MOTO APERIODICO

MODELLO IMPLICITO

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = Ax(\tau) + Bu(\tau) \\ y(\tau) = Cx(\tau) + Du(\tau) \end{cases} \qquad \begin{matrix} x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R}^m \end{matrix}$$

MATRICI IMPLICITE

$A_{n \times n}$ = COEFFICIENTE DELLE x NELLE EQ. $\quad$ $B_{n \times m}$ = COEFFICIENTE DELLE u NELLE EQ.

$C_{p \times n}$ = COEFFICIENTE DELLE x NELLE y $\quad$ $D_{p \times m}$ = COEFFICIENTE DELLE u NELLE y

MODELLO ESPLICITO

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} H(t-\tau)u(\tau)\,d\tau \\ y(t) = \Psi(t-t_0)x(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau)\,d\tau \end{cases} \qquad \text{CON } x(\tau_0) = x_0$$

MATRICI ESPLICITE

$\Phi(\tau) = e^{A\tau} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i \tau} u_i v_i$ $\quad$ TRANSIZIONE

$H(\tau) = \Phi(\tau) \cdot B = e^{A\tau} \cdot B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i v_i \cdot B$ $\quad$ RISPOSTE IMPULSIVE NELLO STATO

$\Psi(\tau) = C \cdot \Phi(\tau) = C \cdot e^{A\tau} = \sum_{i=1}^{n} C \cdot \lambda_i u_i v_i$ $\quad$ TRASFORMAZIONE DELLE USCITE

$W(\tau) = C \cdot \Phi(\tau) B + D\delta(\tau) = C \cdot e^{A\tau} \cdot B = C \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i v_i \cdot B$ $\quad$ RISPOSTE IMPULSIVE NELL'USCITA

CALCOLO $e^{A\tau}$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \qquad A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, u_i v_i' \rightarrow \text{Dove } v_i' u_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} U \Lambda^k U^{-1} \frac{t^k}{k!} = U \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k t^k}{k!} \right) U^{-1} = U e^{\Lambda t} U^{-1} = U \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} U^{-1}$$

Criterio di diagonalizzabilità[1] – Consideriamo il caso di $\mathbb{R}^n$ e sia A una matrice $n \times n$; A è *diagonalizzabile se e solo se* una di queste condizioni è verificata:

- Esiste una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A.
- La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di A è uguale ad n e, per ogni autovalore, la sua molteplicità geometrica è uguale alla sua molteplicità algebrica.
- La somma delle molteplicità geometriche è proprio uguale ad n.

Si ricorda che la molteplicità geometrica è la dimensione del nucleo del sottospazio generato dall'equazione caratteristica $A - \lambda I = 0$; in simboli $\dim \ker(A - \lambda I)$.

EVOLUZIONI

LIBERA:

$$x_L(t) = \Phi(t)x_0 = e^{At}x_0 = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t}\, u_i v_i' x_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}\, u_i = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$v_i x_0 = c_i$

LIBERA IN USCITA:

$$y_L(t) = \Psi(t)x_0 = Ce^{At}x_0 = C\sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t}\, u_i \underbrace{v_i' x_0}_{c_i} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}\, C u_i$$

MODI NATURALI

OSSERVABILITÀ DI $\lambda_i \rightarrow Cu_i \neq 0$

ECCITABILITÀ DI $\lambda_i \rightarrow v_i B \neq 0$

	ECC	OSS
λ_1	SI/NO	SI/NO
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
λ_n	SI/NO	SI/NO
	$H(s)$	$\Psi(s)$

UN MODO NATURALE È COMPLETAMENTE OSSERVABILE (ECCITABILE), QUANDO È OSSERVABILE (ECCITABILE) $\forall$ SCELTA DI AUTOVETTORI CHE LO COMPONGONO

AUTOVETTORI

DESTRO (U): $[A - \lambda I]u = 0 \longrightarrow u = \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ z \end{pmatrix}$

SINISTRO (V'). $v'[A - \lambda I] = 0 \longrightarrow v' = (a \cdots z)$

MATRICI

$T^{-1}_{u \times u} = (u_1 \cdots u_n)$ $T_{n \times n} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

MATRICE INVERSA

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow M^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

CAMBIO COORDINATE

$$z = Tx \rightarrow x = zT^{-1} \rightarrow \begin{cases} \dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}z + \tilde{D}u \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \tilde{A} = TAT^{-1} & \tilde{B} = TB \\ \tilde{C} = CT^{-1} & \tilde{D} = D \end{matrix}$$

MOTO PSEUDOPERIODICO

AUTOVALORI COMPLESSI E CONIUGATI

$\lambda_i = \alpha \pm j w \in \mathbb{C}$

$\Phi(t) = e^{At} = e^{\alpha t}(\cos wt\,(u_a v'_a + u_b v'_b) + \sin wt\,(u_a v'_b - u_b v'_a))$ ← UNICA DIFFERENZA

$$e^{At} = e^{\alpha t}\left[\cos(\omega t)\,u_a v'_a + \sin(\omega t)\,u_a v'_b - \sin(\omega t)\,u_b v'_a + \cos(\omega t)\,u_b v'_b\right]$$

OSSERVABILITÀ DI λ_i: $\to C u_a \neq 0$ OPPURE $C u_b \neq 0$

ECCITABILITÀ DI λ_i: $\to v'_a B \neq 0$ OPPURE $v'_b B \neq 0$

NE BASTA UNO PER ENTRAMBI

$$\Psi(t) = Ce^{At} = e^{\alpha t}\left[\cos(\omega t)\,Cu_a v'_a + \sin(\omega t)\,Cu_a v'_b - \sin(\omega t)\,Cu_b v'_a + \cos(\omega t)\,Cu_b v'_b\right]$$

$$H(t) = e^{At}B = e^{\alpha t}\left[\cos(\omega t)\,u_a v'_a B + \sin(\omega t)\,u_a v'_b B - \sin(\omega t)\,u_b v'_a B + \cos(\omega t)\,u_b v'_b B\right]$$

$$W(t) = Ce^{At}B = e^{\alpha t}\left[\cos(\omega t)\,Cu_a v'_a B + \sin(\omega t)\,Cu_a v'_b B - \sin(\omega t)\,Cu_b v'_a B + \cos(\omega t)\,Cu_b v'_b B\right]$$

AUTOVETTORI DESTRI $(u = u_a \pm j u_b)$ $\to$ $A(u_a \;\; u_b) = (u_a \;\; u_b)\begin{pmatrix} \alpha & w \\ -w & \alpha \end{pmatrix}$

EVOLUZIONE LIBERA:

$$x_\ell(t) = e^{\alpha t}\left[(c_a \cos wt + c_b \sin wt)\,u_a + (-c_a \sin wt + c_b \cos wt)\,u_b\right]$$

$$\downarrow$$

$$c = c_b \pm j c_a \,,\quad c_a = v_a x_0 \,,\quad c_b = v_b x_0 \,,\quad m = \sqrt{c_a^2 + c_b^2} \,,\quad \varphi = tg^{-1}\left(\frac{c_a}{c_b}\right)$$

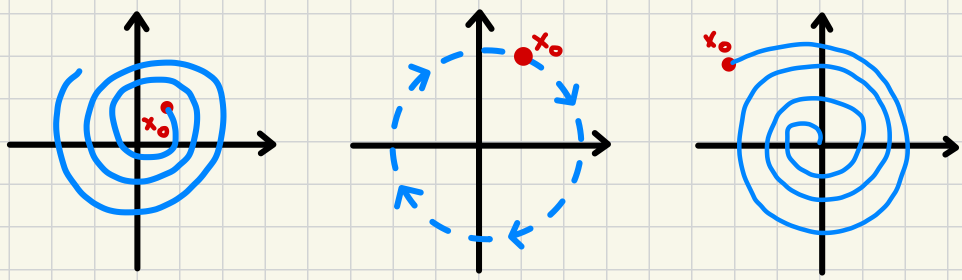
$$\downarrow$$

$$x_\ell(t) = m e^{\alpha t}\left(u_a \sin(wt + \varphi) + u_b \cos(wt + \varphi)\right)$$

TRAIETTORIE

REALI: $\lambda > 0$ DIVERGE, $\lambda = 0$ LIMITATA, $\lambda < 0$ CONVERGE

COMPLESSI: $\alpha > 0$ DIVERGE, $\alpha = 0$ LIMITATA, $\alpha < 0$ CONVERGE



SISTEMI A TEMPO DISCRETO

FORMA IMPLICITA

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

FORMA ESPLICITA

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t-\tau)u(\tau) \\ y(t) = \Psi(t-t_0)x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} W(t-\tau)u(\tau) \end{cases}$$

MATRICI ESPLICITE

$$\Phi(t) = A^t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^t u_i v_i'$$

$$\Psi(t) = CA^t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^t C u_i v_i'$$

$$H(t) = A^{t-1}B \ \ (\text{per } t \geq 1)$$

$$W(t) = \begin{cases} CA^{t-1}B, & t \geq 1 \\ D, & t = 0 \end{cases}$$

AUTOVALORI COMPLESSI

$$\alpha + j\omega \iff \rho e^{j\theta}$$

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}, \quad \theta = \arctan(\omega/\alpha)$$

$$\Lambda^t = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta & \rho\sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \rho^t\cos\theta t & \rho^t\sin\theta t \\ -\rho^t\sin\theta t & \rho^t\cos\theta t \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO ESEMPIO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \overset{A}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}} x(t) + \overset{B}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} u(t) \\ y(t) = \underset{C}{(0 \ \ 0 \ \ 1)} x(t) \end{cases}$$

$n=3$ A $\quad p=1$ B $\quad q=1$ C

CALCOLO AUTOVALORI E AUTOVETTORI:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)[(1-\lambda)^2+1] = (2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+2) = 0$$

$$\iff \lambda_1 = 2, \ \lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{-1} \iff \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 1+j, \ \lambda_3 = 1-j$$

λ_1:

$$(A - \lambda_1 I)u_1 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} u_1 = 0 \qquad u_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_{11} - u_{12} + u_{13} \\ u_{11} - u_{12} - u_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} u_{11} - u_{12} + u_{13} = 0 \\ u_{11} - u_{12} - u_{13} = 0 \end{cases} \rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

λ_2 (λ_3):

$$\begin{pmatrix} \alpha & w \\ -w & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 = \alpha_1 - \beta_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_2 - \beta_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_3 - \beta_3 \\ 2\beta_1 = \alpha_1 + \beta_1 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \alpha_2 + \beta_2 \\ \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = \alpha_3 + \beta_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\beta_1 = 0 \\ \beta_2 = -\alpha_3 \\ \beta_3 = \alpha_2 \\ \beta_1 = 0 \\ \beta_3 = \alpha_2 \\ \beta_2 = -\alpha_3 \end{cases}$$

$$v_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRICE A E $e^{A\tau}$:

