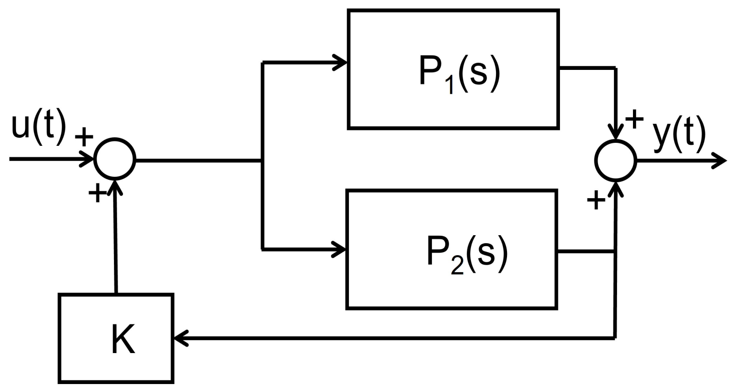
Teoria dei Sistemi

20/1/2022

Cognome e nome ....

1. Sia dato il sistema illustrato nello schema



con

$$P_1(s) = \frac{1}{s+1}, \qquad P_2 = \frac{2}{s(s+1)}$$

a. fornirne una rappresentazione con lo spazio di stato;
b. Studiarne la stabilità interna, quella esterna e quella esterna nello stato zero al variare di $K \in \mathbb{R}$;
c. studiarne le proprietà di raggiungibilità e di osservabilità al variare di $K \in \mathbb{R}$;
d. posto $K = 1$,
   i. effettuarne la scomposizione di Kalman;
   ii. calcolarne la risposta forzata all'ingresso $u(t) = 2t - 1$.

2. Dato il sistema descritto da

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+2}{s+1} \\ 1 & \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix}$$

a. determinarne una realizzazione minima;
b. calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente all'ingresso

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \delta_{-1}(t)$$

3. Giustificare o smentire la seguente affermazione: "in un sistema non completamente osservabile, la somma di due stati osservabili può fornire uno stato inosservabile mentre la somma di due stati inosservabili non può mai essere pari ad uno stato osservabile".

4. Fornire l'espressione dei modi naturali di un sistema di dimensione 2, con un autovalore λ di molteplicità algebrica 2 e geometrica 1.

5. Mostrare che se x_I è uno stato inosservabile, anche $A^K x_I$ è inosservabile $\forall k \geq 1$.

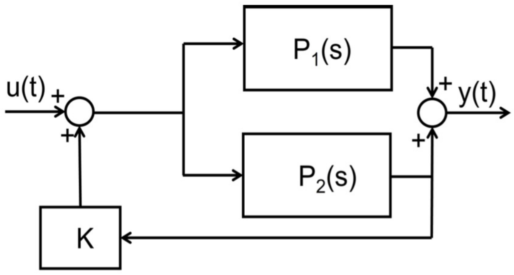
6. Si determinino

A. la rappresentazione grafica e la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni
   a. $t\delta_{-1}(t)$;
   b. $(t-T)\delta_{-1}(t-T)$;
   c. $t\delta_{-1}(t-T)$;
   d. $(t-T)\delta_{-1}(t)$.

B. la rappresentazione grafica e la trasformata z della funzione $f(t)$ così definita:

$$f(t) = 0 \text{ per } t < 0; \quad f(0) = 1; \quad f(1) = 0; \quad f(2) = -1; \quad f(3) = 1; \quad f(t) = 0 \text{ per } t \geq 4$$

1. Sia dato il sistema illustrato nello schema



con

$$P_1(s) = \frac{1}{s+1}, \qquad P_2 = \frac{2}{s(s+1)}$$

a. fornirne una rappresentazione con lo spazio di stato;
b. Studiarne la stabilità interna, quella esterna e quella esterna nello stato zero al variare de $K \in \mathbb{R}$;
c. studiarne le proprietà di raggiungibilità e di osservabilità al variare di $K \in \mathbb{R}$;
d. posto $K = 1$,
   i. effettuarne la scomposizione di Kalman;
   ii. calcolarne la risposta forzata all'ingresso $u(t) = 2t - 1$.

