

Salvatore Monaco
Claudia Califano
Paolo Di Giamberardino
Mattia Mattioni

TEORIA DEI SISTEMI lineari stazionari a dimensione finita



Salvatore Monaco Claudia Califano

Paolo Di Giamberardino Mattia Mattioni

Teoria dei Sistemi

lineari stazionari
a dimensione finita

ISBN 978-88-9385-268-5

© Copyright 2021
Società Editrice Esculapio s.r.l.
Via Terracini, 30 - 40131 Bologna
www.editrice-esculapio.com - info@editrice-esculapio.it

Impaginazione: Carlotta Lenzi
Layout Copertina: Carlotta Lenzi
Stampato da: LegoDigit - Lavis (TN)

Printed in Italy

Le fotocopie per uso personale (cioè privato e individuale, con esclusione quindi di strumenti di uso collettivo) possono essere effettuate, nei limiti del 15% di ciascun volume, dietro pagamento alla S.I.A.E del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633. Tali fotocopie possono essere effettuate negli esercizi commerciali convenzionati S.I.A.E o con altre modalità indicate da S.I.A.E. Per le riproduzioni ad uso non personale (ad esempio: professionale, economico o commerciale, strumenti di studio collettivi, come dispense e simili) l'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre un numero di pagine non superiore al 15% delle pagine del volume.

CLEARedi - Centro Licenze e Autorizzazioni per le Riproduzioni Editoriali
Corso di Porta Romana, n. 108 - 20122 Milano
e-mail: autorizzazioni@clearedi.org - sito: <http://www.clearedi.org>.

Premessa

Il libro rappresenta l'evoluzione di note del corso e precedenti testi del primo autore che ha tenuto l'insegnamento di Teoria dei Sistemi alla Sapienza dal 1989; la sequenza dei capitoli riflette l'organizzazione delle lezioni ed il tono colloquiale cerca di stemperare il formalismo del rigore matematico mantenendo i livelli di generalità ed astrazione necessari.

Gli argomenti trattati ricoprono i fondamenti metodologici per lo studio dei sistemi dinamici controllati e rappresentano la base dei percorsi di formazione in Automatica, ma anche di percorsi di formazione orientati al progetto di sistemi di controllo e automazione negli specifici settori applicativi.

Tutti i contenuti, organizzati in nove capitoli, possono essere trattati con un diverso livello di approfondimento in corsi da sei, nove fino a dodici crediti. È anche possibile seguire percorsi adatti ad assicurare obiettivi di formazione specifici: omettendo i capitoli sul comportamento in frequenza, lo studio dei sistemi interconnessi e l'avvio alle procedure di progetto, se la modellistica e lo studio dei sistemi dinamici sono gli obiettivi (corsi di laurea nell'area gestionale); omettendo i sistemi a tempo discreto e lo studio nel dominio del tempo dei sistemi con modi naturali multipli, se l'obiettivo è fornire le basi per il successivo studio dei sistemi di controllo (corsi di studio in ingegneria meccanica, elettrotecnica e aerospaziale).

L'organizzazione del materiale, che prevede aggiornamenti nella versione online, si propone di dare l'avvio alla costruzione di *un testo dinamico*, in grado di accompagnare le esigenze del lettore e proporre, esso stesso, una struttura aggiornata alle condizioni ed esigenze di apprendimento e formazione.

Qui nel seguito in sintesi viene richiamato il contenuto dei singoli capitoli.

L'*Introduzione* ha lo scopo di inquadrare il contesto nel quale i contenuti si collocano: l'Automatica. Premesso che la teoria dei sistemi si pone come disciplina autonoma, proponendo un approccio unificante nella comprensione e analisi di fenomeni e processi da diversi contesti applicativi, perché confinare lo studio ad un settore, seppure interdisciplinare, come quello dell'Automatica? Ebbene sono due i principali motivi. Il primo motivo, di carattere generale, è collegato al

livello di astrazione: questo aspetto comune ai due approcci permette di estendere, ai sistemi di controllo, i metodi di studio dei sistemi controllati (sistemi in cui sono specificate le grandezze attraverso le quali esercitare l'intervento), quelli considerati nel testo; vista in questa chiave la collocazione nel settore dell'Automatica non rappresenta un confinamento; i metodi proposti hanno infatti una valenza autonoma rispetto al loro ruolo nell'applicazione. Il secondo motivo, più specifico, è collegato agli oggetti studiati: si tratta dei sistemi dinamici, controllati, lineari e stazionari, la classe di sistemi che sono alla base del progetto dei sistemi di controllo. Resta comunque inteso che i contenuti compongono un corpo autonomo di metodi per lo studio dei sistemi dinamici lineari.

Il *primo capitolo* introduce, mediante esempi, la classe di modelli matematici che rappresentano i sistemi dinamici allo studio. La costruzione di modelli di semplici fenomeni e processi da diversi ambiti disciplinari introduce ai concetti di base della modellistica, della equivalenza dei modelli, della generalità del modello (fenomeni descritti dallo stesso modello) e della rappresentatività del fenomeno descritto (approssimazione lineare). Si prendono in considerazione processi e fenomeni che evolvono nel tempo continuo o che possono essere descritti mediante modelli in cui la variabile indipendente è l'insieme dei numeri naturali (tempo discreto).

Nel *secondo capitolo*, definita formalmente la classe dei sistemi allo studio, quelli che ammettono una rappresentazione differenziale (o alle differenze) con lo stato lineare stazionaria a dimensione finita, viene sviluppata un'analisi puntuale, nel dominio del tempo, della struttura delle evoluzioni corrispondenti a prefissate condizioni e sollecitazioni agenti sul sistema. Lo studio è proposto in più fasi per consentire diversi livelli di approfondimento. Lo studio matematico è accompagnato da numerosi commenti e osservazioni per collegarlo al comportamento fisico.

Il *terzo capitolo* studia il fondamentale problema della stabilità: sotto quali condizioni a piccole perturbazioni corrispondono piccoli effetti nelle evoluzioni? È certamente un problema importante se si tiene conto delle incertezze che si hanno nella modellistica e nelle misure. A partire dalle definizioni, vengono individuate le condizioni ed i criteri più noti per la classe dei sistemi allo studio. In una seconda fase vengono proposte anche alcune soluzioni per rappresentazioni non lineari, il criterio diretto ed indiretto di Lyapunov che è un approfondimento importante se si tiene conto del fatto che i modelli lineari sono in genere approssimazione di fenomeni più complessi.

Il *quarto capitolo* tratta dello studio dei sistemi dinamici lineari stazionari nel dominio della variabile complessa. A partire dalla caratterizzazione della trasformata di Laplace (o Zeta) e delle sue proprietà vengono messi in luce i collegamenti con lo studio nel dominio del tempo assieme alle potenzialità che consentono di dare risposte precise a problemi difficili da risolvere nel dominio del tempo (caso di matrici dinamiche non diagonalizzabili).

Il *quinto capitolo* rivela una diversa possibile caratterizzazione del comportamento di un sistema lineare dinamico, quello insito nelle modalità di rispondere

a sollecitazioni periodiche . È questo un punto di vista accreditato nei settori dell'Ingegneria e molto utile nel progetto dei sistemi di controllo. Nella trattazione vengono stabiliti i collegamenti più importanti con il funzionamento nel tempo e sviluppata la trattazione della rappresentazione grafica del comportamento in frequenza. Si tratta di aspetti che sono propedeutici al progetto di sistemi di controllo nei diversi comparti applicativi.

Il sesto capitolo tratta in senso lato della corrispondenza tra modelli che descrivono il comportamento forzato ingresso-uscita, eventualmente espresso mediante un funzionale causale lineare, e le rappresentazioni con lo stato di un sistema lineare stazionario. Si tratta di un problema importante in quanto collegato alla possibilità di costruire modelli e/o emulatori fisici di un comportamento ingresso-uscita predefinito. Tale possibilità si traduce quindi nella possibilità di far funzionare in tempo reale un dispositivo (modello o emulatore) che riproduca tale legame. Gli approfondimenti possibili sono qui molteplici, ma viene proposta una trattazione semplificata che permette di acquisire gli aspetti salienti collegati al problema.

Il settimo capitolo introduce e propone i metodi per lo studio delle proprietà dello spazio di stato. È necessario avere presente che lo stato è quella variabile che in un sistema dinamico racchiude in sé tutte le informazioni necessarie a specificare i comportamenti futuri (quella variabile che mantiene ad ogni istante di tempo le informazioni sul passato). La possibilità di rilevare lo stato, con misure dell'uscita, e di condizionarne il comportamento, mediante interventi dall'esterno, sono gli aspetti a fondamento delle possibilità di interazione con il sistema. Ebbene queste potenzialità possono essere ricondotte allo studio della raggiungibilità e dell'osservabilità. Questi sono i temi oggetto di studio che conducono, con la scomposizione di Kalman, a mettere in evidenza la struttura interna di un sistema controllato e di controllo.

L'ottavo capitolo studia i sistemi interconnessi lineari. Vengono introdotte le interconnessioni elementari ed i collegamenti che conducono ad un sistema interconnesso di questo tipo e vengono proposte le procedure per individuare i modelli, ingresso-uscita e rappresentazione con lo stato. Vengono messe in luce le condizioni che specificano le proprietà del sistema interconnesso in relazione a quelle dei componenti e sviluppato lo studio della stabilità. Il criterio di Nyquist è un importante strumento per lo studio della stabilità dei sistemi interconnessi, in particolare dei sistemi di controllo a retroazione, e consente un naturale collegamento con la caratterizzazione del sistema in frequenza.

Il nono capitolo completa la trattazione e propone un metodo di progetto, la modifica del comportamento dinamico di un sistema mediante retroazione dall'uscita, che ben si presta a mostrare il ruolo degli strumenti di analisi proposti. Anche solo con riferimento ai metodi che si riferiscono al dominio del tempo: la struttura impiegata si ispira a quanto studiato nel capitolo ottavo, le proprietà coinvolte sono quelle del settimo, gli effetti sul comportamento ingresso-uscita si collegano ai contenuti del sesto, le modalità di comportamento e le sue caratteristiche dinamiche sono quelle comprese nei capitoli due e tre in relazione alla collocazione degli autovalori ed alla stabilità dei sistemi.

Con l'auspicio degli autori di stimolare nel lettore l'interesse per la materia e l'entusiasmo per lo studio.

Settembre 2021

Gli autori

Indice

Premessa	iii
La Teoria dei Sistemi nell'Automatica	xiii
1 Modelli di sistemi dinamici da diverse discipline	1
1.1 Sistemi a tempo continuo	2
1.1.1 Un semplice sistema meccanico	2
1.1.2 Una rete elettrica elementare	4
1.1.3 Motore elettrico	6
1.1.4 Sistemi multi-agente	8
1.2 Sistemi a tempo discreto	9
1.2.1 Un algoritmo di integrazione	10
1.2.2 La dinamica del prezzo	11
1.2.3 La dinamica del prodotto nazionale lordo	12
1.2.4 Un sistema radar di inseguimento	14
1.2.5 Evoluzione della popolazione per classi di età	16
1.3 Trasformazioni dello stato e rappresentazioni equivalenti	19
1.4 Modelli equivalenti di sistemi fisici differenti	21
1.5 Approssimazioni lineari di sistemi non lineari	22
1.5.1 Due esempi di applicazione	25
1.6 Ulteriori esempi di rappresentazioni con lo stato	27
1.6.1 Dinamica newtoniana	27
1.6.2 Satellite in orbita circolare	29
1.6.3 Dinamica verticale di un missile	30
1.6.4 Motore elettrico in corrente continua	31
1.6.5 Levitazione magnetica	32
1.7 La messa in scala	34
2 Analisi dei Sistemi Lineari Stazionari nel dominio del tempo	37
2.1 Sistemi a tempo continuo: rappresentazioni implicite ed esplicite . . .	38
2.1.1 Da una descrizione esplicita alla rappresentazione differenziale	45
2.1.2 Sistema come l'insieme delle rappresentazioni equivalenti . . .	46

2.2 La matrice di transizione nello stato	48
2.2.1 Operatore regolare	49
2.2.2 Il caso generale	53
2.3 I modi naturali nell'evoluzione libera dello stato	56
2.3.1 I modi naturali di un operatore regolare	56
2.3.2 Parametri caratteristici delle leggi di moto	65
2.3.3 Il caso generale	67
2.4 I modi naturali nello stato e in uscita	73
2.4.1 Il caso di un operatore regolare	73
2.4.2 Il caso generale	77
2.5 Sistemi a tempo discreto: rappresentazioni implicite ed esplicite	80
2.5.1 La matrice di transizione	85
2.5.2 I modi naturali per i sistemi a tempo discreto	87
2.6 Rappresentazioni a tempo discreto di sistemi a tempo continuo	91
3 Elementi di teoria della stabilità	99
3.1 Stabilità nei sistemi stazionari a tempo continuo: definizioni	100
3.1.1 La stabilità di un moto	103
3.2 Stabilità nei sistemi lineari stazionari a tempo continuo: proprietà e condizioni	104
3.2.1 Condizioni di stabilità	104
3.3 Il criterio di Routh	109
3.3.1 Il criterio di Routh	110
3.3.2 Ulteriori applicazioni del criterio di Routh	118
3.4 Il metodo generale di Lyapunov	122
3.4.1 Il criterio di Lyapunov	122
3.4.2 Il criterio di Lyapunov per i sistemi lineari stazionari	128
3.5 Stabilità mediante linearizzazione	131
3.5.1 Condizioni di stabilità	132
3.5.2 Esempi	133
3.6 La Stabilità ingresso-uscita	138
3.6.1 Condizione di stabilità esterna nello stato zero	140
3.6.2 Condizione di stabilità esterna in ogni stato	141
3.7 Stabilità nei sistemi stazionari a tempo discreto: definizioni	144
3.8 Stabilità nei sistemi lineari stazionari a tempo discreto: proprietà e condizioni	146
3.8.1 Condizioni di stabilità	146
3.8.2 Relazione tra i criteri di Jury e di Routh	150
3.8.3 Il criterio di Lyapunov per i sistemi a tempo discreto	152
3.8.4 Il criterio di Lyapunov per i sistemi lineari stazionari a tempo discreto	154
3.8.5 Analisi della stabilità mediante linearizzazione nel caso a tempo discreto	155

4 Le rappresentazioni lineari stazionarie nel dominio complesso	159
4.1 La trasformata di Laplace nello studio dei sistemi a tempo continuo	159
4.2 La matrice di transizione nel dominio complesso	166
4.2.1 Il caso di operatore regolare	167
4.2.2 Il caso generale	172
4.3 I modi naturali nel dominio complesso	175
4.3.1 Il caso di operatore regolare	175
4.3.2 Il caso generale	176
4.4 La funzione di trasferimento	177
4.4.1 Modelli ingresso-uscita	179
4.4.2 Le rappresentazioni della funzione di trasferimento	180
4.5 La risposta forzata nel dominio complesso	183
4.5.1 La risposta agli ingressi canonici e la risposta indiciale	190
4.5.2 Risposte ad ingressi con ritardi	196
4.5.3 Una nota sulla risposta ad ingressi periodici	199
4.6 Sistemi a tempo discreto: analisi nel dominio della variabile complessa	203
4.6.1 La trasformata \mathcal{Z} nello studio dei sistemi a tempo discreto	203
4.6.2 La matrice di transizione ed i modi naturali	208
4.6.3 la funzione di trasferimento e la risposta forzata	210
4.6.4 La funzione di trasferimento del sistema a tempo discreto equivalente	215
5 La risposta a regime permanente e il comportamento in frequenza	219
5.1 La risposta a regime permanente	219
5.1.1 Il regime permanente ad ingressi periodici	222
5.1.2 Il regime permanente a ingressi canonici	230
5.1.3 Una nota sul fenomeno della risonanza	233
5.2 Le rappresentazioni grafiche della risposta armonica	234
5.2.1 I diagrammi di Bode	234
5.2.2 I diagrammi polari	249
5.3 La risposta a regime permanente per i sistemi a tempo discreto	255
5.3.1 La risposta a regime ad ingressi periodici	255
5.3.2 La risposta a regime ad ingressi canonici	256
6 Le proprietà geometriche dello spazio di stato	259
6.1 Le proprietà della struttura interna: l'Osservabilità	259
6.2 Le proprietà della struttura interna: la Raggiungibilità	267
6.3 La scomposizione di Kalman	276
6.4 Le proprietà dello spazio di stato nei sistemi a tempo discreto	285
6.4.1 Inosservabilità	286
6.4.2 Raggiungibilità	286

7 Modelli ingresso-uscita lineari e rappresentazioni con lo stato	289
7.1 Il problema della realizzazione	290
7.2 Realizzazioni in forma canonica raggiungibile ed osservabile	292
7.2.1 Realizzazione in forma canonica raggiungibile	292
7.2.2 Realizzazione in forma canonica osservabile	296
7.3 Le realizzazioni minime	298
7.3.1 Realizzazione di Gilbert	304
7.4 Sistemi a tempo discreto	307
7.5 Realizzazioni di modelli ingresso-uscita in t	307
8 Introduzione allo studio dei Sistemi Interconnessi	311
8.1 Interconnessioni elementari	311
8.1.1 Connessione in serie	312
8.1.2 Connessione in parallelo	313
8.1.3 Connessione a retroazione	314
8.2 Rappresentazioni di sistemi interconnessi mediante grafi di flusso	316
8.3 Sistemi interconnessi: calcolo del modello	319
8.4 Le proprietà del sistema interconnesso	323
8.5 Il criterio di Nyquist	327
8.5.1 Il criterio di Nyquist	328
9 Struttura interna, intervento e osservazione	335
9.1 L'assegnazione degli autovalori con reazione dallo stato	336
9.1.1 Sistemi con un solo ingresso	338
9.1.2 Sistemi con più ingressi	342
9.2 Il problema della stima dello stato	343
9.2.1 Osservabilità e osservatore dello stato	344
9.2.2 Rilevabilità e ricostruttore dello stato	346
9.3 Il principio di separazione	348
9.4 Assegnazione della dinamica con reazione dall'uscita	351
9.4.1 Criteri di scelta di N e G	351
9.4.2 Gli zeri del sistema complessivo	353
9.4.3 Controreazione dinamica dall'uscita	353
9.4.4 Ulteriori considerazioni sulla scelta di G	354
9.5 Assegnazione degli autovalori con regolazione	355
9.6 Assegnazione degli autovalori: sistemi a più ingressi	359
9.6.1 Un caso particolare	360
9.6.2 Il caso generale	361
9.7 L'osservatore asintotico ridotto	364
A Forma spettrale di una matrice	369
A.1 Autovalori e autovettori	370
A.1.1 A con autovalori tutti distinti	372
A.1.2 A diagonalizzabile a coefficienti reali	373
A.2 La forma di Jordan	374

A.2.1 Procedura di calcolo di J	375
Bibliografia	383
Bibliografia	383
Indice analitico	385

La Teoria dei Sistemi nell'Automatica

In questo capitolo, vengono introdotti i metodi elementari di studio dei sistemi dinamici lineari stazionari (o tempo-invarianti) a dimensione finita - LSdF.

Si tratta di una classe particolare di sistemi, ma di grande importanza nelle applicazioni in quanto i modelli che li descrivono possono essere impiegati in numerosi contesti per rappresentare i comportamenti di numerosi fenomeni e processi reali. Ciò deriva dal fatto che tale classe di sistemi coglie una delle componenti fondamentali della complessità dei processi che operano in tempo reale: la dinamica, la proprietà in base alla quale le evoluzioni non dipendono solo dalle interazioni con l'ambiente, ma anche dallo stato del sistema.

I metodi di analisi qui introdotti sono propedeutici agli sviluppi proposti nei successivi insegnamenti di Automatica.

È per questo motivo che qui di seguito si cercherà di presentare il contesto: la teoria dei sistemi, l'automatica, i sistemi di controllo, ...

La Teoria dei Sistemi ...

Teoria, θεωρία (theoria): ‘delegazione, lunga fila di teori’ (θεωρός (theorós), da θεωρέω (theoreo): ‘esamino, osservo’) inviati alle grandi celebrazioni religiose a consultare gli oracoli. Così come l’insieme delle acquisizioni dei **teori** veniva accettato per interpretare e comprendere i fenomeni, una teoria, nell’accezione corrente, consiste in una formulazione logicamente coerente (in termini di concetti e formulazioni più o meno astratti) di un insieme di definizioni, principi e leggi generali che consentono di descrivere, interpretare, classificare, spiegare, a vari livelli di generalità, aspetti della realtà naturale e sociale e delle varie forme di attività umana.

Sistema, da σύστημα (systema): ‘riunione, complesso’. In ambito scientifico, qualsiasi oggetto di studio che, pur essendo costituito da diversi elementi reciprocamente interconnessi e interagenti tra loro o con l’ambiente esterno, reagisce o evolve come un tutt’uno con proprie leggi generali. Si tratta di aggregati più

o meno complessi assunti a rappresentare processi o fenomeni che funzionano (evolvono nel tempo) interagendo con l'ambiente.

La **Teoria dei Sistemi** consta di un corpo di metodologie per l'analisi dei fenomeni e processi reali con l'obiettivo di fornire un supporto alla comprensione del loro comportamento, mettere a punto modelli che possano riprodurne il funzionamento e sviluppare metodi di analisi al fine di interpretare e ove possibile prevederne il comportamento.

Ma questi stessi metodi sono anche necessari per progettare sistemi e dispositivi "automatici"!

... nell'Automatica

Automatica: da αὐτόματος (derivante da αὐτός(autós), 'stesso', e - ματος) e τέχνη (techne), 'arte, tecnica', deve essere inteso come quel corpo di **metodi e tecniche** per lo studio ed il progetto di sistemi in grado di assolvere in **autonomia** a prefissati **compiti**.

Automa, dalle stesse radici, è il prodotto del progetto: un entità che è in grado di **assolvere a compiti da sé**.

Si tratta in altre parole di quella disciplina che si pone come obiettivo la comprensione dei principi che sono alla base del comportamento autonomo nonché della loro successiva traduzione in metodi e tecniche di progetto e realizzazione di prodotti dell'ingegneria.

Nel contesto dell'Automatica i compiti rappresentano comportamenti o modalità di funzionamento, predefiniti e/o imposti dall'esterno, e l'autonomia va intesa come la capacità di funzionare nel modo voluto compensando in tempo reale l'effetto di perturbazioni e incertezze. Tutto ciò, inoltre, non deve necessariamente avvenire sostituendo l'intervento umano, ma eventualmente a suo supporto o integrazione.

Gli oggetti ai quali rivolge la sua attenzione l'automatica sono dunque quelli che, dovendo assolvere a compiti, evolvono nel tempo interagendo con l'ambiente; in altre parole: operano in tempo reale. Si pensi ad esempio al sistema di regolazione della temperatura del corpo umano il cui funzionamento è caratterizzato dalla temperatura nel tempo dei diversi organi; la temperatura dovrà essere mantenuta entro definiti valori compensando gli effetti dovuti a variazioni della temperatura esterna o a modifiche dello stato di salute. Si pensi ad un sistema di distribuzione delle informazioni il cui funzionamento è caratterizzato dalla quantità di informazione che fluisce nel tempo nei diversi nodi; in questo caso si vuole che le informazioni giungano a destinazione compensando gli effetti di guasti e interferenze. Si pensi ancora a un sistema di guida automatico il cui funzionamento è caratterizzato dalla posizione e assetto nel tempo del veicolo; indipendentemente da perturbazioni e malfunzionamenti il sistema dovrà consentire di raggiungere l'obiettivo fissato.

I sistemi automatici sono estremamente diffusi: gli elettrodomestici, le automobili, gli impianti e le reti di distribuzione dell'energia, le reti di trasmissione dell'informazione, i sistemi spaziali, ... , i robot, i sistemi finanziari e di gestione, ... , gli esseri viventi. Ciascuna di queste "entità" contiene, ed è il risultato,

dell'interazione di numerosissimi componenti automatici. Gli esseri viventi sono sede di processi automatici naturali di complessità e bellezza, in molti casi non ancora compresa, che hanno ispirato e continuano ad ispirare lo sviluppo delle ricerche del settore.

Come si evince dalle precedenti considerazioni l'Automatica è una tecnologia pervasiva, eppure non nota; è stata per questo motivo battezzata la tecnologia nascosta per eccellenza. Ciò è conseguenza del fatto che l'automatismo, il comportamento automatico, si realizza "de facto" mediante procedure di elaborazione del contenuto informativo connesso al funzionamento del sistema, procedure che possono poi essere realizzate impiegando diverse tecnologie a seconda del comparto applicativo: la tecnologia meccanica, quella elettronica, .. , informatica.

L'architettura dei sistemi automatici...

Nel tentativo di comprendere da un punto di vista concettuale l'architettura di un sistema automatico possiamo fare riferimento ad uno schema concettuale che ben interpreta il suo funzionamento. Infatti, il funzionamento di un sistema automatico adibito ad un prefissato compito, è fondato sulla capacità di **pianificare** l'attività in termini di azioni elementari, **organizzare** la sequenza di azioni e **coordinarne** l'esecuzione, **eseguire** le azioni elementari. Queste tre fasi, che corrispondono ad un sequenziamento non solo concettuale, ma anche procedurale, possono essere intese come componenti fondamentali di una logica di intervento gerarchica a tre livelli in cui i risultati delle elaborazioni ad un livello attivano le procedure di elaborazione al livello inferiore. Ciò significa che da un punto di vista procedurale possiamo pensare al sistema agente secondo uno schema del tipo indicato in Figura 1.

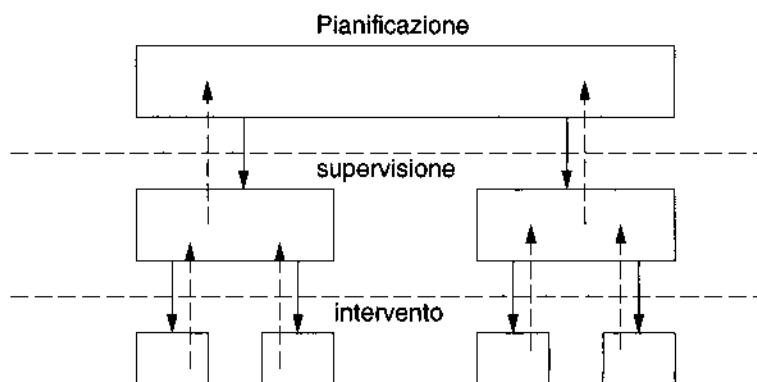


Figura 1

Nello schema di Figura 1 le frecce verso il basso rappresentano l'interazione tra i livelli di intervento, quelle verso l'alto un flusso inverso di informazioni (feedback) necessario ad assicurare le prefissate modalità di funzionamento in

condizioni di autonomia. Un processo decisionale e di intervento che non preveda questo flusso inverso di informazioni presupporrebbe, infatti, una perfetta rispondenza tra pianificazione ed esecuzione del compito ciò che non è possibile in presenza di incertezze e perturbazioni. Nella realtà, infatti, la conoscenza del modo di funzionare del processo non è esente da incertezze (incertezze di modello) e l'interazione con l'ambiente può dare vita a impreviste perturbazioni.

È dunque necessario prevedere che nel corso del normale funzionamento il processo decisionale e di intervento sia in grado di adattarsi, con elaborazioni ad hoc che utilizzano misure dello scostamento tra il comportamento atteso e quello effettivo, il feedback di cui si è detto. Ciò è rappresentato nello schema di Figura 1 dove all'interno di ogni fase, e nel collegamento tra esse, gli interventi ($u(t)$) sono attivati non solo dalle informazioni del flusso discendente, $v(t)$ e $z(t)$, ma anche da informazioni in retroazione, $m(t)$ (feedback).

Per meglio comprendere la struttura a tre livelli caratteristica di un sistema automatico si pensi ad un sistema robotico per l'esplorazione di un pianeta. Si immagini quindi una piattaforma mobile che debba effettuare escursioni, prelevare campioni di suolo, rilevare immagini, effettuare analisi elementari *in situ* e trasmettere i risultati... In accordo con l'intuizione possiamo immaginare il compimento di una missione di esplorazione come il risultato di una procedura articolata composta dalle tre fasi indicate. Una pianificazione iniziale dovrà definire il percorso che il robot dovrà seguire e il sequenziamento delle operazioni; le elaborazioni necessarie saranno attivate da input esterni che rappresentano gli obiettivi desiderati (numero di campioni da prelevare, esperimenti, ...), e terranno conto delle caratteristiche del suolo rilevato attraverso immagini o altro tipo di dati. Ciò corrisponde alla prima fase dello schema proposto. Pianificato il percorso e il sequenziamento delle operazioni i dispositivi del sistema robotico devono provvedere all'organizzazione del sequenziamento delle attività, attivarne e coordinarne l'esecuzione; ciò che corrisponde alla seconda e terza fase dello schema concettuale proposto. È evidente la stretta interazione nell'esecuzione delle diverse fasi e la necessità di riattivare le elaborazioni in funzione dei risultati che via via vengono rilevati. La presenza di impedimenti ed ostacoli imprevisti può rendere necessario ad alto livello di ridefinire la traiettoria o ripianificare l'esecuzione di prefissati esperimenti di sondaggio del suolo, così come il malfunzionamento di un attuatore o la modifica delle caratteristiche del suolo rendono necessaria la modifica degli interventi di esecuzione al livello più basso secondo modalità automatiche.

In questo contesto, e con riferimento all'architettura indicata, negli insegnamenti di Controlli Automatici e Fondamenti di Automatica vengono, in particolare, studiati i metodi che sono alla base del progetto del livello di esecuzione. L'approccio metodologico di progetto e molti dei concetti impiegati sono comuni alle tre fasi ciò che conferisce allo studio caratteristiche di adeguata generalità.

... e dei sistemi di controllo

Con specifico riferimento al livello di automazione più basso, e immaginando che esso rappresenti l'intero progetto, si cercherà nel seguito di mettere in luce l'ap-

proccio che viene seguito nel progetto di un **sistema automatico** che deve garantire l'esecuzione di azioni elementari predefinite per assicurare il comportamento automatico desiderato a partire da un assegnato processo.

Le strategie di intervento concepite al fine di garantire il desiderato livello di automazione sono dette anche strategie di controllo - dall'accezione inglese ove "to control" significa "intervenire per" -. Tali strategie, assieme alle tecniche di realizzazione mediante opportuni componenti definiscono il settore di competenza del controllo automatico.

Il progetto si articola naturalmente in più fasi che vedono la collaborazione di esperti del settore applicativo con ingegneri dell'automazione. Si distinguono fasi concettuali e fasi legate alla tecnologia.

Il problema prende le mosse dalla definizione degli obiettivi di automazione, dalla individuazione delle variabili esterne, ingressi e perturbazioni, dalla individuazione delle incertezze sul comportamento del processo e delle misure disponibili per la verifica in tempo reale del comportamento del sistema. A partire da questi elementi si procede alla definizione delle specifiche di comportamento del sistema complessivo, il **sistema di controllo**.

In questa prima fase da un punto di vista astratto il **processo** può essere rappresentato con una scatola nera che rappresenta il legame funzionale tra le variabili rappresentate dalle frecce entranti, **ingressi** e **perturbazioni**, e variabili rappresentate dalle frecce uscenti, le **uscite** e le **misure**: le variabili attraverso le quali vengono espressi gli obiettivi di automazione, le prime, che rappresentano le osservazioni sul comportamento del sistema, le seconde. Il problema consiste nel progetto e nella realizzazione mediante opportuni dispositivi di attuazione, elaborazione e misura del **sottosistema di controllo** che collegato al processo come indicato nello schema concettuale della Figura 2, realizza nel complesso il sistema di controllo che, in risposta a stimoli esterni di riferimento, soddisfa ai desiderati obiettivi di automazione.

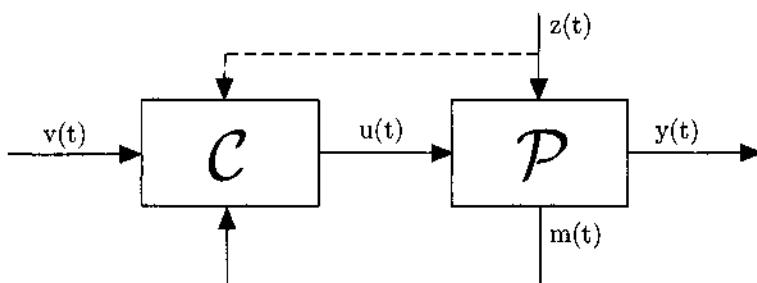


Figura 2

Quali esempi elementari si pensi al problema di mantenere un prefissato profilo di temperatura in un forno o di un frigorifero, compensando l'effetto di perturbazioni dovute all'inserimento di altri corpi o scambi di calore imprevisti, a partire da misure della temperatura stessa; si pensi, ancora al problema di ga-

rantire una prefissata traiettoria di moto ad una piattaforma mobile nonostante ostacoli ed asperità del suolo a partire da misure della posizione.

Nello schema di Figura 2 il sistema di controllo, C, provvede al calcolo dell'azione di controllo sulla base di misure sull'andamento delle variabili del processo (le uscite tra queste) e di eventuali misure delle perturbazioni. Possiamo quindi immaginare il calcolo dell'azione di controllo come il risultato dei due azioni distinte: una prima collegata alla misura delle variabili del processo che definiremo in **retroazione (feedback)** in quanto agisce sulla base di informazioni di ritorno sul comportamento del sistema; una seconda collegata alla misura delle perturbazioni che definiremo di **compensazione in avanti (feedforward)** in quanto destinata a produrre un intervento precalcolato che compensi l'effetto delle perturbazioni stesse.

Lo schema in Figura 2, ad un maggiore livello di dettaglio per quanto riguarda le connessioni ed i componenti, può essere impiegato per il progetto del sottosistema di controllo impiegando le relazioni quantitative (i modelli matematici) che descrivono i legami tra le variabili dei componenti stessi. Poiché i modelli del sistema e dei diversi componenti sono un'approssimazione della realtà fisica e non descrivono con assoluta precisione i legami tra le variabili, il sottosistema di controllo calcolato a partire da tale schema dovrà garantire il mantenimento delle modalità di comportamento richieste entro predefiniti margini di variabilità dei modelli dei componenti. Questa proprietà, che viene indicata come la **robustezza** del sistema di controllo, è necessaria a garantire il soddisfacimento delle specifiche di progetto del sistema fisico.

Il progetto di un sistema di controllo

Il progetto prende le mosse dall'esigenza di voler realizzare un sistema di controllo che assicuri un comportamento automatico di un fenomeno o processo che possiamo pensare pre-assegnato.

I seguenti passi ne caratterizzano lo sviluppo:

- individuare le grandezze che possono essere impiegate per esprimere gli obiettivi di automazione voluti e le grandezze che le influenzano: chiameremo uscite del sistema le variabili che rappresentano le prime, le $y(t)$, e ingressi quelle che rappresentano le seconde, le $u(t)$ e le $d(t)$. Nel fare questo avremo avuto l'accortezza di distinguere gli ingressi in due categorie: gli ingressi effettivi, $u(t)$, attraverso i quali potremo esercitare l'intervento per assicurare il comportamento voluto, ed i disturbi, $d(t)$, che rappresentano variabili che possiamo eventualmente misurare, ma attraverso le quali non possiamo intervenire;
- individuare un modello, possibilmente matematico, adatto a descrivere il collegamento causa-effetto che consente di esprimere quantitativamente l'andamento delle uscite in funzione degli ingressi. Si tratta di un modello del sistema orientato che rappresenta il processo;
- concepire, sulla base di una metodologia ad hoc che consenta di individuare un possibile intervento a partire dagli obiettivi e dalle misure disponibili;

per fare questo bisogna disporre di metodi di progetto a partire dal modello individuato (i metodi di progetto sono fondati su quelli di analisi);

- realizzare l'intervento; in tale fase è particolarmente evidente il collegamento con il settore applicativo e la tecnologia.

I componenti del sistema di controllo sono processi **dinamici orientati**, sistemi cioè in cui esiste una naturale relazione di causa-effetto, si pensi al comportamento in risposta a stimoli esterni, e la dipendenza è dinamica nel senso che il comportamento è condizionato non solo dalla causa presente, ma anche dal passato. In breve nello schema di Figura 2 il complesso è un sistema dinamico orientato così come lo sono le sue parti. Nello schema si distinguono:

- il processo, il sistema su cui si vuole intervenire, rappresentato dal blocco contraddistinto con \mathcal{P} , in cui è possibile individuare le grandezze di controllo u , i disturbi d , che agiscono sul processo e che, in genere, sono grandezze non manipolabili, le variabili controllate y , che rappresentano le grandezze di cui si desidera influenzare l'andamento per assicurare il soddisfacimento delle specifiche, e le variabili misurate m , che rappresentano le misure che vengono impiegate per elaborare la strategia di intervento;
- il controllore, contraddistinto con \mathcal{C} , il quale elabora una opportuna legge di controllo u sulla base, da una parte, delle grandezze misurate m e degli eventuali disturbi misurabili e , dall'altra, delle grandezze di riferimento v , che rappresentano i comandi esterni.

La teoria dei sistemi e del controllo comprende una vasta gamma di metodologie di progetto con riferimento a prefissate famiglie di modelli assunti a rappresentare l'impianto o processo. Se l'impianto è descritto da un sistema di equazioni differenziali lineari, sono disponibili ben documentate metodologie di sintesi di controlleri. In molti casi è possibile fare riferimento a queste metodologie anche se il processo non è lineare, utilizzando una sua rappresentazione approssimata.

I principali metodi di analisi per tale classe di sistemi sono l'oggetto di queste note preliminari allo studio dei metodi dell'automatica.

Una rappresentazione implicita con lo stato di un sistema a dimensione finita, adottando la notazione vettoriale, è del tipo

$$\begin{aligned}\Delta x(t) &= f(x(t), u(t), z(t)) \\ m(t) &= w(x(t), z(t)) \\ y(t) &= h(x(t), z(t))\end{aligned}\tag{1}$$

in cui il tempo t può essere assunto continuo (coincidente con l'insieme dei numeri reali) o discreto (coincidente con l'insieme dei numeri relativi); in corrispondenza Δ sarà l'operatore di derivazione $\frac{d(x(t))}{dt}$ oppure l'operatore di anticipo unitario $x(t+1)$. Il comportamento del sistema rispetto al tempo t , è quindi descritto da cinque tipi di variabili:

- $u(\cdot)$ è il vettore delle variabili di controllo: esse rappresentano i canali attraverso i quali è possibile modificare il comportamento del processo;
- $z(\cdot)$ è il vettore dei disturbi: grandezze che influenzano il comportamento del processo, sono talvolta misurabili, ma non possono essere modificate;
- $m(\cdot)$ rappresenta le grandezze misurate;
- $y(\cdot)$ rappresenta il vettore delle uscite del processo: esse sono un sottoinsieme delle variabili misurate e rappresentano le grandezze su cui si vuole esercitare il controllo;
- $x(\cdot)$, infine, è il vettore delle variabili di stato: esse rappresentano con la loro evoluzione nel tempo, il comportamento del sistema nella forma più completa.

Le funzioni f , la funzione generatrice, h , la trasformazione in uscita, e w , la trasformazione delle misure, hanno una struttura corrispondente a classi di processi e dipendono da parametri che supporremo noti in una prima fase. Se, ad esempio, tali funzioni sono lineari il modello matematico rappresenta un processo lineare. Nel caso tempo continuo il modello matematico introdotto può essere assunto a rappresentare una vasta classe di sistemi che sono caratterizzati dalla evoluzione, in modo continuo rispetto al tempo, di un numero finito di variabili. Nella terminologia della Teoria dei Sistemi le (1) costituiscono nel caso continuo la rappresentazione differenziale con lo stato di un sistema a tempo continuo, stazionario, a dimensione finita. Nel caso tempo discreto le evoluzioni avvengono in modo discontinuo ad intervalli temporali di ampiezza costante assunta per convenzione unitaria.

Con riferimento allo schema di Figura 2, la teoria del controllo studia la concezione del modello matematico del sottosistema che interagendo con il processo nel modo ivi indicato garantisce il soddisfacimento di prefissate specifiche del sistema complessivo. Secondo tale schema la legge di controllo dipende dalle variabili misurabili e da ulteriori variabili esterne, $v(t)$; $m(t)$ e $v(t)$ sono gli ingressi del controllore, $v(t)$ sono gli ingressi del sistema di controllo. Si noti che spesso solo le uscite sono misurabili e lo schema di Figura 2 si modifica di conseguenza. Se si assume che gli ingressi siano variabili deterministiche e che inoltre le misure non siano affette da rumore il problema di controllo è detto deterministico. Se, invece, si assume che alcuni o tutti gli ingressi siano variabili aleatorie, di cui si conoscono alcune statistiche, e che le misure siano affette da rumore il problema di controllo è detto stocastico.

CAPITOLO 1

Modelli di sistemi dinamici da diverse discipline

La costruzione di modelli matematici, un ambito di studio molto ampio, ha il suo fondamento nella formulazione dei principi della fisica ed è all'origine dei metodi della matematica applicata: i modelli esprimono leggi e definiscono proprietà che collegano le grandezze dei fenomeni allo studio.

La messa a punto di modelli è caratteristico di tutte le scienze applicate e coinvolge le competenze di esperti del settore. I modelli esprimono la conoscenza che si ha del fenomeno allo studio; una conoscenza che viene nell'ingegneria tradizionalmente espressa mediante relazioni matematiche, ma non è inusuale, riferirsi a modelli di altra natura (logica, relazionale, grafica,...). In termini generali si può pensare ai modelli come metafore che ci possono aiutare a meglio interpretare, comprendere, .. prevedere la realtà.

Nella Teoria dei Sistemi i modelli ai quali siamo interessati sono le rappresentazioni con lo spazio di stato dei sistemi dinamici orientati. Si tratta di modelli matematici che descrivono le evoluzioni nel tempo corrispondenti ad un legame funzionale causale tra due insiemi di grandezze, gli ingressi e le uscite. Gli ingressi (cause) rappresentano le grandezze che influenzano il fenomeno allo studio, le uscite (effetti) rappresentano le grandezze che sono influenzate e che interessa osservare. Si pensi al moto di un pianeta in un sistema gravitazionale (la relazione è tra le forze gravitazionali - ingressi - e posizione del satellite - uscita -), al movimento di un mezzo in un ambiente (la relazione è tra le forze e coppie agenti - ingressi - e la posizione del mezzo - uscita -), ..

Si mostrerà in questo capitolo come il processo di costruzione di semplici modelli di alcuni fenomeni e procedure conduca naturalmente alla messa a punto di una classe di descrizioni matematiche: le rappresentazioni implicite, con lo stato, lineari stazionarie a dimensione finita. Si tratta di una classe di modelli che assumeremo alla base del nostro studio dedicato ai sistemi dinamici lineari stazionari a dimensione finita.

1.1

Sistemi a tempo continuo

Come mostrato di seguito, modelli a tempo continuo possono rappresentare una vasta classe di sistemi caratterizzati dall'evoluzione di un numero finito di variabili in modo continuo rispetto al tempo, ovvero $t \in \mathbb{R}$.

1.1.1 Un semplice sistema meccanico

La descrizione matematica del moto di un carrello, collegato ad una parete fissa mediante una molla ed uno smorzatore e vincolato a muoversi in una prefissata direzione per effetto di forze agenti (interne ed esterne), costituisce un esempio significativo per la varietà di situazioni che, seppure in modo approssimato, può rappresentare.

Con riferimento alla Figura 1.1 che rappresenta il sistema meccanico in esame, se si osserva che la molla e lo smorzatore sono due dispositivi in grado di generare forze interne che dipendono la prima dallo spostamento, y , la seconda dalla velocità, v , il modello matematico può essere calcolato imponendo l'equilibrio delle forze che agiscono sul centro di massa del carrello.

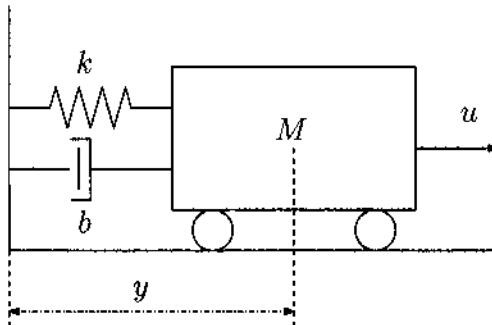


Figura 1.1: Sistema meccanico Massa–Molla–Smorzatore.

Ci si riferisce nel caso in esame al moto rispetto alla condizione di equilibrio rappresentata dalla posizione e velocità iniziali nulle, con corrispondenti forze interne nulle, e in assenza di sollecitazioni esterne.

Se si ricorda che per piccoli variazioni le forze generate dalla molla e dallo smorzatore possono essere assunte proporzionali allo spostamento ed alla velocità, rispettivamente, l'equilibrio delle forze si scrive come segue

$$u(t) = M \frac{d^2}{dt^2} y(t) + b \frac{dy}{dt}(t) + ky(t). \quad (1.1)$$

Nella precedente relazione $y(t)$ rappresenta lo spostamento, $u(t)$ l'ampiezza delle forze esterne, $ky(t)$ la forza generata dalla molla, k la sua costante elastica, e $b\dot{y}(t)$ la forza generata dallo smorzatore, b il suo coefficiente di attrito (si noti

che d'ora in poi la derivata rispetto al tempo sarà indifferentemente indicata con un punto sopra la relativa variabile). La (1.1) esprime l'equilibrio tra le forze agenti e quelle resistenti (seconda legge della dinamica).

L'equazione differenziale del secondo ordine precedente, che collega le grandezze fisiche in esame e descrive implicitamente come la $y(t)$ dipende dalla forza esterna $u(t)$, ammette una descrizione matematica equivalente che si ottiene rinnominando come $x_1(t)$ e $x_2(t)$ la posizione e la velocità della massa. Ponendo dunque

$$x_1(t) = y(t) \quad x_2(t) = \dot{y}(t),$$

derivando e tenendo conto della (1.1), si ha

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{M}x_1(t) - \frac{b}{M}x_2(t) + \frac{u(t)}{M} \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned} \tag{1.2}$$

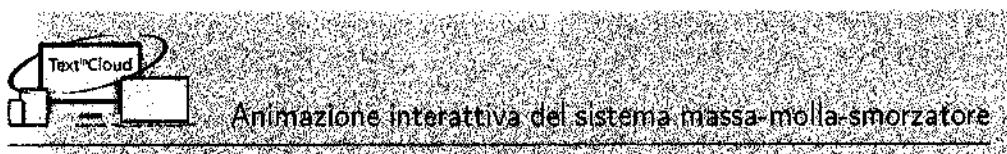
che si può riscrivere in forma vettoriale come

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (1 \ 0) \mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{1.3}$$

ottenendo un modello matematico del tipo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C\mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Si tratta di una *rappresentazione con lo stato lineare stazionario*, di dimensione due, ad un ingresso, la forza applicata $u(t)$, e un'uscita, lo spostamento $y(t)$.



Posizione e velocità rappresentano, nel modello costruito, due variabili che definiscono lo stato del sistema meccanico in esame. Si tratta di due variabili intermedie nella descrizione del legame tra ingresso ed uscita, che riassumono al generico istante di tempo t tutta la conoscenza necessaria per descrivere il comportamento in istanti di tempo seguenti. Conoscendo lo stato al tempo t si conosce l'uscita, in questo caso una sua componente, inoltre, l'ulteriore conoscenza dell'ingresso da t in poi, consente di calcolare l'uscita futura.

L'osservazione precedente può essere estesa al caso generale di un sistema meccanico rigido, composto cioè da parti assimilabili a punti materiali, rispetto ad ingressi che esprimono forze esterne agenti: la posizione e la velocità dei

singoli punti materiali al tempo t caratterizzano completamente l'evoluzione successiva del sistema per effetto di ogni fissato ingresso e rappresentano la scelta naturale di un possibile vettore di variabili di stato. Sotto l'ipotesi che le interazioni tra le parti siano lineari si ottiene, per descrivere il fenomeno, una rappresentazione con lo stato della stessa forma, con il vettore $x(t)$ di dimensione pari a due volte il numero di elementi rigidi che compongono il sistema.

Questo semplice sistema meccanico è adatto a rappresentare in prima approssimazione diversi fenomeni, anche complessi, e di interesse in applicazioni di diversa natura; tra queste: la dinamica di dispositivi di assorbimento delle vibrazioni, sospensioni di veicoli, dinamica semplificata di strutture, ecc. In questi contesti studiare il comportamento in presenza di sollecitazioni periodiche assume particolare interesse. Questo studio, svolto nel Capitolo 4, consente di stabilire un preciso collegamento tra i metodi di analisi nel dominio del tempo e quelli più tradizionali fondati, appunto, sul comportamento in frequenza.

1.1.2 Una rete elettrica elementare

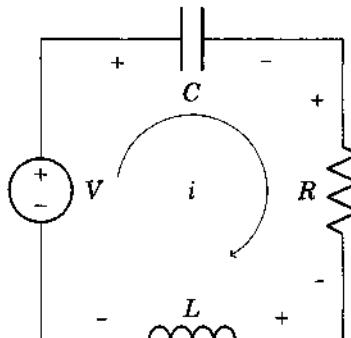


Figura 1.2: Un circuito elementare

Si consideri la semplice rete elettrica in Figura 1.2 costituita da una sola maglia con un generatore di tensione, V , un'induttanza, L , una resistenza, R , ed un condensatore, C . Per descrivere come varia la tensione ai capi della resistenza, $V_R(t)$ (uscita), al variare della tensione del generatore, $v(t)$ (ingresso), è sufficiente scrivere l'equilibrio delle tensioni nella maglia.

Se si indica con $i(t)$ la corrente e ricordando le relazioni tra tensione e corrente nei singoli componenti, si ottiene

$$v(t) = L \frac{d}{dt} i(t) + R i(t) + v_c(t) \quad i(t) = C \frac{d}{dt} v_c(t)$$

e quindi

$$v(t) = LC \frac{d^2}{dt^2} v_c(t) + RC \frac{d}{dt} v_c(t) + v_c(t). \quad (1.5)$$

Si ottiene quindi un'equazione differenziale lineare del secondo ordine, analoga a quella precedente, che potrà con la stessa tecnica essere ridotta ad un sistema lineare stazionario di dimensione due. Posto infatti,

$$x_1(t) = v_c(t), \quad x_2(t) = \dot{v}_c(t)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (0 \quad RC) x(t). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Giova subito osservare che la scelta delle variabili di stato non è univoca. Si sarebbe infatti potuto scegliere

$$z_1(t) = v_c(t), \quad z_2(t) = i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

ed ottenere la rappresentazione equivalente:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (0 \quad R) z(t). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Anche in questo caso si può osservare che una scelta sempre possibile delle variabili di stato in una rete elettrica con componenti concentrate è quella che coinvolge gli elementi con memoria. Nel caso di una rete lineare composta da condensatori, induttanze, trasformatori e giratori, oltre a elementi resistivi, questo corrisponde ad assumere le tensioni e/o correnti dei componenti con memoria. La rappresentazione che si ottiene imponendo il rispetto delle leggi di Kirchhoff (somma nulla delle tensioni nelle maglie e delle correnti nei nodi) è sempre una rappresentazione matriciale del tipo indicato, di dimensione pari al numero di elementi con memoria.

A titolo di ulteriore esempio si consideri la rete elettrica in Figura 1.3 composta da due maglie: nella prima un generatore di tensione $u(t)$, l'ingresso, una resistenza R_1 ed un condensatore C , sul ramo comune, nella seconda, oltre al condensatore un'induttanza L , ed una resistenza R_2 .

Se l'uscita è la tensione sul resistore R_2 , una rappresentazione si ottiene imponendo l'equilibrio delle tensioni nella prima maglia

$$u(t) = R_1 i_1(t) + v_c(t) \implies i_1(t) = \frac{u(t) - v_c(t)}{R_1},$$

delle correnti al nodo

$$i_1(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} + i_l(t) \implies \frac{dv_c(t)}{dt} = -\frac{1}{R_1 C} v_c(t) - \frac{1}{C} i_l(t) + \frac{u(t)}{R_1 C},$$

e delle tensioni nella seconda maglia

$$v_c(t) = L \frac{di_l(t)}{dt} + R_2 i_l(t) \implies \frac{di_l(t)}{dt} = \frac{1}{L} v_c(t) - \frac{R_2}{L} i_l(t).$$

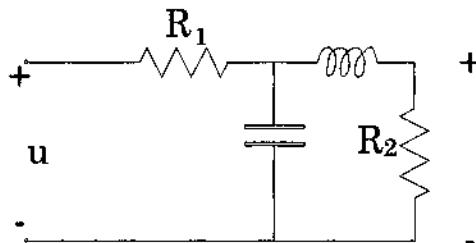


Figura 1.3: Un circuito elettrico a due maglie.

Posto

$$x_1(t) = v_c(t), \quad x_2(t) = i_l(t),$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 0 & R_2 \end{pmatrix} x(t).\end{aligned}$$

Problemi caratteristici della teoria delle reti elettriche sono quelli che si conducono in termini sistematici alle proprietà degli stati. È infatti utile nella teoria delle reti elettriche stabilire, ad esempio, se, per una fissata configurazione, prefissati valori di tensione e/o corrente possono essere raggiunti in alcuni rami della rete, oppure se esistono ridondanze nel circuito inessenziali per la caratterizzazione del comportamento ingresso–uscita. L'impostazione e la risoluzione di problemi di questo tipo possono essere affrontate con l'impiego dei metodi proposti nel Capitolo 6 .

1.1.3 Motore elettrico

La variazione della velocità di rotazione di un motore in corrente continua alimentato in tensione può essere ben descritta da un modello del tipo di quelli allo studio. Tale dispositivo, come è noto, trasforma potenza elettrica in potenza meccanica generando una coppia sull'asse del motore per effetto dell'induzione magnetica. La parte elettrica è schematizzabile con una resistenza, R , un'induttanza, L ed un generatore di forza motrice, e_c . La parte meccanica può essere schematizzata con un volano di inerzia J azionato da una coppia $C_m(t)$ generata per effetto dell'accoppiamento meccanico-elettrico che si realizza nell'induzione elettromagnetica. Si suppone inoltre, come è usuale, che sia presente un attrito nella rotazione (coefficiente di attrito dinamico F). L'ingresso è la tensione nel circuito di armatura $u(t)$, l'uscita è la velocità angolare dell'asse del motore. La parte elettrica è descritta dal legame tra $u(t)$ e $i(t)$ che può essere espresso da

$$u(t) = R i(t) + e_c(t) + L \frac{di(t)}{dt},$$

dove $e_c(t) = k_c \omega(t)$. La trasduzione, da elettrica a meccanica, si realizza con la comparsa di una coppia, C_m , che può essere assunta in prima approssimazione di intensità proporzionale all'intensità della corrente $i(t)$

$$C_m(t) = k_m i(t).$$

La dinamica della parte meccanica è ottenuta imponendo l'equilibrio delle coppie:

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} + F\omega(t) = C_m(t).$$

Si ottiene in definitiva

$$\begin{aligned} i(t) &= -\frac{R}{L}i(t) - \frac{k_c}{L}\omega(t) + \frac{1}{L}u(t) \\ \dot{\omega}(t) &= \frac{k_m}{J}i(t) - \frac{F}{J}\omega(t) \end{aligned}$$

cioè un sistema lineare stazionario di dimensione due nelle variabili di stato

$$x(t) = \begin{pmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}$$

e matrici

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_c}{L} \\ \frac{k_m}{J} & -\frac{F}{J} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Il sistema è per sua natura interconnesso, cioè composto da diversi sottosistemi come risulta dalle precedenti considerazioni modellistiche ed è messo in evidenza nella Figura 1.4.

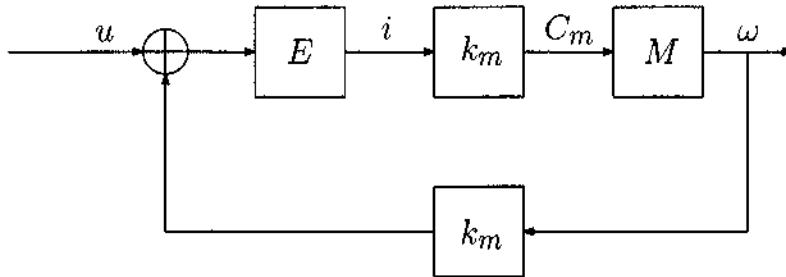


Figura 1.4: Un circuito elettrico a una maglia.

Lo studio dei sistemi interconnessi, le modalità di costruzione dei modelli e lo studio delle proprietà a partire dalla conoscenza delle descrizioni e delle proprietà delle parti sono argomenti importanti della teoria dei sistemi che noi affronteremo, limitatamente ad alcuni aspetti, per la classe dei sistemi allo studio nei Capitoli 6 e 8.

1.1.4 Sistemi multi-agente

Si consideri un sistema composto da più parti, denotate agenti, che sono collegate tra loro mediante archi orientati ai quali è attribuito un peso unitario. Si assuma che ogni agente, nodo di questo grafo orientato, sia, al tempo t , caratterizzato da una variazione del suo stato, $x_i(t)$, pari alla somma delle differenze tra ogni stato collegato ad esso ed il suo proprio valore. Se si indica con \mathcal{V}_i l'insieme dei nodi che sono collegati al nodo i -esimo con un ramo entrante in quest'ultimo, l'evoluzione dell'agente i -esimo in formule è descritta dalla seguente equazione

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{V}_i} (x_j(t) - x_i(t)). \quad (1.9)$$

Equazioni di questo tipo, per $i = 1, \dots, N$, descrivono l'evoluzione nel tempo di un sistema composto da più agenti, ciascuno caratterizzato da una dinamica di tipo integrativo, collegati mediante un grafo orientato non pesato. Si tratta della più semplice rappresentazione matematica che può essere impiegata per descrivere, ad esempio, l'evoluzione dell'opinione in un insieme di individui su una determinata questione. Se infatti $x_i(t)$ rappresenta in una fissata scala l'opinione dell' i -esimo individuo, assumere che la variazione dell'opinione segua l'equazione precedente corrisponde ad assumere che la variazione dell'opinione sia proporzionale alla differenza tra l'opinione delle persone di cui si fida (i vicini) e la sua. Tale modello elementare, che raccoglie alcuni aspetti fondamentali nella descrizione delle interazioni tra sistemi dinamici, è in realtà l'archetipo di una classe di modelli che sono oggi molto studiati per indagare l'effetto delle interazioni nei comportamenti collettivi.

La costruzione del modello è, inoltre, molto semplice a partire dal grafo che rappresenta il sistema. Con riferimento alla Figura 1.5 in cui $N = 5$, le equazioni (1.9) assumono la forma vettoriale

$$\dot{x}(t) = -Lx(t) \quad (1.10)$$

in cui la matrice L , denominata matrice Laplaciana, è costruita per ispezione sul grafo ed ha sulla diagonale nella posizione (i, i) il numero intero corrispondente al numero di archi entranti nel nodo i -esimo, e nella posizione $(i, j) = 1$ se vi è un ramo dal nodo j al nodo i (j è nodo vicino a i), 0 altrimenti. La matrice così fatta ha per coefficienti -1 o 0 fuori dalla diagonale, e l'opposto della somma degli elementi della riga sulla diagonale. Nel caso in esame, per ispezione in Figura 1.5 si ottiene

$$\dot{x}(t) = - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} x(t) \quad (1.11)$$

Lo studio su un modello di questo tipo consiste nella caratterizzazione delle evoluzioni nel tempo a partire da uno stato iniziale che corrisponde, nel caso

della modellistica dell'opinione, alla specificazione dell'opinione dei singoli ad un certo istante iniziale. La questione interessante è che la specificità della matrice Laplaciana ha importanti conseguenze su tali evoluzioni e ben rappresenta fenomeni tipici, quali ad esempio il raggiungimento di situazioni di condivisione dell'opinione (consenso).

L'analisi dei modi naturali, trattata nel Capitolo 2, ben rappresenta questi aspetti.

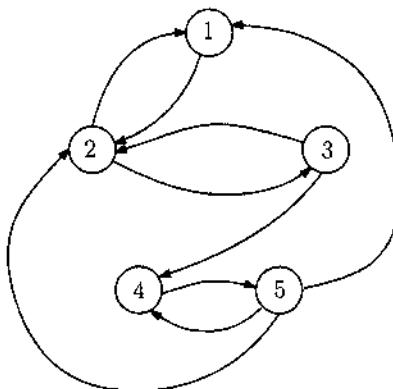


Figura 1.5: Un semplice grafo che descrive un sistema multiagente.

Esercizio 1.1.1 Calcolare una rappresentazione con lo stato LTI per l'equazione differenziale di ordine n

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = u(t),$$

assunti $u \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ come l'ingresso e l'uscita.



TextCloud

Soluzione Esercizio 1.1.1

Approfondimento

1.2

Sistemi a tempo discreto

I modelli a tempo discreto sono modelli matematici che rappresentano fenomeni che possono essere descritti da relazioni che collegano variabili che evolvono

rispetto al tempo e assumono valori costanti in intervalli temporali di uguale ampiezza. Si pensi ai modelli di evoluzione di popolazioni, oppure che rappresentano procedure di varia natura. Quelli che seguono sono solo alcuni semplici esempi che ci introducono alle rappresentazioni con lo stato dei sistemi dinamici lineari stazionari che evolvono nel *tempo-discreto*, $t \in \mathbb{Z}$.

1.2.1 Un algoritmo di integrazione

Si consideri una semplice procedura di calcolo utilizzata per le operazioni di integrazione o di derivazione di funzioni continue, usualmente denominata integrazione numerica/derivazione numerica.

Per approssimare l'integrale o la derivata di una funzione a tempo continuo $u(t)$ è necessario convertire la funzione in una forma consistente con le operazioni di calcolo numerico. Si suppone dunque di campionarla con un intervallo di campionamento T costante. Questa operazione viene effettuata da un dispositivo che prende il nome di convertitore analogico-digitale. Si ha così una sequenza di campioni, corrispondenti ai valori di $u(t)$ negli istanti di campionamento $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Si vuole ora definire un sistema a tempo discreto che abbia come ingresso la sequenza di campioni e che fornisca in uscita una sequenza di numeri che siano una buona approssimazione dell'integrale (o della derivata) della funzione $u(t)$ negli istanti di campionamento. L'accuratezza di tale approssimazione dipenderà dall'ampiezza dell'intervallo di campionamento T .

Per quanto riguarda l'integrazione, si supponga che si voglia calcolare:

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau.$$

Supponendo di fissare T e posto $t = kT$:

$$\begin{aligned} y(kT) &= \int_0^{kT-T} u(\tau) d\tau + \int_{kT-T}^{kT} u(\tau) d\tau \\ &= y((k-1)T) + \int_{(k-1)T}^{kT} u(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{1.12}$$

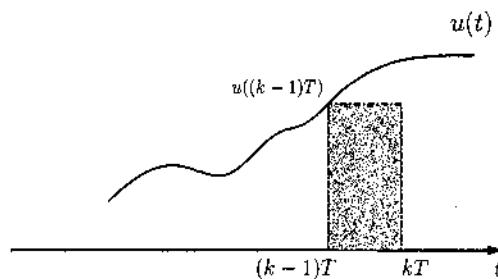


Figura 1.6

Ora l'integrale $\int_{kT-T}^{kT} u(\tau) d\tau$ può essere in prima analisi approssimato con il valore $Tu(kT - T)$, come si vede in Figura 1.6 che, sostituito nella (1.12), fornisce:

$$y_a(kT) = y_a(kT - T) + Tu(kT - T), \quad k = 1, 2, \dots$$

ove il pedice "a" specifica l'approssimazione. L'algoritmo individuato è dunque descritto dall'equazione alle differenze:

$$y_a(k) = y_a(k-1) + Tu(k-1) \quad (1.13)$$

in cui $y_a(0) = 0$ è la condizione iniziale. Poiché ai fini del calcolo di $y_a(k)$ per $k = 1, 2, \dots$ è necessario e sufficiente conoscere l'ingresso $u(k-1)$ ed il valore $y_a(k-1)$, quest'ultimo può essere interpretato come lo stato del sistema all'istante k . Posto quindi $x(k) = y_a(k-1)$ si ha:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + Tu(k) \\ y(k) &= x(k), \quad x(0) = 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

che fornisce la *rappresentazione con lo stato lineare, stazionario, a dimensione finita, a tempo discreto* che descrive l'algoritmo allo studio.

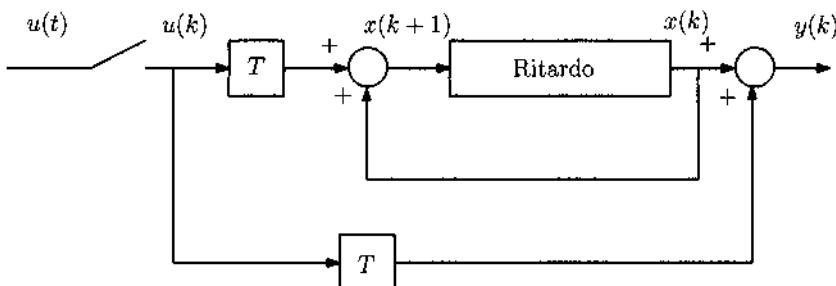


Figura 1.7: Schema di realizzazione dell'algoritmo di integrazione.

Questo semplice algoritmo di calcolo può essere realizzato fisicamente supponendo di disporre di componenti che effettuano il campionamento, la moltiplicazione per una costante e generano un ritardo, secondo lo schema di Figura 1.7. Riguardo la scelta di T è evidente che tanto minore è l'ampiezza dell'intervallo di campionamento, tanto migliore è l'approssimazione. Per contro aumenta il numero $N = \lceil \frac{t_f}{T} \rceil$ delle iterazioni necessarie, ove $\lceil \cdot \rceil$ indica l'approssimazione intera per eccesso di $\frac{t_f}{T}$.

1.2.2 La dinamica del prezzo

La dinamica del prezzo in condizioni di equilibrio tra domanda e offerta in assenza di concorrenza su un fissato bene, può essere ben rappresentata dal modello

qui proposto. Se si indica con p il prezzo unitario, con d la domanda e con s l'offerta, è usuale in un contesto di analisi microeconomica assumere che sussistano, tra domanda e prezzo, e produzione e prezzo, le seguenti relazioni

$$d(p) = d_0 - ap \quad (1.15)$$

$$s(p) = s_0 + bp, \quad a, b > 0 \quad (1.16)$$

La domanda diminuisce mentre la produzione aumenta all'aumentare del prezzo, rispetto a valori nominali collegati ad un valore minimo garantito della domanda ed a caratteristiche degli apparati di produzione. Ulteriori considerazioni lasciano intendere che è ragionevole supporre che la domanda e l'offerta varino nel tempo secondo le due seguenti equazioni

$$s(t+1) = s_0 + bp(t) \quad (1.17)$$

$$d(t+1) = d_0 - ap(t+1). \quad (1.18)$$

La prima di esse mette in luce che vi è un ritardo nell'influenza del prezzo sulla produzione (si pensi ai tempi di produzione del bene); ritardo che non sussiste nell'influenza del prezzo sulla domanda, come specificato dalla seconda equazione.

Se ora si suppone che la domanda sia interamente soddisfatta dall'offerta (condizioni di equilibrio: tutto il prodotto viene venduto) sarà sufficiente porre $s(t+1) = d(t+1)$ per ottenere l'andamento del prezzo in funzione dei parametri a , la *propensione al risparmio* del consumatore, b , la *propensione al guadagno* del produttore, e dei valori nominali di domanda e offerta

$$p(t+1) = -\frac{b}{a}p(t) + \frac{d_0 - s_0}{a}. \quad (1.19)$$

Ne risulta l'esistenza di un equilibrio per la dinamica del prezzo, equilibrio che si ottiene uguagliando $p(t+1)$ a $p(t)$, e che risulta essere

$$p(t+1) = p(t) = \frac{d_0 - s_0}{a + b}.$$

Il modello (1.19) può essere impiegato per prevedere l'andamento del prezzo in condizioni di perturbazione rispetto all'equilibrio. Come è facile verificare si avrà un ritorno verso la condizione di equilibrio (stabilità) se $b < a$, un allontanamento (instabilità) se $b > a$. Come si è detto tali coefficienti rappresentano, rispettivamente, la propensione al risparmio (dell'acquirente) e la propensione (ambizione) al guadagno dell'imprenditore. L'interpretazione economica della condizione di stabilità dell'equilibrio prima espressa, conduce alla conclusione seguente: l'eccessiva ambizione di guadagno dell'imprenditore produce instabilità di mercato.

1.2.3 La dinamica del prodotto nazionale lordo

Ad un primo livello di approssimazione la dinamica del prodotto nazionale lordo di una nazione (uscita) al variare delle spese del governo (ingresso) può essere

rappresentata dai due modelli che raccolgono le caratteristiche distintive delle leggi macroeconomiche salienti che risalgono ai due grandi economisti Keynes e Samuelson. Se si indicano con $P(t)$ il prodotto nazionale, $C(t)$ i consumi, $I(t)$ gli investimenti e $G(t)$ le spese per il governo, si ha

$$P(t) = C(t) + I(t) + G(t). \quad (1.20)$$

Inoltre, come ipotizzato dagli studi di modellistica economica e collegato alle teorie classiche, si possono assumere i consumi al tempo t proporzionali al prodotto nazionale nello stesso periodo secondo un coefficiente, m che rappresenta la *propensione marginale al consumo*

$$C(t) = mP(t), \quad 0 < m < 1 \quad (1.21)$$

e, ancora in base alle teorie classiche, assumere che l'incremento del prodotto nazionale sia proporzionale all'investimento secondo un fattore r , detto *fattore di crescita*,

$$P(t+1) - P(t) = rI(t).$$

Sostituendo in quest'ultima relazione $I(t)$ con la sua espressione calcolata dalle precedenti, si ottiene la seguente relazione

$$P(t+1) = [1 + r(1-m)]P(t) - rG(t)$$

che collega l'incremento del prodotto nazionale lordo alle spese per il governo. Si tratta di un modello a tempo discreto di dimensione uno in cui l'uscita coincide con lo stato.

Una diversa caratterizzazione, che meglio si presta a descrivere il fenomeno in un economia di mercato, è quella introdotta dell'economista Samuelson. Questa diversa caratterizzazione si ottiene portando le due seguenti variazioni: i consumi sono ancora assunti proporzionali al prodotto, ma nel precedente periodo, ciò che porta a sostituire la (1.21) con la relazione seguente

$$C(t+1) = mP(t), \quad 0 < m < 1;$$

inoltre gli investimenti sono assunti proporzionali all'incremento di consumo, e quindi solo indirettamente al prodotto lordo, secondo la relazione

$$I(t+1) = \mu(C(t+1) - C(t)).$$

Effettuando le sostituzioni si ottengono le seguenti relazioni

$$C(t+1) = mC(t) + mI(t) + mG(t)$$

$$I(t+1) = \mu(m-1)C(t) + \mu mI(t) + \mu mG(t)$$

che assieme alla (1.20) possono essere impiegate per descrivere, secondo un diverso punto di vista, l'evoluzione del prodotto lordo in funzione della spesa. Ottieniamo in questo caso un modello a tempo discreto di dimensione due in cui le

variabili $C(t)$ e $I(t)$ rappresentano lo stato e l'equazione di uscita è la (1.20). Si tratta di una *rappresentazione con lo stato, lineare, stazionaria, di dimensione due, di un sistema a tempo discreto* della forma:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

dove:

$$A = \begin{pmatrix} m & m \\ \mu(m-1) & \mu m \end{pmatrix}, \quad B = m \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 1 \quad 1).$$

1.2.4 Un sistema radar di inseguimento

Un ulteriore esempio di modello astratto qui proposto è dato dalla procedura di calcolo della posizione di un aeromobile, seguito mediante un sistema radar. Esso fornisce un interessante esempio di sistema a tempo discreto. Un radar trasmette segnali impulsivi, che si propagano nello spazio alla velocità della luce ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s), raggiungono l'aeromobile e vengono in parte riflessi.

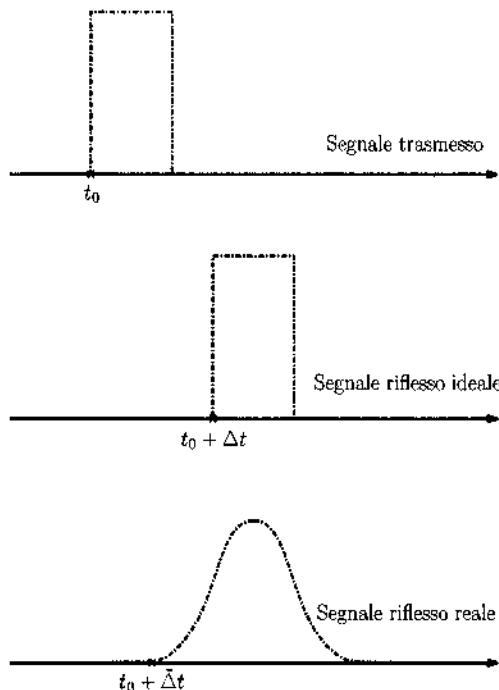


Figura 1.8

Tali segnali possono essere così captati, indeboliti a causa dell'assorbimento da parte dell'aeromobile e della riflessione non direzionale. In condizioni ideali il segnale che si ripresenta in ricezione ha una forma impulsiva (Figura 1.8).

Se Δt è l'intervallo di tempo intercorso tra l'emissione del segnale incidente e la ricezione di quello riflesso ne segue che la distanza radar-aeromobile è (in metri):

$$u = c \frac{\Delta t}{2}.$$

Nella realtà, però, il segnale riflesso ha una forma diversa da quella impulsiva, che dipende dalle caratteristiche dell'aeromobile, dai livelli di rumore presenti, etc., e non è possibile valutare in modo diretto l'intervallo di tempo Δt . È quindi necessario mettere a punto un sistema che fornisca una stima, $\bar{\Delta}t$, di Δt . Indicando con \bar{u} e Δu rispettivamente la distanza stimata e l'errore di stima, si ha:

$$\bar{u} = c \frac{\bar{\Delta}t}{2}, \quad \Delta u = c \frac{(\bar{\Delta}t - \Delta t)}{2}.$$

Per ottenere una buona stima di Δt vengono fatte periodiche rilevazioni trasmettendo più impulsi distanti tra loro T secondi. Le misure $u(0), u(1), u(2), \dots$ così effettuate vengono fornite in ingresso ad una procedura di calcolo che fornisce una stima della distanza con la precisione desiderata. Poiché inoltre il sistema radar deve essere in grado di inseguire oggetti che si muovono ad alta velocità è necessario che a partire dalle rilevazioni suddette, la procedura di calcolo fornisca, non solo una buona stima della posizione presente ma anche una buona stima della velocità e posizione futura.

È possibile realizzare un sistema a tempo discreto che implementi una tale procedura. Si indichi a tal fine con $u(k)$ la misura, affetta da rumore, della posizione dell'oggetto dedotta dal k -esimo impulso riflesso, con $y(k)$ la stima della posizione al k -esimo impulso, dopo l'elaborazione, con $\dot{y}(k)$ la stima della velocità dell'oggetto al k -esimo impulso, dopo l'elaborazione, con $y_p(k)$ la predizione della posizione al k -esimo impulso dedotto dall'impulso $(k-1)$ -esimo, dopo l'elaborazione.

Se sono disponibili i valori stimati della posizione e della velocità al $(k-1)$ -esimo impulso radar, una predizione plausibile della posizione è:

$$y_p(k) = y(k-1) + T\dot{y}(k-1). \quad (1.22)$$

La successiva misura della posizione $u(k)$ rende poi possibile la stima secondo la seguente relazione:

$$y(k) = y_p(k) + \alpha[u(k) - y_p(k)], \quad (1.23)$$

nella quale si tiene conto dell'errore rilevato $u(k) - y_p(k)$, ed α è una costante positiva. La stima della velocità, infine, è data da:

$$\dot{y}(k) = \dot{y}(k-1) + \frac{\beta}{T}[u(k) - y_p(k)], \quad (1.24)$$

dove T è il periodo di trasmissione degli impulsi e $\beta > 0$.

Le relazioni (1.22)-(1.24) sono note come *equazioni di inseguimento $\alpha-\beta$* ($\alpha-\beta$ tracker) e descrivono una procedura tipica nell'inseguimento radar. I parametri

α e β possono essere selezionati in modo da garantire risposte con diverse caratteristiche. Sostituendo la (1.22) nelle (1.23) e (1.24) si ottiene, con semplici passaggi:

$$\begin{aligned} y(k) &= (1-\alpha)y(k-1) + T(1-\alpha)\dot{y}(k-1) + \alpha u(k) \\ \dot{y}(k) &= -\beta y(k-1) + (1-\beta)\dot{y}(k-1) + \beta u(k) \end{aligned} \quad (1.25)$$

e introducendo come variabili di stato:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= y(k-1) \\ x_2(k) &= \dot{y}(k-1) \end{aligned} \quad (1.26)$$

e sostituendo nelle (1.25) e (1.22), si ottiene:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= (1-\alpha)x_1(k) + T(1-\alpha)x_2(k) + \alpha u(k) \\ x_2(k+1) &= -\frac{\beta}{T}x_1(k) + (1-\beta)x_2(k) + \frac{\beta}{T}u(k) \\ y_p(k) &= x_1(k) + Tx_2(k). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Esse costituiscono una *rappresentazione con lo stato, lineare, stazionaria, a dimensione finita, di un sistema a tempo discreto* della forma:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y_p(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (1.28)$$

dove:

$$\begin{array}{ll} A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & T(1-\alpha) \\ -\frac{\beta}{T} & 1-\beta \end{pmatrix} & B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{\beta}{T} \end{pmatrix} \\ C = \begin{pmatrix} 1 & T \end{pmatrix} & D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Effettuando una trasformazione di coordinate $z = Tx$, si ottiene: $z(t+1) = Tz(t) + TBu(t)$ e poiché $x = T^{-1}z$, si ha in definitiva

$$\begin{aligned} z(t+1) &= TAT^{-1}z(t) + TBu(t) \\ y_p(t) &= CT^{-1}z(t) + Du(t) \end{aligned}$$

1.2.5 Evoluzione della popolazione per classi di età

I modelli di popolazione sono usati nella pianificazione, nell'analisi e nella previsione della struttura demografica della popolazione di una certa area ad un certo tempo prefissato, a partire da una distribuzione nota di tale popolazione, sulla base di determinate assunzioni sul numero delle nascite e di decessi che avranno luogo durante ciascun periodo, e degli effetti dell'emigrazione sull'area considerata.

Verrà qui derivato un modello fondamentale di sopravvivenza, basato sul concetto di classi di età. Tale modello, sviluppato per analizzare l'aumento naturale della popolazione, può essere generalizzato in modo da tenere conto degli effetti della migrazione e delle interazioni tra aree diverse.

La popolazione viene suddivisa in n classi, ciascuna costituita da individui con età compresa nell'intervallo $[k\Delta t, (k+1)\Delta t)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Se ad esempio $\Delta t = 10$ anni, alla prima classe appartengono individui di età tra 0 e 9 anni, alla seconda quelli di età tra 10 e 19 anni, e così via.

Posto $T = \Delta t$, indicato con k il periodo $[kT, (k+1)T)$ e:

$x_i(kT)$ = numero di persone nella classe d'età i , all'inizio del periodo k ;

$b_i(k)$ = tasso di natalità della classe d'età i nel periodo k ;

$s_i(k)$ = tasso di sopravvivenza della classe d'età i nel periodo k ;

$y(kT)$ = popolazione presente all'inizio del periodo k

valgono le seguenti relazioni di bilancio:

$$\begin{aligned} x_1((k+1)T) &= b_1(k)x_1(kT) + \dots + b_n(k)x_n(kT) = \sum_{i=1}^n b_i(k)x_i(kT) \\ x_2((k+1)T) &= s_1(k)x_1(kT) \\ x_3((k+1)T) &= s_2(k)x_2(kT) \\ &\vdots \\ x_n((k+1)T) &= s_{n-1}(k)x_{n-1}(kT). \end{aligned} \tag{1.29}$$

Si noti che al tempo $(k+1)T$ gli individui nella prima classe d'età sono i nuovi nati nel periodo $[kT, (k+1)T)$, mentre per $i = 2, \dots, n$ gli individui nell' i -esima classe d'età sono quelli sopravvissuti che appartenevano alla classe $i-1$ nel periodo precedente. Si noti inoltre che i coefficienti b_i non nulli sono quelli delle classi intermedie, per cui ad esempio $b_1(t) = 0$, $b_{n-2}(t) = b_{n-1}(t) = b_n(t) = 0$. Infine:

$$y(kT) = x_1(kT) + \dots + x_n(kT).$$

Si ottiene così la rappresentazione con lo stato lineare di un sistema a tempo discreto autonomo, ossia privo di ingresso, del tipo:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A(t)x(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{1.30}$$

dove $t = kT$, $s_i(kT) = s_i(k)$, x è un vettore di dimensione $(n \times 1)$ e:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & b_2(t) & b_3(t) & \dots & 0 & 0 \\ s_1(t) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \quad C = (1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1).$$

Nella matrice $A(t)$ si è messo in evidenza il fatto che gli indici di natalità sono in genere nulli per le prime ed ultime classi di età. Si noti che il modello è non stazionario se si assume che la natalità e la sopravvivenza varino da periodo a periodo.

Il modello (1.30) consente, a partire dalla distribuzione della popolazione all'istante t_0 , ossia dallo stato del sistema $x(t_0)$, di valutare la crescita una volta disponibili i tassi di natalità e sopravvivenza.

Nei modelli demografici utilizzati per previsioni a breve scadenza, suddividendo il periodo di tempo in sottointervalli $T = \frac{\Delta t}{\delta}$ ed indicando con $p_i(kT)$ il tasso di transizione dalla classe i alla classe $i+1$ nel periodo $[kT, (k+1)T]$, si hanno le relazioni di bilancio:

$$\begin{aligned} x_1((k+1)T) &= (s_1(kT) - p_1(kT) + b_1(kT))x_1(kT) + \dots + b_n(k)x_n(kT) \\ x_2((k+1)T) &= p_1(kT)x_1(kT) + (s_2(k) - p_2(kT))x_2(kT) \\ &\vdots \\ x_{n-1}((k+1)T) &= p_{n-2}(kT)x_{n-2}(kT) + (s_{n-1}(kT) - p_{n-1}(kT))x_{n-1}(kT) \\ x_n((k+1)T) &= p_{n-1}(kT)x_{n-1}(kT) + s_n(kT)x_n(kT) \\ y(kT) &= x_1(kT) + \dots + x_n(kT). \end{aligned} \tag{1.31}$$

Rispetto alle equazioni (1.29), si tiene conto qui del fatto che solo la frazione $p_i(kT)x_i(kT)$ degli individui della classe i al tempo $t = kT$ sono nella classe d'età $i+1$ al tempo $(k+1)T$.

Se il modello rappresentato dalle (1.31) viene utilizzato per previsioni ed analisi su un periodo breve, è giustificato assumere $b_i(kT)$, $s_i(kT)$, $p_i(kT)$ costanti. In tal caso si ha una rappresentazione del sistema lineare, a dimensione finita, a tempo discreto, in cui la matrice dinamica è costante e pari a:

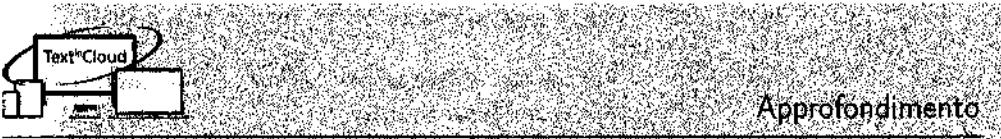
$$A = \begin{pmatrix} s_1 - p_1 & b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ p_1 & s_2 - p_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & s_3 - p_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & s_n \end{pmatrix},$$

in cui si è supposto che $b_1 = b_{n-1} = b_n = 0$.

Nei semplici modelli proposti si possono tenere in conto gli effetti della migrazione aggiungendo nei bilanci un termine che esprime la migrazione netta della popolazione per ciascuna classe d'età i tra kT e $(k+1)T$. Indicando con $u(t) = u(kT)$ il vettore ($n \times 1$) della migrazione netta per classi d'età, si otterrebbe così una rappresentazione con lo stato lineare, a dimensione finita, stazionaria, a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + u(t) \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \tag{1.32}$$

Nota la distribuzione iniziale $x(t_0)$ della popolazione in classi d'età e l'andamento della migrazione netta per classi d'età $u(i)$, è possibile valutare l'evoluzione della popolazione stessa.



1.3

Trasformazioni dello stato e rappresentazioni equivalenti

Il concetto di equivalenza tra rappresentazioni è collegato alla non unicità nella scelta delle variabili di stato per descrivere un dato fenomeno dinamico; a diverse scelte corrispondono rappresentazioni diverse tra loro. Come si è già osservato nella costruzione del modello della rete elettrica, la scelta delle variabili di stato è rappresentativa delle condizioni degli elementi con memoria, e non è univoca. La carica elettrica sul condensatore e il flusso nell'induttanza rappresentano, ad esempio, per la rete RLC in questione una possibile alternativa.

Ma come cambia il modello del sistema, la sua rappresentazione, al cambiare delle variabili di stato?

Il cambiamento delle variabili di stato si realizza mediante l'applicazione di una funzione biunivoca che modifica la rappresentazione del vettore che in luogo di essere espresso dalle n componenti $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ è espresso, nelle nuove coordinate, dalle n componenti $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)'$. Una trasformazione lineare di variabili di stato si realizza definendo le nuove variabili

$$z = Tx \quad |T| \neq 0$$

Si consideri dunque il modello matematico

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{1.33}$$

dove l'applicazione di Δ può rappresentare sia la derivata che l'operazione di incremento temporale unitario, e sia T una fissata trasformazione di coordinate

$$z = Tx \quad |T| \neq 0.$$

L'applicazione di Δ alla nuova variabile $z(t)$ si scrive:

$$\begin{aligned} \Delta z(t) &= T\Delta x(t) = TAx(t) + TBu(t) = \\ &= TAT^{-1}z(t) + TBu(t) \\ y(t) &= CT^{-1}z(t) + Du(t). \end{aligned} \tag{1.34}$$

Si ottiene dunque un modello matematico dello stesso tipo del precedente con matrici TAT^{-1} , in luogo di A , TB , in luogo di B e CT^{-1} in luogo di C , mentre la D resta la stessa. Tali modelli sono equivalenti, in quanto descrivono lo stesso oggetto, e sono tutti rappresentati da una terna di matrici che sono collegate tra di loro mediante una trasformazione di coordinate dello spazio di stato.

La trasformazione di coordinate che corrisponde ad un fissato cambiamento di variabili di stato è quella che si realizza selezionando come nuova base dello spazio di stato gli n vettori indipendenti che sono rappresentati, nelle coordinate x , dalle colonne di T^{-1} . Se infatti si ricorda che le coordinate di un vettore sono i coefficienti della combinazione lineare che lo rappresenta rispetto ad una fissata base,

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_n.$$

si comprende subito che l' i -esima colonna di T^{-1} , ottenuta moltiplicando la matrice T^{-1} per \mathbf{e}_i (i -esimo vettore di base nelle coordinate z), rappresenta, nelle coordinate x , l' i -esimo vettore delle nuova base

$$x = T^{-1}z = T^{-1} \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{g}_i.$$

La trasformazione di coordinate dello spazio si realizza dunque fissando i nuovi vettori di base, espressi nelle coordinate x da $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n$ ed impiegando una T data da

$$T^{-1} = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n).$$

Lo studente non avrà difficoltà ad applicare le precedenti considerazioni ad alcuni degli esempi precedenti e verificare, ad esempio, come la diversa scelta delle variabili di stato nel caso del circuito elettrico nel Paragrafo 1.1.2 corrisponde a quanto ora indicato. In particolare, i modelli (1.6) e (1.7) sono equivalenti a meno della trasformazione di coordinate

$$x = \mathbf{e}_1 + \frac{1}{C} \mathbf{e}_2$$

ottenendo quindi

$$z = Tx, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Si noti che la scelta di nuove variabili di stato collegate alle vecchie da una trasformazione lineare non è la sola possibile; ciò che è necessario è che il collegamento tra esse sia dato mediante una funzione invertibile. Si possono, in altri termini, anche impiegare trasformazioni di coordinate non lineari; ciò che si otterrà in questo caso è una rappresentazione con lo stato non lineare del sistema.

