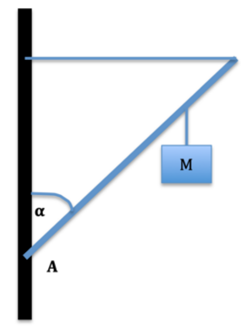
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Ingegneria Informatica e Automatica
Proff Massimo Petrarca e Marco Toppi
FISICA 3.7.2024

Si ricorda di svolgere i conti tutti in forma analitica verificando lo studio dimensionale; solo alla fine inserire i numeri dove richiesto.

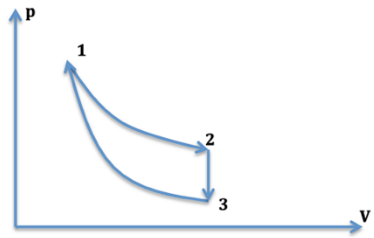
Esercizio 1

Un'asta omogenea di massa m=1 Kg e lunghezza L=2m (Fig. 2) è incernierata in A ad un muro verticale e forma con esso un angolo α=45°. Alla distanza D=(3L)/4 è agganciata una massa di M = 12 Kg ed alla sua estremità una fune inestensibile di massa trascurabile che supporta una tensione massima $|T_{max}|$=1000 N. Calcolare: la tensione della fune (modulo, direzione e verso). La massa massima M_{max} e l'intervallo di valori che M può assumere senza che il filo si spezzi. (nel disegno la massa M e' agganciata all'asta tramite un filo. Non considerare questo filo che e' presente solo per ragioni grafiche ma considerare la massa M sull' asta come fosse incastonata) .



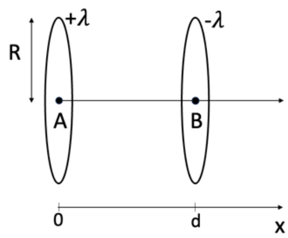
Esercizio 2

Un sistema termodinamico isolato, composto da un gas perfetto, compie un ciclo reversibile costituito da un'espansione isoterma 1-2, un raffreddamento isocoro 2-3 ed una trasformazione adiabatica 3-1. Sapendo che $V_2 = 3\ V_1$, e che γ= 7/5= 1.4, calcolare: il lavoro prodotto in un ciclo, il calore assorbito e ceduto dal sistema, la variazione di energia interna per ogni trasformazione e nell'intero ciclo; calcolare il rendimento del ciclo e la variazione di entropia lungo tutte le trasformazioni.



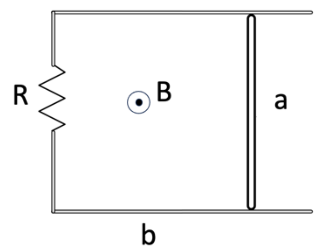
Esercizio 3

Nel vuoto, una carica statica è uniformemente distribuita con densità lineare $+\lambda$ e $-\lambda$ rispettivamente su due fili circolari (anelli) coassiali di raggio *R*, separati da una distanza d, come in figura. 1) Si calcoli l'espressione della differenza di potenziale V_A-V_B, tra i rispettivi centri A e B.
2) Se una carica q_0 = +1e = $1.6*10^{-19}$ C è posta in A con velocità nulla, quanto è la sua energia quando arriva in B? [$\lambda = 1\ \mu C/m, d = 10\ m,\ \ R = 10\ cm$]



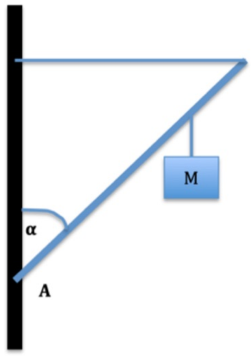
Esercizio 4

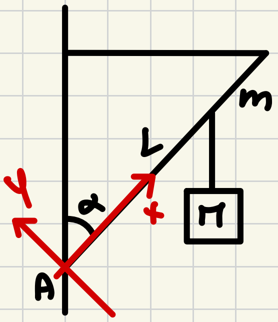
Si consideri un circuito rettangolare di lati *a* e *b* e resistenza *R*, con uno dei due lati lunghi *a* libero di scorrere. Sia tale circuito immerso in un campo magnetico uniforme e variabile nel tempo *t* che aumenti linearmente con legge *B*=*kt*, dove *k* è una costante pari a $k=10^{-3}$ T/s.
1) Si determini l'espressione della forza che bisogna applicare al lato mobile per tenerlo fermo.
2) Si determini il valore di tale forza nel caso particolare in cui *a*=*b*=10 cm e *R* = 1kΩ e si faccia l'analisi dimensionale del risultato ottenuto.
3) la forza determinata è costante, aumenta o diminuisce nel tempo? Se per t_1 = 100 s il campo smette di crescere e diventa costante, qual'è la forza che bisogna applicare al lato mobile per tenerlo fermo per $t>t_1$?