ORA CHE ABBIAMO AUTOVAL E AUTOVET, CALCOLIAMO A:

$$A = U\Lambda U^{-1} = (u_1\ u_2\ u_3)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}(u_1\ u_2\ u_3)^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -j & j\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1+j & 0\\ 0 & 0 & 1-j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -j & j\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\lambda = \alpha + jw \rightarrow \begin{pmatrix}\alpha & w\\ -w & \alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$u_2 = u_a + ju_b = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + j\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow u_a = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad u_b = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$e^{A\tau} = Ue^{\Lambda\tau}U^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2\tau} & 0 & 0\\ 0 & e^{\tau}\cos\tau & e^{\tau}\sin\tau\\ 0 & -e^{\tau}\sin\tau & e^{\tau}\cos\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{DET}\left(\text{VEDI FORMULA}\right) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1'\\ v_a'\\ v_b'\end{pmatrix}$$

$$e^{A\tau} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2\tau} & 0 & 0\\ 0 & e^{\tau}\cos\tau & e^{\tau}\sin\tau\\ 0 & -e^{\tau}\sin\tau & e^{\tau}\cos\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

MODI NATURALI:

$$x_\ell(\tau) = c_1 e^{2\tau}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + me^{\tau}\left(\sin(\tau+\varphi)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \cos(\tau+\varphi)\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$$

ECC E OSS:

PER IL MODO APERIODICO:

$$Cu_1 = (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \qquad v_1'B = (1\ 0\ 0)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 1$$

PER IL MODO PSEUDOPERIODICO:

$$Cu_a = (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 1 \qquad Cu_b = (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$v_a'B = (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \qquad v_b'B = (1\ -1\ 0)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0$$

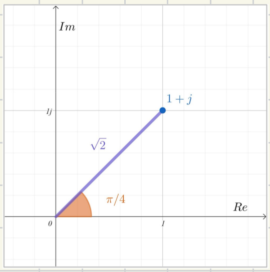
	ECC	OSS
λ_1	✓	✗
$\lambda_{2,3}$	✗	✓
	$H(\tau)$	$\Psi(\tau)$

CASO DISCRETO

$$\begin{cases} x(t+1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) \end{cases}$$

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = 1 + j = \rho e^{j\theta} = \sqrt{2}\, e^{j \pi/4}$



$\alpha = \rho\cos\theta = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 1$, $\omega = \rho\sin\theta = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 1$ $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{\tau} = U \Lambda^{\tau} U^{-1} = U \begin{pmatrix} 2^{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & \rho^{\tau}\cos\theta\tau & \rho^{\tau}\sin\theta\tau \\ 0 & -\rho^{\tau}\sin\theta\tau & \rho^{\tau}\cos\theta\tau \end{pmatrix} U^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}^{\tau}\cos\frac{\pi}{4}\tau & \sqrt{2}^{\tau}\sin\frac{\pi}{4}\tau \\ 0 & -\sqrt{2}^{\tau}\sin\frac{\pi}{4}\tau & \sqrt{2}^{\tau}\cos\frac{\pi}{4}\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

SISTEMI DISCRETI DI CAMPIONAMENTO

$$A_d = e^{AT_c} = U\, e^{\Lambda_R T_c}\, U^{-1} = U \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 T_c} & & & \\ & e^{\lambda_2 T_c} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n T_c} \end{pmatrix} U^{-1}$$

$$B_d = \int_{kT_c}^{(k+1)T_c} e^{A((k+1)T_c - \tau)} B \, d\tau = A^{-1}(e^{A\tau} - I)B$$

$C_d = C$ $\qquad$ $D_d = D$

STABILITÀ

PUNTI DI EQUILIBRIO

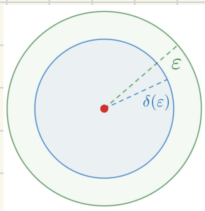
$$f(x_e, u_e) = 0$$

STUDIAMO CASI IN CUI L'INGRESSO È ZERO E LA CONDIZIONE INIZIALE È x_0 (VICINO A x_e) $\rightarrow$ $f(x_0, 0) = 0$

NON ESSENDO PUNTO DI EQ, x_0, IL SISTEMA SI EVOLVE, E SI PUÒ AVERE:

- STABILITÀ SEMPLICE $\rightarrow$ IL SISTEMA RESTA IN UN INTORNO DI x_e $(R_e(\lambda_i) \leq 0)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \text{t.c.} \ \|x_0 - x_e\| \leq \delta(\varepsilon) \ \Rightarrow \ \|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon, \ \forall t \geq 0$$



- STABILITÀ ASINTOTICA $\rightarrow$ IL SISTEMA TENDE A x_e $(R_e(\lambda_i) < 0)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \text{t.c.} \ \|x_0 - x_e\| \leq \delta(\varepsilon) \ \Rightarrow \ \|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon, \ \forall t \geq 0$$

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

- INSTABILITÀ $\rightarrow$ IL SISTEMA DIVERGE $(R_e(\lambda_i) > 0)$

SISTEMI LINEARI

IN UN SISTEMA LINEARE PUÒ ESISTERE STABILITÀ ASINTOTICA SOLO SE IL SISTEMA AMMETTE UNA SOLA SOLUZIONE ($x_e = 0$), ALTRIMENTI HA INFINITI PUNTI DI EQUILIBRIO E SI HA SOLO STABILITÀ SEMPLICE PERCHÈ x_0 NON PUÒ TENDERE AD OGNI x_e.

STABILITÀ ESTERNA

DATO UN SISTEMA "CHIUSO", SI HA STABILITÀ ESTERNA QUANDO AD OGNI PERTURBAZIONE LIMITATA NELL' INGRESSO u(t) DEL SISTEMA, SI HA CHE ANCHE L'USCITA y(t) SIA LIMITATA:

$$\forall \|u(t)\| \leq U, \quad \|y(t)\| \leq Y \quad \forall t \geq 0$$

$$\|y(t)\| = \|\Psi(t)\| \|x_0\| + \int_0^t \|W(t-\tau)\| \, d\tau \, U \leq Y \iff \begin{cases} \|\Psi(t)\| \leq \Psi_0 \\ \lim_{t \to +\infty} \|W(t)\| = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Re(\Lambda_o) \leq 0 \\ Re(\Lambda_{e,o}) < 0 \end{cases}$$

CRITERIO DI ROUTH

CONDIZIONE NECESSARIA È CHE I COEFFICIENTI DI $P(\lambda)$ SIANO POSITIVI

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}} \qquad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}$$

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	$\cdots$
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\cdots$	
$n-2$	b_1	b_2	$\cdots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
0					

SE C'È PERMANENZA DI SEGNO NELLA PRIMA COLONNA, TUTTI GLI AUTOVALORI HANNO PARTE REALE NEGATIVA. SE C'È ALMENO UNA VARIAZIONE SI HA UNA RADICE CON PARTE REALE POSITIVA E QUINDI INSTABILITÀ ($Re(\lambda_i) > 0$)

SE MOLTIPLICO O DIVIDO UNA RIGA PER UN $n > 0$ IL RISULTATO NON CAMBIA

5	1	1	2
4	1	1	2
3	0	0	
2	$*$		
1			
0			

SE HO UNA RIGA DI TUTTI ZERI DIVIDO IN DUE IL POLINOMIO:

$$p(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 2 \longrightarrow p(\lambda) = p_1(\lambda)\, p_2(\lambda)$$

$P_1(\lambda)$ È UN POLINOMIO CHE HA LE RADICI DELLA PARTE DELLA TABELLA COMPLETATA PRIMA DEGLI ZERI. $P_1(\lambda)$ SARÀ DI GRADO 1 CON UNA RADICE NEGATIVA (RIGA 5-4).

$P_2(\lambda)$ SARÀ DI GRADO 4 CON 5-1=4 RADICI, COMPOSTO SOLO DA POTENZE PARI, CON COEFFICIENTI I NUMERI DELLA RIGA PRECEDENTE AGLI ZERI:

$$p_2(\lambda) = 1\lambda^4 + 1\lambda^2 + 2 \longrightarrow \frac{dp_2(\lambda)}{d\lambda} = 4\lambda^3 + 2\lambda \longrightarrow$$

5	1	1	2
4	1	1	2
$3'$	4	2	
2	$\vdots$	$\vdots$	
1			
0			

APPROSSIMAZIONE SISTEMI NON LINEARI

$$\dot{x} = f(x,u) \approx f(x_e, 0) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_e \\ u=0}} (x - x_e) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_e \\ u=0}} u$$

CON $(x - x_e) = z$ $\longrightarrow$ $\dot{z} = Az + Bu$

$$\left(\left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_e \\ u=0}} \right) = A \qquad \left(\left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_e \\ u=0}} \right) = B$$

SE IL SISTEMA LINEARE CHE APPROSSIMA IL SISTEMA NON LINEARE È STABILE ASINTOTICAMENTE, ALLORA ANCHE IL SISTEMA NON LINEARE LO È. STESSA COSA PER L'INSTABILITÀ. NON SI PUÒ DIRE NIENTE PER LA STABILITÀ SEMPLICE.

CRITERIO DI LYAPUNOV

CRITERIO USATO PER GLI EQUILIBRI DEI SISTEMI NON LINEARI

$$V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$V(x_e) = 0, \quad V(x) > 0 \ \ \forall x \in I_{x_e}$$

DEFINITA POSITIVA

$$V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$V(x_e) = 0, \quad V(x) < 0 \ \ \forall x \in I_{x_e}$$

DEFINITA NEGATIVA

$$V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$V(x_e) = 0, \quad V(x) \geq 0 \ \ \forall x \in I_{x_e}$$

SEMIDEFINITA POSITIVA

$$V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$V(x_e) = 0, \quad V(x) \leq 0 \ \ \forall x \in I_{x_e}$$

SEMIDEFINITA NEGATIVA

SE SI RIESCE A TROVARE UNA FUNZIONE DEFINITA POSITIVA $V(x)>0$ TALE DA AVERE LA FUNZIONE DERIVATA DEFINITA NEGATIVA $\dot{V}(x)<0$, ALLORA IL PUNTO DI EQUILIBRIO È LOCALMENTE STABILE ASINTOTICAMENTE SE, DATA $V(x)>0$, LA SUA DERIVATA È $V(x) \leq 0$, ALLORA È SEMPLICEMENTE STABILE LOCALMENTE.