a) $P_1(s)$:

$$Y_1(s) = W_1(s) \cdot U(s) \rightarrow W_1(s) = P_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1} \rightarrow$$

$$(s+1)Y_1(s) = U(s) \rightarrow \dot{y}_1(\tau) + y_1(\tau) = u(\tau)$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ \dot{y}_1 = x_2 = u(\tau) - y_1(\tau) = -x_1(\tau) + u(\tau) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1(\tau) + u(\tau) \\ y_1 = x_1 \end{cases}$$

$A = -1 \quad B = 1 \quad C = 1 \quad D = 0$

$P_2(s)$:

$$\frac{Y_2(s)}{U(s)} = \frac{2}{s(s+1)} \rightarrow s(s+1)Y_2(s) = 2U(s) \rightarrow \ddot{y}_2(\tau) + \dot{y}_2(\tau) = 2u(\tau)$$

$$\begin{cases} y_2 = x_1 \\ \dot{y}_2 = x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y}_2 = x_2(\tau) \\ \dot{x}_2 = \ddot{y}_2 = -\dot{y}_2(\tau) + 2u(\tau) = -x_2(\tau) + 2u(\tau) \\ y_2 = x_1(\tau) \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = 0$

$P_1(s)$ E $P_2(s)$ SONO IN PARALLELO E ABBIAMO IL GUADAGNO K ANCORA:

$$P_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases} \qquad P_2: \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = u + K y_2 \\ y = y_1 + y_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + K\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x_2 + u \\ \dot{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x_2 + K \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ y = x_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x_2 \end{cases} \rightarrow$$

$A = \begin{pmatrix} -1 & K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2K & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = 0$

b) $P(s) = P_1(s) + P_2(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s(s+1)} = \frac{s+2}{s(s+1)}$

$$\frac{F(s)}{1-F(s)K} = \frac{\frac{s+2}{s(s+1)}}{1 - K\frac{s+2}{s(s+1)}} = \frac{s+2}{s(s+1)-K(s+2)} \rightarrow$$

$s^2 + s(1-K) - 2K \rightarrow$ BASTA CARTESIO $\begin{cases} 1-K \geq 0 \\ -2K \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} K \leq 1 \\ K \leq 0 \end{cases}$ STABILE PER $K \leq 0$

c) $A = \begin{pmatrix} -1 & K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2K & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $D = 0$

RAGG:

$R = (B \;\; AB \;\; A^2B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1+2K \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4K+2 \end{pmatrix}$ $\quad rk\,R: 2 \rightarrow \mathcal{R} = \mathrm{Imm}\,R = \mathrm{SPAN}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

OSS:

$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & K & 1 \\ 1 & K & K-1 \end{pmatrix}$ $\quad rk = 2$ $\quad \mathcal{I} = \ker(O) = \mathrm{SPAN}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

d) $K = 1$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $D = 0$

i) RAGG:

$R = (B \;\; AB \;\; A^2B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad rk = 2 \rightarrow \mathcal{R} = \mathrm{Imm}(R) = \mathrm{SPAN}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

OSS

$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad rk = 2 \rightarrow \mathcal{I} = \ker(O) = \mathrm{SPAN}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathcal{X}_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathcal{X}_3 = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{I} = \phi$

$\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathcal{X}_4 = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 = R^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad rk$ PIENO $(\det \neq 0) \rightarrow$ TUTTO OK!

