Sistemi Dinamici/Teoria dei Sistemi- II canale

8/2/2024

mS

Cognome e nome .... Fila ..... Colonna.....

1. E' dato un sistema con funzione di trasferimento

$$F(s) = k\frac{s^2 - 4s + 3}{s(s+10)^2}$$

a) Tracciare i diagrammi qualitativi di Bode e polare
b) Studiare la stabilità del sistema a ciclo chiuso, retroazionato con guadagno d'anello unitario

2.(Solo 9 cfu) E' dato il sistema con rappresentazione nello spazio di stato

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(y) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Calcolare la rapresentazione nello spazio di stato del sistema a tempo discreto equivalente ottenuto mediante campionamento con tempo di campion¡mento $T = 1sec$

3. Dato un sistema rappresentato dalla matrice delle funzioni di trasferimento

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s-2} & -2 \\ \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s-2)} \end{pmatrix}$$

a. determinarne una realizzazione minima.
b. Calcolare la risposta forzata e, se esiste, a regime permanente, all'ingresso

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \delta_{-1}(t)$$

Giustificare la risposta

4 Discutere nel dettaglio le connessioni che sussistono tra eccitabilità e osservabilità dei modi e le proprietà di raggiungibilità ed osservabilità del sistema dato

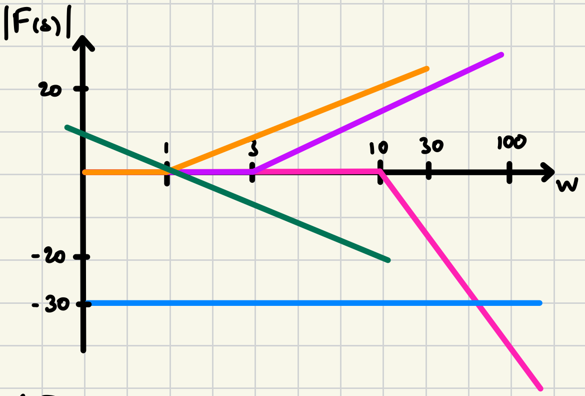
1. E' dato un sistema con funzione di trasferimento

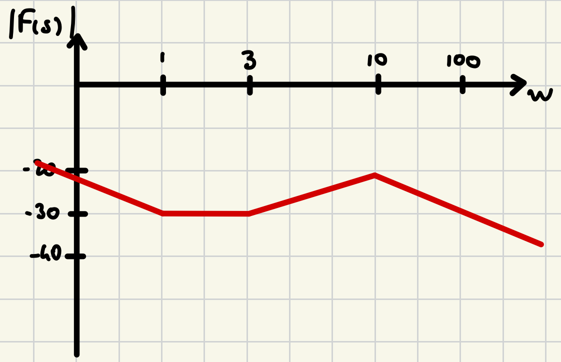
$$F(s) = k\frac{s^2 - 4s + 3}{s(s+10)^2}$$

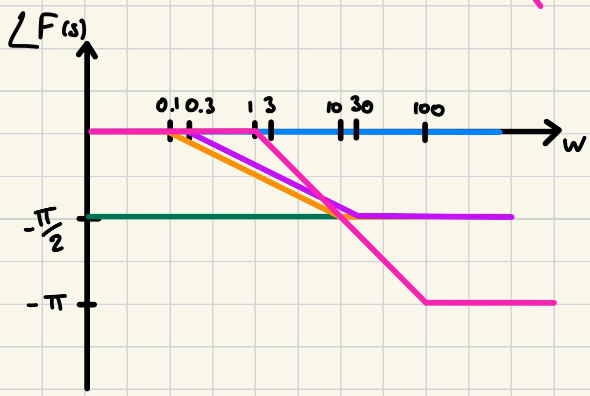
a) Tracciare i diagrammi qualitativi di Bode e polare
b) Studiare la stabilità del sistema a ciclo chiuso, retroazionato con guadagno d'anello unitario

