1. Sia dato il sistema

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} x_1(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u_1(t) \\ y_1(t) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} x_1(t) \end{cases}$$

i. calcolarne i modi naturali e studiarne l'eccitabilità e l'osservabilità;
ii. studiarne le proprietà strutturali ed effettuare la scomposizione di Kalman;
iii. studiarne la stabilità (interna, esterna ed esterna nello stato zero);
iv. calcolarne la risposta impusiva.

Successivamente, construire il sistema Σ_2 retroazionando il sistema Σ_1 con una reazione dall'uscita $u(t) = Ky(t)$, $K \in \mathbb{R}$. Per il sistema complessivo Σ_2 ottenuto

i. calcolare i modi naturali e studiarne l'eccitabilità e l'osservabilità al variare di K;
ii. studiare la stabilità (interna, esterna ed esterna nello stato zero) al variare di K;
iii. calcolare la risposta impusiva, in funzione di K;

2. Data la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2(s - 0.1)(s^2 + 0.1s + 16)}$$

se traccino i relativi diagrammi di Bode e polare (di Nyquist).

3. Calcolare la risposta all'ingresso

$$u(t) = \sin 2t$$

del sistema che ha risposta indiciale

$$y_{-1}(t) = 2 - e^{-t} - e^{-2t}$$

4. Dato un serbatoio cilindrico di area S, contenente un liquido immesso con una portata $q_{in}(t)$ e fatto uscire con una portata $q_{out}(t)$, l'equazione che regola l'altezza h del liquido nel serbatoio è

$$\dot{h} = \frac{1}{S}\left(q_{in}(t) - q_{out}(t)\right)$$

Il flusso di uscita è regolato da valvole la cui caratteristica è $q_{out} = Kh$, con $K > 0$ dipendente dal tipo di valvola.
Si consideri ora un sistema composto da tre serbatoi in cascata, con $q_{in,i}(t) = q_{out,i-1}(t)$, $i = 2,3$, $q_{in,1} = u(t)$ e $q_{out,3}(t) = y(t)$.
Si introduca una rappresentazione con lo spazio di stato e si calcoli, se esiste la risposta a regime permanente per un ingresso costante di ampiezza 1.

1. Sia dato il sistema

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} x_1(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u_1(t) \\ y_1(t) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} x_1(t) \end{cases}$$

i. calcolarne i modi naturali e studiarne l'eccitabilità e l'osservabilità;
ii. studiarne le proprietà strutturali ed effettuare la scomposizione di Kalman;
iii. studiarne la stabilità (interna, esterna ed esterna nello stato zero);
iv. calcolarne la risposta impusiva.

Successivamente, construire il sistema Σ_2 retroazionando il sistema Σ_1 con una reazione dall'uscita $u(t) = Ky(t)$, $K \in \mathbb{R}$. Per il sistema complessivo Σ_2 ottenuto

i. calcolare i modi naturali e studiare l'eccitabilità e l'osservabilità al variare di K;
ii. studiare la stabilità (interna, esterna ed esterna nello stato zero) al variare di K;
iii. calcolare la risposta impusiva, in funzione di K;

i **AUTOVALORI:**

$$\text{DET}(A - \lambda I) = 0 \qquad \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$$

AUTOVETTORI DX:

$$(A - \lambda_1 I)v_1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} v_1 = 0 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 I)v_2 = \qquad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} v_2 = 0 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

AUTOVETTORI SX:

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1' \\ v_2' \end{matrix}$$

ECC E OSS:

$$v_1' B = (-1 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad C v_1 = (2 \quad -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$v_2' B = (2 \quad -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \qquad C v_2 = (2 \quad -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

	ECC	OSS
λ_1	×	×
λ_2	✓	✓
	$H(t)$	$\psi(t)$

MODI NATURALI:

$$x_L(t) = \sum_{i=0}^{n} e^{\lambda_i t} u_i v_i' x_0 = c_1 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii

RAGG:

$$R=(B\ \ AB)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \quad rk(R)=1 \rightarrow \mathcal{R}=\text{SPAN}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

OSS:

$$O=\begin{pmatrix}C\\CA\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix} \quad rk(O)=1 \rightarrow \mathcal{I}=\text{SPAN}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