Esempio 1.3.1 Si consideri una rappresentazione di dimensione uno

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \quad y(t) = cx(t).$$

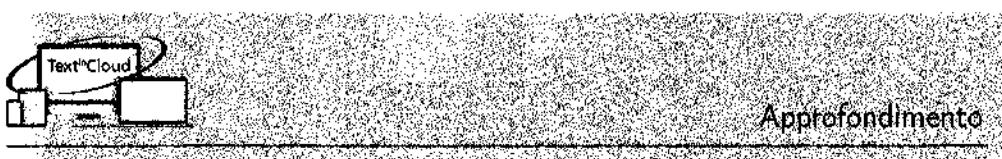
Si applichi la trasformazione di coordinate non lineare

$$z = e^x \quad x = \ln z.$$

Si ottiene

$$\dot{z}(t) = e^x(ax(t) + bu(t)) = az(t)\ln z(t) + bz(t)u(t) \quad y(t) = c\ln z(t)$$

che esprime nella variabile z un collegamento non lineare tra $y(t)$ e $u(t)$.



1.4

Modelli equivalenti di sistemi fisici differenti

Se è vero che esistono modelli matematici diversi (le rappresentazioni equivalenti) che descrivono uno stesso sistema fisico, è anche vero che uno stesso modello può descrivere diversi sistemi fisici. È proprio questo aspetto, tipico dell'astrazione matematica alla quale ci riferiamo, che orienta verso una classificazione in classi di modelli e allo studio delle proprietà della classe. Questo aspetto viene messo in luce con un semplice esempio.

Si considerino i due sistemi fisici della Figura 1.9. Il primo relativo alla dinamica delle temperature T_1 e T_2 nelle due camere isolate interne ad un componente al variare della temperatura dell'involucro esterno supposto di metallo; il secondo relativo alla dinamica delle tensioni ai capi dei due condensatori del circuito elettrico di figura. Tale circuito può essere considerato l'equivalente elettrico del sistema termico.

Se infatti si assume che la tensione elettrica $v(t)$ corrisponda alla temperatura $T(t)$ e la corrente $i(t)$ corrisponda alla quantità di calore $q(t)$, le equazioni di conduzione e immagazzinamento termico

$$q(t) = \frac{1}{R}(T_2(t) - T_1(t)) \quad \frac{dT(t)}{dt} = \frac{q(t)}{C}$$

trovano una corrispondenza immediata nelle equivalenti elettriche

$$i(t) = \frac{1}{R}(v_2(t) - v_1(t)) \quad \frac{dv(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C}$$

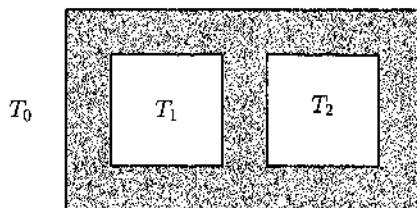
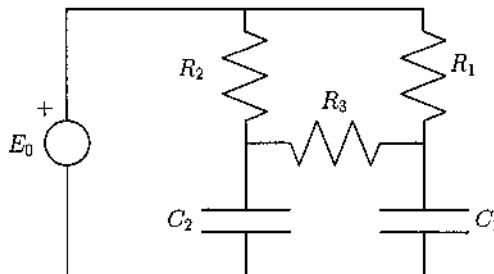
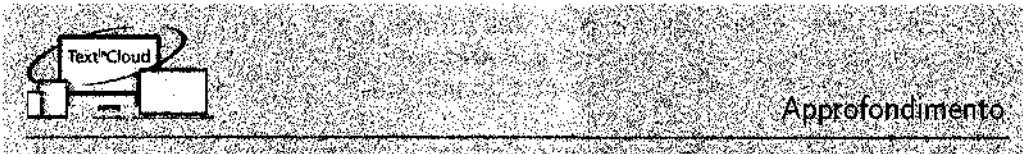


Figura 1.9

ove si è assunto che R e C rappresentino la resistenza e la capacità termica ed elettrica, espresse in *grado/caloria* e *caloria secondo/grado, ohm* e *farad*, rispettivamente.

Con le corrispondenze stabilite ($e_0(t)$ corrisponderà a $T_0(t)$) non è difficile verificare che le seguenti equazioni definiscono una rappresentazione differenziale del circuito valida anche per il sistema termico

$$\begin{aligned}\dot{v}_1(t) &= -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v_1(t) + \frac{1}{C_1 R_3} v_2(t) + \frac{1}{R_1 C_1} e_0(t) \\ \dot{v}_2(t) &= \frac{1}{C_2 R_3} v_1(t) - \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) v_2(t) - \frac{1}{C_2 R_2} e_0(t)\end{aligned}$$



Approfondimento

1.5

Approssimazioni lineari di sistemi non lineari

Si sono costruite fino a questo punto rappresentazioni lineari di sistemi lineari. Ma le rappresentazioni lineari possono essere impiegate per approssimare l'andamento di un sistema dinamico non lineare intorno a fissati punti di funzionamento (*approssimazioni lineari intorno a punti di equilibrio*).

Questo aspetto è la generalizzazione al caso dei sistemi dinamici, del semplice concetto di approssimazione di una curva nell'intorno di un fissato punto mediante la tangente in quel punto.

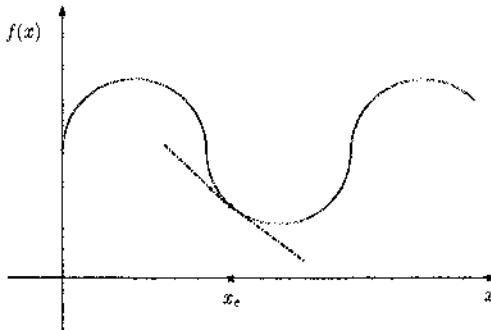


Figura 1.10

Con riferimento alla generica funzione non lineare $f(x)$ intorno ad un valore fissato $f(x_e)$ lo sviluppo in serie arrestato al primo ordine, fornisce

$$y = f(x) = f(x_e) + \frac{df}{dx} \Big|_{x_e} (x - x_e) + \dots$$

e posto $x_a = x - x_e$, $y_a = y - y_e$, $m = \frac{df}{dx}$, si ottiene la relazione lineare seguente che approssima la curva intorno ad x_e

$$y_a = mx_a.$$

La stessa idea può essere applicata alla funzione generatrice di un assegnato sistema non lineare a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) & f(x_e, u_e) &= 0 \\ y &= h(x, u) & h(x_e, u_e) &= h_e \end{aligned} \tag{1.35}$$

ottenendo:

$$\begin{aligned} f(x, u) &= f(x_e, u_e) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} \right) \Big|_{x_e, u_e} \left(\begin{matrix} x - x_e \\ u - u_e \end{matrix} \right) + \dots \\ &= f(x_e, u_e) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_e, u_e} (x - x_e) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x_e, u_e} (u - u_e) + \dots \end{aligned}$$

e posto

$$z = x - x_e, \quad v = u - u_e$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_e, u_e}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x_e, u_e},$$

si ottiene la rappresentazione lineare che descrive, in modo approssimato, la variazione dello stato intorno all'equilibrio,

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bv(t). \quad (1.36)$$

Procedendo allo stesso modo per l'uscita:

$$\begin{aligned} h(x, u) &= h(x_e, u_e) + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial u} \right) \Big|_{x_e, u_e} \begin{pmatrix} x - x_e \\ u - u_e \end{pmatrix} + \dots \\ &= h_e + \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x_e, u_e} (x - x_e) + \frac{\partial h}{\partial u} \Big|_{x_e, u_e} (u - u_e) + \dots \end{aligned}$$

e posto

$$C = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x_e, u_e}, \quad D = \frac{\partial h}{\partial u} \Big|_{x_e, u_e},$$

si ottiene, l'approssimazione lineare

$$y_a(t) = Cz(t) + Dv(t). \quad (1.37)$$

Le (1.36) e (1.37) costituiscono una rappresentazione con lo stato lineare, denominata rappresentazione lineare tangente, del modello (1.35). La rappresentazione lineare tangente può essere impiegata per approssimare intorno alla coppia (x_e, u_e) il comportamento del sistema non lineare (1.35).

Si noti che nello scrivere le precedenti relazioni si sono indicate con $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial u}$ le derivate del vettore f rispetto al vettore dello stato x e al vettore dell'uscita u , rispettivamente. Si ha per la prima, detta matrice jacobiana,

$$J(x, u) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

e per la seconda

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobiana $(n \times n)$, calcolata in (x_e, u_e) , è una matrice costante che abbiamo indicato con A ; la seconda è una matrice $(n \times p)$ che, calcolata in (x_e, u_e) abbiamo indicato con B ; le derivate di h rispetto ad x e u in (x_e, u_e) sono le matrici costanti C e D di dimensioni $(q \times n)$ e $(q \times p)$ rispettivamente.

Queste considerazioni estendono la possibilità di utilizzare i modelli lineari. La teoria lineare consente, dunque, di studiare localmente sistemi non lineari. L'interesse nel passaggio al modello approssimato non risiede, tuttavia, nell'uso del modello per descrivere il comportamento del sistema dato quanto nel suo impiego per inferire alcune proprietà inerenti il comportamento del sistema non lineare dato. Tra queste la proprietà di stabilità come sarà mostrato nel Capitolo 3.

1.5.1 Due esempi di applicazione

Pendolo

Si consideri un pendolo di massa m , sospeso ad un'asta rigida di peso trascurabile di lunghezza l su cui agisce secondo la tangente al moto una forza esterna $u(t)$. Si vuole scrivere un modello matematico che rappresenti lo spostamento sull'orizzontale, con origine nel punto di equilibrio, della proiezione lungo la verticale della massa del pendolo. L'equilibrio delle forze lungo la tangente al moto consente di scrivere

$$ml\ddot{\theta}(t) + mg \sin \theta(t) + kl\dot{\theta}(t) = u(t),$$

dove u rappresenta la forza esterna agente, e k è un coefficiente. Posto $x_1(t) = \theta(t)$ e $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ si ha, per quanto riguarda le equazioni di stato,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{l} \sin x_1(t) - \frac{k}{m} x_2(t) + \frac{1}{ml} u(t) \end{aligned} \tag{1.38}$$

cioè una rappresentazione non lineare del tipo

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t)$$

in cui l'uscita è pari a

$$y(t) = l \sin x_1(t).$$

Il calcolo delle coppie di equilibrio corrispondenti ad ingresso nullo, $u_e = 0$, fornisce $x_{e2} = 0$, $x_{e1} = h\pi$ cioè tutti gli stati di equilibrio con la massa nelle posizioni verticali sopra e sotto il punto di attacco. Intorno agli stati di equilibrio sopra il punto di attacco si ha il modello linearizzato:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{g}{l} x_1(t) - \frac{k}{m} x_2(t) + \frac{1}{ml} u(t) \\ y(t) &= l x_1(t) \end{aligned}$$

per gli altri:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{l} x_1(t) - \frac{k}{m} x_2(t) + \frac{1}{ml} u(t) \\ y(t) &= l x_1(t). \end{aligned}$$

Dinamica di due specie interagenti

Il seguente modello che descrive la dinamica di due specie interagenti, preda e predatore, è stato introdotto nel 1926 dal matematico italiano Vito Volterra e

prende il suo nome. Tale modello riesce ad interpretare l'aspetto più saliente di tale fenomeno: si tratta della presenza di situazioni di equilibrio che, se perturbate, vedono insorgere fenomeni di oscillazione (alternanza di sviluppo tra le specie).

Si assume, nella formulazione del modello, che:

- la preda cresce, in assenza di predazione, secondo la cosiddetta *equazione logistica*

$$\dot{x}_1(t) = ax_1(t) - kx_1^2(t)$$

(si tratta di un'equazione differenziale che mette bene in evidenza sia un andamento esponenziale della crescita nella fase iniziale dell'evoluzione e per modesti valori di densità, sia una tendenza asintotica ad un valore limite, $\frac{a}{k}$ (*capacità portante*), che tiene conto di fattori limitanti quali, ad esempio, la limitatezza delle risorse);

- il predatore ha come unico sostentamento la preda ed in assenza di questa diminuisce secondo un andamento esponenziale governato dalla seguente equazione differenziale

$$\dot{x}_2(t) = -cx_2(t);$$

- il tasso di predazione è proporzionale al prodotto degli individui delle due specie.

Con queste assunzioni le equazioni che descrivono l'evoluzione delle specie possono essere facilmente dedotte dalle precedenti equazioni. Si ottiene:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t) - kx_1^2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t) \\ y_1(t) &= x_1(t) \\ y_2(t) &= x_2(t).\end{aligned}$$

Si ha quindi ancora una volta un modello non lineare dello stesso tipo del precedente. Come è facile verificare si ha più di un punto di equilibrio. La questione sarà discussa più approfonditamente nel Capitolo 3, in cui si affronta lo studio della stabilità; intanto, si osservi che uno dei punti di equilibrio è pari a

$$\begin{aligned}x_{1e} &= \frac{c}{d} \\ x_{2e} &= \frac{ad - kc}{bd}.\end{aligned}$$

Intorno a tale punto di equilibrio l'evoluzione è approssimata da un sistema lineare in evoluzione libera con

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{kc}{d} & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad - kc}{b} & 0 \end{pmatrix}.$$



Approfondimento

1.6

Ulteriori esempi di rappresentazioni con lo stato**1.6.1 Dinamica newtoniana**

La dinamica del moto rettilineo di traslazione di un corpo rigido sottoposto ad una forza esterna $u(t)$, è ben descritta dalla seconda legge della dinamica che esprime l'equilibrio delle forze agenti

$$m\ddot{y}(t) + f_a(t) + f_e(t) + f_v(t) = u(t)$$

ove, f_a rappresenta l'attrito coulombiano e dinamico, f_e una eventuale forza elastica ed f_v uno smorzamento viscoso.

Diverse rappresentazioni matematiche delle forze agenti possono essere usate per descrivere il fenomeno.

Per quanto riguarda la forza elastica essa dipende dallo spostamento e può essere espressa mediante diverse relazioni. Per piccoli spostamenti, è usuale impiegare una relazione lineare del tipo

$$f_e = ky,$$

mentre per spostamenti di maggiore entità una buona approssimazione è data dalla seguente relazione

$$f_e = k(1 - \alpha^2 y^2)y \quad |\alpha y| < 1$$

che modella una diminuzione della forza elastica all'aumentare dello spostamento corrispondente ad un cedimento delle caratteristiche elastiche, oppure, in alternativa, da una relazione del tipo

$$f_e = k(1 + \alpha^2 y^2)y$$

che modella una aumento della forza elastica all'aumentare dello spostamento corrispondente ad un irrigidimento delle caratteristiche elastiche.

Per quanto riguarda l'attrito viscoso esso dipende dalla velocità $f_v = h(\dot{y})$, $h(0) = 0$ e per piccoli valori di v può essere assunto proporzionale ad essa per il tramite di un coefficiente di viscosità c

$$f_v = c\dot{y}.$$

Combinando uno smorzamento viscoso lineare con una forza elastica irrigidente ed una sollecitazione esterna periodica $A \cos \omega t$ si ottiene l'equazione di Duffin

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + Ky(t) + Ka^3y^3 = A \cos \omega t$$

classica nello studio delle eccitazioni periodiche di dinamiche non lineari.

Se poi si è anche in presenza di una forza di attrito f_a , essa manifesta un comportamento che dipende dalle condizioni di moto. In condizioni di riposo si ha una forza, $f_s = -\mu_s mg$, parallela alla superficie e in cui μ_s è il coefficiente di attrito statico compreso tra 0 ed 1. Il moto avviene in presenza di una forza agente superiore al citato valore limite. In assenza di forze esterne la massa resta ferma fino a quando $f_e \leq \mu_s mg$. In movimento la forza di attrito assume il valore $\mu_k mg$, $\mu_k \leq \mu_s$ coefficiente di attrito dinamico. In conclusione si ha $f_a = \mu_k mg sign(\dot{y})$ per $|\dot{y}| > 0$ e $f_a = f_s$ per $|\dot{y}| = 0$.

In regime di piccoli spostamenti quindi, la dinamica dello spostamento, in presenza di smorzamento viscoso lineare e attrito di stacco e dinamico assume, nelle variabili di stato $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$, la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{M}x_1(t) - \frac{b}{M}x_2(t) + \frac{u(t)}{M} - \eta(x_1, x_2)\end{aligned}$$

in cui la funzione non lineare η vale

$$\eta = \begin{cases} \mu_k mg sign(\dot{y}), & |\dot{y}| > 0 \\ -ky, & \dot{y} = 0 \text{ e } |y| \leq \frac{\mu_s mg}{k} \\ -\mu_s mg sign(y), & \dot{y} = 0 \text{ e } |y| > \frac{\mu_s mg}{k}. \end{cases}$$

È possibile semplificare l'analisi per studiare le situazioni in cui x_2 è diverso da zero. Per $x_2 > 0$ si ottiene

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{M}x_1(t) - \frac{b}{M}x_2(t) + \frac{u(t)}{M} - \mu_k g\end{aligned}$$

e per $x_2 < 0$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{M}x_1(t) - \frac{b}{M}x_2(t) + \frac{u(t)}{M} + \mu_k g.\end{aligned}$$

Si osservi che si possono utilizzare modelli lineari diversi per rappresentare il sistema in diverse condizioni di funzionamento (modellistica lineare a tratti).

1.6.2 Satellite in orbita circolare

La dinamica di un satellite artificiale, rappresentata in Figura 1.11, in coordinate polari è ben descritta dalle due equazioni differenziali del secondo ordine

$$\begin{aligned}\dot{r}(t) &= r(t)\dot{\theta}^2(t) - \frac{\beta}{r(t)^2} + u_1(t) \\ \ddot{\theta}(t) &= -2\frac{\dot{r}(t)\dot{\theta}(t)}{r(t)} + \frac{u_2(t)}{r(t)}.\end{aligned}$$

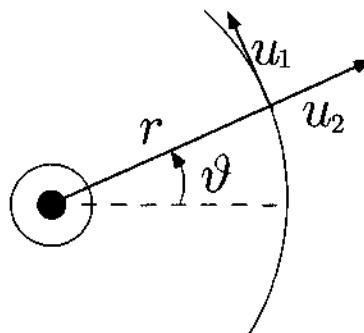


Figura 1.11: Un satellite artificiale.

Nelle precedenti equazioni differenziali $r(t)$ e $\theta(t)$ rappresentano la distanza dalla Terra e l'angolo rispetto ad un sistema di riferimento fisso nel piano orbitale, mentre gli altri parametri caratteristici, tra i quali la massa, sono stati normalizzati e caratterizzano β . In assenza di spinta radiale u_1 e tangenziale u_2 le soluzioni sono ellissi, iperboli o parabole. L'orbita più semplice è una circonferenza

$$r(t) = c_1 \quad \theta(t) = c_2$$

con $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = 0$, $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = \omega_0$ e $\omega_0 = \left(\frac{\beta}{r_0^3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

L'orbita nominale è dunque descritta da

$$r_r(t) = r_0 \quad \theta_r(t) = \omega_0 t + \theta_0.$$

Posto $x_1 = r$, $x_2 = \dot{r}$, $x_3 = \theta$, $x_4 = \dot{\theta}$ si ottiene la seguente rappresentazione con lo stato

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)x_4^2(t) - \frac{\beta}{x_1^2(t)} + u_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= -2\frac{x_2(t)x_4(t)}{x_1(t)} + \frac{u_2(t)}{x_1(t)}.\end{aligned}$$

La linearizzazione della dinamica, cioè la descrizione degli scostamenti rispetto all'orbita nominale

$$u_r(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_r(t) = \begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \\ \omega_0 t + \theta_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix},$$

dà la seguente rappresentazione lineare stazionaria

$$\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2r_0\omega_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\frac{\omega_0}{r_0} & 0 & 0 \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix} u(t).$$

1.6.3 Dinamica verticale di un missile

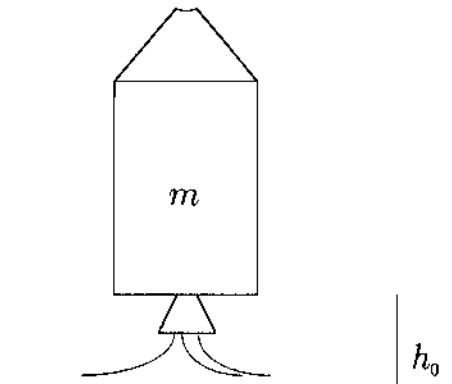


Figura 1.12: Dinamica verticale di un missile.

Il moto verticale di un missile, rappresentato in Figura 1.12 può essere descritto in prima approssimazione dall'equilibrio delle forze che si scrive

$$m(t)\ddot{v}(t) = -m(t)g + v_e \dot{m}(t)$$

dove v_e rappresenta la velocità relativa della massa espulsa, assunta costante. Posto $x_1 = h$, $x_2 = v$ e $x_3 = m$ e $\dot{m} = u$ si ottiene la seguente rappresentazione con lo stato

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -g + \frac{v_e u(t)}{x_3} \\ u(t) \end{pmatrix}.$$

Nel caso particolare, molto frequente nella pratica, in cui si assume una variazione di massa, u_0 , costante, ciò che corrisponde a rappresentare la variazione della massa mediante la relazione

$$m(t) = m_0 + u_0 t,$$

si ottiene

$$m(t)\dot{v}(t) = -m(t)g + v_e u_0$$

e, posto $x_1 = h$, $x_2 = v$,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -g + \frac{v_e u_0}{(m_0 + u_0 t)} \end{pmatrix} \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}x(t) \quad x(0) = 0\end{aligned}$$

Le variazioni delle evoluzioni rispetto ad una andamento di riferimento, quello in cui si assume la variazione di massa costante, sono rappresentate dalla linearizzazione intorno alla seguente traiettoria di riferimento

$$\begin{aligned}x_{3r}(t) &= m_0 + u_0 t \\ x_{2r}(t) &= -gt + v_e \ln\left(1 + \frac{u_0}{m_0} t\right) \\ x_{1r}(t) &= -\frac{g}{2}t^2 + \frac{m_0 v_e}{u_0} \left[\left(1 + \frac{u_0}{m_0} t\right) \ln\left(1 + \frac{u_0}{m_0} t\right) - \frac{u_0}{m_0} t \right]\end{aligned}$$

Nelle variabili $z = x - x_r$ e $v = u - u_r$, si ottiene:

$$\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{v_e u_0}{(m_0 + u_0 t)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_e}{(m_0 + u_0 t)} \\ 1 \end{pmatrix} v(t) \quad z(0) = x(0) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_0 \end{pmatrix}.$$

1.6.4 Motore elettrico in corrente continua

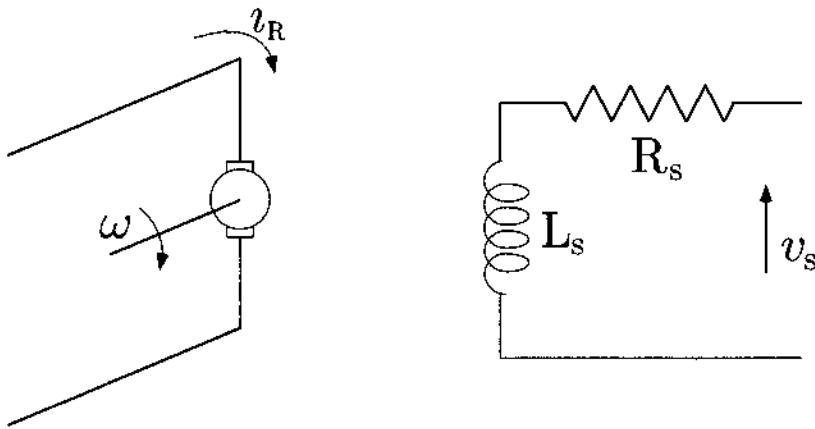


Figura 1.13: Motore elettrico in corrente continua.

Si vuole calcolare il modello matematico che descrive la dinamica del motore elettrico in corrente continua rappresentato in Figura 1.13. Si assume che

l'ingresso sia la tensione del circuito di eccitazione, $u(t) = v_s(t)$. Per il circuito d'eccitazione vale la seguente equazione alla maglia che esprime l'equilibrio delle tensioni

$$V_s(t) = R_s i_s(t) + L_s \frac{di_s(t)}{dt}.$$

Il flusso generato può essere espresso dalla relazione

$$\Phi(t) = L_s i_s(t).$$

Per il circuito d'armatura, vale la seguente equazione che esprime l'equilibrio delle tensioni:

$$V_r(t) - e_c(t) = R_r i_r(t) + L_r \frac{di_r(t)}{dt}$$

in cui la forza contro-elettromotrice è pari a

$$e_c(t) = k_c \Phi(t) \omega(t).$$

Infine, per quanto riguarda la parte meccanica si ha

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} + F \omega(t) = C_m(t)$$

in cui la coppia motrice, C_m , è data da

$$C_m(t) = k_m \Phi(t) i_r(t).$$

Nell'ipotesi di trasformazione senza perdite della potenza elettrica in potenza meccanica $K_c = K_m = K$, e posto $x_1 = i_s$, $x_2 = i_r$ e $x_3 = \omega$, si ottiene il modello matematico

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\frac{R_s}{L_s} x_1(t) + \frac{1}{L_s} u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{R_r}{L_r} x_2(t) + \frac{V_r}{L_r} - \frac{KL_s}{L_r} x_1(t) x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -\frac{F}{J} x_3(t) + \frac{KL_s}{J} x_1(t) x_2(t).\end{aligned}$$

Si tratta ancora una volta di un modello non lineare che può essere linearizzato intorno a condizioni di equilibrio per descrivere in modo approssimato il comportamento del sistema per piccole variazioni rispetto a tale situazione di equilibrio.

Per concludere si osservi che se si assume costante la corrente del circuito di eccitazione si ottiene il modello lineare introdotto al Paragrafo 1.1.2.

1.6.5 Levitazione magnetica

Si consideri il dispositivo in Figura 1.14 in cui una bobina elettromagnetica viene alimentata in corrente per sostenere il peso di una sfera e mantenerla in equilibrio ad una distanza x_e dalla bobina.

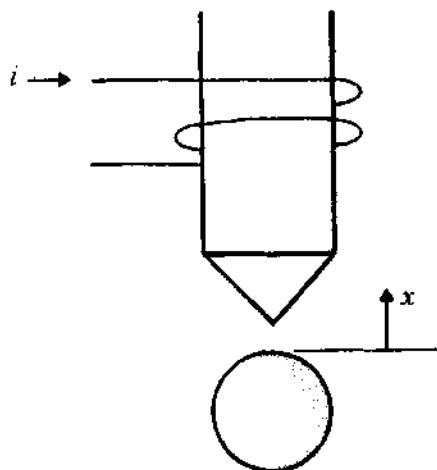


Figura 1.14: Levitazione magnetica.

La forza di attrazione esercitata su di un corpo metallico in funzione della distanza per diversi valori della corrente è rappresentata nei grafici di Figura 1.15.

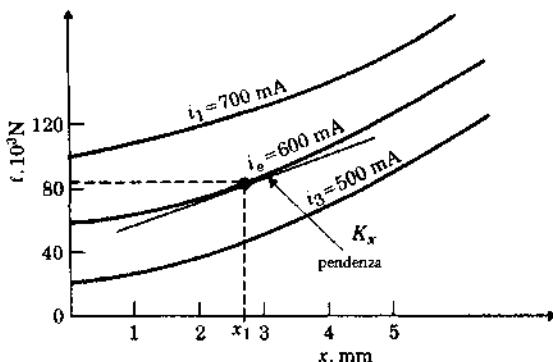


Figura 1.15

Da essi si deduce che una pallina del peso di $82 \cdot 10^{-3}$ Newton può essere mantenuta in equilibrio ad una distanza di 2.7 mm con una corrente di 600 mA.

Indicata con M la massa della pallina e con $f(x, i)$ la forza esercitata dalla bobina, il bilancio delle forze in un punto sulla verticale ad una distanza x si scrive

$$M\ddot{x}(t) = f(x(t), i(t)) - Mg$$

dove g indica l'accelerazione di gravità.

Intorno a x_e vale l'approssimazione lineare per $f(x, i)$

$$f(x, i) = f(x_e, i_e) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, i_e)(x - x_e) + \frac{\partial f}{\partial i}(x_e, i_e)(i - i_e).$$

Le derivate rispetto a x ed ad i , indicate rispettivamente con K_x e K_i , si calcolano nel modo seguente. K_x è la pendenza alla curva a corrente costante pari ad i_e nel punto di ascissa x_e ; nel caso in esame risulta pari a 14 N/m . K_i corrisponde alla variazione di forza, in x_e , rispetto alla corrente; nel caso in esame per $i_1 = 700 \text{ mA}$ la forza è pari a $122 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ e per $i_3 = 500 \text{ mA}$ la forza è pari a $42 \cdot 10^{-3} \text{ N}$. Si ha dunque

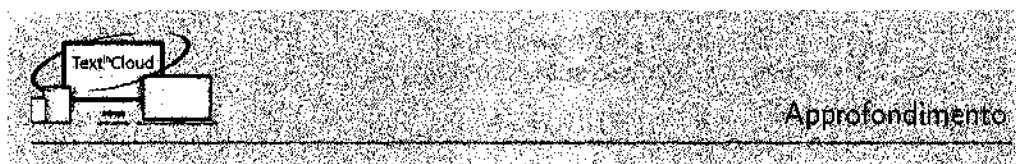
$$K_i = \frac{(122 - 42)10^{-3}}{700 - 500} = 0.4 \text{ N/A}$$

Sostituendo i valori numerici, si ottiene la seguente equazione differenziale, che governa il moto intorno all'equilibrio ($\zeta = x - x_e$ e $u = \delta i$)

$$(32 \cdot 10^{-3})\ddot{\zeta}(t) = 14\zeta(t) + 0.4\delta i(t)$$

ovvero

$$\ddot{\zeta}(t) = 1667\zeta(t) + 47.6u(t). \quad (1.39)$$



1.7

La messa in scala

Per evitare che nell'esecuzione di procedure numeriche di simulazione e calcolo i valori delle variabili trattate siano troppo diverse tra loro (o troppo grandi o piccole in assoluto rispetto alle caratteristiche del sistema di elaborazione), ciò che comporterebbe una non omogenea propagazione di errori di arrotondamento (o fenomeni di saturazione), è buona pratica fare in modo che i coefficienti delle equazioni assumano valori confrontabili. Valori tra 0.1 e 10 rappresentano una situazione auspicabile. Per fare questo si può procedere ad una scalatura delle variabili, ciò che ha anche un interesse fisico in quanto corrisponde ad una selezione delle unità di misura (scalatura delle variabili) e della velocità di esecuzione (scalatura del tempo) più consona allo studio del fenomeno. Nel caso dell'esempio descritto nel Paragrafo 1.6.5, ad esempio, nell'equazione (1.39) le distanze sono espresse in metri, mentre un'unità in mm è certamente più adatta a descrivere il fenomeno.

Ad un primo livello di generalità possiamo dire che una scalatura delle variabili corrisponde ad assumere una nuova variabile, v_n , a partire da una assegnata, v , e una nuova variabile temporale, t_n , in luogo di t , secondo le espressioni seguenti

$$v_n = \frac{v}{v_0}, \quad t_n = \omega_0 t.$$

Se si osserva che l'effetto della scalatura rispetto al tempo comporta che

$$\frac{d(\cdot)}{dt} = \frac{d(\cdot)}{d(t_n/\omega_0)} = \omega_0 \frac{d(\cdot)}{dt_n},$$

sostituendo nell'equazione del moto allo studio si ottiene, posto $\zeta(t) = \zeta_0 \zeta_n(t)$, $u(t) = u_0 u_n(t)$:

$$(\omega_0^2 \zeta_0) \frac{d^2 \zeta_n(t)}{dt_n^2} = (1667 \zeta_0) \zeta_n(t) + (47.6 u_0) u_n(t)$$

cioè

$$\frac{d^2 \zeta_n(t)}{dt_n^2} = \frac{1667}{\omega_0^2} \zeta_n(t) + \frac{47.6 u_0}{\omega_0^2 \zeta_0} u_n(t).$$

Scegliendo $\omega_0^2 = 1667$ (ω_0 circa uguale a 40) il coefficiente di $\zeta_n(t)$ è pari ad uno, ciò che corrisponde ad assumere una scala dei tempi pari a $\frac{1}{40}$ secondi. Se inoltre gli spostamenti vengono misurati in cm e le correnti in Ampere, cioè si sceglie $\zeta_0 = 0.01$ e $u_0 = 1$, si ottiene l'equazione

$$\frac{d^2 \zeta_n(t)}{dt_n^2} = \zeta_n(t) + 2.86 u_n(t).$$

Con riferimento al caso generale di un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine nella variabile di stato $x \in \mathbb{R}^n$ ed ingresso $u \in \mathbb{R}^p$, l'operazione di messa in scala conduce al seguente sistema

$$\dot{x}_n(t) = \frac{1}{\omega_0} S_x^{-1} A S_x x_n + \frac{1}{\omega_0} S_x^{-1} B S_u u_n$$

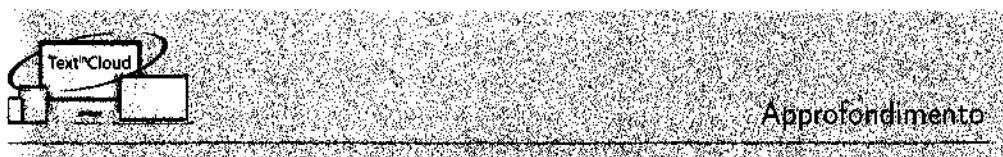
in cui il numero reale ω_0 rappresenta la variazione di scala temporale ed S_x ed S_u sono matrici diagonali quadrate, $(n \times n)$ e $(p \times p)$, dei coefficienti di scalatura associate alla trasformazione

$$x_n = S_x^{-1} x, \quad u_n = S_u^{-1} u.$$

CAPITOLO 2

Analisi dei Sistemi Lineari Stazionari nel dominio del tempo

Le rappresentazioni con lo stato lineari stazionarie (equivalentemente lineari tempo invarianti - LTI-) sono modelli che, come si è visto nel capitolo precedente, possono essere utilmente impiegati per descrivere direttamente o in modo approssimato, il comportamento di numerosi fenomeni e processi. Alla caratterizzazione di questi modelli si può pervenire in modo formale seguendo un approccio generale che parte dalla definizione di sistema dinamico astratto orientato (come proposto nell'approfondimento sottostante). Secondo tale approccio, le rappresentazioni con lo stato LTI sono infatti i modelli matematici da assumere nello studio dei sistemi lineari stazionari. Allo studio di tali rappresentazioni, e quindi allo studio delle proprietà dei sistemi lineari stazionari, è dedicato questo capitolo.



Approfondimento

Elemento cardine dell'analisi è la matrice di transizione nello stato che si riduce ad essere l'esponenziale di una matrice nel caso tempo-continuo, la funzione potenza di matrice nel caso tempo-discreto. I richiami di algebra delle matrici alla base del suo calcolo sono in Appendice A. Obiettivo principale dello studio è la struttura delle evoluzioni, dominata dalle caratteristiche di modi interni di funzionamento, i modi naturali del sistema, e di come le sue componenti influenzino le diverse modalità di funzionamento.

2.1

Sistemi a tempo continuo: rappresentazioni implicite ed esplicite

Lo studio prende le mosse dall'analisi di una rappresentazione con lo stato, lineare, stazionario, di dimensione n , definita dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x_0 = x(t_0) \in \mathbb{R}^n \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Le equazioni (2.1) stabiliscono la dipendenza delle q uscite, le componenti del vettore $y(t) \in \mathbb{R}^q$, dai p ingressi, le componenti del vettore $u(t) \in \mathbb{R}^p$, per il tramite delle n variabili intermedie che definiscono lo stato, $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Le matrici A ($n \times n$), B ($n \times p$), C ($q \times n$) e D ($q \times p$) sono, rispettivamente, la **matrice dinamica**, la **matrice degli ingressi**, la **matrice del legame stato-uscita** e la **matrice del legame ingresso-uscita**. Le (2.1) mettono in luce come l'uscita sia collegata allo stato e all'ingresso da una relazione istantanea, mentre lo stato dipenda dall'ingresso per il tramite di un'equazione differenziale. Come avremo occasione di verificare si tratta di una dipendenza di tipo dinamico, lineare e causale tra l'ingresso e l'uscita e le (2.1) ne costituiscono il modello che tecnicamente viene definito come la **rappresentazione implicita** (equivolentemente la rappresentazione differenziale) di un sistema dinamico orientato lineare stazionario di dimensione finita n . Il secondo membro della prima delle (2.1) $Ax(t) + Bu(t)$ prende il anche il nome di **funzione generatrice** del sistema, mentre $Cx(t) + Du(t)$ è la **trasformazione in uscita**.

Tale modello, sebbene non fornisca direttamente il collegamento esplicito tra l'ingresso e l'uscita, è di grande utilità non solo nel contesto dell'automatica, ove è alla base di numerosi metodi di progetto, ma anche nei processi di studio e simulazione in quanto emblematico di uno schema fisico mediante il quale si può emulare, nel suo funzionamento in tempo reale, il comportamento del sistema impiegando dispositivi che effettuano operazioni elementari quali la somma di funzioni del tempo, la moltiplicazione per costanti e l'integrale di funzioni.

Lo schema, riportato in Figura 2.1 comprende i blocchi A , B , C , D , costituiti da moltiplicatori per costanti, n operatori di integrazione e sommatori. Esso mette in luce la struttura del legame ingresso-uscita: vi è una parte dinamica, di tipo integrativo, ed una parte istantanea.

Il calcolo delle soluzioni delle (2.1), a partire da un fissato valore dello stato, $x_0 = x(t_0)$, assunto al tempo t_0 e da una fissato ingresso $u(t)$, definito da t_0 in poi, consente di ottenere una descrizione esplicita delle evoluzioni nello stato e in uscita. Le espressioni delle evoluzioni nello stato, $x(t)$, e in uscita,

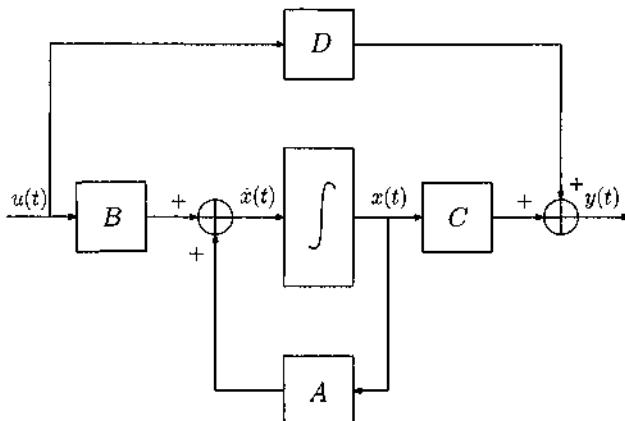


Figura 2.1: Schema di simulazione

$y(t)$, definiscono quella che viene chiamata la **rappresentazione esplicita** del sistema.

Il passaggio dalla rappresentazione implicita a quella esplicita, ciò che corrisponde al calcolo delle soluzioni delle (2.1), lo studio della struttura e delle proprietà delle soluzioni è l'oggetto del capitolo.

La rappresentazione esplicita del sistema assume la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ y(t) &= \Psi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.2)$$

dove le matrici Φ , H , Ψ e W sono definite a partire dalla seguente funzione di matrice:

$$e^{At} := I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \quad (2.3)$$

che per l'analogia con lo sviluppo in serie della funzione esponenziale viene denominata l'**esponenziale della matrice A**.

Derivando la serie termine a termine, è facile verificare che si ottiene

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A(I + At + A^2 \frac{t^2}{2} + \dots) = Ae^{At} = e^{At}A$$

e da ciò segue immediatamente che

$$x(t) = e^{At}x_0$$

è soluzione di

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad x(0) = x_0.$$

Tale soluzione è, come noto, unica e globalmente definita nel caso lineare allo studio. Risulta, dunque provato che Φ nella (2.2) assume l'espressione

$$\Phi(t) = e^{At} \quad (2.4)$$

Posto, inoltre,

$$H(t) = \Phi(t)B = e^{At}B \quad (2.5)$$

$$\Psi(t) = C\Phi(t) = Ce^{At} \quad (2.6)$$

$$W(t) = C\Phi(t)B + D\delta(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \quad (2.7)$$

è facile verificare che le (2.2) rappresentano le soluzioni delle (2.1). Infatti, derivando le (2.2), e ricordando il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, per il quale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t, \tau) d\tau \right) &= \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{d}{dt} f(t, \tau) d\tau \\ &\quad + f(t, \beta(t)) \frac{d\beta(t)}{dt} - f(t, \alpha(t)) \frac{d\alpha(t)}{dt}, \end{aligned}$$

si ottiene

$$\dot{x}(t) = A\Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t AH(t-\tau)u(\tau)d\tau + H(0)u(t).$$

Ponendo A in evidenza a sinistra tra i primi due addendi e ricordando che, in base alla definizione di $H(t)$, $B := H(0)$, si ottiene infine

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

Dalle definizioni di Ψ e W per la seconda delle (2.2) si ottiene

$$\begin{aligned} y(t) &= Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t \left(Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau) \right) u(\tau)d\tau \\ &= C \left(e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \right) + \int_{t_0}^t D\delta(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto della proprietà dell'**impulso unitario** $\delta(t)$: l'integrale di una funzione del tempo moltiplicata per l'impulso è pari al valore della funzione nell'istante in cui è centrato l'impulso (istante di tempo in cui si annulla l'argomento) ovvero, dato $t_1 \in [t_0, t]$

$$\int_{t_0}^t f(\tau) \delta(\tau - t_1) d\tau = f(t_1).$$

Rimane quindi mostrato che le (2.2) definiscono la rappresentazione esplicita del sistema descritto dalla rappresentazione implicita (o differenziale) (2.1).

Le precedenti espressioni mettono in evidenza alcuni fatti importanti:

- le **risposte nello stato e in uscita** corrispondenti ad un assegnato stato iniziale x_0 e ad un ingresso $u(\cdot)$, sono la somma di due evoluzioni: l'**evoluzione libera**, che corrisponde allo stato iniziale assegnato, x_0 , e all'ingresso nullo ($u(\cdot) = 0$), e l'**evoluzione forzata**, che corrisponde all'ingresso dato $u(\cdot)$ e allo stato iniziale nullo ($x_0 = 0$);
- l'evoluzione libera è una **funzione lineare** dello stato iniziale e come tale è espressa da un prodotto matrice-vettore, la matrice di transizione $\Phi(t)$ per lo stato iniziale x_0 ; l'evoluzione forzata è una funzione dell'integrale dell'ingresso, e come tale è un **funzionale causale e lineare** dell'ingresso. Per $D = 0$, la stretta causalità è espressa dalla dipendenza dell'uscita al tempo t dai valori dell'ingresso fino al tempo t , estremo dell'integrale escluso per le proprietà dell'integrale; la linearità deriva dalla proprietà dell'integrale che alla combinazione lineare degli ingressi associa la stessa combinazione lineare delle uscite corrispondenti ai singoli ingressi

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t W(t-\tau)(k_1 u_1(\tau) + k_2 u_2(\tau)) d\tau &= k_1 \int_{t_0}^t W(t-\tau) u_1(\tau) d\tau \\ &\quad + k_2 \int_{t_0}^t W(t-\tau) u_2(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

- $H(t)$ e $W(t)$, sono dette **matrici delle risposte impulsive** nello stato e in uscita, rispettivamente, in quanto hanno colonne che possono essere interpretate come risposte forzate ad ingressi impulsivi; per ogni $t_1 \in [t_0, t]$ e per ogni $u_0 \in \mathbb{R}^p$ si ha, infatti

$$\int_{t_0}^t W(t-\tau) u_0 \delta(\tau - t_1) d\tau = W(t - t_1) u_0,$$

e scegliendo $u_0 = \mathbf{e}_i$ si ottiene la i -esima colonna della matrice $W(t)$ (analoga per la matrice $H(t)$);

- la rappresentazione allo studio, sia nella sua forma implicita che esplicita, è stazionaria e descrive un sistema che è intrinsecamente stazionario. Tale proprietà, che corrisponde al fatto che la **risposta** non dipende dall'istante

di tempo iniziale t_0 , si manifesta nel modello implicito nella indipendenza dal tempo di A, B, C , e D e nella dipendenza da una sola variabile temporale delle matrici $\Phi(t), H(t), \Psi(t)$ e $W(t)$. Ciò che deriva dal fatto che se si indica con $\delta_T u(\tau) = u(\tau - T)$ la traslazione a destra della funzione $u(t)$, risulta,

$$\int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_T^{t+T} H(t+T-\tau)\delta_T u(\tau)d\tau$$

come si può verificare con il cambiamento di variabile $\zeta = (\tau - T)$.

- il comportamento forzato ingresso-uscita è descritto dalla $W(t)$; per tale motivo si usa dire che la $W(t)$ è un modello del comportamento forzato ingresso-uscita. Inoltre la *risposta impulsiva* (matrice delle risposte impulsive) è essa stessa interpretabile per quanto detto in precedenza come una risposta; vale dunque questa proprietà molto specifica, in base alla quale esiste una particolare risposta forzata che può essere utilizzata per calcolare ogni altra risposta forzata una volta noto l'ingresso (modello del comportamento forzato);
- la risposta forzata ha una struttura matematica molto particolare è pari all'integrale del prodotto della risposta impulsiva al tempo $(t - \tau)$ per l'ingresso al tempo τ ; se si pensa al caso di un solo ingresso, si tratta di integrare l'ingresso pesato nei vari istanti τ con valori della risposta impulsiva in $(t - \tau)$. Si tratta di un'integrale noto come **integrale di convoluzione**, spesso indicato con *

$$y_f(t) = W(t) * u(t) = \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t W(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

dove l'ultima uguaglianza è facilmente verificata con il cambio di variabile $\zeta = (t - \tau)$. Se inoltre si osserva che in base ad un risultato fondamentale dell'analisi, un funzionale causale lineare che esprime $\beta(t)$ in funzione di $\gamma(t)$ ha la forma di un integrale di convoluzione con un nucleo $K(t)$

$$\beta(t) = \int_0^t K(t-\tau)\gamma(\tau)d\tau$$

possiamo concludere che la risposta forzata è data da un funzionale lineare strettamente causale il cui nucleo è pari alla risposta impulsiva;

- nello studio dei sistemi dinamici orientati, in cui si studiano le relazioni tra insiemi di variabili distinte in ingressi \mathcal{U} ed uscite \mathcal{Y}

$$\mathcal{Y} = \mathcal{H}(\mathcal{U})$$

si usa distinguere i problemi diretti, finalizzati al calcolo delle uscite (calcolare \mathcal{Y} da \mathcal{H} e \mathcal{U}), da quelli inversi, finalizzati a calcolare una delle due entità matematiche a secondo membro a partire dalla conoscenza delle altre (calcolare \mathcal{U} da \mathcal{Y} e \mathcal{H} oppure calcolare \mathcal{H} da \mathcal{Y} e \mathcal{U}). Si tratta di problemi

di grande interesse nell'ingegneria: si pensi al caso in cui il sistema rappresenta un canale di trasmissione, l'ingresso le informazioni in partenza, l'uscita quelle in arrivo; un problema inverso è, ad esempio, quello che corrisponde a riconoscere il segnale trasmesso a partire dal segnale ricevuto e le caratteristiche del canale. Ebbene si vuole qui osservare che la risoluzione di un problema di questo tipo nel caso di un sistema dinamico lineare stazionario comporta un calcolo complesso noto come la *deconvoluzione*. Vedremo nel Capitolo 4 come sia possibile semplificare il problema;

- il fatto che il nucleo che caratterizza la risposta forzata di un sistema dinamico lineare stazionario coincide con una risposta forzata, la risposta all'impulso, semplifica il problema del calcolo del modello del comportamento forzato (il nucleo dell'integrale di convoluzione). Si tratta della semplificazione del problema inverso prima citato: dati $u(t)$ e $y(t)$ calcolare $K(t)$. In linea di principio dunque, dato un sistema dinamico lineare stazionario un modello matematico del comportamento forzato (un ente matematico che a partire dalla conoscenza dell'ingresso mi permette di calcolare l'uscita forzata) lo posso ottenere facendo il seguente esperimento: a partire dalle condizioni di riposo del sistema (stato zero) si applica un impulso, se ne misura la risposta e si calcola un'espressione matematica che la rappresenti; quello così calcolato è il modello cercato. Nella realtà una tale procedura, sebbene concettualmente corretta, è di difficile implementazione per l'impossibilità di realizzare l'impulso (un tempo denominato *percossa*). Vedremo nel seguito che altre procedure sperimentali possono essere implementate per l'identificazione del modello mediante esperimenti ingresso-uscita. Tali procedure di identificazione sono alternative a quelle di calcolo del modello matematico della rappresentazione con lo stato e vanno sotto il nome di procedure di modellistica a scatola nera. Qualche considerazione a proposito del problema della modellistica viene svolto alla fine del paragrafo sulla presenza dei modi naturali nella risposta impulsiva;
- vengono denominati ingressi canonici una classe di funzioni del tempo che se assunti in ingresso al sistema allo studio (lineare stazionario nel nostro caso) sollecitano comportamenti che consentono di individuare proprietà salienti del sistema. Quelli che qui interessano sono quelli che al pari della risposta impulsiva possono essere assunti a modello del comportamento forzato; si tratta delle funzioni

$$\delta_{-k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \delta_{-1}(t) \quad k = 1, 2, \dots$$

che sono denominate *funzioni canoniche di ordine k* . Se si assume per convenzione che per $k = 0$ si ottenga l'impulso $\delta(t)$, per $k = 1$ si ha il gradino unitario, la funzione che vale 1 per $t \geq 0$ (anche nota come funzione di Heaviside), per $k = 2$ la rampa lineare, la funzione che vale t per $t \geq 0$, per $k = 3$ la rampa parabolica, e così via, come mostrato in Figura 2.2.

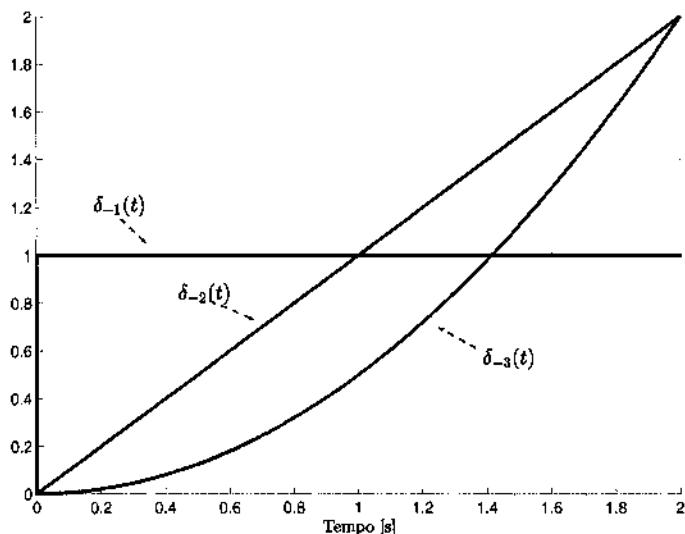


Figura 2.2: Alcuni esempi di ingressi canonici.

Si noti che per le sue caratteristiche, la moltiplicazione di una funzione per il gradino unitario viene utilizzata per mettere in luce che la funzione si deve intendere definita per $t \geq 0$.

Una proprietà delle funzioni canoniche è che ciascuna di esse, al crescere di k è ottenuta a partire da quella di ordine inferiore per integrazione (e ovviamente al decrescere di k mediante derivazione)

$$\delta_{-k}(t) = \int_0^t \frac{\tau^{k-2}}{(k-2)!} \delta_{-1}(\tau) d\tau = \frac{d}{dt} \delta_{-(k+1)}(t). \quad (2.8)$$

Una conseguenza importante, che giustifica l'appellativo di ingressi canonici, è che se si indica con $W_{-k}(t)$ la risposta forzata all'ingresso canonico di ordine k ,

$$W_{-k}(t) = \int_0^t W(t-\tau) \delta_{-k}(\tau) d\tau = \int_0^t W(t-\tau) \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} \delta_{-1}(\tau) d\tau,$$

la risposta forzata al generico ingresso $u(t)$ assume l'espressione:

$$y_f(t) = \int_0^t W_{-k}(t-\tau) \frac{d^k}{d\tau^k} u(\tau) d\tau. \quad (2.9)$$

Come già evidenziato, nella terminologia della Teoria dei Sistemi il modello (2.1) è detto implicito o differenziale, il corrispondente modello (2.2) è detto esplicito. Le caratteristiche delle risposte ed il loro calcolo dipende in modo significativo dalla matrice di transizione $\Phi(t)$ che domina la struttura della trasformazione

in uscita e delle matrici delle risposte impulsive nello stato ed in uscita. Il passaggio dal modello implicito al modello esplicito, affrontato nel seguito di questo capitolo, corrisponde al calcolo e alla caratterizzazione delle evoluzioni nello stato e in uscita.

È opportuno osservare sin da ora che il passaggio inverso, che nella pratica si presenta come la ricostruzione di una rappresentazione con lo stato (A, B, C, D) a partire da un modello del comportamento forzato, è, anch'esso, un problema di rilievo per le applicazioni. Infatti, come già osservato, ad una rappresentazione con lo stato corrisponde l'esistenza di uno schema di realizzazione (o simulazione). La ricostruzione di una rappresentazione隐式a a partire da un modello del comportamento forzato, è detto **problema della realizzazione** in quanto, una volta ottenuta la rappresentazione differenziale, lo schema citato consente sia una realizzazione fisica mediante i componenti indicati sia l'implementazione mediante un sistema di calcolo per la simulazione del sistema.

2.1.1 Da una descrizione esplicita alla rappresentazione differenziale

La rappresentazione con lo stato seguente:

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ y(t) &= \Psi(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \tilde{W}(t-\tau)u(\tau)d\tau + Du(t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

in luogo di quella implicita (2.1) potrebbe essere assunta come punto di partenza dello studio dei sistemi dinamici lineari stazionari.

Tali equazioni infatti ben descrivono il collegamento orientato (ingresso-uscita) di un sistema dinamico causale lineare stazionario. Il legame dinamico causale è ben rappresentato dalle (2.10): un funzionale strettamente causale che collega l'ingresso allo stato, la prima, e un funzionale semplicemente causale che collega l'ingresso all'uscita, la seconda; la linearità e la stazionarietà sono ben rappresentate dalla struttura lineare e dalla invarianza rispetto alla traslazione dei citati funzionali.

Un requisito essenziale delle evoluzioni di un sistema, che è alla base delle proprietà che ci permettono di verificare la corrispondenza dei modelli (2.1) e (2.10), è che componendo evoluzioni con uno stesso ingresso sull'intervallo $[t_0, t]$ si ottenga un'evoluzione; in formule posto $t \geq t_1 \geq t_0$ e fissato $x_0 = x(t_0)$ si ha

$$\begin{aligned} x(t_1) &= \Phi(t_1-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} H(t_1-\tau)u(\tau)d\tau \\ x(t) &= \Phi(t-t_1)x(t_1) + \int_{t_1}^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ &= \Phi(t-t_1)\left(\Phi(t_1-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} H(t_1-\tau)u(\tau)d\tau\right) + \int_{t_1}^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau \end{aligned}$$

e, per l'uscita,

$$y(t) = \Psi(t-t_1) \left(\Phi(t_1-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} H(t_1-\tau)u(\tau)d\tau \right) + \int_{t_1}^t \tilde{W}(t-\tau)u(\tau)d\tau + Du(t).$$

Da questo, si deduce che le matrici Φ , H , Ψ e \tilde{W} nelle (2.10) devono soddisfare le seguenti proprietà.

P1. Proprietà di semi-gruppo

$$\Phi(0) = I, \quad \Phi(t-t_0) = \Phi(t-t_1)\Phi(t_1-t_0), \quad \forall t_0 \leq t_1 \leq t$$

P2. Proprietà di fattorizzazione sulle matrici H , Ψ e \tilde{W} , ovvero $\forall t \leq t_1 \leq t$

$$\begin{aligned} H(t-\tau) &= \Phi(t-t_1)H(t_1-\tau), \quad \Psi(t-t_0) = \Psi(t-t_1)\Phi(t_1-t_0) \\ \tilde{W}(t-\tau) &= \Psi(t-t_1)H(t_1-\tau). \end{aligned}$$

Assumendo dunque di partire dalla descrizione (2.10), sotto l'ipotesi che la matrice $\Phi(t)$ sia derivabile con derivata continua e che $H(t)$ e $\Psi(t)$ siano continue (condizioni di *regolarità* della rappresentazione con lo stato), posto

$$A = \frac{d\Phi(t)}{dt} \Big|_{t=0} \quad B = H(0) \quad C = \Psi(0) \quad (2.11)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t AH(t-\tau)u(\tau)d\tau + H(0)u(t) \\ &= Ax(t) + Bu(t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y(t) &= \Psi(0)\Phi(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t (\Psi(0)H(t-\tau)u(\tau)d\tau + Du(t)) \\ &= C(\Phi(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau) + Du(t) \\ &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned}$$

2.1.2 Sistema come l'insieme delle rappresentazioni equivalenti

Assegnata una rappresentazione con lo stato lineare stazionario, implicita o esplicita, come varia al variare delle coordinate nello spazio di stato (al variare delle scelta delle variabili di stato)? Ricordando quanto già messo in luce nel Capitolo 1 e richiamato in Appendice A sulla teoria elementare delle matrici, se nelle coordinate x le rappresentazioni sono date dalle (2.1) o (2.2), nelle coordinate

$$z = Tx \quad |T| \neq 0$$

assumono nuove rappresentazioni che possono essere calcolate come di seguito indicato.

Per la rappresentazione implicita si ottiene:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= TAx(t) + TBu(t) = TAT^{-1}z(t) + TBu(t) \\ y(t) &= CT^{-1}z(t) + Du(t)\end{aligned}$$

e dunque nelle coordinate z le matrici che la definiscono sono

$$(TAT^{-1}, TB, CT^{-1}, D).$$

Per la rappresentazione esplicita, con analoghi calcoli si ottengono le nuove matrici che la definiscono nelle coordinate z :

$$(T\Phi(t)T^{-1}, TH(t), \Psi(t)T^{-1}, W(t)).$$

L'insieme delle rappresentazioni che differiscono per la scelta delle coordinate nello spazio di stato sono dette **equivalenti**, esse definiscono un insieme di modelli matematici diversi che descrivono lo stesso oggetto. L'oggetto che esse descrivono è in effetti il sistema dinamico lineare allo studio.

Questa osservazione, che cioè esistono modelli matematici diversi di uno stesso oggetto, assieme a quanto noto ed osservato nel capitolo precedente, che cioè uno stesso modello matematico può rappresentare oggetti diversi, conferiscono al concetto di sistema la generalità che lo caratterizza. Potremmo infatti assumere la seguente definizione di sistema dinamico:

Un sistema dinamico è l'ente astratto che definisce la classe dei modelli equivalenti, ammette diverse rappresentazioni e può descrivere diversi oggetti.

Da un punto di vista concettuale può essere pensato come l'insieme delle proprietà che condividono classi di oggetti che ammettono modelli equivalenti. Si noti la formale analogia per quanto riguarda il concetto di rappresentazioni equivalenti con la definizione di operatore e delle sue rappresentazioni, mediante matrici se è lineare, al variare delle basi di uno spazio lineare.

Esercizio 2.1.1 Indicato con $\mathcal{U}_{[t_0,t]}$, per la generica coppia (t, t_0) con $t > t_0$, l'insieme delle funzioni del tempo definite tra t_0 e t che assumono valori in \mathbb{R}^p , dimostrare che per ogni (t, t_0) le evoluzioni nello stato e in uscita sono funzionali lineari in $\mathbb{R}^n \times \mathcal{U}_{[t_0,t]}$.

Esercizio 2.1.2 Si giustifichi l'espressione (2.9).



Soluzione Esercizi 2.1.1 e 2.1.2

2.2

La matrice di transizione nello stato

La matrice di transizione nello stato

$$\Phi(t) = e^{At} \quad (2.12)$$

caratterizza le evoluzioni del sistema; come procedere per il calcolo della sua espressione e quali sono le sue proprietà?

A questo proposito è utile osservare che la matrice di transizione associata ad una matrice diagonale a blocchi con m blocchi è uguale alla matrice diagonale delle funzioni esponenziali dei singoli blocchi:

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_m) \implies e^{At} = \text{diag}(e^{A_1 t}, \dots, e^{A_m t}).$$

Ciò risulta dal fatto che l'esponenziale è una serie di potenze (2.3) e che la potenza generica di una matrice diagonale è uguale alla matrice diagonale dei blocchi associati alle potenze dello stesso ordine.

Nel caso più semplice, quello in cui ogni blocco sulla diagonale ha dimensione uno si ottiene che l'esponenziale di una matrice diagonale è pari alla diagonale degli esponenziali dei termini sulla diagonale

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \implies e^{At} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_m t}).$$

Questa semplice osservazione e lo studio sulle rappresentazioni di un operatore lineare al variare delle coordinate sviluppato in Appendice A, lasciano intendere che un ruolo importante nel calcolo in esame lo svolgono le trasformazioni di coordinate dello spazio di stato. Se infatti la matrice dinamica a seguito di una trasformazione di coordinate assume una forma a partire dalla quale si riesce a calcolare la somma della serie (2.3), allora ritrasformando la matrice nelle precedenti coordinate si ottiene l'espressione finale.

E dallo studio in Appendice A risulta che una struttura diagonale a blocchi, può sempre essere associata ad un operatore lineare. In altri termini si è mostrato che se A in fissate coordinate rappresenta la matrice dinamica di un sistema, nelle coordinate degli autovettori si ottiene una matrice che ha una ben definita struttura:

$$TAT^{-1} = J = \text{diag}(J_1, \dots, J_m)$$

ove J_i rappresenta il generico blocco di Jordan associato all'autovalore i -esimo λ_i . Da quest'ultima uguaglianza si ottiene

$$A = T^{-1}JT \implies e^{At} = e^{(T^{-1}\text{diag}(J_1, \dots, J_m)T)t} = T^{-1}\text{diag}(e^{J_1 t}, \dots, e^{J_m t})T.$$

Il calcolo della matrice di transizione si riconduce dunque al calcolo dell'esponenziale del generico blocco di Jordan J_i e della trasformazione di coordinate T .

Nel seguito di questo paragrafo viene sviluppato il calcolo trattando preliminarmente il caso di **operatori regolari**, il caso cioè di matrici dinamiche che hanno autovalori con molteplicità algebrica uguale a quella geometrica. Successivamente si esaminerà il caso generale.

2.2.1 Operatore regolare

Si assuma ora che gli autovalori dell'operatore abbiano molteplicità algebrica uguale a quella geometrica, si hanno quindi $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_r$ autovalori reali e $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_c$ coppie di complessi coniugati. Come mostrato in Appendice A, in questo caso si possono calcolare μ_i autovettori indipendenti risolvendo per ciascun autovalore λ_i l'equazione

$$(\lambda_i I - A)u_i = 0$$

e γ_k coppie di autovettori indipendenti risolvendo per ciascuna coppia di autovalori complessi coniugati $\alpha_k \pm j\omega_k$ l'equazione

$$A(u_{ka} \quad u_{kb}) = (u_{ka} \quad u_{kb}) \begin{pmatrix} \alpha_k & \omega_k \\ -\omega_k & \alpha_k \end{pmatrix}.$$

Ciò premesso, nella base degli autovettori, cioè con una trasformazione di coordinate T tale che

$$T^{-1} = (u_1 \quad \dots \quad u_\mu \quad u_{1a} \quad u_{1b} \quad \dots \quad u_{\gamma a} \quad u_{\gamma b})$$

si ottiene la matrice

$$TAT^{-1} = \Lambda_R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_\mu & & & & \\ & & & \alpha_1 & \omega_1 & & \\ & & & -\omega_1 & \alpha_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \alpha_\gamma & \omega_\gamma \\ & & & & & & -\omega_\gamma & \alpha_\gamma \end{pmatrix}$$

in cui gli elementi sulla diagonale si ripetono uguali tante volte quanta è la molteplicità dell'autovalore (della coppia di autovalori).

Inoltre, se si indicano con v'_i , $i = 1, \dots, \mu$ e (v'_{ka}, v'_{kb}) , $k = 1, \dots, \gamma$ le righe di T corrispondenti agli autovalori reali e quelli complessi, sviluppando il calcolo si

ottiene:

$$A = T^{-1} \Lambda_R T = T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_\mu & \\ & & & \alpha_1 & \omega_1 \\ & & & -\omega_1 & \alpha_1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & \alpha_\gamma & \omega_\gamma \\ & & & & -\omega_\gamma & \alpha_\gamma \end{pmatrix} T \quad (2.13)$$

e, in definitiva, la seguente espressione

$$A = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i u_i v_i' + \sum_{j=1}^{\gamma} (\alpha_j (u_{ja} v_{ja}' + u_{jb} v_{jb}') + \omega_j (u_{ja} v_{jb}' - u_{jb} v_{ja}')) \quad (2.14)$$

che prende il nome di **forma spettrale della matrice A**. Il nome rende conto del fatto che l'espressione impiega gli autovalori che tutti assieme definiscono lo spettro della matrice (dell'operatore).

È ora chiaro che per calcolare l'esponenziale di Λ_R basta saper calcolare l'esponenziale delle matrici di dimensione due associate alle coppie di autovalori complessi. A tale proposito si ha il seguente risultato:

Proposizione 2.2.1

$$e^{\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Dimostrazione. È sufficiente considerare l'equazione

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} \Phi(t) \quad \Phi(0) = I \quad (2.16)$$

e verificare che la matrice a destra nella (2.15) soddisfa la condizione iniziale e l'equazione (2.16).

Si può quindi concludere che la matrice di transizione, nel caso di una matrice A che rappresenta un operatore regolare, nelle coordinate degli autovettori assume la forma:

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{\lambda_\mu t} & \\ & & & \alpha_1 t \cos \omega_1 t & \alpha_1 t \sin \omega_1 t \\ & & & -e^{\alpha_1 t} \sin \omega_1 t & e^{\alpha_1 t} \cos \omega_1 t \\ & & & & \ddots \\ & & & & \alpha_\gamma t \cos \omega_\gamma t & \alpha_\gamma t \sin \omega_\gamma t \\ & & & & -e^{\alpha_\gamma t} \sin \omega_\gamma t & e^{\alpha_\gamma t} \cos \omega_\gamma t \end{pmatrix}$$

e quindi nelle coordinate originarie:

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i t} u_i v_i' + \sum_{k=1}^c e^{\alpha_k t} (\cos \omega_k t (u_{kla} v_{kla}' + u_{klb} v_{klb}') + \sin \omega_k t (u_{kla} v_{klb}' - u_{klb} v_{kla}')). \quad (2.17)$$

L'espressione calcolata, in analogia alla denominazione della (2.14), è la **forma spettrale della matrice di transizione**.

Se si tiene conto del fatto che gli autovalori non sono necessariamente distinti e si ricorda che al generico autovalore reale λ_i sono associati μ_i autovettori u_{il} , $l = 1, \dots, \mu_i$, e alla coppia $(\alpha_k \pm \omega_k)$ sono associate γ_k coppie (u_{kla}, u_{klb}) , $k = 1, \dots, \gamma_k$, la forma spettrale della matrice di transizione può essere riscritta come

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^{\mu_i} e^{\lambda_i t} u_{il} v_{il}' + \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^{\gamma_k} e^{\alpha_k t} (\cos \omega_k t (u_{kla} v_{kla}' + u_{klb} v_{klb}') + \sin \omega_k t (u_{kla} v_{klb}' - u_{klb} v_{kla}')). \quad (2.18)$$

Se nell'espressione precedente definiamo

$$R_i = \sum_{l=1}^{\mu_i} u_{il} v_{il}', \quad (2.19)$$

$$R_{ka} = \sum_{l=1}^{\gamma_k} (u_{kla} v_{kla}' + u_{klb} v_{klb}'), \quad R_{kb} = \sum_{l=1}^{\gamma_k} (u_{klb} v_{kla}' - u_{kla} v_{klb}'), \quad (2.20)$$

possiamo riscriverla come

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i t} R_i + \sum_{k=1}^c e^{\alpha_k t} (\cos \omega_k t R_{ka} - \sin \omega_k t R_{kb}).$$

e concludere che la forma spettrale risulta essere la somma di $(r+c)$ termini composti da matrici residue R_i , che hanno rango pari μ_i , e (R_{ka}, R_{kb}) che hanno rango $2\gamma_k$.

Esempio 2.2.1 Si consideri il semplice sistema meccanico composto da massa-molla e smorzatore trattato nel Paragrafo 1.1.1. A partire dalla matrice dinamica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{pmatrix}$$

il calcolo degli autovalori fornisce

$$\lambda_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4kM}}{2M}$$

e posto $\Delta = b^2 - 4kM$ per i corrispondenti autovettori, si ottiene

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2M} \implies u_1 = \begin{pmatrix} -b - \sqrt{\Delta} \\ 2k \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2M} \implies u_2 = \begin{pmatrix} -b + \sqrt{\Delta} \\ 2k \end{pmatrix}$$

Se $\Delta > 0$, gli autovalori sono reali ed i corrispondenti autovettori, u_1 e u_2 sono tali per cui

$$T^{-1} = (u_1 \ u_2) = \begin{pmatrix} -b - \sqrt{\Delta} & -b + \sqrt{\Delta} \\ 2k & 2k \end{pmatrix}, \quad T = -\frac{1}{4k\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} 2k & b - \sqrt{\Delta} \\ -2k & -b - \sqrt{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$A = -\frac{1}{4k\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} -b - \sqrt{\Delta} & -b + \sqrt{\Delta} \\ 2k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2M} & 0 \\ 0 & \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k & b - \sqrt{\Delta} \\ -2k & -b - \sqrt{\Delta} \end{pmatrix}$$

e di conseguenza

$$e^{At} = \frac{-1}{4k\sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} -b - \sqrt{\Delta} & -b + \sqrt{\Delta} \\ 2k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{-b + \sqrt{\Delta}t}{2M}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-b - \sqrt{\Delta}t}{2M}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k & b - \sqrt{\Delta} \\ -2k & -b - \sqrt{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Se $\Delta < 0$, si hanno

$$u_a = \begin{pmatrix} -b \\ 2k \end{pmatrix} \quad u_b = \begin{pmatrix} -\sqrt{\Delta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

e con

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -b & -\sqrt{\Delta} \\ 2k & 0 \end{pmatrix}$$

si ottiene

$$TAT^{-1} = \frac{1}{2M} \begin{pmatrix} -b & \sqrt{\Delta} \\ -\sqrt{\Delta} & -b \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{-\frac{b}{2M}t} T^{-1} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} T \\ &= e^{-\frac{bt}{2M}} \left(\cos \frac{\sqrt{\Delta}}{2M} t (u_a v'_a + u_b v'_b) + \sin \frac{\sqrt{\Delta}}{2M} t (u_a v'_b - u_b v'_a) \right). \end{aligned}$$

Il caso di $\Delta = 0$ viene trattato nel seguito poiché corrisponde ad una matrice non regolare.

2.2.2 Il caso generale

Viene in questo paragrafo studiata la matrice di transizione nel caso generale, quello in cui una sua assegnata rappresentazione, A , ammette a seguito di una trasformazione di coordinate, la **forma canonica di Jordan**. Si considera dunque il caso generale di un operatore lineare a dimensione n .

Come messo in luce nei richiami in Appendice A nella base degli **autovettori generalizzati**, il generico operatore assume una struttura, indicata con la lettera J . Tale matrice risulta essere la forma diagonale di due insiemi di *blocchi*: i blocchi J_i associati ciascuno ad un autovalore reale λ_i e di dimensione pari alla molteplicità algebrica, μ_i ; i blocchi J_k associati ciascuno a una coppia di autovalori complessi coniugati di dimensione pari al doppio della loro molteplicità algebrica, $2\gamma_k$.

Il blocco J_i ha una struttura diagonale a blocchi composta da $\hat{\mu}_i$ matrici del tipo

$$B_j^i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

ovvero $J_i = \text{diag}(B_1^i, \dots, B_{\hat{\mu}_i}^i)$. Ciascuna di tali matrici ha una dimensione che risulta dal calcolo ed è associata all'ordine dell'autovettore generalizzato che la caratterizza. La somma delle loro dimensioni è comunque necessariamente pari a μ_i , la molteplicità algebrica.

Il blocco J_k ha una struttura diagonale a blocchi composta da $\hat{\gamma}_k$ matrici del tipo

$$\bar{B}_j^k = \begin{pmatrix} \Lambda_k & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ & & & \Lambda_k \end{pmatrix}, \quad \Lambda_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \omega_k \\ -\omega_k & \alpha_k \end{pmatrix}.$$

Ciascuna di tali matrici ha una dimensione che risulta dal calcolo ed è associata all'ordine dell'autovettore generalizzato che la caratterizza. La somma delle loro dimensioni è comunque necessariamente pari a $2\gamma_k$.

Si può dunque concludere che il calcolo dell'esponenziale della matrice A si riduce al calcolo dell'esponenziale di matrici del tipo B_j^i e \bar{B}_j^k . Per il loro calcolo si può fare riferimento ad un risultato più generale che viene di seguito messo in luce.

Proposizione 2.2.2 Assegnata una matrice quadrata composta da l blocchi uguali Λ sulla diagonale e matrici identità sovrastanti la diagonale a blocchi principale:

$$M = \begin{pmatrix} \Lambda & I & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & I \\ & & & \Lambda \end{pmatrix}$$

risulta

$$e^{Mt} = \begin{pmatrix} e^{\Lambda t} & te^{\Lambda t} & \cdots & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} e^{\Lambda t} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & te^{\Lambda t} & \\ e^{\Lambda t} & & & \end{pmatrix}.$$

Se ora si assumono l_j blocchi, con $\Lambda = \lambda_i$ oppure $\Lambda = \Lambda_k$ risulta immediatamente dalla Proposizione precedente, che

$$e^{B_j^i t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{l_j-1}}{(l_j-1)!} e^{\lambda_i t} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & te^{\lambda_i t} & \\ e^{\lambda_i t} & & & \end{pmatrix}, \quad e^{B_j^k t} = \begin{pmatrix} e^{\Lambda_k t} & te^{\Lambda_k t} & \cdots & \frac{t^{l_j-1}}{(l_j-1)!} e^{\Lambda_k t} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & te^{\Lambda_k t} & \\ e^{\Lambda_k t} & & & \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Se quindi ci riferiamo al caso generale in cui avremo $(r+2c)$ autovalori, r reali e c coppie di complessi coniugati, ciascuno con molteplicità geometriche m_i e g_k rispettivamente, si ha che

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & e^{J_r t} & & \\ & & e^{J_{1t}} & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{J_{ct}} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

con

$$e^{J_i t} = \begin{pmatrix} e^{B_1^i t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{B_{\mu_i}^i t} \end{pmatrix}, \quad e^{J_k t} = \begin{pmatrix} e^{B_1^k t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{B_{\mu_k}^k t} \end{pmatrix}$$

e i blocchi $e^{B_j^i t}$ e $e^{B_j^k t}$ definiti nella (2.21).

Esempio 2.2.2 Si consideri nuovamente il semplice sistema meccanico composto da massa-molla e smorzatore trattato nel Paragrafo 1.1.1 ed esaminato nell'Esempio 2.2.1. Nel caso in cui $\Delta = 0$, l'autovalore è $-\frac{b}{2M}$ ed ha molteplicità algebrica due e geometrica uno. Si ottiene, in questa situazione

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b}{2M} & 1 \end{pmatrix} \quad J = T A T^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{b}{2M} & 1 \\ 0 & -\frac{b}{2M} \end{pmatrix}$$

da cui

$$e^{At} = T^{-1} \begin{pmatrix} e^{-\frac{b}{2M}t} & te^{-\frac{b}{2M}t} \\ 0 & e^{-\frac{b}{2M}t} \end{pmatrix} T.$$

Si consideri infine il caso matrice di dimensione quattro con due coppie di autovalori complessi coincidenti con molteplicità geometrica pari a uno.

$$\lambda_{1/2} = \alpha \pm j\omega, \quad T^{-1} = (u_a^1 \ u_b^1 \ u_a^2 \ u_b^2)$$

$$u^1 = u_a^1 + ju_b^1: \quad (A - (\alpha + j\omega)I)u^1 = 0$$

$$u^2 = u_a^2 + ju_b^2: \quad (A - (\alpha + j\omega)I)u^2 = u^1$$

In questo caso si ha che

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \alpha \end{pmatrix} = \Lambda_j^C$$

$$e^{\Lambda_j^C t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & t \cos \omega t & t \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & -t \sin \omega t & t \cos \omega t \\ 0 & 0 & \cos \omega t & \sin \omega t \\ 0 & 0 & -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

In base a quanto detto la matrice di transizione risulta essere una matrice i cui coefficienti sono combinazione lineare di funzioni associate agli autovalori della matrice; si tratta, nel caso di operatore regolare, di funzioni esponenziali, quelle associate agli autovalori reali, e di funzioni periodiche moltiplicate per un esponenziale, quelle associate alle coppie di autovalori complessi coniugati. Nel caso generale tali funzioni potranno essere premoltiplicate per polinomi in t di grado pari all'ordine geometrico -1. Esse sono al più in numero pari a n , la dimensione della matrice dinamica.

Esercizio 2.2.1 Dimostrare che le matrici

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 1+e^{-t} & 2e^{-t} \\ e^{-t} & e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} te^{-t} & 2e^{-t} \\ 0 & 1+e^{-t} \end{pmatrix}$$

non possono essere le matrici di transizione di un sistema di dimensione due.



Soluzione Esercizio 2.2.1

[Apprefondimento](#)

2.3

I modi naturali nell'evoluzione libera dello stato

Siamo ora in grado di precisare la struttura delle funzioni del tempo e degli andamenti che compongono l'evoluzione libera nello stato e che caratterizzano tutte le evoluzioni nello stato e in uscita.

Assumendo senza perdita di generalità che sia $t_0 = 0$, l'evoluzione libera nello stato è data dalla seguente espressione

$$x_l(t) = \Phi(t)x_0 = e^{At}x_0$$

che ci permette di individuare le sue componenti fondamentali che prendono il nome di *modi naturali*. Tratteremo preliminarmente il caso di sistema dinamico caratterizzato da un operatore regolare.

2.3.1 I modi naturali di un operatore regolare

Teorema 2.3.1 *L'evoluzione libera di un sistema lineare stazionario a dimensione n risulta essere la combinazione lineare di modi naturali; si tratta di evoluzioni caratterizzate da una legge temporale esponenziale, oppure periodica oppure composta da un'esponenziale ed un inviluppo periodico (legge temporale pseudo-periodica) che avvengono in predefiniti sottospazi dello spazio di stato, i sottospazi associati agli autovettori. I modi naturali, nel caso di operatore regolare sono di due tipi:*

- aperiodico, associato ad un autovalore reale λ e specificato dall'espressione

$$ce^{\lambda t}u$$

- pseudoperiodico, associato alla coppia di autovalori complessi coniugati $\alpha \pm j\omega$ e specificato dall'espressione

$$me^{\alpha t} \left(\sin(\omega t + \varphi)u_a + \cos(\omega t + \varphi)u_b \right)$$

dove i coefficienti $c, m \in \mathbb{R}$ e l'angolo φ dipendono da x_0 .

La dimostrazione del risultato enunciato è nel seguito condotta distinguendo tra due possibili situazioni: quella corrispondente ad una matrice che ha *autovalori tutti distinti*, cioè autovalori che hanno tutti molteplicità algebrica (e quindi anche geometrica) unitaria, da quella in cui la molteplicità algebrica non è necessariamente unitaria, ma è uguale a quella geometrica.

$x_l(t)$ in presenza di autovalori tutti distinti

Si assume in prima istanza che gli autovalori λ_i della matrice dinamica siano *reali e distinti* ($\mu_i = 1$, $i = 1, \dots, n$). Si ottiene in questo caso:

$$x_l(t) = e^{At} x_0 = (u_1 \ \dots \ u_n) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix} x_0 = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} u_i$$

dove u_i e v'_i indicano rispettivamente le colonne di T^{-1} e le righe di T , e si è posto $c_i = v'_i x_0$.

L'evoluzione libera $x_l(t)$ è quindi la combinazione lineare, con coefficienti c_i , di n evoluzioni, $e^{\lambda_i t} u_i$, che avvengono nello spazio di stato, ciascuna nella direzione del relativo autovettore u_i . Si noti che i coefficienti di questa combinazione lineare altro non sono che le componenti dello stato iniziale x_0 nella base degli autovettori, come risulta immediatamente se si assume $t = 0$ nell'espressione dell'evoluzione libera.

Si ottiene in definitiva per l'evoluzione libera nello stato l'espressione

$$x_l(t) = e^{At} x_0 = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} u_i.$$

L'evoluzione nello spazio di stato è dunque la somma di n evoluzioni che sono caratterizzate dagli autovalori, che ne definiscono la legge di moto $e^{\lambda_i t}$, e dai relativi autovettori u_i .

Si noti che non tutte le leggi di moto sono necessariamente presenti in una fissata evoluzione libera (a partire da un fissato x_0): solo quelle associate ad autovettori rispetto ai quali lo stato iniziale ha componente diversa da zero intervergono ($c_i \neq 0$). In particolare da uno stato iniziale che si trova sull'autovettore u_i solo c_i sarà non nullo e solo quella legge di moto sarà presente nell'evoluzione.

Le evoluzioni corrispondenti a diversi valori dell'autovalore λ sono messe in luce nella Figura 2.3. Se l'autovalore corrispondente è 0, si rimane nello stato iniziale, se l'autovalore è positivo l'evoluzione è divergente pur restando nella direzione dell'autovettore; se invece λ_i è negativo, si ha un moto decrescente verso l'origine.

Se si assume che gli autovalori siano r reali e distinti e c coppie di complessi e distinti, con $n = r + 2c$, con le notazioni già introdotte per u_{ka} e u_{kb} , v'_{ka} e v'_{kb} , si ha

$$e^{At} x_0 = \sum_{i=1}^r c_i e^{\lambda_i t} u_i + \sum_{k=1}^c e^{\alpha_k t} (u_{ka} \ u_{kb}) \begin{pmatrix} \cos \omega_k t & \sin \omega_k t \\ -\sin \omega_k t & \cos \omega_k t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_{ka} \\ v'_{kb} \end{pmatrix} x_0$$

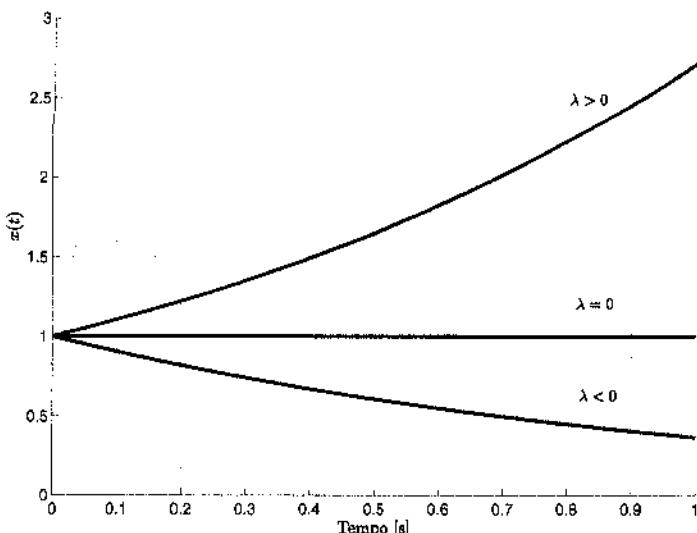


Figura 2.3: Modi Naturali Aperiodici

e sviluppando il calcolo

$$x_1(t) = \sum_{i=1}^r c_i e^{\lambda_i t} u_i + \sum_{k=1}^s m_k e^{\alpha_k t} (\sin(\omega_k t + \varphi_k) u_{ka} + \cos(\omega_k t + \varphi_k) u_{kb}) \quad (2.23)$$

avendo posto:

$$m_k = \sqrt{c_{ka}^2 + c_{kb}^2}$$

$$c_{ka} = \frac{u_{ka} x_0}{m_k}, \quad c_{kb} = \frac{u_{kb} x_0}{m_k}$$

$$\sin \varphi_k = \frac{c_{ka}}{m_k}, \quad \cos \varphi_k = \frac{c_{kb}}{m_k}$$

Nella seconda sommatoria compaiono le nuove espressioni delle componenti dell'evoluzione libera; si tratta dei **modi naturali pseudoperiodici**. Sono evoluzioni che avvengono in un piano, quello degli autovettori (u_{ka}, u_{kb}) con una legge di moto temporale che ammette un inviluppo esponenziale, $e^{\alpha t}$, ma con componenti periodiche seno e coseno, lungo due direzioni del piano del moto.

In Figura 2.4 sono rappresentate le possibili traiettorie del moto pseudoperiodico: per $\alpha > 0$ si ha una traiettoria a spirale divergente, per $\alpha = 0$ un'ellisse e per $\alpha < 0$ una spirale convergente. La pulsazione della legge temporale è ω , il coefficiente immaginario dell'autovalore complesso.

Nella Figura 2.4 sono anche riportate le leggi temporali del modo pseudoperiodico nelle diverse situazioni.

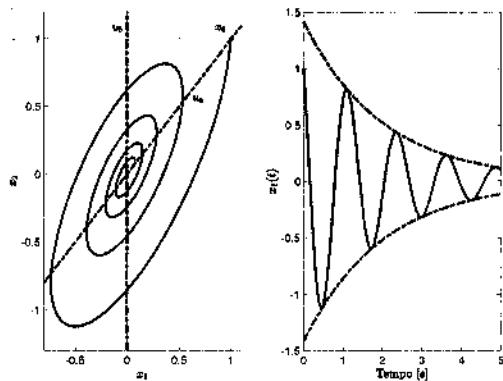
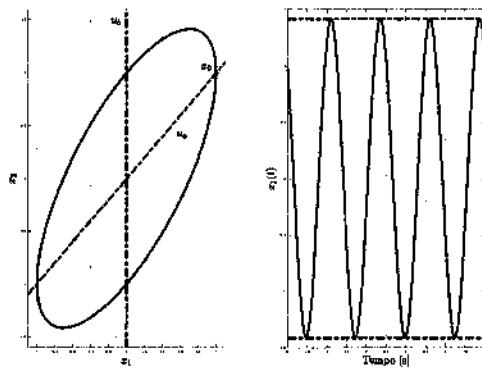
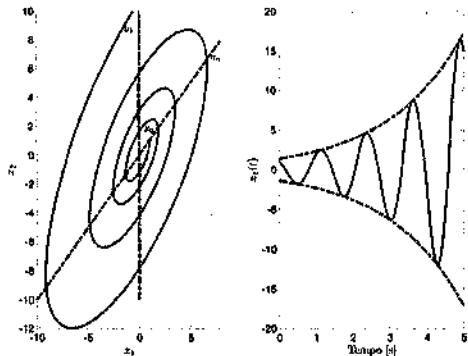
(a) $\alpha < 0$ (b) $\alpha = 0$ (c) $\alpha > 0$

Figura 2.4: Modi naturali pseudoperiodici

Resta dunque provato che nel caso di autovalori distinti l'evoluzione libera risulta la combinazione lineare di **r modi naturali aperiodici**, associati agli autovalori reali, e **c modi naturali pseudoperiodici** associati alle coppie di autovalori complessi.

Diremo in tal caso che si hanno **modi naturali semplici con leggi di moto distinte**.

$x_l(t)$ di un operatore regolare

Nel caso in cui la matrice dinamica è regolare, cioè gli autovalori, eventualmente non distinti, hanno molteplicità geometrica uguale a quella algebrica $\mu_i = \hat{\mu}_i$ (e quindi ordine geometrico $m_i = 1$), è possibile calcolare in corrispondenza ad ogni autovalore reale (coppia di autovalori complessi coniugati) tanti autovettori (autospazi di dimensione due) quanta è la molteplicità algebrica dell'autovalore stesso (della coppia di autovalori). In questa situazione la matrice A è ancora una volta diagonalizzabile, come già messo in evidenza nel paragrafo precedente.