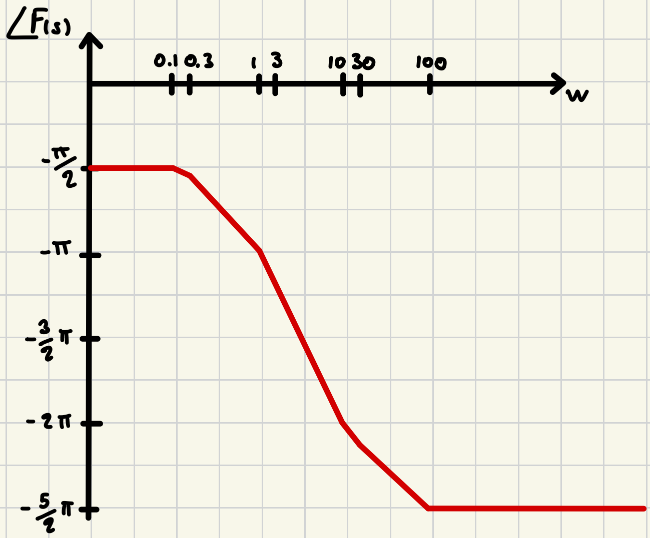
a) $F(s) = K\dfrac{s^2-4s+3}{s(s+10)^2} = K\dfrac{(s-3)(s-1)}{s(s+10)(s+10)} = \dfrac{3}{100}K\dfrac{(1-s/3)(1-s)}{s(1+0.1s)(1+0.1s)}$ $K>0$

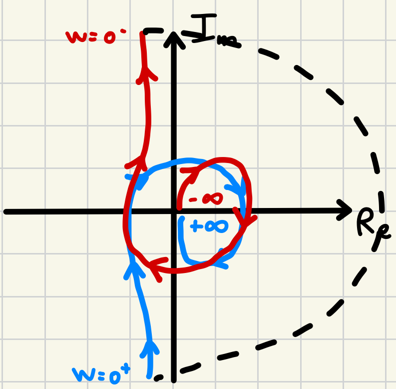
$20\log\left|\frac{3}{100}K\right| = 20\log|3K| - 40\,dB = -30\,dB$ SE $K=1$











b)

$$F'(s) = \frac{F(s)}{1+F(s)} = \frac{K\frac{s^2-4s+3}{s(s+10)^2}}{1+K\frac{s^2-4s+3}{s(s+10)^2}} = \frac{K(s^2-4s+3)}{s(s+10)^2+K(s^2-4s+3)}$$

$$p(K): s^3+20s^2+100s+Ks^2-4Ks+3K = s^3+s^2(K+20)+s(100-4K)+3K$$

DA CARTESIO $\begin{cases} K+20>0 \\ 100-4K>0 \\ 3K>0 \end{cases}$ $\begin{cases} K>-20 \\ K<25 \\ K>0 \end{cases}$ CONDIZIONE NECESSARIA PER LA STABILITÀ: $0<K<25$

ROUTH: $s^3+s^2(K+20)+s(100-4K)+3K$

3	1	$100-4K$
2	$K+20$	$3K$
1	$\frac{4K^2-17K-2000}{-K-20}$	
0	$3K$	

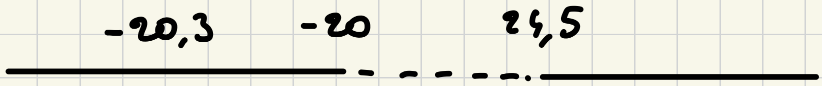
$$\frac{4K^2-17K-2000}{-K-20} \geq 0$$

$N \geq 0$

$$K = \frac{17 \pm \sqrt{289+32000}}{8} = \frac{17 \pm 180}{8} \begin{cases} 24{,}5 \\ -20{,}3 \end{cases}$$

$D>0$

$$-K-20>0 \rightarrow K<-20$$



2. (Solo 9 cfu) E' dato il sistema con rappresentazione nello spazio di stato

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

Calcolare la rapresentazione nello spazio di stato del sistema a tempo discreto equivalente ottenuto mediante campionamento con tempo di campion¡mento $T = 1sec$

$$\begin{cases} x(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(\tau) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(\tau) \\ y(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(\tau) \end{cases}$$

$D_d = D_c$, $C_d = C_c$

AUTOVALORI:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4 \rightarrow \lambda = \pm 2$$

AUTOVETTORI:

$$\lambda_1 = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} u_1 = 0 \rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad / \quad \lambda_2 = -2 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} u_2 = 0 \rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array}$$