Esercizio 1

Un'asta omogenea di massa m=1 Kg e lunghezza L=2m (Fig. 2) è incernierata in A ad un muro verticale e forma con esso un angolo α=45°. Alla distanza D=(3L)/4 è agganciata una massa di M = 12 Kg ed alla sua estremità una fune inestensibile di massa trascurabile che supporta una tensione massima $|T_{max}|$=1000 N. Calcolare: la tensione della fune (modulo, direzione e verso). La massa massima M_{max} e l'intervallo di valori che M può assumere senza che il filo si spezzi. (nel disegno la massa M e' agganciata all'asta tramite un filo. Non considerare questo filo che e' presente solo per ragioni grafiche ma considerare la massa M sull' asta come fosse incastonata) .





$$\vec{M} = \vec{F} \cdot \vec{b}$$

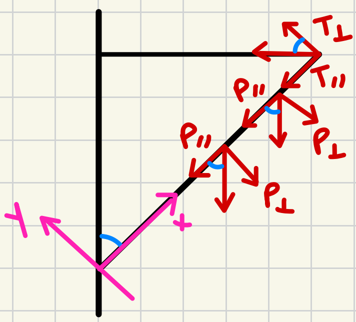
- $M_T + M_A + M_M = 0$
- $-T L \cos\alpha + mg\frac{L}{2}\sin\alpha + Mg\frac{3L}{4}\sin\alpha = 0$

$$T = \left(\frac{m}{2} + \frac{3M}{4}\right) g\, tg\alpha = 93{,}2\ N$$

$$mg\frac{L}{2}\sin\alpha + M_{MAX}\, g\frac{3L}{4}\sin\alpha = T_{MAX} L\cos\alpha$$

$$M_{MAX} = \frac{T_{MAX} L\cos\alpha - mg\frac{L}{2}\sin\alpha}{g\frac{3L}{4}\sin\alpha} = \frac{T_{MAX}\cos\alpha}{g\frac{3}{4}\sin\alpha} - \frac{m\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} \approx 135{,}94\ Kg$$

$$0 \le M \le M_{MAX}$$



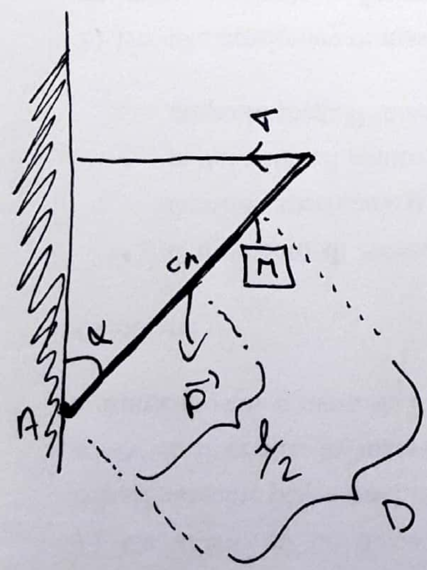
Momento delle forze rispetto ptò A. $\vec{M} = 0$

$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha + Mg\frac{3}{4}l\sin\alpha - lT\cos\alpha = 0$$

$$T = \left(\frac{m}{2} + \frac{3}{4}M\right)g\,\mathrm{tg}\,\alpha \simeq 95{,}0\,N \qquad (g \simeq 10\ m/s^2)$$

$$M_{max} = \left[T_{max} - \frac{mg}{2}\mathrm{tg}\,\alpha\right]\cdot\frac{4}{3}\frac{1}{g\,\mathrm{tg}\,\alpha} \simeq 132{,}6\ Kg$$

