del passa-basso tende a zero. Il diagramma di Bode di questo circuito è quindi:



Dato che i diagrammi di Bode sono in scala logaritmica, si può arrivare a zero solo asintoticamente.

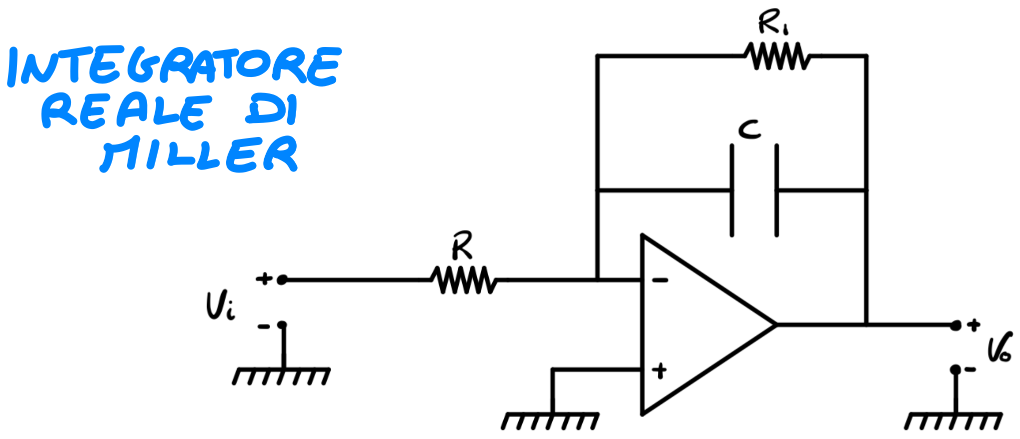
Avere una frequenza di taglio $\omega_H = 0$ è un problema, perché (come si può anche vedere dal diagramma di Bode) qualsiasi segnale costante nel tempo, anche piccolissimo, porta in saturazione l'amplificatore perché per componenti costanti (o con frequenze molto basse) l'amplificatore ha guadagno infinito.

Questo problema si può vedere anche nel seguente modo: l'impedenza di un condensatore è $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$, quindi per $\omega \to 0$ si ha $Z_C \to \infty$, ovvero il condensatore si comporta come un circuito aperto. Se il condensatore è un circuito aperto, stando sul ramo di retroazione è come eliminare tale ramo, ovvero togliere la retroazione ad un amplificatore operazionale e sappiamo che un amplificatore operazionale senza retroazione negativa è sempre in retroazione.

In pratica, se proviamo ad utilizzare lo schema precedente, un qualsiasi rumore a bassa frequenza, inevitabilmente presente all'ingresso dell'integratore di Miller, verrà amplificato a tal punto da portare in saturazione l'amplificatore.

Questo tipo di circuito di chiama *integratore ideale di Miller* (ideale = il meglio che si può ottenere).

Il problema di risolve facendo in modo che l'amplificazione, a bassa frequenza, non possa oltrepassare un certo limite. Questo risultato lo si ottiene inserendo in parallelo al condensatore di capacità C una resistenza R_1.

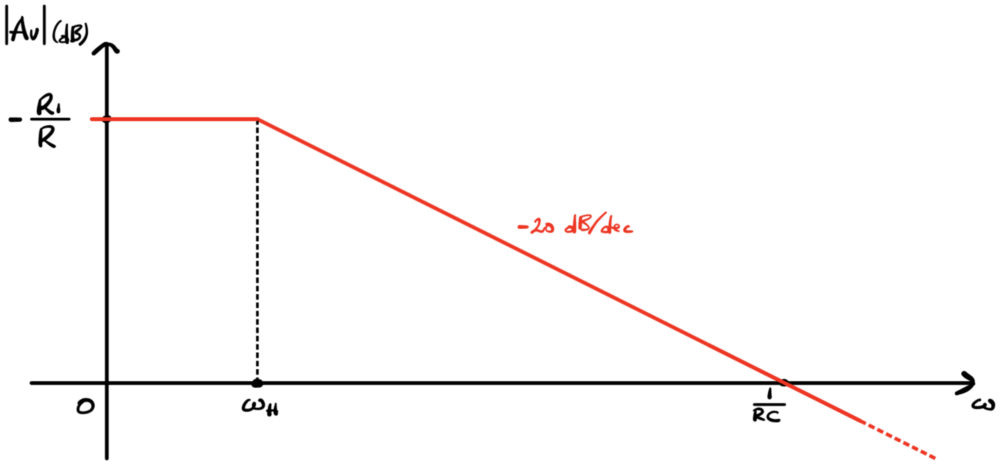


In questo modo:

- per $\omega < \omega_H$ il condensatore è un circuito aperto quindi la corrente scorre sulla resistenza R_1. Quindi, il circuito diventa un classico amplificatore operazionale in configurazione invertente, con guadagno pari a

$$A_V = -\frac{R_1}{R}$$

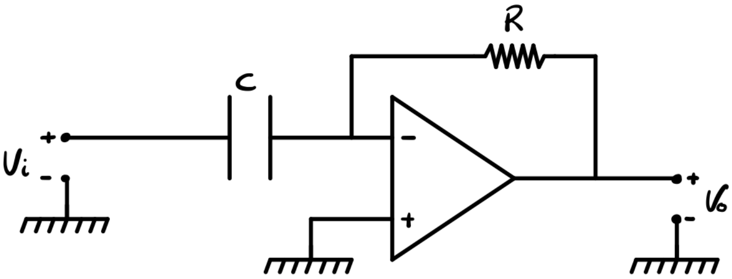
- per $\omega > \omega_H$ il condensatore non è un circuito aperto e la corrente scorre attraverso questo. Quindi, il circuito diventa un integratore di Miller *reale*, che fa si che l'uscita sia l'integrale dell'ingresso.



Quindi, questo tipo di circuito si chiama *integratore reale di Miller.*

- DERIVATORE ($Z_1 = C$):

Vediamo il caso in cui $Z_1 = C$ e $Z_2 = R$. Analogamente al caso dell'integratore abbiamo che, il potenziale al nodo di uscita è dato da $V_o = -I(t)R$, dove la corrente $I(t)$ che scorre sul ramo di retroazione è la stessa che scorre sul condensatore $I(t) = I_C(t)$, a causa del cortocircuito virtuale (anche in questo caso la corrente che scorre sull'impedenza che si trova sul ramo di retroazione è indipendente dall'impedenza stessa, in questo caso dalla resistenza R, quindi il circuito è un generatore di corrente nei confronti di R).



La corrente che scorre sul condensatore è proporzionale alla derivata nel tempo della tensione applicata sul condensatore, quindi si ha:

$$\boxed{I_C(t) = C\frac{dV_i(t)}{dt}}$$

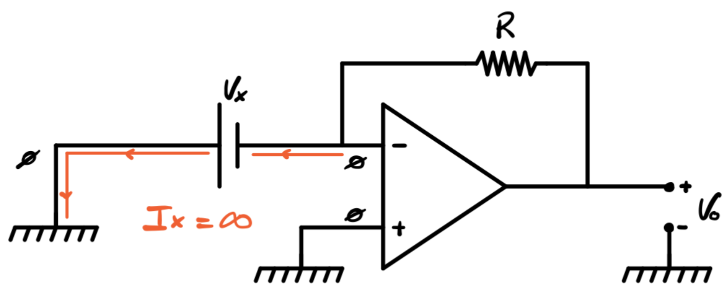
Quindi, la tensione di uscita del circuito è data da:

$$\boxed{V_o = -CR\frac{dV_i(t)}{dt}}$$

ovvero, la tensione di uscita è sempre proporzionale alla derivata della tensione di ingresso nel tempo.

Questo tipo di circuito ha un comportamento di tipo passa-alto, infatti, per $\omega = 0 \to Z_C = \infty$, e quindi il condensatore equivale ad un circuito aperto, mentre per $\omega = \infty \to Z_C = 0$, e quindi il condensatore equivale ad un cortocircuito. Dato che il condensatore si trova sul ramo di trasmissione, si ha che i segnali di frequenza costante non passano, mentre i segnali di frequenza infinita passano inalterati ($\omega = 0 \to V_o = 0$, $\omega = \infty \to V_o \neq 0$).

Quindi, in generale, il diagramma di Bode del modulo della funzione di trasferimento per questo circuito è quello di un passa-alto, ed è quindi caratterizzato da una frequenza di taglio bassa ω_L.
Si ha che: $\omega_L = 1/\tau = 1/CR_{eq}$, quindi per conoscere ω_L bisogna calcolare la resistenza equivalente vista dal condensatore. Per calcolare la resistenza equivalente, si sostituisce il condensatore con un generatore di tensione V_X e si calcola la corrente I_X, annullando tutte le eccitazioni preesistenti nel circuito. Dato che per il principio del cortocircuito virtuale sul morsetto invertente ci sono $0\ V$ e l'altro capo del generatore di tensione V_X è connesso direttamente a massa (perché è stato cortocircuitato il generatore V_i) si ha che il generatore di tensione V_X è connesso ad entrambi i lati a $0\ V$, quindi è in un cortocircuito. Di conseguenza, la corrente $I_X = \infty$. Si ottiene: $R_{eq} = V_X/I_X = 0$



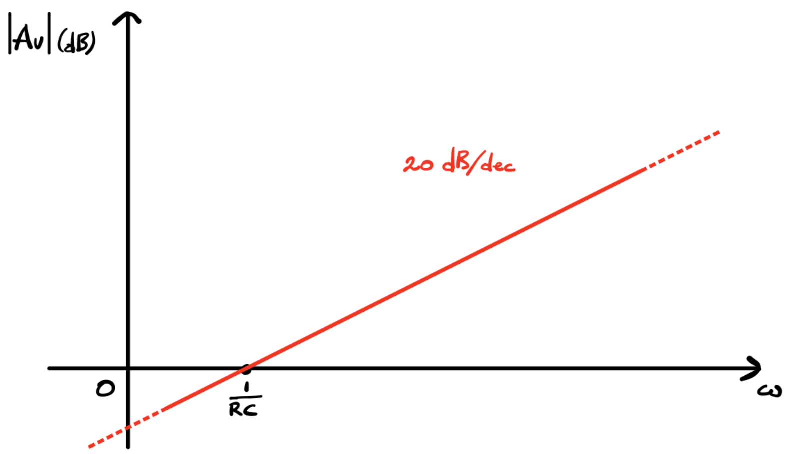
Essendo $R_{eq} = 0$, si ha $\tau = CR_{eq} = 0$ e:

$$\boxed{\omega_L = \frac{1}{\tau} = \infty}$$

e il diagramma di Bode del circuito derivatore è quello in figura.
Quindi, in generale l'uscita è data da

$$V_o = -CR\frac{dV_i(t)}{dt}$$

ma se la frequenza del segnale in ingresso è troppo alta, il circuito va in saturazione perché il guadagno tende a infinito. Questo tipo di circuito si chiama *derivatore ideale*.

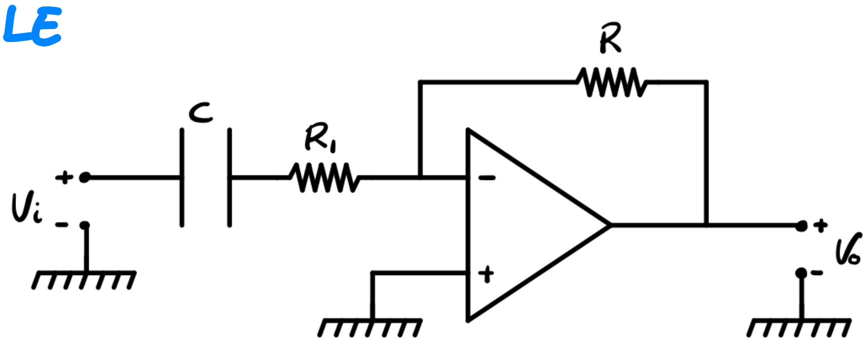


Questo circuito è anche chiamato *amplificatore di rumore,* perché in genere il rumore è ad alta frequenza e quindi viene amplificato molto di più rispetto al segnale.

Per risolvere questo problema bisogna mettere una resistenza R_1 in serie al condensatore, in modo che la costante di tempo diventi $\tau = CR_1$ e quindi la frequenza di taglio ω_L non è più infinita, ma ha un valore definito pari a:

$$\boxed{\omega_L = \frac{1}{CR_1}}$$

DERIVATORE REALE



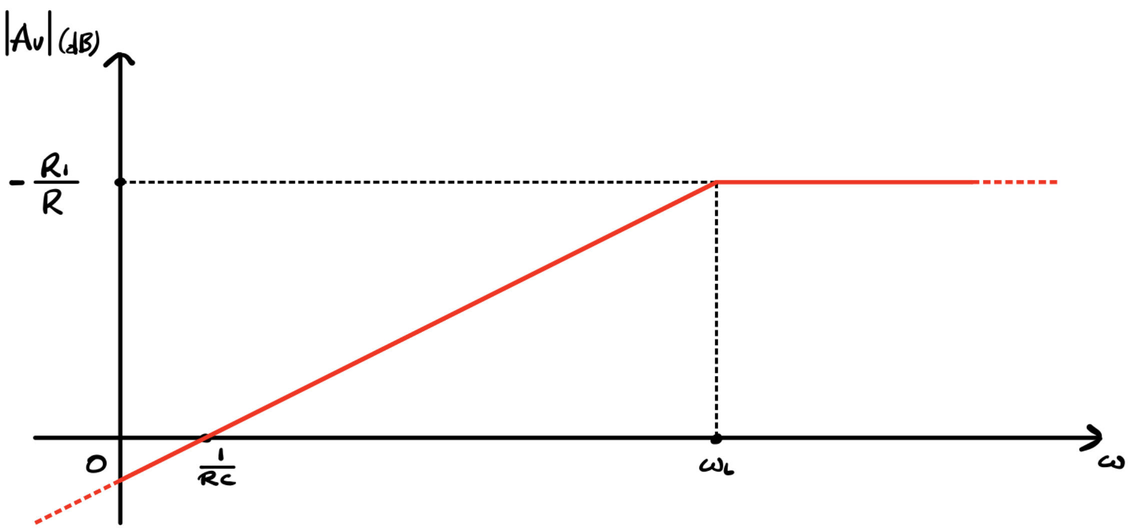
In questo modo:

- per $\omega < \omega_L$, il circuito si comporta da derivatore, ovvero l'uscita è pari a

$$V_o = -CR\frac{dV_i(t)}{dt}$$

- per $\omega > \omega_L$, il circuito non si comporta come derivatore. Infatti, per $\omega \gg \omega_L$ $(\omega \to \infty)$ il condensatore è un cortocircuito, quindi il circuito diventa un amplificatore operazionale in configurazione invertente classica e il guadagno è dato da:

$$A_V = -\frac{R}{R_1}$$

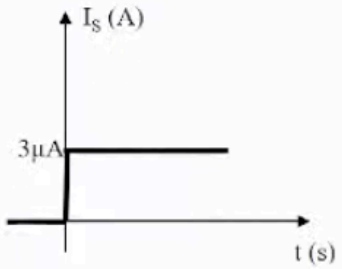


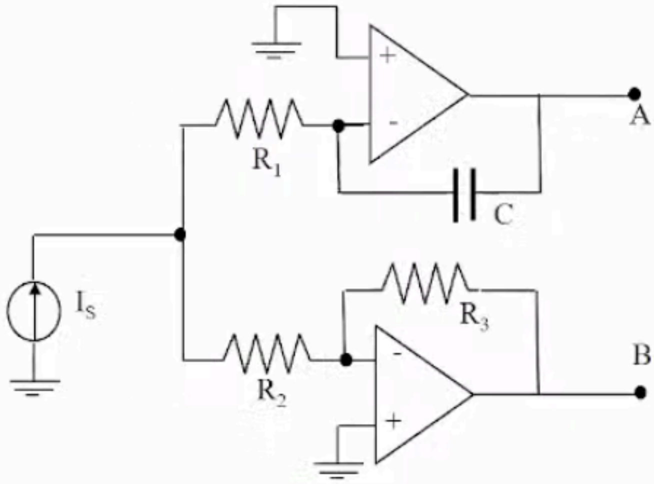
Quindi, questo tipo di circuito si chiama *derivatore reale*.

Esercizio

Dato il circuito in figura, considerando l'ingresso a gradino I_S riportato, determinare l'evoluzione temporale della V_A-V_B e disegnarne il grafico riportando i punti significativi fino a t = 5 secondi. Supporre gli amplificatori operazionali ideali, con $|L^+| = |L^-| = 12$ V, e il condensatore scarico per t < 0.

R_1 = 2 kΩ, **R_2** = 4 kΩ, **R_3** = 4 MΩ, **C** = 1 μF,



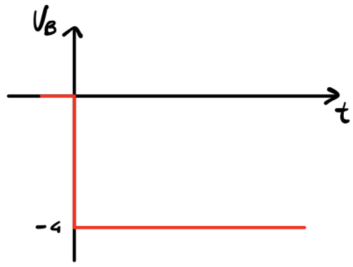


Il circuito in figura è composto da due amplificatori operazionali in configurazione invertente che hanno in ingresso la partizione di corrente che deriva dal generatore I_S. Dato che le due configurazioni sono invertenti, si ha che l'impedenza che la corrente vede in ingresso è proprio pari all'impedenza in ingresso al circuito, ovvero R_1 e R_2. Quindi, per la regola del partitore di corrente, si ottiene:

$$I_1 = I_S \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad\qquad I_2 = I_S \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Quando $I_S = 0 \rightarrow\ I_1 = I_2 = 0$, mentre quando $I_S = 3\ mA \rightarrow I_1 = \frac{2}{3} I_S = 2\ \mu A\ \ e\ \ I_2 = \frac{1}{3} I_S = 1\ \mu A$.

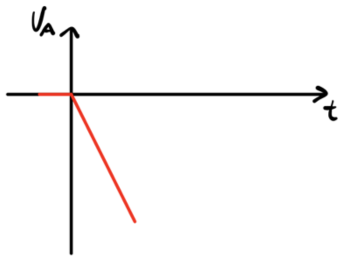
Calcoliamo la tensione di uscita V_B: quella in basso è una configurazione invertente classica e si ha che $V_B = -I_2 R_3$, dove il meno deriva dal fatto che il percorso che cerca V_B per arrivare a massa attraversa R_3 in senso opposto a come l'attraversa la corrente I_2. Quindi si ottiene:



$$V_B = -I_2 R_3 = -1\ \mu A * 4\ M\Omega = -4\ V$$

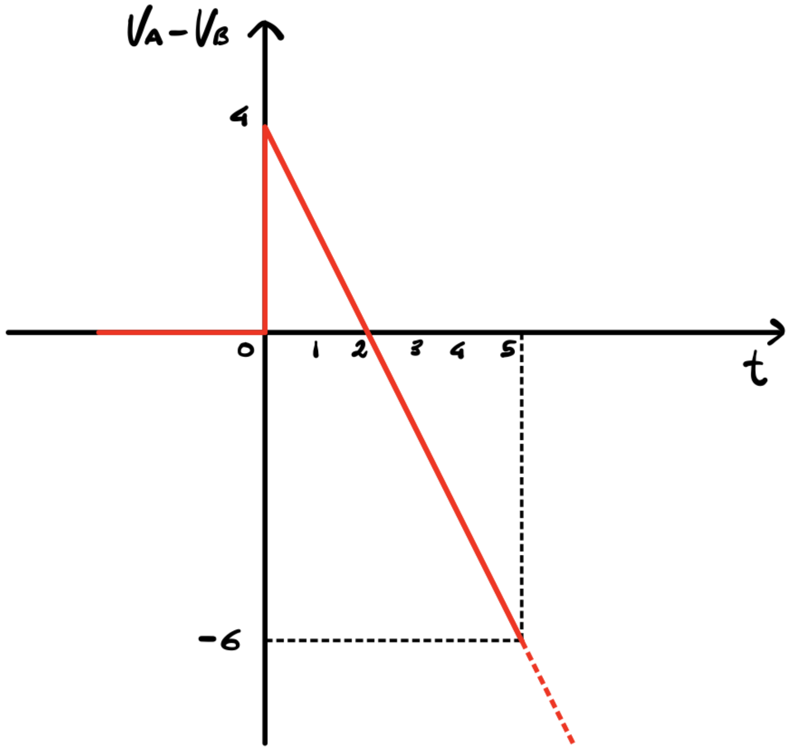
Calcoliamo la tensione di uscita V_A: quella in alto è una configurazione di un integratore e si ha che $V_A = -V_C$, dove il meno deriva sempre dal fatto che il percorso che V_A cerca per arrivare a massa attraversa C in senso opposto a come l'attraversa la corrente I_1. Quindi si ottiene:

$$V_A = -V_C = -\frac{Q}{C} = -\frac{\int I(t)dt}{C} = -\frac{I}{C}t = -\frac{2\ mA}{1\ \mu F} * t = -2t$$



dove la corrente è stata portata fuori dall'integrale perché è costante nel tempo.

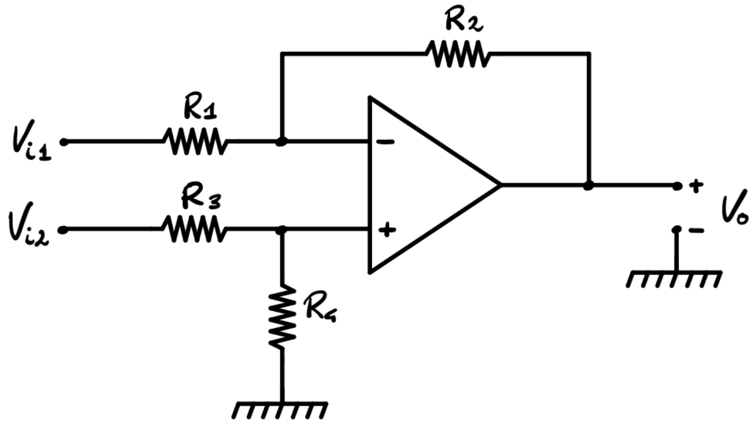
L'esercizio richiede di calcolare $V_A - V_B$ fino a $t = 5s$. Graficamente si ottiene:



La dinamica di uscita fino a $t = 5\ s$ rientra nella zona lineare. Per $t > 5\ s$, la dinamica di V_A va in saturazione perché raggiunge L^-, in quanto $V_A(t = 6\ s) = -2t = -12\ V$.
Di conseguenza, per $t > 5\ s$ l'ipotesi iniziale di linearità non vale più e l'analisi fatta è sbagliata.

- Amplificatore differenziale:

In un amplificatore differenziale l'uscita è funzione di due segnali che contemporaneamente arrivano all'ingresso.



L'uscita dell'amplificatore differenziale è data da:

$$\boxed{V_o = A_D(V_{I2} - V_{I1}) + A_{CM}\left(\frac{V_{I1} + V_{I2}}{2}\right)}$$

dove A_D è il guadagno differenziale dell'amplificatore operazionale dovuto alla differenza dei due segnali, mentre A_{CM} è il *guadagno in common mode*, ovvero il guadagno del valor medio dei due segnali.
Un amplificatore differenziale ideale dovrebbe amplificare solo attraverso il guadagno differenziale, ovvero il guadagno A_{CM} dovrebbe essere nullo.

Un parametro che mette in evidenza quanto un amplificatore differenziale è vicino all'idealità è il $CMMR$ (*common mode rejection ratio*):

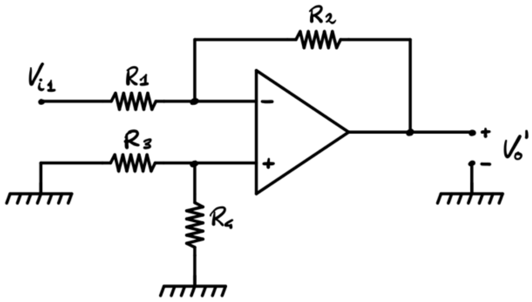
$$\boxed{CMRR = \frac{A_D}{A_{CM}}}$$

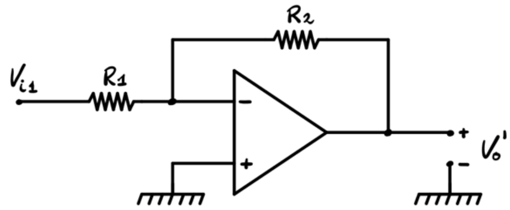
Se $CMMR \to \infty$ significa che l'amplificatore differenziale è ideale.

Si suppone sempre che l'operazionale lavori in zona lineare, ovvero che valga il principio del cortocircuito virtuale. Inoltre, essendo l'operazionale un elemento lineare, vale il principio di sovrapposizione degli effetti; quindi, si possono analizzare gli effetti di V_{I1} e V_{I2} separatamente e infine sommandoli.

Analizziamo quanto vale l'uscita in funzione dei due ingressi, annullando prima V_{I2} e poi V_{I1}.

Annullando l'effetto di V_{I2}, ovvero cortocircuitando il generatore e connettendolo direttamente a massa, si ottiene lo schema in figura (sinistra). Dato che la tensione al morsetto $V^+ = 0$, perché è connesso a massa, si può semplificare il circuito con lo schema a destra, ovvero un classico amplificatore operazionale in configurazione invertente.

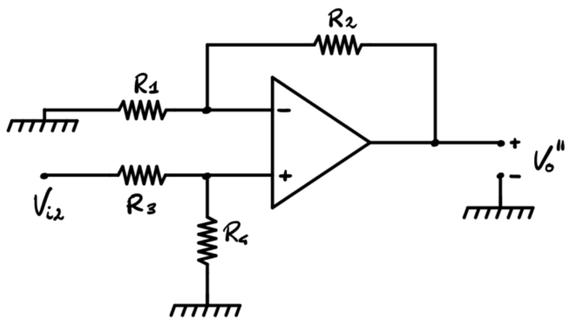




Quindi, la tensione di uscita è data da:

$$\boxed{V_o'(V_{I2} = 0) = V_{I1}\left(-\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Annullando l'effetto di V_{I1}, ovvero cortocircuitando il generatore e connettendolo direttamente a massa, si ottiene lo schema in figura. Questa è una configurazione non invertente dove viene amplificata la tensione che entra nel morsetto non invertente, ovvero:



$$\boxed{V^+ = V_{I2}\frac{R_4}{R_3+R_4}}$$

Quindi, la tensione di uscita è data da:

$$\boxed{V_o''(V_{I1}=0) = V^+\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right) = V_{I2}\frac{R_4}{R_3+R_4} * \left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Quindi, il guadagno complessivo dell'amplificatore differenziale è dato dalla somma di V_o' e V_o'', ovvero:

$$\boxed{V_o = V_o' + V_o'' = -\frac{R_2}{R_1} * V_{I1} + \frac{\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)}{\left(1+\frac{R_3}{R_4}\right)} * V_{I2}}$$

Per verificare se un amplificatore differenziale è ideale, ovvero se $A_{CM}=0$, si pongono in ingresso due segnali uguali $V_{I1}=V_{I2}$ e si impone che l'uscita sia nulla $V_o=0$. Infatti:

$$V_o = A_D(V_{I2}-V_{I1}) + A_{CM}\left(\frac{V_{I1}+V_{I2}}{2}\right) \xRightarrow{V_{I1}=V_{I2}} V_o = A_{CM}\left(\frac{V_{I1}+V_{I2}}{2}\right)$$

e, se imponendo $V_o=0$ si ottengono dei valori di V_{I1} e V_{I2} per cui la relazione è soddisfatta, significa che esistono dei valori di V_{I1} e V_{I2} per i quali l'amplificatore differenziale è ideale.
Quindi, imponendo $V_{I1}=V_{I2}=V_I$ e $V_o=0$ si ottiene:

$$\rightarrow \quad V_o = \left(\frac{\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)}{\left(1+\frac{R_3}{R_4}\right)} - \frac{R_2}{R_1}\right) * V_I = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)}{\left(1+\frac{R_3}{R_4}\right)} - \frac{R_2}{R_1} = 0$$

Questa condizione è soddisfatta solo se:

$$\rightarrow \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3}$$

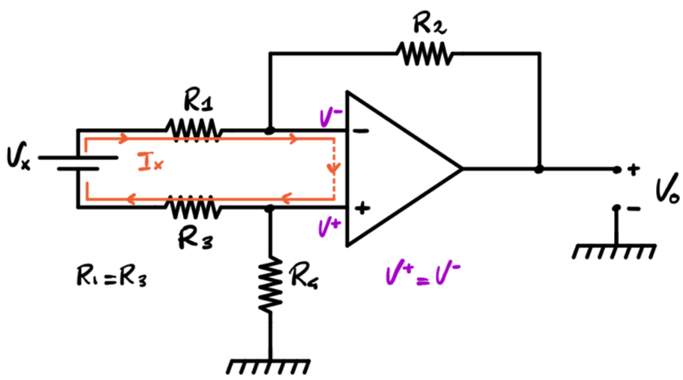
e se vale questa condizione l'uscita diventa:

$$\boxed{V_o = \frac{R_2}{R_1}(V_{I2}-V_{I1})}$$

In questo modo, si ha che l'amplificatore differenziale è ideale perché il guadagno A_{CM} deve essere nullo.

L'amplificatore differenziale, dal punto di vista della funzione di trasferimento, è quindi un amplificatore di tensione ideale, avendo l'uscita che è funzione solo della differenza dei due segnali in ingresso se $R_2=R_4$ e $R_1=R_3$.
Per capire se è un amplificatore ideale di tensione bisogna verificare che le impedenze di ingresso e uscita siano rispettivamente $R_{in}=\infty$ e $R_{out}=0$.

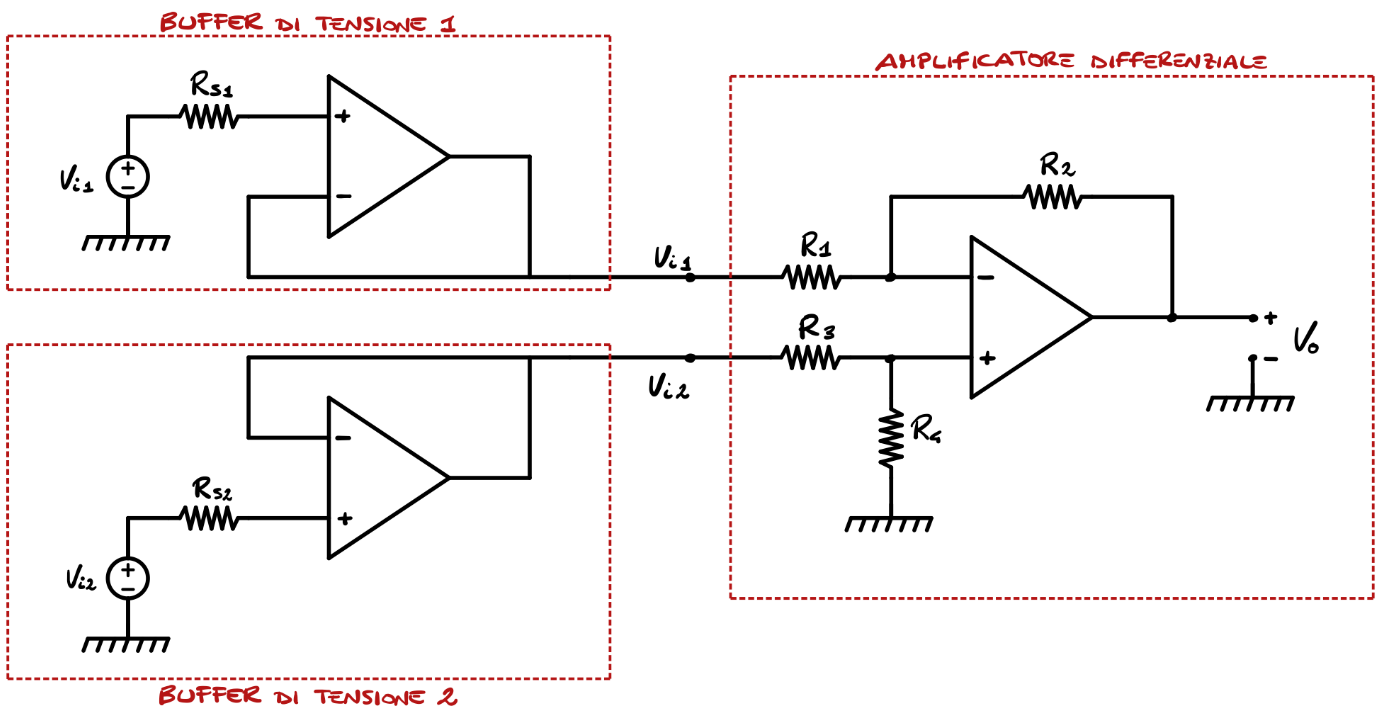
Per calcolare R_{id}, ovvero l'impedenza equivalente vista dall'ingresso del circuito, eliminiamo le eccitazioni preesistenti e mettiamo un generatore di tensione V_X all'ingresso del circuito. Si ha che $R_{id} = V_X/I_X$.
La corrente I_X incontra prima la resistenza R_1, poi arriva all'ingresso dell'amplificatore operazionale nel morsetto invertente. Dato che siamo nell'ipotesi che valga il cortocircuito virtuale, i due morsetti di ingresso sono allo stesso potenziale. Quindi, la corrente I_X passa nell'altro ramo e incontra $R_3 = R_1$. Si ottiene che la resistenza equivalente vista dall'ingresso della rete è:



$$\boxed{R_{id} = 2R_1}$$

Dato che il valore della tensione di uscita del circuito è $V_o = \frac{R_2}{R_1}(V_{I2} - V_{I1})$, c'è un problema. Per un amplificatore di tensione ideale l'impedenza di ingresso deve essere infinita, ed essendo questa direttamente proporzionale ad R_1, si ha che quest'ultima deve tendere all'infinito. Ma facendo R_1 molto grande, il guadagno del circuito diventa molto piccolo (se non nullo) a meno che non venga aumentata anche R_2 in modo proporzionale.

Per risolvere questo problema si possono usare dei buffer di tensione (stadi separatori di impedenze) per separare V_{I1} e V_{I2} (nei buffer di tensione la tensione che esce è sempre uguale a quella che entra).
In un buffer di tensione si usa la configurazione non invertente mettendo l'impedenza di ingresso infinita e impedenza sul ramo di retroazione nulla (in questo modo il guadagno è unitario e la tensione in ingresso è la stessa di quella in uscita).
Usando questa configurazione prima dell'amplificatore di tensione (su entrambi i segnali) si ottiene che i due ingressi vedono un'impedenza di ingresso infinita (quella dell'operazionale del buffer di tensione), ma l'amplificatore differenziale è ancora ideale perché non sono state toccate le sue resistenze.

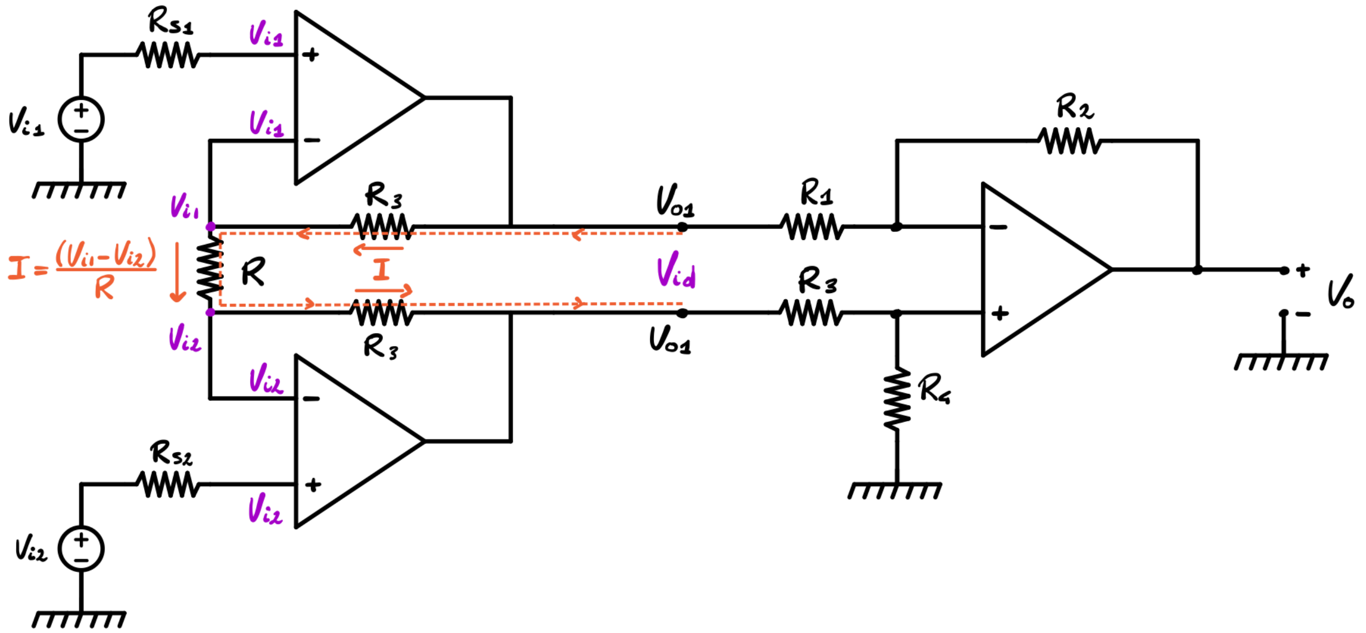


In questo modo, la rete in figura rappresenta un amplificatore di tensione ideale nel quale la tensione di uscita è funzione della differenza delle tensioni di ingresso, ovvero la tensione di uscita è quella di un amplificatore differenziale ideale.

- APPLICAZIONE DELL'AMPLIFICATORE DIFFERENZIALE COME AMPLIFICATORE PER STRUMENTAZIONE:

Un amplificatore differenziale permette di fare delle misure precise in situazioni in cui è presente un forte segnale di modo comune (di fondo). Ad esempio, se si vuole misurare la differenza di luminosità di accendendo una candela contro luce, dove è presente un forte segnale di modo comune dovuto alla luce di fondo, è possibile utilizzare un amplificatore differenziale prendendo come ingressi il punto dove è accesa la candela e un altro punto sul fondo. Dato che l'amplificatore differenziale annulla il segnale di modo comune (A_{CM}) si avrà una misura precisa della differenza di luminosità.

Per usare l'amplificatore differenziale per strumentazione è necessario poter manipolare il guadagno. Per modificare il guadagno bisogna modificare R_1 e R_2, ma per non perdere l'idealità bisogna cambiare la coppia di resistenze R_1 (R_1 e R_3) e la coppia di resistenze R_2 (R_2 e R_4). Cambiare il valore di due resistenze mantenendolo uguale tra loro è però praticamente impossibile, e una minima variazione tra la coppia fa perdere l'idealità all'amplificatore differenziale.
Per risolvere questo problema bisogna fare in modo che il guadagno dell'amplificatore differenziale diventi funzione di una sola resistenza. Per fare questo si modificano i buffer di tensione utilizzandoli come amplificatori in configurazione invertente e si collegano i rami di retroazione con una resistenza. Il circuito risultante è il seguente ($R_1 = R_3, R_2 = R_4$):



Per il principio del cortocircuito virtuale, il potenziale nei morsetti del primo buffer è V_{I1}, mentre quello nei morsetti del secondo buffer è V_{I2}. Quindi ai capi della resistenza R è presente la differenza di potenziale generata da V_{I1} e V_{I2}, quindi scorre una corrente pari a $I = (V_{I1} - V_{I2})/R$. Tale corrente non può uscire o entrare nei morsetti degli amplificatori operazionali e quindi l'unico percorso disponibile è passare attraverso le resistenze R_3.
La V_{id} che entra nell'amplificatore differenziale è data dalla differenza tra V_{o1} e V_{o2} e la corrente I che scorre tra V_{o1} e V_{o2} è la stessa che scorre nella resistenza R e nelle resistenze R_3. Quindi, si ottiene che:

$$\boxed{V_{id} = IR_3 + IR + IR_3 = I(R + 2R_3) = (V_{I1} - V_{I2}) * \frac{(R + 2R_3)}{R}}$$

Quindi, l'uscita dell'amplificatore differenziale ora è data da:

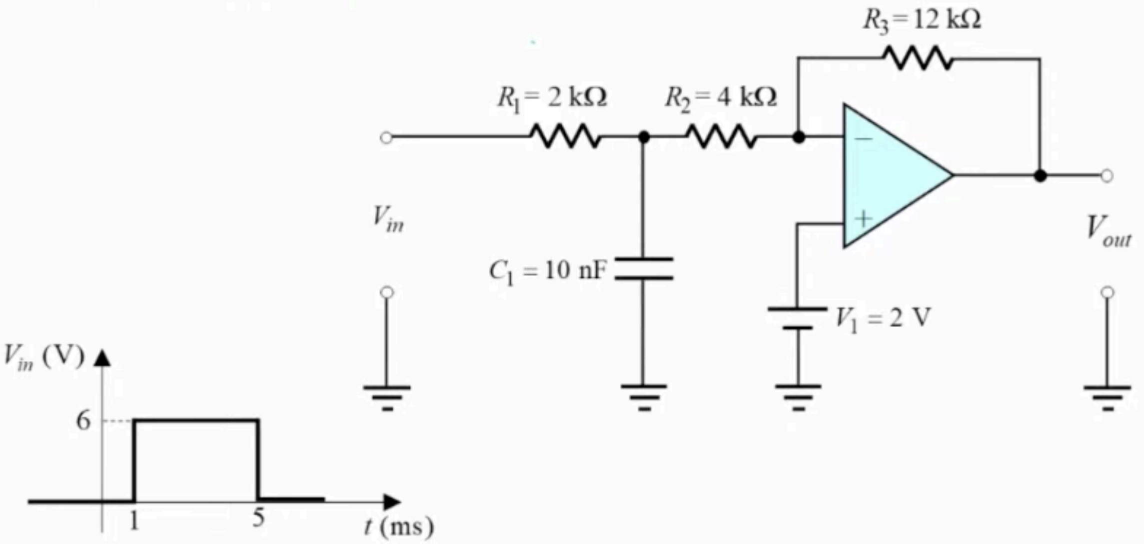
$$\boxed{V_o = -\frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{2R_3}{R}\right) * (V_{I1} - V_{I2})}$$

dove le resistenze R_1, R_2 e R_3 sono coppie di resistenze che non possono essere cambiate, ma la resistenza R è singola è quindi può essere cambiata. In questo modo si può gestire il valore del guadagno dell'amplificatore differenziale solo attraverso la resistenza R.

Esercizio

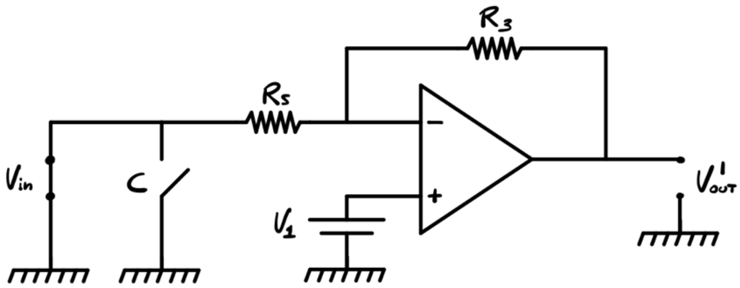
Si consideri il circuito riportato in figura. Dato il segnale di ingresso V_{in} determinare l'andamento temporale della tensione di uscita V_{out}.

Op Amp ideale $V^{+}_{sat} = -V^{-}_{sat} = 20$ V



Nel morsetto non invertente è presente un ingresso costante $V_1 = 2\,V$, mentre nel morsetto invertente è presente un ingresso a gradino V_{in}. L'uscita V_{out} è caratterizzata dalla somma degli effetti causati dai due ingressi. Si può quindi applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, calcolando prima quello di V_{in} (annullando V_1) e poi quello di V_1 (annullando V_{in}).

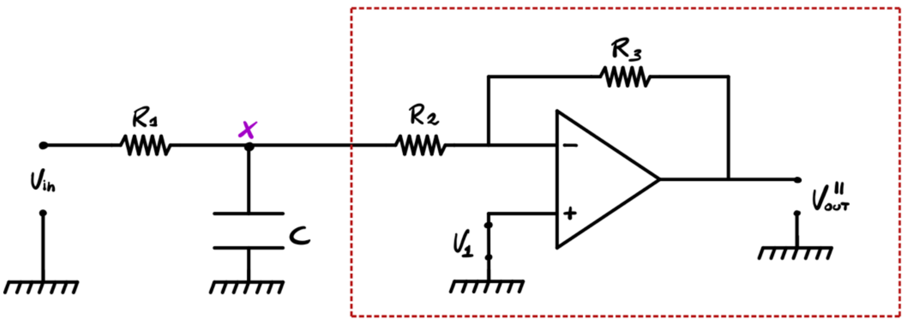
Calcoliamo l'effetto di V_1 annullando V_{in}: annullare V_{in} significa sostituire il generatore di tensione con un cortocircuito.



Per il principio del cortocircuito virtuale, se sono presenti $2\,V$ sul morsetto non invertente, sono presenti $2\,V$ anche su quello invertente. Questo significa che il condensatore è collegato ad una tensione di valore costante e quindi con $\omega = 0$, per cui $Z_C = \infty$, ovvero il condensatore è un circuito aperto.
In questa condizione, le due resistenze R_1 e R_2 sono in serie e quindi possono essere semplificate in un'unica resistenza di valore $R_S = 6\,k\Omega$. Quindi il guadagno di questa configurazione è il classico guadagno dell'amplificatore operazionale in configurazione non invertente, per cui si ottiene:

$$V'_{out}(V_{in} = 0) = V_1\left(1 + \frac{R_3}{R_S}\right) = 6\,V$$

Calcoliamo l'effetto di V_{in} annullando V_1: annullare V_1 significa sostituire il generatore di tensione con un cortocircuito.



Chiamando x il nodo che connette le due resistenze R_1, R_2 e il condensatore C, si ha che il circuito alla destra del nodo x è un classico amplificatore operazionale in configurazione invertente, che vede in ingresso la tensione presente al nodo x, ovvero la tensione ai capi del condensatore C.
Quindi:

$$V''_{out}(V_1 = 0) = V_x\left(-\frac{R_3}{R_2}\right) = V_C\left(-\frac{R_3}{R_2}\right)$$

La tensione ai capi del condensatore si calcola attraverso il metodo asintotico:

$$V_C(t) = V_C(\infty) - [V_C(\infty) - V_C(t_0^-)]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

quindi bisogna calcolare $V_C(\infty), V_C(t_0^-)$ e τ.

La tensione $V_C(t_0^-) = V_C(1^-) = 0\ V$, perché l'ingresso vale $V_{in} = 0\ V$, per il principio del cortocircuito virtuale su entrambi i morsetti ci sono $0\ V$ e quindi nelle due resistenze R_1 e R_2 non scorre corrente e ci sono $0\ V$ anche al nodo x.

La tensione $V_C(\infty)$ è la tensione che si ha al termine del transitorio, ovvero la tensione che si vede quando in ingresso di ha $V_{in} = 6\ V$ costanti. Anche in questo caso sul morsetto invertente ci sono $0\ V$ per il principio del cortocircuito virtuale. Quindi, la tensione al nodo x è quella dovuta al partitore di tensione e quindi si ha:

$$V_C(\infty) = V_{in}\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 4\ V$$

La costante di tempo $\tau = CR_{eq}$ quindi bisogna calcolare R_{eq} dal punto di vista del condensatore. Per fare questo si sostituisce il condensatore con un generatore di corrente V_X e si calcola la corrente I_X che esce dal generatore e deve tornare a massa, annullando tutte le eccitazioni preesistenti. La corrente I_X ha due percorsi, uno attraverso R_1 che la porta poi direttamente a massa (perché V_{in} è stato cortocircuitato), e uno attraverso R_2 che la porta a massa virtuale. Quindi la resistenza equivalente è il parallelo delle resistenze R_1 e R_2:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Quindi si ottiene:

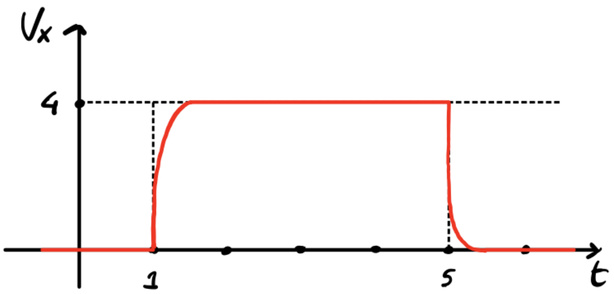
$$\tau = CR_{eq} = C * \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 13\ \mu s$$

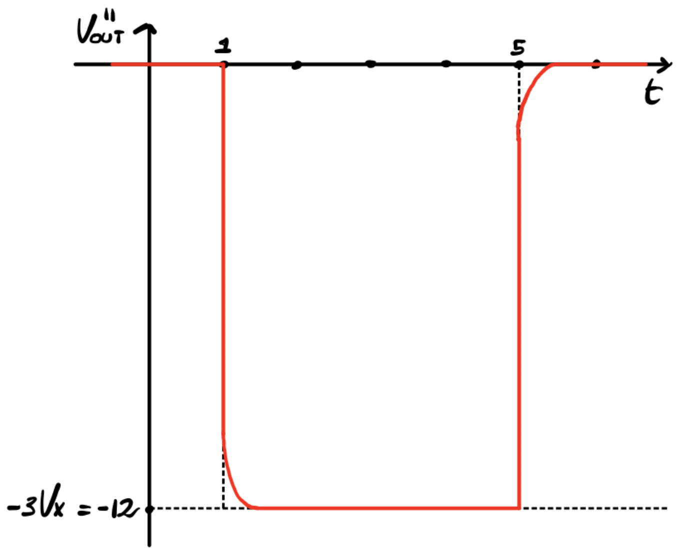
Il transitorio, quindi, dura circa $5\tau = 60\ \mu s$.

La tensione di uscita è:

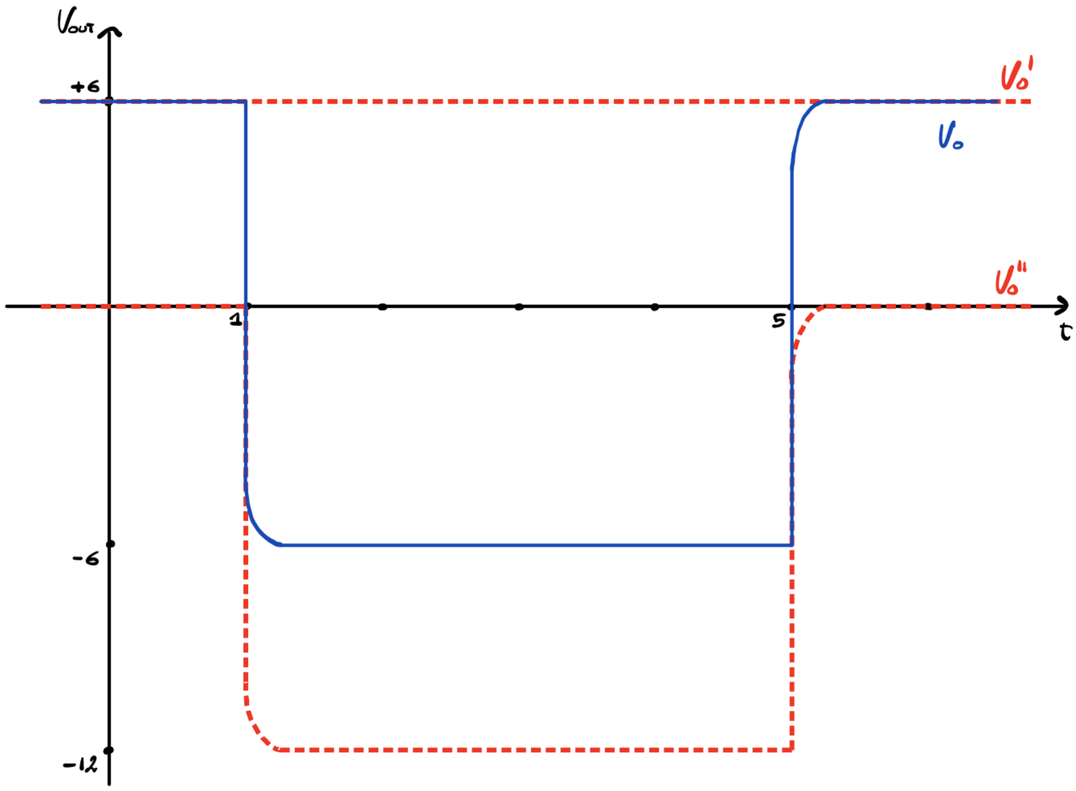
$$V''_{out}(V_1 = 0) = V_x\left(-\frac{R_3}{R_2}\right) = V_x\left(-\frac{12}{4}\right) = -3V_x$$

Graficamente si ottiene:





La somma degli effetti equivale quindi alla somma di V'_{out} e V''_{out} e graficamente si ottiene il seguente risultato:



Dato che tutti gli effetti e anche la somma degli effetti rientrano nella dinamica dell'amplificatore, vale l'ipotesi di linearità fatta all'inizio quindi l'analisi eseguita è corretta.

MULTIVIBRATORI

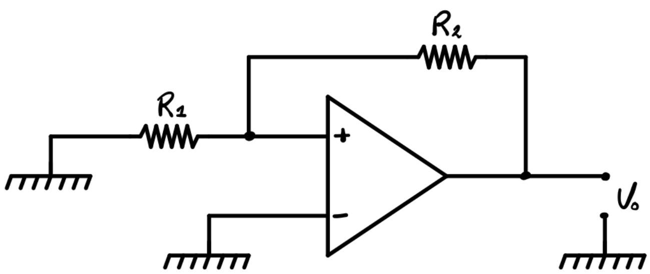
- MULTIVIBRATORI E GENERATORI DI FUNZIONE:

Un oscillatore è un sistema instabile che ha ingresso nullo e come uscita una forma d'onda. Per formare un sistema instabile si può usare l'amplificatore operazionale con controreazione positiva. Un amplificatore operazionale senza retroazione è già un sistema instabile, in quanto ha dinamica nulla e qualsiasi segnale in ingresso lo porta in saturazione. Per sfruttare questa proprietà si fa uso della retroazione positiva che incrementa ancora di più l'instabilità dell'amplificatore operazionale, che viene quindi usato come componente degli oscillatori.

L'applicazione dell'amplificatore operazionale con controreazione positiva è quella dei *multivibratori*. Esistono tre tipi di multivibratori:

- bistabili (comparatori);
- astabili (generatori di forme d'onda quadre e triangolari);
- monostabili (generatori di impulsi).

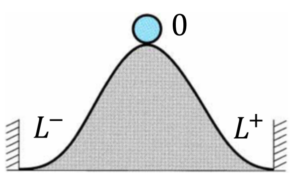
- Multivibratori bistabili:



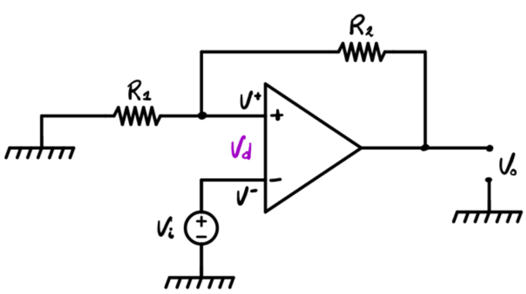
Prendiamo in considerazione un amplificatore operazionale con retroazione positiva. Entrambi i rami di ingresso sono connessi a massa, ovvero l'ingresso è nullo e di conseguenza anche l'uscita è nulla.
Se, però, arriva in ingresso un segnale di rumore, anche molto piccolo, sul morsetto non invertente, questo viene amplificato fino a portare l'amplificatore operazionale in saturazione ad L^+ o L^- a seconda del segno del rumore.
Una volta che l'amplificatore operazionale è arrivato in saturazione non vale più il principio del cortocircuito virtuale; quindi, sul morsetto invertente sono presenti $0\,V$ per la connessione diretta a massa, mentre sul morsetto non invertente la tensione è:

$$\boxed{V^+ = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) V_o = \beta V_o = \begin{cases} \beta L^+ \\ \beta L^- \end{cases}} \qquad con \qquad \beta = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)$$

dato che V_o può assumere solo i due valori L^+ o L^-. Dopo che V^+ è arrivato a βL^+ o βL^-, questo rimane stabile in quello stato a meno che non arrivi una forte variazione di tensione (piccole variazioni di rumore non riescono più a cambiare lo stato). Quindi i due stati dell'uscita L^+ e L^- sono gli unici due stati stabili. Questa configurazione ha un terzo stato, che è quello iniziale, in cui la tensione di uscita è $0\,V$, ma è uno stato fortemente instabile.
L'analogia fisica di questo fenomeno è quello della palla in cima ad una collina. Un piccolissimo disturbo fa cadere la palla in uno dei due stati stabili.



-TRIGGER DI SCHMITT INVERTENTE:



Per forzare l'uscita di un multivibratore bistabile bisogna mettere un generatore di tensione sul morsetto invertente. Come detto, la retroazione positiva fa in modo che l'amplificatore sia sempre in saturazione, ovvero che V_o sia L^+ oppure L^-. Mettendo un generatore di tensione sul morsetto invertente, si ha una tensione differenziale V_d in ingresso all'operazionale, ed è il segno di V_d a determinare se l'uscita vale L^+ o L^-:

$$\begin{cases} V_d = V^+ - V^- > 0 \rightarrow V_o = L^+ \\ V_d = V^+ - V^- < 0 \rightarrow V_o = L^- \end{cases}$$

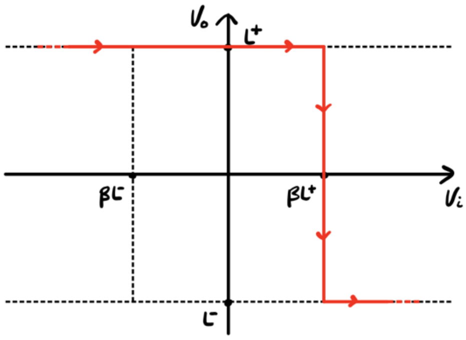
- Partendo da $V_i = V^- = -\infty$ si ha il seguente andamento al variare della tensione V_i:

se $V_i = V^- = -\infty$: $V_d = +\infty$ $\rightarrow$ $V_o = L^+$ $\rightarrow$ $V^+ = \beta L^+$;

se $V_i = V^- = 0$: $V_d = \beta L^+$ $\rightarrow$ $V_o = L^+$ $\rightarrow$ $V^+ = \beta L^+$;

se $V_i = V^- = \beta L^+$: $V_d = 0$ $\rightarrow$ $V_o = L^-$ $\rightarrow$ $V^+ = \beta L^-$;

se $V_i = V^- = +\infty$: $V_d = \beta L^-$ $\rightarrow$ $V_o = L^-$ $\rightarrow$ $V^+ = \beta L^-$;



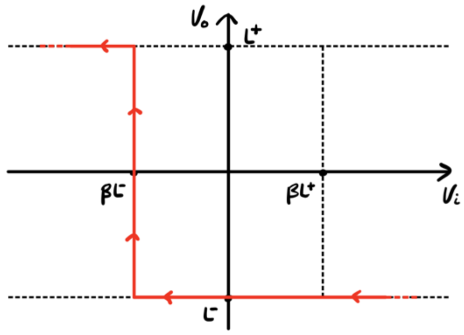
- Partendo da $V_i = V^- = +\infty$ si ha il seguente andamento al variare della tensione V_i:

se $V_i = V^- = +\infty$: $V_d = -\infty$ $\rightarrow$ $V_o = L^-$ $\rightarrow$ $V^+ = \beta L^-$;

se $V_i = V^- = 0$: $V_d = \beta L^-$ $\rightarrow$ $V_o = L^-$ $\rightarrow$ $V^+ = \beta L^-$;

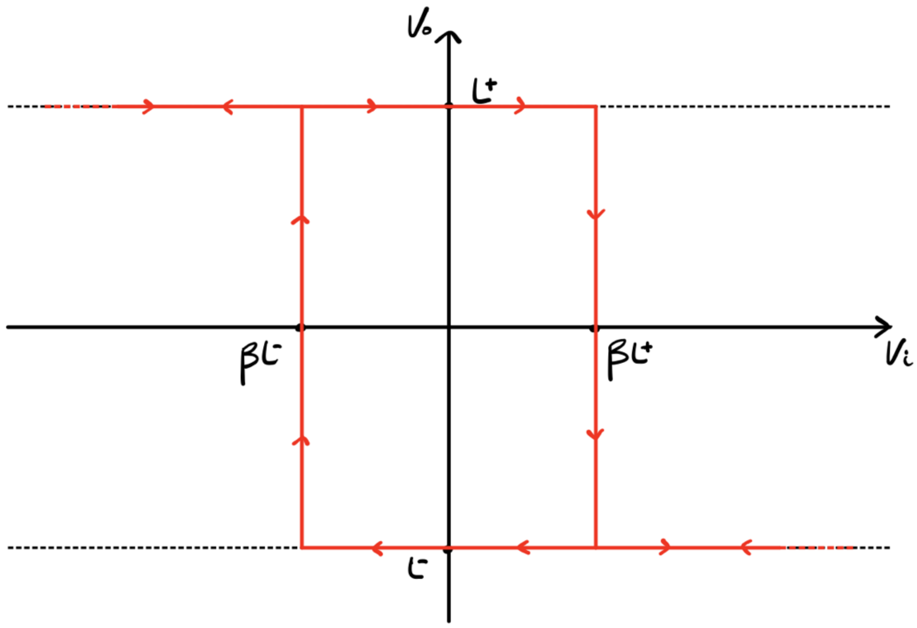
se $V_i = V^- = \beta L^-$: $V_d = 0$ $\rightarrow$ $V_o = L^+$ $\rightarrow$ $V^+ = \beta L^+$;

se $V_i = V^- = -\infty$: $V_d = \beta L^+$ $\rightarrow$ $V_o = L^+$ $\rightarrow$ $V^+ = \beta L^+$;



Quindi:
- quando l'ingresso arriva da valori positivi, la funzione di trasferimento cambia per $V_i = V_{TL} = \beta L^-$, dove TL sta per threshold low;
- quando l'ingresso arriva da valori negativi, la funzione di trasferimento cambia per $V_i = V_{TH} = \beta L^+$, dove TH sta per threshold high.

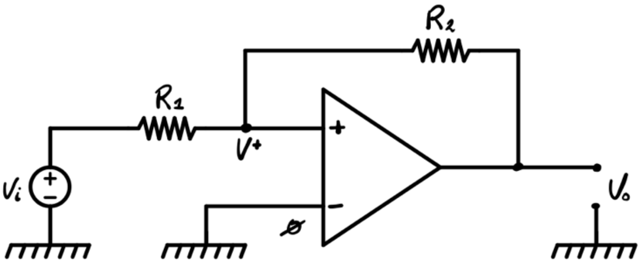
Quindi la transcaratteristica di questo circuito è un'*isteresi*:



Questo tipo di circuito può essere usato per scrivere un determinato valore fornendo un ingresso un impulso:
- se l'impulso è maggiore di V_{TH} viene *scritto* in uscita L^-;
- se l'impulso è ~~maggiore~~ MINORE di V_{TL} viene *scritto* in uscita L^+;

una volta che un valore è stato scritto, rimane tale fino a quando non arriva un impulso maggiore del valore di soglia opposto che lo cambia (es. se è presente L^+ deve arrivare un impulso maggiore di V_{TH} affinché il valore cambi).
Lo stato del circuito, quindi, dipende dalla sua storia precedente. Dal punto di vista digitale, questo tipo di circuito può essere usato come una memoria per scrivere 0/1 a seconda che il valore di uscita sia L^+ o L^-.

- TRIGGER DI SCHMITT NON INVERTENTE:



In modo simmetrico al precedente, si può costruire un trigger di Schmitt non invertente, mettendo il generatore di tensione sul morsetto non invertente.
Si ottiene che la tensione V^+ è data dalla sovrapposizione degli effetti del generatore di tensione V_i e dalla tensione di uscita (che può essere vista a sua volta come un generatore di tensione) V_o:

- cortocircuitando V_o, abbiamo che V^+ è data dalla partizione di tensione su R_1 e R_2 (con R_2 al numeratore perché V_o sta a massa);
- cortocircuitando V_i, abbiamo che V^+ è data dalla partizione di tensione su R_1 e R_2 (con R_1 al numeratore perché V_i sta a massa).