PER SISTEMI LINEARI → $\forall P > 0$ simmetrica $\exists Q > 0$ unica, simmetrica $\iff x_e = 0$ è stabile asintoticamente

STABILITÀ NEL TEMPO DISCRETO

SE $|\lambda_i| \leq 1$ PER TUTTI GLI AUTOVALORI, SI HA STABILITÀ SEMPLICE.
SE $|\lambda_i| < 1$ PER TUTTI GLI AUTOVALORI, SI HA STABILITÀ ASINTOTICA.

CRITERIO DI JURY

a_0	a_1	$\cdots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
b_0	b_1	$\cdots$	b_{n-2}	b_{n-1}	
b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	b_1	b_0	
c_0	c_1	$\cdots$	c_{n-2}		

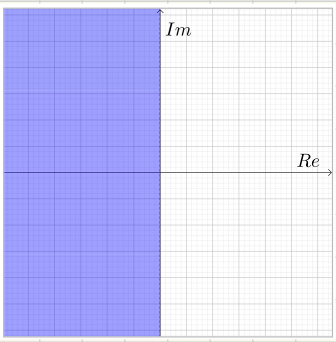
$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix} \quad b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{vmatrix} \quad b_{n-1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

SI CONTINUA FINCHÈ NON SI RAGGIUNGE UNA RIGA CON 3 ELEMENTI

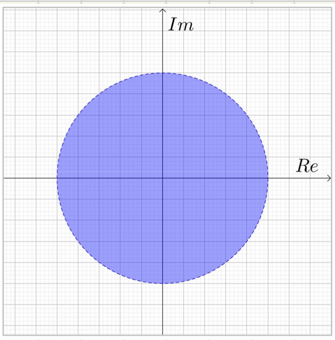
a_0	a_1	$\cdots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
b_0	b_1	$\cdots$	b_{n-2}	b_{n-1}	
b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	b_1	b_0	
c_0	c_1	$\cdots$	c_{n-2}		
c_{n-2}	c_{n-3}	$\cdots$	c_0		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
μ_0	μ_1	μ_2			

→
$$\begin{cases} |b_{n-1}| < |b_0| \\ |c_{n-2}| < |c_0| \\ |d_{n-3}| < |d_0| \\ \quad \vdots \\ |\mu_2| < |\mu_0| \end{cases}$$

SE VALGONO TUTTE, ALLORA TUTTE LE SOLUZIONI HANNO MODULO < 1, E IL SISTEMA È STABILE ASIN.



CRITERIO DI ROUTH
NEL TEMPO CONTINUO



CRITERIO DI JURY
NEL TEMPO DISCRETO

TRASFORMAZIONE DA CONTINUO A DISCRETO

$$s = \frac{z-1}{z+1}$$

APPROSSIMAZIONE SISTEMI NON LINEARI A TEMPO DISCRETO

$$f(x(t),u(t)) \approx f(x_e,0) + \underbrace{\frac{\partial f(x(t),u(t))}{\partial x(t)}\bigg|_{\substack{x=x_e\\u=0}}}_{A}(x(t)-x_e) + \underbrace{\frac{\partial f(x(t),u(t))}{\partial u(t)}\bigg|_{\substack{x=x_e\\u=0}}}_{B} u \implies x(t+1) = f(x_e,0) + A(x(t)-x_e) + Bu(t)$$

CON $z(t) = x(t) - x_e$ →

$$x(t+1) = z(t+1) - x_e = \underbrace{f(x_e,0)}_{x_e} + A(x(t)-x_e) \implies z(t+1) = Az(t)$$

SE IL SISTEMA LINEARE CHE APPROSSIMA IL SISTEMA NON LINEARE È STABILE ASINTOTICAMENTE, ALLORA ANCHE IL SISTEMA NON LINEARE LO È. STESSA COSA PER L'INSTABILITÀ. NON SI PUÒ DIRE NIENTE PER LA STABILITÀ SEMPLICE.

CRITERIO DI LYAPUNOV A TEMPO DISCRETO

SE SI RIESCE A TROVARE UNA FUNZIONE DEFINITA POSITIVA $V(x(t)) > 0$ TALE DA AVERE LA FUNZIONE $\Delta V(x(t)) < 0$ DEFINITA NEGATIVA, ALLORA IL PUNTO DI EQUILIBRIO È LOCALMENTE STABILE ASINTOTICAMENTE SE, DATA $V(x(t)) > 0$, $\Delta V(x(t)) \leq 0$, ALLORA È SEMPLICEMENTE STABILE LOCALMENTE.

$$\Delta V(x(t)) = V(x(t+1)) - V(x(t))$$

NEL CASO LINEARE → $A'QA - Q < 0 \iff$ il punto di equilibrio è stabile

TRASFORMATA DI LAPLACE

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt \qquad f(t) \longleftrightarrow F(s)$$

$$\begin{cases} X(s) = (sI-A)^{-1}x(0) + (sI-A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

→ $Y(s) = C(sI-A)^{-1}x(0) + \left[C(sI-A)^{-1}B + D\right]U(s)$

MATRICI

$$\Phi(s) = (sI-A)^{-1} \qquad \Psi(s) = C\Phi(s) = C(sI-A)^{-1}B$$

$$H(s) = \Phi(s)B = (sI-A)^{-1}B \qquad W(s) = C\Phi(s)B + D = C(sI-A)^{-1}B + D$$

TRASFORMATE ELEMENTARI

f(t)	$F(s)$	*Condizioni*
$\delta(t)$	1	
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$Re(s) > Re(a)$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$Re(s) > 0$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$Re(s) > 0$
$\delta_{-1}(t)$	$\frac{1}{s}$	$Re(s) > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$Re(s) > 0$
$\frac{t^k}{k!}$	$\frac{1}{s^{k+1}}$	$Re(s) > 0$

PER L'ESPONENZIALE VALE LA PROPRIETÀ:

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}[e^{at}\sin\omega t] = \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}[e^{at}\cos\omega t] = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$$

CALCOLO DEI RESIDUI

RAZIONALI STRETTAMENTE PROPRIE:

IL DENOMINATORE È DI PRIMO GRADO

$$W(s)=\frac{1}{s+1} \qquad u(t)=\delta_{-1}(t)\rightarrow U(s)=\frac{1}{s} \qquad W(s)U(s)=\frac{1}{s(s+1)}=\frac{R_1}{s}+\frac{R_2}{s+1}$$

R_1: MOLTIPLICO PER s E FACCIO IL $\lim$

$$\lim_{s\to 0}\frac{s}{s(s+1)}=\lim_{s\to 0}\left(\frac{sR_1}{s}+\frac{sR_2}{s+1}\right)\rightarrow 1=R_1+\lim_{s\to 0}\frac{sR_2}{s+1}\rightarrow R_1=1$$

R_2: MOLTIPLICO PER $s+1$ E FACCIO IL $\lim$

$$\lim_{s\to -1}\frac{s+1}{s(s+1)}=\lim_{s\to -1}\left(\frac{(s+1)R_1}{s}+\frac{(s+1)R_2}{s+1}\right)\rightarrow \lim_{s\to -1}\frac{1}{s}=R_2+\lim_{s\to -1}\frac{(s+1)R_1}{s}\rightarrow R_2=-1$$

DENOMINATORE DI GRADO MAGGIORE A 1:

$$F(s)=\frac{s-10}{s^3(s+2)}=\frac{R_{11}}{s^3}+\frac{R_{12}}{s^2}+\frac{R_{13}}{s}+\frac{R_2}{s+2}$$

$$R_{11}:\ \lim_{s\to 0}\frac{s^3(s-10)}{s^3(s+2)}=\lim_{s\to 0}\frac{s-10}{s+2}=-5=R_{11}$$

$$R_{12}:\ \lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left(\frac{s^3(s-10)}{s^3(s+2)}\right)=\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left(\frac{s-10}{s+2}\right)=\lim_{s\to 0}\left(\frac{12}{(s+2)^2}\right)=\frac{12}{4}=3=R_{12}$$

R_{13}: SE SI DERIVA K VOLTE, SI DIVIDE PER $K!$

$$\frac{1}{2}\lim_{s\to 0}\frac{d^2}{d^2s}\left(\frac{s^3(s-10)}{s^3(s+2)}\right)=\frac{1}{2}\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left(\frac{12}{(s+2)^2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{s\to 0}\left(-\frac{24}{(s+2)^3}\right)=-\frac{3}{2}=R_{13}$$

$$R_2:\ \lim_{s\to -2}\frac{(s+2)(s-10)}{s^3(s+2)}=\lim_{s\to -2}\frac{s-10}{s^3}=\frac{3}{2}=R_2$$

COMPLESSI:

$$F(s)=\frac{10}{(s+1)(s^2+1)}=\frac{10}{(s+1)(s+j)(s-j)}=\frac{R_1}{s+1}+\frac{R_2}{s+j}+\frac{R_3}{s-j} \qquad \text{CON } R_3=R_2^*$$

$$R_1:\ \lim_{s\to -1}\frac{10(s+1)}{(s+1)(s+j)(s-j)}=\lim_{s\to -1}\frac{10}{(s+j)(s-j)}=5=R_1$$

$$R_2:\ \lim_{s\to -j}\frac{10(s+j)}{(s+1)(s+j)(s-j)}=\lim_{s\to -j}\frac{10}{(s+1)(s-j)}=-\frac{5}{1+j}=R_2 \qquad R_3=R_2^*=-\frac{5}{1-j}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_1}{s+1}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_2}{s+j}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_3}{s-j}\right]=R_1e^{-t}+R_2e^{-jt}+R_2^*e^{jt}$$

$$R_2e^{-jt}+R_2^*e^{jt}=(R_{2a}+jR_{2b})e^{-jt}+(R_{2a}-jR_{2b})e^{jt}=R_{2a}(e^{-jt}+e^{jt})+jR_{2b}(e^{-jt}-e^{jt})$$

$$=2R_{2a}\left(\frac{e^{-jt}+e^{jt}}{2}\right)+2jR_{2b}\left(\frac{e^{-jt}-e^{jt}}{2}\right)=2R_{2a}\cos t+2R_{2b}\sin t$$

TRASFORMATA ZETA

POSSIAMO VEDERLA COME LA TRASFORMATA DI LAPLACE NEL TEMPO DISCRETO

$$F(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t) z^{-t} \qquad \begin{matrix} f(t) \\ t \in \mathbb{Z} \end{matrix} \longleftrightarrow \begin{matrix} F(z) \\ z \in \mathbb{C} \end{matrix}$$

FORMA ESPLICITA

$$\begin{cases} X(z) = (zI - A)^{-1} z x_0 + (zI - A)^{-1} B U(z) \\ Y(z) = C(zI - A)^{-1} z x_0 + C(zI - A)^{-1} B U(z) \end{cases}$$

