#Materiale

Stabilizzazione di Sistemi Non Lineari via Retroazione dallo Stato

G. Oriolo

Sapienza Università di Roma

Introduzione

consideriamo un generico sistema dinamico **non lineare** stazionario

$$\begin{cases} \dot{x} & = & f(x,u) \\ y & = & g(x) \end{cases}$$

DIFFERENZIALE (STATO)
ALGEBRICA (USCITA)

con stato $x \in I\!R^n$, ingresso $u \in I\!R^p$, e uscita $y \in I\!R^q$

problema di stabilizzazione via retroazione dallo stato

NON LINEARE
LINEARE $\Rightarrow$ $u = kx$

progettare una legge di controllo $u = k(x)$ tale che il sistema ad anello chiuso

$$\dot{x} = f(x, k(x))$$

abbia uno stato assegnato x_d come punto di equilibrio **asintoticamente stabile**

- x_d è specificato del problema di controllo e rappresenta uno **stato operativo desiderato** per il sistema: ad esempio, un assetto per un satellite, una postura nello spazio per un manipolatore robotico, una temperatura per un sistema di climatizzazione

- non è detto che x_d sia un punto di equilibrio del sistema ad anello aperto; **deve** però diventarlo per il sistema ad anello chiuso

- nel seguito si assume che x_d sia l'**origine**; infatti, è sempre possibile ricondursi a questo caso effettuando la traslazione di coordinate $z = x - x_d$

- per un sistema **lineare** $\dot{x} = Ax + Bu$, una retroazione dallo stato è $u = K\,x$; il sistema ad anello chiuso diventa

$$\dot{x} = Ax + BK\,x = (A + BK)x$$

com'è noto, il problema di stabilizzazione via retroazione dallo stato è risolubile se la coppia (A, B) è **stabilizzabile**, cioè se essa è completamente raggiungibile oppure se eventuali autovalori non raggiungibili hanno parte reale negativa

- una retroazione del tipo $u = k(x)$ viene definita **statica** perché è rappresenta un controllore privo di memoria; si parla di retroazione **dinamica** quando il controllo è a sua volta l'uscita di un sistema dinamico guidato dallo stato x:

$$\begin{array}{rcl} \dot{\xi} & = & \phi(\xi, x) \\ u & = & k(\xi) \end{array}$$

- la retroazione dallo stato presuppone che tutte le componenti di x possano essere misurate; quando ciò non è possibile, si ricorre alla **retroazione dall'uscita**, che può essere statica ($u = k(y)$) o, più spesso, dinamica:

$$\dot{\hat{x}} = \left\{\begin{array}{rcl} \dot{\xi} & = & \phi(\xi, y) \\ u & = & k(\xi) \end{array}\right.$$

CASO LIN

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - C\hat{x}) \\ u = K\hat{x} \end{cases}$$

ad esempio, si pensi all'inclusione di un osservatore dello stato nel caso lineare

Stabilizzazione mediante approssimazione lineare

idea di base

> calcolare l'**approssimazione lineare** del sistema intorno all'origine e stabilizzarla attraverso una retroazione **lineare**; per il criterio indiretto di Lyapunov, l'origine sarà **localmente** asintoticamente stabile per il sistema non lineare

es: si consideri il sistema scalare

$$\dot{x} = a\,x^2 + u$$

contenente il parametro a; la sua approssimazione lineare intorno all'origine è $\dot{x} = u$, che è ovviamente stabilizzata dalla retroazione lineare $u = -k\,x$, con $k > 0$

↳ $\dot{x} = -kx$

applicando questo controllo al sistema non lineare, esso diventa ad anello chiuso

AS $\overset{}{\underset{0}{|}}$ AS $\underset{k/a}{|}$ I → u

AD ANELLO CHIUSO

$$\dot{x} = a\,x^2 - k\,x \qquad (*) = x(ax-k) < \begin{matrix} x=0 \\ x=k/a \end{matrix} \text{ PDE}$$

che, per il criterio indiretto di Lyapunov, ha nell'origine un pde asintoticamente stabile

AUMENTANDO IL GUADAGNO RENDO Ω PIÙ GRANDE

- la proprietà di stabilità asintotica è **locale**: il sistema $(*)$ ha infatti un altro pde in $x = k/a$, e diverge per $x > k/a \Rightarrow$ la regione di attrazione è $\Omega = \{x : x < k/a\}$

