Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

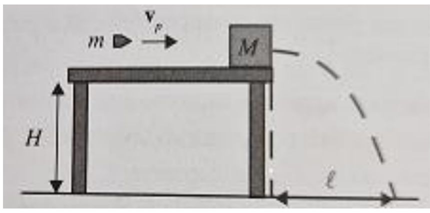
FISICA

Ingegneria Informatica e Automatica1

09.06.2023-A.A. 2022-2023 (12 CFU) C.Sibilia/L.Sciscione

N.1. Durante la posa di un traliccio dell'alta tensione, un bullone mal fissato cade da un'altezza *h* rispetto al suolo. Sapendo che nell'ultimo secondo del suo moto, prima di toccare terra, esso percorre una altezza pari a *h*/2, determinare il valore di *h*.

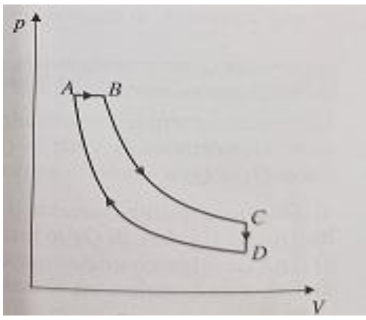
N.2. Un proiettile di massa *m* viene sparato dentro un blocco di legno di massa *M* inizialmente fermo sul bordo di un tavolo (supposto senza attrito) a un'altezza *H* dal pavimento, come mostrato in Figura. Dopo l'urto, il proiettile rimane conficcato nel blocco, che cade a terra a una distanza *l* dal punto di impatto.



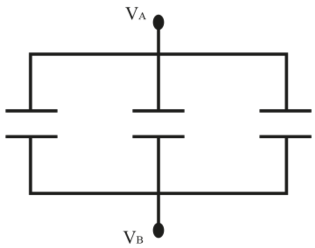
a) Quali quantità si conservano durante l'urto?
b) Determinare la velocità iniziale del proiettile.
c) Si supponga ora che, dopo aver toccato il terreno, il blocco continui a strisciare per una lunghezza *L*, rallentando e poi fermandosi per effetto dell'attrito. Trovare il coefficiente di attrito radente dinamico in funzione delle quantità note

N.3 Il ciclo di un motore Diesel può essere schematizzato come in Figura, ed è costituito dalle seguenti trasformazioni reversibili: un'isobara *AB*, un'adiabatica *BC*, un'isocora *CD* e, infine, un'altra adiabatica *DA*. Si consideri ora un motore Diesel funzionante con $n = 1$ moli di gas perfetto monoatomico. Sia, inoltre, $V_A = 0.010\ m^3, V_B = \frac{3}{2}V_A, V_C = 2V_A$ e $T_A = 300\ K$.

a) Calcolare il lavoro fatto dal gas in un ciclo.
b) Calcolare il rendimento del ciclo e paragonarlo al ciclo di Carnot di una macchina che opera fra due sorgenti aventi temperatura uguale a T_B (temperatura nello stato *B*) e T_D (temperatura nello stato *D*).
c) Calcolare la variazione di entropia corrispondente a ciascuna trasformazione.

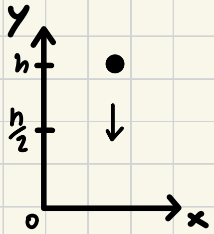


N.4. Tre condensatori identici di capacità $C_0 = 2nF$ sono collegati in parallelo. La differenza di potenziale tra le armature superiori ed inferiori viene mantenuta costante, pari a $V_A - V_B = 24V$. Quando tra le armature di uno dei tre condensatori viene inserita una lastra di dielettrico, l'energia elettrostatica nel sistema risulta essere il doppio di quella immagazzinata nella configurazione iniziale. Si calcolino la costante dielettrica relativa ε_r e la carica che si deposita sulle armature di ogni singolo condensatore nella configurazione finale.



N.5. Un vettore induzione magnetica perpendicolare al piano di una spira di raggio $R = 1cm$, varia nel tempo secondo la legge $B(t) = At^2 + C$ con $A = 1Ts^{-2}$ e $C = 0.5T$. Determinare la forza elettromotrice indotta nella spira all'istante $t^* = 2s$, indicare anche il verso della corrente indotta nella spira

N.1. Durante la posa di un traliccio dell'alta tensione, un bullone mal fissato cade da un'altezza *h* rispetto al suolo. Sapendo che nell'ultimo secondo del suo moto, prima di toccare terra, esso percorre una altezza pari a *h*/2, determinare il valore di *h*.