Si ottiene quindi:

$$V^+ = V_i \frac{R_2}{R_1 + R_2} + V_o \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Dato che il morsetto invertente è connesso direttamente a massa, si ha $V^- = 0\ V$ sempre, e di conseguenza $V_d = V^+$. Quindi, è il valore di V^+ a determinare il valore dell'uscita:

$$\begin{cases} V^+ > 0 \rightarrow V_o = L^+ \\ V^+ < 0 \rightarrow V_o = L^- \end{cases}$$

I valori di threshold sono dati da:

$$V_{TL} = -\frac{R_1}{R_2} L^+ \qquad V_{TH} = -\frac{R_1}{R_2} L^-$$

Facendo l'analisi sui valori della tensione di ingresso si ottiene:

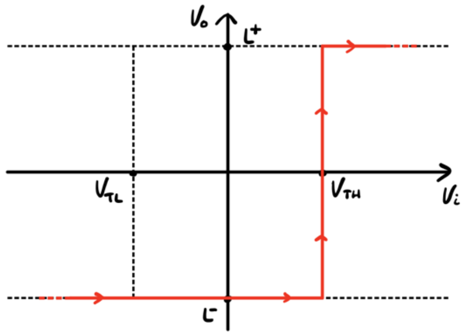
- Partendo da $V_i = V^- = -\infty$ si ha il seguente andamento al variare della tensione V_i:

se $V_i = V^- = -\infty$: $V_d = V^+ < 0$ $\rightarrow$ $V_o = L^-$;

se $V_i = V^- = 0$: $V_d = V^+ = L^-$ $\rightarrow$ $V_o = L^-$;

se $V_i = V^- = V_{TH}$: $V_d = V^+ = L^+$ $\rightarrow$ $V_o = L^+$;

se $V_i = V^- = +\infty$: $V_d = V^+ > 0$ $\rightarrow$ $V_o = L^+$;



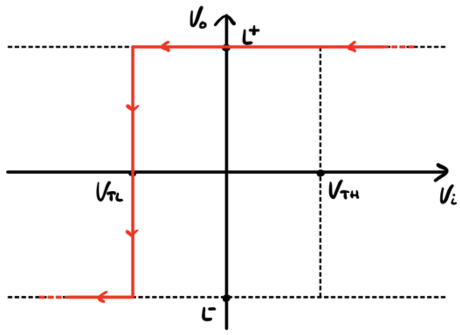
- Partendo da $V_i = V^- = +\infty$ si ha il seguente andamento al variare della tensione V_i:

se $V_i = V^- = +\infty$: $V_d = V^+ > 0$ $\rightarrow$ $V_o = L^+$;

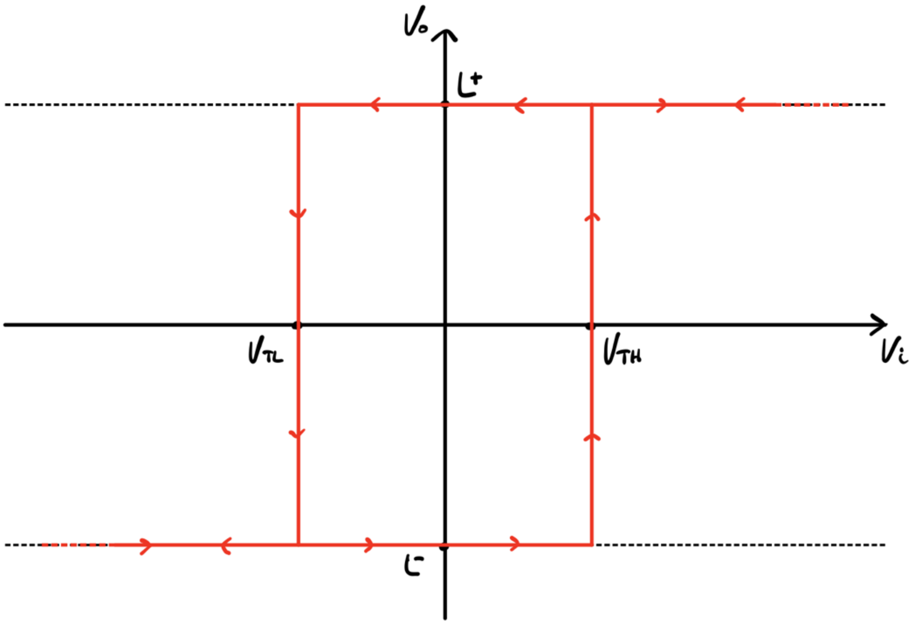
se $V_i = V^- = 0$: $V_d = V^+ = L^+$ $\rightarrow$ $V_o = L^+$;

se $V_i = V^- = V_{TL}$: $V_d = V^+ = L^-$ $\rightarrow$ $V_o = L^-$;

se $V_i = V^- = -\infty$: $V_d = V^+ < 0$ $\rightarrow$ $V_o = L^-$;



Quindi la transcaratteristica di questo circuito è un'*isteresi*:



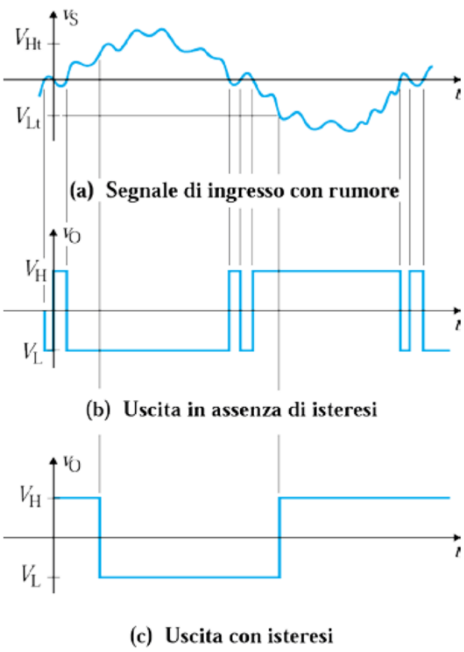
Questo tipo di circuito può essere usato per scrivere un determinato valore fornendo un ingresso un impulso:

- se l'impulso è maggiore di V_{TH} viene *scritto* in uscita L^{+};
- se l'impulso è MINOre di V_{TL} viene *scritto* in uscita L^{-};

una volta che un valore è stato scritto, rimane tale fino a quando non arriva un impulso maggiore del valore di soglia opposto che lo cambia (es. se è presente L^{-} deve arrivare un impulso maggiore di V_{TH} affinché il valore cambi).
Lo stato del circuito, quindi, dipende dalla sua storia precedente. Dal punto di vista digitale, questo tipo di circuito può essere usato come una memoria per scrivere 0/1 a seconda che il valore di uscita sia L^{+} o L^{-}.

- APPLICAZIONE DEL TRIGGER DI SCHMITT COME RILEVATORE DI ZERO CROSSING:

In generare sappiamo che un amplificatore operazionale senza retroazione può essere usato come comparatore tra i due segnali in ingresso. Ad esempio, se si ha un morsetto a massa e un segnale V_i sull'altro morsetto, si va a comparare il segnale V_i con 0: se il l'ingresso è positivo l'uscita è positiva, se l'ingresso è negativo l'uscita è negativa.



(a) Segnale di ingresso con rumore

(b) Uscita in assenza di isteresi

(c) Uscita con isteresi

Questo tipo di comparatore però non è utilizzabile come *rilevatore di zero crossing* perché se si sommasse del rumore al segnale, si potrebbe avere passaggio per zero più volte di quelle che effettivamente il segnale avrebbe fatto.

Per risolvere questo problema bisogna usare un trigger di Schmitt. In questo modo, affinché il rumore causi un passaggio indesiderato per zero, deve avere un impulso maggiore di V_{TH} o minore di V_{TL}, altrimenti l'uscita rimane stabile.
In questo modo si possono costruire dei rilevatori di zero crossing precisi, che non vengono influenzati dal rumore.

Bisogna però anche gestire i valori di V_{TH} e V_{TL} in modo tale che non siano troppo grandi (in modulo), altrimenti un segnale che sta vicino allo zero ed ha una variazione che lo fa passare per zero, ma tale variazione è minore in modulo di V_{TH} e V_{TL}, non viene rilevato in uscita come uno zero crossing.

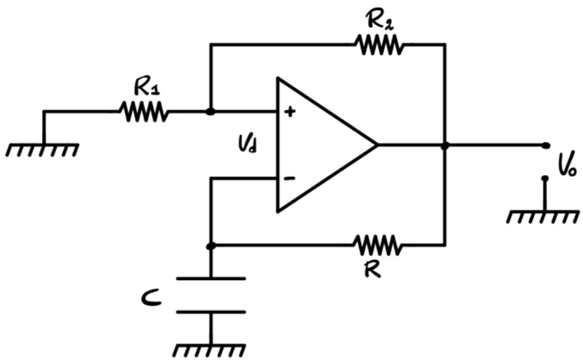
Quindi un buon rilevatore di zero crossing ha i valori di V_{TH} e V_{TL} non troppo piccoli, altrimenti il rumore causa degli zero crossing non desiderati, ma neanche troppo grandi altrimenti un segnale che varia di poco, ma passa comunque per zero, non viene rilevato in uscita.

- Multivibratore astabile:

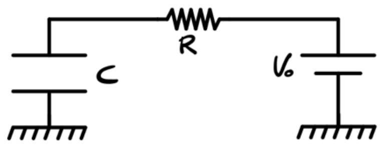
- GENERATORE D'ONDA QUADRA:

Un multivibratore astabile è un circuito che si accorge di quale stato è presente in uscita (L^+ o L^-) e forza, attraverso un segnale, il cambio di stato; un multivibratore astabile commuta continuamente l'uscita da L^+ a L^- nel tempo, e questo provoca in uscita una forma d'onda di tipo rettangolare, ovvero è un generatore d'onda quadra.

Il circuito di un multivibratore astabile è di base un trigger di Schmitt, ma ha anche un ramo che collega l'uscita al morsetto invertente, sul quale è connesso anche un condensatore.
Essendo retroazionato positivamente, l'uscita può essere o L^+ o L^-.



Mettiamoci in una delle due condizioni (a caso). Partiamo quindi con $V_o = L^+$, per cui la tensione al morsetto non invertente è $V^+ = \beta L^+$.
Inizialmente il condensatore è scarico, e la tensione che sta entrando in V^- è la stessa che sta caricando il condensatore, quindi $V^- = V_C(t)$. L'impedenza di ingresso dell'amplificatore operazionale è sempre infinita (anche quando è in saturazione) quindi dal morsetto invertente non può arrivare nessuna corrente che modifica la carica sul condensatore.
L'unica corrente che arriva sul condensatore è quella che parte da V_o, attraversa la resistenza R e arriva all'armatura del condensatore, mentre l'altra armatura è sempre a massa. Quindi, dal punto di vista del condensatore il circuito è il seguente, dove V_o è inizialmente uguale a L^+.

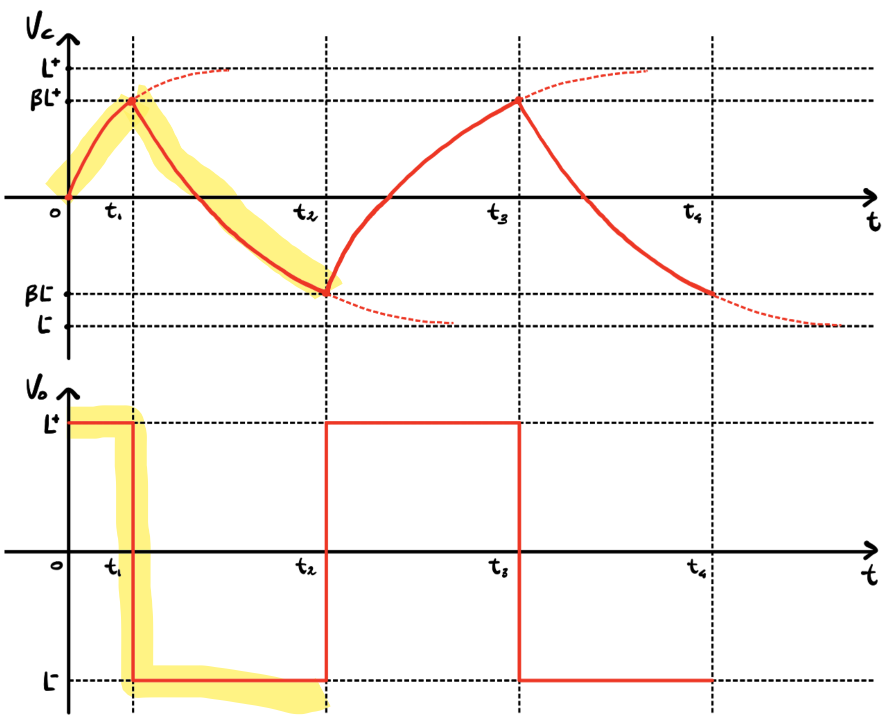


Quindi, il condensatore inizia a caricarsi esponenzialmente verso L^+, con $\tau = CR$.
La tensione differenziale in ingresso all'operazionale è $V_d = V^+ - V^-$, che in questo caso è pari a $V_d = \beta L^+ - V_C(t)$. Quindi, all'istante $t = 0$ si ha $V_C = 0$ e $V_d = \beta L^+$; la commutazione si ha all'istante $t = 1$, quando $V_C = \beta L^+$ e di conseguenza $V_d = 0 \rightarrow V_d = L^-$ (perché non c'è stabilità). Quindi, mentre il condensatore si carica verso L^+, passa per un punto dove la tensione è pari a βL^+ (che è sempre minore di L^+, essendo una partizione), e si ha la commutazione in uscita, per la quale V_o passa da L^+ a L^-.

Adesso il condensatore vede come tensione di carica $V_o = L^-$, quindi comincia a caricarsi (scaricarsi) verso L^-, fino a quando non incrocia la tensione βL^- e si ha nuovamente la commutazione, perché $V_d = V^+ - V^- = \beta L^- - V_C(t)$.
Dopo la commutazione ridiventa $V_o = L^+$ e $V^+ = \beta L^+$, per cui il condensatore ricomincia a caricarsi verso L^+ fino ad una nuova commutazione, e così via.

Quindi, riassumendo, il condensatore gestisce la threshold della commutazione: quando la carica raggiunge un valore di threshold, ad esempio βL^+, il valore in uscita commuta ad L^- e il condensatore inizia a caricarsi verso L^-; quando la carica raggiunge il valore di threshold opposto, ad esempio βL^-, il valore in uscita commuta ad L^+ e il condensatore inizia a caricarsi verso L^+.

In questo modo in uscita si genera una forma d'onda quadra, la cui forma dipende da come il condensatore si carica e si scarica, ovvero dipende da $\tau = RC$.



Per calcolare il periodo della dell'onda quadra bisogna calcolare il tempo che impiega il condensatore a passare da βL^{+} a βL^{-} e viceversa. La carica sul condensatore varia esponenzialmente seguendo la regola asintotica:

$$V_C(t) = V_C(\infty) - [V_C(\infty) - V_C(t_1^{-})]e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}$$

quindi, per calcolare $V_C(t)$ bisogna conoscere quando vale $V_C(\infty)$, ovvero a quale tensione tende la carica del condensatore, $V_C(t_1^{-})$, ovvero da quale tensione di precarica parte il condensatore prima del processo di carica, e la costante di tempo τ.

Calcoliamo $T_1 = t_2 - t_1$, ovvero la durata di tempo per la quale l'uscita è pari a L^{-}. Abbiamo che:

- $V_C(\infty) = L^{-}$;
- $V_C(t_1^{-}) = \beta L^{+}$.
- $V_C(t_2) = \beta L^{-}$

Quindi:

$$V_C(t_2) = V_C(\infty) - [V_C(\infty) - V_C(t_1^{-})]e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau}} = L^{-} - [L^{-} - \beta L^{+}]e^{-\frac{T_1}{\tau}} = \beta L^{-}$$

da cui si ottiene:

$$\boxed{T_1 = \tau\, ln\left(\frac{1-\beta(L^{+}/L^{-})}{1-\beta}\right)}$$

Calcoliamo $T_2 = t_3 - t_2$, ovvero la durata di tempo per la quale l'uscita è pari a L^{+}. Abbiamo che:

- $V_C(\infty) = L^{+}$;
- $V_C(t_2^{-}) = \beta L^{-}$.
- $V_C(t_3) = \beta L^{+}$

Quindi:

$$V_C(t_3) = V_C(\infty) - [V_C(\infty) - V_C(t_2^{-})]e^{-\frac{t_3-t_2}{\tau}} = L^{+} - [L^{+} - \beta L^{-}]e^{-\frac{T_2}{\tau}} = \beta L^{+}$$

da cui si ottiene:

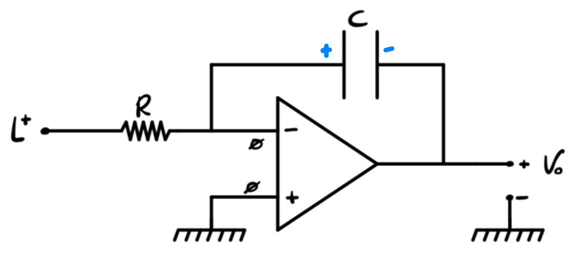
$$\boxed{T_2 = \tau\, ln\left(\frac{1-\beta(L^{-}/L^{+})}{1-\beta}\right)}$$

Se $L^{+} = |L^{-}|$ si ha che $L^{+}/L^{-} = L^{+}/L^{+} = -1$, per cui si ottiene che un periodo generico T è pari a:

$$\boxed{T = T_1 + T_2 = 2\tau \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)}$$

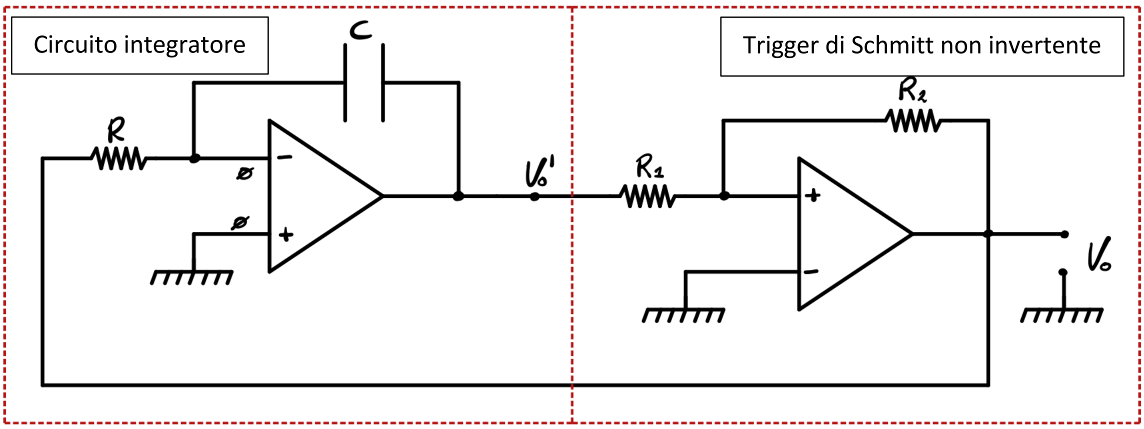
- GENERATORE D'ONDA TRIANGOLARE:

Come abbiamo visto, un trigger di Schmitt può essere usato per generare un'onda quadra, ma se si osserva l'andamento della tensione del condensatore del tempo di nota che è molto simile ad un'onda triangolare. Ovviamente non può essere un'onda triangolare perché l'andamento del condensatore è esponenziale nel tempo.
Un condensatore, invece, ha un andamento lineare nel tempo se viene caricato da una corrente costante nel tempo, ovvero da un generatore di corrente.



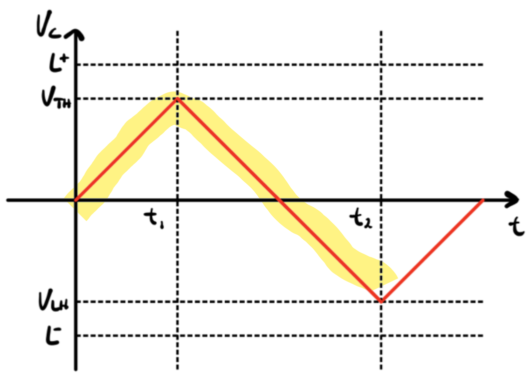
Sappiamo che un amplificatore operazionale in configurazione invertente è un generatore di corrente per l'impedenza che si trova sul ramo di retroazione; quindi, se si mette il condensatore sul ramo di retroazione, questo avrà un andamento di carica lineare. Questo tipo di circuito è il circuito integratore.
Supponiamo di mettere in ingresso al circuito integratore la tensione L^+ (o equivalentemente L^-), si ottiene in uscita $V_o = -V_C = -\frac{L^+}{RC}t$, ovvero una rampa, proprio perché il condensatore di carica linearmente. Quindi l'uscita di un integratore è lineare nel tempo. L'uscita ha il segno meno perché il la corrente scorre nel condensatore da sinistra a destra, lasciando una caduta di potenziale positiva dove entra rispetto a dove esce (e quindi il meno sta a destra del condensatore), mentre la tensione di uscita è presa positiva proprio verso la caduta di potenziale del condensatore (ovvero verso il meno).

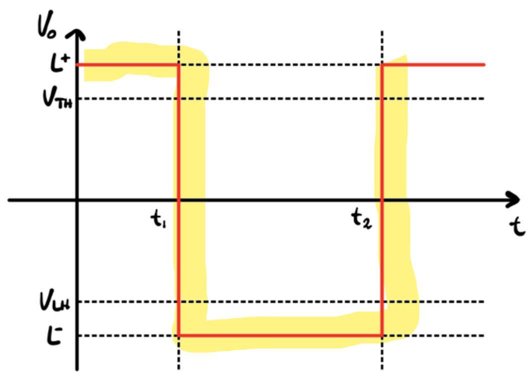
Si può sfruttare il circuito integratore, in combinazione ad un trigger di Schmitt non invertente, per creare un generatore di onda triangolare.
Si mette in ingresso al circuito integratore l'uscita del trigger di Schmitt, ovvero l'uscita della saturazione L^+ o L^-, e si connette l'uscita dell'integratore all'ingresso del trigger di Schmitt:



Analizziamo il circuito supponendo che $V_o = L^+$: la tensione L^+ viene riportata in ingresso al circuito integratore; quindi, il condensatore si inizia a caricare verso la tensione L^+ e l'uscita dell'integratore decresce linearmente secondo la legge $V_o' = -V_C = -\frac{L^+}{RC}t$. Quando V_o^- raggiunge la V_{TL} del trigger, si ha la commutazione dell'uscita V_o da L^+ a L^-. Quindi, l'ingresso dell'integratore diventa L^- e la corrente che scorre nel circuito integratore cambia di verso (perché la corrente va sempre dal potenziale maggiore verso il potenziale minore e in ingresso è presente L^-, mentre in uscita è presente V_{TH} che è sicuramente minore di L^-), e di conseguenza il condensatore inizia a scaricarsi verso L^- mentre l'uscita dell'integratore cresce linearmente con la legge $V_o' = V_C = \frac{L^-}{RC}t$. Quando V_o' raggiunge la soglia V_{TH} si ha nuovamente la commutazione dell'uscita V_o da L^- a L^+, e così via.

Quindi se si prende l'uscita su V_o si ottiene un'onda quadra, mente se si prende l'uscita su V_C si ottiene un'onda triangolare.

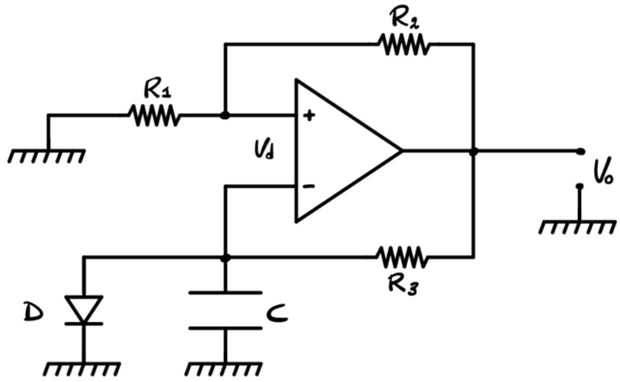




- Multivibratore monostabile:

Come abbiamo visto, un multivibratore astabile non ha stati stabili, ma oscilla tra i valori L^+ e L^- per V_o, e i valori βL^+ e βL^- per V_C.

Prendiamo ora il circuito dell'astabile e colleghiamo in parallelo al condensatore un diodo con modello a tensione costante, ovvero il modello secondo il quale



$$\begin{cases} v_D = 0 & per\ v_D \leq V_\gamma \\ v_D = V_\gamma & per\ v_D > V_\gamma \end{cases}$$

dove v_D è la tensione del diodo e V_γ è la tensione di soglia del diodo (spiegato meglio nella parte del diodo).

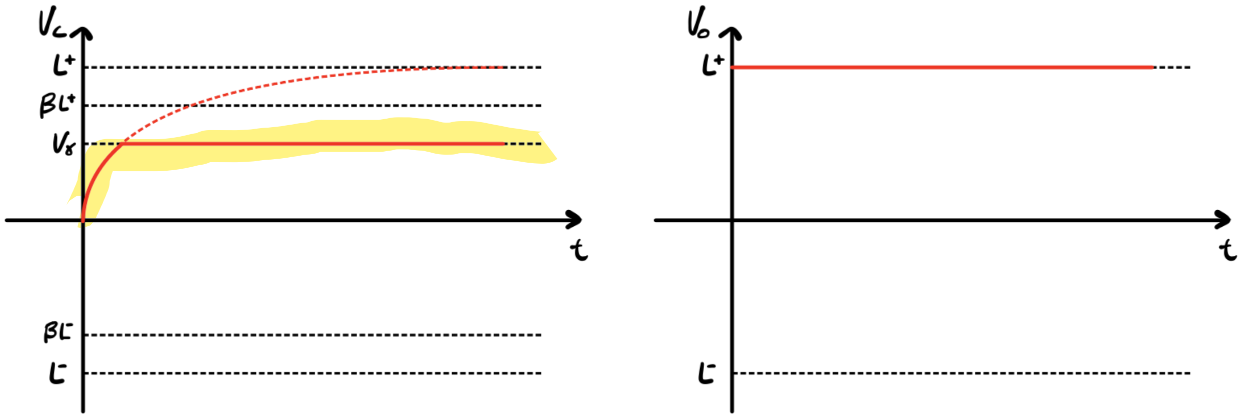
Quindi, in questo modello, se la tensione con cui è polarizzato il diodo è positiva (polarizzazione diretta), il diodo è una batteria di valore $V_\gamma = 0.6\ V$ (conduzione), mentre se la tensione di polarizzazione è negativa (polarizzazione inversa) il diodo è un circuito aperto (interdizione).

Nel multivibratore monostabile si ha $V_\gamma < |\beta L^+| = |\beta L^-|$.

Partiamo dal caso in cui in uscita si ha $V_o = L^+$. In questo caso:

- la tensione al morsetto non invertente diventa βL^+;
- il condensatore tende a caricarsi verso la tensione L^+, partendo da una tensione $V_C = 0$;
- il diodo vede una tensione minore di V_γ, perché il condensatore è scarico, e quindi si comporta come un circuito aperto.

Quindi il condensatore inizia a caricarsi verso L^+, come nel multivibratore astabile dovrebbe avere l'andamento oscillatorio tra i due stati. Ma essendo $V_\gamma < |\beta L^+| = |\beta L^-|$ si ha che una volta che il condensatore raggiunge tensione V_γ, il diodo viene polarizzato ai suoi capi con questa tensione e quindi diventa una batteria di valore V_γ. A questo punto la tensione sul condensatore viene fissata al valore V_γ e in uscita rimane lo stato $V_o = L^+$. Quindi lo stato L^+ è uno stato stabile.

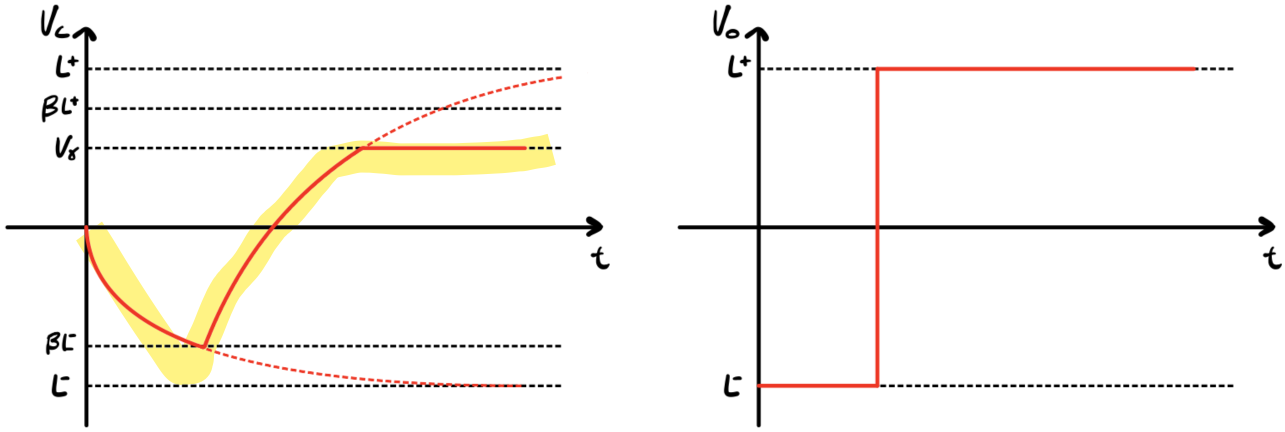


Facciamo ora il caso in cui in uscita si ha $V_o = L^-$. In questo caso:

- la tensione al morsetto non invertente diventa βL^-;
- il condensatore tende a caricarsi verso la tensione L^-, partendo da una tensione $V_C = 0$;
- il diodo vede una tensione minore di V_γ, perché il condensatore è scarico, e quindi si comporta come un circuito aperto.

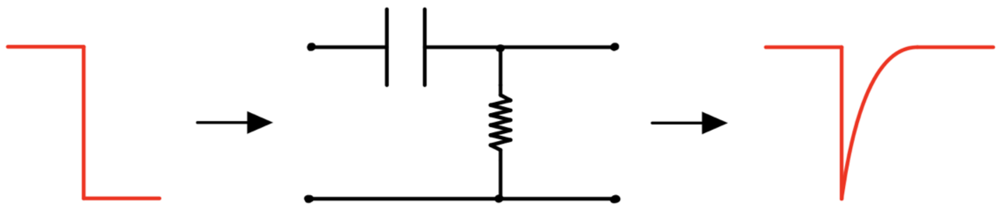
Quindi, il condensatore inizia a caricarsi verso L^- e quando raggiunge il valore βL^- la tensione differenziale tra i due morsetti dell'operazionale diventa uguale e si ha il cambio di tensione in uscita, che diventa $V_o = L^+$. Per cui, la tensione al morsetto non invertente diventa βL^+ e il condensatore inizia a caricarsi verso la tensione L^+.

Essendo però, $V_\gamma < |\beta L^+| = |\beta L^-|$, si ha che una volta che il condensatore raggiunge tensione V_γ, il diodo viene polarizzato ai suoi capi con questa tensione e quindi diventa una batteria di valore V_γ. A questo punto la tensione sul condensatore viene fissata al valore V_γ e in uscita rimane lo stato $V_o = L^+$. Quindi lo stato L^+ è uno stato stabile, mentre L^- è instabile.

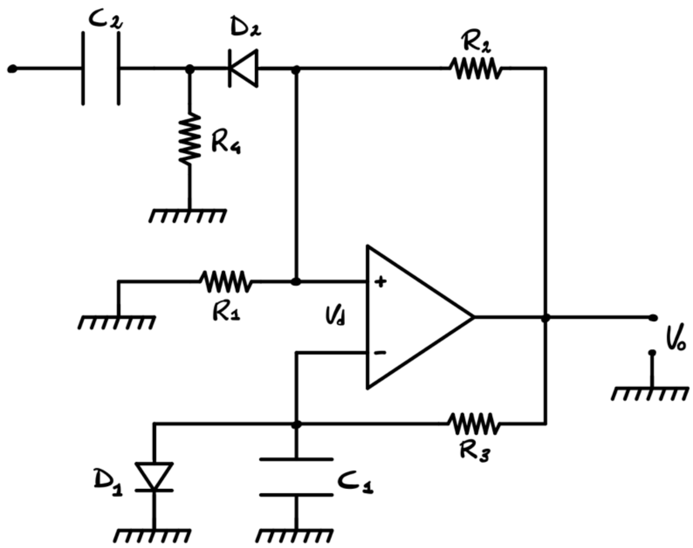


Quindi, la presenza del diodo permette di stabilizzare la tensione ai capi del condensatore a V_γ e la tensione di uscita a $V_o = L^+$.

Modifichiamo ora il circuito per creare un *generatore di impulsi a durata controllata*.
Aggiungiamo sul morsetto non invertente un circuito passa-alto che riceve in ingresso impulsi negativi e quindi permette il passaggio solo della differenza di potenziale dell'impulso:



Quindi, il circuito diventa come quello in figura. Quindi, consideriamo la situazione in cui in uscita è presente L^+, sul morsetto non invertente βL^+ e sul morsetto invertente V_γ, che è la situazione di stabilità del multivibratore monostabile. Se adesso, sul morsetto non invertente arriva un impulso negativo minore di V_γ, la tensione differenziale in ingresso all'operazionale diventa negativa e quindi l'uscita commuta a L^-, il morsetto non invertente a βL^- e il condensatore inizia a caricarsi verso L^-. Quando il condensatore raggiunge βL^- la tensione differenziale cambia nuovamente di segno, l'uscita commuta ad L^+, il morsetto non invertente a βL^+ e il condensatore inizia a caricarsi verso L^+, ma quando raggiunge V_γ si ristabilizza a questa tensione e in uscita rimane L^+.



Quindi, l'impulso negativo ha permesso al circuito di variare l'uscita per un certo tempo e poi di tornare automaticamente a L^+. Mettendo una serie di impulsi in ingresso al circuito passa-alto, si ottiene in uscita un generatore di impulsi di durata controllata.

Il diodo D_2 posto dopo il passa-alto serve per evitare che un impulso negativo arrivi al morsetto non invertente quando su questo è presente la tensione βL^- e non βL^+.

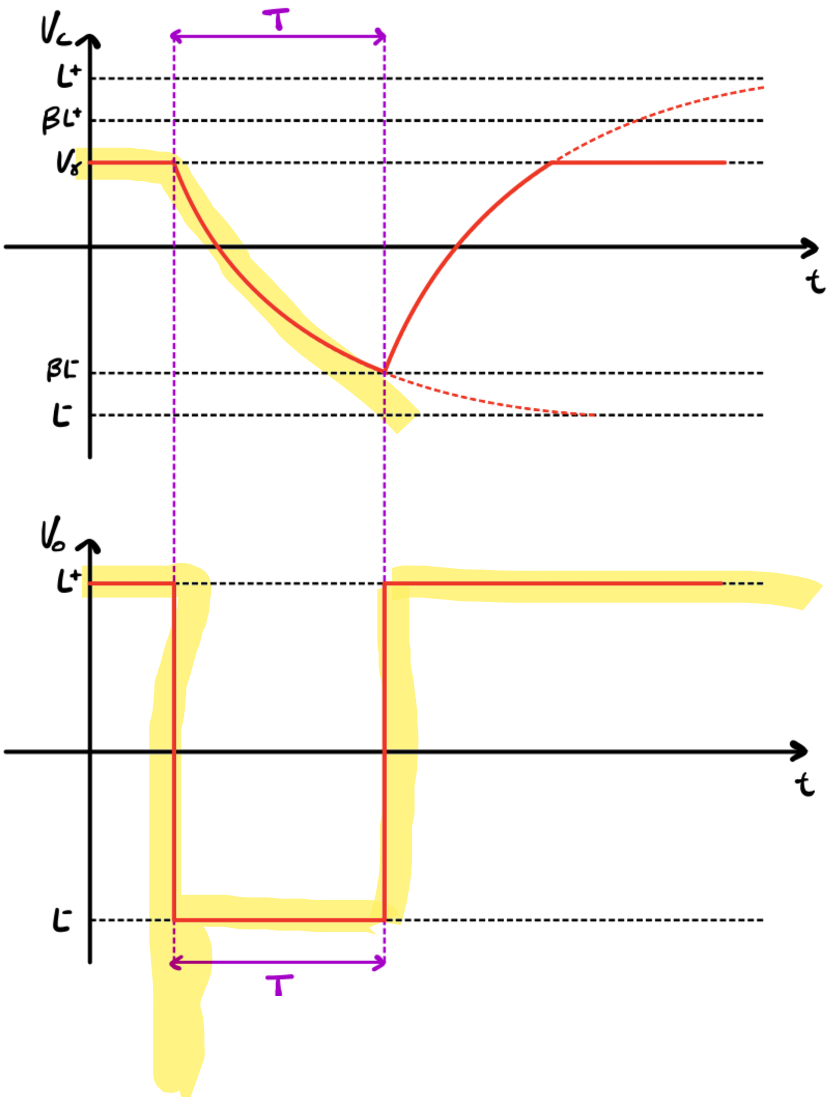
La durata di questo impulso è il tempo che impiega il condensatore C_1 a passare da V_γ a βL^-. Applicando il metodo asintotico su C_1, si ottiene:

$$V_c(t) = L^- - (L^- - V_\gamma)e^{-\frac{t}{C_1R_3}} = \beta L^-$$

Deve essere uguale a βL^- perché è il tempo che impiega C_1 ad arrivare a tale valore.

Da questa si ottiene che il periodo dell'impulso è pari a:

$$\boxed{T = C_1R_3 ln\left(\frac{V_\gamma - L^-}{\beta L^- - L^-}\right) \cong C_1R_3 ln\left(\frac{1}{1-\beta}\right)}$$



DIODI

Andiamo ad analizzare i componenti base dei circuiti elettronici, i transistor, caratterizzandoli come rete due porte con un'impedenza di ingresso, un'impedenza di uscita e una funzione di trasferimento.
Prima di arrivare a questo facciamo dei richiami sulla struttura fisica dei componenti elettronici.

- STRUTTURA FISICA:

- Materiali per l'elettronica:

I materiali usati in elettronica sono di tre tipi:

- metalli, resistività $r < 10^{-3}\ \Omega cm$;
- semiconduttori, resistività $10^{-3} < r < 10^{5}\ \Omega cm$;
- isolanti, resistività $r > 10^{5}\ \Omega cm$;

la differenza tra questi tre tipi di materiali sta nella facilità con la quale riescono a far passare una corrente (un flusso di elettroni). Bassa resistività significa che fanno passare facilmente una corrente, alta resistività il contrario. L'inverso della resistività è la conducibilità.

I semiconduttori sono i materiali base per l'elettronica, perché la loro conducibilità è intermedia tra metalli e isolanti e può essere modificata attraverso dei processi tecnologici.

Il semiconduttore più usato in elettronica è il *silicio*, che è un materiale molto comune sulla terra (la sabbia è fatta di silicio), ma quello usato per le applicazioni elettroniche è un silicio monocristallino e con un grado di impurezza molto basso. Quindi in generale si parte dalla sabbia e attraverso dei processi tecnologici si arriva ad avere un silicio adatto alle applicazioni elettroniche.

- BANDE DI ENERGIA NEL SILICIO:

L'elemento base della materia è l'atomo, il quale è composto da un nucleo di protoni e una nuvola di elettroni, dove i protoni e gli elettroni sono in uguale numero; in questo modo l'atomo non ha una carica. Gli elettroni sono legati all'atomo attraverso una forza elettrica (di Coulomb) e rimangono in equilibrio (ovvero non cadono sul nucleo e non si staccano dalla nuvola) se sono ad una certa distanza dal nucleo. In questi termini, distanza significa energia; quindi, fornendo energia all'atomo si può estrarre un elettrone dall'atomo stesso.

Estraendo un elettrone da un atomo si forma uno *ione positivo*, detto anche *lacuna*, e di conseguenza di ha un elettrone libero. L'energia necessaria per separare un elettrone da un atomo è detta *energia di ionizzazione* e si può dare all'atomo in diversi modi (temperatura, fotoni, ecc.).
Se si da all'elettrone un'energia minore di quella necessaria per separarsi dall'atomo (minore dell'energia di ionizzazione), l'elettrone si porta ad una distanza maggiore di quella che ha in una situazione di equilibrio e appena si interrompe questo trasferimento di energia l'elettrone torna alla distanza di equilibrio. Questo ritorno alla posizione di equilibrio significa che l'elettrone cede energia verso l'esterno.

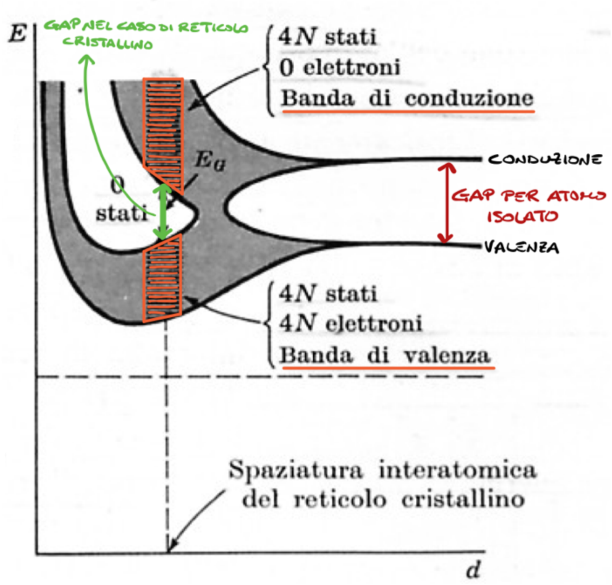
Questo significa che l'elettrone può trovarsi in due posizioni, o nella zona di equilibrio (legato all'atomo) nel suo *livello di valenza*, o nella *zona di conduzione*, ovvero libero di muoversi perché è separato dall'atomo. L'elettrone non può mai trovarsi nel livello intermedio tra il livello di valenza e il livello di conduzione.

Quindi in un materiale si possono definire due livelli di energia:

- livello di valenza (in basso), dove l'elettrone è legato all'atomo;
- livello di conduzione (in alto), dove l'elettrone è libero di muoversi.

Nel livello di conduzione l'elettrone può far scorrere una corrente.
L'intervallo (distanza) tra questi due livelli è il *gap energetico* ed equivale all'energia di ionizzazione dell'atomo.

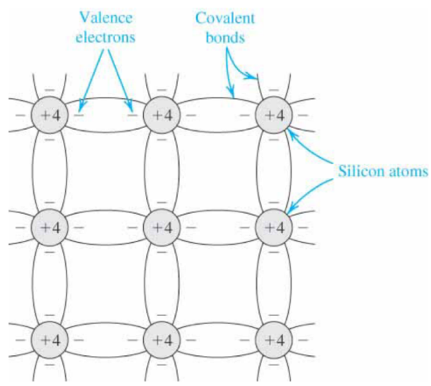
Questo tipo di comportamento si ha nel caso di atomi isolati.
Per strutture cristalline, come nel caso del silicio, non si ha un preciso livello di valenza e uno di conduzione, ma si ha una banda di energia in cui si possono trovare gli elettroni in valenza e una banda di energia in cui si possono trovare gli elettroni in conduzione.



La figura a destra si riferisce all'atomo di silicio e rappresenta (in arancione) le bande di conduzione e valenza e (in rosso) il gap tra i livelli di conduzione e valenza nel caso di atomi isolati.
Il gap tra le bande di conduzione e valenza (in verde) è, nel silicio, pari a 1.1 eV. Più è elevato il gap e più è difficile ionizzare l'atomo, ovvero è difficile estrarre l'elettrone da un atomo.

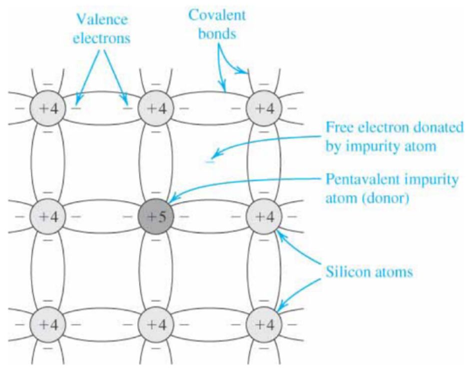
La differenza tra conduttori, semiconduttori e isolanti sta proprio nel gap tra le bande di energia, dove per i conduttori è molto bassa (è sufficiente l'energia fornita a temperatura ambiente per far separare gli elettroni dagli atomi), mentre per gli isolanti è molto alta.

- SILICIO INTRINSECO:



La struttura cristallina del silicio è quella in figura. L'atomo di silicio ha *valenza 4*, ovvero ha 4 elettroni esterni che possono essere coinvolti in legami covalenti (un legame covalente si ha quando una coppia di atomi mettono a disposizione un elettrone ciascuno per creare un legame e un'orbita unica intorno alla coppia).
Dato che il silicio ha valenza 4, la sua struttura fondamentale vede un atomo di silicio collegato attraverso legami covalenti con 4 altri atomi di silicio.
Gli elettroni di valenza sono quelli più esterni, ovvero quelli che possono formare legami covalenti. Se si fornisce sufficiente energia al materiale si riesce a rompere il legame covalente e a separare l'elettrone dall'atomo. In questo modo si va a creare uno ione positivo (o lacuna) e un elettrone libero.
Complessivamente il materiale è ancora neutro, ma le sue proprietà sono completamente diverse, in quanto dopo la ionizzazione è capace di condurre elettricità attraverso gli elettroni liberi.
Nel silicio, per separare l'elettrone (e quindi ionizzare l'atomo) è necessario 1.1 eV. A temperatura ambiente non si ha questa energia e quindi il silicio è un isolante (statisticamente anche a temperatura ambiente si ha una certa generazione di lacune e elettroni liberi dell'ordine di $1.5 * 10^{10}\ elettroni/cm^3$, che però sono praticamente zero rispetto alla quantità di atomi/elettroni presenti nel materiale).
Quindi il silicio intrinseco, cioè puro, è praticamente un isolante, ovvero non ha cariche libere.

- SILICIO DROGATO N-TYPE:



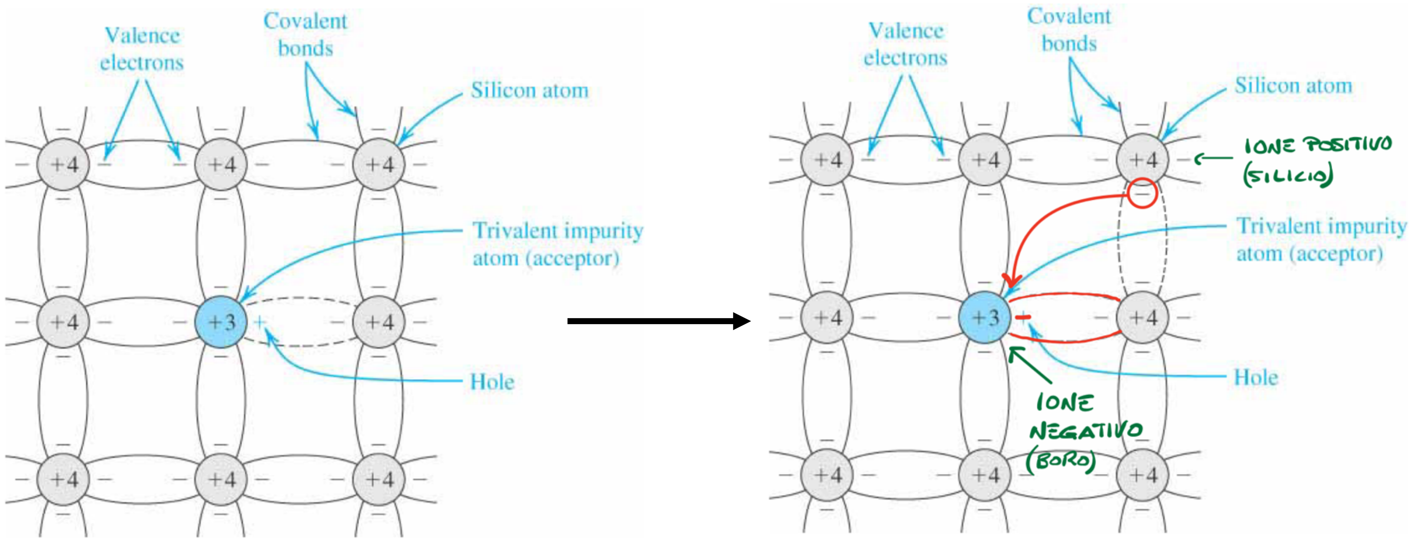
Il silicio può essere drogato, ovvero si può modificare la struttura fisica del suo reticolo cristallino, per farlo diventare un conduttore. Per fare questo si impiantano degli atomi di fosforo nel reticolo. Il fosforo ha 5 elettroni di valenza, quindi, impiantandolo nel reticolo del silicio, 4 di questi vanno a formare legami covalenti nella struttura del reticolo, mentre il quinto rimane legato all'atomo di fosforo senza formare un legame covalente. In questo modo, per separare il quinto elettrone dall'atomo di fosforo sono necessari solo 0.2 eV ed è un'energia che si ha già a temperatura ambiente. Di conseguenza, se si riesce a fissare la dose di impianto, ovvero quanti atomi di fosforo impiantare nel reticolo del silicio, si ha che ad ogni atomo di fosforo corrisponde un elettrone libero, e quindi più atomi di fosforo ci sono e più elettroni liberi sono presenti nel materiale, ovvero più è alta la conducibilità elettrica del materiale.

Quindi, drogando il silicio con il fosforo si riesce a modificarne la conducibilità elettrica e a farlo diventare un conduttore a temperatura ambiente.

L'atomo di fosforo che perde l'elettrone diventa una carica positiva, ma è una carica fissa perché è legata al reticolo. L'elettrone che perde diventa una carica positiva mobile, che può muoversi liberamente nel materiale. Quindi se si applica un campo elettrico al materiale, gli elettroni liberi si muovono nel verso indicato dal campo elettrico formando una corrente.
Quindi, con questo tipo di drogaggio la corrente nel silicio è formata dal movimento di elettroni e per questo viene chiamato silicio di tipo-n (n = negativo, un materiale è di tipo-n se la corrente al suo interno scorre a causa di un movimento di elettroni).

- SILICIO DROGATO P-TYPE:

Un altro tipo di drogaggio viene effettuato con atomi trivalenti, come ad esempio il Boro, che una volta innestati nel reticolo del silicio effettuano tre legami covalenti con gli atomi di silicio. Questo significa che il boro effettua tre legami con tre atomi di silicio e lascia uno spazio vuoto con il quarto atomo di silicio che non può effettuare il legame. Per riempire questo spazio ed effettuare il legame, un atomo di silicio vicino cede un elettrone (togliendo un suo legame) e questo elettrone va a formare il quarto legame tra il boro e un atomo di silicio adiacente al boro.
In questo modo il boro diventa uno ione negativo (perché ha un elettrone in più) mentre l'atomo di silicio che ha ceduto l'elettrone diventa uno ione positivo. Cedere un elettrone costa circa $0.2\ eV$ e quindi avviene a temperatura ambiente.



Lo ione positivo che si è creato ora va ad attrarre un elettrone di un atomo vicino, che lo cede diventando lui lo ione positivo, mentre quello precedente torna ad essere neutro. Questo spostamento di elettrone richiede sempre $0.2\ eV$, quindi può avvenire sempre a temperatura ambiente.
Dal punto di vista fisico, non si sta spostando l'atomo, ma si sta spostando un elettrone che va a riempire il vuoto di un legame covalente vicino. Dal punto di vista elettrico, quello che si muove è la lacuna, ovvero la mancanza di elettrone, cioè una carica positiva. Se si applica un campo elettrico al materiale, si forza lo spostamento di questa lacuna nel verso del campo elettrico, e quindi di crea una corrente che è generata dallo spostamento della carica positiva. Quindi la corrente non è legata ad un movimento di cariche negative, ma è legata alla mancanza dell'elettrone, ovvero ad uno ione positivo, o lacuna, che si sposta nel reticolo cristallino perché un elettrone di un altro legame covalente va a riempire il vuoto, lasciandolo però in un altro legame.
Il silicio drogato con questa tecnica si chiama *silicio di tipo-p* (p = positivo un materiale è di tipo-p se la corrente al suo interno scorre a causa di un movimento di lacune, ovvero di cariche positive).

- DROGAGGIO DEL SILICIO:

Il silicio, quindi, può essere drogato con atomi trivalenti (boro) o pentavalenti (fosforo) con il fine di creare un numero alto di cariche libere o di lacune nel materiale. In questo modo, collegando una batteria al materiale, si crea una differenza di potenziale e, se questo è stato drogato con atomi pentavalenti, la corrente che scorre al suo interno va verso il polo positivo dato che è formata da elettroni, mentre se è stato drogato con atomi trivalenti, la corrente che scorre al suo interno va verso il polo negativo dato che è formata da lacune.
Osserviamo che se si hanno entrambi i drogaggi nel materiale, gli elettroni andranno verso il polo positivo, le lacune verso quello negativo, ma contribuiscono alla stessa corrente, ovvero gli effetti si sommano.
Inoltre, osserviamo che anche se drogato, il silicio rimane complessivamente neutro.

- Corrente:

- CORRENTE DI DRIFT:

Quindi, sotto l'azione di un campo elettrico esterno E, le cariche libere, elettroni e lacune, si muovono in verso opposto, ma essendo di carica opposta contribuiscono alla corrente con due contributi dello stesso verso.
La densità di corrente a cui contribuiscono è la seguente:

$$\boxed{J_n = (q\mu_n n)E = \sigma E} \qquad \boxed{J_p = (q\mu_p p)E = \sigma E} \qquad [A/cm^2]$$

dove:

- μ_n: mobilità degli elettroni, ovvero quanto gli elettroni si muovono facilmente nel materiale ($\mu_n \approx 3\mu_p$);
- μ_p: mobilità delle lacune, ovvero quanto le lacune si muovono facilmente nel materiale;
- n: numero di elettroni per cm^3;
- p: numero di lacune per cm^3;
- E: campo elettrico applicato in V/cm;
- q: la carica dell'elettrone $= 1.6 * 10^{-19}\ C$;
- σ: la conducibilità del materiale.

Quindi, attraverso il drogaggio si creano delle cariche, che con l'applicazione di un campo elettrico si muovono. Questo tipo di corrente è detta *corrente di drift*.
Si può notare come questa formula è analoga alla legge di Ohm, dove la corrente è pari alla resistenza (in questo caso alla conducibilità che è il suo inverso) per la tensione applicata, ovvero il campo elettrico.

- CORRENTE DI DIFFUSIONE:

Un altro tipo di corrente è quella di *diffusione*, dove le cariche non si spostano a causa di un campo elettrico.
In un materiale drogato, se la concentrazione di lacune/elettroni non è uniforme, questi tendono ad equilibrare la loro densità all'interno del materiale spostandosi dalle zone più dense a quelle meno dense.
Quindi, ad esempio, se in una zona del materiale la densità di lacune è molto alta, mentre in un'altra zona è molto bassa, le lacune tendono a spostarsi verso la zona a densità bassa per rendere uniforme la densità in tutto il materiale.
Spostandosi formano una corrente, chiamata corrente di diffusione, che dipende dal gradiente di concentrazione dn/dx o dp/dx degli elettroni/lacune nel materiale in un certo punto x:

$$\boxed{J_n = qD_n\frac{dn}{dx}} \qquad \boxed{J_p = -qD_p\frac{dp}{dx}} \qquad [A/cm^2]$$

dove i coefficienti D sono i coefficienti di diffusione, ovvero indicano con quale facilità gli elettroni/lacune si muovono nel materiale, e dipendono fortemente dalla temperatura, e quindi dal *potenziale termico* V_T:

$$\boxed{D_p = \frac{kT}{q}\mu_p = V_T\mu_p} \qquad \boxed{D_n = \frac{kT}{q}\mu_n = V_T\mu_n} \qquad V_{T=30^\circ} \approx 25\ mV$$

Maggiore è la differenza di densità nel materiale, più velocemente si muoveranno le cariche, e di conseguenza più intensa sarà la densità di corrente.

Osserviamo che nella formula della densità della corrente di diffusione per le lacune è presente un meno; questo è dovuto al fatto che le lacune si muovono da un punto a densità maggiore (p_1) ad uno a densità minore (p_2), ma il gradiente è dato da $p_2 - p_1$, quindi ha segno opposto.

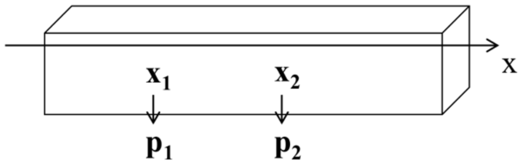
- CORRENTE TOTALE:

In un semiconduttore è possibile che esistano contemporaneamente sia una differenza di energia potenziale, sia una differenza di concentrazione dei portatori di carica. In questo caso la corrente totale delle lacune/elettroni è somma della corrente di drift e della corrente di diffusione:

$$\boxed{J_n = (q\mu_n n)E + qD_n \frac{dn}{dx}} \qquad \boxed{J_p = (q\mu_p p)E - qD_p \frac{dp}{dx}} \qquad [A/cm^2]$$

- Potenziale di contatto:

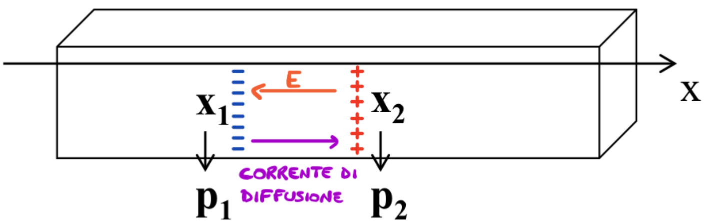
Supponiamo di avere una barra di silicio drogato con un materiale di tipo-p (sarebbe equivalente per un materiale di tipo-n), con due zone interne al materiale a densità diverse p_1 e p_2 dove la densità in p_1 è maggiore rispetto a p_2.



Dato che ci sono due zone diverse, le lacune all'interno del materiale tendono da p_1 a p_2.
Ma per far scorrere una corrente all'intero di un materiale è necessario che questo stia in una maglia chiusa, e la barra di silicio non è in una maglia chiusa; quindi, non può scorrere corrente al suo intero: $J_p = 0$.
Allo stesso tempo però, è presente una differenza di gradiente e quindi ci deve essere una corrente di diffusione. Questo significa che:

$$J_p = (q\mu_p p)E - qD_p \frac{dp}{dx} = 0 \qquad \rightarrow \qquad (q\mu_p p)E = qD_p \frac{dp}{dx} = q\mu_p V_T \frac{dp}{dx}$$

ovvero, la corrente di diffusione è uguale alla corrente dovuta al campo elettrico, ma non è stato applicato nessun campo elettrico esterno e quindi ce ne deve essere uno interno. Il materiale è inizialmente neutro, quindi anche le zone p_1 e p_2 sono neutre, anche se con densità di lacune diverse.
Lo spostamento di una lacuna da p_1 a p_2 fa si che in p_1 si va a creare una carica negativa, mentre in p_2 si va a creare una carica positiva (la lacuna che si è spostata). Quindi in p_2 si va a creare una zona sempre più positiva e in p_1 sempre più negativa. Questo crea un campo elettrico interno al materiale che spinge le lacune nel verso opposto rispetto a quello dove andrebbero per la corrente di diffusione (il campo elettrico le spinge da p_2 a p_1 mentre la corrente di diffusione da p_1 a p_2). Quindi, ad un certo punto, si arriva all'equilibrio dove la forza che spinge le cariche per la differenza di concentrazione e la forza che spinge le cariche per il campo elettrico si bilanciano e quindi non scorre più corrente nel materiale.



Quindi nasce questo campo elettrico interno al materiale, che è un *potenziale di contatto* (il campo elettrico è V/m ovvero un potenziale diviso la distanza), ovvero una barriera di potenziale che si crea tra queste due zone a concentrazioni diverse.
Il potenziale di contatto V_0 si può calcolare dicendo che, all'equilibrio, la componente dovuta al campo elettrico è uguale alla componente dovuta alla diffusione:

$$\boxed{(q\mu_p p)E = q\mu_p V_T \frac{dp}{dx}}$$

da cui si ottiene che il campo elettrico è:

$$\boxed{E = \frac{V_T}{p} * \frac{dp}{dx} = -\frac{dV}{dx}}$$

e quindi, la differenza di potenziale tra le due zone a concentrazione diverse è:

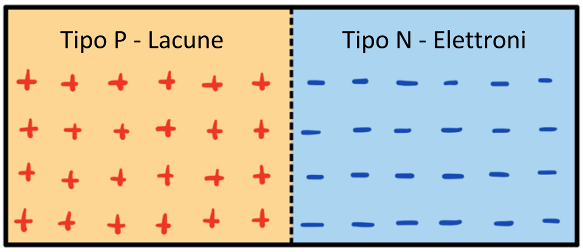
$$\boxed{dV = V_2 - V_1 = V_0 = V_T \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}$$ LACUNE

In modo analogo per la corrente di elettroni, si ottiene:

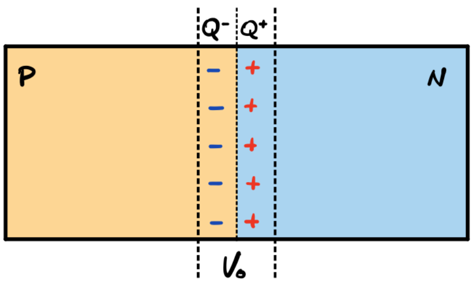
$$\boxed{dV = V_2 - V_1 = V_0 = V_T \ln\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}$$ ELETTRONI

Questa legge è alla base dell'elettronica. Se si vuole far in modo che le lacune/elettroni continuino a muoversi nel materiale, è necessario abbassare questo potenziale. Viceversa, se si vuole contrastare il movimento delle lacune/elettroni nel materiale, è necessario alzare questo potenziale. Quindi il potenziale di contatto è un ostacolo al movimento delle lacune/elettroni nel materiale e quindi più è alto meno corrente scorre e viceversa, più è basso e più corrente scorre.
La possibilità di alzare e abbassare il potenziale di contatto dall'esterno è alla base di quella che si chiama *legge della giunzione*, che descrive un dispositivo che è una giunzione tra un materiale di tipo-p e un materiale di tipo-n.

- Diodo a giunzione:



Prendiamo una barra di silicio e dividiamola in due zone. Una zona va drogata con atomi trivalenti per formare un materiale di tipo-p, mentre l'altra va drogata con atomi pentavalenti per formare un materiale di tipo-n. Il materiale rimane complessivamente neutro, ma è presente un gradiente di concentrazione sia per le lacune (che sono presenti, ad esempio, solo a sinistra) che per gli elettroni (che sono presenti, ad esempio, solo a destra).
La differenza di densità spinge le lacune verso la zona di tipo-n, e gli elettroni verso la zona di tipo-p.
La zona P è inizialmente neutra, ma quando le lacune vanno verso la zona di tipo-n, scoprono un atomo di boro che diventa uno ione negativo; quindi, sull'interfaccia della zona di tipo-p si vanno a creare tante cariche negative fisse, ovvero ioni negativi della struttura del cristallo.



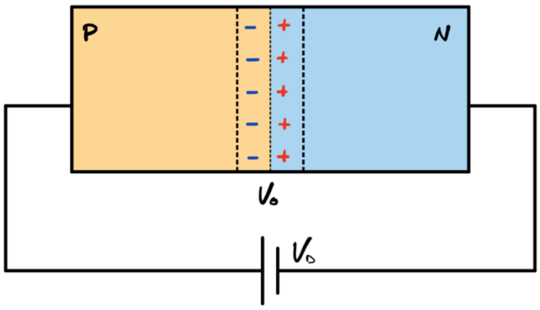
In modo analogo, la zona di tipo N è inizialmente neutra, ma quando gli elettroni vanno verso la zona di tipo-p, scoprono un atomo di fosforo che diventa uno ione positivo; quindi, sull'interfaccia di tipo-n si vanno a creare tante cariche positive fisse, ovvero ioni positivi della struttura del cristallo.
Questo fenomeno crea un campo elettrico formato da cariche fisse nella zona adiacente all'interfaccia tra il tipo-p e il tipo-n. Questo campo elettrico impedisce il passaggio di elettroni verso la zona di tipo-p e di lacune verso la zona di tipo-n. Quindi nella zona dove è presente il campo elettrico si crea il potenziale di contatto V_0.
La zona centrale dove è presente il campo elettrico ha diverse definizioni:

- è una zona di *carica spaziale*, perché la carica è dovuta dagli atomi incastrati nel cristallo;
- è una zona *svuotata da cariche mobili*, perché dato che è presente un campo elettrico, se ci fosse una carica libera di muoversi verrebbe spinta via da quella zona verso la zona di tipo-p o di tipo-n a seconda della carica.

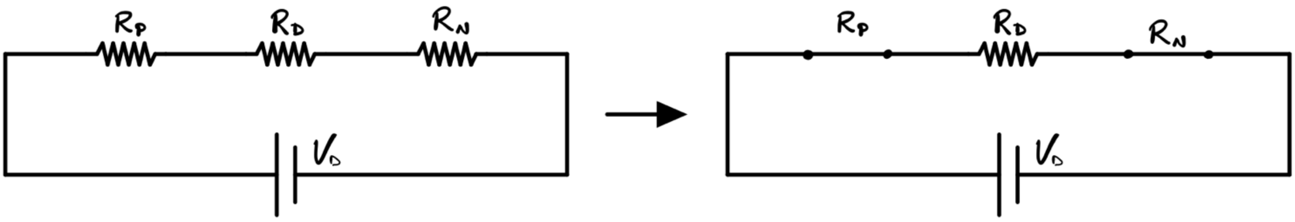
Le quantità di carica Q^+ e Q^- sono uguali in modulo, ma lo spazio che occupano non è detto che sia uguale. In particolare, se la zona p e la zona n vengono drogate con la stessa quantità di atomi allora lo spazio occupato da Q^+ e Q^- sarà uguale e la giunzione starà al centro. Invece, se le quantità di impianto degli atomi di fosforo e boro sono diverse, il processo è lo stesso e le quantità di carica Q^+ e Q^- sono sempre uguali in modulo, ma occupano spazi diversi e la zona svuotata, ovvero quella dove è presente il campo elettrico, va verso la zona meno drogata.

- GIUNZIONE PN IN POLARIZZAZIONE DIRETTA:

Quindi, all'equilibrio si ha un potenziale di contatto nell'interfaccia tra i due materiali, ovvero un campo elettrico che impedisce alle lacune di andare nella zona n e agli elettroni nella zona p per diffusione. Ovvero, all'equilibrio nessuna carica si muove perché la corrente di diffusione generata dalla differenza di gradiente sia per gli elettroni che per le lacune e la corrente di drift generata dal campo elettrico nella zona svuotata sono uguali e si compensano.



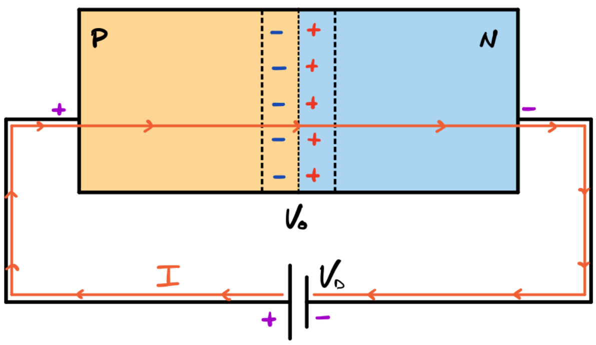
Se si applica un potenziale esterno ai due estremi della barra si ottiene lo schema in figura.
Nella zona di tipo-p e di tipo-n ci sono molte lacune/elettroni libere di muoversi, e quindi che possono creare corrente. Se ci sono molte cariche libere significa che la conducibilità del materiale è alta e di conseguenza la resistività è bassa.
Al contrario, nella zona svuotata non sono presenti cariche di nessun tipo e di conseguenza la conducibilità è molto bassa e la resistività molto alta.
Questo circuito si può vedere quindi come una serie di tre resistenze, R_P che è identifica la zona di tipo-p, R_N che identifica la zona di tipo-n e R_D che identifica la zona di deplition, ovvero la zona svuotata (figura a sinistra).
Però, dato che la resistività della zona-p e della zona-n è molto bassa, queste due resistenze possono essere viste come un cortocircuito, mentre, al contrario, essendo la resistività della zona svuota molto alta, la resistenza corrispondente è molto grande (figura a destra).



Quindi, applicando un potenziale esterno, questo si sovrappone direttamente al potenziale di contatto nella zona svuotata, dato che va a finire tutto ai capi di R_D. In questo modo si può modificare il potenziale di contatto.

In pratica, nella polarizzazione diretta, ovvero applicando una tensione positiva alla zona p e una tensione negativa alla zona n (quindi mettendo la batteria come in figura), si ottiene una diminuzione della barriera che impedisce alle lacune e agli elettroni di muoversi. Questo perché l'effetto del potenziale esterno va a contrastare quello del potenziale di contatto e quindi la corrente di drift generata dal campo elettrico nella zona svuotata diventa minore della corrente di spostamento generata dalla differenza di gradiente. In questo modo, le lacune riescono ad andare nella zona n e gli elettroni riescono nella zona p passando attraverso la zona svuotata, che è diventata più piccola rispetto alla situazione di equilibrio.