KALMAN:

$$\mathcal{X}_1: \mathcal{R}\cap\mathcal{I}=\text{SPAN}\{0\} \qquad \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1$$

I DUE VETTORI LIN INDIP. QUINDI NON C'È INTERSEZIONE

$$\mathcal{X}_2: \mathcal{X}_2\oplus\mathcal{X}_1=\mathcal{R}=\text{SPAN}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathcal{X}_3: \mathcal{X}_3\oplus\mathcal{X}_1=\mathcal{I}=\text{SPAN}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$$\mathcal{X}_4: \mathcal{X}_1\oplus\mathcal{X}_2\oplus\mathcal{X}_3\oplus\mathcal{X}_4=R^n=R^2=\text{SPAN}\{0\} \text{ POICHÈ } rk\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=2=R^2(\text{DIM})$$

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \qquad T=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}=TAT^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c}-1 & 0\\ \hline 0 & 1\end{array}\right)$$

$\tilde{A}_{22}$, $\tilde{A}_{33}$

$$\tilde{B}=TB=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c}1\\ \hline 0\end{array}\right)\tilde{B}_2 \qquad \tilde{C}=CT^{-1}=(2\ \ -1)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c}1 & 0\end{array}\right)\tilde{C}_2$$

iii

IL SISTEMA INTERNAMENTE È INSTABILE POICHE NON TUTTI GLI λ HANNO $Re(\lambda_i)\leq 0$

PER LA STABILITÀ ESTERNA DEVONO RISULTARE $Re(\lambda_0)\leq 0$ E $Re(\lambda_{e,o})<0$
$\lambda_2=-1$ SIA ECC CHE OSS HA $Re(\lambda_2)<0$ QUINDI IL SISTEMA È STABILE ESTER.

$$y(t)=\Psi(t-t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}W(t-\tau)u(\tau)\,d\tau \xrightarrow{t_0=0} y(t)=\int_0^t W(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$$

IN $y(t)$ COMPAIONO GLI AUTOVALORI SIA ECC CHE OSS, QUINDI $\lambda_2=-1$.
È STABILE ESTERNAMENTE POICHÈ $\lambda_2<0$

iv

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{i=0}^{n} e^{\lambda_i t} u_i v_i' = e^{t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}(-1\ \ 1) + e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(2\ \ -1) = e^{t}\cancel{\begin{pmatrix}-1&1\\-2&2\end{pmatrix}} + e^{-t}\begin{pmatrix}2&-1\\2&-1\end{pmatrix}$$

$$W(t) = C\,\Phi(t)\,B = (2\ \ -1)\,e^{-t}\begin{pmatrix}2&-1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = e^{-t}$$

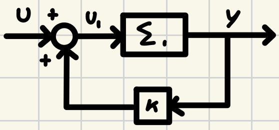
OPPURE

$$W(s) = C(sI-A)^{-1}B = (2\ \ -1)\begin{pmatrix}s+3&-2\\4&s-3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = (2\ \ -1)\frac{1}{s^2-1}\begin{pmatrix}s-3&2\\-4&s+3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s^2-1}(2s-2\ \ \ -s+1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{s-1}{s^2-1} = \frac{\cancel{(s-1)}}{(s+1)\cancel{(s-1)}} = \frac{1}{s+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[W(s)] = e^{-t} = W(t)$$

i



$$u(t) = K\,y(t) = K\,C\,x$$

$$\Sigma_1: \begin{cases}\dot{x}_1(t) = \begin{pmatrix}-3&2\\-4&3\end{pmatrix}x_1(t) + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}u(t)\\ y_1(t) = (2\ \ -1)\,x_2(t)\end{cases} \qquad \Sigma_2: \begin{cases}\dot{x}(t) = Ax + Bu\\ y = Cx\end{cases} \qquad \begin{cases}\dot{x} = Ax + BKCx = (A+BKC)x\\ y = Cx\end{cases}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix}-3&2\\-4&3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(2K\ \ -K) = \begin{pmatrix}-3&2\\-4&3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2K&-K\\2K&-K\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3-2K&2+K\\-4-2K&3+K\end{pmatrix}$$