- per ottenere convergenza da qualsiasi insieme $S = \{x : |x| < r\}$, basta porre $k > a\,r$; la stabilità è **semiglobale**, nel senso che modificando i parametri del controllore (qui k) si può includere in Ω qualsiasi intorno dell'origine

- la stabilità ottenuta non è comunque globale, poiché una volta scelto k esistono stati (qui $\{x : x > k/a\}$) da cui non si ha convergenza ■

applichiamo il medesimo approccio al generico sistema stazionario non lineare

$$\dot{x} = f(x, u)$$

nell'ipotesi che $(x = 0, u = 0)$ sia un punto di equilibrio (PDE NON FORZATO)

l'approssimazione lineare del sistema intorno a $(x = 0, u = 0)$ è

$$\dot{x} = \left. \frac{\partial f(x,u)}{\partial x} \right|_{x=0,u=0} (x - 0) + \left. \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} \right|_{x=0,u=0} (u - 0) = Ax + Bu \qquad f(0,0)=0$$

se la coppia (A, B) risulta **stabilizzabile**, si può progettare una retroazione lineare dallo stato $u = K\,x$ tale che gli autovalori di $(A + BK)$ hanno parte reale negativa, e l'approssimazione lineare risulta dunque (globalmente ed esponenzialmente) asintoticamente stabile

$\Rightarrow u = K\,x$ rende l'origine (localmente) **asintoticamente stabile** per il sistema non lineare

- se la coppia (A, B) risulta **non stabilizzabile**, non esiste una retroazione lineare che stabilizza l'approssimazione lineare; **non si può tuttavia escludere** che esista una retroazione in grado di stabilizzare il sistema non lineare, e neppure che questa possa essere lineare

  es: $\dot{x} = u^3$, la cui approssimazione lineare è $\dot{x} = 0$, viene stabilizzato da $u = -x$ $\quad \dot{x} = -x^3$

- questo approccio fornisce anche una **stima del dominio di attrazione**, poiché è facile scrivere una funzione di Lyapunov per il sistema non lineare a partire dall'approssimazione lineare; a questo scopo, è utile il seguente risultato

Teorema LYAPUNOV PER SISTEMI LINEARI

un sistema lineare $\dot{x} = Ax$ è asintoticamente stabile se e solo se, fissata comunque una matrice Q simmetrica e definita positiva, la seguente **equazione di Lyapunov**

$$PA + A^T P = -Q$$

ammette nell'incognita P un'unica soluzione simmetrica e definita positiva

dim (sufficienza) è un'applicazione del criterio diretto di stabilità di Lyapunov; infatti, presa come candidata di Lyapunov la

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x$$

che è DP per ipotesi, si ha

$$\dot{V} = x^T P \dot{x} = x^T P A x = \frac{1}{2}(x^T P A x + x^T P A x) = \frac{1}{2}\left(x^T (PA + A^T P) x\right) = -\frac{1}{2} x^T Q x$$

che è DN per ipotesi (si è usata la $x^T P A x = (x^T P A x)^T = x^T A^T P x$) ■

EQ SISTEMI LINEARIZZATI AD ANELLO CHIUSO

nel caso in esame, essendo l'approssimazione lineare ad anello chiuso $\dot{x} = (A + BK)x$ asintoticamente stabile, essa ammette come funzione di Lyapunov la

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x$$

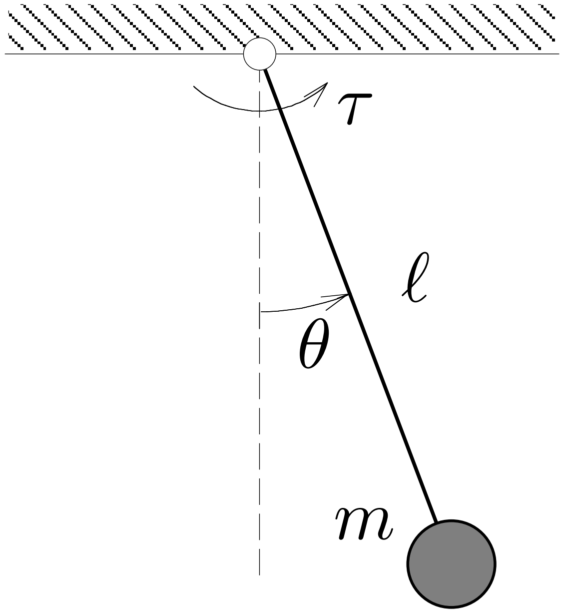
$\dot{V} = x^T P \dot{x} = x^T P(A+BK)x = -x^T Q x$ DEF NEG