Se le lacune e gli elettroni riescono a muoversi generano una corrente che ha verso positivo nel verso dove vanno le lacune (sinistra -> destra) e verso negativo nel verso dove vanno gli elettroni (destra -> sinistra). Essendo però gli elettroni cariche negative, il verso finale della corrente prodotta dagli elettroni è la stessa di quella prodotta dalle lacune, ovvero da sinistra verso destra.



Quando le lacune passano dalla zona p alla zona n, trovano tanti elettroni liberi e quindi si ricombinano, e analogamente quando gli elettroni passano dalla zona n alla zona p trovano tante lacune e si ricombinano. Quindi il numero di lacune e di elettroni nella zona p e nella zona n rispettivamente decresce esponenzialmente e di conseguenza la corrente che scorre nel materiale cresce esponenzialmente.

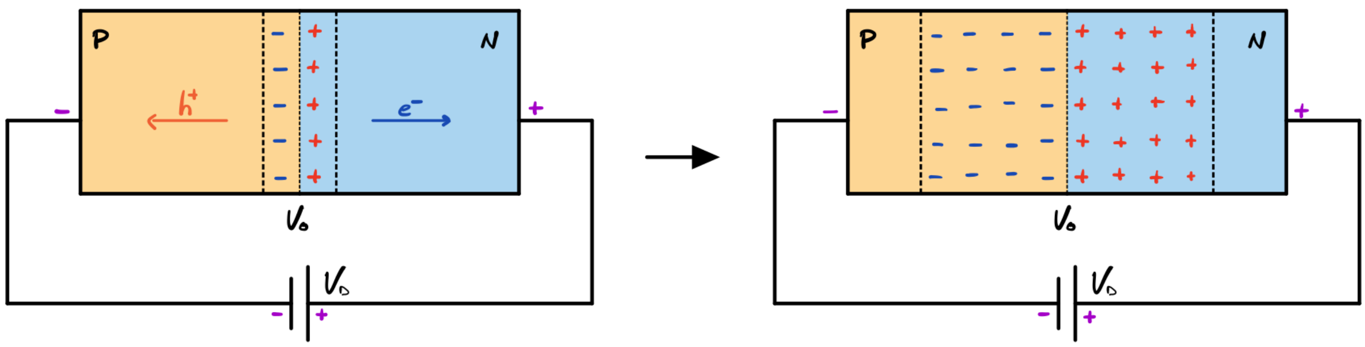
Quindi, quando si effettua una *polarizzazione diretta*, ovvero quando si applica una tensione positiva nella zona p e negativa nella zona n, si favorisce la riduzione del potenziale di contatto e quindi dello scorrimento di corrente nel materiale.

- GIUNZIONE PN IN POLARIZZAZIONE INVERSA:

Se, al contrario rispetto alla polarizzazione diretta, si applica una tensione positiva nella zona n e una tensione negativa nella zona p si ottiene che:

- gli elettroni sono attratti dalla tensione positiva e quindi abbandonano la zona n passando attraverso il circuito esterno;
- le lacune sono attratte dalla tensione negativa e quindi abbandonano la zona p passando attraverso il circuito esterno.

Di conseguenza, la zona svuotata si allarga e quindi aumenta il potenziale di contatto contrastando ancora di più lo scorrimento di corrente dalla zona p alla zona n.
Quindi, nel caso della polarizzazione inversa, l'effetto del potenziale esterno è concorde rispetto a quello del potenziale di contatto, incrementando la barriera presente tra la zona p e la zona n.



Con la polarizzazione inversa la corrente non può scorrere, quindi è sempre zero, dato che è aumentato il potenziale di contatto nel materiale.

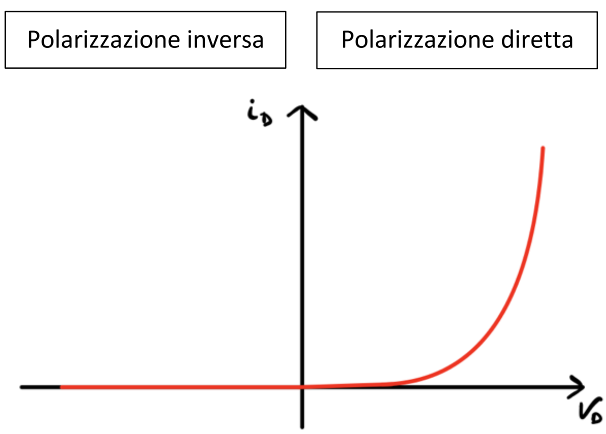
- CARATTERISTICA I-V DIODO IDEALE:

La giunzione pn è quello che in elettronica si chiama *diodo*, ed è un componente caratterizzato dalla seguente equazione, chiamata equazione del diodo o di Shockley, dove i_D è la corrente nel diodo:

$$\boxed{i_D = I_S(e^{\frac{v_D}{nV_T}} - 1)}$$

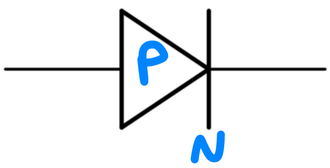
dove:

- I_S: corrente inversa di saturazione del diodo $(10^{-6}, 10^{-15})$ approssimabile a zero in polarizzazione inversa;
- n: coefficiente di emissione o fattore di idealità ($n = 1$ in condizioni ideali);
- $V_T = kT/q$: tensione termica ($V_T = 25.5\ mV$ a 20°);
- k: costante di Boltzmann ($k = 1.38 * 10^{-23}\ J/K$);
- T: temperatura assoluta in Kelvin;
- q: valore assoluto della carica dell'elettrone ($q = 1.6 * 10^{-19} C$).



Quindi, il grafico dell'andamento della corrente nel diodo i_D in funzione della tensione esterna applicata v_D è il seguente, dove la corrente è (approssimabile a) zero per $v_D < 0$ e cresce esponenzialmente per $v_D > 0$.

Il simbolo circuitale del diodo è il seguente, dove il triangolo identifica la zona p e la barra verticale la zona n:



Osserviamo che la corrente inversa di saturazione del diodo deriva dalla generazione termica di cariche libere nel silicio: come abbiamo detto servono $1.1\ eV$ per generare una lacuna e un elettrone liberi nel silicio a temperatura ambiente; quindi, è molto difficile che avvenga spontaneamente, ma comunque c'è una piccola probabilità. Se viene generata una coppia lacuna/elettrone liberi nel silicio, questi vanno a posizionarsi uno nella zona p e l'altro nella zona n e per riunirsi devono per forza passare sul circuito esterno e quindi generare una corrente. Dato che la probabilità di generazione di cariche libere a temperatura ambiente è molto bassa, è molto bassa anche la corrente che viene prodotta da queste, ovvero I_S. In polarizzazione inversa, quindi, I_S è approssimabile a zero.

Se $i_D \gg I_S$ l'equazione del diodo diventa:

$$i_D \cong I_S\, e^{\frac{v_D}{nV_T}}$$

e mettendo la tensione nel diodo in funzione della corrente si ottiene:

$$v_D = nV_T \ln \frac{i_D}{i_S}$$

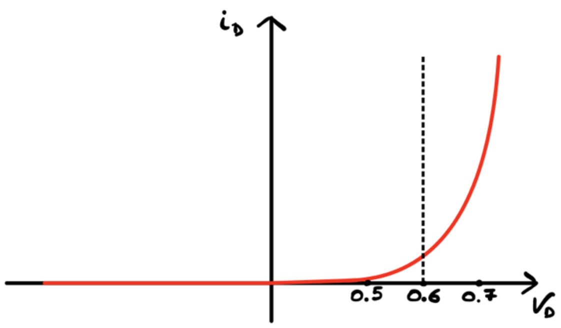
Quindi, per un certo $v_D = V_{D1}$ e per $v_D = V_{D2}$ si ottiene:

$$I_{D1} \cong I_S\, e^{\frac{V_{D1}}{nV_T}} \qquad\qquad I_{D2} \cong I_S\, e^{\frac{V_{D2}}{nV_T}}$$

e facendo il rapporto tra le due correnti:

$$\frac{I_{D1}}{I_{D2}} \cong e^{\frac{(V_{D2}-V_{D1})}{nV_T}} \qquad\qquad V_{D2} - V_{D1} = nV_T\, ln\frac{I_{D2}}{I_{D1}}$$

Per cui, piccole variazioni di tensioni danno grandi variazioni di corrente.
Quindi, quando $i_D \gg I_S$ si può considerare il diodo come un bipolo a bassissima resistività perché piccole variazioni di tensione permettono uno scorrimento di una corrente molto grande.



Approssimando, si può dire che quando la tensione supera i $0.6\ V$ la corrente cresce esponenzialmente diventando molto grande, mentre quando la tensione è minore $0.6\ V$ la corrente è molto bassa, ovvero:

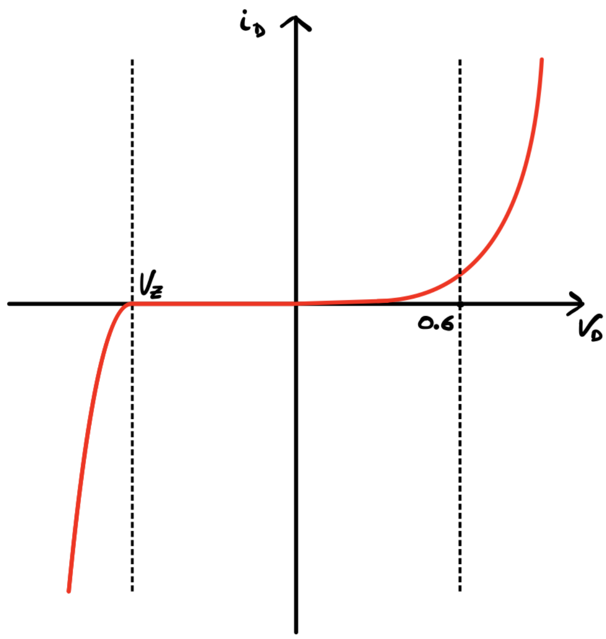
- $v_D > 0.6\ V$ → corrente molto alta → diodo = cortocircuito;
- $v_D < 0.6\ V$ → corrente molto bassa → diodo = circuito aperto.

Quindi il diodo ha un comportamento a *valvola di corrente*, ovvero la corrente scorre o non scorre a seconda della tensione applicata sulla giunzione.

- CARATTERISTICA I-V DI UN DIODO REALE:

Applicando una polarizzazione inversa al diodo, si va ad aumentare la zona svuotata e il potenziale esterno si va a sommare al potenziale di contatto, ovvero la tensione applicata all'esterno va tutta ai capi della zona svuotata, nella quale si genera un campo elettrico ancora più intenso di quello presente all'equilibrio.
L'unità di misura del campo elettrico è V/m, quindi, dato che le misure della zona svuotata sono dell'ordine dei Micron ($10^{-6}\ m$), applicando la tensione di $1\ V$ si ottiene un campo elettrico di dell'ordine dei Megavolt ($10^6\ V$), ovvero un campo elettrico davvero molto grande.
In queste condizioni, se nella zona svuotata di va a generare una coppia elettrone/lacuna, l'elettrone risente del campo elettrico e si muove con un modo accelerato uniforme, con l'accelerazione proporzionale al campo elettrico. Quindi, con un campo elettrico molto grande l'accelerazione dell'elettrone è enorme.
L'elettrone però non si muove in una zona vuota, ma si muove all'interno del reticolo cristallino del materiale, e quindi va ad urtare gli atomi presenti. Dato che la carica ha un'energia cinetica molto alta, al momento dell'urto libera un'energia che facilmente supera gli $1.1\ eV$ e di conseguenza crea un'altra coppia elettrone/lacuna all'interno della zona del campo elettrico, che a sua volta va ad urtare un atomo creandone un'altra e così via.

Quindi, si crea un meccanismo a cascata (breakdown) che genera un numero grandissimo di cariche che contribuiscono alla corrente.
Quindi, in polarizzazione inversa, applicare una tensione esterna sopra una certa soglia (descritta nel datasheet del diodo) causa una corrente che aumenta molto velocemente (molto più velocemente di quella in polarizzazione diretta).



Quindi, in polarizzazione inversa, se si applica una tensione esterna superiore ad una certa soglia (descritta nel datasheet del diodo), chiamata tensione di Zener V_Z, si crea un campo elettrico talmente elevato che genera un meccanismo a cascata di produzione di cariche libere, le quali contribuiscono ad una corrente che cresce molto più velocemente di quella in polarizzazione diretta.
L'equazione di Shockley descrive bene la situazione ideale del diodo, ma non descrive il caso in cui la tensione in polarizzazione inversa raggiunge V_Z dato che afferma che la corrente in questa configurazione è sempre approssimativamente nulla.

In un diodo reale, in polarizzazione diretta abbiamo una tensione di soglia a $0.6\ V$ sopra la quale la corrente diventa molto grande e sotto la quale la corrente è molto piccola, in polarizzazione inversa si ha una tensione di soglia V_Z sotto la quale (in modulo) la corrente è approssimativamente zero e sopra la quale la corrente diventa molto grande.

La tensione di Zener (V_Z) dipende da come è costruita la giunzione e per questo non è uguale per tutti i diodi. In particolare, se il drogaggio del silicio è molto elevato, a parità di tensione si riducono i metri della zona svuotata e quindi aumenta il campo elettrico e la tensione di Zener è più vicina allo zero.
La tensione di Zener può andare dai millivolt fino a centinaia di volt, dipende da come viene progettata la giunzione.

Un'altra caratteristica del diodo reale è la potenza massima che riesce a sopportare prima di rompersi.
La potenza si misura in $W = V * A$, ovvero è il prodotto della corrente per la tensione: $P = I * V$.
La potenza assorbita dal diodo è data da $P = v_D i_D$, e viene dissipata sotto forma di calore. Quindi il diodo può assorbire fino ad un certo valore di potenza prima di rompersi.

DIRETTA

In polarizzazione diretta la tensione arriva fino a $0.6 - 0.8\ V$ e sopra questa soglia la corrente prodotta è talmente elevata che la potenza che il diodo deve dissipare supera la soglia che può sopportare e quindi si brucia.
Dato che una variazione di tensione di pochi millivolt causa una variazione di corrente di diversi ordini di grandezza, una volta che la tensione sul diodo è alla tensione di soglia $V_\gamma = 0.6\ V$, rimane costante su questo valore.
Quindi, un diodo in polarizzazione diretta può essere usato come un bipolo che fissa la tensione su un carico, perché qualsiasi carico viene attaccato al diodo, la tensione su questo sarà sempre circa $V_\gamma = 0.6\ V$.

INVERSA

In polarizzazione inversa, se si porta a lavorare il diodo nella zona di breakdown, la tensione arriva fino a V_Z (negativa) e poco sopra quella soglia il diodo si brucia (prima della zona di breakdown la tensione è nulla e quindi il diodo è un circuito aperto). Quindi, analogamente al caso di polarizzazione diretta, si ha che il diodo può essere usato come un bipolo che fissa la tensione sul carico a V_Z, qualsiasi sia il carico.

Quindi il diodo può essere usato come un dispositivo *stabilizzatore di tensione*, che blocca la tensione ai capi di un carico, qualunque sia il valore del carico. In polarizzazione diretta la tensione sarà di $V_\gamma = 0.6\ V$, in inversa sarà di V_Z descritta nel datasheet.

- APPLICAZIONE DEL DIODO COME SENSORE DI TEMPERATURA:

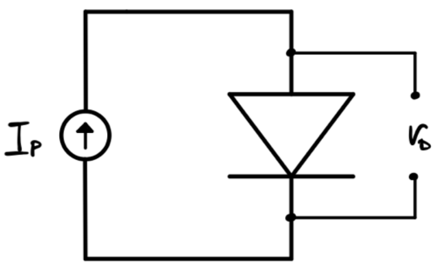
Prendendo un diodo in polarizzazione di retta, la caratteristica è esponenziale ed è descritta dalla formula di Shockley:

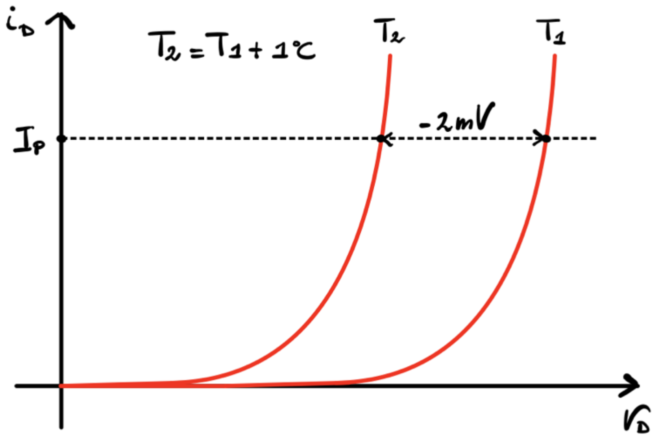
$$i_D = I_S(e^{\frac{v_D}{nV_T}} - 1)$$

Con $n = 1$, isolando la tensione si ottiene:

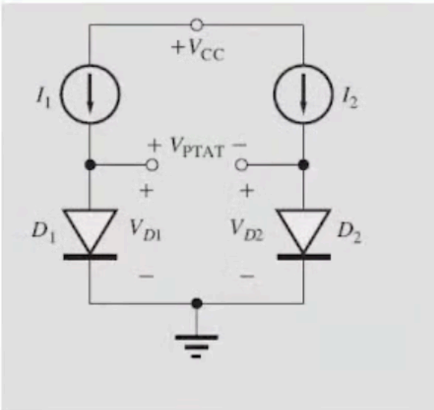
$$v_D = V_T\, ln\left(\frac{i_D}{i_S} + 1\right) = \frac{kT}{q} ln\left(\frac{i_D}{i_S} + 1\right) \cong \frac{kT}{q} ln\frac{i_D}{i_S}$$

Quindi la tensione del diodo è proporzionale alla temperatura.
Se si polarizza un diodo con una corrente costante I_P, si ottiene che al variare della temperatura varia anche la tensione e in particolare si ha una variazione pari a $-2\ mV/°\mathrm{C}$ (meno due millivolt per ogni grado celsius in aumento):



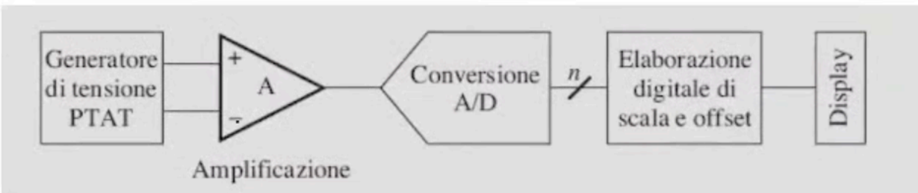


Un'applicazione di questo modello si ha nei termometri digitali:




Termometro digitale wireless

$$V_{PTAT} = V_{D1} - V_{D2} = V_T \ln\left(\frac{I_{D1}}{I_S}\right) - V_T \ln\left(\frac{I_{D2}}{I_S}\right) = V_T \ln\left(\frac{I_{D1}}{I_{D2}}\right) = \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{I_{D1}}{I_{D2}}\right)$$

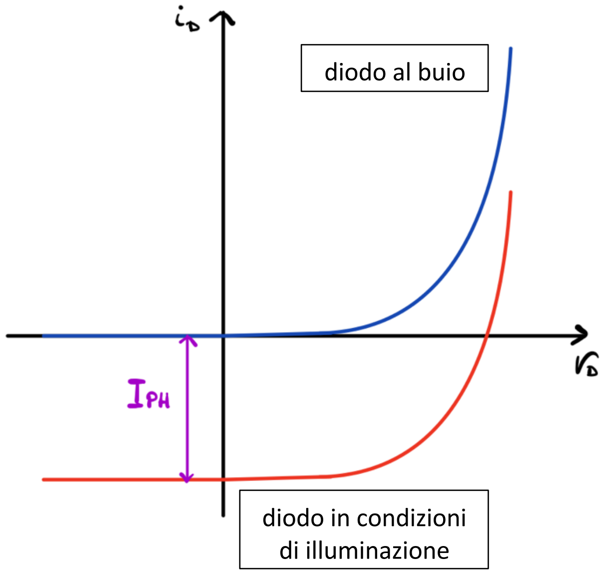


- APPLICAZIONE DEL DIODO A GIUNZIONE COME FOTOSENSORE:

Su un diodo a giunzione pn agisce la luce, ovvero i fotoni, facendone variare la corrente. In particolare, la corrente del diodo diventa:

$$\boxed{i_D = I_S\left(e^{\frac{v_D}{nV_T}} - 1\right) - I_{PH}}$$

dove I_{PH} è la corrente generata dalle cariche prodotte quando i fotoni colpiscono il diodo con un'energia sufficiente a creare una coppia elettrone/lacuna, ovvero è la corrente delle cariche fotogenerate.
Quindi la caratteristica corrente-tensione è traslata in basso.



La corrente fotogenerata è proporzionale alla potenza P della luce, perché maggiore è il numero di fotoni e maggiore è il numero delle cariche fotogenerate.

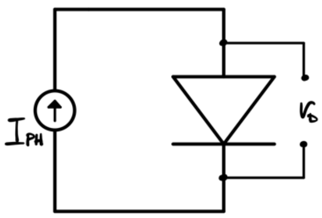
$$I_{PH} = \sigma P$$

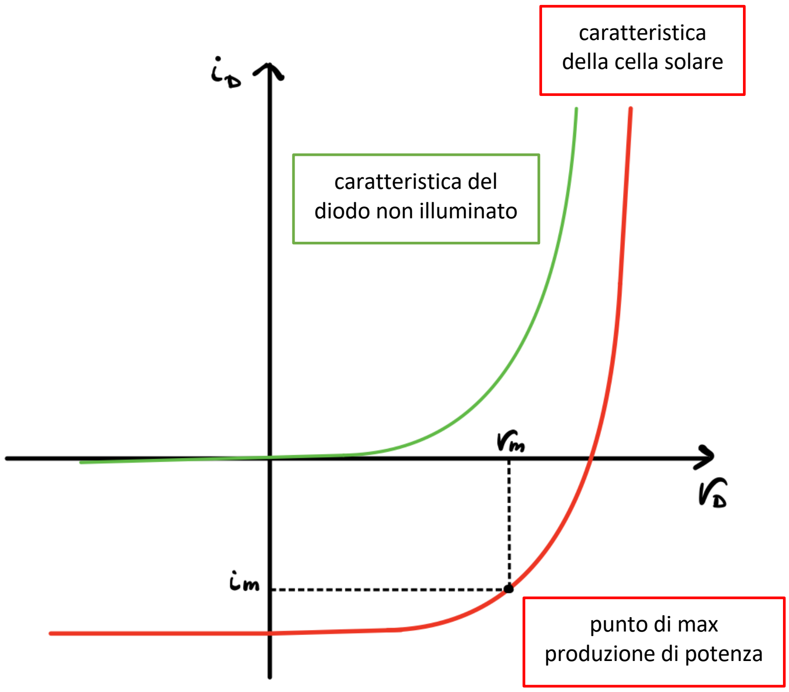
Quindi la misura della corrente fotogenerata I_{PH} può essere indicatore della potenza della luce, e quindi si può usare il diodo a giunzione come fotosensore, dove si ha la trasduzione da luce a corrente, ovvero il segnale di ingresso è la luce e il segnale in uscita è una corrente proporzionale alla luce attraverso il fattore di *responsivity* $\sigma\ [A * W]$, ovvero quanta corrente scorre (A), per la potenza di luce (W).

Osservazione sulla potenza del diodo: come già detto, la potenza relativa al diodo si misura come il prodotto tra la corrente e la tensione nel diodo, quindi $P = i_D * v_D$. Questa potenza può essere positiva, ovvero una potenza assorbita dal diodo da una fonte esterna, o negativa, ovvero una potenza prodotta dal diodo.
Guardando la caratteristica corrente-tensione, se il diodo lavora nel primo quadrante la corrente è positiva e la tensione è positiva, quindi la potenza è positiva e di conseguenza è una potenza assorbita. In modo analogo si ha nel terzo quadrante, dove sia la corrente che la tensione sono negative. Viceversa, se si lavora nel secondo o quarto quadrante, una delle due grandezze tra corrente e tensione è positiva, mentre l'altra è negativa, e di conseguenza la potenza è negativa, ovvero è una potenza prodotta dal diodo.

Quindi, con questa osservazione si può capire come un diodo che lavora nel quarto quadrante, ovvero un una tensione positiva (quindi lavora in configurazione diretta) e una corrente negativa, possa essere usato come cella solare per produrre potenza dalla luce.

L'efficienza della cella solare dipende dalla potenza prodotta dal diodo, quindi dal prodotto corrente-tensione: la tensione è quella del diodo in configurazione diretta, quindi $V_\gamma = 0.6\,V$, la corrente dipende da dove viene portato a lavorare; quindi, per ottenere la massima efficienza bisogna portarlo a lavorare nel punto di max attraverso un generatore di corrente esterno. Una buona efficienza è intorno dal 20%. Per ottenere una buona produzione sia di corrente che di tensione, si mettono tante celle solari in serie in modo che ogni volta i $0.6\,V$ si sommano.





- I DIVERSI UTILIZZI DEL DIODO:

Il diodo può essere utilizzato in diversi modi, come stabilizzatore di tensione, come sensore di temperatura o come cella solare. La differenza di questi tre utilizzi non sta nella struttura del diodo, che è sempre una giunzione pn, ma sta nel punto di lavoro, ovvero dove viene portato a lavorare nella caratteristica corrente-tensione attraverso una polarizzazione esterna di corrente o tensione:

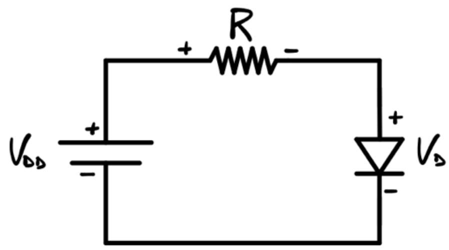
- se lavora nel primo quadrante è uno stabilizzatore di tensione (giunzione pn classica);
- se lavora nel terzo quadrante è un sensore di temperatura;
- se lavora nel quarto quadrante è una cella solare (produce potenza).

- CIRCUITI CON DIODI:

- Analisi Grafica:

I circuiti con diodi sono difficili da risolvere attraverso i calcoli senza l'utilizzo di un computer, per questo motivo si fa uso dell'analisi grafica.

Ad esempio, prendendo il circuito in figura, si ha che il diodo è connesso in serie ad una batteria ed a una resistenza, quindi:

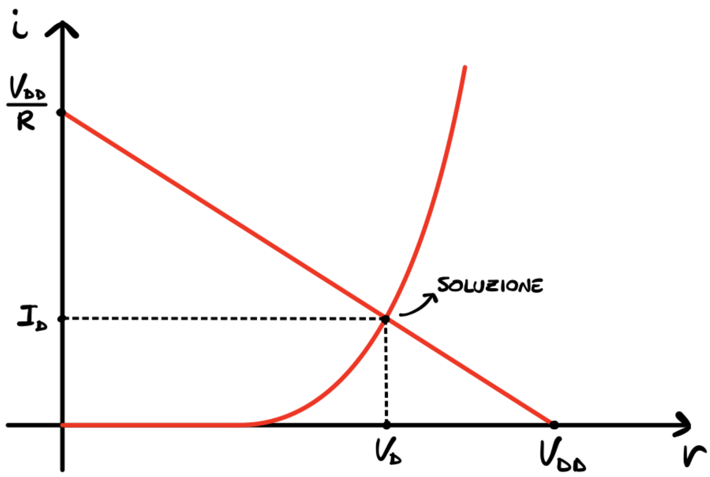


$$V_{DD} - IR - V_D = 0 \qquad \rightarrow \qquad V_D = V_{DD} - IR$$

Risolvere questa equazione non è affatto banale, perché sul diodo si ha un andamento esponenziale della corrente. Quindi un modo per risolverla è graficare sul piano corrente-tensione la caratteristica di V_D, quella di $V_{DD} - IR$, e vedere se hanno un punto di contatto. Se è presente un incrocio nelle due curve, quel punto rappresenta la soluzione dell'equazione. Sia V_D che $V_{DD} - IR$ sono funzioni di I:

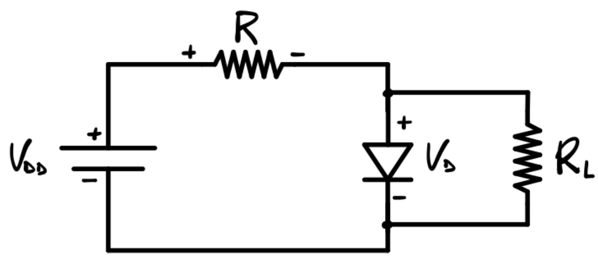
- V_D è la classica caratteristica del diodo in polarizzazione diretta;
- $V_{DD} - IR$: è una retta traslata, dato che V_{DD} è un valore costante (retta verticale), e $-IR$ è una retta con pendenza negativa. Questa è chiamata *retta di carico* ed è la caratteristica grafica di quello che c'è ai capi del diodo.

Quindi, si ottiene:



Quindi, il diodo vede dal suo punto di vista solo la retta di carico e il punto di soluzione è il punto di lavoro del diodo. Se viene cambiato V_{DD}, la retta di carico trasla in basso o in alto mantenendo la stessa pendenza, mentre se si cambia R lasciando invariata V_{DD}, la retta di carico cambia pendenza.

In entrambi i casi cambia il punto di lavoro del diodo, ma come già visto, anche per grandi variazioni di corrente, le variazioni di tensione nel diodo sono molto piccole, quindi, se si applica un carico ai capi del diodo questo vedrà sempre la tensione V_D ai suoi capi e sentirà sempre una corrente pari a V_D/R_L.



Quindi, un modo per risolvere circuiti con diodo è usare l'analisi grafica, ma presuppone che venga fornita in anticipo la caratteristica esponenziale del diodo.

- Modello lineare a tratti:

Un altro modo per analizzare i circuiti con diodo è usare il modello lineare a tratti.
La linearizzazione si può fare tranquillamente per i valori (in modulo) minori delle soglie, sia in polarizzazione inversa che diretta, dove la corrente si può approssimare a zero con un errore molto basso.
Per valori maggiori della soglia in polarizzazione diretta, è difficile linearizzare il modello perché è un esponenziale, ma si può cercare una retta che, almeno per il primo tratto, assomigli e passi molto vicino alla curva esponenziale.

Per fare questo si utilizza il seguente modello:

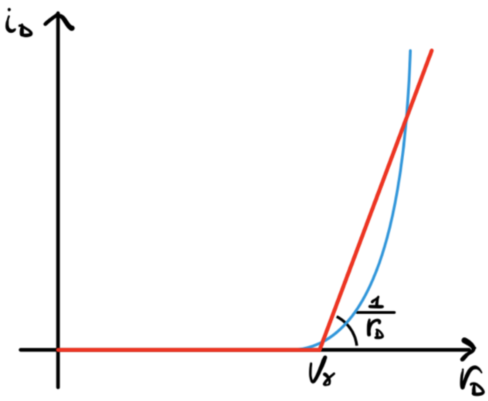
- per $v_D \leq V_\gamma$: la corrente è praticamente nulla e quindi può essere approssimata con la retta $i_D = 0$. Quindi il diodo diventa un circuito aperto;

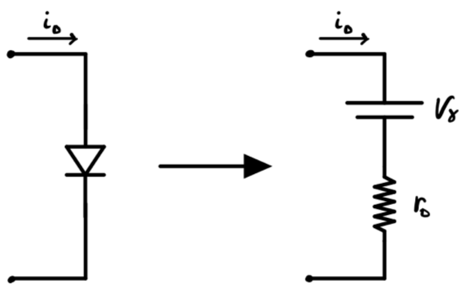
- per $v_D > V_\gamma$: la corrente cresce esponenzialmente e quindi può essere approssimata con una retta che segue il seguente andamento

$$\boxed{i_D = \frac{v_D - V_\gamma}{r_D}}$$

  ovvero, il diodo viene sostituito con una serie di una batteria e una resistenza, dove la batteria è V_γ e la resistenza è r_D, ovvero la resistenza interna del diodo, che ha in generale un valore molto basso.

Si ottiene, quindi, il seguente grafico e il seguente circuito:





dove l'andamento del circuito è descritto da due relazioni lineari:

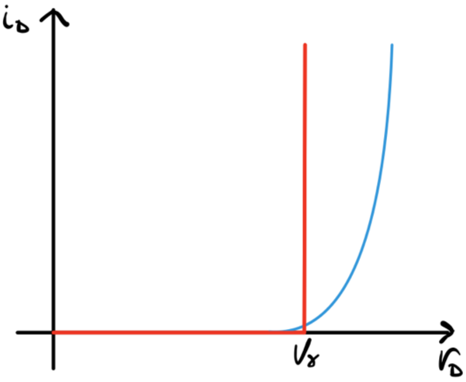
$$\rightarrow \begin{cases} i_D = 0 & per\ v_D \leq V_\gamma \\ i_D = \dfrac{v_D - V_\gamma}{r_D} & per\ v_D > V_\gamma \end{cases}$$

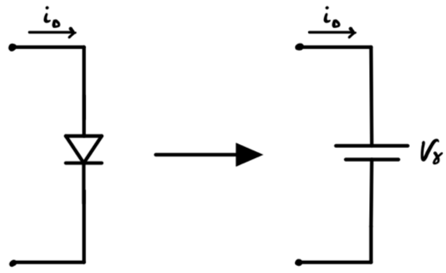
- Modello a tensione costante:

Nel modello a tensione costante del diodo, si riprende l'analisi fatta per il modello lineare a tratti, ma si linearizza per valori maggiori della tensione di soglia con una retta costante di valore V_γ.
Quindi, si ottiene:

$$\rightarrow \begin{cases} v_D = 0 & per\ v_D \leq V_\gamma \\ v_D = V_\gamma & per\ v_D > V_\gamma \end{cases}$$ CIRCUITO APERTO / TENSIONE COST

Ovvero, la resistenza interna al diodo è stata considerata nulla. Si ottiene il seguente grafico e il seguente circuito:





Nella maggioranza dei casi, questo modello è quello utilizzato perché semplifica molto l'analisi e allo stesso tempo non è così distante dalla realtà. Infatti, questo modello funziona come uno stabilizzatore di tensione, ovvero qualunque sia la corrente che scorre nel diodo, la tensione è sempre V_γ.

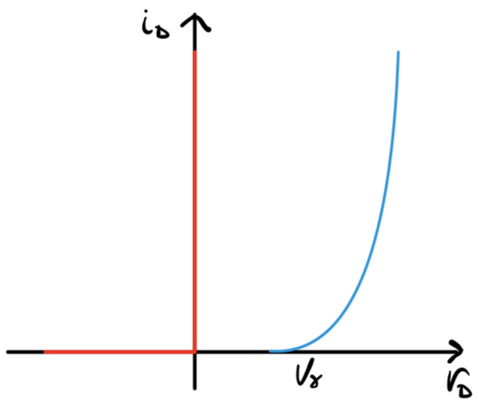
Con questo modello, il diodo viene sostituito con due modelli circuitali a seconda della tensione applicata: per valore minori di V_γ viene sostituito con un circuito aperto, per valori maggiori di V_γ viene sostituito con una batteria che genera una tensione pari a $V_\gamma = 0.7\ V$.

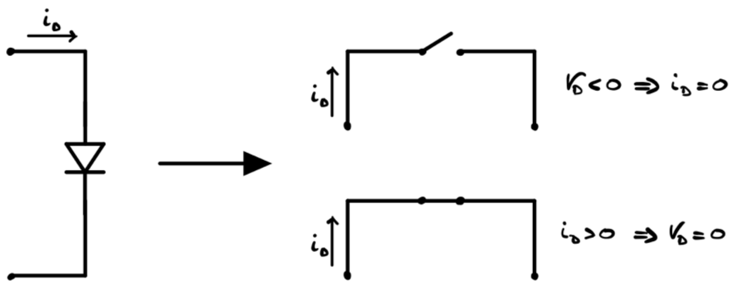
- Il diodo ideale:

Semplificando ulteriormente il modello a tensione costante si ottiene il diodo ideale. Questo segue il seguente andamento:

$$\rightarrow \begin{cases} i_D = 0 & per\ v_D < 0 \\ v_D = 0 & per\ i_D > 0 \end{cases}$$

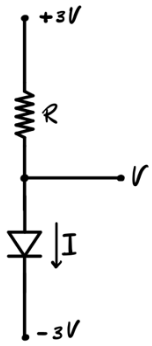
ovvero, quando il diodo è polarizzato in inversa, ovvero funziona con tensioni negative, si comporta come un circuito aperto. Quando il diodo è polarizzato in diretta, ovvero funziona con tensioni positive, si approssima il valore di soglia V_γ a $0\ V$, dato che comunque è molto piccolo, e quindi ottiene che il diodo è un cortocircuito.
Quindi, con questa approssimazione il diodo è un interruttore, che per tensioni negative si comporta come un circuito aperto (interruttore aperto - interdizione) e per tensioni positive si comporta come un cortocircuito (interruttore chiuso - conduzione):





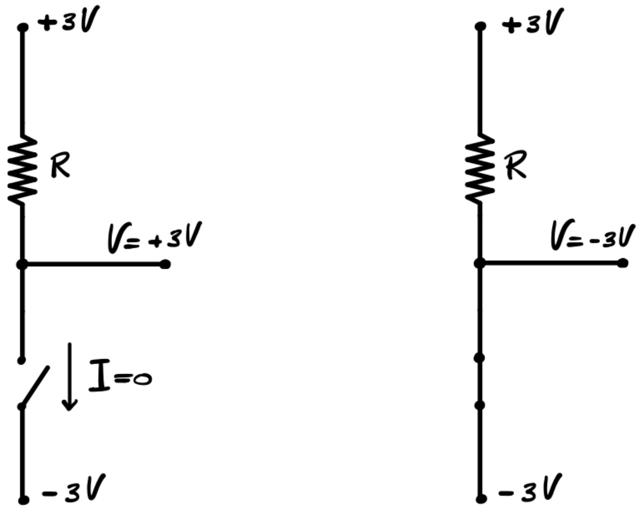
- Analisi circuitale:

Per effettuare l'analisi circuitale con le approssimazioni descritte bisogna seguire il seguente approccio: dato che tutti e tre i modelli hanno due scelte per il diodo, se ne sceglie una delle due senza particolari analisi (se non intuendo il come potrebbe essere il circuito) e si esegue l'analisi. Dopo averla completata bisogna verificare che la tensione trovata ai capi del diodo sia concorde con l'ipotesi fatta all'inizio; se lo è allora l'analisi è finita, altrimenti bisogna prendere l'altro caso del diodo e rieseguire l'analisi.



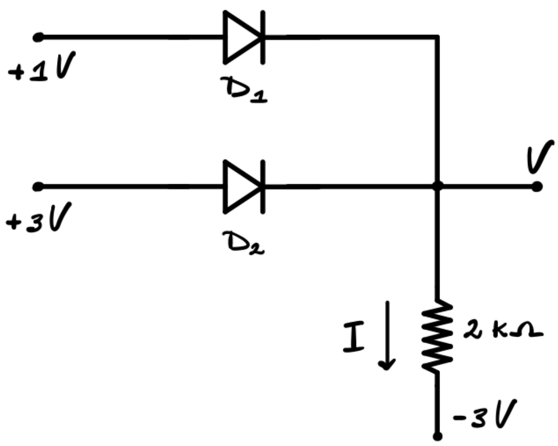
Ad esempio, prendendo il circuito in figura e considerando il modello del diodo ideale, si può eseguire la seguente analisi: prendiamo come ipotesi il diodo polarizzato in inversa, e quindi lo sostituiamo con un circuito aperto.
In questo modo, la corrente che scorre nel circuito è nulla, e quindi anche quella che scorre nella resistenza R. Per cui, si ottiene $V = +3\ V$. Con questa analisi si ottiene che la tensione al capo p del diodo è $+3\ V$ e quella al capo n è $-3\ V$, e quindi il diodo non è polarizzato in inversa. L'ipotesi iniziale era sbagliata.
Di conseguenza, l'ipotesi corretta è che il diodo sia polarizzato in diretta, e quindi lo sostituiamo con un cortocircuito. In questo caso, si ottiene direttamente $V = -3\ V$.

polarizzazione inversa



polarizzazione diretta

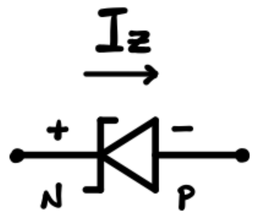
Esercizio



Calcolare la tensione V e la corrente I del seguente circuito.
Prendiamo come ipotesi che il diodo D_1 sia polarizzato in diretta e sostituiamolo con un cortocircuito. Quindi ad entrambi i capi del diodo è presente $+1\ V$.
Quindi, per quanto riguarda il secondo diodo, si ha che sul capo p sono presenti $+3\ V$ e sul capo n è presente $+1\ V$, quindi la tensione sul capo p è maggiore rispetto a quella sul capo n e quindi il diodo D_2 è polarizzato in diretta. Quindi sostituiamo anche D_2 con un cortocircuito.
In questo modo però, ad entrambi i capi di D_2 devono essere presenti $+3\ V$, ma l'ipotesi che D_1 fosse un cortocircuito portava ad avere $+1\ V$ sul capo n di D_2.
Quindi D_1 non può essere un cortocircuito. Supponiamo quindi che sia polarizzato in inversa e sostituiamolo con un circuito aperto. In questo modo si ottiene che sul capo p di D_1 è presente $+1\ V$, mente sul capo n sono presenti $+3\ V$ (perché D_2 è un cortocircuito). In questo modo funziona tutto.
Quindi si ottiene $V = +3\ V$ e $I = 3\ mA$.

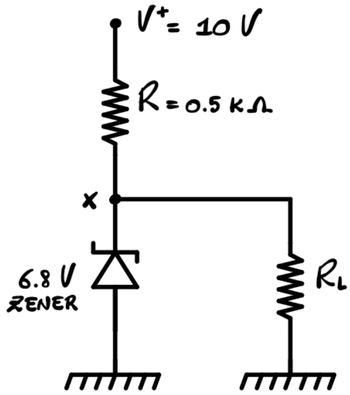
- Diodo Zener:

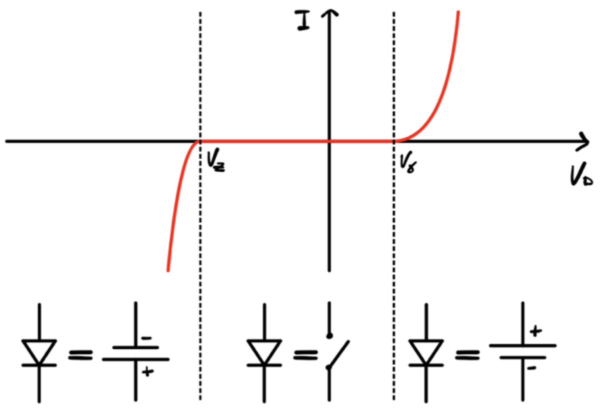
Come già detto, un diodo reale polarizzato in inversa ha corrente nulla per qualsiasi valore di tensione fino alla tensione di Zener, o tensione di breakdown.
Raggiunta la tensione di breakdown, il campo elettrico nella zona svuotata diventa talmente forte che causa un meccanismo a cascata di generazione di cariche che portano ad una corrente notevole. La tensione di Zener dipende da quanto è stato drogato il silicio ed è specifica per ogni diodo.
Come per la polarizzazione diretta, una volta raggiunta la tensione di breakdown, la corrente varia molto, ma la tensione rimane sempre molto vicino a V_Z (tensione di Zener), e per questo può essere usato come un generatore di tensione di valore V_Z. Il simbolo circuitale del diodo Zener è quello in figura.



Esempio

Consideriamo il seguente circuito, dove è presente un diodo polarizzato in inversa, con tensione di Zener pari a $V_Z = 6.8\,V$. Il diodo è sicuramente polarizzato in inversa perché il capo p è connesso a massa mentre il capo n è connesso a ad una tensione sicuramente maggiore di zero. La caratteristica di questo diodo è la seguente:





ed è suddivisa in tre zone:

- nella polarizzazione diretta il diodo è equivalente ad una batteria di $0.6\,V$;
- nella polarizzazione inversa il diodo è equivalente ad una batteria di $-6.8\,V$;
- nella zona centrale il diodo è equivalente ad un circuito aperto.

Sappiamo che il diodo è polarizzato in inversa, quindi può essere una batteria di tensione V_Z o un circuito aperto. Supponiamo sia un circuito aperto, ovvero che $V_Z < V_D < V_\gamma$. In questo caso si ottiene:

$$V_X = V^+ \frac{R_L}{R + R_L}$$

Si hanno due situazioni:

- se $R_L \approx R \rightarrow\ V_X \approx 5V$ e quindi effettivamente il diodo è equivalente ad un circuito aperto;
- se $R_L \gg R \rightarrow\ V_X \approx\ V^+ = 10\,V$ e quindi il diodo non è un circuito aperto, ma è una batteria di $6.8\,V$.

Consideriamo questo secondo caso: si ha che il diodo è una batteria di valore $6.8\,V$ e quindi la tensione $V_X = 6.8\,V$, che è la stessa che sta sul carico R_L. Quindi la tensione V^+ serve solo per portare il diodo in zona di conduzione in modo che funzioni come una batteria e stabilizzi la tensione sul carico a V_Z.
Infatti, qualsiasi sbalzo di tensione di V^+, purché mantenga il diodo in zona di conduzione inversa, non influisce sulla tensione che sente il carico, perché il diodo offre sempre la sua tensione V_Z. L'unico problema si ha se la tensione V_X aumenta e quindi aumenta la corrente che scorre nel diodo. Infatti, il diodo può sopportare fino ad un certo valore di corrente (segnato sul datasheet) sopra il quale si inizia a surriscaldare eccessivamente e rischia di rompersi.

TRANSISTOR MOSFET

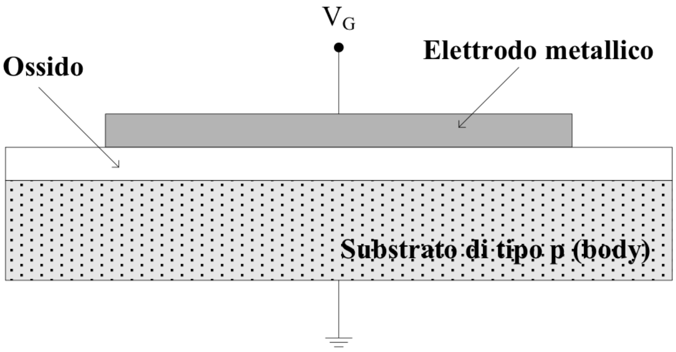
- STRUTTURA MOSFET:

Il nome MOSFET deriva da due cose:

- MOS (Metal Oxide Semiconductor), è legato alla struttura fisica del transistor;
- FET (Field-Effect Transistor), è legato al principio di funzionamento del transistor.

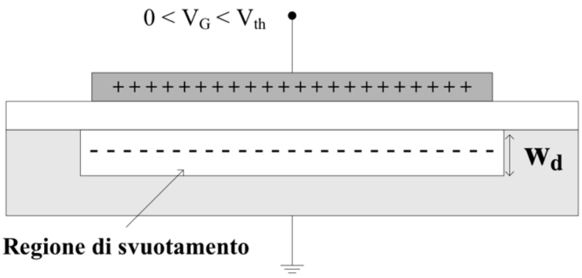
La struttura MOS è composta da tre strati:

- un elettrodo metallico, chiamato gate (M);
- un ossido (O);
- un substrato di tipo p, chiamato body (S).

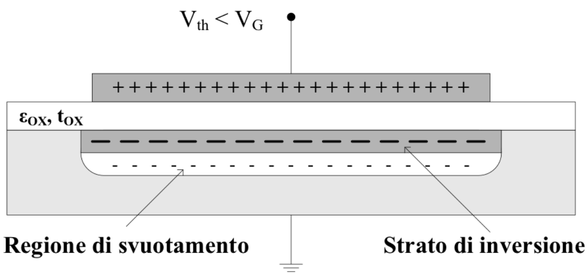


Il substrato di tipo p è silicio drogato con atomi di boro e quindi è un materiale conduttivo dove sono presenti un grande numero di lacune libere.
Quindi la struttura di MOS è praticamente un condensatore, perché ci sono due conduttori separati da un ossido.
Il body ha uno spessore di poco meno di 1 mm, mentre l'ossido e il gate hanno uno spessore molto minore di 1 μm.

Il gate viene connesso ad un potenziale V_G, quindi, essendo il metallo un materiale equipotenziale, tutti l'elettrodo è ad un potenziale V_G. Se il potenziale V_G è positivo, significa che sull'elettrodo metallico si accumulano delle cariche positive e il campo elettrico che si genera nell'ossido attrae gli elettroni del body verso l'alto (in un materiale di tipo p le lacune sono molto maggiori degli elettroni, ma comunque gli elettroni liberi sono presenti). Quindi si inizia a creare una regione di svuotamento nella parte del body a contatto con l'ossido.



Se V_G supera una certa tensione di soglia V_{th}, la concentrazione di elettroni nella regione di svuotamento diventa maggiore della concentrazione delle lacune e quindi questa regione del body diventa un materiale di tipo n.
Quindi, si viene a creare uno strato di inversione, dove il materiale che prima era di tipo p diventa di tipo n, perché il numero di elettroni presenti in quella zona è molto maggiore del numero di lacune. Subito sotto lo strato di inversione si crea la regione di svuotamento, dove non sono presenti né elettroni né lacune, mentre il resto del materiale rimane di tipo p.
(ε_{ox} è la costante dielettrica dell'ossido e t_{ox} è lo spessore).

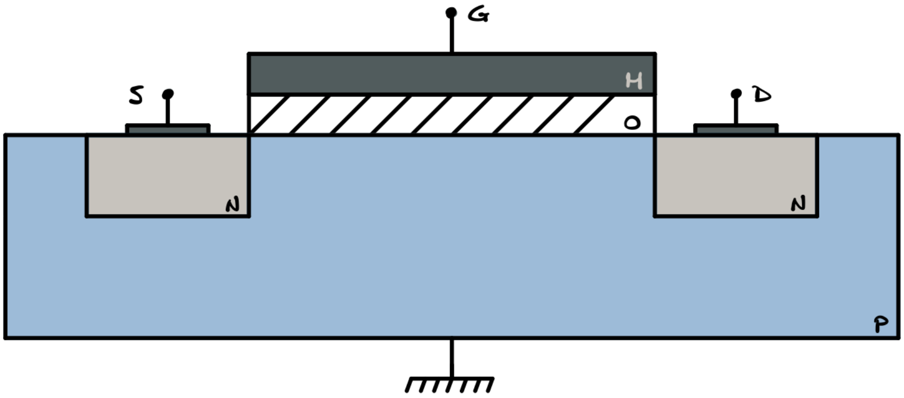


Osserviamo che, dire che sul gate è presente un potenziale V_G significa che questo è connesso ad una batteria. La corrente, che possiamo chiamare I_G, però è sempre nulla perché non riesce a trovare una maglia chiusa che la porta a massa dato che tra il gate e il body è presente l'ossido. Quindi, $I_G = 0$.

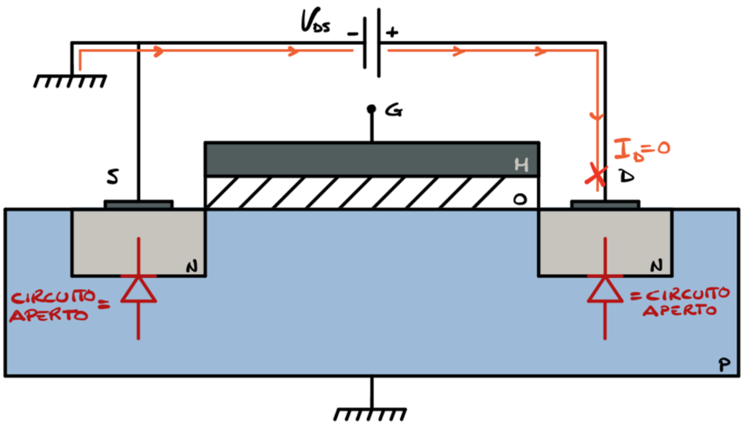
Il funzionamento a Field-Effect è proprio quello del campo elettrico che si crea tra il gate e il canale che si crea nel body. Questo campo elettrico si genera perché è presente un ossido che isola il gate dal resto del circuito e quindi non permette il passaggio di corrente. Se ci dovesse essere un cortocircuito, legato a qualsiasi problema, il transistor non funzionerebbe.

-Struttura fisica e funzionamento di un transistor NMOS ad arricchimento:

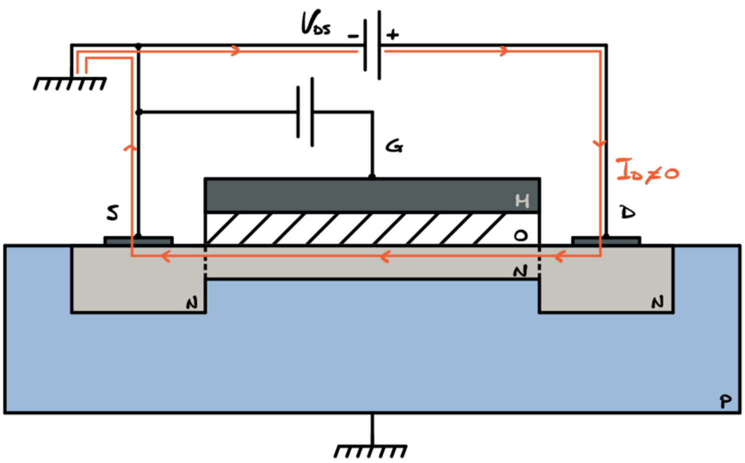
Abbiamo visto la struttura fisica di un MOS, ma tecnologicamente di fa una cosa un po' diversa, ovvero si costruisce un dispositivo a tre terminali, uno dei quali è il gate.
Per fare questo, si creano due isole di tipo n nel body, adiacenti agli stradi di ossido e gate, e si connettono con un metallo creando altri due terminali, uno chiamato *source* (S) e l'altro *drain* (D).



Su questa struttura di prova a fare una connessione nel seguente modo: si connettono gli elettroni di source e drain con una batteria nel mezzo di tensione V_{DS} rivolta con il polo positivo verso il drain. Source viene connesso a massa.
In questa configurazione, essendoci una batteria tra source e drain deve scorrere una corrente attraverso il drain (corrente di drain I_D). La corrente parte da massa e cerca una maglia chiusa passando attraverso l'isola di tipo n dell'elettrodo di drain.
Dato che le isole di tipo n e il body di tipo p sono a contatto tra loro, sono sostanzialmente dei diodi. Il diodo del drain è polarizzato in configurazione inversa, perché sul drain è presente V_{DS} e il body è connesso a massa, quindi è un circuito aperto. Anche il diodo della source è un circuito aperto perché sia l'elettrodo source che il body sono a massa, quindi ci sono $0\ V$ da entrambi i lati. Di conseguenza, la corrente in questa configurazione non riesce a trovare una maglia chiusa verso massa e di conseguenza $I_D = 0$.

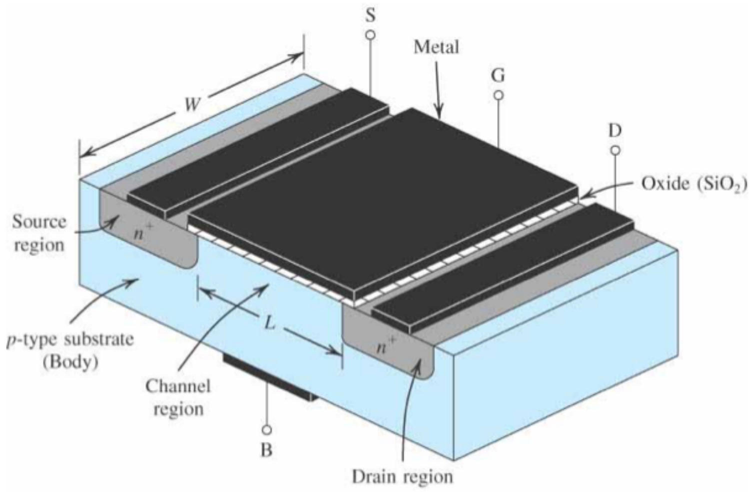


Per risolvere questo problema si applica una tensione anche al gain (sempre tra gain e source). Quindi si ha una tensione V_{GS} che, come visto prima, se supera la tensione di soglia V_{th}, crea una zona di tipo n a contatto con l'ossido. Quindi, in questo modo, le due isole di tipo n vengono collegate dal canale di tipo n che si crea grazie alla polarizzazione del gain con una tensione maggiore di V_{th}. Ora, quindi, la corrente può passare nell'isola di drain e attraverso il canale per arrivare all'isola di source ed andare a massa. Inoltre, il diodo presente tra l'isola di drain e il body è sempre un circuito aperto e quindi l'unica strada che può percorrere la corrente è attraverso il canale.
In questo modo, la tensione sul gate V_G controlla la corrente di drain I_D. Inoltre, il canale di tipo n è di tipo resistivo, ma la sua resistenza è proporzionale al numero di elettroni presenti. Quindi, più è alta la tensione V_G e meno è forte la resistenza del canale di tipo n e di conseguenza la corrente I_D che scorre nel canale è più grande.
Con questa configurazione si riesce quindi a gestire la corrente di drain attraverso la regolazione della tensione V_G.

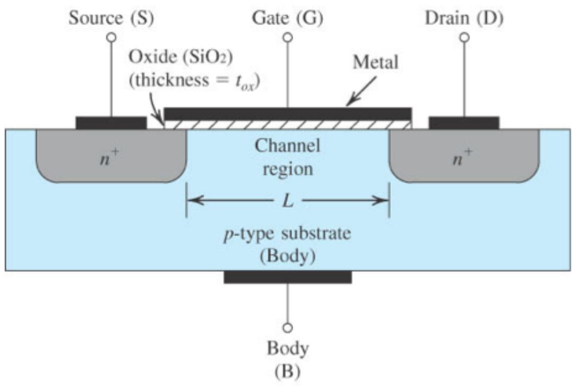


Ovviamente, tra le zone p ed n si va a creare una zona di svuotamento, proprio come nei diodi.

Quindi, la struttura tridimensionale e in sezione di un transistor NMOS è quella in figura. Un singolo transistor è formato da tre connettori, source, gate e drain e migliaia di transistor hanno in comune lo stesso substrato body, il quale è connesso a massa.



MOSFET ad arricchimento a canale n



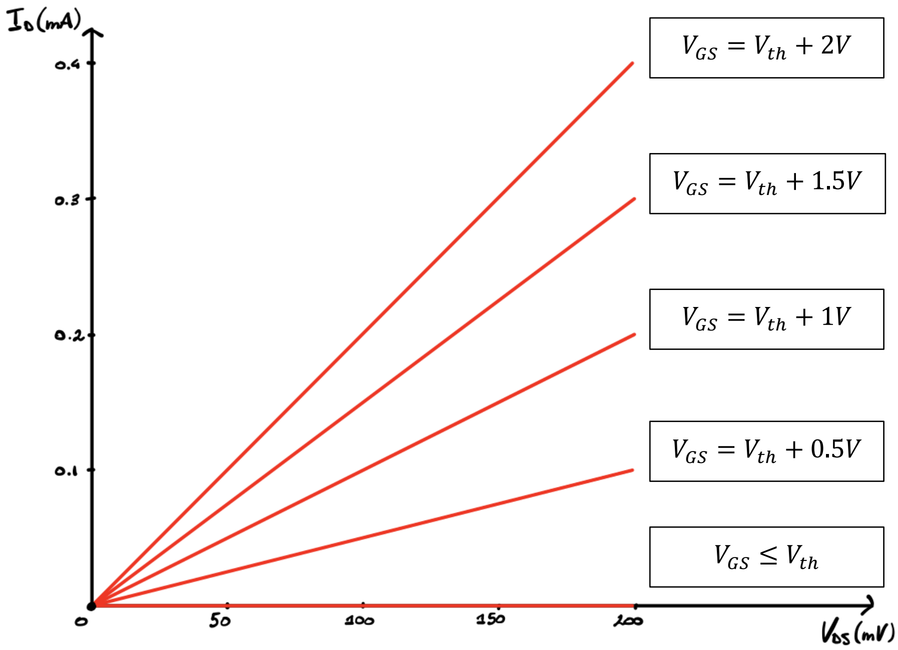
MOSFET ad arricchimento a canale n (sezione)

Le distanze W e L sono dell'ordine dei micrometri, e in particolare $0.1\ \mu m \leq L \leq 0.3\ \mu m$ (ormai la tecnologia si è spinta a distanze anche minori) e $0.2\ \mu m \leq W \leq 100\ \mu m$.

Quindi, in un circuito integrato, il substrato di tipo p è lo stesso per tutti i miliardi di transistor che saranno presenti nel circuito, ma ognuno di questi transistor non deve interferire con gli altri attraverso il body e questo è possibile grazie al fatto che il diodo che si forma tra l'isola di drain e il body è sempre un circuito aperto, come visto prima.

Come abbiamo detto, a parità di tensione applicata sul drain, se la tensione sul gain aumenta, aumenta anche la concentrazione di elettroni nel canale che si forma tra le due isole e quindi aumenta la corrente che passa nel canale. Quindi, si riesce a controllare la corrente che scorre tra due nodi della struttura (nodo di drain e nodo di source), attraverso la tensione applicata su un altro nodo (nodo di gate), che è elettricamente isolato dal passaggio di corrente tra drain e source. Si può iniziare a vedere la tensione V_{GS} applicata sul gate come la tensione di eccitazione/controllo e la corrente di drain I_D come il segnale controllato. Quindi, si inizia a vedere come questa struttura possa essere equivalente ad un generatore di corrente controllato in tensione.

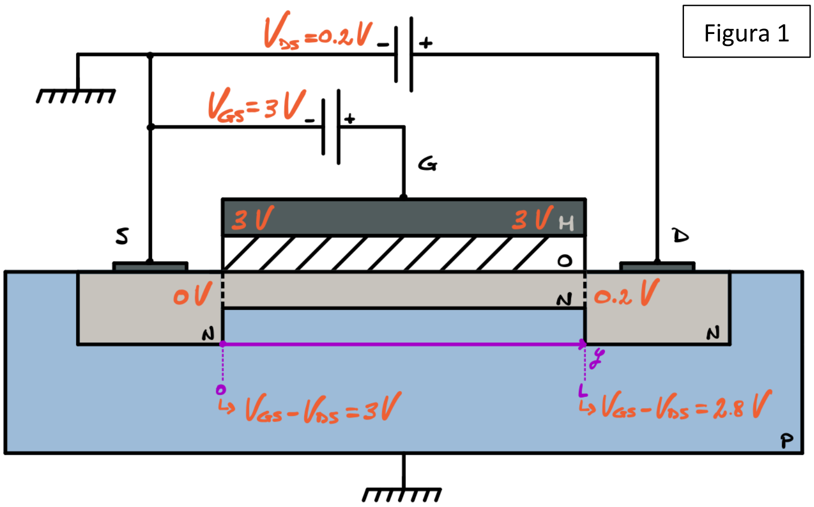
Andando a graficare la caratteristica corrente-tensione, dove la corrente analizzata è quella di drain I_D e la tensione è quella sul nodo di drain V_{DS}, si ottengono degli andamenti lineare (legge di Ohm), che hanno una pendenza tanto maggiore quanto è più grande la tensione sul gate, in quanto la resistenza del canale (nella legge di Ohm) diminuisce e quindi aumenta la corrente (a parità di tensione V_{DS}).



L'andamento della caratteristica $I_D - V_{DS}$ non è detto che sia lineare.

Il motivo è il seguente: applicando una tensione sul gate (ad esempio 3 V), tutto l'elettrodo si trova a questa tensione, perché il metallo è equipotenziale. Il canale che si forma nel substrato tra drain e source varia la sua dimensione in funzione del campo elettrico applicato, e il campo elettrico varia in funzione della differenza di potenziale tra gate e substrato. In una situazione in cui sia drain e source sono a massa, la differenza di potenziale su tutto il tratto tra i due elettrodi (nel quale si formerà il canale) è la stessa, ma in una situazione in cui il drain è ad una tensione V_{DS} e il source è a massa, la differenza di potenziale su tutti i punti di questo tratto non è la stessa.
In particolare, dato che il source è a massa, la differenza di potenziale vicino a questo elettrodo ($y = 0$) è pari alla tensione applicata sul gate; invece, dato che il drain è ad una tensione V_{DS}, la differenza di potenziale vicino a questo elettrodo ($y = L$) è pari a $V_{GS} - V_{DS}$.

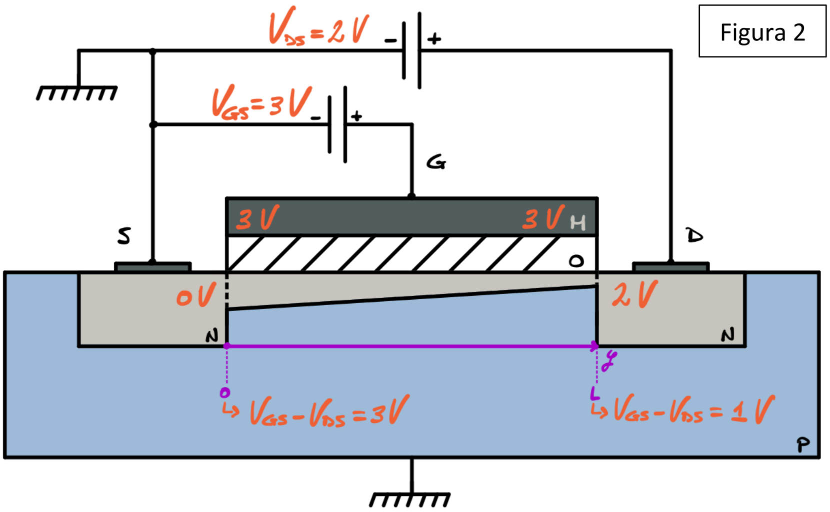
Figura 1



Se il drain si trova, ad esempio, ad una tensione $V_{DS} = 0.2\ V$, la differenzia di potenziale ad $y = L$ è $2.8\ V$, quindi è trascurabile e l'andamento può essere considerato lineare (figura 1).

Se invece il drain si trova, ad esempio, ad una tensione $V_{DS} = 2\ V$, la differenzia di potenziale ad $y = L$ è $1\ V$, quindi non è più trascurabile. In questo caso, il canale non è uniforme, ma è più spesso vicino al source e più sottile vicino al drain (figura 2).