A partire dalla (2.3), moltiplicando a destra per x_0 si ottiene

$$x_l(t) = \sum_{i=1}^r c_i e^{\lambda_i t} u_i + \sum_{k=1}^c m_k e^{\alpha_k t} \left(\sin(\omega_k t + \varphi_k) u_{kj_a} + \cos(\omega_k t + \varphi_k) u_{kj_b} \right) \quad (2.24)$$

che è formalmente la stessa della (2.23), ma con tanti elementi nelle combinazioni lineari caratterizzati dalle stesse leggi temporali quanta è la molteplicità dell'autovalore. Per i modi naturali valgono espressioni analoghe alle precedenti potendo essere coincidenti le leggi di moto di modi naturali diversi. Il modo naturale è, in questo caso, caratterizzato dall'autospazio ad esso associato.

Raccogliendo a fattore comune le leggi di moto si ottiene l'espressione finale che esprime in modo completo le caratteristiche dei modi naturali di un sistema dinamico caratterizzato da un operatore regolare

$$\begin{aligned} x_l(t) &= \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i t} \sum_{j=1}^{\mu_i} c_j u_{ij} + \\ &+ \sum_{k=1}^c e^{\alpha_k t} \sum_{j=1}^{\gamma_k} m_j \left(\sin(\omega_k t + \varphi_{kj}) u_{kj_a} + \cos(\omega_k t + \varphi_{kj}) u_{kj_b} \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Se la matrice dinamica A ha autovalori coincidenti, ma è diagonalizzabile si hanno in corrispondenza ad ogni autovalore con molteplicità algebrica maggiore di uno altrettanti **modi naturali semplici**, caratterizzati da diversi autospazi, ma con leggi temporali coincidenti. Equivalentemente: un solo modo naturale semplice di dimensione pari alla molteplicità

Ciò che è importante sottolineare è che in questo caso le evoluzioni che partono da uno stato iniziale che appartiene all'autospazio associato all'autovalore non solo restano in esso, ma nel caso di modo aperiodico avvengono nella direzione dello stato iniziale (retta congiungente x_0 all'origine dello spazio di stato), nel caso di modo pseudoperiodico avvengono in un piano che è contenuto nello spazio generato dagli autovettori. In realtà ogni vettore (ogni piano a due dimensioni) nello spazio degli autovettori U_i (delle coppie di autovettori U_k) è un autospazio.

Esempio 2.3.1 Si consideri il sistema descritto dal modello

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}u \\ y &= (1 \quad 0 \quad 0)x.\end{aligned}$$

È richiesto di calcolare:

1. l'evoluzione libera nello stato e in uscita a partire dalla condizione iniziale $x_0 = (1 \quad 1 \quad 1)$;
2. l'insieme degli stati iniziali a partire dai quali l'evoluzione libera nello stato converge a 0;
3. l'insieme degli stati iniziali a partire dai quali l'evoluzione libera nello stato è limitata.

Il sistema in oggetto ha dimensione $n = 3$. Il polinomio caratteristico della matrice dinamica è dato da

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

e quindi, l'evoluzione libera è caratterizzata da tre modi naturali aperiodici associati a i tre autovalori e, in particolare:

- un modo naturale aperiodico costante associato all'autovalore $\lambda_1 = 0$;
- un modo naturale aperiodico convergente associato all'autovalore $\lambda_2 = -1$;
- un modo naturale aperiodico divergente associato all'autovalore $\lambda_3 = 2$.

L'evoluzione libera, sarà quindi del tipo

$$\begin{aligned}x_l(t) &= e^{At}x_0 = c_1 u_1 + c_2 e^{-t} u_2 + c_3 e^{2t} u_3 \\ y_l(t) &= e^{At}x_0 = Cx_l(t) = c_1 Cu_1 + c_2 e^{-t} Cu_2 + c_3 e^{2t} Cu_3\end{aligned}$$

in cui $c_i = v_i' x_0$ e u_i, v_i' rappresentano gli autovettori (destri e sinistri, rispettivamente) corrispondenti agli autovalore λ_i , per $i = 1, 2, 3$. È una questione di calcoli verificare che gli autovettori destri sono dati da

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e che, quindi, i modi naturali secondo i quali avviene l'evoluzione libera del sistema sono dati da

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{\lambda_2 t} u_2 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{\lambda_3 t} u_3 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Gli autovettori sinistri sono le colonne della matrice T ottenuta come la matrice inversa di

$$T^{-1} = (u_1 \ u_2 \ u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

e data da

$$T = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix},$$

ottenendo quindi

$$v_1' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad v_2' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad v_3' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Posti

$$c_1 = v_1' x_0 = 1, \quad c_2 = v_2' x_0 = -\frac{1}{3}, \quad c_3 = v_3' x_0 = \frac{1}{3},$$

l'evoluzione libera nello stato a partire dalla condizione iniziale data è

$$x_l(t) = u_1 - \frac{1}{3} e^{-t} u_2 + \frac{1}{3} e^{2t} u_3 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t} \\ -\frac{1}{3} e^{-t} + \frac{2}{3} e^{2t} \\ -\frac{1}{3} e^{-t} + \frac{4}{3} e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Poiché, invece,

$$Cu_1 = 1, \quad Cu_2 = 0, \quad Cu_3 = 3$$

l'evoluzione libera in uscita è data da

$$y_l(t) = 1 + e^{2t}.$$

Per rispondere al quesito 2. occorre fissare l'insieme degli stati iniziali in modo tale che le corrispondenti evoluzioni libere avvengano secondo il solo modo convergente (associato all'autovalore $\lambda_2 = -1$). Le evoluzioni devono dunque essere limitate al sottospazio generato da u_2 , l'autovettore associato a $\lambda_2 = -1$ e lungo il quale avviene il modo convergente. Quindi, l'insieme degli stati iniziali richiesto è dato da

$$x_0 \in \text{gen}\{u_2\}, \quad x_0 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

che verificano $c_1 = c_3 = 0$: la prima e la terza componente di x_0 nella base degli autovettori sono nulle.

In maniera analoga, per rispondere al quesito 3. occorre fissare l'insieme degli stati iniziali in modo tale che le corrispondenti evoluzioni libere avvengano secondo i soli modi limitati (e quindi quelli associati agli autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$). Le evoluzioni devono dunque essere limitate al semipiano generato da u_1 e u_2 . L'insieme degli stati iniziali richiesto è dato da

$$x_0 \in \text{gen}\{u_1, u_2\}, \quad x_0 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

per $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Tali stati iniziali verificano $c_3 = 0$: la terza componente di x_0 nella base degli autovettori è nulla.

Esempio 2.3.2 Si consideri il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x.$$

È richiesto di calcolare:

- l'evoluzione libera nello stato e in uscita a partire dalla condizione iniziale $x_0 = (5 \ 1 \ 1)$;
- l'insieme degli stati iniziali a partire dai quali l'evoluzione libera nello stato converge a 0.

Il sistema in oggetto ha dimensione $n = 3$. Il polinomio caratteristico della matrice dinamica è dato da

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 2)$$

e quindi, l'evoluzione libera è caratterizzata da due modi naturali:

- un modo naturale aperiodico divergente associato all'autovalore $\lambda_1 = 1$;
- un modo naturale pseudoperiodico convergente associato alla coppia di autovalori complessi coniugati $\lambda_{2,3} = -1 \pm j$.

L'evoluzione libera, sarà quindi del tipo

$$x_l(t) = e^{At} x_0 = c_1 e^t u_1 + m e^{-t} (\sin(t + \varphi) u_a + \cos(t + \varphi) u_b)$$

$$y_l(t) = e^{At} x_0 = C x_l(t) = c_1 e^t C u_1 + m e^{-t} (\sin(t + \varphi) C u_a + \cos(t + \varphi) C u_b)$$

in cui $c_1 = v_1' x_0$ e u_1, v_1' rappresentano gli autovettori (destri e sinistri, rispettivamente) corrispondenti all'autovalore $\lambda_1 = 1$ mentre

$$m = \sqrt{c_a^2 + c_b^2}, \quad c_a = v_a' x_0, \quad c_b = v_b' x_0$$

$$\frac{c_a}{m} = \sin \varphi, \quad \frac{c_b}{m} = \cos \varphi$$

e dove u_a, v_a' e u_b, v_b' sono la parte reale e immaginaria degli autovettori (destri e sinistri) associati alla coppia di autovalori complessi coniugati. È una questione di calcoli verificare che gli autovettori destri sono dati da

$$u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e che, quindi, i modi naturali secondo i quali avviene l'evoluzione libera del sistema sono dati da

$$e^{\lambda_1 t} u_1 = e^t \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$m e^{at} (\sin(\omega t + \varphi) u_a + \cos(\omega t + \varphi) u_b) = m e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t + \varphi) + \cos(t + \varphi) \\ \sin(t + \varphi) \end{pmatrix}.$$

Gli autovettori sinistri sono le colonne della matrice T ottenuta come la matrice inversa di

$$T^{-1} = (u_1 \quad u_a \quad u_b) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e data da

$$T = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_a' \\ v_b' \end{pmatrix},$$

ottenendo quindi

$$v_1' = \left(\frac{1}{5} \quad 0 \quad 0 \right), \quad v_a' = \left(-\frac{1}{5} \quad 0 \quad 1 \right), \quad v_b' = \left(-\frac{2}{5} \quad 1 \quad -1 \right).$$

Posti

$$c_1 = v_1' x_0 = 1, \quad c_a = v_a' x_0 = -4, \quad c_b = v_b' x_0 = -2$$

$$m = 2\sqrt{5}, \quad \varphi \approx 63,43^\circ,$$

l'evoluzione libera nello stato a partire dalla condizione iniziale data è

$$x_l(t) = e^t u_1 + 2\sqrt{5} e^{-t} (\sin(t + 63,43^\circ) u_a + \cos(t + 63,43^\circ) u_b)$$

$$= \begin{pmatrix} 5e^t \\ 3e^t + 2\sqrt{5}e^{-t}(\sin(t + 63,43^\circ) + \cos(t + 63,43^\circ)) \\ e^t + 2\sqrt{5}e^{-t}\sin(t + 63,43^\circ) \end{pmatrix}.$$

Poiché, invece,

$$Cu_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad Cu_a = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Cu_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'evoluzione libera in uscita è data da

$$\begin{aligned} y_l(t) &= e^t \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\sqrt{5}e^{-t} \sin(t+63,43^\circ) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5e^t \\ 4e^t - 2\sqrt{5}e^{-t} \sin(t+63,43^\circ) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per rispondere al quesito 2. occorre fissare l'insieme degli stati iniziali in modo tale che le corrispondenti evoluzioni libere avvengano secondo il solo modo pseudoperiodico (convergente a zero). Le evoluzioni devono dunque essere limitate al semipiano generato da u_a e u_b . L'insieme degli stati iniziali richiesto è dato da

$$x_0 \in \text{gen}\{u_a, u_b\}, \quad x_0 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Tali stati iniziali verificano $c_1 = 0$.

2.3.2 Parametri caratteristici delle leggi di moto

Come risulta evidente dall'analisi sinora condotta, nel caso di operatore regolare, la collocazione degli autovalori rispetto all'asse immaginario, caratterizza la legge temporale e le sue proprietà di limitatezza, convergenza verso lo zero o divergenza verso l'infinito dell'ampiezza delle evoluzioni. L'asse immaginario è in un certo senso la frontiera per quanto riguarda tale comportamento: se gli autovalori sono a sinistra, allora il moto è convergente a zero, con andamenti oscillanti o aperiodici; se sono a destra il moto diverge; se sono sull'asse immaginario il moto è costante (se l'autovalore è in zero) o oscillatorio. La conoscenza della collocazione degli autovalori nel piano complesso consente di comprendere l'andamento qualitativo delle evoluzioni del sistema.

Nell'ingegneria è diffuso l'impiego di parametri diversi dagli autovalori per specificare le leggi temporali dei modi. In particolare vengono impiegati: la **costante di tempo** per i modi aperiodici, e la **pulsazione naturale** e lo **smorzamento** per i modi pseudoperiodici.

Considerato il modo naturale aperiodico $c_i e^{\lambda_i t} u_i$ con $\lambda_i \in \mathbb{R}$, si definisce **costante di tempo**

$$\tau_i = -\frac{1}{\lambda_i}.$$

Rispetto a questo parametro, nel caso scalare (quando $x \in \mathbb{R}$)

$$x(t) = e^{\lambda t} x(0) = e^{-\frac{t}{\tau}} x(0)$$

da cui risulta chiaro che, quando il modo è convergente ($\lambda < 0$), τ rappresenta il tempo necessario perché lo stato diventi $\frac{1}{e}$ del valore iniziale $x(0)$.

Nel caso generale, si ottiene l'espressione

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} u_i$$

in cui le costanti di tempo svolgono il ruolo sottolineato in precedenza.

Come già evidenziato nel caso di autovalori complessi è usuale introdurre due parametri che caratterizzano il modo in luogo di α e ω . Si tratta della **pulsazione naturale**, ω_n ,

$$\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$$

e dello **smorzamento**, ξ ,

$$\xi = \sin \theta = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}.$$

Nella Figura 2.5 sono messi in luce tali parametri.

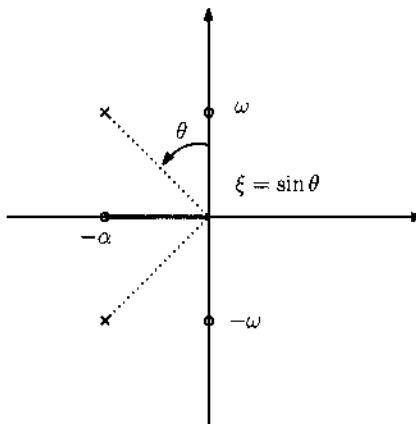


Figura 2.5

Il significato fisico della pulsazione naturale e dello smorzamento può essere compreso a partire dall'espressione di α e ω in funzione di ω_n e ξ

$$\alpha = -\xi \omega_n \quad e \quad \omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Se $\alpha = 0$ (gli autovalori sono immaginari) $\xi = 0$ e $\omega_n = \omega$. La pulsazione naturale ω_n rappresenta allora la pulsazione del modo quando lo smorzamento è nullo. Se $\alpha \neq 0$, la pulsazione del modo si discosta da quella naturale ω_n . ξ si chiama fattore di smorzamento, perché ad un suo aumento corrisponde una maggiore attenuazione dell'inviluppo della funzione oscillatoria.

2.3.3 Il caso generale

Si esaminerà ora il caso in cui vi siano autovalori che hanno molteplicità geometrica strettamente inferiore a quella algebrica.

Viene preliminarmente esaminato il caso in cui gli autovalori hanno tutti molteplicità geometrica unitaria. Come mostrato in Appendice A ad ogni autovalore resta associato un autospazio composto da una catena di autovettori di ordine pari alla molteplicità algebrica, che in questo caso coincide con l'ordine geometrico. Se indichiamo con U_i^R e U_k^C gli autospazi associati all'autovalore reale λ_i ed alla coppia di autovalori complessi coniugati $\alpha_k \pm j\omega_k$ e di dimensione μ_i e $2\gamma_k$ rispettivamente, nella nuova base, con

$$T^{-1} = (U_1^R \quad \dots \quad U_r^R \quad U_1^C \quad \dots \quad U_c^C)$$

L'operatore A assume la forma di Jordan e la matrice di transizione la struttura indicata nella (2.22). Rappresentare la condizione iniziale mediante le sue componenti nei sottospazi indicati corrisponde a dire che nelle nuove coordinate, indicati con V_i^R e V_k^C i rispettivi blocchi riga di T ,

$$T = \begin{pmatrix} V_1^R \\ \vdots \\ V_r^R \\ V_1^C \\ \vdots \\ V_c^C \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

i seguenti vettori a μ_i e $2\gamma_k$ componenti rappresentano le componenti di x_0 nei sottospazi U_i^R e U_k^C ,

$$\underline{c}_i = V_i^R x_0 \quad \underline{w}_k = V_k^C x_0.$$

Si ottiene allora che

$$e^{At} x_0 = T^{-1} e^{Jt} T x_0 = \sum_{i=1}^r U_i^R e^{J_i t} \underline{c}_i + \sum_{k=1}^c U_k^C e^{J_k t} \underline{w}_k.$$

Sviluppando i calcoli per ciascuna delle componenti delle sommatorie si ottengono le espressioni dei modi naturali associati agli autovalori reali e alle coppie di complessi coniugati.

In corrispondenza di ciascun autovalore reale, λ_i , con molteplicità algebrica μ_i e molteplicità geometrica $\beta_i = 1$, si ha il **modo naturale multiplo aperiodico**

$$\begin{aligned} U_i^R e^{J_i t} \underline{c}_i &= e^{\lambda_i t} \left((c_{i1} + tc_{i2} + \dots + \frac{t^{\mu_i-1}}{(\mu_i-1)!} c_{i\mu_i}) u_i^1 \right. \\ &\quad \left. + (c_{i2} + tc_{i3} + \dots + \frac{t^{\mu_i-2}}{(\mu_i-2)!} c_{i\mu_i}) u_i^2 + \dots + c_{i\mu_i} u_i^{\mu_i} \right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Tale modo caratterizza un'evoluzione che avviene nello spazio U_i^R e si sviluppa lungo le direzioni di tutti gli autovettori generalizzati, u_i^j , di ordine inferiore a quello di ordine massimo rispetto al quale lo stato iniziale ha componente non nulla. Le leggi di moto lungo tali autovettori sono di tipo esponenziale moltiplicate per un polinomio in t di grado pari a $(j-1)$; l'ordine massimo potendo essere $(\mu_i - 1)$. Si dirà in questo caso che si ha un *modo naturale multiplo aperiodico*, di molteplicità μ_i associato all'autovalore λ_i .

In corrispondenza a ciascuna coppia di autovalori complessi coniugati, $(\alpha_k \pm \omega_k)$, con molteplicità algebrica γ_k e molteplicità geometrica $\hat{\gamma}_k = 1$, si ha il *modo naturale multiplo pseudoperiodico*

$$U_k^C e^{J_k t} \underline{w}_k \quad (2.28)$$

che assume una forma analoga alla (2.27) e viene di seguito riportata omettendo il pedice k

$$\begin{aligned} & e^{\alpha t} \left((m_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + tm_2 \sin(\omega t + \varphi_2) + \dots + \frac{t^{\gamma_i-1}}{(\gamma_i-1)!} m_{\gamma_i} \sin(\omega t + \varphi_{\gamma_i})) u_a^1 \right. \\ & + (m_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + tm_2 \cos(\omega t + \varphi_2) + \dots + \frac{t^{\gamma_i-1}}{(\gamma_i-1)!} m_{\gamma_i} \cos(\omega t + \varphi_{\gamma_i})) u_b^1 \\ & + (m_2 \sin(\omega t + \varphi_2) + \dots + \frac{t^{\gamma_i-2}}{(\gamma_i-2)!} m_{\gamma_i} \sin(\omega t + \varphi_{\gamma_i})) u_a^2 \\ & + (m_2 \cos(\omega t + \varphi_2) + \dots + \frac{t^{\gamma_i-2}}{(\gamma_i-2)!} m_{\gamma_i} \cos(\omega t + \varphi_{\gamma_i})) u_b^2 \\ & \left. + \dots + m_{\gamma_i} \sin(\omega t + \varphi_{\gamma_i}) u_a^{\gamma_i} + m_{\gamma_i} \cos(\omega t + \varphi_{\gamma_i}) u_b^{\gamma_i} \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Per la trattazione del caso generale in cui la molteplicità geometrica è inferiore a quella algebrica, ma maggiore di uno ($\mu_i > \beta_i > 1$ e, equivalentemente, $\gamma_i > \hat{\gamma}_i > 1$), basta ricordare quanto esposto in Appendice A a proposito della forma spettrale di un operatore.

Riferendoci per semplificare le notazioni al caso in cui gli autovalori siano tutti reali, a ciascuno di essi può essere associato un autospazio U_i , generato da β_i catene di autovettori la prima delle quali ha lunghezza massima pari all'ordine geometrico dell'autovalore, m_i :

$$U_i = U_{i1} \oplus \dots \oplus U_{i\beta_i} = \text{gen}\{u_{i1}^1, \dots, u_{i1}^{m_i}, \dots, u_{i\beta_i}^1\},$$

e il primo dei sottospazi che generano U_i , U_{i1} , è quello che ha dimensione maggiore e pari all'ordine geometrico dell'autovalore; ciascuno degli U_{ij} inoltre, sottospazio generato dalla j -ma catena di autovettori associata all'autovalore λ_i , è un autospazio (sottospazio invariante). Inoltre risulta

$$\bigoplus_{i=1}^r \bigoplus_{j=1}^{\beta_i} U_{ij} = \mathbb{R}^n \quad (2.30)$$

Se ora indichiamo con \underline{h}_i i vettori componenti di x_0 rispetto ai sottospazi U_i , e con \underline{h}_{ij} i vettori componenti di x_0 rispetto ai sottospazi U_{ij}

$$\underline{x}_0 = \sum_{i=1}^r \underline{h}_i = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=1}^{\mu_i} \underline{h}_{ij} \right).$$

\underline{h}_i risulta essere un autovettore generalizzato di un certo ordine, sia k , minore o uguale all'ordine geometrico, m_i , dell'autovalore λ_i .

L'evoluzione libera è la somma di evoluzioni associate agli \underline{h}_i . Ciascuna di esse definisce un **modo naturale multiplo** di ordine k , se k è l'ordine con il quale u_i^k è autovettore generalizzato. Il modo naturale multiplo assume l'espressione

$$e^{At} \underline{h}_i = e^{At - \lambda_i t} e^{\lambda_i t} \underline{h}_i = \left(e^{\lambda_i t} + t(A - \lambda_i I) e^{\lambda_i t} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)} (A - \lambda_i I)^{k-1} e^{\lambda_i t} \right) \underline{h}_i.$$

Si noti che in questo caso la legge temporale del modo è di tipo esponenziale a coefficiente polinomiale nella variabile temporale.

Detto in altri termini, e con maggior dettaglio, la componente dello stato iniziale in U_i ha, a sua volta componenti nei sottospazi invarianti U_{ij} . Ciascuno di tali sottospazi, di dimensione pari alla lunghezza della catena ad esso associata, è a sua volta composto da sottospazi invarianti di dimensione crescente da uno alla dimensione della catena stessa; ciascuno di questi ultimi caratterizza un modo naturale. Si hanno in definitiva modi naturali di diverse dimensioni, con leggi temporali esponenziali con coefficienti polinomiali in t , con leggi di moto che possono essere anche coincidenti. E' opportuno notare che in questo caso (operatore non regolare) si trovano nella letteratura diverse definizioni di modo naturale multiplo; oltre a quella qui proposta, quella in cui si assume vi sia un solo modo multiplo di dimensione pari alla molteplicità algebrica, quella in cui si assume che vi siano un numero di modi naturali pari all'ordine, il primo di ordine uno (con legge di moto esponenziale e dimensione μ_i, \dots , fino ad averne uno di ordine m_i e legge temporale esponenziale moltiplicata per t^{m_i-1} di dimensione uguale al numero di autovettori generalizzati di quell'ordine).

Un esempio per sottolineare la complessità della situazione.

Esempio 2.3.3 Si consideri, senza perdita di generalità, il caso di un solo autovettore, $\lambda = -1$, con $\mu = 5$, $\hat{\mu} = 2$ e $m = 3$. Si ha:

$$J = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Inoltre, in questo caso particolare,

$$U_1^R = \text{gen}\{e_1, e_2, e_3\} \quad U_2^R = \text{gen}\{e_4, e_5\}$$

Si hanno in questo caso, in base alla definizione adottata, 5 modi naturali:

- due caratterizzati da una legge di moto puramente esponenziale e^{-t} corrispondenti a componenti di x_0 non nulle lungo e_3 ed e_5 ;
- due caratterizzati da una legge di moto esponenziale e^{-t} con coefficiente un polinomio in t di primo grado; corrispondenti a componenti non nulle di x_0 lungo e_2 ed e_4 ;
- uno caratterizzato una legge di moto esponenziale e^{-t} con coefficiente un polinomio in t di secondo grado; corrispondente a componente non nulla di x_0 lungo e_1 .

Se quindi

$$A = T^{-1}JT = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & -1 & 3 \\ -6 & 12 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

con

$$T^{-1} = (u_1^1 \ u_1^2 \ u_1^3 \ u_2^1 \ u_2^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A ciascun autovalore risultano associati più modi naturali, uno per ciascun autospazio. L'ordine del modo naturale è assunto pari alla dimensione dell'autospazio e corrisponde all'ordine del polinomio in t che caratterizza la legge temporale; l'ordine massimo del modo coincide con l'ordine geometrico dell'autovalore. Diremo in questo caso di essere in presenza di **modi naturali multipli**. In questo caso, allora, l'evoluzione libera sarà del tipo

$$\begin{aligned} x_l(t) &= e^{At}x_0 \\ &= e^{-t} \left(c_{11} + c_{12}t + c_{13} \frac{t^2}{2} \right) u_1^1 + e^{-t} \left(c_{12} + c_{13}t \right) u_1^2 + e^{-t} c_{13} u_1^3 \\ &\quad + e^{-t} \left(c_{21} + c_{22}t \right) u_2^1 + e^{-t} c_{22} u_2^2. \end{aligned}$$

Sintetizzando quanto visto e le diverse posizioni, si ha:

- se gli autovalori sono distinti si hanno $r+c$ **modi naturali semplici**;
- se la molteplicità geometrica è uguale ad uno diremo che vi sono μ_i **modi naturali multipli** di ordine fino a μ_i (o anche un *modo naturale multiplo di dimensione μ_i*).
- se la molteplicità geometrica è pari a quella algebrica vi sono μ_i **modi naturali semplici** con leggi di moto coincidenti e di tipo esponenziale e pseudo-periodico semplice (o anche un *modo naturale semplice di dimensione μ_i*).

- nel caso generale vi sono μ_i **modi naturali multipli** di ordine fino a m_i , con leggi di moto che possono anche essere coincidenti (o anche *modi naturali di ordine fino a m_i di dimensioni corrispondenti all'ordine dell'autovettore della legge di moto*).

Giova ricordare che ciascun sottospazio U_i è somma diretta di autospazi ciascuno associato ad una catena di autovettori generalizzati. Inoltre ciascuno di questi ultimi, generato da un autovettore di ordine uno, contiene autospazi di dimensione uno, due, ..., fino all'ordine massimo dell'autovettore generalizzato che appartiene a quella catena.

Le due situazioni limite che si presentano in presenza di un autovalore a molteplicità algebrica maggiore di uno sono quella in cui la molteplicità geometrica è uguale a quella algebrica, cioè che corrisponde all'esistenza di tanti autospazi di dimensione uno in numero pari alla molteplicità algebrica, e si tratta del caso già trattato in precedenza (*A regolare*), oppure la molteplicità geometrica è pari ad uno; ciò che corrisponde all'esistenza di una sola catena di autovettori generalizzati ed all'esistenza di una sequenza di autospazi generalizzati di dimensione crescente fino alla molteplicità algebrica. Nei casi intermedi si hanno più catene di autovettori generalizzati, ciascuna definisce una sequenza di autospazi di dimensione crescente. Il numero delle catene è pari alla molteplicità geometrica dell'autovalore μ_i e definisce il numero dei blocchi di Jordan che compongono la forma più semplice dell'operatore; il blocco di Jordan maggiore ha dimensione pari all'ordine geometrico dell'autovalore m_i .

Esempio 2.3.4 Si consideri il sistema descritto dal modello

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}u \\ y &= (1 \ 0 \ 0)x.\end{aligned}$$

È richiesto di calcolare l'evoluzione libera nello stato a partire dalla condizione iniziale $x_0 = (1 \ 2 \ 3)'$. Il sistema in oggetto ha dimensione $n = 3$. Il polinomio caratteristico della matrice dinamica è dato da

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2.$$

In questo caso, per identificare i modi naturali che definiscono l'evoluzione libera occorre calcolare la molteplicità algebrica di ciascun autovalore. In particolare, all'autovalore $\lambda = 1$ è associato l'autovettore

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mentre all'autovalore $\lambda_2 = -1$ è associato il solo autovettore

$$u_2^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'autovettore generalizzato di ordine 2 associato all'autovalore $\lambda_2 = -1$ è dato da

$$u_2^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Il sistema è caratterizzato quindi da due modi naturali:

- un modo naturale aperiodico divergente associato all'autovalore $\lambda_1 = 1$;
- un modo naturale aperiodico multiplo associato all'autovalore $\lambda_2 = -1$.

L'evoluzione libera, sarà quindi del tipo

$$x_l(t) = e^{At}x_0 = c_1 e^t u_1 + e^{-t} ((c_{21} + c_{22}t) u_2^1 + c_{22} u_2^2).$$

in cui $c_1 = v_1' x_0$, $c_{21} = v_2^{1'} x_0$, e $c_{22} = v_2^{2'} x_0$ con i corrispondenti autovettori sinistri calcolabili come le righe della matrice T , inversa di

$$T^{-1} = (u_1 \quad u_2^1 \quad u_2^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

e data da

$$T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2^{1'} \\ v_2^{2'} \end{pmatrix}$$

ottenendo quindi

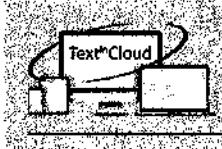
$$v_1' = \left(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \right), \quad v_2^{1'} = \left(\frac{3}{4} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{4} \right), \quad v_2^{2'} = \left(\frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \right).$$

Posti

$$c_1 = v_1' x_0 = 2, \quad c_{21} = v_2^{1'} x_0 = -1, \quad c_{22} = v_2^{2'} x_0 = -1$$

l'evoluzione libera nello stato a partire dalla condizione iniziale data è

$$x_l(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-t} - te^{-t} \\ 2e^t + te^{-t} \\ e^{-t} + 2e^t - te^{-t} \end{pmatrix}.$$



2.4

I modi naturali nello stato e in uscita

Il concetto di modo naturale ora introdotto si presta a svolgere una prima indagine su quanto prima accennato a proposito della rappresentatività del modello costituito dalla sola risposta forzata (matrice delle risposte impulsive).

A tal fine, facendo riferimento alla presenza della legge temporale del modo nelle colonne della matrice delle risposte impulsive nello stato e nella matrice di transizione in uscita, è usuale introdurre nella teoria dei sistemi la definizione di modo naturale **eccitabile** e quella di modo naturale **osservabile**.

2.4.1 Il caso di un operatore regolare

Si pensi in prima istanza al caso in cui gli autovalori siano reali e distinti: ciò che implica la coincidenza tra la molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. In tal caso, infatti, le leggi temporali associate ai modi sono distinte.

Risulta evidente che mentre al variare di x_0 nell'evoluzione libera del sistema potranno comparire tutte le leggi temporali dei modi naturali, come si suol dire l'evoluzione libera è caratterizzata da tutti i modi naturali, per quanto riguarda l'evoluzione forzata nello stato ciò non è più vero. Infatti la risposta forzata è caratterizzata da tutte e sole le leggi "temporali" che compaiono in $e^{At}B$. Più precisamente diremo che un modo naturale è **eccitabili** "con impulsi in ingresso" se la sua legge temporale compare nella $H(t) = e^{At}B$. Tale denominazione deriva dalla considerazione che se si applica un ingresso di tipo impulsivo, $u(t) = u_0\delta(t)$, risulta

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu_0\delta(\tau)d\tau = e^{At}Bu_0$$

cioè la risposta coincide con l'evoluzione libera che muove dallo stato iniziale $x_0 = Bu_0$, cioè da uno stato iniziale pari ad una fissata combinazione lineare delle colonne di B . Il modo i -esimo associato all'autovalore λ_i , è quindi eccitabile se influenza l'evoluzione nello stato.

La condizione di eccitabilità del generico i -mo modo naturale nel caso di autovalori reali e distinti è che

$$v'_i B \neq 0$$

Infatti dall'espressione

$$H(t) = e^{At}B = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i v'_i B$$

si comprende che la legge temporale $e^{\lambda_i t}$ compare a secondo membro se e solo se la condizione citata è verificata.

Analoghe considerazioni possono essere ripetute per la risposta in evoluzione libera in uscita. Ciò conduce naturalmente ad introdurre la definizione di modo naturale **osservabile** come quel modo la cui legge temporale compaia in $\Psi(t) = Ce^{At}$ (che quindi può essere sollecitata variando x_0). Anche in questo caso può

essere formulata una condizione di osservabilità che ammette una condizione equivalente alla precedente. Se infatti si suppone che gli autovalori siano reali e distinti, il generico i -mo modo naturale è osservabile se e solo se

$$Cu_i \neq 0$$

ciò che risulta evidente dall'espressione

$$\Psi(t) = Ce^{At} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} Cu_i v'_i.$$

Non resta che domandarsi quali siano le leggi temporali che caratterizzano $W(t)$, cioè la risposta forzata in uscita. È chiaro che solo i modi naturali, e quindi le relative leggi temporali, che sono simultaneamente eccitabili ed osservabili potranno comparire nella risposta forzata.

Si tratta ovviamente di tutti e soli i modi naturali per i quali risulta

$$v'_i B \neq 0 \quad Cu_i \neq 0$$

come risulta se si tiene conto del fatto che posto $D = 0$,

$$W(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} Cu_i v'_i B$$

Nel caso di modi pseudoperiodici associati a coppie di autovalori complessi coniugati e distinti, nell'espressione della $H(t)$ compariranno termini del tipo

$$e^{\alpha_k t} (\cos(\omega_k t)(u_{ka} v'_{ka} + u_{kb} v'_{kb}) + \sin(\omega_k t)(u_{ka} v'_{ka} - u_{kb} v'_{kb})) B$$

da cui con semplici passaggi si verifica che il k -esimo modo è eccitabile con impulsi ingresso se

$$v'_{ka} B \neq 0 \text{ oppure } v'_{kb} B \neq 0.$$

Il k -esimo modo sarà osservabile in uscita se

$$Cu_{ka} \neq 0 \text{ oppure } Cu_{kb} \neq 0.$$

Ed infine nella $W(t)$ compariranno quei modi pseudoperiodici simultaneamente eccitabili ed osservabili.

Le considerazioni precedenti valgono nel caso in cui gli autovalori sono distinti. Altrimenti è necessario introdurre le definizioni di **completa eccitabilità** e **completa osservabilità**. La completa eccitabilità del modo associato all'autovalore λ_i con $\hat{\mu}_i = \mu_i$, si ha quando il sottospazio $Im(B)$ ammette una proiezione in U_i nella base degli autovettori che contiene U_i stesso: in formule:

$$v' B \neq 0 \text{ per ogni } v' \in GenV'_i \tag{2.32}$$

con $GenV'_i$ insieme delle combinazioni lineare delle μ_i righe della matrice V'_i in (2.26). Analogamente la completa osservabilità si ha quando

$$Cu \neq 0 \text{ per ogni } u \in U_i. \tag{2.33}$$

Si noti che una condizione necessaria affinché si possa avere la completa raggiungibilità (osservabilità) è che il sistema abbia un numero di ingressi (di uscite) almeno pari alla molteplicità dell'autovalore. Si noti anche che la nozione di completa raggiungibilità e osservabilità restituiscono nel caso di molteplicità unitaria le definizioni date in precedenza.

Si propone qui di seguito un esempio che mette in evidenza le peculiarità del caso in cui gli autovalori abbiano molteplicità algebrica uguale a quella algebrica maggiore di uno.

Esempio 2.4.1 *Si consideri il sistema dinamico*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= (1 \ 1 \ 1)x.\end{aligned}$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica e geometrica pari a 2, e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica e geometrica pari a 1.

Per il calcolo degli autovettori associati a λ_1 si ha

$$(A - \lambda I)u = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}u = 0$$

Due possibili autovettori sono quindi

$$u_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si nota che tali vettori identificano un piano e pertanto altre soluzioni sono possibili.

Per il calcolo dell'autovettore associato a λ_2 si ha

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}u = 0 \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovettori sinistri sono quindi

$$\begin{pmatrix} v'_{11} \\ v'_{12} \\ v'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per lo studio dell'eccitabilità si ha

$$v'_{11}B = 1, \quad v'_{12}B = 0, \quad v'_2B = 1.$$

Per lo studio dell'osservabilità si ha

$$Cu_{11} = 0, \quad Cu_{12} = 1, \quad Cu_2 = 1.$$

Da tale indagine risulterebbe quindi che la $W(t) = e^{2t}$.

Se ora si considera un'altra scelta per gli autovettori associati a λ_1 , ad esempio

$$\tilde{u}_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

e nuovamente

$$\tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovettori sinistri saranno quindi

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}'_{11} \\ \tilde{v}'_{12} \\ \tilde{v}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per lo studio dell'eccitabilità si avrà

$$\tilde{v}'_{11}B = 1, \quad \tilde{v}'_{12}B = -1, \quad \tilde{v}'_2B = 1.$$

Per lo studio dell'osservabilità si avrà

$$C\tilde{u}_{11} = 1, \quad C\tilde{u}_{12} = 1, \quad C\tilde{u}_2 = 1.$$

Da tale indagine risulterebbero tutti i modi eccitabili e osservabili anche se nuovamente $W(t) = e^{2t}$.

Ovviamente il sistema dato non soddisfa le condizioni di completa raggiungibilità ed osservabilità, per la prima dovrebbe risultare che

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{per ogni } \alpha \text{ e } \beta$$

condizione che può essere verificata solo se si aggiunge un canale di ingresso con la seconda componente diversa da zero. Per la completa osservabilità analogamente non potrà essere soddisfatta a meno di introdurre un ulteriore uscita; ad esempio l'uscita $y_2 = x_1$.

Il precedente esempio mostra appunto come nel caso di autovalori con molteplicità algebrica maggiore di uno ma pari a quella geometrica, lo studio vada condotto con una certa attenzione.

Esempio 2.4.2 Si consideri ancora il caso in esame nell'Esempio 2.3.4 per cui si vuole, ora, sviluppare l'analisi modale.

Consideriamo il modo naturale associato all'autovalore $\lambda_1 = 0$. Il modo in questione risulta eccitabile essendo verificata la condizione geometrica

$$v_1'B = -\frac{1}{2}(1 \quad -1) \neq 0$$

ma non osservabile poiché

$$Cu_1 = 0.$$

Il modo naturale associato all'autovalore $\lambda_2 = -1$ è eccitabile poiché

$$v_2' B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

ed osservabile poiché

$$Cu_2 = 1 \neq 0.$$

Il modo naturale associato all'autovalore $\lambda_3 = 2$ è eccitabile poiché

$$v_3' B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

ed osservabile poiché

$$Cu_3 = 1 \neq 0.$$

Esempio 2.4.3 Si consideri ancora il caso in esame nell'Esempio 2.3.2 per cui si vuole, ora, sviluppare l'analisi modale.

Il modo naturale aperiodico non è eccitabile poiché

$$v_1' B = 0$$

ma osservabile poiché

$$Cu_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Il modo naturale pseudo-periodico è eccitabile poiché

$$v_a' B = 1 \neq 0, \quad v_b' B = 0$$

e osservabile poiché

$$Cu_a = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad Cu_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.4.2 Il caso generale

Le condizioni geometriche di eccitabilità ed osservabilità possono essere estese al caso generale; la trattazione dettagliata è complessa, ma lo studio sinora condotto e il punto di vista geometrico ci aiutano a capire i risultati che vengono qui esposti in modo succinto e con riferimento ad un esempio.

Si farà nel seguito riferimento ad un sistema dinamico di dimensione $n = 5$ caratterizzato da un solo autovalore, con una matrice di Jordan a due blocchi

($\hat{\mu} = 2$) di dimensione (lunghezza delle catene di autovettori generalizzati) pari a tre ($m = 3$) e due, ovvero

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Se si scrive l'esponenziale di tale matrice

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

esso è caratterizzato da tre leggi temporali

$$e^{\lambda t}, \quad te^{\lambda t}, \quad \frac{t^2}{2}e^{\lambda t}$$

che definiscono i cinque modi secondo quanto indicato nel precedente studio. Tali modi corrispondono ad una lettura per colonne dell'esponenziale della matrice.

L'analisi dell'eccitabilità e dell'osservabilità può essere condotto moltiplicando a destra per una matrice B e a sinistra per una C e verificando quando le diverse leggi temporali compaiono in H o in Ψ .

L'eccitabilità di un modo dunque può essere messa in corrispondenza con la presenza di un elemento non nullo nelle colonne di B corrispondenti a quelle colonne. Si noti però che per avere l'eccitabilità, se vista come condizione che porta la legge temporale nella matrice H , sembrerebbe sufficiente richiedere semplicemente che la matrice B abbia un elemento non nullo nella terza riga. Questo è vero, e lascia intendere la presenza di un autovalore λ con ordine 3, ma trasporta in H le leggi di moto associate agli altri due modi che sono caratteristiche del secondo blocco e contenute nell'ultima colonna. Questa osservazione dovrebbe far intendere che per avere una **completa eccitabilità** è necessario avere una matrice B con almeno due colonne e coefficienti a determinante non nullo tra gli elementi della terza e quinta riga. In altri termini è necessario vi siano perlomeno due ingressi e tra loro indipendenti che assicurano una condizione analoga alla (2.32) dove in luogo di V'_i vi siano le due righe dell'inversa della trasformazione di coordinate di Jordan che corrispondono ai due autovettori di ordine massimo su ogni blocco (la terza e la quinta nel caso in esame). Questo si traduce nella condizione citata di indipendenza delle due colonne di B .

L'eccitabilità completa dei modi multipli richiede la presenza di tanti ingressi quanta è la molteplicità geometrica dell'autovalore e , allo stesso tempo, una condizione sulle colonne della matrice B (tipo (2.32)).

Lo studio della **completa osservabilità** può essere condotto moltiplicando a sinistra per una C e verificando quando le diverse leggi temporali compaiono

Ψ . Le conclusioni alle quali si arriva sono analoghe e possono essere ripetute senza difficoltà. La condizione in questo caso sono del tipo delle (2.33) dove in luogo di U_i compare lo spazio generato dai due autovettori di ordine massimo. Anche in questo caso dunque, perlomeno due ($\hat{\mu}_i$ nel caso generale) uscite sono necessarie. Possiamo dunque concludere che una condizione necessaria per la completa eccitabilità e la completa osservabilità in presenza di modi multipli è che vi siano tanti ingressi e tante uscite quante sono le catene di autovettori generalizzati.

Una nota sui modi naturali

Le considerazioni che seguono in merito ai modi naturali ed alla loro caratterizzazione del comportamento del sistema, vengono ora proposte, ma valgono invariate per i sistemi a tempo discreto.

I modi naturali e le relative leggi temporali completamente descrivono l'evoluzione libera del sistema. Essi sono potenzialmente tutti presenti nell'evoluzione libera, ma non necessariamente nell'evoluzione forzata e in uscita. Lo studio condotto mette in luce la completezza del modello rappresentazione con lo spazio di stato rispetto al modello del comportamento forzato; quest'ultimo è caratterizzato dai soli modi eccitabili ed osservabili. Al di là dell'importanza nell'analisi, questo fatto mette bene in luce i limiti insiti nella costruzione di modelli mediante esperimenti ingresso-uscita. Il modello risposta impulsiva, che come abbiamo compreso e meglio vedremo nel seguito può essere calcolato indipendentemente dalla rappresentazione con lo stato, mantiene informazioni che sono complete solo se sussistono le condizioni di **completa eccitabilità ed osservabilità** del sistema; ad essa faremo indirettamente riferimento nel seguito anche quando non precisamente indicato.

Il modello rappresentazione con lo stato, costruito conoscendo il sistema, i suoi componenti e le leggi che governano il loro funzionamento è dunque il modello completo. Abbiamo anche sottolineato l'importanza di disporre comunque di un modello隐式 con lo stato in quanto in grado di emulare il funzionamento in tempo reale del sistema (Figura 2.1). Ebbene se tale rappresentazione è calcolata a partire dalla risposta impulsiva, come può accadere nella pratica ed è spiegato nel Capitolo 7, gli argomenti sviluppati in questo capitolo precisano le caratteristiche di tale modello matematico.

Infine la discussione sulle condizioni di completa eccitabilità ed osservabilità e la necessità di disporre di un ingresso per ogni catena di autovettori, mette chiaramente in luce un limite intrinseco del modello ricostruito a partire da una risposta impulsiva: si pensi ad esempio al caso di un sistema ad un ingresso ed una uscita; la risposta impulsiva sarà caratterizzata da leggi temporali esponenziali con coefficienti polinomiali di grado pari al più all'ordine di un autovalore, ma nell'eventuale ricostruzione della rappresentazione con lo stato sarà solo possibile ricostruire la presenza del relativo autovalore ma con ordine geometrico uguale alla molteplicità algebrica (una sola catena di autovettori generalizzati).



Approfondimento

2.5

Sistemi a tempo discreto: rappresentazioni implicite ed esplicite

Come abbiamo avuto modo di verificare nel capitolo precedente il modello implicito di un sistema dinamico lineare stazionario di dimensione n a tempo discreto, in cui $t \in \mathbb{Z}$ (\mathbb{Z} l'insieme dei numeri interi), è descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) & x_0 = x(t_0) \in \mathbb{R}^n \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Le equazioni (2.34) stabiliscono la dipendenza delle q uscite, dai p ingressi, per il tramite delle n variabili di stato, $x(t) \in \mathbb{R}^n$. A ($n \times n$), B ($n \times p$), C ($q \times n$) e D ($q \times p$) sono, rispettivamente, la matrice dinamica, la matrice degli ingressi, la matrice del legame stato–uscita e la matrice del legame ingresso–uscita. Le (2.34) mettono in luce come l'uscita sia collegata allo stato e all'ingresso da una relazione istantanea, mentre lo stato dipende dall'ingresso per il tramite di un'equazione alle differenze prime. Si tratta di una dipendenza che stabilisce un collegamento dinamico lineare e causale tra l'ingresso e l'uscita e le (2.34) ne costituiscono il modello che tecnicamente viene definito come la **rappresentazione隐式 (equivalentemente la rappresentazione alle differenze)** di un sistema dinamico orientato lineare stazionario di dimensione finita n a tempo discreto. Il secondo membro della prima delle (2.34), ovvero $Ax(t) + Bu(t)$, prende il anche il nome di **funzione generatrice**, mentre $Cx(t) + Du(t)$ è la **trasformazione in uscita**.

Anche in questo caso, il modello implicito non esprime direttamente il legame tra l'ingresso e l'uscita, ma è di grande utilità non solo nel contesto dell'automatica, ove è alla base di numerosi metodi di progetto, ma anche nello studio e nella simulazione, in quanto emblematico di uno schema fisico mediante il quale si può emulare, nel suo funzionamento in tempo reale, il comportamento del sistema impiegando dispositivi che effettuano operazioni elementari quali la somma di funzioni del tempo e la moltiplicazione per costanti, uniti a dispositivi che generano ritardi.

Lo schema, riportato in Figura 2.6 comprende i blocchi A, B, C, D, costituiti da moltiplicatori per costanti, n operatori di ritardo e sommatori. Esso mette

in luce la struttura del legame ingresso–uscita: vi è una parte dinamica, che prevede dei ritardi, ed una parte istantanea.

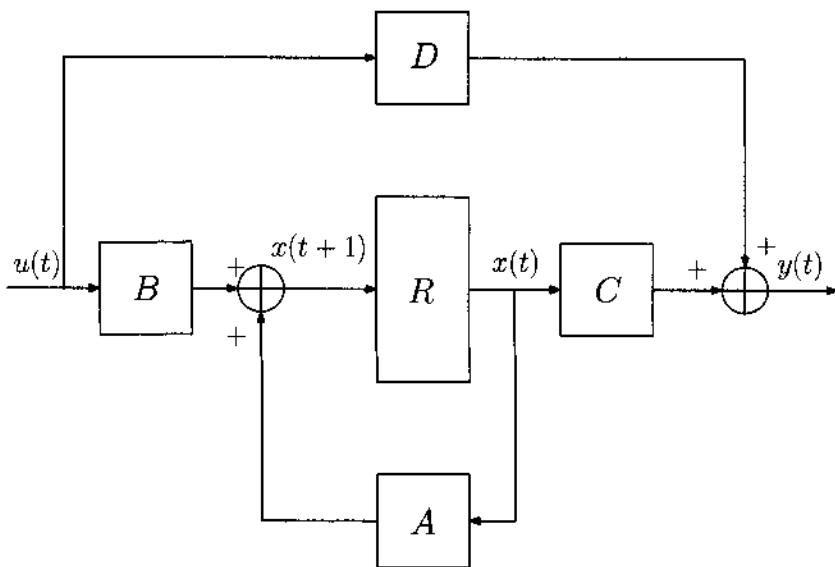


Figura 2.6: Schema di simulazione.

Il calcolo delle soluzioni delle (2.34), a partire da un fissato valore dello stato, $x_0 = x(t_0)$, assunto al tempo t_0 e da una fissato ingresso, $u(t)$ definito da t_0 in poi, consente di ottenere una descrizione esplicita delle evoluzioni nello stato e in uscita. Le espressioni delle evoluzioni nello stato, $x(t)$, e in uscita, $y(t)$, definiscono quella che viene chiamata la **rappresentazione esplicita** del sistema. Essa assume la forma

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t-\tau)u(\tau) \quad (2.35)$$

$$y(t) = \Psi(t - t_0)x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^t W(t-\tau)u(\tau)$$

Se indichiamo con A^t la potenza della matrice A è facile verificare, per sostituzioni successive, che la forma che assume la soluzione è del tipo (2.35) con

$$\Phi(t) = A^t$$

$$H(t) = \Phi(t-1)B = A^{(t-1)}B$$

$$\Psi(t) = C\Phi(t) = CA^t$$

$$W(t) = \begin{cases} C\Phi(t-1)B + CA^{(t-1)}B, & t > 0 \\ D, & t = 0 \end{cases}$$

Anche in questo caso si possono ripetere le osservazioni fatte per i sistemi a tempo continuo:

- le **risposte nello stato e in uscita** corrispondenti ad un assegnato stato iniziale x_0 e ad un ingresso $u(\cdot)$, sono la somma di due evoluzioni: l'**evoluzione libera**, che corrisponde allo stato iniziale assegnato, x_0 , e all'ingresso nullo ($u(\cdot) = 0$), e l'**evoluzione forzata**, che corrisponde all'ingresso dato $u(\cdot)$ e allo stato iniziale nullo ($x_0 = 0$);
- l'evoluzione libera è una **funzione lineare** dello stato iniziale e come tale espressa da un prodotto matrice-vettore: la matrice di transizione $\Phi(t)$ per lo stato iniziale x_0 ; l'evoluzione forzata è una funzione che dipende da tutti i campioni dell'ingresso nell'intervallo $[t_0, t]$, più precisamente è un prodotto di convoluzione, e come tale un **funzionale causale e lineare** a tempo discreto. Nel caso $D = 0$, la risposta forzata in uscita al tempo t dipenderà dai valori dell'ingresso fino al tempo $t-1$, risultando quindi il legame strettamente causale; la linearità deriva dalla proprietà dell'integrale che alla combinazione lineare degli ingressi associa la stessa combinazione lineare delle uscite corrispondenti ai singoli ingressi

$$\sum_{\tau=t_0}^t W(t-\tau)(k_1 u_1(\tau) + k_2 u_2(\tau)) = k_1 \sum_{\tau=t_0}^t W(t-\tau)u_1(\tau) + k_2 \sum_{\tau=t_0}^t W(t-\tau)u_2(\tau).$$

- $H(t)$ e $W(t)$, sono dette **matrici delle risposte impulsive** nello stato e in uscita, rispettivamente, hanno colonne che possono essere interpretate come risposte forzate ad ingressi impulsivi: per ogni $t_1 \in [t_0, t)$ e per ogni $u_0 \in \mathbb{R}^p$ si ha, infatti che

$$\sum_{\tau=t_0}^t W(t-\tau)u_0\delta(\tau-t_1) = W(t-t_1)u_0;$$

e scegliendo $u_0 = \mathbf{e}_i$ si ottiene la i -esima colonna della matrice $W(t)$ (analogo per la matrice $H(t)$);

- la rappresentazione allo studio, sia nella sua forma implicita che esplicita, è stazionaria e descrive un sistema che è intrinsecamente stazionario. Tale proprietà, che corrisponde al fatto che la risposta non dipende dall'istante di tempo iniziale t_0 , si manifesta, nel modello隐式的, con la indipendenza dal tempo di A , B , C , e D e nel modello esplicito, con la dipendenza da una sola variabile temporale delle matrici $\Phi(t)$, $H(t)$, $\Psi(t)$ e $W(t)$. Ciò deriva dal fatto che se si indica con $\delta_T u(\tau) = u(\tau - T)$ la traslazione a destra della funzione $u(t)$, risulta

$$\sum_{\tau=0}^t H(t-\tau)u(\tau) = \sum_{\tau=T}^{t+T} H(t+T-\tau)\delta_T u(\tau)$$

come si può verificare con il cambiamento di variabile $\zeta = (\tau - T)$;

- il comportamento forzato ingresso-uscita è descritto dalla $W(t)$; per tale motivo si usa dire che la $W(t)$ è un modello del comportamento forzato ingresso-uscita. Inoltre la *risposta impulsiva* (matrice delle risposte impulsive) è essa stessa interpretabile per quanto detto in precedenza come una risposta; vale dunque questa proprietà molto specifica, per la quale esiste una particolare risposta forzata che può essere utilizzata per calcolare ogni altra risposta forzata una volta noto l'ingresso (modello del comportamento forzato);
- la risposta forzata ha una struttura matematica molto particolare e pari alla somma dei contributi (ciascuno lineare) che ogni ingresso al tempo τ fornisce all'uscita al tempo t ($W(t-\tau)u(\tau)$); se si pensa al caso di un solo ingresso, si tratta di sommare i valori dell'ingresso pesati nei vari istanti τ con valori della risposta impulsiva in $(t-\tau)$. Si tratta di una **sommatoria di convoluzione**, spesso indicata con *

$$y_f(t) = W(t) * u(t) = \sum_{\tau=0}^t W(t-\tau)u(\tau) = \sum_{\tau=0}^t W(\tau)u(t-\tau)$$

dove l'ultima uguaglianza è facilmente verificata con il cambio di variabile $\zeta = (t-\tau)$. Se inoltre si osserva che un funzionale a tempo discreto causale lineare che esprime $\beta(t)$ in funzione di $\gamma(t)$ ha la forma di una sommatoria di convoluzione con un nucleo $K(t)$

$$\beta(t) = \sum_{\tau=0}^t K(t-\tau)\gamma(\tau)$$

possiamo concludere che la risposta forzata è data da un funzionale lineare strettamente causale il cui nucleo è pari alla risposta impulsiva.

- anche nel caso discreto, nello studio dei sistemi dinamici orientati, in cui si studiano le relazioni tra insiemi di variabili distinte in ingressi \mathcal{U} ed uscite \mathcal{Y}

$$\mathcal{Y} = \mathcal{H}(\mathcal{U})$$

si usa distinguere in due classi di problemi, rilevanti nell'ingegneria: i problemi diretti, finalizzati al calcolo delle uscite (calcolare \mathcal{Y} da \mathcal{H} e \mathcal{U}), e quelli inversi, finalizzati a calcolare una delle due entità matematiche a secondo membro a partire dalla conoscenza delle altre (calcolare \mathcal{U} da \mathcal{Y} e \mathcal{H} oppure calcolare \mathcal{H} da \mathcal{Y} e \mathcal{U}). Nuovamente la risoluzione di un problema di questo tipo nel caso di un sistema dinamico lineare stazionario comporta un calcolo complesso noto come la *deconvoluzione*, affrontato nel Capitolo 4;

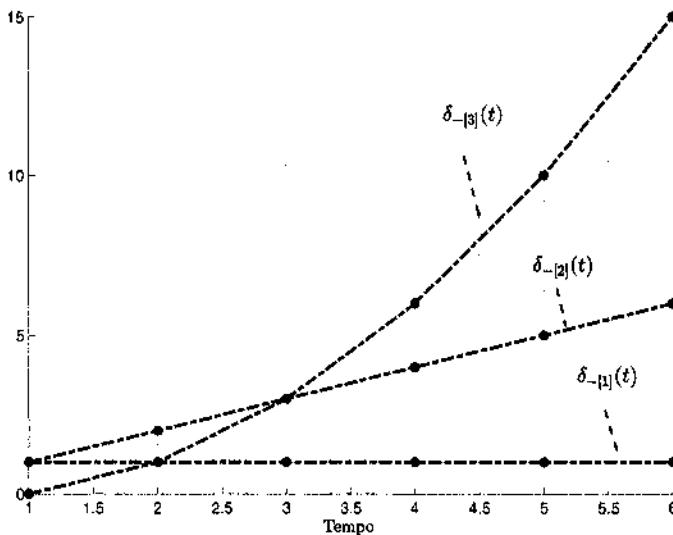


Figura 2.7: Alcuni esempi di ingressi canonici.

- vengono denominati ingressi canonici una classe di funzioni del tempo che se assunti in ingresso al sistema allo studio (lineare stazionario nel nostro caso) sollecitano comportamenti che consentono di individuare proprietà salienti del sistema. Quelli che qui interessa sono quelli che al pari della risposta impulsiva possono essere assunti a modello del comportamento forzato; si tratta delle funzioni

$$\delta_{-[k]}(t) = \frac{t^{[k-1]}}{(k-1)!} \delta_{-[1]}(t) = \frac{t(t-1)\dots(t-k+2)}{k!} \delta_{-[1]}(t) \quad k = 1, 2, \dots$$

che sono denominate *funzioni canoniche di ordine k*. Per convenzione per $k = 0$ si ottiene l'impulso $\delta(t)$. Per $k = 1$, $t^{[0]} = 1$ per cui si ha il gradino unitario, la funzione che vale 1 per $t \geq 0$ (anche nota come funzione di Heaviside discreta), per $k = 2$ la rampa lineare, la funzione che vale t per $t \geq 0$, per $k = 3$ la rampa parabolica, ..., come mostrato in Figura 2.7. Si noti che per le sue caratteristiche, la moltiplicazione di una funzione per il gradino unitario viene utilizzata per mettere in luce che la funzione si deve intendere

definita per $t \geq 0$. Una proprietà delle funzioni canoniche è che ciascuna di esse, al crescere di k è ottenuta a partire da quella di ordine inferiore (e ovviamente al decrescere di k) mediante shift.

Nella terminologia della Teoria dei Sistemi il modello (2.34) è detto implicito (o alla differenza prima), il corrispondente modello (2.35) è detto esplicito. Le caratteristiche delle risposte ed il loro calcolo dipende in modo significativo dalla matrice di transizione $\Phi(t)$ e delle matrici delle risposte impulsive nello stato ed in uscita. Il passaggio dal modello隐式到 esplicito, affrontato nel seguito di questo capitolo, corrisponde al calcolo e alla caratterizzazione delle evoluzioni nello stato e in uscita.

Anche nel caso discreto il passaggio inverso, che nella pratica si presenta come la ricostruzione di una rappresentazione con lo stato (A, B, C, D) a partire da un modello del comportamento forzato, è, anch'esso, un problema di rilievo per le applicazioni. Infatti, come già osservato, ad una rappresentazione con lo stato corrisponde l'esistenza di uno schema di realizzazione (o simulazione). La ricostruzione di una rappresentazione implicita a partire da un modello del comportamento forzato, è detto **problema della realizzazione** in quanto, una volta ottenuta la rappresentazione alle differenze, lo schema citato consente sia una realizzazione fisica mediante i componenti indicati sia l'implementazione mediante un sistema di calcolo per la simulazione del sistema.

2.5.1 La matrice di transizione

La struttura della matrice di transizione, A^t svolge un ruolo centrale nel caratterizzare il comportamento di un sistema a tempo discreto. Infatti, a partire da una rappresentazione, lineare, stazionaria, a dimensione finita, il calcolo delle evoluzioni consiste nel calcolare

$$\begin{aligned}x(t) &= A^{(t-t_0)} x_0 + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} A^{(t-\tau-1)} B u(\tau) \\y(t) &= C A^{(t-t_0)} x_0 + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} C A^{(t-\tau-1)} B u(\tau) + D u(t)\end{aligned}$$

Anche per calcolare la potenza di una matrice giova fare riferimento alle trasformazioni di coordinate lineari e ricordare che le matrici che descrivono il sistema si trasformano in TAT^{-1} , TB , e CT^{-1} . Se infatti TAT^{-1} ha una struttura rispetto alla quale il calcolo risulta più semplice, è questo ad esempio il caso della forma canonica in Appendice A, Λ , si ottiene

$$A = T^{-1} \Lambda T \implies A^t = (T^{-1} \Lambda T)^t = \dots = T^{-1} \Lambda^t T.$$

Essendo Λ diagonale a blocchi, la potenza è pari alla diagonale delle potenze dei singoli blocchi. Per la potenza della parte diagonale non si hanno problemi risultando pari alla diagonale delle potenze degli elementi sulla diagonale. È solo

necessario comprendere come calcolare la potenza del blocco (2×2) associato ad una coppia di autovalori complessi coniugati, posto

$$\begin{aligned}\lambda &= \alpha + j\omega = \sigma e^{j\theta} = \sigma(\cos\theta + j\sin\theta) \\ \implies \alpha &= \sigma \cos\theta \quad \omega = \sigma \sin\theta\end{aligned}$$

risulta

$$\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

e, non è difficile calcolare

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \cos\theta t & \sin\theta t \\ -\sin\theta t & \cos\theta t \end{pmatrix}$$

Quindi per il generico blocco (2×2) associato ad una coppia complessa coniugata si ha:

$$\Lambda^t = \sigma^t \begin{pmatrix} \cos\theta t & \sin\theta t \\ -\sin\theta t & \cos\theta t \end{pmatrix}$$

Risulta quindi

$$\Lambda^t = \begin{pmatrix} \lambda_1^t & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{m_1}^t & \\ & & & \begin{pmatrix} \sigma_1^t \cos\theta_1 t & \sigma_1^t \sin\theta_1 t \\ -\sigma_1^t \sin\theta_1 t & \sigma_1^t \cos\theta_1 t \end{pmatrix} \\ & & & \vdots \\ & & & \begin{pmatrix} \sigma_{m_2}^t \cos\theta_{m_2} t & \sigma_{m_2}^t \sin\theta_{m_2} t \\ -\sigma_{m_2}^t \sin\theta_{m_2} t & \sigma_{m_2}^t \cos\theta_{m_2} t \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

e sviluppando i calcoli

$$A^t = \sum_{i=1}^m \lambda_i^t u_i v_i' + \sum_{j=1}^n \sigma_j^t (\cos\theta_j t (u_{j,a} v_{j,a}' + u_{j,b} v_{j,b}') + \sin\theta_j t (u_{j,a} v_{j,b} - u_{j,b} v_{j,a}')) \quad (2.36)$$

L'espressione (2.36) è detta **forma spettrale della potenza di matrice A^t** .

Lo studente non avrà difficoltà a rivisitare, con riferimento al calcolo della potenza di una matrice, le considerazioni svolte in precedenza nel caso di autovalori con molteplicità geometrica minore di quella algebrica (ovvero ordine maggiore di uno).

Per il caso generale valgono le stesse considerazioni già fatte per il calcolo dell'esponenziale che nel caso specifico danno per il generico blocco, di dimensione k ,

$$\tilde{B}_l^k = \begin{pmatrix} \Lambda_l^t & t^{[1]}\Lambda_l^{t-1} & \dots & \dots & \frac{t^{[k-1]}}{(k-1)!}\Lambda_l^{t-k+1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & t^{[1]}\Lambda_l^{t-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \Lambda_l^t \end{pmatrix}$$

ove $\Lambda_l = \lambda_l$ nel caso di autovalore reale, λ_l , e

$$\Lambda_l = \sigma_l \begin{pmatrix} \cos\theta_l & \sin\theta_l \\ -\sin\theta_l & \cos\theta_l \end{pmatrix}$$

per una coppia di complessi coniugati, $(\alpha_l \pm j\omega_l) = \sigma_l(\cos\theta_l \pm j\sin\theta_l)$ ed, inoltre, $t^{[k]}$ denota il polinomio fattoriale di ordine k definito come

$$t^{[k]} = t(t-1)\dots(t-k+1)$$

2.5.2 I modi naturali per i sistemi a tempo discreto

Considerazioni analoghe a quelle sinora svolte possono essere ripetute per i sistemi a tempo discreto. Gli stessi argomenti usati per i sistemi a tempo discreto conducono a

$$x_j(t) = A^t x_0 + \sum_{j=1}^n \lambda_j^t m_j (\sin(\theta_j t + \varphi_j) u_{ja} + \cos(\theta_j t + \varphi_j) u_{jb})$$

ove

$$\lambda_j = |\lambda_j| e^{j\theta_j}, \quad 0 < \theta_j < \pi$$

ed i parametri presenti sono definiti come per i sistemi a tempo continuo.

Anche in questo caso l'evoluzione libera nello stato è data dalla combinazione lineare di modi naturali che avvengono lungo particolari direzioni, quelli associati ad autovalori reali, e in piani, quelli associati a coppie di autovalori complessi. Una particolarità dei sistemi a tempo discreto è una suddivisione dei modi associati ad autovalori reali; in tal caso infatti si hanno modi cosiddetti *aperiodici* se corrispondenti ad autovalori reali positivi e modi cosiddetti *alternanti* se corrispondenti ad autovalori reali negativi. Il moto in tal caso avviene, si pensi al caso semplice di molteplicità algebrica unitaria, lungo una retta restando dalla stessa parte dello zero, per il modo aperiodico, alternandosi da una parte e dall'altra dello zero, per il modo alternante. Si hanno quindi modi aperiodici (autovalori reali e positivi), alternanti (autovalori reali e negativi), pseudoperiodici (coppie complesse coniugate).

In Figura 2.8 sono riportati gli andamenti nel tempo delle leggi di moto corrispondenti alle diverse collocazione degli autovalori.

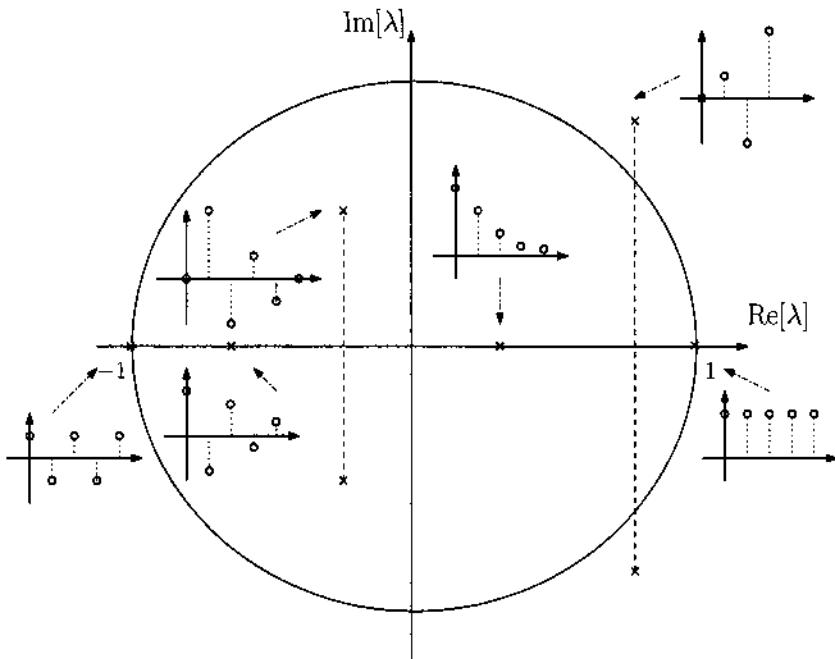


Figura 2.8

Nel caso di autovalori con molteplicità algebrica maggiore di quella geometrica, con considerazioni analoghe a quelle svolte nel caso tempo continuo, si calcola:

$$A^t \underline{c}_i = (A - \lambda_i I + \lambda_i I)^t \underline{c}_i = \sum_{h=0}^t \binom{t}{h} (A - \lambda_i I)^h \underline{c}_i \lambda_i^{t-h}$$

$$\binom{t}{h} = \frac{t(t-1)\dots(t-h+1)}{h!} := \frac{t^{[h]}}{h!}.$$

Quindi le leggi di moto sono del tipo potenza con coefficienti che sono *polinomi fattoriali*.

Infine, le stesse considerazioni possono essere ripetute circa l'eccitabilità e l'osservabilità dei modi ed il significato del modello forzato. L'interpretazione fisica è ancora più evidente in questo caso.

Esempio 2.5.1 Si consideri il sistema a tempo discreto

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y(t) = (1 \quad 1 \quad 2) x(t).$$

Calcolare l'evoluzione libera del sistema a partire dallo stato iniziale $x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}'$ ed effettuare l'analisi modale.

La matrice dinamica del sistema ha tre autovalori

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = -2$$

e quindi l'evoluzione libera è caratterizzata da tre modi naturali e, in particolare,

- *un modo naturale aperiodico convergente associato all'autovalore $\frac{1}{2}$;*
- *un modo naturale aperiodico alternante convergente associato all'autovalore $-\frac{1}{2}$;*
- *un modo naturale aperiodico alternante divergente associato all'autovalore -2 .*

L'evoluzione libera nello stato assume quindi la forma

$$x(t) = A^t x_0 = c_1 \left(\frac{1}{2} \right)^t u_1 + c_2 \left(-\frac{1}{2} \right)^t u_2 + c_3 (-2)^t u_3$$

con $c_i = v_i' x_0$ e u_i, v_i gli autovettori (destri e sinistri) associati all'autovalore λ_i (per $i = 1, 2, 3$). In particolare, gli autovettori destri sono dati da

$$u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a cui corrispondono gli autovettori sinistri

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

A questo punto, posti

$$c_1 = \frac{1}{5}, \quad c_2 = \frac{1}{5}, \quad c_3 = -\frac{4}{15}$$

L'evoluzione libera nello stato a partire dalla condizione iniziale desiderata è data da

$$x(t) = A^t x_0 = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^t \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{2} \right)^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{15} (-2)^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a cui corrisponde l'evoluzione in uscita

$$y(t) = CA^t x_0 = \frac{11}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^t \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{4}{5} (-2)^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Per l'analisi modale, invece, sfruttando le condizioni geometriche concludiamo quanto segue:

- *i modo naturale aperiodico convergente associato all'autovalore $\frac{1}{2}$ è non eccitabile ma osservabile poiché*

$$v_1' B = 0, \quad C u_1 = 11 \neq 0;$$

- *un modo naturale aperiodico alternante convergente associato all'autovalore $-\frac{1}{2}$ è eccitabile ma non osservabile*

$$v_2' B = \frac{1}{3}, \quad C u_2 = 0;$$

- *un modo naturale aperiodico alternante divergente associato all'autovalore -2 è eccitabile e non osservabile*

$$v_3' B = -\frac{2}{3}, \quad C u_3 = 0.$$

Esempio 2.5.2 Si consideri il sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} u \\ y(t) &= (1 \ 0 \ 0) x(t). \end{aligned}$$

Calcolare l'evoluzione libera del sistema a partire dallo stato iniziale $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed effettuare l'analisi modale.

La matrice dinamica del sistema presenta tre autovalori

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_{2,3} = 1 \pm j = \sqrt{2} e^{j45^\circ}.$$

L'evoluzione libera del sistema è quindi governata da due modi naturali:

- *un modo naturale aperiodico convergente associato all'autovalore $\lambda_1 = \frac{1}{2}$;*
- *un modo naturale pseudo-periodico divergente associato alla coppia di autovalori $\lambda_{2,3} = 1 \pm j$.*

L'evoluzione libera del sistema è quindi del tipo

$$x_l(t) = A^t x_0 = c_1 \left(\frac{1}{2} \right)^t u_1 + (\sqrt{2})^t \left(\sin(45t + \varphi) u_a + \cos(45t + \varphi) u_b \right)$$

in cui gli autovettori destri sono dati da

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad u_b = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$c_1 = v_1' x_0, \quad c_a = v_a' x_0, \quad c_b = v_b' x_0$$

$$m = \sqrt{c_a^2 + c_b^2}, \quad \sin(\varphi) = \frac{c_a}{m}, \quad \cos(\varphi) = \frac{c_b}{m}.$$

A questo punto, quindi, gli autovettori sinistri sono dati da

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_a' \\ v_b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Posto allora

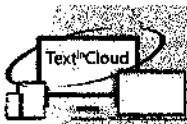
$$c_1 = \frac{1}{5}, \quad c_a = -\frac{1}{5}, \quad c_b = \frac{1}{5}, \quad m = \frac{\sqrt{2}}{5}, \quad \varphi = -45^\circ$$

L'evoluzione libera nello stato e in uscita sono date da

$$x_l(t) = A^t x_0 = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{5} (\sqrt{2})^t \left(\sin(45t - 45) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \cos(45t - 45) \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$y_l(t) = C A^t x_0 = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^t - \frac{2\sqrt{2}}{25} (\sqrt{2})^t (3 \sin(45t - 45) - \cos(45t - 45)).$$

Applicando la condizione geometrica, concludiamo che tutti i modi naturali sono eccitabili ed osservabili.



Approfondimento

— 2.6 —

Rappresentazioni a tempo discreto di sistemi a tempo continuo

Le rappresentazioni con lo stato a tempo discreto possono essere impiegate per descrivere le evoluzioni che corrispondono a sistemi e processi che evolvono nel tempo in modo sincrono o asincrono (si pensi all'evoluzione di una popolazione, ad una procedura di calcolo o alle diverse fasi di un'attività), ma possono anche essere impiegate per descrivere il comportamento in particolari condizioni di funzionamento di sistemi dinamici a tempo continuo.

Si consideri a questo proposito la situazione illustrata in Figura 2.9 in cui l'ingresso al sistema continuo è costante a tratti su intervalli temporali di ampiezza T , e $x(t)$ ed $y(t)$ sono campionati, su intervalli temporali di ampiezza T in modalità sincrona con le variazioni dell'ingresso.

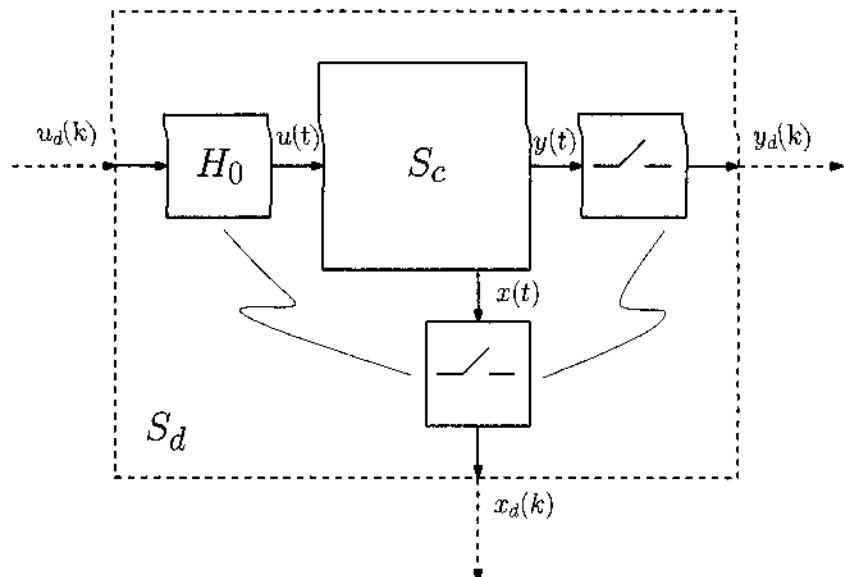


Figura 2.9: Schema di discretizzazione

Se si suppone che l'ingresso costante a tratti sia realizzato da un dispositivo di tenuta di ordine zero, denominato *holder* (H_0), e il campionamento sia realizzato da *campionatori* (C^T), il collegamento tra l'ingresso esterno $u_d(k) = u(kT)$, le evoluzioni in uscita $y_d(k) = y(kT)$, e nello stato $x_d(k) = x(kT)$, del sistema complessivo, è descritto matematicamente da una rappresentazione a tempo discreto. Al fine di evitare confusioni per tale rappresentazione il tempo, appartenente all'insieme dei numeri interi, sarà indicato con k in luogo di t .

Il problema in esame è noto nella letteratura dei sistemi dinamici con il nome di problema della **discretizzazione** (di un sistema a tempo continuo).

Il calcolo di questo modello, denominato la *rappresentazione a tempo discreto equivalente* del sistema a tempo continuo dato, viene nel seguito dettagliato con riferimento al caso dei sistemi lineari stazionari allo studio.

L'equazione alle differenze prime che descrive le evoluzioni agli istanti di campionamento può essere ottenuta dalla prima delle (2.2) ponendo $t_0 = kT$ e $t = (k+1)T$ e tenendo conto delle espressioni di Φ , H , Ψ e W , si ottiene

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} B d\tau u(kT)$$

dove si è anche ricordato che l'ingresso è costante sull'intervallo $[(k+1)T, kT]$. Con il cambio di variabile $\zeta = ((k+1)T - \tau)$ e indicando con l'apice il segnale a tempo discreto, si ha:

$$\dot{x}_d(k+1) = e^{AT} x_d(k) + \int_0^T e^{A\zeta} d\zeta B u_d(k).$$

Poiché l'equazione di uscita è istantanea, si ottiene la rappresentazione a tempo discreto equivalente:

$$\begin{aligned}x_d(k+1) &= A_T x_d(k) + B_T u_d(k) \\y_d(k) &= C x_d(k) + D u_d(k)\end{aligned}\quad (2.37)$$

con

$$A_T = e^{AT} \quad B_T = \int_0^T e^{At} dt B, \quad (2.38)$$

Alcune osservazioni:

- il calcolo del modello a tempo discreto equivalente richiede il calcolo della matrice di transizione e dell'integrale nella (2.38);
- se si tiene conto dello sviluppo in serie di potenze dell'esponenziale di una matrice e con esso si calcola anche l'integrale nella (2.38) si ottiene:

$$x_d(k+1) = (I + TA + \frac{T^2}{2} A^2 + \dots) x_d(k) + (TB + \frac{T^2}{2} AB + \dots) u_d(k)$$

che approssima allo sviluppo al primo ordine in potenze di T restituisce l'approssimazione di Eulero della derivata con il suo rapporto incrementale. Più precisamente, approssimando per T piccolo la derivata in $t = kT$ con il rapporto incrementale

$$\dot{x}(t)|_{t=kT} \approx \frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T}$$

si ottiene

$$x_d(k+1) = x_d(k) + TA x_d(k) + TB u_d(k);$$

- si osservi che integrando, nel caso in cui A sia invertibile, vale la relazione

$$B_T = A^{-1} (e^{AT} - I) B = (e^{AT} - I) A^{-1} B;$$

- una rappresentazione approssimata, migliore di quella di Eulero che si arresta al primo ordine e che al pari di questa non richiede il calcolo dell'esponenziale, ma solo calcoli numerici è la seguente: si definisca

$$\Psi_n := I + \frac{TA}{2} \left(I + \frac{TA}{3} \left(\dots \frac{TA}{n-1} \left(I + \frac{TA}{n} \right) \right) \dots \right) = I + \frac{TA}{2} + \frac{T^2 A^2}{3!} + \dots$$

poiché risulta

$$A_T = I + TA \left(I + \frac{TA}{2} + \frac{T^2 A^2}{3!} + \dots \right)$$

si comprende che se si sceglie n in modo che l'aggiunta del termine $\frac{TA}{n}$ sia trascurabile, ciò che equivale a richiedere che sia soddisfatta la seguente diseguaglianza $\frac{T\|A\|}{n} < \epsilon$, la scelta finale

$$A_T \approx I + TA \cdot \Psi_n \quad B_T \approx \Psi_n \cdot B$$

rappresenta una buona approssimazione delle matrici A_T e B_T ;

- un ultimo aspetto che interessa mettere in evidenza riguarda la collocazione degli autovalori del sistema a tempo discreto in relazione a quelli del sistema continuo. Se indichiamo con λ_i^c e λ_i^d gli autovalori del sistema a tempo continuo e del tempo discreto equivalente, vale tra essi la relazione:

$$\lambda_i^d = e^{\lambda_i^c T}. \quad (2.39)$$

La precedente corrispondenza risulta immediatamente osservando che, dalle (2.14) e (2.3), la forma spettrale della matrice dinamica si riflette sulla forma spettrale della matrice di transizione e di conseguenza della matrice A_T . Scritto per semplicità di notazioni nel caso di soli autovalori reali e distinti, si ha

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i^c u_i v_i' \implies e^{AT} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i^c T} u_i v_i' \implies A_T = \sum_{i=1}^n \lambda_i^d u_i v_i'.$$

Ne segue che gli autovalori di un sistema a tempo discreto che proviene dalla discretizzazione di un sistema a tempo continuo non possono assumere valori arbitrari, non possono ad esempio essere uguali a zero. Inoltre possono essere negativi solo se corrispondenti ad una coppia di autovalori complessi coniugati di opportuna pulsazione. Ciò comporta, nei sistemi che provengono dalla discretizzazione di un sistema a tempo continuo, l'eventuale presenza di modi alternanti necessariamente a coppie.

Esempio 2.6.1 Calcolare il sistema a tempo discreto equivalente del sistema in Esempio 2.3.4 per il generico periodo di campionamento T .

In base a quanto visto in teoria, il sistema a tempo discreto equivalente è caratterizzato dalla matrice dinamica

$$\begin{aligned} A_T &= e^{AT} = e^{\lambda_1 t} u_1 v_1' + e^{\lambda_2 t} u_2 v_2' + e^{\lambda_3 t} u_3 v_3' \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} e^{-T} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} e^{2T} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

avente autovalori in $\lambda_1^T = 1$, $\lambda_2^T = e^{-T}$ e $\lambda_3^T = e^{2T}$. La matrice del legame stato-uscita è data invece da

$$\begin{aligned} B_T &= \int_0^T e^{A\xi} B d\xi = \left(e^{\lambda_1 \xi} u_1 v_1' B + e^{\lambda_2 \xi} u_2 v_2' B + e^{\lambda_3 \xi} u_3 v_3' B \right) d\xi \\ &= \int_0^T e^{\lambda_1 \xi} d\xi u_1 v_1' B + \int_0^T e^{\lambda_2 \xi} d\xi u_2 v_2' B + \int_0^T e^{\lambda_3 \xi} d\xi u_3 v_3' B \\ &= T u_1 v_1' B + (1 - e^{-T}) u_2 v_2' B + (e^{2T} - 1) u_3 v_3' B \\ &= \frac{T}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} (1 - e^{-T}) \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} (e^{2T} - 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esercizio 2.6.1 Calcolare il sistema a tempo discreto equivalente del sistema in Esempio 2.3.2.



Soluzione Esercizio 2.6.1

Esempio 2.6.2 Calcolare il sistema a tempo discreto equivalente associato all'integratore di ordine $n > 0$ e descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= u \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

Il modello è caratterizzato dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che la matrice dinamica A è già in forma di Jordan. Infatti, possiede un autovalore in zero con molteplicità algebrica pari a n e coincidente con la molteplicità geometrica e all'ordine geometrico. Otteniamo quindi che la matrice di transizione è data da

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Il sistema a tempo discreto equivalente avrà come matrice dinamica

$$A_T = \Phi(T) = e^{AT} = \begin{pmatrix} 1 & T & \dots & \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{T^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

La risposta impulsiva nello stato è data da

$$H(t) = e^{At}B = \begin{pmatrix} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

per cui la matrice del legame ingresso-stato del sistema a tempo discreto equivalente è data da

$$B_T = \int_0^T H(\xi) d\xi = \begin{pmatrix} \frac{T^n}{n!} \\ \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots \\ T \end{pmatrix}.$$

Il sistema a tempo discreto è quindi descritto dalla rappresentazione alle differenze

$$\begin{aligned} x_{d_1}(k+1) &= x_{d_1}(k) + Tx_{d_2}(k) + \dots + \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}x_{d_n}(k) + \frac{T^n}{n!}u_d(k) \\ &\quad \vdots \\ x_{d_n}(k+1) &= x_{d_n}(k) + Tu_d(k) \\ y(k) &= x_{d_1}(k). \end{aligned}$$

in cui $x_{d_i}(k) = x_i(kT)$ e $u_d(k) = u(kT)$, $k \geq 0$.

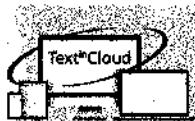
Il sistema a tempo discreto equivalente associato all'integratore di ordine $n > 0$ è caratterizzato da un numero finito di termini in T . In questo caso, poiché $A^n = 0$, l'esponenziale della matrice A (e quindi la matrice di transizione) è caratterizzato da uno sviluppo in serie di potenze con un numero finito di termini e dato da

$$e^{At} = I + tA + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1}$$

da cui segue quindi che

$$\begin{aligned} A_T &= I + TA + \dots + \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1} \\ B_T &= T\left(I + TA + \dots + \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1}\right)B. \end{aligned}$$

*Un sistema di questo tipo, il cui sistema a tempo discreto equivalente è caratterizzato da un numero finito di termini in T , è detto **finito discretizzabile**.*



Approfondimento

Capitolo at glance!

Elementi di teoria della stabilità

In termini qualitativi, la stabilità in un sistema dinamico è quella proprietà di rispondere a piccole perturbazioni con piccole variazioni nell'evoluzione. Intuitivamente, tanto più piccole sono le perturbazioni, tanto più piccoli sono gli scostamenti delle evoluzioni perturbate da quelle non perturbate. Per una definizione più formale, occorre innanzitutto definire che cosa si intende per perturbazione. Con riferimento alla struttura delle rappresentazioni con lo spazio di stato per i sistemi dinamici, una perturbazione rispetto ad una condizione di riferimento può essere costituita da una variazione dello stato iniziale o da una variazione dell'ingresso.

Per completezza, è opportuno citare una ulteriore possibilità, rappresentata da possibili variazioni dei parametri del sistema; in questo caso si parla di stabilità strutturale, ma il relativo studio non sarà qui affrontato.

Pertanto, in questo capitolo, nella caratterizzazione della stabilità di un sistema dinamico questo si assume dato e noto e l'analisi si focalizza sull'effetto di perturbazioni sullo stato iniziale, riferito come stabilità interna, e sulla limitatezza del comportamento in uscita, riferita come stabilità esterna.

I criteri di studio della stabilità che vengono qui trattati rientrano nel complesso dei metodi di analisi qualitativa; si tratta di quei metodi che consentono di studiare le proprietà delle soluzioni di sistemi dinamici senza procedere al loro calcolo esplicito. Non sempre nelle applicazioni, infatti, interessa conoscere in modo preciso l'andamento, per esempio, della risposta corrispondente ad un determinato ingresso; può invece interessare una sua proprietà o alcune caratteristiche del suo comportamento.

Prima di procedere con lo studio delle proprietà e delle condizioni di stabilità per un sistema dinamico, è necessario introdurre un linguaggio specifico attraverso alcune importanti definizioni.

3.1

Stabilità nei sistemi stazionari a tempo continuo: definizioni

Come specificato, nello studio della stabilità si fa riferimento a due caratteristiche dell'evoluzione di un sistema: una condizione di riferimento ed una condizione conseguente a perturbazioni rispetto a tale riferimento, con particolare attenzione alle perturbazioni sulle condizioni iniziali.

Il primo passo, quindi, è costituito dalla definizione delle condizioni di riferimento. Per la loro generalità, tali definizioni sono introdotte a partire alla classe dei sistemi non lineari, a dimensione finita e stazionari. Dovendo far riferimento alle evoluzioni nel tempo, la trattazione dei sistemi a tempo continuo e quelli a tempo discreto, pur presentando ovviamente una forte analogia formale, fanno riferimento ad espressioni analitiche diverse e pertanto in questa sezione viene trattato il caso dei sistemi a tempo continuo.

Si considerano inizialmente sistemi descritti dalle equazioni

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (3.1)$$

$$y(t) = h(x(t), u(t)) \quad (3.2)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$.

Risulta evidente che i fenomeni dinamici di evoluzione del tempo sono rappresentati dalla prima equazione (3.1), stante l'istantaneità della relazione di $y(t)$ con $x(t)$ e $u(t)$ descritta dalla (3.2). Per questa classe di sistemi si introduce il concetto di condizione di equilibrio. Essa rappresenta il riferimento rispetto al quale si studia il comportamento a seguito di perturbazioni. In generale, si può considerare la situazione in cui sul sistema agisce un ingresso costante fissato u_e e lo stato di equilibrio x_e si può definire di equilibrio se il sistema, trovandosi in quello stato ed in assenza di perturbazioni sull'ingresso, vi permane al passare del tempo.

Poiché la permanenza in uno stato implica l'assenza di variazioni, con riferimento alla rappresentazione (3.1), la condizione affinché uno stato x_e sia di equilibrio è che sia soddisfatta la relazione

$$0 = f(x_e, u_e) \quad (3.3)$$

Poiché la (3.3) rappresenta un sistema di equazioni non lineare, in numero delle soluzioni non è a priori noto e quindi per un sistema si può avere un qualunque numero di stati di equilibrio, zero incluso.