dove P è l'unica soluzione simmetrica e definita positiva della corrispondente equazione di Lyapunov

$$P(A + BK) + (A + BK)^T P = -Q$$

con Q arbitraria ma simmetrica e definita positiva (ad esempio, $Q = I$)

es: pendolo con attuatore al giunto



$$m\,\ell^2\,\ddot\theta + d\,\dot\theta + m\,g\,\ell\,\sin\theta = \tau$$ PRIMA =0

ponendo $x = (x_1, x_2) = (\theta, \dot\theta)$ e $\tau = u$ l'equazione nello spazio di stato è

$$\begin{cases} \dot x_1 &= x_2 \\ \dot x_2 &= -a\sin x_1 - b\,x_2 + c\,u \end{cases}$$ PRIMA MANCAVA cu

dove $a = g/\ell$, $b = d/m\,\ell^2$, $c = 1/m\,\ell^2$ $(a, b, c > 0)$

supponiamo di voler stabilizzare il pendolo ad un angolo θ_d **generico**; il punto di equilibrio desiderato è dunque $x_d = (x_{1d}, x_{2d}) = (\theta_d, 0)$

$\theta - \theta_d \quad \dot\theta$

effettuiamo la trasformazione di coordinate $z = x - x_d = (x_1 - \theta_d, x_2)$

POS. VELOCITÀ

$$\begin{aligned} \dot z_1 = \dot\theta = x_2 = z_2 \rightarrow \quad \dot z_1 &= z_2 \\ \dot z_2 = \ddot\theta = -a \sin x_1 - b x_2 + cu \rightarrow \quad \dot z_2 &= -a \sin(z_1 + \theta_d) - b\, z_2 + c\, u \end{aligned}$$

per rendere l'origine $z_1 = 0, z_2 = 0$ un punto di equilibrio non forzato, si ponga $u = u_{\text{fb}} + u_{\text{ff}}$, dove u_{fb} è la **componente di feedback** e u_{ff} è la **componente di feedforward**

$u_{\text{fb}} = Kz$ si annulla automaticamente nell'origine, e quindi u_{ff} ha il compito di rendere tale punto un equilibrio:

$z_1 = 0 \quad z_2 = 0$

$\dot z_2 = -a \sin\theta_d + c u_{ff} = 0$

$$-a \sin\theta_d + c\, u_{\text{ff}} = 0 \qquad \text{da cui} \qquad u_{\text{ff}} = \frac{a}{c} \sin\theta_d = m\, g\ell \sin\theta_d$$

u_{ff} è cioè la coppia necessaria per bilanciare la coppia di gravità quando il pendolo è in θ_d

il sistema ad anello chiuso è quindi

$$\begin{cases} \dot z_1 = z_2 \\ \dot z_2 = -a\,(\sin(z_1 + \theta_d) - \sin\theta_d) - b\, z_2 + c\, u_{\text{fb}} \end{cases}$$

che ha finalmente $z = 0$, $u_{\text{fb}} = 0$ come punto di equilibrio

l'approssimazione lineare del sistema è caratterizzata dunque dalle matrici

$$A = \left.\frac{\partial f(z, u_{\text{fb}})}{\partial z}\right|_{z=0, u_{\text{fb}}=0} = \left.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a\cos(z_1 + \theta_d) & -b \end{pmatrix}\right|_{z=0, u_{\text{fb}}=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a\cos\theta_d & -b \end{pmatrix}$$

$$B = \left.\frac{\partial f(z, u_{\text{fb}})}{\partial u_{\text{fb}}}\right|_{z=0, u_{\text{fb}}=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$

la matrice di raggiungibilità è

$$A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a\cos\theta_d & -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a\cos\theta_d + ck_1 & -b + ck_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & -b\,c \end{pmatrix}$$

è quindi possibile assegnare arbitrariamente gli autovalori ad anello chiuso dell'approssimazione lineare; è facile verificare che la retroazione lineare

$$p^*(\lambda) = \lambda^2 - \underset{>0}{(ck_2 - b)}\lambda - \underset{>0}{(ck_1 - a\cos\theta_d)}$$

$$u_{\text{fb}} = Kz = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = k_1 z_1 + k_2 z_2$$

rende a parte reale negativa gli autovalori di $A + BK$ purché sia $k_1 < \frac{a}{c} \cos\theta_d$ e $k_2 < \frac{b}{c}$