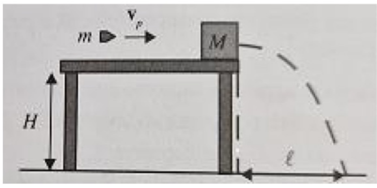
IN t_2 $y(t_2)=0$, IN t_1 $y(t_1)=h/2$ $\qquad t_2-t_1=\Delta t=1\,s$

$$y(t_1)=\frac{h}{2}=h-\frac{1}{2}gt_1^2 \rightarrow t_1=\sqrt{h/g}$$

$$y(t_2)=0=h-\frac{1}{2}gt_2^2 \rightarrow t_2=\sqrt{2h/g}$$

$$\Delta t=\sqrt{\frac{2h}{g}}-\sqrt{\frac{h}{g}} \rightarrow h=\frac{g\Delta t^2}{(3-2\sqrt{2})}=57\,m$$

N.2. Un proiettile di massa *m* viene sparato dentro un blocco di legno di massa *M* inizialmente fermo sul bordo di un tavolo (supposto senza attrito) a un'altezza *H* dal pavimento, come mostrato in Figura. Dopo l'urto, il proiettile rimane conficcato nel blocco, che cade a terra a una distanza *l* dal punto di impatto.



a) Quali quantità si conservano durante l'urto?

b) Determinare la velocità iniziale del proiettile.

c) Si supponga ora che, dopo aver toccato il terreno, il blocco continui a strisciare per una lunghezza *L*, rallentando e poi fermandosi per effetto dell'attrito. Trovare il coefficiente di attrito radente dinamico in funzione delle quantità note

a) SOLO QUANTITÀ DI MOTO, E_K NO PERCHÈ È UN URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO

b) $m v_p=(m+M)v_0$ $\qquad$ RICAVIAMO v_0 DAL MOTO PARABOLICO:

$$\begin{cases} x(t_0)=v_0 t \\ y(t_0)=-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

IN t_1 (QUANDO TOCCA IL SUOLO), SI HA:

$$\begin{cases} x(t_1)=\ell \\ y(t_1)=-H \end{cases}$$

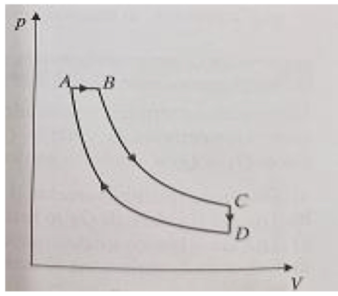
$$-\frac{1}{2}gt_1^2=-H \rightarrow t_1=\sqrt{\frac{2H}{g}} \qquad v_0 t_1=\ell \rightarrow v_0=\sqrt{\frac{g\ell^2}{2H}}$$

$$v_p=\left(\frac{m+M}{m}\right)\sqrt{\frac{g\ell^2}{2H}}$$

c) $W=\mu_d(m+M)g\cdot\ell \rightarrow \frac{1}{2}(m+M)v_0^2=W=\mu_d(m+M)g\ell \rightarrow \mu_d=\frac{v_0^2}{2g\ell}$

N.3 Il ciclo di un motore Diesel può essere schematizzato come in Figura, ed è costituito dalle seguenti trasformazioni reversibili: un'isobara *AB*, un'adiabatica *BC*, un'isocora *CD* e, infine, un'altra adiabatica *DA*. Si consideri ora un motore Diesel funzionante con $n = 1$ moli di gas perfetto monoatomico. Sia, inoltre, $V_A = 0.010\ m^3, V_B = \frac{3}{2}V_A, V_C = 2V_A$ e $T_A = 300\ K$.

a) Calcolare il lavoro fatto dal gas in un ciclo.
b) Calcolare il rendimento del ciclo e paragonarlo al ciclo di Carnot di una macchina che opera fra due sorgenti aventi temperatura uguale a T_B (temperatura nello stato *B*) e T_D (temperatura nello stato *D*).
c) Calcolare la variazione di entropia corrispondente a ciascuna trasformazione.