MATRICI:

$$\Phi(\tau) = e^{A\tau} = \sum_{i=1}^{v} e^{\lambda_i \tau} u_i v_i = e^{2\tau}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} + e^{-2\tau}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} = e^{2\tau}\begin{pmatrix} 3/4 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} + e^{-2\tau}\begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$A_d = e^{AT} = e^{A} = e^{2}\begin{pmatrix} 3/4 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} + e^{-2}\begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^{2} + \frac{1}{4}e^{-2} & \frac{3}{4}e^{2} - \frac{3}{4}e^{-2} \\ \frac{1}{4}e^{2} - \frac{1}{4}e^{-2} & \frac{1}{4}e^{2} + \frac{3}{4}e^{-2} \end{pmatrix}$$

$$B_d = A^{-1}(e^{AT} - I_d)B = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^{2} + \frac{1}{4}e^{-2} & \frac{3}{4}e^{2} - \frac{3}{4}e^{-2} \\ \frac{1}{4}e^{2} - \frac{1}{4}e^{-2} & \frac{1}{4}e^{2} + \frac{3}{4}e^{-2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^{2} + \frac{1}{4}e^{-2} - 1 & \frac{3}{4}e^{2} - \frac{3}{4}e^{-2} \\ \frac{1}{4}e^{2} - \frac{1}{4}e^{-2} & \frac{1}{4}e^{2} + \frac{3}{4}e^{-2} - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^{2} + \frac{1}{4}e^{-2} - 1 \\ \frac{1}{4}e^{2} - \frac{1}{4}e^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}e^{2} + \frac{1}{4}e^{-2} - 1\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}e^{2} - \frac{1}{4}e^{-2}\right) \\ \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}e^{2} + \frac{1}{4}e^{-2} - 1\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}e^{2} - \frac{1}{4}e^{-2}\right) \end{pmatrix}$$

3. Dato un sistema rappresentato dalla matrice delle funzioni di trasferimento

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s-2} & -2 \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s-2)} \end{pmatrix}$$

~~a.~~ determinarne una realizzazione minima.

~~b.~~ Calcolare la risposta forzata e, se esiste, a regime permanente, all'ingresso

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \delta_{-1}(t)$$

a)

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s-2} & -2 \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s-2)} \end{pmatrix} = \overset{W'(s)}{\begin{pmatrix} \frac{3}{s-2} & 0 \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s-2)} \end{pmatrix}} + \overset{D}{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$W'(s) = \frac{\begin{pmatrix} 3(s+1) & 0 \\ s-2 & 1 \end{pmatrix}}{(s+1)(s-2)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s-2}$$

$$R_1 = \lim_{s \to -1} (s+1) \cdot W'(s) = \lim_{s \to -1} \frac{\begin{pmatrix} 3(s+1) & 0 \\ s-2 & 1 \end{pmatrix}}{s-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix} \qquad rk = 1 \qquad \lambda_1 = -1$$

$$R_2 = \lim_{s \to 2} (s-2) \cdot W'(s) = \lim_{s \to 2} \frac{\begin{pmatrix} 3(s+1) & 0 \\ s-2 & 1 \end{pmatrix}}{s+1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad rk = 2 \qquad \lambda_2 = 2$$

$$C_{2\times1} B_{1\times2} = R_1 \to \overset{C_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \overset{B_1}{\begin{pmatrix} 1 & -1/3 \end{pmatrix}} \qquad C_{2\times2} B_{2\times2} = R_2 \to \overset{C_2}{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}} \overset{B_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$U(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{s} = \begin{pmatrix} 1/s \\ -1/s \end{pmatrix}$$

$$Y_F(s) = W(s) \cdot U(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s-2} & -2 \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s-2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/s \\ -1/s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3s-3}{s(s-2)} \\ \frac{s-3}{s(s+1)(s-2)} \end{pmatrix}$$