MATRICI

$$Z[\Phi(t)] = \Phi(z) = z(zI - A)^{-1}$$
$$Z[H(t)] = z^{-1}\Phi(z)B = (zI - A)^{-1}B$$

$$Z[\Psi(t)] = C(zI - A)^{-1} z$$
$$Z[W(t)] = \begin{cases} Z[CA^{t-1}B], & t \geq 1 \\ Z[D], & t = 0 \end{cases} = \begin{cases} C(zI - A)^{-1}B, & t \geq 1 \\ D, & t = 0 \end{cases}$$

TRASFORMATE ELEMENTARI

$f(t)$	$F(z)$	*Condizioni*
$\delta(t)$	1	
$\delta_{-1}(t)$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
a^t	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$\sin\theta t$	$\frac{z\sin\theta}{z^2 - 2z\cos\theta + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\cos\theta t$	$\frac{z^2 - z\cos\theta}{z^2 - 2z\cos\theta + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\rho^t \sin\theta t$	$\frac{\frac{z}{\rho}\sin\theta}{\left(\frac{z}{\rho}\right)^2 - 2\frac{z}{\rho}\cos\theta + 1}$	$\lvert z\rvert > 1$ $\lvert z\rvert > \lvert\rho\rvert$

VALGONO INOLTRE LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

$$Z[f(t+1)] = zF(z) - zf(0)$$

$$Z[f(t-1)] = z^{-1} Z[f(t)]$$

ANTITRASFORMATA

ES 1:

$$F(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+1)} \qquad \bar{F}(z) = \frac{1}{z}F(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)} = \frac{R_1}{z-1} + \frac{R_2}{z+1}$$

$$R_{1/2}: \lim_{z \to 1} \frac{z}{z+1} = R_1 = \frac{1}{2} = R_2 \rightarrow F(z) = z\bar{F}(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{z}{z+1}$$

$$Z^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2} Z^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right] + \frac{1}{2} Z^{-1}\left[\frac{z}{z+1}\right] = \frac{1}{2} 1^t + \frac{1}{2}(-1)^t$$

ES 2:

$F(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)}$ LA SVILUPPIAMO IN FRATTI SEMPLICI $F(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z+1}$

MA NON CONOSCENDO L'ANTITRASFORMATA DI $\frac{1}{z \pm 1}$ MOLTIPLICHIAMO PER z

$$zF(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{z}{z+1} \rightarrow Z^{-1}[zF(z)] = f(t+1) = \frac{1}{2}1^t + \frac{1}{2}(-1)^t$$

DA CUI SI RICAVA $f(t) = \frac{1}{2}1^{t-1} + \frac{1}{2}(-1)^{t-1}$

ANTITRASFORMARE EVOLUZIONI FORZATE E LIBERE

$$x_F(z) = H(z)U(z) \implies x_F(t) = Z^{-1}[x_F(z)]$$

$$y_F(z) = W(z)U(z) \implies y_F(t) = Z^{-1}[y_F(z)]$$

NELLA RISPOSTA FORZATA SI DISTINGUONO DUE PARTI: UNA CHE DIPENDE DAL SISTEMA E UNA DALL'INGRESSO

RISPOSTA A REGIME PERMANENTE

$\exists$ SOLO SE $\Psi(t) \to 0$, CIOÈ SOLO SE I POLI HANNO $Re(\lambda) < 0$ (SISTEMA STABILE)

$$\lim_{t_0 \to -\infty} y(t) = \lim_{t_0 \to -\infty} \left(\Psi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau)\, d\tau \right) = \lim_{t_0 \to -\infty} \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau)\, d\tau \rightarrow y_{RP}(t) = \int_{-\infty}^{t} W(t-\tau)u(\tau)\, d\tau$$

INGRESSI.

$$u(t) = \delta_{-1}(t) \rightarrow y_{RP}(t) = W(s)|_{s=0}$$

$$u(t) = t \rightarrow y_{RP}(t) = tW(s)|_{s=0} + \left[\frac{d}{ds}W(s)\right]_{s=0}$$

$$u(t) = \frac{t^k}{k!} \rightarrow y_{RP}(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{t^{k-i}}{i!\,(k-i)!} \left[\frac{d^i}{ds^i}W(s)\right]_{s=0} = \sum_{i=0}^{k} \frac{t^{k-i}}{(k-i)!}\, c_i$$

$$u(t) = e^{at} \rightarrow y_{RP}(t) = e^{at}W(s)|_{s=a}$$

$$u(t) = \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \rightarrow y_{RP}(t) = \frac{e^{j\omega t}W_s(j\omega) - e^{-j\omega t}W_s(-j\omega)}{2j} = \frac{e^{j\omega t}\,|W_s(j\omega)|\, e^{j\angle W_s(j\omega)} - e^{-j\omega t}\,|W_s(-j\omega)|\, e^{j\angle W_s(-j\omega)}}{2j} = |W_s(j\omega)|\, \sin\left(\omega t + \angle W_s(j\omega)\right)$$

ES 1:

$$W(s) = \frac{1}{s+1} \qquad u(t) = \frac{t^2}{2} + t$$

$$y_{RP}(t) = \frac{t^2}{2}c_0 + tc_1 + c_2 + tc_0 + c_1 =$$

$$= \frac{t^2}{2} W(s)\Big|_{s=0} + t\,\frac{dW(s)}{ds}\Big|_{s=0} + \frac{1}{2}\frac{d^2W(s)}{d^2s}\Big|_{s=0} + t\,W(s)\Big|_{s=0} + \frac{dW(s)}{ds}\Big|_{s=0} =$$

$$= \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} + t - 1 = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}$$

ES 2:

$$W(s) = \frac{1}{s+1} \qquad u(t) = t^3 = \frac{t^3}{3!} \cdot 3!$$

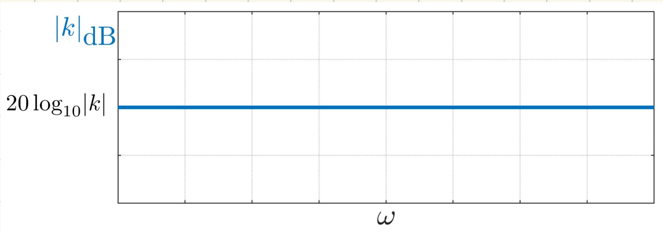
$$y_{RP}(t) = \left(\frac{t^3}{3!}c_0 + \frac{t^2}{2!}c_1 + tc_2 + c_3\right) \cdot 3! = t^3c_0 + 3t^2c_1 + 6tc_2 + 6c_3$$

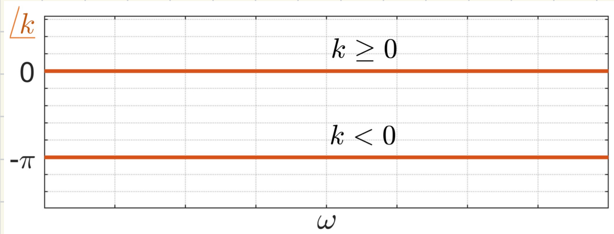
DIAGRAMMA DI BODE

$$W_s(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega} = \left.\frac{n(s)}{d(s)}\right|_{s=j\omega} = \left.\frac{k_1(\ )\dots(\ )}{k_2(\ )\dots(\ )}\right|_{s=j\omega} \rightarrow W(s) = K\frac{\left(1-\frac{s}{s_1}\right)\left(1-\frac{s}{s_2}\right)\dots\left(1-\frac{s}{s_n}\right)}{\left(1-\frac{s}{s_{n+1}}\right)\left(1-\frac{s}{s_{n+2}}\right)\dots\left(1-\frac{s}{s_{2n}}\right)}$$

CONVIENE PORTARSI TUTTE LE COSTANTI FUORI COSÌ CHE $W(0)=K$

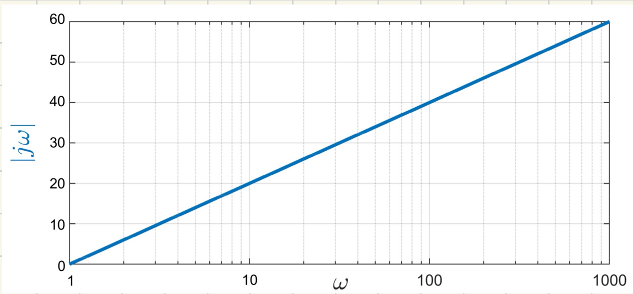
K (GUADAGNO):

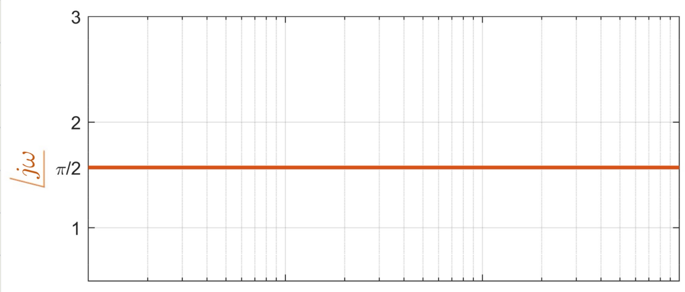




SE $K=-10 \rightarrow |K|_{dB} = 20\log_{10}|k| = 20$, $\angle K = -\pi$

S (MONOMIO):



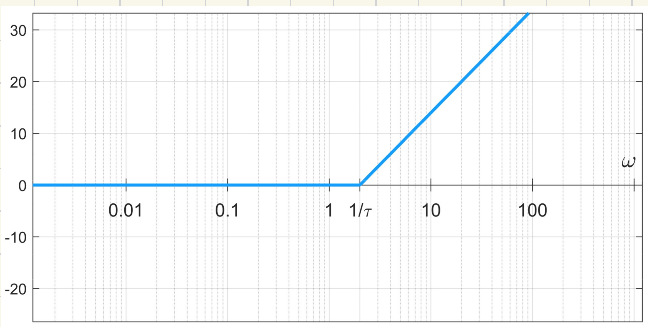


AUMENTA DI 20dB PER DECADE

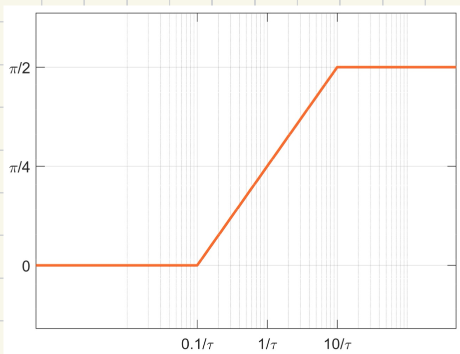
S^n (POTENZA):

BASTA SOMMARE TUTTE LE RETTE $S_1 \dots S_n$ TRA LORO. SE HO S^2, NEL MODULO AVRÒ UNA RETTA CHE SALE A 40 dB (-40dB) E NELLA FASE ANDRÀ A π ($-\pi$). QUESTO VALE PER QUALSIASI TERMINE.