$$T = -1\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \end{array}\right) \qquad \tilde{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

ii) $u(t) = 2t - 1 \quad \rightarrow \quad U(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} = U_1(s) + U_2(s)$

$$W(s) = C(sI-A)^{-1}B = C_2(sI-A_{22})^{-1}B_2 = 1 \cdot (s+1)^{-1} \cdot 1 = \frac{1}{s+1}$$

$$y_{F_1}(s) = W(s) \cdot U_1(s) = \frac{1}{s+1}\frac{2}{s^2} = \frac{2}{s^2(s+1)} = \frac{R_1}{s^2} + \frac{R_2}{s} + \frac{R_3}{s+1}$$

$$R_1 = \lim_{s \to 0} s^2 \cdot y_{F_1}(s) = \lim_{s \to 0} \frac{2}{s+1} = 2$$

$$R_2 = \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds}\left(s^2 \cdot y_{F_1}(s)\right) = \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s+1}\right) = \lim_{s \to 0} \frac{-2}{(s+1)^2} = -1$$

$$R_3 = \lim_{s \to -1} (s+1) \cdot y_{F_1}(s) = \lim_{s \to -1} \frac{2}{s^2} = 2$$

$$y_{F_1}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[y_{F_1}(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[2\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + 2 \cdot \frac{1}{s+1}\right] = 2t - 1 + 2e^{-t}$$

$$y_{F_2}(s) = W(s) \cdot U_2(s) =$$

2. Dato il sistema descritto da

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+2}{s+1} \\ 1 & \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix}$$

a. determinarne una realizzazione minima;

b. calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente all'ingresso

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \delta_{-1}(t)$$

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+2}{s+1} \\ 1 & \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+1} \\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W'(s) = \frac{\begin{pmatrix} s+1 & s & s+2 \\ 0 & s+1 & 0 \end{pmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2}$$

$$R_1 = \lim_{s\to -1} (s+1)\cdot W'(s) = \lim_{s \to -1} \frac{\begin{pmatrix} s+1 & s & s+2 \\ 0 & s+1 & 0 \end{pmatrix}}{(s+2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad rk = 1 \quad \lambda_1 = -1$$

$$R_2 = \lim_{s\to -2} (s+2)\cdot W'(s) = \lim_{s \to -2} \frac{\begin{pmatrix} s+1 & s & s+2 \\ 0 & s+1 & 0 \end{pmatrix}}{(s+1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad rk = 2 \quad \lambda_2 = -2$$

$$R_1 = C_{2\times1} B_{1\times3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 = C_{2\times2} B_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \delta_{-1}(t) \rightarrow U(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{s}$ $\quad \exists$ POICHÈ $Re(\lambda_i) < 0$

$$y_{RP}(t) = \lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{W(s)}{\cancel{s}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 1 \end{pmatrix} = K$$

3. Giustificare o smentire la seguente affermazione: ”in un sistema non completamente osservabile, la somma di due stati osservabili può fornire uno stato inosservabile mentre la somma di due stati inosservabili non può mai essere pari ad uno stato osservabile”.

PARZIALMENTE VERA.

UNO STATO È OSSERVABILE SE, A PARTIRE DALLE USCITE DEL SISTEMA, È POSSIBILE DETERMINARE IN MODO UNIVOCO LO STATO INIZIALE DEL SISTEMA STESSO. QUINDI DUE STATI OSSERVABILI HANNO ABBASTANZA INFORMAZIONI PER DARNE UN ALTRO OSSERVABILE SOMMANDOLI. LA SOMMA DI DUE INOSSERVABILI DARÀ QUINDI UN ALTRO INOSSERVABILE.

4. Fornire l’espressione dei modi naturali di un sistema di dimensione 2, con un autovalore λ di molteplicità algebrica 2 e geometrica 1.

ABBIAMO UN SOLO AUTOVETTORE LIN INDIP ASSOCIATO A λ, QUINDI:

$(A-\lambda I)u_1 = 0$ E $(A-\lambda I)u_2 = u_1$ CIOÈ $(A-\lambda I)^2 u_2 = 0$

AVREMO: $x_L(t) = c_1 e^{\lambda t} u_1 + c_2 t e^{\lambda t} u_2$ CON $c_i = v_i' x_0$

5. Mostrare che se x_I è uno stato inosservabile, anche $A^K x_I$ è inosservabile $\forall k \geq 1$.

SE x_I INOSS ALLORA y_K NON DIPENDE DA x_I, CIOÈ $Cx_I = 0$.