Figura 2



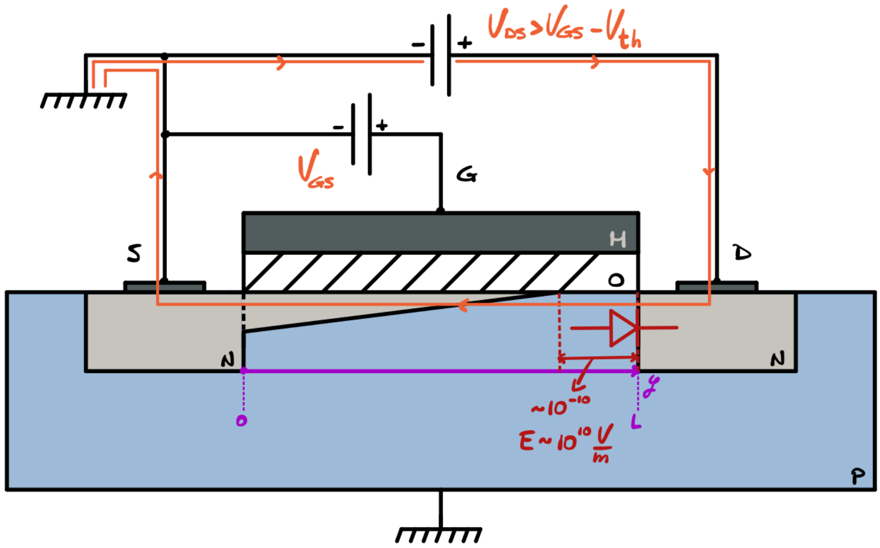
Più è sottile il canale e più aumenta la resistenza.

Graficando la caratteristica $I_D - V_{DS}$, mantenendo costante la tensione V_{GS} e quindi mantenendo costante anche la resistenza di canale R_{ch},si ottiene che:

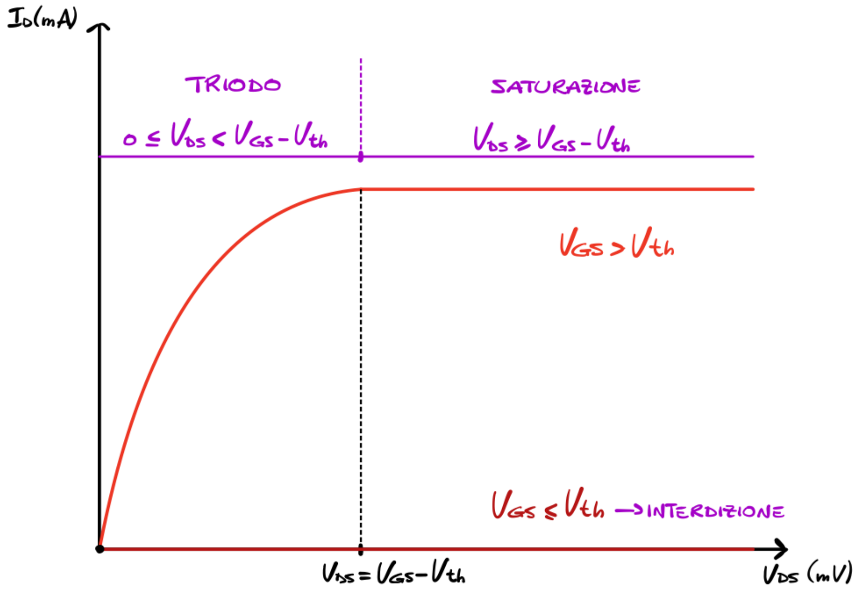
- per $0 \leq V_{DS} < V_{GS} - V_{th}$: l'andamento della caratteristica non è lineare, ma segue una curva che è identificata dall'inversa della legge di Ohm $I_D = V_{DS}/R_{ch}$. Quindi, al variare di V_{DS} varia la corrente di drain, che aumenta all'aumentare di V_{DS}.

- per $V_{DS} \geq V_{GS} - V_{th}$: quando la tensione di drain raggiunge la tensione $V_{GS} - V_{th}$, il canale, nella zona adiacente al drain diventa nullo. Da qui in poi, aumentando la tensione sul drain, la resistenza di canale rimane costante.
La caratteristica rimane costante per il seguente motivo. Più si aumenta V_{DS} e più il canale, oltre ad essere di spessore nullo nella parte verso l'isola di drain, si allontana da questa lasciando uno spazio su substrato, ovvero il punto per cui $V_{DS} = V_{GS} - V_{th}$ si avvicina alla zona di source. Quindi, tra il drain e la zona di body che si trova al posto del canale, si è nuovamente formato un diodo. Se la lunghezza L è dell'ordine degli $0.1\ \mu m$, lo spessore di questa zona dove è nuovamente presente il substrato è dell'ordine degli Armstrong ($10^{-10} m$), quindi è infinitesimale. Quindi, il diodo che si è formato è molto piccolo.
Sul drain è applicata una tensione di qualche Volt, mentre il body è a massa. Quindi la differenza di potenziale tra i due capi del diodo che si è formato è pari a V_{DS}. Essendo V_{DS} dell'ordine dei Volt, e la distanza dove è presente di nuovo il substrato dell'ordine degli Armstrong, il campo elettrico applicato alla giunzione pn del

diodo che si è formato è enorme, dell'ordine di $10^{10}\ V/m$. Quindi, come visto per i diodi, nella giunzione pn (che è polarizzata in inversa) si crea l'effetto a valanga causato dal campo elettrico enorme.
Questo effetto a valanga genera una quantità di cariche libere tali che la corrente nel diodo riesce a scorrere lo stesso, anche se polarizzato in inversa.
Inoltre, se viene aumentata la tensione sul drain V_{DS}, aumenta anche la distanza tra l'isola di drain e il punto il cui il canale diventa nullo. Dato che aumentano entrambe le grandezze in modo proporzionale, il campo elettrico rimane lo stesso e quindi la corrente che si genera per l'effetto valanga rimane costante.



Quindi, la caratteristica $I_D - V_{DS}$ è la seguente:

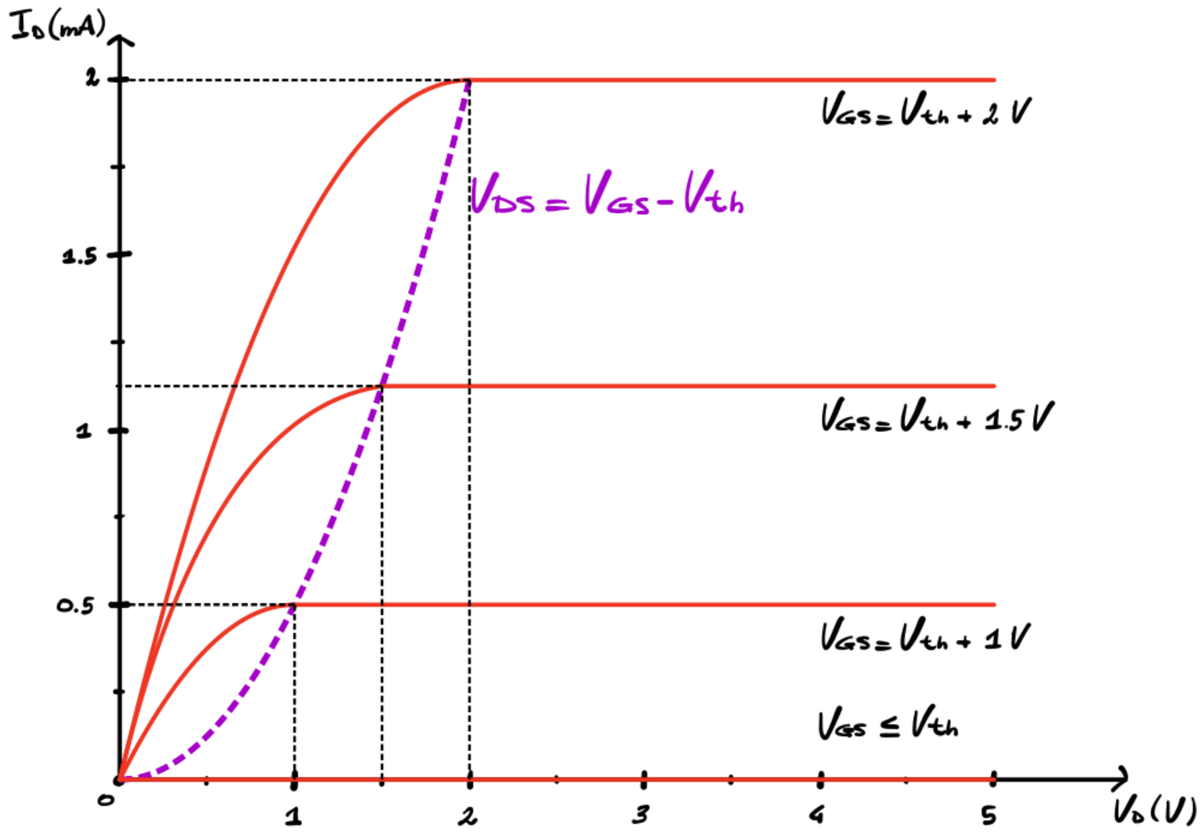


Quindi, si hanno tre zone di lavoro del transistor:

- zona di *interdizione*: si ha quando $V_{GS} \leq V_{th}$;
- zona di *triodo*: si ha quanto $\begin{cases} V_{GS} > V_{th} \\ V_{DS} < V_{GS} - V_{th} \end{cases}$;
- zona di *saturazione*: si ha quando $\begin{cases} V_{GS} > V_{th} \\ V_{DS} \geq V_{GS} - V_{th} \end{cases}$;

Nella zona di $interdizione$ la tensione V_{GS} è troppo piccola e quindi non si riesce a creare il canale.
Nella zona di *triodo*, se la tensione V_{GS} è costante, al crescere di V_{DS} aumenta la corrente di drain I_D.
Nella zona di *saturazione*, se la tensione V_{GS} è costante, al crescere di V_{DS} la corrente di drain I_D rimane costante.

Al variare della tensione V_{GS}, la caratteristica $I_D - V_{DS}$ ha sempre la stessa forma, ma il punto dove si passa dalla zona di triodo alla zona di saturazione si alza, ovvero si trova in un punto della caratteristica a corrente e tensione maggiori. In particolare, la curva viola identifica la separazione tra la zona di triodo e la zona di saturazione al variare della tensione di drain, ovvero è la curva per cui $V_{DS} = V_{GS} - V_{th}$.



Nella zona di triodo la corrente varia sia in funzione della tensione di drain V_{DS}, sia in funzione della tensione di gate V_{GS}. Invece, nella zona di saturazione la corrente varia solo in funzione della tensione di gate.

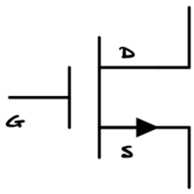
Osserviamo che, il nome di questo tipo di transistor è NMOS perché il canale che si viene a formare è di tipo n, quindi le cariche che formano la corrente di drain sono di tipo n, ovvero sono elettroni.

- DIMENSIONI CRITICHE:

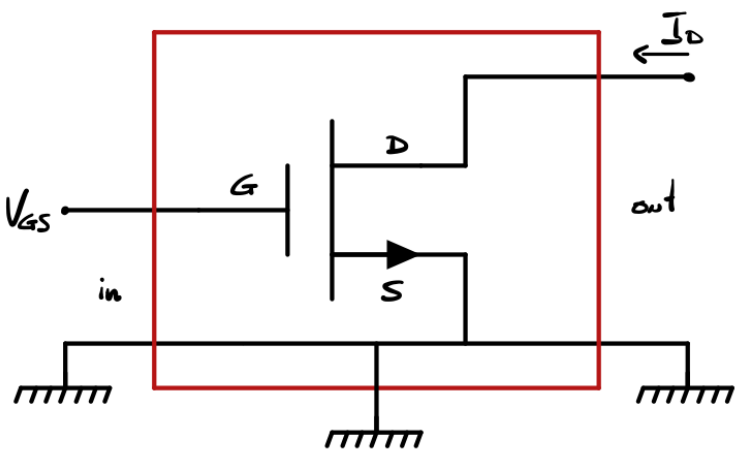
Le dimensioni critiche di un transistor sono principalmente due: lo spessore dell'ossido e la lunghezza L che separa le due isole di drain e source.
Lo spessore dell'ossido è una dimensione critica perché più è piccolo e maggiore è il campo elettrico che si viene a creare tra gate e canale.
La lunghezza L è una dimensione critica perché più è piccola e minore è la resistenza del canale, e quindi scorre più facilmente la corrente.
Queste due dimensioni sono dettate da limiti tecnologici.

- **Rete due porte equivalente di un transistor NMOS ad arricchimento**:

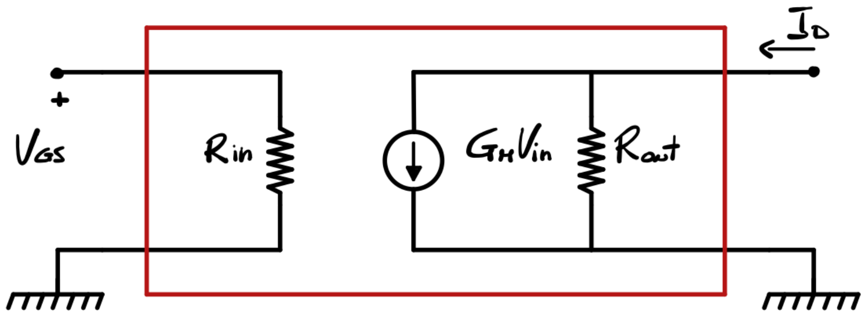
Il simbolo circuitale di un transistor NMOS è quello in figura. Il seguente simbolo mette in evidenza come un transistor NMOS sia suddiviso in due parti da un ossido, dove da una parte c'è l'elettrodo di gate, e dall'altra ci sono gli elettrodi di drain e source. La freccia sul source sta ad indicare il verso della corrente che circola da drain a source.



Questa struttura mette già in evidenza come il transistor NMOS sia semplificabile attraverso una rete due porte equivalente. Il segnale di ingresso è la V_{GS}, il quale controlla il segnale in uscita I_D. Quindi, il circuito equivalente è un circuito di transconduttanza, dove una tensione in ingresso porta ad una corrente in uscita.
Per modellizzare una rete due porte sono necessari tre parametri: impedenza di ingresso, impedenza di uscita e funzione di trasferimento.
Dato che bisogna legare una corrente in uscita ad una tensione in ingresso, il parametro della funzione di trasferimento è una transconduttanza G_M.



Quindi, la rete due porte equivalente è la seguente:

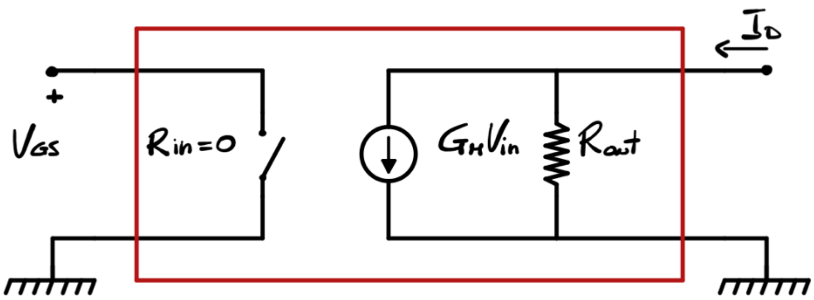


nella quale bisogna trovare i parametri R_{in}, R_{out} e G_M.

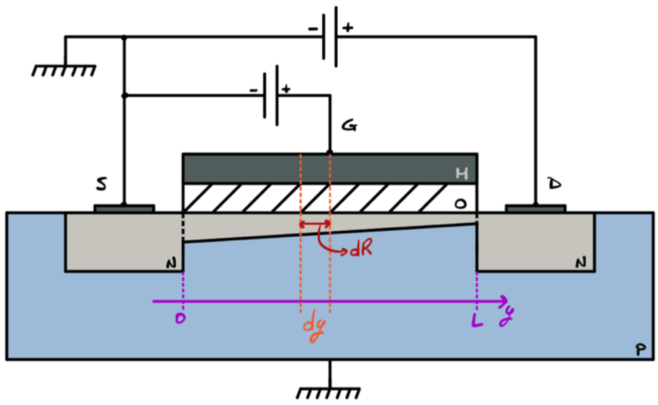
L'impedenza di ingresso alla rete due porte equivalente di un transistor MOS è quella che vede l'elettrodo di gate. Per calcolare quanto vale, sostituiamo il generatore V_{GS} con uno V_X noto e calcoliamo quanto vale la corrente I_X che scorre nel circuito annullando tutte le eccitazioni.
Si ottiene che

$$\boxed{R_{in} = \infty}$$

perché l'elettrodo di gate è in contatto esclusivamente con l'ossido della struttura MOS, quindi applicando una tensione su questo, la corrente non trova un percorso per andare a massa e di conseguenza è sempre nulla. Questo significa che nella rete due porte equivalente la corrente che entra è sempre pari a zero, e di conseguenza la resistenza di ingresso è infinita, ovvero è un circuito aperto.



Calcoliamo il parametro G_M della funzione di trasferimento.
Riprendiamo la struttura MOS, per quale il canale tra drain e source esiste se $V_{GS} > V_{th}$. Il canale non è detto che sia equipotenziale.
La struttura che si crea, dove è presente un metallo e un semiconduttore (che però è in zona di conduzione) separati da un ossido, è quella di un condensatore. La tensione ai capi di un condensatore è pari a $V_C = Q/C$, dove in questo caso la capacità è quella dell'ossido. Quindi, la quantità di carica sul gate e sul canale è data da:



$$\boxed{Q = C_{ox}\,\Delta V}$$

dove ΔV è la differenza di potenziale tra gate e canale. Prendendo un piccolo settore dy si ottiene che:

$$\boxed{Q_C(y) = C_{ox}[(V_{GS} - V_{th}) - V(y)]}$$

Vedendo il canale come una resistenza, e prendendone sempre una piccola parte dR, si ottiene che:

$$\boxed{dR = \frac{dy}{W\mu_n Q_C(y)} = \frac{dy}{W\mu_n C_{ox}[(V_{GS} - V_{th}) - V(y)]}}$$

ovvero, dipende dalla dimensione dy, ovvero quando è lungo il canale (più è lungo e maggiore è la resistenza), dalla dimensione W, ovvero quanto è largo il canale (più è largo e minore è la resistenza), dalla mobilità delle cariche (maggiore è la mobilità e minore è la resistenza) e dalla quantità di carica (maggiore è la quantità di carica e minore è la resistenza).

La differenza di potenziale ai capi della resistenza dR è data da:

$$dV(y) = I_D dR = \frac{I_D dy}{W\mu_n C_{ox}[(V_{GS} - V_{th}) - V(y)]}$$

che si può riscrivere come:

$$\boxed{I_D dy = W\mu_n C_{ox}[(V_{GS} - V_{th}) - V(y)]\,dV(y)}$$

Integrando entrambi i membri lungo tutto il canale (da 0 a L) si ottiene:

$$\int_0^L I_D dy = \int_0^{V_{DS}} W\mu_n C_{ox}[(V_{GS} - V_{th}) - V(y)]\,dV(y)$$

dato che $dV(y = 0) = 0\ V$ e $dV(y = L) = V_{DS}$. Quindi, si ottiene:

$$I_D = \frac{1}{2}\mu_n C_{ox}\frac{W}{L}[2(V_{GS} - V_{th})V(y) - V(y)^2]$$

che calcolata da $y = 0$ a $y = V_{DS}$ è pari a:

$$\boxed{I_D = K\left[2(V_{GS} - V_{th})V_{DS} - {V_{DS}}^2\right]}$$ TRIODO

con

$$\boxed{K = \frac{1}{2}\mu_n C_{ox}\frac{W}{L}}$$

Quindi, la formula della corrente di drain in generale, e quindi che vale nella zona di *triodo* è:

$$I_D = K\left[2(V_{GS} - V_{th})V_{DS} - {V_{DS}}^2\right]$$

la quale dipende sia dalla tensione di drain V_{DS}, che da quella di gate V_{GS}.
Invece, la corrente di drain nella zona di *saturazione* si ottiene per $V_{DS} = V_{GS} - V_{th}$, e quindi è pari a:

$$\boxed{I_D = K(V_{GS} - V_{th})^2} \quad \text{SATURAZIONE}$$

e questa dipende solo dalla tensione di gate V_{GS}.

Nella rete due porte equivalente del transistor NMOS in zona di saturazione, il parametro di transconduttanza vale:

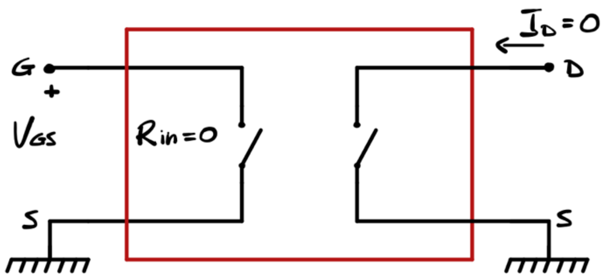
$$\boxed{G_M = K(V_{GS} - V_{th})^2}$$

Nella zona di triodo, a differenza della zona di saturazione, non si può parlare di una vera e propria funzione di trasferimento ingresso e uscita, perché il parametro di transconduttanza è funzione anche di V_{DS}.

La rete due porte equivalente è diversa in base alla zona di lavoro del transistor:

- Se il transistor lavora in zona di interdizione, ovvero la tensione $V_{GS} < V_{th}$, si ha che la corrente di drain è sempre nulla $I_D = 0$, e quindi la rete due porte equivalente è la seguente:

  Rete due porte equivalente di un transistor in zona di interdizione

- Se il transistor lavora in zona di triodo, ovvero valgono le relazioni $V_{GS} > V_{th}$ e $V_{DS} < V_{GS} - V_{th}$, si ha che la relazione tra drain e source, che è quella che si ha in uscita, è una funzione lineare identificata dalla legge di Ohm (come descritto dalla caratteristica $I_D - V_{DS}$). In particolare, si ha che la resistenza di canale è data da:

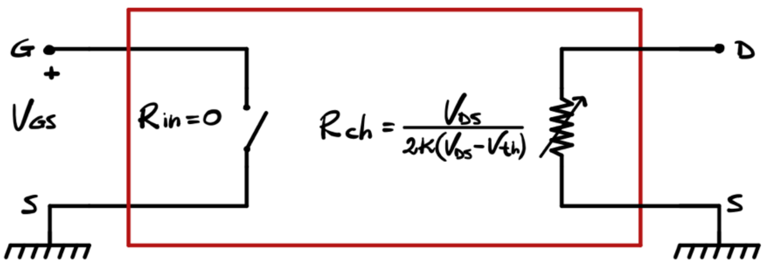
  $$\boxed{R_{ch} = \frac{V_{DS}}{I_{DS}} = \frac{V_{DS}}{K[2(V_{GS} - V_{th})V_{DS} - {V_{DS}}^2]}}$$

  dove I_{DS} è la corrente di drain nella zona di triodo. Dato che in questa zona di lavoro vale la condizione $V_{DS} \ll V_{GS} - V_{th}$, si ha che la relazione della resistenza di canale si può semplificare. Si ottiene quindi:

  $$\boxed{R_{ch} = \frac{V_{DS}}{I_{DS}} \approx \frac{1}{2K(V_{GS} - V_{th})}}$$

  Per cui, in uscita alla rete due porte c'è una resistenza variabile di valore R_{ch}:

  Rete due porte equivalente di un transistor in zona di triodo

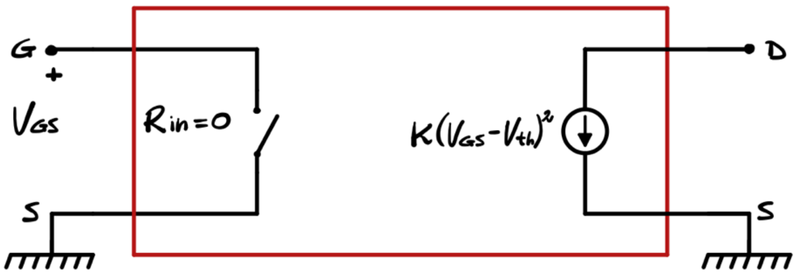
  

- Se il transistor lavora in zona di saturazione, ovvero valgono le relazioni $V_{GS} > V_{th}$ e $V_{DS} \geq V_{GS} - V_{th}$, si ottiene che la corrente di uscita è indipendente dalla tensione tra drain e source, ovvero I_D è indipendente da V_{DS}, e infatti nella caratteristica si ottiene un andamento costante della corrente al variare della tensione V_{DS}.
  Questo significa che, se si applica un carico tra drain e source, qualunque sia la tensione ai capi del carico, ovvero qualunque sia V_{DS}, la corrente che scorre sul carico è sempre la stessa. Questo comportamento è quello di un generatore di corrente. Quindi, quando il transistor lavora in zona di saturazione, in uscita si ha un generatore di corrente controllato in tensione, il cui valore è quello trovato in precedenza:

$$G_M = K(V_{GS} - V_{th})^2$$

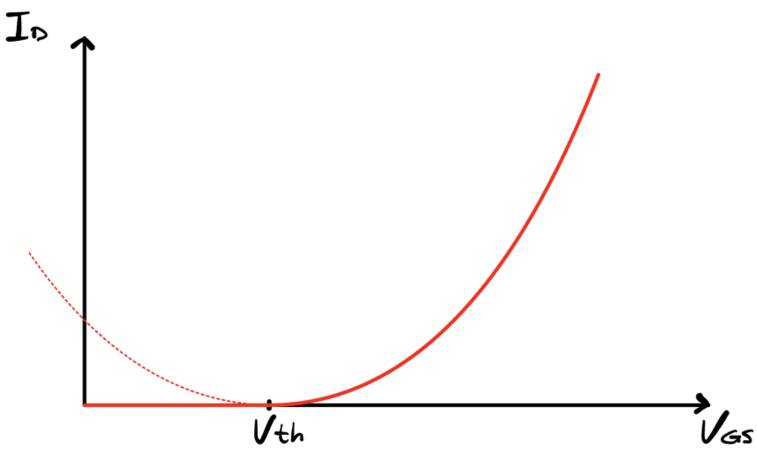
  Per cui, la rete due porte equivalente è la seguente:

Rete due porte equivalente di un transistor in zona di saturazione



Ogni volta che si analizza un circuito con un transistor, si può semplificare questo come una rete due porte assumendo a priori che valga una delle tre condizioni (interdizione, triodo o saturazione). Una volta completata l'analisi del circuito, bisogna verificare che i risultati trovati confermino le assunzioni fatte all'inizio e che quindi il transistor effettivamente sia nella zona di lavoro supposta.

Andando a graficare la funzione di trasferimento del transistor, ovvero la caratteristica $I_D - V_{GS}$, in zona di saturazione si ottiene una parabola (dato che l'andamento è quadratico), che però vale solo nella zona del piano in cui $V_{GS} \geq V_{th}$. Nella zona di piano in cui $V_{GS} < V_{th}$ la corrente è sempre nulla, perché il transistor è in interdizione:



Quindi, come abbiamo detto, il transistor in zona di saturazione si comporta in uscita come un generatore di corrente, ovvero applicando un carico R_L ai morsetti drain e source, la corrente che scorre su R_L è indipendente dal carico stesso.
Fino ad ora abbiamo descritto la caratteristica $I_D - V_{DS}$ in zona di saturazione come una costante, e questo significa che il generatore di corrente nella rete due porte equivalente è ideale (come nella figura della rete due porte sopra). In realtà, la corrente in zona di saturazione non è costante, ma varia linearmente con V_{DS}. In particolare, la corrente di drain in zona di saturazione è

$$I_D = K(V_{GS} - V_{th})^2$$

quindi, dipende da V_{GS}, ma dipende anche da K.

Il parametro K è:

$$K = \frac{1}{2}\mu_n C_{ox}\frac{W}{L}$$

e quindi dipende dalle dimensioni del transistor. La dimensione L del transistor è la lunghezza del canale (non la distanza tra drain e source), quindi se il canale è strozzato, la lunghezza L è minore della distanza tra drain e source.
Il canale si strozza sempre di più all'aumentare della tensione V_{DS} e, dato che la corrente non cambia perché è data da un generatore di corrente, V_{DS} aumenta all'aumentare di R_L.
Quindi, applicando un carico più alto, aumenta V_{DS} e, se il canale è in zona di strozzamento (è per forza in zona di strozzamento perché sta lavorando in zona di saturazione), diminuisce L, che fa aumentare K e che a sua volta fa aumentare la corrente di drain I_D.
Per questo motivo, la corrente di drain non è costante al variare della tensione V_{DS}, ma aumenta linearmente all'aumentare di questa.

Tutte le caratteristiche della corrente in zona di saturazione convergono verso un punto, chiamato *tensione di Early* V_A. La tensione di Early è segnata nel datasheet del transistor come

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{V_A}}$$

e la corrente di drain che tiene conto della tensione di Early segue la seguente legge:

$$\boxed{I_D = \frac{1}{2}\mu_n C_{ox}\frac{W}{L}(V_{GS} - V_{th})^2(1 + \lambda V_{DS})}$$

REALE

Quindi, se si considera un transistor reale, bisogna tenere conto del parametro λ, e nella rete due porte equivalente il generatore di corrente deve essere reale, e quindi deve avere in parallelo una resistenza di valore:

$$\boxed{r_o = \frac{1}{\lambda I_D} = \frac{|V_A|}{I_D}}$$

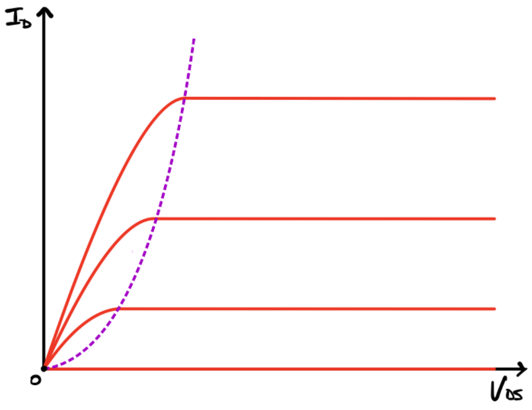
e la caratteristica $I_D - V_{DS}$ è quella in figura a destra.

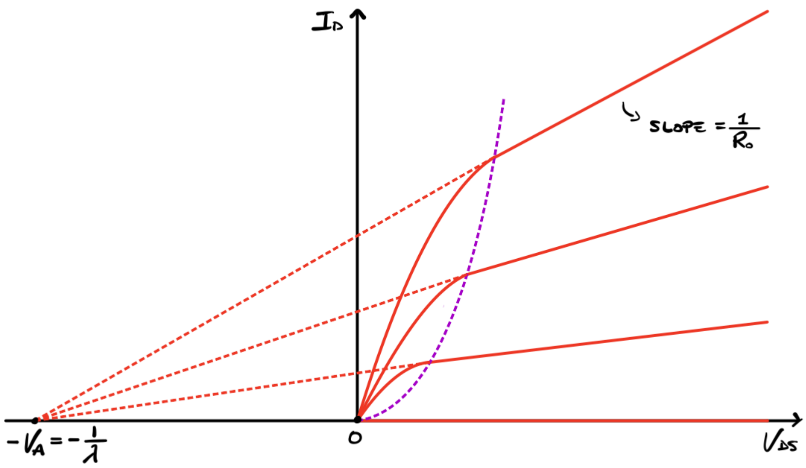
IDEALE

Se, invece, si considera un transistor ideale, la tensione di Early è considerata a $-\infty$, quindi $\lambda = 0$ e la corrente di drain segue la legge:

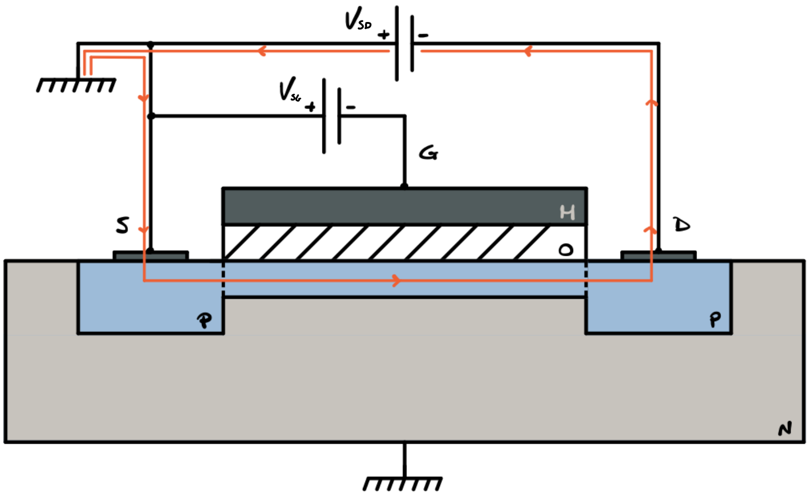
$$\boxed{I_D = \frac{1}{2}\mu_n C_{ox}\frac{W}{L}(V_{GS} - V_{th})^2}$$

e in questo caso, nella rete due porte equivalente bisogna considerare un generatore di corrente ideale, quindi senza nessuna resistenza in parallelo. Per un transistor ideale la caratteristica $I_D - V_{DS}$ è quella in figura a sinistra.



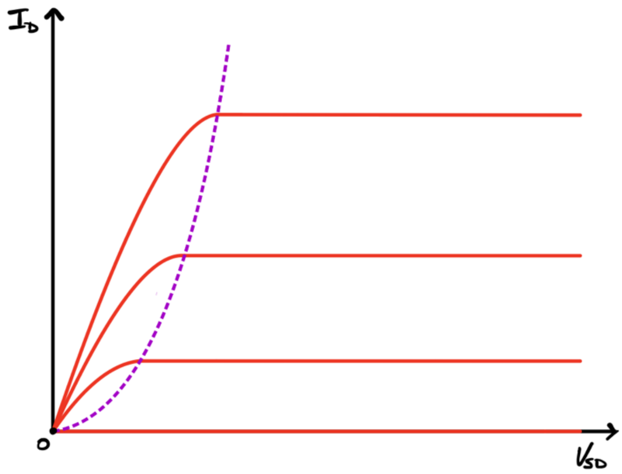


- Struttura fisica e funzionamento di un transistor PMOS ad arricchimento:



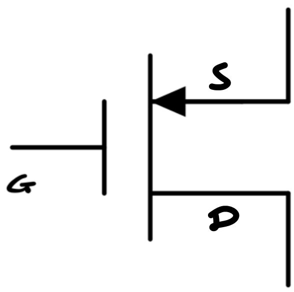
Un transistor PMOS è il complementare di un NMOS e funziona esattamente allo stesso modo. Il body è un silicio drogato di tipo n, mentre le isole di drain e source sono di tipo p.
Sul drain viene applicata una tensione negativa V_{DS} (o positiva V_{SD}), per far scorrere una corrente da source a drain.
Sul gate viene applicata una tensione negativa V_{GS} (o positiva V_{SG}), per creare un canale di tipo p tra le due isole drain e source. Il canale si crea perché sul gate c'è un accumulo di cariche negative, le quali attirano le cariche positive del body; superata una certa soglia, ovvero quando $V_{GS} < V_{th} < 0$, il campo elettrico che si forma tra gate e body e tanto forte da generare una zona di tipo p al di sotto dell'ossido, e quindi si crea il canale per il passaggio della corrente da source a drain. Quando la tensione di drain scende sotto una certa soglia, in particolare quando $V_{DS} \leq V_{GS} - V_{th}$, il canale inizia a strozzarsi.

Le caratteristiche $I_D - V_{DS}$, si hanno per tensioni di drain negative, ma se si considera $V_{SD} = -V_{DS}$, si hanno esattamente le stesse caratteristiche del transistor NMOS:



La corrente di drain è la stessa del caso dell'NMOS, ma scorre da source a drain e quindi ha segno opposto. Quindi nella legge bisogna invertire i segni, oppure usare le tensioni definite in modo opposto: V_{SG} e V_{SD}. In quest'ultimo caso, la legge è esattamente la stessa.

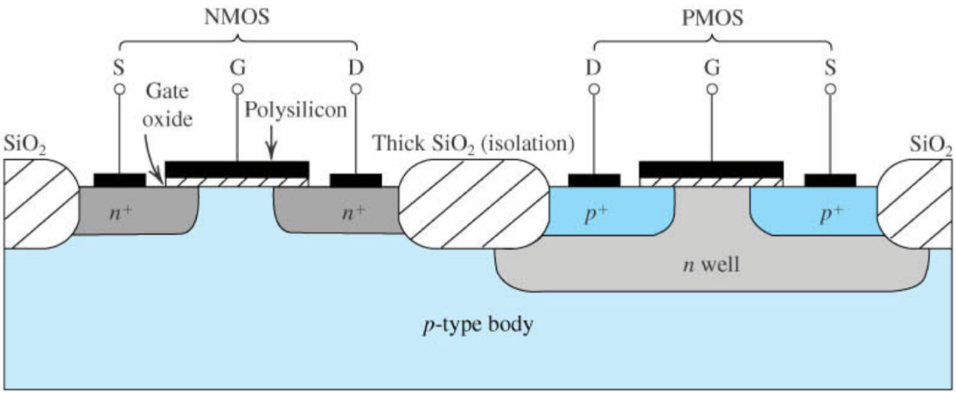
Il simbolo circuitale del transistor PMOS mette in evidenza come la corrente scorra da source a drain, invece che da drain a source (come nell'NMOS), ed è il seguente:



La corrente, in un transistor PMOS, è formata da lacune (al contrario dell'NMOS, dove era formata da elettroni).

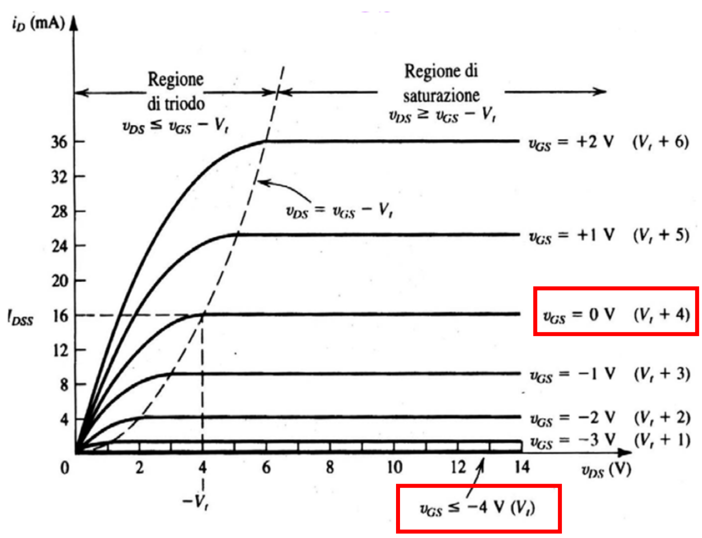
- Tecnologia CMOS:

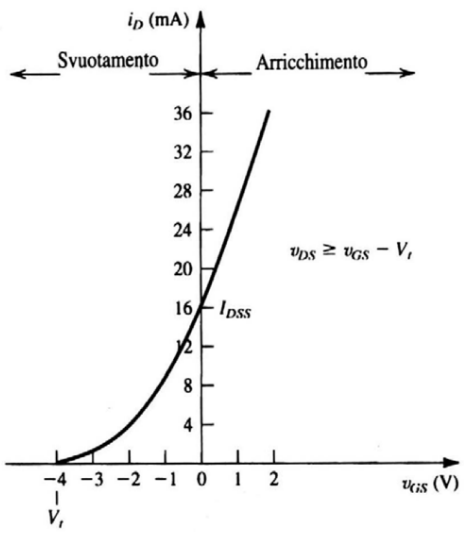
La tecnologia CMOS (complementary MOS) mette insieme i transistor di tipo NMOS e PMOS. Quasi la totalità dei circuiti reali è formata sia da transistor NMOS che PMOS.
Per fare questo, creano i transistor su un unico substrato di tipo p, e per fare i transistor PMOS sul substrato di tipo p, si va a creare un pozzo grande di tipo n che possa accogliere tutte le componenti di un singolo transistor.
Ogni transistor è poi isolato rispetto agli altri e tutti quanti hanno in comune solo il substrato di tipo n.



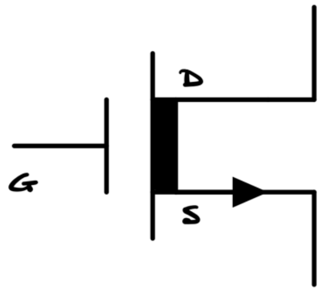
- Struttura fisica e funzionamento di un transistor MOS a svuotamento:

Un transistor MOS a svuotamento ha una struttura simile a quella di un transistor MOS ad arricchimento, ma il canale che collega le isole di drain e source è presente anche se non viene applicata nessuna tensione sul gate, ovvero il canale è creato al momento di costruzione, creando una zona di topo n (o di tipo p, in modo compatibile con le isole), tra le due isole. In questo modo, la corrente scorre anche se non è applicata una tensione sul gate, e per questo si dice che è un transistor *normalmente on*.
Applicando una tensione sul gate, si possono cambiare le condizioni di scorrimento della corrente. In particolare, nel caso di un transistor NMOS (speculare per un PMOS), se si applica una tensione positiva sul gate, le cariche di tipo n nel canale aumentano, quindi diminuisce la resistenza che esercita e aumenta la corrente di drain.
Al contrario, se si applica una tensione negativa sul gate, si allontanano le cariche di tipo n presenti nel canale e quindi si aumenta la resistenza che questo esercita, diminuendo la corrente di drain. Quando si raggiunge una certa soglia di tensione V_{GS}, si ha un inversione di tipo, ovvero il canale di tipo n preesistente diventa di tipo p, perché il campo elettrico generato dalla tensione di gate ha respinto tutte le cariche negative presenti nel canale, ed ha attratto le lacune del substrato.
La caratteristica $I_D - V_{DS}$ quindi non è nulla se la tensione $V_{GS} = 0$, ma diventa nulla se la tensione V_{GS} scende al di sotto di una certa soglia. Quindi, anche la caratteristica $I_D - V_{GS}$ è sempre una parabola (solo con un ramo), ma il vertice è spostato su tensioni negative.





Il simbolo circuitale di un transistor MOS a svuotamento è quello in figura, e mette in evidenza che il canale tra le isole drain e source è preesistente.

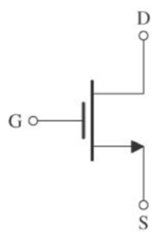
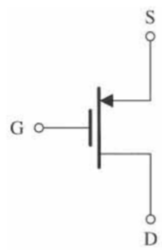
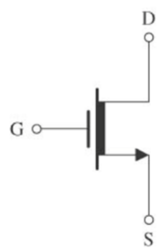
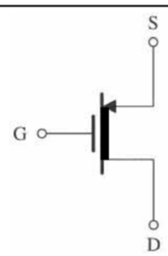


- I quattro tipi di transistor MOS:

In totale esistono quattro tipi di transistor MOS:

- NMOS ad arricchimento;
- NMOS a svuotamento;
- PMOS ad arricchimento;
- PMOS a svuotamento.

Si dice 'ad arricchimento' perché il canale tra drain e source non è preesistente, ma si crea attraverso l'applicazione di una tensione sul gate e quindi attraverso l'arricchimento di cariche negative (o positive) nella regione sottostante l'ossido.
Viceversa, si dice 'a svuotamento' perché il canale tra drain e source è preesistente e viene eliminato solo attraverso l'applicazione di una tensione sul gate e quindi attraverso lo svuotamento da cariche negative (o positive) nella regione sottostante l'ossido.

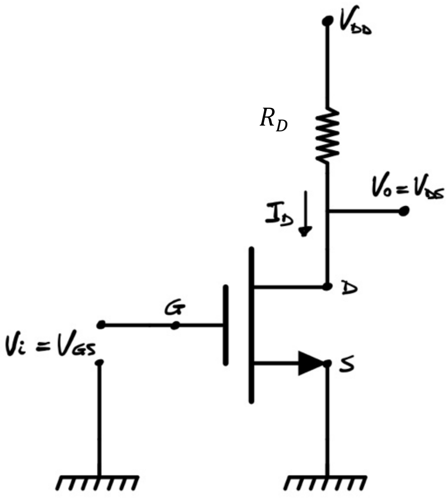
MOSFET	**A canale n NMOS**	**A canale p PMOS**
Ad arricchimento (enhancement-type)		
A svuotamento (depletion-type)		

- SCELTA TRA PMOS E NMOS:

Come visto per i diodi, la mobilità degli elettroni è circa tre volte maggiore di quella delle lacune: $\mu_n \approx 3\mu_p$. Quindi, a parità di struttura, un transistor NMOS ha il K più grande di uno PMOS e quindi la corrente di drain e maggiore.
Per compensare questo fatto, in un PMOS bisognerebbe aumentare la dimensione W, che è direttamente proporzionale al K, ma questo occupa area di chip. Per questo motivo, se si può scegliere tra PMOS e NMOS, si preferiscono gli NMOS.

- APPLICAZIONI TRANSISTOR:

Dato il seguente circuito trovare la transcaratteristica $V_o - V_i$.

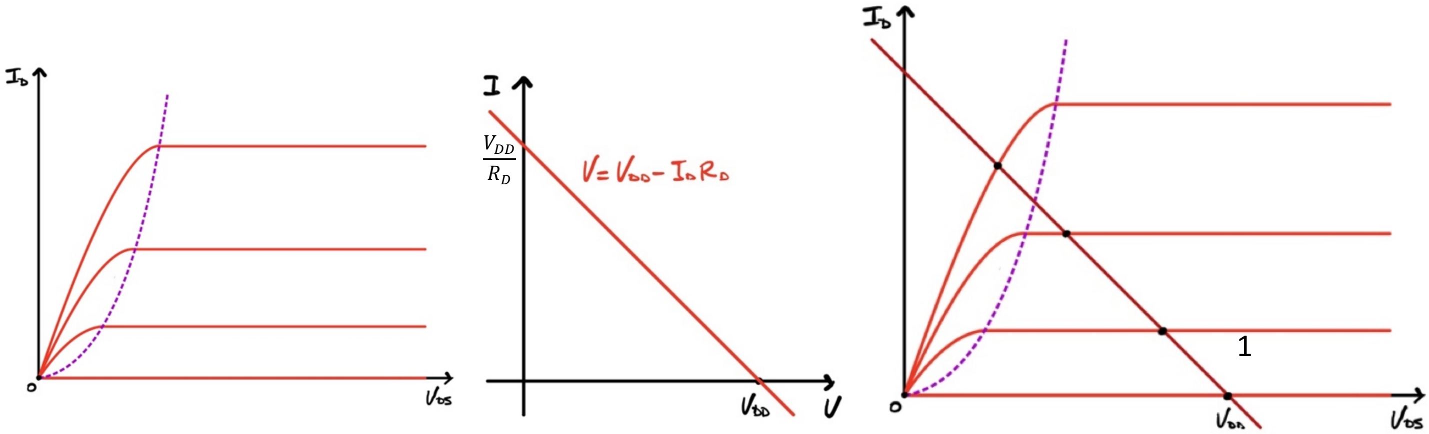


La tensione di ingresso è la tensione sul gate, mentre quella di uscita è la tensione sul drain.

Applicando l'equazione alla maglia per la tensione V_{DD} si ottiene:

$$V_{DD} = R_D I_D + V_{DS} \qquad \rightarrow \qquad V_{DS} = V_{DD} - R_D I_D$$

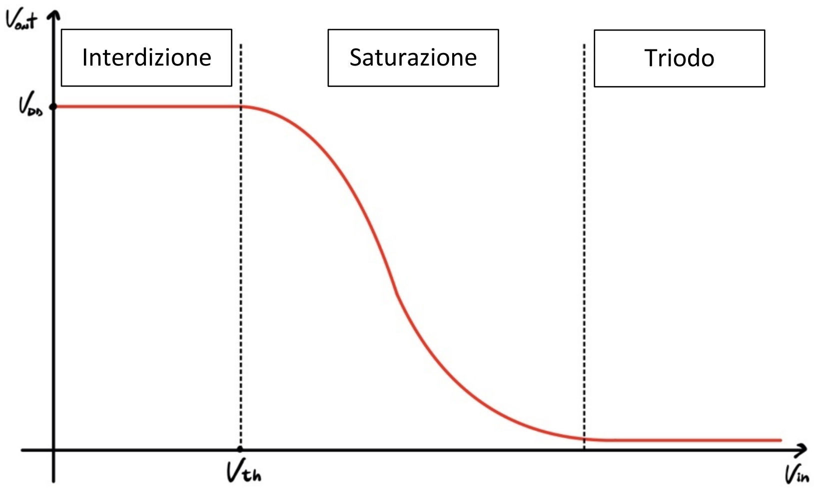
Il membro di destra è una funzione di I_D, ed anche V_{DS} è una funzione di I_D.
Il grafico del membro di destra è quello al centro ed è chiamata *retta di carico*, mentre quello della V_{DS} sono le caratteristiche classiche a sinistra. Mettendo insieme i due grafici si ottengono le soluzioni dell'equazione nei punti di intersezione (a destra).

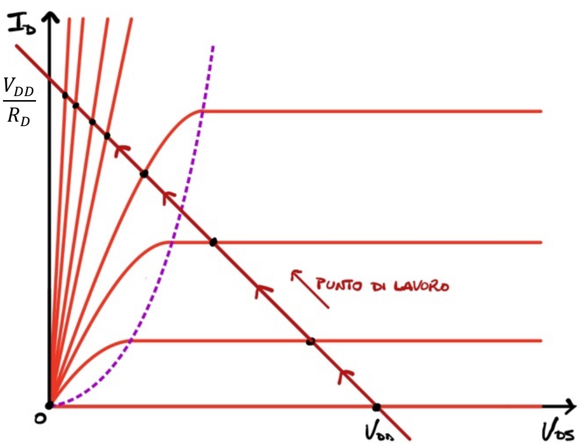


Attraverso il grafico a destra, analizzando i possibili valori della V_{GS} si può ricavare il grafico della transcaratteristica:

- se $V_i = V_{GS} = 0$: il transistor lavora in zona di interdizione, quindi il punto di lavoro è il punto 1. L'uscita è quindi pari a V_{DD}. Questo valore dell'uscita rimane costante fino a quando il transistor rimane in interdizione, ovvero fino a V_{th};
- All'aumentare dell'ingresso $V_i = V_{GS}$, i punti di lavoro del circuito si spostano a tensioni più basse e la tensione in uscita diminuisce. Questi fino a quando il transistor rimane in zona di saturazione;
- Quando la tensione di ingresso è tanto grande da portare il punto di lavoro nella zona di triodo, si ha che le caratteristiche diventano tutte molto simili e quasi verticali, quindi la tensione di uscita rimane pressoché costante.

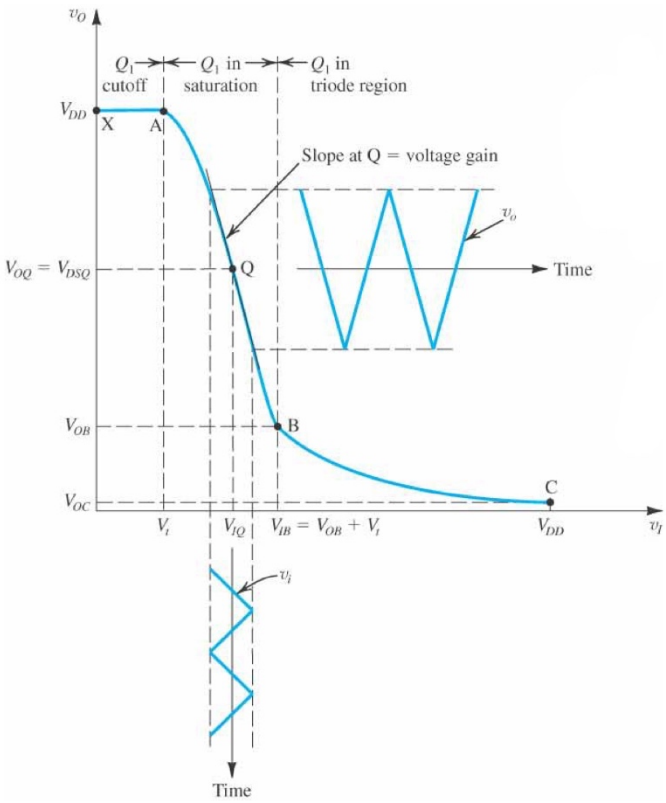
Quindi la transcaratteristica di questo circuito è la seguente (sx) in funzione del movimento del punto di lavoro (dx):





- TRANSISTOR COME AMPLIFICATORE:

La transcaratteristica trovata nell'esempio è simile a quella di un amplificatore.
Un amplificatore lavora tra due valori L^+ e L^-, che in questo caso si possono prendere pari rispettivamente a V_{DD} (tensione di alimentazione) e 0.
La pendenza nella zona centrale della transcaratteristica trovata rispecchia il guadagno dell'amplificatore, che nel caso di un transistor è un guadagno negativo.



Sappiamo che un amplificatore per poter amplificare non deve lavorare nelle sue zone di saturazione, che nel caso del transistor corrispondono alla zona di interdizione e triodo.
Quindi per poter utilizzare un transistor come amplificatore bisogna portarlo a lavorare nella sua zona di saturazione e per fare questo si usa una tensione di polarizzazione V_{GS} che sposta il punto di lavoro.

In particolare, se si ha in ingresso un certo segnale V_S sinusoidale con valor medio nullo, per portare il transistor a lavorare in zona di saturazione e quindi poterlo usare come amplificatore, bisogna polarizzare il segnale con una tensione costante in ingresso. Senza polarizzazione, il transistor si troverebbe in cutoff, ovvero in interdizione, mentre l'amplificatore corrispondente è in zona di saturazione e quindi non funziona.

- TRANSISTOR COME INVERTER (INTERRUTTORE):

Se non si polarizza il transistor portandolo in zona di saturazione, può essere utilizzato come inverter facendolo lavorare in zona di interdizione e triodo.
La tabella di verità di un inverter è quella in figura. Con zero e con uno si indicano rispettivamente la tensione più bassa e più alta presente nel circuito. Quindi in riferimento al circuito precedente, con zero si indicano $0\ V$ (massa), mentre con uno si indica V_{DD}, ovvero la tensione di alimentazione.

IN	OUT
0	1
1	0

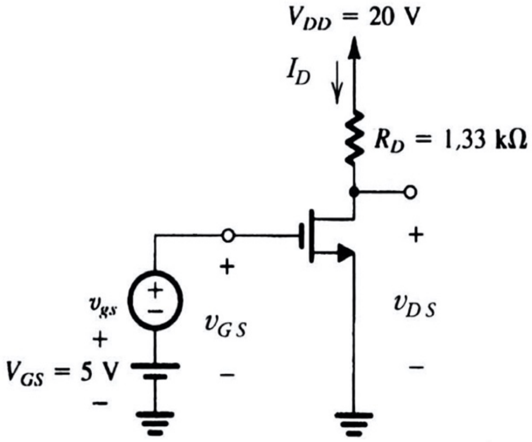
Quindi, se l'ingresso è zero, ovvero $V_{GS} = 0$, il transistor lavora in zona di interdizione, quindi non fa scorrere corrente. In pratica, tra drain e source c'è un circuito aperto, quindi non scorre corrente. La tensione di uscita, che è presa sul drain è pari proprio a V_{DD}, dato che la caduta di potenziale su R_D perché non scorre corrente.

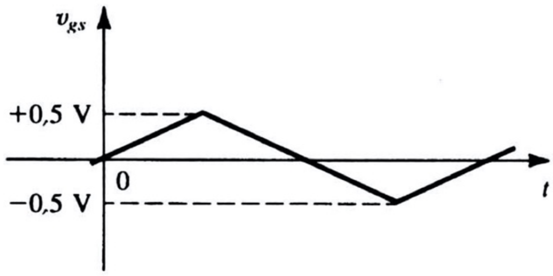
Al contrario, se l'ingresso è $V_{GS} = V_{DD}$, il transistor lavora in zona di triodo, quindi, tra drain e source è presente un canale resistivo di valore $R_{ch} = 1/2K(V_{GS} - V_{th})$. Quindi, quando l'ingresso è molto grande, il valore della resistenza del canale è praticamente nullo, e quindi il canale diventa un cortocircuito. Dato che il drain è cortocircuitato a massa, l'uscita, che è presa sul drain, è pari a $0\ V$.

Se si vuole utilizzare il transistor come inverter, che è un applicazione che si fa nei circuiti digitali dove si devono gestire i bit 0/1, non bisogna assolutamente far lavorare il transistor in zona di saturazione, perché ad un certo ingresso corrisponde un'uscita che non è né la massima, né la minima del circuito e quindi non si riesce a riconoscere il bit.
Bisogna invece farlo lavorare in zona di interdizione e triodo, così da sfruttarne le proprietà.

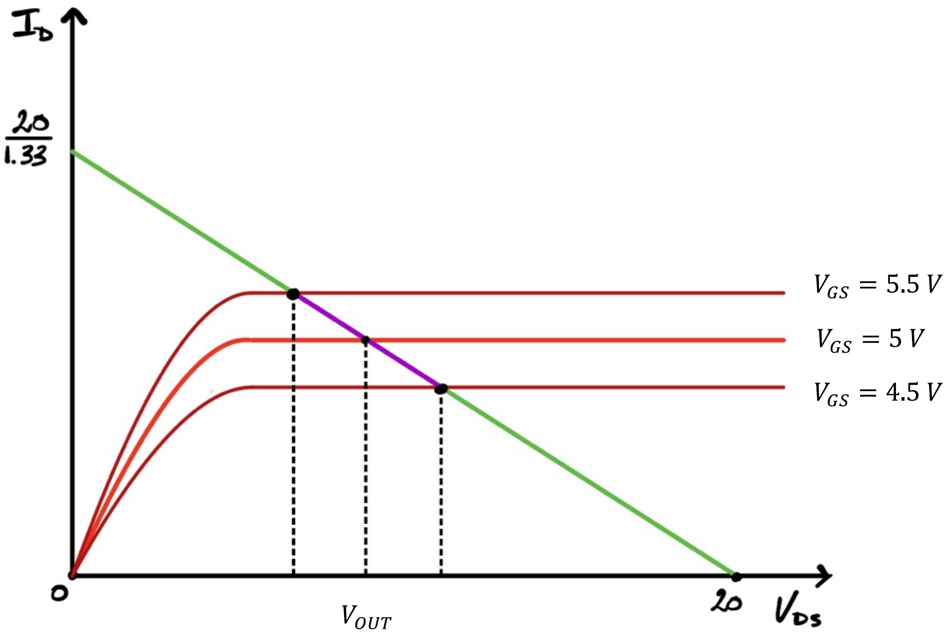
Esercizio:

Consideriamo il circuito in figura che è polarizzato con una tensione $V_{GS} = 5\ V$ ed ha in ingresso una tensione varabile $v_{gs} = \pm 0.5\ V$ (grafico). L'alimentazione del circuito è pari a $V_{DD} = 20\ V$ e la resistenza di drain è $R_D = 1.33\ k\Omega$.
La tensione di uscita è presa sul drain.





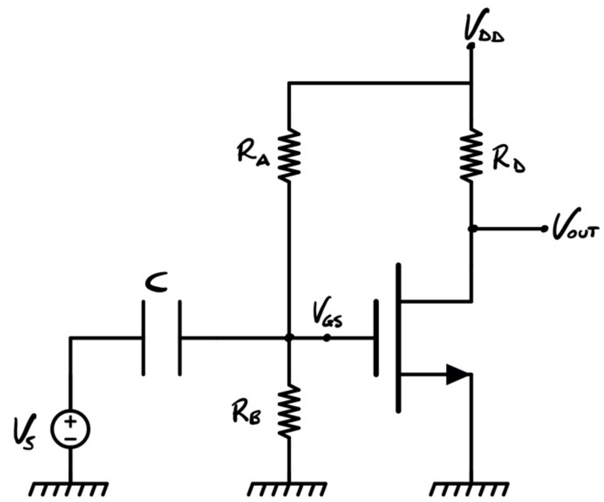
Dato che la V_{GS} è fissata a $5\ V$ dobbiamo considerare solo la caratteristica $I_D - V_{DS}$ per cui $V_{GS} = 5V$. La retta di carico interseca l'asse delle ascisse a $20\ V$ e quello delle ordinate a $(20/1.33)\ mA$.
Quando in ingresso arriva il segnale $v_{gs} = \pm 0.5\ V$, la caratteristica $I_D - V_{DS}$ si sposta in alto e in basso di $\pm 0.5\ V$ e quindi viene identificata una zona di lavoro sulla retta di carico:



- Polarizzazione di un transistor:

- POLARIZZAZIONE ATTRAVERSO UN RESISTORE R_S:

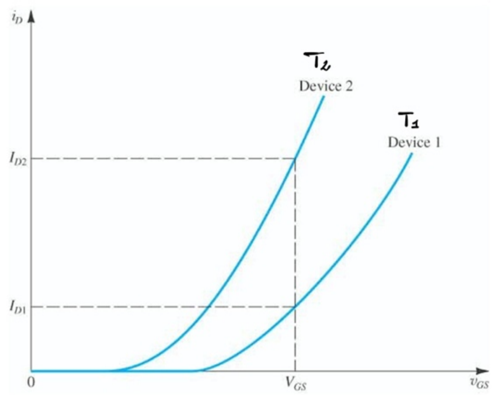
Per usare un transistor come amplificatore bisogna polarizzare l'ingresso così da portarlo a lavorare in zona di saturazione. Per polarizzarlo si può fare nel seguente modo.



Un metodo è inserire una batteria $V_{GS} = V_B$ (come nell'esercizio sopra, B=Bias) che ha un voltaggio costante. In alternativa, dato che nel circuito è già presente una batteria di alimentazione V_{DD}, si può usare questa tensione per la polarizzazione, impostando il circuito come in figura. Quindi si ottiene:

$$\rightarrow V_{GS} = V_B = V_{DD}\frac{R_B}{R_A + R_B}$$

A questo segnale si somma il segnale di ingresso V_S. Per evitare che il segnale in ingresso interferisca con la polarizzazione e sposti quindi il punto di lavoro, si mette un condensatore tra il segnale di ingresso e il transistor, così da filtrare le componenti costanti di V_S e mantenere solo quelle variabili nel tempo.

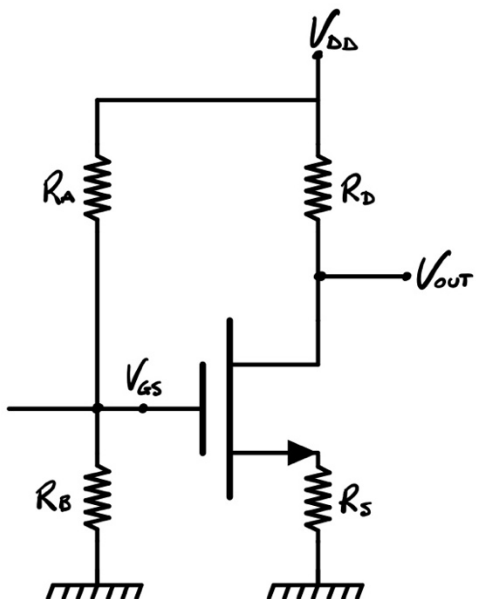


Questo tipo di circuito fissa la tensione V_{GS} ai capi del transistor, indipendentemente da dove sta lavorando dato che la corrente di gate è sempre nulla (quindi la corrente che scorre in R_A è la stessa che scorre in R_B e vale la regola del partitore di tensione).

Quindi, dopo aver fissato la tensione V_{GS}, si ottiene un certo punto di lavoro per il transistor imponendo la corrente in zona di saturazione $I_D = K(V_{GS} - V_{th})^2$. Però se varia la temperatura variano anche le condizioni di lavoro del transistor (perché varia il K e la V_{th}) e quindi, anche se si applica sempre la stessa polarizzazione V_{GS}, si ottengono punti di lavoro diversi. Questo può accadere in un circuito con miliardi di transistor tutti nominalmente uguali, ma che lavorano a temperature leggermente diverse. Questo deriva da fatto che la V_{GS} è indipendente dalle condizioni di lavoro e quindi comporta un'instabilità del punto di lavoro.

Per risolvere questa instabilità si può usare una retroazione negativa. Per fare questo è sufficiente introdurre una resistenza R_S dopo il source. In questo modo si ottiene:

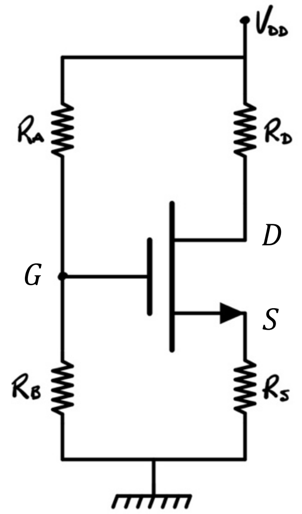
$$\rightarrow V_{GS} = V_B = V_G - V_S = V_{DD}\frac{R_B}{R_A + R_B} - I_D R_S$$



dove V_G e V_S sono rispettivamente le tensioni sul gate e sul source (finora V_S non è stata esplicitata perché il source era connesso direttamente a massa). Si ha che $V_S = I_D R_S$, ovvero è uguale alla caduta di potenziale sulla resistenza R_S, grazie allo scorrimento della corrente I_D.
In questo modo, se per qualsiasi motivo (es temperatura) aumenta I_D, si ha che V_{GS} diminuisce e quindi, essendo $I_D = K(V_{GS} - V_{th})^2$, diminuisce anche I_D che si ristabilizza.
Quindi, la resistenza R_S esegue una retroazione negativa stabilizzando il circuito. In questo modo la corrente, e di conseguenza il punto di lavoro, rimangono stabili e il transistor lavora sempre al centro della dinamica nella zona di saturazione (in base a dove V_{GS} posiziona il punto di lavoro).

Esercizio:

Per il seguente circuito calcolare il valore massimo di R_D che mantiene il transistor MOS in zona di saturazione. Sappiamo che $V_T = 1\,V$ e $K = 1\,mA/V^2$, $R_A = 20\,k\Omega$, $R_B = 30\,k\Omega$, $R_S = 1\,k\Omega$, $V_{DD} = 5\,V$.



