

# Fondamenti di Comunicazioni

Corso: Fondamenti di comunicazioni e Internet (canale I e II)  
E Telecomunicazioni

Lezione 4-5: correlazione, convoluzione, filtri + esercitazione

Tiziana Cattai  
email: [tiziana.cattai@uniroma1.it](mailto:tiziana.cattai@uniroma1.it)



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

# Valore medio di un segnale e di una sequenza

## Segnale a durata finita

Il valore medio di un segnale continuo  $x(t)$  è calcolato come l'integrale del segnale diviso per la sua durata totale  $T=b-a$ :

- $$\mu_x^I = \frac{1}{T} \int_a^b x(t) dt$$

Definizione analoga per una sequenza:

- $$\mu_x^I = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n$$

## Segnale a durata infinita

- $$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

- Definizione analoga per una sequenza

- $$\mu_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{-N}^N x_n$$

# Energia di un segnale

- Definition:  $\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \geq 0$        $\varepsilon_x = \sum_n |x_n|^2$
- Definition: **Energy signal:**  $0 < \mathcal{E}_x < +\infty$
- Definition: **Impulsive signal**  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$

# Potenza di un segnale

✓ Def: 
$$P_x = \lim_{\Delta t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} |x(t)|^2 dt \geq 0$$

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^N |x_n|^2$$

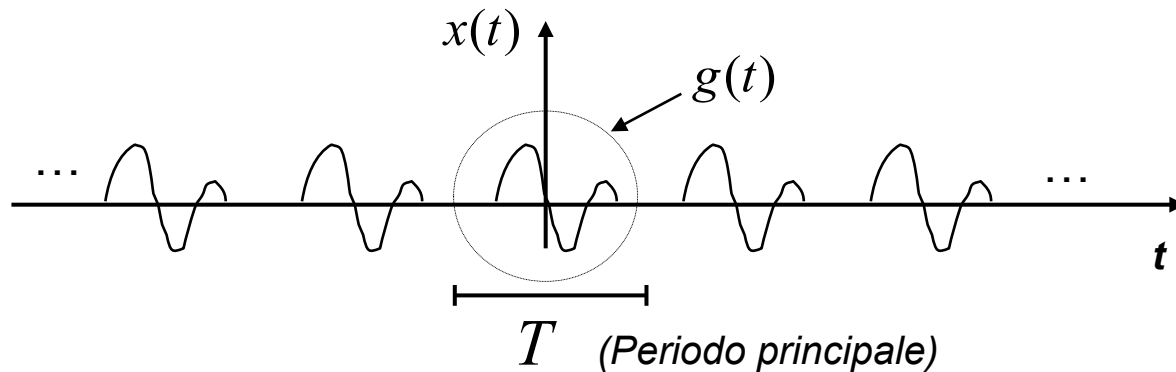
✓ Def: Power signal  $0 < P_x < +\infty$

**Constant:**  $x(t) = c$

$$P_x = \lim_{\Delta t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} |c|^2 dt = |c|^2 \lim_{\Delta t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Delta t} \Delta t = |c|^2$$

# Segnale periodico

$$x(t) = x(t + nT) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \rightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t - nT) \quad T \equiv \text{periodo}$$



- ✓ Potenza di un segnale periodico

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

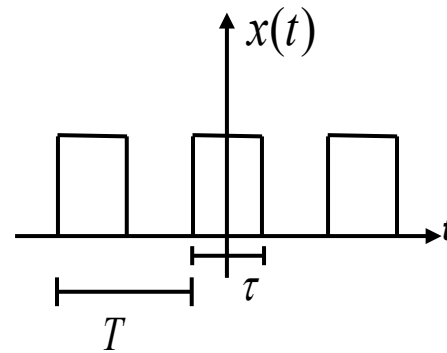
- ✓ Un segnale periodico è un segnale di potenza