Dopo aver definito la condizione di riferimento, il punto di equilibrio, è ora possibile caratterizzare le evoluzioni conseguenti a perturbazioni nello stato iniziale. Si considera quindi nell'istante iniziale t_0 uno stato iniziale $x(t_0) \neq x_e$ per il quale $x(t_0) - x_e$ rappresenta detta perturbazione.

Nel caso in cui sia verificata la condizione di equilibrio

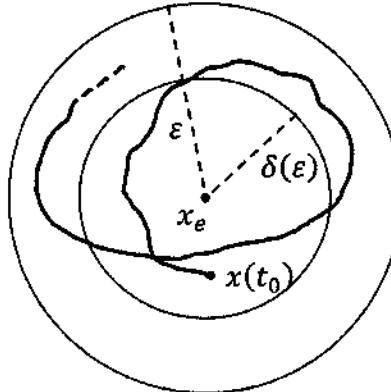


Figura 3.1: Esempio nel caso bidimensionale di intorni ed evoluzione nel caso di stabilità semplice.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \quad \|x(t_0) - x_e\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_0, \quad (3.4)$$

allora il punto di equilibrio x_e si definisce **localmente stabile**. In termini più qualitativi, un punto di equilibrio è localmente stabile se qualunque evoluzione che nasce da uno stato iniziale vicino rimane vicina per tutti gli istanti successivi, comunque si scelga il massimo scostamento ammesso dall'equilibrio. La conseguenza è che a perturbazioni limitate corrispondono variazioni limitate dell'evoluzione.

Al contrario, se la condizione (3.4) non è verificata (cioè esiste almeno un $\epsilon > 0$ per il quale non esiste $\delta > 0$ che soddisfa la seconda parte di (3.4)), allora il punto di equilibrio x_e si definisce **instabile**. Si noti che per l'instabilità è sufficiente che la limitatezza dell'evoluzione nell'intorno di x_e non sia verificata anche per un solo stato iniziale $x(t_0)$.

A proposito della (3.4), può essere utile ricordare che la norma di un vettore x , un'entità legata alla sua lunghezza, può essere definita in diversi modi, come ad esempio

$$\|x\| = \begin{cases} \sum_{i=1}^n |x_i| \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \max_i |x_i| \\ \dots \end{cases}$$

e che, per quanto riguarda lo studio delle proprietà, in \mathbb{R}^n tutte le norme sono equivalenti. Quindi si può fare riferimento ad una qualsiasi delle precedenti definizioni.

Una proprietà più stringente è la **stabilità asintotica**: x_e è **asintoticamente localmente stabile** se non solo si verifica la condizione di stabilità locale

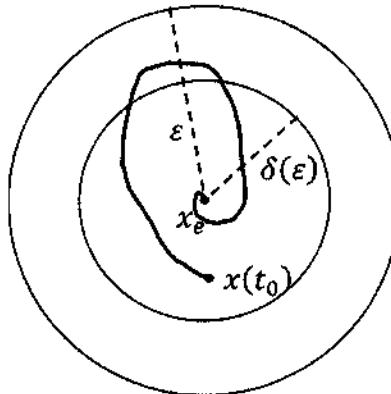


Figura 3.2: Esempio nel caso bidimensionale di intorni ed evoluzione nel caso di stabilità asintotica.

(3.4) ma anche la convergenza dell'evoluzione, al passare del tempo, verso x_e . Questa condizione si può esprimere in modo più formale definendo x_e stabile asintoticamente se sono contemporaneamente soddisfatte la condizione (3.4) e

$$\exists \delta_a > 0 : \|x(t_0) - x_e\| < \delta_a \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0 \quad (3.5)$$

Quello che accade in pratica è che in questo caso, a seguito di una perturbazione sullo stato iniziale, l'evoluzione rimane in un intorno dello stato di equilibrio e tende, al passare del tempo, a portarsi su di esso.

Una condizione più forte è rappresentata dalla stabilità esponenziale. Uno stato di equilibrio x_e è *esponenzialmente stabile* se esiste $\lambda > 0$ e per ogni fissato $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $\|x_0 - x_e\| < \delta_\varepsilon$ allora

$$\|x(t) - x_e\| < c e^{\lambda(t-t_0)}, \quad \forall t > t_0. \quad (3.6)$$

In altre parole $x(t)$ tende ad x_e secondo una legge che ammette una maggiorazione esponenziale. Si verifica facilmente che la stabilità esponenziale implica quella asintotica ma non vale il viceversa.

Si osservi che le proprietà introdotte devono essere verificate per qualunque scelta della condizione iniziale compatibile con i vincoli espressi. Questo comporta che, una volta definito l'intorno di x_e di raggio $\delta(\varepsilon)$ nella (3.4) o di raggio δ_a nella (3.5), qualunque scelta di $x(t_0)$ (corrispondente ad ogni possibile perturbazione) deve comportare il soddisfacimento delle condizioni. La conseguenza principale è che la condizione (3.5) può essere verificata solo se, nell'insieme dei punti di equilibrio, x_e è un punto isolato.

Le proprietà definite fanno riferimento ad intorni del punto di equilibrio e quindi hanno una valenza locale; nel caso in cui in un sistema vi siano più punti di equilibrio, tali proprietà sono definite vicino a ciascuno di essi, ossia localmente.

Per la stabilità asintotica, si può pensare di definire una proprietà più forte: la stabilità asintotica globale: il punto di equilibrio x_e è **globalmente asintoticamente stabile** se x_e è stabile (condizione (3.4)) e, in luogo della (3.5) vale la condizione

$$\forall \epsilon > 0 \quad \|x(t_0) - x_e\| < \epsilon \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0 \quad (3.7)$$

Questo significa che, comunque grande sia la perturbazione dello stato di equilibrio, il transitorio che nasce converge comunque a x_e .

In generale abbiamo quindi proprietà locali, più o meno forti, e proprietà globali.

Infine, la situazione più comune vede le definizioni e lo studio della stabilità sulla base di condizioni di equilibrio per sistemi in assenza di forzamento. Ciò rappresenta un caso particolare nella notazione introdotta, in cui è sufficiente porre $u_e = 0$ rimanendo tutto egualmente valido.

3.1.1 La stabilità di un moto

Un ulteriore aspetto riguarda la *stabilità di un moto* $x(t)$. Si consideri uno stato iniziale $x(t_0)$, e si immagini fissato un ingresso $u(t)$; si avrà un moto $x(t)$ che soddisfa l'equazione

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)).$$

Se si perturba lo stato iniziale, nasce una diversa traiettoria, ossia un moto perturbato $x_p(t)$, che soddisfa la stessa equazione

$$\dot{x}_p(t) = f(x_p(t), u(t)).$$

Introducendo

$$\xi(t) = x_p(t) - x(t)$$

che descrive l'evoluzione dello scostamento tra i due andamenti, si ottiene

$$\dot{\xi}(t) = \dot{x}_p(t) - \dot{x}(t) = f(x(t) + \xi(t), u(t)) - f(x(t), u(t)) = g(t, \xi(t)) \quad (3.8)$$

che può essere visto come un sistema con stato ξ , non stazionario per la presenza di $x(t)$ e $u(t)$ che sono in questo caso fissati. Si verifica facilmente che il secondo membro della (3.8) si annulla per $\xi = 0$. Per definizione, allora, $\xi = 0$, cioè l'origine dello spazio di stato della variabile ξ , è un punto di equilibrio per il sistema (3.8). Quindi, è sufficiente studiare la stabilità dell'origine dello spazio di stato della variabile ξ per conoscere la stabilità del moto che si aveva nello spazio x . Ciò

mostra che, con un cambiamento di variabile, lo studio della stabilità di un moto si trasforma nello studio della stabilità di un punto di equilibrio, in particolare dell'origine del sistema che descrive lo scostamento.

Naturalmente, nel presente caso generale, il sistema non è stazionario e la sua analisi richiede strumenti complessi, ma in casi particolari il suo studio può essere semplificato, come mostrato nel seguito.



Approfondimento

3.2

Stabilità nei sistemi lineari stazionari a tempo continuo: proprietà e condizioni

Nel caso dei sistemi lineari, in cui l'equazione dinamica (3.1) assume la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.9)$$

gli stati di equilibrio in assenza di forzamento sono quelli che soddisfano l'equazione

$$0 = Ax_e \quad (3.10)$$

caso particolare della condizione (3.3). In virtù dei risultati sulla soluzione di sistemi lineari, si ha che ($x_e = 0$) è sempre uno stato di equilibrio; se il determinante di A è diverso da zero, allora esso risulta essere anche unico mentre, se il determinante di A è uguale a zero, esiste un sottospazio, di dimensione pari a quella del $\ker(A)$, di punti di equilibrio.

3.2.1 Condizioni di stabilità

Lo studio del caso di sistemi lineari risulta semplificato perché è ben nota la forma che assume l'evoluzione dello stato, ossia la forma esplicita di (3.9):

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

e le espressioni in (3.4) e (3.5) possono essere particolarizzate ed esplicitate.

Si consideri inizialmente il caso di $u_e = 0$. Dato un punto di equilibrio x_e si ha che nella condizione (3.4) si può scrivere

$$\begin{aligned}\|x(t) - x_e\| &= \|\Phi(t-t_0)x(t_0) - \Phi(t-t_0)x_e\| \leq \|\Phi(t-t_0)\| \|x(t_0) - x_e\| \\ &\leq \|\Phi(t-t_0)\| \delta(\epsilon) < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0.\end{aligned}\quad (3.11)$$

Si può quindi affermare che *in un sistema lineare, condizione necessaria e sufficiente di stabilità locale di un punto di equilibrio x_e è che la norma della matrice di transizione sia limitata, ossia che esista $k \geq 0$ tale che*

$$\|\Phi(t-t_0)\| \leq k \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.12)$$

La condizione è infatti necessaria perché se non fosse verificata, non lo sarebbe neanche la condizione (3.11) che richiede $\|\Phi(t-t_0)\|$ limitata da $\frac{\epsilon}{\delta(\epsilon)}$. Ed è sufficiente perché se si suppone che sia soddisfatta, si può scrivere

$$\|x(t) - x_e\| \leq \|\Phi(t-t_0)\| \|x(t_0) - x_e\| \leq k \|x(t_0) - x_e\|$$

e fissando

$$\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{k}$$

si ottiene

$$\|x(t) - x_e\| \leq \epsilon.$$

Si ricorda che per quanto riguarda la norma di una matrice M , come nel caso dei vettori sono possibili diverse definizioni quali, ad esempio,

$$\begin{aligned}\|M\| &= \max_{i,j} |m_{i,j}| \\ \|M\| &= \max_j \sum_{i=1}^n |m_{i,j}| \\ \|M\| &= \max_i \sum_{j=1}^n |m_{i,j}| \\ \|M\| &= \max |\lambda(M^T M)|\end{aligned}$$

che sono tutte equivalenti in spazi a dimensione finita.

Pertanto si può affermare che se $\|\Phi(t-t_0)\|$ è limitata allora tutte le componenti di $\Phi(t-t_0)$ sono limitate e quindi l'evoluzione libera è limitata; inoltre, se $\|\Phi(t-t_0)\|$ non fosse limitata ci sarebbe almeno un elemento (i,j) della matrice non limitato al crescere di t che renderebbe non limitata la componente i -esima dello stato:

$$x_i(t) = \Phi_{i,j}(t-t_0)x_j(t_0) + \dots$$

Ricordando la forma delle leggi temporali presenti in $\Phi(t-t_0)$, quelle dei modi naturali, la condizione (3.12) è soddisfatta se gli autovalori della matrice A sono tali che

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\lambda_i^1) \leq 0 \\ \operatorname{Re}(\lambda_i^{>1}) < 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad (3.13)$$

dove si è indicato con l'apice 1 o > 1 l'ordine geometrico dell'autovalore.

Si osservi che la condizione di stabilità locale per un punto di equilibrio x_e è espressa da una proprietà della matrice di transizione $\Phi(t - t_0)$ (della matrice dinamica A) che non dipende dal particolare punto di equilibrio studiato. Questo permette di affermare che *in un sistema lineare la proprietà di stabilità locale è comune a tutti i punti di equilibrio*.

Pertanto studiare la stabilità locale di un punto di equilibrio è equivalente a studiarla per tutti i punti di equilibrio e viene sinteticamente denominata **stabilità interna**.

Per la stabilità asintotica è utile premettere alcune considerazioni. Si osservi che nel caso esistano più punti di equilibrio oltre l'origine, essi costituiscono un sottospazio lineare. Come conseguenza, comunque si consideri un punto di equilibrio, e comunque si provi a definire un intorno come richiesto dalla (3.5), in esso sono presenti un numero infinito di altri punti di equilibrio. Ciò rende ciascun punto di equilibrio non isolato e la stabilità asintotica mai verificata.

Il solo caso di punto isolato è quando l'origine è l'unico punto di equilibrio: solo in questo caso ha senso studiare la stabilità asintotica. Il risultato che si può dimostrare è che *condizione necessaria e sufficiente di stabilità asintotica per il punto di equilibrio $x_e = 0$ è che*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t - t_0)\| = 0 \quad (3.14)$$

La dimostrazione è analoga al caso di stabilità locale, usando le condizioni (3.5) e (3.7) in luogo della (3.4).

Anche in questo caso la condizione (3.14) può essere riformulata in termini di autovalori della matrice A . Si può verificare infatti che essa è equivalente a

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.15)$$

Un'ultima considerazione di interesse riguarda la stabilità asintotica globale. Si osservi che se la condizione (locale) (3.5) è verificata e si vuole studiare se lo sia anche la (3.7), si operi un cambio di coordinate definito da

$$z = hx = \frac{k}{\delta_a} x$$

per il quale ciascuna componente x_i viene scalata della stessa quantità h . Si ottiene

$$\dot{z} = h\dot{x} = hAx = hA \frac{1}{h} z = Az \quad (3.16)$$

e quindi la nuova variabile soddisfa la stessa equazione dinamica soddisfatta da x .

Si ha pertanto che quando è soddisfatta la (3.14) allora è verificata la condizione di stabilità asintotica locale per il sistema (3.16)

$$\exists \delta_a > 0 : \|z(t_0)\| < \delta_a \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|z(t)\| = 0.$$

In virtù del cambio di coordinate (3.16), comunque si fissi k , si ha che

$$\|z(t_0)\| = \left\| \frac{k}{\delta_a} x(t_0) \right\| = \frac{k}{\delta_a} \|x(t_0)\| < \delta_a \Rightarrow \|x(t_0)\| < k$$

e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|z(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \frac{k}{\delta_a} x(t) \right\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{k}{\delta_a} \|x(t)\| = 0$$

se e solo se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$$

e la condizione (3.7) risulta soddisfatta. Si può concludere quindi che *in un sistema lineare la stabilità asintotica locale implica quella globale*.

Un'ulteriore osservazione riguarda la stabilità dei moti. Grazie alla struttura di un sistema lineare, si ha che la dinamica perturbata (3.8) si può scrivere come

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= \dot{x}_p(t) - \dot{x}(t) = Ax_p(t) + Bu(t) - (Ax(t) + Bu(t)) = \\ &= Ax_p(t) - Ax(t) = A(x_p(t) - x(t)) = A\xi(t)\end{aligned}$$

Questo risultato è molto importante in quanto ci dice che nel caso dei sistemi lineari stazionari lo studio della stabilità di un qualsiasi moto si riduce allo studio della stabilità dell'origine dello spazio di stato.

In conclusione, il fatto che in un sistema lineare la stabilità locale è comune a tutti i punti di equilibrio, che la stabilità asintotica locale, definibile solo se l'origine è l'unico punto di equilibrio, implica quella globale e che la stabilità di un moto si traduce nella stabilità dell'origine, diventa irrilevante a quale punto di equilibrio si fa riferimento quando se ne studia la stabilità. Questo fatto motiva l'impiego della dizione di **stabilità interna del sistema** in luogo di *stabilità degli stati di equilibrio* quando è soddisfatta la (3.12) per lo stato 0; analogamente, **stabilità interna asintotica del sistema**, sicuramente globale, quando è soddisfatta la (3.14) per lo stato 0: si definisce quindi il **sistema stabile localmente** se tutti i suoi punti di equilibrio sono stabili localmente, e quindi è soddisfatta la (3.12), lo si definisce *stabile asintoticamente*, sicuramente globalmente, se l'origine è stabile asintoticamente, ovvero quando è soddisfatta la (3.14).

Le due condizioni fanno entrambe riferimento all'evoluzione nel tempo della matrice di transizione $\Phi(t - t_0)$. Come è noto, le leggi temporali che compaiono nelle sue componenti sono quelle dei modi naturali e quindi sono convergenti, limitate o divergenti in funzione della parte reale degli autovalori: sono convergenti se la parte reale è negativa, sono limitate se la parte reale è nulla e l'ordine geometrico è uno (molteplicità algebrica e geometrica uguali), e sono divergenti

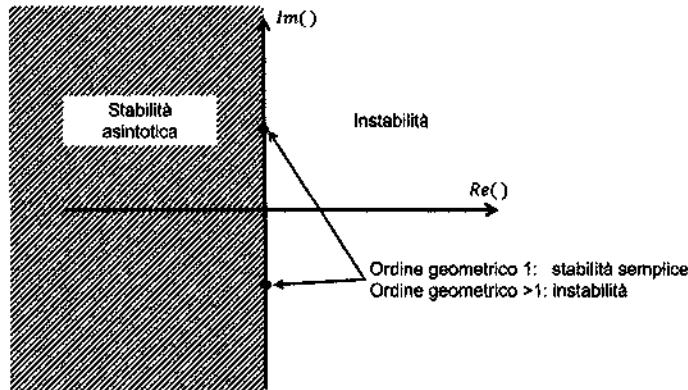


Figura 3.3: Relazione tra posizionamento nel piano complesso degli autovalori e stabilità.

se la parte reale è maggiore di zero o uguale a zero con ordine maggiore di uno. Facendo riferimento al piano complesso, le leggi temporali in $\Phi(t)$ sono crescenti o decrescenti a seconda del posizionamento degli autovalori nel piano complesso e, se a parte reale nulla, del loro indice.

In conclusione, la condizione $\|\Phi(t)\| < k$, richiede che gli autovalori siano a sinistra dell'asse immaginario; possono essere ammessi autovalori sull'asse immaginario solo se di ordine uno. Se si richiede anche che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Phi(t - t_0)| = 0$$

gli autovalori devono essere posizionati strettamente a sinistra dell'asse immaginario.

In sintesi, data la matrice dinamica A che caratterizza il sistema, la stabilità è legata al segno della parte reale dei suoi autovalori o, nel caso di parte reale nulla, alle loro molteplicità. Ne segue che può non essere necessario il loro calcolo quando è possibile ricavare le informazioni sui segni.

Esercizio 3.2.1 Considerato il sistema lineare

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

studiare la stabilità della coppia $(x_e, u_e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, generica coppia di equilibrio che verifica

$$0 = Ax_e + Bu_e.$$

TextCloud

Soluzione Esercizio 3.2.1

Approfondimento

— 3.3 —

Il criterio di Routh

Per lo studio della stabilità di un sistema lineare tempo continuo, si è visto che le condizioni possono essere poste sul segno della parte reale degli autovalori della matrice dinamica A . Dato il polinomio caratteristico, tale condizione richiederebbe il calcolo delle sue radici, operazione non semplice, che si complica con l'aumentare del grado. Fortunatamente, essendo interessati solo al segno della parte reale, è possibile fare riferimento a criteri di analisi più semplici che non necessitano del calcolo della soluzione dell'equazione caratteristica.

Ad esempio, la nota regola di Cartesio permette di avere informazioni sul segno delle radici di un binomio

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sulla base dei segni dei coefficienti a , b e c : definendo *permanenza* l'invarianza di segno tra due coefficienti consecutivi e variazione il cambio di segno, ad una permanenza è associata una radice a parte reale negativa mentre ad una variazione una radice a parte reale positiva.

Nel caso di grado maggiore di due, è possibile fare riferimento ad un criterio equivalente, che può essere visto come estensione della regola di Cartesio.

Preliminarmente, però, è possibile definire una condizione necessaria affinché tutte le radici di un polinomio

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (3.17)$$

abbiano parte reale negativa.

Definendo $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ le n radici, il polinomio può essere scritto nella forma fattorizzata

$$p(\lambda) = a_n (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n). \quad (3.18)$$

Nel caso di radici reali, supponendole negative il polinomio può essere riscritto come

$$p(\lambda) = a_n (\lambda + |\lambda_1|) \cdots (\lambda + |\lambda_n|).$$

Nel caso di una coppia complessa e coniugata con parte reale negativa, i due fattori corrispondenti possono riscrivversi

$$(\lambda - \lambda_i)(\lambda - \lambda_i^*) = (\lambda + |\alpha_i| - j\omega)(\lambda + |\alpha_i| + j\omega) = ((\lambda + |\alpha_i|)^2 + \omega^2).$$

Il risultato è che tutti i termini presenti nell'espressione sono positivi, ad eccezione di a_n che può essere sia positivo che negativo. Se si moltiplicano i fattori per riottenere l'espressione (3.17), ciascun coefficiente a_i è ottenuto come somma di prodotti di termini positivi e quindi, necessariamente, positivo, moltiplicato per a_n .

Quindi si può concludere che condizione necessaria perché tutte le radici siano a parte reale negativa è che tutti i coefficienti del polinomio (3.17) abbiano lo stesso segno, quello di a_n .

Si può osservare anche che un coefficiente nella (3.17) può essere nullo solo se nella (3.18) ci sono radici con parte reale nulla o positiva, mentre coefficienti di segno diverso da a_n si possono avere solo se nella (3.18) ci sono radici a parte reale positiva.

Questa condizione consente di decidere dell'instabilità di un sistema per semplice ispezione visiva. Nel caso la condizione necessaria sia soddisfatta, lo studio del segno della parte reale delle radici del polinomio (3.17) può essere effettuato con particolari criteri.

3.3.1 Il criterio di Routh

Riprendendo in esame il generico polinomio di grado n (3.17)

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

il criterio di Routh consente di stabilire se tutti gli zeri hanno parte reale negativa ed eventualmente quanti sono gli zeri a parte reale positiva.

Il criterio consiste nella preliminare costruzione di una tabella, secondo un algoritmo definito, e poi nella verifica dei coefficienti degli elementi della prima colonna della tabella. Il criterio in esame estende la regola di Cartesio sulla corrispondenza di soluzioni a parte reale positiva e negativa a variazioni e permanenze.

La tabella da costruire è costituita da $n+1$ righe, che è opportuno numerare in modo decrescente a partire da n e terminando con 0.

A partire dal polinomio allo studio, si definiscono le prime due righe (n e $n-1$) nel modo seguente

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...

(3.19)

Si costruisce poi la riga successiva ($n-2$)

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	...

(3.20)

dove i termini b_i si calcolano secondo il seguente schema

$$b_{n-2} = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}} \quad b_{n-3} = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}} \quad \dots$$

finché ci sono elementi per poter applicare la formula. Se le due righe n ed $n-1$ hanno lo stesso numero di elementi, la riga $n-2$ avrà un elemento in meno; se la riga $n-1$ ha un elemento in meno rispetto alla riga n , allora la riga $n-2$ avrà la stessa lunghezza della riga precedente e nel calcolo (e solo nel calcolo) del suo ultimo elemento secondo l'algoritmo mostrato, si deve ipotizzare che l'elemento in meno sia rappresentato da uno zero.

Il passo successivo è il calcolo della riga $n-3$

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	...
$n-3$	c_{n-3}	c_{n-4}	c_{n-5}	...

costruita con la stessa procedura ma con riferimento alle due righe precedenti, ossia

$$c_{n-3} = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-3} \end{vmatrix}}{-b_{n-2}} \quad c_{n-4} = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix}}{-b_{n-2}} \dots$$

Si procede iterativamente per ciascuna riga, fino a calcolare quella di indice 0. La tabella termina sempre con la struttura

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	...
:	:	:	:	
1	*			
0	*			

in cui le ultime due righe hanno un solo elemento.

Il criterio di Routh afferma che completata la tabella secondo lo schema descritto, nell'ipotesi che si possa completare, si prende in esame la prima colonna $a_n, a_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}, \dots$. Con lo stesso significato della regola di Cartesio, ogni coppia consecutiva con lo stesso segno si definisce permanenza e ogni coppia discorde si definisce variazione. Le radici del polinomio sono tutte a parte reale negativa se e solo se ci sono solo permanenze. Ad ogni variazione è associata una radice a parte reale positiva.

Dimostrazione (cenni)

Si consideri l'inizio della costruzione della tabella di Routh (3.19) a partire dal polinomio dato

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

Si osservi che la divisione dei coefficienti nelle due righe n ed $n-1$ corrisponde a mettere in evidenza nel polinomio $p(\lambda)$ la possibile scomposizione

$$p(\lambda) = (a_n \lambda^n + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots) + (a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-3} \lambda^{n-3} + \dots) = 0$$

Si costruisca ora la riga $n-2$ in (3.20) e si utilizzino le righe $n-1$ ed $n-2$ per costruire un polinomio $q(\lambda)$ con la stessa logica di $p(\lambda)$

$$q(\lambda) = (a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-3} \lambda^{n-3} + \dots) + (b_{n-2} \lambda^{n-2} + b_{n-4} \lambda^{n-4} + \dots). \quad (3.21)$$

Ricordando che i termini b_i sono dati dalle espressioni

$$b_{n-2} = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} = a_{n-2} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-3}$$

$$b_{n-3} = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} = a_{n-4} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-5}$$

per sostituzione nel polinomio (3.21) si ottiene

$$\begin{aligned} q(\lambda) &= (a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-3}\lambda^{n-3} + \dots) + \\ &\quad + \left(\left(a_{n-2} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-3} \right) \lambda^{n-2} + \left(a_{n-4} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-5} \right) \lambda^{n-4} + \dots \right) \end{aligned}$$

che, opportunamente riordinato, diventa

$$\begin{aligned} q(\lambda) &= (a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-3}\lambda^{n-3} + \dots) + (a_{n-2}\lambda^{n-2} + a_{n-4}\lambda^{n-4} + \dots) \\ &\quad - \frac{a_n}{a_{n-1}} (a_{n-3}\lambda^{n-2} + a_{n-5}\lambda^{n-4} + \dots) + \left(a_n\lambda^n - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-1}\lambda^n \right) \\ &= p(\lambda) - \frac{a_n}{a_{n-1}} (a_{n-1}\lambda^n + a_{n-3}\lambda^{n-2} + a_{n-5}\lambda^{n-4} + \dots). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Introducendo il polinomio

$$q(k; \lambda) = p(\lambda) - k(a_{n-1}\lambda^n + a_{n-3}\lambda^{n-2} + a_{n-5}\lambda^{n-4} + \dots) \quad (3.23)$$

è facile verificare che

$$\lim_{k \rightarrow 0} q(k; \lambda) = p(\lambda) \quad (3.24)$$

e, definendo $\hat{k} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

$$\lim_{k \rightarrow \hat{k}} q(k; \lambda) = q(\lambda) \quad (3.25)$$

per cui facendo variare k da 0 a \hat{k} , $q(k; \lambda)$ passa con continuità da $p(s)$ a $q(s)$. Si può dimostrare che ciascuna radice di $q(k; \lambda)$ mantiene il proprio segno $\forall k \in [0, \frac{a_n}{a_{n-1}}]$, per cui il segno delle radici di $p(\lambda)$ si può studiare anche facendo riferimento a $q(k; \lambda)$.

Il polinomio (3.22) si può esplicitare e fattorizzare secondo le espressioni

$$\begin{aligned} q(k; \lambda) &= (a_n - ka_{n-1})\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + (a_{n-2} - ka_{n-3})\lambda^{n-2} + \dots \\ &= \left(\frac{(a_n - ka_{n-1})}{a_{n-1}} \lambda + 1 \right) \left(a_{n-1}\lambda^{n-1} + \frac{(a_{n-2} - ka_{n-3})}{\frac{(a_n - ka_{n-1})}{a_{n-1}} \lambda + 1} \lambda^{n-2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Calcolandone ora il limite (3.25), ricordando che il limite di un prodotto è pari al prodotto dei limiti, si può preliminarmente scrivere

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \hat{k}} & \left(a_{n-1}\lambda^{n-1} + \frac{(a_{n-2} - ka_{n-3})}{\frac{(a_n - ka_{n-1})}{a_{n-1}} \lambda + 1} \lambda^{n-2} + a_{n-3}\lambda^{n-3} \dots \right) = \\ & \left(a_{n-1}\lambda^{n-1} + (a_{n-2} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-3})\lambda^{n-2} + a_{n-3}\lambda^{n-3} \dots \right) = q(\lambda) \end{aligned}$$

per cui si ha

$$\lim_{k \rightarrow \hat{k}} q(k; \lambda) = \lim_{k \rightarrow \hat{k}} \left(\frac{(a_n - k a_{n-1})}{a_{n-1}} \lambda + 1 \right) \times q(\lambda)$$

Nel passaggio al limite la prima radice tende all'infinito, come è ovvio perché l'effetto è quello di ridurre di grado il polinomio, ma il suo segno è dato dai coefficienti che vi compaiono: è a parte reale negativa se e solo se

$$\frac{(a_n - k a_{n-1})}{a_{n-1}} > 0 \quad \forall k \in [0, \frac{a_n}{a_{n-1}}]$$

verificata se e solo se a_n e a_{n-1} hanno lo stesso segno.

Si può concludere che se a_n e a_{n-1} presentano un permanenza di segno, il polinomio $p(\lambda)$ ha una radice a parte reale negativa e le altre $n-1$ radici date dagli zeri del polinomio $q(\lambda)$.

La tabella di Routh per il polinomio $q(\lambda)$ è la stessa di quella di $p(\lambda)$ tolta la prima riga, quindi sulla stessa tabella può ripetersi il ragionamento ricorsivamente, ogni volta immaginando di eliminare una riga.

La tabella termina con la forma

3	w_1	w_2
2	x_1	x_2
1	y_1	
0	z_1	

per cui, quando si giunge a studiare il segno delle radici del polinomio

$$q_3(\lambda) = w_1 \lambda^3 + w_2 \lambda + x_1 \lambda^2 + x_2$$

secondo la procedura ricorsiva si deve osservare la permanenza o meno tra i termini w_1 e x_1 e poi si passa al polinomio

$$q_2(\lambda) = x_1 \lambda^2 + x_2 + y_1 \lambda.$$

Osservando che per il termine dell'ultima riga si ha

$$z_1 = x_2,$$

il polinomio precedente si può scrivere, riordinato, come

$$q_2(\lambda) = x_1 \lambda^2 + y_1 \lambda + z_1$$

e il segno della parte reale delle sue radici si può valutare, con la regola di Cartesio, dalle permanenza o variazioni tra i termini x_1 e y_1 per una e y_1 e z_1 per l'altra, ossia tra gli ultimi tre elementi della prima colonna della tabella di Routh. Questo conclude la procedura ricorsiva e la validità del criterio di Routh risulta provata.

Esempio 3.3.1 Come esempio di applicazione del criterio di Routh, si studi il segno della parte reale delle radici del polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^5 + 3\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda + 4.$$

Il polinomio non soddisfa la condizione necessaria e quindi sicuramente non tutte le sue radici sono a parte reale negativa. Come conferma, si costruisca la tabella di Routh

5	1	2	2
4	3	-2	4
3	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	
2	$-\frac{11}{4}$	4	
1	$\frac{50}{11}$		
0	4		

e, osservando la sua prima colonna, si ricavano le permanenze $(1, 3)$, $(3, \frac{8}{3})$ e $(\frac{50}{11}, 4)$ e le variazioni $(\frac{8}{3}, -\frac{11}{4})$ e $(-\frac{11}{4}, \frac{50}{11})$. Quindi il polinomio ha tre radici a parte reale negativa e due a parte reale positiva.

Nella costruzione della tabella può essere utile la proprietà per la quale se si moltiplica (divide) una intera riga per lo stesso fattore positivo il risultato non cambia, che a volte semplifica i calcoli. Ad esempio, per la tabella precedente, se la riga 3 viene moltiplicata per 3 si possono effettuare calcoli per la costruzione della riga 2 solo con numeri interi. Lo stesso vale per la riga 2 (moltiplicata per 4) e per la riga 1 (moltiplicata per 11, anche se qui è sostanzialmente inutile).

Il risultato enunciato nel criterio di Routh si basa sulla tabella completa. Si deve osservare, però, che se una riga ha il primo elemento nullo, la successiva non può essere costruita. In questo caso non è possibile applicare il criterio e quindi trarre conclusioni sul segno della parte reale delle radici, e quindi sulla stabilità.

Casi critici

Si consideri il polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 \quad (3.26)$$

La costruzione della tabella di Routh fornisce

5	1	2	2	
4	1	2	1	
3	0	1		
2				

(3.27)

ma dalla riga 2 in poi non è possibile procedere con l'algoritmo fornito.

Nel caso non si possa procedere con la costruzione della tabella a causa del primo elemento di una riga nullo, è possibile dimostrare che si può modificare la costruzione della tabella superando l'impedimento dell'elemento nullo e consentendo comunque l'applicazione del criterio.

Il procedimento da utilizzare dipende dal fatto che la riga che ha lo zero come primo elemento abbia o no almeno un elemento diverso da zero.

Nel caso la riga non sia tutta nulla, come nel caso in esame dove è presente il valore 1 in seconda posizione, una possibile modifica consiste nel sostituire tale riga con una ottenuta sommando all' i -esimo elemento della riga l'elemento di posto $(i+j)$ nella riga stessa, moltiplicati per $(-1)^j$, essendo j il numero dei primi elementi nulli. La riga di partenza deve immaginarsi estesa a destra con tanti zeri quanti ne occorrono per avere comunque un elemento in posizione $(i+j)$. In altre parole, si devono sommare agli elementi della riga in questione quelli della stessa riga traslata a sinistra fino a che il primo elemento diverso da zero compaia in prima posizione e con i segni opposti se il numero degli elementi nulli iniziali è dispari. La riga così ottenuta ha, per costruzione, il primo elemento diverso da zero e la costruzione della tabella può continuare. Per il caso in esame, nella tabella (3.27), la riga 3

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & | & 0 & 1 \end{array}$$

si sostituisce con quella ottenuta sommandogli la stringa $-1\ 0$ (1 0 la riga traslata, con il segno cambiato perché è presente 1 zero), ottenendo la nuova riga

$$\begin{array}{c|ccc} 3' & | & -1 & 1 \end{array}$$

Sostituendola nella tabella precedentemente iniziata, si ottiene

5		1	2	2
4		1	2	1
3'		-1	1	
2		3	1	
1		$\frac{4}{3}$		
0		1		

Per la presenza di due variazioni, si può concludere che due radici del polinomio hanno parte reale negativa.

Un approccio alternativo consiste nel moltiplicare il polinomio per un binomio con zero negativo:

$$p^1(\lambda) = p(\lambda)(\lambda + \lambda_0), \quad \lambda_0 > 0$$

Si ottiene così un nuovo polinomio di grado $n+1$ con coefficienti ovviamente diversi. Si noti che con questa operazione, il numero di radici a parte reale maggiore o uguale a zero non viene modificato.

Applicando il criterio di Routh al polinomio modificato, si ottiene una tabella in cui non sarà più presente lo zero in prima colonna.

Si prenda il polinomio (3.26) e lo si moltipichi per il binomio $(\lambda+1)$. Si ottiene

$$\begin{aligned} p^1(\lambda) &= (\lambda^5 + \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1)(\lambda + 1) \\ &= \lambda^6 + 2\lambda^5 + 3\lambda^4 + 4\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 1 \end{aligned}$$

Se a questo nuovo polinomio applichiamo il criterio di Routh, si costruisce la tabella

6	1	3	4	1
5	2	4	3	
4	1	$\frac{5}{2}$	1	
3	-1	1		
2	$\frac{7}{2}$	1		
1	$\frac{9}{7}$			
0	1			

in cui non è più presente l'impedimento. Dall'analisi della prima colonna si vede che, essendo presenti due variazioni, il polinomio ha 2 radici a parte reale positiva. Le rimanenti 4 a parte reale negativa sono 3 del polinomio di partenza ed 1 del binomio aggiunto.

Le due procedure, come ovvio, forniscono lo stesso risultato.

L'altro possibile caso di impedimento nella costruzione della tabella è rappresentato dal caso di riga tutta nulla.

Si noti innanzitutto che ciò può verificarsi solo in corrispondenza di una riga di ordine dispari. Infatti, per avere una riga tutta nulla le due righe precedenti devono essere proporzionali e quindi della stessa lunghezza. Osservando che nella costruzione di una tabella si ha diminuzione della lunghezza di una riga solo in corrispondenza al passaggio da una riga pari ad una dispari, rimanendo della stessa lunghezza nel passaggio dispari-pari, l'osservazione è verificata.

Si consideri per esempio il polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 3\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda + 1$$

La condizione necessaria è soddisfatta. La tabella è data da

5	1	3	1	
4	1	3	1	
3	0	0		

e non può essere completata per la presenza di uno zero come primo elemento della riga 3. A differenza del caso precedente, ora non esistono elementi diversi da zero nella riga.

Questo caso presenta un'interessante proprietà. Si può mostrare che il polinomio di partenza risulta essere il prodotto di due polinomi

$$p(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda)$$

uno dei quali, ad esempio $p_1(\lambda)$, avrà zeri che hanno parte reale caratterizzata dalle variazioni di segno degli elementi della prima colonna della tabella parziale costruita, mentre l'altro, di grado pari ed uguale all'indice della riga che precede la riga che si è annullata, ha solo potenze di grado pari ed i suoi coefficienti, da quello di grado massimo a quello di grado zero, sono pari ordinatamente agli elementi della riga che precede quella che si è annullata.

Per l'esempio considerato, questa proprietà consente di affermare che

$$p(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda)$$

con $p_1(\lambda)$ caratterizzato da una radice (con parte reale) negativa, essendo presente nella parte della tabella costruita una permanenza, e con $p_2(\lambda)$ di grado 4 (riga nulla di indice 3), potenze pari e coefficienti 1, 3 ed 1, ossia

$$p_2(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^2 + 1.$$

$p_2(\lambda)$ è infatti il polinomio che si ottiene utilizzando i coefficienti delle righe 4 e 3. In seguito a questa fattorizzazione, che riduce di grado, da quello di $p(\lambda)$ a quello di $p_2(\lambda)$, il polinomio da studiare, e grazie alla struttura quadratica di $p_2(\lambda)$, a volte è possibile calcolare direttamente le soluzioni rimanenti.

Nel caso ciò non fosse semplice, per il grado del polinomio da studiare, o comunque nel caso non si vogliano calcolare le soluzioni, è possibile modificare la tabella, analogamente a quanto fatto nel caso di riga non tutta nulla. In questo caso, la procedura prevede di sostituire alla riga nulla i coefficienti del polinomio ottenuto derivando $p_2(\lambda)$ e di proseguire con la costruzione della tabella. Nel caso dell'esempio,

$$\frac{dp_2(\lambda)}{d\lambda} = 4\lambda^3 + 6\lambda$$

e ai coefficienti della riga 3 nulla si sostituiscono gli elementi 4 e 6. Si può quindi continuare la costruzione della tabella.

5	1	3	1	
4	1	3	1	
3'	4	6		
2	$\frac{6}{4}$	1		
1	$\frac{10}{3}$			
0	1			

Procedendo con l'applicazione del criterio di Routh, la prima riga è caratterizzata solo da permanenze e pertanto si conclude che il polinomio modificato non ha radici a parte reale negativa e sono tutte a parte reale negativa.

In realtà, è necessario osservare che in virtù della fattorizzazione possibile e della forma quadratica del polinomio $p_2(\lambda)$, mentre per le radici di $p_1(\lambda)$ si può fare completo riferimento al criterio di Routh, per le radici di $p_2(\lambda)$ è noto che esse presentano una simmetria rispetto all'origine detta quadrantale, in quanto ve ne è una rispetto all'asse reale quando si calcolano le soluzioni dell'equazione quadratica, ed una rispetto all'asse immaginario quando si effettua la radice quadrata. Nell'esempio considerato, ponendo $z = \lambda^2$, si devono prima calcolare le soluzioni di

$$z^2 + 3z + 1 = 0$$

che fornisce le due soluzioni simmetriche rispetto all'asse reale

$$z_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

e, successivamente,

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{z_1} \quad \text{e} \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{z_2}$$

simmetriche rispetto all'asse reale per il doppio segno davanti alla radice.

Questo comporta che, per tali polinomi, se sono presenti radici con parte reale positiva nella tabella compaiono delle variazioni e le conclusioni sono omogenee al caso generale.

Se invece compaiono solo permanenze, non potendo essere possibile la presenza di sole radici a parte reale negativa per questioni di simmetria, occorre concludere che la modifica della tabella comporta l'assimilazione delle radici a parte reale nulla a quelle a parte reale negativa. Di ciò occorre tenere conto nell'applicazione del criterio, dove in presenza di sole permanenze, occorre concludere che le radici sono a parte reale negativa e nulla, con ovvie conseguenze sulla stabilità.

3.3.2 Ulteriori applicazioni del criterio di Routh

Il criterio di Routh introdotto consente di stabilire quante radici di un dato polinomio hanno parte reale negativa, ossia sono collocate nel semipiano reale negativo.

Lo stesso criterio può essere esteso per studiare la posizione delle radici di un polinomio in particolari regioni del piano complesso (del semipiano reale negativo) di interesse.

Caso di semipiano a parte reale minore di una generica ascissa

Nel caso si voglia studiare se le radici di un polinomio $p(\lambda)$ abbiano la parte reale minore di un valore diverso da zero, è possibile utilizzare ancora il criterio di Routh premettendo una trasformazione del polinomio allo studio.

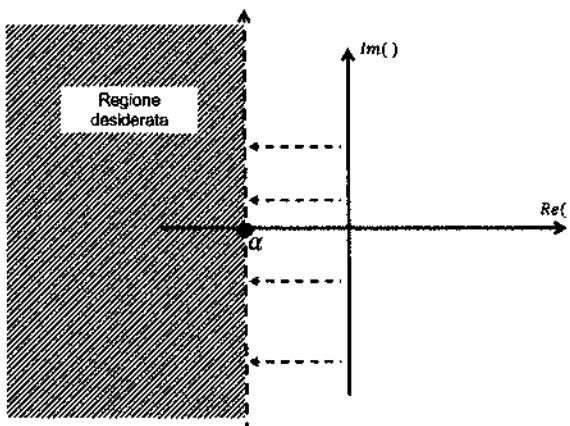


Figura 3.4: Regione di piano di interesse con limite sulla parte reale e traslazione degli assi.

Sia α il valore per il quale si richiede di studiare se

$$Re(\lambda_i) < \alpha \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.28)$$

Effettuando una traslazione del sistema di riferimento che porti l'asse immaginario del nuovo riferimento a coincidere con l'asse verticale $Re(\lambda) = \alpha$, tutte le radici che nel riferimento iniziale soddisfano la condizione (3.28) nel nuovo riferimento hanno parte reale negativa. Tale traslazione comporta la trasformazione della variabile da λ a $\bar{\lambda} = \lambda - \alpha$, ossia $\lambda = \bar{\lambda} + \alpha$ e il polinomio $p(\lambda)$ in $p(\bar{\lambda} + \alpha)$. In questo modo si ha che

$$Re(\bar{\lambda}) < 0 \Leftrightarrow Re(\lambda - \alpha) < 0 \Leftrightarrow Re(\lambda) < Re(\alpha)$$

Applicando il criterio di Routh al polinomio $p(\lambda + \alpha)$, il risultato sulla collocazione delle radici nel semipiano reale negativo coincide con quello sulla collocazione delle radici del polinomio non traslato nel semipiano con parte reale minore di α .

Esempio 3.3.2 Si consideri lo studio delle radici dell'equazione

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 6 = 0$$

La costruzione della tabella di Routh fornisce

3	1	8	
2	5	6	
1	$\frac{34}{5}$		
0	6		

che permette di concludere che tutte e tre le radici hanno parte reale negativa.

Se il problema fosse di sapere se le radici hanno tutte parte reale minore di -2, allora si trasforma il polinomio dato per traslazione del piano complesso ottenendo

$$(\bar{\lambda} - 2)^3 + 5(\bar{\lambda} - 2)^2 + 8(\bar{\lambda} - 2) + 6 = 0$$

$$\bar{\lambda}^3 - 6\bar{\lambda}^2 + 12\bar{\lambda} - 8 + 5\bar{\lambda}^2 - 20\bar{\lambda} + 20 + 8\bar{\lambda} - 16 + 6 = 0$$

$$\bar{\lambda}^3 - \bar{\lambda}^2 + 2 = 0$$

dalla quale già si deduce che non tutte le radici hanno parte reale minore di -2.
Costruendo la tabella di Routh si ottiene

3	1	0
2	-1	2
1	2	
0	2	

dalla quale, per la presenza di due variazioni ed una permanenza, si può concludere che il polinomio $p(\bar{\lambda})$ ha due radici a parte reale positiva ed una negativa e quindi $p(\lambda)$ ha due radici a parte reale maggiore di -2 ed una a parte reale minore di -2.

Per questo polinomio, il calcolo delle radici fornisce

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm j, \quad \lambda_3 = -3$$

e il risultato dell'analisi con il criterio di Routh è verificato.

Si noti che per semplicità di notazione, la trasformazione da λ a $\bar{\lambda}$ può essere scritta come sostituzione $\lambda \leftarrow \lambda + \alpha$ poiché il polinomio ottenuto da studiare risulta lo stesso.

Il problema di valutare se le radici hanno parte reale minore di un dato valore, ovviamente negativo per questioni di stabilità, è di interesse ad esempio per comprendere la velocità di risposta di un sistema dinamico o la rapidità di convergenza a zero del transitorio.

Caso di cono con vertice in zero e simmetrico rispetto all'asse reale

Con considerazioni analoghe al caso precedente, il criterio di Routh può essere utilizzato anche per verificare se gli zeri si trovano in una prescritta regione del piano complesso data da un cono con vertice nell'origine e simmetrico rispetto all'asse reale. Sempre per ragioni legate alla necessità di avere anche stabilità, il cono in questione si definisce solitamente contenuto nel semipiano reale negativo.

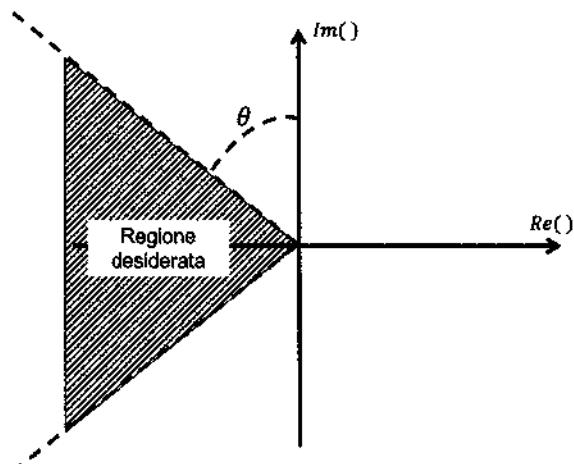


Figura 3.5: Regione di piano di interesse con limite di smorzamento

Questo problema si pone quando si vuole studiare lo smorzamento delle coppie complesse e coniugate radici del polinomio. Se l'angolo tra lo spigolo del cono e l'asse delle ascisse, pari alla metà dell'angolo al vertice, è pari a θ , allora l'appartenenza al cono equivale per la coppia di radici ad avere uno smorzamento maggiore di $\zeta = \sin\theta$.

La verifica dell'appartenenza degli zeri a tale regione può essere fatta impiegando le trasformazioni di variabile

$$\lambda \leftarrow \lambda e^{j\theta}$$

corrispondente ad una rotazione del sistema di riferimento di un angolo θ , e

$$\lambda \leftarrow \lambda e^{-j\theta}$$

che descrive una rotazione degli assi di $-\theta$.

Applicando il criterio di Routh al polinomio di grado $2n$ a coefficienti reali

$$P(\lambda) = p(\lambda e^{j\theta}) \cdot p(\lambda e^{-j\theta})$$

si ha che se $P(\lambda)$ risulta avere tutte le radici a parte reale negativa, allora tutte le radici di $p(\lambda)$ appartengono al cono definito; se nella tabella di Routh vi sono variazioni di segno, esse risultano essere sempre di numero pari e corrispondono al doppio del numero delle radici di $p(\lambda)$ che cadono fuori dal cono dato.

Tronco di cono come combinazione dei due casi precedenti

Nel caso si sia interessati allo studio dell'appartenenza delle radici ad un semipiano di ascissa minore di α e, contemporaneamente, ad un cono di angolo 2θ , si può utilizzare il criterio di Routh combinando le trasformazioni in due rototraslazioni, una in cui si pone

$$\lambda \leftarrow (\lambda - \alpha)e^{j\theta}$$

e l'altra con

$$\lambda \leftarrow (\lambda - \alpha)e^{-j\theta}$$

Il criterio di Routh si deve applicare quindi al polinomio

$$P(\lambda) = p((\lambda - \alpha)e^{j\theta}) \cdot p((\lambda - \alpha)e^{-j\theta})$$



Text™Cloud

Approfondimento

3.4

Il metodo generale di Lyapunov

Nelle sezioni precedenti si sono introdotte condizioni e metodi per valutare la stabilità di sistemi lineari; si è visto che essa è una proprietà del sistema, essendo comune a tutti i suoi punti di equilibrio.

Nel caso di sistema non lineare introdotto all'inizio del capitolo, della forma (3.1), ciascun punto di equilibrio ha le sue caratteristiche di stabilità e pertanto vanno studiati tutti singolarmente.

Quindi, con riferimento al sistema

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

si consideri ciascuno dei punti di equilibrio

$$x_e : f(x_e, 0) = 0$$

3.4.1 Il criterio di Lyapunov

Il criterio di Lyapunov estende, in un contesto puramente matematico, un concetto che è collegato a considerazioni energetiche.

L'idea di base è che se si immagina di associare ad ogni stato del sistema un livello di energia, la stabilità può essere associata alla diminuzione dell'energia lungo le evoluzioni del sistema. Quindi, se lo stato x_e corrisponde ad un livello energetico nullo e gli stati in intorni locali di x_e ad un livello energetico superiore, alle evoluzioni libere che partono dagli stati intorno ad x_e dovrà corrispondere una diminuzione dell'energia.

Per formalizzare questo concetto, si introducono preliminarmente le seguenti definizioni.

- Una funzione $V(x)$ è detta *definita positiva* in un intorno I_{x_e} di x_e se

$$V(x_e) = 0 \quad e \quad V(x) > 0 \quad \forall x \in I_{x_e}. \quad (3.29)$$

b. Una funzione $V(x)$ è detta *semidefinita positiva* in un intorno I_{x_e} di x_e se

$$V(x_e) = 0 \quad e \quad V(x) \geq 0 \quad \forall x \in I_{x_e}. \quad (3.30)$$

c. Una funzione $V(x)$ è detta *definita negativa* in un intorno I_{x_e} di x_e se

$$V(x_e) = 0 \quad e \quad V(x) < 0 \quad \forall x \in I_{x_e}. \quad (3.31)$$

d. Una funzione $V(x)$ è detta *semidefinita negativa* in un intorno I_{x_e} di x_e se

$$V(x_e) = 0 \quad e \quad V(x) \leq 0 \quad \forall x \in I_{x_e}. \quad (3.32)$$

Ad esempio, dato il punto

$$x_e = \begin{pmatrix} x_{e,1} \\ \vdots \\ x_{e,n} \end{pmatrix}$$

la funzione

$$V(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{e,i})^2$$

è definita positiva, con I_{x_e} tutto lo spazio.

Teorema 3.4.1 Lo stato x_e di equilibrio è localmente asintoticamente stabile se esiste una funzione $V(x)$ definita positiva in un intorno I_{x_e} , tale che la sua derivata lungo il moto

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} x_i < 0$$

sia definita negativa.

Esplicitando i calcoli, la condizione si può scrivere

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) < 0 \end{aligned}$$

Il criterio di Lyapunov dice che in sostanza, se si è in grado di trovare una funzione $V(x)$ definita positiva in I_{x_e} tale che la sua derivata lungo il moto sia definita negativa nello stesso intorno allora si può concludere sulla stabilità asintotica locale dello stato di equilibrio.

Come esempio, si consideri

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 - x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Utilizzando la funzione di Lyapunov

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

e calcolandone la derivata si ottiene

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2x_1^2 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_2^4 = -2(x_1^2 + x_1^2x_2^2 + x_2^4) < 0$$

Quindi si può affermare che il punto di equilibrio è stabile asintoticamente localmente.

Il criterio di Lyapunov consente anche di stabilire sotto quali condizioni lo stato di equilibrio sia localmente semplicemente stabile; con la stessa formulazione del caso di stabilità asintotica, il punto di equilibrio è stabile localmente semplicemente se anziché $\dot{V} < 0$ si ha che $\dot{V} \leq 0$, ossia che la derivata \dot{V} sia semidefinita negativa.

Esempio 3.4.1 Un esempio è dato dal sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2^3 \end{cases} \rightarrow x_e = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall \bar{x}_1 \in \mathbb{R}.$$

Preso $x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e la funzione di Lyapunov

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

si ha

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2x_1^2 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_2^4 = -2x_2^2(x_1^2 + x_2^2) \leq 0$$

Si ottiene una funzione semidefinita negativa, perciò lo stato di equilibrio x_e è uno stato di equilibrio semplicemente stabile.

Il criterio di Lyapunov può essere utilizzato anche per studiare la stabilità globale. Definendo $V(x)$ radialmente illimitata se $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$ si ha

Teorema 3.4.2 Lo stato x_e di equilibrio è globalmente asintoticamente stabile se la funzione $V(x)$ è definita positiva rispetto ad x_e in tutto lo spazio ed è radialmente illimitata e la funzione \dot{V} è definita negativa rispetto ad x_e in tutto lo spazio, allora x_e è globalmente asintoticamente stabile.

Lo stesso risultato vale per la stabilità semplice se si richiede che la funzione $\dot{V}(x)$ sia semidefinita negativa.

Esempio: dinamica dell'assetto di un corpo rigido

Un esempio fisico è rappresentato dalla dinamica dell'assetto di un corpo rigido, ad esempio un satellite, in assenza di gravità. Questo modello è assunto a descrivere la variazione dell'orientamento di un satellite rispetto ad un riferimento inerziale.

Si pongano ω_1 la velocità angolare attorno all'asse x , ω_2 quella attorno all'asse y , e ω_3 quella attorno all'asse z ; si consideri che l'orientamento del satellite possa mutare a seguito di coppie, τ_1 , τ_2 , τ_3 , che vengono generate attorno agli assi principali di inerzia, supposti coincidenti con gli assi del sistema di riferimento.

Ciò posto, l'equazione della dinamica può essere scritta

$$\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 &= (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 + \tau_1 \\ J_2\dot{\omega}_2 &= (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 + \tau_2 \\ J_3\dot{\omega}_3 &= (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 + \tau_3 \end{aligned}$$

ove J_1 , J_2 e J_3 sono i momenti di inerzia attorno agli assi x , y e z rispettivamente.

Questo modello generalizza l'orientamento rispetto ad un asse; infatti, si immagini di avere un corpo rigido vincolato a ruotare attorno ad un asse libero da attriti (ad esempio una girandola in condizioni ideali) e che possa essere attuato con una coppia τ attorno al proprio centro di massa: se J è il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse, l'equazione della dinamica è

$$J\ddot{\omega} = \tau$$

Si vuole risolvere il seguente problema: considerando il corpo in rotazione ($\omega(0) \neq 0$), si vuole determinare una coppia che sia in grado di arrestarlo.

Si può verificare che scegliendo

$$\tau = -k\omega$$

si ha

$$\begin{aligned} J\ddot{\omega} &= -k\omega \\ \ddot{\omega} &= -\frac{k}{J}\omega \quad \omega(t) \rightarrow 0 \\ \omega(t) &= e^{-\frac{k}{J}t}\omega(0) \end{aligned} \tag{3.33}$$

Quindi se si applica una coppia proporzionale alla velocità angolare, il corpo tende ad arrestare la sua rotazione. Si osservi che questo corrisponde ad un attrito dinamico e che questo comportamento può essere descritto in termini di stabilità; infatti si ha che lo stato $\omega = 0$ è di equilibrio stabile asintoticamente globalmente.

Questo risultato si può estendere al caso tridimensionale. Se infatti si pone

$$\tau_i = -k_i\omega_i \quad i = 1, 2, 3,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 &= (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 - k_1\omega_1 \\ J_2\dot{\omega}_2 &= (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 - k_2\omega_2 \\ J_3\dot{\omega}_3 &= (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 - k_3\omega_3, \end{aligned}$$

per il quale l'origine è un punto di equilibrio. La verifica che il sistema tende ad arrestarsi può essere effettuata studiando la stabilità asintotica dell'origine. Scegliendo la funzione di Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2)$$

si può verificare che essa risulta essere definita negativa nell'origine ed è anche radialmente illimitata. Calcolando la derivata si ha

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= ((J_2 - J_3) + (J_3 - J_1) + (J_1 - J_2))\omega_1\omega_2\omega_3 - k_1\omega_1^2 - k_2\omega_2^2 - k_3\omega_3^2 \\ &= -k_1\omega_1^2 - k_2\omega_2^2 - k_3\omega_3^2 < 0 \end{aligned}$$

Essa è una funzione definita negativa in tutto lo spazio con riferimento allo stato $\omega = 0$. Pertanto sono verificate le condizioni del Teorema 3.4.2 e l'origine è un punto di equilibrio stabile asintoticamente globalmente: da qualunque condizione iniziale $\omega(0) \neq 0$ le velocità angolari tendono a zero, ossia il corpo tende a fermarsi.

Il teorema di La Salle

Un importante complemento di indagine è fornito dal teorema di La Salle. Tale risultato consente di decidere della eventuale stabilità asintotica avendo a disposizione una funzione di Lyapunov non asintotica. Ciò che, per l'esistenza del teorema inverso, equivale a chiedersi, sotto quali condizioni l'esistenza di una funzione di Lyapunov assicuri l'esistenza di un'altra che è anche asintotica.

Per meglio comprendere l'interesse di un tale risultato si consideri ancora l'esempio del pendolo in presenza di attrito

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{-g}{l} \sin x_1(t) - \frac{k}{m} x_2 \end{aligned}$$

e si consideri ancora come funzione di Lyapunov la funzione energia

$$V(x) = E(x) = \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$$

che è definita positiva per $-2\pi < x_1 < 2\pi$. La sua derivata lungo il moto è pari a

$$\dot{E}(x) = \frac{g}{l}\dot{x}_1 \sin x_1 + x_2 \dot{x}_2 = \frac{g}{l}x_2 \sin x_1 - \frac{g}{l}x_2 \sin x_1 = -\frac{k}{m}x_2^2.$$

$\dot{E}(x)$, essendo semidefinita negativa, è una funzione di Lyapunov e prova la stabilità dell'equilibrio verticale inferiore, ma non la stabilità asintotica, che appare evidente debba sussistere in questo caso.

Siamo dunque nella condizione di avere una funzione di Lyapunov e ci domandiamo se sia possibile dedurre anche la stabilità asintotica. Situazioni di questo tipo si presentano spesso nelle applicazioni.

A questo proposito è necessario premettere che un insieme invariante rispetto alla dinamica del sistema, Ω , è un insieme di stati in cui rimangono confinate le evoluzioni che muovono da ciascuno di essi.

Teorema 3.4.3 (La Salle) Se il più grande insieme invariante rispetto alla dinamica che è contenuto nell'insieme di punti in cui si annulla la $\dot{V}(t)$ coincide con x_e allora x_e è asintoticamente stabile.

La dimostrazione si riconduce alla verifica che le evoluzioni convergono sugli insiemi invarianti.

Non si avrà difficoltà ad applicare il risultato all'esempio del pendolo.

Il criterio di Krasovskii

Un valido strumento di analisi di stabilità asintotica è il teorema di Krasovskii.

Indicata con $J(x)$ la matrice jacobiana di $f(x)$

Teorema 3.4.4 Se per ogni x gli autovalori della matrice $J(x) + J^T(x)$ hanno parte reale strettamente negativa, allora lo stato di equilibrio $x_e = 0$ è stabile asintoticamente globalmente.

Esempio 3.4.2 A titolo di esempio si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_3 u_1 u_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_2^3 + k_1 x_3 + u_1 \\ \dot{x}_3 &= k_2 x_2 - x_3 - x_3^3.\end{aligned}$$

Lo stato zero è uno stato d'equilibrio isolato, poiché lo jacobiano $J(x)|_{x=0}$ è non singolare; inoltre, esso è anche l'unico stato di equilibrio. Per il sistema in esame si ha:

$$J(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3x_2^2 - 1 & k_1 \\ 0 & k_2 & -3x_3^2 - 1 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$J(x) + J^T(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6x_2^2 - 2 & k_1 + k_2 \\ 0 & k_1 + k_2 & -6x_3^2 - 2 \end{pmatrix}$$

ha un autovalore indipendente da x e pari a $\lambda_1 = -2$, mentre gli altri, per $k_1 = -k_2$, risultano essere $\lambda_2 = -6x_2^2 - 2$, $\lambda_3 = -6x_3^2 - 2$, i quali hanno parte reale inferiore a $-a = 2 > 0$. Per il teorema enunciato si ha dunque la stabilità asintotica globale dello stato zero.

Il teorema di Cetaev

Teorema 3.4.5 Se $V(x)$ si annulla in x_e , ha derivate parziali prime continue in $\Omega(x_e)$, assume valori positivi in un insieme che ha x_e come punto di accumulazione e la sua derivata lungo il moto è definita positiva, allora lo stato di equilibrio è instabile.

Esempio 3.4.3 Si consideri il seguente sistema del secondo ordine

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + g_1(x) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + g_2(x)\end{aligned}$$

in cui $g_1(\cdot)$ e $g_2(\cdot)$ soddisfano in un intorno dell'origine

$$|g_i(x)| \leq \|x\|^2$$

Poiché le condizioni precedenti implicano $g_i(0) = 0$, l'origine è uno stato di equilibrio. Si consideri, dunque la funzione

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$$

che è positiva sui punti della retta $x_2 = 0$ intorno all'origine; inoltre si ha

$$\dot{V}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 g_1(x) - x_2 g_2(x).$$

Poiché

$$|x_1 g_1(x) - x_2 g_2(x)| \leq \sum_i |x_i| |g_i(x)| \leq 2k \|x\|^3,$$

ne segue che

$$\dot{V}(x) \geq \|x\|^2 - 2k \|x\|^3 = \|x\|^2 (1 - 2k \|x\|)$$

e per $r < \frac{1}{2k}$ in $S(r)$ le condizioni del teorema di Cetaev sono soddisfatte; si ha quindi instabilità dello stato di equilibrio.

3.4.2 Il criterio di Lyapunov per i sistemi lineari stazionari

Il criterio di Lyapunov nel caso di sistemi lineari si può tradurre in condizioni su opportune matrici. Si consideri un sistema lineare con matrice dinamica A e lo stato $x_e = 0$ come unico punto di equilibrio. Può quindi studiarsi la sua stabilità asintotica globale.

L'applicazione del criterio di Lyapunov generale richiede che esista una $V(x)$ nulla in zero e definita positiva, tale che la sua derivata

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i$$

sia definita negativa.

Grazie alla particolare forma di un sistema lineare, nell'applicazione del criterio di Lyapunov è sempre sufficiente fare riferimento a funzioni definite positive quadratiche, ossia della forma

$$V(x) = x' P x > 0$$

con P matrice definita positiva, indicata con $P > 0$, che, senza perdita di generalità può essere assunta simmetrica.

La verifica affinché una matrice sia definita positiva può essere fatta impiegando il criterio di Sylvester, il quale afferma che condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice P simmetrica sia definita positiva è che tutti i suoi minori principali siano positivi¹.

Il fatto di considerare solo matrici simmetriche non è una limitazione perché data una forma quadratica con una qualunque matrice, si può ottenere una matrice simmetrica attraverso la cosiddetta procedura di simmetrizzazione. Si consideri una forma quadratica

$$\mathbf{x}' \bar{P} \mathbf{x}$$

con P matrice qualunque di dimensione n . Essendo la forma quadratica una funzione scalare, essa coincide con la sua trasposta. Pertanto se si somma la forma quadratica alla sua trasposta, si ottiene il doppio della sola forma quadratica; se poi si divide per due, si riottiene la forma quadratica iniziale. Tutto questo può essere scritto come

$$\frac{\mathbf{x}' \bar{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}' \bar{P}' \mathbf{x}}{2} = \mathbf{x}' \frac{\bar{P} + \bar{P}'}{2} \mathbf{x} = \mathbf{x}' P \mathbf{x} \quad \text{con} \quad P = \frac{\bar{P} + \bar{P}'}{2} \quad \text{simmetrica}$$

Come esempio si verifica immediatamente che:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{x}' \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{x}' \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \right) \\ &= \mathbf{x}' \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) \mathbf{x} = \mathbf{x}' \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

Tutto ciò posto, è possibile enunciare il criterio di Lyapunov per i sistemi lineari. Esso fornisce condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità asintotica globale dell'origine.

Teorema 3.4.6 In un sistema lineare $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, il punto di equilibrio $\mathbf{x}_e = 0$ è stabile asintoticamente globalmente se, comunque si fissi una matrice P simmetrica e definita positiva, l'equazione matriciale

$$A'Q + QA = -P$$

nell'incognita Q ha una soluzione unica, simmetrica e definita positiva.

Quindi, fissato ad arbitrio P simmetrica e definita positiva, che nelle applicazioni del criterio viene solitamente assunta per semplicità pari all'identità I , si

¹Si ricorda che i minori principali di una matrice simmetrica di dimensione n sono i determinanti delle $n-1$ sotto-matrici P_i che si ottengono considerando solo le prime i righe e le prime i colonne, $i = 1, \dots, n-1$, ovvero cancellando le ultime $n-i$ righe e colonne. Per $i = n$ si ottiene l'intera matrice di partenza ed il suo determinante.

deve risolvere l'equazione nell'incognita Q ; tale soluzione deve essere unica, simmetrica e definita positiva. In caso affermativo si ha stabilità; in caso contrario, si può asserire che il sistema non è stabile.

La considerazione è quindi più forte che non nel contesto non lineare in cui l'impossibilità di concludere a partire da una funzione definita positiva scelta non consente di dichiarare l'assenza della proprietà.

La sufficienza della condizione si può dimostrare in modo costruttivo. Se il teorema è verificato, fissata $P > 0$ esiste la soluzione $Q > 0$; costruendo con questa una funzione di Lyapunov, si ha

$$\begin{aligned} V(x) &= x'Qx > 0 \\ \dot{V}(x) &= \dot{x}'Qx + x'Q\dot{x} = x'A'Qx + x'QAx = x'(A'Q + QA)x \\ &= -x'Px < 0 \end{aligned}$$

Quindi $\dot{V}(x)$ è una funzione definita negativa in tutto lo spazio; inoltre, $V(x)$ e $\dot{V}(x)$ sono radialmente illimitate e quindi lo stato zero è stabile asintoticamente globalmente.

Per la necessità, nell'ipotesi che gli autovalori di A abbiano tutti parte reale negativa, $Re(\lambda_i) < 0$, la prova consiste nel mostrare che la seguente matrice è la soluzione cercata

$$Q = \int_0^{\infty} e^{A't} P e^{At} dt$$

Che sia soluzione lo si verifica per sostituzione diretta. Si ha

$$\begin{aligned} (A'Q + QA) &= \int_0^{\infty} A'e^{A't} P e^{At} dt + \int_0^{\infty} e^{A't} P e^{At} Adt \\ &= \int_0^{\infty} (A'e^{A't} P e^{At} + e^{A't} P e^{At} A) dt \\ &= \int_0^{\infty} d(e^{A't} P e^{At}) = e^{A't} P e^{At} \Big|_0^{+\infty} = -P \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che Q è simmetrica, poiché coincide con la sua trasposta; è anche definita positiva, in quanto costruendo la forma quadratica

$$x'Qx = x' \int_0^{\infty} (e^{A't} P e^{At}) dt x = \int_0^{\infty} x'(e^{A't} P e^{At}) x dt = \int_0^{\infty} z' P z dt$$

con

$$z = e^{At} x$$

poiché $P > 0$ lo stesso si può dire di Q .

Q infine è anche soluzione unica; ciò discende da una proprietà delle equazioni del tipo considerato che è soddisfatta nell'ipotesi che tutti gli autovalori di A abbiano parte reale negativa.

Il criterio fornisce una condizione necessaria e sufficiente fondata sulla risoluzione di un sistema di $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni. Si tratta di tante equazioni quante sono le incognite in una matrice simmetrica di dimensione n .

Esempio 3.4.4 Si consideri

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

L'equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

si riscrive

$$\begin{aligned} -5q_{12} - 5q_{12} &= -1 \\ -5q_{22} + q_{11} - 6q_{12} &= 0 \\ q_{12} - 6q_{22} + q_{12} - 6q_{22} &= -1 \end{aligned}$$

Si tratta di tre equazioni: $\left. \frac{n(n+1)}{2} \right|_{n=2} = 3$. Risolvendo, si ottiene

$$q_{11} = \frac{11}{10}; \quad q_{12} = \frac{1}{10}; \quad q_{22} = \frac{1}{10}$$

e quindi

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{11}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$



Approfondimento

3.5

Stabilità mediante linearizzazione

Nello studio della stabilità di un punto di equilibrio x_e di un sistema non lineare, si può fare riferimento ad una approssimazione lineare nell'intorno del punto di equilibrio.

Come è noto, la linearizzazione di un sistema

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

nell'intorno di un suo punto di equilibrio (con ingresso nullo)

$$x_e : f(x_e, 0) = 0$$

posto

$$\xi(t) = x(t) - x_e \quad (3.34)$$

fornisce

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) \quad \text{dove} \quad A = J(x_e) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

L'ipotesi alla base del procedimento è che quanto più l'evoluzione di un sistema si trovi vicina ad un punto di equilibrio, tanto più la dinamica lineare tende a coincidere con quella non lineare.

Un risultato preliminare coerente con tale ipotesi è che *lo stato di equilibrio x_e per il sistema non lineare è isolato se $J(x_e)$ ha rango pieno*.

Essa è una condizione sufficiente; non è necessaria, come mostra il semplice esempio

$$\dot{x} = -x^3$$

ove, nonostante $J(x_e) = 0$, lo stato di equilibrio è unico (in realtà la soluzione è isolata, ma la molteplicità algebrica è pari a tre).

3.5.1 Condizioni di stabilità

Utilizzando l'approssimazione lineare nell'intorno di ciascun punto di equilibrio per studiarne la stabilità, si possono verificare i seguenti tre casi:

1. se il sistema linearizzato nell'intorno di un punto di equilibrio x_e è asintoticamente stabile, allora il punto di equilibrio x_e è localmente asintoticamente stabile;
2. se il sistema linearizzato nell'intorno di un punto di equilibrio x_e è instabile, allora il punto di equilibrio x_e è instabile;
3. se il sistema linearizzato nell'intorno di un punto di equilibrio x_e è semplicemente stabile, oppure instabile per la presenza di autovalori con parte reale nulla di ordine geometrico maggiore di uno, allora non si possono dedurre condizioni di stabilità per il punto di equilibrio x_e .

Per mostrare che la stabilità asintotica del sistema lineare implica la stabilità asintotica locale dello stato x_e del sistema non lineare dato, caso 1., si consideri la funzione di Lyapunov $V(\xi) = \xi'Q\xi > 0$, con Q soluzione di $A'Q + QA = -P$, che esiste in quanto il sistema lineare è asintoticamente stabile.

Per studiare la stabilità del punto di equilibrio x_e , si prenda la stessa funzione di Lyapunov

$$V(x) = (x - x_e)'Q(x - x_e)$$

definita positiva rispetto ad x_e . La sua derivata è

$$\dot{V}(x) = \dot{x}'Q(x - x_e) + (x - x_e)'Q\dot{x} = f(x)'Q(x - x_e) + (x - x_e)'Qf(x).$$

Approssimando la funzione nell'intorno di x_e , sempre con ingresso nullo, si ottiene

$$\dot{V}(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_e} (x - x_e) \right)' Q (x - x_e) + (x - x_e)' Q \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_e} (x - x_e) \right)$$

che può essere riscritta come

$$\dot{V}(x) = (A(x - x_e))' Q(x - x_e) + (x - x_e)' Q(A(x - x_e)),$$

ottenendo infine l'espressione

$$\dot{V}(x) = (x - x_e)' A' Q(x - x_e) + (x - x_e)' Q A(x - x_e) = -(x - x_e)' P(x - x_e)$$

definita negativa nell'intorno di x_e .

Questo risultato può essere utilizzato per ricavare condizioni sufficienti di stabilità. Se ad esempio l'approssimazione lineare avesse matrice

$$J(x_e) = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

lo stato di equilibrio sarebbe localmente asintoticamente stabile ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$); se la matrice fosse

$$J(x_e) = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

lo stato di equilibrio sarebbe instabile ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$); se invece fosse

$$J(x_e) = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad J(x_e) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

non si potrebbe dire nulla circa la stabilità dello stato di equilibrio rispetto alla dinamica non lineare.

3.5.2 Esempi

Il criterio qui introdotto può essere utilizzato in molti casi reali come i seguenti esempi mostrano.

Dinamica del pendolo

La dinamica di un pendolo, già introdotta nel Paragrafo 1.5.1, è descritta dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{ml} u \end{aligned}$$

Per il calcolo degli stati di equilibrio occorre risolvere il sistema

$$\begin{aligned} 0 &= x_{e,2} \\ 0 &= -\frac{g}{l} \sin x_{e,1} - \frac{k}{m} x_{e,2} \end{aligned}$$

che fornisce

$$x_{e,2} = 0 \quad e \quad \sin x_{e,1} = 0 \quad \rightarrow \quad x_{e,1} = h\pi, \quad h \quad \text{intero}$$

$$\boldsymbol{x}_e = \begin{pmatrix} h\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si nota che gli stati di equilibrio con h pari corrispondono al pendolo nella posizione verticale verso il basso, mentre gli stati di equilibrio con h dispari corrispondono al pendolo nella posizione verticale superiore.

Il comportamento del sistema nell'intorno delle due condizioni di equilibrio è intuitivamente noto: perturbando la condizione verticale verso il basso, il sistema tende a tornare nella condizione di equilibrio mentre se si perturba il sistema nel punto di equilibrio verticale verso l'alto la posizione tende ad essere abbandonata, anzi evolvendo verso l'equilibrio in basso.

Il metodo dell'approssimazione lineare fornisce questo risultato a conforto dell'intuizione.

Per il calcolo della matrice dinamica dell'approssimazione lineare, si calcola dapprima la matrice jacobiana,

$$J(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_1 & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

Per lo studio di ciascun punto, la matrice $J(\boldsymbol{x})$ si deve calcolare in ognuno di essi, $J(\boldsymbol{x}_e)$. Per la posizione verso l'alto si ha

$$A_{up} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di A_{up} si ottengono come radici del polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda - \frac{g}{l}$$

Per la regola di Cartesio sui segni delle radici, per la presenza di una permanenza e di una variazione di segno nei coefficienti si può concludere che una radice ha parte reale negativa e una positiva, quindi sono entrambe reali. Il sistema risulta quindi instabile e così è quindi il punto di equilibrio.

Per l'equilibrio verso il basso, lo jacobiano calcolato nel punto fornisce

$$A_{down} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

In questo caso il polinomio caratteristico è pari a

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda + \frac{g}{l}$$

Dalle due permanenze si deduce che le due radici (gli autovalori) hanno entrambi parte reale negativa: il sistema è stabile asintoticamente e il punto in esame, corrispondente al pendolo verso il basso, è asintoticamente localmente stabile.

Equazione logistica

Nella costruzione del modello preda-predatore nel paragrafo 1.5.1, si è visto che la dinamica di una sola popolazione in presenza di limitazione di risorse può essere descritta dalle equazioni logistiche

$$\dot{x}(t) = ax(t) - kx^2(t)$$

dove a e k sono costanti positive. Una analisi qualitativa mostra la presenza di un termine con contributo crescente, $ax(t)$, che descrive la crescita, ed uno decrescente, $-kx^2(t)$, che rappresenta il contributo della limitatezza delle risorse e che diviene sempre più importante al crescere di x , poiché compare elevato al quadrato. La soluzione di un'equazione di questo tipo bene rappresenta questo fenomeno come l'intuizione suggerisce perché prevede un andamento esponenziale della crescita quando non risente della limitatezza delle risorse, dominata da un tasso di crescita costante, al quale si sovrappone una tendenza alla decrescita che ne limita la continua espansione. Dallo studio dei punti di equilibrio e della stabilità si può vedere se i due effetti si compensano, e come, oppure uno prevale sull'altro.

La prima osservazione è che il sistema ammette due valori di equilibrio; da

$$x(a - kx) = 0$$

si ottengono $x_{e,1} = 0$ e $x_{e,2} = \frac{a}{k}$; questo secondo valore è detto *capacità portante*.

Utilizzando il metodo dello studio della stabilità mediante linearizzazione, il calcolo della matrice jacobiana, che in questo caso è scalare, fornisce

$$J(x) = a - 2kx$$

Calcolandola nei due stati di equilibrio si ottiene

$$\text{per } x_{e,1} \text{ si ha } J(x_{e,1}) = a > 0$$

$$\text{per } x_{e,2} \text{ si ha } J(x_{e,2}) = -a < 0$$

Si può concludere che il primo stato di equilibrio $x_{e,1} = 0$ è instabile mentre lo stato di equilibrio $x_{e,2} = \frac{a}{k}$ è stabile asintoticamente localmente.

Sulla base di questi risultati, posto ad esempio $a = 10k$, come evolve la popolazione se nell'istante iniziale ci sono zero individui? E se ve n'è uno? E se sono 1000?

Modello preda-predatore

Il modello di interazione preda-predatore, introdotto nel paragrafo 1.5.1, può essere inizialmente semplificato nell'ipotesi che per la preda non vi sia limitazione di risorse ($k=0$). In questo caso si hanno le equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t) \end{cases}$$

dove, si ricorda, x_1 rappresenta la popolazione preda e x_2 la popolazione predatrice. L'interazione tra prede e predatori è rappresentato dai termini di secondo grado e contribuiscono alla diminuzione delle prede ed al conseguente aumento dei predatori. I coefficienti a, b, c e d sono tutti positivi.

Il sistema ha dei punti di equilibrio se esistono soluzioni per il sistema

$$\begin{cases} x_1(a - bx_2) = 0 \\ x_2(-c + dx_1) = 0 \end{cases}$$

Gli stati di equilibrio esistono e si calcolano facilmente; sono pari a

$$x_{e,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{e,2} = \begin{pmatrix} \frac{c}{d} \\ \frac{c}{b} \end{pmatrix}.$$

L'applicazione del metodo della linearizzazione richiede il calcolo della matrice jacobiana

$$J(x) = \begin{pmatrix} a - bx_2 & -bx_1 \\ dx_2 & -c + dx_1 \end{pmatrix}$$

Per il primo punto di equilibrio si ottiene

$$J(x_{e,1}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

che consente di concludere che l'origine è un punto di equilibrio instabile, mentre per il secondo si ha

$$J(x_{e,2}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{da}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

con una coppia di autovalore a parte reale nulla che non consente di trarre alcuna conclusione sulla stabilità.

Se si riprende il modello completo, prevedendo che anche per la preda le risorse siano limitate ($k > 0$), si ha l'equazione introdotta in 1.5.1

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t) - kx_1^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t) \end{cases}$$

Per questo sistema gli stati di equilibrio, se ve ne sono, si ottengono come soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1(a - bx_2 - kx_1) = 0 \\ x_2(-c + dx_1) = 0 \end{cases}$$

Si ottengono i punti di equilibrio

$$x_{e,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{e,2} = \begin{pmatrix} \frac{a}{k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{e,3} = \begin{pmatrix} \frac{c}{d} \\ \frac{a}{b} - \frac{kc}{db} \end{pmatrix},$$

L'equilibrio $x_{e,3}$ esiste se i parametri sono tali da garantire la non negatività delle componenti. Si deve quindi avere

$$\frac{a}{b} - \frac{kc}{db} \geq 0 \iff \frac{a}{k} \geq \frac{c}{d}$$

La condizione si esprime dicendo che la capacità portante della specie preda deve essere sufficientemente elevata per poter reagire alla capacità di preda del predatore. Tale stato di equilibrio ha un significato fisico sul quale il lettore è invitato a riflettere.

Per lo studio della stabilità si calcola dapprima la matrice jacobiana

$$J(x) = \begin{pmatrix} a - bx_2 - 2kx_1 & -bx_1 \\ dx_2 & -c + dx_1 \end{pmatrix}$$

e poi il singolo punto di equilibrio si studia valutando questa matrice nel punto stesso. Per $x_{e,1}$ si ha

$$J(x_{e,1}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

Per $x_{e,2}$ si ottiene

$$J(x_{e,2}) = \begin{pmatrix} -a & -\frac{ab}{k} \\ 0 & d\left(\frac{a}{k} - \frac{c}{d}\right) \end{pmatrix}$$

mentre per $x_{e,3}$ il calcolo fornisce

$$J(x_{e,3}) = \begin{pmatrix} -\frac{kc}{d} & -c \\ \left(\frac{ad}{b} - \frac{kc}{b}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

Le conclusioni sono lasciate per esercizio.

Si verifichi che il risultato matematicamente spiega bene un fenomeno che in presenza di condizioni di competizione a due specie, preda-predatore, si verifica nella realtà: a seguito di una perturbazione rispetto a una data condizione di equilibrio insorge un fenomeno oscillatorio che converge verso lo stato di equilibrio.

Esercizio 3.5.1 Il modello di Leslie: Leslie, nel 1948, rappresenta l'interazione fra due specie utilizzando le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 - kx_1^2 - bx_1x_2 \\ \dot{x}_2 = -cx_2 + d' \frac{x_2^2}{x_1} \end{cases}$$

Si verifichi che l'equilibrio $x_e = \begin{pmatrix} x_{1,e} \\ x_{2,e} \end{pmatrix}$ è tale che

$$\frac{x_{1,e}}{x_{2,e}} = \frac{d'}{c}$$

e che se la condizione iniziale (stato perturbato)

$$\frac{x_1(0)}{x_2(0)} > \frac{d'}{c}$$

è molto grande rispetto alla condizione di equilibrio, il predatore cresce, secondo un andamento esponenziale, mentre se è molto piccolo, decresce, secondo un andamento esponenziale.



Soluzione Esercizio 3.5.1

Approfondimento

3.6

La Stabilità ingresso–uscita

Lo studio della stabilità presentato finora fa riferimento alla dinamica interna, ossia dello stato, del sistema.

Può accadere che si richieda di caratterizzare un sistema con un concetto equivalente alla stabilità introdotta ma definita e verificabile sulla base della conoscenza della rappresentazione esterna ingresso–uscita.

Una differenza con la stabilità interna, fondamentalmente legata all'evoluzione libera, è che esternamente non si può prescindere dalla presenza dell'ingresso ed è una limitazione vincolarlo a particolari valori. Quindi il concetto di stabilità esterna deve dipendere anche dall'ingresso.

Mantenendo l'idea di limitatezza dell'evoluzione, è possibile definire un *sistema stabile esternamente* se

$$\forall M > 0 \quad \exists N_M > 0 \quad : \quad \|u(t)\| < M \Rightarrow \|y(t)\| < N_M$$

In altre parole, la definizione richiede che per avere stabilità esterna, la risposta di un sistema deve essere comunque limitata, qualunque ingresso limitato lo solleciti e qualunque sia la sua condizione iniziale.

Con riferimento ad un sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad x(0) = x_0 \quad (3.35)$$

la limitatezza dell'uscita richiede che sia l'evoluzione libera in uscita che la risposta forzata in uscita siano limitate per qualunque x_0 e qualunque u limitato.

La dipendenza dall'evoluzione libera può essere esclusa introducendo la *stabilità esterna nello stato zero*. Un sistema è stabile esternamente nello stato zero se

$$\forall M > 0 \quad \exists N_M > 0 \quad : \quad x_0 = 0 \quad \& \quad \|u(t)\| < M \Rightarrow \|y(t)\| < N_M$$

Si hanno in proposito i seguenti risultati.

Teorema 3.6.1 Il sistema (3.35) è stabile esternamente se e solo se sono verificate le due condizioni

$$1) \quad \|\Psi(t)\| < k_1 \quad \forall t$$

$$2) \quad \int_0^t \|W(\tau)\| d\tau < k_2 \quad \forall t$$

Teorema 3.6.2 Il sistema (3.35) è stabile esternamente nello stato zero se e solo se è verificata la condizione

$$2) \quad \int_0^t \|W(\tau)\| d\tau < k_2 \quad \forall t$$

Quindi le due condizioni 1) e 2) sono necessarie e sufficienti per la **stabilità esterna** mentre la sola condizione 2) è necessaria e sufficiente per la **stabilità esterna nello stato zero**.

La limitatezza della $\Psi(t)$ impone che le evoluzioni libere siano limitate, ecco perché questa proprietà entra in gioco solo per la stabilità esterna in ogni stato.

Le dimostrazioni possono essere svolte contemporaneamente.

La sufficienza delle condizioni indicate si dimostra facilmente, a partire dall'espressione della risposta

$$y(t) = \Psi(t)x_0 + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

che per la norma dell'uscita si ha

$$\|y(t)\| = \|\Psi(t)x_0 + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau\|$$

Facendo ripetutamente uso delle proprietà elementari delle norme

$$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|, \quad \|ab\| \leq \|a\| \|b\|$$

$$\left\| \int_0^t f(\tau)d\tau \right\| \leq \int_0^t \|f(\tau)\| d\tau$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \|\Psi(t)x_0\| + \left\| \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau \right\| \\ &\leq \|\Psi(t)\| \|x_0\| + \int_0^t \|W(t-\tau)u(\tau)\| d\tau \\ &\leq \|\Psi(t)\| \|x_0\| + \int_0^t \|W(t-\tau)\| \|u(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

Infine, poiché si ha

$$\|u(\tau)\| < M$$

si può concludere che per la norma dell'uscita vale la disegualanza

$$\|y(t)\| < \|\Psi(t)\| \|x_0\| + \int_0^t \|W(t-\tau)\| d\tau \cdot M$$

Se le condizioni 1) e 2) sono verificate, si ottiene

$$\|y(t)\| < k_1 \|x_0\| + k_2 M = N_{x_0, M}$$

che prova la limitatezza della risposta per ogni stato iniziale.

Per la stabilità nello stato zero si ha $x_0 = 0$; quindi nell'espressione dell'uscita non compare l'evoluzione libera e l'espressione finale diventa

$$\|y(t)\| < \int_0^t \|W(t-\tau)\| d\tau \cdot M$$

La sola condizione 2) è quindi sufficiente poiché garantisce che

$$\|y(t)\| < k_2 M = N_M$$

Per la necessità, la dimostrazione consiste essenzialmente nell'andare a verificare che, se le condizioni 1) e 2) non sono soddisfatte, si possono avere evoluzioni in uscita illimitate.

Per quanto riguarda la 1) si noti che se la matrice $\Psi(t)$ non ha norma limitata allora esiste almeno uno tra i suoi elementi non limitato, il che comporta l'esistenza di evoluzioni libere illimitate. Quindi la condizione 1) è anche necessaria per la stabilità esterna. Analogamente, se si assume che l'ipotesi 2) non sia soddisfatta, si può dimostrare che esiste un ingresso che, anche se limitato, può agire su quelle componenti di $W(t)$ che sono eventualmente non limitate, facendo quindi corrispondere un'evoluzione forzata in uscita illimitata. Quindi anche la condizione 2) è necessaria.

Per la stabilità esterna nello stato zero, il ragionamento precedente si può ripetere facendo riferimento alla sola condizione 2), non essendo presente il termine relativo all'evoluzione libera, concludendo che essa è condizione necessaria.

La formulazione data, nota la struttura delle matrici coinvolte, è facilmente riconducibile a caratteristiche del sistema e, in particolare, agli autovalori.