$$0 \leq M \leq M_{max}$$



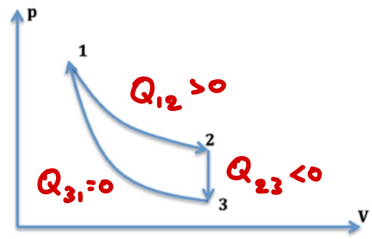
Asta lunga $l = 2m$, $m = 1\,Kg$

$D = \frac{3}{4}l$

$M = 12\,Kg$

Esercizio 2

Un sistema termodinamico isolato, composto da un gas perfetto, compie un ciclo reversibile costituito da un'espansione isoterma 1-2, un raffreddamento isocoro 2-3 ed una trasformazione adiabatica 3-1. Sapendo che $V_2 = 3\,V_1$, e che $\gamma = 7/5 = 1.4$, calcolare: il lavoro prodotto in un ciclo, il calore assorbito e ceduto dal sistema, la variazione di energia interna per ogni trasformazione e nell'intero ciclo; calcolare il rendimento del ciclo e la variazione di entropia lungo tutte le trasformazioni.



$c_v = \frac{5}{2}R \quad c_p = \frac{7}{2}R \quad \gamma = 7/5 = 1.4$ GAS BIATOMICO

$T_1 = T_2 \qquad V_2 = V_3 = 3V_1$

ISOTERMA 1-2:

$$\Delta U = 0 \rightarrow Q_{12} = W = nRT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = nRT_1\ln 3$$

ISOCORA 2-3:

$$W = 0 \qquad Q_{23} = \Delta U = nc_v\Delta T = nc_v(T_3 - T_2)$$

ADIABATICA 3-1:

$$Q_{31} = 0 \qquad TV^{\gamma-1} = \text{cost} \rightarrow T_3V_3^{\gamma-1} = T_1V_1^{\gamma-1} \rightarrow \frac{T_3}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\gamma-1}$$

$$W_{TOT} = W_{12} + W_{23} + W_{31} = nRT_1\ln 3 + 0 + W_{31}$$

$$Q_{ASS} = Q_{12} \qquad Q_{CED} = Q_{23}$$

$\Delta U_{12} = 0 \quad \Delta U_{23} = Q_{23} = Q_{CED} \quad \Delta U_{31} = W_{31} \quad \Delta U_{ciclo} = 0$ SEMPRE

$$\eta = 1 - \frac{Q_{CED}}{Q_{ASS}} = 1 - \frac{nc_v(T_3 - T_2)}{nRT_1\ln 3} = 1 - \frac{\frac{5}{2}nRT_1\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{\gamma-1}\right)}{nRT_1\ln 3} = 0.19$$

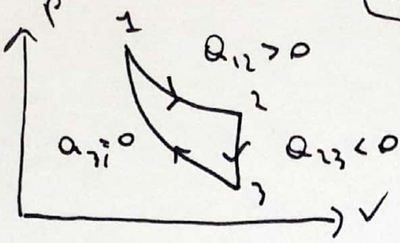
$$\Delta S_{12} = \frac{Q_{12}}{T_1} = nR\ln 3$$

$$\Delta S_{23} = \int\frac{dQ}{T} = nc_v\int_{T_2}^{T_3}\frac{1}{T}dT = nc_v\ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) = nc_v\ln\left(\frac{1}{3}\right)^{\gamma-1} = (\gamma-1)nc_v\ln(3^{-1}) = -(\gamma-1)nc_v\ln 3$$

$$\Delta S_{31} = 0$$

$$\Delta S_U = \Delta S_{SIST} + \Delta S_{AMB} = 0$$

N°3



- Sistema isolato
- Ciclo reversibile

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{23}|}{Q_{12}}$$

$$Q_{12} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad \text{ISOTERMA}$$

infatti: $\Delta U = 0 = \Delta Q - \Delta L$

$$dL = p\,dV = nRT \frac{dV}{V} \Rightarrow L = nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$Q_{23} = nc_v |T_3 - T_2| = \frac{5}{2} nR (T_2 - T_3) = \frac{5}{2} nRT_1 \left(1 - \frac{T_3}{T_1}\right)$$

infatti: $\Delta U = \Delta Q$ essendo $\Delta L = 0$ ISOCORA

$\Delta U = nc_v \Delta T \Rightarrow \Delta U = nc_v (T_3 - T_2)$

(c_v è costante in funzione della temperatura)

↳ assunzione.