$\nexists$ Y_{RP} PERCHÈ NON TUTTI GLI AUTOVAL HANNO $Re(\lambda_i) < 0$

b) $u(t)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\delta_{-1}(t) \quad \rightarrow \quad u(t)=\delta_{-1}(t) \Rightarrow U(s)=\frac{1}{s}$

$$y_F(s)=W'(s)\cdot U(s)=\frac{\begin{pmatrix}3(s+1) & 0\\ s-2 & 1\end{pmatrix}}{(s+1)(s-2)s}=\frac{R_1}{s+1}+\frac{R_2}{s-2}+\frac{R_3}{s}$$

$$R_1=\lim_{s\to -1}(s+1)\cdot y_F(s)=\lim_{s\to -1}\frac{\begin{pmatrix}3(s+1) & 0\\ s-2 & 1\end{pmatrix}}{(s-2)s}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 1/3\end{pmatrix}$$

$$R_2=\lim_{s\to 2}(s-2)\cdot y_F(s)=\lim_{s\to 2}\frac{\begin{pmatrix}3(s+1) & 0\\ s-2 & 1\end{pmatrix}}{(s+1)s}=\begin{pmatrix}3/2 & 0\\ 0 & 1/6\end{pmatrix}$$

$$R_3=\lim_{s\to 0}s\cdot y_F(s)=\lim_{s\to 0}\frac{\begin{pmatrix}3(s+1) & 0\\ s-2 & 1\end{pmatrix}}{(s+1)(s-2)}=\begin{pmatrix}-3/2 & 0\\ 1 & -1/2\end{pmatrix}$$

$$y_F(t)=\mathcal{L}^{-1}[y_F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_1}{s+1}+\frac{R_2}{s-2}+\frac{R_3}{s}\right]=\left[R_1e^{-t}+R_2e^{2t}+R_3\right]\delta_{-1}(t)$$

RICORDANDO CHE $u(t)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\delta_{-1}(t) \rightarrow$ $y_F(t)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\left[R_1e^{-t}+R_2e^{2t}+R_3\right]\delta_{-1}(t)$

POICHÈ ABBIAMO UN POLO POSITIVO $\nexists\ y_{RP}(t) \rightarrow y_{RP}(t)=\lim_{t\to\infty}y_F(t)=+\infty$

4 Discutere nel dettaglio le connessioni che sussistono tra eccitabilità e osservabilità dei modi e le proprietà di raggiungibilità ed osservabilità del sistema dato

CONSIDERANDO LA MATRICE $W(\tau)=\begin{cases} D & \tau=0 \\ C\Phi(\tau)B & \tau>0 \end{cases}$, NOTO IL SEGUENTE LEGAME:

$W(\tau)=\sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i \tau} C u_i v_i B$, DOVE Cu_i E $v_i B$ DEFINISCONO L'OSSERVABILITÀ E L'ECCITABILITÀ DEL MODO. QUINDI, AFFINCHÈ IL MODO POSSA APPARIRE NELLA FdT, IL MODO LEGATO A λ_i DEVE ESSERE SIA ECC CHE OSS.

OSSERVIAMO CHE UN SISTEMA NON INTERAMENTE RAGGIUNGIBILE PUÒ ESSERE MODELLATO NEL SEGUENTE MODO:

$$\tilde{A}=TAT^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad \tilde{B}=TB=\begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{C}=CT^{-1}=(C_1 \ \ C_2) \quad \tilde{D}=D$$

DOVE A_{11} È COMPOSTA DAI SOLI MODI ECCITABILI, A_{22} DA QUELLI NON ECCITABILI E $B_1 \neq 0$. TUTTO CIÒ VALE ANCHE PER L'OSSERVABILITÀ.

PER AVERE UN QUADRO COMPLETO DELLA RELAZIONE OSS-RAGG SI PUÒ USARE LA SCOMPOSIZIONE DI KALMAN, FORMANDO UN'OPPORTUNA MATRICE $T^{-1}=(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4)$:

$$\mathcal{X}_1=R\cap I,\ \mathcal{X}_2: \mathcal{X}_1\oplus\mathcal{X}_2=R,\ \mathcal{X}_3: \mathcal{X}_1\oplus\mathcal{X}_3=I,\ \mathcal{X}_4: \mathcal{X}_1\oplus\mathcal{X}_2\oplus\mathcal{X}_3\oplus\mathcal{X}_4=\mathbb{R}^n$$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \quad \tilde{B}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{C}=(0 \ \ C_2 \ \ 0 \ \ C_4) \quad \tilde{D}=0$$

UN SISTEMA CHE È COMPLETAMENTE SIA ECC CHE OSS HA TUTTI I MODI SIA ECC CHE OSS.