3.6.1 Condizione di stabilità esterna nello stato zero

La condizione di stabilità esterna nello stato zero in termini di autovalori corrisponde ad avere

dove \mathbb{C}^- indica il semipiano reale negativo aperto dei numeri complessi e $\Lambda_{E,O}$ indica l'insieme degli autovalori associati ai modi naturali che sono simultaneamente eccitabili con ingressi impulsivi e osservabili in uscita. È opportuno sottolineare che la proprietà di eccitabilità e di osservabilità dei modi, alla quale facciamo qui riferimento, è, nel caso di molteplicità geometrica maggiore di uno, quella completa.

Per comprendere tale formulazione basta ricordare che in $W(t) = Ce^{At}B$ ci sono le leggi esponenziali che sono associate ai modi naturali contemporaneamente eccitabili con impulsi d'ingresso, cioè quelle che sono contenute in $e^{At}B$, e osservabili in uscita, cioè quelle contenute in Ce^{At} .

Poiché $W(t) = Ce^{At}B$ è una matrice i cui elementi sono combinazioni lineari di leggi di tipo esponenziale che dipendono dagli autovalori reali nel caso di modi aperiodici e dalla parte reale degli autovalori complessi per i modi pseudo-periodici. Pertanto, l'integrale su un intervallo infinito è finito solo se tali leggi esponenziali hanno esponente a parte reale strettamente negativa. Ne segue che gli autovalori che caratterizzano gli esponenziali in $W(t)$ devono essere a parte reale negativa, cioè devono appartenere al semipiano negativo aperto.

Un interessante esempio elementare di sistema non stabile esternamente nello stato zero è costituito dal sistema caratterizzato dalla funzione di trasferimento $W(s) = \frac{1}{s}$, un integratore, che in termini differenziali ha una equazione del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} &= u \\ y &= x \end{cases}$$

Infatti si ha che $W(t) = 1$ e, prendendo l'ingresso limitato $u(t) = \delta_{-1}(t)$, ne segue

$$\int_0^\infty W(t)dt = \int_0^\infty dt = \infty$$

non soddisfacendo la condizione.

3.6.2 Condizione di stabilità esterna in ogni stato

La condizione si esprime, in termini di autovalori, come

$$\Lambda_0 \subset \mathbb{C}^- \quad \Lambda_0^{-1} \subset \mathbb{C}^- \quad \text{e} \quad \Lambda_{E,O} \subset \mathbb{C}^-$$

ove \mathbb{C}^- indica il semipiano complesso negativo chiuso, ossia l'insieme dei punti del piano complesso che hanno parte reale minore o uguale a zero, e l'esponente 1 è l'ordine geometrico dell'autovalore, uguale ad uno o maggiore di uno rispettivamente.

La seconda condizione è già stata commentata e corrisponde alla 2) del Teorema 3.6.1. La prima corrisponde alla 1) come è facile verificare ricordando che nell'evoluzione libera in uscita compaiono le leggi esponenziali associate ai modi naturali osservabili. Per comprendere come, si osservi che la limitatezza della

norma della $\Psi(t)$ corrisponde alla limitatezza dei suoi elementi che sono costituiti da combinazioni lineari di funzioni esponenziali, eventualmente a coefficienti polinomiali in t in presenza di autovalori a ordine geometrico maggiore di uno. Inoltre, le leggi che vi compaiono sono costituite dai soli modi naturali osservabili. Quindi si ha limitatezza di tali elementi se e solo se tutti gli autovalori che caratterizzano modi naturali osservabili sono a parte reale strettamente negativa se a ordine geometrico maggiore di uno, a causa del coefficiente polinomiale ($\Lambda_O^{>1} \subset \mathbb{C}^-$), e sono a parte reale negativa o nulla per quelli a ordine geometrico ($\Lambda_O^1 \subset \bar{\mathbb{C}}^-$).

Queste considerazioni fatte per i sistemi a tempo continuo possono essere estese direttamente ai sistemi a tempo discreto in termini di limitatezza delle norme. Con riferimento alla $\Psi(t)$, la condizione è la stessa; la seconda ha la stessa forma ove si sostituisca all'integrale la sommatoria. Le condizioni in termini di autovalori si esprimono nello stesso modo ove si sostituisca il modulo alla parte reale con riferimento ad 1.

Relazioni tra stabilità interna e esterna

In sintesi, le condizioni di stabilità dal punto di vista degli autovalori sono

$$\Lambda \subset \mathbb{C}^-$$

per la stabilità asintotica interna

$$\Lambda_{E,0} \subset \mathbb{C}^-$$

per la stabilità esterna nello stato zero

$$\Lambda_O^1 \subset \bar{\mathbb{C}}^- \quad \Lambda_O^{>1} \subset \mathbb{C}^- \quad \Lambda_{E,O} \subset \mathbb{C}^-$$

per la stabilità esterna (in ogni stato).

Sulla base delle relazioni tra gli insiemi Λ , Λ_O^1 , $\Lambda_O^{>1}$ e $\Lambda_{E,O}$, si ha immediatamente che

- la stabilità asintotica interna implica sempre quella esterna ($\Lambda_{E,O} \subset \Lambda_O \subset \Lambda$);
- la stabilità esterna implica sempre la stabilità esterna nello stato zero (condizione $\Lambda_{E,O} \subset \mathbb{C}^-$ già contenuta).

Inoltre, a seconda delle proprietà dei modi naturali, si ha che

- la stabilità esterna nello stato zero implica la stabilità asintotica interna se

$$\Lambda_{E,0} \equiv \Lambda$$

cioè se tutti i modi naturali sono eccitabili ed osservabili. Infatti, in tale caso, gli autovalori che caratterizzano $W(t)$, che per ipotesi sono a parte reale negativa, coincidono con quelli della matrice dinamica che risulta essere, quindi, asintoticamente stabile.

- La stabilità esterna nello stato zero implica la stabilità esterna se

$$\Lambda_{E,O} \equiv \Lambda_O$$

cioè se i modi naturali osservabili sono anche eccitabili. Infatti, in questo caso, se è verificata la condizione $\Lambda_{E,O} \subset \mathbb{C}^-$ allora è verificata anche la condizione $\Lambda_O \subset \mathbb{C}^-$ indipendentemente dalla molteplicità degli autovalori.

- La stabilità esterna (nello stato zero) implica la stabilità interna asintotica se

$$\Lambda_E^0 \equiv \Lambda$$

cioè se tutti i modi sono eccitabili ed osservabili. Infatti dalla condizione $\Lambda_{E,0} \subset \mathbb{C}^-$ comune alla stabilità esterna e a quella esterna nello stato zero, si ha

$$\Lambda \equiv \Lambda_{E,0} \subset \mathbb{C}^-$$

- La stabilità esterna implica la stabilità interna semplice se

$$\Lambda_0 \equiv \Lambda$$

Infatti, nel caso tutti i modi siano osservabili, se nello spettro di A vi sono autovalori a parte reale nulla, per essi vale

$$\Lambda^1 \equiv \Lambda_O^1 \subset \mathbb{C}^- \quad \Lambda > 1 \equiv \Lambda_O^{>1} \subset \mathbb{C}^-$$

e quindi le conseguenti leggi di moto sono limitate (costanti o periodiche) o convergenti.

Esempio 3.6.1 Per chiarire i concetti sopra esposti, si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}u \\ y &= (1 \ 1 \ 0)x\end{aligned}$$

Il calcolo degli autovalori fornisce

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 1$$

Se si svolge l'analisi dei modi si ottiene

1. per λ_1

$$\begin{aligned}(A - \lambda_1 I)u_1 &= 0 \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}u_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ v'_1(A - \lambda_1 I) &= 0 \quad v'_1 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad v'_1 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)\end{aligned}$$

$$Cu_1 = 2 \neq 0 \quad v'_1 B = \frac{1}{2} \neq 0$$

2. per λ_2

$$(A - \lambda_2 I)u_2 = 0 \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} u_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v'_2(A - \lambda_2 I) = 0 \quad v'_2 \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad v'_2 = (0 \quad 1 \quad 0)$$

$$Cu_2 = 3 \neq 0 \quad v'_2 B = 0$$

3. per λ_3

$$(A - \lambda_3 I)u_3 = 0 \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} u_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v'_3(A - \lambda_3 I) = 0 \quad v'_3 \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad v'_3 = (-\frac{1}{2} \quad 0 \quad 1)$$

$$Cu_3 = 0 \quad v'_3 B = -\frac{1}{2} \neq 0$$

Quindi sono definiti gli insiemi

$$\Lambda = \{-1; 0; 1\} \quad \Lambda_E = \{-1; 1\}$$

$$\Lambda_O = \{-1; 0\} \quad \Lambda_E^0 = \{-1\}$$

Si può concludere che il sistema dato è instabile internamente, perché c'è un autovalore a parte reale positiva, è stabile nello stato zero perché il solo autovalore eccitabile ed osservabile è pari a -1 ed è stabile esternamente essendoci in Λ_0 , oltre l'autovalore a parte reale minore di zero, un autovalore nullo ma con ordine unitario.



3.7

Stabilità nei sistemi stazionari a tempo discreto: definizioni

Lo studio della stabilità per i sistemi a tempo discreto differisce da quella per i sistemi a tempo continuo solo per le espressioni che coinvolgono le evoluzioni temporali, non presentando diversità per quanto riguarda gli approcci all'analisi.

La prima differenza evidente, indotta dal diverso insieme di definizione del tempo, è nell'espressione di un sistema dinamico a tempo discreto. Seguendo quanto descritto per il caso del tempo continuo, si considerano inizialmente sistemi nonlineari stazionari descritti dalle equazioni

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)) \quad (3.36)$$

$$y(t) = h(x(t), u(t)) \quad (3.37)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$, $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$.

La condizione di equilibrio si definisce nello stesso modo, ossia uno stato di equilibrio x_e è quello stato in cui il sistema permane in assenza di perturbazioni sull'ingresso, assunto costante o, spesso, nullo. La traduzione in termini di espressioni, utilizzando la (3.36), fornisce

$$x_e = f(x_e, u_e) \quad (3.38)$$

Infatti, nel caso di tempo discreto, la permanenza in uno stato si esprime scrivendo che lo stato all'istante successivo è uguale a quello all'istante attuale.

Per la soluzione del sistema (3.38) valgono le stesse considerazioni svolte nel caso tempo continuo, in particolare sul numero di soluzioni.

Per le definizioni delle condizioni di equilibrio, nulla cambia rispetto al caso tempo continuo. Infatti perché uno stato di equilibrio x_e sia stabile, occorre ancora che sia verificata la condizione

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \quad \|x(t_0) - x_e\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.39)$$

mentre per la stabilità asintotica, alla condizione (3.39) occorre aggiungere la seguente

$$\exists \delta_0 > 0 \quad \|x(t_0) - x_e\| < \delta_0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0 \quad (3.40)$$

Stesso ragionamento per le condizioni di stabilità asintotica globale; la condizione (3.40) viene sostituita da

$$\forall k > 0 \quad \|x(t_0) - x_e\| < k \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0 \quad (3.41)$$

Le espressioni delle condizioni sono quindi identiche nei casi a tempo continuo e a tempo discreto; le differenze sono legate al dominio di definizione dello

stato e alle espressioni che ne deriverebbero se si scrivessero esplicitamente gli andamenti temporali, come risulta possibile nel caso di sistemi lineari.



Approfondimento

3.8

Stabilità nei sistemi lineari stazionari a tempo discreto: proprietà e condizioni

Nel caso di sistemi lineari il sistema (3.36) assume la nota espressione

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.42)$$

e per la determinazione degli stati di equilibrio l'espressione corrispondente a (3.38) si scrive, per ingresso nullo,

$$x_e = Ax_e \quad \Rightarrow \quad (A - I)x_e = 0 \quad (3.43)$$

Per le soluzioni del sistema (3.43) valgono le stesse considerazioni del caso a tempo continuo: si tratta di un sistema lineare omogeneo, quindi la soluzione $x_e = 0$ esiste sempre. Inoltre, se la matrice $(A - I)$ ha rango pieno, l'origine è l'unica soluzione; in caso contrario, esiste un intero sottospazio, coincidente con $\ker(A - I)$, di stati di equilibrio.

3.8.1 Condizioni di stabilità

Nel caso di sistemi lineari, l'espressione dell'evoluzione dello stato è nota e può essere utilizzata nelle definizioni precedenti per ottenere condizioni di stabilità. Infatti si ha

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t - \tau)u(\tau)d\tau \quad (3.44)$$

Per ingresso nullo l'espressione ha la stessa forma di quella a tempo continuo, quindi utilizzando la condizione (3.39) si perviene alle stesse conclusioni, potendo quindi affermare, in totale analogia al caso a tempo continuo, che *in un sistema lineare a tempo discreto, condizione necessaria e sufficiente di stabilità locale di un punto di equilibrio x_e è che la norma della matrice di transizione sia limitata, ossia che esista $k \geq 0$ tale che*

$$\|\Phi(t-t_0)\| \leq k, \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.45)$$

La dimostrazione è equivalente al caso a tempo continuo.

L'equivalenza delle espressioni non è più valida quando si scrivono esplicitamente le funzioni nel tempo. Infatti si ha che $\Phi(t) = A^t$ e le leggi temporali presenti in $\Phi(t-t_0)$ sono quelle dei modi naturali, diversi nei due casi. Quindi, nel caso dei sistemi a tempo discreto, si può affermare che la condizione di stabilità locale è soddisfatta se

$$\begin{cases} |\lambda_i^t| < 1 & t=1, \dots, n \\ |\lambda_i^{t+1}| < 1 \end{cases} \quad (3.46)$$

dove si è indicato anche qui con l'apice 1 o > 1 l'ordine geometrico dell'autovalore.

Analogamente per la stabilità asintotica, si giunge alla stessa condizione (3.14) del caso lineare ma, per le espressioni dei modi naturali, essa risulta verificata se e solo se

$$|\lambda_i| < 1 \quad t=1, \dots, n \quad (3.47)$$

Le considerazioni sulla globalità dei risultati sono esattamente le stesse del caso a tempo continuo.

In sintesi, ai fini della stabilità, è richiesta la collocazione degli autovalori all'interno del cerchio di raggio unitario o sulla sua circonferenza, se di ordine geometrico unitario, per la stabilità semplice, mentre per quella asintotica la circonferenza non è accettabile e gli autovalori devono essere tutti all'interno del cerchio unitario.

Si osservi la corrispondenza del semipiano reale negativo con il cerchio unitario e dell'asse immaginario con la circonferenza unitaria nella comparazione tra stabilità per sistemi a tempo continuo e a tempo discreto.

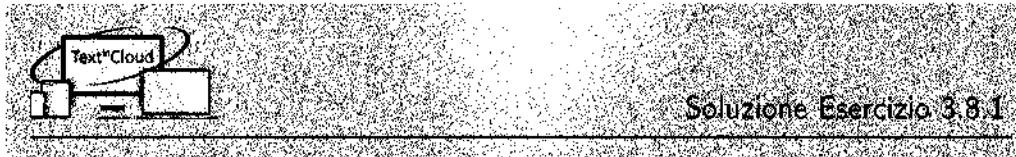
Quindi, analogamente a quanto avviene nel caso a tempo discreto con il criterio di Routh, qualunque strumento capace di verificare la posizione degli autovalori nel piano complesso rispetto, in questo caso, alla circonferenza unitaria, sarebbe utile per semplificare l'analisi della stabilità senza dover calcolare esplicitamente tutti gli autovalori.

Esercizio 3.8.1 Considerato il sistema lineare

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

studiare la stabilità della coppia $(x_e, u_e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, generica coppia di equilibrio che verifica

$$x_e = Ax_e + Bu_e.$$



Il criterio di Jury

Il criterio di Jury consente di avere informazioni sul modulo delle radici di un polinomio

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

determinando se hanno modulo minore di 1.

Anche in questo caso è possibile introdurre preliminarmente l'esistenza di condizioni necessarie che possono semplificare l'analisi.

Utilizzando l'espressione del polinomio fattorizzato

$$p(\lambda) = a_n (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

se tutte le radici λ_i , $i = 1, \dots, n$ hanno modulo minore di uno, allora deve essere verificato che

$$p(1) > 0 \quad (3.48)$$

Questo perché per le radici reali ciascun fattore $(1 - \lambda_i)$ risulta positivo, mentre per ciascuna coppia complessa e coniugata (λ_i, λ_i^*) , da

$$(\lambda - \lambda_i)(\lambda - \lambda_i^*) = (\lambda - |\lambda_i| e^{j\varphi_{\lambda_i}})(\lambda - |\lambda_i| e^{-j\varphi_{\lambda_i}}) = \lambda^2 - 2|\lambda_i| \cos \varphi_{\lambda_i} \lambda + |\lambda_i|^2$$

con $|\cos \varphi_{\lambda_i}| < 1$ si ha

$$\lambda^2 - 2|\lambda_i| \cos \varphi_{\lambda_i} \lambda + |\lambda_i|^2 > \lambda^2 - 2|\lambda_i| \lambda + |\lambda_i|^2 = (\lambda - |\lambda_i|)^2$$

che, per $\lambda = 1$ risulta positivo.

Con un ragionamento analogo, si ottiene una seconda condizione necessaria

$$(-1)^n p(-1) > 0$$

Una ultima condizione necessaria è data da

$$|a_0| < |a_n|$$

Si ottiene calcolando il polinomio in $\lambda = 0$: ciascun fattore corrispondente ad una radice reale risulta uguale a $-\lambda_i = \pm |\lambda_i|$ mentre ciascuna coppia complessa e coniugata fornisce $|\lambda_i|^2$. Quindi si ha

$$p(0) = a_0 = \pm \prod_{i=1}^n |\lambda_i| a_n \Rightarrow |a_0| = \left| \prod_{i=1}^n |\lambda_i| \right| |a_n| < |a_n|$$

Il criterio di Jury si basa sulla costruzione di una tabella della forma

$2n$	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-3}	a_{n-1}	a_n
$2n-1$	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_2	a_1	a_0
$2(n-1)$	b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	
$2(n-1)-1$	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\dots	b_1	b_0	
$2(n-2)$	c_0	c_1	c_2	\dots	c_{n-2}		
$2(n-2)-1$	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	\dots	c_0		
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots		
4	t_0	t_1	t_2				

dove le prime due righe sono ottenute direttamente dal polinomio allo studio: la prima scrivendo i coefficienti dal grado più basso, la seconda riscrivendoli in ordine inverso. I termini della terza riga si ottengono calcolando

$$b_i = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-i} \\ a_n & a_i \end{vmatrix} \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

da cui si ottiene anche la quarta, scrivendo gli stessi b_i in ordine inverso.

Si procede ricorsivamente con le successive righe

$$c_i = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-i} \\ b_{n-1} & b_i \end{vmatrix} \quad i = 0, 1, \dots, n-2$$

$$d_i = \dots \quad \dots$$

scrivendo ogni volta anche la riga con i coefficienti in ordine inverso, fino a quando si ottiene la riga composta da tre elementi.

Si può ora enunciare il criterio di Jury:

Il polinomio $p(\lambda)$ ha tutte le radici con modulo minore di uno se e solo se sono soddisfatte le condizioni

$$\left. \begin{array}{l} p(1) > 0 \\ (-1)^n p(-1) > 0 \\ |a_0| < |a_n| \\ |b_{n-1}| < |b_0| \\ \vdots \\ |t_2| < |t_0| \end{array} \right\} \text{condizioni necessarie}$$

Esempio 3.8.1 Come esempio, si consideri inizialmente il semplice caso di

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 0,5$$

La verifica delle condizioni necessarie fornisce

$$p(1) = 2.5 > 0$$

$$(-1)^2 p(-1) = 0.5 > 0$$

$$|0.5| < |1|$$

Le condizioni sono soddisfatte e quindi si può procedere con la costruzione della tabella. In questo caso, avendo solo tre coefficienti, la tabella risulta inutile e si può concludere che le due radici di $p(\lambda)$ hanno modulo minore di 1.

Esempio 3.8.2 *Un ulteriore esempio è dato dal polinomio*

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 1.6\lambda^3 + 0.38\lambda^2 + 0.4\lambda - 0.1575$$

Si ha

$$p(1) = 0.0225 > 0$$

$$(-1)^4 p(-1) = 2.4225 > 0$$

$$|-0.1575| < |1|$$

e quindi le condizioni necessarie sono soddisfatte. La tabella risulta data da

8	-0.1575	0.4	0.38	-1.6	1
7	1	-1.6	0.38	0.4	-0.1575
6	-0.9752	1.5370	-0.4399	-0.1480	
5	-0.1480	-0.4399	1.5370	-0.9752	
4	-0.9291	1.5640	-0.6565		

Le condizioni, oltre a quelle necessarie, sono

$$\begin{aligned} |b_{n-1}| &< |b_0| & \Rightarrow & \quad |-0.1480| < |-0.9752| \\ |c_{n-2}| &< |c_0| & \Rightarrow & \quad |-0.6565| < |-0.9291| \end{aligned}$$

entrambe verificate.

A differenza della tabella di Routh, la costruzione della tabella di Jury non presenta mai impedimenti.

3.8.2 Relazione tra i criteri di Jury e di Routh

Con riferimento al piano complesso, nello studio della stabilità per i sistemi lineari a tempo continuo le condizioni sono legate all'appartenenza o meno degli autovalori nel semipiano reale negativo e il criterio di Routh è in grado di fornire indicazioni sull'appartenenza delle radici di un polinomio a tale sottospazio; per i sistemi a tempo discreto si fa riferimento al cerchio unitario e il criterio di Jury permette di affermare se le radici di un polinomio sono ivi contenute.

Se si indica con "z" la generica variabile complessa, è possibile definire una trasformazione che mappa il cerchio di raggio unitario nel semipiano reale negativo. Questo consente, una volta operata la trasformazione, di poter utilizzare i criteri noti per i sistemi a tempo continuo anche nello studio dei sistemi a tempo discreto.

Il cambio di variabile (non lineare) che realizza questo è dato da

$$s = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (3.49)$$

la cui trasformazione inversa è data da

$$z = \frac{1+s}{1-s} \quad (3.50)$$

Per la verifica, si ponga dapprima $z = e^{j\theta}$ nell'espressione (3.49), ottenendo

$$s = \frac{e^{j\theta} - 1}{e^{j\theta} + 1} = \frac{e^{j\frac{\theta}{2}} - e^{-j\frac{\theta}{2}}}{e^{j\frac{\theta}{2}} + e^{-j\frac{\theta}{2}}} = j \tan \frac{\theta}{2}$$

Per $\theta \in [-\pi \pm 2k\pi, \pi \pm 2k\pi]$, z percorre l'intera circonferenza di raggio 1. In corrispondenza, $\tan \frac{\theta}{2} \in (-\infty, +\infty)$ e s descrive l'intero asse immaginario. Quindi la circonferenza nella variabile z diventa l'asse immaginario nella variabile s.

Sostituendo invece $z = \alpha + j\omega$ in (3.49), si ha

$$s = \frac{\alpha + j\omega - 1}{\alpha + j\omega + 1} = \frac{\alpha^2 + \omega^2 - 1}{(\alpha + 1)^2 + \omega^2} + j \frac{2\omega}{(\alpha + 1)^2 + \omega^2}$$

da cui, dopo aver ritrovato il risultato precedente quando $\alpha^2 + \omega^2 = 1$

$$s|_{\alpha^2+\omega^2=1} = \left(\frac{\alpha^2 + \omega^2 - 1}{(\alpha + 1)^2 + \omega^2} + j \frac{2\omega}{(\alpha + 1)^2 + \omega^2} \right)_{\alpha^2+\omega^2=1} = j \frac{\omega}{\alpha + 1}$$

si ha anche facilmente la relazione

$$Re(s) = \frac{\alpha^2 + \omega^2 - 1}{(\alpha + 1)^2 + \omega^2} < 1 \quad \text{se e solo se} \quad \alpha^2 + \omega^2 < 1$$

Ovviamente, vale anche il viceversa utilizzando la trasformazione di variabile (3.50) che consente di trasformare il semipiano reale negativo in s nel cerchio unitario in z.

La trasformazione (3.49) consente di ricondurre l'analisi dell'appartenenza delle radici di un polinomio al cerchio unitario in quello dell'appartenenza delle radici del polinomio trasformato al semipiano reale negativo e viceversa. Questo consente di utilizzare il criterio di Routh anche nello studio dei sistemi a tempo discreto.

Esempio 3.8.3 Come esempio, si consideri il polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 0.8\lambda^2 - 0.25\lambda + 0.2$$

e si voglia verificare se tutte le radici hanno modulo minore di uno. Operando la sostituzione (3.50) ponendo

$$\lambda = \frac{1+s}{1-s}$$

si ottiene il polinomio

$$\begin{aligned} p(s) &= \frac{(1+s)^3}{(1-s)^3} - 0.8 \frac{(1+s)^2}{(1-s)^2} - 0.25 \frac{1+s}{1-s} + 0.2 \\ &= (1+s)^3 - 0.8(1+s)^2(1-s) - 0.25(1+s)(1-s)^2 + 0.2(1-s)^3 \\ &= 1.35s^3 + 4.65s^2 + 1.85s + 0.15 \end{aligned}$$

Il polinomio $p(\lambda)$ ha tutte le radici con modulo minore di 1 se e solo se $p(s)$ ha tutte le radici a parte reale minore di zero. Applicando il criterio di Routh, dopo aver osservato che la condizione necessaria è soddisfatta, si ha

3		1.35	1.85
2		4.65	0.15
1		1.8065	
0		0.15	

Poiché la prima colonna non presenta variazioni di segno, allora il polinomio $p(s)$ ha tutte le sue radici a parte reale negativa. Questo implica che il polinomio $p(\lambda)$ ha le radici con modulo minore di uno. Questo si può verificare applicando direttamente il criterio di Jury, calcolo lasciato come esercizio.

3.8.3 Il criterio di Lyapunov per i sistemi a tempo discreto

Come per i sistemi a tempo continuo, un ulteriore criterio di indagine sulla stabilità è rappresentato dal criterio di Lyapunov. Si tratta di un criterio di grande generalità e potenzialità di impiego non limitato al contesto lineare.

La formulazione segue quella enunciata nel caso a tempo continuo con la differenza che, definita una funzione di Lyapunov $V(x)$ occorre introdurre la funzione *differenza prima*, definita come

$$\Delta V(x) = V(x(t+1)) - V(x(t))$$

in luogo della sua derivata.

Pertanto, con riferimento al sistema a tempo discreto

$$x(t+1) = f(x(t))$$

sia $x_e = f(x_e)$ un suo punto di equilibrio.

Teorema 3.8.1 Lo stato x_e di equilibrio è localmente asintoticamente stabile se esiste una funzione $V(x)$ definita positiva in un intorno I_{x_e} , tale che la sua differenza prima lungo il moto

$$\Delta V(x) = V(x(t+1)) - V(x(t)) = V(f(x(t))) - V(x(t)) \quad (3.51)$$

sia definita negativa.

Come nel caso di tempo continuo, il fatto di non riuscire a determinare una funzione di Lyapunov $V(x)$ che soddisfa il Teorema 3.8.1 non implica la non esistenza.

Un risultato analogo può essere enunciato per la stabilità semplice:

Teorema 3.8.2 Lo stato x_e di equilibrio è localmente stabile se esiste una funzione $V(x)$ definita positiva in un intorno I_{x_e} , tale che la sua differenza prima lungo il moto

$$\Delta V(x) = V(x(t+1)) - V(x(t)) = V(f(x(t))) - V(x(t)) \quad (3.52)$$

sia semi-definita negativa.

Esempio 3.8.4 Come esempio, si consideri il sistema

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= \frac{x_2(t)}{1+x_2(t)^2} \\ x_2(t+1) &= \frac{x_1(t)}{1+x_2(t)^2} \end{cases}$$

per il quale è facile verificare che lo stato $x_e = 0$ è di equilibrio. Scelta la funzione

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

definita positiva in un intorno di $x_e = 0$, si ha

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &= V(f(x(t))) - V(x(t)) \\ &= \frac{x_2^2}{(1+x_2^2)^2} + \frac{x_1^2}{(1+x_2^2)^2} - V(x(t)) \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1+x_2^2)^2} - V(x(t)) = \frac{V(x)}{(1+x_2^2)^2} - V(x(t)) \\ &= \frac{V(x)}{(1+x_2^2)^2} - V(x) = \left(\frac{1}{(1+x_2^2)^2} - 1 \right) V(x) \end{aligned}$$

La funzione $\Delta V(x)$ è semidefinita negativa e quindi si può affermare che lo stato di equilibrio è uno stato stabile; in realtà è uno stato di equilibrio globalmente stabile per le note condizioni di illimitatezza della V e di validità delle condizioni su tutto lo spazio.

Quando il criterio di Lyapunov si applica ad un sistema lineare, grazie alla particolare struttura si possono enunciare condizioni più semplici, necessarie e sufficienti, di facile verifica.

3.8.4 Il criterio di Lyapunov per i sistemi lineari stazionari a tempo discreto

In questo caso il sistema considerato è

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t)$$

con punti di equilibrio dati, come già noto, da $A\mathbf{x}_e = \mathbf{x}_e$, ossia $(A - I)\mathbf{x}_e = 0$.

In questo caso, utilizzando il criterio di Lyapunov, si può affermare

Teorema 3.8.3 Condizione necessaria e sufficiente perché lo stato di equilibrio \mathbf{x}_e sia asintoticamente stabile è che, comunque si scelga una matrice P simmetrica e definita positiva, l'equazione

$$A'Q A - Q = -P \quad (3.53)$$

ammetta soluzione Q unica, simmetrica e definita positiva.

Si ricorda che per la stabilità asintotica di \mathbf{x}_e è necessario che questo sia un punto di equilibrio isolato e che questa condizione diventa, nel caso di sistemi lineari, che esso sia unico. Pertanto, solo l'origine può essere un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Si noti la corrispondenza della formulazione del Teorema 3.8.3 con il caso a tempo continuo. Anche in questo caso in genere si fissa, per semplicità, $P = I$. Si osservi che, dovendo essere verificate tutte e tre le condizioni su Q , si ha che se l'equazione (3.53) non ammette una soluzione, oppure se la soluzione non è unica, o ancora se non è definita positiva, si deve concludere che il sistema non è asintoticamente stabile.

La dimostrazione è analoga a quella svolta nel caso dei sistemi a tempo continuo. Per la sufficienza, si definisca

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'Q\mathbf{x}$$

Calcolando la sua differenza prima si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta V(\mathbf{x}) &= V(\mathbf{x}(t+1)) - V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}'(t+1)Q\mathbf{x}(t+1) - \mathbf{x}'(t)Q\mathbf{x}(t) \\ &= \mathbf{x}'A'QAx - \mathbf{x}'Q\mathbf{x} = \mathbf{x}'(A'Q A - Q)\mathbf{x} = -\mathbf{x}'Px \end{aligned}$$

Se P è definita positiva, allora $-\mathbf{x}'Px$ è globalmente definita negativa. Ciò dimostra la stabilità asintotica globale del sistema.

Per la necessità si procede in modo formalmente analogo a quanto visto nel caso a tempo continuo mostrando che

$$Q = \sum_{t=0}^{\infty} (A')^t P A^t$$

è soluzione unica simmetrica e definita positiva dell'equazione (3.53). È semplice verificare che la matrice Q è simmetrica e definita positiva. Per verificare che sia soluzione, la sua sostituzione nell'equazione fornisce

$$A' \sum_{t=0}^{\infty} (A')^t P A^t A - \sum_{t=0}^{\infty} (A')^t P A^t = -P$$

da cui

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^{\infty} (A')^{t+1} P A^{t+1} - \sum_{t=0}^{\infty} (A')^t P A^t = -P \\ & \sum_{\sigma=1}^{\infty} (A')^{\sigma} P A^{\sigma} - \left(P + \sum_{\sigma=1}^{\infty} (A')^{\sigma} P A^{\sigma} \right) = -P \\ & \sum_{\sigma=1}^{\infty} (A')^{\sigma} P A^{\sigma} - \sum_{t=1}^{\infty} (A')^t P A^t - P = -P \end{aligned}$$

ed essendo le due sommatorie uguali, si ottiene l'uguaglianza $-P = -P$ che conferma l'asserto.

Dal punto di vista del calcolo, anche in questo caso il criterio si riconduce alla risoluzione di un sistema di $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni lineari.

3.8.5 Analisi della stabilità mediante linearizzazione nel caso a tempo discreto

Analogamente al caso a tempo continuo, anche nel contesto tempo discreto è possibile studiare la stabilità locale di un punto di equilibrio per un sistema non lineare facendo riferimento ad una approssimazione lineare nell'intorno del punto di equilibrio e facendo uso delle condizioni per i sistemi lineari.

Come è noto, per la linearizzazione di un sistema dato intorno ad uno stato di equilibrio x_e si procede con l'approssimazione della funzione $f(x)$ con i termini fino al primo ordine, ottenendo

$$x(t+1) = f(x_e) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_e} (x(t) - x_e) \quad (3.54)$$

Posto $z(t) = x(t) - x_e$, si ha $x(t+1) = z(t+1) + x_e$ e, ricordando che $f(x_e) = x_e$, sostituendo il tutto nella (3.54) si ottiene

$$z(t+1) = Az(t)$$

con A ancora data dalla matrice jacobiana di $f(x)$ in x_e .

Come esempio, si consideri l'algoritmo di calcolo della radice quadrata. Dall'analisi è noto che l'equazione

$$x^2 - a = 0$$

con $a > 0$, può essere risolta impiegando il seguente algoritmo iterativo

$$x(t+1) = x(t) + a - x^2(t) \quad (3.55)$$

Dal punto di vista della stabilità, dopo aver verificato che (3.55) ha come punto di equilibrio

$$x_e = \sqrt{a}$$

la convergenza dell'algoritmo a \sqrt{a} può essere qui studiata come stabilità del punto x_e : la stabilità asintotica dell'equilibrio significa che al passare del tempo t , ossia iterazione dopo iterazione, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e = \sqrt{a}$.

Questioni di tale genere sono indicate come problemi di stabilità di un algoritmo.

Se si procede all'impiego del metodo di studio mediante linearizzazione, si ottiene

$$J(x_e) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_e} = \frac{\partial (x(t) + a - x^2(t))}{\partial x} \Big|_{x=x_e} = (1 - 2\sqrt{a})$$

Il sistema ha dimensione uno, quindi l'unico autovalore è pari a

$$\lambda = (1 - 2\sqrt{a})$$

La condizione di stabilità richiede che il suo modulo sia minore di uno; pertanto l'equilibrio è localmente asintoticamente stabile se

$$|1 - 2\sqrt{a}| < 1 \Leftrightarrow 0 < a < 1$$

Da questa analisi si ricava che per $0 < a < 1$ la soluzione $x_e = \sqrt{a}$ può essere senz'altro calcolata con l'algoritmo dato.

Il risultato ottenuto ha una validità locale e rimane non definito il massimo scostamento ammesso dalla condizione iniziale rispetto al valore vero (quello di equilibrio). Un'informazione più precisa circa l'eventuale scostamento, la regione di stabilità, può essere ottenuto utilizzando il criterio di Lyapunov con la funzione

$$V(x(t)) = (x(t) - \sqrt{a})^2 \quad \begin{cases} = 0 & x(t) = x_e = \sqrt{a} \\ > 0 & x(t) \neq x_e = \sqrt{a} \end{cases}$$

Procedendo con i calcoli, da

$$V(x(t+1)) = (x(t+1) - \sqrt{a})^2 = (x(t) + a - x^2(t) - \sqrt{a})^2$$

si ottiene la differenza prima

$$\begin{aligned} \Delta V(x(t)) &= (x(t) + a - x^2(t) - \sqrt{a})^2 - (x(t) - \sqrt{a})^2 \\ &= (x(t) + a - x^2(t) - \sqrt{a} - x(t) + \sqrt{a})(x(t) + a - x^2(t) - \sqrt{a} + x(t) - \sqrt{a}) \\ &= -(x^2(t) - a)(a - x^2(t) + 2(x(t) - \sqrt{a})) \\ &= -(x(t) - \sqrt{a})^2(x(t) + \sqrt{a})(2 - (x(t) + \sqrt{a})) \end{aligned}$$

Si verifica che per $0 < (x(t) + \sqrt{a}) < 2$ la funzione $\Delta V(x(t))$ è definita negativa.

Si può facilmente verificare che, per la stessa condizione, l'algoritmo ad ogni passo si avvicina ad $x_e = \sqrt{a}$, ossia

$$|x(t+1) - x_e| < |x(t) - x_e|$$

Pertanto, fissato il possibile intervallo di valori per a , ne segue l'intervallo in cui si deve scegliere la condizione iniziale perché l'algoritmo converga, ossia si può definire la regione di convergenza. Se si pone $0 < a < 1$, allora di ha $0 \leq x \leq 1$.

Per esercizio, si provi a verificare lo stesso risultato utilizzando come funzione di Lyapunov

$$V(x(t)) = |x^2(t) - a| > 0$$

Come esempio applicativo, si consideri la dinamica del prezzo di beni introdotta nella sezione 1.2.2 del Capitolo 1, dove è stata introdotta una descrizione intuitiva del problema della stabilità.

Riprendendo l'equazione (1.19)

$$p(t+1) = -\frac{b}{a}p(t) + \frac{d_0 - s_0}{a} \quad (3.56)$$

del sistema a tempo discreto la cui variabile di stato è il prezzo.

Si può studiare allora come può variare il prezzo di un bene. In particolare, ci si può chiedere, come fatto nel Capitolo 1, se esiste un prezzo per il quale il mercato sia in equilibrio e che sia stabile.

Lo studio può essere ora effettuato in modo formale studiando equilibri e stabilità per il sistema (3.56) con le metodologie introdotte. Per l'equilibrio p_e , si ha

$$p_e = -\frac{b}{a}p_e + \frac{d_0 - s_0}{a}$$

da cui

$$p_e = \frac{d_0 - s_0}{a + b}$$

Partendo da questa condizione di equilibrio, che significa invarianza del prezzo di anno in anno, per valutare ad esempio che cosa accade se il produttore, nell'anno t , prova a mettere in vendita il bene ad un prezzo superiore $p_e + \varepsilon$, pensando di aumentare il suo profitto, è sufficiente studiare la stabilità del sistema (3.56). Questo è lasciato come esercizio.

Così come è lasciato come esercizio lo studio nel caso in cui i beni siano $n > 1$, con scelte di acquisto e di produzione collegate. In questo caso le equazioni che descrivono l'evoluzione della domanda e dell'offerta (1.18) rimangono ovviamente le stesse, ma le grandezze coinvolte assumono dimensioni vettoriali pari al numero n di beni (p , d , s e ovviamente d_0 e s_0), e i coefficienti che li legano divengono matrici di dimensioni conseguenti $n \times n$ (A , B). La dinamica dei prezzi (3.56) diviene

$$p(t+1) = -A^{-1}Bp(t) + A^{-1}(d_0 - s_0) \quad (3.57)$$

Si suggerisce di studiare, per $n = 2$, il caso particolare in cui la pianificazione della produzione di un bene avviene indipendentemente dagli altri, per cui $B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$, dove si può porre per semplicità di calcoli $b_1 = b_2 = 1$, e con matrice

$A = \begin{pmatrix} -a_1 & a_{12} \\ a_{21} & -a_2 \end{pmatrix}$ che descrive il caso in cui la domanda del bene i non dipende solo dal suo prezzo ($-a_i p_i(t)$), ma anche da quello dell'altro $a_{ij} p_j(t)$. Si provi a dare una interpretazione realistica ai termini delle equazioni ed ai risultati ottenuti.



Approfondimento

Capitolo at glance

CAPITOLO 4

Le rappresentazioni lineari stazionarie nel dominio complesso

In questo capitolo viene introdotto il metodo di analisi nel dominio della variabile complessa che impiega per i sistemi a tempo continuo la trasformata di Laplace e per quelli a tempo discreto la trasformata Z. Lo studio dei sistemi dinamici lineari stazionari nel dominio delle trasformate consente di collegare la risposta impulsiva al comportamento del sistema in risposta a sollecitazioni periodiche. Si tratta di una caratterizzazione del comportamento dinamico sulla quale è fondata la classificazione in uso nel settore dell'ingegneria.

4.1

La trasformata di Laplace nello studio dei sistemi a tempo continuo

La trasformata di Laplace, che prende il nome dal famoso matematico francese del XVII secolo che la introdusse, propone un contesto complementare allo studio dei sistemi di equazioni differenziali e delle proprietà delle loro soluzioni.

Data una funzione $f(t)$, definita su $t \in [0, \infty)$, la sua **trasformata di Laplace**, $\mathcal{L}[f(t)]$, più semplicemente indicata con la lettera maiuscola, $F(s)$, è la funzione di variabile complessa, $s \in \mathbb{C}$, definita dalla relazione seguente

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (4.1)$$

Alla funzione del tempo viene dunque associata una funzione di variabile complessa che è pari all'integrale, tra zero e infinito, della funzione data moltiplicata per e^{-st} . Tale funzione risulta essere definita in tutti i punti $s \in \mathbb{C}$ in

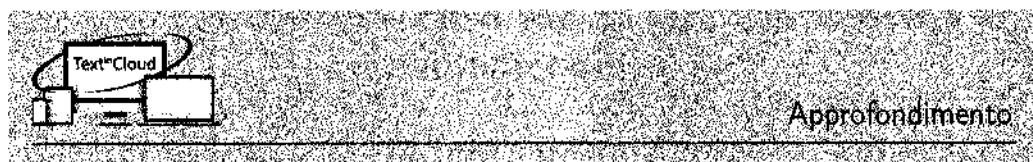
corrispondenza dei quali la funzione $e^{-st}f(t)$ è sommabile. La moltiplicazione per un peso esponenziale consente di ottenere la sommabilità per valori opportuni della parte reale della variabile complessa e conferisce alla trasformata condizioni di esistenza molto generali. Si può infatti formalmente verificare che la trasformata di Laplace è ben definita per una vasta gamma di funzioni reali. Più precisamente ad una generica $f(t)$ è associato un numero reale $\alpha_f \in \mathbb{R}$, l'**ascissa di convergenza**, che definisce il semipiano del piano complesso $Re(s) > \alpha_f$ nel quale la trasformata di Laplace è definita. È importante sottolineare che l'operazione di trasformazione di Laplace è biunivoca. Ciò permette di definire l'operazione di antitrasformazione, per recuperare la stessa funzione nel dominio del tempo. A questo proposito si osserva che poiché la trasformata di Laplace impiega funzioni definite sull'intervallo reale positivo, quando necessario per precisare questo aspetto la funzione da trasformare sarà indicata con $f(t)$ e, comunque, tale notazione sarà sempre impiegata nell'antitrasformazione.

La trasformazione introdotta soddisfa la proprietà di **linearità** e indicato con $f(0)$ il valore della $f(t)$ per $t = 0$, vale il seguente risultato noto come **teorema della derivata**:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}(f(t)\delta_{-1}(t))\right] = sF(s) - f(0), \quad (4.2)$$

con ascissa di convergenza coincidente con α_f .

Si illustrerà nel seguito come, sulla base di queste semplici proprietà, si possano desumere conseguenze e risultati importanti per lo studio dei sistemi dinamici lineari.



Si consideri infatti la rappresentazione implicita

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

e siano $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$, $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ le trasformate di $x(t)$ ed $u(t)$ rispettivamente. Utilizzando la proprietà di linearità della trasformata ed il teorema di derivazione con condizione iniziale $x_0 = x(0) \in \mathbb{R}^n$, si ottiene

$$\begin{aligned} sX(s) - x_0 &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned} \quad (4.4)$$

e, con semplici ulteriori manipolazioni,

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) &= C(sI - A)^{-1}x_0 + (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s). \end{aligned} \quad (4.5)$$

La trasformazione e semplici manipolazioni hanno dunque permesso di calcolare le (4.5) che rappresentano in s le espressioni dello stato e dell'uscita in funzione dello stato iniziale e dell'ingresso; esse rappresentano dunque le trasformata di Laplace del modello esplicito

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)x_0 + \int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ y(t) &= \Psi(t)x_0 + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (4.6)$$

cioè

$$\begin{aligned} X(s) = \mathcal{L}[x(t)] &= \mathcal{L}\left[\Phi(t)x_0 + \int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau\right] \\ Y(s) = \mathcal{L}[y(t)] &= \mathcal{L}\left[\Psi(t)x_0 + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau\right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ricordando che l'uguaglianza delle (4.5) con le (4.7) deve valere per ogni ingresso $u(t)$ e per ogni condizione iniziale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si ottiene immediatamente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\Phi(t)x_0] &= (sI - A)^{-1}x_0 \\ \mathcal{L}[\Psi(t)x_0] &= C(sI - A)^{-1}x_0. \end{aligned}$$

Poiché tali relazioni devono valere, come già ricordato, per ogni stato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}^n$, ricordando che la matrice di transizione $\Phi(t) = e^{At}$, ne segue che

$$\Phi(s) = \mathcal{L}[\Phi(t)] = \mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1} \quad (4.8)$$

e coerentemente che

$$\Psi(s) = \mathcal{L}[\Psi(t)] = \mathcal{L}[Ce^{At}] = C(sI - A)^{-1} \quad (4.9)$$

Dalla (4.8) è possibile calcolare agevolmente anche le trasformate delle matrici delle risposte impulsive nello stato ed in uscita. Infatti si ha

$$H(s) := \mathcal{L}[H(t)] = \mathcal{L}[e^{At}B] = (sI - A)^{-1}B \quad (4.10)$$

$$W(s) := \mathcal{L}[W(t)] = \mathcal{L}[Ce^{At}B + D\delta(t)] = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (4.11)$$

in cui, per la (4.11) si è usata la linearità della trasformata e la proprietà dell'impulso per cui

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1.$$

Ritornando alla equivalenza delle espressioni (4.5) e (4.7), segue anche che, per le (4.11)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int_0^t H(t-\tau)u(\tau)d\tau\right] &= H(s)U(s) \\ \mathcal{L}\left[\int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau\right] &= W(s)U(s)\end{aligned}\quad (4.12)$$

Per un sistema con q uscite e p ingressi, la matrice $W(s)$, trasformata di Laplace di $W(t)$, ha dimensioni $(q \times p)$ ed è detta **matrice delle funzioni di trasferimento** o semplicemente **funzione di trasferimento**.

Questi semplici calcoli, in particolare il confronto tra le (4.5) e (4.6), mostrano risultati che riguardano il calcolo e le proprietà della trasformata di Laplace, e ne mettono in luce il suo ruolo nello studio dei sistemi dinamici. Questi aspetti vengono qui di seguito sottolineati e successivamente ripresi ed approfonditi nei successivi paragrafi per gli aspetti connessi al calcolo.

Per quanto riguarda il calcolo e le proprietà matematiche delle trasformate vale quanto segue.

- La (4.8) fornisce direttamente l'espressione della trasformata dell'esponenziale di una matrice. Come casi particolari si ottengono dunque le espressioni delle funzioni esponenziali (quindi anche costanti)

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{(s - \alpha)} \quad \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)] = \frac{1}{s},$$

e periodiche che, in base alla formula di Eulero, si scrivono come combinazione lineare di funzioni esponenziali

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin \omega t] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right] = \dots = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}[\cos \omega t] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right] = \dots = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.\end{aligned}$$

Inoltre, se si nota che vale la seguente proprietà

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t} f(t) dt = F(s - \alpha), \quad (4.13)$$

è anche evidente il calcolo diretto delle funzioni pseudoperiodiche

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2},$$

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} \cos \omega t] = \frac{(s - \alpha)}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}.$$

- Come risulta dalla (4.12), la trasformata di Laplace di un integrale di convoluzione è pari al prodotto delle trasformate delle due funzioni coinvolte; si tratta di un risultato importante noto come **teorema della convoluzione**, alla convoluzione, operazione complessa nel dominio del tempo, corrisponde la semplice moltiplicazione nel dominio della variabile complessa; ovvero, considerate due funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$ si ha

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)]\mathcal{L}[f_2(t)] = F_1(s)F_2(s).$$

Per quanto riguarda l'uso della trasformata nello studio dei sistemi dinamici lineari valgono le seguenti considerazioni.

- Un primo aspetto riguarda il calcolo: in luogo dell'esponenziale di A si deve calcolare $(sI - A)^{-1}$; con semplici premoltiplicazioni per matrici costanti si calcolano $H(s)$, $\Psi(s)$ e $W(s)$; per il calcolo delle risposte forzate in luogo dell'integrale di convoluzione si effettua una moltiplicazione per la trasformata dell'ingresso.
- Le matrici caratteristiche del sistema dinamico hanno, nel dominio della variabile complessa, coefficienti che sono rapporti di polinomi (combinazioni lineari di leggi temporali esponenziali e pseudoperiodiche) in cui il grado del numeratore è non superiore al grado del denominatore: si tratta di funzioni che si usa chiamare **razionali proprie**. Se anche la trasformata dell'ingresso assume forme dello stesso tipo, ciò che corrisponde a numerose situazioni di interesse nello studio dei sistemi dinamici, si è già nelle condizioni di calcolare le risposte, come vedremo nel prossimo paragrafo.
- È opportuno ricordare che le radici del polinomio a numeratore di una funzione razionale sono detti **zeri** della funzione, mentre le radici del polinomio a denominatore sono detti **poli** della funzione; nel caso di sistemi a più ingressi ed uscite gli zeri del minimo comune multiplo dei polinomi a denominatore sono i **poli del sistema**. Come si evince dalla definizione e dai calcoli delle trasformate, coincidono con gli autovalori che compaiono nella risposta impulsiva $W(t)$ e, più precisamente, con le leggi temporali dei modi eccitabili ed osservabili. In s , queste leggi si riconducono a fattori del tipo: $(s - \lambda)^l$ e $((s - \alpha)^2 - \omega^2)^\rho$ con l e ρ inferiori o uguali all'ordine geometrico dell'autovalore al quale si riferiscono. Detto in termini semplici i *poli sono un sottoinsieme degli autovalori e corrispondono ai modi che sono simultaneamente eccitabili ed osservabili*.
- La funzione di trasferimento, al pari della risposta impulsiva di cui è la trasformata, è un modello del comportamento forzato del sistema; essa ha elementi che sono funzioni razionali **strettamente proprie** (il grado del numeratore è strettamente inferiore a quello del denominatore) se $D = 0$ (assenza di legame diretto ingresso-uscita). Questo fatto è collegato alla causalità del legame ingresso-uscita, ed alla **stretta causalità** dell'integrale di convoluzione, della quale si è già parlato nel capitolo precedente e che avremo occasione di precisare nel capitolo sulla realizzazione ed i modelli equivalenti.

- Il minimo comune multiplo dei polinomi a denominatore della trasformata della matrice di transizione è un fattore del polinomio caratteristico, il **polinomio minimo**, che ha la particolarità di avere tutti gli autovalori, ma ciascuno con molteplicità pari all'ordine geometrico corrispondente. Nelle altre matrici caratteristiche il minimo comune multiplo a denominatore è un ulteriore fattore del polinomio minimo, le cui radici sono in questo caso un sottoinsieme degli autovalori. Si noti infatti che la moltiplicazione di $\Phi(s)$ per C a sinistra e B a destra possono comportare cancellazioni nelle rispettive matrici. Ricordiamo che agli autovalori corrispondono leggi di moto esponenziali alle quali, a loro volta, corrispondono, in s , radici dei polinomi a denominatore. In virtù di questo, risulta chiara la corrispondenza: le radici dei minimi comuni multipli a denominatore di $H(s)$, $\Psi(s)$ e $W(s)$ sono coincidenti con gli autovalori associati a modi eccitabili, osservabili e, infine, eccitabili e osservabili (contemporaneamente), rispettivamente.

- L'espressione della risposta forzata in uscita

$$Y_f(s) = W(s)U(s)$$

comporta una semplificazione non solo sulla risoluzione dei problemi diretti, ma anche di quelli inversi. Considerato il caso di un sistema con un ingresso ed una sola uscita, è subito compreso che la $W(s)$ o la $U(s)$ sono direttamente calcolabili mediante una semplice operazione di divisione tra funzioni polinomiali. In particolare, sempre nel caso di un ingresso e un'uscita, la funzione di trasferimento è pari al rapporto in s di una qualsiasi coppia forzata: **l'operazione di deconvoluzione si riduce alla divisione**.

- Un'ultima osservazione riguarda la risposta forzata ad ingressi canonici $\delta_{-k}(t)$. Ricordando la relazione che sussiste tra essi (derivazione al decrescere di k) e applicando il teorema della derivazione, si ottiene una ulteriore verifica della (2.8); inoltre poiché

$$\mathcal{L}[\delta_{-k}(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} dt = \frac{1}{s^k}, \quad (4.14)$$

e conseguentemente

$$W_{-k}(s) = \frac{W(s)}{s^k}.$$

Prima di passare ad approfondire i diversi aspetti messi in luce nelle precedenti osservazioni, viene qui di seguito proposto un semplice esempio di calcolo delle risposte.

Esempio 4.1.1 Dato il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (1 \ 0 \ 1)x(t) \end{aligned}$$

si vogliono calcolare le risposte nello stato e in uscita a partire dallo stato iniziale $x_0 = (0 \ 0 \ 1)'$ al tempo $t_0 = 0$ e per effetto dell'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t)$.

Si ha

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s-1)(s+2)} \begin{pmatrix} (s-1)(s+2) & 0 & s-1 \\ -(s+2) & (s+1)(s+2) & 2(s+1)+1 \\ 0 & 0 & s^2-1 \end{pmatrix}$$

e quindi in questo caso il polinomio minimo coincide con quello caratteristico, cosa peraltro evidente essendo gli autovalori distinti e la molteplicità pari ad uno.
Inoltre si hanno le matrici

$$H(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(s+1)} \\ \frac{s}{(s^2-1)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Psi(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(s+1)} & 0 & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che i modi associati agli autovalori $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$ sono eccitabili, mentre quelli associati a $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_3 = -2$ sono osservabili.

Infine la funzione di trasferimento è data da

$$W(s) = \frac{1}{s+1}$$

ed è caratterizzata dal solo autovalore associato al modo che è simultaneamente eccitabile ed osservabile. Il modello forzato del sistema in oggetto non raccolge dunque tutte le informazioni relative al comportamento dinamico; esso è equivalente a quello corrispondente ad un sistema di dimensione uno con il solo autovalore $\lambda = -1$.

Per concludere con il calcolo della risposta, si ha:

$$Y(s) = Y_l(s) + Y_f(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{s(s+1)};$$

procedendo con l'espansione in frazioni parziali

$$Y_l(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \quad Y_f(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

ed antitrasformando, si ottiene:

$$y_l(t) = (e^{-2t} - e^{-t})\delta_{-1}(t) \quad y_f(t) = (1 - e^{-t})\delta_{-1}(t).$$

Nel seguito vengono approfonditi gli aspetti del calcolo nel dominio complesso e vengono stabiliti i collegamenti con l'analisi condotta nel capitolo precedente.

Esercizio 4.1.1 Dimostrare che la trasformata di Laplace è un'operazione lineare.

Esercizio 4.1.2 Dimostrare il teorema della derivata.



Soluzione Esercizi 4.1.1 e 4.1.2

4.2

La matrice di transizione nel dominio complesso

Si ricordano preliminarmente le notazioni introdotte e sviluppate in Appendice A. La matrice dinamica A , di dimensione $(n \times n)$, possiede: r autovalori reali distinti $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ con molteplicità algebrica (μ_1, \dots, μ_r) , molteplicità geometrica $(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_r)$, ordine (m_1, \dots, m_r) , rispettivamente; c coppie di autovalori complessi coniugati distinti $(\alpha_1 \pm j\omega_1, \dots, \alpha_c \pm j\omega_c)$ con molteplicità algebrica $(\gamma_1, \dots, \gamma_c)$, molteplicità geometrica $(\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_c)$, ordine (g_1, \dots, g_c) rispettivamente. Gli indici μ_i e γ_i soddisfano quindi la relazione $\mu_1 + \dots + \mu_r + 2\gamma_1 + \dots + 2\gamma_c = n$. Infine si ricorda che, se gli autovalori sono tutti distinti, le molteplicità algebriche sono uguali a quelle geometriche e pari ad uno. Se le molteplicità geometriche sono uguali a quelle algebriche (e quindi gli ordini sono pari ad uno) l'operatore è regolare e la matrice dinamica A ammette la forma diagonale. Nel caso generale le molteplicità geometriche sono inferiori a quelle algebriche e definiscono il numero di blocchi di Jordan associati all'autovalore in cui l'ordine geometrico coincide la dimensione del blocco più grande.

Dall'espressione (4.8), si ha

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{(sI - A)^n}{|sI - A|} = \frac{E(s)}{\prod_{i=1}^r (s - \lambda_i)^{m_i} \prod_{k=1}^c ((s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2)^{g_k}} = \frac{E(s)}{m(s)}$$

dove con $E(s)$ si è indicata la *matrice aggiunta*, a meno delle possibili semplificazioni di tutti i suoi termini con fattori comuni con il polinomio caratteristico. Il polinomio $m(s)$, il minimo comune multiplo dei polinomi a denominatore, è il fattore del polinomio caratteristico che resta dopo le possibili semplificazioni; esso viene denominato **polinomio minimo** ed ha la particolarità di mantenere tutte le radici del polinomio caratteristico (tutti gli autovalori), ma con molteplicità, per ciascuno degli autovalori, pari al suo *ordine*. Precisamente esso ha l'espressione:

$$m(s) = \prod_{i=1}^r (s - \lambda_i)^{m_i} \prod_{k=1}^c ((s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2)^{g_k}$$

e si differenzia dal polinomio caratteristico che, è opportuno ricordarlo, ha l'espressione:

$$d(s) = \prod_{i=1}^r (s - \lambda_i)^{\mu_i} \prod_{k=1}^c ((s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2)^{\gamma_k}.$$

Una dimostrazione indiretta del fatto che tutti gli autovalori compaiano tra gli zeri del polinomio minimo si ha osservando che se per un fissato autovalore così non fosse, allora la corrispondente legge esponenziale non comparirebbe nell'esponenziale della matrice, ciò che sappiamo non essere possibile.

4.2.1 Il caso di operatore regolare

Se ogni autovalore ha molteplicità geometrica uguale a quella algebrica, e di conseguenza ordine geometrico pari ad uno (la matrice dinamica A ammette la forma diagonale) si ha

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{E(s)}{\prod_{i=1}^r (s - \lambda_i) \prod_{k=1}^c ((s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2)}$$

che quindi ammette l'espansione in fratti semplici

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^r \frac{R_i}{s - \lambda_i} + \sum_{k=1}^c \left(\frac{\bar{R}_k}{s - \alpha_k - j\omega_k} + \frac{\bar{R}_k^*}{s - \alpha_k + j\omega_k} \right), \quad (4.15)$$

dove $\bar{R}_k = R_{ka} + jR_{kb}$ e di conseguenza $\bar{R}_k^* = R_{ka} - jR_{kb}$. Ne segue che la (4.15) si può riscrivere anche nella forma

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^r \frac{R_i}{s - \lambda_i} + \sum_{k=1}^c \frac{2R_{ka}(s - \alpha_k) + 2R_{kb}\omega_k}{((s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2)} \quad (4.16)$$

e restituisce, mediante antitrasformazione, l'espressione dell'esponenziale di matrice (2.18) nel caso di A diagonalizzabile già calcolata nel Capitolo 2.

Infatti, ricordando che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s - \alpha} \right] &= e^{\alpha t} \delta_{-1}(t) \\ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} \right] &= e^{\alpha t} \cos \omega t \delta_{-1}(t) \\ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} \right] &= e^{\alpha t} \sin \omega t \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

si ha che

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)] = \sum_{i=1}^r R_i e^{\lambda_i t} + \sum_{k=1}^c (2R_{ka} e^{\alpha_k t} \cos \omega_k t - 2R_{kb} e^{\alpha_k t} \sin \omega_k t)$$

È interessante mettere in relazione l'espressione della matrice di transizione nel dominio del tempo appena ottenuta in termini di residui, con l'espressione (2.18) ottenuta nel Capitolo 2 utilizzando gli autovettori destri e sinistri, per la quale

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{l=1}^{\mu_i} e^{\lambda_i t} u_{il} v'_{il} \\ &+ \sum_{k=1}^c \sum_{l=1}^{\gamma_k} e^{\alpha_k t} \left(\cos \omega_k t (u_{kla} v'_{kla} + u_{klb} v'_{klb}) + \sin \omega_k t (u_{kla} v'_{klb} - u_{klb} v'_{kla}) \right). \end{aligned}$$

Dal confronto delle due espressioni si ottiene immediatamente che

$$R_i = \sum_{l=1}^{\mu_i} u_{il} v'_{il} \quad (4.17)$$

mentre

$$2R_{ka} = \sum_{l=1}^{\gamma_k} (u_{kla} v'_{kla} + u_{klb} v'_{klb}), \quad 2R_{kb} = \sum_{l=1}^{\gamma_k} (u_{kla} v'_{klb} - u_{klb} v'_{kla}) \quad (4.18)$$

Le relazioni (4.17) e (4.18) ci danno le seguenti interessanti informazioni.

– Il rango di R_i nella (4.17) permette di determinare la molteplicità geometrica dell'autovalore reale che in questo caso coincide con quella algebrica e determina il numero di blocchi di dimensione unitaria associati all'autovalore.

– Dalla (4.18) si ottiene che il termine $\bar{R}_k = R_{ka} + jR_{kb}$ è pari a

$$\begin{aligned} \bar{R}_k &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\gamma_k} (u_{kla} v'_{kla} + u_{klb} v'_{klb}) + \frac{j}{2} \sum_{l=1}^{\gamma_k} (u_{klb} v'_{kla} - u_{kla} v'_{klb}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\gamma_k} (u_{kla} + j u_{kb})(v'_{kla} - j v'_{klb}) \end{aligned}$$

Infine il calcolo dei residui può essere agevolmente effettuato nel caso di fratti semplici nel seguente modo

a) **Termini relativi ad autovalori reali.** Si vuole calcolare il residuo R_i nella (4.15) relativo all'autovalore λ_i . Esso è dato da

$$R_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} [(s - \lambda_i)\Phi(s)] \quad (4.19)$$

b) **Termini relativi a coppie di autovalori complessi coniugati.** In questo caso si può fare riferimento alla (4.15) e calcolare \bar{R}_k (e di conseguenza \bar{R}_k^*) utilizzando l'espressione

$$\bar{R}_k = \lim_{s \rightarrow \alpha_k + j\omega_k} [(s - \alpha_k - j\omega_k)\Phi(s)] \quad (4.20)$$

oppure fare riferimento ai termini di secondo grado associati, presenti nella $\Phi(s)$ in (4.16), e pari a

$$\sum_{k=1}^c \frac{2R_{ka}(s - \alpha_k) - 2R_{kb}\omega_k}{(s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2} = \sum_{k=1}^c \frac{L_{ka}s + L_{kb}}{(s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2},$$

con $L_{ka} = 2R_{ka}$ e $L_{kb} = -2R_{ka}\alpha_k - 2R_{kb}\omega_k$. Fissando $2c$ valori distinti per s che non annullino alcun termine a denominatore della $\Phi(s)$, si ottengono $2c$ equazioni indipendenti, parametrizzate dagli R_i , nelle incognite L_{ka} e L_{kb} da cui si possono dedurre R_{ka} e R_{kb} . Infatti posto s_i^* , $i = 1, \dots, 2c$, i $2c$ valori distinti anzidetti

$$\begin{aligned} \Phi(s_1^*) &= \sum_{i=1}^r \frac{R_i}{s_1^* - \lambda_i} + \sum_{k=1}^c \left(\frac{L_{ka}s_1^* + L_{kb}}{(s_1^* - \alpha_k)^2 + \omega_k^2} \right) \\ &\vdots \\ \Phi(s_{2c}^*) &= \sum_{i=1}^r \frac{R_i}{s_{2c}^* - \lambda_i} + \sum_{k=1}^c \left(\frac{L_{ka}s_{2c}^* + L_{kb}}{(s_{2c}^* - \alpha_k)^2 + \omega_k^2} \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

da cui possono calcolarsi L_{ka} ed L_{kb} e di conseguenza

$$R_{ka} = \frac{L_{ka}}{2}, \quad R_{kb} = -\frac{L_{ka}\alpha_k + L_{kb}}{2\omega_k}.$$

Vengono qui di seguito presentati alcuni esempi illustrativi.

Esempio 4.2.1 Si consideri il sistema a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}u \\ y &= (1 \ 1)x \end{aligned}$$

Si vuole calcolare la matrice di transizione $\Phi(t)$.

Per il calcolo della $\Phi(t)$, si può procedere sia nel dominio del tempo che in quello complesso. In questo secondo caso

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2}.$$

Per il calcolo dei residui R_1 e R_2 si ha

$$\begin{aligned} R_1 &= \lim_{s \rightarrow -1} [(s+1)\Phi(s)] = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{s+2} \begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \\ &= \left[\frac{1}{s+2} \begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \right]_{s=-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ R_2 &= \lim_{s \rightarrow -2} [(s+1)\Phi(s)] = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{1}{s+1} \begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \\ &= \left[\frac{1}{s+1} \begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \right]_{s=-2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

R_1 ed R_2 sono matrici residue (2×2) di rango unitario poiché gli autovalori sono distinti. Si ha quindi

$$\Phi(s) = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s+2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{s+1} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{s+2}$$

e di conseguenza, antitrasformando,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

Ricordando che nel dominio del tempo, tramite il calcolo degli autovalori destri e sinistri, si sarebbe ottenuto

$$\Phi(t) = e^{-t} u_1 v'_1 + e^{-2t} u_2 v'_2,$$

risulta

$$u_1 v'_1 = R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 v'_2 = R_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il seguente esempio elementare mostra invece come possa accadere che nell'espressione di $\Phi(s)$ il polinomio a denominatore non coincida con quello caratteristico ed abbia grado $N < n$.

Esempio 4.2.2 Si consideri sistema dinamico

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= (1 \ 1)x \end{aligned}$$

Denotando $I_{2 \times 2}$ la matrice di identità, la matrice di transizione $\Phi(s)$ è data da

$$\begin{aligned} \Phi(s) = (sI - A)^{-1} &= \frac{1}{(s+1)^2} \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{(s+1)} I_{2 \times 2} \end{aligned}$$

Si tratta di una matrice di dimensione due con il solo autovalore -1 che presenta molteplicità algebrica due e ordine geometrico uno. L'ordine geometrico unitario rende conto della presenza di una legge esponenziale semplice nell'esponenziale della matrice A . Infatti, otteniamo

$$\Phi(t) = e^{-t} I_{2 \times 2} = e^{-t} u_1 v_1' + e^{-t} u_2 v_2'$$

Il prossimo esempio è volto invece a mostrare il calcolo della matrice di transizione nel caso di presenza di autovalori complessi coniugati.

Esempio 4.2.3 Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= (1 \ 0 \ 1)x.\end{aligned}$$

Per il calcolo della matrice di transizione si ha

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \begin{pmatrix} s+1 & -1 & 2 \\ 1 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{(s+2)((s+1)^2+1)} \begin{pmatrix} (s+1)(s+2) & s+2 & -2(s+1) \\ -(s+2) & (s+1)(s+2) & 2 \\ 0 & 0 & (s+1)^2+1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{R_1}{s+2} + \frac{L_{1a}s + L_{1b}}{(s+1)^2+1}\end{aligned}$$

Si ha innanzitutto per l'autovalore reale

$$\begin{aligned}R_1 &= \lim_{s \rightarrow -2} [(s+2)\Phi(s)] = \left[\frac{\begin{pmatrix} (s+1)(s+2) & s+2 & -2(s+1) \\ -(s+2) & (s+1)(s+2) & 2 \\ 0 & 0 & (s+1)^2+1 \end{pmatrix}}{((s+1)^2+1)} \right]_{s=-2} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Per il calcolo del termine associato alla coppia di autovalori complessi coniugati si procede nel seguente modo. Innanzitutto dal denominatore si ottiene facilmente che

$$(s - \alpha_1)^2 + \omega_1^2 = s^2 - 2\alpha_1 s + \alpha_1^2 + \omega_1^2 = (s+1)^2 + 1 = s^2 + 2s + 2$$

da cui per l'identità dei polinomi, eguagliando i termini di pari grado (i coefficienti di ordine massimo sono uguali) si ottiene $\alpha_1 = -1$ e di conseguenza $\omega_1 = 1$.

Ora, poiché si è in presenza di una sola coppia di autovalori complessi coniugati, si scelgono due valori di s che non annullino il denominatore di $\Phi(s)$. Una possibile scelta è per esempio $s = 0$ ed $s = -1$. Si hanno quindi le due relazioni indipendenti

$$\begin{aligned}\frac{R_1}{2} + \frac{L_{1b}}{2} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ R_1 + L_{1b} - L_{1a} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}L_{1a} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{1b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ R_{1a} &= \frac{L_{1a}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{1b} = -\frac{L_{1a}\alpha_1 + L_{1b}}{2\omega_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= R_1 e^{-2t} + R_{1a} e^{\alpha_1 t} \cos \omega_1 t + R_{1b} e^{\alpha_1 t} \sin \omega_1 t \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-t} \cos t + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-t} \sin t.\end{aligned}$$

4.2.2 Il caso generale

Come si è visto nel Capitolo 2, in presenza di autovalori con ordine geometrico non unitario, le leggi di moto dei modi naturali sono più complesse. Questo è quanto ovviamente risulta anche dal calcolo in s , infatti l'espansione in frazioni parziali è composta non solo da addendi con polinomi di primo grado a denominatore (fratti semplici), ma anche da addendi con denominatore di grado superiore ad uno (fratti composti) che sono le trasformate di funzioni esponenziali a coefficienti polinomiali in t . È questo il caso che si presenta quando la matrice A non è diagonalizzabile. L'ordine geometrico definisce proprio la dimensione del blocco di Jordan più grande associato al corrispondente autovalore.

Come evidenziato all'inizio del capitolo, nel caso generale la $\Phi(s)$ è data da

$$\Phi(s) = \frac{E(s)}{\prod_{i=1}^r (s - \lambda_i)^{m_i} \prod_{k=1}^c (s - \alpha_k - j\omega_k)^{g_k} (s - \alpha_k + j\omega_k)^{g_k}}$$

dove gli m_i ed i g_k rappresentano gli ordini geometrici relativi agli autovalori reali e alle coppie complesse coniugate rispettivamente.

Per poter antitrasformare la $\Phi(s)$ è di nuovo necessario considerare lo sviluppo in frazioni parziali. In questo caso però al termine a denominatore $(s - \lambda_i)^{m_i}$ saranno associati m_i residui, così come al termine $[(s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2]^{g_k}$ saranno associati $2g_k$ residui, che tuttavia non portano ad un'immediata soluzione. Si ha che

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \frac{E(s)}{\prod_{i=1}^r (s - \lambda_i)^{m_i} \prod_{k=1}^c ((s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2)^{g_k}} \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{m_i} \frac{R_{ij}}{(s - \lambda_i)^j} + \sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{g_k} \frac{L_{kaj}s + L_{kbj}}{[(s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2]^j}\end{aligned}\quad (4.22)$$

Il calcolo dei residui R_{ij} si effettua utilizzando la relazione

$$R_{ij} = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \frac{1}{(m_i - j)!} \frac{d^{m_i-j}}{ds^{m_i-j}} ((s - \lambda_i)^{m_i} \Phi(s)) \quad (4.23)$$

dove m_i è l'ordine geometrico corrispondente all'autovалore λ_i .

Per il calcolo dei termini associati alle coppie di autovalori complessi, si può considerare che nella (4.22)

$$\sum_{j=1}^{g_k} \frac{L_{kaj}s + L_{kbj}}{[(s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2]^j} = \sum_{j=1}^{g_k} \left(\frac{\bar{R}_{kj}}{[(s - \alpha_k - j\omega_k)^2]^j} + \frac{\bar{R}_{kj}^*}{[(s - \alpha_k + j\omega_k)^2]^j} \right)$$

e quindi calcolare i termini \bar{R}_{kj} (e di conseguenza \bar{R}_{kj}^*) usando l'espressione

$$\bar{R}_{kj} = \lim_{s \rightarrow \alpha_k + j\omega_k} \frac{1}{(g_k - j)!} \frac{d^{g_k-j}}{ds^{g_k-j}} ((s - \alpha_k - j\omega_k)^{g_k} \Phi(s))$$

oppure fissare $2 \sum_{k=1}^c g_k$ valori distinti s_j^* di s che non annullino il denominatore di $\Phi(s)$ in modo da ottenere $2 \sum_{k=1}^c g_k$ equazioni indipendenti nelle incognite L_{kaj} e L_{kbj} , da cui utilizzando le relazioni

$$R_{kaj} = \frac{L_{kaj}}{2}, \quad R_{kbj} = -\frac{L_{kaj}\alpha_k + L_{kbj}}{2\omega_k}.$$

Per antitrasformare le espressioni risultano più complesse essendo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!} e^{\alpha t}\right] &= \frac{1}{(s - \alpha)^{k+1}} \\ \mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!} \sin(\omega t)\right] &= \frac{\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k+1}{1+2i} (-1)^i s^{k-2i} \omega^{2i+1}}{(s^2 + \omega^2)^{k+1}} \\ \mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!} \cos(\omega t)\right] &= \frac{\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \binom{k+1}{2i} (-1)^i s^{k+1-2i} \omega^{2i}}{(s^2 + \omega^2)^{k+1}}.\end{aligned}\quad (4.24)$$

In particolare mentre per i termini relativi a poli reali il numeratore è sempre costante, nel caso di poli complessi coniugati si ritrovano a numeratore dei polinomi in s per cui il processo di antitrasformazione è più complesso.

Esempio 4.2.4 Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}u \\ y &= (1 \quad 1)x\end{aligned}$$

La matrice dinamica A è di dimensione due con il solo autovalore -1 che quindi presenta molteplicità algebrica due e ordine geometrico due. In questo caso l'esponenziale della matrice vede la comparsa di una legge esponenziale non semplice nell'elemento fuori dalla diagonale.

La matrice di transizione $\Phi(s)$ è data da

$$\begin{aligned}\Phi(s) = (sI - A)^{-1} &= \frac{1}{(s+1)^2} \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{(s+1)} I_{2 \times 2} + \frac{1}{(s+1)^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\Phi(t) = e^{-t} I_{2 \times 2} + t e^{-t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vuole concludere il paragrafo confrontando gli Esempi 4.2.2 e 4.2.4. In entrambi i casi la matrice A presenta un autovalore $\lambda_1 = -1$, con molteplicità algebrica $\mu_1 = 2$. Le matrici di transizione corrispondenti sono tuttavia profondamente diverse. Nel primo caso infatti (Esempio 4.2.2) l'autovalore λ_1 è caratterizzato da un ordine geometrico unitario. Di conseguenza la matrice A è diagonalizzabile e le leggi di moto dei modi naturali associati sono quelle semplici, esponenziali in questo caso. La matrice di transizione si calcola facilmente ed è caratterizzata dalla legge e^t ottenuta mediante antitrasformazione. Nel secondo caso (Esempio 4.2.4), λ_1 è caratterizzato da un ordine geometrico maggiore di uno, pertanto le leggi di moto dei modi naturali sono più complesse, a coefficienti polinomiali in t . Si tratta appunto del caso in cui la matrice A non è diagonalizzabile. Nuovamente si ottiene facilmente la matrice di transizione che in questo caso è caratterizzata dalle leggi temporali e^t e te^t .

4.3

I modi naturali nel dominio complesso

Nel presente paragrafo vengono messe in relazione le espressioni dei modi naturali in s con i risultati ottenuti nel dominio del tempo.

4.3.1 Il caso di operatore regolare

Con riferimento ad un operatore regolare, l'evoluzione libera si ottiene moltiplicando la (4.16) per lo stato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Resta subito in evidenza l'espressione dei modi naturali aperiodici

$$\frac{R_i}{s - \lambda_i} x_0$$

dove R_i è dato dalla (4.17) e di rango μ_i ; in modo analogo, l'espressione dei modi naturali pseudoperiodici è data da

$$\frac{2R_{ka}(s - \alpha_k) - 2R_{kb}\omega_k}{(s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2} x_0.$$

dove i residui hanno le espressioni (4.18) e rango pari a γ_k .

Nel caso in cui l'operatore sia regolare (molteplicità algebrica uguale a quella geometrica), in presenza di leggi temporali coincidenti, si ottengono le relazioni seguenti, che mettono bene in luce la corrispondenza con lo studio fatto nel dominio del tempo:

$$\begin{aligned} R_i x_0 &= c_i u_i \\ \frac{2R_{ka}(s - \alpha_k) - 2R_{kb}\omega_k}{(s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2} x_0 &= \frac{m_k((s - \alpha_k)\sin\varphi_k + \omega_k \cos\varphi_k)}{(s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2} u_{ka} \\ &\quad + \frac{m_k((s - \alpha_k)\cos\varphi_k - \omega_k \sin\varphi_k)}{(s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2} u_{kb} \end{aligned}$$

ove si è tenuto conto delle definizioni dei parametri caratteristici dei modi naturali. Infatti, antitrasformando secondo Laplace si ottengono i modi aperiodici e pseudoperiodici

$$c_i e^{\lambda_i t} u_i \quad m_k e^{\alpha_k t} (\sin(\omega_k t + \varphi_k) u_{ka} + \cos(\omega_k t + \varphi_k) u_{kb})$$

Rispetto alle costanti di tempo, alle pulsazioni naturali e agli smorzamenti si ottiene, con semplici calcoli:

$$(sI - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{R_i \tau_i}{1 + \tau_i s} + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\frac{2R_{ka}}{\omega_{nk}} \left(\frac{s}{\omega_{nk}} + \zeta_k \right) - \frac{2R_{kb}}{\omega_{nk}} \sqrt{1 - \zeta_k^2}}{1 + \frac{2\zeta_k}{\omega_{nk}} s + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2}}$$

Esempio 4.3.1 Si consideri il modello del semplice circuito elettrico studiato in Sezione 1.1.2, con

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{R_1 C} & \frac{-1}{C} \\ L & -\frac{R_2}{L} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \quad R_2)$$

per cui otteniamo

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^2 + \left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1 C}\right)s + \frac{1}{LC}} \begin{pmatrix} s + \frac{R_2}{L} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & s + \frac{1}{R_1 C} \end{pmatrix}$$

da cui

$$W(s) = \frac{\frac{R_2}{R_1 CL}}{s^2 + \left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1 C}\right)s + \frac{1}{LC}}$$

e, posti $LC = 1$, $\frac{R_1 R_2 C + L}{R_1 LC} = 1$, la funzione di trasferimento diventa

$$W(s) = \frac{\frac{R_2}{R_1}}{1 + s + s^2}$$

con poli

$$s_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4.3.2 Il caso generale

Nel caso generale l'evoluzione libera è ottenuta moltiplicando la (4.22) lo stato iniziale x_0 . Se ne evince che:

- l'espressione dei modi naturali aperiodici multipli associati a ciascun autovalore λ_i di ordine geometrico m_i è

$$\sum_{j=1}^{m_i} \frac{R_{ij}x_0}{(s - \lambda_i)^j}$$

che antitrasformati restituiscono le (2.27);

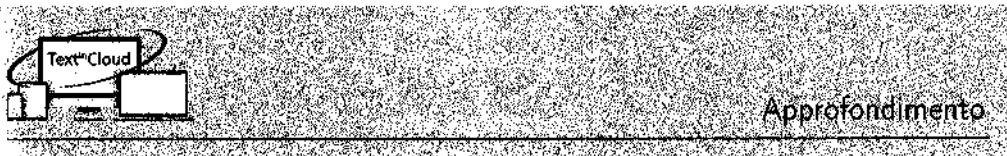
- l'espressione dei modi naturali multipli pseudoperiodici associati a ciascuna coppia $(\alpha_k \pm \omega_k)$ di ordine geometrico g_k è

$$\sum_{j=1}^{g_k} \frac{2R_{ka_j}x_0(s - \alpha_k) - 2R_{kb_j}x_0\omega_k}{[(s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2]^j}$$

che antitrasformati restituiscono le (2.29).

Per identità con le espressioni calcolate nel dominio del tempo, si ottiene il legame tra i residui R_{ik} ed i vettori \mathbf{c}_i , le componenti dello stato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ negli autospazi. Si ottiene

$$\mathbf{c}_i = R_{i1}x_0 \quad (A - \lambda_i I)\mathbf{c}_i = R_{i2}x_0 \quad (A - \lambda_i I)^{m_i-1}\mathbf{c}_{m_{i-1}} = R_{i,m_i}x_0.$$



4.4

La funzione di trasferimento

La funzione di trasferimento è la trasformata di Laplace della risposta impulsiva e come tale essa è il modello del comportamento forzato del sistema nella variabile complessa s .

Il calcolo della risposta forzata a partire dalla risposta impulsiva (nel dominio del tempo) richiede il calcolo dell'integrale di convoluzione

$$y_f(t) = W(t) * u(t) = \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau; \quad (4.25)$$

a partire dalla funzione di trasferimento, invece, richiede il calcolo della trasformata dell'ingresso, una semplice operazione di prodotto e la successiva antitrasformazione.

$$y_f(t) = \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau = \mathcal{L}^{-1}[Y_f(s)] = \mathcal{L}^{-1}[W(s)U(s)].$$

A partire da un modello del sistema del tipo rappresentazione con lo spazio di stato (2.1), la $W(t)$ e la $W(s)$ ammettono le note espressioni:

$$W(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) \quad W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Bisogna però tenere presente che il legame forzato ingresso-uscita di un sistema lineare dinamico (quindi $W(t)$ e, equivalentemente, $W(s)$) può anche essere individuato a partire da esperimenti ingresso-uscita oppure mediante tecniche ad hoc.

Formalmente, nel caso di un sistema ad un ingresso ed un'uscita, è sufficiente un esperimento per calcolare la $W(s)$ sfruttando la relazione

$$W(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)}.$$

Se l'ingresso è l'impulso unitario $\delta(t)$, poiché $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$, la trasformata dell'uscita forzata è proprio la funzione di trasferimento.

Per sistemi a più ingressi più uscite, la caratterizzazione delle componenti della matrice delle funzioni di trasferimento permette di definire gli esperimenti che si devono condurre per calcolare la $W(s)$. Dall'espressione della matrice delle funzioni di trasferimento

$$W(s) = \begin{pmatrix} w_{11}(s) & \dots & w_{1p}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{q1}(s) & \dots & w_{qp}(s) \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

si deduce che la componente i -esima dell'uscita $y_i(s)$ è data da

$$y_i(s) = w_{i1}(s)u_1(s) + \dots + w_{ip}(s)u_p(s), \Rightarrow w_{ij}(s) = \frac{y_i(s)}{u_j(s)} \Big|_{u_k \neq j=0} \quad (4.27)$$

avendo posto $y = (y_1 \dots y_q)' \in \mathbb{R}^q$ e $u = (u_1 \dots u_p)' \in \mathbb{R}^p$.

In realtà, la procedura di costruzione mediante esperimenti ingresso-uscita ora delineata, corrisponde, nel dominio del tempo, a calcolare la risposta impulsiva mediante operazioni di deconvoluzione. Una tale procedura di identificazione è di non facile impiego nella pratica per la complessità intrinseca delle misure in regime dinamico e delle elaborazioni ad esse collegate in particolare in presenza di errori ed incertezze di misura. Vedremo nel Capitolo 5 che esiste una classe di ingressi a partire dalla quale è possibile definire una procedura sperimentale semplice e robusta rispetto ad incertezze di misura per l'identificazione della funzione di trasferimento.

Ma se la funzione di trasferimento rappresenta un modello che può essere calcolato indipendentemente dal modello rappresentazione con lo stato, è possibile ricostruire quest'ultimo dalla $W(s)$? Questo problema che avremo occasione di discutere più precisamente nel seguito si ricollega alla parte costruttiva del più generale problema della realizzazione di un funzionale lineare stazionario causale di cui si è fatto cenno nel Paragrafo 2.1. Si può comunque comprendere alla luce dello studio condotto nel capitolo precedente ed in particolare nel Paragrafo 2.4 che le informazioni contenute nella funzione di trasferimento sono parziali in quanto i suoi poli coincidono con gli autovalori associati ai modi eccitabili ed osservabili; il passaggio ad una rappresentazione con lo stato calcolata a partire da essa non potrà quindi recuperare eventuali autovalori associati a modi che possiamo considerare, nel contesto, *nascosti*.

Un'ulteriore puntualizzazione sulla terminologia: ogni elemento della matrice delle funzioni di trasferimento è una funzione razionale caratterizzata da poli e zeri; i **poli del sistema** sono gli zeri del polinomio comune denominatore della funzione di trasferimento; gli **zeri del sistema** (anche detti zeri di trasmissione) sono i valori in corrispondenza dei quali si annulla la funzione di trasferimento e coincidono con i valori $\tilde{s} \in \mathbb{C}$ che annullano il determinante della **matrice di sistema**

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{s}I - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Vedremo quale sia il loro significato nella caratterizzazione delle evoluzioni formate in uscita.

4.4.1 Modelli ingresso-uscita

Per quanto riguarda il calcolo diretto del modello del legame forzato, di cui si è fatto cenno nel paragrafo precedente, è importante osservare che esso può essere ottenuto seguendo un approccio modellistico, cosiddetto a scatola trasparente (lo stesso impiegato per calcolare le rappresentazioni con lo stato), in cui sono note le componenti, i rispettivi modelli e le interconnessioni tra di esse. Procedure di questo tipo, fondate sulla manipolazione di grafi, sono disponibili per la modellistica di sistemi meccanici ed elettrici. Tra queste la più nota nell'ingegneria è il **metodo delle impedenze complesse**, caratteristico della teoria dei circuiti. Con riferimento a tale metodo è infatti noto che, associata ad ogni componente un'impedenza complessa e costruito il grafo delle connessioni del circuito, opportune manipolazioni definiscono una procedura sistematica di calcolo dell'impedenza complessa del circuito, che non è altro che la funzione di trasferimento.

Un ulteriore aspetto modellistico che vale qui la pena mettere in luce riguarda il passaggio da un modello differenziale che descrive il collegamento delle grandezze di uscita agli ingressi mediante sistemi di equazioni differenziali tra le variabili ad essi associate. Nel contesto lineare stazionario, il problema può essere formulato nei seguenti termini: assegnato un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti che descrive i legami tra le p variabili di ingresso e le q variabili di uscita, è possibile, ed eventualmente sotto quali condizioni, associare a queste una rappresentazione con lo stato del tipo (2.1)? È questo ad esempio il caso del primo modello costruito nel Paragrafo 1.1.1; In quel caso, la soluzione consisteva nell'associare lo stato alla variabile di uscita (la posizione) e alla sua derivata (la velocità). Ma quale è la soluzione se la relazione fosse stata la seguente

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_1\dot{u}(t) + b_0u(t)?$$

Ebbene un'idea ce la suggerisce il teorema della derivazione in Laplace: la trasformata del rapporto tra uscita e ingresso in s è pari alla funzione di trasferimento e risulta essere una funzione razionale propria. Se si effettua la trasformata di Laplace della precedente relazione e si assumono le derivate delle variabili nulle in zero si ottiene

$$(s^2 + a_1s + a_0)Y(s) = (b_1s + b_0)U(s)$$

ed il rapporto tra $Y(s)$ e $U(s)$ è proprio una funzione razionale propria. Non è allora la realizzazione di tale funzione che ci dà la rappresentazione con lo stato cercata? Vedremo che è proprio così, e lo studente non avrà difficoltà nel verificare che procedendo come indicato nel caso dell'esempio del sistema massa-molla-smorzatore si ottiene:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + \frac{b}{M}s + \frac{k}{M}}.$$

Vedremo più precisamente nel Capitolo 7 sulla teoria della realizzazione come procedere per costruire una rappresentazione con lo stato che nel caso generale di p ingressi e q uscite esiste se vale la seguente condizione:

posto

$$P(d)y(t) = Q(d)u(t) \quad (4.28)$$

ove $P(d)$ e $Q(d)$ sono matrici, $(q \times q)$ e $(q \times p)$ rispettivamente, i cui elementi sono polinomi a coefficienti costanti nella indeterminata formale d , che rappresenta l'operazione di derivazione, il legame differenziale tra i due vettori di variabili ammette una rappresentazione con lo stato del tipo (2.1), se e solo se

$$P^{-1}(d)Q(d) \quad (4.29)$$

è una matrice di funzioni razionali proprie nell'indeterminata d . Si noti che la stessa equazione (refrdiff) può essere impiegata per rappresentare un legame ingresso-uscita forzato nel tempo discreto assegnato mediante un sistema di equazioni alle differenze; per fare questo è sufficiente interpretare l'indeterminata d come un operatore di anticipo unitario. Si noti che sostituendo s (o z) all'indeterminata formale d si ottiene la trasformata di Laplace, (o la \mathcal{Z} -Trasformata, come vedremo), (e dunque la funzione di trasferimento) del legame differenziale lineare assegnato.