$\Rightarrow$ in queste ipotesi, la coppia

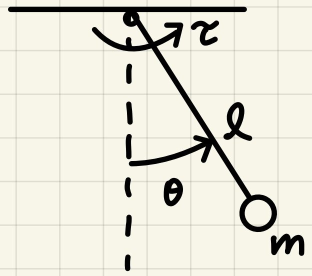
$$u = u_{\text{fb}} + u_{\text{ff}} = k_1\, z_1 + k_2\, z_2 + \frac{a}{c} \sin\theta_d = k_1(\theta - \theta_d) + k_2\,\dot{\theta} + m\,g\ell \sin\theta_d$$

rende (localmente) asintoticamente stabile il punto $(\theta_d, 0)$ per il pendolo

- si noti l'**interpretazione fisica** del termine u_{fb}, che 'simula' la presenza di una molla angolare che richiama il pendolo nella posizione θ_d e di uno smorzatore viscoso che dissipa energia

- il dominio di attrazione dipenderà in modo **cruciale** dalla scelta di k_1 e k_2; è possibile stimarne l'estensione usando come candidata di Lyapunov del sistema non lineare una funzione di Lyapunov per l'approssimazione lineare

ES PENDOLO



$$J\ddot{\theta} = \sum \tau$$

$$ml^2\ddot{\theta} + d\dot{\theta} + mgl\sin\theta = \tau$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -\frac{mgl\sin\theta}{ml^2} - \frac{d\dot{\theta}}{ml^2} + \frac{\tau}{ml^2}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{d}{ml^2}x_2 + \frac{\tau}{ml^2}u \end{cases}$$

PDE $\quad x_d = (x_{1d}, x_{2d}) = (\theta_d, 0)$

CAMBIO DI COORDINATE PER RENDERE $(\theta_d, 0)$ L'ORIGINE

$$z = x - x_d = (x_1 - x_d, x_2)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{\theta} = x_2 = z_2 \\ \dot{z}_2 &= \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{d}{ml^2}x_2 + \frac{\tau}{ml^2}u \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{g}{l}\sin(z_1 + \theta_d) - \frac{d}{ml^2}z_2 + \frac{\tau}{ml^2}u \end{cases}$$

CON $\quad z_1 = z_2 = 0 \quad$ NON HO UN PDE

QUINDI SEPARO L'USCITA IN 2 PARTI: LA PRIMA SERVIRÀ AL CONTROLLORE IN RETROAZIONE (u_{fb}), L'ALTRA RENDERÀ NULLA L'EQ DI $\dot{z}_2$ (u_{ff})

$u = u_{fb} + u_{ff} \qquad -a\sin\theta_d + c\,u_{ff} = 0$

$u_{fb} = kz \qquad u_{ff} = \frac{a}{c}\sin\theta_d$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -a(\sin(z_1 + \theta_d) - \sin\theta_d) - b z_2 + c\,u_{fb} \end{cases}$$

ABBIAMO UN PDE

APPROSSIMAZIONE LINEARE

$$A = \left.\frac{\partial f(z, u_{fb})}{\partial z}\right|_{x_e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a\cos(z_1 + \theta_d) & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a\cos(\theta_d) & -b \end{pmatrix}$$

$$B = \left.\frac{\partial f(z, u_{fb})}{\partial u_{fb}}\right|_{x_e} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$

È RISOLUBILE? $\quad P = (B \,\vdots\, AB) = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & -bc \end{pmatrix} \quad rk(P) = n \quad$ QUINDI SI

$$A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a\cos(\theta_d) & -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}(k_1 \;\; k_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a\cos(\theta_d) + ck_1 & -b + ck_2 \end{pmatrix}$$

$$\det |A + BK - \lambda I| = \lambda^2 + \lambda(R_1 R_2) + R_1 R_2 \qquad R_1, R_2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a\cos(\theta_d) + ck_1 & -b + ck_2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (b - ck_2)\lambda + (a\cos(\theta_d) - ck_1)$$