Possiamo calcolare il potenziale sul gate seguendo la regola del partitore di tensione:

$$V_G = V_{DD}\frac{R_B}{R_A + R_B} = 3\,V$$

Applicando l'equazione alla maglia tra gate e source, si ottiene:

$$V_G = V_{GS} + I_D R_S$$

Avendo due incognite è necessario trovare un'altra equazione. Dato che l'ipotesi iniziale è che il transistor lavori in zona di saturazione, l'altra equazione è quella della corrente di drain in zona di saturazione:

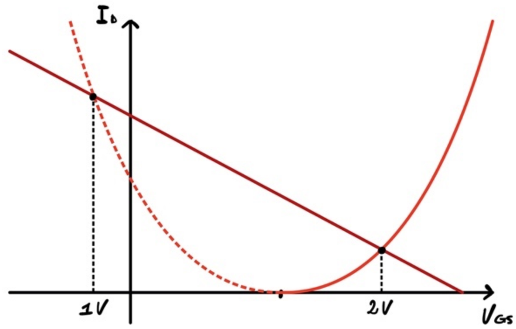
$$I_D = K(V_{GS} - V_{th})^2$$

Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} V_G = V_{GS} + I_D R_S \\ I_D = K(V_{GS} - V_{th})^2 \end{cases}$$

si ottiene $V_{GS} = 2\,V$ e $V_{GS} = -1\,V$.

Per avere che il transistor sia saturo, è necessario soddisfare le relazioni $V_{GS} > V_{th}$ e $V_{DS} \geq V_{GS} - V_{th}$. La soluzione $V_{GS} = -1\,V$ non è accettabile perché con questa tensione il transistor è sicuramente spento, ovvero è in zona di interdizione. Quindi: $V_{GS} = 2\,V$. Infatti, graficamente si ottiene il risultato in figura, dove la retta $V_G = V_{GS} + I_D R_S$ interseca in due punti la parabola $I_D = K(V_{GS} - V_{th})^2$, ma sappiamo che il ramo sinistro di questa parabola non deve essere considerato perché non soddisfa la condizione $V_{GS} > V_{th}$ e quindi il transistor si trova in zona di interdizione.



Con $V_{GS} = 2\,V$ il transitor non è sicuramente in interdizione, ma può essere sia in saturazione che in triodo. La condizione di saturazione è determinata dalla tensione tra drain e source V_{DS}, che deve soddisfare la seguente equazione $V_{DS} \geq V_{GS} - V_{th}$.
La tensione V_{DS} si può ricavare analizzando la maglia che collega V_{DD} a massa attraverso drain e source. Si ottiene:

$$V_{DS} = V_{DD} - I_D(R_D + R_S)$$

dato che la corrente che scorre sulla resistenza di drain è la stessa che scorre su quella di source. Sostituendo i numeri si ricava:

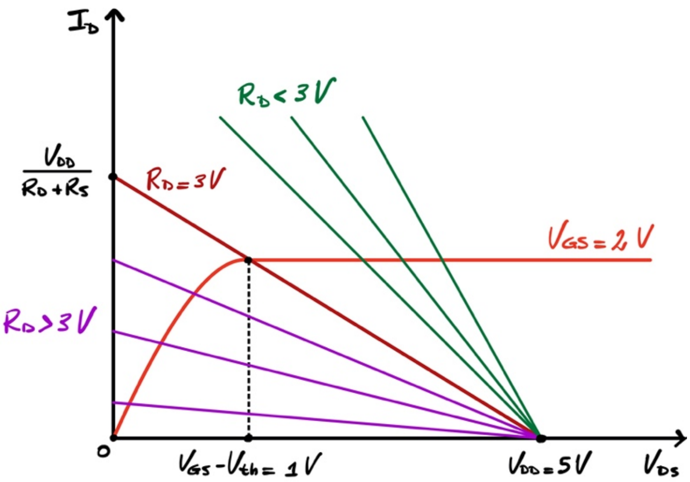
$$V_{DS} = 5\,V - 1\,mA\,(R_D + 1\,k\Omega)$$

Per avere il transistor in saturazione, questa equazione deve soddisfare:

$$V_{DS} = 5\,V - 1\,mA\,(R_D + 1\,k\Omega) \geq V_{GS} - V_{th} = 1\,V$$

Quindi si ricava:

$$R_D = 3\,k\Omega$$



che è il valore massimo di R_D per cui il transistor di mantiene in zona di saturazione.

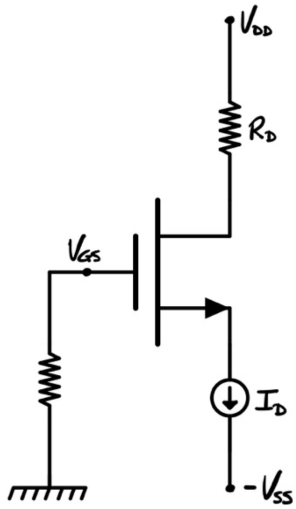
Osserviamo che il valore di V_G non dipende dal valore assoluto delle resistenze R_A e R_B, infatti se invece di utilizzare $R_A = 20\ k\Omega, R_B = 30\ k\Omega$, si fossero utilizzate $R_A = 2\ k\Omega$, $R_B = 3\ k\Omega$, il risultato della V_G era esattamente lo stesso.

Il motivo per cui in alcuni casi bisogna utilizzare delle resistenze così grandi è perché l'obiettivo si questa analisi è utilizzare il transistor MOSFET come amplificatore, e quindi ha una rete due porte equivalente con delle impedenze di ingresso e uscita che dipendono dalle quattro resistenze del circuito visto. In particolare, l'impedenza di ingresso dipende al parallelo di R_A e R_B e quindi, se si utilizzano delle resistenze troppo basse, si potrebbe ottenere un'impedenza di ingresso troppo bassa per utilizzarla in un'applicazione di un amplificatore.
Infatti, in una rete due porte con in ingresso un segnale V_{in}, si ha che questo segnale ha una sua resistenza interna, ma l'obbiettivo è farlo entrare tutto nella rete due porte evitando la partizione tra la resistenza del segnale e quella di ingresso della rete due porte. Per fare questo è necessario fare l'impedenza di ingresso della rete più grande possibile.

Quindi, il rapporto tra R_A e R_B determina il valore della polarizzazione V_G del circuito, mentre il loro valore assoluto determina il valore dell'impedenza di ingresso della rete due porte equivalente.

Inoltre, utilizzando una batteria V_{DD}, se le resistenze sono troppo piccole, la corrente che scorre su queste è grande e quindi sarà grande la potenza da dissipare $P = V\,I$, ed è quindi richiesta maggiore batteria e sistemi di raffreddamento. Bisogna quindi trovare il giusto compromesso per le resistenze del circuito per garantire condizioni di lavoro ottimali per il transistor come amplificatore.

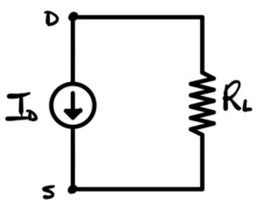
- POLARIZZAZIONE ATTRAVERSO UN GENERATORE DI CORRENTE:



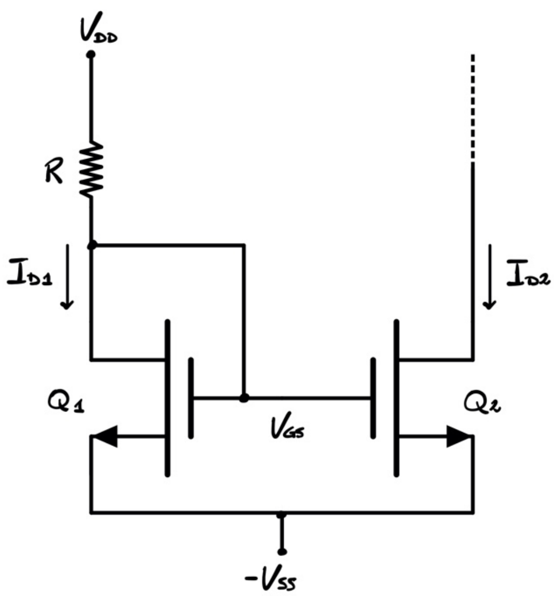
L'obiettivo della polarizzazione è fissare i valori di I_D, V_{GS} e V_{DS}. Nell'approccio precedente si sceglieva un certo valore di V_{GS} che portava ad avere un certo valore di I_D, dato che la relazione che lega queste due grandezze e proprio quella della corrente di drain in saturazione:

$$I_D = K(V_{GS} - V_{th})^2$$

Specularmente si può fissare un valore di I_D per avere un determinato valore di V_{GS} e quindi ottenere un certo punto di lavoro per il transistor. Per fissare una correte si utilizza un generatore di corrente, che nel nostro caso deve essere posto come in figura dato che su quel ramo scorre solo la corrente di drain, che è appunto quella da fissare.



Come già visto, un generatore di corrente è un circuito, realizzabile ad esempio con degli amplificatori operazionali.
Si può realizzare un generatore di corrente anche con un transistor, infatti in zona di saturazione la corrente è costante come è possibile vedere nella caratteristica $I_D - V_{DS}$, quindi se si porta a lavorare il transistor in saturazione, applicando un carico R_L tra drain e source, qualunque sia il valore di R_L la corrente che scorre nel carico è sempre I_D. Quello che dipende dal carico è la differenzia di potenziale ai capi di drain e source $V_{DS} = I_D R_L$.



Quindi, in generale, se si porta a lavorare il transistor in zona di saturazione può essere utilizzato come generatore di corrente, dove quindi la corrente I_D rimane sempre costante e quello che può variare è V_{DS}.

Per fare questo, si utilizzano i *circuiti a specchio di corrente* dove due transistor vengono accoppiati.

Lo schema è quello in figura, dove si hanno due transistor Q_1 e Q_2 che hanno sempre la V_{GS} in comune, ovvero i gate e i source sono circuitati. Inoltre, il transistor Q_1 ha il gate cortocircuitato con il drain.

Questo perché un transistor che ha gate e drain cortocircuitati tra loro, ha $V_{GS} = V_{DS}$ e quindi lavora per forza in zona di saturazione (se $V_{GS} > V_{th}$) dato che è sempre soddisfatta l'equazione $V_{DS} \geq V_{DS} - V_{th}$.

Quindi, il transistor Q_1 è sempre in zona di saturazione. Conoscendo la tensione V_{DD} e la resistenza R si può fissare la corrente che scorre nel transistor Q_1, dato che $I_{D1} = V_{DD}/R$.

In questo modo, il transistor Q_1 si comporta da generatore di corrente e in particolare si ha:

$$\boxed{I_{D1} = K_1(V_{GS1} - V_{th1})^2}$$

Per come è costruito il circuito, si ha che:

$$\boxed{V_{GS1} = V_{GS2} = V_{GS}^*}$$

quindi, la corrente di drain che scorre sul transistor Q_2 è data da:

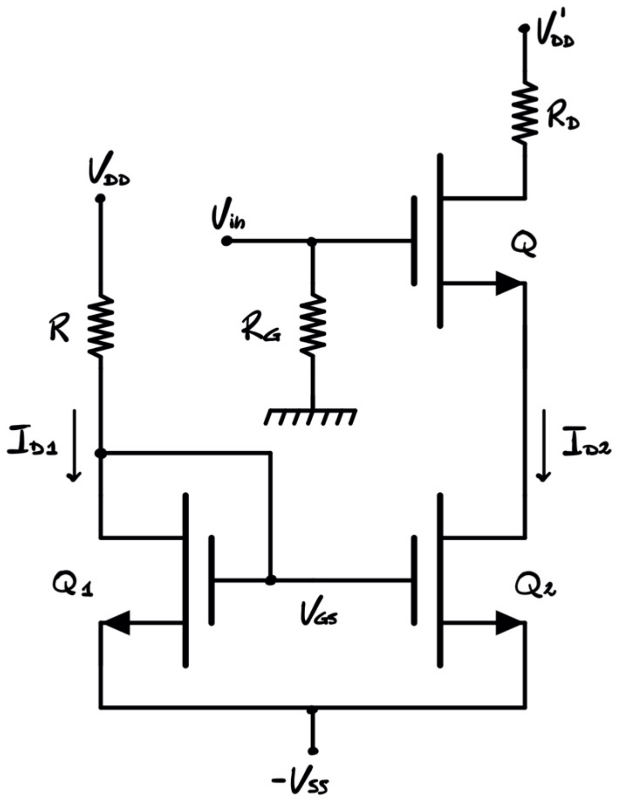
$$\boxed{I_{D2} = K_2(V_{GS}^* - V_{th})^2}$$

e questa corrente è determinata esclusivamente da transistor Q_1.

Quindi, qualsiasi carico si applica sul ramo che porta al drain di Q_2, si ottiene che su quel carico scorre sempre la corrente I_{D2}. Quindi, su quel ramo viene connesso il source del transistor che servirà da amplificatore, così da fissare la sua corrente di drain a I_{D2} e quindi da fissarne la tensione V_{GS} e il punto di lavoro.

Osserviamo che in generale, le due correnti I_{D1} e I_{D2} sono quasi sempre uguali (correnti specchio) a meno che le dimensioni dei due transistor siano diverse e quindi sia diverso il K. Gli altri parametri si considerano uguali perché si suppone che i transistor (come sempre) siano costruiti sullo spesso chip, ovvero utilizzino gli stessi materiali e abbiano l'ossido e il substrato in comune e quindi dello stesso spessore.

Quindi, il circuito che si ottiene è quello in figura. Tra drain e source del transistor Q scorre la corrente I_{D2} che fissa una tensione V_G (del transistor Q). Per avere una tensione sul gate bisogna però avere una caduta di potenziale e quindi bisogna connette il gate a massa attraverso una resistenza R_G. Adesso, la tensione $V_G = I_G R_G$, ma essendo $I_G = 0$ sempre, si ottiene $V_G = 0$, qualunque sia la condizione del circuito.
Può sembrare che la presenza di R_G sia inutile, invece è necessaria perché su quel ramo arriva il segnale di ingresso e quindi R_G è l'impedenza di ingresso che vede il segnale. Se questa fosse nulla (ovvero il gate fosse connesso a massa senza una resistenza intermedia) il segnale in ingresso vedrebbe un'impedenza di ingresso nulla e quindi non riuscirebbe ad entrare nel transistor.

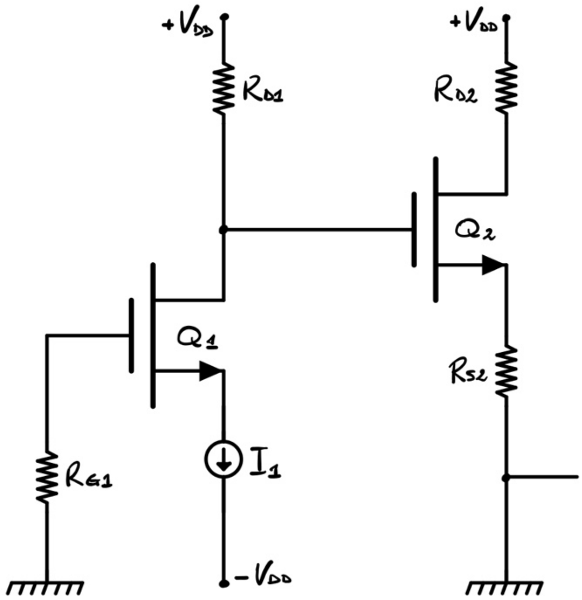


Essendo $V_G = 0$ sempre, ed essendo $V_{GS} = V_G - V_S$, si ha che la tensione V_S deve essere negativa, affinché sia soddisfatta la relazione $V_{GS} > V_{th}$. Per questo motivo, bisogna utilizzare un'alimentazione duale, ovvero una tensione positiva V_{DD} e una tensione negativa (al posto della massa) $-V_{SS}$. In questo modo, il source si può posizionare ad una tensione negativa e quindi transistor può soddisfare la condizione $V_{GS} > V_{th}$. Se non si usasse una tensione negativa, non si riuscirebbe a polarizzare il circuito.

(Nota: V_{DD} e V'_{DD} sono segnate in questo modo perché potrebbero essere diverse, ma non è detto).

Esercizio

Calcolare lo stato di polarizzazione (V_{GS}, I_D, V_{DS}) dei due transistor nel circuito in figura. I valori noti sono i seguenti:
$V_{th1} = 1V, K_1 = 0.5\ mA/V^2$, $V_{th2} = 1V, K_2 = 1\ mA/V^2$,
$I_1 = 2\ mA$, $V_{DD} = 5\ V$, $R_{G1} = 10\ k\Omega$, $R_{D1} = 1\ k\Omega$, $R_{S2} = 1\ k\Omega$, $R_{D2} = 2\ k\Omega$, $R_L = 2\ k\Omega$.



L'ipotesi iniziale è che i transistor stiano lavorando in zona di saturazione (tale ipotesi poi va verificata alla fine).

Dato che sul ramo di source di Q_1 è collegato un generatore di corrente, si ottiene:

$$I_{D1} = I_1 = 2\ mA$$

Se Q_1 è in saturazione, si ha $I_{D1} = K_1(V_{GS1} - V_{th1})^2$, da cui:

$$V_{GS1} = 3\ V \quad \text{o} \quad V_{GS1} = -1V$$

Sappiamo che $V_{GS1} = V_{G1} - V_{S1}$. Per come è connesso il circuito, si ottiene $V_{G1} = 0$, dato che $I_{G1} = 0$ sempre. Quindi si ottiene:

$$V_{S1} = -3\ V$$

Questo è possibile perché sul transistor Q_1 è applicata una tensione duale, che varia tra $\pm\ 5\ V$. Quindi, la tensione in qualsiasi punto del circuito può (potenzialmente) assumere qualsiasi valore compreso tra $\pm\ 5\ V$.

Dato che la corrente che scorre tra il drain e il source di Q_1 è sempre I_{D1}, si può applicare l'equazione alla maglia per trovare V_{DS1}:

$$V_{DS1} = V_{D1} - V_{S1} = (V_{DD} - I_{D1}R_{D1}) - (-\ 3\ V) = \ 6\ V$$

Quindi, il transistor Q_1 è polarizzato con i valori $V_{GS1} = 3\ V$, $V_{DS1} = 6\ V$ e $I_{D1} = 2\ mA$.

Per quando riguarda il transistor Q_2, abbiamo che conosciamo sicuramente la tensione sul gate, dato che è la stessa del drain del transistor Q_1:

$$V_{G2} = V_{D1} = V_{DD} - I_{D1}R_{D1} = 3\ V$$

L'equazione alla maglia di ingresso di Q_2, ovvero quella che connette gate e source è:

$$V_{G2} = V_{GS2} - V_{S2} = V_{GS2} - I_{D2}R_{S2}$$

Supponendo che il transistor Q_2 è in saturazione, si ha $I_{D2} = K_2(V_{GS2} - V_{th2})^2$, da cui, risolvendo il sistema seguente:

$$\begin{cases} V_{GS2} - I_{D2}R_{S2} = 3\ V \\ I_{D2} = K_2(V_{GS2} - V_{th2})^2 \end{cases}$$

si ottiene $V_{GS2} = \pm 2\ V$, dato che la tensione di soglia è $V_{th2} = 1\ V$, l'unica soluzione accettabile è $V_{GS2} = 2\ V$.
Quindi posso calcolare la corrente I_{D2} che viene pari a:

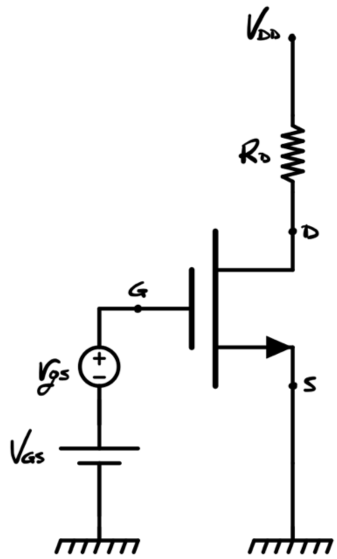
$$I_{D2} = \frac{3\ V -\ V_{GS2}}{R_{S2}} = 1\ mA$$

Conoscendo la corrente I_{D2}, si può applicare l'equazione alla maglia per trovare V_{DS2}:

$$V_{DS2} = V_{D2} - V_{S2} = (V_{DD} - I_{D2}R_{D2}) - (I_{D2}R_{S2}) = \ 2\ V$$

Quindi, il transistor Q_2 è polarizzato con i valori $V_{GS2} = 2\ V$, $V_{DS2} = 1\ V$ e $I_{D2} = 1\ mA$.

- Transistor MOSFET come amplificatore:



Come abbiamo visto, un transistor MOSFET può essere utilizzato come amplificatore se il punto di lavoro viene posto nella zona di saturazione attraverso una polarizzazione.
La polarizzazione, come visto, può avvenire in diversi modi, ma in sostanza consiste nel mettere in ingresso al gate un segnale costante V_{GS} che sposta il punto di lavoro nella zona desiderata.
La tensione sul gate diventa quindi somma di due componenti, una costante per la polarizzazione V_{GS} e una variabile che è quella del segnale in ingresso al transistor v_{gs}:

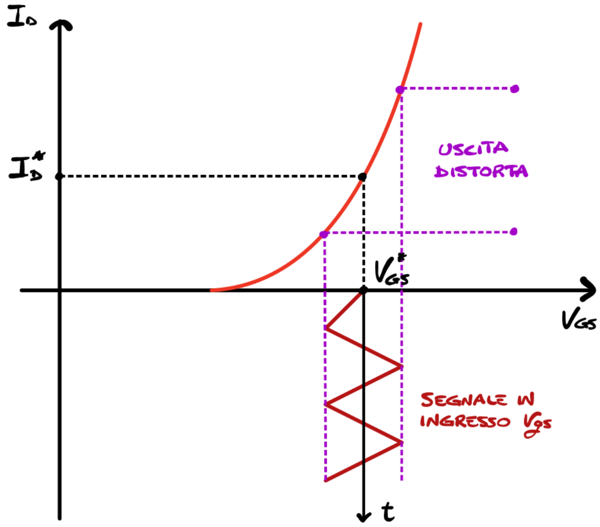
$$v_{GS} = V_{GS} + v_{gs}$$

Osservazione sulla notazione (usando come esempio v_{GS}): una componente elettrica che contiene al suo interno sia delle componenti costanti che variabili nel tempo si indica nel seguente modo: v_{GS}.
Una componente elettrica costante nel tempo si indica nel seguente modo: V_{GS}.
Una componente elettrica variabile nel tempo si indica nel seguente modo: v_{gs}.

Il problema di utilizzare un transistor come amplificatore sta nel fatto che la funzione di trasferimento di un MOSFET (tanscaratteristica $I_D - V_{DS}$) è una parabola, e di conseguenza il segnale v_{gs} ingesso sarà distorto in uscita.

Infatti, l'uscita (nel circuito in figura) è $v_o = V_{DD} + I_D R_D$, e la corrente di drain in zona di saturazione è una parabola descritta dalla legge:

$$I_D = K(V_{GS} - V_{th})^2$$



(senza tener contro del segnale di ingresso). Quindi, il punto di lavoro del transistor è dato da un certo valore di $V_{GS} = V_{GS}^*$ che corrisponde ad un certo valore di $I_D = I_D^*$ sulla parabola.
Quando in ingresso arriva il segnale v_{gs}, questo avrà una certa ampiezza (supponiamo sia un segnale triangolare) che andrà a riflettersi sulla parabola. Maggiore è l'ampiezza del segnale e maggiore è la zona di parabola che corrisponderà all'uscita del segnale. Essendo, però, la parabola una funzione non lineare, l'uscita viene distorta rispetto all'ingresso, perché non tutti i punti vengono amplificati allo stesso modo.

Questa distorsione è trascurabile solo nel caso in cui l'ampiezza del segnale sia sufficientemente piccola da riflettersi sua una zona di parabola che diventerebbe approssimabile attraverso una retta.
Per capire quando l'approssimazione è applicabile, bisogna analizzare la corrente di drain.

La corrente di drain (tenendo conto sia di componenti costanti che variabili) è data da:

$$i_D = I_D + i_d = K(v_{GS} - V_{th})^2$$

Sostituendo $v_{GS} = V_{GS}^* + v_{gs}$ nella legge della corrente, si ottiene:

$$i_D = K(V_{GS}^* + v_{gs} - V_{th})^2 = K[(V_{GS}^* - V_{th}) + v_{gs}]^2$$

Sviluppando il quadrato si ottiene:

$$\boxed{i_D = K(V_{GS}^* - V_{th})^2 + 2K(V_{GS}^* - V_{th})\, v_{gs} \ + \ Kv_{gs}^2}$$

Questa è la corrente totale nel circuito, data dalla somma delle componenti costanti e variabili.

La prima parte della formula ($K(V_{GS}^* - V_{th})^2$) è quella costante nel tempo (che già avevamo visto). L'ultima parte (Kv_{gs}^2) è quella che crea la distorsione, in uscita.
Quindi, si può trascurare la distorsione in uscita solo se questa componente è trascurabile, ovvero è molto più piccola delle altre due.
In particolare, se $2K(V_{GS}^* - V_{th})\, v_{gs} \gg Kv_{gs}^2$, ovvero:

$$v_{gs} \ll 2(V_{GS}^* - V_{th}) \qquad \boxed{\text{Condizione di piccolo segnale}}$$

si può trascurare il termine Kv_{gs}^2 nella formula della corrente di drain.

Quindi, se vale la condizione di piccolo segnale, ovvero l'ampiezza del segnale è molto minore di $2(V_{GS}^* - V_{th})^2$, allora si può approssimare la corrente di drain come lineare:

$$\begin{cases} v_{gs} \ll 2(V_{GS}^* - V_{th})^2 \\ i_D = I_D^* + i_d = K(V_{GS}^* - V_{th})^2 + 2K(V_{GS}^* - V_{th})\, v_{gs} \end{cases}$$

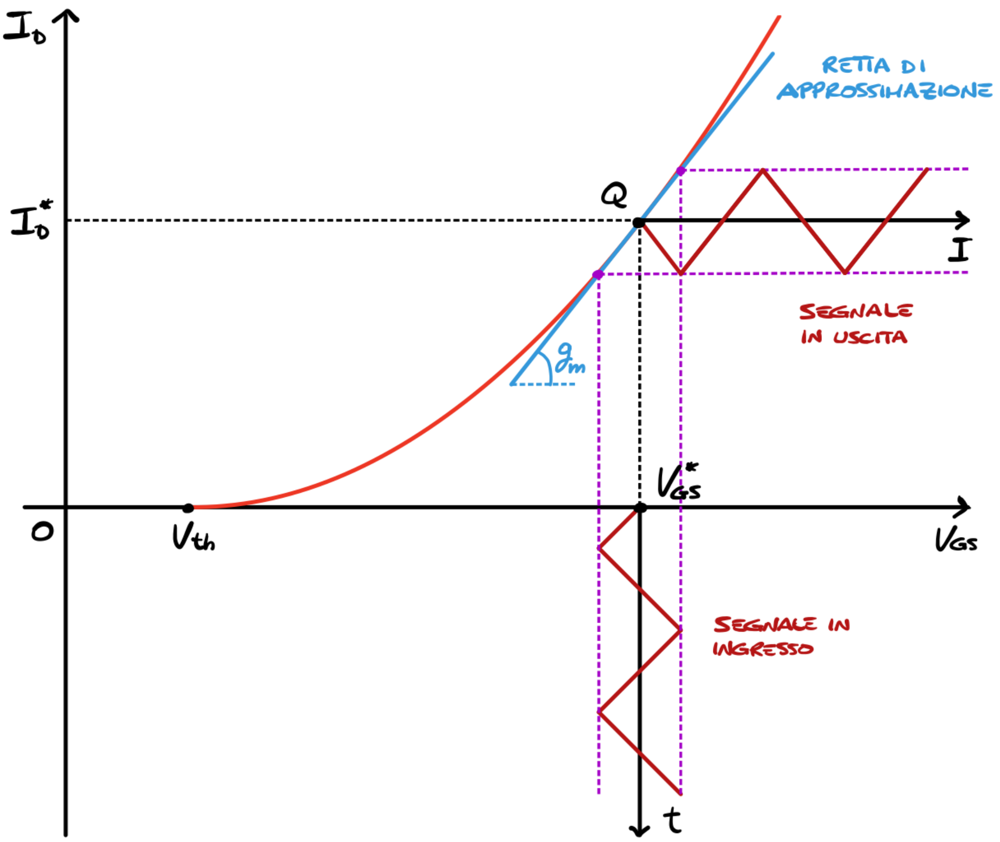
Un transistor MOSFET può essere approssimato con un dispositivo che ha una funzione di trasferimento lineare solo se i segnale che arrivano in ingresso al transistor soddisfano la condizione di piccolo segnale.

La corrente di drain, sotto la condizione di piccolo segnale, può essere riscritta trattando la componente i_d come la tensione di ingresso v_{gs} che moltiplica un parametro che deve avere le unità di misura di una transconduttanza $[\Omega^{-1}]$ (dato che la corrente, dalla legge di Ohm, è $I = (1/R)V$ e $(1/R)$ è una transconduttanza). Quindi:

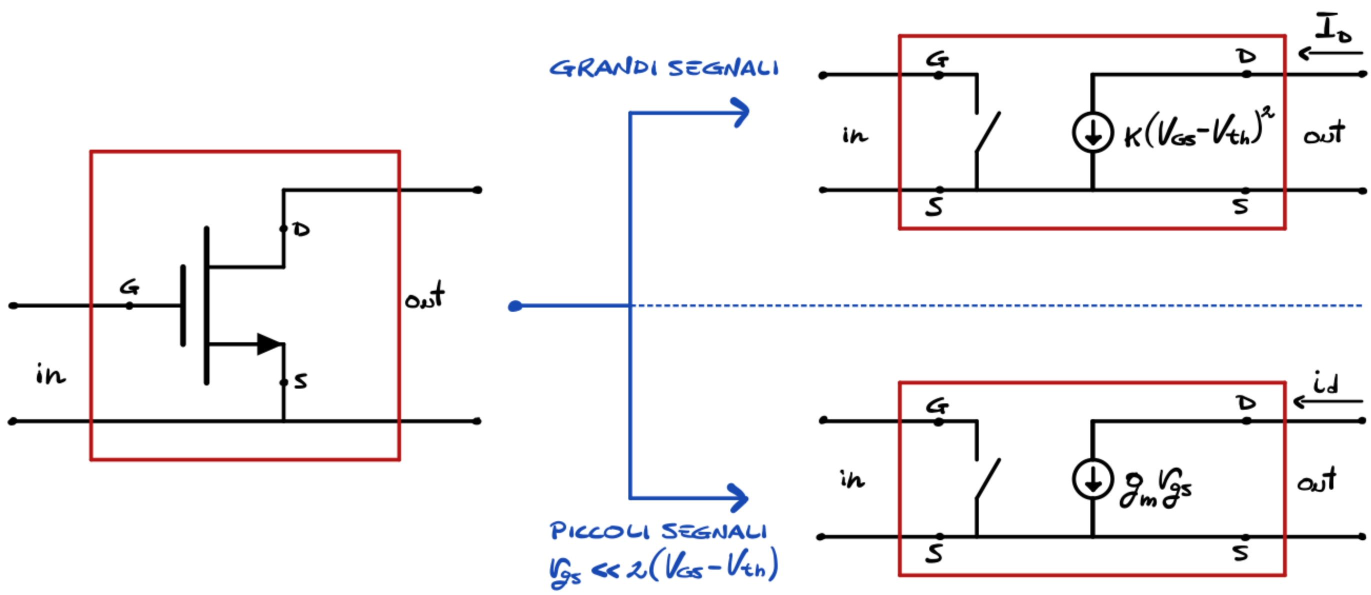
$$\boxed{i_D = I_D^* + i_d = I_D^* + g_m v_{gs}} \longrightarrow g_m = 2K(V_{GS}^* - V_{th})$$

dove g_m è un parametro di transconduttanza che lega linearmente la corrente in uscita con la tensione in ingresso.

Il parametro g_m rappresenta la pendenza della retta che approssima la parabola sotto la condizione di piccolo segnale.



Quindi, un transistor MOS, visto come rete due porte, quando si trova in saturazione ha due possibili circuiti a rete due porte equivalenti, in base al fatto che la condizione di piccolo segnale sia soddisfatta o meno.



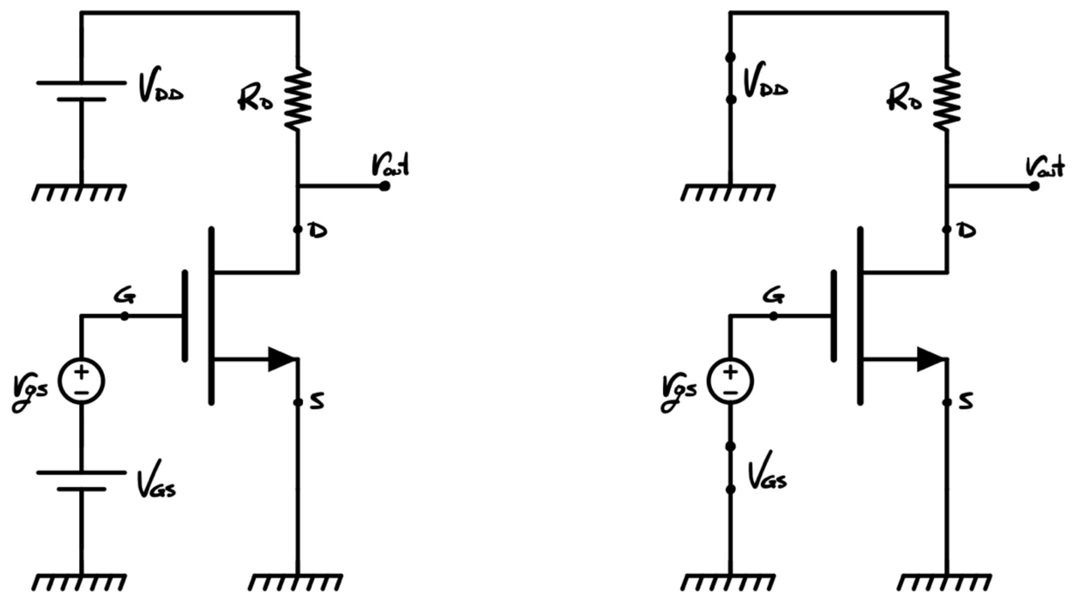
In genere, d'ora in poi se non si dice esplicitamente che un transistor non lavora su piccoli segnali, si assume che valga la condizione di piccolo segnale.

- GUADAGNO DI UN TRANSISTOR COME AMPLIFICATORE:

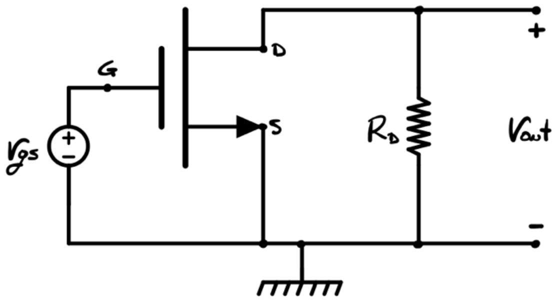
Calcoliamo il guadagno di un transistor che lavora in zona di saturazione quando vale la condizione di piccolo segnale. Il guadagno è dato dal rapporto tra tensione di uscita e tensione di ingresso:

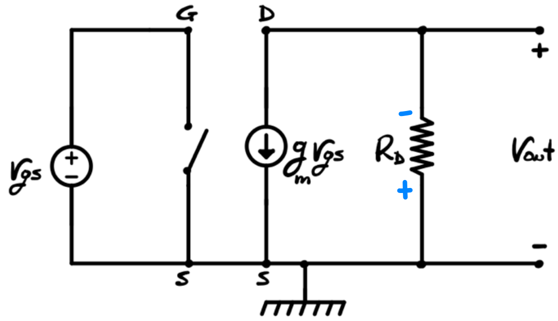
$$\boxed{A_V = \frac{v_{out}}{v_{in}}}$$

dove la tensione di ingresso è la tensione del segnale: $v_{in} = v_{gs} + V_{GS}^*$. Il guadagno è dato da come varia la tensione di uscita in funzione di come varia la tensione in ingresso, e la tensione in ingresso varia soltanto per v_{gs}. Quindi, per calcolare il guadagno bisogna analizzare il circuito sotto l'effetto dei segnali variabili, ovvero solo sotto l'effetto di v_{gs}. Questo significa che tutti gli altri segnali vanno annullato, ovvero vanno annullati i segnali V_{GS}^* e V_{DD} cortocircuitandoli (perché sono delle batterie).
Quindi, dal circuito a sinistra, che è quello originale, si ottiene quello a destra:



Il circuito di destra può essere riscritto (in modo del tutto equivalente) facendo un unico piano di massa (figura a sinistra). Dato che stiamo nella condizione per piccoli segnali, si può sostituire il transistor con la sua rete due porte equivalente e si ottiene il circuito in figura a destra:





Il circuito di destra è quello da analizzare per trovare il guadagno. La v_{out} è pari alla caduta di potenziale sulla resistenza R_D. Dato che è presente un'unica maglia e su questa ci sono la resistenza R_D e il generatore di corrente $g_m v_{gs}$, la corrente che scorre nella resistenza è proprio $g_m v_{gs}$. La corrente da una caduta di potenziale positiva dove entra rispetto a dove esce, quindi il segno della caduta di potenziale su R_D è opposto al segno del potenziale v_{out}, che è stato preso positivo rispetto al drain. Quindi, si ottiene:

$$\boxed{v_{out} = -g_m v_{gs} R_D}$$

da cui, si ricava il *guadagno del transistor come amplificatore* ($v_{in} = v_{gs}$):

$$\boxed{A_V = \frac{v_{out}}{v_{in}} = -g_m R_D}$$

Quindi, il guadagno dell'amplificatore che usa un transistor MOS è funzione della transconduttanza

$$\rightarrow g_m = 2K(V_{GS}^* - V_{th})$$

e quindi dipende dalla tensione di polarizzazione e da K, quindi dalle dimensioni del transistor.

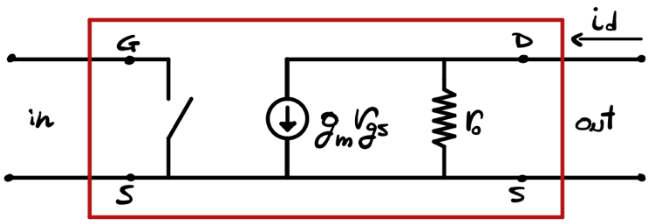
Quindi, il guadagno trovato è $A_V = -g_m R_D$, quindi se si vuole avere un guadagno grande bisogna aumentare R_D. Il problema sta nel fatto che la scelta di R_D non è libera, perché la tensione V_{DS} è data da $V_{DS} = V_{DD} - I_D R_D$, e all'aumentare di R_D, diminuisce V_{DS}, che però deve sempre soddisfare la condizione $V_{DS} \geq V_{GS} - V_{th}$ affinché il transistor lavori in zona di saturazione.

- IMPEDENZA DI USCITA:

Come avevamo visto, in un transistor reale le caratteristiche di uscita $I_D - V_{DS}$ nella zona di saturazione, in realtà non sono parallele tra loro e all'asse delle ascisse, ma convergono tutte in un punto a $-V_A$, detta tensione di Early. Questo si riflette nella rete due porte equivalente come una resistenza r_o in parallelo al generatore di corrente:

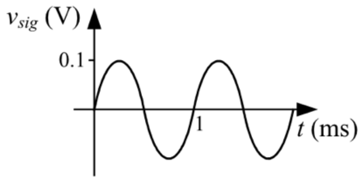
$$r_o \approx \frac{|V_A|}{I_D}$$

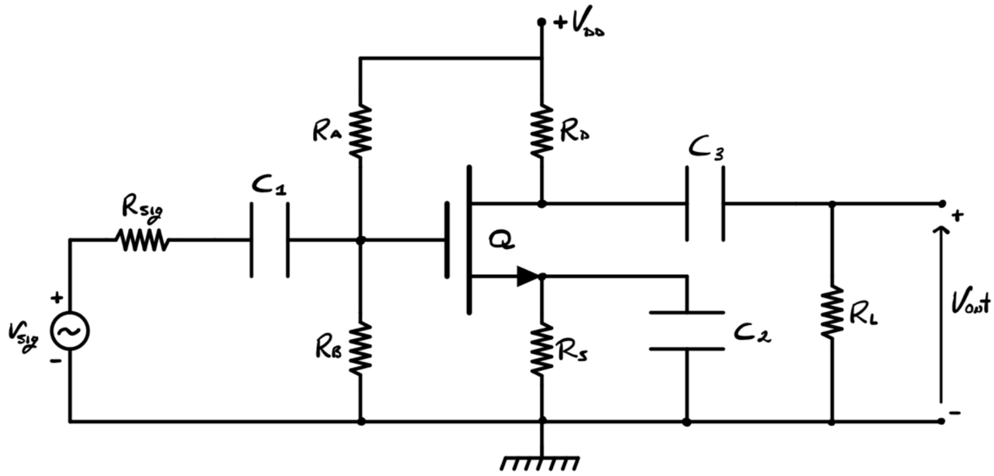
e quindi, se si applica un carico in uscita, la corrente che scorre su questo sarà la partizione di corrente tra r_o e R_L. Invece, in condizioni ideali questa resistenza non è presente e tutta la corrente in uscita va a finire sul carico R_L.
La rete due porte che considera la non idealità del transistor, sotto la condizione di piccolo segnale è la seguente:



Esercizio

Dal circuiti seguente, con tensione v_{sig} sinusoidale con valor medio nullo, ampiezza picco-picco pari a $0.2\,V$ e frequezna di $1\,kHz$, determinare e graficare l'andamento nel tempo della tensione di uscita V_{out} sia in assenza che in presenza della capacità C_2.
I dati sono i seguenti: $Q: V_{th} = 1\,V, K = 0.5\,mA/V^2, \lambda = 0$; $R_A = 6\,k\Omega$, $R_B = 4\,k\Omega$, $R_{sig} = 50\,\Omega$, $R_D = 2\,k\Omega$, $R_S = 0.5\,k\Omega$, $R_L = 10\,k\Omega$, $V_{DD} = 10\,V$, $C_1 = C_2 = C_3 \rightarrow \infty$.





La domanda in sostanza richiede si trovare il guadagno per piccoli segnali di questo circuito, dato che in uscita ci sarà la stessa forma d'onda dell'ingresso ma amplificata attraverso un guadagno $A_V = V_{out}/v_{sig}$.

- *Calcolo della tensione di polarizzazione del transistor:*

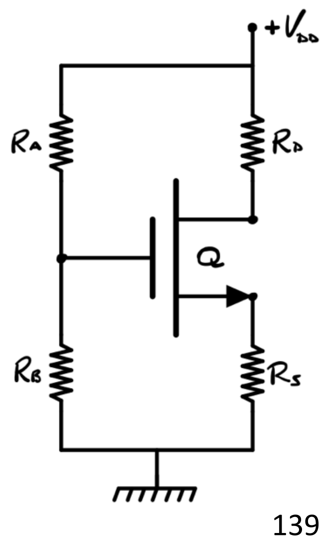
Sappiamo che il guadagno è pari a $A_V = -g_m R_D$, dove $g_m = 2K(V_{GS}^* - V_{th})$. Quindi, per calcolare il guadagno bisogna prima calcolare il valore della transconduttanza e per fare questo bisogna trovare il valore della V_{GS}^* di polarizzazione. Quindi, bisogna come prima cosa analizzare il circuito sotto il punto di vista della polarizzazione, ovvero tenendo conto solo delle componenti costanti nel tempo.

Nel circuito sono presenti diversi condensatori, tutti con capacità che tendono a infinito, quindi:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \rightarrow \begin{cases} se\ \omega \neq 0 \rightarrow\ Z_C = 0 \rightarrow cortocircuito \\ se\ \omega = 0 \rightarrow\ Z_C = \infty \rightarrow circuito\ aperto \end{cases}$$

Questo vale per tutti i condensatori presenti nel circuito, che possono essere considerati dei circuiti aperti per i segnali costanti nel tempo (con $\omega = 0$), e dei cortocircuiti per i segnali variabili (con $\omega \neq 0$).

Come detto, per analizzare il circuito sotto il punto di vista della polarizzazione, bisogna considerare solo le componenti costanti nel tempo, quindi tutti i condensatori presenti possono essere considerati circuiti aperti. Il circuito che si ottiene è quello in figura.



Dato che la corrente di gate $I_G = 0$, la corrente che scorre in R_A è la stessa che scorre in R_B e di conseguenza la tensione di gate è data da:

$$V_G = V_{DD} \frac{R_B}{R_A + R_B} = 4\,V$$

Applicando l'equazione alla maglia sulla maglia di ingresso, ovvero quella tra gate e source, si ottiene:

$$V_G = V_{GS} + I_D R_S$$

Questa equazione contiene due incognite, quindi può essere risolta se messa a sistema con l'equazione della corrente di drain in zona di saturazione:

$$\begin{cases} V_G = V_{GS} + I_D R_S \\ I_D = K(V_{GS} - V_{th})^2 \end{cases}$$

da cui si ottiene: $V_{GS} = 3\ V$ e $V_{GS} = -5\ V$. Il valore negativo trovato per la V_{GS} sicuramente non è utilizzabile perché è minore della V_{th} e quindi, per quel valore di polarizzazione il transistor è interdetto.

Quindi, il valore della tensione di polarizzazione è $V_{GS}^* = 3\ V$. Da questa si può ricavare il valore della corrente di drain, che è pari a $I_D = K(V_{GS}^* - V_{th})^2 = 2\ mA$.

Si ottiene quindi un valore della transconduttanza pari a:

$$g_m = 2K(V_{GS}^* - V_{th}) = 2\ mA/V$$

La prima parte dell'esercizio è completata, ma bisogna verificare che l'ipotesi fatte all'inizio, ovvero che il transistor stia in zona di saturazione, sia vera.

- Verifica dell'ipotesi iniziale:

Il transistor Q lavora in zona di saturazione se valgono le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} V_{GS} > V_{th} \\ V_{DS} \geq V_{GS} - V_{th} \end{cases}$$

La prima è sicuramente verificata perché $V_{GS} = 3\ V > \ V_{th} = 1$. Per verificare la seconda bisogna calcolare V_{DS}.

L'equazione alla maglia sulla maglia di uscita, ovvero quella tra drain e source è la seguente (la corrente che scorre sulla resistenza di drain è sempre la stessa che scorre sulla resistenza di source):

$$V_{DS} = V_{DD} - I_D(R_D - R_S) = 5\ V$$

Quindi, anche la seconda condizione è verificata dato che $V_{DS} = 5\ V \geq \ V_{GS} - V_{th} = 3\ V - 1\ V = 2\ V$.

Possiamo concludere che l'ipotesi iniziale è verificata e che quindi l'analisi del circuito eseguita fino ad ora è corretta.

- A cosa servono i condensatori presenti nel circuito:

Nel circuito sono presenti tre condensatori che sono posti in punti ben precisi per svolgere i seguenti compiti:

- Il condensatore C_1 serve a filtrare le componenti costanti nel tempo provenienti dal segnale affinché non passino (dato che le componenti costanti vedono il condensatore come un circuito aperto) e non si sommino alla tensione di polarizzazione V_{GS}^*, spostando il punto di lavoro del transistor.

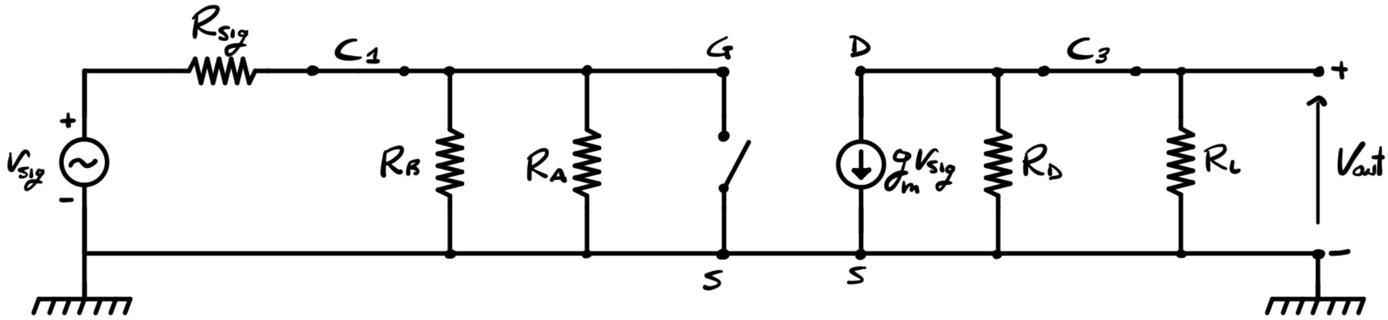
- Il condensatore C_3 serve per due motivi. Il primo motivo è che mettendo il condensatore in quella posizione, si isola la resistenza di carico dal transistor e, in questo modo, il punto di lavoro non dipende dal carico applicato in uscita. Allo stesso tempo, però, le componenti variabili nel tempo che devono arrivare sul carico passano senza problemi perché vedono il condensatore come un cortocircuito.
  Il secondo motivo è il seguente: posto in quella posizione il condensatore filtra le componenti costanti che arriverebbero altrimenti in uscita. In particolare, l'informazione del segnale sta nella sua variabilità nel tempo e non nelle componenti costanti, ma quando il segnale arriva al transistor ci si somma la tensione di polarizzazione V_{GS}^*, che è costante nel tempo. Per evitare di trovare in uscita il segnale di ingresso amplificato e sommato alla tensione di polarizzazione, si mette il condensatore C_3 in quel modo, così da fare da filtro

passa-alto e tagliare quindi le componenti costanti nel tempo. In questo modo in uscita si ottiene solamente il segnale di ingresso amplificato.

- Il condensatore di C_2 è posto in parallelo alla resistenza R_S per il seguente motivo. La resistenza R_S serve per effettuare una retroazione negativa e quindi per stabilizzare il punto di lavoro del transistor. Come sappiamo, lo svantaggio principale della retroazione negativa è che diminuisce il guadagno dell'amplificatore (di due amplificatori identici, uno con retroazione negativa e uno senza, guadagna di più quello senza retroazione).
  Quindi, servirebbe qualcosa che permette di effettuare la retroazione negativa per le componenti costanti, così da evitare lo spostamento del punto di lavoro, ma che non effettui questa retroazione negativa per le componenti variabili nel tempo, ovvero per le componenti del segnale. Il lavoro che svolge C_2 è esattamente questo: si comporta da circuito aperto per le componenti costanti, che quindi sono costrette a passare sulla resistenza R_S, e si comporta come cortocircuito per le componenti continue, che quindi passano tutte lì ignorando la resistenza R_S (tra cortocircuito e resistenza vince sempre il cortocircuito).
  In questo modo, sul segnale, si elimina l'effetto di diminuzione del guadagno della retroazione negativa.
  Questo condensatore C_2 si chiama *condensatore di bypass*.

- Calcolo del guadagno del circuito:

Per il calcolo del guadagno del circuito, si considerano solo le componenti variabili nel tempo, ovvero quelle del segnale. Per questo motivo si eliminano tutte le eccitazioni preesistenti nel circuito, e in questo caso solo il generatore di tensione V_{DD} (cortocircuitandolo a massa), e si considerano tutti i condensatori come cortocircuiti.
Inoltre, si può sostituire al transistor il suo circuito rete due porte equivalente per piccoli segnali. Il circuito che si ottiene è il seguente:



Chiamiamo il parallelo delle resistenze R_A e R_B la resistenza $R_{A//B}$, e il parallelo delle resistenze R_D e R_L la resistenza $R_{D//L}$. Dato che la corrente che scorre nella maglia di uscita è definita dal generatore di corrente controllato, la tensione di uscita, che è la tensione ai capi di $R_{D//L}$, è pari a:

$$V_{out} = -g_m v_{gs} R_{D//L}$$

dove v_{gs} è pari alla partizione della v_{sig} sulle resistenze R_{sig} e $R_{A//B}$:

$$v_{gs} = v_{sig} \frac{R_{A//B}}{R_{A//B} + R_{sig}} \approx v_{sig}$$

Osserviamo che la $v_{gs} \approx v_{sig}$ perché le resistenze R_A e R_B sono di diversi ordini di grandezza più grandi rispetto alla resistenza R_{sig}. Come già detto, per quanto riguarda la polarizzazione non interessano i valori assoluti di R_A e R_B, ma interessa il loro rapporto, quindi se invece di avere $R_A = 6\ k\Omega$, $R_B = 4\ k\Omega$ avessimo avuto $R_A = 6\ \Omega$, $R_B = 4\ \Omega$, la tensione di polarizzazione V_{GS}^* sarebbe stata la stessa.
Però, bisogna usare valori molto grandi per le resistenze R_A e R_B perché il loro parallelo è l'impedenza di ingresso che vede il segnale e, di conseguenza, essendo in generale le impedenze dei segnali molto piccole, mettendo un'impedenza di ingresso alla rete molto grande, si può trascurare la resistenza di segnale (come fatto nel calcolo della v_{gs}).

Quindi, la tensione di uscita è pari a:

$$V_{out} = -g_m v_{sig} R_{D//L}$$

$\frac{R_D R_L}{R_D + R_L} = \frac{20}{12} k\Omega$

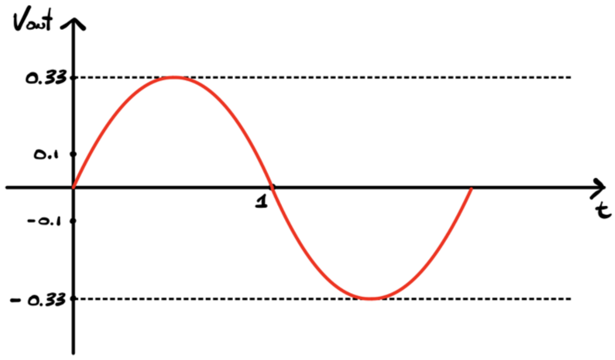
e di conseguenza, il guadagno del circuito è pari a:

$$A_V = \frac{V_{out}}{v_{sig}} = -g_m R_{D//L} = -3.33 = -2\,mA \cdot \frac{20}{12}$$

- *Grafico dell'andamento del segnale di uscita:*

Ora possiamo graficare l'andamento del segnale in uscita:

- sappiamo che ha valor medio nullo, perché C_3 filtra tutte le componenti costanti nel tempo;
- la frequenza, e quindi il periodo, sono gli stessi del segnale di ingresso;
- essendo il guadagno invertente, la sinusoide è invertita;
- l'ampiezza del segnale è: $\pm\, 0.1 * A_V = \pm\, 0.1 * (-3.33)\, V = \pm\, 0.33\, V$.



Osserviamo che tutti i condensatori introducono un comportamento passa-alto.

- *Analisi del circuito in assenza del condensatore C_2:*

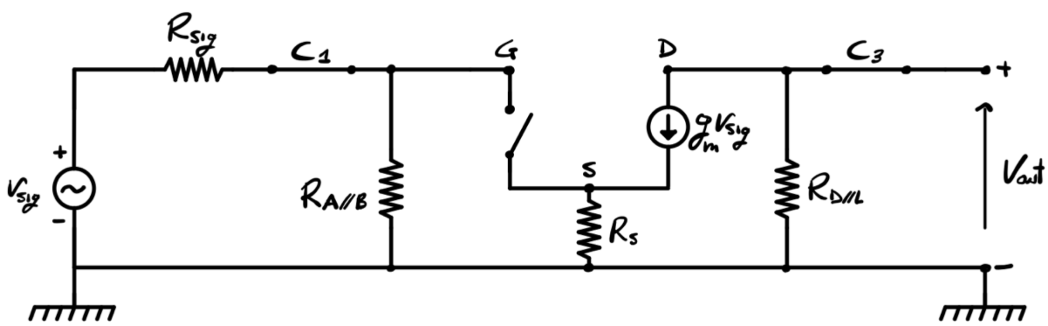
Fino ad ora abbiamo analizzato il circuito in presenza del condensatore C_2, ma la domanda richiede di fare l'analisi anche in assenza di questo condensatore.
Dal punto di vista della polarizzazione, dato che C_2 in quel caso (per componenti costanti) si comporta come un circuito aperto, l'analisi è la stessa. Abbiamo quindi:

$$V_{GS}^* = 3\,V \qquad I_D = 2\,mA \qquad V_{DS} = 5\,V$$

Quindi è soddisfatta la condizione di saturazione del transistor e si ha:

$$g_m = 2K(V_{GS}^* - V_{th}) = 2\,mA/V$$

Quindi, in questa condizione analizziamo il circuito dal punto di vista del segnale v_{sig}, ignorando tutte le altre eccitazioni indipendenti presenti nel circuito, ovvero cortocircuitando a massa il generatore di tensione V_{DD}.
I condensatori presenti (C_1 e C_3) vengono visti dal segnale come cortocircuiti.
Il circuito equivalente per piccoli segnali è il seguente:



dove le resistenze R_A e R_B sono state semplificate in un'unica resistenza $R_{A//B}$ e le resistenze R_D e R_L sono state semplificate in un'unica resistenza $R_{D//L}$.

La V_{out} è la tensione ai capi della resistenza $R_{D//L}$. La corrente che scorre su $R_{D//L}$ è quella dettata dal generatore di corrente nell'unica maglia che vede connessi R_S, $R_{D//L}$ e il generatore di corrente. Quindi si ha che:

$$V_{out} = -g_m v_{gs}\, R_{D//L}$$

Quello che vogliamo trovare è:

$$A_V = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{V_{out}}{v_{sig}}$$

La tensione v_{gs} è pari a $v_{gs} = v_g - v_s$, dove:

$$v_g = v_{sig}\frac{R_{A//B}}{R_{A//B} + R_{sig}} \approx v_{sig} \qquad R_{sig} \ll R_{A//B}$$

mentre la tensione v_s, ovvero la tensione sul source, è data da:

$$v_s = g_m v_{gs} R_S$$

Quindi, la tensione v_{gs} è data da:

$$v_{gs} = v_g - v_s = v_{sig} - g_m v_{gs} R_S$$

da cui si ottiene:

$$v_{gs} = \frac{v_{sig}}{1 + g_m R_s}$$

Sostituendo questa relazione nella formula della tensione di uscita, si ottiene:

$$v_{out} = -g_m v_{gs}\, R_{D//L} = -g_m R_{D//L}\frac{v_{sig}}{1 + g_m R_s}$$

In conclusione, si ottiene che il guadagno è:

$$A_V = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{V_{out}}{v_{sig}} = -\frac{g_m}{1 + g_m R_s} R_{D//L} = -\frac{2}{1+2\cdot 0.5}\cdot 2 = -2$$

Come sappiamo, esistono quattro tipi di amplificatori retroazionati, dove in generale un amplificatore è caratterizzato da: $A_F = \frac{A_M}{1+\beta A_M}$, ma nel caso della transconduttanza questo può essere scritto come:

$$G_M = \frac{g_m}{1 + \beta g_m}$$

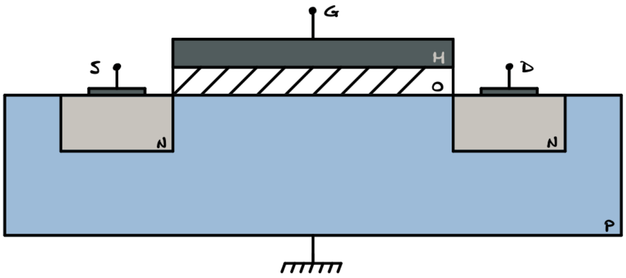
che è quello che abbiamo trovato dall'analisi del circuito, dove $\beta = R_S$.

Quindi, si può scegliere di utilizzare di utilizzare o meno R_S, ma sappiamo che utilizzandola avremo un guadagno minore e più stabile rispetto a quando non la utilizziamo (e quindi rispetto a quando nel circuito è presente un condensatore di bypass come C_2).

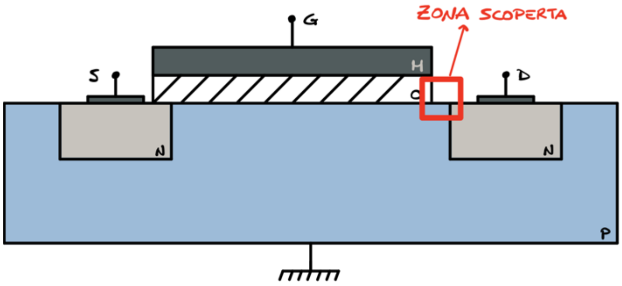
- Comportamento passa-alto di un transistor:

I condensatori che vengono inseriti nel circuito per accoppiamento, retroazione ecc. introducono un comportamento passa alto perché per funzionare come tali la frequenza del segnale deve essere maggiore di una certa ω_L (che è al più molto vicina a frequenze costanti, quindi nulle), dato che l'impedenza di un condensatore è $Z_C = 1/j\omega C$.

- Comportamento passa-basso di un transistor:

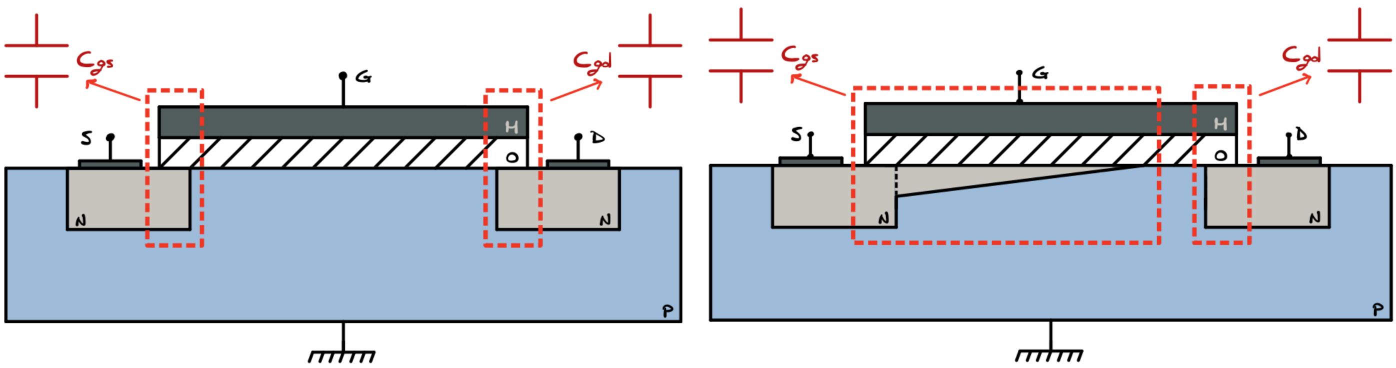


Come sappiamo, un transistor è formato dalla struttura MOS, dove è presente un metallo al di sopra di un ossido, il quale sta al di sopra di un substrato di tipo p (o di tipo n). Sono presenti anche due isole di tipo n (o di tipo p) chiamate drain e source.
In un transistor ideale, gli strati di ossido e metallo dovrebbero essere esattamente lunghi L, ovvero la distanza minima tra drain e source, ed essere perfettamente centrati, come in figura.

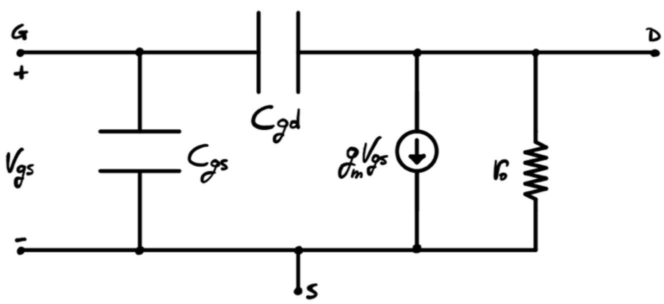


Purtroppo, essendo le distanze in gioco molto molto piccole, allineare perfettamente tutte le componenti è difficile, e quindi, se si fanno gli strati di metallo e ossido esattamente lunghi L, si rischia che questi stiamo decentrati e quindi che in una delle due parti (o verso il drain o verso il source) ci sia una parte scoperta di substrato p, come in figura, e che quindi il transistor non funzioni.

Per risolvere questo problema si fanno gli strati di metallo e ossido leggermente più lunghi di L (sotto dei regimi di tolleranza) in modo che vanno a sovrapporsi sia sul drain e sul source e non si rischi che il transistor non funzioni.
Queste sovrapposizioni si hanno quindi su drain e source, e formano dei condensatori dato che sono composte da tre strati: metallo (gate), ossido e semiconduttore (drain e source, molto conduttivo).
Quindi, si vanno a formare due condensatori, uno tra gate e source C_{gs} e uno tra gate e drain C_{gd}.
Se il transistor è in zona di saturazione (ad esempio quando lo utilizzo come amplificatore) si ha anche un canale di tipo n che è connesso al source, ma non è connesso al drain, quindi, in questo caso, $C_{gs} \gg C_{gd}$, perché il condensatore che si forma tra gate e source prende anche tutto il canale.

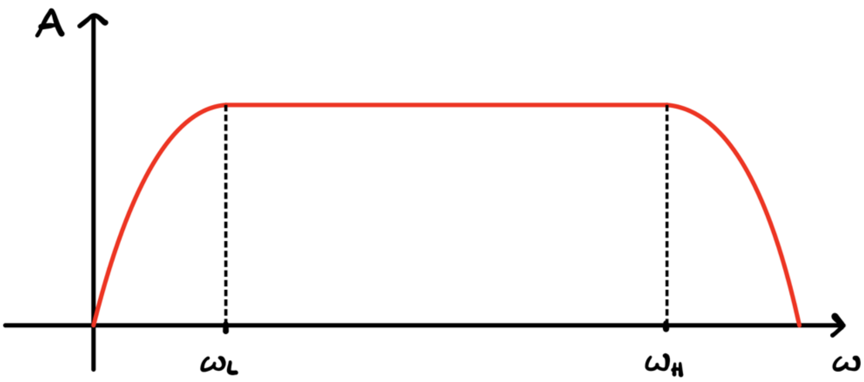


Quindi, queste capacità vanno considerate nel circuito equivalente del transistor, e si ottiene il seguente schema:



L'impedenza di un condensatore è sempre $Z_C = 1/j\omega C$ quindi, anche se le capacità di questi condensatori sono molto piccole (dato che le superfici sono molto piccole), quando la frequenza del segnale è molto elevata i condensatori si comportano come cortocircuiti e il transistor smette di funzionare dato che gate e source e gate e drain sono in cortocircuito.