BISOGNA CAMBIARE I SEGNI

AUTOVALORI:

$$\det(A_2 - \lambda I) = 0 \qquad \begin{vmatrix}-3-2K-\lambda & 2+K\\ -4-2K & 3+K-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 + K\lambda - 2K^2 - 9K - 9 + 2K^2 + 8K + 8 =$$

$$= \lambda^2 + K\lambda - K - 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-K \pm \sqrt{K^2+4K+4}}{2} = \frac{-K \pm \sqrt{(K+2)^2}}{2} = \frac{-K \pm (K+2)}{2} \qquad \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -K-1$$

AUTOVETTORI DX:

$$(A_2 - \lambda_1 I)u_1 = 0 \qquad \begin{pmatrix}-4-2K&2+K\\-4-2K&2+K\end{pmatrix}u_1 = 0 \qquad u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$(A_2 - \lambda_2 I)u_2 = 0 \qquad \begin{pmatrix}-2-K&2+K\\-4-2K&4+2K\end{pmatrix}u_2 = 0 \qquad u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

AUTOVETTORI SX:

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1' \\ v_2' \end{matrix}$$

ECC E OSS:

$$v_1' B = (-1 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad C u_1 = (2 \quad -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$v_2' B = (2 \quad -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \qquad C u_2 = (2 \quad -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

	ECC	OSS
λ_1	✗	✗
λ_2	✓	✓
	$H(t)$	$\psi(t)$

MODI NATURALI:

$$x_L(t) = \sum_{i=0}^{n} e^{\lambda_i t} u_i v_i' x_0 = c_1 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-(k+1)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

MODO APERIODICO DIVERGENTE PER $\lambda_1 = 1$
MODO APERIODICO DIVERGENTE PER $\lambda_2 = -k-1$ SE $k < -1$,
CONVERGENTE PER $\lambda_2 = -k-1$ SE $k > -1$
LIMITATO PER $\lambda_2 = -k-1$ SE $k = -1$

ii INSTABILE INTERNAMENTE POICHÈ $Re(\lambda_1) > 0$ E NON < 0

È STABILE ESTERNAMENTE SE $Re(\lambda_o) \leq 0$ E $Re(\lambda_{e,o}) < 0$,
QUINDI STUDIAMO λ_2 ESSENDO SIA ECC CHE OSS, DEVE ESSERE:

$$Re(\lambda_2) < 0 \rightarrow -k-1 < 0 \rightarrow k > -1$$

$$y(t) = \psi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau)\,d\tau \xrightarrow{t_0 = 0} y(t) = \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$$

IN $y(t)$ COMPARE SOLO $\lambda_2 = -k-1$ SIA ECC CHE OSS. È STABILE ESTERNAMENTE NELLO STATO ZERO SE:

$$\lambda_2 < 0 \rightarrow -k-1 < 0 \rightarrow k > -1$$

iii STUDIAMO $W(t)$ SOLO PER $\lambda_2 = -k-1$

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = (2 \quad -1)\begin{pmatrix} s+3+2k & -k-2 \\ 2k+4 & s-3-k \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (2 \quad -1)\frac{1}{s^2+ks-k-1}\begin{pmatrix} s-3-k & k+2 \\ -2k-4 & s+3+2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2+ks-k-1}(2s-2 \quad -s+1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{s-1}{s^2+ks-k-1} \qquad \text{PER } k=0 \quad \mathcal{L}^{-1}[W(s)] = e^{-t}$$