$n=1 \qquad c_v = \frac{3}{2}R \quad c_p = \frac{5}{2}R \quad \gamma = 5/3$

AB:

$$P_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 2{,}49 \cdot 10^5\ Pa = P_B \qquad T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = 450K$$

$$Q_{AB} = nc_p(T_B - T_A) = 3116\ J \qquad W_{AB} = P\Delta V = 1246{,}5\ J$$

BC:

$$TV^{\gamma-1} = cost \rightarrow T_C V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \rightarrow T_C = T_B\left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} = 371{,}47K$$

$$Q_{BC} = 0 \qquad W_{BC} = nc_v(T_C - T_B) = -978{,}87\ J$$

CD:

$$V_C = 2V_A = V_D$$

$$W_{CD} = 0 \qquad Q_{CD} = nc_v(T_D - T_C) = -2274{,}6\ J$$

DA:

$$TV^{\gamma-1} = cost \rightarrow T_D = T_A\left(\frac{V_A}{V_D}\right)^{\gamma-1} \rightarrow T_D = T_A\left(\frac{V_A}{2V_A}\right)^{\gamma-1} \rightarrow T_D = 188{,}99K$$

$$Q_{DA} = 0 \qquad W_{DA} = nc_v(T_A - T_D) = 1383{,}7\ J$$

a) IN UN CICLO $\Delta U = 0 \rightarrow Q = W = 841{,}4\ J$

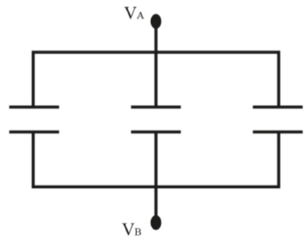
b) $\eta = 1 - \frac{Q_{CED}}{Q_{ASS}} = \frac{W}{Q_{ASS}} = 0{,}27 = 27\%$ $\qquad \eta_{CA} = 1 - \frac{T_{FREDDA}}{T_{CALDA}} = 1 - \frac{T_D}{T_B} = 0.58 = 58\%$

c) $\Delta S = 0$ IN UN CICLO $\quad \Delta S_{BC} = 0$ E $\Delta S_{DA} = 0$ PERCHÈ ADIABATICHE

QUINDI $\quad \Delta S = \Delta S_{AB} + \Delta S_{CD} = 0 \rightarrow \Delta S_{AB} = -\Delta S_{CD} = -8{,}42\ J/K$

$$\Delta S_{AB} = nc_p \ln\frac{T_B}{T_A} = 8{,}42\ J/K$$

N.4. Tre condensatori identici di capacità $C_0 = 2nF$ sono collegati in parallelo. La differenza di potenziale tra le armature superiori ed inferiori viene mantenuta costante, pari a $V_A - V_B = 24V$. Quando tra le armature di uno dei tre condensatori viene inserita una lastra di dielettrico, l'energia elettrostatica nel sistema risulta essere il doppio di quella immagazzinata nella configurazione iniziale. Si calcolino la costante dielettrica relativa ε_r e la carica che si deposita sulle armature di ogni singolo condensatore nella configurazione finale.



$$\begin{cases} C_{EQ_i} = 3C_0 \\ C_{EQ_{fin}} = (2+\varepsilon_r)C_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} U_{e_i} = \frac{1}{2} C_{EQ_i} \Delta V^2 = \frac{3}{2} C_0 \Delta V^2 \\ U_{e_{fin}} = \frac{1}{2} C_{EQ_{fin}} \Delta V^2 = \frac{1}{2}(2+\varepsilon_r) C_0 \Delta V^2 = 2 U_{e_i} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}(2+\varepsilon_r) C_0 \Delta V^2 = 3 C_0 \Delta V^2 \rightarrow \varepsilon_r = 4$$

SENZA ε_r: $Q_1 = Q_2 = C_0 \Delta V = 48\ nC$ CON ε_r: $Q_3 = \varepsilon_r C_0 \Delta V = 192\ nC$

N.5. Un vettore induzione magnetica perpendicolare al piano di una spira di raggio $R = 1cm$, varia nel tempo secondo la legge $B(t) = At^2 + C$ con $A = 1Ts^{-2}$ e $C = 0.5T$. Determinare la forza elettromotrice indotta nella spira all'istante $t^* = 2s$, indicare anche il verso della corrente indotta nella spira

$FEM = -\frac{d\Phi B}{dt}$ DOVE $\Phi B = B \cdot A_{SPIRA} = B \cdot \pi R^2$

$$FEM = -\frac{d\Phi B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(B(t) \cdot \pi R^2\right) = -\pi R^2 \frac{dB(t)}{dt} = -2At\pi R^2$$

$$|FEM| = 2At^*\pi R^2 = 0.001256\ V = 1{,}256\ mV$$

SE $B(t)$ È USCENTE DAL FOGLIO LA FEM VA IN SENSO ORARIO (LENZ)

Università degli Studi di Roma “La Sapienza”