# Segnali periodici

## Treno di “impulsi” rettangolari:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \text{rect}_{\tau}(t - nT)$$

$$\tau / T \equiv \text{"duty cycle"} \leq 1$$



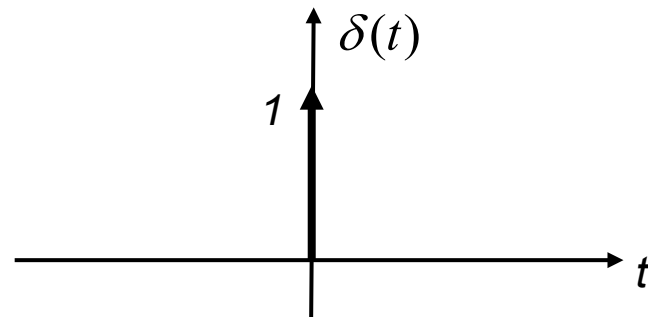
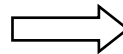
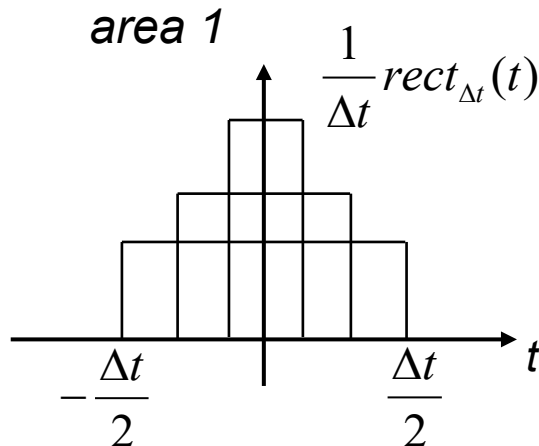
$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [\text{rect}_{\tau}(t - nT)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1^2 dt = \frac{1}{T} \left( \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2} \right) = \frac{\tau}{T}$$

# Impulso matematico

- ✓ E' un segnale di durata brevissima (al limite, zero) e di ampiezza elevatissima (al limite, infinita) con integrale unitario in un intervallo comprendente l'origine unitario

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{\Delta t} \text{rect}_{\Delta t}(t)}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$



# Proprietà dell'impulso matematico

- ✓  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$  (l'impulso matematico ha area unitaria)
- ✓  $\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t - t_0) dt = 1,$  per ogni  $\varepsilon > 0$
- ✓  $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$  (proprietà di campionamento)