Esempio 4.4.1 Si consideri il seguente legame differenziale in ingresso-uscita

$$\begin{pmatrix} d^2 + 1 & 1 \\ d + 2 & d + 1 \end{pmatrix} y(t) = \begin{pmatrix} d & 1 \\ d + 1 & d \end{pmatrix} u(t).$$

Esso, come vedremo nel Capitolo 7, ammette una rappresentazione lineare e tempo-invariante in quanto

$$P^{-1}(d)Q(d) = \frac{1}{d^3 + d^2 - 1} \begin{pmatrix} d^2 - 1 & 1 \\ d^3 - d + 1 & d^3 - 2 \end{pmatrix}$$

è una matrice di funzioni razionali nell'indeterminata d .

4.4.2 Le rappresentazioni della funzione di trasferimento

A conclusione del paragrafo si desidera mettere in evidenza tre diverse espressioni con cui viene rappresentata la matrice delle funzioni di trasferimento. La scelta su quale espressione usare ricade sulle caratteristiche che si intende mettere in luce. Più precisamente la funzione di trasferimento viene a seconda dei contesti espressa in una delle tre rappresentazioni che vengono descritte nel seguito.

- **Rapporto di polinomi** - In questo caso per una matrice di dimensioni $(q \times p)$ si utilizza l'espressione

$$W(s) = \frac{B_0 + B_1 s + \dots + B_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + s^n} \quad (4.30)$$

dove B_i sono matrici di coefficienti di dimensione $(q \times p)$.

Esempio 4.4.2 Si consideri la matrice di funzioni di trasferimento

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{s-1}{s^2+2s} \\ \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix}$$

La sua rappresentazione come rapporto di polinomi si ottiene considerando il denominatore comune e quindi lo sviluppo in potenze di s del numeratore. Pertanto

$$\begin{aligned} W(s) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{s-1}{s^2+2s} \\ \frac{1}{s+2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} s(s+2) & (s^2-1) \\ s(s+1) & 0 \end{pmatrix}}{s(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}s + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}s^2}{s^3 + 3s^2 + 2s} \end{aligned}$$

- **Rappresentazione poli-zeri** - La rappresentazione poli-zeri del generico elemento della funzione di trasferimento, alla funzione stessa per sistemi ad un ingresso ed un'uscita, adotta l'espressione in forma fattorizzata del numeratore e del denominatore (eventualmente a coefficienti complessi):

$$W(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k' \frac{\prod_{i=1}^{l'} (s - z_i)}{\prod_{j=1}^N (s - p_j)} \quad (4.31)$$

oppure (a coefficienti reali)

$$W(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k' \frac{\prod_{i=1}^{l'} (s - z_i) \prod_{k=1}^{p'} (s^2 + c_k s + d_k)}{\prod_{j=1}^l (s - p_j) \prod_{k=1}^p (s^2 + a_k s + b_k)} \quad (4.32)$$

dove $l' + \rho' = m$ e $l + \rho = N$ e i polinomi di secondo grado a numeratore e denominatore sono associati a coppie di zeri complessi coniugati. I poli del denominatore sono parte degli autovalori reali ($p_j = \lambda_j$) e delle coppie dei complessi coniugati ($s^2 + a_k s + b_k = ((s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2)$).

- **Forma di Bode** - In questo caso, sempre con riferimento al generico termine della funzione di trasferimento, i polinomi che caratterizzano il numeratore ed il denominatore dei coefficienti della matrice di trasferimento vengono riscritti mettendo in evidenza, per i termini a numeratore e a denominatore, parametri analoghi alle costanti di tempo, pulsazioni naturali e coefficienti di smorzamento introdotti con riferimento agli autovalori nel Capitolo 2 (Paragrafo 2.3.2).

Più precisamente si consideri il polinomio $D(s)$ e la sua fattorizzazione a coefficienti reali, impiegata in (4.32), e data da

$$\begin{aligned} D(s) &= h \prod_{i=1}^l (s - p_i) \prod_{k=1}^{\rho} (s^2 + a_k s + b_k) \\ &= hs^v \prod_i (s - \lambda_i) \prod_k (s - \alpha_k - j\omega_k)(s - \alpha_k + j\omega_k) \\ &= hs^r \prod_i (-\lambda_i) \prod_k (\omega_{nk}^2) \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_k \left(1 + \frac{2\zeta_k}{\omega_{nk}} s + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2} \right). \end{aligned}$$

Nella rappresentazione qui sopra, si è messa in evidenza l'eventuale presenza di v poli in zero e sono stati ridenominati i poli impiegando i parametri impiegati per gli autovalori. In particolare, ciascun λ_i e $\alpha_k \pm j\omega_k$, è stato riscritto in funzione dei parametri caratteristici del modo naturale corrispondente e, quindi, $\lambda_i = -\frac{1}{\tau_i}$ (in funzione della costante di tempo) e $\alpha_k \pm j\omega_k = -\omega_{nk}\zeta_k \pm \sqrt{\omega_{nk}^2 - \alpha_k^2}$ (in funzione di smorzamento e pulsazione naturale). Procedendo in maniera analoga per il polinomio a numeratore e indicando con l'apice i parametri corrispondenti nei fattori di ordine due, a seguito di eventuali semplificazioni, il generico elemento della funzione di trasferimento assume la forma

$$W(s) = K \frac{\prod_i (1 + \tau_i s) \prod_k \left(1 + \frac{2\zeta_k}{\omega_{nk}} s + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2} \right)}{s^r \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_k \left(1 + \frac{2\zeta_k}{\omega_{nk}} s + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2} \right)} \quad (4.33)$$

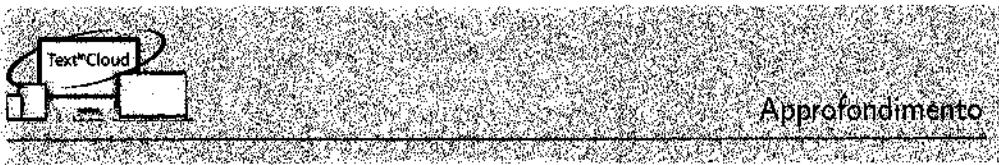
dove si è indicato con r l'eccesso dei poli sugli zeri in zero.

La (4.33) è la *forma di Bode*; in essa ritroviamo le costanti di tempo τ_i , associate ai poli reali, lo smorzamento ζ_k e la pulsazione naturale ω_{nk} alle coppie di poli complessi coniugati; inoltre la presenza di un eventuale eccesso di poli in zero s^r , ed il parametro K che prende il nome di **guadagno**.

Il guadagno è il fattore costante che compare nella forma di Bode della funzione di trasferimento.

Esso è definito per ogni elemento della funzione di trasferimento, come si può verificare esso è pari al valore che assume la $W(s)$ in $s=0$ dopo avere eliminato l'eventuale eccesso di poli in zero.

Nella forma di Bode i termini corrispondenti a poli e zeri reali non nulli sono detti *termini binomi*, quelli corrispondenti a coppie di poli e zeri complessi coniugati sono detti *termini trinomi*, il termine a denominatore corrispondente a un polo in zero è detto *termine monomio*. La presenza di poli in zero nella funzione di trasferimento, come messo in luce nel seguito, corrisponde alla presenza di azioni di integrazione dell'ingresso da parte del sistema.



4.5

La risposta forzata nel dominio complesso

In questo paragrafo, vengono sottolineati gli aspetti salienti legati al calcolo della risposta forzata anche rispetto di classi di funzioni in ingresso significative.

La funzione di trasferimento si assume assegnata nella sua forma rapporto di polinomi (4.30) con il polinomio a denominatore, di grado $N \leq n$, corrispondente il minimo comune multiplo dei polinomi a denominatore dei termini $w_{ij}(s)$. Il polinomio a denominatore sarà espresso nella sua forma fattorizzata. La funzione di trasferimento è quindi assunta nella forma

$$W(s) = \frac{B_0 + B_1 s + \cdots + B_m s^m}{\prod_{i=1}^{\rho} (s - p_i)^{l_i} \prod_{k=1}^{\theta} ((s - \alpha_k)^2 - \omega_k^2)^{h_k}} \quad (4.34)$$

con ρ poli reali $p_i \in \mathbb{R}$, ciascuno con molteplicità l_i , e θ coppie di poli complessi coniugati $\alpha_k \pm j\omega_k \in \mathbb{C}$, ciascuno con molteplicità h_k , e tali che $(l_1 + \cdots + l_\rho) + 2(h_1 + \cdots + h_\theta) = N$. Infine, useremo la lettera minuscola per i coefficienti a numeratore per rappresentare il caso di un ingresso e un'uscita ($p = q = 1$). In base a tutto quello che sappiamo, i poli sono un sottoinsieme degli autovalori della matrice dinamica A . Quindi, la molteplicità con cui ciascun polo è radice del denominatore di $W(s)$ è non superiore all'ordine geometrico con cui è autovalore di A (i.e., $l_i \leq m_i$ e $h_k \leq g_k$).

Vale la pena di precisare subito il significato dei poli in zero che nella forma di Bode vengono espressamente messi in evidenza. Ciascuno di essi corrisponde

ad un'azione di integrazione, da parte del sistema, sull'ingresso. Si consideri ad esempio la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1}{s}.$$

Come è immediato verificare essa corrisponde alla rappresentazione con lo stato di dimensione uno con

$$A = 0 \quad B = 1 \quad C = 1 \quad D = 0$$

a cui corrisponde uscita forzata

$$y_f(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau.$$

Ciò premesso il calcolo della risposta forzata in s si realizza attraverso il calcolo della trasformata dell'ingresso e successivamente dell'antitrasformata del suo prodotto per la funzione di trasferimento. L'espansione in frazioni parziali è a questo proposito la procedura da impiegare se, come accade in numerose applicazioni significative, anche la trasformata dell'ingresso è una funzione razionale.

Esempio 4.5.1 Si consideri un sistema con funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Si vuole calcolare la risposta forzata all'ingresso costante $u(t) = c\delta_{-1}(t)$, la cui trasformata è quindi $U(s) = \frac{c}{s}$.

Nel dominio complesso si ha

$$Y_f(s) = \frac{c}{s(s+1)} = \frac{r_0}{s} + \frac{r_1}{s+1}$$

Antitrasformando si ottiene quindi

$$y_f(t) = (r_0 + r_1 e^{-t})\delta_{-1}(t) \quad \text{con} \quad r_0 = c \quad \text{e} \quad r_1 = -c.$$

Si vuole ora calcolare la risposta forzata all'ingresso Se $u(t) = \sin at\delta_{-1}(t)$, la cui trasformata è $U(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$.

Nel dominio complesso risulta quindi

$$Y_f(s) = \frac{a}{(s+1)(s^2 + a^2)} = \frac{(d_0 + d_1 s)}{s^2 + a^2} + \frac{r_1}{s+1}$$

per cui antitrasformando si ottiene

$$y_f(t) = \left(\frac{d_0}{a} \sin at + d_1 \cos at + r_1 e^{-t} \right) \delta_{-1}(t) \quad \text{con} \quad d_0 = -d_1 = r_1 = \frac{a}{1+a^2}.$$

Come mostra anche il precedente esempio il calcolo non è difficile nel caso in cui i poli della funzione di trasferimento siano semplici: l'espansione in frazioni parziali (anche detta in fratti semplici) può essere ottenuta per identificazione del numeratore della forma espansa sotto razionalizzazione, con quello della funzione data, anche tenendo presente quanto già evidenziato nel Paragrafo 4.2, ovvero che:

a) per i residui del fratto associato ad un polo reale si ha

$$r_i = \lim_{s \rightarrow p_i} [(s - p_i) Y_f(s)] \quad (4.35)$$

b) per quelli relativi a una coppia di poli complessi $(\alpha_k \pm \omega_k)$, calcolato

$$r_k = r_{ka} + j r_{kb} = \lim_{s \rightarrow \alpha_k + j \omega_k} [(s - \alpha_k - j \omega_k) Y_f(s)]$$

si può riscrivere il relativo fratto nella forma

$$\frac{r_k}{(s - \alpha_k - \omega_k)} + \frac{r_k^*}{(s - \alpha_k + \omega_k)} = \frac{2r_{ka}(s - \alpha_k) - 2r_{kb}\omega_k}{(s - \alpha_k)^2 + \omega_k^2}$$

per poi avere, antitrasformando

$$2e^{\alpha_k t} (r_{ka} \cos \omega_k t - r_{kb} \sin \omega_k t).$$

In presenza di poli multipli si ricorda che è invece necessario tenere conto del fatto che l'espansione in frazioni parziali di una funzione razionale, $f(s)$, presenta *fratti composti*; ciò vuol dire che in presenza di un fattore a denominatore alla potenza k vi saranno nell'espansione in frazioni parziali k fratti, il primo con un denominatore semplice ed il k -esimo con un denominatore alla k -esima potenza.

A titolo di esempio e senza perdita di generalità in corrispondenza di un polo reale in p_i di ordine k si ha un'espansione del tipo

$$f(s) = \frac{n(s)}{\dots (s - p_i)^k \dots} = \dots + \frac{r_{i1}}{(s - p_i)} + \dots + \frac{r_{ik}}{(s - p_i)^k} + \dots$$

dove i residui possono essere calcolati per identificazione dei polinomi a numeratore oppure mediante la formula

$$r_{ij} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{1}{(k-j)!} \frac{d^{k-j}}{ds^{k-j}} ((s - p_i)^k f(s)) \quad j = 1, \dots, k. \quad (4.36)$$

Per le coppie di poli complessi coniugati si potrà sviluppare il calcolo nello stesso modo lavorando nel dominio dei numeri complessi.

È allora chiaro che per calcolare la risposta nel tempo bisogna essere in grado di calcolare le antitrasformate di termini del tipo

$$\frac{r}{(s - p)^k}. \quad (4.37)$$

Ci viene in aiuto la seguente proprietà della trasformata di Laplace: alla **moltiplicazione per t** delle funzione $f(t)$ corrisponde la derivata della $F(s)$ cambiata di segno

$$\mathcal{L}[t f(t)] = -\frac{d}{ds} F(s) \quad (4.38)$$

Applicando la (4.38) k volte alla funzione $f(t) = e^{pt}$ si ottiene

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!} e^{pt}\right] = \frac{1}{(s-p)^{k+1}}.$$

È dunque chiaro che l'antitrasformata di (4.37) è

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-p)^k}\right] = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{pt} \delta_{-1}(t). \quad (4.39)$$

Esempio 4.5.2 Si consideri un sistema con funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s^2 + 5}{(s+1)^3}$$

per il quale si vuole calcolare la risposta forzata al gradino.

Nel dominio complesso si ha quindi

$$Y_f(s) = \frac{s^2 + 5}{s(s+1)^3} = \frac{r_0}{s} + \frac{r_1}{(s+1)} + \frac{r_2}{(s+1)^2} + \frac{r_3}{(s+1)^3}$$

I coefficienti r_i , $i = 0, \dots, 3$, essendo associati a poli reali, sono tutti costanti e possono calcolarsi facilmente con le formule (4.19), (4.23). Risulta infatti

$$r_0 = 5, r_1 = -5, r_2 = 4, r_3 = -6.$$

Ne segue che

$$y_f(t) = \left(5 - 5e^{-t} + 4te^{-t} - 6\frac{t^2}{2}e^{-t} \right) \delta_{-1}(t)$$

Esempio 4.5.3 Si consideri un sistema con funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s^3 + s + 5}{(s^2 + s + 1)^2}$$

per il quale si vuole calcolare la risposta forzata al gradino.

In questo caso la risposta forzata nel dominio complesso è data da

$$Y_f(s) = \frac{s^3 + s + 5}{s(s^2 + s + 1)^2} = \frac{r_0}{s} + \frac{r_{01} + r_{11}s}{(s^2 + s + 1)} + \frac{r_{02} + r_{12}s}{(s^2 + s + 1)^2} \quad (4.40)$$

caratterizzata da una coppia di poli complessi coniugati $\alpha \pm j\omega = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$, di ordine due.

Utilizzando le tecniche di calcolo dei residui già illustrate e l'identità di polinomi si ottiene

$$r_0 = 5, \quad r_{01} = -4, \quad r_{11} = -5, \quad r_{02} = -5, \quad r_{12} = -6.$$

La (4.40) non è ancora in una forma canonica per l'antitrasformazione per la presenza delle radici complesse coniugate. Essa va riscritta, tenendo conto di $\alpha = -\frac{1}{2}$ ed $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$, nella forma

$$\begin{aligned} Y_f(s) &= \frac{5}{s} - \frac{4+5s}{(s^2+s+1)} - \frac{5+6s}{(s^2+s+1)^2} \\ &= \frac{5}{s} - \frac{\sqrt{3}\omega + 5(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2 + \omega^2} - \frac{\frac{4}{\sqrt{3}}\omega + 6(s-\alpha)}{((s-\alpha)^2 + \omega^2)^2}. \end{aligned}$$

Si tratta di determinare l'antitrasformata di

$$Y_{f1}(s) = \left[\frac{4+5s}{(s^2+s+1)} + \frac{5+6s}{(s^2+s+1)^2} \right]$$

cosicché

$$y_f(t) = 5\delta_{-1}(t) - y_{f1}(t)$$

A tal fine posto $\bar{s} = s - \alpha = s + \frac{1}{2}$ ed utilizzando le (4.24), risulta, (con $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$),

$$\begin{aligned} Y_{f1}(s) &= \frac{\sqrt{3}\omega + 5\bar{s}}{\bar{s}^2 + \omega^2} + \frac{\frac{4}{\sqrt{3}}\omega + 6\bar{s}}{(\bar{s}^2 + \omega^2)^2} \\ &= l_0 \frac{\omega}{\bar{s}^2 + \omega^2} + l_1 \frac{\bar{s}}{\bar{s}^2 + \omega^2} + l_2 \frac{2\omega\bar{s}}{\bar{s}^2 + \omega^2} + l_3 \frac{\bar{s}^2 - \omega^2}{\bar{s}^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Calcolando il minimo comune denominatore si ha quindi

$$\begin{aligned} Y_{f1}(s) &= \frac{(\sqrt{3}\omega + 5\bar{s})(\bar{s}^2 + \omega^2) + \frac{4}{\sqrt{3}}\omega + 6\bar{s}}{(\bar{s}^2 + \omega^2)^2} \\ &= \frac{(l_0\omega + l_1\bar{s})(\bar{s}^2 + \omega^2) + l_2(2\omega\bar{s}) + l_3(\bar{s}^2 - \omega^2)}{\bar{s}^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Eguagliando i numeratori si ottiene quindi

$$5\bar{s}^3 + \sqrt{3}\omega\bar{s}^2 + (5\omega^2 + 6)\bar{s} + \sqrt{3}\omega^3 + \frac{4}{\sqrt{3}}\omega = l_1\bar{s}^3 + (l_0\omega + l_3)\bar{s}^2 + (l_1\omega^2 + 2l_2\omega)\bar{s} - l_3\omega^2 + l_0\omega^3$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} l_1 &= 5 \\ (l_0\omega + l_3) &= \sqrt{3}\omega \\ l_1\omega^2 + 2l_2\omega &= (5\omega^2 + 6) \rightarrow l_2\omega = 6 \\ -l_3\omega^2 + l_0\omega^3 &= \sqrt{3}\omega^3 + \frac{4}{\sqrt{3}}\omega. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi $l_0 = \frac{17}{3\sqrt{3}}$, $l_1 = 5$, $l_2 = 3\sqrt{3}$, $l_3 = -\frac{4}{3}$, per cui

$$\begin{aligned} y_f(t) &= 5\delta_{-1}(t) - e^{\frac{1}{2}t} \left(\frac{17}{3\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + 5 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \delta_{-1}(t) \\ &\quad - te^{\frac{1}{2}t} \left(2\sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{4}{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

L'esempio precedente mostra come lo sviluppo in fratti composti in realtà non aiuta particolarmente nel determinare la soluzione poiché in ogni caso sono necessari ulteriori passaggi per poter determinare l'antitrasformata.

Prima di passare ad ulteriori approfondimenti è interessante osservare come i precedenti argomenti legati al calcolo mettano in luce che se la trasformata dell'ingresso è essa stessa una funzione razionale, l'espansione della risposta sarà caratterizzata da fratti che sono corrispondenti separatamente ai poli della funzione di trasferimento e ai poli della trasformata dell'ingresso; i residui di ciascuno dei gruppi essendo comunque condizionati da entrambi.

Esempio 4.5.4 A titolo di esempio si consideri la risposta forzata di un sistema che ha funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1}{(s+1)(s+10)}$$

all'ingresso $u(t)$ che ammette la seguente trasformata

$$U(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

a cui corrisponde, antitrasformando,

$$u(t) = (1 - \cos t)\delta_{-1}(t).$$

Mediante semplici calcoli otteniamo nel dominio complesso

$$\begin{aligned} Y_f(s) = W(s)U(s) &= \frac{1}{s(s+1)(s+10)(s^2+1)} \\ &= \frac{r_1}{s+1} + \frac{r_2}{s+10} + \frac{r_3}{s} + \frac{d_0 + d_1 s}{s^2+1}. \end{aligned}$$

Utilizzando le tecniche precedente illustrate si ricava facilmente che

$$r_1 = -\frac{1}{18}, \quad r_2 = \frac{1}{9090}, \quad r_3 = \frac{1}{10}, \quad d_0 = -\frac{11}{202}, \quad d_1 = -\frac{9}{202}.$$

La risposta forzata corrispondente all'ingresso considerato è quindi data da

$$\begin{aligned} y_f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y_f(s)] \\ &= \left(-\frac{1}{18}e^{-t} + \frac{1}{9090}e^{-10t} \right) \delta_{-1}(t) - \frac{1}{202} (11 \sin t + 9 \cos t) \delta_{-1}(t). \end{aligned}$$

Come mostra l'esempio, la risposta forzata è dunque composta da due parti: una che corrisponde ai poli del sistema, alla quale corrispondono evoluzioni che dipendono dalle leggi di moto dei modi eccitabili ed osservabili (e che convergono a zero in quanto i poli sono a parte reale negativa), ed una che corrisponde ai poli dell'ingresso e che proprio per questo motivo dipende della forma dell'ingresso.

Si tratta in realtà di una proprietà generale che può essere facilmente compresa e che ci permette di affermare che se il sistema è esternamente stabile nello stato zero, la parte della risposta forzata che dipende dal sistema al crescere del tempo tende a zero e le caratteristiche dell'ingresso sono rappresentate dalla parte della risposta corrispondente ai poli della trasformata dell'ingresso. L'influenza del sistema su questa parte si misura sui residui relativi. Questa è la controparte nel contesto dinamico del comportamento di un sistema lineare istantaneo in cui l'uscita è proporzionale all'ingresso (uscita uguale all'ingresso moltiplicato per una costante). Su questo aspetto, che è di grande interesse in particolare nella caratterizzazione della risposta a ingressi periodici, torneremo nel prossimo capitolo.

Ancora in collegamento con le relazioni della risposta forzata con l'ingresso, e con la sua forma, vi sono due situazioni che vale la pena di sottolineare: quando la trasformata dell'ingresso ha un fattore a denominatore coincidente con uno a denominatore della $W(s)$, oppure quando ha un fattore che si cancella con uno a numeratore della $W(s)$. Nel primo caso si realizza un'esaltazione del comportamento corrispondente a quel fattore (si pensi ad un polo o una coppia di complessi), nel secondo si realizza un'azione di filtro rispetto alle caratteristiche di comportamento legate al fattore nella trasformata dell'ingresso. Le due situazioni vengono proposte con due semplici esempi.

Esempio 4.5.5 Si consideri la risposta al gradino unitario del sistema che ha la seguente semplice funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

Nella risposta forzata

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} \implies y_f(t) = (t-1)\delta_{-1}(t) + e^{-t}\delta_{-1}(t).$$

la presenza di un doppio polo in zero comporta che, seppure la risposta impulsiva sia limitata nel tempo, l'evoluzione in uscita in corrispondenza di un ingresso limitato (il gradino) sia illimitata. L'azione integrale risulta infatti esaltata in uscita (integrale doppio).

Esempio 4.5.6 La risposta forzata di

$$W(s) = \frac{s^2+1}{s^2+4s+3}$$

all'ingresso $u(t) = \sin t$, che ammette la seguente trasformata

$$U(s) = \frac{1}{s^2+1},$$

è invece data da

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{\frac{1}{2}}{s+1} - \frac{\frac{1}{2}}{s+3}$$

e quindi

$$y_f(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})\delta_{-1}(t).$$

Nella risposta forzata, in questo caso, non rimane traccia della forma dell'ingresso che risulta in effetti filtrato dalla presenza della coppia di zeri.

Alla luce di quanto risulta dai due precedenti esempi, lo studente può provare a interpretare in termini di analisi dei segnali, il ruolo degli zeri della funzione di trasferimento.

4.5.1 La risposta agli ingressi canonici e la risposta indiciale

Come già messo in luce nell'analisi in t la risposta forzata agli ingressi canonici, in analogia a quanto accade con l'ingresso impulsivo, rappresenta un modello del comportamento forzato del sistema. Più precisamente, se si indica con ' $*$ ' il prodotto di convoluzione di due funzioni del tempo,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[W(t) * u(t)] &= W(s)U(s) = \\ &= sW_{-1}(s)U(s) = W_{-1}(s)sU(s) \\ &= \mathcal{L}[w_{-1}(t) * \dot{u}(t)]\end{aligned}$$

dove $\dot{\cdot} := \frac{d}{dt}$ indica la derivazione rispetto al tempo e

$$W_{-1}(s) = \frac{W(s)}{s}.$$

Quindi la risposta forzata, pari alla convoluzione della risposta impulsiva $W(t)$ con l'ingresso $u(t)$, può anche essere ottenuta come convoluzione di $w_{-1}(t)$, risposta indiciale, con $\dot{u}(t)$ se, come avviene nel caso degli ingressi che qui si considerano, la derivata in zero è nulla. Questi argomenti possono essere generalizzati alle derivate di ordine superiore degli ingressi ed alle risposte ad ingressi canonici di ordine superiore se si osserva che la trasformata di Laplace dell'ingresso canonico di ordine k

$$\delta_{-k} = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \delta_{-1}(t)$$

è data da

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \delta_{-1}(t)\right] = \frac{1}{s^k}.$$

Assumendo, infine e per semplicità di trattazione, l'assenza di poli in zero, si ha quindi

$$W_{-k}(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{\prod_{i=1}^p (s - p_i)^{l_i} \prod_{k=1}^{\theta} ((s - \alpha_k)^2 - \omega_k^2)^{h_k}} \frac{1}{s^k}. \quad (4.41)$$

Se ora effettuiamo l'espansione in frazioni parziali essa sarà composta da una parte corrispondente ai poli della $W(s)$ ed una corrispondente al polo multiplo in zero di ordine k . Se immaginiamo i poli distinti e, per brevità di notazione, esprimiamo il denominatore nella forma fattorizzata più fine (quindi non necessariamente a coefficienti reali), otteniamo

$$W_{-k}(s) = \sum_{i=1}^N \frac{r_i}{s - p_i} + \sum_{j=1}^k \frac{r_{0j}}{s^j}$$

e antitrasformando

$$w_{-k}(t) = \sum_{i=1}^N r_i e^{p_i t} \delta_{-1}(t) + \sum_{j=1}^k r_{0j} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \delta_{-1}(t). \quad (4.42)$$

dove

$$\begin{aligned} r_{0k} &= \left. \frac{W(s)}{s^k} s^k \right|_{s=0} = W(0) = K \quad \text{guadagno} \\ r_{0,k-1} &= \left. \frac{d}{ds} \left(\frac{W(s)}{s^k} s^k \right) \right|_{s=0} = \left. \frac{dW}{ds} \right|_{s=0} \\ &\vdots \\ r_{01} &= \left. \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} W(s) \right|_{s=0}. \end{aligned}$$

L'espressione precedente mette ancora più chiaramente in luce quanto già osservato a proposito della struttura della risposta forzata: la parte che dipende dal sistema (influenzata dall'ingresso nel valore dei residui) e quella che dipende dall'ingresso (influenzata dal sistema nel valore dei residui). Più precisamente in questo caso di ingresso canonico di ordine k , la seconda componente, alla quale tende la risposta al crescere del tempo se $\operatorname{Re}(p_i) < 0$, è un polinomio di grado $(k-1)$; un polinomio dello stesso ordine dell'ingresso (nella fattispecie un monomio di ordine $(k-1)$). Se ora si tiene conto della linearità della risposta forzata, si comprende subito che se l'ingresso è un generico polinomio in t (combinazione lineare di termini canonici) la parte dell'uscita che dipende dall'ingresso è anch'essa un polinomio dello stesso grado dell'ingresso.

Il gradino unitario, detto anche funzione di Heavyside, è l'ingresso canonico di ordine uno, $\delta_{-1}(t)$ ed è per la semplicità di realizzazione nel contesto sperimentale, tra gli ingressi canonici il più significativo; la sua risposta forzata,

$w_{-1}(t)$ è detta **risposta indiciale**. Essa rappresenta il banco di prova dei sistemi dinamici in quanto alcuni suoi parametri sono significativi delle modalità di funzionamento. Nel seguito di questa sezione, partendo dalla caratterizzazione della risposta al generico ingresso canonico, metteremo in evidenza alcuni di questi parametri.

Dall'espressione (4.42) con $k = 1$, otteniamo la risposta indiciale

$$w_{-1}(t) = \sum_{i=1}^N r_i e^{p_i t} \delta_{-1}(t) + r_0 \delta_{-1}(t).$$

La risposta indiciale mette ancora meglio in luce quanto osservato in precedenza: il comportamento dinamico del sistema per effetto della sollecitazione a gradino è bene rappresentato dalla prima sommatoria: le leggi di moto dei modi eccitabili ed osservabili sono sollecitate in una misura che dipende anche dal gradino stesso. L'effetto del sistema sul gradino è nel residuo r_0 e se (come è necessario che sia per un sistema dinamico che funziona) il sistema è esternamente stabile nello stato zero, la risposta indiciale tende ad assestarsi a tale valore costante. Dalla (4.35) si ha

$$r_0 = \lim_{s \rightarrow 0} [s Y_f(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{W(s)}{s} \right] = W(0)$$

se ora si ricorda la (4.33) e si osserva che nell'ipotesi in cui siamo non vi sono poli in zero, si può concludere che il valore costante a cui tende la risposta indiciale è proprio il **guadagno** ($w_{-1}(t) \rightarrow r_0 = K$).

Possiamo dunque concludere che, se i poli della funzione di trasferimento sono a parte reale strettamente negativa, la risposta indiciale tende ad assumere un valore costante al crescere del tempo e pari al guadagno. Questo è un primo parametro importante caratteristico della risposta indiciale.

Il valore finale, al pari di quello iniziale, della risposta indiciale $w_{-1}(t)$ risultano anche dall'applicazione di proprietà della trasformata di Laplace che è bene ricordare:

- **il teorema del valore finale**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

- **il teorema del valore iniziale**

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$$

L'applicazione del primo restituisce quanto già detto, il secondo mette in luce che anche il valore della funzione di trasferimento all'infinito ha, nel caso di poli

a parte reale negativa, un significato fisico (in termini di risposta): è pari al suo valore in $t = 0$,

$$w_{-1}(0) = W(\infty) = \begin{cases} 0 & se \quad N > m \\ D & se \quad N = m \end{cases}$$

Inoltre le derivate della risposta calcolate in zero sono nulle fino all'ordine $N - m - 1$ mentre la derivata di ordine $N - m$ calcolata in zero è pari al coefficiente di ordine massimo del numeratore, ovvero

$$\begin{aligned} w'_{-1}(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s(sW_{-1}(s) - w_{-1}(0)) = \lim_{s \rightarrow \infty} sW(s) = \begin{cases} b_{n-1} & se \quad m = n - 1 \\ 0 & se \quad m < n - 1 \end{cases} \\ &\vdots \\ w_{-1}^{(N-m)}(0) &= b_m \end{aligned}$$

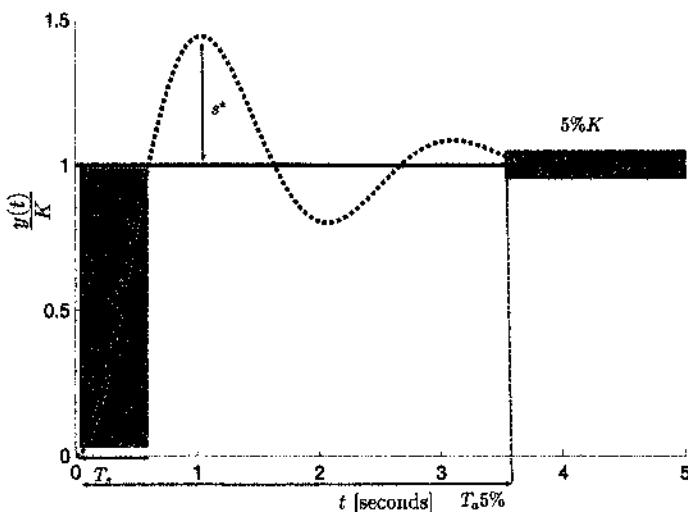


Figura 4.1: Illustrazione dei parametri caratteristici della risposta indiciale.

Abbiamo dunque compreso che nelle condizioni poste la risposta indiciale parte da zero, con pendenza che dipende dai coefficienti della numeratore della $W(s)$ e tenda ad un valore costante. Ebbene, un'analisi più approfondita sulla base di quello che vedremo anche nel prossimo capitolo mette in luce che i possibili andamenti della w_{-1} sono quelli indicati in Figura 4.1 e come tali possono essere in modo significativo caratterizzati dagli ulteriori tre parametri:

- il **tempo di salita**, T_s , definito come il tempo necessario nella risposta al gradino per passare dal 10% al 90% del valore finale, ovvero primo istante di tempo in cui la risposta assume il valore finale;

- il **tempo di assestamento**, T_a , definito come il primo istante di tempo in cui la risposta differisce di un valore prefissato ϵ rispetto al valore finale. Valori tipici di ϵ sono 2% oppure al 5% di K ;
- la **sovrelongazione**, s^* , definita come la differenza tra il valore massimo della risposta ed il valore finale, normalizzato rispetto al valore finale.

Vedremo nel prossimo capitolo come questi parametri che sono significativi della risposta del sistema dinamico ad una sollecitazione costante possono essere messi in corrispondenza con altri che sono collegati a sollecitazioni periodiche.

Per ora, e in conclusione dell'analisi proposta in questo paragrafo, è importante ritenere questo concetto che è tipico del modo di rispondere di un sistema dinamico lineare rispetto ad uno istantaneo: un sistema lineare istantaneo stabilisce un legame istantaneo proporzionale (pari al guadagno K) tra ingresso ed uscita, quindi ad un ingresso costante risponde con un'uscita contante a partire dall'istante in cui l'ingresso è applicato; un sistema lineare dinamico ad un ingresso costante risponde con un andamento che al crescere del tempo tende ad un valore costante e proporzionale (pari al guadagno K) all'ingresso, ma vi tende con una velocità ($\frac{1}{T_s}$) e con modalità che dipendono dai poli della $W(s)$. Si può anche intuire, e comprenderemo meglio in seguito, che la velocità è tanto maggiore quanto più i poli sono negativi, e la modalità è strettamente collegata ai comportamenti oscillatori con piccolo smorzamento.

Esempio 4.5.7 Si consideri nuovamente il modello massa-molla-smorzatore sviluppato nel Paragrafo 1.1.1

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{M}x_1 - \frac{b}{M}x_2 + \frac{u(t)}{M} \\ y &= x_1.\end{aligned}$$

La funzione di trasferimento è in questo caso

$$\begin{aligned}W(s) &= (1 \quad 0) \begin{pmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{M} & s + \frac{b}{M} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} = \frac{1}{s(s + \frac{b}{M}) + \frac{k}{M}} (1 \quad 0) \begin{pmatrix} s + \frac{b}{M} & 1 \\ -\frac{k}{M} & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\frac{1}{M}}{s^2 + \frac{b}{M}s + \frac{k}{M}}\end{aligned}$$

Il guadagno, ovvero lo spostamento a regime sotto l'azione di una forza unitaria, è pari a

$$r_0 = \frac{1}{k}$$

mentre il comportamento intorno allo zero è caratterizzato da

$$w_{-1}(0) = 0 \quad \dot{w}_{-1}(0) = 0 \quad \ddot{w}_{-1}(0) = \frac{1}{M}.$$

Calcoliamo ora la risposta indiciale nel caso di poli reali e complessi coniugati corrispondente, nel dominio di Laplace, a

$$Y_f(s) = \frac{W(s)}{s} = \frac{\frac{1}{M}}{s(s^2 + \frac{b}{M}s + \frac{k}{M})}.$$

Nel caso in cui $\Delta = b^2 - 4kM > 0$, i poli della funzione di trasferimento, entrambi reali negativi, sono dati da

$$p_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4kM}}{2M}, \quad p_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4kM}}{2M}.$$

In s, la decomposizione in fratti semplici della risposta indiciale è data da

$$Y_f(s) = \frac{r_0}{s} + \frac{r_1}{s + p_1} + \frac{r_2}{s + p_2}$$

in cui $r_0 = \frac{1}{k}$ è il guadagno, mentre i residui associati ai poli del sistema sono

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{Mp_1(p_1 - p_2)} = \frac{2M}{\Delta - b\sqrt{\Delta}} = \frac{2M}{b^2 - 4kM - b\sqrt{b^2 - 4kM}} \\ r_2 &= \frac{1}{Mp_2(p_2 - p_1)} = \frac{2M}{\Delta + b\sqrt{\Delta}} = \frac{2M}{b^2 - 4kM + b\sqrt{b^2 - 4kM}}. \end{aligned}$$

antitrasformando, otteniamo allora la risposta indiciale data da

$$\begin{aligned} w_{-1}(t) &= \frac{1}{k}\delta_{-1}(t) \\ &+ 2M \left(\frac{e^{-\frac{b-\sqrt{b^2-4kM}}{2M}t}}{b^2 - 4kM - b\sqrt{b^2 - 4kM}} + \frac{e^{-\frac{b+\sqrt{b^2-4kM}}{2M}t}}{b^2 - 4kM + b\sqrt{b^2 - 4kM}} \right) \delta_{-1}(t). \end{aligned}$$

Si noti che si tratta di un andamento nel tempo che tende al valore finale $W(0)$ da sotto $s^+ = 0$, e che la velocità di convergenza è collegata alle costanti di tempo degli autovalori.

Nel caso in cui $\Delta = b^2 - 4kM < 0$, i poli della funzione del trasferimento sono dati da

$$p = \frac{-b \pm j\sqrt{4kM - b^2}}{2M} = \alpha \pm j\omega$$

in cui

$$\alpha = -\frac{b}{2M}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{M} - \frac{b^2}{4M^2}}.$$

In s, la decomposizione in fratti semplici della risposta indiciale è data da

$$Y_f(s) = \frac{r_0}{s} + \frac{d_0(s - \alpha) + d_1\omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$$

in cui $r_0 = \frac{1}{k}$ è il guadagno, mentre i coefficienti d_0 e d_1 associati ai poli del sistema sono

$$d_0 = 2r_a, \quad r_a = \frac{\frac{1}{2M}}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{1}{2k}$$

$$d_1 = -2r_b, \quad r_b = \frac{\frac{1}{2M}\alpha}{\omega(\alpha^2 + \omega^2)} = -\frac{bM}{k\sqrt{4kM - b^2}}.$$

Antitrasformando, otteniamo allora la risposta indiciale data da

$$w_{-1}(t) = \frac{1}{k}\delta_{-1}(t) + \frac{1}{k}e^{-\frac{b}{2M}t} \left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M} - \frac{b^2}{4M^2}}t\right) \right. \\ \left. + 2\frac{bM}{k\sqrt{4kM - b^2}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{M} - \frac{b^2}{4M^2}}t\right) \right) \delta_{-1}(t).$$

Si noti in questo caso come al diminuire del coefficiente b , diminuisca lo smorzamento del modo naturale pseudoperiodico e di conseguenza si ha un comportamento oscillante intorno al valore finale.

Un andamento della risposta interessante è anche quello che si ottiene nel caso in cui $\Delta = b^2 - 4kM = 0$ e gli autovalori sono coincidenti in

$$p = -\frac{b}{2M}.$$

In s, la decomposizione in fratti semplici della risposta indiciale è data da

$$Y_f(s) = \frac{r_0}{s} + \frac{r_{11}}{s-p} + \frac{r_{12}}{(s-p)^2}$$

in cui $r_0 = \frac{1}{k}$ è il guadagno, mentre

$$r_{11} = -\frac{1}{Mp^2} = -\frac{4M}{b^2}, \quad r_{12} = \frac{1}{Mp} = -\frac{2}{b}$$

Antitrasformando, otteniamo allora la risposta indiciale data da

$$y_f(t) = \frac{1}{k}\delta_{-1}(t) - \frac{2}{b}e^{-\frac{b}{2M}t} \left(\frac{2M}{b} + t \right) \delta_{-1}(t).$$

Cosa accade al diminuire del coefficiente b ? Si traccino i grafici degli andamenti.

4.5.2 Risposte ad ingressi con ritardi

Accade spesso nella pratica di dover trattare funzioni del tempo traslate: in anticipo $f(t+T)$, traslazione a sinistra, o in ritardo $f(t-T)$, traslazione a destra.

Il caso più frequente è quello in cui la traslazione, usualmente il ritardo, agisce sull'ingresso. Come si procede in questo caso?

A questo proposito bisogna ricordare una proprietà della trasformata di Laplace nota come teorema della traslazione.

Teorema della traslazione a destra: la trasformata di una funzione traslata a destra è data dall'espressione

$$\mathcal{L}[f(t-T)\delta_{-1}(t-T)] = e^{-sT}F(s), \quad T > 0 \quad (4.43)$$

Da un punto di vista formale ciò è quanto basta per poter calcolare la risposta forzata in presenza di un ritardo sull'ingresso; la moltiplicazione per e^{-sT} che moltiplica la trasformata dell'ingresso, resta a fattore di ogni termine nell'espansione della risposta forzata e si traduce in un ritardo nell'antitrasformata.

La procedura esposta in relazione al calcolo trova un evidente riscontro nella stazionarietà del sistema: la risposta forzata all'ingresso traslato di T istanti è pari alla traslazione a destra di T istanti della risposta all'ingresso non traslato. Se si parte dallo stato iniziale $x_0 = 0$ e si aspettano T istanti con ingresso nullo e poi si applica un ingresso, si ottiene lo stesso risultato che si ha se si applica l'ingresso subito e poi si trasla a destra di T istanti la risposta.

Esempio 4.5.8 Si consideri il sistema con funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1}{(s+1)}$$

a cui è applicato l'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t-1)$. Si ha

$$Y_f(s) = \frac{e^{-s}}{s(s+1)} = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)e^{-s} \implies y_f(t) = (1 - e^{-(t-1)})\delta_{-1}(t-1)$$

che è proprio pari a $w_{-1}(t-1)$.

L'impiego della traslazione trova riscontro nella costruzione di ingressi di interesse nella pratica come sviluppato nei seguenti esempi.

Esempio 4.5.9 Si considerino i due ingressi in Figura 4.2 che si possono scrivere come

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-T) \\ u_2(t) &= t\delta_{-1}(t) - (t-T)\delta_{-1}(t-T) - T\delta_{-1}(t-T) \\ &= t(\delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-T)). \end{aligned}$$

In base a quanto osservato, per le risposte forzate si ha:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= w_{-1}(t) - w_{-1}(t-T) \\ y_2(t) &= w_{-2}(t) - w_{-2}(t-T) - Tw_{-1}(t-T). \end{aligned}$$

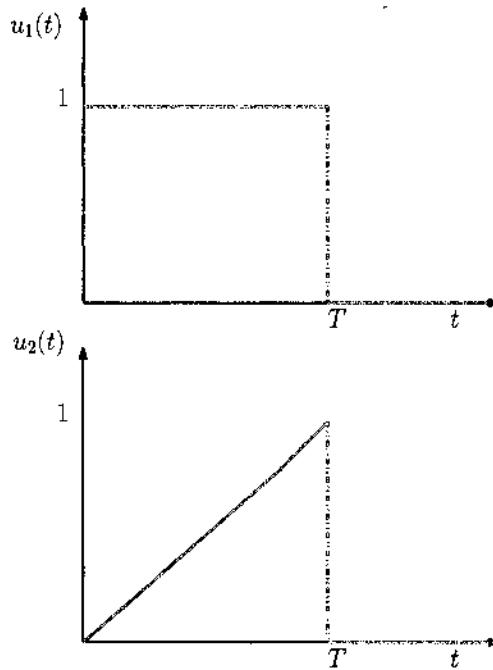


Figura 4.2

Si noti che per il secondo dei due ingressi considerati, in virtù dell'ultima ugualanza si può applicare la proprietà (4.38)

$$\mathcal{L}[t(\delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-T))] = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1-e^{-sT}}{s} \right) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-sT}}{s^2} - \frac{T e^{-sT}}{s}$$

per ottenere lo stesso risultato.

Per concludere vale la pena osservare che il calcolo di risposte con ritardi può essere utilmente impiegato in situazioni di interesse quali, ad esempio, quella in cui si è interessati a conoscere la risposta di un sistema, di cui si conosce la funzione di trasferimento, a partire da uno stato iniziale ottenuto al tempo T , $x_f(T)$, per effetto di un ingresso preliminare, $u_0(t)$.

In base a quanto osservato in precedenza si tratta di

- i) applicare l'ingresso $u_0(t)$ fino a T

$$u_0(t)(\delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-T))$$

in modo che lo stato si porti allo stato desiderato;

- ii) applicare l'ingresso $u(t)$ traslato a destra di T ,

$$u(t-T)\delta_{-1}(t-T)$$

e traslare il risultato di T istanti a sinistra. Si ottiene dunque l'ingresso complessivo

$$\bar{u}(t) = u_0(t)(\delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-T)) + u(t-T)\delta_{-1}(t-T).$$

Se si indica con \bar{y}_f la risposta forzata all'ingresso \bar{u} , vale infatti l'uguaglianza

$$y(t) = \Psi(t)x_f(T) + \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau = \bar{y}_f(t+T).$$

Si noti che per effettuare il calcolo nel dominio delle trasformate è necessario poter esprimere il troncamento di u_0 a T ($u_0(t)(\delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-T))$) come combinazione lineare di funzioni eventualmente ritardate (si pensi al caso dell'esercizio).

4.5.3 Una nota sulla risposta ad ingressi periodici

In questa ultima sezione si vuole sottolineare come la sovrapposizione degli effetti possa essere utilmente impiegata per calcolare e comprendere le caratteristiche della risposta ad ingressi periodici che ammettono espansioni in serie a coefficienti costanti di funzioni periodiche fondamentali (le funzioni $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$). Se indichiamo con $u_i^{pf}(t)$ la generica funzione periodica fondamentale e con $y_i^{pf}(t)$ la corrispondente risposta forzata, la risposta complessiva di un generico sistema dinamico lineare stazionario all'ingresso

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i^{pf}(t)$$

è data da

$$y(t) = y_l(t) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i^{pf}(t).$$

Essa può dunque essere calcolata mediante la stessa serie che caratterizza l'ingresso applicata alle risposte forzate. Inoltre abbiamo visto che ciascuna delle risposte forzate risulta essere composta da una parte che dipende prioritariamente dal sistema (dai suoi poli), $(y_i^{pf}(t))_s$, ed una che dipende dall'ingresso (i suoi poli), $(y_i^{pf}(t))_r$; in altri termini la sommatoria a secondo membro può essere pensata composta da due sommatorie: una che dipende prioritariamente dal sistema e l'altra dall'ingresso. Per arrivare ad avere:

$$y(t) = y_l(t) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i^{pf}(t)_s + \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i^{pf}(t)_r = y_l(t) + (y_f(t))_s + (y_f(t))_r \quad (4.44)$$

Infine abbiamo anche visto e compreso che se i poli della funzione di trasferimento e, in questo caso, anche gli autovalori associati ai modi osservabili (cioè i poli della $\Psi(s)$) sono a parte reale negativa y_l e y_{fs} si annullano al crescere del tempo e ciò che resta è y_{fr} , la parte persistente, che è caratterizzata solo dai poli delle componenti dell'ingresso, ma ciascuna modificata nel suo residuo dal transito attraverso il sistema.

L'esempio che segue lascia meglio comprendere questi aspetti e ci introduce a quello che poi vedremo nel dettaglio nel prossimo capitolo.

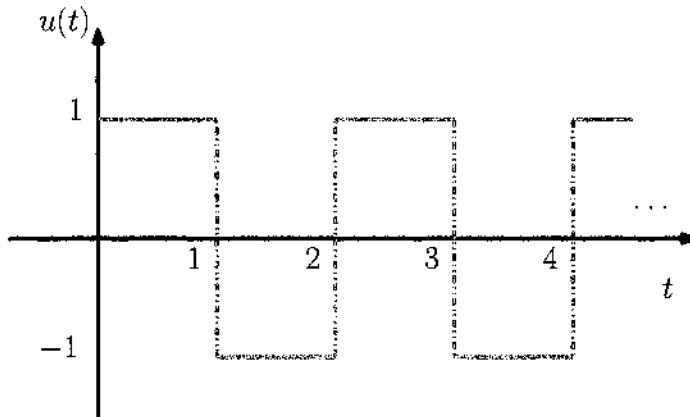


Figura 4.3: Onda Quadra per $\omega = \pi$.

Esempio 4.5.10 Si vuole calcolare l'evoluzione in uscita del sistema descritto dal sistema di equazioni differenziali

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}x\end{aligned}$$

a partire dallo stato iniziale

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e in corrispondenza di un'onda quadra descritta dall'equazione

$$u(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{i \geq 1} \frac{\sin(\omega_i t)}{2i-1}, \quad \omega_i = (2i-1)\omega$$

per un fissato $\omega > 0$. Come è noto, la risposta complessiva è definita come

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t)$$

in cui le due componenti rappresentano l'evoluzione libera e l'evoluzione forzata in uscita che procederemo a calcolare nel dominio della trasformata di Laplace. A tal fine, quindi, consideriamo le matrici

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \\ \Psi(s) &= C\Phi(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} s+2 & -s \end{pmatrix}\end{aligned}$$

e la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1}{s+1}.$$

L'evoluzione libera. La componente in evoluzione libera è data da

$$y_l(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_l(s)]$$

in cui

$$Y_l(s) = \Psi(s)x_0 = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{r_1}{s+1} + \frac{r_2}{s+2}$$

in cui i residui r_1 ed r_2 sono pari a

$$r_1 = 2, \quad r_2 = -2.$$

antitrasformando, otteniamo dunque

$$y_l(t) = 2(e^{-t} - e^{-2t})\delta_{-1}(t).$$

L'evoluzione forzata. L'uscita forzata è data da

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)U(s)].$$

È comodo riscrivere $u(t)$ come combinazione lineare di ingressi sinusoidali

$$u(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{i \geq 1} \frac{u_i(t)}{2i-1}, \quad u_i(t) = \sin(\omega_i t).$$

Per la proprietà di linearità, allora, la risposta forzata del sistema è data dalla combinazione delle risposte a ciascun segnale $u_i(t)$ ovvero

$$y_f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{i \geq 1} \frac{y_i(t)}{2i-1}$$

in cui

$$y_i(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)U_i(s)], \quad U_i(s) = \frac{\omega_i}{s^2 + \omega_i^2}.$$

Ottieniamo quindi

$$Y_i(s) = W(s)U_i(s) = \frac{\omega_i}{(s+1)(s^2 + \omega_i^2)} = \frac{r_1}{s+1} + \frac{d_0 + d_1 s}{s^2 + \omega_i^2}$$

con

$$r_1 = d_0 = \frac{\omega_i}{1 + \omega_i^2} \quad d_1 = -d_0 = -\frac{\omega_i}{1 + \omega_i^2}.$$

antitrasformando, otteniamo quindi

$$y_i(t) = \frac{1}{1+\omega_i^2} (\omega_i e^{-t} + \sin(\omega_i t) - \omega_i \cos(\omega_i t)) \delta_{-1}(t)$$

e quindi la risposta forzata

$$y_f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{i \geq 1} \frac{\omega_i e^{-t}}{(2i-1)(1+\omega_i^2)} \delta_{-1}(t) + \frac{4}{\pi} \sum_{i \geq 1} \frac{\sin(\omega_i t) - \omega_i \cos(\omega_i t)}{(2i-1)(1+\omega_i^2)} \delta_{-1}(t).$$

La risposta complessiva è data quindi da

$$y(t) = 2(e^{-t} - e^{-2t}) \delta_{-1}(t) + \frac{4}{\pi} \sum_{i \geq 1} \frac{\omega_i e^{-t} + \sin(\omega_i t) - \omega_i \cos(\omega_i t)}{(2i-1)(1+\omega_i^2)} \delta_{-1}(t).$$

È facile notare che la risposta può essere ulteriormente decomposta in due componenti

$$y(t) = y_l(t) + y_s(t) + y_r(t)$$

in cui l'effetto della componente

$$y_s(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{i \geq 1} \frac{\omega_i e^{-t}}{(2i-1)(1+\omega_i^2)}$$

tende a zero mentre

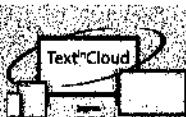
$$y_r(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{i \geq 1} \frac{\sin(\omega_i t) - \omega_i \cos(\omega_i t)}{(2i-1)(1+\omega_i^2)}$$

rappresenta l'andamento persistente a cui l'evoluzione in uscita tende ad assestarsi al crescere del tempo.

Esercizio 4.5.1 Si calcoli T_s e s^* per i sistemi

$$W(s) = \frac{K}{1+\tau s}, \quad \tau > 0 \quad K = 1$$

$$W(s) = \frac{K}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad 0 < \xi < 1 \quad K = 1.$$



Soluzione Esercizio 4.5.1

Approfondimento

4.6

Sistemi a tempo discreto: analisi nel dominio della variabile complessa

Per le rappresentazioni lineari stazionarie a tempo discreto si possono sviluppare considerazioni analoghe a quelle svolte per i sistemi a tempo continuo, utilizzando questa volta la \mathcal{Z} -trasformata, che permette di studiare nel dominio complesso i sistemi lineari, stazionari e a dimensione finita descritti da equazioni alle differenze

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) & x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (4.45)$$

4.6.1 La trasformata \mathcal{Z} nello studio dei sistemi a tempo discreto

Data una funzione $f(t)$ definita in \mathbb{Z}_+ si definisce \mathcal{Z} -trasformata di $f(t)$ la funzione di variabile complessa

$$\mathcal{Z}[f(t)] = F(z) = \sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t}$$

che associa ad una funzione del tempo la funzione che assume nel generico punto $z \in \mathbb{C}$ del piano complesso il valore della somma, da $t = 0$ fino all'infinito, dei valori assunti dalla funzione moltiplicati per z^{-t} . Il generico termine della somma è dunque $f(t)z^{-t}$ che al crescere di t può essere reso sufficientemente piccolo eventualmente considerando punti z che hanno un modulo adeguato. Questo l'argomento che lascia intendere che la funzione $F(z)$ è ben definita (la somma della serie esiste) in ogni punto del piano complesso che soddisfa la condizione $|z| > \rho_f$, dove $\rho_f > 0$ è il *raggio di convergenza* associato alla funzione f .

La trasformata \mathcal{Z} è una trasformazione lineare. Per essa vale una proprietà, nota come teorema della traslazione a sinistra che, nel contesto discreto, svolge il ruolo del teorema della derivata in Laplace. Il **Teorema della traslazione a sinistra** afferma che

$$\mathcal{Z}[f(t+1)] = zF(z) - zf(0)$$

La sua dimostrazione è semplice: applicando

$$\mathcal{Z}[f(t)] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(i)}{z^i} = F(z)$$

alla funzione $f(t+1)$, si ottiene

$$\mathcal{Z}[f(t+1)] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(i+1)}{z^i} = \sum_{i=0}^{\infty} z \frac{f(i+1)}{z^{i+1}} + zf(0) - zf(0) = zF(z) - zf(0).$$

Ciò è sufficiente per calcolare la trasformata delle equazioni (4.45). Se indichiamo con $X(z) = \mathcal{Z}[x(t)]$, $U(z) = \mathcal{Z}[u(t)]$ le trasformate di $x(t)$ ed $u(t)$ rispettivamente, per la linearità ed il teorema della traslazione a sinistra con condizione iniziale $x_0 = x(0)$, si ottiene

$$\begin{aligned} zX(z) - zx_0 &= AX(z) + BU(z) \\ Y(z) &= CX(z) + DU(z) \end{aligned} \quad (4.46)$$

e, con semplici manipolazioni,

$$\begin{aligned} X(z) &= (zI - A)^{-1}zx_0 + (zI - A)^{-1}BU(z) \\ Y(z) &= C(zI - A)^{-1}zx_0 + (C(zI - A)^{-1}B + D)U(z). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Le equazioni (4.47) esprimono la trasformata \mathcal{Z} delle evoluzioni nello stato e nell'uscita date dal modello esplicito

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)x_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} H(t-\tau)u(\tau) \\ y(t) &= \Psi(t)x_0 + \sum_{\tau=0}^t W(t-\tau)u(\tau) \end{aligned} \quad (4.48)$$

e quindi possono essere egualiate alle

$$\begin{aligned} X(z) = \mathcal{Z}[x(t)] &= \mathcal{Z}\left[\Phi(t)x_0 + \sum_{\tau=0}^{t-1} H(t-\tau)u(\tau)\right] \\ Y(z) = \mathcal{Z}[y(t)] &= \mathcal{Z}\left[\Psi(t)x_0 + \sum_{\tau=0}^t W(t-\tau)u(\tau)\right]. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Ricordando che l'egualanza delle (4.47) con le (4.49) deve valere per ogni ingresso e per ogni condizione iniziale si ottiene, ponendo $u(t) = 0$

$$\mathcal{Z}[\Phi(t)x_0] = (zI - A)^{-1}zx_0, \quad \mathcal{Z}[\Psi(t)x_0] = C(zI - A)^{-1}zx_0.$$

Poiché tali relazioni devono valere, come già ricordato, per ogni stato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}^n$, e poiché $\Phi(t) = A^t$, ne segue

$$\Phi(z) = \mathcal{Z}[\Phi(t)] = \mathcal{Z}[A^t] = (zI - A)^{-1}z \quad (4.50)$$

e coerentemente

$$\mathcal{R}(z) \rightarrow \mathcal{Z}[\mathcal{R}(t)] = \mathcal{Z}[CA^t] = C(zI - A)^{-1}z \quad (4.51)$$

È ora utile impiegare un'altra proprietà della \mathcal{Z} -trasformata nota come **teorema della traslazione a sinistra**:

$$\mathcal{Z}[f(t-1)] = \frac{F(z)}{z} \quad (4.52)$$

la cui prova, tenendo presente che la funzione è definita per $t \geq 0$ (quindi nulla in $t < 0$), segue direttamente dalla definizione

$$\mathcal{Z}[f(t-1)] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(i-1)}{z^i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k)}{z^{k+1}} = \frac{F(z)}{z}.$$

Dalle (4.50) (4.56) è quindi possibile calcolare le trasformate delle matrici delle risposte impulsive nello stato ed in uscita. Infatti si ha

$$H(z) = \mathcal{Z}[H(t)] = \mathcal{Z}[A^{t-1}B] = (zI - A)^{-1}B \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} W(z) = \mathcal{Z}[W(t)] &= \begin{cases} \mathcal{Z}[CA^{t-1}B], & t \geq 1 \\ \mathcal{Z}[D], & t = 0 \end{cases} \\ &= C(zI - A)^{-1}B + D \end{aligned} \quad (4.54)$$

Dall'equivalenza delle espressioni (4.47) e (4.49), segue anche che, per le (4.54)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left[\sum_{\tau=0}^{t-1} H(t-\tau)u(\tau)\right] &= H(z)U(z) \\ \mathcal{Z}\left[\sum_{\tau=0}^t W(t-\tau)u(\tau)\right] &= W(z)U(z). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Per un sistema con q uscite e p ingressi, la matrice $W(z)$, trasformata \mathcal{Z} di $W(t)$, ha dimensioni $(q \times p)$ ed è detta *matrice delle funzioni di trasferimento* o semplicemente *funzione di trasferimento*.

I precedenti calcoli e le relazioni trovate mettono in luce risultati che riguardano il calcolo e le proprietà della \mathcal{Z} -trasformata e il suo ruolo nello studio dei sistemi dinamici.

Per quanto riguarda il calcolo e le proprietà matematiche delle trasformate vale quanto segue.

- Le trasformate di funzioni del tipo λ^t (quindi anche costanti se $\lambda = 1$, periodiche se $\lambda = e^{j\omega t}$ e pseudoperiodiche se $\lambda = e^{(a+j\omega)t}$ che caratterizzano la risposta in evoluzione libera nei sistemi a tempo discreto) sono funzioni razionali proprie; in particolare la (4.50) permettono di stabilire subito che

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[\lambda^t] &= \frac{z}{z-\lambda}, \quad \mathcal{Z}[\delta_{-1}(t)] = \frac{z}{z-1} \\ \mathcal{Z}[\sin \omega t] &= \mathcal{Z}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right] = \dots = \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1} \\ \mathcal{Z}[\cos \omega t] &= \mathcal{Z}\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right] = \dots = \frac{z^2 - z \cos \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}.\end{aligned}$$

Inoltre, se si nota che vale la seguente proprietà

$$\mathcal{Z}[a^t f(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} a^k f(k) = F\left(\frac{z}{a}\right), \quad (4.56)$$

è anche evidente il calcolo diretto delle funzioni pseudoperiodiche

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[|\lambda|^t \sin \theta t] &= \frac{z |\lambda| \sin \theta}{z^2 - 2z |\lambda| \cos \theta + |\lambda|^2}, \\ \mathcal{Z}[|\lambda|^t \cos \theta t] &= \frac{z^2 - z |\lambda| \cos \theta}{z^2 - 2z |\lambda| \cos \theta + |\lambda|^2}.\end{aligned}$$

- La trasformata di una somma di convoluzione (è di questo tipo la risposta forzata che pesa i valori dell'ingresso a τ con quelli della risposta impulsiva a $(t-\tau)$) è pari al prodotto delle trasformate: *teorema della convoluzione* ovvero

$$\mathcal{Z}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{Z}\left[\sum_{\tau=0}^{t-1} f_1(t-\tau) * f_2(\tau)\right] = \mathcal{Z}[f_1(t)] \mathcal{Z}[f_2(t)].$$

Per quanto riguarda l'impiego della \mathcal{Z} -Trasformata nello studio dei sistemi a tempo discreto valgono le seguenti considerazioni.

- La matrice di transizione $\Phi(z)$ e la matrice delle trasformazioni in uscita $\Psi(z)$ sono matrici i cui elementi sono funzioni razionali proprie al pari della matrice delle funzioni di trasferimento $W(z)$, mentre la matrice $H(z)$, è una matrice i cui elementi sono funzioni razionali strettamente proprie. In particolare nel calcolo delle risposte forzate nello stato ed in uscita alla somma di convoluzione nel tempo corrisponde un semplice prodotto con la trasformata dell'ingresso.
- Anche nel caso discreto si introducono le nozioni di poli e zeri della funzione (matrice di funzioni) di trasferimento. Il polinomio a denominatore della $W(z)$ avrà grado $N \leq n$, essendo n la dimensione della matrice dinamica. I poli della funzione di trasferimento (le radici del minimo comune multiplo dei polinomi a denominatore della matrice di trasferimento)

sono un sottoinsieme degli autovalori e corrispondono ai modi che sono simultaneamente eccitabili ed osservabili.

Per un sistema con p ingressi e q uscite la funzione di trasferimento assume la forma

$$W(z) = D + \frac{B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \cdots + B_{n-1} z^{N-1}}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{N-1} + z^N}$$

dove D e B_i , $i = 0, \dots, N-1$, sono opportune matrici costanti di dimensioni $(q \times p)$ ed il polinomio a denominatore è fattorizzato in termini della forma $(z - \lambda)^l$ e $((z - a)^2 - \omega^2)^\rho$ con l e ρ inferiori o uguali all'ordine geometrico dell'autovalore al quale si riferiscono.

- l'espressione della risposta forzata in uscita

$$Y_f(z) = W(z)U(z)$$

comporta anche nel caso discreto una semplificazione non solo sulla risoluzione dei problemi diretti, ma anche di quelli inversi. Sempre con riferimento ad un sistema con un ingresso ed una sola uscita, si evince subito che la $W(z)$ o la $U(z)$ possono essere calcolati direttamente mediante divisione tra funzioni polinomiali, cosicché nel caso monodimensionale l'operazione di deconvoluzione si riduce ad una semplice divisione.

- Nel caso discreto tra gli ingressi di tipo polinomiale assumono importanza, come già evidenziato, i polinomi fattoriali, detti ingressi canonici, che hanno l'espressione

$$\delta_{-[k+1]} = \frac{t^{[k]}}{k!} = \frac{t(t-1)\cdots(t-k+1)}{k!}$$

la cui Trasformata \mathcal{Z} risulta essere

$$\mathcal{Z}\left[\frac{t^{[k]}}{k!}\right] = \frac{z}{(z-1)^{k+1}}.$$

Per verificare quanto asserito è necessario innanzitutto notare che

$$\mathcal{Z}[tf(t)] = -z \frac{d}{dz} F(z) \quad (4.57)$$

Infatti

$$\frac{d}{dz} F(z) = \frac{d}{dz} F(z) \left(f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots \right) = -\left(\frac{f(1)}{z^2} + \frac{2f(2)}{z^3} + \frac{3f(3)}{z^4} \right)$$

per cui

$$-z \frac{d}{dz} F(z) = \frac{f(1)}{z} + \frac{2f(2)}{z^2} + \dots = \mathcal{Z}[tf(t)]$$

Per il risultato generale possiamo procedere per induzione, supponendo che sia vero per k e mostrando che è verificato per $k+1$. Infatti per $k=1$ abbiamo che è verificato essendo

$$\mathcal{Z}[t] = -z \frac{d}{dz} \frac{z}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[\frac{t^{[k+1]}}{(k+1)!}\right] &= \mathcal{Z}\left[\frac{t^{[k]}}{k!} \frac{t-k}{k+1}\right] = -z \frac{d}{dz} \frac{z}{(z-1)^{k+1}} \frac{1}{k+1} - \frac{k}{k+1} \frac{z}{(z-1)^{k+1}} \\ &= \frac{z}{k+1} \frac{z}{(z-1)^{k+2}} - \frac{k}{k+1} \frac{z}{(z-1)^{k+1}} = \frac{z}{(z-1)^{k+2}}\end{aligned}$$

Ne segue che

$$W_{-k}(z) = W(z) \frac{z}{(z-1)^k}.$$

In base a quanto esposto rimane quindi individuato un metodo alternativo per il calcolo delle risposte o, ciò che è equivalente, per il passaggio alla rappresentazione esplicita. Assegnato un ingresso, e calcolatane la trasformata \mathcal{Z} , ed uno stato iniziale la soluzione richiede il calcolo di $(zI - A)^{-1}z$, semplici moltiplicazioni ed una operazione di antitrasformazione. L'operazione di antitrasformazione è particolarmente semplice in presenza di ingressi che ammettono trasformate razionali; in tal caso le espressioni da antitrasformare sono funzioni razionali che possono essere antitrasformate senza difficoltà una volta calcolate le corrispondenti espansioni in frazioni parziali, con qualche accorgimento rispetto al caso continuo.

4.6.2 La matrice di transizione ed i modi naturali

Come già messo in evidenza la matrice di transizione $\Phi(z)$ assume l'espressione

$$\Phi(z) = \mathcal{Z}[A^t] = (zI - A)^{-1}z.$$

È una matrice $n \times n$ i cui coefficienti sono funzioni razionali proprie. Per tale ragione non è possibile applicare direttamente lo sviluppo in frazioni parziali, che richiede che il grado dei coefficienti a numeratore sia strettamente minore di quello a denominatore.

Per poter quindi calcolare la $\Phi(t)$ a partire dalla $\Phi(z)$, si può considerare l'espansione in frazioni parziali della

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(z)}{z} &= (zI - A)^{-1} = \frac{(zI - A)^a}{|zI - A|} \\ &= \frac{E(z)}{\prod_{i=1}^r (z - \lambda_i)^{m_i} \prod_{k=1}^c ((z - \alpha_k)^2 + \omega_k^2)^{g_k}} = \frac{E(z)}{m(z)}\end{aligned}$$

Moltiplicando ambo i membri per z si ottiene quindi l'espressione di $\Phi(z)$ data da

$$\Phi(z) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{m_i} \frac{R_{ij}z}{(z - \lambda_i)^j} + \sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{g_k} \frac{L_{ka_j}z^2 + L_{kb_j}z}{[(z - \alpha_k)^2 + \omega_k^2]^j}. \quad (4.58)$$

Nel caso di poli complessi coniugati coincidenti, le formule risultano essere piuttosto complesse, pertanto si ricorda solo il caso reale per il quale

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z - \lambda_i)^j}\right] = \frac{t^{[j-1]}}{(j-1)!} \lambda_i^t \delta_{-1}(t).$$

È possibile quindi calcolare la matrice di transizione nel tempo mediante espansione in fratti e operazioni di antitrasformazione. Per i dettagli ci si può riferire alle considerazioni ed alle formule elaborate nello studio dei sistemi a tempo continuo, ricordando che si deve avere l'accortezza di sviluppare $\frac{\Phi(z)}{z}$, per poi moltiplicare tutto per z .

Come nel caso continuo è possibile stabilire una relazione tra i risultati ottenuti nel dominio del tempo con quelli ottenuti nella variabile $z \in \mathbb{C}$.

Con riferimento ad un operatore regolare, l'evoluzione libera si ottiene moltiplicando la (4.58) per lo stato iniziale x_0 . Per i modi aperiodici ed alternanti si ha quindi:

$$\frac{R_i z}{z - \lambda_i} x_0$$

dove anche in questo caso $R_i = \sum_{l=1}^{\mu_i} u_{il} v'_{il}$ e mette in luce il fatto che esso ha rango μ_i . Per i modi naturali pseudoperiodici si ha invece:

$$\frac{2R_{ka}(z^2 - \alpha_k z) - 2R_{kb}\omega_k z}{(z - \alpha_k)^2 + \omega_k^2} x_0 = \frac{2R_{ka}(z^2 - z \cos \theta_k |\lambda_k|) - 2R_{kb} \cos \theta_k |\lambda_k| z}{z^2 - 2z \cos \theta_k |\lambda_k| z + |\lambda_k|^2} x_0.$$

dove i residui hanno le espressioni (4.18) e rango pari a γ_k .

Nel caso in cui $\mu_i = 1$ e $\gamma_k = 1$, oppure si mantengano distinti i modi naturali lasciando che compaiano leggi temporali coincidenti, si ottengono le relazioni seguenti, che mettono bene in luce la corrispondenza con lo studio fatto nel dominio del tempo:

$$R_i x_0 = c_i u_i$$

$$\begin{aligned} & \frac{2R_{ka}(z^2 - z \cos \theta_k |\lambda_k|) - 2R_{kb} \cos \theta_k |\lambda_k| z}{z^2 - 2z \cos \theta_k |\lambda_k| z + |\lambda_k|^2} x_0 = \\ & = \frac{m_k (z \cos \theta_k |\lambda_k| \cos \varphi_k + (z^2 - z \cos \theta_k |\lambda_k|) \sin \theta_k)}{(z^2 - 2z \cos \theta_k |\lambda_k| z + |\lambda_k|^2)} u_{ka} \\ & + \frac{m_k ((z^2 - z \cos \theta_k |\lambda_k|) \cos \theta_k - z \cos \theta_k |\lambda_k| \sin \varphi_k)}{(z^2 - 2z \cos \theta_k |\lambda_k| z + |\lambda_k|^2)} u_{kb} \end{aligned}$$

ove si è tenuto conto delle definizioni dei parametri. Infatti, antitrasformando secondo Laplace si ottengono i modi aperiodici e pseudoperiodici

$$c_i \lambda_i^t u_i = m_k |\lambda_k|^t (\sin(\theta_k t + \varphi_k) u_{ka} + \cos(\theta_k t + \varphi_k) u_{kb})$$

Esempio 4.6.1 Si consideri il sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0.5 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= (1 \ 0) x(t) \end{aligned}$$

Si vuole calcolare la $\Phi(t)$. A tale scopo si considera innanzitutto

$$\frac{\Phi(z)}{z} = (zI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} z-0.5 & 0 \\ -1 & z-1 \end{pmatrix}}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}{(z-1)} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{(z-0.5)}.$$

Ne segue, moltiplicando ambo i membri per z , che

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \frac{z}{(z-1)} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{z}{(z-0.5)}$$

da cui, antitrasformando,

$$\Phi(t) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} (0.5)^t \right) \delta_{-1}(t).$$

Per il calcolo della risposta forzata in uscita è necessario calcolare la funzione di trasferimento

$$W(z) = C(zI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{z-1} \quad (4.59)$$

La presenza di un unico polo nella funzione di trasferimento indica che un solo dei due modi naturali che caratterizzano il sistema è sia eccitabile che osservabile.

4.6.3 la funzione di trasferimento e la risposta forzata

Valgono per la funzione di trasferimento, le sue rappresentazioni, le caratteristiche della risposta forzata e delle sue proprietà in relazione alla forma dell'ingresso e della sua Z -trasformata. Vengono qui di seguito richiamati gli aspetti salienti e messe in luce alcune peculiarità.

Una prima questione che bisogna sottolineare è la definizione di guadagno:

Si definisce guadagno di un sistema a tempo discreto (2.34) il valore della funzione di trasferimento in $z = 1$ dopo avere eliminato eventuali poli in 1.

La (4.59) è la funzione di trasferimento di un dispositivo detto integratore numerico e rappresentato dalle equazioni:

$$\begin{cases} x(t+1) &= x(t) + u(t), \quad x(0) = 0 \\ y(t) &= x(t), \quad W(t) = 1 \end{cases}$$

da cui si deduce che

$$y(t) = x(0) + \sum_{\tau=0}^{t-1} u(\tau) = \sum_{\tau=0}^{t-1} u(\tau).$$

L'integratore numerico effettua quindi una somma dei valori del segnale in ingresso proprio come l'integratore continuo, caratterizzato da una funzione di trasferimento $W(s) = \frac{1}{s}$, e rappresentato dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= u(t), \quad x(0) = 0 \\ y(t) &= x(t), \quad W(t) = 1 \end{cases}$$

effettua l'integrale

$$y(t) = x(0) + \int_0^t u(\tau) d\tau = \int_0^t u(\tau) d\tau.$$

Si ha quindi una corrispondenza tra le operazioni di integrazione discreta e continua: la funzione di trasferimento in z di un integratore discreto (sommatore) ha un polo in $z = 1$, mentre la funzione di trasferimento in s di un integratore continuo ha un polo in $s = 0$.

Anche per i sistemi a tempo discreto valgono considerazioni analoghe a quelle per i sistemi a tempo continuo quando la trasformata dell'ingresso ha un fattore a denominatore coincidente con uno a denominatore della $W(z)$, oppure quando ha un fattore che si cancella con uno a numeratore della $W(z)$. Nel primo caso si realizza un'esaltazione del comportamento corrispondente a quel fattore (si pensi ad un polo o una coppia di complessi), nel secondo si realizza un'azione di filtro rispetto alle caratteristiche di comportamento legate al fattore nella trasformata dell'ingresso.

Nel seguito viene proposto un esempio che mette in luce le caratteristiche filtranti di un dato sistema nei confronti di ingressi la cui trasformata ammette poli coincidenti con parte degli zeri della funzione di trasferimento.

Esempio 4.6.2 Si consideri il sistema con funzione di trasferimento

$$W(z) = \frac{z+2}{(z-0.5)(z+1)}.$$

Si vuole calcolare la risposta forzata all'ingresso $u(t) = a^t \delta_{-1}(t)$. Ricordando che anche in questo caso, la $Y_f(z)$ non è in generale strettamente propria, è necessario sviluppare $\frac{Y_f(z)}{z}$ che risulta essere pari a

$$\begin{aligned} \frac{Y_f(z)}{z} &= \frac{1}{z-a} \frac{z+2}{(z-0.5)(z+1)} \\ &= \frac{a+2}{(a-0.5)(a+1)} \frac{1}{z-a} + \frac{2.5}{(0.5-a)1.5} \frac{1}{z-0.5} + \frac{1}{(1+a)1.5} \frac{1}{z+1}. \end{aligned}$$

Conseguentemente

$$y_f(t) = \left(\frac{a+2}{(a-0.5)(a+1)} a^t + \frac{2.5}{(0.5-a)1.5} 0.5^t + \frac{1}{(1+a)1.5} (-1)^t \right) \delta_{-1}(t)$$

Una parte della risposta ha quindi lo stesso andamento temporale dell'ingresso. Ciò non accade solo se si verifica una cancellazione con lo zero della funzione di trasferimento ovvero in questo caso se $a = -2$. Dunque gli zeri di una funzione di trasferimento rappresentano potenzialmente azioni di filtro nei confronti di prefissate classi di ingressi o parti di essi; si tratta di quelle parti degli ingressi la cui trasformata \mathcal{Z} ha uno o più poli coincidenti con uno o più zeri della funzione di trasferimento.

Per quanto riguarda il calcolo della risposta forzata si possono ripetere le stesse considerazioni che si sono fatte per i sistemi a tempo continuo. In questo caso bisogna però ricordare che per poter antitrasformare agevolmente, piuttosto che sviluppare in fratti $y_f(z)$, conviene sviluppare $\frac{y_f(z)}{z}$, per poi moltiplicare il risultato per z .

In particolare, si procederà ora all'analisi della risposta forzata per alcune classi di ingressi facendo riferimento ad un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento del tipo

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}{\prod_{i=1}^p (z - p_i)^{l_i} \prod_{k=1}^q ((z - \alpha_k)^2 - \omega_k^2)^{h_k}} \quad (4.60)$$

Esempio 4.6.3 Si calcoli la funzione di trasferimento di un sistema avente risposta indiciale

$$w_{-1}(t) = \frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^t + \frac{8}{3} \left(-\frac{1}{4} \right)^t \right) \delta_{-1}(t).$$

Ricordando la risposta indiciale otteniamo che, nel dominio della trasformata \mathcal{Z} ,

$$W_{-1}(z) = W(z)U(z), \quad U(z) = \frac{z}{z-1}.$$

in cui

$$W_{-1}(z) = \mathcal{Z}[w_{-1}(t)] = \frac{z}{(z-1)(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{4})}.$$

Otteniamo quindi l'uguaglianza

$$\frac{z}{(z-1)(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{4})} = W(z) \frac{z}{z-1}$$

da cui deduciamo

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{4})}.$$

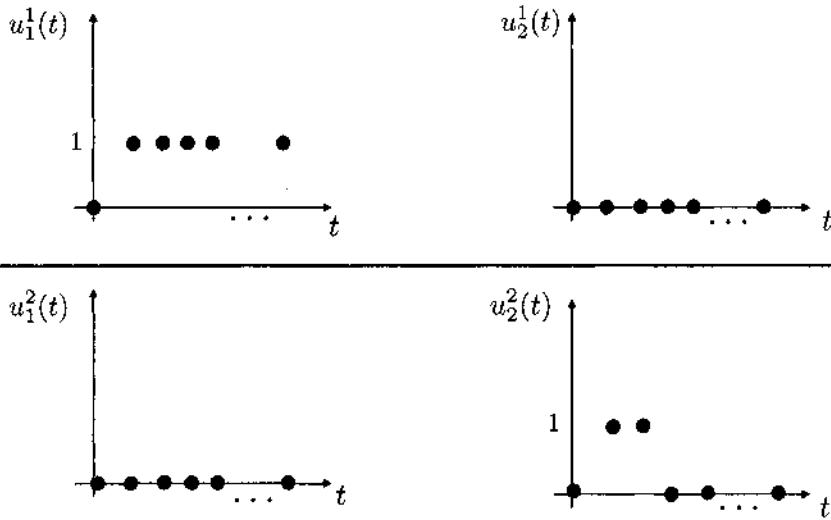
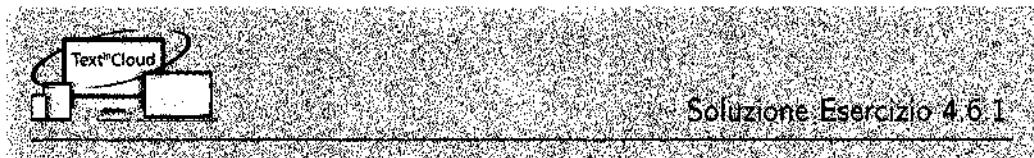


Figura 4.4

Esercizio 4.6.1 Calcolare la funzione di trasferimento di un sistema a tempo discreto con due ingressi e un'uscita ($p = 2, q = 1$) sapendo che, per condizione iniziale nulla, agli ingressi $u^1(t) = (u_1^1(t) \quad u_2^1(t))^T$ e $u^2(t) = (u_1^2(t) \quad u_2^2(t))^T$ riportati in Figura 4.4 corrispondono, rispettivamente, le seguenti uscite

$$y^1(t) = (-1)^{t-1} \delta_{-1}(t-1) + \frac{4}{3}(-0.5)^{t-1} \delta_{-1}(t-1) + \frac{1}{3} \delta_{-1}(t-1) \quad (4.61a)$$

$$y^2(t) = (0.1)^{t-2} \delta_{-1}(t-2) + (0.1)^{t-3} \delta_{-1}(t-3). \quad (4.61b)$$



Un ultimo aspetto che si vuole mettere in luce riguarda le caratteristiche della risposta forzata ad ingressi canonici nell'ipotesi di sistema esternamente stabile nello stato zero. Si ha, in questo caso,

$$W_{-k}(z) = W(z) \frac{z}{(z-1)^k} = z \left(\sum_{i=1}^k \frac{c_i}{(z-1)^i} + \frac{r_1}{z-p_1} + \cdots + \frac{r_n}{z-p_n} \right) \quad |p_i| < 1$$

con

$$c_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dz^i} W(z) \Big|_{z=1}$$

e quindi la risposta forzata

$$w_{-k}(t) = \sum_{i=1}^k c_i \frac{t^{[i-1]}}{(i-1)!} + \sum_{j=1}^N \frac{r_j}{z - p_j}.$$

Nel caso in cui l'ingresso è il gradino unitario, $u(t) = \delta_{-1}(t)$, si ha la *risposta indiciale* nell'ipotesi di sistema esternamente stabile nello stato zero

$$W_{-1}(z) = W(z) \frac{z}{z-1} = z \left(\frac{r_0}{z-1} + \frac{r_1}{z-p_1} + \dots + \frac{r_n}{z-p_n} \right) \quad |p_i| < 1$$

$$w_{-1}(t) = r_0 \delta_{-1}(t) + \sum_{i=1}^n r_i p_i^t$$

in cui il residuo r_0 ,

$$r_0 = \frac{W(z)}{z-1} (z-1) \Big|_{z=1} = W(1),$$

che coincide con il calcolo della funzione di trasferimento in $z = 1$, è proprio uguale al guadagno in quanto non vi sono poli in 1. Inoltre per l'assunzione di stabilità esterna nello stato zero tutti i poli della $W(z)$ hanno modulo strettamente minore di uno e la risposta si assesta al crescere del tempo intorno ad un andamento costante pari al valore del guadagno.

Si sottolinea anche in questo caso come il guadagno di un sistema a tempo discreto sia sempre definito: esso è pari a valore della funzione di trasferimento in uno dopo avere eliminato eventuali poli in tale punto. Questo parametro ha anche il significato sperimentale di andamento al quale tende ad assestarsi la risposta in presenza di un ingresso a gradino quando tutti i poli hanno modulo minore di uno.

Parallelo perfetto quindi con i sistemi a tempo continuo in cui il guadagno è $W(0)$ e ritroviamo la corrispondenza più volte citata tra lo 0 in s e 1 in z .

Procediamo nella nostra analisi osservando che assegnata

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}{a_0 + a_1 z + \dots + z^n} \quad n \geq m$$

il valore in zero può essere calcolato impiegando il *teorema del valore iniziale* (in appendice)

$$f(0) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} F(z)$$

Per la risposta indiciale, otteniamo

$$W_{-1}(z) = \frac{W(z)}{(z-1)} = \quad w_{-1}(0) = W(\infty) = \begin{cases} 0, & m < n \\ b_m, & m = n \end{cases}$$

da cui risulta che il valore in zero della risposta al gradino unitario è $\neq 0$ se e solo se $m = n$, altrimenti il primo valore $\neq 0$ si ha al tempo $t = n - m$ e la sua ampiezza è pari a b_m . Infatti ricordando il teorema della traslazione si calcola con facilità

$$w_{-1}(0) = w_{-1}(1) = \cdots = w_{-1}(n-m-1) = 0 \quad w_{-1}(n-m) = b_m.$$

In sintesi da un'analisi qualitativa di $W(z)$ risulta che il ritardo nella risposta indiciale è pari ad $n-m$, l'eccesso poli - zeri; l'ampiezza del primo campione non nullo nella risposta indiciale è pari a b_m ; al crescere del tempo la risposta indiciale tende ad assumere un valore costante e pari a $W(1)$.

4.6.4 La funzione di trasferimento del sistema a tempo discreto equivalente

Come messo in luce nel capitolo precedente, il campionamento delle evoluzioni nello stato e in uscita di un sistema a tempo continuo, S_{te} , quando l'ingresso è costante a tratti su intervalli di tempo pari agli intervalli di campionamento, T , e con essi sincronizzati, è descritto in modo esatto da una rappresentazione con lo stato a tempo discreto. Se (A, B, C) sono le matrici che definiscono il sistema a tempo continuo e (A_T, B_T, C_T) descrivono il tempo discreto equivalente, la funzione di trasferimento di quest'ultimo è

$$W_T(z) = C(zI - A_T)^{-1}B_T.$$

Ma se è assegnata la funzione di trasferimento del sistema a tempo continuo, $W(s)$, è possibile calcolare da essa la $W_T(z)$?

La risposta è affermativa e vale per essa la seguente formula

$$W_T(z) = \frac{z-1}{z} Z \left[\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{W(s)}{s} \right] \right]_{t=KT}.$$

L'uguaglianza scritta sottende una procedura di calcolo che si può leggere da destra e consiste nel:

1. calcolare la risposta indiciale del sistema a tempo continuo;
2. calcolarne il campionamento, semplicemente ponendo $t = kT$, dove k viene in questo paragrafo utilizzato per rappresentare il tempo discreto (in luogo di t , usato per il sistema a tempo continuo);
3. calcolare la Z-trasformata della funzione a tempo discreto ottenuta;
4. dividere per la Z-trasformata del gradino unitario a tempo discreto.

La validità di questa procedura è provata dai seguenti argomenti:

- essendo il sistema a tempo discreto equivalente lineare, la $W_T(z)$ può essere calcolata come rapporto tra un'uscita forzata e il corrispondente ingresso;

- la tenuta di un segnale a gradino a tempo discreto restituisce il gradino a tempo continuo, per cui la risposta indiciale del sistema a tempo discreto equivalente coincide con il campionamento della risposta indiciale del sistema a tempo continuo.

Si ha quindi che

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right]_{kT}$$

coincide con la risposta indiciale del sistema a tempo discreto; se ora se ne calcola la \mathcal{Z} -trasformata,

$$\mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right]_{kT}\right]$$

e la si divide per la \mathcal{Z} -trasformata del gradino a tempo discreto si ottiene la funzione di trasferimento cercata

$$W_T(z) = \frac{Y_f(z)}{U_f(z)} = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right]_{kT}\right].$$

Esempio 4.6.4 Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}x \end{cases}$$

realizzazione del modello

$$W(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Questo è un modello molto usuale, su cui si fondano molte considerazioni sia di analisi che di sintesi, di intervento e di strategie di controllo.