2. Data la funzione di trasferimento

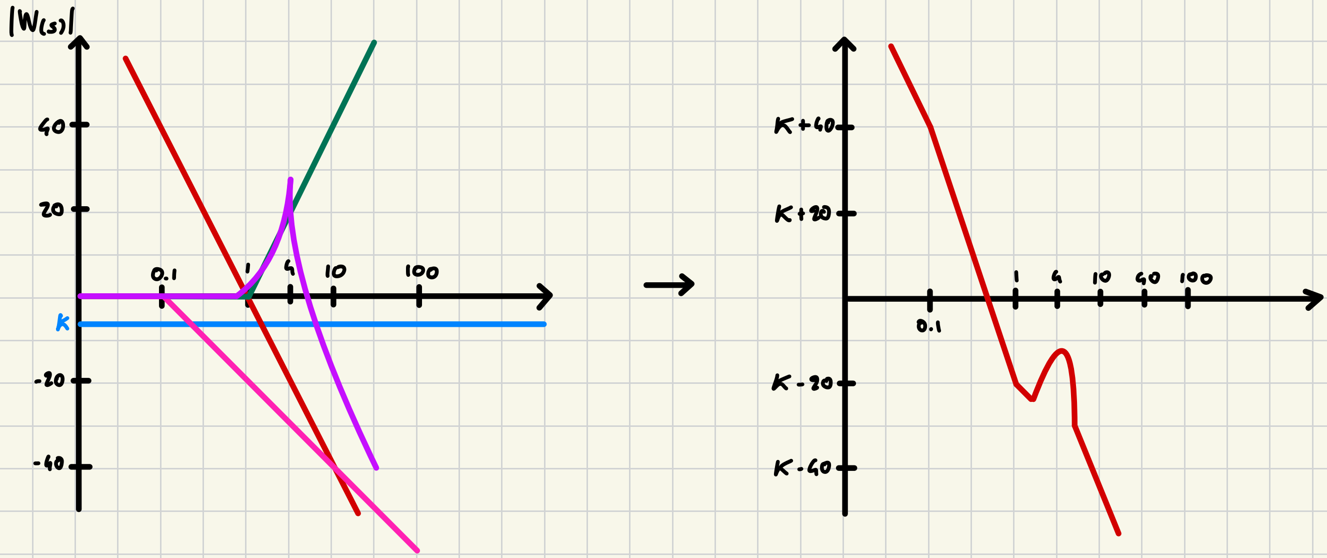
$$W(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2(s - 0.1)(s^2 + 0.1s + 16)}$$

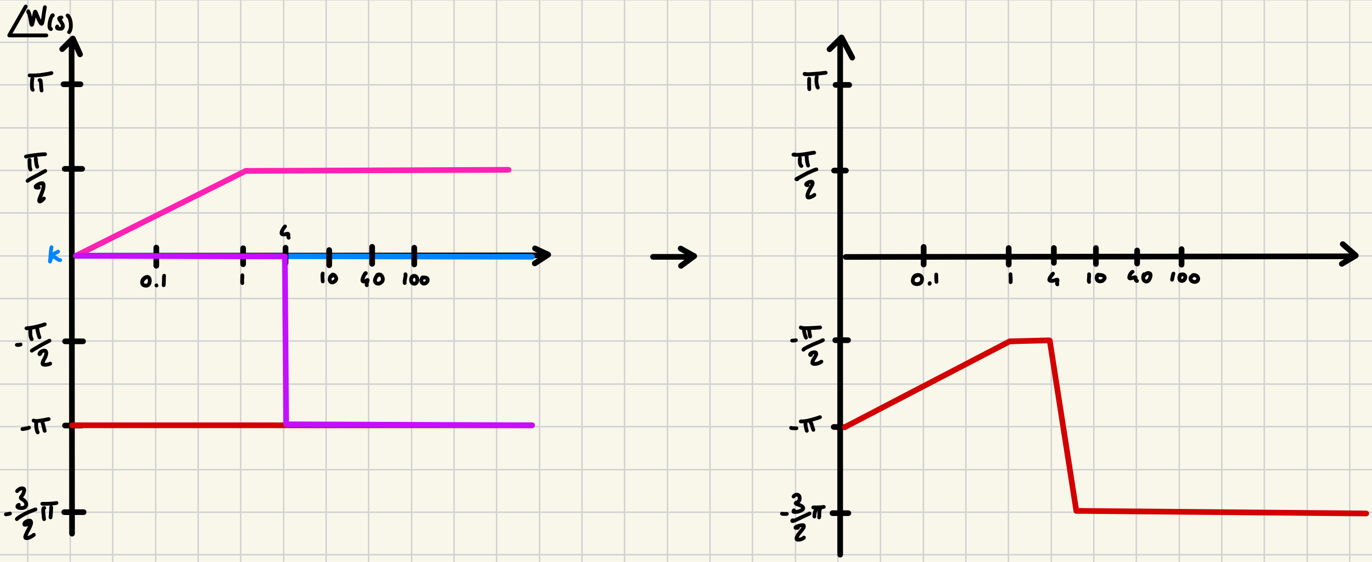
se traccino i relativi diagrammi di Bode e polare (di Nyquist).