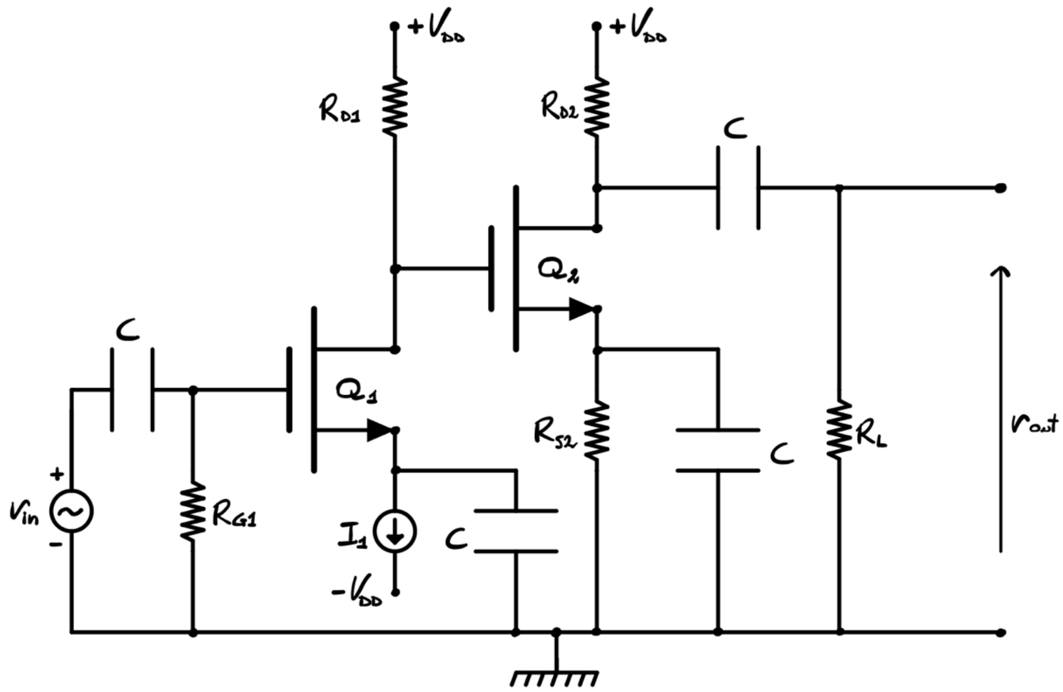
Quindi, i transistor hanno un comportamento passa-basso dovuto a queste capacità, le quali introducono una certa ω_H, sopra la quale il funzionamento del transistor decresce fino a non funzionare più.



Esercizio

Del circuito seguente, calcolare lo stato di polarizzazione dei due transistor (V_{GS}, I_D, V_{DS}), e l'amplificazione di tensione $A_v = v_{out}/v_{in}$ per piccoli segnali.

I dati sono i seguenti:
Q_1: $V_{th1} = 1\ V, K_1 = 0.5\ mA/V^2$;
Q_2: $V_{th2} = 1\ V, K_2 = 1\ mA/V^2$;
$I_1 = 2\ mA, V_{DD} = 5\ V, C = \infty, R_{G1} = 10\ k\Omega, R_{D1} = 1\ k\Omega, R_{S2} = 1\ k\Omega, R_{D2} = 2\ k\Omega, R_L = 2\ k\Omega$.



Dato che è specificato che bisogna calcolare il guadagno per piccoli segnali, si può utilizzare il circuito equivalente lineare e quindi bisogna calcolare le transconduttanze g_{m1} e g_{m2} dei due transistor. Dato che le transconduttanze dipendono dal punto di polarizzazione, come prima cosa bisogna calcolare la polarizzazione dei due transistor.

- *Analisi della polarizzazione del circuito*:

Bisogna considerare solo le componenti costanti, quindi tutti i condensatori diventano circuiti aperti. Rimane quindi solo la parte centrale del circuito.
Questa analisi è già stata fatta nel dettaglio a pagina 133. I risultati sono i seguenti:

- il transistor Q_1 è polarizzato con i valori $V_{GS1} = 3\ V$, $V_{DS1} = 6\ V$ e $I_{D1} = 2\ mA$.
- il transistor Q_2 è polarizzato con i valori $V_{GS2} = 2\ V$, $V_{DS2} = 1\ V$ e $I_{D2} = 1\ mA$.

- *Calcolo della transconduttanza:*

La transconduttanza è data dalla formula $g_m = 2K(V_{GS} - V_{th})$, quindi si ottiene:

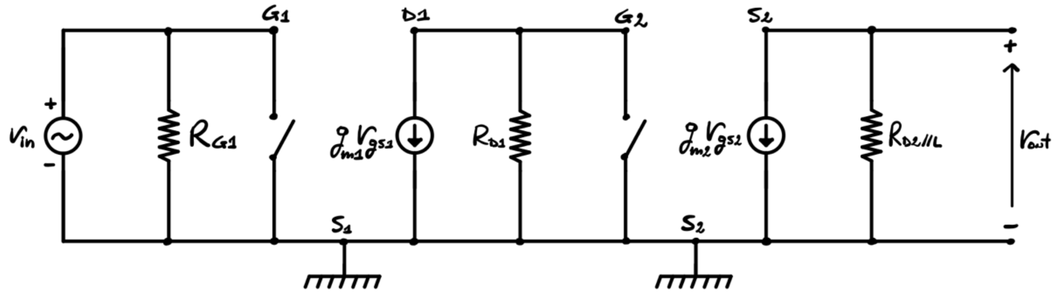
$$g_{m1} = 2K_1(V_{GS1} - V_{th1}) = 2\ mA/V$$

$$g_{m2} = 2K_2(V_{GS2} - V_{th2}) = 2\ mA/V$$

- *Calcolo del guadagno:*

Per calcolare il guadagno bisogna analizzare il circuito dal punto di vista delle variazioni del segnale, annullando tutte le componenti costanti. Quindi, i generatori V_{DD} vengono cortocircuitati a massa e il generatore di corrente I_1 viene fatto diventare un circuito aperto, mentre tutti i condensatori vengono considerati cortocircuiti, dato che la loro capacità è ∞ e quindi qualsiasi segnale con frequenza diversa da zero vede i condensatori come cortocircuiti.

Il circuito da analizzare è quindi il seguente:



Da questo schema si possono ricavare i due stadi relativi ai due transistor, per i quali si ottiene:

$$A_1 = \frac{V_{D1}}{v_{in}} \qquad\qquad A_2 = \frac{v_{out}}{V_{D1}}$$

Quindi, il guadagno complessivo è dato da:

$$A_V = A_1 * A_2 = \frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{V_{D1}}{v_{in}} * \frac{v_{out}}{V_{D1}}$$

Sappiamo che il guadagno di un amplificatore è dato da:

$$A_V = -g_m R_D$$

per cui si ottiene:

$$A_1 = -g_{m1} R_{D1} \qquad\qquad A_2 = -g_{m2} R_{D//L}$$

e il guadagno totale è dato da:

$$A_V = g_{m1} R_{D1} * g_{m2} R_{D//L}$$

In alternativa, si può fare l'analisi del circuito partendo dalla tensione di uscita che è pari alla caduta di potenziale ai capi di $R_{D//L}$ sulla quale scorre solo la corrente determinata dal generatore di corrente $g_{m2} v_{gs2}$:

$$v_{out} = -g_{m2} v_{gs2} R_{D//L}$$

dato che $v_{gs2} = v_{ds1}$, si ha: $v_{out} = -g_{m2} v_{ds1} R_{D//L}$.

La v_{ds1} è la caduta di potenziale ai capi della resistenza R_{D1}, sulla quale scorre solo la corrente determinata dal generatore di corrente $g_{m1} v_{gs1}$:

$$v_{ds1} = -g_{m1} v_{gs1} R_{D1}$$

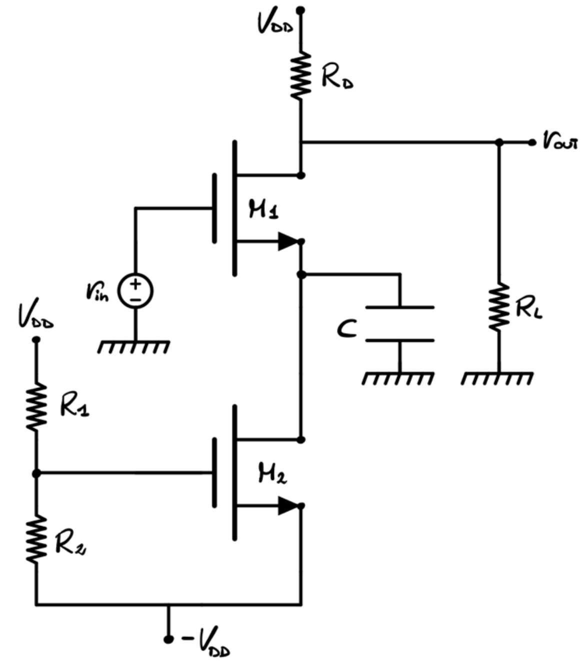
da cui si ottiene:

$$v_{out} = g_{m2} R_{D//L} * g_{m1} v_{gs1} R_{D1}$$

dato che $v_{gs1} = v_{in}$, si ottiene che il guadagno complessivo è:

$$A_V = \frac{v_{out}}{v_{in}} = g_{m2} R_{D//L} * g_{m1} R_{D1}$$

Esercizio:



Del circuito in figura:

- determinare il punto di polarizzazione dei transistor M_1 e M_2 (V_{GS}, V_{DS}, I_D);
- calcolare l'amplificazione di tensione per piccoli segnali $A_V = v_{out}/v_{in}$;

I dati sono i seguenti:
$M_1, M_2 = \{V_{th} = 1\ V, K = 0.25\ mA/V^2\}$;
$R_1 = 4\ k\Omega, R_2 = 1\ k\Omega, R_D = 20\ k\Omega, R_L = 20\ k\Omega, V_{DD} = 5\ V$,
$C \to \infty$.

Dato che la tensione di ingresso entra sul gate M_1 e la tensione di uscita è presa sul drain di M_1, questo transistor è quello che svolge il lavoro di amplificazione. Quindi, bisogna portare M_1 a lavorare nel punto di lavoro in saturazione polarizzandolo.

Una tecnica di polarizzazione è quella di utilizzare un generatore di corrente posto dopo il source che fissa la corrente di drain, dalla quale si risale alla tensione V_{GS}.
Nel nostro circuito, il generatore di corrente è il transistor M_2 e la corrente che viene fissata è la corrente di drain di M_2. Per fare questo però è necessario polarizzare M_2 in modo che la corrente I_{D2} sia indipendente dal transistor di amplificazione.

- Polarizzazione di M_2:

Analizziamo la polarizzazione di M_2 per ottenere la corrente di drain I_{D2}.
La tensione $V_{GS2} = V_{G2} - V_{S2}$. Dato che il source è connesso direttamente a $-V_{DD} = -5\ V$, la tensione $V_{S2} = -5\ V$.
La tensione V_{G2} è la tensione sul nodo tra le due resistenze R_1 e R_2 e può essere ricavata come sovrapposizione degli effetti della partizione di tensione V_{DD} e $-V_{DD}$:

$$V_{G2} = V_{DD}\frac{R_2}{R_1 + R_2} - V_{DD}\frac{R_1}{R_1 + R_2} = -3\ V$$

Di conseguenza: $V_{GS} = -3\ V - (-5) = 2\ V$.

Ipotizzando M_2 in saturazione, la corrente di drain è:

$$I_{D2} = K_2(V_{GS2} - V_{th})^2 = 0.25\ mA$$

- Polarizzazione di M_1:

Dato che stiamo valutando il circuito dal punto di vista delle componenti costanti, il condensatore presente è un circuito aperto. Per come sono connessi i transistor si ha $I_{D2} = I_{D1} = 0.25\ mA$, quindi:

$$I_{D1} = K_1(V_{GS1} - V_{th})^2 = 0.25\ mA \qquad \rightarrow \qquad V_{GS1} = 2\ V$$ o $V_{GS1} = 0V < V_{TH}$

D'altronde, i transistor sono uguali, quindi se hanno la stessa I_D devono avere anche la stessa V_{GS}.
Dato che stiamo valutando il circuito dal punto di vista delle componenti costanti, il generatore v_{in} è cortocircuitato a massa, e quindi il gate di M_1 si trova a $0\ V$. Dato che $V_{GS1} = 2V$, si ha che il source di M_1 si trova a $-\ 2\ V$.

$V_{GS1} = V_{G1} - V_{S1} = 0V - 2V = -2V = V_{S1}$

- *Verifica dell'ipotesi di saturazione:*

Abbiamo ipotizzato di transistor in saturazione nel calcolo della corrente di drain, quindi bisogna verificare che tale ipotesi sia vera.

Dato che il source di M_1 si trova a $-2\ V$, anche il drain di M_2 si trova a $V_{D2} = -2\ V$. Quindi: $V_{DS2} = V_{D2} - V_{S2} = 3\ V$. Dato che $V_{DS2} = 3\ V > V_{GS2} - V_{th} = 1V$, il transistor M_2 è sicuramente in saturazione.

Per il transistor M_1, dato che il carico R_L non è disaccoppiato dal circuito attraverso un condensatore, bisogna fare l'equazione al nodo del drain di M_1 e si ottiene: $I_{RD} = I_{D1} + I_L$ che è uguale a:

$$\frac{V_{DD} - v_o}{R_D} = I_{D1} + \frac{v_o}{R_L} \qquad \rightarrow \qquad v_o = 0\ V$$

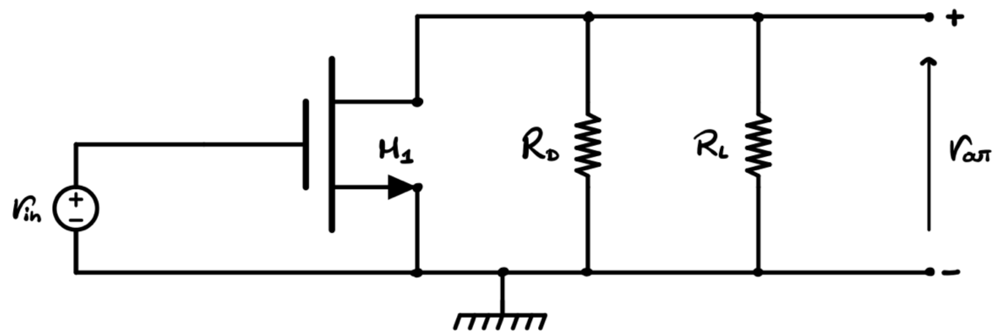
Dato che la tensione v_o è presa direttamente sul drain di M_1, si ottiene $V_{D1} = 0\ V$.
Dato che, $V_{DS1} = V_{D1} - V_{S1} = 2\ V > \ V_{GS1} - V_{th} = 1\ V$, il transistor M_1 è sicuramente in saturazione.

Quindi l'analisi eseguita fino ad ora è corretta.

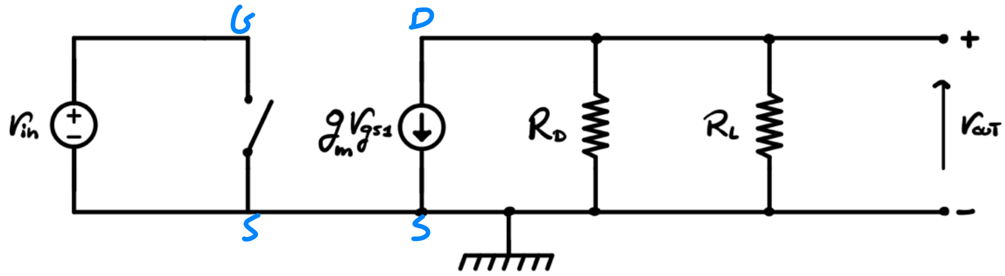
- *Calcolo del guadagno di M_1:*

Ora consideriamo il circuito dal punto di vista dei segnali variabili nel tempo, ovvero dal punto di vista di v_{in}. Per questo motivo, annulliamo tutte le eccitazioni costanti nel circuito, ovvero cortocircuitiamo a massa i generatori di tensione V_{DD} e $-V_{DD}$ e apriamo il circuito del generatore di corrente formato dal transistor M_2 (ovvero tra il source di M_1 e il drain di M_2 è presente un circuito aperto).
Inoltre, il condensatore presente nel circuito, dal punto di vista del segnale è un cortocircuito, e quindi, in ogni caso, tutto il circuito che forma il generatore di corrente deve essere ignorato in questa analisi (ovvero dal punto di vista delle variazioni), dato che il condensatore ci si trova in parallelo.

Quindi, dal punto di vista del segnale il circuito diventa il seguente:



che va analizzato sotto l'ipotesi di piccolo segnale e quindi bisogna sostituire al transistor il suo circuito equivalente per piccoli segnali:



Le due resistenze R_D e R_L si possono sostituire con un'unica resistenza $R_{D//L}$.

La tensione di uscita v_{out} è la tensione presa ai capi della resistenza $R_{D//L}$. Dato che si ha un'unica maglia (se si considera il parallelo di R_D e R_L), la cui corrente è decisa dal generatore di corrente, $g_m v_{gs1}$, si ha che:

$$v_{out} = -g_m v_{gs1} * R_{D//L}$$

Dato che il guadagno $A_V = v_{out}/v_{in}$ e che $v_{gs1} = v_{in}$, si ottiene:

$$A_V = \frac{v_{out}}{v_{in}} = -g_m R_{D//L}$$

La transconduttanza di M_1 è pari a:

$$g_m = 2K(V_{GS1} - V_{th}) = 0.5\ mA/V$$

per cui, il guadagno è pari a:

$$A_V = 0.5\ mA/V * 10\ k\Omega = -5$$

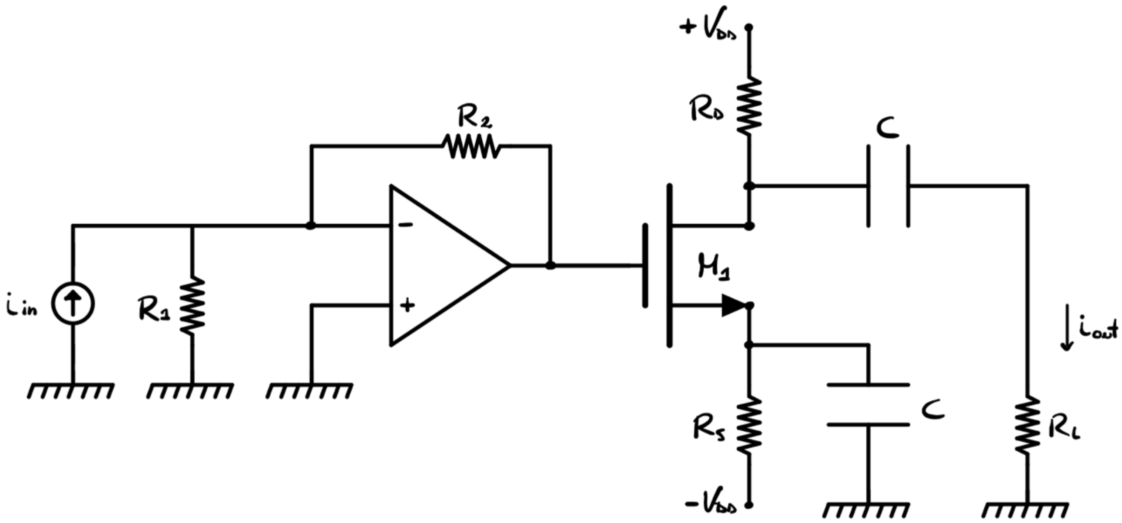
Esercizio:

Del circuito seguente, con i_{in} un generatore di corrente di piccolo segnale:

1. Calcolare il punto di lavoro in continua del transistor M_1;
2. Calcolare il guadagno di corrente $A_i = i_{out}/i_{in}$.

I dati sono:

- Amplificatore operazionale ideale con $L^+ = -L^- = 5\ V$;
- Transistor M_1 con $K = 0.5\ mA/V^2$, $V_{th} = 1\ V$ e $\lambda = 0$;
- $R_1 = 20\ k\Omega$, $R_2 = 10\ k\Omega$, $R_S = 1\ k\Omega$, $R_D = 2\ k\Omega$, $R_L = 3\ k\Omega$, $V_{DD} = 5\ V$, $C = \infty$;



Il testo specifica che il generatore di corrente i_{in} è di piccolo segnale, quindi la variazione che va a stimolare il transistor M_1 è, appunto, di piccolo segnale e quindi il transistor si può considerare lineare, sostituendolo con il circuito equivalente per piccoli segnali. Per calcolare la transconduttanza g_m, che caratterizza il comportamento lineare del transistor, bisogna prima calcolare la polarizzazione di M_1.

- Polarizzazione di M_1 e calcolo della transconduttanza g_m::

Per calcolare la polarizzazione di M_1 bisogna considerare solo le componenti costanti nel tempo, annullando la presenza delle componenti variabili nel tempo e cambiando il circuiti aperti tutti i condensatori.
L'unica componente variabile nel tempo è data dal generatore di corrente i_{in} che va trasformato in un circuito aperto.

Il transistor M_1 è polarizzato dalle due tensioni V_{DD} e $-V_{DD}$ e dalla tensione di uscita dell'operazionale che va a finire direttamente sul gate del transistor. Quindi la tensione V_G è pari alla tensione di uscita dell'operazionale.
Dato che l'operazionale non ha ingressi (sia il morsetto invertente che non invertente si trovano a massa), l'uscita complessiva è $0\ V$, e di conseguenza si ha $V_G = 0\ V$.
Per calcolare la polarizzazione del transistor usiamo la legge che lega il bipolo tra gate e source:

$$V_G = V_{GS} + (I_D R_S - V_{DD}) = V_{GS} + V_S$$

Questa equazione ha due incognite, quindi bisogna metterla a sistema con la corrente di drain per il transistor in zona di saturazione (ipotesi che dovrà essere verificata):

$$I_D = K(V_{GS} - V_{th})^2$$

Risolvendo il sistema, si ottiene $V_{GS} = \pm 3\ V$, ma bisogna prendere solo la soluzione $V_{GS} = 3\ V$, perché per l'altra soluzione si ha che la tensione gate-source è minore di quella di soglia e quindi il transistor si trova in zona di interdizione.
Quindi, la corrente di drain è pari a $I_D = 2\ mA$.

La tensione drain-source è pari a:

$$V_{DS} = (V_{DD} - I_D R_D) - (I_D R_S - V_{DD}) = 4\ V$$

Dato che $V_{DS} = 4\ V > V_{GS} - V_{th} = 2\ V$ il transistor è sicuramente in saturazione e l'ipotesi fatta è valida.

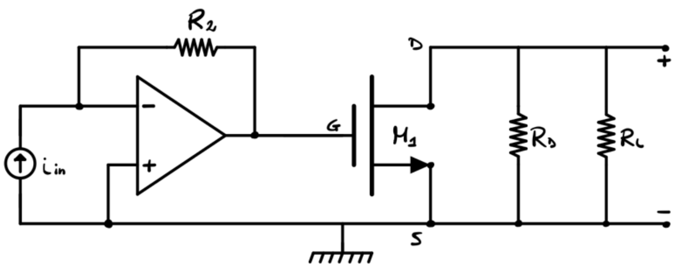
Abbiamo tutti gli elementi per calcolare la transconduttanza del transistor M_1:

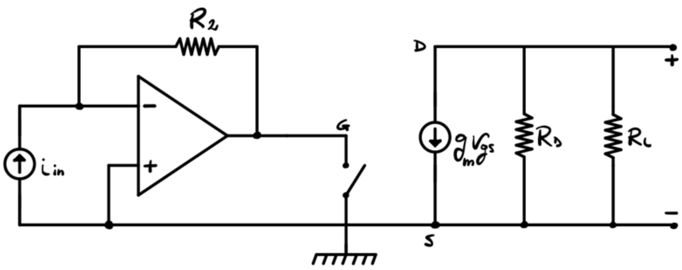
$$g_m = 2K(V_{GS} - V_{th}) = 2\ mA/V$$

- Analisi del circuito dal punto di vista dei segnali:

Ora dobbiamo analizzare il circuito dal punto di vista dei segnali, quindi bisogna mettere a massa tutti i generatori di tensione costanti (e nel caso aprire tutti i generatori di corrente costante) e considerare tutti i condensatori come cortocircuiti. In questo modo, il condensatore di bypass, che è in parallelo alla resistenza R_S, di fatto la esclude dal circuito. Sotto queste condizioni possiamo analizzare il circuito, che presenta due stadi, il primo composto dall'amplificatore operazionale e il secondo composto dal transistor.

Per quanto riguarda il primo stadio, ovvero quello dell'operazionale, si ha che la corrente i_{in} ha due percorsi, uno verso R_1 e uno verso R_2, che si trovano in parallelo tra loro. La corrente non va verso l'operazionale perché sappiamo che non può entrare nell'ingresso dell'amplificatore. L'ipotesi che si fa è che l'operazionale sia in zona lineare, e quindi che valga il principio del cortocircuito virtuale. Dato che il morsetto non invertente è a massa, per il principio del cortocircuito virtuale, ci sono $0\ V$ anche sul morsetto invertente.
Dato che R_1 si trova in parallelo all'ingresso dell'operazionale, si ha che ad entrambi i capi di questa resistenza ci sono $0\ V$, e quindi la caduta di potenziale è nulla e non scorre corrente.
Questo significa che la corrente I_{in} scorre solo verso la resistenza R_2, e poi va a massa attraverso l'uscita dell'operazionale. Chiamando X in nodo in uscita all'operazionale, la tensione $v_X = -i_{in} R_2$.
Il circuito equivalente è il seguente a sinistra. In quello a destra è stato sostituito il transistor con il circuito equivalente per piccoli segnali.





Quello che vogliamo trovare è il guadagno di corrente $A_I = i_{out}/i_{in}$, dove i_{out} è la corrente che scorre su R_L.

La corrente i_{out} è data dalla corrente $g_m v_{gs}$ partizionata tra le due resistenze R_D e R_L, presa con il segno opposto perché è considerata positiva la corrente che scorre dall'alto verso il basso in R_L:

$$i_{out} = -g_m v_{gs} \frac{R_D}{R_D + R_L}$$

La tensione $v_{gs} = v_g - v_s = v_g$ dato che il source è a massa. Ma come abbiamo visto prima, il gate è connesso direttamente all'uscita dell'operazionale, quindi $v_{gs} = v_g = v_X = -i_{in} R_2$. Quindi, si ottiene:

$$i_{out} = -g_m v_{gs} \frac{R_D}{R_D + R_L} = -g_m * (-i_{in} R_2) * \frac{R_D}{R_D + R_L} = g_m i_{in} R_2 \frac{R_D}{R_D + R_L}$$

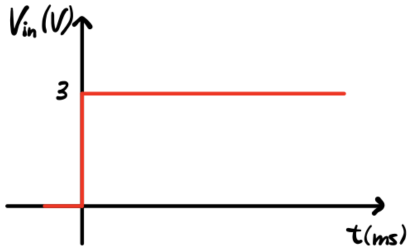
Il guadagno di corrente del circuito è quindi pari a:

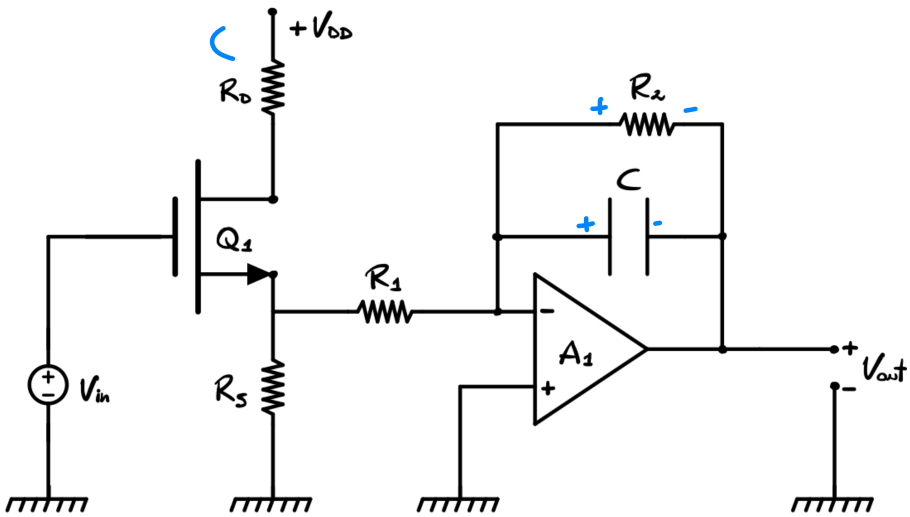
$$A_I = \frac{i_{out}}{i_{in}} = g_m R_2 \frac{R_D}{R_D + R_L} = +8$$

Esercizio:

Del circuito seguente, considerando in ingresso il gradino di tensione riportato in figura, e considerando l'amplificatore operazionale ideale, calcolare e graficare (indicando i valori di tensione e gli istanti di tempo corretti) l'andamento nel tempo della tensione di uscita V_{out} (considerare il condensatore inizialmente scarico $V_C(t = 0) = 0\ V$).

I dati sono i seguenti:
- Amplificatore operazionale ideale con $L^+ = -L^- = 12\ V$;
- Q_1: $\{\ V_{tg} = 1\ V,\ K = 0.5\ mA/V^2,\ \lambda = 0\ \}$;
- $R_D = 6\ k\Omega, R_S = 4\ k\Omega, R_1 = 4\ k\Omega, R_2 = 8\ k\Omega$, C = 0.5 μF, $V_{DD} = 10\ V$.





La dinamica di tutto il circuito è compresa tra $+V_{DD}$ e $0\ V$.
Dato che non sono presenti condensatori connessi al transistor, quando la tensione V_{in} varia istantaneamente da $0\ V$ a $3\ V$, anche la tensione sul gate varia istantaneamente allo stesso modo, e di conseguenza anche quelle sul drain e sul source.

Per $t < 0$: la tensione $V_{in} = 0\ V$, quindi la tensione $V_G = 0\ V$. Affinché un transistor sia in conduzione, la tensione $V_{GS} > V_{th}$, quindi, essendo $V_{th} = 1\ V$ e $V_G = 0\ V$, sul source deve esserci una tensione $V_S \leq -1\ V$. Dato che una tensione negativa esce dalla dinamica del circuito, si ha che per $t < 0$ il transistor è interdetto, ovvero il transistor si comporta come un circuito aperto nei confronti della corrente di drain, che di conseguenza è nulla, e quindi è nulla anche la tensione sul source ($V_S = 0$) e la corrente che scorre su R_1.
Inoltre, bisogna notare che le due resistenze R_1 e R_S, sono in parallelo tra loro, dato che entrambe hanno un nodo in comune (il source) e hanno l'altro nodo a $0\ V$. In particolare, R_S ha l'altro nodo a $0\ V$ perché è connessa direttamente a massa, mentre R_1 lo ha perché se si considera l'operazionale in zona di linearità, i morsetti si trovano a $0\ V$.

Per $t \geq 0$: la tensione $V_{in} = 3\ V$. In questo caso il transistor è sicuramente in conduzione, calcoliamone quindi la polarizzazione:

$$\begin{cases} V_G = V_{GS} + (I_D R_{S//1}) \\ I_D = K(V_{GS} - V_{th})^2 \end{cases}$$

$3 = x + 2y$ $\quad 3 = x + x^2 + 1 - 2x$

$y = \frac{1}{2}(x-1)^2$ $\quad x^2 - x - 2$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$ $\quad -1$, 2

Risolvendo il sistema, si ottiene: $V_{GS} = 2\ V$, $I_D = 0.5\ mA$, $V_S = I_D R_{S//1} = 1\ V$.
Quindi abbiamo che la tensione di source, che è la tensione in ingresso alla seconda parte del circuito (quella con l'operazionale), passa istantaneamente da $0\ V$ a $1\ V$ per $t \geq 0$.

Dobbiamo trovare la V_{out}, ovvero la tensione in uscita all'amplificatore operazionale. Dato che l'operazionale si ipotizza in zona lineare, vale il principio del cortocircuito virtuale, e quindi la tensione di uscita è la tensione presa ai capi del condensatore, oppure (equivalentemente, dato che sono in parallelo) ai capi di R_2: $V_{out} = -V_C = -V_{R2}$. Il segno meno deriva dal fatto che la tensione V_{out} è presa positiva rispetto a massa, e quindi in senso opposto rispetto alla caduta di potenziale sul condensatore o su R_2.

Il condensatore va considerato inizialmente scarico, quindi per $t < 0$, dato che non scorre corrente, il condensatore rimane scarico, ovvero la tensione di uscita è $V_{out}(t < 0) = 0\,V$.

Invece, per $t \geq 0$ la tensione sul source diventa istantaneamente $1\,V$. Inizialmente, dato che la differenza sia ai capi di R_2 che di C è $0\,V$, la corrente non può scorrere sulla resistenza e quindi va a finire tutta sul ramo del condensatore, il quale inizia a caricarsi. Man mano che si carica aumenta la differenza ai suoi capi e di conseguenza, dato che sono in parallelo, aumenta anche la differenza di potenziale ai capi di R_2 e quindi inizia a scorrere corrente anche sulla resistenza, mentre quella che fluisce nel condensatore diminuisce (deve sempre valere l'equazione al nodo $I_1 = I_2 + I_C$, dove I_1 è la corrente che scorre su R_1, I_2 è la corrente che scorre su R_2 e I_C è la corrente che scorre sul condensatore). Quindi, si ha un andamento esponenziale della tensione ai capi del condensatore, e quindi anche della tensione di uscita.
Per calcolare la tensione di uscita applichiamo quindi il metodo asintotico:

$$|V_{out}| = V_C(t) = V_C(\infty) - [V_C(\infty) - V_C(0^-)]^{-\frac{t}{\tau}}$$

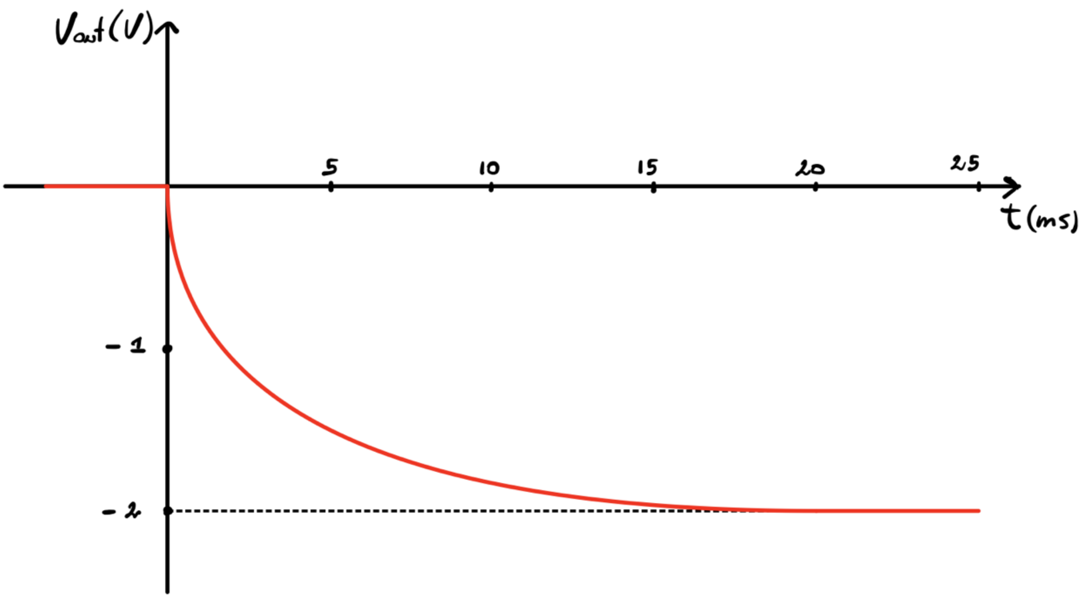
Bisogna quindi calcolare $V_C(\infty)$, $V_C(0^-)$ e τ.

La tensione $V_C(0^-) = 0$ V, come già detto in precedenza.

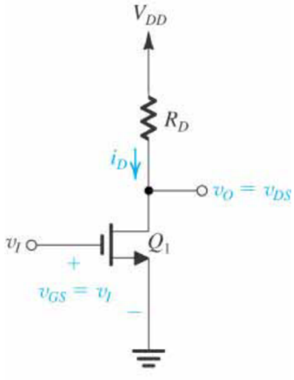
La tensione $V_C(\infty)$ è la tensione ai capi del condensatore una volta terminato il transitorio di carica. In questo caso, se termina il transitorio, tutta la corrente I_1 scorre sulla resistenza R_2 perché il condensatore è carico e quindi può essere considerato un circuito aperto (dato che non c'è più una corrente che lo carica).
Quindi, la differenza di potenziale ai capi del condensatore è la differenza di potenziale ai capi di R_2, dove sta scorrendo tutta la corrente I_1, ovvero $V_C(\infty) = I_1 R_2 = 0.25\,mA * 8\,k\Omega = 2\,V$.

La costante di tempo $\tau = CR_{eq}$, dove R_{eq} è la resistenza equivalente vista dal condensatore. Il condensatore vede come resistenza equivalente sicuramente R_2 e anche la resistenza infinita (guardando verso il basso. Il calcolo di tale resistenza è stato fatto nell'analisi del circuito integratore). Quindi, si ottiene $R_{eq} = R_2 = 8\,k\Omega$ e $\tau = CR_2 = 4\,ms$.
Quindi, si può considerare il transitorio del condensatore concluso dopo circa $5\tau = 20\,ms$.

Graficando la tensione di uscita rispetto al tempo si ottiene:



- Ruolo della resistenza R_D nei transistor come amplificatori:



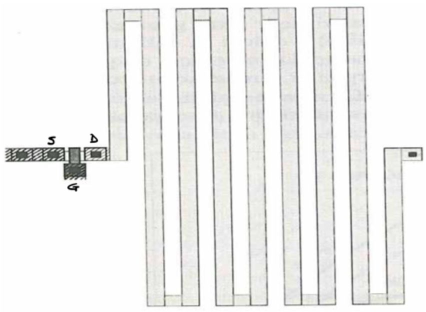
Il guadagno di un circuito che utilizza un transistor come amplificatore, nel caso di piccoli segnali, è dato da:

$$\boxed{A_V = -g_m R_D}$$

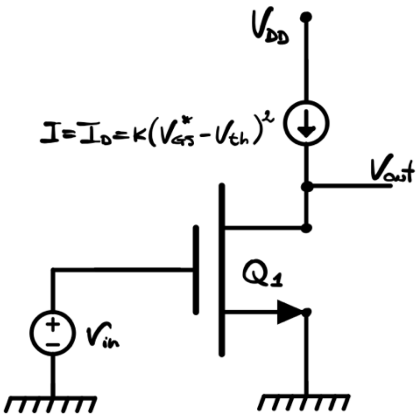
Quindi dipende direttamente dalla resistenza di drain. In particolare, più è grande la resistenza di drain e più è alto il guadagno che si ottiene (e la caratteristica ha una pendenza maggiore.)
Questo fa pensare che la cosa migliore da fare è aumentare la resistenza di drain così da ottenere un forte guadagno, ma ci sono principalmente due problemi.
Il primo è che R_D influisce anche nella polarizzazione del transistor e, in particolare, una delle condizioni che devono essere rispettate è la seguente:

$$\longrightarrow \quad V_{DS} = V_{DD} - I_D R_D > V_{GS} - V_{th}$$

quindi, se si aumentasse troppo la resistenza di drain si potrebbe violare questa condizione che è una delle due condizioni necessarie per avere il transistor in zona di saturazione. Inoltre, una resistenza elevata sposta il punto di lavoro del transistor.



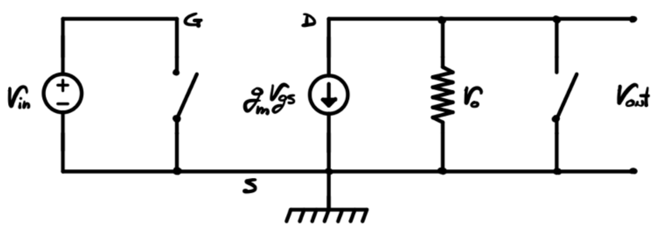
Il secondo motivo è che l'elettronica attuale si occupa praticamente solo di circuiti integrati, quindi le dimensioni dei dispositivi sono molto piccole. Sotto quest'ottica, una resistenza R_D troppo elevata occuperebbe un'area di chip troppo grande e non sarebbe quindi utilizzabile. In figura si può vedere una resistenza di $10\ k\Omega$ (che non è neanche troppo elevata) in confronto al transistor a cui fa riferimento. Una soluzione di questo tipo è difficilmente praticabile in un circuito integrato, poiché l'area occupata dalla resistenza è troppo elevata.



Per risolvere questo problema si può impostare il circuito come in figura, dove si usa un generatore di corrente posto sopra al drain per polarizzare il transistor. Infatti, per quanto riguarda l'analisi per piccoli segnali, il generatore di corrente fissa la corrente di drain I_D ad un valore I, e se si suppone il transistor in saturazione, si ha

$$I_D = I = K(V_{GS}^* - V_{th})^2$$

dove V_{GS}^* è la tensione di polarizzazione del transistor, che quindi può essere gestita variando opportunamente il valore della corrente I.
Inoltre, quando si analizza il circuito dal punto di vista del segnale, annulla l'effetto di tutti i generatori di tensione/corrente costanti, e quindi in pratica si mette a massa il generatore V_{DD} e si apre il generatore di corrente I.
In questo modo, la resistenza di drain che vede il transistor dal punto di vista del segnale, è una resistenza infinita (un circuito aperto). Il circuito equivalente per piccoli segnali, tenendo conto anche della resistenza r_o che è tanto più elevata quanto è ideale il transistor (transistor ideale $\rightarrow\ r_o = \infty$), è quello in figura
e il guadagno complessivo è:



$$A_V = -g_m r_o \approx -\infty$$

quindi, si ottiene un guadagno molto elevato.

L'uso di un generatore di corrente risolve il primo problema, che era quello dell'uso di una resistenza di drain opportuna, ma risolve anche il secondo problema, ovvero quello dell'occupazione dell'area di chip. Infatti, un generatore di corrente, come abbiamo visto, può essere costruito attraverso un altro transistor, quindi l'occupazione d'area è di molto inferiore rispetto a quella di una resistenza.

- TRANSISTOR NMOS E CMOS CON DISPOSITIVI DI CARICO NMOS E PMOS:

Per utilizzare un transistor come amplificatore, abbiamo quindi bisogno di due transistor:

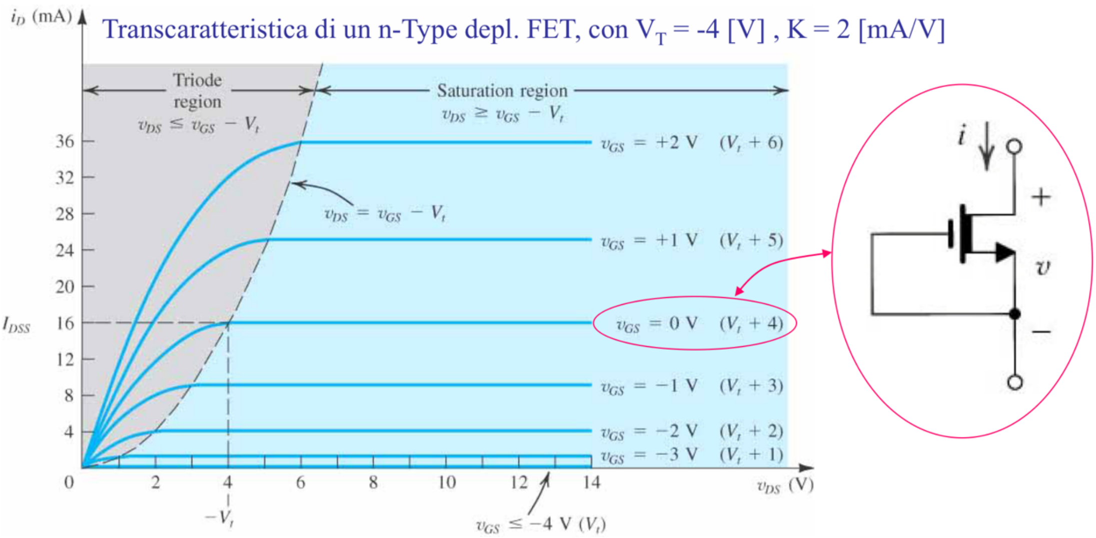
- un transistor NMOS come driver, ovvero come transistor centrare per l'amplificazione del segnale;
- un transistor NMOS o PMOS come dispositivo di carico, ovvero come generatore di corrente al posto della resistenza.

Se si utilizza un transistor NMOS come dispositivo di carico, si parla di *tecnologia NMOS* (perché entrambi i transistor del circuito sono di tipo n), mentre se si utilizza un transistor PMOS, si parla di *tecnologia CMOS*, (C = complementary, perché si utilizzano entrambi i tipi di transistor).
Quindi si hanno in totale due opzioni:

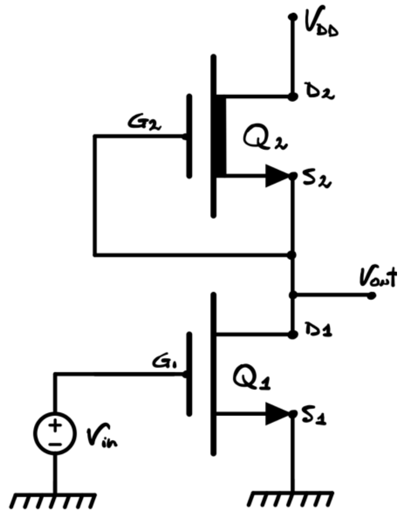
- transistor NMOS: transistor driver NMOS e dispositivo di carico NMOS;
- transistor CMOS: transistor driver NMOS e dispositivo di carico PMOS.

- Dispositivi di carico in tecnologia NMOS:

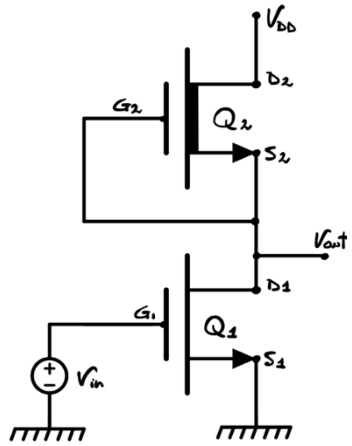
Come sappiamo, i transistor (sia NMOS che PMOS) possono essere ad arricchimento e a svuotamento. Noi vedremo i l'utilizzo di transistor NMOS a svuotamento come dispositivi di carico, ovvero utilizzati al posto della resistenza di drain.
Un transistor a svuotamento è normalmente on, ovvero durante il processo di fabbricazione viene creato il canale che unisce drain e source. Quindi, applicando una tensione sul drain, anche senza applicare una tensione di polarizzazione sul gate, la corrente tra drain e source riesce a scorrere. Poi, applicando una tensione sul gate positiva, il canale diventa sempre più carico di elettroni e quindi la corrente scorre più facilmente, mentre applicando una tensione sul gate negativa si ottiene l'effetto opposto. Le transcaratteristiche di un NMOS a svuotamento sono le seguenti:



Utilizzando un transistor a svuotamento come dispositivo di carico in un circuito amplificatore, si ottiene il seguente schema circuitale, dove il transistor driver è un transistor NMOS ad arricchimento, mentre il dispositivo di carico è un transistor NMOS a svuotamento.
Il transistor Q_2 che deve funzionare come generatore di corrente deve essere indipendente dal transistor driver Q_1, perché la corrente che genera deve andare a polarizzare proprio il transistor driver, e non deve variare se in ingresso si ha un segnale. Quindi, si deve andare a rendere indipendente la polarizzazione del transistor Q_2 e per fare questo è sufficiente cortocircuitare il gate G_2 e il source S_2 in modo che la tensione $V_{GS2} = 0$ sempre, e quindi è stata fissata la polarizzazione del transistor Q_2 alla transcaratteristica cerchiata in rosso nella figura sopra (e quindi è stata anche fissata la corrente in modo indipendente da Q_1). Lo schema circuitale che si ottiene è quello in figura a destra.



- ANALISI DEL CIRCUITO:



Andiamo ad analizzare il circuito sotto il punto di vista della transcaratteristica e del guadagno.

- *Analisi della transcaratteristica:*

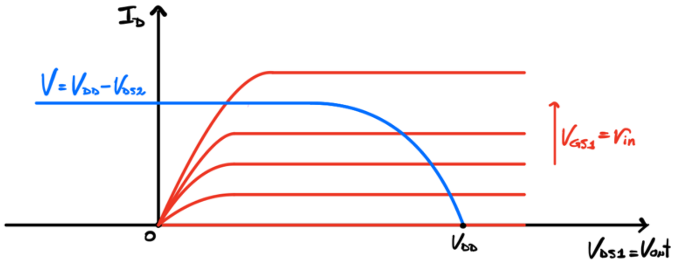
La transcaratteristica è il luogo dei punti di lavoro del circuito. Per trovare il punto di lavoro dobbiamo risolvere l'equazione alla maglia di uscita:

$$\rightarrow V_{DD} - V_{DS2} = V_{DS1}$$

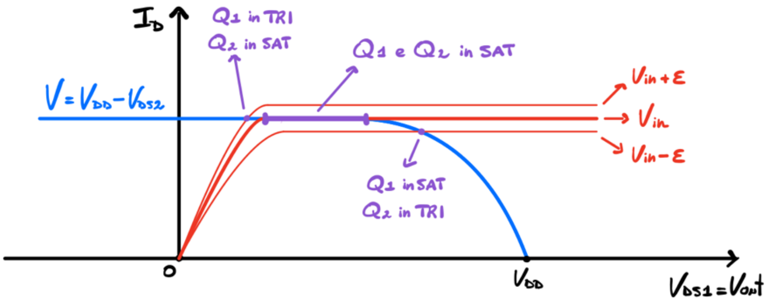
dove il membro di sinistra è una funzione f della corrente di drain I_D, che è per forza la stessa per entrambi i transistor, e il membro di **DESTRA** è una funzione g della corrente di drain. Quindi, per risolvere l'equazione, grafichiamo le due funzioni e troviamo il punto di intersezione.

La funzione $f(I_D) = V_{DD} - V_{DS2}$ è detta *curva di carico di* Q_1 ed è la funzione graficata in azzurro.

La funzione $g(I_D) = V_{DS1}$ è una delle transcaratteristiche di un transistor MOS ad arricchimento. Graficandone alcune in rosso (al variare di $V_{GS1} = v_{in}$) si ottiene il grafico a destra. I punti di intersezione delle due rette sono i punti di lavoro del circuito, quindi analizzando questo grafico si può tracciare la transcaratteristica (ovvero la funzione ingresso-uscita, $(V_{in} = V_{GS1}) - (V_{out} = V_{DS1})$) del circuito:

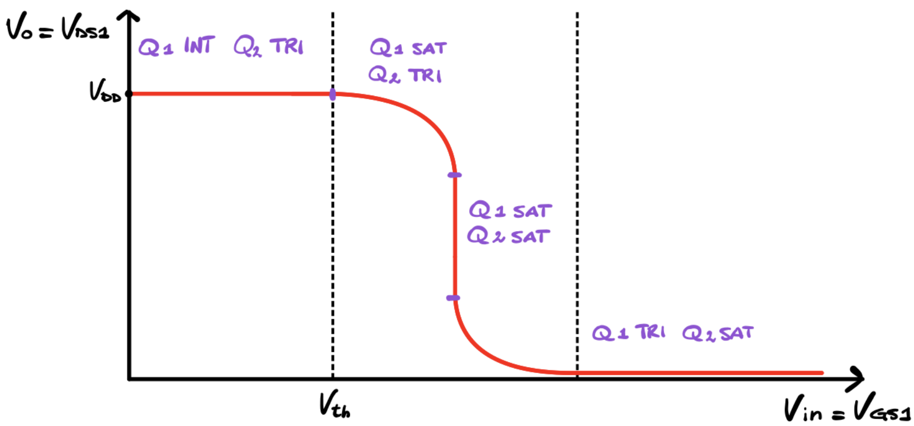


- se $V_{in} = V_{GS1} = 0$: si ottiene $V_{GS1} = 0$, quindi la caratteristica del transistor Q_1 è quella dell'interdizione e $V_{out} = V_{DS1} = V_{DD}$;
- se $0 < V_{in} = V_{GS1} < V_{th}$: il transistor si trova ancora in zona di interdizione, quindi l'uscita è costante a V_{DD}. In questa zona Q_1 è interdetto e Q_2 si trova in zona di triodo;
- al crescere di $V_{in} = V_{GS1}$, il punto di lavoro si sposta man mano più in alto seguendo la curva azzurra. Quando si arriva alla condizione per cui le altezze delle due curve sono le stesse, ovvero la V_{in} ha un preciso valore per cui la curva rossa ha in uscita lo stesso valore della corrente I_D della curva azzurra, entrambi i transistor sono in saturazione. Come descritto in figura, solo per un preciso valore di V_{in} si hanno entrambi i transistor in saturazione, quindi questa zona corrisponde nel grafico della transcaratteristica ad una retta verticale. Dato che la pendenza della transcaratteristica è il guadagno, si ha che questo circuito ha guadagno infinito.

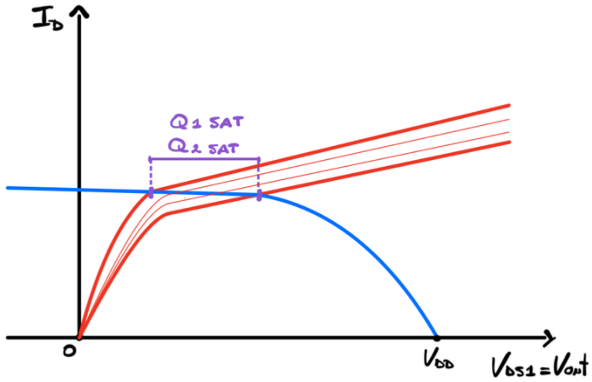


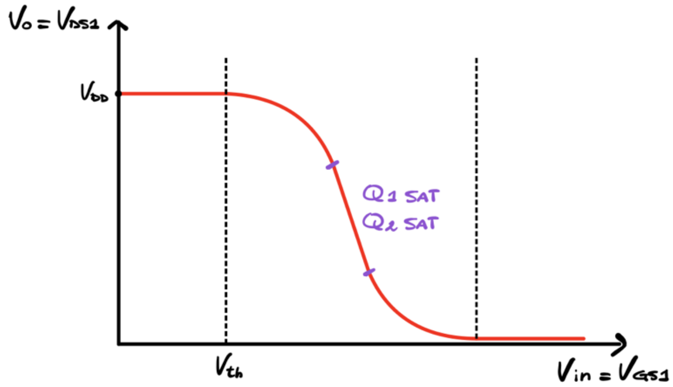
- se la tensione V_{in} cresce ancora, il transistor Q_1 va in zona di triodo (e Q_2 in saturazione), quindi la transcaratteristica tende ad appiattirsi ad un valore molto vicino a zero.

La transcaratteristica del circuito è la seguente:



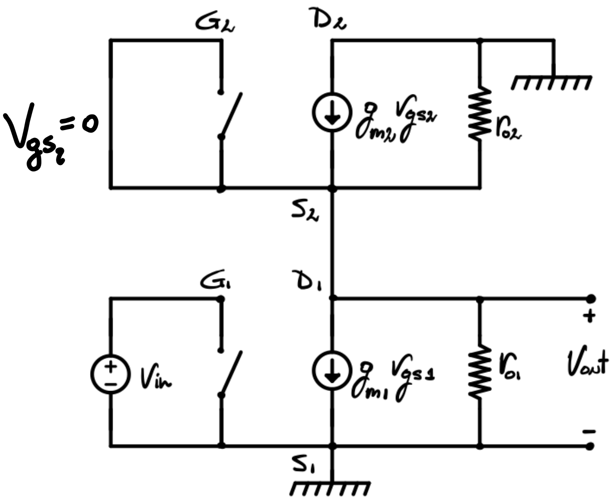
L'analisi eseguita supponeva i transistor ideali. Nel caso di transistor reali la curva azzurra e le curve rosse non hanno la zona di saturazione parallela all'asse delle ascisse, questa ha una pendenza che dipende dalle caratteristiche del transistor. In questo caso non si ha un unico valore di V_{in} per il quale entrambi i transistor sono in saturazione, ma si ha un intervallo di valori. Di conseguenza la pendenza della transcaratteristica non è verticale e quindi il guadagno non è infinito, ma è sempre molto elevato:

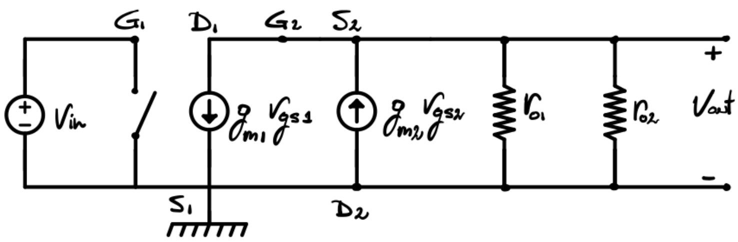




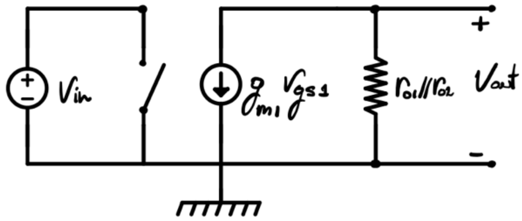
- *Calcolo del guadagno del circuito per piccoli segnali:*

Per fare l'analisi sotto l'ipotesi di piccolo segnale bisogna annullare la presenza del generatore di tensione costante V_{DD} cortocircuitandolo a massa. Sostituendo ai transistor il loro circuito equivalente per piccoli segnali, si ottiene il seguente schema (a sinistra la trasformazione diretta, a destra il circuito di sinistra ridisegnato):





Dato che il gate e il source di Q_2 sono in cortocircuito tra loro, si ha $V_{GS2} = 0 \rightarrow \; g_{m2} v_{gs2} = 0$ per cui, il generatore di corrente $g_{m2} v_{gs2}$ è un interruttore aperto, dato che non fa scorrere corrente. Sostituendo le due resistenze r_{01} e r_{02} con il loro parallelo, si ottiene:



per cui, la tensione di uscita è pari a $V_{out} = -g_{m1} v_{gs1} * r_{01//02} = -g_{m1} v_{in} * r_{01//02}$, e il guadagno di tensione del circuito è:

$$\boxed{A_V = \frac{V_{out}}{V_{in}} = -g_{m1}\, r_{01//02}}$$

Se si considerano i transistor ideali ($r_{01}, r_{02} \rightarrow \infty$) il guadagno è $A_V = -\infty$. Quindi, questo circuito risolve il problema di dover avere resistenze elevate e area di chip ridotta.

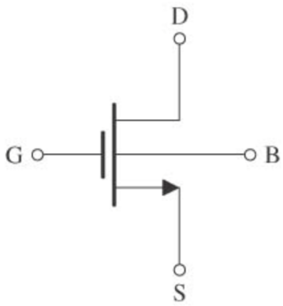
- EFFETTO BODY:

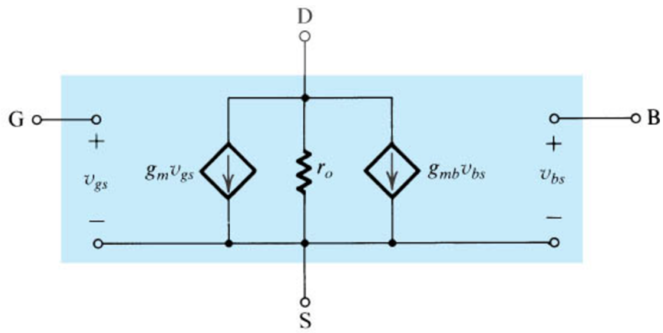
L'analisi fatta fino ad ora è corretta nella misura in cui i due transistor sono due circuiti separati che vengono poi saldati insieme. Nei circuiti integrati però, i transistor si trovano sullo stesso substrato, quindi non sono due circuiti separati.

Il fatto che condividano il substrato va a creare *l'effetto body*: questo si ha quando tra il source e il body è presente una differenza di potenziale diversa da zero.
Ricordando come è fatta una giunzione PN, se si aumenta la tensione ai due capi della giunzione, la zona svuotata aumenta, prendendo parte della zona p e parte della zona n. Quindi, quando tra body e source c'è una tensione diversa da zero, la zona svuotata aumenta di dimensione e quindi il canale dove scorre la corrente tra drain e source e l'isola di source diminuiscono di dimensione (perché parte del volume viene preso dalla zona svuotata).

Nel circuito, la variazione della corrente di drain al variare della tensione V_{GS} è stata modellizzata sotto forma di un parametro che controlla questa variazione.
Ora però, la corrente varia anche se c'è una differenza di potenziale tra source e body, e dal punto di vista elettrico questo è un altro generatore di corrente, controllato dalla differenza di potenziale tra source e body.

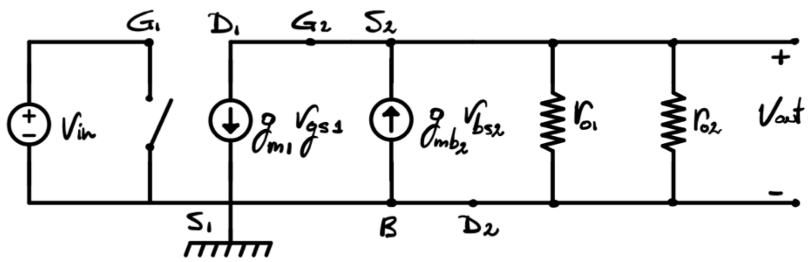
Il circuito equivalente per piccoli segnali di un transistor MOS va modificato, tenendo conto di questo effetto. Si ottiene quindi il seguente schema:



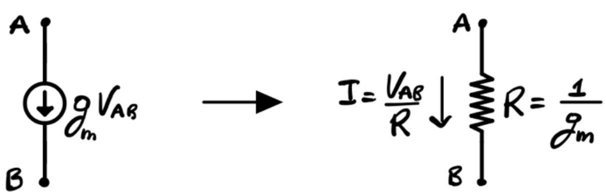


Il parametro che gestisce questo generatore di corrente è sempre una transconduttanza $g_{mb} = 0.2 g_m$, e la tensione che genera la corrente è quella tra il source e il body v_{bs}. Nel caso in cui body e source si trovino allo stesso potenziale $V_B = V_S$, allora si ottiene $v_{bs} = 0$ e quindi il generatore di corrente $g_{mb} v_{bs} = 0$, ovvero è un circuito aperto.

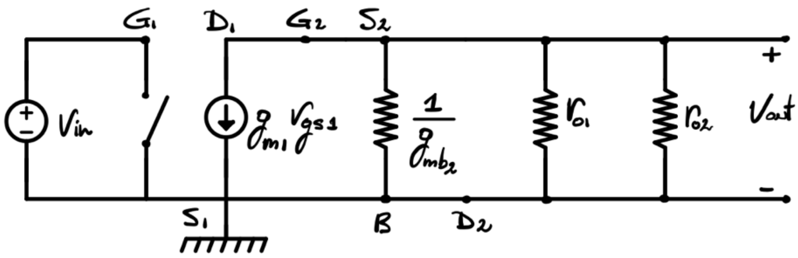
Nel circuito precedente, con il transistor driver e il transistor di carico, l'unico che risente dell'effetto body e quello di carico, dato che il transistor driver ha il source a massa (e quindi alla stessa tensione del body), mentre il transistor di carico ha il source alla tensione V_{out}, dato che è connesso direttamente al drain del transistor driver (il body ovviamente è condiviso tra i due transistor).
Quindi, il circuito precedente cambia nel seguente modo:



In generare, quando si ha un generatore di corrente controllato dalla tensione ai suoi capi $g_m V_{AB}$, si può sostituire tale generatore con una resistenza di valore $1/g_m$, dato che la corrente che scorre nella resistenza è $I = V_{AB}/g_m$:



Quindi, nel circuito si può sostituire il generatore di corrente tra body e source con una resistenza equivalente:



Quindi, il guadagno di tensione del circuito, considerando l'effetto body, è pari a:

$$\boxed{A_V = -g_{m1} * \left(\frac{1}{g_{mb2}} // r_{01} // r_{02}\right)}$$

dove il termine $\left(\frac{1}{g_{mb2}} // r_{01} // r_{02}\right)$ è il parallelo delle tre resistenze. Nel parallelo di resistenze vince sempre la più piccola, quindi essendo $r_{01}, r_{02} \gg 1/g_{mb2}$, le due resistenze r_{01}, r_{02} possono essere trascurate, e si ottiene che il guadagno di tensione del circuito è pari a:

$$\boxed{A_V = -\frac{g_{m1}}{g_{mb2}}}$$

I parametri di transconduttanza sono in generale $g_m = 2K(V_{GS} - V_{th})$, dove $K = C_{ox}\mu_n(W/L)$. Quindi, per aumentare il valore del guadagno si hanno le seguenti opzioni:

- aumentare il valore di K di g_{m1}, ma questo significa aumentare il rapporto W/L, ovvero utilizzare per L il limite inferiore tecnologico e aumentare W;
- diminuire il valore di K di g_{mb2}, ma questo significa diminuire il rapporto W/L, ovvero utilizzare il limite inferiore tecnologico per W e aumentare L.

Quindi, il guadagno dipende dal rapporto tra le due dimensioni dei transistor e per avere un guadagno elevato bisogna avere W_1 e L_2 grandi. In questo modo si ha di nuovo il problema dell'occupazione di area di chip (se si considera l'effetto body).

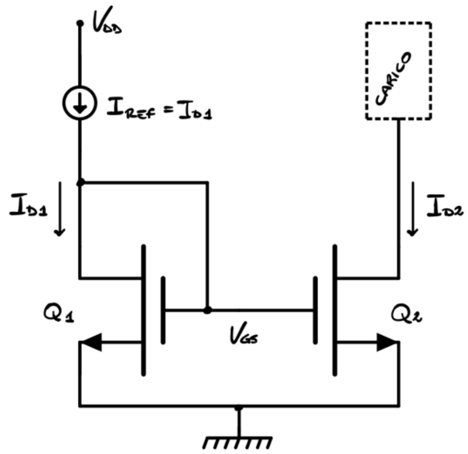
- Dispositivi di carico in tecnologia CMOS:

Per risolvere il problema dell'effetto body si utilizza la tecnologia CMOS, dove come transistor driver viene utilizzato sempre un NMOS ad arricchimento, e come transistor di carico un PMOS ad arricchimento (da qui il nome CMOS – Complementary MOS).

Il problema di utilizzare due transistor ad arricchimento è che sono entrambi normalmente off, quindi bisogna attivare anche il transistor di carico attraverso una corrente di polarizzazione. Per fare questo di usa il circuito a specchio di corrente, già visto in precedenza.