FISICA

Ingegneria Informatica e Automatica1

09.06.2023-A.A. 2022-2023 (12 CFU) C.Sibilia/L.Sciscione

N.1. Sia z l’asse verticale rivolto verso l’alto, con origine al suolo, e $t_0 = 0$ l’istante in cui il bullone si stacca, in modo che $z(t_0) = h, v_z(t_0) = 0$. Sia t_1 l’istante in cui il bullone si trova a $h/2$ dal suolo e t_2 l’istante in cui tocca il suolo: si sa che $t_2 - t_1 = \Delta t = 1s$. Poiché il moto di caduta è uniformemente accelerato ($\alpha_z = -g$) si ha che:

$$z(t_1) = \frac{h}{2} = h - \frac{1}{2}gt_1^2 \rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{h}{g}}$$

$$z(t_2) = 0 = h - \frac{1}{2}gt_2^2 \rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Da cui si ottiene $\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{h}{g}}$ e quindi $h = (g(\Delta t)^2)/(3-2\sqrt{2}) = 57.18$ m

N.2. Si consideri un sistema di assi cartesiani con l’asse x orizzontale (orientato verso destra) e l’asse y verticale (orientato verso l’alto).

a) Il sistema proiettile + blocco è sottoposto alle seguenti forse esterne: il peso del blocco $M\boldsymbol{g}$, la reazione normale $\mathbf{N}$ dovuta al piano del tavolo, e il peso del proiettile $m\boldsymbol{g}$. Tutte le forze sono verticali per cui $\sum F_x = dP_x/dt = 0$ e quindi P_x certamente si conserva. Anche P_y è costante perché quando il proiettile inizia a penetrare nel blocco, il suo peso è bilanciato da un piccolo aumento della reazione vincolare $\mathbf{N}$ e quindi la risultante delle forze lungo la direzione y resta nulla. L’energia cinetica invece non si conserva perché l’urto è completamente anelastico.
b) Immediatamente prima dell’urto, $P_x^i = mv_p$ avendo chiamato v_p la velocità del proiettile; dopo l’urto, il blocco (con dentro il proiettile) ha una velocità v_0 per cui $P_x^f = (m+M)v_0$. Perciò
$P_x^i = P_x^f \rightarrow mv_p = (m+M)v_0$.
Questa relazione permette di calcolare v_p solo se si conosce v_0, che però si ottiene dal moto parabolico del sistema blocco + proiettile mentre cade a terra. Posta l’origine degli assi nel punto ove avviene l’urto e posto $t = 0$ l’istante in cui inizia il moto, le equazioni orarie sono:

$$x(t) = v_0 t \qquad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2.$$

All’istante t_1 in cui il blocco tocca terra, si ha $x(t_1) = l$ e $y(t_1) = -H$. Da quest’ultima si ricava $t_1 = \sqrt{2H/g}$ che, sostituita nella precedente, dà $v_0 = \sqrt{(gl^2)/(2H)}$ e successivamente

$$v_p = \frac{m+M}{m}\sqrt{\frac{gl^2}{2H}}.$$

c) Nel momento in cui il blocco (trattato come puntiforme) tocca il suolo, è soggetto a una forza impulsiva dovuta al pavimento che annulla la componente verticale della sua quantità di moto. E' lecito invece assumere che la quantità di moto lungo l'asse orizzontale si conservi, il che significa che:

i) la forza impulsiva esercitata dal pavimento è praticamente verticale;

ii) il moto di strisciamento inizia con una velocità orizzontale pari a v_0. L'accelerazione del corpo durante lo strisciamento si ottiene dalla relazione $v^2 = v_0^2 + 2_{\alpha x}(x - x_0)$ imponendo che sia $v = 0$ quando $(x - x_0) = L$.

Si trova quindi $\alpha_x = -v_0^2/(2L)$. Durante lo strisciamento la II legge di Newton dice inoltre che $-f_d = (m+M)\alpha_x$ e che $N = (m+M)g$. Essendo $f_d = \mu_d N$ si ottiene che

$$\mu_d = \frac{v_0^2}{2_g L} = \frac{l^2}{4HL}.$$

N.3 Cominciamo col calcolare le coordinate termodinamiche incognite nei vari stati *A*, *B*, *C* e *D*. Nello stato *A*, essendo noti n, V_A e T_A, dall'equazione di stato dei gas perfetti si ricava

$$p_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 2.49\ 10^5\ Pa.$$

Nello stato *B*, essendo $V_B = \frac{3}{2}V_A$ e $p_B = p_A$, utilizzando nuovamente l'equazione di stato si ottiene

$$T_B = \frac{3}{2}T_A = 450\ K.$$

Per lo stato *C*, ricordiamo che la trasformazione *BC* è adiabatica reversibile, per cui