Applicando la procedura, si ottiene

$$\frac{W(s)}{s} = \frac{1}{s^3}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right] = \frac{t^2}{2} \quad e \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right]_{t=kT} = \frac{k^2 T^2}{2}.$$

A questo punto, calcoliamo

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right]_{t=kT}\right] &= \frac{T^2}{2} \mathcal{Z}[k^2] \\ \mathcal{Z}[k] &= \frac{z}{(z-1)^2} \quad e \quad \mathcal{Z}[k \cdot k] = -z \frac{d}{dz} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{T^2}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \end{aligned}$$

ottenendo infine

$$W_T(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right]_{t=kT}\right] = \frac{T^2}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \frac{z-1}{z} = \frac{T^2}{2} \frac{(z+1)}{(z-1)^2}.$$

Si osservi che la $W(s)$ nel precedente esempio ha due poli in zero, corrispondenti a due autovalori del sistema, in modo consistente la $W(z)$ ha due poli in $e^{0T} = 1$ (gli autovalori di A_T sono l'esponenziale degli autovalori (2.39), e quindi i poli della $W_T(z)$ sono gli esponenziali dei poli della $W(s)$).

Possiamo quindi concludere che per quanto riguarda i poli della $W_T(z)$ essi si trasformano secondo la corrispondenza esponenziale:

$$p_i^d = e^{p_i^s T}. \quad (4.62)$$

La situazione si presenta complessa per quanto riguarda gli zeri. Un primo aspetto riguarda il loro numero; è genericamente $(n - 1)$ indipendentemente da quanti siano gli zeri di $W(s)$. Quindi sotto discretizzazione appaiono nuovi zeri; più precisamente se $W(s)$ ha m zeri, $W_T(z)$ ha $(n - m - 1)$ zeri in più. Si potrebbe dimostrare che per T sufficientemente piccolo

$$z_i^D \cong e^{z_i^s T} \quad i = 1, \dots, m$$

$$z_i^D \cong \text{zeri del discretizzato di } \frac{1}{s^{n-m}}, \quad i = m + 1, \dots, n - 1.$$

È interessante osservare che per $(n - m) > 2$ gli zeri del discretizzato di $\frac{1}{s^{n-m}}$ hanno modulo maggiore di uno ($|z_i^D| > 1$), e, quindi, per T piccolo (come usualmente accade) la funzione di trasferimento, del discretizzato di un processo continuo con eccesso poli-zeri > 2 , presenta zeri che hanno modulo maggiore di uno, indipendentemente dalla collocazione degli zeri del modello continuo.

Questo fatto è importante nel progetto di sistemi di controllo quando il progetto impiega il modello a tempo discreto equivalente e si realizzano fenomeni di cancellazione degli zeri della funzione di trasferimento. Poiché come vedremo tali fenomeni accadono collocando azioni di controllo che realizzano tale cancellazione, ciò vuol dire che si dovrebbero impiegare azioni di controllo instabili. Per questo motivo, impiegando direttamente il linguaggio della stabilità si usa parlare di *zeri instabili*.

Si può inoltre facilmente comprendere la peculiarità del comportamento di sistemi (siano essi a tempo continuo che a tempo discreto) che hanno zeri instabili. Ricordando le caratteristiche di filtro che il sistema esercita rispetto ad ingressi la cui trasformata ha poli coincidenti con gli zeri, la presenza di zeri instabili si traduce nella presenza di ingressi di ampiezza crescente che hanno effetti che si annullano al crescere del tempo. Si tratta di un comportamento che si può presentare, ma che richiede particolare attenzione nel progetto del controllo.

Discretizzazione di sistemi con ritardo

Un'ultima considerazione riguarda la discretizzazione di sistemi che presentano ritardi sull'ingresso o sull'uscita.

La funzione di trasferimento di un sistema che presenta un ritardo τ sull'ingresso o sull'uscita, per il teorema della traslazione in Laplace si scrive come:

$$W_r(s) = e^{-\tau s} W(s).$$

Si consideri la semplice funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{a}{s+a} \quad e^{-\tau T} = e^{-(lT+mT)} \quad 0 < m < 1$$

si ha

$$\frac{W_r(s)}{s} = e^{-lTs} \frac{e^{-mTs} a}{s(s+a)}$$

$$\begin{aligned} W_T(z) &= \frac{z-1}{z} \frac{1}{z^l} z \left[\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-mTs}}{s} - \frac{e^{-mTs}}{s+a} \right]_{t=KT} \right] \\ &= \frac{z-1}{z^{l+1}} z \left(\delta_{-1}(kT+mT) - e^{-a(kT+mT)} \right) \\ &= \frac{z-1}{z^{l+1}} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{e^{-amT} z}{z-e^{-aT}} \right). \end{aligned}$$

Si ottiene quindi una $W_T(z)$ che è un rapporto di polinomi, in realtà si ottiene che il grado a denominatore è pari a $(l+1)$. Perciò si ha una funzione di trasferimento che è rapporto di polinomi, diversamente da quanto accade per il sistema a tempo continuo.



Approfondimento

Capitolo at glance!

La risposta a regime permanente e il comportamento in frequenza

Lo studio sinora condotto ha messo in luce le caratteristiche delle evoluzioni di un sistema dinamico lineare stazionario; elementi salienti sono la forma della risposta, che risulta essere composta da evoluzione libera e forzata, il ruolo dei modi naturali e la incompletezza del modello forzato (risposta impulsiva e funzione di trasferimento) rispetto alla rappresentazione con lo spazio di stato. Lo studio abbiamo imparato a condurlo nel dominio del tempo e della variabile complessa. È inoltre risultata evidente nello studio del dominio del tempo il significato fisico di risposta all'impulso che abbiamo compreso è associato al modello del comportamento forzato. In questo capitolo studieremo in quale modo la funzione di trasferimento possa essere collegata ad esperimenti ingresso-uscita rispetto a fissate classi di ingressi e sulla base di una diversa caratterizzazione della forma della risposta basata sul concetto di risposta a regime permanente. Questi aspetti sono alla base di una caratterizzazione del comportamento dinamico che si ispira alle risposte alle sollecitazioni periodiche; una classificazione in uso nel settore dell'ingegneria.

5.1

La risposta a regime permanente

Lo studio nel dominio complesso permette di comprendere come le caratteristiche della risposta di un sistema dinamico siano collegate al comportamento rispetto ad una classe particolare di sollecitazioni: le sollecitazioni periodiche. Questi aspetti sono alla base della cosiddetta analisi in frequenza di un sistema dinamico; un approccio al quale fanno ricorso gli ingegneri nello studio dei sistemi dina-

mici. Il punto di partenza è rappresentato dalla caratterizzazione del significato fisico della funzione di trasferimento valutata sui punti dell'asse immaginario e riposa sul concetto di risposta a regime permanente.

Definizione 5.1.1 La *risposta a regime permanente ad un assegnato ingresso* è quella funzione del tempo intorno alla quale, indipendentemente dallo stato iniziale, tende ad assestarsi la risposta in uscita al crescere del tempo.

Questa definizione riprende alcune caratteristiche del comportamento forzato in risposta a classi di ingressi, canonici e periodici, già avviata nel Capitolo 4. Si è infatti compreso che se un sistema è esternamente stabile nello stato zero, la risposta forzata al crescere del tempo tende ad assumere andamenti che dipendono dall'ingresso e per certi versi sono ad esso simili (corrispondenti ai poli della trasformata di Laplace). Ebbene approfondiremo nel seguito questo concetto nel caso generale.

Se si ricorda che la risposta in uscita è composta da evoluzione libera e forzata, si comprende che, in base alla definizione data, l'indipendenza dallo stato iniziale richiede ed è assicurata dalla condizione che tutte le funzioni in $\Psi(t) = Ce^{At}$ tendano a zero al crescere del tempo. Questo equivale a richiedere che i modi osservabili siano associati ad autovalori a parte reale negativa. Infatti, sotto tale condizione, in

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

la generica evoluzione libera per un fissato t_0 tende a zero al crescere del tempo, ovvero $y_l(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 \rightarrow 0$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e quindi $Ce^{A(t-t_0)} \rightarrow 0$ per $t_0 \rightarrow -\infty$. In realtà per un sistema fisico l'esistenza del regime permanente non può prescindere da un'ulteriore proprietà che rende possibile il corretto funzionamento del sistema stesso: si tratta della limitatezza di tutte le evoluzioni interne. Ciò equivale a richiedere, come risulta dallo studio condotto nel Capitolo 3, la stabilità interna garantita dalla presenza di autovalori a parte reale strettamente negativa se di ordine geometrico maggiore di uno, minore o uguale a zero se di ordine geometrico unitario.

Limitata in tal modo la classe dei sistemi ai quali ci riferiamo nel seguito (internamente stabili e caratterizzati da modi osservabili associati ad autovalori a parte reale strettamente negativa), vedremo preliminarmente nel seguito che per tale classe di sistemi l'esistenza della risposta a regime permanente può essere ricondotta all'esistenza del limite della successione di funzioni che si ottiene quando t_0 va a $-\infty$. Più precisamente diremo che, se esiste, la risposta a regime permanente al fissato ingresso $u(t)$ è la funzione del tempo ottenuta come

$$y_r(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau. \quad (5.1)$$

Dalla definizione si comprende che l'esistenza del regime permanente dipende non solo dalle proprietà del sistema, quelle fissate, ma anche dall'ingresso; in-

fatti deve essere assicurata la sommabilità della funzione integranda a secondo membro della precedente espressione. Vedremo che per fissate classi di ingressi, periodici e polinomiali, il regime permanente esiste ed ha la stessa forma dell'ingresso. La risposta a regime è dunque caratterizzata da alcuni parametri che ne precisano la modifica rispetto all'ingresso.

Per comprendere che la funzione così calcolata coincide con l'andamento verso il quale tende ad assestarsi la risposta del sistema basta osservare che, per la stazionarietà del sistema, osservare la risposta al tempo $(t + \bar{t})$ è equivalente ad osservarla al tempo t avendo applicato lo stesso ingresso a partire dall'istante $(t_0 - \bar{t})$. In altri termini, osservare al crescere del tempo equivale ad osservare al tempo t le risposte alla successione di ingressi ottenuta per traslazione verso l'infinito negativo. Da un punto di vista formale si tratta di mostrare che

$$\forall \varepsilon, \exists T_a \geq 0 : \|y(t) - y_r(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq T_a.$$

T_a prende il nome di *tempo di assestamento* e dipende dagli autovalori della matrice dinamica A del sistema.

A questo proposito si osservi che in base alla definizione data ed in virtù delle proprietà di regolarità della risposta impulsiva e per funzioni di ingresso regolari l'operazione di limite può essere spostata sull'estremo di integrazione e, a seguito di un cambiamento di variabile, si ottiene

$$y_r(t) = \int_{-\infty}^t W(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^\infty W(\xi)u(t-\xi)d\xi$$

cioè che consente di esprimere la differenza $y - y_r$ in istanti di tempo superiori a T_a , come

$$\begin{aligned} y(T_a + t) - y_r(T_a + t) &= Ce^{A(T_a+t)}x_0 \\ &+ \int_0^{T_a+t} W(T_a+t-\tau)u(\tau)d\tau - \int_0^\infty W(\xi)u(T_a+t-\xi)d\xi \end{aligned}$$

da cui segue

$$y(T_a + t) - y_r(T_a + t) = Ce^{A(T_a+t)}x_0 - \int_{T_a+t}^\infty W(\xi)u(T_a+t-\xi)d\xi,$$

che può essere inferiore ad ogni prefissato ε per $T_a(\varepsilon)$ sufficientemente grande. Ciò è conseguenza del fatto che gli elementi di Ce^{At} e $W(t)$ sono combinazioni lineari di funzioni esponenziali decrescenti che diventano infinitesime al crescere del tempo.

Per concludere quest'analisi preliminare sulla risposta a regime permanente si osserva che rispetto ad essa assume un significato fisico interessante la decomposizione della risposta in uscita come somma di due risposte denominate **regime transitorio**, $y_t(t)$, e **regime permanente**, $y_r(t)$,

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t)$$

Poggiano su tale scomposizione della risposta alcuni metodi di studio e di progetto di sistemi dinamici lineari stazionari. Essa è complementare rispetto alla scomposizione già introdotta, in risposta libera e risposta forzata

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t).$$

Nel merito, vale la pena osservare che poiché la risposta a regime coincide con l'andamento limite, al crescere del tempo, della risposta ed esiste se la risposta in evoluzione libera tende a zero, possiamo concludere che il regime permanente è parte della risposta forzata (la sua componente persistente) mentre la risposta libera è parte del transitorio (la sua componente indipendente dall'ingresso).

5.1.1 Il regime permanente ad ingressi periodici

Ciò premesso è importante caratterizzare la risposta a regime permanente ad ingressi di tipo periodico puro. Sia, dunque, $u(t) = e^{j\omega t}$ si ha

$$y_r(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t-\tau) e^{j\omega \tau} d\tau$$

e posto $(t-\tau) = \xi$, sviluppando il calcolo ricordando che per la regolarità delle funzioni coinvolte il limite si sposta sull'estremo di integrazione, si ottiene

$$y_r(t) = e^{j\omega t} \int_0^\infty W(\xi) e^{-j\omega \xi} d\xi = e^{j\omega t} W(s) \Big|_{s=j\omega}.$$

L'ultima uguaglianza è garantita dal fatto che siccome tutti i coefficienti delle leggi esponenziali che compongono la $W(t)$ sono a parte reale negativa, l'ascissa di convergenza della trasformata di Laplace, che coincide con la più grande di esse, è essa stessa negativa. L'asse immaginario appartiene dunque alla regione di convergenza e la trasformata è ben definita nei suoi punti.

Possiamo ora calcolare la risposta a regime permanente ad un ingresso periodico puro, sia esso

$$u(t) = \sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

Se infatti usiamo la rappresentazione modulo-fase per la funzione $W(j\omega)$

$$W(j\omega) = M(\omega) e^{j\phi(\omega)},$$

ove

$$M(\omega) = |W(j\omega)|, \quad \phi(\omega) = \angle W(j\omega),$$

osserviamo che $W(j\omega)$, trasformata di Laplace di una funzione reale $W(t)$

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} W(t)(\cos \omega t + j \sin \omega t) dt$$

verifica

$$W(-j\omega) = M(\omega)e^{-j\phi(\omega)}.$$

Applicando la sovrapposizione degli effetti, si ottiene

$$y_r(t) = \frac{M(\omega)e^{j\phi(\omega)}e^{j\omega t} - M(\omega)e^{-j\phi(\omega)}e^{-j\omega t}}{2j}$$

e quindi

$$v_r(t) = M(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega)) \quad (5.2)$$

Si ha quindi l'importante risultato che la risposta a regime permanente ad un ingresso periodico puro con pulsazione ω , è una funzione dello stesso tipo dell'ingresso con la stessa pulsazione, modificata in modulo e fase di quantità $M(\omega)$ e $\phi(\omega)$ che sono il modulo e la fase di $W(s)$ calcolata in $s = j\omega$, $\omega > 0$.

Possiamo dunque concludere affermando che assegnato un sistema esternamente stabile nello stato zero, caratterizzato da modi osservabili asintoticamente stabili ed internamente stabile, il modulo e la fase della funzione di $W(j\omega)$ caratterizzano, al variare di ω , il comportamento del sistema a regime per ingressi periodici puro. $W(j\omega)$ prende il nome di **risposta armonica** (matrice delle risposte armoniche).

Il risultato ottenuto rappresenta un importante complemento di informazione sul significato della funzione di trasferimento. Tale funzione infatti, modello del comportamento forzato del sistema, nel suo complesso contiene tutte le informazioni sul collegamento dinamico ingresso-uscita; a questo si aggiunge il fatto che in ogni punto dell'asse immaginario, il suo modulo e la sua fase rendono conto del comportamento a regime permanente a quella pulsazione. La $W(j\omega)$ puntualmente (per ogni fissata $\omega \geq 0$) rende conto del comportamento a regime, nel complesso rende conto del comportamento dinamico del sistema.

Si usa dire che *la risposta armonica caratterizza il comportamento in frequenza di un sistema dinamico*. Infatti i suoi diagrammi di modulo e fase, danno al variare della pulsazione, la modifica di modulo e fase di un segnale periodico puro che transita attraverso il sistema e ne guardiamo la risposta a regime permanente.

Ma proviamo a riflettere sul risultato ottenuto da un punto di vista applicativo. Supponiamo quindi di avere un dispositivo fisico, non un modello matematico, e di avere assieme ad esso i grafici dei diagrammi di modulo e fase della risposta armonica. Supponiamo si tratti di un altimetro; un dispositivo che misura

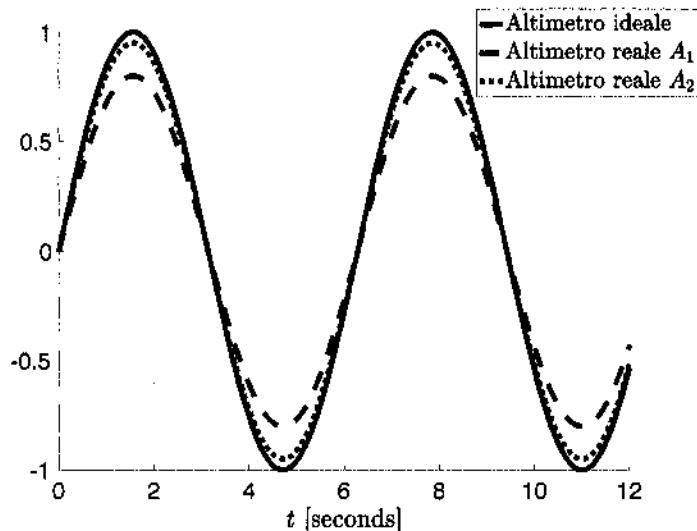


Figura 5.1: Il comportamento di un altimetro ideale e due altimetri reali.

l'altezza sul livello del mare. Cercheremo di comprendere in quale misura tali diagrammi possono essere impiegati per valutare le sue prestazioni. I diagrammi precisano, al variare della frequenza, le variazioni in ampiezza e fase (ritardo o anticipo) che l'altimetro misura a regime se sottoposto a variazioni periodiche dell'altezza. Ovviamente un altimetro ideale dovrebbe misurare l'ampiezza reale con una variazione di fase nulla, i diagrammi di modulo e fase della risposta armonica dell'altimetro ideale sono, quindi, $M(\omega) = 1$ e $\phi(\omega) = 0$, ciò che corrisponde ad un sensore lineare istantaneo con guadagno unitario come in Figura 5.1. Nella realtà ci si deve comunque accontentare di un dispositivo che ha modulo e fase della risposta armonica del tipo di quelli indicati in 5.1 con la linea tratteggiata. Nel caso specifico della figura i due diagrammi tracciati si riferiscono a due diversi altimetri, A_1 e A_2 , che ad esempio alla pulsazione ω^* danno letture di 0.8 volte l'ampiezza dell'ingresso per il primo (con un errore del 20%) e 0.95 volte l'ampiezza dell'ingresso per il secondo (con un errore del 5%); e così via al variare della frequenza. Ma in quale modo è possibile collegare l'andamento dei due diagrammi al comportamento dinamico dei due dispositivi? Per fare questo possiamo pensare alla risposta forzata ad un ingresso canonico, e tra questi il più semplice: il gradino unitario. L'altimetro ideale restituirebbe il gradino, A_1 ed A_2 danno una risposta indiciale che converge al valore di regime che nel caso in esame è per entrambi pari al valore vero (poiché il guadagno è $K = 1$) ma con diverse caratteristiche (tempi di salita) che, come l'intuizione suggerisce, sarà minore per il secondo; questo accade in quanto il secondo è in grado di seguire con un errore inferiore segnali a frequenza elevata, manifesta una minore inerzia nel rispondere alle sollecitazioni, e sarà quindi caratterizzato da costanti di tempo inferiori.

Esempio 5.1.1 Si calcoli la risposta indiciale dei due sistemi seguenti

$$W^1(s) = \frac{1}{1+s}, \quad W^2(s) = \frac{1}{1+0.1s} \quad (5.3)$$

che hanno $K = 1$ una sola costante di tempo pari ad $\tau_1 = 1$ e $\tau_2 = 0.1$ rispettivamente.

Denotata con $w_{-1}^i(t)$ la risposta indiciale del sistema i -esimo ($i = 1, 2$), otteniamo

$$y^i(t) = w_{-1}^i(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}})\delta_{-1}(t)$$

e quindi, come illustrato in Figura 5.2

$$y^1(t) = w_{-1}^1(t) = (1 - e^{-t})\delta_{-1}(t), \quad y^2(t) = w_{-1}^2(t) = (1 - e^{-10t})\delta_{-1}(t).$$

Ai due sistemi, in caso di ingresso a gradino, corrisponde la stessa risposta a regime permanente mentre le risposte transitorie sono distinte e date da

$$y_t^i(t) = -e^{-\frac{t}{\tau_i}}, \quad i = 1, 2.$$

Nel caso in esame, come riportato in Figura 5.2 e facilmente intuibile, il sistema con costante di tempo più bassa (e quindi polo più negativo), raggiunge in maniera più veloce il comportamento di regime (il transitorio si estingue più velocemente).

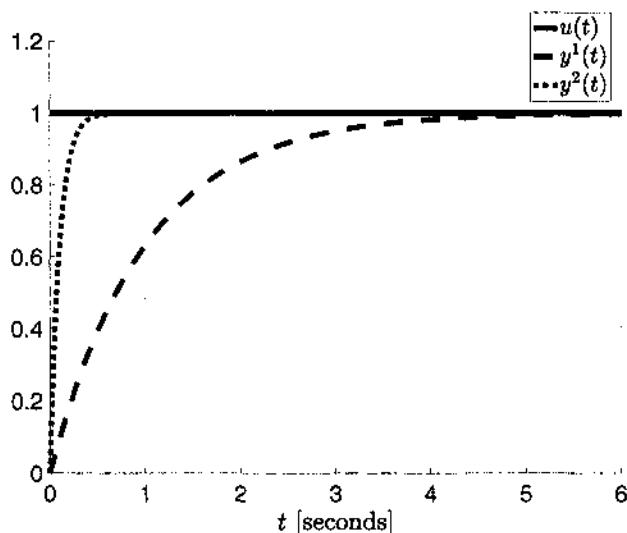


Figura 5.2

Esempio 5.1.2 Con riferimento ai sistemi (5.3), calcolare la risposta a regime permanente all'ingresso

$$u(t) = \sin t, \quad \omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Definiamo la risposta armonica dei sistemi corrispondenti

$$W^i(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau_i \omega}, \quad i = 1, 2$$

e quindi

$$W^1(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}, \quad W^2(j\omega) = \frac{1}{1 + j0.1\omega}.$$

Utilizzando la formula (5.2) per pulsazione $\omega = 1$, otteniamo

$$y_r^i(t) = M^i(1) \sin(t + \varphi^i(1)), \quad i = 1, 2$$

e

$$M^i(1) = |W^i(j)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau_i^2}}, \quad \varphi^i(1) = \angle W^i(j) = -\angle(1 + j\tau_i). \quad (5.4)$$

e, nei casi specifici,

$$\begin{aligned} M^1(1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7, \quad \varphi^1(1) = -45^\circ \\ M^2(1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.99, \quad \varphi^2(1) \approx -5.7^\circ. \end{aligned}$$

Ne segue che la risposta a regime permanente è data da

$$y_r^1(t) = 0.8 \sin(t - 45), \quad y_r^2(t) = 0.99 \sin(t - 5).$$

Nel caso del primo sistema, quindi, l'ingresso subisce un'attenuazione del 30% mentre, nel secondo, l'attenuazione è pari a, circa, l'1% rispetto il segnale in ingresso.

Le risposte dei due sistemi all'ingresso dato sono riportate in Figura 5.3.

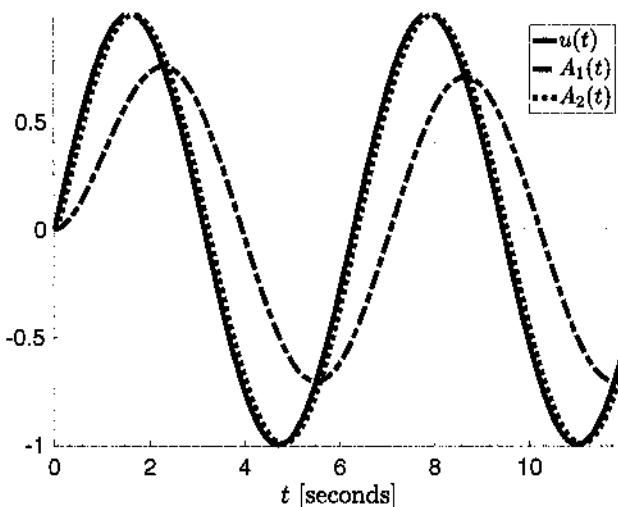


Figura 5.3

La decomposizione in risposta transitoria e permanente, che risulta dallo studio che stiamo conducendo, si propone come una caratterizzazione del comportamento di un sistema dinamico certamente interessante in quanto rilevabile dall'osservazione dell'uscita. È possibile osservando l'uscita forzata recuperare le informazioni sull'evoluzione libera? La risposta a regime, l'andamento intorno al quale si assesta la risposta, certamente lo permette. Ma una questione sorge spontanea: quanto tempo bisogna aspettare per poter affermare di osservare la risposta a regime? Quanto ci vuole perché si possa considerare estinto il transitorio? In teoria un tempo infinito, poiché si tratta di un andamento limite ed il transitorio si annulla con leggi di moto esponenziali; è convenzione comune assumere che, per scostamenti dell'ordine di qualche punto percentuale rispetto al valore di regime, quella che si osserva sia la risposta di regime. Più precisamente si usa a tale proposito fissare il massimo scostamento ammesso ed impiegare la nozione di **tempo di assestamento** T_a rispetto ad esso: questo è l'istante di tempo a partire dal quale lo scostamento resta inferiore o uguale al massimo scostamento ammesso. Ebbene poiché il transitorio, composto dall'evoluzione libera e dalla parte non persistente della risposta forzata, dipende dalla parte reale degli autovalori, più queste saranno piccole (molto negative) più rapidamente si estingue e inferiore sarà T_a . Detto altrimenti, più piccole sono le costanti di tempo più rapidamente si raggiunge il regime. Si potrebbe verificare che per una vasta gamma di sistemi dinamici il T_a corrispondente al 4% di errore è pari a circa quattro volte la massima costante di tempo

$$T_a \approx 4 \tau_{max}.$$

Per un collegamento con i sistemi reali si pensi ad una rete elettrica nella quale la massima costante di tempo è dell'ordine dei millesimi di secondo o ad un ge-

neratore di energia in cui la più grande delle costanti di tempo è dell'ordine delle ore!

Lo studio sinora condotto ci lascia intendere che la risposta a regime permanente e le modalità secondo le quali tale andamento viene raggiunto sono importanti per classificare il comportamento dei sistemi dinamici. Un ulteriore aspetto che lo studio ci lascia intendere è che tale caratterizzazione può anche essere ottenuta per via sperimentale, compiendo cioè esperimenti ingresso-uscita su un sistema fisico assegnato di cui non è noto il modello. A partire da un tale sistema, che sappiamo essere lineare, possiamo infatti compiere un certo numero di esperimenti in cui misuriamo la variazione di modulo e fase che subiscono nelle risposte a regime ad ingressi periodici puri di diverse pulsazioni. Questi valori di modulo e fase possono essere impiegati per ricostruire l'andamento dei grafici al variare della pulsazione e successivamente l'espressione matematica della risposta armonica e, quindi, della funzione di trasferimento.

Quelli qui sinteticamente esposti sono i punti salienti di un procedimento di identificazione del modello secondo un approccio cosiddetto a *scatola nera*. Tale approccio presuppone che non si conosca il sistema, ma che si possano fare esperimenti; sia cioè accessibile l'ingresso e si possano misurare le uscite. L'effettuazione di più misure ingresso-uscita su risposte a regime ad ingressi periodici puri con diverse pulsazioni $\omega_1, \dots, \omega_N$, permette, quindi, di calcolare M_i e ϕ_i , $i = 1, \dots, N$. Successivamente si imposta e risolve il problema matematico cosiddetto di *interpolazione* mediante una funzione a struttura definita: si tratta di individuare due interi n ed m e due polinomi $n(s)$ e $d(s)$ di variabile complessa, di grado m e n rispettivamente, tali che, posto $W(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$, si abbia

$$\left| W(s) \right|_{s=j\omega_i} = M_i, \quad \angle W(s) \Big|_{s=j\omega_i} = \phi_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Ovviamente quanto detto rappresenta la linea concettuale del procedimento di identificazione che presenta aspetti complessi legati alle scelte di N , m ed n , alla definizione di approssimazioni accettabili e al filtraggio dell'effetto di rumori sulle misure.

In conclusione la risposta armonica $W(j\omega)$ descrive il comportamento in frequenza di un sistema dinamico lineare stazionario e allo stesso tempo consente di dare alla funzione di trasferimento un'interpretazione fisica equivalente a quella data alla risposta impulsiva. Per questo motivo assumono importanza le rappresentazioni grafiche della risposta armonica. Le più note sono: le rappresentazioni di **Bode**, diagrammi di modulo (valutato in una scala logaritmica in uso nell'ingegneria, misure in dB) e fase, entrambi rispetto ad un'ascissa in scala logaritmica; quella **olare**: una curva nel piano complesso tarata in ω che descrive l'immagine secondo $W(s)$ dell'asse immaginario; la rappresentazione di **Nichols**: equivalente a quellaolare, ma rispetto ad un sistema di coordinate ortogonali modulo-fase con una scalatura ancora una volta in dB per il modulo.

Nel prossimo paragrafo viene presentata una procedura per il tracciamento di tali grafici. L'interesse di tale argomento riposa, in base alle considerazioni precedenti, sull'importanza di disporre di una chiave di lettura che consenta di

comprendere il comportamento dinamico a partire dalla conoscenza delle risposte a regime a sollecitazioni periodiche.

È opportuno, per concludere l'argomento del calcolo della risposta a regime ad ingressi periodici, sottolineare che il risultato ottenuto nel dominio del tempo può essere rielaborato a partire dalle considerazioni già fatte nel Capitolo 4 al Paragrafo 4.5 e nell'Esempio 4.5.10. La risposta a regime permanente coincide infatti con la parte persistente, indicata con $y_r(t) = (y_f(t))_r$, nella (4.44) e come tale risulta pari all'ingresso modificato tenendo conto dei *residui* associati alla coppia di poli immaginari che definiscono l'ingresso periodico. Lo studente non troverà difficoltà nel verificare che tale modifica corrisponde ad effettuare una variazione di modulo ed una variazione di fase.

Infine per quanto riguarda la risposta a regime ad ingresso periodico composto quale quello calcolato nell'Esempio 4.5.10 viene qui di seguito riportato il grafico della risposta che mostra chiaramente la deformazione che l'ingresso subisce a seguito delle modifiche su ciascun segnale componente messe in luce dai diagrammi di modulo e fase della risposta armonica

Esempio 5.1.3 Si consideri ancora il sistema trattato nell'Esempio 4.5.10 per cui abbiamo calcolato, in corrispondenza dell'onda quadra e dello stato iniziale $x_0 = (1 \ 1)'$, la risposta in uscita

$$y(t) = 2(e^{-t} - e^{-2t})\delta_{-1}(t) + \frac{4}{\pi} \sum_{i \geq 1} \frac{\omega_i e^{-t} + \sin(\omega_i t) - \omega_i \cos(\omega_i t)}{(2i-1)(1+\omega_i^2)} \delta_{-1}(t). \quad (5.5)$$

Poiché il sistema è asintoticamente stabile, esiste la risposta a regime permanente che, nel caso trattato, è facilmente deducibile dall'espressione della risposta forzata calcolata (5.5) eliminando i termini che svaniscono al crescere del tempo (che definiscono la componente transitoria). Otteniamo infatti che la risposta a regime permanente è quindi data da

$$y_r(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{i \geq 1} \frac{\sin(\omega_i t) - \omega_i \cos(\omega_i t)}{(2i-1)(1+\omega_i^2)} \quad (5.6)$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{i \geq 1} \frac{M(\omega_i) \sin(\omega_i t + \varphi(\omega_i))}{(2i-1)} \quad (5.7)$$

in cui

$$M(\omega_i) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_i^2}}$$

e lo sfasamento $\varphi(\omega_i) = -\angle(1+j\omega_i)$ verifica

$$\cos(\varphi(\omega_i)) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_i^2}}, \quad \sin(\varphi(\omega_i)) = -\frac{\omega_i}{\sqrt{1+\omega_i^2}}.$$

L'andamento della risposta complessiva è riportato in Figura 5.4 fissando la pulsazione dell'onda quadra a $\omega = \frac{\pi}{6}$.

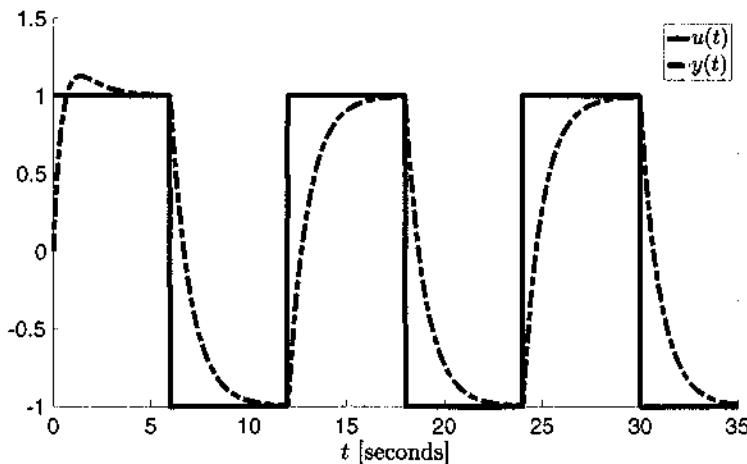


Figura 5.4

5.1.2 Il regime permanente a ingressi canonici

La struttura della risposta a regime permanente all'ingresso canonico di tipo k

$$\delta_{-k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \delta_{-1}(t) \quad (5.8)$$

può essere messa in luce operando in t o in s .

Nel dominio del tempo, procedendo come nel caso precedente, si ha

$$\begin{aligned} y_r(t) &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t W(t-r) \frac{r^k}{k!} dr \quad t-r=\xi \\ &= \int_0^\infty W(\xi) \frac{(t-\xi)^k}{k!} d\xi \\ &= \int_0^\infty W(\xi) \cdot \sum_{i=0}^k \frac{t^{k-i}}{k!} \xi^i (-1)^i \binom{k}{i} d\xi \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{1}{k!} \binom{k}{i} t^{k-i} (-1)^i \int_0^\infty W(\xi) \xi^i d\xi \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!(k-i)!} (-1)^i t^{k-i} M_i. \end{aligned}$$

Sia ottenere quindi un polinomio di grado k nei coefficienti M_i

$$M_i = \int_0^\infty W(\xi) \xi^i d\xi$$

che sono detti **momenti** della risposta impulsiva. Si osservi che tali coefficienti sono ben definiti in quanto, per le ipotesi sul sistema, nella risposta impulsiva

compaiono leggi temporali di modi associati ad autovalori a parte reale negativa, ciò che garantisce la limitatezza dell'integrale.

I momenti della risposta impulsiva sono collegati da una semplice relazione ai coefficienti dello sviluppo in serie di potenze intorno a $s = 0$, sviluppo di MacLaurin, della $W(s)$

$$W(s) = \sum_{i \geq 0} c_i s^i \quad \text{con} \quad c_i = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i W(s)}{ds^i} \right|_{s=0}. \quad (5.9)$$

Se infatti si nota che in base alla definizione della trasformata di Laplace

$$M_i = (-1)^i \left. \frac{d^i W(s)}{ds^i} \right|_{s=0}$$

il confronto con i coefficienti c_i , dà:

$$\begin{aligned} (-1)^i M_i &= i! c_i \\ &\Downarrow \\ M_i &= (-1)^i i! c_i \end{aligned}$$

In definitiva, per la risposta a regime permanente all'ingresso canonico di ordine $(k+1)$ si ottiene

$$y_r(t) = \sum_{i=0}^k c_i \frac{t^{k-i}}{(k-i)!} \delta_{-1}(t) = \left(c_0 \frac{t^k}{k!} + \dots + c_k \right) \delta_{-1}(t).$$

Ancora una volta la risposta a regime permanente è dello stesso tipo dell'ingresso, un polinomio dello stesso ordine k . I coefficienti sono proprio i coefficienti dello sviluppo in serie di MacLaurin della funzione di trasferimento. Ciò implica, per la linearità che la risposta ad un qualsiasi ingresso polinomiale in t , i cui monomi sono ingressi canonici, è un polinomio dello stesso grado del polinomio dell'ingresso con coefficienti modificati come sottostato.

Nel caso particolare di ingresso a gradino unitario, $k = 0$ in (5.8), $u(t) = \delta_{-1}(t)$ si ottiene

$$y_r(t) = c_0 \delta_{-1}(t) = W(0) \delta_{-1}(t)$$

la risposta a regime è dunque costante e pari a $W(0)$. Ritroviamo quanto già messo in luce nel calcolo delle risposte forzate, in particolare della risposta indiciale $w_{-1}(t)$, la parte persistente è pari ad una costante ed uguale alla risposta a regime permanente; essa coincide con il **guadagno** della funzione di trasferimento.

Il guadagno della funzione di trasferimento di un sistema ha, nel caso in cui esista la risposta a regime permanente, il significato fisico di valore di regime della risposta al gradino unitario.

Come si è detto in precedenza un approccio diverso nella caratterizzazione del regime permanente rispetto ad ingressi canonici è fondato sul calcolo in s .

Dalla (4.42)

$$Y_r(s) = \frac{r_{0,k+1} + \cdots + r_{0,1}s^k}{s^{k+1}}$$

da cui

$$y_r(t) = (r_{0,k+1} \frac{t^k}{k!} + r_{0,k} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots + r_{0,1})\delta_{-1}(t). \quad (5.10)$$

con

$$\begin{aligned} r_{0,k+1} &= \left. \frac{W(s)}{s^{k+1}} s^{k+1} \right|_{s=0} = W(0) = K \quad \text{guadagno} \\ r_{0,k} &= \left. \frac{d}{ds} \left(\frac{W(s)}{s^{k+1}} s^{k+1} \right) \right|_{s=0} = \left. \frac{dW}{ds} \right|_{s=0} = c_1 \\ &\vdots \\ r_{0,1} &= \left. \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} W(s) \right|_{s=0} = c_k. \end{aligned}$$

Si riottiene, in definitiva, l'espressione precedente ove ritroviamo diversamente indicati i coefficienti c_i dello sviluppo in serie di MacLaurin in (5.9). Al calcolo di tali coefficienti si riduce il calcolo della la risposta a regime permanente ($r_{0,j} = c_{k+1-j}$, $j = 1, \dots, k+1$).

E per la risposta a regime permanente al gradino unitario ritroviamo l'espressione

$$y_r(t) = r_{0,1}\delta_{-1}(t) = K\delta_{-1}(t).$$

Vale la pena, per chiudere il paragrafo mettere in evidenza un collegamento tra i parametri significativi del comportamento nel tempo, in particolare quelli introdotti nel Paragrafo 4.5.1 per caratterizzare la risposta indiciale, la sovraetensione, s^* , e il tempo di salita, T_s , con altri due parametri, la **banda passante** B_3 e il **modulo alla risonanza** M_r , caratteristici del grafico del modulo della risposta armonica.

B_3 è la prima pulsazione in corrispondenza della quale il modulo subisce un'attenuazione di 0.707 rispetto al valore del modulo in $\omega = 0$; in formule

$$\frac{M(B_3)}{M(0)} = 0.707 = -3dB.$$

M_r è il valore massimo del modulo normalizzato al suo valore in $\omega = 0$; in formule

$$M_r = \frac{M_{max}}{M(0)}.$$

In un diagramma di $M(\omega)$ normalizzato rispetto al suo valore in $\omega = 0$, questi due parametri sono direttamente leggibili come il valore massimo del modulo e

la pulsazione in corrispondenza della quale per la prima volta viene ottenuto il valore 0.707, come si legge nella Figura 5.5.

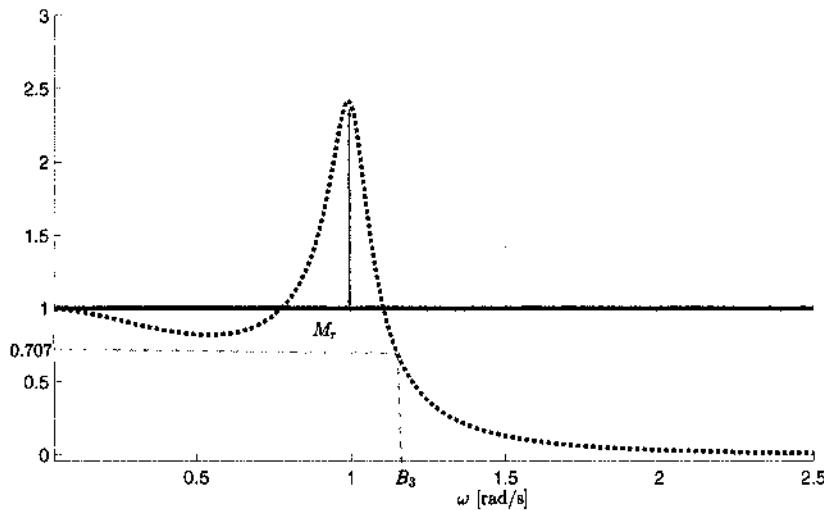


Figura 5.5

Valgono tra i parametri ora introdotti e quelli ricordati della risposta indiciale, per una vasta gamma di sistemi fisici di interesse nelle applicazioni, le seguenti relazioni

$$B_3 T_s \approx 0,85 \quad \frac{1+s^*}{M_r} \approx 3.$$

Queste relazioni mettono in evidenza che: banda passante e tempo di risposta sono in prima approssimazione inversamente proporzionali; sovra-elongazioni nella risposta indiciale corrispondono alla presenza di amplificazioni nel modulo della risposta armonica. Una giustificazione intuitiva della prima riposa sull'osservazione che a banda passante maggiore corrisponde una maggiore velocità di risposta (si ricordi anche che un sistema istantaneo ha una banda passante infinita ed un tempo di risposta nullo); per la seconda, se si pensa al contenuto spettrale del segnale gradino unitario e si tiene conto che tale funzione sollecita il sistema su tutto lo spettro delle frequenze (da zero, per la componente continua, fino all'infinito, per la discontinuità iniziale), si intuisce come il valore massimo della risposta indiciale ($1+s^*$) sia in termini approssimativi proporzionale alla presenza di risonanze ($M_r > 1$) nel comportamento in frequenza.

5.1.3 Una nota sul fenomeno della risonanza

Come si è detto nel paragrafo precedente una delle caratteristiche che si possono osservare nella rappresentazione del comportamento in frequenza è la presenza

di risonanze. Questo corrisponde alla presenza di un intervallo di frequenze in corrispondenza delle quali il modulo risulta maggiore del guadagno (nella figura questo accade nell'intervallo [0.8, 1.15]).

Come si potrà meglio comprendere nella presentazione delle tecniche di rappresentazione dei diagrammi della risposta armonica, questo fenomeno è collegato alla presenza di modalità interne di funzionamento del sistema (si pensi in prima istanza ai modi naturali e alle loro leggi di moto) che in presenza di sollecitazioni esterne particolari (persistenti periodiche) non solo sono sostenute, ma vengono amplificate generando risultati talvolta sorprendenti.

Nella realtà abbiamo riscontri della presenza di fenomeni di questo tipo in numerosi contesti: si pensi alle oscillazioni di un'altalena sostenute ed amplificate da spinte periodiche di piccola ampiezza (quanto basta per superare gli attriti), ma di opportuna frequenza, oppure ad un orologio (meccanico o atomico) in cui segnali periodici di piccola potenza vengono sostenuti ed amplificati in potenza per alimentare il complesso della meccanica, ma anche alle oscillazioni distruttive che possono essere generate da terremoti o forti venti.

La risonanza è dunque una condizione di funzionamento che è necessario sapere analizzare sia per poter prevenire gli effetti di risultati che un sistema dinamico può generare, sia per un suo corretto impiego in un numero impreciso di applicazioni e prodotti di grande utilità.



5.2

Le rappresentazioni grafiche della risposta armonica

Le rappresentazioni grafiche della risposta armonica che vengono qui trattate sono i diagrammi di Bode ed i diagrammi polari.

5.2.1 I diagrammi di Bode

La tecnica di rappresentazione grafica che viene esposta nel seguito si riferisce ad una funzione di trasferimento nella forma (4.33) che viene qui riscritta per completezza:

$$W(s) = K \frac{\prod_i^r (1 + \tau_i s) \prod_k^l \left(1 + \frac{2\zeta'_k}{\omega'_{nk}} s + \frac{s^2}{\omega'^2_{nk}} \right)}{s^r \prod_i^r (1 + \tau_i s) \prod_k^l \left(1 + \frac{2\zeta_k}{\omega_{nk}} s + \frac{s^2}{\omega^2_{nk}} \right)}. \quad (5.11)$$

In una fattorizzazione a coefficienti reali di questo tipo sono messe in evidenza, le costanti di tempo τ_i , associate agli autovalori reali, lo smorzamento ζ_k e la pulsazione naturale ω_{nk} associate ad ogni coppia di autovalori complessi coniugati, la presenza di un eventuale eccesso di poli in zero, s^r e il guadagno, K . Si ricorda ancora una volta che il guadagno è pari al valore della $W(s)$ in $s = 0$ una volta che sono stati eliminati eventuali poli in zero. Il coefficiente r può essere positivo o negativo (eccesso di poli sugli zeri o viceversa) per quanto qui trattato.

La rappresentazione di Bode mette in evidenza che una generica funzione di trasferimento è specificata dal prodotto, a numeratore e denominatore, di quattro tipi di termini:

$$K \quad s \quad 1 + \tau s \quad 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$$

il termine costante K , il monomio s , il binomio $1 + \tau s$, il trinomio $1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$.

Posto

$$|W(j\omega)| = M(\omega), \quad \angle W(j\omega) = \phi(\omega),$$

i diagrammi di Bode sono una rappresentazione di

$$M(\omega) \quad \text{e} \quad \phi(\omega)$$

rappresentazione particolare perché sull'asse delle ω viene utilizzata una scala logaritmica vengono rappresentati quindi il modulo e la fase ϕ al variare di ω ma secondo una scala, sull'asse delle ascisse, che è appunto logaritmica in base 10; con la particolarità di indicare sull'asse i valori veri di ω . Rispetto ad ω , la fase ϕ viene rappresentata in gradi o radianti e il modulo in dB, M_{dB} ,

$$M_{dB} = 20 \log_{10} M \quad \text{Rappresentazione logaritmica del modulo.}$$

La giustificazione di una tale scelta è data nei seguenti passaggi dove si nota che i diagrammi di una funzione di trasferimento prodotto, ciò che corrisponde alla cascata di due sistemi, sono ottenuti per somma dei diagrammi dei moduli in dB e delle fasi

$$\begin{aligned} W(s) &= W_1(s)W_2(s) \\ W &= M e^{j\phi} = M_1 e^{j\phi_1} \cdot M_2 e^{j\phi_2} \\ W &= M_1 \cdot M_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)} \end{aligned}$$

e con la rappresentazione in dB

$$M_{dB} = (M_1 M_2)_{dB} = M_{1dB} + M_{2dB}$$

Quindi vi è una semplificazione importante nella rappresentazione di prodotti di funzioni di trasferimento, questione importante nel progetto; inoltre tale scelta è avvalorata dalla conseguente semplificazione nella comprensione degli andamenti e nel tracciamento degli stessi diagrammi di modulo e fase di una

fissata risposta armonica che risulta, essa stessa, il prodotto di quattro termini, costante, monomio, binomio e trinomio.

Tracciamento dei diagrammi di Bode

Per rappresentare il comportamento in frequenza di una $W(s)$ basterà fare la somma degli andamenti dei singoli fattori elementari identificati. Vengono quindi passate in rassegna le rappresentazioni grafiche dei singoli termini e poi discusse le approssimazioni per la composizione del diagramma complessivo.

Guadagno e termine monomio

Il guadagno K è rappresentato da una retta a pendenza nulla

$$K_{dB} = 20 \log_{10} |K|;$$

il suo valore è positivo se $|K| > 1$; negativo se il guadagno $|K| < 1$

La fase sarà costantemente nulla se K è positivo e sarà $-\pi$ se K è negativo.

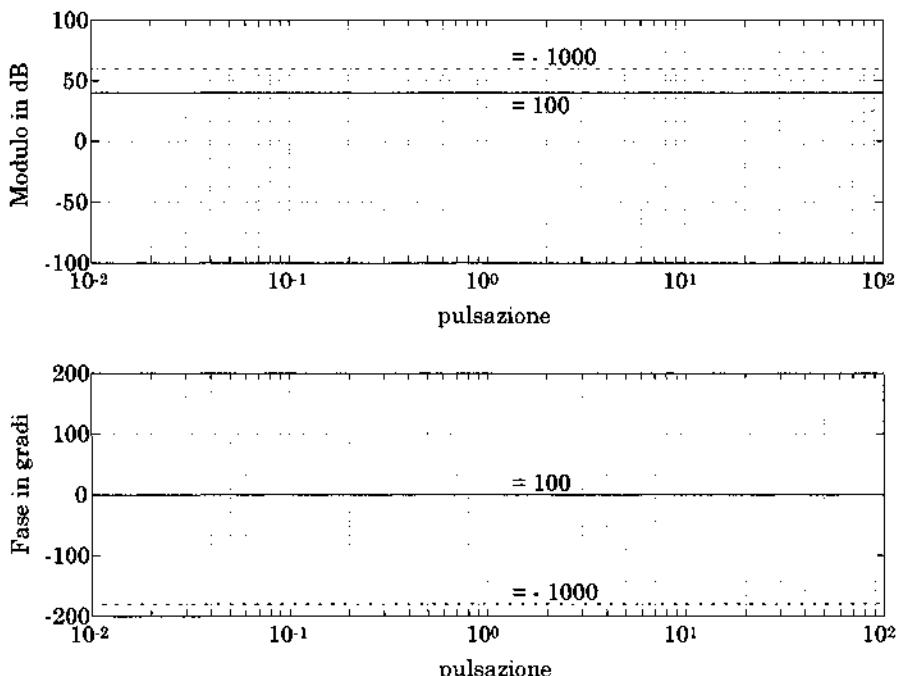


Figura 5.6: Diagramma del modulo e della fase in dB per termini costanti.

La Figura 5.6 illustra due diverse situazioni

$$K = 100 \quad K = -1000.$$

Per il termine **monomio** $j\omega$, si ha

$$y = M_{dB} = 20 \log_{10} \omega = 20x$$

cioè il modulo è una retta con pendenza $20dB$ per decade con andamento sempre crescente; si ricordi che sull'asse delle ascisse $x = \log_{10} \omega$ e la decade rappresenta l'intervallo *unitario* tra due pulsazioni che sono nel rapporto di 10. La fase invece è costantemente pari a $\frac{\pi}{2}$. Un fattore monomio a denominatore ($\frac{1}{j\omega}$)

$$y = M_{dB} = 20 \log_{10} \frac{1}{\omega} = -20x \quad \angle \frac{1}{j\omega} = -\angle j\omega = -\frac{\pi}{2}$$

è rappresentato, quindi da andamenti opposti In Figura 5.7 sono riportati gli andamenti nelle diverse situazioni.

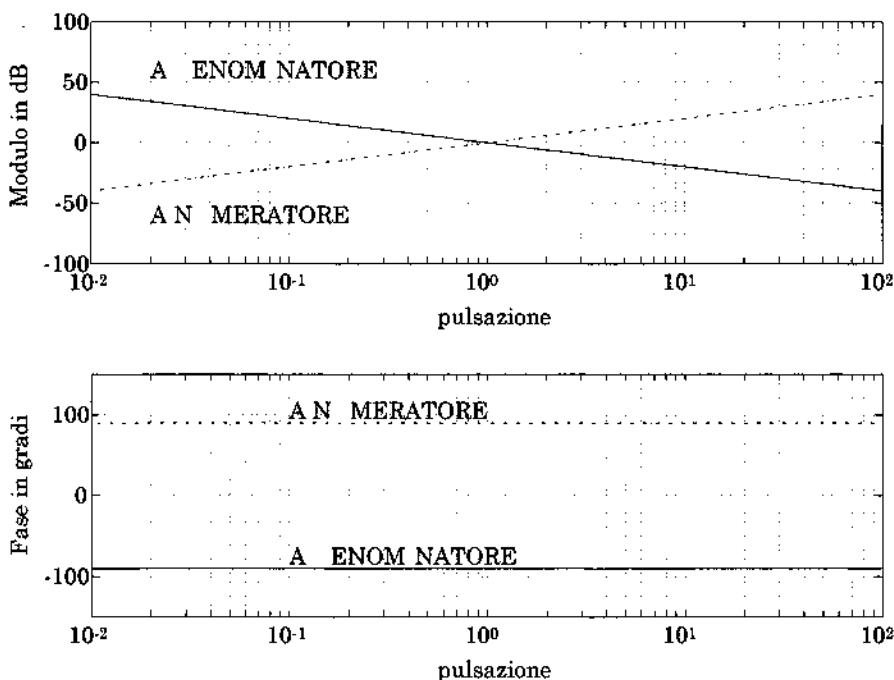


Figura 5.7: Diagramma del modulo e della fase in dB per termini monomi.

Termine binomio

Si consideri, ora, il termine **binomio** $1 + j\omega\tau$

$$\begin{aligned} M_{dB} &= 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \\ \omega = \frac{1}{|\tau|} &\Rightarrow M_{dB} = 20 \log_{10} \sqrt{2} = +3dB \\ \omega \ll \frac{1}{|\tau|} &\Rightarrow M_{dB} \approx 20 \log_{10} \sqrt{1} = 0 \\ \omega \gg \frac{1}{|\tau|} &\Rightarrow M_{dB} \approx 20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} |\tau| \end{aligned}$$

Per ω molto minore di $\frac{1}{|\tau|}$ il diagramma asintotico coincide con l'asse delle ascisse; una retta con pendenza $20dB$ per decade rappresenta il valore del modulo per $\omega \gg \frac{1}{|\tau|}$. Tale retta interseca in $\omega = \frac{1}{|\tau|}$ l'asse delle ascisse. La rappresentazione approssimata costituita dalla spezzata a due lati si chiama diagramma asintotico.

La fase è data da

$$\phi(\omega) = -\arctan \omega\tau$$

per $\omega \ll \frac{1}{|\tau|}$ è praticamente nulla, per $\omega \gg \frac{1}{|\tau|}$ è praticamente pari a $\frac{\pi}{2}$ con $\tau > 0$ e pari a $-\frac{\pi}{2}$ con $\tau < 0$. Una buona approssimazione (andamento asintotico) della fase è rappresentato da una spezzata a tre lati coincidente con l'asse delle ascisse per $\omega < \frac{0.1}{|\tau|}$, con una retta a pendenza più o meno $\frac{\pi}{4}$ per decade fino a $\frac{10}{|\tau|}$, e $\pm \frac{\pi}{2}$ per $\omega > \frac{10}{|\tau|}$. L'errore massimo con questa approssimazione si ha in corrispondenza dei punti di rottura della spezzata ed è apri a circa 4 gradi ($-\arctan 0.1$).

Un termine binomio a denominatore ha diagrammi di modulo e fase opposti a quelli che avrebbe a numeratore; in $\omega = \frac{1}{|\tau|}$ il modulo presenta una variazione di $(\frac{1}{\sqrt{2}})_{dB} = -3dB$ rispetto al valore nullo del diagramma asintotico.

In Figura 5.8 sono rappresentati il modulo e la fase di termini binomi a numeratore e denominatore per valori di τ positivi. Come osservato nella figura, l'andamento corrispondente a valori di τ negativi non cambia per quanto riguarda il modulo, mentre diventa opposto per quanto riguarda la fase.

È utile osservare che la forma degli andamenti del modulo e della fase rimane la stessa al variare della costante di tempo; quello che cambia con essa è semplicemente la *centratura* (collocazione in frequenza) dell'azione che esercita il termine binomio.

Con il tracciamento dei termini di tipo costante e del termine binomio siamo in grado di caratterizzare il comportamento in frequenza di un sistema che ad esempio ha una funzione di trasferimento tipo

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau}$$

In base a quanto esposto, l'andamento del modulo e della fase è caratterizzato dalla somma degli andamenti modulo - fase dei due fattori che in questo caso

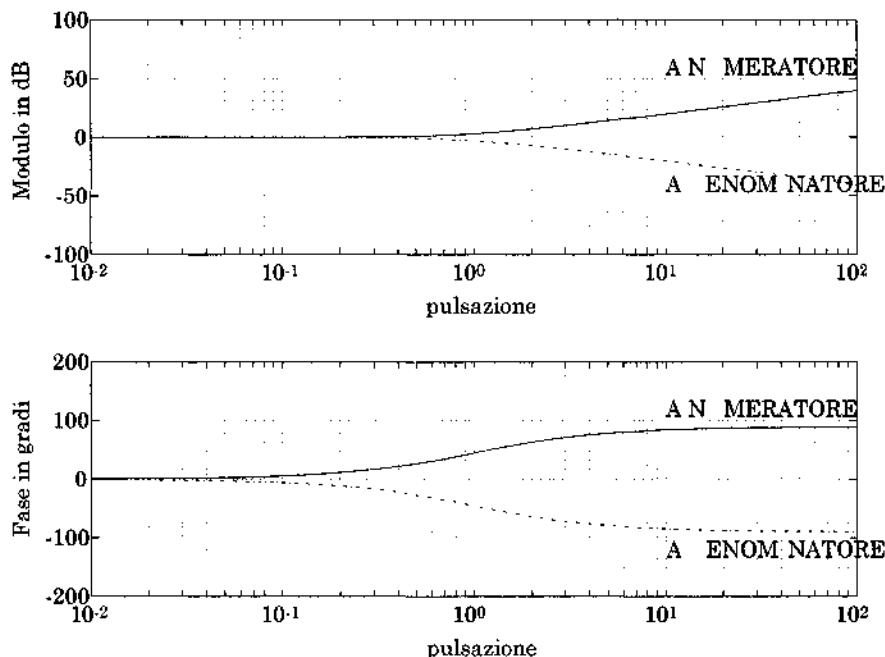


Figura 5.8: Diagramma del modulo e della fase in dB per termini binomi.

sono K e $1+j\omega\tau$. La pulsazione $\omega = \frac{1}{|\tau|}$ è quella pulsazione in corrispondenza della quale il valore del guadagno del modulo è $-3dB$ se $\tau > 0$, $+3dB$ se $\tau < 0$, rispetto al valore iniziale, questa pulsazione coincide, nel caso in esame di una funzione di trasferimento con un solo polo, con la banda passante B_3 ; ai tre dB di attenuazione corrisponde infatti l'attenuazione di 0.707 in termini reali, normalmente indicata come la banda passante, B_3 .

Siamo in realtà già in grado con quanto detto finora di tracciare il diagramma di Bode di una funzione di trasferimento caratterizzata da un guadagno, termini monomi e binomi. E' sufficiente: individuare i punti di rottura e fissarli sull'asse delle ascisse; tracciare i diagrammi asintotici del modulo e della fase di ogni singolo termine; fare la somma omega per omega dei diagrammi dei moduli e delle fasi (ciò che si realizza sommando le pendenze nei diversi intervalli di frequenze); alzando il diagramma del modulo del valore del guadagno in dB (equivalentemente abbassando l'asse delle ascisse del valore corrispondente).

Esempio 5.2.1 Si consideri

$$W(s) = \frac{10(s+1)}{s(s-10)(s+0.1)}. \quad (5.12)$$

Innanzitutto è opportuno riscriverlo nella forma di Bode come

$$W(s) = -10 \frac{1+s}{s(1-0.1s)(1+10s)}.$$

La funzione presenta quindi 5 termini:

- un termine costante $K = -10$;
- un termine monomio (a denominatore);
- un termine binomio a numeratore con costante $\tau_1 = 1$;
- un termine binomio a denominatore con costante $\tau_2 = -0.1$;
- un termine binomio a denominatore con costante $\tau_3 = -0.1$.

Il diagramma asintotico complessivo (in nero) e quello delle singoli componenti è riportato in Figura 5.9

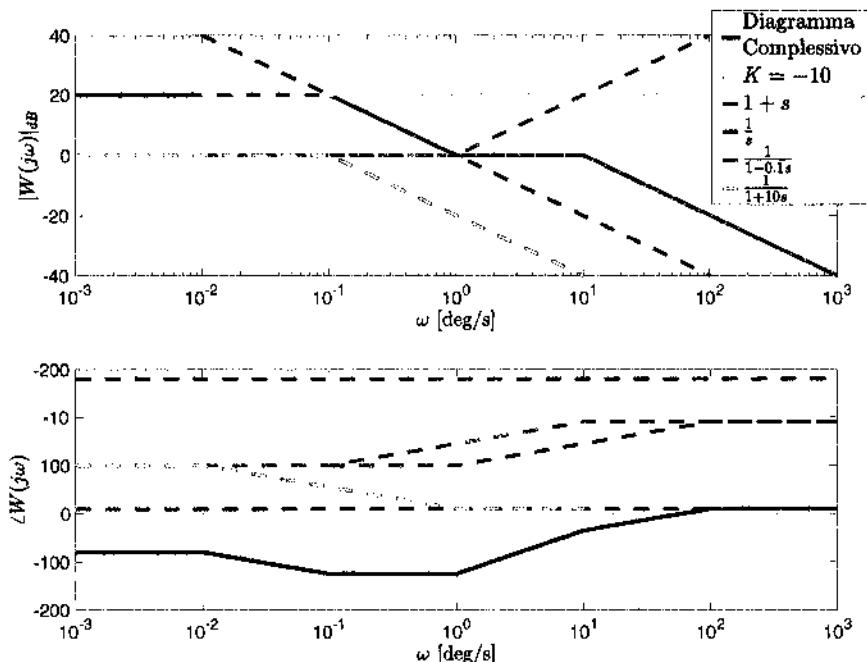


Figura 5.9: Diagrammi di Bode asintotici del sistema (5.12).

Termine trinomio

Ci rimane da trattare la rappresentazione di un termine **trinomio**, che supporremo a denominatore,

$$\frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}}$$

corrispondente quindi alla funzione di trasferimento di un sistema dinamico caratterizzato da una coppia di autovalori complessi coniugati; ciò consentirà di attribuire un significato fisico a parametri noti quali la pulsazione naturale e lo smorzamento

$$\begin{aligned}\omega_n &= \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} && \text{pulsazione naturale} \\ \zeta &= -\frac{\alpha}{\omega_n} && \text{smorzamento.}\end{aligned}$$

Il modulo in dB è descritto dalla funzione:

$$M_{dB} = -20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + \frac{4\zeta^2}{\omega_n^2} \omega^2}.$$

In $\omega = \omega_n$ il suo valore dipende da ζ secondo la relazione

$$M_{dB} = -20 \log_{10} 2|\zeta|.$$

e si annulla quando $|\zeta| = 0.5$; inoltre quando $|\zeta| = 1$, condizione nella quale il termine trinomio si riduce al quadrato di un termine binomio, il valore del modulo risulta $-20 \log_{10} 2 = -6$ cioè due volte il valore del termine binomio corrispondente.

Per quanto riguarda i comportamenti asintotici, per bassi e alti valori di ω rispetto a ω_n ,

$$\omega \ll \omega_n \implies M_{dB} \approx 0$$

$$\omega \gg \omega_n \implies M_{dB} \approx -20 \log_{10} \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40 \log_{10} \omega + 40 \log_{10} \omega_n$$

si ha, quindi una retta che ha pendenza $-40dB$ per decade, che attraversa l'asse delle ω proprio nel punto ω_n . Si può facilmente verificare che l'andamento effettivo è praticamente coincidente con quello asintotico ad una decade di distanza da ω_n . Infatti in corrispondenza di tali valori lo scostamento rispetto al valore esatto è pari a

$$M_{dB} = -20 \log_{10} \sqrt{(1 - 0.01)^2 + 0.04\zeta^2}.$$

Se lo smorzamento ζ è basso si ha in prossimità di ω_n una risonanza, un'amplificazione della risposta; l'amplificazione diventa infinita se $\zeta = 0$ (Figura 5.10).

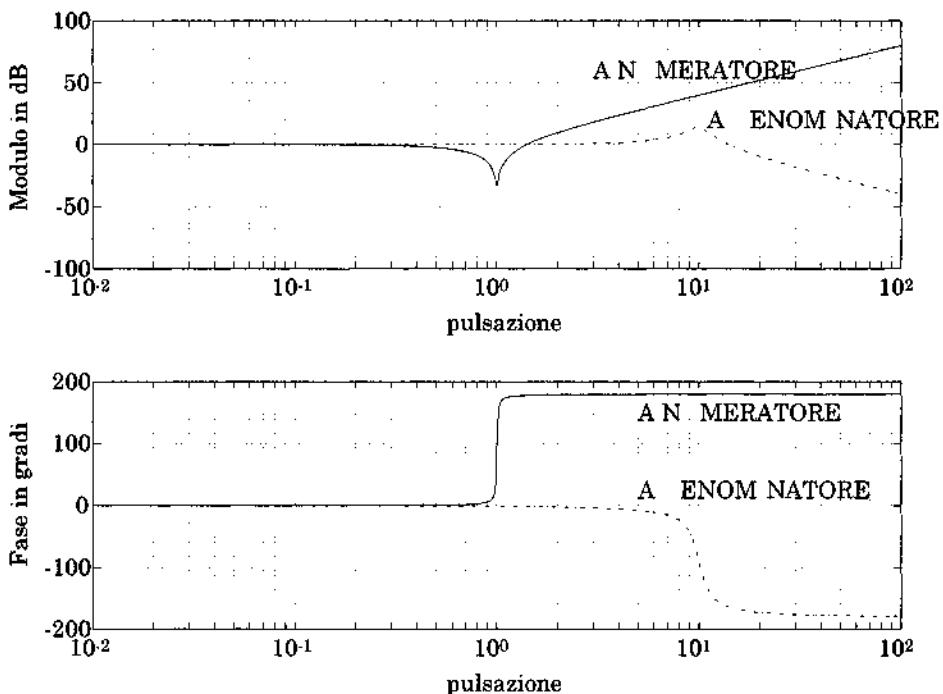


Figura 5.10: Diagramma del modulo e della fase in dB per termini trinomi con $\zeta = 0$.

Lo scostamento degli andamenti al variare di ζ è riportato nella Figura 5.11 con riferimento ad un'ascissa normalizzata rispetto al valore ω_n .

Analoghe considerazioni possono essere svolte per gli andamenti della fase di un termine trinomio a denominatore.

$$\phi = \arctan \frac{\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Pur dipendendo da ζ e ipotizzando in prima istanza che questo sia positivo, per ω molto minore di ω_n la fase è circa zero, al tendere ad ω_n da valori inferiori tende a $-\infty$ e al crescere di ω ritorna verso lo zero da valori negativi, ciò corrisponde ad un andamento tra zero e $-\pi$ come indicato in figura per diversi valori di ζ positivi.

Ovviamente gli andamenti della fase per valori di ζ negativi sono opposti a quelli indicati.

È interessante esaminare il comportamento in frequenza di uno dei sistemi fisici considerati precedentemente.

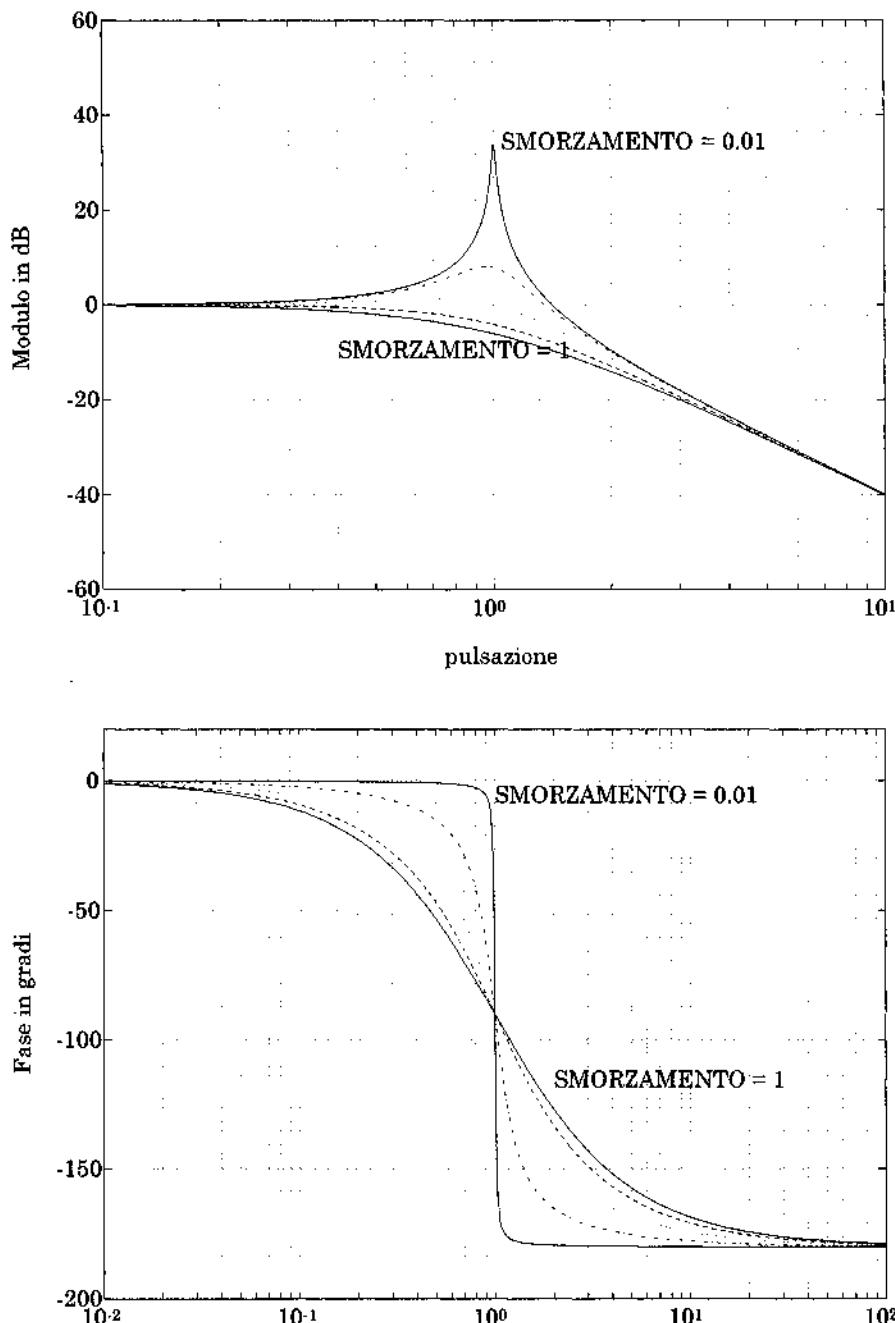


Figura 5.11: Diagramma del modulo e della fase in dB per termini trinomi al variare di $|\zeta| \in [0, 1]$.

Esempio 5.2.2 Si vogliono tracciare i diagrammi di Bode del sistema massa-molla-smorzatore avente funzione di trasferimento (in forma di Bode)

$$W(s) = \frac{1}{K} \frac{1}{\frac{M}{k}s^2 + \frac{b}{k}s + 1}$$

con

$$\frac{1}{\omega_n^2} = \frac{M}{k} m, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}, \quad \zeta = \frac{b}{2\sqrt{kM}}.$$

Se $b > 2\sqrt{kM}$ lo smorzamento risulterebbe 1 che corrisponde ad autovalori reali. Valutiamo tali parametri al variare della massa, della costante elastica della molla e del coefficiente b di attrito dinamico.

$$\begin{aligned} M = 10^4 \text{ Kg}, k = 10^6 \text{ N m} &\implies \omega_n = 10 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \\ b = 10^4 &\implies \zeta = \frac{10^4}{2\sqrt{kM}} = \frac{1}{20} = 0,05 \\ b = 10^2 &\implies \zeta = \frac{10^2}{2\sqrt{kM}} = 0,0005 \end{aligned}$$

Esaminiamo cosa accade nei due casi quando si sollecita il sistema con un segnale periodico di pulsazione proprio con pulsazione $\omega = \omega_n = 10 \text{ rad/sec}$

$$|W(j10)| = \left| \frac{\frac{1}{10^6}}{\frac{(j10)^2}{100} + \frac{b}{k} j + 1} \right| = \frac{1}{10b} = 10^{-1} b^{-1}$$

Cioè, se sollecitiamo con una pulsazione di 10 radiant al secondo con una forza di un 100 Newton si ottiene, a regime, un'oscillazione di 10^{-3} m (ovvero 1 millimetro) nel primo caso e di 10 centimetri nel secondo.

Uno o più sistemi meccanici caratterizzati da coppie di autovalori complessi coniugati possono essere impiegati per rappresentare i fenomeni connessi alla risonanza in diverse strutture fisiche di interesse; si pensi ai sistemi oscillanti, ai problemi connessi alla dinamica delle vibrazioni, a circuiti elettrici complessi, alla dinamica delle strutture. Il sistema complessivo ben rappresenta i fenomeni di risonanza che possono verificarsi in presenza di modesti valori degli smorzamenti delle coppie di autovalori complessi (strutture ad ampie luci/flessibili). Si tratta di caratteristiche della struttura che possono essere esaltate da sollecitazioni specifiche.

Per quanto riguarda il tracciamento dei diagrammi di Bode a partire dai diagrammi dei singoli fattori, sinora trattati, si ripete quanto già sottolineato in precedenza:

- si individuano e fissano sull'asse delle ω i punti di rottura dei diagrammi asintotici;

- si tracciano i diagrammi asintotici del modulo e della fase di ogni singolo termine secondo quanto illustrato in precedenza;
- si sommano i diagrammi tracciati, anche tenendo conto del guadagno;
- si portano eventuali correzioni nell'intorno dei punti di rottura.

Esempio 5.2.3 A titolo di esempio si consideri la seguente funzione di trasferimento

$$W(j\omega) = \frac{100 \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} (j\omega) + \frac{(j\omega)^2}{j\omega_n^2} \right)}{j\omega (1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)} \quad (5.13)$$

la risposta armonica nella forma fattorizzata di Bode è caratterizzata dai seguenti parametri

$$\tau_1 = 10 \quad \tau_2 = 0.1 \quad \zeta = 0.1 \quad \omega_n = 10$$

Il diagramma di Bode complessivo è riportato in Figura 5.12.

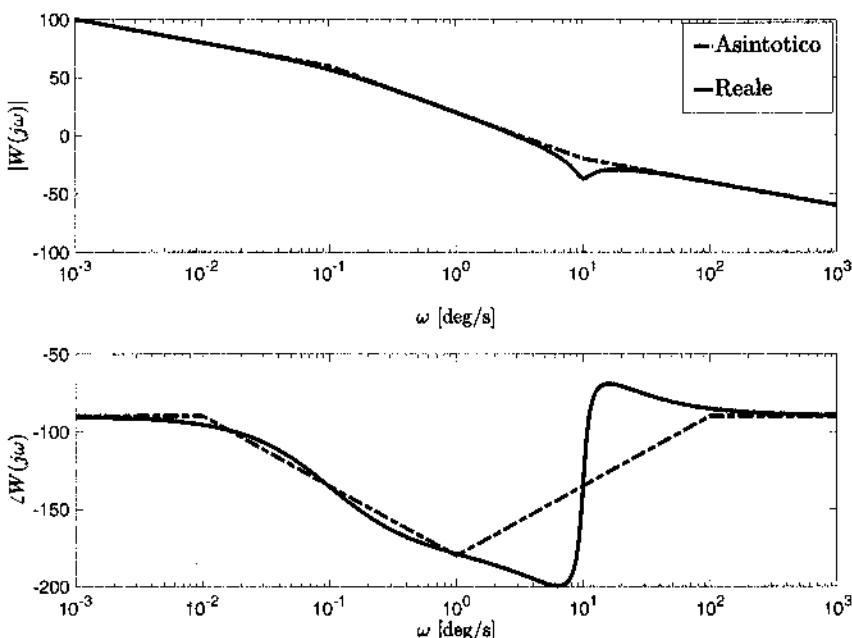


Figura 5.12: Diagrammi di Bode della risposta armonica (5.13).

Le considerazioni svolte circa il tracciamento dei diagrammi di Bode sono importanti non per il loro tracciamento, ciò che può essere demandato ad un semplicissimo strumento di calcolo, ma per capire per ispezione sui fattori della funzione di trasferimento quale sarà il comportamento in frequenza e, quindi nel tempo, del sistema stesso. Innanzitutto è necessario ricordare che gli andamenti corrispondenti ai diversi fattori sono standard: ad un termine monomio a denominatore, che corrisponde ad un'azione integrativa, rimane associato un fissato andamento che si traduce in concreto in una costante diminuzione del guadagno alle diverse frequenze e uno sfasamento costante; ad un termine binomio corrisponde un andamento standard che si traduce in un mantenimento del guadagno ed una successiva costante diminuzione con corrispondente aumento di sfasamento; la costante di tempo non modifica il comportamento del dispositivo, ma solo la sua 'collocazione' in frequenza; analoghe considerazioni valgono per un termine trinomio che inoltre può esercitare una risonanza o una azione di filtro (si pensi ad un termine trinomio a numeratore).

Un'ultima considerazione riguarda il comportamento *passa basso* di un sistema dinamico lineare strettamente causale. In base a quanto visto, al crescere di ω , il modulo va sempre a zero ($-\infty$ in dB), tutte le volte che il grado del denominatore è maggiore del grado del numeratore (cioè il sistema è strettamente causale). Inoltre la fase al crescere di ω tende sempre a valori multipli di $\frac{\pi}{2}$ positivi o negativi.

Alcuni esempi di comportamento a regime permanente ad ingressi periodici sono proposti nel seguito.

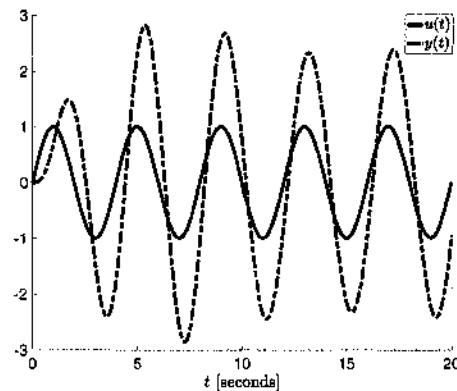
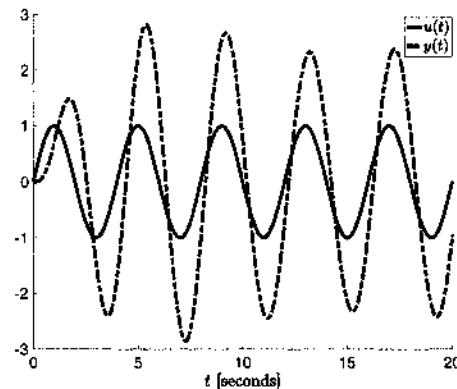
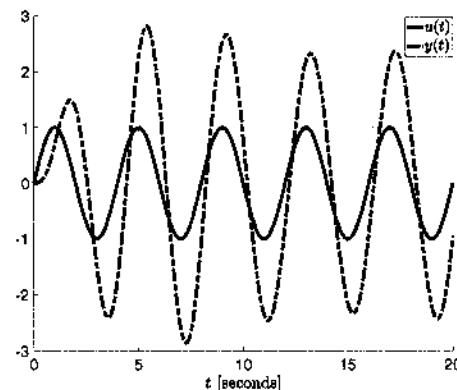
Esempio 5.2.4 Si consideri la seguente funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}, \quad \zeta = 0.1, \omega_n = 2 \quad (5.14)$$

Nelle Figure 5.13a, 5.13b e 5.13c è riportato l'andamento della risposta a regime al per diversi valori della pulsazione del segnale in ingresso.

Siamo intorno alla pulsazione naturale del sistema come mostrano i diagrammi di Bode riportati nella Figura 5.14.

Nel diagramma del modulo sono presenti due parametri che sono spesso assunti a caratterizzare il comportamento in frequenza: la **banda passante** B_3 , quella pulsazione a partire dalla quale si ha un'attenuazione nella risposta a regime permanente superiore a 0.707 rispetto al valore in $\omega = 0$; il **modulo alla risonanza** M_r , cioè il valore massimo del modulo diviso il valore del modulo in zero.

(a) $u(t) = \sin t.$ (b) $u(t) = \sin 2t.$ (c) $u(t) = \sin 5t.$ **Figura 5.13:** Risposta del sistema (5.14) rispetto a $u(t) = \sin \omega t$ e diverse pulsazioni.

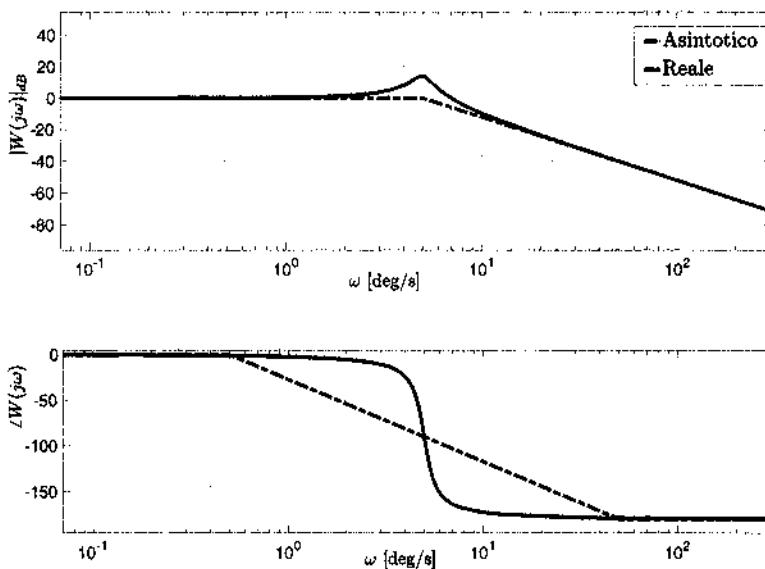


Figura 5.14: Diagrammi di Bode del sistema (5.14).

Risonanze pronunciate mettono in evidenza il fatto che ci sono delle frequenze che vengono esaltate, mentre una banda passante ampia caratterizza la rapidità con la quale il sistema risponde (piccole costanti di tempo). Questi parametri e le precedenti semplici considerazioni trovano un riscontro immediato nell'andamento della risposta al gradino unitario. Infatti una larga banda passante, rapidità di risposta, si traduce in una tendenza rapida al valore di regime (basso tempo di risposta), mentre l'esaltazione di segnali in un certo intervallo di frequenza si traduce nella presenza di un'esaltazione della risposta in presenza della sollecitazione iniziale discontinua e per questo ricca in contenuto armonico.

Esercizio 5.2.1 Si considerino le due funzioni di trasferimento seguenti

$$W_1(s) = \frac{K}{1 + \tau_1 s}, \quad W_2(s) = \frac{K}{1 + \tau_2 s}, \quad \tau_2 \ll \tau_1$$

e si calcolino la risposta indiciale e la banda passante in entrambi i casi.

Esercizio 5.2.2 Come ulteriore esercizio si calcoli la risposta a regime ad un ingresso periodico ad onda quadra di un sistema che ha funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \quad (5.15)$$

con

$$\omega_n = 5 \quad \zeta = 0.5$$

TextCloud

Soluzione Esercizi 5.2.1 e 5.2.2**5.2.2 I diagrammi polari**

Un'ulteriore rappresentazione grafica della risposta armonica utile nello studio dei sistemi dinamici e nel progetto dei sistemi di controllo è quella cosiddetta **polare**.

Formalmente il diagramma polare è l'immagine secondo la funzione $W(s)$ dell'asse immaginario. La W è una trasformazione del piano complesso in se stesso che trasforma i punti dell'asse immaginario in una curva nel piano complesso che per motivi di regolarità (immagine di una funzione olomorfa) descrive una curva chiusa nel piano complesso se non ci sono singolarità sull'asse immaginario (tali singolarità non possono che essere eventuali zeri del polinomio a denominatore della funzione di trasferimento).

L'andamento qualitativo del diagramma polare può facilmente essere compreso a partire dall'andamento qualitativo dei diagrammi di Bode.

Una prima osservazione importante riguarda la simmetria che il diagramma manifesta rispetto all'asse reale. Ciò può essere facilmente compreso se si ricorda che la $W(j\omega)$ è la trasformata di Laplace di una funzione del tempo calcolata in $s = j\omega$. Scrivendo tale trasformata e usando la formula di Eulero per rappresentare l'esponenziale, $e^{j\omega} = \cos \omega t + j \sin \omega t$, è infatti immediato verificare che si ottiene una funzione complessa la cui parte reale (e modulo) è una funzione pari di ω e la parte immaginaria (e fase) una funzione dispari di ω ; ciò che corrisponde alla citata simmetria.

Tracciato dunque l'andamento per ω positivi il diagramma polare complessivo è subito ottenuto in quanto per valori di ω negativi la figura è speculare rispetto all'asse reale.

Esempio 5.2.5 A titolo di esempio si considerino le funzioni di trasferimento seguenti e i relativi diagrammi di Bode e polari.

$$W(s) = \frac{10}{(1+s)} \quad (5.16)$$

$$W(s) = \frac{10}{(1+s)(1+2s)} \quad (5.17)$$

$$W(s) = \frac{40(s - \frac{1}{2})}{(s+1)(s+4)} \quad (5.18)$$

$$W(s) = \frac{4(s-1)}{s(s+4)}. \quad (5.19)$$

$$W(s) = -\frac{(s-2)}{(s+2)(s^2+1)}. \quad (5.20)$$

I risultati complessivi sono riportati nelle Figure, in ordine, da 5.15 e 5.19.

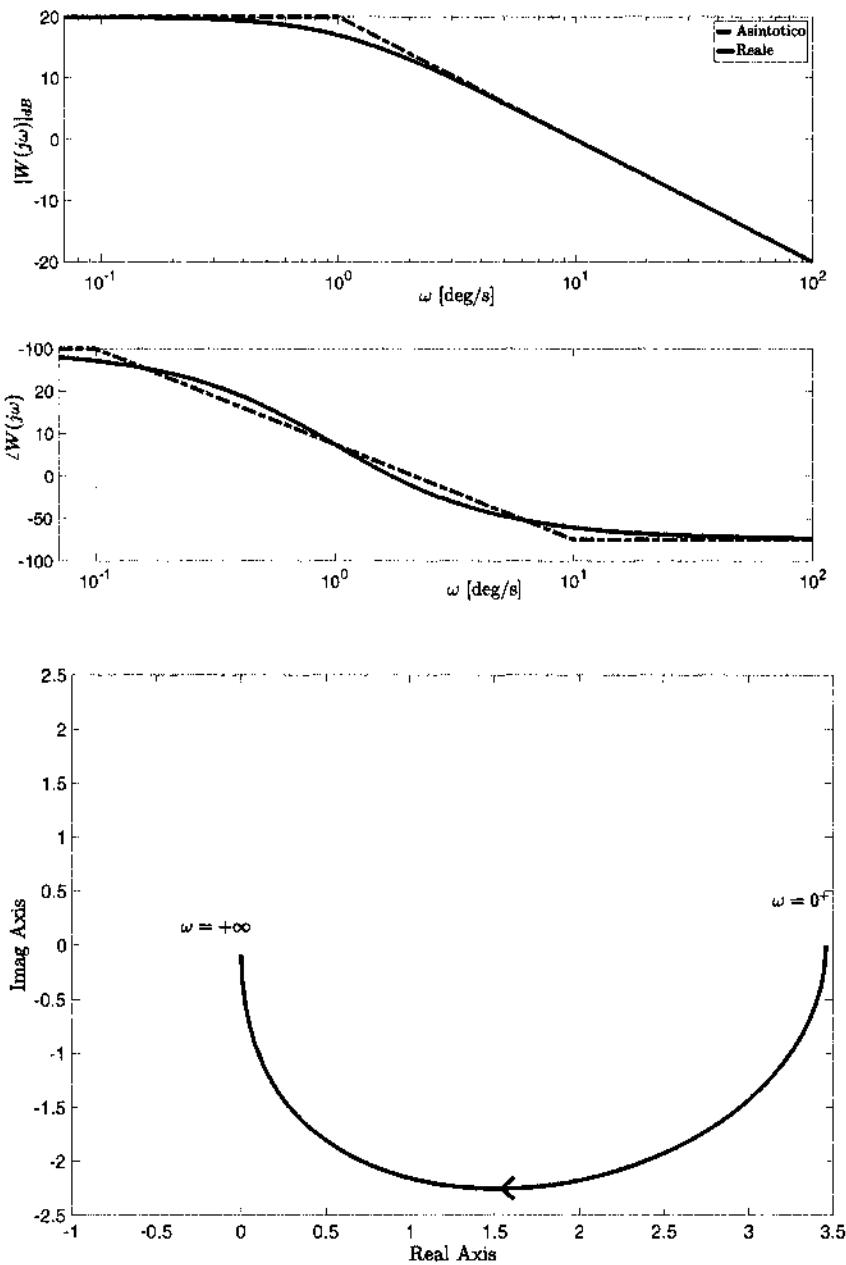


Figura 5.15: Diagrammi di Bode e polare del sistema (5.16).