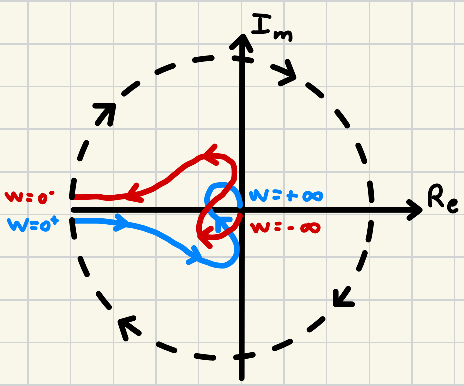
$$W(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2\left(s - \frac{1}{10}\right)\left(s^2 + \frac{1}{10}s + 16\right)} = \frac{(s-1)(s+1)}{s^2\left(-\frac{1}{10}\right)\left(1 - 10s\right)16\left(\frac{s^2}{16} + \frac{1}{160}s + 1\right)} =$$

$$= \frac{5}{8}\,\frac{(1-s)(1+s)}{s^2(1 - 10s)\left(1 + \frac{1}{160}s + \frac{s^2}{16}\right)}$$

$\omega_n^2 = 16 \rightarrow \omega_n = 4 \qquad \frac{2}{\omega_n}\xi = \frac{2}{4}\xi = \frac{1}{160} \rightarrow \xi = \frac{1}{80} \approx 0.0125$







3. Calcolare la risposta all'ingresso $u(t) = \sin 2t$

del sistema che ha risposta indiciale $y_{-1}(t) = 2 - e^{-t} - e^{-2t}$

$y_{-1}(t) = 2 - e^{-t} - e^{-2t} \qquad u(t) = \sin 2t$

$$Y(s) = \mathcal{L}\left[y_{-1}(t)\right] = 2\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{2(s+1)(s+2) - s(s+2) - s(s+1)}{s(s+1)(s+2)} = \frac{3s+4}{s(s+1)(s+2)}$$

$$W(s) = Y(s)\cdot s = \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)}$$

$$U(s) = \mathcal{L}\left[\sin 2t\right] = \frac{2}{s^2+4}$$

$$Y_F(s) = W(s)\,U(s) = \frac{6s+8}{(s+1)(s+2)(s^2+4)} = \frac{6s+8}{(s+1)(s+2)(s+2j)(s-2j)} =$$

$$= \frac{R_1}{(s+1)} + \frac{R_2}{(s+2)} + \frac{R_3}{(s+2j)} + \frac{R_4}{(s-2j)}$$

$$R_1 = \lim_{s\to -1}(s+1)\,Y_F(s) = \lim_{s\to -1}\frac{6s+8}{(s+2)(s^2+4)} = 2/5$$

$$R_2 = \lim_{s\to -2}(s+2)\cdot Y_F(s) = \lim_{s\to -2}\frac{6s+8}{(s+1)(s^2+4)} = 1/2$$

$$R_3 = \lim_{s\to -2j}(s+2j)\cdot Y_F(s) = \lim_{s\to -2j}\frac{6s+8}{(s+1)(s+2)(s-2j)} = \frac{8-12j}{-24+8j} =$$

$$= \frac{8-12j}{-24+8j}\,\frac{-24-8j}{-24-8j} = \frac{-288+224j}{640}$$

$$R_4 = R_3^* = \frac{-288-224j}{640}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[Y_F(s)\right] = \frac{2}{5}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + \left(\frac{-288+224j}{640}\right)e^{-2jt} + \left(\frac{-288-224j}{640}\right)e^{2jt}$$

$$R_3e^{-2jt} + R_4e^{2jt} = (R_a + jR_b)e^{-2jt} + (R_a - jR_b)e^{2jt} =$$

$$R_a(e^{-2jt} + e^{2jt}) + R_b(e^{-2jt} - e^{2jt}) = 2R_a\left(\frac{e^{-2jt}+e^{2jt}}{2}\right) + 2R_b\left(\frac{e^{-2jt}-e^{2jt}}{2}\right) =$$