ALLORA $y_K = CA^K x_I = 0$ $\forall K \geq 1$ DA CALEY-HAMILTON

6. Si determinino

A. la rappresentazione grafica e la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni

a. $t\delta_{-1}(t)$;
b. $(t-T)\delta_{-1}(t-T)$;
c. $t\delta_{-1}(t-T)$;
d. $(t-T)\delta_{-1}(t)$.

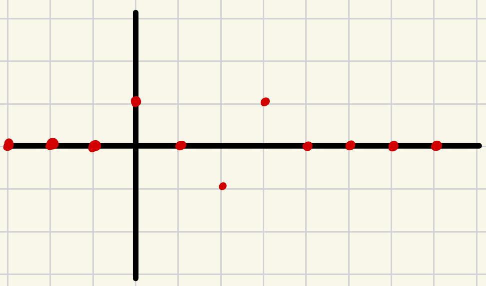
B. la rappresentazione grafica e la trasformata z della funzione $f(t)$ così definita:

$$f(t) = 0 \text{ per } t < 0; \quad f(0) = 1; \quad f(1) = 0; \quad f(2) = -1; \quad f(3) = 1; \quad f(t) = 0 \text{ per } t \geq 4$$

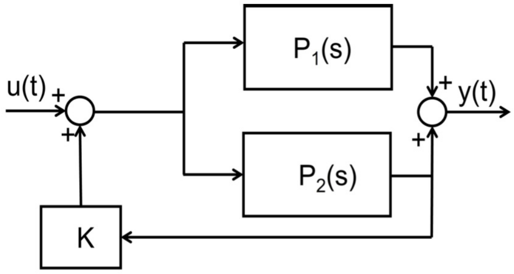
a) $\cdot\ \mathcal{L}[t\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s^2}$ $\qquad \cdot\ \mathcal{L}[t\delta_{-1}(t-T)] = \frac{e^{-sT}(sT+1)}{s^2}$

$\cdot\ \mathcal{L}[(t-T)\delta_{-1}(t-T)] = \frac{e^{-sT}}{s^2}$ $\qquad \cdot\ \mathcal{L}[(t-T)\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s}$

b)



1. Sia dato il sistema illustrato nello schema



con

$$P_1(s) = \frac{1}{s+1}, \qquad P_2 = \frac{2}{s(s+1)}$$

a. fornirne una rappresentazione con lo spazio di stato;
b. Studiarne la stabilità interna, quella esterna e quella esterna nello stato zero al variare di $K \in I\!R$;
c. studiarne le proprietà di raggiungibilità e di osservabilità al variare di $K \in I\!R$;
d. posto $K = 1$,
   i. effettuarne la scomposizione di Kalman;
   ii. calcolarne la risposta forzata all'ingresso $u(t) = 2t - 1$.

a) $P_1(s)$:

$$P_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1} \rightarrow (s+1)Y_1(s) = U(s) \quad \text{cioè} \quad \dot y_1(t) + y_1(t) = u(t)$$

$$\begin{cases} x_1(t) = y_1(t) \\ \dot x_1(t) = \dot y_1(t) = u(t) - y_1(t) = -x_1(t) + u(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot x_1(t) = -x_1(t) + u(t) \\ y_1(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$A_1 = -1 \quad B_1 = 1 \quad C_1 = 1 \quad D_1 = 0$$