$$k_2 < \frac{b}{c} \qquad k_1 < \frac{a\cos\theta_d}{c}$$

$$u = u_{fb} + u_{ff} = Kz + \frac{a}{c}\sin\theta_d = k_1 z_1 + k_2 z_2 + \frac{a}{c}\sin\theta_d =$$

$$= k_1(\theta - \theta_d) + k_2\dot{\theta} + mgl\sin\theta_d$$

ponendo per esempio $a = c = 1$, $b = 0$, $\theta_d = \pi/2$ e $k_1 = k_2 = -1$ si trova

$$A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e la corrispondente equazione di Lyapunov (per $Q = I$)

$$\overset{P}{\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}} \overset{A}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} + \overset{A^T}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \overset{P}{\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}} \overset{=}{=} \overset{-Q}{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

ammette la soluzione simmetrica e definita positiva

$$\begin{pmatrix} -p_{12} & p_{11} - p_{12} \\ -p_{22} & p_{12} - p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p_{12} & -p_{22} \\ p_{11} - p_{12} & p_{12} - p_{22} \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi si può usare come funzione di Lyapunov per il sistema non lineare la

$$\begin{pmatrix} -2p_{12} & p_{11} - p_{12} - p_{22} \\ -p_{22} + p_{11} - p_{12} & 2p_{12} - 2p_{22} \end{pmatrix}$$

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} x$$

a questo punto si determina l'insieme dove $\dot{V}(x)$ è DN, e si prende una qualunque curva di livello contenuta in tale insieme; la regione interna a questa curva di livello costituisce una stima del dominio di attrazione per il controllore (lineare) considerato

Stabilizzazione mediante linearizzazione esatta: cenni

la principale limitazione della tecnica di stabilizzazione mediante l'approssimazione lineare consiste nel fatto che la convergenza è garantita solo all'interno di un dominio di attrazione, che può essere più o meno grande; questo può non essere accettabile in pratica

es: per il sistema scalare

$$\dot{x} = a\,x^2 + u$$

SISTEMA ANELLO CHIUSO:

$\dot{x} = ax^2 - kx = x(ax - k)$

abbiamo visto che la retroazione lineare $u = -k\,x$, con $k > 0$, rende l'origine asintoticamente stabile, con regione di attrazione $\Omega = \{x : x < k/a\}$

si consideri però la seguente legge di controllo **non lineare**

$$u = -a\,x^2 - k\,x \rightarrow$$

$\dot{x} = ax^2 + u = \cancel{ax^2} - \cancel{ax^2} - kx$

che **cancella** il termine non lineare $a\,x^2$ e conduce al seguente sistema ad anello chiuso

$$\dot{x} = -k\,x$$

il sistema è **esattamente** lineare, e l'origine è dunque un punto di equilibrio **globalmente** asintoticamente stabile

la legge di controllo ha due componenti: una $(-a\,x^2)$ ha il compito di **linearizzare** esattamente la dinamica ad anello chiuso, e l'altra $(-k\,x)$ quello di **stabilizzare** tale dinamica ■

es: riprendiamo in esame il pendolo con attuatore alla base

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -a\,\text{sin}(z_1 + \theta_d) - b\,z_2 + c\,u \end{cases}$$

in cui abbiamo già effettuato la trasformazione di coordinate $z = x - x_d = (x_1 - \theta_d, x_2)$ necessaria a spostare il punto di equilibrio desiderato nell'origine

l'ispezione della seconda equazione differenziale, che è l'unica a contenere termini non lineari, suggerisce la seguente scelta per u

$$u = \frac{a}{c}\,\text{sin}(z_1 + \theta_d) + \frac{v}{c}$$

la dinamica ad anello chiuso diventa lineare e completamente raggiungibile

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -b\,z_2 + v \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è dunque possibile stabilizzarla **globalmente** all'origine attraverso il 'nuovo' ingresso v

$$v = k_1\,z_1 + k_2\,z_2$$

con k_1 e k_2 scelti in modo da assegnare autovalori arbitrari; si ha quindi

DIPENDE TUTTO DALLO STATO $\rightarrow$ $$u = \frac{a}{c}\,\text{sin}\,\theta + \frac{1}{c}\left(k_1(\theta - \theta_d) + k_2\dot{\theta}\right)$$ $\frac{a}{c}\sin\theta$ vs $\frac{a}{c}\sin\theta_d$

in cui **tutti** i termini sono in retroazione (in particolare, all'equilibrio il primo termine diventa automaticamente la coppia necessaria per bilanciare la gravità) ■

allora è naturale chiedersi

quanto è generale l'idea di cancellare le non-linearità attraverso la retroazione? esiste una **proprietà strutturale** dei sistemi che garantisce tale possibilità?