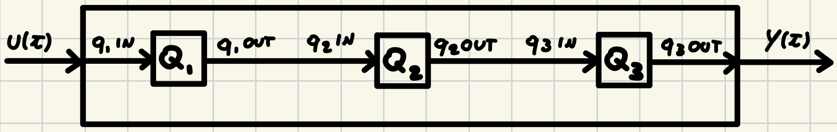
$$= 2R_a\cos(2t) + 2R_b\sin(2t)$$

$$y(t) = \frac{2}{5}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} + 2R_a\cos(2t) + 2R_b\sin(2t)$$

4. Dato un serbatoio cilindrico di area S, contenente un liquido immesso con una portata $q_{in}(t)$ e fatto uscire con una portata $q_{out}(t)$, l'equazione che regola l'altezza h del liquido nel serbatoio è

$$\dot{h} = \frac{1}{S}\left(q_{in}(t) - q_{out}(t)\right)$$

Il flusso di uscita è regolato da valvole la cui caratteristica è $q_{out} = Kh$, con $K > 0$ dipendente dal tipo di valvola.
Si consideri ora un sistema composto da tre serbatoi in cascata, con $q_{in,i}(t) = q_{out,i-1}(t)$, $i = 2, 3$, $q_{in,1} = u(t)$ e $q_{out,3}(t) = y(t)$.
Si introduca una rappresentazione con lo spazio di stato e si calcoli, se esiste la risposta a regime permanente per un ingresso costante di ampiezza 1.



$$Q_1: \begin{cases} \dot{h}_1 = \frac{1}{S}\left(q_{1}\,IN(t) - q_{1}\,OUT(t)\right) = \frac{1}{S}u(t) - \frac{K}{S}h_1 \\ y_1(t) = q_1\,OUT(t) = Kh_1 \end{cases}$$

$$Q_2: \begin{cases} \dot{h}_2 = \frac{1}{S}\left(q_2\,IN(t) - q_2\,OUT(t)\right) = \frac{K}{S}h_1 - \frac{K}{S}h_2 \\ y_2(t) = q_2\,OUT(t) = Kh_2 \end{cases}$$

$$Q_3: \begin{cases} \dot{h}_3 = \frac{1}{S}\left(q_3\,IN(t) - q_3\,OUT(t)\right) = \frac{K}{S}h_2 - \frac{K}{S}h_3 \\ y_3(t) = Kh_3 \end{cases}$$

$$Q_{TOT}: \begin{cases} \dot{h} = \begin{pmatrix} -K/S & 0 & 0 \\ K/S & -K/S & 0 \\ 0 & K/S & -K/S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

y_{RP} $\exists$ PERCHÈ $Re(\lambda_i) < 0$ $\qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{K}{S} < 0$

PER UN INGRESSO COSTANTE DI AMPIEZZA 1 SI HA: $y_{RP}(t) = W(s)\big|_{s=0}\,\delta_{-1}(t)$

$$W(s) = C(xI - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x + K/S & 0 & 0 \\ -K/S & x + K/S & 0 \\ 0 & -K/S & x + K/S \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1/S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \end{pmatrix}\frac{1}{(x + \frac{K}{S})^3}\begin{pmatrix} (x + \frac{K}{S})^2 & 0 & 0 \\ \frac{K}{S}(x + \frac{K}{S}) & (x + \frac{K}{S})^2 & 0 \\ (\frac{K}{S})^2 & \frac{K}{S}(x + \frac{K}{S}) & (x + K/S)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{S} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s}\left(x + \frac{k}{s}\right)^2 \\ \frac{k}{s^2}\left(x + \frac{k}{s}\right) \\ \frac{1}{s}\left(\frac{k}{s}\right)^2 \end{pmatrix} \frac{1}{\left(x + \frac{k}{s}\right)^3} = \frac{\left(\frac{k}{s}\right)^3}{\left(x + \frac{k}{s}\right)^3}$$

$$y_{RP}(\tau) = W(x)\big|_{x=0}\, \delta_{-1}(\tau) = \left(\frac{k}{s}\right)^3 \Big/ \left(\frac{k}{s}\right)^3 = 1$$