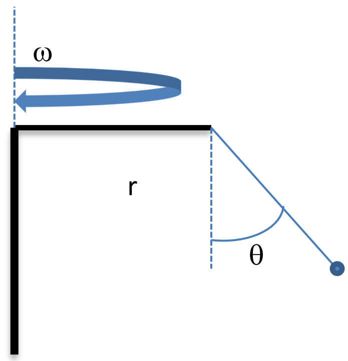
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

FISICA

Ingegneria Informatica e Automatica1

10.06.2021-A.A. 2020-2021 (12 CFU) C.Sibilia/G.D'Alessandro

N.1. Una massa m è sospesa tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile di lunghezza l=6m, ad un sistema rigido in rotazione con velocità angolare ω. Sapendo che l'estremo vincolato del filo è posto a distanza r=4 m dall'asse di rotazione, determinare il valore di ω affinché il filo formi un angolo θ=60° con la verticale.



N.2. Una massa puntiforme m=3 g procede su un piano orizzontale privo di attrito con una velocità costante v_0. Ad un certo istante la massa puntiforme incontra un ostacolo di massa M=10 g, di profilo curvilineo, inizialmente fermo e libero di muoversi sul piano orizzontale senza attriti. Sapendo che la massa m sale fino alla quota h=75 cm lungo l'ostacolo, determinare la velocità dell'ostacolo a quell'istante. (Si consideri che in quell'istante in cui la massa m raggiunge la massima quota, essa risulta ferma rispetto all'ostacolo).

N.3. Una mole di gas perfetto biatomico alla temperatura di 0°C si trova in un cilindro chiuso da un pistone libero di muoversi. Ad un certo istante il cilindro viene messo in contatto termico con una sorgente termica alla temperatura di 100 °C. Il gas si espande mantenendo costante la sua pressione fino a raggiungere la temperatura della sorgente. Si calcoli la variazione di entropia del gas, della sorgente e dell'intero sistema gas più sorgente.

N.4. Calcolare e disegnare l'andamento del campo elettrico di una distribuzione sferica di cariche di raggio 'R' e densità di carica, funzione del raggio, $\rho(r) = k\,\varepsilon_0\, r$. Dove 'k' è una costante reale positiva diversa da zero.

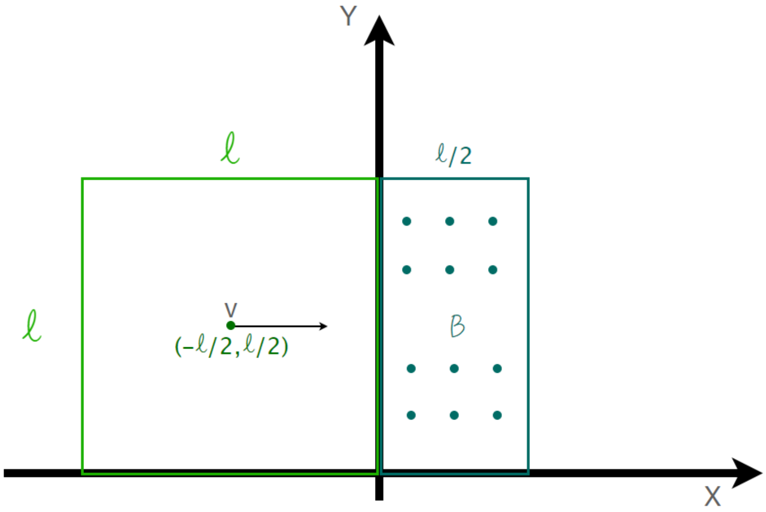
N.5 Una spira quadrata di lato 'l' e massa 'm' si muove con velocità costante v = l/secondo, lungo l'asse delle 'x', come in figura. Al tempo t_0=0 la spira si trova nel secondo quadrante e le coordinate del centro della spira sono (-l/2, l/2). Nel primo quadrante c'è una regione di spazio, larga 'l/2' e alta 'l' caratterizzata da un campo magnetico uscente dal foglio di intensità 'B'.