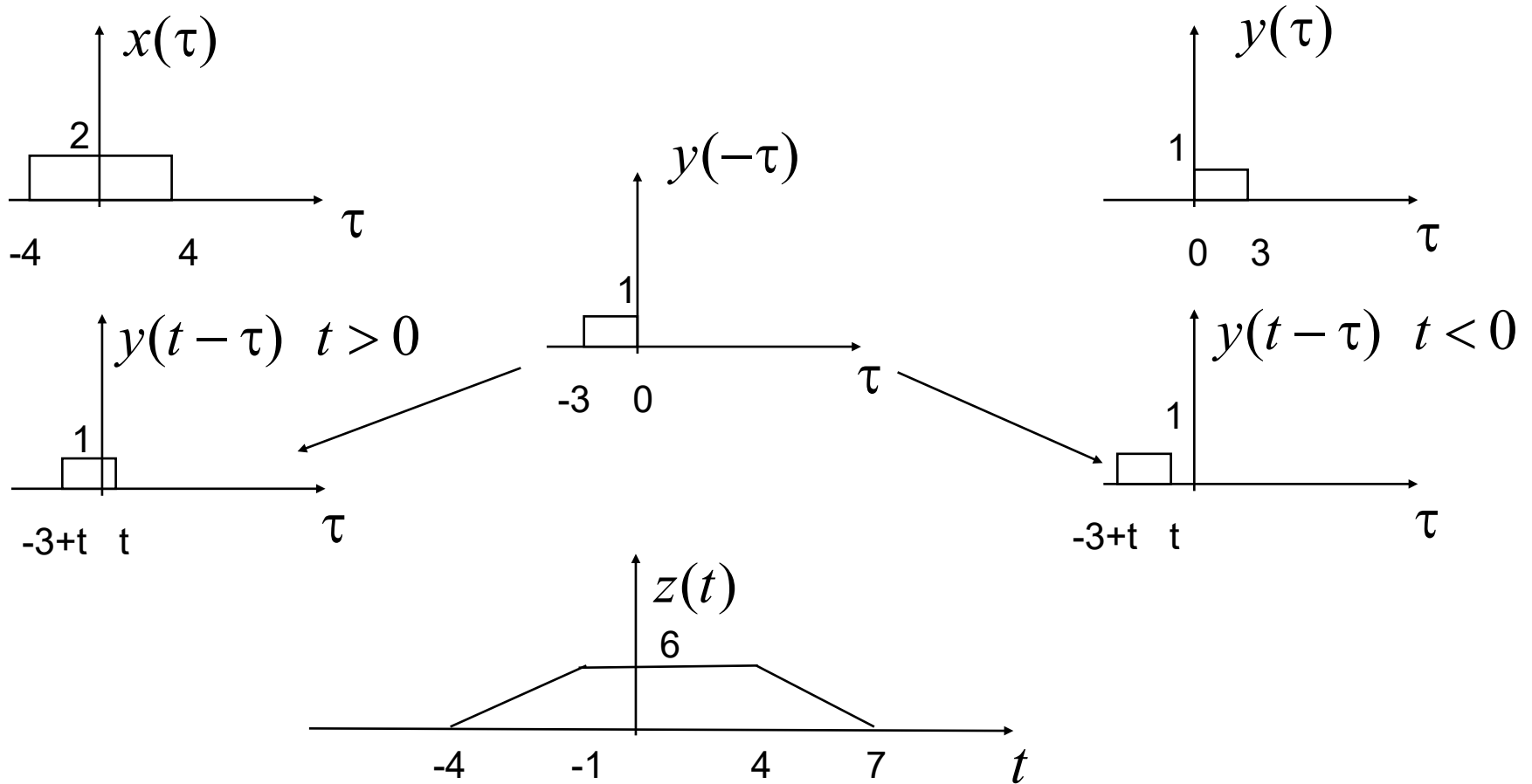
# Convoluzione: Definizione e calcolo

✓ Def: 
$$\varphi_{xy}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau = x(t) * y(t)$$

$$\varphi_n = \sum_k x_k y_{n-k}$$

1. Graficare i due segnali  $x(\cdot)$  e  $y(\cdot)$  come funzioni di  $\tau$  ottenendo così  $x(\tau)$  ed  $y(\tau)$
2. Ribaltare il segnale  $y(\tau)$  rispetto all'asse delle ordinate ottenendo  $y(-\tau)$
3. Traslare  $y(-\tau)$  della quantità  $t$  lungo l'asse  $\tau$ . Quando  $t > 0$  allora  $y(t-\tau)$  va traslato di  $t$  verso destra. Quando invece  $t < 0$ ,  $y(-\tau)$  va traslata di  $t$  verso sinistra
4. Per ogni valore di  $\tau \in (-\infty, +\infty)$  si calcola il prodotto  $x(\tau)y(t-\tau)$
5. Si integra rispetto a  $\tau$  la funzione  $x(\tau)y(t-\tau)$  e cioè si calcola l'area sottesa dalla funzione  $x(\tau)y(t-\tau)$ . La suddetta area è proprio il valore  $z(t)$  assunto dalla convoluzione all'istante  $t$ .

# Convoluzione: Esempio di calcolo



<https://mathworld.wolfram.com/Convolution.html>

# Convoluzione: Proprietà

- ✓ L'operazione di convoluzione è commutativa, ossia

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

- ✓ L'operazione di convoluzione è associativa, cioè

$$[x(t) * y(t)] * z(t) = x(t) * [y(t) * z(t)]$$

- ✓ L'operazione di convoluzione è distributiva rispetto alla somma di segnali

$$[x(t) + z(t)] * y(t) = [x(t) * y(t)] + [y(t) * z(t)]$$

- ✓ La convoluzione di  $x(t)$  con  $\delta(t - t_0)$  trasla  $x(t)$  di  $t_0$ , ossia

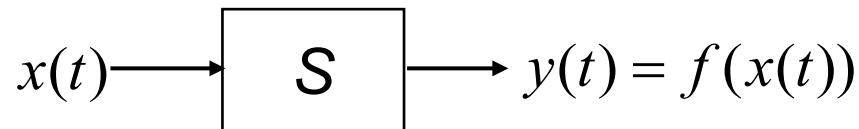
$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

- ✓ Dati due segnali  $x(t)$ ,  $y(t)$  di durata  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$ , la convoluzione dei due segnali ha durata

$$\Delta_x + \Delta_y$$

# Attraversamento di un sistema tempo-continuo da parte di un segnale analogico

- ✓ Un sistema  $S$  è un blocco che trasforma un segnale di ingresso:  $x(t)$  in uno di uscita:  $y(t) = f(x(t))$



- ✓ Sistema Lineare:

$$\begin{array}{l} x_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \end{array} \Longrightarrow ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

(sovrapposizione degli effetti)

- ✓ Sistema Permanente:

$$x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow x(t - \tau) \rightarrow y(t - \tau) \quad (\text{invarianza nel tempo})$$

- ✓ Un sistema lineare e permanente (LP) è detto “**filtro**”