$Q_{31} = 0$ ADIABATICA

$$TV^{\gamma-1} = \text{cost} \Rightarrow \frac{T_3}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \qquad \gamma = \frac{7}{5}$$

$$\eta = 1 - \frac{\frac{5}{2} nRT_1 \left[1 - (V_1/V_2)^{\gamma-1}\right]}{nRT_1 \ln (V_2/V_1)} \simeq 0.19$$

$$\Delta S_{12} = \int \frac{\delta Q}{T} \qquad \begin{array}{l} \Delta U = 0 \\ dQ = dL \end{array} \quad \Rightarrow \quad \Delta S_{12} = nRT_1 \cdot \frac{1}{T_1} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\Delta S_{23} = \int \frac{\delta Q}{T} \qquad \begin{array}{l} dU = dQ \\ dL = 0 \\ dU = nC_v dT \end{array} \quad \Rightarrow \quad \Delta S_{23} = nC_v \int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} = nC_v \ln \frac{T_3}{T_2}$$

essendo $T_2 = T_1$ e $\frac{T_3}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \Delta S_{23} = -nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

infatti:
$$\Delta S_{23} = nC_v \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = -nC_v(\gamma-1)\ln(V_2/V_1)$$
$$= -nC_v\left(\frac{c_p}{c_v}-1\right)\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -n(c_p-c_v)\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

essendo $R = c_p - c_v$

$\Delta S_{31} = 0$ adiabatica

$\Delta S_{ciclo} = 0$ ciclo reversibile e S è <u>funzione di stato</u>.

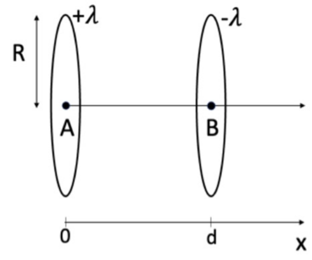
Il sistema è isolato, il ciclo è reversibile, S è funzione stato

$\Rightarrow \Delta S_U = \Delta S_{sist} + \Delta S_{AMBIENTE} = 0$

Il gas è biatomico essendo $\gamma = \frac{7}{5}$

Esercizio 3

Nel vuoto, una carica statica è uniformemente distribuita con densità lineare $+\lambda$ e $-\lambda$ rispettivamente su due fili circolari (anelli) coassiali di raggio R, separati da una distanza d, come in figura. 1) Si calcoli l'espressione della differenza di potenziale V_A-V_B, tra i rispettivi centri A e B.
2) Se una carica $q_0 = +1e = 1.6*10^{-19}$ C è posta in A con velocità nulla, quanto è la sua energia quando arriva in B? [$\lambda = 1\ \mu C/m, d = 10\ m,\ \ R = 10\ cm$]



1) $V_A - V_B = V_{TOT}(0) - V_{TOT}(d)$

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dq}{r} = \frac{2\pi R\cdot\lambda}{\sqrt{x^2+R^2}\ 4\pi\varepsilon_0} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$V_A = V_{\lambda}(0) + V_{-\lambda}(d) = \left.\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}\right|_{x=0} - \left.\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}\right|_{x=d} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{R}{\sqrt{d^2+R^2}}\right)$$

$$V_B = V_{\lambda}(d) + V_{-\lambda}(0) = \left.\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}\right|_{x=d} - \left.\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}\right|_{x=0} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\left(\frac{R}{\sqrt{d^2+R^2}} - 1\right)$$

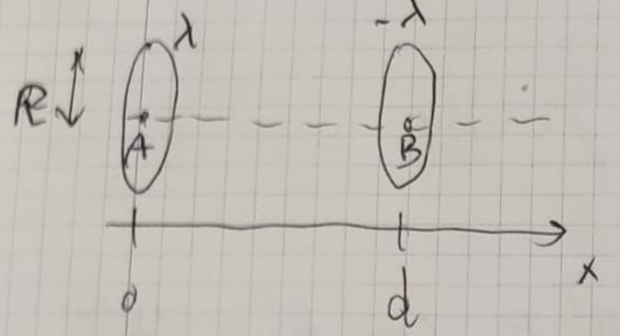
$$V_A - V_B = \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{R}{\sqrt{d^2+R^2}}\right) = \frac{\cancel{10^{-6}}}{8{,}9\cdot 10^{\cancel{-12}\ -2}}\left(1 - \frac{10^{-1}}{\sqrt{10^2+10^{-2}}}\right) = \frac{1}{8{,}9\ 10^{-2}}\left(1 - \frac{10^{-1}}{\sqrt{100{,}01}}\right) =$$

$$\frac{0{,}99}{8{,}9\cdot 10^{-2}} = 0{,}11\cdot 10^{2} \approx 11\ V$$

2) $$\Delta U_e = -q_0\Delta V = \frac{\lambda q_0}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{R}{\sqrt{d^2+R^2}}\right) \approx q_0\frac{\lambda}{\varepsilon_0} \quad \text{SE } R \ll d$$

$$U_e = 1e\cdot\frac{10^{-6}}{8.89} = 1.6\cdot 10^{\cancel{-19}\ -17}\cdot\frac{\cancel{10^{-6}}}{8{,}9\cdot 10^{\cancel{-12}\ -2}} = 1{,}8\cdot 10^{-18}\ J$$