siamo **certamente** in grado di farlo se l'equazione di stato ha la seguente struttura

$$\dot{x} = f(x,u) = A\,x + B\,\beta(x)\,(u - \alpha(x))$$

con $\beta(x)$ matrice non singolare in un dominio che contiene l'origine (si noti che i due esempi visti in precedenza hanno esattamente tale struttura)

infatti basta porre

$$u = \alpha(x) + \beta^{-1}(x)v$$

per ottenere il sistema lineare

$$\dot{x} = A\,x + B\,v$$

che può essere stabilizzato ponendo $v = K\,x$ (se la coppia (A,B) è stabilizzabile); la retroazione complessiva è

$$\boxed{u = \alpha(x) + \beta^{-1}(x)K\,x}$$

si noti che essa è **non lineare**!

se il modello del sistema **non** ha la struttura suddetta, può darsi che possa essere portato in tale forma mediante una **trasformazione di coordinate**

es: per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= a \sin x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 + u \end{cases}$$

è evidente che non è possibile cancellare la non-linearità $a \sin x_2$ attraverso u

si consideri però la seguente trasformazione di coordinate

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= a \sin x_2 = \dot{x}_1 \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= a \cos x_2 (-x_1^2 + u) \end{cases}$$

ora è possibile cancellare la non-linearità con la retroazione

$$u = x_1^2 + \frac{1}{a \cos x_2} v$$

che è ben definita per $-\pi/2 < x_2 < \pi/2$

si osservi che la trasformazione di coordinate $z = T(x)$ è ben posta, poiché può essere invertita come segue

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 \\ x_2 &= \arcsin\left(\frac{z_2}{a}\right) \end{aligned}$$

nell'insieme $-a < z_2 < a$

inoltre, sia la trasformazione $T(\cdot)$ che la sua inversa $T^{-1}(\cdot)$ sono derivabili con derivata continua $\Rightarrow$ si dice che $T(\cdot)$ è un **diffeomorfismo** ■

le proprietà dell'esempio appena visto possono essere estrapolate nella seguente definizione

un sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x, u)$$

si dice **linearizzabile ingresso-stato** se esiste un diffeomorfismo $z = T(x)$, definito su un dominio D_x che contenga l'origine, che mette il sistema nella forma

$$\dot{z} = Az + B\beta(x)\left(u - \alpha(x)\right)$$

con la matrice $\beta(x)$ non singolare in D_x

i sistemi linearizzabili ingresso-stato possono essere dunque efficacemente controllati (ad esempio, stabilizzati in modo globale) attraverso una **trasformazione di coordinate** e una **retroazione statica dallo stato** che ha una funzione duplice: (1) cancellare le non-linearità (2) controllare il sistema linearizzato

- esiste anche la possibilità di linearizzare ingresso-stato un sistema attraverso una trasformazione di coordinate e una retroazione **dinamica** dallo stato; la classe dei sistemi che possono essere linearizzati con tale procedura è **più ampia** di quelli dei sistemi linearizzabili con retroazione statica

- nel caso in cui il problema di controllo sia formulato a livello delle **uscite** del sistema (ad esempio, nei problemi di inseguimento di uscite di riferimento), si può cercare di ottenere una **linearizzazione ingresso-uscita**, utilizzando anche in questo caso una trasformazione di coordinate e una retroazione statica o dinamica dallo stato

- uno svantaggio di questo approccio è che la cancellazione delle non-linearità richiede la conoscenza **esatta** dei parametri del modello; ad esempio, nel caso del sistema $\dot{x} = ax^2 + u$ la legge di controllo calcolata mediante linearizzazione esatta (slide 11) era

$$u = -a\,x^2 - k\,x$$

che contiene il parametro a; invece, la legge di controllo calcolata mediante l'approssimazione lineare (slide 4) era

$$u = -k\,x$$ NON CONTIENE a

$\Rightarrow$ per i controllori progettati attraverso il metodo della linearizzazione esatta esiste un potenziale problema di **robustezza** rispetto a variazioni dei parametri, che deve essere analizzato con cura