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$

dove $\gamma = \frac{5}{3}$ per un gas perfetto monoatomico. Dalla 9.29, tenendo presente che $V_B = \frac{3}{2}V_A$ e $V_C = 2V_A$, si ricava

$$T_C = T_B \left(\frac{3}{4}\right)^{\gamma-1} = 2T_A\left(\frac{3}{4}\right)^{\gamma} = 371.47\ K$$

dove nel secondo passaggio si è usata la relazione $T_B = \frac{3}{2}T_A$. Per determinare la pressione p_C, si parte dall'equazione di stato $p_C V_C = nRT_C$ e, usando il risultato 9.30 e il fatto che $V_C = 2V_A$, si ricava

$$p_C = p_A\left(\frac{3}{4}\right)^{\gamma} = 1.54\ 10^5\ Pa.$$

Infine, per lol stato *D*, consideriamo che la trasformazione *CD* è isocora e quindi $V_D = V_C = 2V_A$. Inoltre, la trasformazione *DA* è adiabatica reversibile, quindi sussiste la relazione $p_D V_D^\gamma = p_A V_A^\gamma$, da cui si ottiene

$$p_D = p_A \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma} = 0.78\ 10^5\ Pa.$$

Dall'equazione di stato si ottiene infine $T_D = (2^{1-\gamma})T_A = 188.99\ K$.

a) Grazie al primo principio della termodinamica sappiamo che in un ciclo $\Delta u = 0$ per cui $Q = W$. Il gas non compie lavoro nella trasformazione isocora *CD*: in tutte le altre trasformazioni il lavoro è non nullo. Però, nelle trasformazioni adiabatiche *BC* e *DA*, il gas non scambia calore. Pertanto anziché calcolare il lavoro totale L come somma dei lavori compiuti lungo le *tre* trasformazioni non isocore *AB*, *BC* e *DA*, conviene calcolare il calore totale scambiato dal gas lungo le *due* trasformazioni non adiabatiche, ossia *AB* e *CD*. Ricordando che $c_V = 3R/2$ e $c_p = 5R/2$, il calore scambiato nell'isobara *AB* vale

$$Q_{AB} = nc_p(T_B - T_A) = 3116.25\ J$$

mentre quello scambiato lungo l'isocora *CD* vale

$$Q_{CD} = nc_v(T_D - T_C) = -2274.60\ J.$$

In particolare, $Q = Q_{AB} + Q_{CD} = 841.65\ J$ è il calore scambiato durante l'intero ciclo, che coincide con il lavoro totale compiuto:

$$W = Q = 841.65\ J.$$

b) Il rendimento del ciclo è dato da

$$\eta = \frac{W}{Q_{AB}} = 1 - \frac{c_V(T_C - T_D)}{c_p(T_B - T_A)} = 0.27$$

che va paragonato con

$$\eta_C = 1 - \frac{T_D}{T_B} = 0.58$$

che rappresenta il rendimento della macchina di Carnot.

c) Essendo l'entropia una funzione di stato, la sua variazione su un ciclo è sempre nulla, quindi $\Delta S = 0$. Essendo le adiabatiche reversibili anche isoentropiche, segue che $\Delta S_{BC} = 0$ e $\Delta S_{DA} = 0$. Pertanto

$$\Delta S = \Delta S_{AB} + \Delta S_{CD} = 0$$

da cui $\Delta S_{CD} = -\Delta S_{AB}$. Per calcolare la variazione di entropia nella trasformazione isobara *AB*, utilizziamo la relazione

$$\Delta S_{AB} = nc_p ln\frac{T_B}{T_A} = 8.42\ J/K.$$

N.4. 4. I tre condensatori sono in parallelo, la capacità equivalente iniziale è $C_{eq}^{in} = 3C_0$, invece, la capacità equivalente dopo aver inserito una lastra di dielettrico in uno dei tre capacitori è $C_{eq}^{fin} = (2 + \varepsilon_r)C_0$.

Le espressioni dell'energia elettrostatica immagazzinata sono: $U_c^{in} = \frac{1}{2}C_{eq}^{in}\Delta V = \frac{3}{2}C_0\Delta V$, $U_c^{fin} = \frac{1}{2}C_{eq}^{fin}\Delta V = \frac{1}{2}(2 + \varepsilon_r)C_0\Delta V = 2U_c^{in}$, da cui si ricava $\varepsilon_r = 4$. Per le cariche:

$$Q_1 = Q_2 = C_0\Delta V = 48nC$$

$$Q_3 = \varepsilon_r C_o \Delta V = 192nC$$

N.5 5. $f_i(t) = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -2At\pi R^2 \Rightarrow |f_i| = 2At^*\pi R^2 = 1.25mV$, se il vettore induzione magnetica è uscente dal foglio la corrente indotta scorre in senso orario.