# Risposta impulsiva di un sistema lineare e permanente

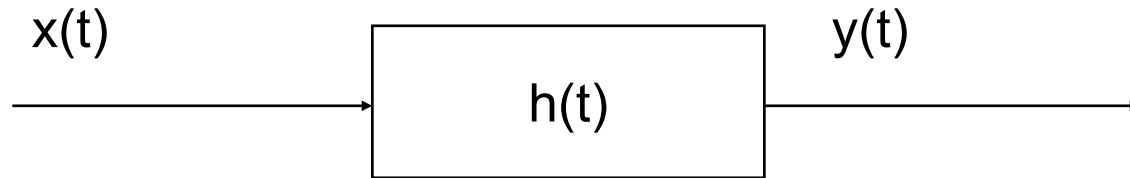


- ✓ La risposta impulsiva  $h(t)$  di un sistema lineare e permanente (filtro) è definita come l'uscita  $y(t)$  del sistema quando all'ingresso è applicato un impulso matematico  $x(t)=\delta(t)$

## Proprietà elementari di $h(t)$

- ✓ Permanenza  $x(t) = \delta(t - t_0) \rightarrow y(t) = h(t - t_0)$
- ✓ Linearità  $x(t) = a\delta(t_0) + b\delta(t_0) \rightarrow y(t) = ah(t) + bh(t)$

# Uscita di un Sistema LP

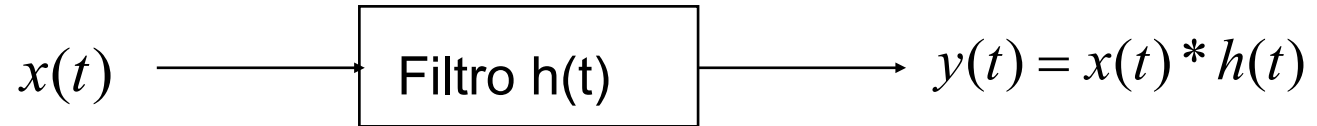


- ✓ Se il sistema è LP con risposta impulsiva  $h(t)$ , allora l'uscita  $y(t)$  corrispondente ad un generico segnale di ingresso  $x(t)$  è pari a

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t), \quad -\infty < t < +\infty$$

- ✓ L'uscita è data dall'integrale di convoluzione tra l'ingresso  $x(t)$  e la risposta impulsiva  $h(t)$  del filtro.

# Uscita di un Sistema LP



- ✓ campionamento dell'impulso matematico

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

- ✓ permanenza del sistema

$$x(t) = \delta(t - \tau) \rightarrow y(t) = h(t - \tau)$$

- ✓ linearità del sistema

$$\begin{aligned} d\tau x(\tau) \delta(t - \tau) &\rightarrow d\tau x(\tau) h(t - \tau) \\ x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau &\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = y(t) \end{aligned}$$

# Trasformazione istantanee (senza memoria)

Un filtro, tramite la sua  $h(t)$ , fa dipendere l'uscita da un tratto significativo del segnale di ingresso (da tutto il segnale se  $h(t)$  è illimitata nel tempo) e non solo dal valore che la  $x(t)$  assume in un certo istante.

Esiste poi una categoria di trasformazioni istantanee (senza memoria) in cui il valore dell'uscita all'istante  $t$  dipende solo dal valore dell'ingresso  $x(t)$  allo stesso istante.

$$y(t) = T\{x(t)\}$$

- ✓ Ritardo  $x(t) \rightarrow y(t) = x(t - t_0)$  è LP con  $h(t) = \delta(t - t_0)$
- ✓ Moltiplicazione per costante  $x(t) \rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ c}}{\otimes} \rightarrow y(t) = cx(t)$  è LP con  $h(t) = c\delta(t)$
- ✓ Quadratore  $y(t) = x^2(t)$  no L, sì P
- ✓ Lineare  $y(t) = ax(t) + b$  sì L, sì P
- ✓ Segno  $y(t) = \text{sign}[x(t)] = \begin{cases} +1, & \text{se } x(t) \geq 0 \\ -1, & \text{se } x(t) < 0 \end{cases}$  no L, sì P



# Convoluzione e Correlazione (segnali di energia)

Convoluzione:

$$\varphi_{xy}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau = x(t) * y(t)$$

Correlazione:

$$R_{xy}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x^*(\tau) \cdot y(t + \tau) d\tau = x(t) \odot y(t)$$