$P_2(s)$:

$$P_2(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{2}{s(s+1)} \rightarrow (s^2+s)Y_2(s) = 2\,U(s) \quad \text{cioè} \quad \ddot y_2(t) + \dot y_2(t) = 2\,u(t)$$

$$\begin{cases} x_1(t) = y_2(t) \\ x_2(t) = \dot y_2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot x_1(t) = \dot y_2(t) = x_2(t) \\ \dot x_2(t) = \ddot y_2(t) = -\dot y_2(t) + 2u(t) = -x_2(t) + 2u(t) \\ y_2(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad C_2 = (1 \quad 0) \quad D_2 = 0$$

$P_1(s)$ E $P_2(s)$ SONO IN PARALLELO E ABBIAMO IL GUADAGNO K ANCORA:

$$P_1: \begin{cases} x_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases} \quad P_2: \begin{cases} \dot x_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = u + K y_2 \\ y = y_1 + y_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot x_1 = -x_1 + K(1 \quad 0)x_2 + u \\ \dot x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x_2 + K \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ y = x_1 + (1 \quad 0) x_2 \end{cases} \rightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2K & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \quad 1 \quad 0) \quad D = 0$$

b) $A=\begin{pmatrix}-1 & k & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 2k & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $C=(1\ \ 1\ \ 0)$ $D=0$

$\det(A-\lambda I)=0$ $\begin{vmatrix}-1-\lambda & k & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 0 & 2k & -1-\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2k)=\lambda^3+2\lambda^2+\lambda(1-2k)-2k$

C.N. $\begin{cases}-2k>0, & k<0\\ 1-2k>0, & k<\frac{1}{2}\end{cases}$

3	1	1-2k
2	2	-2k
1	1-k	
0	-2k	

$k<1$
$k<0$

STABILE ASINT PER $k<0$

PER STUDIARE LA STABILITÀ ESTERNA DOBBIAMO TROVARE λ_o E $\lambda_{e,o}$

$k=0$ $\lambda_1=0$ $\lambda_{2,3}=-1$

$(A-\lambda_1 I)v_1=0 \rightarrow \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_a\\v_b\\v_c\end{pmatrix}=0$ $v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$(A-\lambda_{2,3} I)v_{2,3}=0$ $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_a\\v_b\\v_c\end{pmatrix}=0$ $v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $v_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$U^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \rightarrow U=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}v'_1\\v'_2\\v'_3\end{matrix}$

CI INTERESSA $\lambda_1=0 \rightarrow$ $v'_1 B=(0\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=2$ $C v_1=(1\ \ 1\ \ 0)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=1$

PER ESSERE STABILE ESTERNAMENTE O $\lambda_o\le 0$ O $\lambda_{e,o}<0$. POICHÈ $\lambda_1=0$ È SIA ECC SIA OSS MA NON <0, È INSTABILE

c) $R=(B\ \ AB\ \ A^2B)$

$R=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1+2k\\ 0 & 2 & -2\\ 2 & -2 & 4k+2\end{pmatrix}$ $rk(R)=2 \rightarrow \dim(\mathcal{R})=2$ $\mathcal{R}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

$O=\begin{pmatrix}C\\CA\\CA^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & k & 1\\ 1 & k & k-1\end{pmatrix}$

SE $k=1$ $rk(O)=2$

$\dim\ker(O)=\dim I=1$ $I=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$

d)

i $K=1$

2. Dato il sistema descritto da

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+2}{s+1} \\ 1 & \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix}$$

a. determinarne una realizzazione minima;
b. calcolare, se esiste, la risposta a regime permanente all'ingresso

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \delta_{-1}(t)$$

a)

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} & 1+\frac{1}{s+1} \\ 1 & \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+1} \\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{D}$$