$1+\tau s$ (BINOMIO):



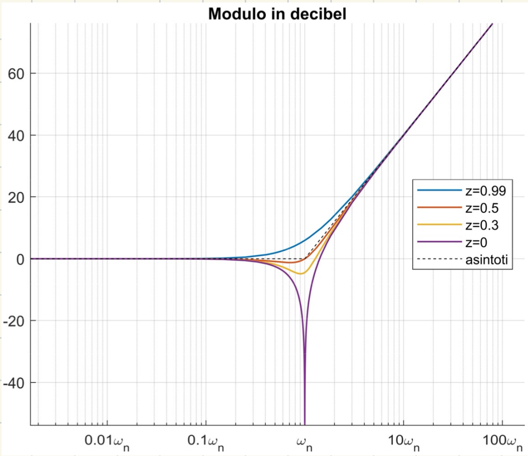
PUNTO DI ROTTURA: $\left|\frac{1}{\tau}\right|$

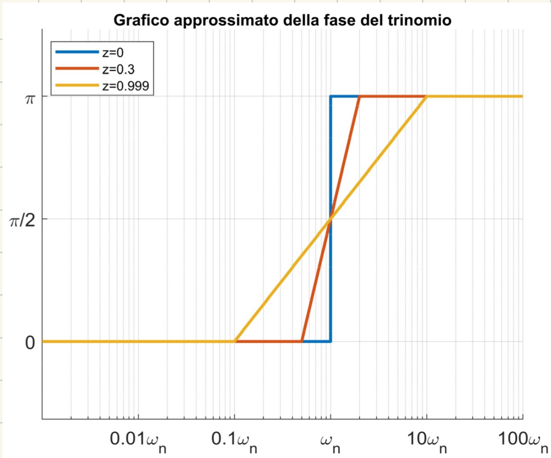


DA UNA DECADE PRIMA A QUELLA DOPO FINO A $\frac{\pi}{2}$

$s^2 + 2s\omega_n\xi + \omega_n^2$ (TRINOMIO):

$1 \pm 2\xi \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}$ $\quad 0 \le \xi < 1 \quad$ PUNTO DI ROTTURA: ω_n $\quad \xi = z =$ SMORZAMENTO



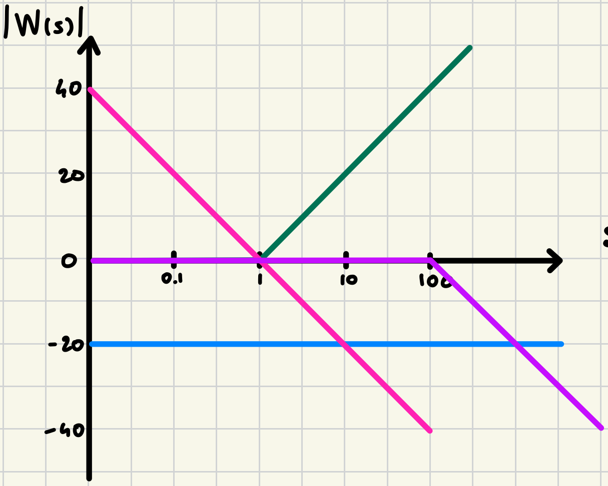


SE È $1 - 2\xi \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}$ SI RIBALTA ESSENDOCI IL -, SI RIBALTA ANCHE SE È A DENOMINATORE. QUINDI SE È A DENOMINATORE E C'È UN - NON SI RIBALTA.

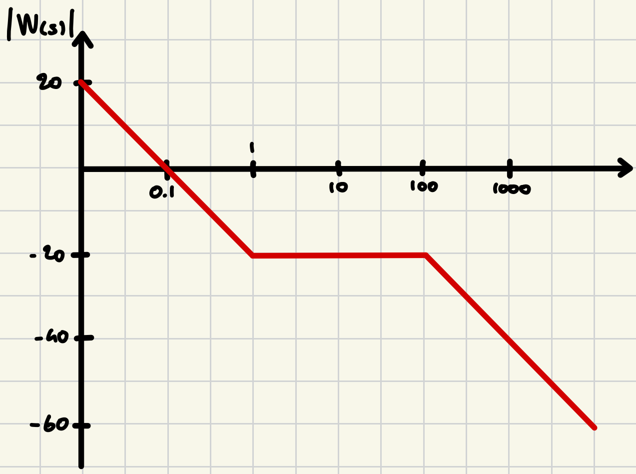
ES: $W(s) = \frac{10(s-1)}{s(s+100)}$ $\quad$ ∄ Y_{RP} E RISPOSTA ARMONICA POICHÈ GLI AUTOVAL NON HANNO TUTTI $Re(\lambda) < 0$.

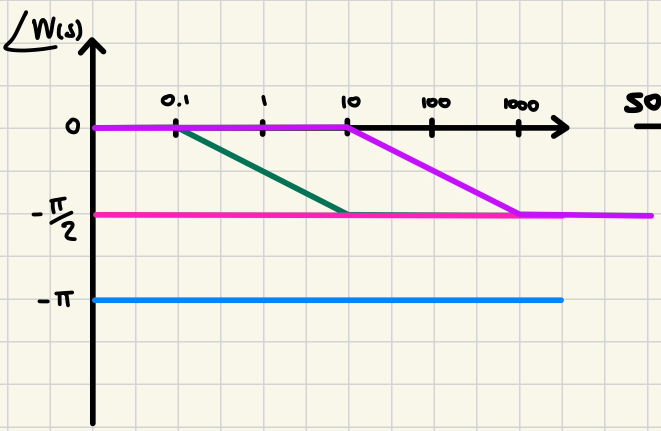
$$W(s) = \frac{-10(1-s)}{100s\left(1+\frac{s}{100}\right)} = -\frac{1}{10}\,\frac{(1-s)}{s\left(1+\frac{s}{100}\right)}$$

$$20\log_{10}|10^{-1}| = -20$$

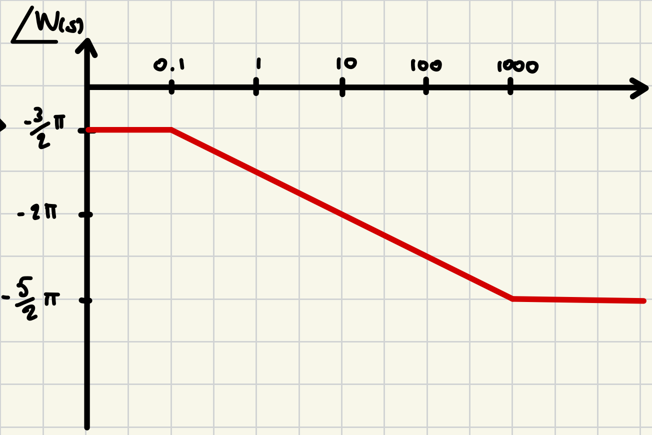


SOMMA



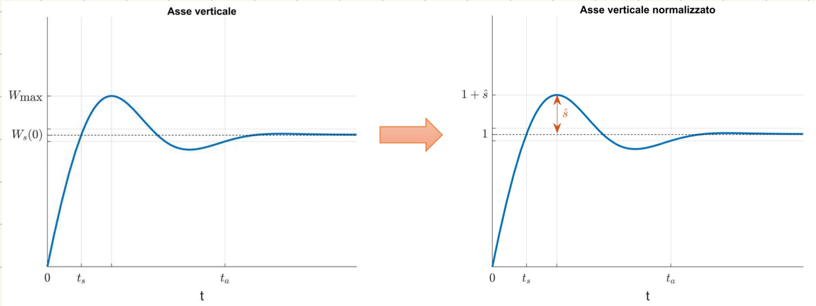


SOMMA



RISPOSTA INDICIALE

SI HA QUANDO IN INGRESSO HO UN GRADINO: $u(\tau) = \delta_{-1}(\tau)$



<u>TEMPO DI SALITA (τ_s)</u>: PRIMO ISTANTE IN CUI L'USCITA RAGGIUNGE $W_s(0)$

<u>TEMPO DI ASSESTAMENTO (τ_a)</u>: PRIMO ISTANTE IN CUI L'USCITA ENTRA E RESTA NEL MARGINE D'ERRORE

<u>SOVRAELONGAZIONE</u> $\hat{s} := \dfrac{W_{\max}}{W_s(0)}$: QUANTO SI DISCOSTA W_{MAX} DA $W_s(0)$

BANDA PASSANTE

SE IN INGRESSO NON ABBIAMO UN GRADINO NON POSSIAMO USARE τ_s PER MISURARE LA RAPIDITÀ DEL SISTEMA A RISPONDERE NELL'USCITA.

ALLORA DICIAMO CHE UN SISTEMA È RAPIDO QUANDO RIESCE A RISPONDERE BENE ANCHE A PULSAZIONI ELEVATE. SE L'INGRESSO HA FREQUENZA BASSA IL SISTEMA HA MOLTO TEMPO PER RISPONDERE, AL CONTRARIO, FREQUENZA ALTA, IL SISTEMA PUÒ NON FARE IN TEMPO.