La correlazione si può esprimere come un'opportuna convoluzione:

$$\xi = -\tau$$

$$\begin{aligned} R_{xy}(t) &= \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x^*(\tau) \cdot y(t + \tau) d\tau = \int_{\xi=+\infty}^{\xi=-\infty} x^*(-\xi) \cdot y(t - \xi) d(-\xi) = \\ &= \int_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} x^*(-\xi) \cdot y(t - \xi) d\xi = x^*(-t) * y(t) \end{aligned}$$

# Correlazione (segnali di energia)

Correlazione:

$$R_{xy}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x^*(\tau) \cdot y(t + \tau) d\tau = x(t) \circledast y(t)$$

Teorema:  $R_{xy}(t) = R_{yx}^*(t)$  (non gode della proprietà commutativa)

Autocorrelazione:

$$R_{xx}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x^*(\tau) \cdot x(t + \tau) d\tau$$

Proprietà di simmetria coniugata:  $R_{xx}(t) = R_{xx}^*(-t)$

Se  $x(t)$  è un segnale reale:  $R_{xx}(t) = R_{xx}(-t)$

# Correlazione

Una proprietà importante si ottiene calcolando l'autocorrelazione di un segnale per  $t=0$ :

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau) \cdot x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 d\tau = \varepsilon_x$$

*L'autocorrelazione calcolata nell'origine è pari all'energia del segnale*

Disuguaglianza di Schwartz:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau) \cdot y(\tau) d\tau \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 d\tau \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |y(\tau)|^2 d\tau$$

Per  $x(t) = c \cdot y(t)$

# Correlazione

Calcoliamo il modulo quadro della crosscorrelazione dei due segnali:

$$\begin{aligned} |R_{xy}(t)|^2 &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau) \cdot y(t + \tau) d\tau \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 d\tau \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |y(\tau)|^2 d\tau = \\ &= \varepsilon_x \varepsilon_y \rightarrow (\text{essendo l'energia di un segnale pari all'autocorrelazione calcolata nell'origine}) |R_{xy}(t)|^2 \leq R_{xx}(0) \cdot R_{yy}(0) \end{aligned}$$

In modo analogo, per l'autocorrelazione possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} |R_{xx}(t)|^2 &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau) \cdot x(t + \tau) d\tau \right|^2 \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 d\tau \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 d\tau = \varepsilon_x \varepsilon_x \end{aligned}$$

Dato che  $\varepsilon_x \geq 0$ , possiamo togliere i quadrati e scrivere:

$$|R_{xx}(t)| \leq |R_{xx}(0)|$$

Questo significa che il modulo dell'autocorrelazione di un segnale è limitato superiormente dal valore che l'autocorrelazione assume nell'origine

# Correlazione

Definiamo l'**energia incrociata** di due segnali la seguente quantità:

$$\varepsilon_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau) \cdot y(\tau) d\tau = R_{xy}(0)$$

Da questa grandezza ricaviamo il coefficiente di crosscorrelazione tra due segnali x e y:

$$\rho_{xy} = \frac{\varepsilon_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y}} = \frac{R_{xy}(0)}{\sqrt{\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y}}$$

È una misura di somiglianza tra i segnali x(t) e y(t) nel tempo

$\rho_{xy}$  è compreso tra  $-1$  e  $+1$

$\rho_{xy} = 0 \rightarrow$  segnali ortogonali

$\rho_{xy} = -1 \rightarrow$  segnali antipodali

# Correlazione

Esempio: calcolare il coefficiente di correlazione tra i due segnali  $x(t)$  e  $y(t)$  così definiti:

$$x(t) = \text{rect}(t)$$

$$y(t) = -\text{rect}(t)$$

$$\varepsilon_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}(t) \cdot (-\text{rect}(t)) dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} -1 dt = -1$$

$$\varepsilon_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 dt = 1$$

$$\varepsilon_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 dt = 1$$

$$\rho_{xy} = \frac{-1}{\sqrt{1 \cdot 1}} = -1$$

# Correlazione (segnali di potenza)

Finora abbiamo visto la definizione di crosscorrelazione e autocorrelazione per segnali di energia. Possiamo estendere al caso di segnali di potenza:

$$R_{xy}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} x^*(t) \cdot y(t + \tau) d\tau = x(t) \odot y(t)$$

Anche in questo caso possiamo definire le relazioni fondamentali viste precedentemente

Coefficiente di correlazione:

$$\rho_{xy} = \frac{R_{xy}(0)}{\sqrt{P_x \cdot P_y}}$$