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+1} \\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} s+1 & s & s+2 \\ 0 & s+1 & 0 \end{pmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2}$$

$$R_1 = \lim_{s\to -1} (s+1) W(s) = \lim_{s\to -1} \frac{\begin{pmatrix} s+1 & s & s+2 \\ 0 & s+1 & 0 \end{pmatrix}}{(s+2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad rk = 1 \rightarrow \lambda_1 = -1$$

$$R_2 = \lim_{s\to -2} (s+2) W(s) = \lim_{s\to -2} \frac{\begin{pmatrix} s+1 & s & s+2 \\ 0 & s+1 & 0 \end{pmatrix}}{(s+1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad rk = 2 \rightarrow \lambda_{2,3} = -2$$

$$C_1 B_1 = R_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_2 B_2 = R_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\exists$ PERCHÈ $Re(\lambda_i) < 0$

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \delta_{-1}(t)$$

$$Y_{RP}(t) = \begin{pmatrix} Y_{RP_1}(t) \\ Y_{RP_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{s+2} + 2\,\frac{s+2}{s+1}\right)\Big|_{s=0} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{(s+1)+2(s+2)^2}{(s+1)(s+2)}\right)\Big|_{s=0} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Giustificare o smentire la seguente affermazione: ”in un sistema non completamente osservabile, la somma di due stati osservabili può fornire uno stato inosservabile mentre la somma di due stati inosservabili non può mai essere pari ad uno stato osservabile”.

PARZIALMENTE VERA.

UNO STATO È OSSERVABILE SE, A PARTIRE DALLE USCITE DEL SISTEMA, È POSSIBILE DETERMINARE IN MODO UNIVOCO LO STATO INIZIALE DEL SISTEMA STESSO. QUINDI DUE STATI OSSERVABILI HANNO ABBASTANZA INFORMAZIONI PER DARNE UN ALTRO OSSERVABILE SOMMANDOLI. LA SOMMA DI DUE INOSSERVABILI DARÀ QUINDI UN ALTRO INOSSERVABILE.

4. Fornire l'espressione dei modi naturali di un sistema di dimensione 2, con un autovalore λ di molteplicità algebrica 2 e geometrica 1.

ABBIAMO UN SOLO AUTOVETTORE LIN INDIP ASSOCIATO A λ, QUINDI:

$(A-\lambda I)u_1=0$ E $(A-\lambda I)u_2=u_1$ CIOÈ $(A-\lambda I)^2u_2=0$

AVREMO: $x_L(t)=c_1e^{\lambda t}u_1+c_2te^{\lambda t}u_2$ CON $c_i=v_i'x_0$

5. Mostrare che se x_I è uno stato inosservabile, anche $A^K x_I$ è inosservabile $\forall k \geq 1$.

SE x_I INOSS ALLORA y_K NON DIPENDE DA x_I, CIOÈ $Cx_I=0$.

ALLORA $y_K=CA^Kx_I=0$ $\forall K\geq 1$

6. Si determinino

A. la rappresentazione grafica e la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni

a. $t\delta_{-1}(t)$;
b. $(t-T)\delta_{-1}(t-T)$;
c. $t\delta_{-1}(t-T)$;
d. $(t-T)\delta_{-1}(t)$.

B. la rappresentazione grafica e la trasformata z della funzione $f(t)$ così definita:

$$f(t)=0 \text{ per } t<0; \quad f(0)=1; \quad f(1)=0; \quad f(2)=-1; \quad f(3)=1; \quad f(t)=0 \text{ per } t\geq 4$$

A a. $\mathcal{L}[t\delta_{-1}(t)]=-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s^2}$

d. $\mathcal{L}[(t-T)\delta_{-1}(t)]=\frac{1-Ts}{s^2}$

b. $\mathcal{L}[(t-T)\delta_{-1}(t-T)]=\frac{e^{-Ts}}{s^2}$

c. $\mathcal{L}[t\delta_{-1}(t-T)]=\frac{e^{-Ts}}{s^2}+\frac{Te^{-Ts}}{s}$

B $\mathcal{Z}(f(t))=\sum_{t=0}^{\infty}f(t)z^{-t}=1\cdot z^0+0\cdot z^{-1}-1\cdot z^{-2}+1\cdot z^{-3}+\ldots=1-z^{-2}+z^{-3}$