- SPECCHIO DI CORRENTE:

Con il circuito a specchio di corrente si riesce fissare la corrente che scorre su un transistor, polarizzando l'altro transistor attraverso un generatore di corrente che fissa la V_{GS}. In particolare, considerando lo schema in figura, se i due transistor sono entrambi in saturazione (Q_1 è sicuramente in saturazione perché a drain e source cortocircuitati, quindi $V_{DS} > V_{GS} - V_{th}$, perché $V_{GS} = V_{DS}$), si ha che le due correnti di drain sono: $I_{D1} = K_1(V_{GS} - V_{th})^2$ e $I_{D2} = K_2(V_{GS} - V_{th})^2$, dove le tensioni di V_{GS} sono le stesse perché o gate sono cortocircuitati tra loro e le tensioni V_{th} sono le stesse perché i transistor sono costruiti sullo stesso substrato. A questo punto, attraverso il generatore di corrente I_{REF} si fissa la corrente di drain I_{D1} ($I_{D1} = I_{REF}$) e quindi si ottiene una certa tensione di polarizzazione V_{GS}. Di conseguenza, la corrente di drain del secondo transistor è:

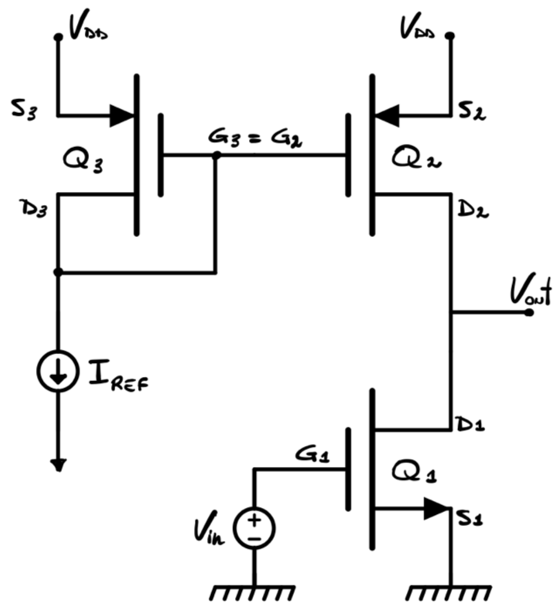


$$\boxed{I_{D2} = I_{REF}\frac{K_2}{K_1}}$$

Quindi la corrente di drain del secondo transistor dipende solo dalla corrente di drain del primo transistor, che viene fissata attraverso un generatore di corrente.
In questo modo Q_2 ha una caratteristica di uscita $I_D - V_{out}$ che è soltanto una, perché V_{GS} viene fissata ad un determinato valore.

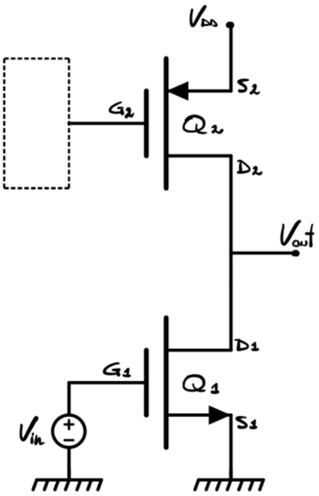
- SCHEMA CIRCUITALE DI UN DISPOSITIVO CMOS:

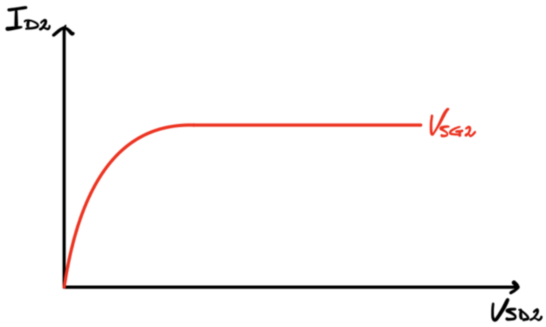
Utilizzando il principio dello specchio di corrente, si costruisce lo schema circuitale di un dispositivo CMOS facendo in modo che il PMOS dello schema, corrisponda al secondo transistor del dispositivo CMOS.
Lo schema circuitale che si ottiene è quello in figura.



- CALCOLO DELLA TRANSCARATTERISTICA:

Anche in questo caso il calcolo della transcaratteristica si fa andando ad analizzare l'equazione alla maglia di uscita e il luogo dei punti di lavoro.
Semplificando il circuito (non disegnando il transistor Q_3) e considerando che la caratteristica di uscita del transistor Q_2 è fissata abbiamo:



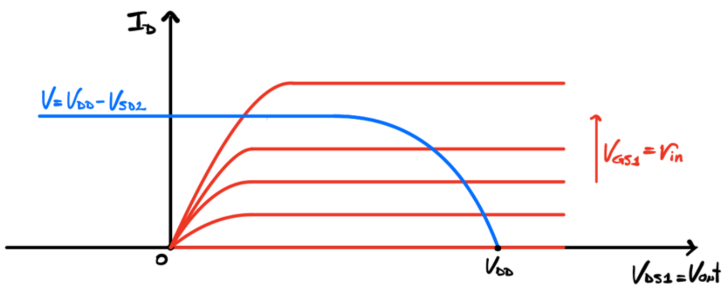


Osserviamo che vengono considerati V_{SD} e V_{SG} invece di V_{DS} e V_{GS} per utilizzare valori positivi.

L'equazione alla maglia di uscita è la seguente:

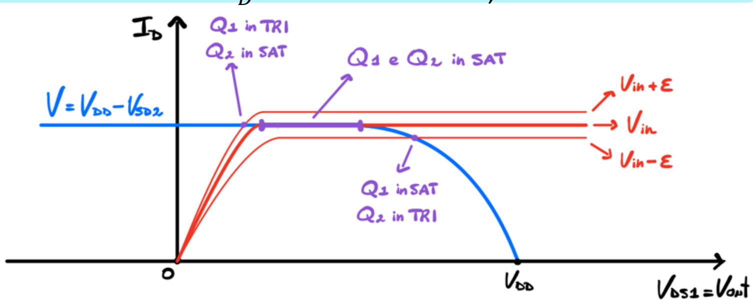
$$\rightarrow (V_{DD} - V_{SD2}) = V_{SD1}$$

La possiamo risolvere in modo grafico andando a tracciare le curve $f(I_D) = V_{DD} - V_{SD2}$ e $g(I_D) = V_{SD1}$ e trovando i punti di intersezione. Il grafico di f è in azzurro, mente quello di g è in rosso e ci sono più curve che dipendono dal valore di $V_{GS1} = V_{in}$.



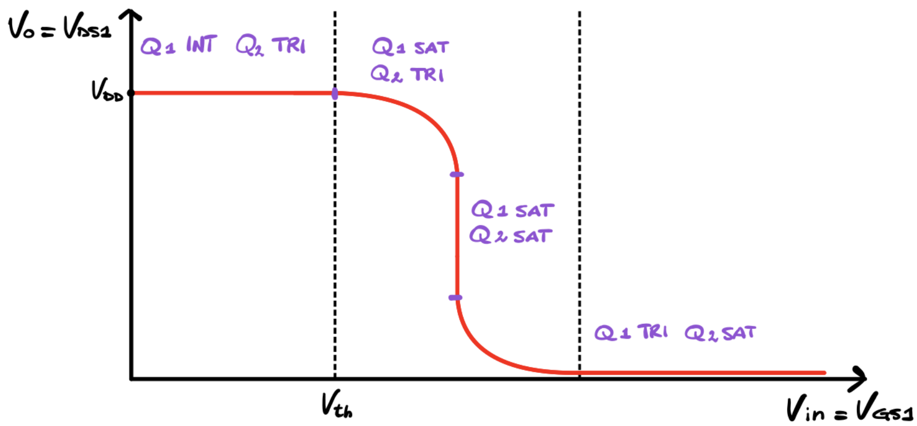
Attraverso questo grafico possiamo andare a tracciare la transcaratteristica del circuito, seguendo i punto di lavoro al variare dell'ingresso:

- se $V_{in} = V_{GS1} = 0$: il transistor Q_1 si trova in interdizione quindi l'uscita è pari a V_{DD};
- se $0 < V_{in} = V_{GS1} < V_{th}$: il transistor Q_1 si trova sempre in interdizione, quindi l'uscita è costante a V_{DD};
- se $V_{in} = V_{GS1} > V_{th}$: per una prima fase, ovvero quando il transistor Q_1 è appena uscito dalla zona di interdizione, si ha che la caratteristica di uscita decresce. In questa fase Q_1 è in saturazione e Q_2 è in triodo.
- al crescere di $V_{in} = V_{GS1}$, il punto di lavoro si sposta man mano più in alto seguendo la curva azzurra. Quando sia arriva alla condizione per cui le altezze delle due curve sono le stesse, ovvero la V_{in} ha un preciso valore per cui la curva rossa ha in uscita lo stesso valore della corrente I_D della curva azzurra, entrambi i transistor sono in saturazione. Come descritto in figura, solo per un preciso valore di V_{in} si hanno entrambi i transistor in saturazione, quindi questa zona corrisponde nel grafico della transcaratteristica ad una retta verticale. Dato che la pendenza della transcaratteristica è il guadagno, si ha che questo circuito ha guadagno infinito.



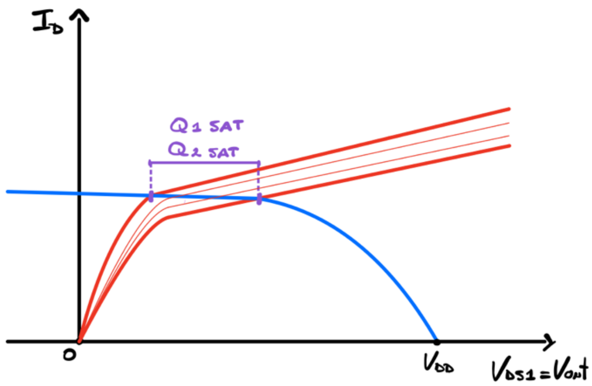
- se la tensione V_{in} cresce ancora, il transistor Q_1 va in zona di triodo (e Q_2 in saturazione), quindi la transcaratteristica tende ad appiattirsi ad un valore molto vicino a zero.

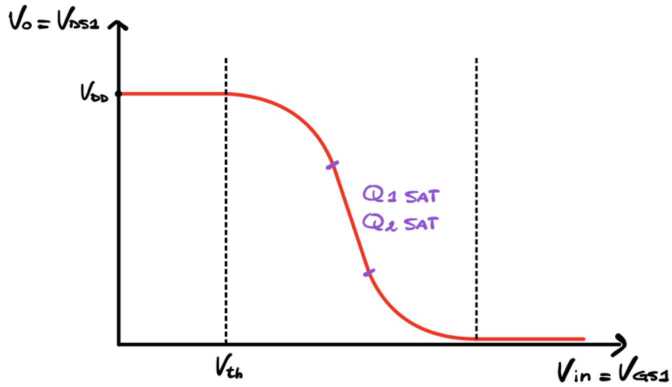
Il grafico della transcaratteristica del circuito, per transistor ideali, è quindi il seguente:



In questo caso il guadagno del circuito è $A_V = -\infty$.

L'analisi eseguita supponeva i transistor ideali. Nel caso di transistor reali la curva azzurra e le curve rosse non hanno la zona di saturazione parallela all'asse delle ascisse, questa ha una pendenza che dipende dalle caratteristiche del transistor. In questo caso non si ha un unico valore di V_{in} per il quale entrambi i transistor sono in saturazione, ma si ha un intervallo di valori. Di conseguenza la pendenza della transcaratteristica non è verticale e quindi il guadagno non è infinito, ma è sempre molto elevato:



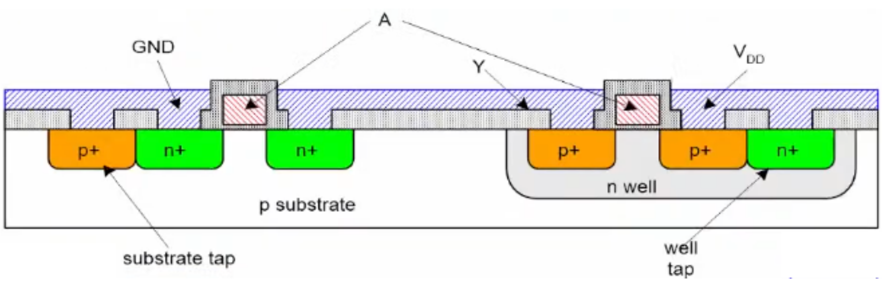


In questo caso il guadagno del circuito è molto grande e dipende dalle resistenze dei due transistor.

- EFFETTO BODY:

Come abbiamo visto, la struttura del guadagno e della transcaratteristica è la stessa di un dispositivo NMOS, e quindi anche il guadagno.
Il problema dell'NMOS però stava nel fatto che, mettendo i due transistor sullo stesso circuito integrando, dato che condividevano lo stesso substrato, subiva l'effetto body e il guadagno scendeva drasticamente.

L'effetto body in un dispositivo CMOS è evitabile, perché i substrati dei due transistor sono diversi: il transistor Q_1 ha un substrato di tipo P, mentre il transistor Q_2 ha un substrato di tipo N. Quindi, mettendo il body di Q_1 a massa (o comunque alla tensione più bassa presente nel circuito, quindi se viene alimentato in modo duale il body e il source di Q_1 vengono messi a $-V_{DD}$), come il source di Q_1, e il body di Q_2 a V_{DD} (la tensione più alta del circuito), come il source di Q_2, entrambi i transistor non risentono dell'effetto body perché le tensioni V_{BS1} e V_{BS2} sono entrambi uguali a zero. Mettendo i due body alle tensioni estreme del circuito ci si assicura che siano elettricamente isolate tra loro, perché il diodo che vanno a comporre è sicuramente polarizzato in inversa.



- CMOS COME INVERTER LOGICO:

Il circuito CMOS può essere utilizzato anche come inverter logico, infatti la caratteristica di un inverter è:

- ingresso $0 \rightarrow$ uscita 1;
- ingresso $1 \rightarrow$ uscita 0;

e se andiamo a vedere la transcaratteristica del CMOS abbiamo:

- ingresso $0 \rightarrow$ uscita V_{DD};
- ingresso V_{DD} (o molto alto) $\rightarrow$ uscita 0,

quindi segue esattamente il comportamento di un inverter logico.
Inoltre, un circuito CMOS è molto adattabile come circuito digitale perché la pendenza è molto verticale, a differenza di un NMOS che risente dell'effetto body. Questo perché per un circuito digitale, che deve analizzare le informazioni e restituirle in uscita come $0/1$ non deve mai lavorare nella zona verticale (ovvero quando entrambi i transistor sono in saturazione) perché quella è una zona di indeterminazione. Quindi, più è verticale la pendenza è meglio è.

CIRCUITI DIGITALI

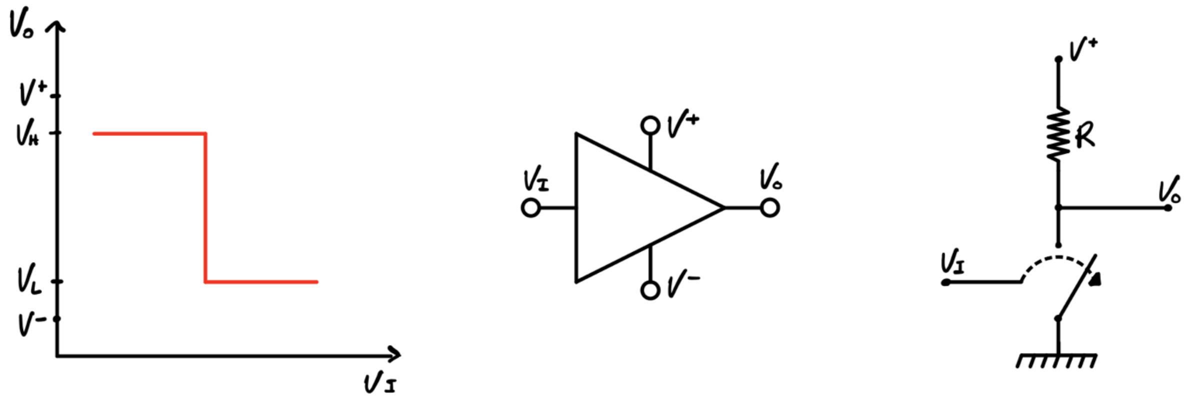
- INVERTER:

Un inverter è un circuito che per un ingresso alto restituisce un'uscita bassa e per un ingresso basso restituisce un'uscita alta. In termini informatici:

- ingresso $0 \rightarrow$ uscita 1;
- ingresso $1 \rightarrow$ uscita 0.

Ovviamente, quando si dice ingresso/uscita alto o basso si intende che il potenziale in un certo nodo passa da un valore ad un altro (che non è per forza 0 e diverso da zero).

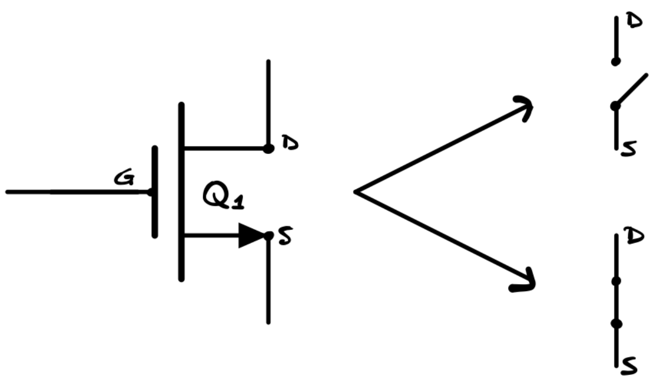
La caratteristica dell'inverter ideale è quella in figura, ovvero una transcaratteristica soglia, dove si passa dal potenziale alto al potenziale basso senza passare per valori intermedi. Il simbolo circuitale dell'inverter è quello al centro. A destra invece è disegnato lo schema di un inverter come un interruttore controllato da una tensione V_I: se la tensione in ingresso è bassa ($V_I < V_{ref}$) l'interruttore si apre, altrimenti si chiude.



Ragionare in termini di potenziale, ci fa capire perché i componenti dei computer hanno una frequenza massima di clock. Infatti, sappiamo che nei circuiti sono quantomeno presenti delle capacità parassite, e queste capacità fanno sì che il passaggio tra un valore di potenziale ad un altro in un certo nodo non sia istantaneo, ma bisogna aspettare che una qualche capacità nel circuito si carichi o si scarichi.

L'interruttore controllato descritto sopra, in termini elettronici è un transistor MOS. Infatti, sappiamo che:

- se $V_{GS} < V_{th}$ il transistor è interdetto, e quindi tra drain e source è presente un interruttore aperto;
- se $V_{GS} > V_{th}$ il transistor è in conduzione, e quindi tra drain e source è presente un canale conduttivo che ha una sua resistenza R_C, la quale è tanto più bassa quanto più è alta la tensione V_{GS}. Se la tensione V_{GS} è sufficientemente alta, la resistenza di canale è praticamente nulla e quindi tra drain e source è presente un cortocircuito.

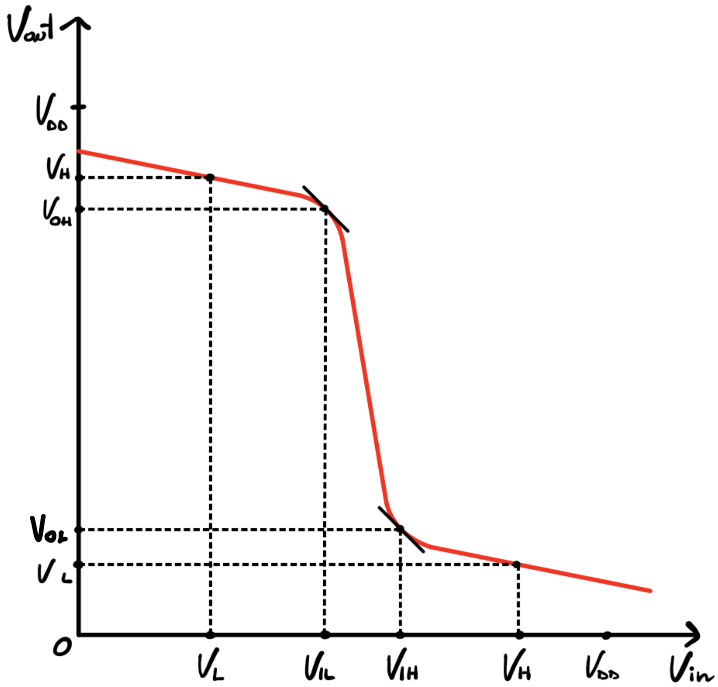


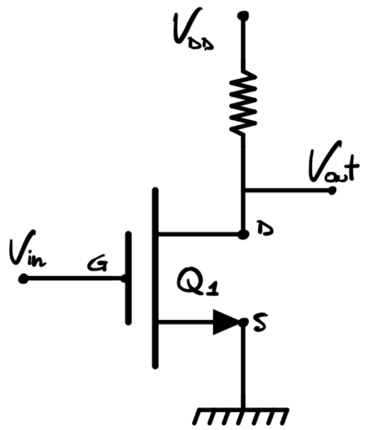
Sappiamo però che la transcaratteristica di un transistor non è affatto come quella ideale dell'inverter, anche se ci assomiglia. Le difficoltà più importanti sono due:

- la pendenza, che nel caso del transistor non è verticale, anche se è molto ripida;
- la simmetria della caratteristica rispetto al punto di commutazione del bit, ovvero l'intervallo di valori tra $V_{in} = V^-$ e $V_{in} = V_{ref}$ deve avere la stessa lunghezza dell'intervallo di valori tra $V_{in} = V_{ref}$ e $V_{in} = V^+$.

Considerando il circuito in figura, con la sua transcaratteristica, i punti critici di diversità rispetto alla caratteristica ideale di un inverter sono:

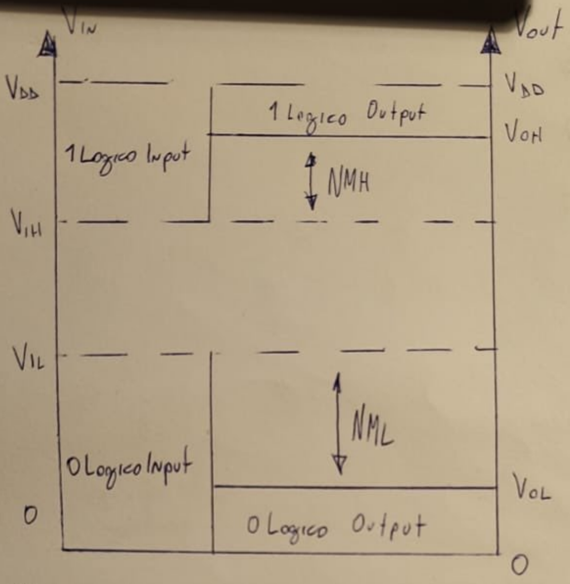
- il segnale del circuito varia tra $0\ V$ e V_{DD}, che sono rispettivamente le tensioni più alte e più basse del circuito. Il valore nominale di un bit 0 non è però $0\ V$, ma è V_L; questo perché se la tensione minima è $0\ V$, anche se viene letto $0.2\ V$ si assegna quel valore al bit 0. In modo analogo si ha per la tensione nominale alta V_H.
- tra la zona di interdizione e saturazione e tra quella di saturazione e triodo sono presenti due punti in cui la pendenza della tangente è -1. Questi punti sono quelli di transizione tra il comportamento come attenuatore e il comportamento come amplificatore del transistor. L'obiettivo è avere un buon margine di valori tra i valori nominali V_L e V_H e i valori dove si ha il passaggio tra attenuatore ad amplificatore V_{IL} e V_{IH}, in modo tale che se entra un disturbo nel circuito, questo si somma alla tensione nominale del bit, ma viene attenuato e non amplificato. Quindi si ha un margine di sicurezza nei confronti di possibili commutazioni di bit dovute all'errore. Questi margini di sicurezza vengono detti *margini di rumore* e sono un'importante caratteristica degli inverter. Osserviamo che il comportamento come attenuatore si ha perché la pendenza della curva è minore di 1 (in valore assoluto), mentre il comportamento dell'amplificatore si ha perché la pendenza è maggiore di 1 (in valore assoluto.)

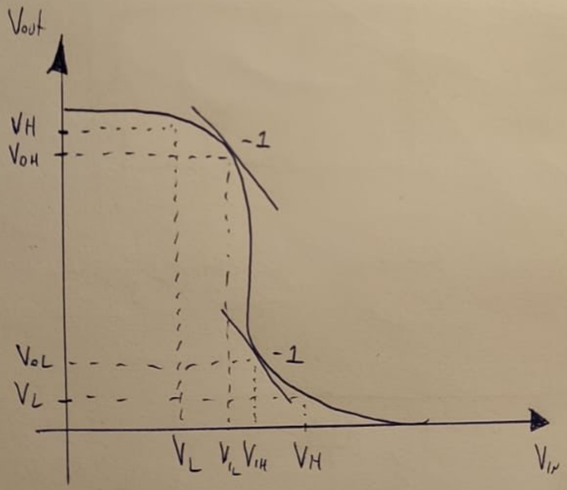




I valori in figura sono:

- V_{DD}: massima tensione del circuito;
- 0: minima tensione del circuito (massa);
- V_L: tensione nominale corrispondente ad uno stato logico basso (uscita dell'inverter per $v_{in} = V_H$);
- V_H: tensione nominale corrispondente ad uno stato logico alto (uscita dell'inverter per $v_{in} = V_L$);
- V_{IL}: massima tensione in ingresso riconosciuta come livello logico basso (tensione in ingresso nel primo punto della transcaratteristica con pendenza -1);
- V_{IH}: minima tensione in ingresso riconosciuta come livello logico alto (tensione in ingresso nel secondo punto della transcaratteristica con pendenza -1);
- V_{OH}: minima tensione di uscita riconosciuta come livello logico alto (tensione di uscita corrispondente alla tensione di ingresso V_{IL});
- V_{OL}: massima tensione di uscita riconosciuta come livello logico basso (tensione di uscita corrispondente alla tensione di ingresso V_{IH}).





$$NM_H = V_{OH} - V_{IH}$$

$$NM_L = V_{IL} - V_{OL}$$

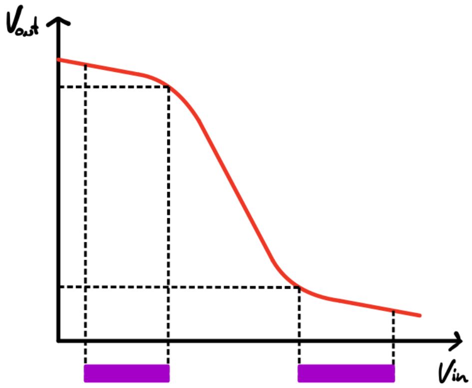
- MARGINI DI RUMORE (NOISE MARGIN):

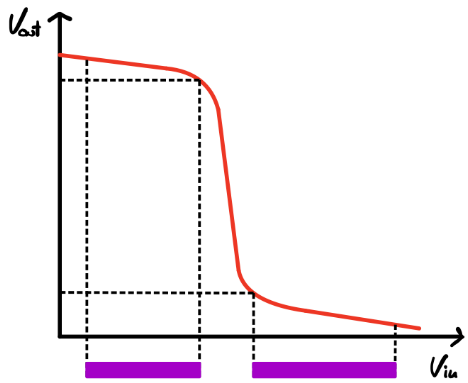
I margini di rumore rappresentano dei margini di sicurezza che evitano che la porta possa produrre dei livelli logici errati in presenza di rumore sovrapposto al segnale in ingresso.
I margini di rumore sono definiti per ingresso logico basso e per ingresso logico alto come segue:

$$\boxed{NM_L = V_{IL} - V_{OL}} \qquad \boxed{NM_H = V_{OH} - V_{IH}}$$

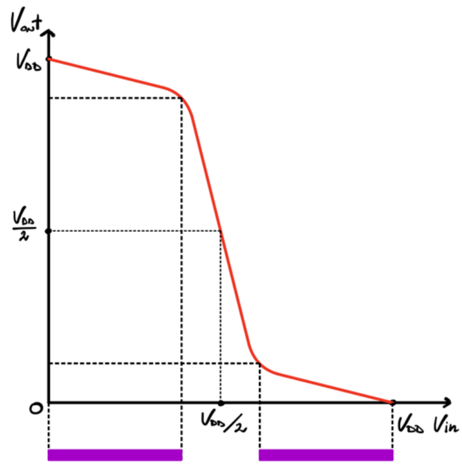
Essendo dei margini di sicurezza si cerca, in fase di progetto, di averli il più possibile elevati, così da garantire maggiore sicurezza e stabilità al circuito.
Per avere i margini di rumore più ampi possibile bisogna tenere conto di due fattori:

- il primo fattore è la pendenza della transcaratteristica: per avere margini di rumore grandi, la transcaratteristica deve avere una pendenza molto elevata, come possiamo vedere in figura:





- il secondo fattore è la traslazione della transcaratteristica: è importante avere entrambi i margini di errore grandi, e con grandezze simili tra loro. Questo perché statisticamente si ha il 50% di possibilità che un bit sia $0/1$, quindi i due margini di errore devono avere il più possibile la stessa grandezza. Per fare questo, supponendo che la dinamica del circuito vari tra 0 e V_{DD}, bisogna avere il centro della dinamica a $V_{DD}/2$, e avere il più possibile le tensioni limite V_L e V_H uguali rispettivamente a 0 e V_{DD} (idealmente devono essere proprio uguali, come in figura).
  Il collo di bottiglia è il margine di sicurezza più piccolo.



- RISPOSTA DINAMICA DI UNA PORTA LOGICA:

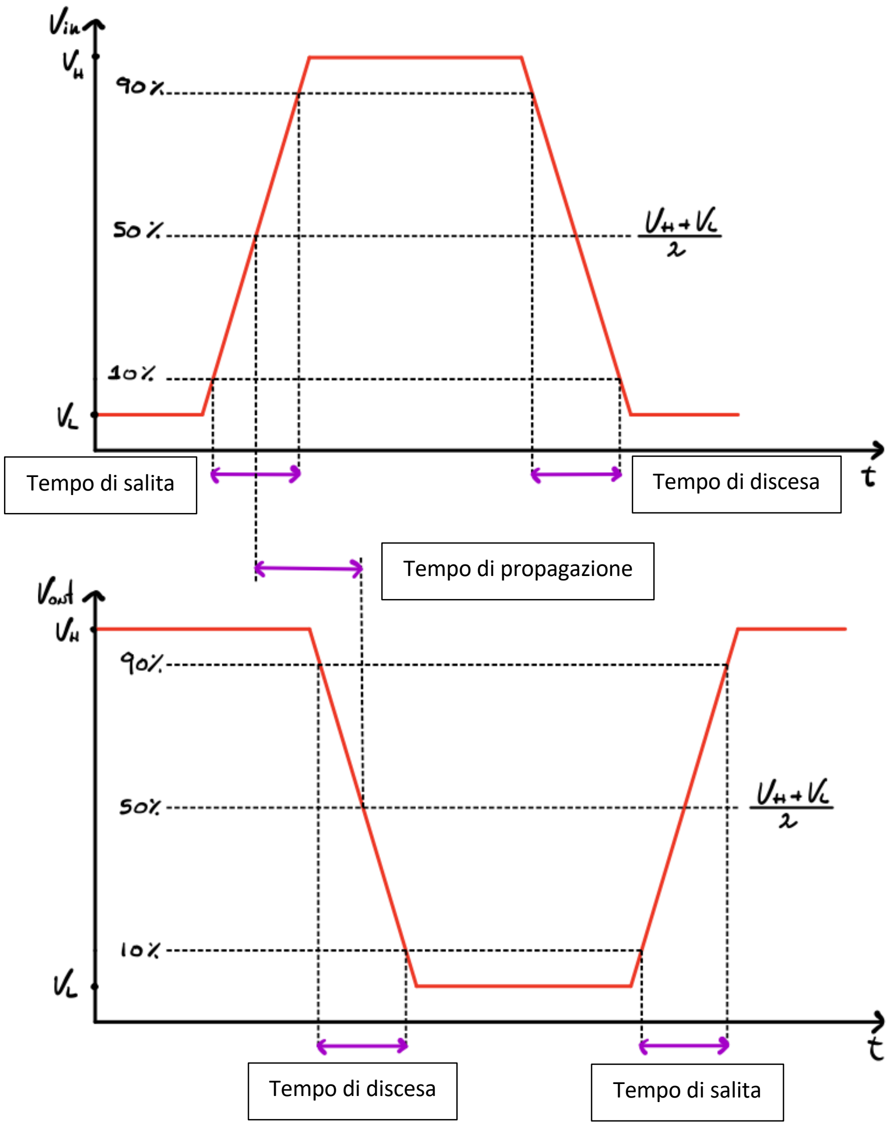
Come sappiamo, all'interno di un circuito sono presenti delle capacità parassite che non permettono il passaggio istantaneo di un nodo da un potenziale ad un altro. Il tempo che impiega un nodo a passare da un potenziale ad un altro è il tempo di carica o di scarica delle capacità che entrano in gioco.

Si definiscono quindi le seguenti due quantità:

- *Tempo di salita*: è il tempo che impiega il potenziale di un nodo a passare dal 10% del valore finale al 90% del valore finale;
- *Tempo di discesa*: è il tempo che impiega il potenziale di un nodo a passare dal 90% del valore finale fino al 10% del valore finale.

Si definisce anche un'altra quantità che è legata al tempo di risposta del circuito, ovvero è il tempo che impiega l'uscita a cambiare da alto/basso a basso/alto dal momento in cui in ingresso è stato ricevuto un cambio da basso/alto o viceversa. Si definisce come:

- *Tempo di propagazione*: è il tempo che impiega l'uscita ad arrivare al 50% del suo valore nominale da quando l'ingresso era arrivato al 50% del suo valore nominale. Si definiscono due tempi di propagazione: t_{PHL}, ovvero il tempo di propagazione high-low per passare da bit alto a bit basso, e t_{PLH} viceversa.



I due tempi di propagazione non è detto che siano uguali, e il collo di bottiglia è il tempo di propagazione più lungo. Idealmente i tempi di propagazione, salita e discesa devono essere zero, quindi, nella pratica, si cerca di ottenerli più piccoli possibile. Essendo il collo di bottiglia il tempo più lungo, bisogna avere i tempi il più piccolo possibile e il più possibile uguali tra loro.

- POTENZA DISSIPATA:

La potenza dissipata è un altro punto critico di cui tener conto. Essendo i dispositivi molto piccoli, non riescono a smaltire molta temperatura attraverso la loro superficie. Per questo motivo, dato che la potenza dissipata si trasforma in calore, è importante mantenerla sotto una certa soglia, altrimenti si rischia di fondere il dispositivo. Quasi la totalità dell'elettronica digitale è CMOS perché consuma meno potenza.

La potenza, in generale, è misurata come $W = V * A$, e quindi è pari alla tensione per la corrente che scorre nel circuito. La potenza dissipata può essere vista sottoforma di due componenti:

$$\boxed{P_{dissipata} = P_{statica} + P_{dinamica}}$$

dove la potenza statica è la potenza dissipata dal circuito in situazioni di staticità, ovvero in situazioni in cui in ingresso c'è un certo bit e in uscita c'è il corrispondente. La potenza dinamica è invece quella dissipata durante la commutazione di un bit.

- *Calcolo della potenza dissipata:*

Per il calcolo della potenza dissipata andiamo a calcolare separatamente prima la potenza statica e poi quella dinamica, facendo riferimento al circuito in figura. Il condensatore sta ad indicare le capacità parassite presenti nel circuito.

La potenza statica può essere calcolata in due situazioni $V_{out} = 1$ e $V_{out} = 0$. Dato che è una situazione statica il condensatore è visto come un circuito aperto, quindi può essere ignorato. Si ottiene:

- $P_{S|V_{out}=1} = VI = V_{DD}I_D = V_{DD} * 0 = 0$, dove $I_D = 0$ perché se $V_{out} = 1$ significa che $V_{in} = 0$ e quindi il transistor è in interdizione;
- $P_{S|V_{out}=0} = VI = V_{DD}I_D = V_{DD} * \frac{V_{DD}}{R} = \frac{V_{DD}^2}{R}$, dove $I_D = \frac{V_{DD}}{R}$ perché se $V_{out} = 0$ significa che $V_{in} = 1$ e quindi il transistor è in triodo, ovvero tra drain e source è presente un cortocircuito e V_{out} è connesso direttamente a massa. In queste condizioni la potenza dissipata è il prodotto di V_{DD} per la corrente che scorre sulla resistenza R per arrivare a massa, ovvero $\frac{V_{DD}}{R}$.

Dato che statisticamente si ha il 50% tempo un bit 1 e il restante 50% un bit 0, la potenza statica totale è la media delle due:

$$\boxed{P_{statica} = \frac{V_{DD}^2}{2R}}$$

Dato che la potenza statica va come il quadrato della tensione di alimentazione, è importante mantenere la tensione di alimentazione bassa, e il minimo possibile è la tensione di soglia del transistor. Per questo motivo si cerca di costruire transistor con tensioni di soglia molto basse.

Il circuito consuma potenza dinamica perché sono presenti delle capacità parassite nel circuito, modellizzate dal condensatore C. In assenza di tali capacità parassite, la potenza dinamica sarebbe nulla.
Anche la potenza dinamica può essere calcolata in due situazioni, quando l'uscita varia da $0 \rightarrow 1$ e quindi l'ingresso sta variando da $1 \rightarrow 0$ e viceversa. Facciamo l'ipotesi che la commutazione in ingresso sia istantanea da V_{DD} a 0.
Quindi, il transistor risponde istantaneamente alla commutazione e diventa (da un cortocircuito) un circuito aperto. La tensione sul condensatore era precedentemente $0\,V$ (perché l'uscita era cortocircuitata a massa dato che il transistor era in triodo, ovvero tra drain e source era presente un cortocircuito) e deve caricarsi verso la tensione V_{DD}.
Il condensatore si carica con la corrente che scorre sulla resistenza R, ma questa non è una corrente costante (perché il potenziale ai capi del condensatore aumenta nel tempo verso V_{DD} e quindi la corrente diminuisce nel tempo verso $0\,V$). Quindi, si ottiene:

1

$$\boxed{P_D = VI = V_{DD} \int I\,dt = V_{DD}Q}$$

Dato che la tensione ai capi del condensatore è $V_C = Q/C$, si ha $Q = CV_C$, quindi terminato il transitorio il condensatore si è caricato completamente e la tensione ai suoi capi è V_{DD}, per cui $Q = CV_{DD}$ e la potenza dinamica è:

2

$$\boxed{P_D = V_{DD} * V_{DD}C = V_{DD}^2 * C}$$

Come possiamo vedere, se la capacità è nulla, la potenza dinamica dissipata è pari a zero.
L'energia accumulata dal condensatore nel processo di carica è pari a:

$$\boxed{\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C V_{DD}^2}$$

ovvero, è esattamente pari alla metà dell'energia richiesta alla batteria per caricare completamente il condensatore. L'altra metà dell'energia (esattamente $(1/2) * CV_{DD}^2$) è stata dissipata sotto forma di calore dalla resistenza R.

Nel passaggio da basso ad alto dell'ingresso, ovvero nel passaggio da $0\ V$ a V_{DD} in ingresso al transistor, si ha che il transistor passa istantaneamente da interdizione a triodo, e quindi il condensatore si ritrova cortocircuitato a massa ed inizia a scaricarsi. In questa fase non è richiesta nessuna energia alla batteria, ma l'energia è totalmente fornita dal condensatore, ovvero il condensatore si scarica fornendo al transistor l'energia $\mathcal{E}_C$ che aveva accumulato nella fase precedente. Quindi il transistor dissipa questa energia (esattamente pari a $(1/2) * CV_{DD}^2$) sotto forma di calore.

In totale, in una commutazione completa da $1 \to 0$ e da $0 \to 1$ dell'ingresso è richiesta alla batteria un'energia a pari a $P_D = V_{DD}^2 * C$; un mezzo di questa energia si dissipa nella prima fase ($0 \to 1$) sotto forma di calore nella resistenza R, mentre la restante metà si dissipa nella seconda fase ($1 \to 0$) sotto forma di calore nel transistor.

Quindi la potenza dinamica dipende da un giro di clock del circuito, ovvero di un passaggio da 1 a nuovamente 1 (dopo essere passato per 0) dell'ingresso. Di questi clock ce ne sono tantissimi nei circuiti digitali (se un PC lavora ad una frequenza di $1\ GHz$ si hanno 10^9 clock al secondo). Per questo motivo, la potenza dinamica dipende dalla frequenza di clock del dispositivo:

3 $$\boxed{P_{dinamica} = V_{DD}^2 C * f}$$

oltre a dipendere dall'alimentazione e dalle capacità parassite del circuito.

La potenza dissipata totale è data da:

$$\boxed{P_{dissipata} = P_{statica} + P_{dinamica} = \frac{V_{DD}^2}{2R} + V_{DD}^2 C * f}$$

dove mediamente la potenza statica pesa di più perché i circuiti digitali si trovano in genere più tempo in situazioni statiche rispetto a situazioni dinamiche.

- RITARDO DI CARICA E SCARICA:

Dato che in uscita al circuito è presente un condensatore (che modellizza le capacità parassite del circuito), variazioni istantanee dell'ingresso dipendono in uscita dal comportamento del condensatore.

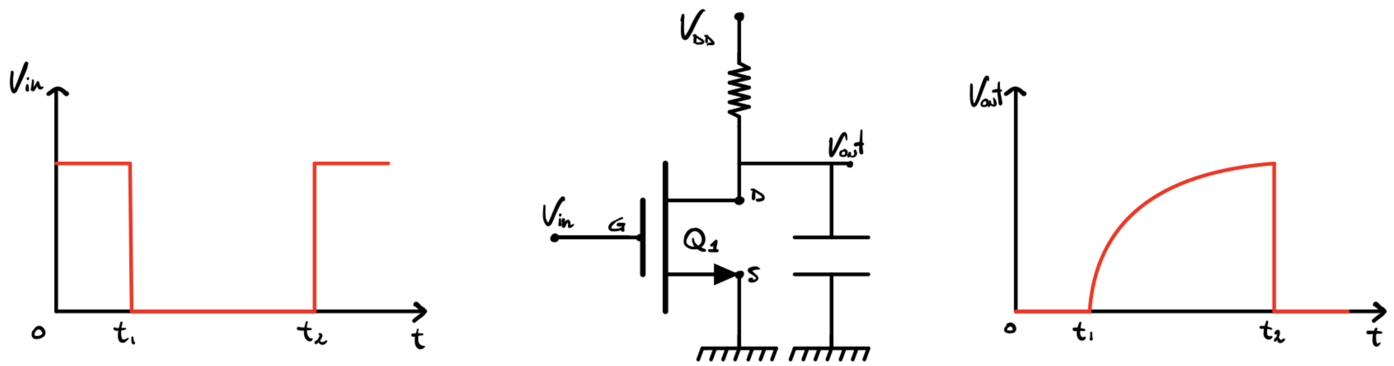
Vediamo come primo caso la variazione dell'uscita da alto a basso dell'ingresso, e di conseguenza da basso a alto dell'uscita.
Se in ingresso è presente una tensione V_{DD} che istantaneamente commuta a 0, si ha che il transistor passa da circuito chiuso a circuito aperto istantaneamente.
Il condensatore inizia a caricarsi perché vede su una delle due armature la tensione che viene da V_{DD} e l'andamento di carica è quello esponenziale, descritto sempre dalla legge:

$$V_{C-LH} = V_{out} = V_C(\infty) - [V_C(\infty) - V_C(t_0^-)]^{-\frac{t-t_0}{\tau_{LH}}}$$

dove: $V_C(t_0^-) = 0\,V$, $V_C(\infty) = V_{DD}$, $\tau_{LH} = RC$, perché la resistenza equivalente vista dal condensatore è solamente la resistenza R. Quindi l'andamento è esponenziale ed impiega circa $5\tau_{LH} = 5RC$ per completare la carica e quindi per passare dal valore basso dell'uscita al valore alto.

Come secondo caso vediamo quello in cui l'ingresso passa istantaneamente da basso ad alto e quindi l'uscita deve commutare da alto a basso.
Se in ingresso è presente una tensione di $0\,V$ che istantaneamente commuta a V_{DD}, si ha che il transistor passa da circuito aperto a circuito chiuso istantaneamente. In questo caso la resistenza equivalente vista dal condensatore è il parallelo della resistenza R e di un cortocircuito, quindi è pari ad una resistenza nulla e $\tau_{HL} = R_{eq}C = 0 * C = 0$.
Quindi la scarica del condensatore è istantanea a zero, dato che la costante di tempo è nulla.

In realtà, il transistor in zona di triodo non ha una resistenza nulla, ma comunque molto bassa, quindi la scarica del condensatore segue sempre l'andamento esponenziale, ma è molto più veloce rispetto alla carica, dato che la constante di tempo è di diversi ordini di grandezza inferiore.



Il collo di bottiglia rimane sempre la costante di tempo più lunga, quindi è necessario diminuire il più possibile la costante di tempo $\tau_{LH} = RC$, e si può fare in due modi:

- diminuire il più possibile C, ovvero ridurre al massimo le capacità parassite, ma ci sono dei limiti tecnologici;
- ridurre la resistenza R.

Il problema sta nel fatto che la potenza statica dissipata è pari a:

$$P_{statica} = \frac{V_{DD}^2}{2R}$$

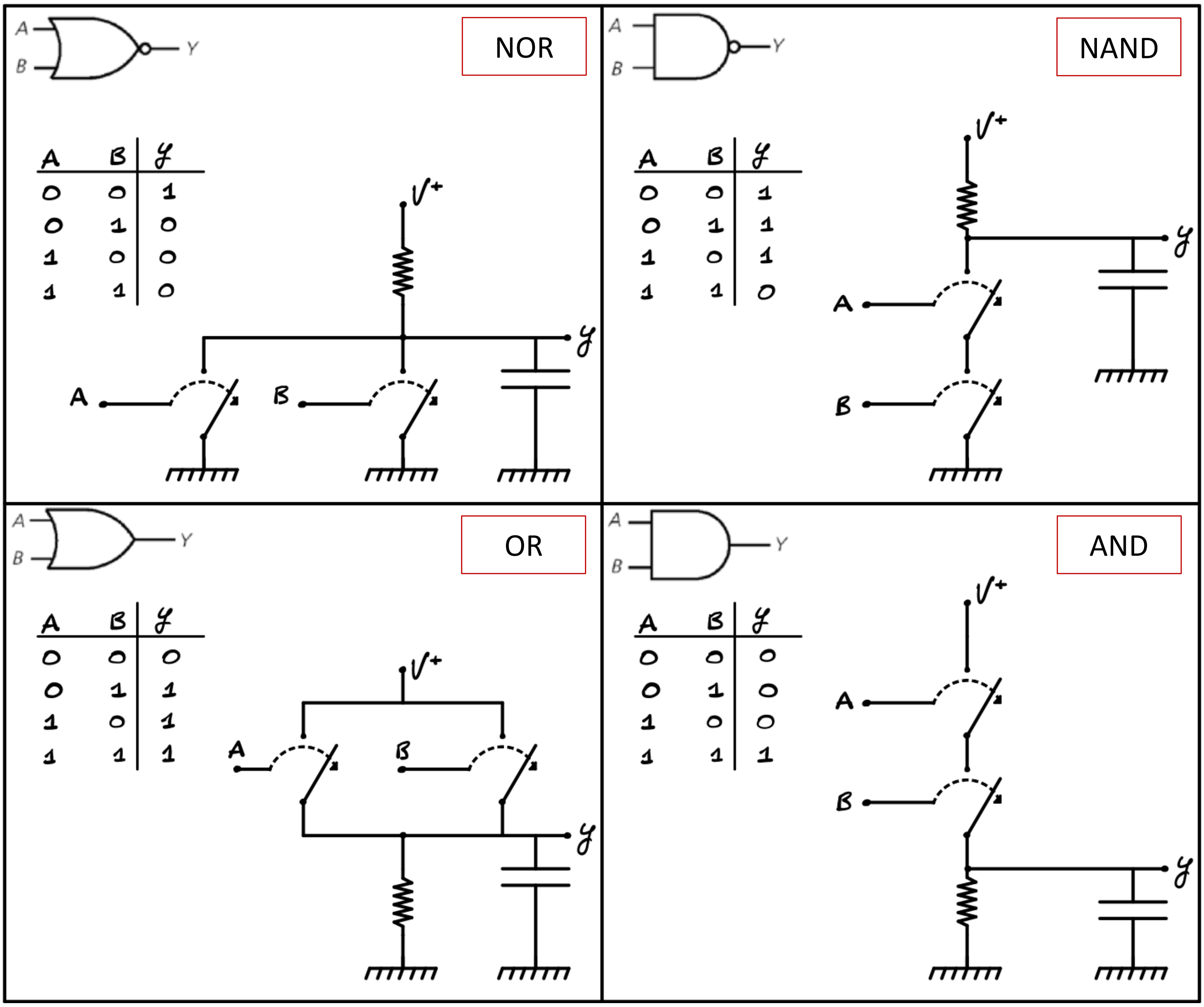
quindi, diminuendo la resistenza R l'inverte è più veloce, ma aumenta la potenza statica dissipata, mentre aumentando R diminuisce la potenza statica dissipata, ma l'inverter è più lento.
Quindi un altro fattore fondamentale è il *prodotto ritardo-potenza dissipata* che sta ad indicare appunto il compromesso trovato per queste due grandezze:

$$\boxed{PDP = P_{statica} * \tau_{LH} = \frac{V_{DD}^2 * C}{2}}$$

- PORTE LOGICHE ELEMENTARI:

Attraverso gli inverter si possono creare le porte logiche elementari usate in informatica. I quattro tipi di porte base sono AND, OR, NAND e NOR. Ognuna di queste porte logiche prende due ingressi e restituisce un output, quindi per ogni circuito che le modellizza devono essere presenti due transistor.
I circuiti si dividono in due parti: *rete di pull-up* ovvero la parte alta della rete, al di sopra dell'output, connessa alla tensione V_{DD}, e *rete di pull-down* ovvero la parte bassa della rete, al di sotto dell'output, connessa a massa.

Gli schemi delle porte logiche AND, OR, NAND e NOR sono i seguenti:

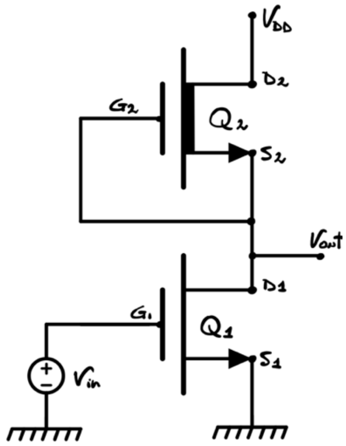


- CIRCUITI DIGITALI IN TECNOLOGIA CMOS:

Abbiamo visto che per aumentare la pendenza della transcaratteristica e quindi ridurre la zona di svuotamento, bisogna avere una resistenza R molto grande, ma non avendo spazio per fare resistenze grandi in circuiti integrati, si utilizzano due tecnologie, la NMOS che utilizza al posto della resistenza un transistor NMOS a svuotamento, e la CMOS che utilizza al posto della resistenza un transistor PMOS ad arricchimento.

- Inverter in tecnologia NMOS:

Nella tecnologia NMOS il circuito è quello in figura, e per calcolare i margini di errore dobbiamo come prima cosa calcolare dal punto di vista analitico la funzione di trasferimento e successivamente calcolarne la derivata e imporla pari a -1. Tra due punti in cui la derivata è -1 si ha la zona di utilizzo del transistor come amplificatore e quindi la zona che corrisponde alla non determinazione per i circuiti digitali. A destra e sinistra di questa zona si hanno i margini di errore, ovvero le zone il circuito viene usato nelle applicazioni digitali.



Calcoliamo come prima cosa il punto dove la derivata è -1 nella zona in cui Q_1 è in saturazione e Q_2 è in triodo. In parallelo all'uscita va sempre considerato il condensatore che modellizza le capacità parassite, ma essendo in una situazione statica, tale condensatore è un circuito aperto. Quindi abbiamo che $I_{D1} = I_{D2}$ dato che i due transistor si trovano in serie.
La corrente di drain di Q_1 è quella di saturazione $I_{D1} = K_1(V_{GS1} - V_{th})^2$, mentre la corrente di drain di Q_2 è quella di triodo $I_{D2} = K_2[2(V_{GS1} - V_{th})V_{DS2} - V_{DS2}^2]$, quindi:

$$I_{D1} = K_1(V_{GS1} - V_{th1})^2 = K_2[2(V_{GS2} - V_{th2})V_{DS2} - V_{DS2}^2] = I_{D2}$$

che è equivalente a:

$$K_1(V_{in} - V_{th})^2 = K_2[2(0 - V_{th})(V_{DD} - V_{out}) - (V_{DD} - V_{out})^2]$$

Questa è la funzione di trasferimento (transcaratteristica) perché come possiamo vedere abbiamo da una parte V_{in} e dall'altra V_{out}, quindi svolgendo i calcoli si trova qualcosa nella forma $V_{out} = f(V_{in})$.

Il problema della tecnologia NMOS è che soffre dell'effetto body e quindi la pendenza della transcaratteristica si riduce drasticamente e il guadagno diventa funzione del rapporto di K_2 e K_1, ovvero dipende dalle dimensioni dei transistor.

Un altro problema dell'inverter NMOS è la potenza dissipata:
- quando l'ingresso è basso e l'uscita è alta, il transistor Q_1 è interdetto e il transistor Q_2 si trova in triodo. La potenza dissipata statica è $P_S = V_{DD} I_D$, ma essendo Q_1 un circuito aperto, $I_D = 0$ e $P_S = V_{DD} * 0 = 0$;
- quando l'ingresso è alto e l'uscita è bassa, il transistor Q_1 è in triodo e quindi equivale ad una resistenza molto bassa (si può considerare nulla), Q_2 è in saturazione e quindi equivale ad un generatore di corrente. Quindi la corrente è decisa da Q_2 ed è pari a $I_{D2} = K_1(V_{GS2} - V_{th})^2 = K_2 V_{th}^2$. Di conseguenza la potenza dissipata statica è pari a $P_S = V_{DD} K_2 V_{th}^2$.

La potenza statica dissipata media è pari a:

$$P_{statica} = \frac{1}{2} V_{DD} K_2 V_{th}^2$$

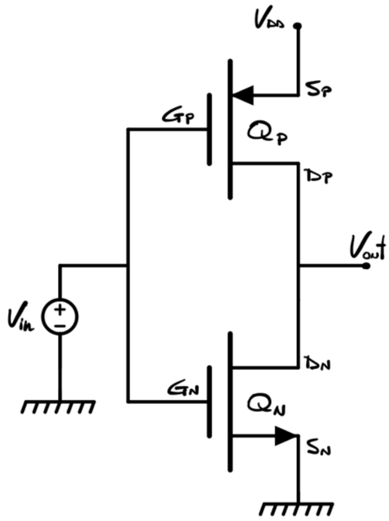
Invece la potenza dinamica da dissipare, ovvero quella sviluppata dalla scarica del condensatore, è pari a:

$$P_{dinamica} = f C V_{DD}^2$$

La maggior parte del tempo il circuito deve dissipare potenza statica e questo rende *inutilizzabile* questa tecnologia al crescere dell'integrazione dei circuiti all'interno di un singolo dispositivo. Quindi si passa alla tecnologia CMOS.

- Inverter in tecnologia CMOS:

In questo caso si usa uno schema leggermente diverso rispetto a quanto visto per gli amplificatori. In particolare, si usa come sempre un transistor NMOS e un transistor PMOS, ma questi hanno i gate connessi alla stessa tensione di ingresso V_{in}. Non si può parlare di transistor driver e transistor di carico perché, come vediamo ora, entrambi contribuiscono allo stesso modo al funzionamento complessivo del dispositivo.



Le tensione gate source dei due transistor sono diverse (per il transistor PMOS si parla di tensione source-gate per mantenere un segno positivo):

- $V_{GSN} = V_{in} - 0 = V_{in}$;
- $V_{SGP} = V_{DD} - V_{in}$;

quindi, al crescere di V_{in}, la tensione V_{GSN} aumenta, mentre V_{SGP} diminuisce. Di conseguenza, i due transistor lavorano in zone complementari perché all'aumentare della tensione V_{in}, il transistor Q_N conduce sempre di più, mentre il transistor Q_P conduce sempre di meno, fino ad arrivare all'interdizione.
In particolare:

- se $V_{in} = 0$ (ingresso basso), il transistor Q_1 si trova in interdizione e quindi è un circuito aperto, il transistor Q_2 si trova in triodo e quindi è un cortocircuito;
- se $V_{in} = V_{DD}$ (ingresso alto), il transistor Q_1 si trova in triodo e quindi è un cortocircuito, il transistor Q_2 si trova in interdizione e quindi è un circuito aperto.

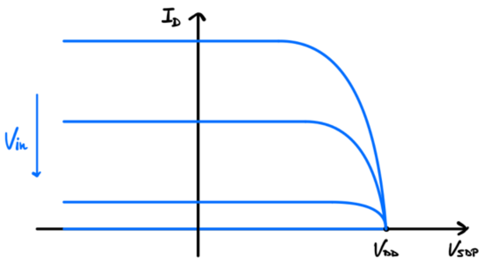
Il motivo principale per cui si utilizza la tecnologia CMOS è proprio questo comportamento complementare, il quale permette di avere potenza statica dissipata sempre nulla. Infatti, grazie a questa caratteristica, la corrente che scorre nel circuito (usato in modo digitale, con ingresso basso o alto) è sempre nulla, perché l'unica maglia che trova è quella che parte da V_{DD} e arriva a massa passando per i due transistor. Essendo, però, i due transistor aperti o chiusi in modo complementare, si ha che almeno uno dei due è sempre aperto e quindi non permette lo scorrimento della corrente nella maglia. Grazie a questa caratteristica, la potenza statica dissipata, ovvero la potenza dissipata quanto in ingresso è presente V_{DD} oppure $0\,V$, è sempre zero, perché è data da $P_S = V * I = V_{DD} * 0 = 0$, dato che la corrente nel circuito è sempre nulla.
Questo permette un grande risparmio di energia, dato che la dissipazione della potenza statica ne comportava il maggior consumo.

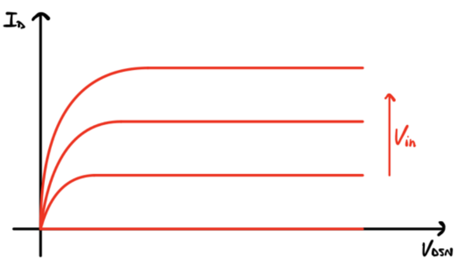
- CALCOLO DELLA TRANSCARATTERISTICA

Il punto di lavoro è la rappresentazione grafica dell'equazione alla maglia di uscita. L'equazione alla maglia di uscita è:

$$\boxed{V_{DD} - V_{SDP} = V_{DSN}}$$

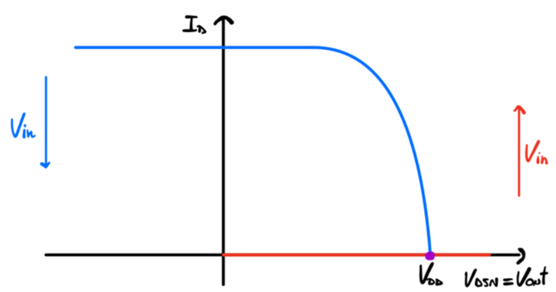
Osserviamo che la corrente di drain I_D è uguale per entrambi i transistor, dato che si trovano sulla stessa maglia. A sinistra abbiamo il grafico del membro di sinistra dell'equazione, mentre a destra quello del membro di destra:



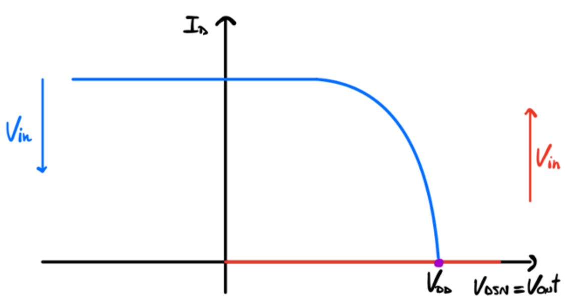


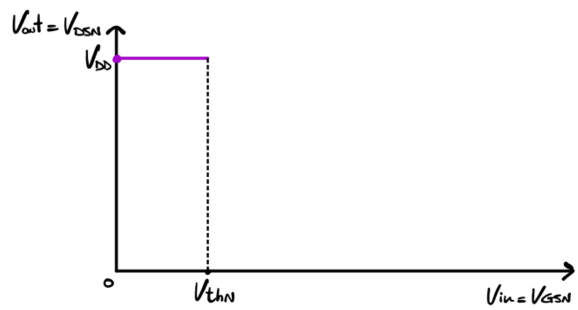
La transcaratteristica si trova andando a sovrapporre di due grafici e andando trovare le intersezioni, ovvero seguendo il punto di lavoro al variare della tensione di ingresso e tracciando il risultato sul grafico della transcaratteristica:

- se $V_{in} = 0$: abbiamo che $V_{GS1} = 0$ e $V_{SG2} = V_{DD}$, quindi il transistor N è in interdizione e il transistor P è in triodo. Quindi il punto di lavoro si trova in $(V_{DD}, 0)$ e l'uscita della transcaratteristica è V_{DD}:

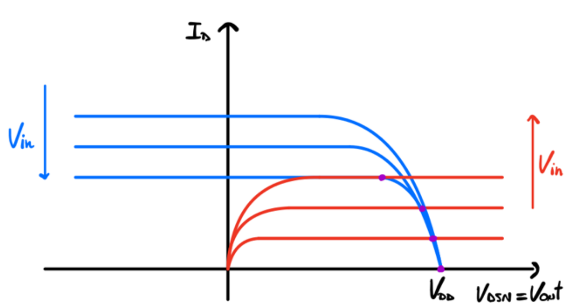


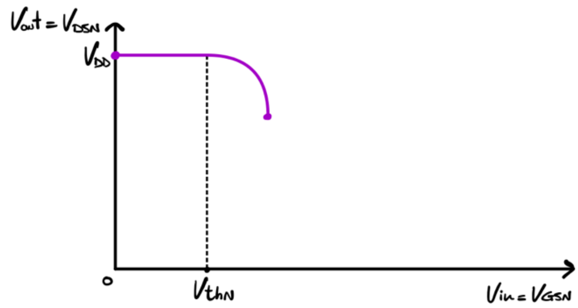
- Se $0 < V_{in} < V_{thN}$, il transistor N rimane interdetto, mentre le caratteristiche del transistor P iniziano a decrescere. Il punto di lavoro rimane però costante a $(V_{DD}, 0)$:



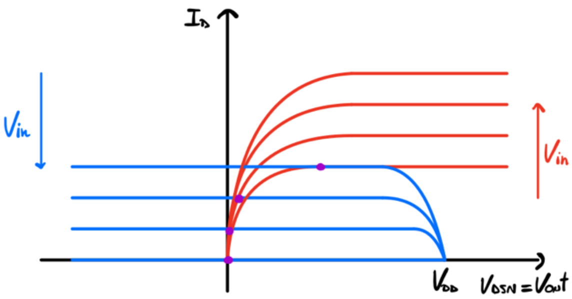


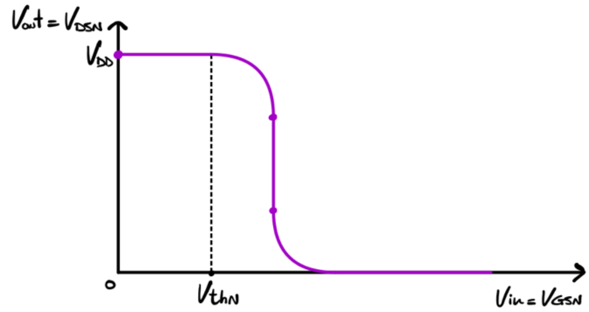
- Al crescere di V_{in}, il transistor N è in saturazione, mentre il transistor P è in triodo. Il punto di lavoro sulle caratteristiche del transistor N che stanno crescendo, e quelle del transistor P che stanno decrescendo. Quindi sulla transcaratteristica vediamo la curva decrescere. Questo avviene fino ad un punto particolare in cui, per un preciso valore di V_{in} le due caratteristiche si sovrappongono:



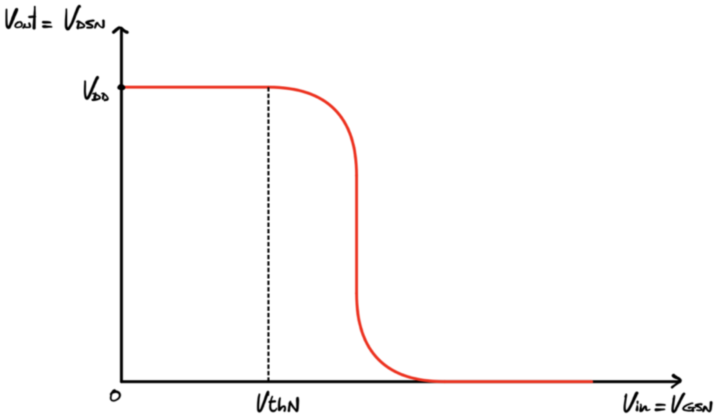


- Il punto in cui si sovrappongono le due curve si ha per un esatto valore di V_{in}, per un valore poco più grande della tensione di ingresso, il punto di lavoro salta all'estremo opposto. Infine, crescendo ancora con i valori di V_{in}, il punto di lavoro tende allo zero perché il transistor P tende va verso l'interdizione. Quindi la transcaratteristica ha un tratto verticale che dipende dal salto del punto di lavoro quando le due curve sono sovrapposte, e infine va a zero al crescere della tensione di ingresso:



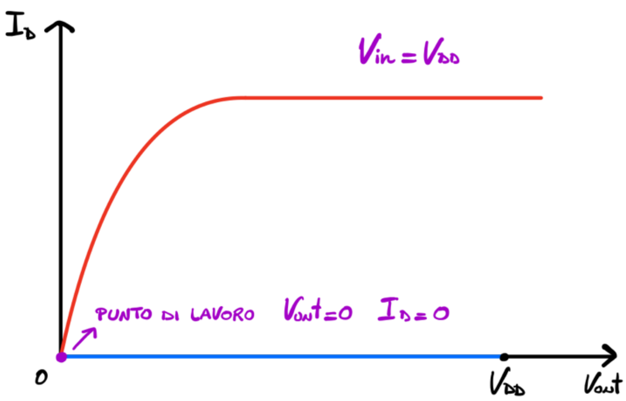


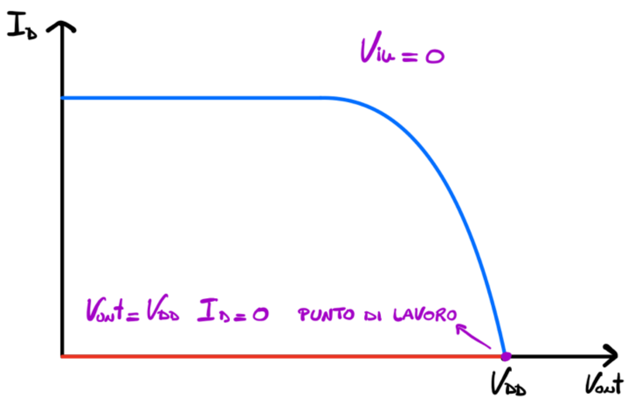
Quindi la transcaratteristica di questo dispositivo è la seguente:



che, a differenza di quella di un dispositivo NMOS, parte esattamente da V_{DD} e arriva esattamente a $0\ V$ e, inoltre, non risentendo dell'effetto body, il tratto è effettivamente verticale.
Se si considerano transistor reali, quindi con caratteristiche non parallele all'asse delle ascisse in saturazione, si ha che la pendenza non è esattamente verticale, ma dipende dalle resistenze dei due transistor. Essendo queste resistenze molto elevate, si può comunque considerare tale pendenza praticamente verticale.