PER MISURARE QUESTA RAPIDITÀ, NEL DIAGRAMMA DI BODE SI PRENDE IL VALORE IN DECIBEL DEL GUADAGNO, $W_s(0)_{dB}$, E SI CONSIDERANO -3dB. IL PRIMO VALORE DI W PER CUI $|W_s(jw)|$ È UGUALE A $W_s(0)_{dB}$ -3dB, SI CHIAMA BANDA PASSANTE (B_3). PIÙ È BASSO τ_s E PIÙ È ALTO B_3.

$$B_3 t_s \simeq 3$$

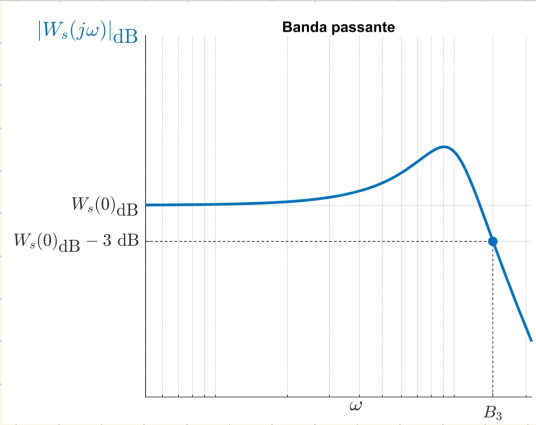
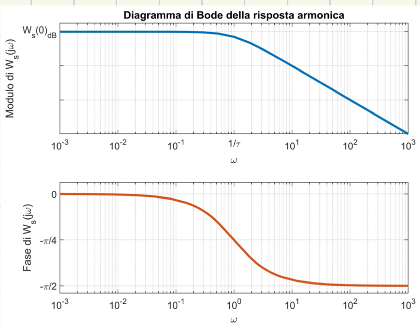
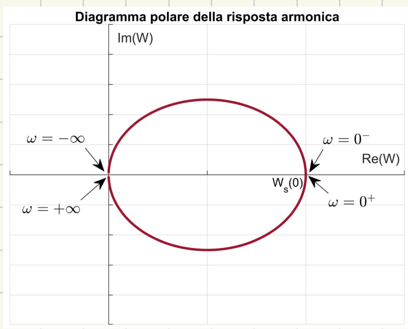


DIAGRAMMA POLARE

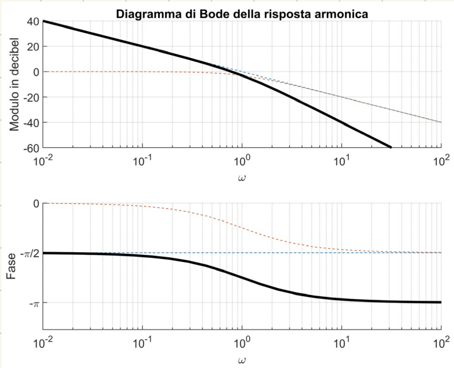
SI TRACCIA AL VARIARE DI MODULO E FASE

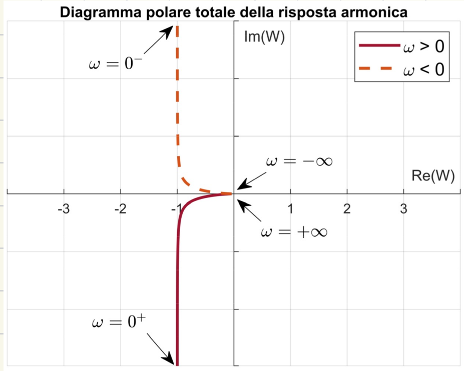
ES1: $W(s) = \dfrac{1}{s+1}$



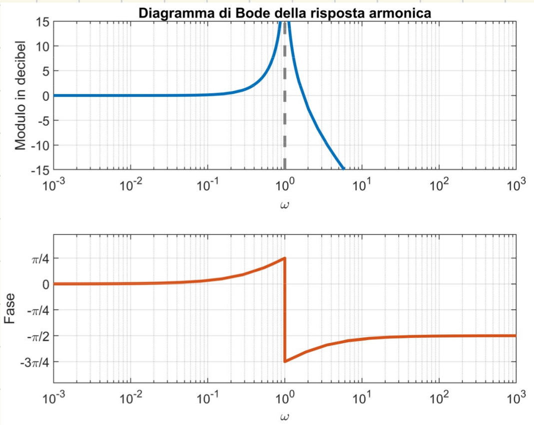


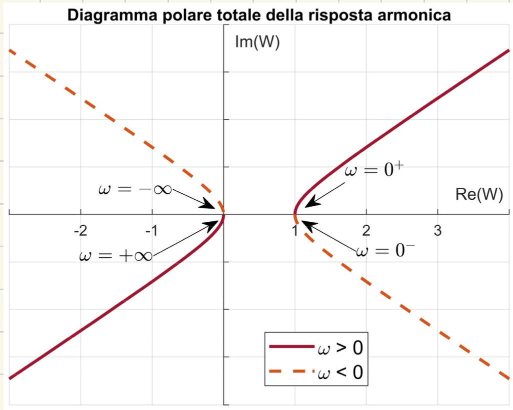
ES 2: $W(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$





ES 3: $W(s) = \dfrac{s+1}{s^2+1}$





STATI INDISTINGUIBILI E INOSSERVABILI

DUE SISTEMI CON CONDIZIONI INIZIALI DIVERSE HANNO STESSA EVOLUZIONE SE:

$$y_a(t) - y_b(t) = \Psi(t)x_{0a} + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)\,d\tau - \left(\Psi(t)x_{0b} + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)\,d\tau\right)$$

$$\implies \quad 0 = \Psi(t)x_{0a} - \Psi(t)x_{0b}$$

$$\rightarrow \quad y_a(t) = y_b(t) \quad \iff \quad \Psi(t)(x_{0a} - x_{0b}) = 0$$

LA DIFFERENZA DI DUE STATI INDISTINGUIBILI $(x_{0a} - x_{0b})$ SI CHIAMA STATO INOSSERVABILE x_I

$$\Psi(t)(x_{0a} - x_{0b}) = \Psi(t)x_I = Ce^{At}x_I \equiv 0 \quad \forall t \geq 0$$

$$\mathcal{I} = \left\{ x_I \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x_I = 0 \right\} = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$$

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x_I = 0$$

NEL TEMPO DISCRETO SI HA LO STESSO RISULTATO:

$$\Psi(t)(x_{0a} - x_{0b}) = 0 \quad \iff \quad Ox_I = 0$$

PROPRIETÀ STRUTTURALI

OSSERVABILITÀ:

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \qquad \mathcal{I} = \mathrm{Ker}(O) \qquad m = \dim\mathrm{Ker}(O)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{T} \begin{cases} \dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}x + \tilde{D}u \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \overbrace{\tilde{A}_{11}}^{m} & \overbrace{\tilde{A}_{12}}^{n-m} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}m \\ \}n-m \end{matrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = (\underbrace{0}_{m} \quad \underbrace{\tilde{C}_2}_{n-m})$$

$$\tilde{A} = TAT^{-1} \qquad \tilde{B} = TB$$
$$\tilde{C} = CT^{-1} \qquad \tilde{D} = D$$

SOLO $\tilde{A}_{22}$ È OSSERVABILE $\rightarrow$ $W(s) = \tilde{C}_2(sI - \tilde{A}_{22})^{-1}\tilde{B}_2 + \tilde{D}$

$$z = Tx \longrightarrow T^{-1} = \left(\underbrace{\text{vettori di base di } \mathcal{I}}_{m} \;\middle|\; \underbrace{\text{completamento}}_{n-m} \right) \qquad z_I = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ES:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = (1 \quad -1 \quad 0)x \end{cases}$$

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rk}\, O = 2$$

$$\mathrm{DIM\,KER}(O) = 3 - \mathrm{rk}\,O = 1 = m$$

$$Ov = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} v_1 - v_2 = 0 \\ -v_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{I} = \mathrm{KER}(O) = \mathrm{SPAN}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad T^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C} = CT^{-1} = (1 \quad -1 \quad 0) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = (0 \mid -1 \quad 0) = (0 \quad \tilde{C}_2)$$

$\lambda_1 = 1$ NON OSS, $\lambda_2 = 0$ E $\lambda_3 = -1$ OSS PERCHÈ IN $\tilde{A}_{22}$

RAGGIUNGIBILITÀ:

UNO STATO $\hat{x}$ SI DICE RAGGIUNGIBILE ALL'ISTANTE T PARTENDO DA x_0 SE $\exists$ UN INGRESSO u TALE CHE:

$$\hat{x}(T) = \Phi(T)x_0 + \sum_{\tau=0}^{T-1} H(T-\tau)u(\tau)$$

SE $\hat{x}$ È RAGGIUNGIBILE DA $x_0 = 0$, ALLORA È RAGGIUNGIBILE DA QUALSIASI x_0

$R := (B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B)$ $\qquad x_R \in Im(R) = \mathcal{R}$

R È LA MATRICE LA CUI Imm(R) CONTIENE TUTTI GLI STATI RAGGIUNGIBILI

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{C} = (\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2)$$

$\tilde{A} = TAT^{-1} \qquad \tilde{B} = TB$

$\tilde{C} = CT^{-1} \qquad \tilde{D} = D$

SOLO $\tilde{A}_{11}$ È RAGGIUNGIBILE $\rightarrow$ $W(s) = \tilde{C}_1(sI - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1 + \tilde{D}$

$z = Tx \rightarrow$ $T^{-1} = (\text{vettori di base di } \mathcal{R} \mid \text{completamento})$

ES:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -5/7 & 1/7 & -2/7 \\ -2/7 & 6/7 & 2/7 \\ -6/7 & 4/7 & -1/7 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} x \end{cases}$$

$R = (B \quad AB \quad A^2B) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad rkR = 1$

$\mathcal{R} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ $\qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & \frac{1}{14} & -\frac{1}{7} \\ \hline 0 & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right) \qquad \tilde{B} = TB = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right) \qquad \tilde{C} = CT = \left(2 \mid -\tfrac{1}{7} \quad \tfrac{2}{7}\right)$$

$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_{2,3} \rightarrow \det(\tilde{A}_{22} - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{6}{7} - \lambda & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} - \lambda \end{vmatrix} \rightarrow \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 0$

$\lambda_1 = -1$ RAGGIUNGIBILE PERCHÈ NON COMPARE IN $\tilde{A}_{22}$ MA SOLO IN $\tilde{A}_{11}$

SCOMPOSIZIONE DI KALMANN

METTE IN EVIDENZA LA STRUTTURA INTERNA DEL SISTEMA GRAZIE A INOSS E RAGG

$\mathcal{I} = \text{span}\{v_1, \dots, v_s\}$

$\mathcal{R} = \text{span}\{w_1, \dots, w_r\}$

$\chi_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I}$	stati raggiungibili e inosservabili
$\chi_2 : \ \chi_2 \oplus \chi_1 = \mathcal{R}$	stati raggiungibili e non inosservabili
$\chi_3 : \ \chi_3 \oplus \chi_1 = \mathcal{I}$	stati non raggiungibili e inosservabili
$\chi_4 : \ \chi_4 \oplus \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 = \mathbb{R}^n$	stati non raggiungibili e non inosservabili

$T^{-1} = \left(\text{base di } \chi_1 \mid \text{base di } \chi_2 \mid \text{base di } \chi_3 \mid \text{completamento}\right)$ $\qquad z = Tx$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\tilde{A}_{11}} & \boxed{\tilde{A}_{12}} & \boxed{\tilde{A}_{13}} & \boxed{\tilde{A}_{14}} \\ \boxed{0} & \boxed{\tilde{A}_{22}} & \boxed{0} & \boxed{\tilde{A}_{24}} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\tilde{A}_{33}} & \boxed{\tilde{A}_{34}} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\tilde{A}_{44}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \boxed{\tilde{B}_1} \\ \boxed{\tilde{B}_2} \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \left(\boxed{0} \quad \boxed{\tilde{C}_2} \quad \boxed{0} \quad \boxed{\tilde{C}_4}\right)$$