Assumendo che la velocità rimanga costante per tutto l'attraversamento. Calcolare:

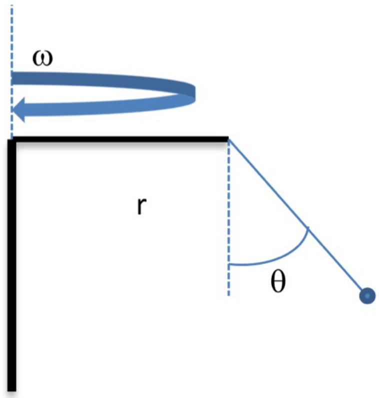
a) la corrente indotta che circola nella spira

b) la potenza dissipata per effetto Joule nella spira assumendo che questa abbia una resistenza ‘R’

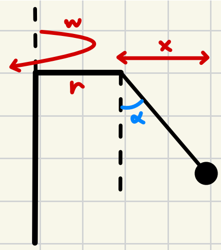
c) la velocità finale, una volta che la spira non è più sottoposta all'azione del campo magnetico



N.1. Una massa m è sospesa tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile di lunghezza l=6m, ad un sistema rigido in rotazione con velocità angolare ω. Sapendo che l'estremo vincolato del filo è posto a distanza r=4 m dall'asse di rotazione, determinare il valore di ω affinché il filo formi un angolo θ=60° con la verticale.



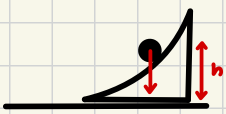
$x = l \sin\alpha = 3\sqrt{3}\ m$



m SOGGETTA A $F_c = m r' w^2$ ($r' = r + x$) E $F_p = mg$

$$\begin{cases} T \sin\alpha = m r' w^2 \\ T \cos\alpha = mg \end{cases} \quad \begin{cases} mg\, tg\alpha = m r' w^2 \\ T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} \end{cases} \rightarrow w = \sqrt{\dfrac{g\, tg\alpha}{r+x}} = 1{,}35 \text{ rad/s}$$

N.2. Una massa puntiforme m=3 g procede su un piano orizzontale privo di attrito con una velocità costante v_0. Ad un certo istante la massa puntiforme incontra un ostacolo di massa M=10 g, di profilo curvilineo, inizialmente fermo e libero di muoversi sul piano orizzontale senza attriti. Sapendo che la massa m sale fino alla quota h=75 cm lungo l'ostacolo, determinare la velocità dell'ostacolo a quell'istante. (Si consideri che in quell'istante in cui la massa m raggiunge la massima quota, essa risulta ferma rispetto all'ostacolo).



$$\begin{cases} m v_0 = m v + M v \rightarrow v_0 = \dfrac{m+M}{m} v \\ \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M v^2 + mgh \end{cases} \rightarrow v = 1{,}01 \text{ m/s}$$

N.3. Una mole di gas perfetto biatomico alla temperatura di 0°C si trova in un cilindro chiuso da un pistone libero di muoversi. Ad un certo istante il cilindro viene messo in contatto termico con una sorgente termica alla temperatura di 100 °C. Il gas si espande mantenendo costante la sua pressione fino a raggiungere la temperatura della sorgente. Si calcoli la variazione di entropia del gas, della sorgente e dell'intero sistema gas più sorgente.

$n = 1\,mol \quad c_v = \frac{5}{2}R \quad c_p = \frac{7}{2}R \quad \gamma = \frac{7}{5}$

$T_1 = 273{,}15\,K \quad T_2 = T_S = 373{,}15\,K \quad p_1 = p_2$

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = n c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 9{,}07\ J/K$$

$$\Delta S_2 = -\frac{n c_p (T_S - T_1)}{T_S} = -7{,}79\ J/K$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 1{,}27\ J/K$$

N.4. Calcolare e disegnare l'andamento del campo elettrico di una distribuzione sferica di cariche di raggio 'R' e densità di carica, funzione del raggio, ρ(r) = k ε0 r . Dove 'k' è una costante reale positiva diversa da zero.

$r < R$:

$$q(r) = \rho(r) \cdot 4\pi r^2 = \int_0^r \rho(r) \cdot 4\pi r^2\, dr = 4\pi k \varepsilon_0 \int_0^r r^3\, dr = k\pi\varepsilon_0 r^4$$

$$4\pi r^2 \cdot E(r) = q(r)/\varepsilon_0 \rightarrow E(r) = \frac{k r^2}{4}$$

$r > R$:

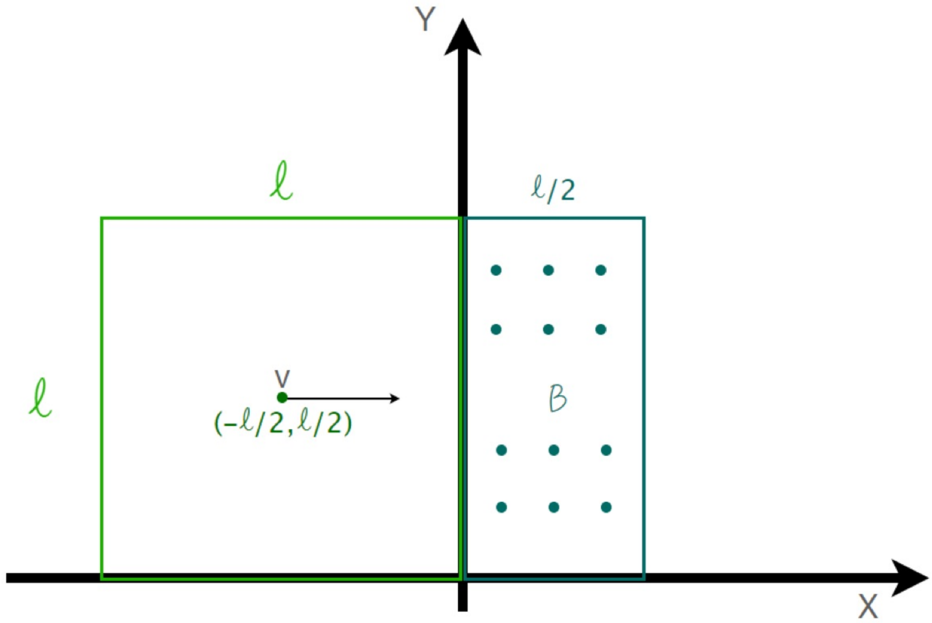
$$q(R) = k\pi\varepsilon_0 R^4$$

$$4\pi r^2 \cdot E(r) = q(R)/\varepsilon_0 \rightarrow E(r) = \frac{k R^4}{4 r^2}$$

N.5 Una spira quadrata di lato ‘l’ e massa ‘m’ si muove con velocità costante v = l/secondo, lungo l'asse delle 'x', come in figura. Al tempo $t_0=0$ la spira si trova nel secondo quadrante e le coordinate del centro della spira sono (-l/2, l/2). Nel primo quadrante c’è una regione di spazio, larga ‘l/2’ e alta ‘l’ caratterizzata da un campo magnetico uscente dal foglio di intensità ‘B’.

Assumendo che la velocità rimanga costante per tutto l'attraversamento. Calcolare:

a) la corrente indotta che circola nella spira
b) la potenza dissipata per effetto Joule nella spira assumendo che questa abbia una resistenza ‘R’
c) la velocità finale, una volta che la spira non è più sottoposta all'azione del campo magnetico

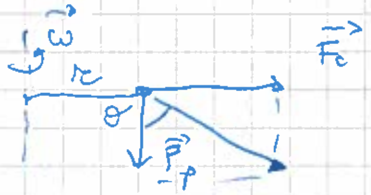


FISICA

10.6.2021

soluzioni

N.1. La risultante delle forze che agiscono sulla massa deve essere diretta lungo il filo



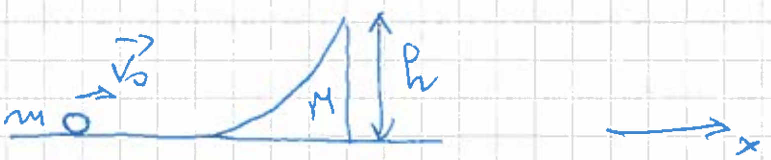
$$|\vec{F_c}| = m\omega^2 r + m\omega^2 l \sin\theta$$

$$|\vec{F_p}| = mg$$

$$tg\theta = \frac{m\omega^2 (r + l \sin\theta)}{mg} \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g\, tg\theta}{r + l \sin\theta}} = 1.36 \text{ rad/s}$$

N. 2



Le forze che agiscono (forza peso) sono dirette lungo la verticale, rispetto all'asse orizzontale non ci sono forze esterne pertanto vale il principio di conservazione della q. di moto:

$$m v_0 = m V^* + M V^*$$

dove V^* è la velocità che si deve calcolare

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m V^{*2} + \frac{1}{2} M V^{*2} + mgh \Rightarrow$$

$$v^* = \sqrt{2gh \frac{m^2}{M(M+m)}} \simeq 1 \, m/s$$

N. 3

Il calcolo della variazione di entropia del gas può essere effettuato attraverso l'isobara reversibile

$$dQ = nc_p dT$$

$$\Delta S_{gas} = \int_{T_0}^{T_f} \frac{nc_p dT}{T} = nc_p \ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right) = 9,1 \, J/K$$

Per la sorgente

$$\Delta S_{sorg} = \frac{Q_{sorg}}{T_{fin}} = -\frac{Q_{gas}}{T'_f} = -nc_p \frac{(T_f - T_0)}{T_{fin}} = -7,8 \, J/K$$

$$\Delta S_{TOT} = \Delta S_{gas} + \Delta S_{sorg} = 1,28 \, J/K$$

valore positivo trattandosi di una trasformazione irreversibile.