Andando a graficare le caratteristiche proprio nei punti in cui l'ingresso è V_{DD}, oppure l'ingresso è $0\ V$, possiamo vedere come l'uscita sia sempre perfettamente opposta all'ingresso e come la corrente in questi due punti sia sempre zero:





Essendo la corrente sempre nulla in questi casi, come già detto, abbiamo che la potenza dissipata statica è sempre pari a zero, dato che $P_S = V * I = V_{DD} * I_D = V_{DD} * 0 = 0$.
Inoltre, come detto, l'uscita è sempre esattamente V_{DD} o $0\ V$, quindi abbiamo che: $V_{OH} = V_{DD}$ e $V_{OL} = 0\ V$.

- MARGINI DI RUMORE:

Avendo la transcaratteristica praticamente verticale già si rendono grandi i margini di rumore. Per poterli massimizzare però è necessario centrare la transcaratteristica nella dinamica, ovvero imporre la zona verticale della curva a $V_{DD}/2$.

Per fare questo andiamo a risolvere l'equazione alla maglia di uscita imponendo $V_{in} = V_{DD}/2$. Sappiamo che le correnti dei due transistor sono le stesse:

$$I_{DN} = I_{DP}$$

e vogliamo analizzare il circuito nella zona verticale della transcaratteristica, ovvero quando entrambi i transistor sono in saturazione, di conseguenza conosciamo le relazioni delle correnti e otteniamo:

$$I_{DN} = K_N(V_{GSN} - V_{th})^2 = K_P(V_{SGP} - V_{th})^2 = I_{DP}$$

Osserviamo che non è stato specificato V_{thN} e V_{thP} perché in modulo questi due valori sono uguali, dato che i transistor sono costruiti sullo stesso circuito integrato.

Adesso, imponendo $V_{in} = V_{DD}/2$ e ricordando che $V_{GSN} = V_{in}$ e $V_{SGP} = V_{DD} - V_{in}$, si ottiene:

$$K_N\left(\frac{V_{DD}}{2} - V_{th}\right)^2 = K_P\left(V_{DD} - \frac{V_{DD}}{2} - V_{th}\right)^2$$

Che è equivalente a:

$$\boxed{K_N\left(\frac{V_{DD}}{2} - V_{th}\right)^2 = K_P\left(\frac{V_{DD}}{2} - V_{th}\right)^2}$$

Quindi otteniamo che la transcaratteristica del CMOS è simmetrica, ovvero ha la zona verticale a $V_{DD}/2$ (centro della dinamica) solo se viene costruito il circuito con:

$$\boxed{K_N = K_P}$$

Dato che

$$K_N = \frac{1}{2}C_{ox}\mu_N\left(\frac{W}{L}\right)_N \qquad e \qquad K_P = \frac{1}{2}C_{ox}\mu_P\left(\frac{W}{L}\right)_P$$

e ricordando che $\mu_N \approx 3\ \mu_P$, si ottiene che la caratteristica è simmetrica se:
se

$$3\left(\frac{W}{L}\right)_N = \left(\frac{W}{L}\right)_P \qquad \rightarrow \qquad \boxed{3W_N = W_P}$$

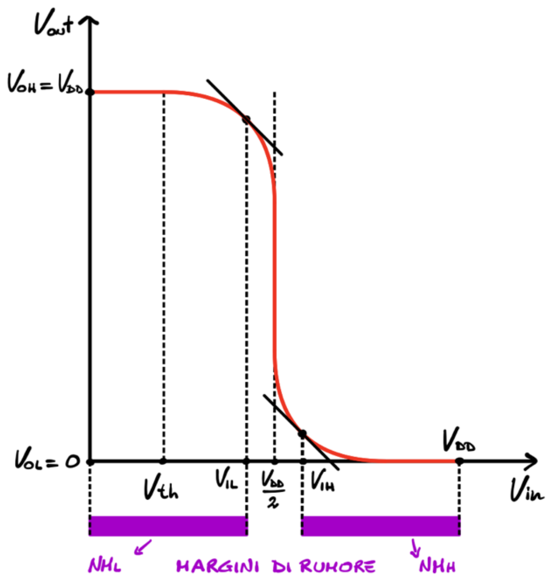
dove per la L viene utilizzato il limite tecnologico.

Se si progetta un circuito con queste caratteristiche, la transcaratteristica è quella in figura, dove i margini di rumore alto e basso sono dati da:

$$\boxed{\begin{aligned} NM_H &= V_{OH} - V_{IH} \\ NM_L &= V_{IL} - V_{OL} \end{aligned}}$$

e sono uguali tra loro.

Se i margini non fossero uguali tra loro, il collo di bottiglia sarebbe il margine minore.



Supponendo di aver costruito il dispositivo in modo che i margini di rumore siamo uguali, possiamo andarli a calcolare. È sufficiente calcolarne uno per avere anche l'altro, dato che sono uguali.
Proviamo a calcolare il margine di rumore alto $NM_H = V_{OH} - V_{IH}$, e dobbiamo quindi andare a calcolare V_{OH} e V_{IH}. Abbiamo che $V_{OH} = V_{DD}$, quindi dobbiamo solamente calcolare V_{IH}, che è il punto maggiore per il quale la transcaratteristica ha pendenza -1. Per calcolarlo bisogna calcolare la funzione di trasferimento, derivarla e porre la derivata pari a -1. Si otterranno poi due punti e quello più grande è il valore di V_{IH}.

Per calcolare la funzione di trasferimento teniamo presente che nel punto che corrisponde a V_{IH} il transistor P è in saturazione, mentre N è in triodo. Usando il fatto che $I_{DP} = I_{DN}$ si ottiene:

$$K_P(V_{SGP} - V_{th})^2 = K_N[2(V_{GSN} - V_{th})V_{DSN} - V_{DSN}^2]$$

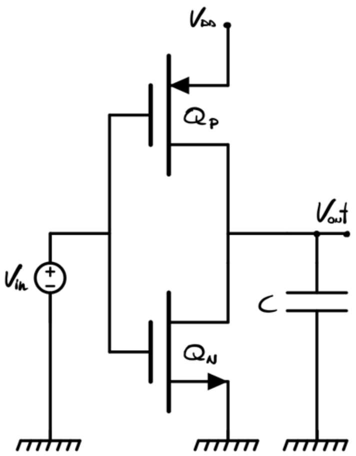
Dato che $V_{SGP} = V_{DD} - V_{in}$, $V_{GSN} = V_{in}$, $V_{DSN} = V_{out}$ e $K_P = K_N$:

$$[(V_{DD} - V_{in}) - V_{th}]^2 = 2(V_{in} - V_{th})V_{out} - V_{out}^2$$

Da qui, continuando con i calcoli, si ottiene una relazione che può essere posta come $V_{out} = f(V_{in})$. Derivando tale relazione e imponendola pari a -1 si ottiene il valore di $V_{in} = V_{in}$ che serve per calcolare il margine di rumore alto.
Si ottengono i due margini pari a:

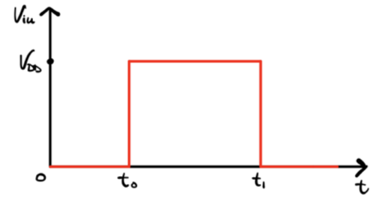
$$\boxed{NM_H = NM_L = \frac{3V_{DD} + 2V_{th}}{8}}$$

- TEMPI DI PROPAGAZIONE:



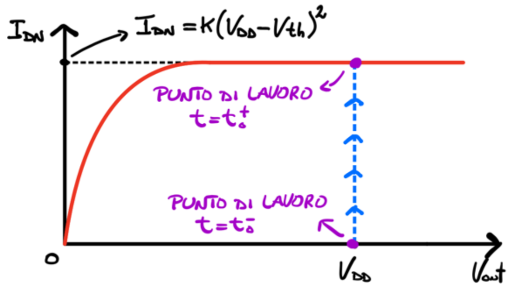
I tempi di propagazione sono i tempi per cui una commutazione in ingresso si trasferisce in uscita. Ogni volta che ho una variazione ingresso-uscita sappiamo che questa è istantanea se non ci sono capacità nel circuito, ma dato che nel nostro circuito sono presenti capacità parassite, che andiamo a modellizzare con un condensatore posto in parallelo all'uscita, si ha un transitorio che rallenta la commutazione. Quello che ci interessa è che i tempi di propagazione in una commutazione basso-alto e una alto-basso in ingresso siano gli stessi e i più piccoli possibile, dato che il collo di bottiglia è il tempo di propagazione più lungo.

Per analizzare i tempi di propagazione dobbiamo valutare il punto di lavoro, ovvero le soluzioni dell'equazione alla maglia di uscita, in modo dinamico, ovvero durante la variazione tra i due valori estremi statici (che abbiamo già valutato). Per fare questo consideriamo in ingresso il segnale in figura.

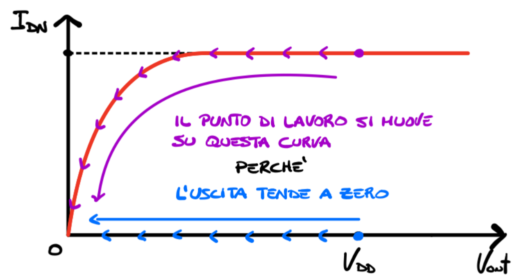


Sappiamo che quando l'ingresso è $0\ V$, l'uscita è V_{DD} e quindi il punto di lavoro un istante prima dell'arrivo del gradino, ovvero a t_0^-, si trova a $(V_{DD}, 0)$, quindi la corrente $I_D = 0$ e l'uscita è pari a V_{DD}. Dato che l'uscita è anche pari alla tensione sul condensatore, si ha $V_C = V_{DD}$.

Istantaneamente, per $t = t_0^+$, l'ingresso passa a V_{DD} e, sempre istantaneamente il transistor P diventa un circuito aperto e il transistor N va in conduzione, e in particolare va in saturazione, quindi diventa un cortocircuito, dato che $V_{DSN} = V_{DD}$ (perché per $t = t_0^+$ il condensatore si trova ancora carico a V_{DD}) e $V_{DSN} = V_{DD} > V_{GSN} - V_{th}$. Di conseguenza il punto di lavoro passa istantaneamente da $(V_{DD}, 0)$ al punto sulla curva caratteristica del transistor N per $V_{GSN} = V_{DD}$, mantenendo sempre l'ascissa a V_{DD}. Quindi, per tale punto si ha in uscita V_{DD}, ma inizia anche a scorrere una corrente $I_{DN} = K(V_{GSN} - V_{th})^2 = K(V_{DD} - V_{th})^2$ che è quella del transistor in saturazione.

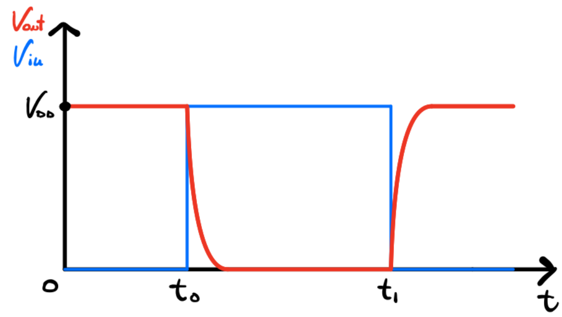


A questo punto, il condensatore inizia a scaricarsi grazie alla corrente I_{DN}. Dato che la tensione in ingresso è fissata, la caratteristica del transistor N rimane la stessa, ma la corrente diminuisce nel tempo man mano che il condensatore si scarica, dato che l'uscita tende da V_{DD} verso $0\ V$. Quindi, quando il condensatore si è completamente scaricato il punto di lavoro arriva a (0,0). Per la scarica del condensatore si ha quindi un transitorio che rende la commutazione in uscita non istantanea.

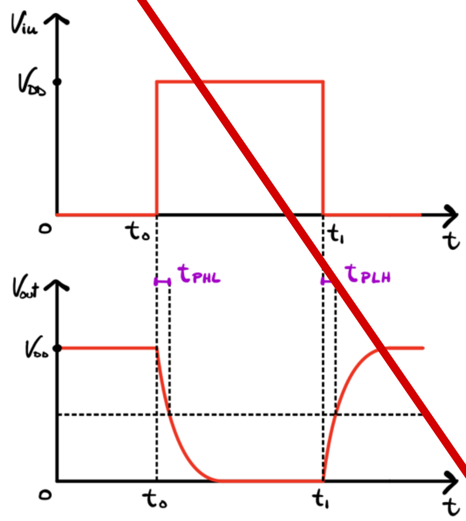


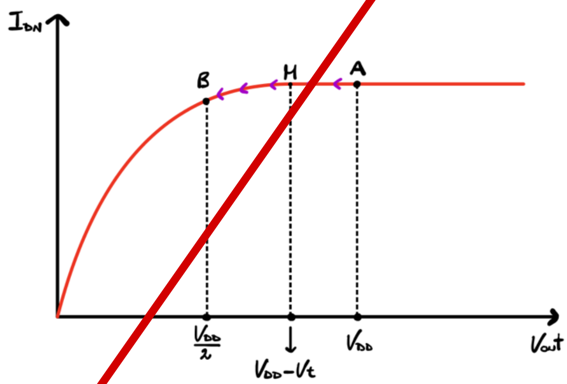
A questo punto l'ingresso è pari a V_{DD} e l'uscita è pari a $0\ V$. Vediamo cosa succede con l'altra commutazione, ovvero quando l'ingresso passa da V_{DD} a $0\ V$ all'istante t_1.
Quando arriva in ingresso la commutazione, con V_{in} che diventa $0\ V$, i due transistor rispondono istantaneamente, quindi all'istante t_1^+ il transistor N diventa un circuito aperto e il transistor P va in conduzione. In particolare, si ha che il transistor P va in saturazione dato che $V_{SDP} = V_{DD} - V_{C,t=t_1^-} = V_{DD} - 0\ V = V_{DD} > V_{SGP} - V_{th}$. Quindi, il transistor P fa scorrere una corrente che carica il condensatore verso V_{DD}. La corrente che scorre nel transistor P è quella di saturazione, ed è pari a $I_{DP} = K(V_{SGP} - V_{th})^2 = K(V_{DD} - V_{th})^2$, che è la stessa corrente che nella fase precedente ha scaricato il condensatore (dato che i K e le V_{th} sono uguali).

Dato che la corrente di carica e di scarica, e le differenze di potenziale del condensatore sono le stesse (perché nella fase di carica passa da $0\ V$ a V_{DD} e nella fase di carica passa da V_{DD} a $0\ V$) si ha che i tempi di commutazione sono gli stessi sia per la commutazione alto-basso sia per quella basso-alto.
Quindi, se i K sono uguali tra i due transistor (e questo significa che $3W_N = W_P$) i tempi di propagazione sono gli stessi per entrambe le commutazioni, e questo è quello che serve per ottenere le condizioni migliori.



Calcoliamo i tempi di propagazione.
Come sappiamo, se consideriamo un impulso non istantaneo, possiamo definire i tempi di salita e discesa e il tempo di propagazione. Il tempo di salita (o in modo speculare il tempo di discesa) è il tempo che impiega un impulso (in questo caso in ingresso) a passare dal 10% al 90% del suo valore. Il tempo di propagazione è il tempo che passa da quando l'ingresso arriva al 50% del suo valore a quando l'uscita arriva al 50%.
Se si considerano impulsi istantanei in ingresso, il 50% del valore si ha istantaneamente, quindi il tempo di propagazione diventa quel tempo che passa da quando si ha la commutazione in ingresso a quando l'uscita arriva al 50% del suo valore. Quindi nel nostro caso è il tempo che passa da quando l'ingresso passa, ad esempio, da basso ad alto e l'uscita arriva a $V_{DD}/2$.
Vedendo questo sui grafici, in particolare su quello che mostra l'andamento del punto di lavoro, si ha che il tempo di propagazione è il tempo che impiega il punto di lavoro a passare dal punto A al punto B:





Il tempo che impiega un condensatore a caricarsi o scaricarsi dipende dalla corrente che influisce su di esso.
Inizialmente, tra il punto A e il punto M la corrente è quella si saturazione del transistor N, successivamente, dal punto M al punto B, la corrente è quella di triodo del transistor N. Il punto M corrisponde al punto in cui la tensione V_{DSN} del transistor N è pari a $V_{DD} - V_{th}$, ovvero è proprio pari al punto di commutazione tra zona di triodo e zona di saturazione, dato che il transistor N è in saturazione solo se $V_{DSN} > V_{DD} - V_{th}$ (ricordando che $V_{out} = V_{DSN}$).

Per calcolare il tempo di propagazione, ad esempio t_{PHL}, ovvero il tempo che trascorre da quando l'ingresso passa da basso ad alto a quanto l'uscita passa da alto al 50% del sul valore iniziale (alto), consideriamo quindi due fasi:

- la prima fase è quella che si ha tra i due punti A e M: la corrente in questa fase è quella di saturazione, quindi è pari a $I_{DN} = K(V_{GSN} - V_{th})^2 = K(V_{DD} - V_{th})^2$. La differenza di potenziale ai capi del condensatore tra il punto A e il punto M può essere descritta attraverso la differenza della quantità di carica sulle armature:

$$\Delta V_C = \frac{\Delta Q}{C} = \frac{\int I_{DN}\, dt}{C} = \frac{I_{DN} t}{C} = \frac{I_{DN} t_{PHL1}}{C}$$

  La variazione di tensione sul tratto $A - M$ ai capi del condensatore varia da V_{DD} a $V_{DD} - V_{th}$, quindi si ottiene:

$$t_{PHL1} = \frac{\Delta V_C * C}{I_{DN}} = \frac{C\,[V_{DD} - (V_{DD} - V_{th})]}{K(V_{DD} - V_{th})^2} = \frac{CV_{th}}{K(V_{DD} - V_{th})^2}$$

- per la seconda fase si fa un discorso analogo, ma la variazione di tensione si ha da $V_{DD} - V_{th}$ a $V_{DD}/2$ e la corrente è quella di triodo $I_{DN} = K[2(V_{GSN} - V_{th})V_{DSN} - V_{DSN}^2] = K[2(V_{in} - V_{th})V_{out} - V_{out}^2]$.
  Scrivendo in forma differenziale, si ottiene:

$$\frac{dV_C}{dt} = -\frac{I_{DN}}{C} \quad \rightarrow \quad I_{DN} dt = -C\, dV_C$$

  Sostituendo la corrente I_{DN} in triodo e considerando che $V_{in} = V_{GSN} = V_{DD}$, otteniamo:

$$K[2(V_{in}-V_{th})V_{out}-V_{out}^2]dt = -CdV_C$$

Da cui:

$$-\frac{K}{C}dt = \frac{dV_C}{2(V_{DD}-V_{th})V_C - V_C^2} \quad \rightarrow \quad -\frac{K}{C}dt = \frac{1}{2(V_{DD}-V_{th})}\frac{dV_C}{\frac{1}{2(V_{DD}-V_{th})}V_C^2 - V_C}$$

Applicando l'integrale ad entrambi i membri otteniamo:

$$-\frac{K}{C}t_{PHL2} = \frac{1}{2(V_{DD}-V_{th})}\int_{V_{DD}-V_{th}}^{V_{DD}/2}\frac{dV_C}{[V_C^2/2(V_{DD}-V_{th})]-V_C}$$

Ricordando che $\int \frac{dx}{ax^2-x} = \ln\left(1-\frac{1}{ax}\right)$ otteniamo:

$$t_{PHL2} = \frac{C}{2K(V_{DD}-V_{th})}ln\left(\frac{3V_{DD}-4V_{th}}{V_{DD}}\right)$$

Mettendo insieme i due tempi ottenuti, abbiamo che il tempo di propagazione complessivo è:

$$t_{PHL} = \frac{CV_{th}}{K(V_{DD}-V_{th})^2} + \frac{C}{2K(V_{DD}-V_{th})}ln\left(\frac{3V_{DD}-4V_{th}}{V_{DD}}\right)$$

Se consideriamo $V_{th} \approx 0.2V_{DD}$, e ricordando la simmetrica tra le due fasi di transizione (dato che $K_N = K_P = K$) si ha:

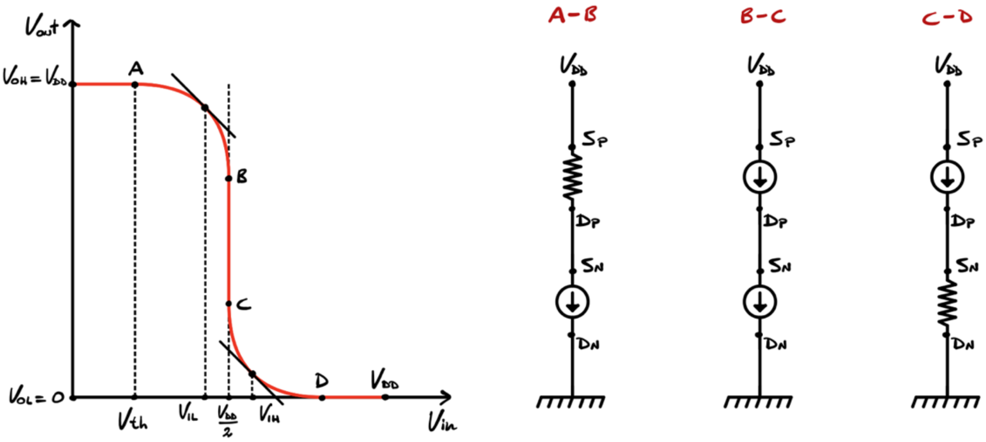
$$\boxed{t_{PHL} = t_{PLH} \approx \frac{0.8C}{KV_{DD}}}$$

- POTENZA DISSIPATA:

Come abbiamo visto, nella prima fase della transcaratteristica, da $V_{in} = 0$ a $V_{in} = V_{th}$, il transistor N è in interdizione, e nell'ultima fase della transcaratteristica, da $V_{in} = V_{DD} - V_{th}$ a $V_{in} = V_{DD}$, il transistor P è in interdizione. In queste due fasi, dato che almeno uno dei due transistor è in interdizione, la corrente complessiva è nulla, quindi la potenza dissipata è nulla. Infatti, come già detto, la potenza dissipata statica nelle due condizioni statiche di ingresso, ovvero $V_{in} = 0$ e $V_{in} = V_{DD}$ è nulla.

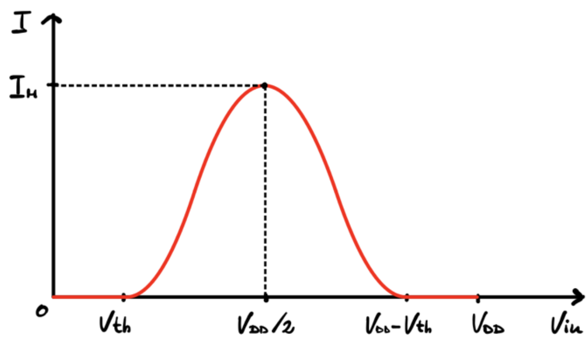
Al contrario però, per il resto della transcaratteristica, ovvero quando entrambi i transistor sono in conduzione, la corrente che scorre nel dispositivo non è nulla, e di conseguenza c'è dissipazione di energia.
Per avere traccia di questa componente della corrente, i gradini di segnale in ingresso al dispositivo non devono essere ideali. Di fatti, i gradini reali non variano istantaneamente da un certo valore di tensione ad un altro ($0 - V_{DD}$), ma impiegano un certo tempo a variare (il tempo di salita/discesa). Durante questo tempo i transistor vedono in ingresso tutti i valori della tensione nella dinamica, da $0\ V$ a V_{DD} e quindi si comportano di conseguenza, passando in diverse fasi, dove nella prima e nell'ultima almeno uno dei due transistor è interdetto, mentre nelle fasi intermedie entrambi i transistor sono in conduzione. In particolare, le tre fasi di conduzione sono le seguenti:

- $A - B$: il transistor N è in saturazione e il transistor P è in triodo, quindi il transistor N è un generatore di corrente e decide la corrente che scorre nel circuito ($I_{DN} = K(V_{GSN} - V_{th})^2$) e il transistor P è una resistenza.
- $B - C$: entrambi i transistor sono in saturazione e quindi sono generatori di corrente. Due generatori di corrente in serie possono coesistere solo se fanno circolare la stessa corrente, e quindi è necessario avere $V_{GSN} = V_{SGP}$, e di conseguenza $I_{DN} = K(V_{GSN} - V_{th})^2 = K(V_{SGP} - V_{th})^2 = I_{DP}$;
- $C - D$: il transistor N è in triodo e il transistor P è in saturazione, quindi il transistor N è una resistenza e il transistor P è un generatore di corrente e decide la corrente che scorre nel circuito ($I_{DP} = (V_{SGP} - V_{th})^2$).



Quando entrambi i transistor sono in saturazione, ovvero nel tratto $B - C$, la corrente è la massima possibile.
Andando a tracciare l'andamento della corrente nel tempo si ottiene il grafico in figura.

Questa componente della corrente non è dovuta all'alimentazione, ma è dovuta al fatto che il segnale in ingresso non è un segnale ideale, ma è un gradino reale che ha un tempo di salita/discesa maggiore di zero.
Di conseguenza, la potenza dissipata a causa di questa corrente si va a sommare alle altre potenze dissipate (in questo caso solo quella dinamica, dato che quella statica è nulla).
Dato che in genere i tempi di salita e discesa dei gradini in ingresso sono molto rapidi, questa componente di corrente influenza poco l'assorbimento di potenza dell'inverter.



Quindi la maggior causa di dissipazione di energia è la potenza dinamica che, come avevamo già calcolato, è data da:

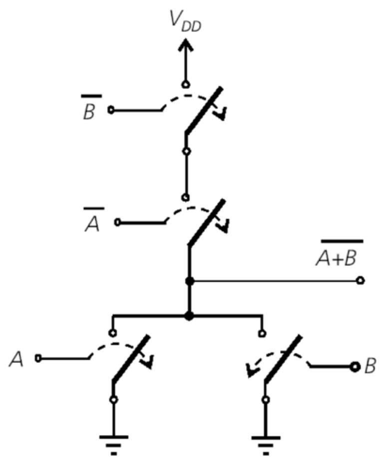
$$\boxed{P_{dinamica} = fCV_{DD}^2}$$

ed è tanto più grande quanto è maggiore la frequenza di clock f del dispositivo.

- Funzioni con interruttori ideali:

Quando si sviluppano delle funzioni utilizzando degli interruttori ideali, ovvero dei transistor ideali, bisogna far uso della logica complementare che va a strutturarsi nei dispositivi CMOS, come quelli visti fino ad ora.

Prendendo come esempio il circuito in figura, si ha che l'uscita è bassa se almeno uno dei due interruttori della rete di pull-down è chiuso, mentre l'uscita è alta se entrambi gli interruttori della rete di pull-up sono chiusi.
Quello che non deve accadere, però, è che entrambi gli interruttori della rete di pull-up siamo chiusi e anche uno (o entrambi) della rete di pull-down sia chiuso, perché altrimenti l'alimentazione viene cortocircuitata direttamente a massa, la corrente tende a infinito e il dispositivo di brucia.
Per evitare tale problema si utilizza la logica complementare dei dispositivi CMOS, ed infatti come possiamo vedere in figura, sono presenti soltanto due tipi di ingressi A e B, i quali vengono poi mandati ai diversi interruttori come $A - \overline{A}$, e $B - \overline{B}$. Gli interruttori con A, B sono gli NMOS, mentre quelli con $\overline{A}, \overline{B}$ sono i PMOS. In questo modo, sappiamo che se un NMOS è aperto, il corrispondente PMOS è chiuso e quindi non è possibile che l'alimentazione venga cortocircuitata direttamente a massa.



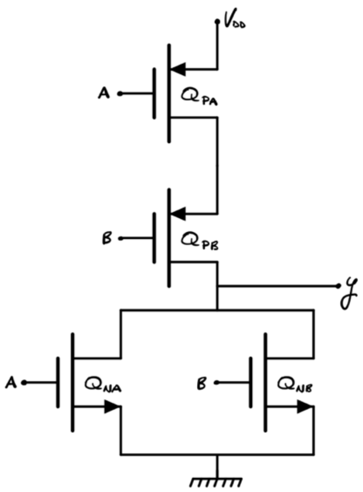
Inoltre, è necessario che gli interruttori siano posti nel seguente modo:

- se nella rete di pull-down sono posti in parallelo, nella rete di pull-up devono essere posti in serie;
- se nella rete di pull-up sono posti in parallelo, nella rete di pull-down devono essere posti in serie.

Questo sempre per evitare che l'alimentazione sia cortocircuitata a massa.

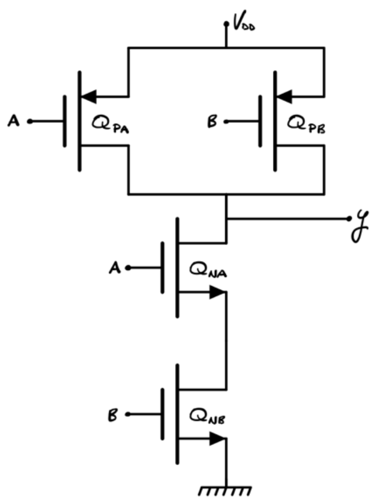
- PORTA NOR E NAND A DUE INGRESSI:

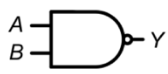
Utilizzando le reti CMOS, quindi con transistor NMOS e PMOS, la rete che sviluppa il calcolo del NOR è quella di sinistra, mentre quella che sviluppa il calcolo del NAND è quella di destra:



A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$y = \overline{A+B}$





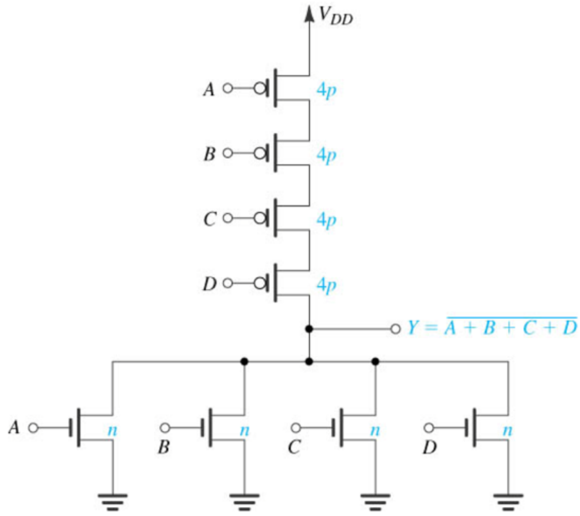
A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$y = \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

- SCELTA DEL TIPO DI PORTA DA COSTRUIRE:

Prendendo come esempio le porte NAND e NOR che sono complementari, a parità di condizioni si implementa in un circuito quella che occupa minore area di chip. Vediamo quindi quale porta occupa meno area di chip da NAND e NOR.
Consideriamo porte NAND e NOR con n ingressi e ricordiamo che in uscita va sempre considerato il condensatore che modellizza le capacità parassite del circuito.
Bisogna sempre tenere conto che la rete che presenta i transistor in parallelo, ha un caso peggiore e un caso migliore. Prendiamo in esame il caso peggiore, che è quello che si ha quando un solo transistor è aperto, perché è quello che fa da collo di bottiglia.

Prendiamo ad esempio una porta NOR con 4 ingressi. La rete di pull-up è formata da quattro transistor in serie e ognuno di questi ha tra drain e source la resistenza di canale, di conseguenza la serie di quattro transistor equivale, alla serie di quattro resistenze, ovvero alla somma di queste. In particolare, i quattro transistor possono essere modellati come un unico transistor che ha la dimensione L pari a quattro volte quella di un singolo transistor. La dimensione W rimane la stessa, ma più è grande e più è veloce il tempo di carica del condensatore. Dato che però il collo di bottiglia è il tempo di carica/scarica maggiore, la dimensione W va impostata in modo da rendere il tempo di carica uguale a quello di scarica. Quindi, si ottiene che:



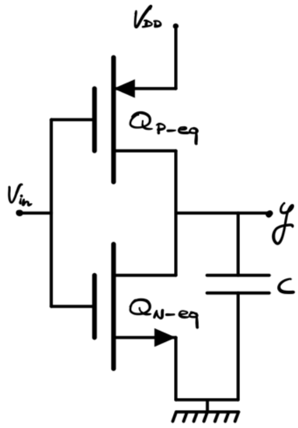
$$K_{eq-LH} = \frac{K_P}{4} = \frac{1}{2} C_{ox} \mu_P \frac{W}{4 * L}$$

La rete di pull-down invece presenta i transistor in parallelo e quindi dobbiamo andare a considerare il caso peggiore, ovvero quello in cui uno solo di questi transistor permette la scarica del condensatore (questo è il caso che fa da collo di bottiglia del dispositivo). Si ottiene quindi:

$$K_{eq-HL} = K_N$$

Quindi, in generale, questo circuito può essere visto in modo equivalente come una rete CMOS con due transistor, con i K equivalenti pari a:

$$K_{P-eq} = \frac{K_P}{N} \qquad K_{N-eq} = K_N$$



In modo del tutto speculare, una rete NAND con n ingressi può essere modellizzata attraverso una rete con due transistor con i K equivalenti pari a:

$$K_{N-eq} = \frac{K_N}{N} \qquad K_{P-eq} = K_P$$

Ricordando che per avere simmetria e per rispettare tutte le condizioni descritte in precedenza K devono essere uguali, in una porta NOR abbiamo che:

$$K_{P-eq} = \frac{1}{2} \mu_P C_{ox} \frac{W_P}{N * L_P} = \frac{1}{2} \mu_N C_{ox} \frac{W_N}{L_N} = K_{N-eq}$$

da cui si ottiene che, se $L_N = L_P = L_{inf}$:

$$W_P \approx 3NW_N$$

Equivalentemente, per una porta NAND abbiamo che:

$$K_{P-eq} = \frac{1}{2} \mu_P C_{ox} \frac{W_P}{L_P} = \frac{1}{2} \mu_N C_{ox} \frac{W_N}{N * L_N} = K_{N-eq}$$

da cui si ottiene che, se $L_N = L_P = L_{inf}$:

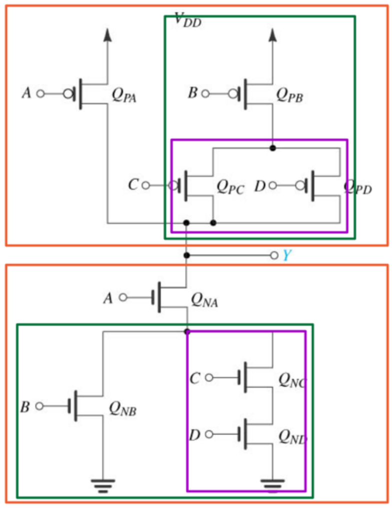
$$W_P \approx \frac{3W_N}{N}$$

Supponendo che per W_N in entrambe le soluzioni si scelga il limite inferiore possibile, si ottiene che la porta NAND occupa decisamente meno area di chip rispetto alla porta NOR e tanto maggiore saranno i numero di bit tanto maggiore sarà la differenza. Di conseguenza, a parità di prestazioni, ovvero a parità di tempi di propagazione si costruisce la porta NAND.

- REALIZZAZIONE DI UNA PORTA COMPLESSA CMOS:

Nella realizzazione di una porta complessa si utilizzano strutture più articolare e molti più ingressi, ma la sostanza è sempre la stessa: l'alimentazione V_{DD} non deve trovare un percorso diretto verso massa. Per fare questo è sempre necessario che, se nella rete di pull-up sono presenti rami in parallelo, allora nella rete di pull-down devono essere presenti rami in serie e viceversa. E questo vale anche per ogni sottorete delle reti di pull-up e pull-down.

In figura possiamo vedere come le reti di pull-up e pull-down seguano questo principio sia per le reti esterne, sia per le reti interne. Infatti, come evidenziato dai colori, ad ogni rete in parallelo corrisponde una in serie e viceversa.

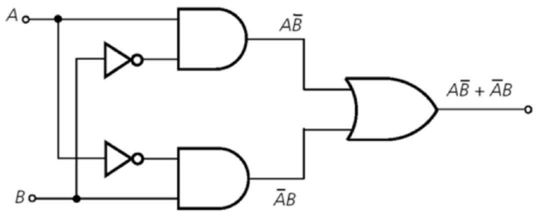


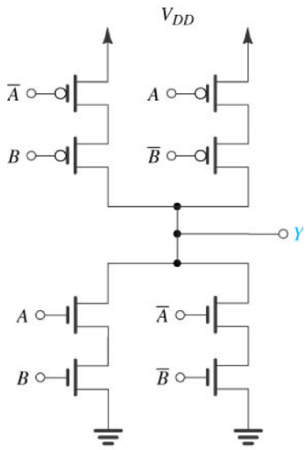
$Y = \overline{A(B + CD)}$

- PORTA XOR:

Una porta XOR può essere fatta come in figura. Se si analizza il circuito si può vedere che non esiste mai un percorso diretto verso massa partendo dall'alimentazione.

A	B	Y	
0	0	0	
0	1	1	→ $\overline{A}B$
1	0	1	→ $A\overline{B}$
1	1	0	

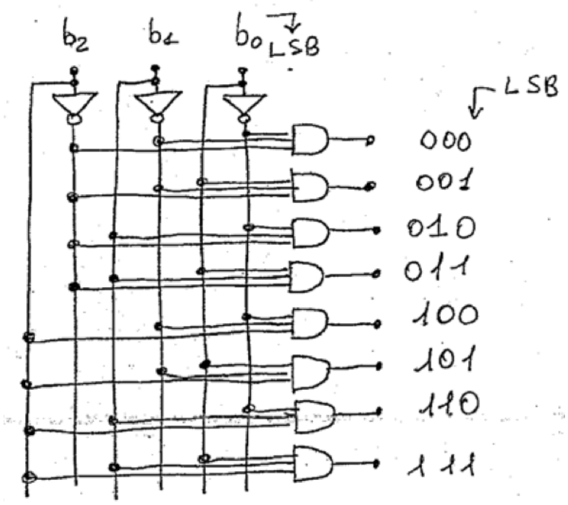




$Y = A\ ^{-}\ B = A\overline{B} + \overline{A}B$

- DECODER:

Un decoder è un dispositivo che riceve n ingressi e restituisce in uscita un solo ingresso alto, in base alla 'parola' di bit che ha ricevuto in ingresso. Questo si fa costruendo il circuito come in figura, ovvero con 2^n porte AND in uscita che ricevono il segnale o diretto o negato. Il circuito a destra è costruito in tecnologia NMOS.



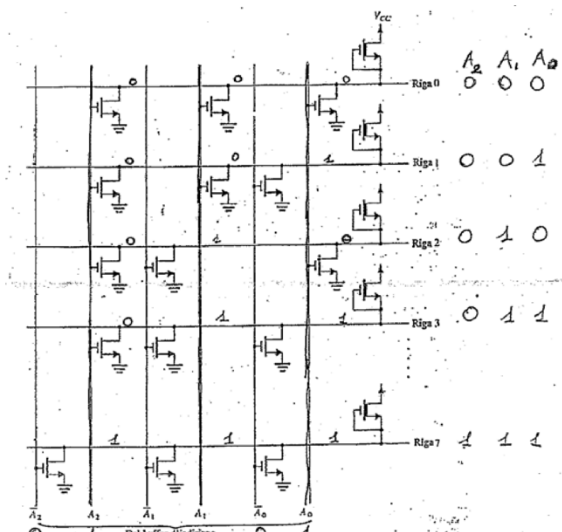
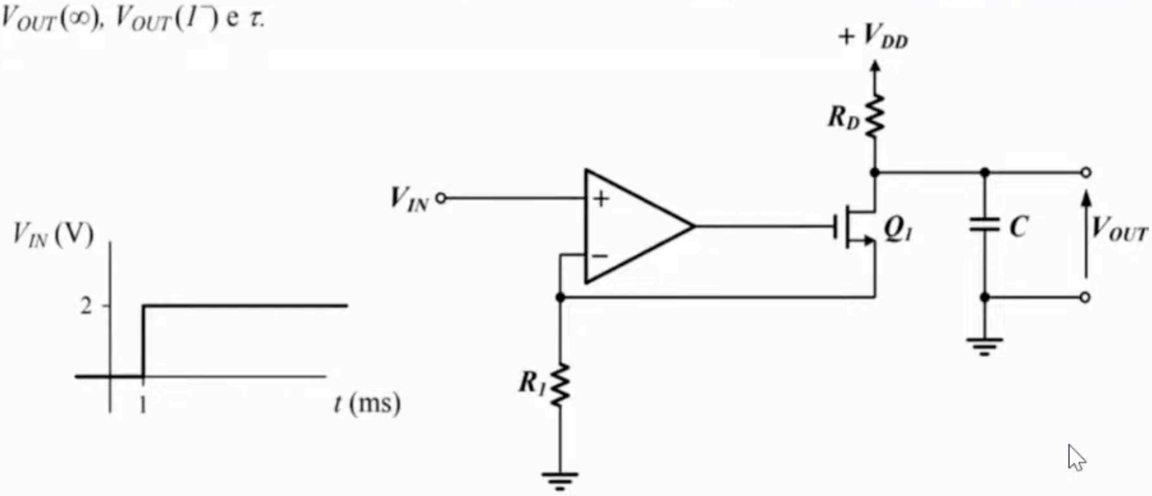


Fig. 13.40 Un decoder d'indirizzo NOR in forma di matrice. Attraverso un indirizzo di 3 bit si sceglie una delle otto linee di riga.

ESERCIZI DI ESAME

Esercizio 1 (2013):

1) Dato il circuito seguente, in presenza del gradino di tensione riportato in figura, determinare e graficare l'andamento nel tempo della tensione di uscita V_{OUT}, determinando i punti significativi $V_{OUT}(\infty)$, $V_{OUT}(1^-)$ e τ.



Q₁: $V_T = 1$ V; $K_1 = 0{,}5$ mA/V^2; $\lambda = 0$
Amplificatore Operazionale ideale con $L^+ = -L^- = 10$V
$C = 100$ nF $V_{DD} = 10$ V
$R_1 = 1$ kΩ $R_D = 2$ kΩ

La tensione di uscita è quella presa i capi del condensatore, la quale è data da:

$$V_C(t) = V_C(\infty) - [V_C(\infty) - V_C(t_0^-)]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

L'ipotesi iniziali è che l'amplificatore operazionale lavori in zona di linearità e il transistor lavori in zona di saturazione se viene usato come amplificatore.

Ipotizzando che l'operazionale lavori in zona di linearità, si può applicare il principio del cortocircuito virtuale, e di conseguenza la tensione sui due morsetti di ingresso è la stessa, ovvero V_{in}.
Conoscendo la tensione ai capi di R_1 si ricava immediatamente la corrente che scorre su di essa:

$$I_1 = \frac{V_{in}}{R}$$

La corrente I_1, seguendo ciò che dice l'equazione al nodo, dovrebbe essere la somma della corrente che esce dal morsetto invertente dell'operazionale e di quella che viene dal source del transistor, ma sappiamo che non può entrare o uscire corrente nei morsetti di un amplificatore operazionale (perché l'impedenza di ingresso è infinita) e di conseguenza, la corrente I_1 è esattamente la corrente che viene dal source del transistor, ovvero è la corrente di drain del transistor:

$$I_D = I_1$$

Quindi, la corrente I_1 è la stessa che scorre anche sulla resistenza R_D e, di conseguenza, si può calcolare la tensione ai capi del condensatore (in particolare la tensione sul drain, che però è la stessa del condensatore) come:

$$V_C(t) = V_{DD} - I_D(t)R_D$$

dove la corrente di drain varia nel tempo perché dipende da V_{in} (I_1 dipende da V_{in}).

Adesso dobbiamo calcolare la tensione V_C nei due istanti fondamentali (richiesti):

- per $t = 1^-$: si ha $V_{in} = 0\ V$, quindi la corrente $I_1 = 0 = I_D$ e di conseguenza si ottiene

$$V_C(t = 1^-) = V_{DD} - I_D(t)R_D = 10\ V - 0 * 2\ k\Omega = 10\ \mathrm{V}$$

- per $t = \infty$: si ha $V_{in} = 2\ V$, quindi la corrente $I_1 = \frac{2\ V}{1\ k\Omega} = 2\ mA$ e di conseguenza si ottiene:

$$V_C(t = \infty) = V_{DD} - I_D(t)R_D = 10\ V - 2\ mA * 2\ k\Omega = 6\ \mathrm{V}$$

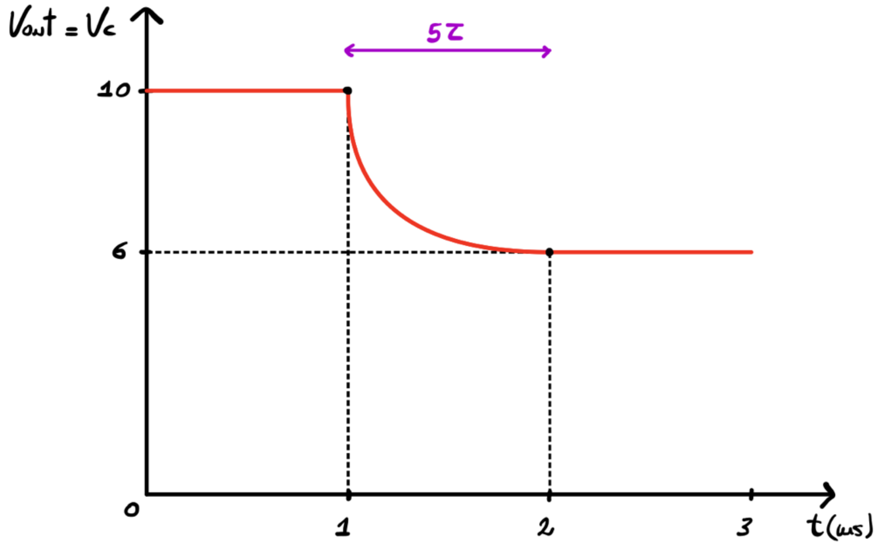
Infine, bisogna calcolare la costante di tempo $\tau = R_{eq}C$. Per calcolare la resistenza equivalente vista dal condensatore, si sostituisce il condensatore con una batteria, si eliminano tutte le eccitazioni indipendenti preesistenti nel circuito, e si calcola il percorso della corrente.
Avendo eliminato tutti i generatori indipendenti, V_{DD} e V_{in} sono cortocircuitati a massa e, di conseguenza, la corrente il transistor è interdetto dato che la corrente che scorre è nulla (perché $V_{in} = 0$). Quindi il percorso che esegue la corrente partendo dalla batteria che si trova al posto del condensatore è solo attraverso R_D. Per cui la resistenza equivalente è pari a:

$$R_{eq} = R_D$$

Quindi, la costante di tempo è pari a:

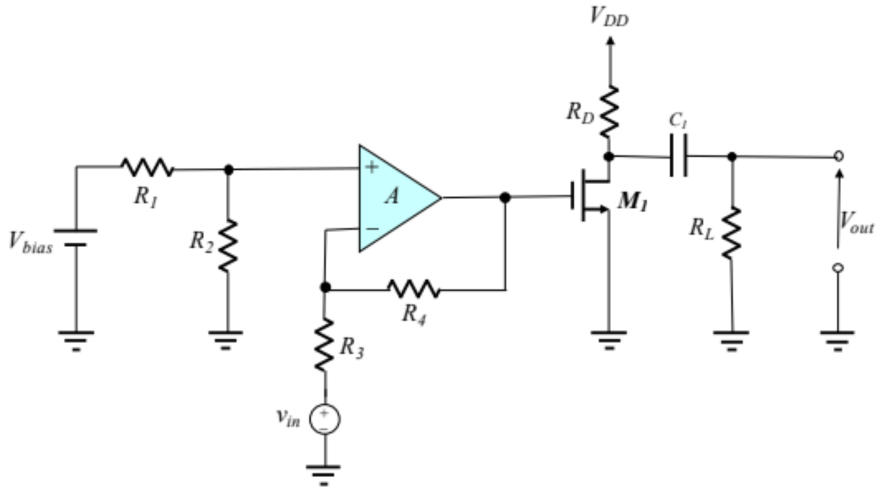
$$\tau = R_{eq}C = R_DC = 2\ k\Omega * 100\ nF = 200\ \mu s = 0.2\ ms$$

Il grafico dell'andamento della tensione di uscita, ovvero della tensione ai capi del condensatore, nel tempo è il seguente:



Esercizio 2 (13-02-2020):

Dato il circuito, in cui v_{in} è un generatore di tensione di piccolo segnale determinare il guadagno di tensione a centro banda $A_v = v_{out}/v_{in}$



$R_1 = R_2 = R_3 = 1\text{k}\Omega$, $R_4 = 5\text{k}\Omega$, $R_D = 2\text{k}\Omega$, $R_L = 20\text{k}\Omega$,

$V_{bias} = 1\text{V}$; $V_{DD} = 10\text{V}$, $C_1 = \infty$

$M_1 = \{V_T = 1\text{V}, K = 0.5\text{mA/V}^2, \lambda = 0\}$

Amplificatore Operazionale ideale; $L^+ = |L^-| = 10\text{ V}$

È richiesto di calcolare il guadagno di tensione del circuito per piccoli segnali, quindi si può considerare il transistor M_1 attraverso il suo circuito equivalente per piccoli segnali, considerando la transconduttanza:

$$g_m = 2K(V_{GS} - V_{th})$$

dove è tutto noto, tranne la tensione di polarizzazione V_{GS}, la quale è pari all'uscita dell'operazionale.

Quindi, il primo passaggio è andare a fare l'analisi del circuito dal punto di vista della polarizzazione, quindi considerando solo la presenza dei generatori di tensione o corrente costanti nel tempo e annullando la presenza del segnale.

Sappiamo che per grandi segnali la corrente di drain è data da $I_D = K(V_{GS} - V_{th})^2$, mentre per piccoli segnali la relazione diventa lineare:

$$i_d = g_m v_{gs}$$

Quindi, il transistor MOS ha due circuiti equivalenti, uno per grandi segnali, che va utilizzato quando si vuole ricavare la tensione di polarizzazione (quindi quando si considerano solo le componenti costanti), e uno per piccoli segnali, che va utilizzato dopo aver ricavato la tensione di polarizzazione.

- *Calcolo della tensione di polarizzazione:*

La tensione di bias entra nel morsetto non invertente dell'operazionale, ripartita attraverso il partitore di tensione formato da R_1 e R_2. Dato che $R_1 = R_2$, la partizione di tensione su due resistenze uguali dimezza la tensione, quindi, essendo $V_{bias} = 1\ V$, si ottiene:

$$V^+ = 0.5\ V$$

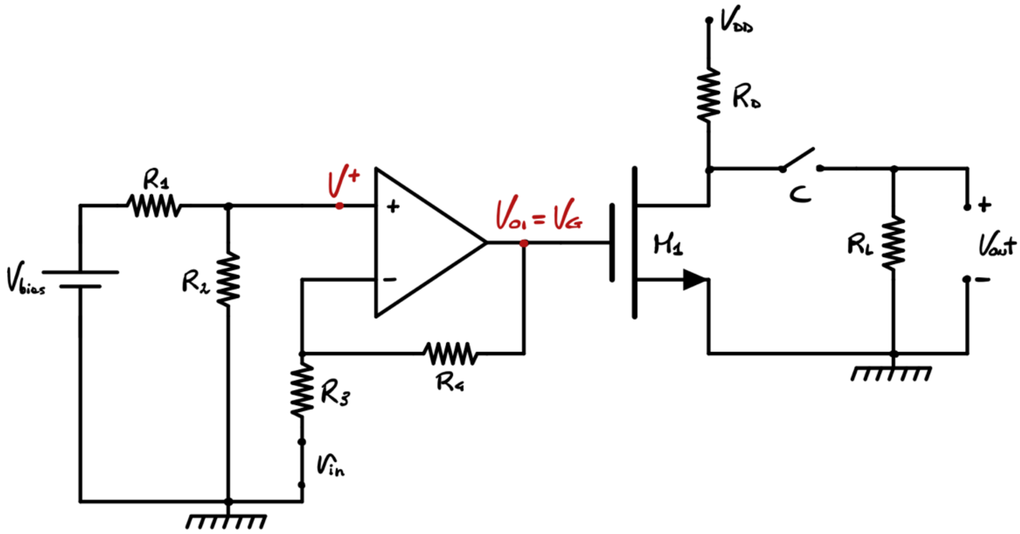
Dato che V_{in} è cortocircuitato a massa, l'operazionale si trova in configurazione non invertente, perché l'ingresso è sul morsetto non invertente.

La tensione di uscita dell'operazionale, che chiamiamo V_{o1}, è data dalla tensione in ingresso sul morsetto non invertente, per il guadagno non invertente dell'operazionale:

$$V_{o1} = V^+ \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) = 0.5\,V * \left(1 + \frac{5\,k\Omega}{1\,k\Omega}\right) = 3\,V$$

Quindi, in uscita all'operazionale, ovvero sul gate del transistor, ci sono $V_{o1} = V_G = V_{GS} = 3\,V$.

La situazione attuale del circuito è la seguente:



Quindi la transconduttanza g_m è pari a:

$$g_m = 2K(V_{GS} - V_{th}) = 2 * 0.5\frac{mA}{V^2} * (3\,V - 1\,V) = 2\,mA$$

- *Verifica delle ipotesi*:

L'uso della transconduttanza g_m è valido solo se il transistor è in saturazione, quindi bisogna verificare tale ipotesi. Inoltre, bisogna verificare anche che l'operazionale lavori effettivamente in zona lineare e quindi che possa essere usato come amplificatore.

Per quanto riguarda il secondo punto abbiamo, possiamo subito verificare che l'ipotesi è corretta perché l'uscita dell'operazionale è 3 V ed è compresa nella dinamica.

Per quanto riguarda il transistor abbiamo che sicuramente è *on*, perché la $V_{GS} = 3\,V > V_{th} = 1\,V$, ma in questa situazione può essere sia in triodo che in saturazione. Per essere in saturazione deve valere $V_{DS} > V_{GS} - V_{th}$.
La tensione $V_{DS} = V_D - V_S$. Dato che siamo eseguendo l'analisi per segnali costanti, il condensatore in uscita al drain è un circuito aperto, quindi la tensione di drain è data dalla caduta di potenziale sulla resistenza R_D, sulla quale scorre la corrente di drain:

$$I_D = K(V_{GS} - V_{th})^2 = 0.5\,\frac{mA}{V^2} * (3\,V\ -\ 1\,V)^2 = 2\,mA$$

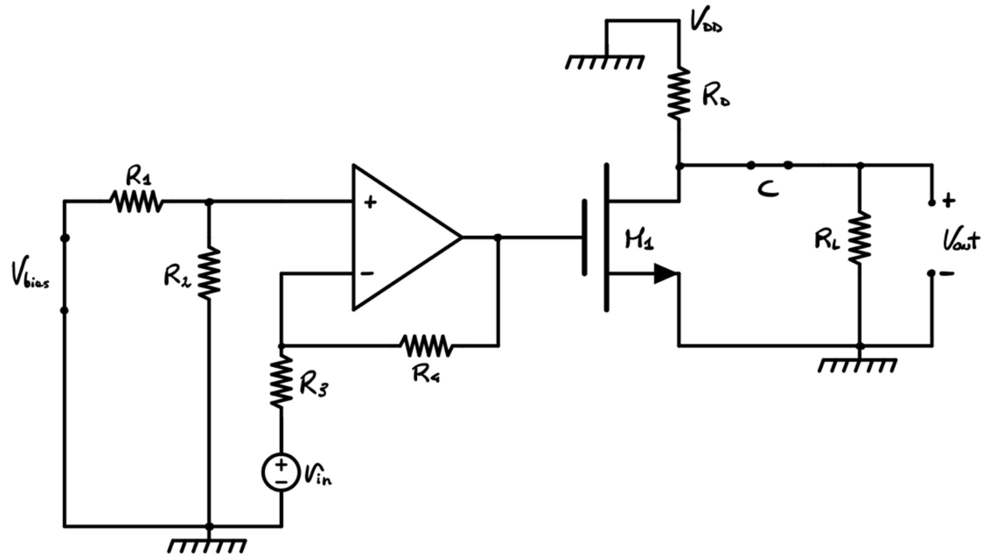
Quindi, la tensione V_{DS} è pari a:

$$V_{DS} = V_D - V_S = (V_{DD} - I_D R_D) - 0 = 10\,V - 2\,mA * 2\,k\Omega = 6\,V$$

Dato che $V_{DS} = 6\,V > V_{GS} - V_{th} = 2\,V$ si ha che il transistor è sicuramente in saturazione e quindi l'analisi eseguita è corretta.

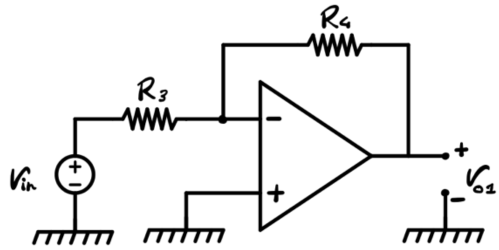
- Analisi del circuito per piccoli segnali:

Ora andiamo a considerare i segnali variabili nel tempo, annullando la presenza dei generatori costanti.
Il circuito da considerare è il seguente:



Questo circuito è la cascata di due amplificatori, il primo costituito dall'amplificatore operazionale, il secondo costituito dall'amplificatore formato dal transistor MOS. Il guadagno complessivo è il prodotto dei guadagni.

Analizziamo il primo stadio, quello formato dall'amplificatore operazionale.
Dato che la tensione di bias è cortocircuitata a massa, sul morsetto non invertente la tensione è $V^+ = 0\ V$.
La tensione v_{in} sta entrando nell'operazionale in configurazione invertente, di conseguenza l'uscita dell'operazionale è data dalla tensione in ingresso sul morsetto invertente, per il guadagno della configurazione invertente:

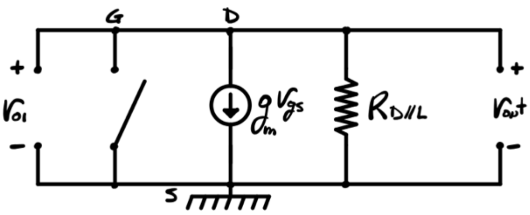


$$v_{o1} = v_{in}\left(-\frac{R_4}{R_3}\right)$$

Quindi, il guadagno del primo stadio, ovvero quello formato dall'amplificatore operazionale, è pari a:

$$A_1 = -\frac{R_4}{R_3} = -5$$

Analizziamo il secondo stadio, quello formato dal transistor MOS.
Il circuito equivalente per piccoli segnali del transistor MOS è quello in figura. Il guadagno di questo circuito è $A_2 = -g_m R_{D//L}$. Se si vuole ricavare tale guadagno attraverso l'analisi del circuito bisogna fare le seguenti considerazioni.



La tensione di uscita è quella ai capi del parallelo di resistenze $R_{D//L}$, e la corrente che scorre su questa resistenza è quella del generatore di corrente $g_m v_{gs}$. La corrente scorre dal basso verso l'alto lasciando una caduta di potenziale positiva dove entra rispetto a dove esce, quindi la caduta di potenziale ha segno opposto rispetto a quello preso in uscita, quindi il guadagno è invertente. Si ottiene:

$$v_{out} = -g_m v_{gs} R_{D//L}$$

Dove la $v_{gs} = v_{o1}$.

Quindi si ottiene $v_{out} = -g_m v_{o1} R_{D//L}$, da cui:

$$A_2 = \frac{v_{out}}{v_{o1}} = -g_m R_{D//L} = -2\ \frac{mA}{V} * \frac{2\ k\Omega * 20\ k\Omega}{2\ k\Omega + 20\ k\Omega} = -2\ \frac{mA}{V} * \frac{40\ k\Omega}{22\ k\Omega} \approx -4$$

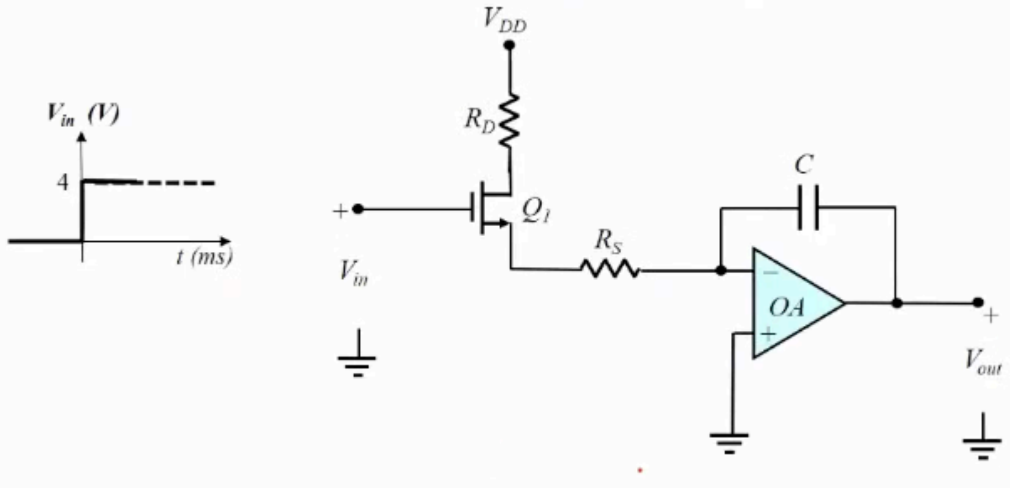
Osserviamo che il parallelo tra R_D e R_L, essendoci un ordine di grandezza di differenza tra le due, si poteva non considerate e andare a calcolare il guadagno direttamente con la resistenza più piccola. Di fatti $40/22\ \approx 2$.

Il guadagno complessivo è dato dal prodotto dei due guadagni, quindi si ottiene:

$$A = A_1 * A_2 = (-5) * (-4) \approx 20$$

Esercizio 3 (05-04-2022):

Del circuito seguente, considerando in ingresso il gradino di tensione riportato in figura, e considerando l'op-amp ideale, calcolare e graficare (indicando i valori di tensione e gli istanti di tempo corretti) l'andamento nel tempo della tensione di uscita V_O.



OA ideale con $L^+ = -L^- = 10\text{V}$ $\quad$ $\boldsymbol{Q_1} = (\boldsymbol{K} = 0{,}25\ \text{mA/V}^2\ ;\ \boldsymbol{V_T} = 1\ \text{V}\ ;\ \lambda = 0)$

$\boldsymbol{V_{DD}} = 10\text{V}$ $\quad$ $\boldsymbol{R_D} = 5\ \text{k}\Omega$ $\quad$ $\boldsymbol{R_S} = 1\ \text{k}\Omega$ $\quad$ $\boldsymbol{C} = 1\mu\text{F}$

L'amplificatore operazionale ha in retroazione un condensatore, quindi va a formare un integratore. La tensione di uscita V_{out} è la tensione sul condensatore con segno opposto, la quale varia nel tempo, dato che è funzione del tempo l'ingresso. Vediamo come varia l'uscita in funzione dell'ingresso, nei vari istanti di tempo.

Per $t < 0$, si ha $V_{in} = 0$, quindi la tensione sul gate del transistor è nulla, e di conseguenza Q_1 è interdetto. Se l'amplificatore operazionale è in zona di linearità, vale il principio del cortocircuito virtuale, quindi sul morsetto invertente sono presenti $0\ V$. Dato che il transistor è interdetto, la corrente di drain, e quindi la corrente che scorre in R_S è nulla, per cui il condensatore non si carica. Si ottiene quindi:

$$V_{out}(t < 0) = -V_C(t < 0) = 0\ V$$

Per $t > 0$, si ha $V_{in} = 4\ V$. Per il principio del cortocircuito virtuale sul morsetto invertente ci sono sempre $0\ V$. L'ipotesi è che il transistor sia in saturazione. L'equazione alla maglia di ingresso è:

$$V_G = V_{GS} + I_D R_S$$

$\begin{cases} 4 = x + y \\ y = \frac{1}{4}(x-1)^2 \to 1 \end{cases}$ $\quad$ $x + \frac{x^2+1-2x}{4} - 4$

Mettendola a sistema con l'equazione della corrente di drain per il transistor in saturazione $I_D = K(V_{GS} - V_{th})^2$, si ottiene:

$$\begin{cases} V_G = V_{GS} + I_D R_S = 4\ V \\ I_D = K(V_{GS} - V_{th})^2 \end{cases}$$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \to -5,\ 3$

Da cui si ottiene: $V_{GS} = 3\ V$ e $I_D = 1\ mA$.

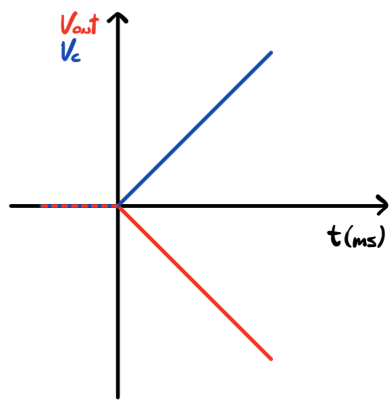
$V_{GS} > V_{TH} \to V_{GS} = 3$

Questa corrente è indipendente dal condensatore, e scorre su di esso variandone la carica in modo lineare (lineare perché la corrente non dipende dalla carica del condensatore).

La tensione sul condensatore è data da:

$$V_C(t) = \frac{Q}{C} = \frac{\int I_D dt}{C} = \frac{I_D}{C} t = 1\ \frac{V}{ms}$$

dove la corrente è stata tirata fuori dall'integrale perché è costante nel tempo.



Quindi, l'andamento della tensione di uscita è quello rappresentato in figura (in rosso V_{out} e in blu V_C).
Se non succedesse nulla, la tensione di uscita continuerebbe a decrescere indefinitamente fino alla rottura del condensatore.

Ma l'analisi fatta vale fin tanto che l'operazionale lavora in zona di linearità e quindi vale il principio del cortocircuito virtuale.
Se l'operazionale va in saturazione non vale il principio del cortocircuito virtuale e le condizioni del circuito cambiano.
L'operazionale va in saturazione quando la sua tensione di uscita raggiunge uno dei due limiti della dinamica.
La dinamica di questo amplificatore è $L^+ = -L^- = 10\,V$, quindi, dato che la tensione di uscita decresce di $1\,V$ ogni millisecondo, dopo $10\,ms$ raggiunge $-10\,V$ e quindi l'operazionale va in saturazione.
Dopo che l'amplificatore è andato in saturazione cambiano le condizioni del circuito, ma la tensione di uscita rimane sempre costante a $-10\,V$: