Sistemi Dinamici e Teoria dei Sistemi
14/06/2024

Studente: ____________________

Matricola: ____________________

---

1. Un sistema, con $x \in \mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, può essere rappresentato, nello spazio di stato, dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + Du(t) \end{aligned} \qquad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

   A. Determinare possibili valori per i blocchi nella rappresentazione sapendo che
      (a) la funzione di trasferimento è pari a
      $$W(s) = \frac{s^2+3s+1}{s(s+2)}$$
      (b) esiste un sottospazio di stato non osservabile di dimensione uno caratterizzato dall'autovalore $\lambda = 1$;
      (c) il sistema è completamente raggiungibile.

   B. Come il punto A. aggiungendo che l'autovettore **sinistro** associato all'autovalore $\lambda = 1$ risulta essere $v_3^T = (1\ 1\ 1)^T$.

2. Tracciare assumendo $k > 0$ i diagrammi di Bode e polare di
$$F(s) = k\frac{s-1}{s(s^2+10)(s+5)}$$

3. Calcolare una realizzazione minima per un sistema (a tempo continuo) avente funzione di trasferimento
$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+3} \\ 1 & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{(s+1)(s+3)} & 0 \end{pmatrix}.$$

[120 minuti, libri chiusi]

ESERCIZIO I

1. Un sistema, con $x \in \mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, può essere rappresentato, nello spazio di stato, dalle equazioni

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u(t) \qquad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + Du(t)$$

$W(s) = \dfrac{s^2+3s+1}{s(s+2)}$ SOTTOSPAZIO NON OSS CON $\lambda = 1$ SISTEMA COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE

IL SISTEMA È IN FORMA OSSERVABILE

AL DENOMINATORE LA $W(s)$ CONTIENE GLI AUTOVAL SIA OSS CHE ECC, ABBIAMO QUINDI $\lambda = 0$ E $\lambda = -2$ OSS CHE ECC. MA ABBIAMO ANCORA UN $\lambda = 1$ NON OSS, QUINDI ABBIAMO 3 AUTOVAL.

$$\begin{array}{r|l} s^2+3s+1 & s^2+2s \\ \hline -s^2-2s & 1 \\ \hline s+1 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \underbrace{\frac{s+1}{s(s+2)}}_{W(s)} \underbrace{+1}_{D} \qquad A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \hline x_1 & x_2 & 1 \end{array}\right) \quad B = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline x_3 \end{array}\right) \quad C = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad D = 1$$

VERIFICO CHE L'OSSERVABILITÀ NON È PIENA:

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad rk = 2 \quad ok!$$

VERIFICO CHE IL rk DELLA RAGGIUNGIBILITÀ SIA PIENO:

$$R = (B \;\; AB \;\; A^2B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ x_3 & x_1+x_2+x_3 & x_1+x_3 \end{pmatrix}$$

DEVE ESSERE DET $R \neq 0$, CIOÈ rk PIENO, PER AVERE IL SISTEMA COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE

$$|R| = -(x_1+x_3) - (2x_1+2x_2+2x_3) = -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 \neq 0$$

PER COMODITÀ PONGO $x_1 = x_2 = 0$ E $x_3 = 1$, OTTENENDO:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad B = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 1 \end{array}\right) \quad C = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad D = 1$$

AUTOVALORI:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(-2-\lambda) \rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = 1$$

AUTOVETTORI:

$$(A - \lambda_i I) v_i = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} v_a = 2v_b \\ v_c = 0 \end{cases} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} v_a = 0 \\ v_b = 0 \\ v_c = 0 \end{cases} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} v_a = 0 \\ v_b = 0 \\ v_c = 1 \end{cases} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

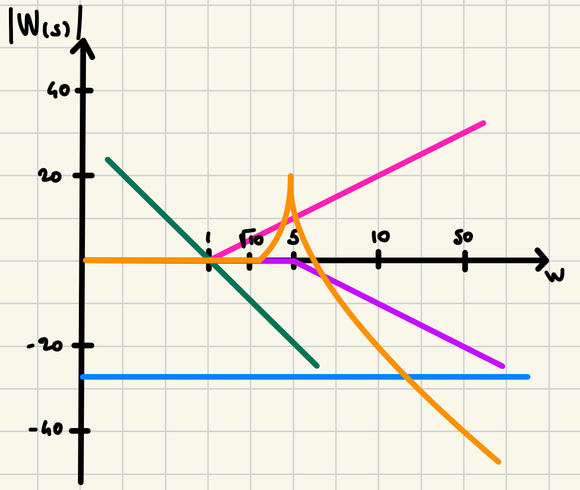
b) $$A = T^{-1} \tilde{A} T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

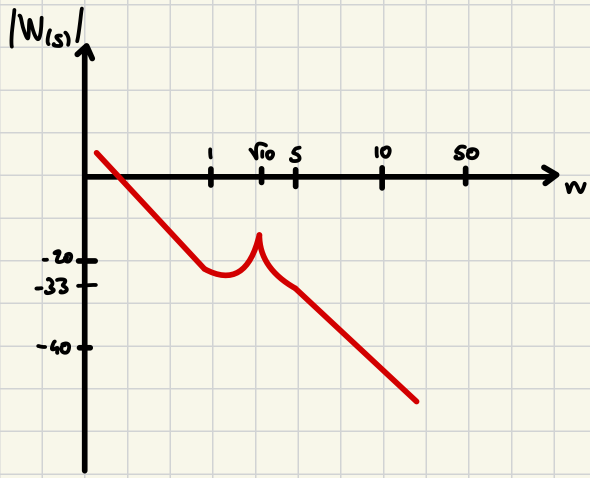
$$B = TB = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \qquad C = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