$\tilde{A}_{11}$: $\qquad\qquad \tilde{A}_{22}$ OSS E RAGG

$\tilde{A}_{33}$: NON OSS E NON RAGG $\qquad \tilde{A}_{44}$:

ESERCIZIO

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = (1 \quad -2 \quad -1)x \end{cases}$$

$n=3$

$p=1$ INGRESSO

$q=1$ USCITA

AUTOVALORI:

$$\det|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & -2 \\ 2 & -4-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(1-\lambda)(\lambda^2+4\lambda+2) + (-1)^{1+2}(-3)(-2\lambda-2) +$$

$$+(-1)^{1+3}(-2)(2-\lambda-4) =$$

$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda + 2 - 6 - 6\lambda - 4 + 2\lambda + 8 =$$

$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda \Rightarrow \lambda(-\lambda^2 - 3\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = -2$

AUTOVETTORI DESTRI.

$$(A - \lambda_i I)u_i = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} u_a - 3u_b - 2u_c = 0 \\ 2u_a - 4u_b - 2u_c = 0 \\ -u_a + u_b = 0 \end{cases} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} 2u_a - 3u_b - 2u_c = 0 \\ 2u_a - 3u_b - 2u_c = 0 \\ -u_a + u_b + u_c = 0 \end{cases} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = -2 \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{pmatrix} = 0$$

PRIMA COLONNA + SECONDA COLONNA = 0

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

AUTOVETTORI SINISTRI:

$$U = (u_1 \quad u_2 \quad u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad V = U^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{matrix}$$

EVOLUZIONE LIBERA:

$$x_L(t) = \Phi(t)x_0 = e^{At}x_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} u_i = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c_i = v'_i x_0$$

TUTTI MODI APERIODICI PERCHÈ NON COMPAIONO TERMINI COMPLESSI.
e^{-t} E e^{-2t} TENDONO A ZERO, MENTRE IL PRIMO NO PERCHÈ COSTANTE.
SE VOLESSIMO $x_L(t) \rightarrow 0$ ALLORA $c_1 = v'_1 x_0 = 0$

ECC E OSS:

$$C u_1 = (1\ -2\ -1)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0 \qquad v'_1 B = (1\ -1\ -1)\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = 1$$

$$C u_2 = (1\ -2\ -1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \qquad v'_2 B = (1\ -1\ 0)\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = 1$$

$$C u_3 = (1\ -2\ -1)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = -1 \qquad v'_2 B = (-1\ 2\ 1)\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = 0$$

	ECC	OSS
λ_1	✓	×
λ_2	✓	×
λ_3	×	✓
	$H(z)$	$\Psi(z)$

STABILITÀ DEL SISTEMA:

STABILE SEMPLICEMENTE PERCHÈ $Re(\lambda_i) \leq 0$

PER AVERE STABILITÀ ESTERNA DEVE ESSERE Ψ LIMITA E W CONVERGENTE.
CIOÈ $Re(\lambda_o) \leq 0$ E $Re(\lambda_{e,o}) < 0$, SODDISFATTI ENTRAMBI

RAGGIUNGIBILITÀ:

$$R = (B\ \ AB\ \ A^2B) = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

SE HA rk PIENO TUTTI GLI STATI SONO RAGGIUNGIBILI, ALTRIMENTI SOLO $Imm(R)$ CONTIENE GLI STATI RAGGIUNGIBILI

IN QUESTO CASO rk B = 2 → $\dim(\mathcal{R}) = 2$ → $\mathcal{R} = \text{SPAN}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

INOSSERVABILITÀ:

$$O = \begin{pmatrix}C\\CA\\CA^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -2 & 4 & 2\\ 4 & -8 & -4\end{pmatrix}$$

rk O = 1 → $\dim KER(O) = \dim \mathcal{I} = 2$

SOMMANDO LA PRIMA E LA TERZA COLONNA SI OTTIENE ZERO
SOMMANDO LA SECONDA E -2 VOLTE LA TERZA SI OTTIENE ZERO

$$\mathcal{I} = \text{SPAN}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

SOTTOSPAZI DI KALMAN.

$\mathcal{X}_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I}$:

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ COMPARE IN ENTRAMBI, VEDIAMO SE GLI ALTRI VANNO BENE

$$rk(V_1\ V_2\ V_3) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix} = 2 \quad \text{OPPURE} \quad \begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix} = 0$$

SIGNIFICA CHE GLI ALTRI 2 VETTORI SONO DIPENDENTI E NE SCEGLIAMO UNO SOLO IN PIÙ

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I} = \text{SPAN}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

$\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 = \mathcal{R}$: MA $\mathcal{X}_1 = \mathcal{R}$ GIÀ, QUINDI $\mathcal{X}_2 = \text{SPAN}\{0\}$

$\mathcal{X}_3 = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{I}$: MA $\mathcal{X}_1 = \mathcal{R} = \mathcal{I}$, QUINDI $\mathcal{X}_3 = \text{SPAN}\{0\}$

$\mathcal{X}_4 = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 = \mathbb{R}^3$:

DEVO FAR AUMENTARE IL rk $\mathcal{X}_1$ DI UNO. AGGIUNGO $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ INDIPENDENTE DAGLI ALTRI.

$$\mathcal{X}_4 = \text{SPAN}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$T^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad\quad}^{\mathcal{X}_1} & \mathcal{X}_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRICI PARTIZIONATE DEL SISTEMA:

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overbrace{}^{2} & \overbrace{}^{0} & \overbrace{}^{0} & \overbrace{}^{1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\tilde{A}_{11}} & \boxed{\tilde{A}_{12}} & \boxed{\tilde{A}_{13}} & \boxed{\tilde{A}_{14}} \\ \boxed{0} & \boxed{\tilde{A}_{22}} & \boxed{0} & \boxed{\tilde{A}_{24}} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\tilde{A}_{33}} & \boxed{\tilde{A}_{34}} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\tilde{A}_{44}} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l})\,2 \\ )\,0 \\ )\,0 \\ )\,1 \end{array}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \boxed{\tilde{B}_1} \\ \boxed{\tilde{B}_2} \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} \begin{array}{l})\,2 \\ )\,0 \\ )\,0 \\ )\,1 \end{array}, \quad \tilde{C} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \tilde{C}_2 & 0 & \tilde{C}_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\tilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_{44} = \lambda_3$$

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right) \qquad \tilde{C} = CT^{-1} = (1 \ -2 \ -1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

ESERCIZIO

$$W(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$

IPOTIZZIAMO TUTTO RAGG E OSS, COSÌ PARLIAMO DI STABILITÀ.
$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2 \rightarrow Re(\lambda_i) < 0$ QUINDI SISTEMA STABILE ASINT.

RISPOSTA FORZATA:

$$u(t) = t + 1 \rightarrow U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \qquad y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[W(s)U(s)]$$

$$Y_F(s) = W(s)U(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right) = \frac{(s-1)}{s^2(s+2)} = \frac{R_1}{s+2} + \frac{R_{21}}{s^2} + \frac{R_{22}}{s}$$

$$R_1 = \lim_{s \to -2} \frac{s-1}{s^2} = -\frac{3}{4} \ / \ R_2 = \lim_{s \to 0} \frac{s-1}{s+2} = -\frac{1}{2} \ / \ R_3 = \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds}\left(\frac{s-1}{s+2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_1}{s+2} + \frac{R_{21}}{s^2} + \frac{R_{22}}{s}\right] = \underbrace{-\frac{3}{4}e^{-2t}}_{\text{SISTEMA}} \underbrace{- \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}}_{\text{INGRESSO}}$$

RISPOSTA A REGIME PERMANENTE:

$\exists$ PERCHÉ $Re(\lambda_i)<0$

$u(t) = t + 1 = u_1(t) + u_2(t)$

$$y_{RP}(t) = y_{RP_1}(t) + y_{RP_2}(t) = \underbrace{W(s)\big|_{s=0}\, t + \left[\frac{d}{ds} W(s)\right]\Big|_{s=0}}_{y_{RP1}} + \underbrace{W(s)\big|_{s=0}}_{y_{RP2}} =$$

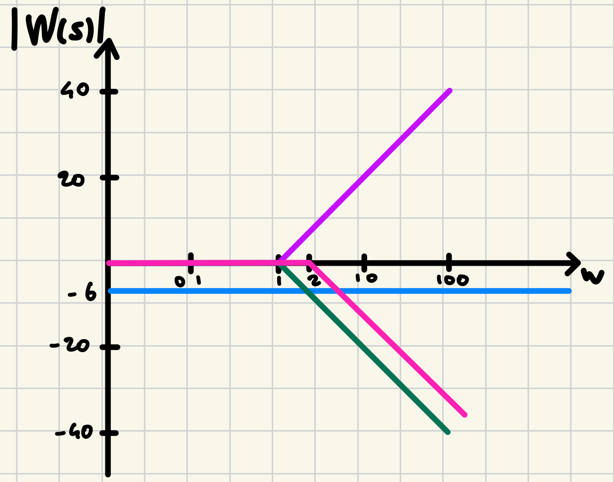
$$= -\frac{1}{2} t + \frac{5}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} t + \frac{3}{4}$$

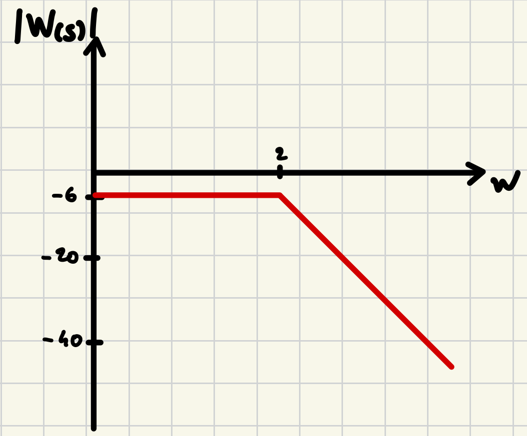
RISPOSTA ARMONICA:

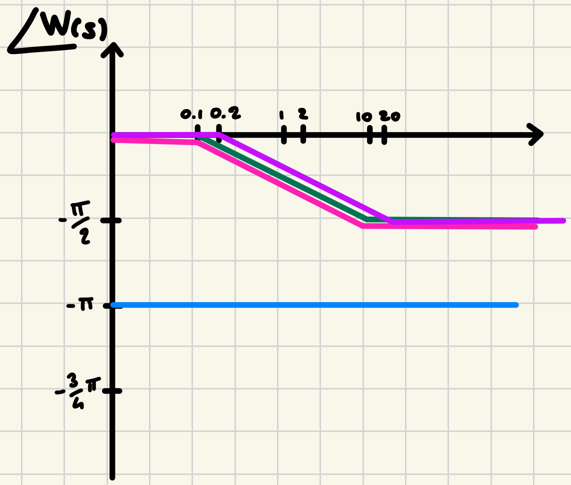
DATO CHE IL SISTEMA AMMETTE y_{RP} ALLORA $W(s)\big|_{s=j\omega}$ È RISPOSTA ARMONICA.