ESERCIZIO 3, ESAME DEL 03/07/2024

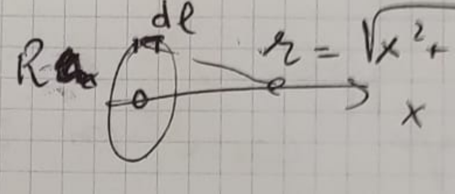


$$Q_{ANELLO} = \pm 2\pi R \lambda$$

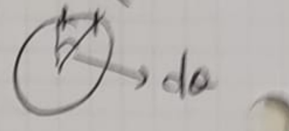
$$V_A - V_B = V_{tot}(0) - V_{tot}(d)$$

Calcolo il potenziale di un anello carico:

$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} =$$



$$dl = R\,d\theta$$



$$= \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2+R^2}} = \frac{\lambda R\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2+R^2}} \Rightarrow V(x) = \frac{2\pi\lambda R}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2+R^2}}$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{Q_{ANELLO}}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2+R^2}}$$

$$V_A = V_{+\lambda}(0) + V_{-\lambda}(d) = \left.\frac{2\pi R\lambda}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2+R^2}}\right|_{x=0} + \left.\frac{2\pi R(-\lambda)}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2+R^2}}\right|_{x=d} =$$

$$= \frac{R\lambda}{2\varepsilon_0 R} - \frac{R\lambda}{2\varepsilon_0\sqrt{d^2+R^2}} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{R}{\sqrt{d^2+R^2}}\right]$$

$$V_B = V_{+\lambda}(d) + V_{-\lambda}(0) = \left.\frac{2\pi R\lambda}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2+R^2}}\right|_{x=d} + \left.\frac{2\pi R(-\lambda)}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2+R^2}}\right|_{x=0} =$$

$$= \frac{R\lambda}{2\varepsilon_0\sqrt{d^2+R^2}} + \frac{-\lambda R}{2R\varepsilon_0} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\left[\frac{R}{\sqrt{d^2+R^2}} - 1\right]$$

$$\boxed{V_A - V_B = \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\left[1 - \frac{R}{\sqrt{d^2+R^2}}\right]}$$

2) $q_0 = 1e$

$R = 10\ cm$, $d = 10\ m$

$\lambda = 10^{-6}\ C/m$

L'energia guadagnata quando q_0 arriva in B è:

$$U_e = q_0 (V_A - V_B) \simeq q_0 \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\left[1 - \frac{R}{\sqrt{d^2+R^2}}\right] \simeq$$

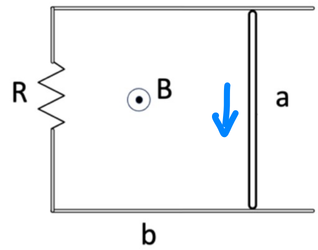
$$\simeq q_0 \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \quad (R \ll d)$$

$$\Rightarrow U_e = 1e \, \frac{10^{-6}\ C/m}{8.85\ pF/m} \simeq 1e\, \frac{1\ MV}{8.85} = \frac{1\ MeV}{8.85}$$

$$\Rightarrow U_e \simeq 113\ KeV = 180 \times 10^{-16}\ J$$

Esercizio 4

Si consideri un circuito rettangolare di lati *a* e *b* e resistenza *R*, con uno dei due lati lunghi *a* libero di scorrere. Sia tale circuito immerso in un campo magnetico uniforme e variabile nel tempo *t* che aumenti linearmente con legge $B=kt$, dove k è una costante pari a $k=10^{-3}$ T/s.



1) Si determini l'espressione della forza che bisogna applicare al lato mobile per tenerlo fermo.

2) Si determini il valore di tale forza nel caso particolare in cui $a=b=10$ cm e $R = 1\text{k}\Omega$ e si faccia l'analisi dimensionale del risultato ottenuto.

3) la forza determinata è costante, aumenta o diminuisce nel tempo? Se per $t_1 = 100$ s il campo smette di crescere e diventa costante, qual'è la forza che bisogna applicare al lato mobile per tenerlo fermo per $t>t_1$?

1) $\Phi(B) = B \cdot d\Sigma = Kt \cdot ab$

$$F.E.M. = -\frac{d\Phi B}{dt} = -\frac{d t\, Kab}{dt} = -abK \qquad i = \frac{F.E.M.}{R} = \frac{abK}{R}$$

$$F = i\, a \times B = -\frac{abK}{R}\, a\, Kt = -\frac{a^2k^2bt}{R}$$

VA APPLICATA UNA FORZA UGUALE MA OPPOSTA

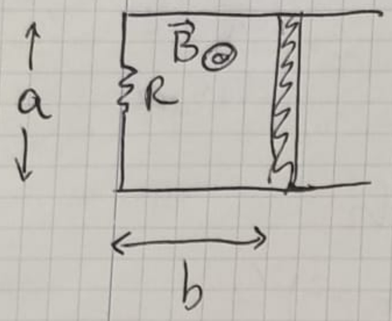
$$F_{EXT} = -F = \frac{a^2bk^2}{R}t$$

2) $$F_{EXT} = \frac{(0.1)^3(10^{-3})^2}{1000} = \frac{10^{-3}\cdot 10^{-6}}{10^3} = \frac{10^{-9}}{10^3} = 10^{-12}t \ \ N/s$$

3) SE B COST $\rightarrow$ ΦB COST $\rightarrow$ F.E.M. $=0$ $\rightarrow$ $i=0$ $\rightarrow$ $F=0$

NON SERVE NESSUNA FORZA

Esercizio 4, Esame 03/07/2024



$\vec{B} = kt\,\hat{u}_z$

$k = 10^{-3}\ T/s$

$R = 1\ k\Omega$

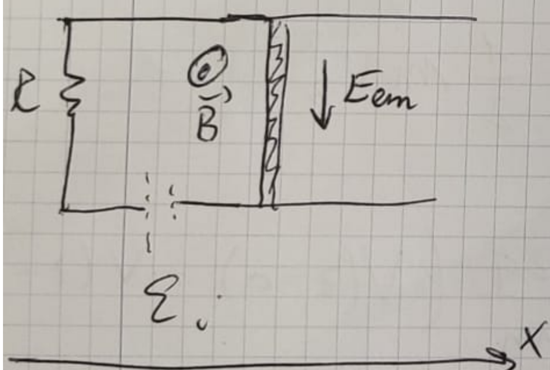
$a = b = 10\ cm$

1) A causa della variazione di B con t ho:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}\, a\cdot b\cdot B(t) =$$

$$= -ab\frac{d}{dt}(kt) = -abk$$

Ovvero ho un campo elettromotore E_{em} sulla barra mobile e ~~fissa~~ (e dunque nel circuito)



Tale campo è diretto come in figura.
La corrente dovuta ad $\mathcal{E}_i$ sarà:

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{abk}{R}$$

La barra mobile allora essendo percorsa da i ed essendo immersa nel campo B risentirà di una forza diretta lungo $-\hat{u}_x$:

$$\vec{F} = i\,\vec{a}\wedge\vec{B} = -iaB\,\hat{u}_x = -\frac{abk}{R}\,akt\,\hat{u}_x$$

Va quindi esercitata una forza esterna uguale e contraria: $\vec{F}_{Ext} = -\vec{F} = \frac{a^2bk^2}{R}t\,\hat{u}_x$

2) $F = \frac{(10\,cm)^3 (10^{-3}\,T/s)^2}{1\,k\Omega}\, t =$

$= \left(\frac{10^3\, cm^3\, (10^{-3})^2\, T^2/s^2}{10^3\, \Omega} \right) t =$

$= \left(10^{-12}\, \frac{N}{s}\right) t = k' t$ con $k' = \frac{1\,pN}{s}$

3) Bisogna applicare una forza che aumenta nel tempo come in 2) fino a $t_1 = 100\,s$
A tale tempo:

$B = cost = 10^{-1}\,T = 0.1\,T$

$\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_i = 0 \Rightarrow i = 0 \Rightarrow F = 0$

$\Rightarrow$ Non c'è bisogno di applicare alcuna forza per tenere la barra ferma