- un altro svantaggio del metodo basato sulla linearizzazione esatta è che può condurre alla cancellazione di termini **non lineari** ma **benefici** per la stabilizzazione

es: si consideri il sistema scalare non lineare

$$\dot{x} = a\,x - b\,x^3 + u \qquad a, b > 0$$

un controllore basato sulla filosofia della linearizzazione esatta è il seguente

$$u = -k\,x + b\,x^3 \qquad k > a$$

in realtà, il termine $-b\,x^3$ è interpretabile come una **forza di richiamo non lineare**, che spinge lo stato verso l'origine; infatti, il semplice controllore lineare

$$u = -k\,x \qquad k > a$$

conduce al sistema ad anello chiuso

CON LIN. APPROSS. CON LIN. ESATTA

$$\dot{x} = -(k-a)x - b\,x^3$$

l'origine è GAS, e le traiettorie convergono più rapidamente che per $\dot{x} = -(k-a)x$ ■

una conseguenza di questa cancellazione inutile, legata alla natura matematica (e non fisica) della filosofia di sintesi basata sulla linearizzazione esatta, è tipicamente uno **sforzo di controllo più elevato** (nell'esempio, il controllore $u = -k\,x + b\,x^3$ assume valori assoluti molto più grandi di $u = -k\,x$ quando si è lontani dall'origine)

$\Rightarrow$ spesso conviene progettare il controllore mediante il **criterio diretto di Lyapunov** (che si presta meglio a una interpretazione fisica), senza alcun tipo di linearizzazione

Problema 3

Si consideri il sistema non lineare descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= 2x_1 + (1 + \sin^2 x_1)x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{cases}$$

$\nearrow u = 0$

a) Si dimostri che l'origine è un punto di equilibrio del sistema non forzato, e se ne studi la stabilità.

b) Utilizzando il metodo basato sull'approssimazione lineare, progettare una legge di controllo lineare in grado di stabilizzare *localmente* il sistema forzato intorno all'origine.

c) Progettare una legge di controllo non lineare in grado di stabilizzare *globalmente* il sistema forzato intorno all'origine. Confrontare le due leggi di controllo.

SISTEMA NON FORZATO $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + (1+\sin^2 x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$

a) $f(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$ UNICO PDE $x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

STABILITÀ: CRITERIO INDIRETTO

$$J(x_e) = \left.\begin{pmatrix} 2 + 2(\sin x \cdot \cos x)x_2 & 1 + \sin^2 x_1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 < \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} \qquad \lambda = 2 > 0 \qquad x_e = (0,0) \text{ PDE I}$$

b) STABILITÀ LOCALE → APPROSSIMAZIONE LINEARE INTORNO A $x_e = (0,0)$

$\dot{x} = Ax + Bu$ CON $A = \underset{x=0,\, u=0}{J(x_e)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ J RISPETTO A U

STABILIZZO MEDIANTE $u = Kx$ $K = (k_1 \; k_2)$ k_2 ININFLUENTE

VEDO SE (A,B) È RAGG → GIÀ IN FORMA DI KALMAN $\begin{cases} 2 & R \\ -1 & N.R. \end{cases}$

→ AD ANELLO CHIUSO HO $\dot{x} = (A+BK)x \rightarrow A+BK = \begin{pmatrix} 2+2k_1 & 1+2k_2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

→ DEVO SCEGLIERE $2 + 2k_1 < 0 \rightarrow 2 + 2k_1 = -1$

↳ $k_1 = -\frac{3}{2} \rightarrow K = (-3/2 \;\; k_2) = (-3/2 \;\; 0)$

CONTROLLORE $u = -\frac{3}{2}x_1$

c) STABILITÀ GLOBALE → LINEARIZZAZIONE ESATTA

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + (1+\sin^2 x_1)x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

$u = -\frac{1}{2}(1+\sin^2 x_1)x_2 + v \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 2v \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$ BASTA $v = -\frac{3}{2}x_1$ A.S.

$u = -\frac{1}{2}(1+\sin^2 x_1)x_2 - \frac{3}{2}x_1$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u = -\frac{1}{2}(\sin x_1)x_2 + v$

$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + 2v \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad v = -\frac{3}{2}x_1$

$u = -\frac{1}{2}\sin x_1 x_2 - \frac{3}{2}x_1$

IN QUESTO CASO IL CONTROLLORE HA IL TERMINE NL PER LINEARIZZARE IL SISTEMA