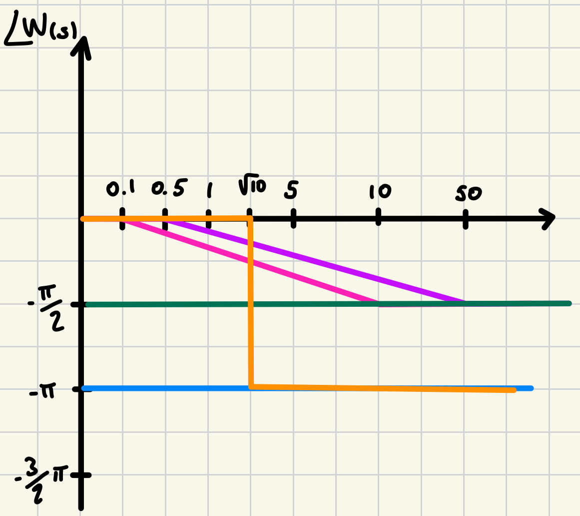
ESERCIZIO 2

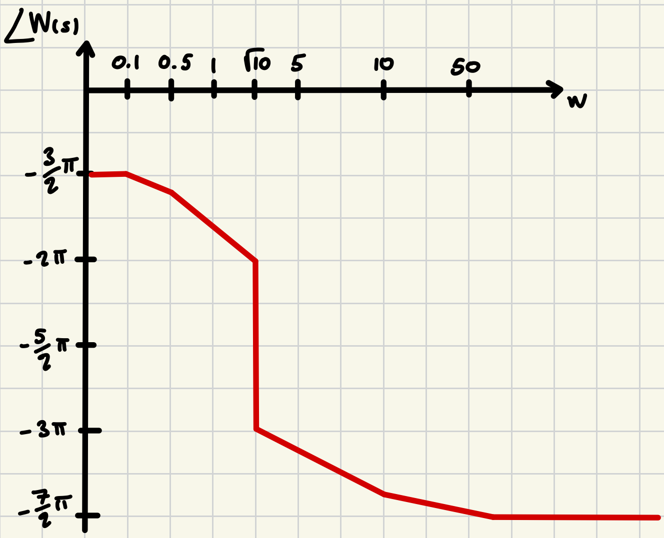
$$F(s) = K \frac{(s-1)}{s(s^2+10)(s+5)} \qquad K > 0$$

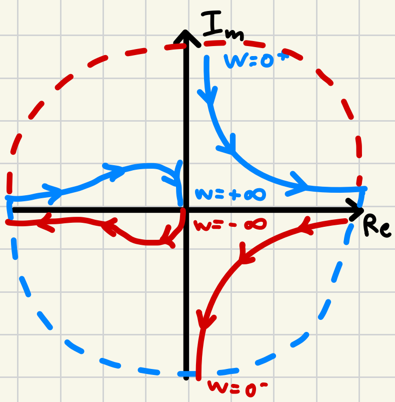
$$F(s) = -\frac{K}{50} \frac{(1-s)}{s\left(1+\frac{s^2}{10}\right)\left(1+\frac{s}{5}\right)} \qquad 20\log|K| \approx -34\,dB \qquad \xi = 0 \qquad \omega_n = \sqrt{10}$$











ESERCIZIO 3

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+3} \\ 1 & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{(s+1)(s+3)} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+3} \\ 0 & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{(s+1)(s+3)} & 0 \end{pmatrix} + \overset{D}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+3} \\ 0 & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{(s+1)(s+3)} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} s(s+3) & s(s+1) \\ 0 & (s+1)(s+3) \\ s & 0 \end{pmatrix}}{s(s+1)(s+3)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+1} + \frac{R_3}{s+3}$$

$$R_1 = \lim_{s\to 0} s \cdot W(s) = \lim_{s\to 0} \frac{\begin{pmatrix} s(s+3) & s(s+1) \\ 0 & (s+1)(s+3) \\ s & 0 \end{pmatrix}}{(s+1)(s+3)} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad rk = 1 \quad \lambda_1 = 0$$

$$R_2 = \lim_{s\to -1} (s+1) \cdot W(s) = \lim_{s\to -1} \frac{\begin{pmatrix} s(s+3) & s(s+1) \\ 0 & (s+1)(s+3) \\ s & 0 \end{pmatrix}}{s(s+3)} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} rk = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$$

$$R_3 = \lim_{s\to -3} (s+3) \cdot W(s) = \lim_{s\to -3} \frac{\begin{pmatrix} s(s+3) & s(s+1) \\ 0 & (s+1)(s+3) \\ s & 0 \end{pmatrix}}{s(s+1)} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}}{6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} rk = 2 \\ \lambda_{3,4} = -3 \end{matrix}$$

$$C_1 B_1 = R_1 \rightarrow R_1 = 3\times 2,\ C_1 = 3 \times rk(R_1),\ B_1 = rk(R_1)\times 2 \rightarrow \overset{C_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \overset{B_1}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_2 B_2 = R_2 \rightarrow \overset{C_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}} \overset{B_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_3 B_3 = R_3 \rightarrow R_3 = 3\times 2,\ C_3 = 3\times 2,\ B_3 = 2\times 2 \rightarrow \overset{C_3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}} \overset{B_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$