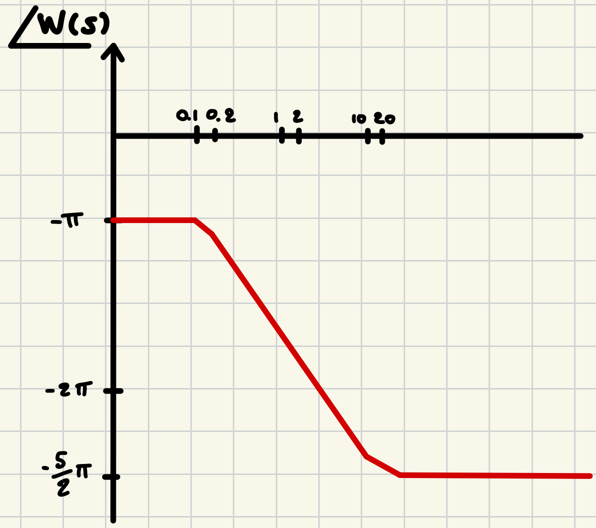
$$W(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} = -\frac{1}{2} \frac{(1-s)}{(1+s)(1+s/2)}$$

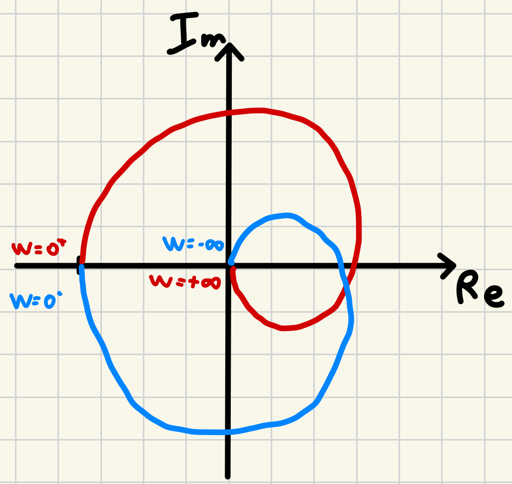
$20 \log_{10} |k| \approx -6dB$











REALIZZAZIONE

DATO $K(s)$, NUCLEO, SE RIUSCIAMO A TROVARE LE QUATTRO MATRICI CHE RAPPRESENTANO UNO SPAZIO DI STATO, ALLORA ABBIAMO UNA REALIZZAZIONE, LA CUI SOLUZIONE È (n, A, B, C, D).

$$K(s) = W(s) = \underbrace{\underbrace{C(sI - A)^{-1}B}_{\text{strett. propria}} + D}_{\text{propria}} \qquad \underset{n\times n}{A}, \ \underset{n\times p}{B}, \ \underset{q\times n}{C}, \ \underset{q\times p}{D}$$

FORMA CANONICA RAGGIUNGIBILE

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

DIM $A_R = np$

$$C = (b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_{n-1}) \qquad D_R = D$$

$$K(s) = W(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

R TUTTO RAGGIUNGIBILE $\rightarrow$

$$R = (B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \star & \star \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \star & & \star & \star \\ 1 & \star & \star & & \star & \star \end{pmatrix}$$

FORMA CANONICA OSSERVABILE

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & & -a_2 \\ & & \ddots & 0 & & \vdots \\ & & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ & & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}_{n\times n} \qquad B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

DIM $A_O = nq$

$$C = (0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1)_{1\times n}, \qquad D_O = D$$

$$K(s) = W(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

O TUTTO OSSERVABILE $\rightarrow$

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \star \\ 0 & \cdots & 1 & \star & \star \\ & \iddots & & & \\ 1 & \star & \cdots & \star & \star \end{pmatrix}$$

ES.

$$K(s) = \frac{\begin{pmatrix} s & 0 & 1 \\ 1 & s+1 & 0 \end{pmatrix}}{s^2+1} = \frac{\overset{B_0}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} + \overset{B_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} s}{s^2+1}$$

STRETTAMENTE PROPRIA

$q = 2 \quad p = 3 \quad n = 2$

DIM $A_R = np = 6$

$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_0 & 0 & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & -a_0 & 0 & 0 & -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_R = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

DIM $A_O = nq = 4$

$$A_O = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_O = (0 \quad 1) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

CONVIENE SCEGLIERE LA FORMA CON DIM MINORE, QUINDI IL MINORE TRA p E q

ALGORITMO DI GILBERT

SI USA SOLO SE $K(s)$ HA POLI SEMPLICI E SI SVILUPPA IN RESIDUI. CON QUESTO METODO TROVIAMO LA REALIZZAZIONE MINIMA

$$K(s) = \frac{n_K(s)}{(s-s_1)^1 + \cdots + (s-s_n)^1}, \quad \text{con } s_1 \neq s_2 \neq \cdots \neq s_n$$

$$A_G = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda_2 \ \lambda_q & \\ & & & & & & \ddots \ \lambda_q \end{pmatrix} \qquad B_G = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_q \end{pmatrix} \qquad C_G = (C_1 \cdots\cdots C_q) \qquad D_G = D$$

ES:

$$K(s) = \frac{\begin{pmatrix} s+1 & 0 & s-1 \\ 0 & s+1 & s+1 \end{pmatrix}}{(s-1)(s+1)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s-1}, \qquad p=3 \quad q=2$$

$$R_1 = \lim_{x \to -1} (s+1) \frac{\begin{pmatrix} s+1 & 0 & s-1 \\ 0 & s+1 & s+1 \end{pmatrix}}{(s-1)(s+1)} = \lim_{x \to -1} \frac{\begin{pmatrix} s+1 & 0 & s-1 \\ 0 & s+1 & s+1 \end{pmatrix}}{(s-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \lim_{x \to 1} \frac{\begin{pmatrix} s+1 & 0 & s-1 \\ 0 & s+1 & s+1 \end{pmatrix}}{(s+1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

SE $K(s)$ È UNA $W(s)$ ALLORA ABBIAMO DUE AUTOVALORI (DAI POLI):

$\lambda_1 = -1$ CON $\mu = 1$ PERCHÈ $rk(R_1) = 1$

$\lambda_2 = 1$ CON $\mu = 2$ PERCHÈ $rk(R_2) = 2$

$$A_G = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$C_1 B_1 = R_1 \rightarrow R_1$ È UN 2×3 QUINDI C_1 $2 \times rk(R_1)$ E B_1 $rk(R_1) \times 3$

$rk(R_1) = 1$

$$\overset{C_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \overset{B_1}{(0 \ 0 \ 1)} = \overset{R_1}{(0 \ 0 \ 1)}$$

$C_2 B_2 = R_2 \rightarrow R_2$ È UN 2×3 QUINDI C_2 $2 \times rk(R_2)$ E B_2 $rk(R_2) \times 3$

POICHÈ $rk(R_2) = 2$ SCEGLIAMO $C_2 = I$ (SEMPRE PER UNA QUADRATA) E $B_2 = R_2$

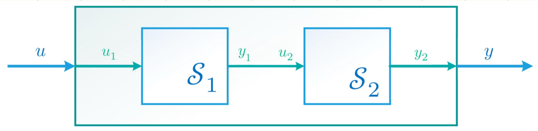
$$\overset{C_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{B_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} = \overset{R_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

QUINDI LE MATRICI SONO:

$$A_G = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

INTERCONNESSIONI

IN SERIE



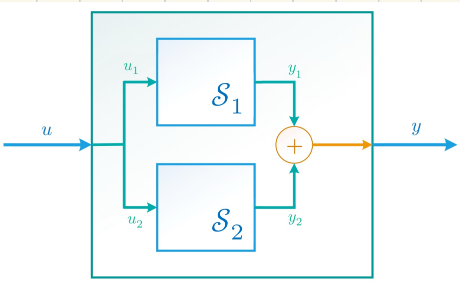
$$\begin{cases} u_1 = u \\ u_2 = y_1 \\ y_2 = y \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 + B_2 D_1 u \\ y = C_2 x_2 + D_2 C_1 x_1 + D_2 D_1 u \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{pmatrix}, \quad C = (D_2 C_1 \quad C_2), \quad D = D_2 D_1$$

A_1 E A_2 AUTOVALORI

SE AVESSIMO LE DUE FUNZIONI W(S) AVREMMO → $W(s) = W_2(s) W_1(s)$

IN PARALLELO



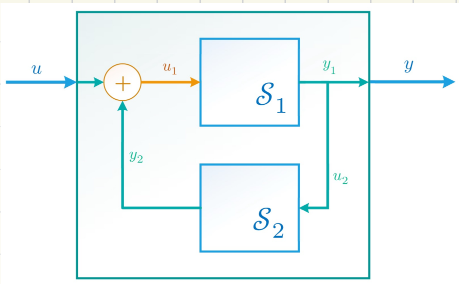
$$\begin{cases} u = u_1 = u_2 \\ y = y_1 + y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ y = C_1 x_1 + C_2 x_2 + (D_1 + D_2) u \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad C = (C_1 \quad C_2), \quad D = D_1 + D_2$$

A_1 E A_2 AUTOVALORI

SE AVESSIMO LE DUE FUNZIONI W(S) AVREMMO → $W(s) = W_1(s) + W_2(s)$

IN RETROAZIONE



$$\begin{cases} u_1 = u + y_2 \\ y = y_1 \\ y_2 = y_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = (A_1 + B_1 D_2 C_1) x_1 + B_1 C_2 x_2 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 \\ y = C_1 x_1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 D_2 C_1 & B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (C_1 \quad 0), \quad D = 0$$

AUTOVALORI. DET(A)

SE AVESSIMO LE DUE FUNZIONI W(S) AVREMMO → $W(s) = \left(I - W_1(s) W_2(s)\right)^{-1} W_1(s)$

FORMULA DI MASON

$$S = \frac{\sum_i \Delta_i P_i}{\Delta}$$

- P_i, indica la trasferenza dell' i-esimo cammino, privo di cicli, da u a y ;
- Δ, detto discriminante del grafo, è dato da

$$\Delta = 1 - (-1)^{k+1} \sum_k \sum_j P_j^k$$

con P_j^k prodotto di k trasferenze d'anello di anelli che non si toccano;

- Δ_i, indica Δ privato di tutti i prodotti di trasferenze che sono toccati da P_i.