SOLUZIONE N.4

La carica contenuta in una sfera di raggio $r < R$ e':

$$q(r) = \int_0^r \rho(r) d\tau = \int_0^r k\epsilon_0 r \cdot 4\pi r^2 dr = 4k\epsilon_0\pi \int_0^r r^3 = k\epsilon_0\pi r^4$$

quindi la carica totale e': $Q = q(R) = k\epsilon_0\pi R^4$. Applico il teorema di Gauss su una superfice sferica, Σ di raggio r concentrica alla sfera:

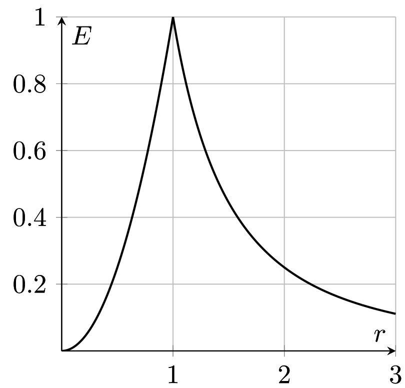
$$\Phi(E)_\Sigma = E(r) 4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\epsilon_0}$$

quindi:

$$E(r < R) = \frac{q(r)}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{kr^2}{4}$$

mentre, per $r > R$:

$$E(r > R) = \frac{q(R)}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{kR^4}{4r^2}$$



SOLUZIONE N.5

Per comodita' nominiamo i lati in dx,sx,su,giu. Dato che tutta la spira si muove a velocita' v ogni lato ha equazione del moto:

$$x = x_0 + vt$$

Con v costante per tutto l'attraversamento. La sezione della spira concatenata con il campo magnetico cambia in funzione dell'ingresso e dell'uscita di dx e sx. Quindi calcoliamo i tempi:

$$t_{in}^{dx} = t_0 = 0 \qquad t_{out}^{dx} = \frac{l/2}{v} = 1/2s$$

$$t_{in}^{sx} = l/v = 1s \qquad t_{out}^{sx} = \frac{3 \cdot l/2}{v} = 3/2s$$

Quando dx entra nella zona di campo magnetico la sezione varia fino a quando dx non ne e' uscito:

$$\Sigma_1 = l \cdot x_{dx} = l \cdot vt \quad per\ 0 < t < 1/2s$$

Quando dx esce dalla zona di campo magnetico la sezione rimane costante fino a quando sx non vi entra:

$$\Sigma_2 = l \cdot l/2 = \quad per\ 1/2s < t < 1s$$

Quando sx entra nella zona di campo magnetico la sezione varia fino a quando sx non ne e' uscito:

$$\Sigma_3 = \Sigma_2 - l \cdot x_{sx} = l \cdot (l/2 - x_{sx}) = l \cdot (l/2 - vt) \quad per\ 1s < t < 3/2s$$

Data la legge di Faraday possiamo calcolare la $f.e.m.$ indotta nei tre momenti nella spira:

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi(B)_{\Sigma_1}}{dt} = -Blv, \quad \mathcal{E}_2 = 0, \quad \mathcal{E}_3 = Blv$$

$\mathcal{E}_2 = 0$ perche' la variazione di flusso e' nulla. Quindi la corrente:

$$i_1 = -i_3 = -\frac{Blv}{R}$$

Le due correnti scorrono in verso opposto. La potenza dissipata per effetto Joule e':

$$P = \mathcal{E}_1 \cdot i_1 + \mathcal{E}_2 \cdot i_2 = \frac{2B^2l^2v^2}{R}$$

Questa potenza viene dissipata per un tempo totale di:

$$T_{tot} = t_{out}^{dx} - t_0 + t_{out}^{sx} - t_{in}^{sx} = 1s$$

quindi l'energia persa dalla spira per effetto Joule e':

$$\Delta E = -P \cdot T_{tot} = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v^2)$$

otteniamo per la velocita' finale:

$$v_f = \sqrt{\frac{2P \cdot T_{tot}}{m} + v^2} = \sqrt{\frac{4B^2l^2v^2 \cdot T_{tot}}{Rm} + v^2}$$

NOTA: da notare che se la velocita' non fosse stata costante per tutto l'attraversamento avremmo dovuto calcolare la variazione di velocita' nel primo tratto, quando agisce $\mathcal{E}_1$, e quindi $\mathcal{E}_2$ sarebbe stato diverso in modulo da $\mathcal{E}_1$ (al contrario di come e' stato risolto in questo caso). L'esercizio sarebbe stato leggermente piu' complicato.