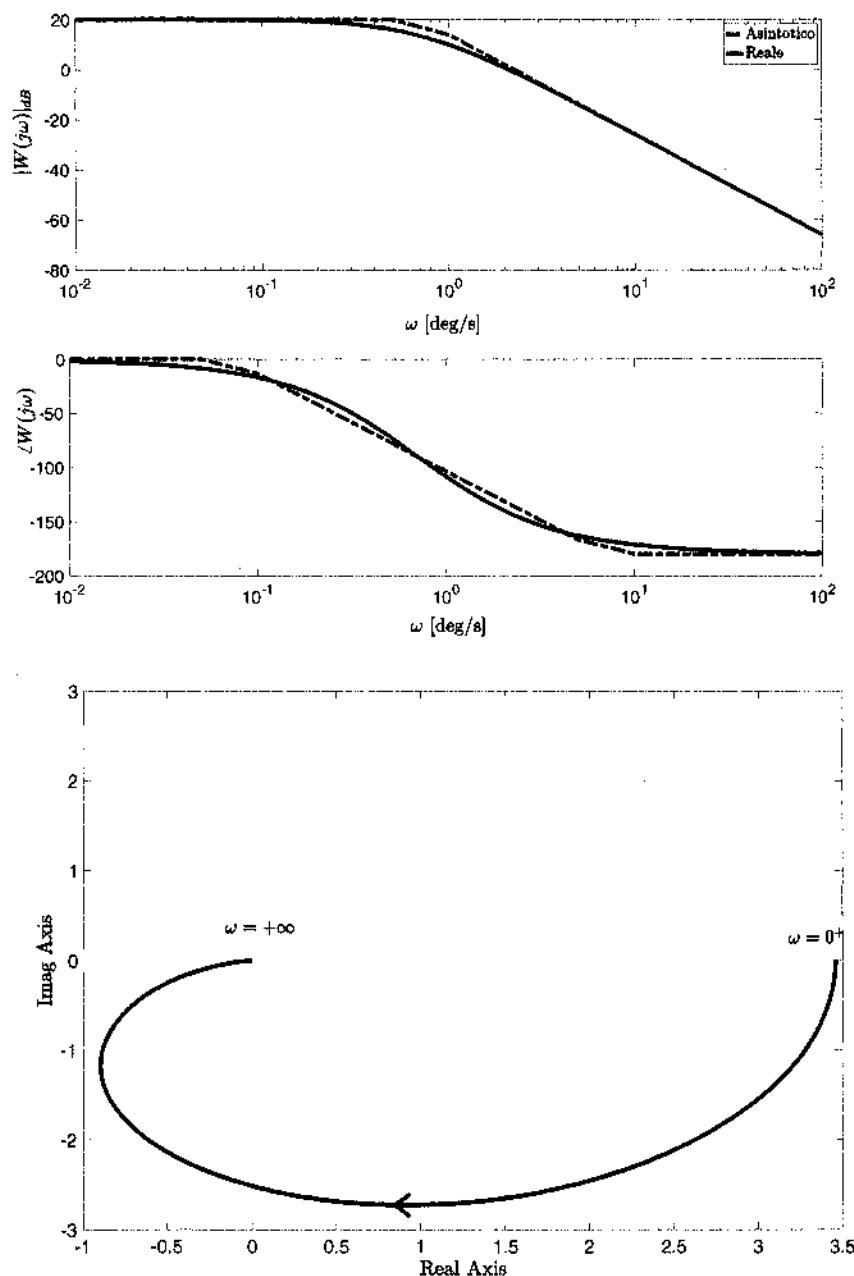


Figura 5.16: Diagrammi di Bode e polare del sistema (5.17).

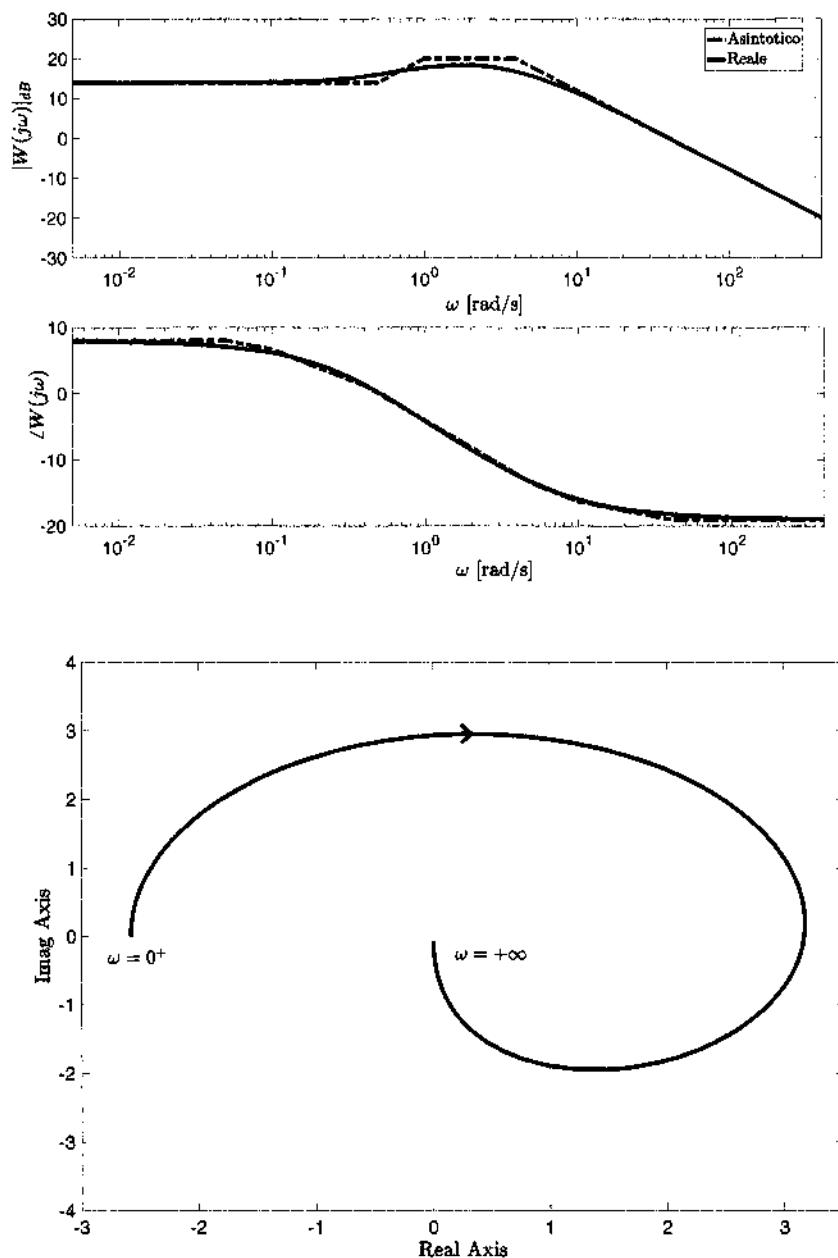


Figura 5.17: Diagrammi di Bode e polare del sistema (5.18).

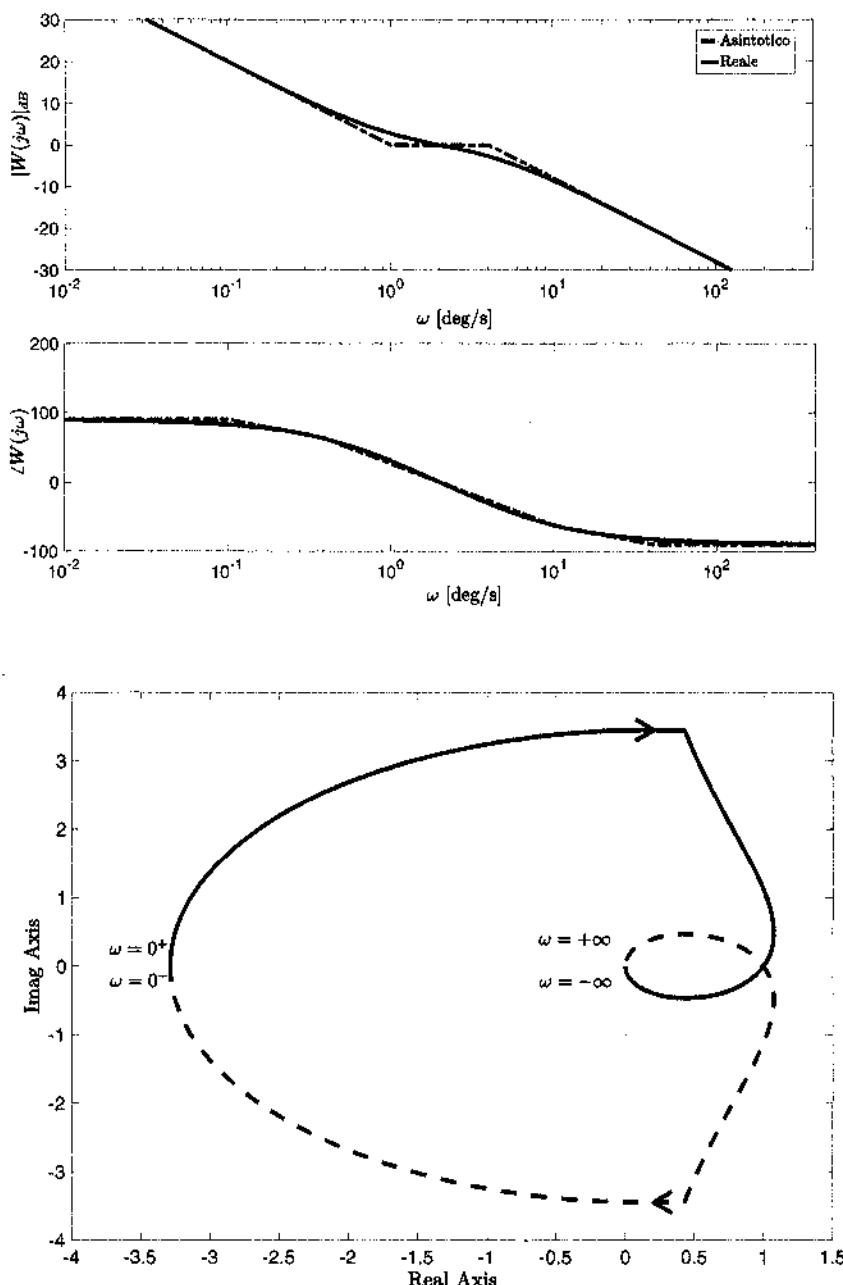


Figura 5.18: Diagrammi di Bode e polare del sistema (5.19).

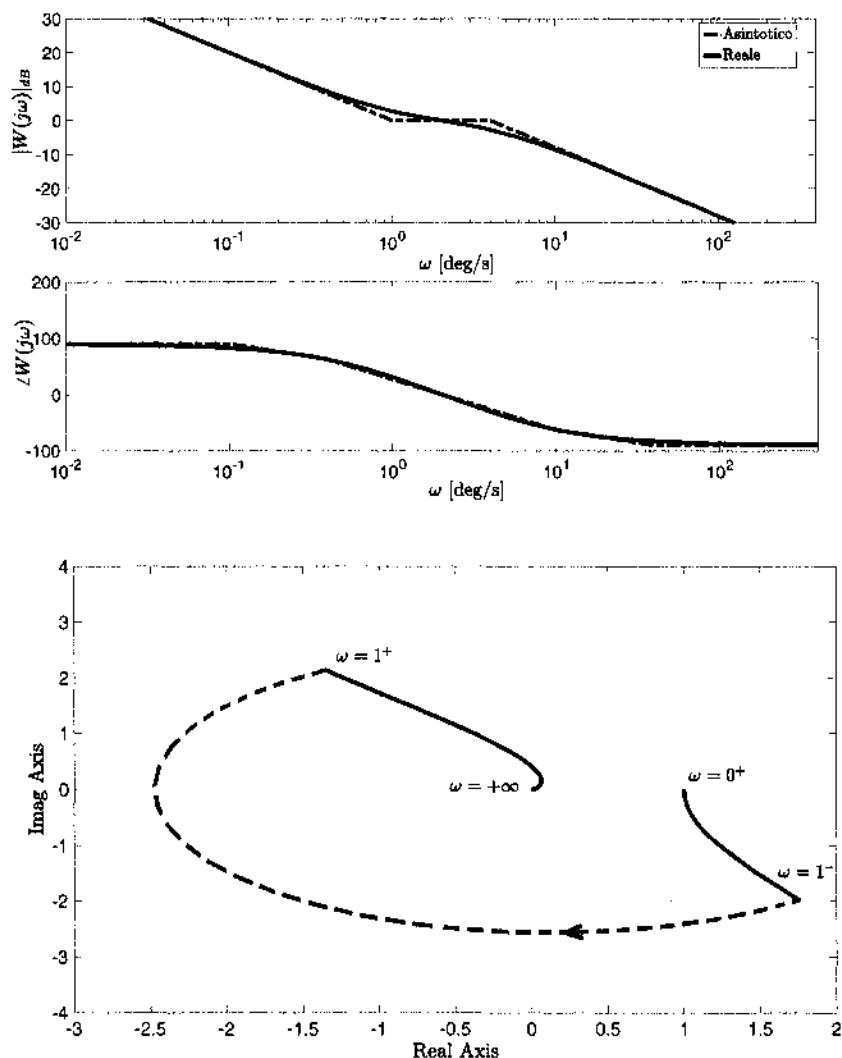
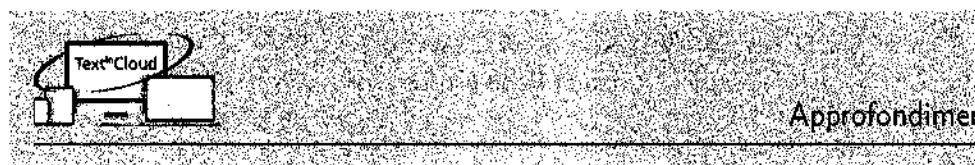


Figura 5.19: Diagrammi di Bode e polare del sistema (5.20).

Per concludere si noti che se ci sono singolarità sull'asse immaginario il diagramma polare è aperto, ci sono cioè rami che vanno all'infinito.



5.3

La risposta a regime permanente per i sistemi a tempo discreto

Risultati analoghi a quelli ottenuti per i sistemi a tempo continuo valgono per i sistemi a tempo discreto. In quest'ultima sezione viene messa in luce la struttura e le procedure di calcolo della risposta a regime permanente ad ingressi periodici e polinomiali senza riprendere le definizioni e gli aspetti concettuali che sono indipendenti dal contesto.

Si assume anche in questo caso che il sistema sia stabile internamente (modulo minore o uguale a uno degli autovalori con ordine geometrico unitario, strettamente inferiore ad uno gli altri), per evitare che vi siano evoluzioni che crescono indefinitamente impedendone il funzionamento, inoltre valgono le ipotesi che i modi osservabili siano asintoticamente stabili (i corrispondenti autovalori a modulo inferiore ad uno), per assicurare l'indipendenza dallo stato iniziale, e che il sistema sia esternamente stabile nello stato zero (modulo inferiore ad uno dei poli della funzione di trasferimento).

Premesse dunque le condizioni che dovrà assicurare il sistema, il problema si riconduce al calcolo del limite della successione di funzioni dipendenti da t_0 , quando $t_0 \rightarrow -\infty$

$$y_r(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \sum_{\tau=t_0}^t W(t-\tau)u(\tau) = \sum_{\tau=-\infty}^t W(t-\tau)u(\tau)$$

che esiste per fissate classi di funzioni di ingresso, tra queste le funzioni periodiche e polinomiali.

5.3.1 La risposta a regime ad ingressi periodici

Si consideri preliminarmente l'ingresso $u(t) = e^{j\theta t}$; si ha:

$$y_r(t) = \sum_{\tau=-\infty}^t W(t-\tau)e^{j\theta\tau}$$

e posto $t - \tau = \xi$, si ottiene:

$$y_r(t) = \sum_{\xi=0}^{\infty} W(\xi)e^{j\theta(t-\xi)} = e^{j\theta t} \sum_{\xi=0}^{\infty} W(\xi)(e^{j\theta})^{-\xi} = e^{j\theta t} W(z)|_{z=e^{j\theta}}.$$

La risposta a regime permanente è dunque pari alla stessa funzione d'ingresso modificata dalla funzione di trasferimento calcolata in $z = e^{j\theta}$; punto nel quale la

$W(z)$ è definita essendo il raggio di convergenza pari al massimo dei moduli dei poli che è inferiore ad uno. Gli stessi calcoli per $e^{-j\theta t}$ danno:

$$e^{-j\theta t} W(e^{j\theta}).$$

Siamo ora in grado di calcolare la risposta a regime all'ingresso

$$u(t) = \sin \theta t = \frac{e^{j\theta t} - e^{-j\theta t}}{2j}.$$

Se adottiamo la rappresentazione polare per la $W(z)$

$$W(e^{j\theta}) = M(\theta) e^{j\phi(\theta)} \quad e \quad W(e^{-j\theta}) = M(-\theta) e^{j\phi(-\theta)}$$

ed osserviamo che $M(\theta)$ e $\phi(\theta)$ sono funzioni, rispettivamente pari e dispari di θ

$$\phi(\theta) = -\phi(-\theta) \quad M(\theta) = M(-\theta)$$

si ottiene

$$\frac{e^{j\theta t} \cdot W(e^{j\theta}) - e^{-j\theta t} \cdot W(e^{-j\theta})}{2j} = \frac{M(\theta)(e^{j\theta t} \cdot e^{j\phi(\theta)} - e^{-j\theta t} \cdot e^{-j\phi(\theta)})}{2j}$$

cioè

$$y_r(t) = M(\theta) \sin(\theta t + \phi(\theta))$$

In conclusione la risposta a regime permanente ad un ingresso periodico puro è dello stesso tipo dell'ingresso ed ha la stessa pulsazione; risulta modificata in modulo e ampiezza di quantità che sono pari al modulo e alla fase della $W(z)$ calcolata in $z = e^{j\theta}$: nel punto della circonferenza unitaria ad angolo θ . Per questo motivo si usa dire che il modulo e la fase di $W(z)$ per $z = e^{j\theta}$ al variare di $\theta \in [0, \pi]$ caratterizzano il comportamento in frequenza.

Gli stessi argomenti impiegati nel caso a tempo continuo possono qui essere ripetuti per mostrare che lo stesso risultato si ottiene impostando il calcolo nel dominio delle trasformate.

5.3.2 La risposta a regime ad ingressi canonici

Si consideri l'ingresso canonico di ordine $k+1$ dato da

$$\delta_{-(k+1)}(t) = \frac{t^{[k]}}{k!} = \frac{t(t-1)\dots(t-k+1)}{k!}$$

e si proceda nel calcolo

$$y_r(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \sum_{r=t_0}^t W(t-r) \frac{\tau^{[k]}}{k!} = \sum_{\theta=0}^{\infty} W(\theta) \frac{(t-\theta)^{[k]}}{k!}$$

dove si è posto $t - \tau = \theta$. Poiché per il polinomio fattoriale di ordine (k) di un binomio vale lo sviluppo seguente

$$(t - \theta)^{[k]} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i t^{(k-i)} (\theta + i - 1)^{(i)}$$

si ha

$$y_r(t) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \binom{k}{i} (-1)^i t^{(k-i)} \sum_{\theta=0}^{\infty} W(\theta) (\theta + i - 1)^{(i)} = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i}{i!} M_i \frac{t^{[k-i]}}{(k-i)!}$$

dove

$$M_i = (-1)^i \frac{d^i W(z)}{dz^i} \Big|_{z=1}$$

come risulta da

$$\frac{d^i W(z)}{dz^i} = \frac{d^i}{dz^i} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{W(t)}{z^t} = (-1)^i \sum_{t=0}^{\infty} (t+i-1)^{(i)} \frac{W(t)}{z^{t+1}}.$$

Se inoltre si considera lo sviluppo in serie di potenze di $W(z)$ intorno a $z = 1$

$$W(z) = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} \frac{d^i W}{dz^i} \Big|_{z=1} (z-1)^i$$

si deduce che

$$M_i = (-1)^i i! c_i$$

ed in conclusione per la risposta a regime permanente si ottiene l'espressione

$$y_r(t) = \sum_{i=0}^k c_i \frac{t^{[k-i]}}{(k-i)!}$$

che presenta una stretta analogia formale con quella ottenuta per i sistemi a tempo continuo.

Anche in questo caso la risposta a regime permanente può essere calcolata come la parte persistente della risposta forzata operando nel dominio complesso. Ricordando che

$$\mathcal{Z}\left[\frac{t^{[k]}}{k!}\right] = \frac{z}{(z-1)^{k+1}}$$

e, sviluppando i calcoli

$$\begin{aligned} \frac{y_f(z)}{z} &= \frac{c_0}{(z-1)^{k+1}} + \frac{c_1}{(z-1)^k} + \cdots + \frac{c_k}{(z-1)} + \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{z-p_i} \\ y_f(t) &= c_0 \frac{t^{[k]}}{k!} + c_1 \frac{t^{[k-1]}}{(k-1)!} + \cdots + c_k + \sum_{i=1}^n r_i p_i^t \end{aligned}$$

e, infine

$$y_r(t) = c_0 \frac{t^{[k]}}{k!} + c_1 \frac{t^{[k-1]}}{(k-1)!} + \cdots + c_k$$

con

$$c_0 = K = \left. \frac{W(z)}{(z-1)^{k+1}} (z-1)^{k+1} \right|_{z=1} = W(1)$$

guadagno del sistema discreto

$$\begin{aligned} c_1 &= \left. \frac{d}{dz} \left(\frac{W(z)}{(z-1)^{k+1}} (z-1)^{k+1} \right) \right|_{z=1} \\ &\vdots \\ c_i &= \left. \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dz^i} W(z) \right|_{z=1} \end{aligned}$$

Anche nel caso del sistema a tempo discreto possiamo ripetere le stesse considerazioni fatte in precedenza; i coefficienti non sono altro che i coefficienti dello sviluppo in serie di Taylor della $W(z)$ intorno al punto $z = 1$.



CAPITOLO 6

Le proprietà geometriche dello spazio di stato

In questo capitolo vengono introdotte e studiate due proprietà degli stati che consentono di mettere in luce la struttura interna del sistema.

La prima proprietà riguarda il legame stato-uscita e consiste nell'esistenza di stati iniziali ai quali corrispondono uscite coincidenti. Come suggerisce l'intuizione, ciò costituisce un impedimento alla ricostruzione delle evoluzioni interne a partire dalle osservazioni dell'uscita.

La seconda riguarda il comportamento ingresso-stato e più in particolare la possibilità di raggiungere prefissati stati con opportuni ingressi. Da un punto di vista esterno, ciò esprime la possibilità o meno di modificare il comportamento dinamico del sistema.



Approfondimento

6.1

Le proprietà della struttura interna: l'Osservabilità

La proprietà di osservabilità riguarda il comportamento stato-uscita; più precisamente questa proprietà tiene conto del fatto che tutte le informazioni in merito all'evoluzione interna nello stato siano o meno contenute nell'uscita.

Il punto di partenza è rappresentato dalla definizione di indistinguibilità tra stati: *due stati x_a e x_b sono detti indistinguibili al tempo t_0 se per ogni funzione di ingresso da t_0 in poi, le uscite corrispondenti sono coincidenti $\forall t \geq t_0$.* Per sistemi stazionari, la condizione è indipendente da t_0 .

La presenza di stati indistinguibili può essere vista come un'inefficienza o una incompletezza dei canali di osservazione.

La presenza di stati indistinguibili equivale, per i sistemi lineari stazionari, alla presenza di stati **inosservabili**. Sono denominati *inosservabili quegli stati a cui corrisponde un'evoluzione libera in uscita identicamente nulla*; possono essere visti come stati indistinguibili dallo stato zero.

Per stabilire il legame tra stati indistinguibili e stati inosservabili, si considerino due stati x_a e x_b indistinguibili ovvero, tali per cui, fissata una funzione di ingresso $u(\cdot)$, le due uscite corrispondenti

$$y_a(t) = Ce^{At}x_a + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

e

$$y_b(t) = Ce^{At}x_b + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

coincidono $\forall t \geq 0$. Sottraendo la seconda uguaglianza dalla prima, poiché $y_a(t) = y_b(t)$, si ha

$$Ce^{At}(x_a - x_b) = 0 \quad (6.1)$$

Quindi, se x_a è indistinguibile da x_b si ha che allo stato $x_I = x_a - x_b$ corrisponde uscita identicamente nulla in evoluzione libera; questo, per quanto detto in precedenza, permette di affermare che lo stato x_I è inosservabile.

Si può dimostrare facilmente che vale anche l'inverso; infatti, se esiste x_I inosservabile, allora $\forall x_b \exists x_a$, dato da

$$x_a = x_b + x_I$$

che risulta indistinguibile da x_b . Infatti, l'uscita per il primo stato x_b risulta essere

$$y_b(t) = Ce^{At}x_b + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (6.2)$$

e per lo stato $x_a = x_b + x_I$ si ha

$$\begin{aligned} y_a(t) &= Ce^{At}x_a + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &= Ce^{At}(x_b + x_I) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &= Ce^{At}x_b + Ce^{At}x_I + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = y_b(t) \end{aligned} \quad (6.3)$$

poiché, per definizione, $Ce^{At}x_I$ è identicamente nulla.

Perciò basta studiare l'esistenza di stati x_I che danno evoluzione libera nulla in uscita, gli stati inosservabili, per ottenere gli stati indistinguibili.

In merito, si ha un primo risultato sulla loro caratterizzazione.

Teorema 6.1.1 L'insieme degli stati inosservabili

$$\mathcal{I} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : Ce^{At}x = 0, \forall t \geq 0 \right\}$$

concorda con l'insieme dato da

$$\ker \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x = 0 \right\}$$

Si inizi col dimostrare che se $x \in I$, allora $x \in \ker \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$. Per definizione di stato inosservabile,

$$Ce^{At}x = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (6.4)$$

Ricordando che una funzione identicamente nulla su un intervallo finito ha tutte le sue derivate nulle nell'intervallo stesso, si ha

$$\left(\frac{d^k}{dt^k} Ce^{At}x \right)_{t=0} = 0, \quad \forall k \geq 0,$$

da cui si ottiene

$$\left(\frac{d^k}{dt^k} Ce^{At}x \right)_{t=0} = \left(CA^k e^{At}x \right)_{t=0} = CA^k x = 0 \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.5)$$

Presi in considerazione i primi n termini della (6.5), si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Cx & = & 0 \\ CAx & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ CA^{n-1}x & = & 0 \end{array} \right. \iff \left(\begin{array}{c} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{array} \right) x = 0$$

Per dimostrare che se $x \in \ker \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$, allora $x \in I$, si consideri il teorema di Cayley-Hamilton: *una matrice quadrata annulla il proprio polinomio caratteristico*. Se quindi si considera la matrice A e il suo polinomio caratteristico

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

ne segue che

$$p_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0$$

Da questa relazione è possibile ricavare A^n in funzione delle potenze di A inferiori

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \dots - a_1A - a_0I \quad (6.6)$$

Moltiplicando a sinistra per C e a destra per x si ottiene

$$CA^n x = -a_{n-1} CA^{n-1} x - \cdots - a_1 CAx - a_0 Cx$$

la quale permette di affermare che

$$CA^k x = 0 \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad \Rightarrow \quad CA^n x = 0. \quad (6.7)$$

Moltiplicando successivamente la (6.6) per A^h , $h = 1, 2, \dots$, prima di moltiplicare per C e x , si ottiene ricorsivamente che il generico termine $CA^i x$, $i = n, n+1, n+2, \dots$ dipende linearmente dai primi n termini $CA^i x$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, per cui si può affermare che l'implicazione (6.7) può essere estesa a tutte le potenze di A :

$$CA^k x = 0 \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad \Rightarrow \quad CA^i x = 0 \quad i = n, n+1, \dots \quad (6.8)$$

Dal noto risultato per il quale se una funzione è nulla in un intervallo finito, con tutte le sue derivate nulle, allora è identicamente nulla nello stesso intervallo, avendo

$$\left(\frac{d^i}{dt^i} Ce^{At} x \right)_{t=0} = CA^i x = 0 \quad i = 0, 1, \dots \quad \forall t > 0$$

si può concludere che

$$Ce^{At} x = 0 \quad \forall t > 0.$$

Si noti che lo stesso teorema si può dimostrare a partire dallo sviluppo in serie dell'esponenziale, grazie al quale si può scrivere

$$Ce^{At} x = \sum_{k=0}^{\infty} (CA^k) x \frac{t^k}{k!}$$

ritrovando come coefficienti i termini delle derivate del ragionamento precedente.

Un'osservazione importante che discende dal precedente risultato è che l'insieme degli stati inosservabili è un sottospazio lineare di \mathbb{R}^n .

La matrice $(nq \times n)$

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

è detta *matrice di osservabilità del sistema*.

Si noti che il sistema è tutto osservabile (nessuno stato inosservabile) se e solo se la matrice di osservabilità ha rango pieno

$$\rho(O) = n$$

In generale si ha

$$\dim(\mathcal{I}) = \dim(\ker(O)).$$

Un'interessante proprietà è rappresentata dal fatto che se x è inosservabile, allora anche Ax lo è; questo si può esprimere dicendo che il sottospazio degli stati inosservabili è invariante rispetto ad A . Ciò si prova osservando che x inosservabile verifica (6.5). Valutando Ax al posto di x , si ottiene

$$CA^k Ax = CA^{k+1}x \quad k=0, \dots$$

anch'essi pari a zero in quanto coincidono con gli stessi termini della (6.5) tranne il primo. Con riferimento al concetto di invarianza, è possibile caratterizzare in modo completo geometricamente l'insieme degli stati inosservabili, ovvero il nucleo della matrice di osservabilità. Tale insieme è, infatti, non solo invariante rispetto ad A , ma è il più grande sottospazio dello spazio di stato invariante rispetto all'applicazione di A contenuto nel kernel di C .

Essendo l'insieme degli stati inosservabili un sottospazio lineare dello spazio di stato, è possibile mettere in evidenza una scomposizione interna in sottospazi in accordo con la proprietà di inosservabilità. A tal fine si supponga che

$$\rho(O) = m < n \quad \Leftrightarrow \quad \dim(\ker(O)) = n - m > 0$$

ossia che esista un sottospazio di stato, di dimensione $n-m$, di stati inosservabili. Si può allora dimostrare che $\exists T|_{n \times n}$ non singolare che definisce un cambio di coordinate $z = Tx$ tale che, nelle nuove coordinate, le matrici che rappresentano il sistema manifestano una partizione a blocchi del seguente tipo

$$A = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad C = CT^{-1} = (0 \quad C_2) \quad (6.9)$$

con A_{22} di dimensioni $m \times m$, B_2 , $m \times p$, e C_2 , $q \times m$. Inoltre, la terna (A_{22}, C_2) è tutta osservabile, ossia la matrice

$$\begin{pmatrix} C_2 \\ C_2 A_{22} \\ \vdots \\ C_2 A_{22}^{m-1} \end{pmatrix}$$

ha rango pieno.

La trasformazione di coordinate che mette in evidenza la struttura indicata è quella che corrisponde ad assumere come primi $n-m$ vettori della nuova base una base dell'insieme degli inosservabili e gli ultimi m la base di un suo generico completamento. Si assume cioè

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \text{base in } & I & | & \text{completamento} \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

Questa scelta implica che, nella nuova base, lo stato z risulti strutturato con le prime $n-m$ componenti che descrivono la sua proiezione nel sottospazio inosservabile e le rimanenti $n-m$ nel sottospazio di completamento

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} n-m \\ m \end{matrix}$$

Infatti, considerata la trasformazione inversa, si può scrivere

$$x = T^{-1}z = (\text{base in } \mathcal{I} \cup *) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Si vede che se $z_2 = 0$, si ha

$$x = (\text{base in } \mathcal{I} \cup *) \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x \in \mathcal{I} \quad (z \in \mathcal{I})$$

mentre se z_2 non ha tutte le m componenti nulle, x ha componenti anche al di fuori di \mathcal{I} e quindi non è inosservabile (z non è osservabile). Si osservi che

$$x \in \ker \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = Tx \in \ker \begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{pmatrix}$$

dal momento che

$$0 = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} T^{-1}z = \begin{pmatrix} CT^{-1} \\ CAT^{-1} \\ \vdots \\ CA^{n-1}T^{-1} \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{pmatrix} z \quad (6.11)$$

poiché si verifica facilmente che $CA^kT^{-1} = CT^{-1}TA^kT^{-1} = CT^{-1}(TAT^{-1})^k = \tilde{C}\tilde{A}^k$, $k = 0, 1, \dots$

Per mostrare che il cambio di coordinate indicato trasforma le matrici del sistema nella forma riportata nella (6.9), si osservi che per x inosservabile si ha $Cx = 0$ e quindi, in corrispondenza, per $z = Tx$ inosservabile si ha $\tilde{C}z = 0$. Si ha allora

$$\tilde{C}z = 0 \Leftrightarrow (C_1 \quad C_2) \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1z_1 = 0 \quad \forall z_1$$

da cui segue che necessariamente $C_1 = 0$. Inoltre, per l'invarianza di \mathcal{I} , se z è uno stato inosservabile allora anche \tilde{z} lo è. Per la struttura degli stati inosservabili nella base in z ne segue

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A_{11}z_1 \\ A_{21}z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall z_1$$

che implica $A_{21} = 0$.

Esplcitando la dinamica del sistema rispetto alla scomposizione descritta, questo può essere riscritto come

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + B_1 u \\ \dot{z}_2 = A_{22}z_2 + B_2 u \\ y = C_2 z_2 \end{cases}$$

mettendo in evidenza la struttura in due sottosistemi S_1 e S_2 , con variabili di stato z_1 e z_2 rispettivamente; entrambi i sottosistemi sono influenzati da u , il sottosistema S_2 non è influenzato da S_1 , mentre vale il viceversa, e l'uscita è caratterizzata dal solo sottosistema S_2 . In questa forma è evidente che il sottosistema S_1 non influenza y né direttamente né indirettamente tramite S_2 .

Si può rappresentare questa struttura come in Figura 6.1 dalla quale è evidente quanto detto.

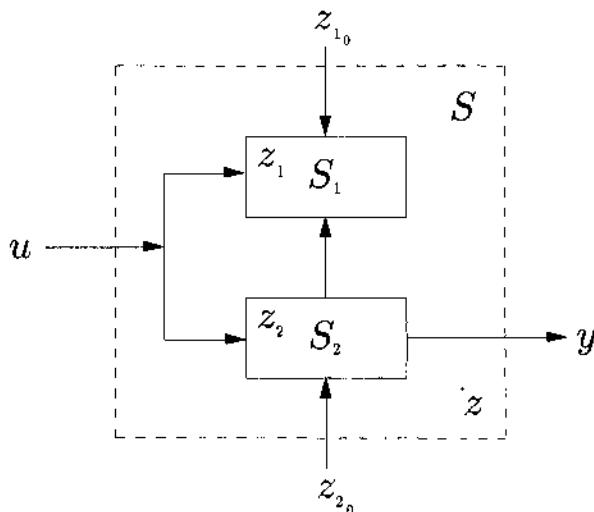


Figura 6.1: Struttura a blocchi di un sistema scomposto secondo l'inosservabilità.

Esempio 6.1.1 Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice di osservabilità è pari a

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow \mathcal{I} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Scegliendo ora

$$T^{-1} = (\text{base di } \mathcal{I} \mid \text{completamento}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si ottengono matrici TAT^{-1} e CT^{-1} della forma (6.9).

Un ulteriore aspetto che si vuole mettere in evidenza è che il legame forzato ingresso-uscita è caratterizzato dal solo sottosistema osservabile. Ciò appare evidente dalla figura, ma è possibile evidenziarlo direttamente con il calcolo. Si ha, infatti, innanzitutto l'uguaglianza

$$W(t) = Ce^{At}B = \tilde{C}e^{\tilde{A}t}\tilde{B}$$

intuitiva e facilmente verificabile per sostituzione,

Quindi si può calcolare $W(t)$ come

$$\begin{aligned} W(t) &= (0 \quad C_2) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = (0 \quad C_2) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} A_{11}^k & * \\ 0 & A_{22}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \\ &= (0 \quad C_2) \begin{pmatrix} e^{A_{11}t} & * \\ 0 & e^{A_{22}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = C_2 e^{A_{22}t} B_2 \end{aligned}$$

Tutti e soli i modi osservabili caratterizzano il sottosistema osservabile. Se infatti ricordiamo che i modi osservabili sono quelli le cui leggi temporali appartengono a Ce^{At} , ossia a

$$\tilde{C}e^{\tilde{A}t} = (0 \quad C_2 e^{A_{22}t}) = \tilde{\psi}(t)$$

e che è stata fatta solo una trasformazione di coordinate $z = Tx$, quindi gli autovettori λ_i che caratterizzano A sono gli stessi che caratterizzano la matrice $\tilde{A} = TAT^{-1}$, allora si può comprendere che il sottosistema S_2 è caratterizzato da leggi temporali che sono quelle dei modi osservabili. Si può dimostrare che se un sistema S è tutto osservabile allora, e solo allora, tutti i modi sono osservabili.

6.2

Le proprietà della struttura interna: la Raggiungibilità

La seconda proprietà allo studio definisce il comportamento ingresso–stato. Il punto di partenza è il seguente.

Definizione. \bar{x} è detto raggiungibile a T da x_0 se $\exists t_0 < T$, ed un ingresso sull'intervallo di tempo $[t_0, T]$ che porta lo stato x_0 a \bar{x} .

Analogamente al caso dell'inosservabilità, anche per la raggiungibilità è importante individuare metodi che consentano di capire se un dato stato sia raggiungibile senza dover necessariamente individuare l'ingresso che consente di raggiungerlo, caratterizzare l'intero insieme degli stati che si possono raggiungere e individuare le condizioni sotto le quali il sistema è tutto raggiungibile.

Nel caso di una rappresentazione lineare stazionaria, è usuale riferirsi allo stato $x(t_0) = 0$. Lo stato zero è, infatti, sempre mantenuto in assenza di ingresso (stato di equilibrio).

Se denotiamo con $\mathcal{R}(T)$ l'insieme dei raggiungibili a T si ha

$$\mathcal{R}(T) = \left\{ x : x = \int_{t_0}^T e^{A(T-\tau)} Bu(\tau) d\tau, \quad \text{per qualche } u \in \mathcal{U}[t_0, T] \right\}$$

che può anche essere descritto come

$$\mathcal{R}(T) = \left\{ x : x = \int_{-\infty}^T e^{A(T-\tau)} Bu(\tau) d\tau, \quad \text{per qualche } u \in \mathcal{U}(-\infty, T) \right\}$$

Dalle precedenti espressioni risulta chiaro che combinazioni lineari di stati raggiungibili sono raggiungibili, e quindi che $\mathcal{R}(T)$ è un sottospazio di \mathbb{R}^n .

Per arrivare ad una descrizione dell'insieme degli stati raggiungibili che ne consenta il calcolo è necessario fare riferimento ad un noto risultato della teoria degli operatori lineari.

E' necessario ricordare preliminarmente la definizione di operatore aggiunto. Assegnato $\mathcal{L}: A \rightarrow B$ lineare, $\mathcal{L}^*: B \rightarrow A$ è quell'operatore che soddisfa

$$\langle \mathcal{L}(a), b \rangle_B = \langle a, \mathcal{L}^*(b) \rangle_A$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica l'operazione di prodotto interno.

Lemma 6.2.1 Se \mathcal{L} è un operatore lineare allora

$$Im(\mathcal{L}) = ker(\mathcal{L}^*)^\perp$$

cioè la sua immagine coincide con il complemento ortogonale del kernel dell'operatore aggiunto \mathcal{L}^* .

Ciò premesso, essendo $Im(\mathcal{L})$ e $ker(\mathcal{L}^*)^\perp$ sottospazi, quanto asserito nel Lemma 6.2.1 è equivalente a

$$Im(\mathcal{L})^\perp = ker(\mathcal{L}^*)$$

che è vera in quanto comunque preso b in $Im(\mathcal{L})^\perp$ e per ogni α in A , si ha

$$\langle b, \mathcal{L}(\alpha) \rangle_B = 0 \Rightarrow \langle \mathcal{L}^*(b), \alpha \rangle_A = 0$$

cioè b è in $ker(\mathcal{L}^*)$. Analogamente si procede per il viceversa.

Questo risultato può essere applicato al caso allo studio osservando che la funzione

$$B^* e^{A^*(T-\tau)} x : \quad \mathbb{R}^n \rightarrow C^\omega(-\infty, T)$$

è l'operatore aggiunto di

$$\int_{-\infty}^T e^{A(T-\tau)} B u(\tau) d\tau.$$

Se inoltre si osserva che l'operatore aggiunto di una matrice è la matrice aggiunta (che nel caso reale coincide con la trasposta) e si osserva che per il teorema precedente il $ker(Ce^{At})$ coincide con il kernel della matrice di osservabilità, non è difficile verificare che vale il seguente risultato.

Teorema 6.2.1

$$\begin{aligned} R(T) &= Im \left(\int_{-\infty}^T e^{A(T-\tau)} B u(\tau) d\tau \right) = ker \left(B^* e^{A^*(T-\tau)} x \right) = \\ &= ker \begin{pmatrix} B \\ B^* A^* \\ B^* A^{*-1} \end{pmatrix} = Im(B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B) \end{aligned}$$

Le precedenti considerazioni conducono ad una semplice e completa caratterizzazione dell'insieme degli stati raggiungibili. Esso coincide con il sottospazio generato dalle colonne linearmente indipendenti della matrice $(n \times np)$, $R = (B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B)$ detta **matrice di raggiungibilità**.

Se tale matrice ha rango n , tutti gli stati sono raggiungibili ed il sistema stesso è detto completamente **raggiungibile**. Il risultato messo in evidenza fornisce un test semplice e molto efficace. Assegnato un sistema è infatti possibile con un semplice criterio indagare le "potenzialità" di intervento attraverso i canali di ingresso. L'insieme degli stati raggiungibili è un sottospazio dello spazio di stato; essendo pari all'immagine della matrice di raggiungibilità, esso coincide con il sottospazio generato dalle colonne linearmente indipendenti della matrice di raggiungibilità.

Esempio 6.2.1 Si consideri il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

caratterizzato dalla coppia di matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\mathcal{R} = \text{Im}(B - AB) = \text{Im} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{array} \right)$$

In questo caso la matrice ha rango pieno e il sistema è tutto raggiungibile; ciò significa che si può andare in qualsiasi stato.

Per come è definita e per quanto detto, la verifica della raggiungibilità di uno stato equivale a verificare se esso appartiene o meno a $\mathcal{R} = \text{Im}(R)$.

Esempio 6.2.2 Si prenda ad esempio la coppia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per la quale

$$\mathcal{R} = \text{Im} \left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

In questo caso, l'insieme degli stati raggiungibili è uno spazio ad una dimensione dato da

$$\mathcal{R} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ciò significa che per questo sistema tutti e soli gli stati del tipo

$$x_r = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

sono raggiungibili, e solo questi.

Quindi essendo l'insieme degli stati raggiungibili il sottospazio dato dall'immagine della matrice di raggiungibilità R , si può dire che il sistema è tutto raggiungibile se il rango di questa matrice è n .

Riassumendo quanto detto finora, si ha che

- l'insieme degli stati raggiungibili è pari alla combinazione lineare delle colonne di R ;
- uno stato x è raggiungibile se può essere espresso come combinazione lineare delle colonne di R ;
- quando nell'insieme delle np colonne di R ce ne sono n linearmente indipendenti, cioè quando il rango della matrice è uguale ad n , il sistema è tutto raggiungibile.

Per un sistema a tempo continuo tutto raggiungibile, se si indica con x_r il generico stato, questo può essere raggiunto a partire dallo stato $x(0) = 0$ in un tempo arbitrario, T . Infatti si può verificare che con l'ingresso

$$u_r(t) = B'e^{-A't}G^{-1}e^{-AT}x_r$$

in cui

$$G = \int_0^T e^{-At}BB'e^{-A'\tau}d\tau$$

è invertibile nell'ipotesi di completa raggiungibilità, si arriva al tempo T allo stato x_r . Infatti

$$\begin{aligned} & \int_0^T e^{A(T-\tau)}B(B'e^{-A'\tau}G^{-1}e^{-AT}x_r)d\tau \\ &= e^{AT}\left(\int_0^T e^{-A\tau}BB'e^{-A'\tau}d\tau\right)G^{-1}e^{-AT}x_r. \end{aligned}$$

Il termine tra le parentesi è la matrice C e l'espressione diventa

$$e^{AT}GG^{-1}e^{-AT}x_r = x_r$$

quindi lo stato raggiunto al tempo T sotto l'azione dell'ingresso indicato è proprio x_r .

Essendo T arbitrario, si usa dire che la proprietà di raggiungibilità è differenziale per i sistemi a tempo continuo. Ovviamente meno tempo si impiega per andare da 0 a x_r , più ampio è l'ingresso da applicare.

Un'ulteriore osservazione riguarda il fatto che gli stati raggiungibili da zero possono anche essere forzati a zero, nell'ipotesi di (*controllabilità*): *uno stato è controllabile a T se esiste un ingresso che lo porta a zero al tempo T*.

Per le rappresentazioni lineari, stazionarie a tempo continuo, si può mostrare che sono controllabili tutti e soli gli stati raggiungibili.

Se infatti uno stato, x_T , è raggiungibile a T , essendo l'insieme degli stati raggiungibili un sottospazio dello spazio di stato invariante rispetto ad A , anche lo stato $-e^{AT}x_T$ è raggiungibile; quindi, esiste un ingresso $u_T(\cdot)$ tale che

$$\int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu_T(\tau)d\tau = -e^{AT}x_T$$

per il quale

$$e^{AT}x_T + \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu_T(\tau)d\tau = 0$$

il che prova la controllabilità a T di x_T .

L'interesse dello studio condotto è spesso collegato all'equivalenza ora mostrata. La possibilità di portare un sistema nello stato zero, la controllabilità, è spesso l'obiettivo di un intervento su un sistema fisico. Il semplice test messo a punto può essere impiegato a questo proposito.

Si potrebbe inoltre mostrare che la proprietà di controllabilità si mantiene sotto approssimazione lineare. Ciò comporta che se la proprietà non sussiste sul modello lineare approssimante il comportamento effettivo, allora non sussiste sul sistema fisico stesso.

Esempio 6.2.3 Si consideri un pendolo invertito con una massa m all'estremità, controllato alla base per azione della forza u , come in Figura 6.2

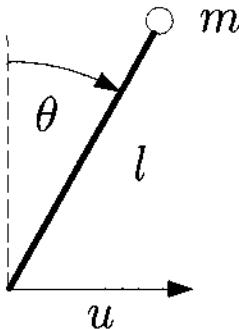


Figura 6.2: Schema del pendolo inverso considerato nell'esempio.

Sia θ l'angolo formato dal pendolo con la verticale; se si proiettano le forze sulla tangente della traiettoria del pendolo e si impone l'equilibrio delle forze agenti, si ottiene l'equazione del moto

$$ml\ddot{\theta} = mg \sin \theta - u \cos \theta$$

dalla quale è possibile definire una rappresentazione con lo spazio di stato data da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{1}{ml} \cos x_1 u \end{cases} \quad (6.12)$$

dove

$$\begin{cases} x_1 &= \theta \\ x_2 &= \dot{\theta} \end{cases}$$

Il problema che si considera è il mantenimento del pendolo in equilibrio. Si tratta, in sostanza, di un problema di controllabilità dello stato corrispondente alla posizione verticale con velocità nulla. Quindi il punto in cui si vuole controllare il sistema è

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = 0$$

Lo studio può essere condotto sul modello linearizzato, per vedere in prima istanza, se il sistema linearizzato è controllabile. Infatti si può dimostrare che se ciò non fosse, se cioè non esistesse la possibilità di condurre a zero lo stato su modello linearizzato, certamente non si potrebbe risolvere il problema sul modello non lineare e quindi nella realtà sulla struttura effettiva.

A tal fine, si calcoli l'approssimazione lineare e l'insieme degli stati controllabili per (6.12)

$$A = J(x_e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}_{x_e=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} \quad B = \left(\begin{matrix} 0 \\ -\frac{1}{ml} \cos x_1 \end{matrix} \right)_{x_e=0} \left(\begin{matrix} 0 \\ -\frac{1}{ml} \end{matrix} \right)$$

Il sistema linearizzato ottenuto è quindi

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ml} \end{pmatrix} u$$

Lo studio della raggiungibilità richiede il calcolo della corrispondente matrice R :

$$R = \left(\begin{array}{c|c} B & AB \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\frac{1}{ml} \\ -\frac{1}{ml} & 0 \end{array} \right)$$

Questa matrice ha rango due quindi l'insieme degli stati raggiungibili è tutto lo spazio. Allora, anche lo stato zero con velocità angolare zero è controllabile. Ciò implica la controllabilità a zero del sistema fisico per piccoli spostamenti intorno all'equilibrio (per un approfondimento si confronti quanto detto con l'analisi della stabilità mediante linearizzazione).

Se si studia la struttura riportata in Figura 6.3, nota con il nome di doppio pendolo invertito, la sua approssimazione lineare consente di verificare la non completa controllabilità che, si può mostrare, comporta la non controllabilità del sistema reale.

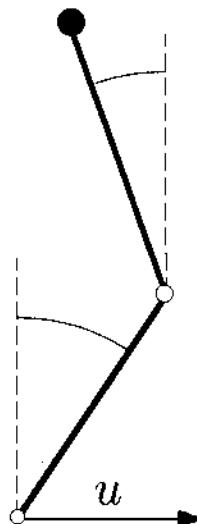


Figura 6.3: Schema del doppio pendolo inverso considerato nell'esempio.

Analogamente al caso della proprietà di inosservabilità, il fatto che il sottospazio degli stati raggiungibili sia uno spazio lineare implica la possibilità di scegliere le coordinate, e quindi rappresentare il sistema, in modo che appaia evidente la composizione del sistema stesso come l'interconnessione di una parte raggiungibile e una non raggiungibile.

A tal fine si supponga che il sistema non sia tutto raggiungibile, e quindi

$$\rho(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = m < n$$

In tali circostanze si può dimostrare che $\exists T (n \times n)$ non singolare che definisce un cambio di base tale che, nelle nuove coordinate, le matrici che rappresentano il sistema manifestano una partizione a blocchi del seguente tipo:

$$A = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad \tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = CT^{-1} = (C_1 \quad C_2)$$

con A_{11} matrice $(m \times m)$, B_1 $(m \times p)$ e C_1 $(q \times m)$. Inoltre, la terna (A_{11}, B_1, C_1) è tutta raggiungibile.

La matrice T è definita a partire da

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} m & n-m \\ \text{(base in } \mathcal{R} \text{)} & \text{(completamento)} \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

dove il completamento è rappresentato da $n - m$ vettori tali da rendere T^{-1} non singolare, e alla struttura delle matrici nelle nuove coordinate corrisponde una partizione di z tale che

$$z = Tx = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ n-m \end{matrix}$$

Le verifiche sono analoghe a quelle del caso dell'inosservabilità, osservando che se uno stato è raggiungibile, nelle nuove coordinate deve avere la forma

$$z_r = \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e questa deve essere la struttura dell'immagine di \tilde{B} , per cui $B_2 = 0$. La struttura di A discende ancora una volta dall'invarianza del sottospazio.

Esprimendo le equazioni del sistema secondo la struttura ottenuta, si ottiene

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + B_1u \\ \dot{z}_2 &= A_{22}z_2 \\ y &= C_1z_1 + C_2z_2 \end{cases}$$

Se indichiamo con S_1 e S_2 i due sistemi dinamici, uno corrispondente all'evoluzione delle variabili z_1 , l'altro a quelle z_2 , si nota che S_1 è influenzato da u mentre S_2 è autonomo, e entrambi influenzano l'uscita. Una rappresentazione grafica è data nella Figura 6.4.

Questa struttura mette in luce che il sottosistema S_1 è potenzialmente raggiungibile, S_2 invece no; in realtà il sottosistema S_1 è tutto quanto raggiungibile. Prova ne è che se

$$\rho(B \cdots A^{n-1}B) = m$$

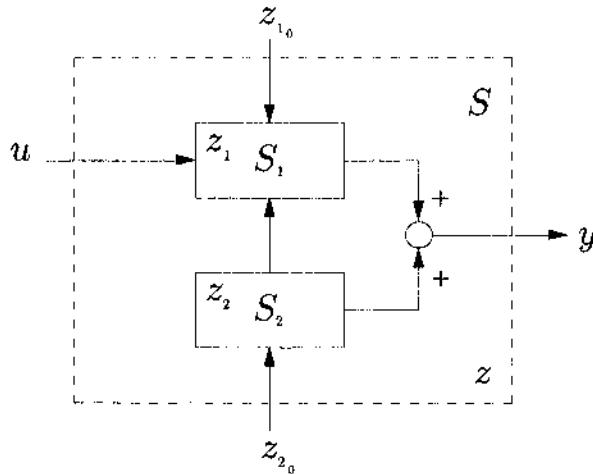


Figura 6.4: Rappresentazione a blocchi del sistema scomposto secondo la raggiungibilità.

allora

$$\rho(\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \cdots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}) = \rho\left(\begin{array}{cccc} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) = m$$

Poiché

$$\rho\left(\begin{array}{cccc} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) = \rho(B_1 \quad A_{11}B_1 \quad \cdots \quad A_{11}^{n-1})$$

e, essendo A_{11} ($m \times m$), ne segue che

$$\rho(B_1 \quad A_{11}B_1 \quad \cdots \quad A_{11}^{n-1}) = \rho(B_1 \quad A_{11}B_1 \quad \cdots \quad A_{11}^{m-1}) = m$$

Quindi, se dal sistema complessivo (A, B, C) dato si estraie la terna (A_{11}, B_1, C_1) secondo i passi

$$(A \quad B \quad C)_n \xrightarrow{T} (\tilde{A} \quad \tilde{B} \quad \tilde{C})_n \implies (A_{11} \quad B_1 \quad C_1)_m$$

la nuova rappresentazione così ottenuta è tutta raggiungibile.

Esempio 6.2.4 Per chiarire quanto scritto, si consideri l'esempio dato da

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eseguendo i calcoli, si ottiene

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho(R) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R} = \text{Im}(R) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Le matrici di cambio di base possono essere date da

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

che trasformano le matrici date in

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ed il sistema può essere riscritto come

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= -z_1 - 3z_2 + u \\ \dot{z}_2 &= 2z_2 \\ y &= C_1 z_1 + C_2 z_2 \end{cases}$$

Il risultato messo in luce, che prende il nome di Teorema della scomposizione rispetto alla proprietà di raggiungibilità, può essere facilmente dimostrato a partire dalla caratterizzazione geometrica dell'insieme degli stati raggiungibili, più precisamente dell'immagine della matrice di raggiungibilità. Tale insieme è, infatti, il più piccolo sottospazio dello spazio di stato che gode delle due seguenti proprietà: contiene l'immagine di B ed è invariante rispetto all'applicazione di A . Nelle nuove coordinate, in cui i primi vettori di base sono m vettori di base di \mathcal{R} , uno stato raggiungibile è rappresentato con le prime m componenti (quelle di z_1) generiche e le ultime ($n - m$) (quelle di z_2) uguali a 0. Essendo le colonne di B in \mathcal{R} ne segue immediatamente la sua struttura nelle coordinate z ; inoltre, applicando al generico stato raggiungibile la proprietà di invarianza si deriva la struttura della matrice dinamica.

Anche dal punto di vista della raggiungibilità, una ulteriore osservazione riguarda la caratterizzazione del legame forzato ingresso–uscita associato al sistema; risulta infatti evidente che esso è condizionato dal solo sottosistema raggiungibile. Questo è anche ciò che suggerisce l'intuizione nell'osservare la Figura 6.4. Il calcolo della $W(t)$ conferma tale intuizione. Infatti, poiché come già visto

$$W(t) = Ce^{At}B = \tilde{C}e^{\tilde{A}t}\tilde{B}$$

si può scrivere la risposta impulsiva del sistema come

$$\begin{aligned} W(t) &= (C_1 \ C_2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} = (C_1 \ C_2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} A_{11}^k & * \\ 0 & A_{22}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (C_1 \ C_2) \begin{pmatrix} e^{A_{11}t} & * \\ 0 & e^{A_{22}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 e^{A_{11}t} B_1 \end{aligned}$$

Un'ultima osservazione è sempre suggerita dalla Figura 6.4; è ragionevole supporre che vi sia un legame tra la proprietà di raggiungibilità degli stati e quella dell'eccitabilità dei modi naturali.

Come già detto, sono eccitabili con impulsi d'ingresso quei modi naturali le cui leggi esponenziali compaiono in

$$H(t) = e^{At}B$$

Se si tiene conto del fatto che le leggi esponenziali che caratterizzano i due sottosistemi S_1 e S_2 , quelle in $\tilde{A} = TAT^{-1}$, sono le stesse di quelle della matrice A , dal momento che gli autovalori di una matrice non cambiano per la trasformazione introdotta (A e TAT^{-1} sono matrici simili), si comprende che gli autovalori di A sono in parte autovalori di A_{11} , in numero di m , e in parte di A_{22} , in numero di $(n-m)$. Procedendo con il calcolo di $\tilde{H}(t)$, si ottiene

$$\tilde{H}(t) = e^{\tilde{A}t}\tilde{B} = \begin{pmatrix} e^{A_{11}t}B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè in $\tilde{H}(t)$ vi sono soltanto le leggi esponenziali relative ad $e^{A_{11}t}B_1$, quelle che corrispondono agli autovalori di A_{11} del sottosistema S_1 .

Infine, si può dimostrare che, essendo il sottosistema S_1 tutto raggiungibile, tutti i suoi modi sono eccitabili. Ciò consente di affermare che il sottosistema raggiungibile è caratterizzato da tutti e soli i modi eccitabili.

Un'ultima osservazione serve per chiarire ciò che si intenda quando si afferma che le proprietà di raggiungibilità ed osservabilità sono la duale l'una dell'altra. Infatti, si considerano i due sistemi

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dot{z} = A'z + C'u \\ y = B'u \end{cases}$$

detti l'uno duale dell'altro, la completa raggiungibilità dell'uno è equivalente alla completa osservabilità dell'altro e viceversa. Quindi il sussistere di una data proprietà su uno di essi implica il sussistere della proprietà duale sul sistema duale.



Approfondimento

6.3

La scomposizione di Kalman

Sulla base delle proprietà di inosservabilità e di raggiungibilità descritte nelle sezioni 6.1 e 6.2 rispettivamente, è possibile mettere in evidenza la struttura

interna del sistema che segue quando entrambe vengono considerate contemporaneamente.

Mediante un cambiamento di coordinate, si può mostrare che un sistema può essere rappresentato dall'interconnessione di quattro sottosistemi secondo il soddisfacimento o meno delle due proprietà contemporaneamente. Si ottiene, in questo modo, una generalizzazione di quanto illustrato considerando separatamente le due proprietà.

Infatti, con riferimento alla raggiungibilità, Paragrafo 6.2, da

$$\mathcal{R} = \text{Im}(B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B) = \text{Im}(R)$$

se il sistema non è tutto raggiungibile, è possibile definire una opportuna trasformazione di coordinate che evidenzia stati raggiungibili e non raggiungibili. Allo stesso modo, con riferimento all'inosservabilità, Paragrafo 6.1, da

$$\mathcal{I} = \ker \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \ker(O)$$

se il sistema non è tutto osservabile, è possibile definire una opportuna trasformazione di coordinate che evidenzia gli stati inosservabili dagli altri.

Facendo contemporaneamente riferimento alle due proprietà, la raggiungibilità e l'inosservabilità, è possibile classificare gli stati in

1. raggiungibili e inosservabili
2. raggiungibili e non inosservabili
3. non raggiungibili e inosservabili
4. non raggiungibili e non inosservabili

Si vuole mostrare, qui, che è possibile selezionare le coordinate in modo che le proprietà 1, 2, 3, 4 degli stati siano messe in evidenza, scomponendo il sistema in quattro sottosistemi opportuni, ciascuno caratterizzato da uno spazio di stato ottenuto a partire dai sottospazi lineari degli stati raggiungibili \mathcal{R} e degli stati inosservabili \mathcal{I} .

Siano χ_1, χ_2, χ_3 e χ_4 i sottospazi dello spazio di stato \mathbb{R}^n , definiti come segue.

$$\chi_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I}$$

è il sottospazio contenente tutti gli stati raggiungibili e inosservabili. Si indichi con n_1 la sua dimensione.

$$\chi_2, \chi_3, \Phi \chi_2 = \mathcal{R}$$

ossia χ_2 è un qualunque complemento a χ_1 in \mathcal{R} che ha in comune con χ_1 solo l'origine (si ricorda che tutti i sottospazi lineari hanno necessariamente l'origine in comune); ciò consente di esprimere \mathcal{R} mediante l'operazione di somma diretta \oplus . Ne segue che, definendo $n_2 = \dim(\chi_2)$, $n_1 + n_2 = \dim(\mathcal{R})$.

$$\chi_3 \cdot \chi_1 \oplus \chi_3 = \mathcal{I}$$

si definisce con la stessa logica di χ_2 ma con riferimento al sottospazio degli stati inosservabili: χ_3 è un qualunque complemento a χ_1 in \mathcal{I} , con χ_1 e χ_3 con la sola origine in comune. Posto $n_3 = \dim(\chi_3)$, anche qui vale la relazione sulle dimensioni $n_1 + n_3 = \dim(\mathcal{I})$.

Quando $n_1 + n_2 + n_3 < n$, è necessario introdurre un quarto sottospazio, χ_4 , di dimensione n_4 , complemento a R^n di $\chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3$, equivalentemente ai completamenti introdotti nei cambiamenti di coordinate rispetto all'inosservabilità (6.10) o rispetto alla raggiungibilità (6.13), per ottenere tutto R^n

$$\chi_4 \cdot (\chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_4) = R^n$$

Ciò posto, è possibile definire una trasformazione di coordinate corrispondente ad assumere come primi n_1 vettori una base in χ_1 , quindi n_2 vettori che definiscono una base in χ_2 , poi, n_3 vettori che definiscono una base in χ_3 , infine, n_4 vettori che definiscono una base in χ_4 . Questa trasformazione equivale a definire una matrice di cambiamento di base T tale che

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \text{base di } \chi_1 & \text{base di } \chi_2 & \text{base di } \chi_3 & \text{base di } \chi_4 \end{pmatrix}$$

Si osservi l'analogia con le strutture delle matrici di trasformazione nel caso di inosservabilità e di raggiungibilità.

Nelle nuove coordinate $z = Tx$ è possibile mettere in evidenza una partizione delle componenti secondo i quattro sottospazi:

$$z = Tx = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{array} \right.$$

con z_i di dimensione n_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

Nella nuova base, le matrici A , B e C assumono la particolare struttura

$$A = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix}, \quad B = TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = CT^{-1} = (0 \quad C_2 \quad 0 \quad C_4)$$

che consente di riscrivere il sistema nella forma

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + A_{13}z_3 + A_{14}z_4 + B_1 u \\ \dot{z}_2 &= A_{22}z_2 + A_{24}z_4 + B_2 u \\ \dot{z}_3 &= A_{33}z_3 + A_{34}z_4 \\ \dot{z}_4 &= A_{44}z_4 \\ y &= C_2 z_2 + C_4 z_4\end{aligned}$$

Denotando con S_i il sottosistema caratterizzato dalle variabili z_i , il sistema descritto risulta decomposto in quattro sottosistemi, una rappresentazione grafica dei quali è riportata in Figura 6.5.

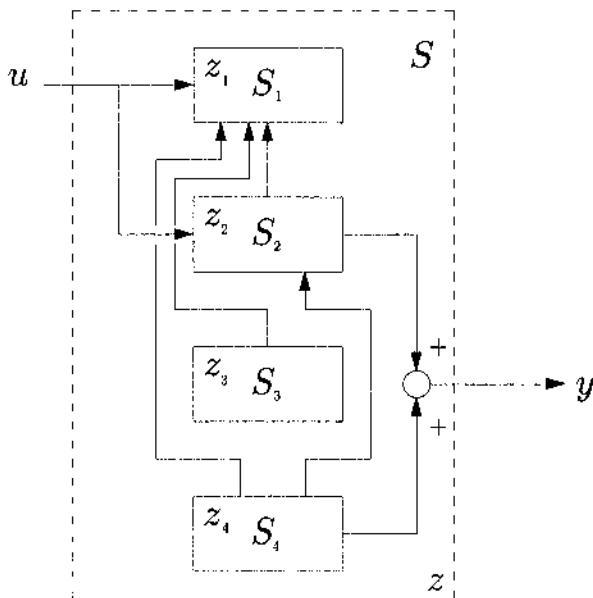


Figura 6.5

Dalle equazioni e dallo schema si vede che il sottosistema S_1 è influenzato da S_2 , da S_3 e anche da S_4 e, infine, dall'ingresso u . Il sottosistema S_2 è influenzato da S_4 , e dall'ingresso u . Il sottosistema S_3 è influenzato da S_4 mentre S_4 è un

sottosistema che evolve in modo autonomo. Infine l'uscita è condizionata da S_2 e S_4 .

In conclusione questa è la struttura che appare dall'esterno nelle coordinate z . S_1 è un sottosistema tutto raggiungibile, ma non osservabile; S_2 è un sottosistema caratterizzato da stati raggiungibili e osservabili; Il sottosistema S_3 non raggiungibile e non osservabile; infine, S_4 è un sottosistema non raggiungibile, ma osservabile.

Appare evidente da questa scomposizione che mette in evidenza la struttura interna dello stato, che il legame forzato ingresso-uscita è caratterizzato dal solo sottosistema S_2 , come è possibile verificare anche analiticamente. Infatti, nelle coordinate z

$$\begin{aligned}
 W(t) = C_2 e^{A_2 t} B_2 &= (0 \ C_2 \ 0 \ C_4) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= (0 \ C_2 \ 0 \ C_4) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} A_{11}^k & * & * & * \\ 0 & A_{22}^k & * & * \\ 0 & 0 & A_{33}^k & * \\ 0 & 0 & 0 & A_{44}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= (0 \ C_2 \ 0 \ C_4) \begin{pmatrix} e^{A_{11}t} & * & * & * \\ 0 & e^{A_{22}t} & * & * \\ 0 & 0 & e^{A_{33}t} & * \\ 0 & 0 & 0 & e^{A_{44}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= C_2 e^{A_{22}t} B_2
 \end{aligned}$$

Quindi la risposta impulsiva del sistema complessivo è la risposta del sottosistema S_2 , che è un sistema tutto raggiungibile ed osservabile.

Si comprende con facilità, e non sarebbe difficile dimostrare, che la terna (A_{22}, B_2, C_2) , quella che caratterizza il sottosistema S_2 , ha le dimensioni più piccole tra tutte le terne di matrici che hanno risposta impulsiva fissata e uguale a $W(t)$.

Esempio 6.3.1 Come esempio numerico, si consideri il sistema descritto da

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\
 y(t) &= (1 \ -1 \ -1)x(t)
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Per lo studio dell'inosservabilità si ha

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix}, \quad \rho(O) = 1$$

perciò il sottospazio degli stati inosservabili ha dimensione due, pari a $\dim(\ker(O))$, e può essere descritto dalla base

$$\mathcal{I} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Limitandoci alla sola inosservabilità, come si definisce il cambio di base per evidenziare la struttura? Che dimensione hanno le matrici A_{11} e A_{22} ottenute? Qual è l'espressione della risposta impulsiva in uscita?

Per la raggiungibilità, i calcoli forniscono

$$R = (B \ AB \ A^2B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \rho(R) = 2$$

pertanto il sottospazio degli stati raggiungibili ha dimensione due e può essere descritto da

$$\mathcal{R} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

Anche in questo caso, limitandoci alla sola raggiungibilità, come si definisce il cambio di base per evidenziare la struttura? Che dimensione hanno le matrici A_{11} e A_{22} ottenute? Qual è l'espressione della risposta impulsiva in uscita?

Per procedere con la scomposizione di Kalman occorre individuare i quattro sottospazi χ_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Si ha

$$\chi_1 = \mathcal{R} \cap \mathcal{I} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad n_1 = 1$$

$$\chi_2 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad n_2 = 1$$

$$\chi_3 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad n_3 = 1$$

Si verifichi, per esercizio, che

$$\chi_1 \oplus \chi_2 = \mathcal{R} \Leftrightarrow \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

mentre per

$$\chi_1 \oplus \chi_3 = \mathcal{I}$$

la coincidenza è evidente per confronto diretto. Poiché $n_1 + n_2 + n_3 = n$, non è necessario introdurre anche il completamento χ_4 .

La matrice di cambio di base è tale per cui

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e calcolando le matrici nella nuova base si ottengono

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dalle dimensioni dei tre sottospazi χ_1 , χ_2 e χ_3 individuati, si ricava la decomposizione a blocchi delle matrici, che in questo caso hanno tutti dimensione uno, in cui

$$A_{11} = 1, \quad A_{22} = -2, \quad A_{33} = -1, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 1, \quad C_2 = 1.$$

Si verifichi, per esercizio, che

- i. $W(t) = Ce^{At}B = C_2e^{A_{22}t}B_2 = e^{-2t}$;
- ii. il modo naturale associato all'autovalore $\lambda = 1$ della matrice A_{11} è eccitabile e inosservabile;
- iii. il modo naturale associato all'autovalore $\lambda = -2$ della matrice A_{22} è eccitabile e osservabile;
- iv. il modo naturale associato all'autovalore $\lambda = -1$ della matrice A_{33} è non eccitabile e inosservabile.

Esempio 6.3.2 Un esempio fisico può essere rappresentato dal circuito a ponte alimentato da un generatore di corrente indicato in Figura 6.6.

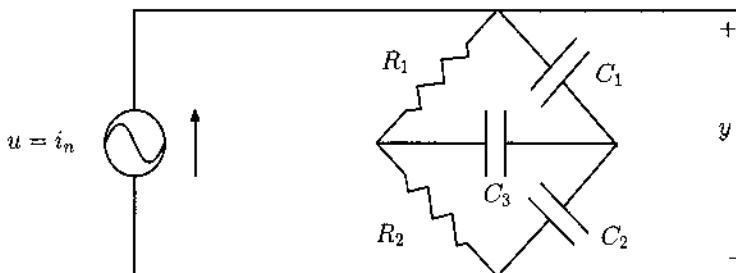


Figura 6.6: Circuito elettrico considerato nell'esempio 6.3.2.

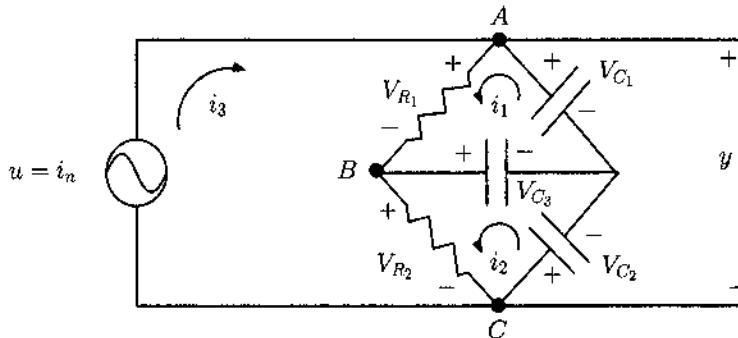


Figura 6.7: Schema di analisi del circuito elettrico considerato nell'esempio 6.3.2.

Le equazioni che regolano il circuito possono essere ottenute imponendo l'equilibrio delle correnti nei nodi A, B e C e delle tensioni nelle maglie 1 e 2, secondo quanto indicato nello schema in Figura 6.7.

Dal nodo A si ha

$$u = i_{R_1} + i_{C_1} = i_{R_1} + C_1 \dot{V}_{C_1} \Rightarrow i_{R_1} = u - C_1 \dot{V}_{C_1}.$$

Dalla maglia 1

$$V_{C_1} = V_{R_1} + V_{C_3} \Rightarrow V_{R_1} = V_{C_1} - V_{C_3}$$

$$i_{R_1} = \frac{V_{R_1}}{R_1} = \frac{V_{C_1} - V_{C_3}}{R_1} \quad (6.15)$$

$$C_1 \dot{V}_{C_1} = -\frac{V_{C_1}}{R_1} + \frac{V_{C_3}}{R_1} + u$$

$$\dot{V}_{C_1} = -\frac{V_{C_1}}{C_1 R_1} + \frac{V_{C_3}}{C_1 R_1} + \frac{u}{C_1}. \quad (6.16)$$

Dal nodo B,

$$i_{R_2} = i_{C_2} + u \Rightarrow C_2 \dot{V}_{C_2} = i_{R_2} - u$$

e dalla maglia 2

$$V_{C_3} = V_{R_2} + V_{C_2} \Rightarrow i_{R_2} = \frac{V_{R_2}}{R_2} = \frac{V_{C_3} - V_{C_2}}{R_2} \quad (6.17)$$

$$C_2 \dot{V}_{C_2} = -\frac{V_{C_2}}{R_2} + \frac{V_{C_3}}{R_2} - u$$

$$\dot{V}_{C_2} = -\frac{V_{C_2}}{C_2 R_2} + \frac{V_{C_3}}{C_2 R_2} - \frac{u}{C_2} \quad (6.18)$$

Infine, dal nodo C,

$$i_{R_1} = i_{C_3} + i_{R_2}$$

$$i_{C_3} = C_3 \dot{V}_{C_3} = -i_{R_2} + i_{R_1}. \quad (6.19)$$

Da (6.15) si ha i_{R_1} , da (6.17) i_{R_2} e per sostituzione in (6.19) si ottiene

$$C_3 \dot{V}_{C_3} = -\left(\frac{V_{C_3} - V_{C_2}}{R_2}\right) + \frac{V_{C_1} - V_{C_3}}{R_1}$$

$$\dot{V}_{C_3} = \frac{1}{R_1 C_3} V_{C_1} + \frac{1}{R_2 C_3} V_{C_2} - \left(\frac{1}{R_2 C_3} + \frac{1}{R_1 C_3}\right) V_{C_3}. \quad (6.20)$$

Dalle equazioni (6.16), (6.18) e (6.20), assumendo come variabili di stato $x_i = V_{C_i}$, $i = 1, 2, 3$, si ottiene un sistema lineare, stazionario, a dimensione tre

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{C_1 R_1} x_1(t) + \frac{1}{C_1 R_1} x_3(t) + \frac{1}{C_1} u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{C_2 R_2} x_2(t) + \frac{1}{C_2 R_2} x_3(t) - \frac{1}{C_2} u(t) \\ \dot{x}_3(t) &= \frac{1}{C_3 R_1} x_1(t) + \frac{1}{C_3 R_2} x_2(t) - \left(\frac{1}{R_1 C_3} + \frac{1}{R_2 C_3}\right) x_3(t) \end{cases}.$$

Se si prende come uscita la tensione tra i nodi A e C, si ha

$$y(t) = V_{C_1} - V_{C_2} = x_1(t) - x_2(t).$$

Si individuano così le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 & \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{R_2 C_2} \\ \frac{1}{R_1 C_3} & \frac{1}{R_2 C_3} & -\left(\frac{1}{R_1 C_3} + \frac{1}{R_2 C_3}\right) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{C_2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \quad -1 \quad 0)$$

In generale la matrice di raggiungibilità risulta

$$R = (B \quad AB \quad A^2 B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{R_1 C_1^2} & \dots \\ -\frac{1}{C_2} & \frac{1}{R_2 C_2^2} & \dots \\ 0 & \frac{1}{R_1 C_1 C_3} - \frac{1}{R_2 C_2 C_3} & \dots \end{pmatrix}.$$

Se, ad esempio, si assumono

$$C_1 = C_2 = C, \quad R_1 = R_2 = R \quad (6.21)$$

si ottiene

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC^2} & \frac{1}{R^2 C^3} \\ -\frac{1}{C} & \frac{1}{RC^2} & \frac{1}{R^2 C^3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha che il rango di R è pari ad uno ed il sottospazio di stati raggiungibili è dato da

$$\mathcal{R} = \text{gen} \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{C_2} \\ 0 \end{pmatrix} = \text{gen} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Allo stesso modo si può condurre lo studio rispetto all'inosservabilità, ottenendo

$$O = \text{ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2 C_2} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Mantenendo le stesse ipotesi (6.21), si ha

$$O = \text{ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{RC} & \frac{1}{RC} & 0 \\ \frac{1}{R^2 C^2} & -\frac{1}{R^2 C^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché il rango di O è pari a 1, il sottospazio degli stati inosservabili ha dimensione 2, è pari al $\text{ker}(O)$ ed è dato da

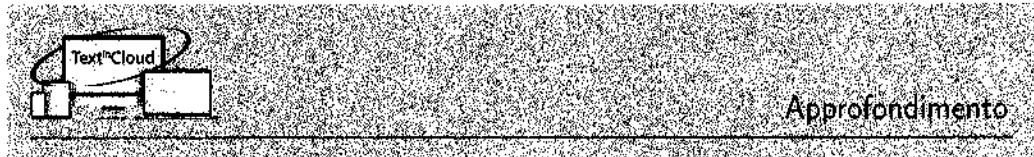
$$\mathcal{I} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per il calcolo dei quattro sottospazi χ_1, χ_2, χ_3 e χ_4 , osservato che

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{I} = \{0\}$$

si ottiene facilmente

$$\begin{cases} \chi_1 &= \{0\} \\ \chi_2 &= \mathcal{R} \\ \chi_3 &= \mathcal{I} \\ \chi_4 &\text{non necessario.} \end{cases}$$



6.4

Le proprietà dello spazio di stato nei sistemi a tempo discreto

Per lo studio delle proprietà dello spazio di stato nel caso di sistemi a tempo discreto, le differenze sostanziali sono la presenza della matrice A^t al posto di e^{At}

e l'evoluzione per istanti discreti anziché con continuità. Nel seguito si discutono le differenze che ne conseguono.

6.4.1 Inosservabilità

Per la proprietà di inosservabilità, le definizioni e le considerazioni del caso a tempo discreto sono comuni al caso a tempo continuo, giungendo alla formulazione del Teorema 6.1.1 in termini di evoluzione discreta:

Teorema 6.4.1 *L'insieme degli stati inosservabili*

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n : CA^t x = 0, \forall t \geq 0\}$$

coincide con l'insieme dato da

$$\ker \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x = 0 \right\}$$

La corrispondenza è chiara dal momento che tutte le considerazioni svolte per la matrice $Ce^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} CA^k \frac{t^k}{k!}$ già includono quelle per CA^k , generico termine dello sviluppo in serie.

Pertanto, le condizioni sono le stesse nei due casi. Questo è giustificato anche dal fatto che l'inosservabilità è stata introdotta come proprietà geometrica dello spazio di stato, che non varia al variare dell'insieme di definizione del tempo.

Quindi, anche la decomposizione che può essere messa in evidenza attraverso il cambio di coordinate indotto dall'inosservabilità rimane invariata.

6.4.2 Raggiungibilità

Anche nel caso della raggiungibilità si possono ripetere le stesse considerazioni del caso a tempo continuo con A^t al posto di e^{At} , giungendo alle stesse condizioni per la caratterizzazione del sottospazio degli stati raggiungibili e per la struttura dello spazio di stato che può essere individuata.

In realtà, in virtù dell'evoluzione a passi di un sistema a tempo discreto, la trattazione della raggiungibilità in questo contesto permette di evidenziare in modo più intuitivo le condizioni e anche di poter caratterizzare il tempo necessario per raggiungere un dato stato (raggiungibile).

Per chiarire questo concetto, si consideri il sistema a tempo discreto

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

Come detto, per studiare la raggiungibilità poniamo, senza perdita di generalità, $t_0 = 0$ e $x(0) = 0$. Calcolando l'evoluzione ad un passo, al tempo $t = 1$ si

ha

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0) = Bu(0)$$

da cui si vede che se $x \in \text{Im}(B)$, allora esso si può raggiungere in un passo scegliendo opportunamente $u(0)$. In altri termini, indicando con $\mathcal{R}(t)$ l'insieme degli stati raggiungibili in t passi, si ha

$$\mathcal{R}(1) = \text{Im}(B)$$

Calcolando l'evoluzione dello stato a due passi, si ottiene

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = ABu(0) + Bu(1)$$

In questo caso si vede che si possono raggiungere in due passi tutti gli stati che risultano essere una combinazione di B ed AB ; pertanto, l'insieme degli stati raggiungibili in due passi può essere descritto come

$$\mathcal{R}(2) = \text{Im} \left(\begin{array}{c|c} n \times p & n \times p \\ B & AB \end{array} \right)$$

stati ottenuti scegliendo opportunamente $u(0)$ ed $u(1)$, ossia la sequenza di ingresso lunga 2.

Il ragionamento può essere iterato, ottenendo

$$\mathcal{R}(k) = \text{Im} \left(\begin{array}{c|c|c|c} n \times p & n \times p & \cdots & n \times p \\ B & AB & \cdots & A^{k-1}B \end{array} \right)$$

ossia l'insieme di stati raggiungibili in k passi scegliendo opportunamente il segmento di ingresso $u|_{[0,t]} = (u(0), u(1), \dots, u(k-1))$.

Il calcolo può essere arrestato quando $k = n$ in virtù del già citato teorema di Cayley-Hamilton, ottenendo la condizione di raggiungibilità espressa attraverso la stessa matrice R del caso a tempo continuo e, di conseguenza, $\mathcal{R} = \mathcal{R}(n)$.

In conclusione di questo ragionamento, nel caso a tempo discreto è possibile dire, in aggiunta al fatto che uno stato sia raggiungibile, in quanto tempo lo si può raggiungere.

Una seconda differenza tra il caso a tempo continuo e quello a tempo discreto riguarda la relazione tra raggiungibilità e controllabilità.

Nel caso a tempo continuo si ha equivalenza tra raggiungibilità e controllabilità. Nel caso a tempo discreto, la raggiungibilità implica la controllabilità, ma non viceversa. Questo fatto può essere ben messo in evidenza dal seguente esempio.

Si consideri il sistema

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

Lo studio della raggiungibilità fornisce

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ed essendo il suo rango minore di 2, il sistema non è completamente raggiungibile. Però, dato un qualunque stato $x(0) \in \mathbb{R}^2$, scegliendo l'ingresso pari a $u(0) = -x_1(0) - x_2(0)$, si ha

$$x(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (x_1(0) + x_2(0)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con lo stato portato in zero in un solo istante di tempo. Anche in questo caso le due proprietà sono equivalenti se A è non singolare.



Approfondimento

Capitolo at glance!

Modelli ingresso-uscita lineari e rappresentazioni con lo stato

Studieremo in questo capitolo la corrispondenza tra modelli ingresso-uscita lineari e rappresentazioni con lo stato. Lo studio sinora condotto ha fatto ben comprendere che la risposta forzata è caratterizzata da un funzionale lineare (quindi un legame ingresso-uscita lineare) e si esprime, nel caso continuo, mediante un integrale di convoluzione dell'ingresso con la risposta impulsiva, $W(t)$. D'altra parte un legame funzionale lineare per il teorema di Ritz si può sempre scrivere come l'integrale di convoluzione dell'ingresso con una matrice di funzioni, che indicheremo genericamente con $K(t)$. Sorge allora spontanea la domanda: sotto quali condizioni un collegamento funzionale lineare causale può essere realizzato mediante un sistema lineare stazionario, mediante una rappresentazione con lo stato? Altrimenti detto: è sempre possibile, oppure sotto quali condizioni una $K(t)$ assegnata coincide con la risposta impulsiva di una rappresentazione con lo stato? Poiché sappiamo anche che la risposta impulsiva è una matrice composta da funzioni del tempo esponenziali a coefficienti polinomiali e, di conseguenza, la funzione di trasferimento è composta da funzioni razionali proprie, è questa forse la condizione sulla $K(t)$, e sulla sua trasformata $K(s)$? Come costruire la corrispondente rappresentazione con lo stato? Abbiamo anche compreso nel Paragrafo 4.4.1 che altro modo per esprimere un legame lineare consiste nell'assegnare un insieme di relazioni differenziali tra ingressi ed uscite. Un altro modo ancora consiste nel calcolare direttamente la funzione di trasferimento. Sotto quali condizioni esiste, e come recuperare, una rappresentazione con lo stato? Questi i problemi ai quali daremo risposta in questo capitolo. Si sottolinea che questo problema, alla luce di quanto detto nell'introdurre il modello rappresentazione con lo stato (Figura 2.1), è di centrale importanza nel progetto dei sistemi in quanto la sua soluzione non conduce solo alla messa a punto di una procedura di scrittura del modello matematico desiderato, ma consente di implementare una procedura di calcolo (simulazione), o un collegamento di dispositivi per emulare il legame

dato. Si tratta di una vera procedura di realizzazione per il funzionamento in tempo reale del legame funzionale assegnato.

7.1

Il problema della realizzazione

Il problema della realizzazione consiste nello studio delle condizioni e nella messa a punto delle procedure di calcolo per associare ad una data matrice di funzioni, $K(t)$, che definisce il nucleo di un integrale di convoluzione, equivalentemente ad una matrice di funzioni di variabile complessa, $K(s)$, la sua trasformata di Laplace, una rappresentazione con lo stato.

I problemi finora trattati sono principalmente orientati a chiarire il comportamento a partire da una rappresentazione. Il calcolo delle risposte, anche quelle forzate nel dominio della variabile complessa sono di questo tipo. Il problema che tratteremo è in un certo senso inverso: quale è l'eventuale rappresentazione con lo stato, A, B, C, D , associata ad un assegnato nucleo, ad un assegnata funzione di variabile complessa? Questo problema è interessante, perché come sappiamo alla rappresentazione con lo stato è associato uno schema detto di realizzazione che consente di simulare in tempo reale il comportamento del sistema

Immagineremo, quindi, di avere in qualche modo identificato (in un contesto di analisi) o definito (in un contesto di progetto) il legame funzionale che sussiste, o che si desidera assegnare, tra ingresso e uscita forzata di un assegnato processo. Sotto quali condizioni questo legame funzionale può essere riprodotto dal comportamento forzato di una rappresentazione lineare?

La formulazione è la seguente: assegnato un legame funzionale definito dall'integrale di convoluzione con un nucleo $K(t)$

$$y(t) = \int_0^t K(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

sotto quali condizioni questo legame funzionale coincide con la risposta forzata di un sistema lineare, stazionario a dimensione finita, causale?

Poiché come sappiamo il legame forzato di un sistema lineare, stazionario a dimensione finita, è caratterizzato da:

$$y_f(t) = \int_0^t \left(C e^{A(t-\tau)} B + D \delta(t-\tau) \right) u(\tau) d\tau,$$

il problema formulato ammette soluzione se il nucleo, $K(t)$, coincide con la matrice delle risposte impulsive di un sistema.

Si perviene quindi alle seguenti riformulazioni del problema nel dominio del tempo e della variabile complessa, rispettivamente.

Problema della realizzazione. Assegnato $K(t)$ trovare (n, A, B, C, D) tali che

$$Ce^{At}B + D\delta(t) = K(t).$$

Equivalentemente, assegnato $K(s)$ trovare (n, A, B, C, D) tali che

$$C(sI - A)^{-1}B + D = K(s).$$

La quaterna (A, B, C, D) è detta **realizzazione** di $K(t)$ o di $K(s)$.

Una condizione certamente necessaria per la realizzabilità è che $K(s)$ sia una matrice di funzioni razionali proprie. Infatti ha questa caratteristica l'espressione della matrice delle funzioni di trasferimento di un sistema dinamico lineare. Ciò significa che se il legame funzionale tra ingresso - uscita è caratterizzato da un nucleo $K(t)$ la cui trasformata di Laplace, $K(s)$, non è una matrice di funzioni razionali proprie, questo legame ingresso - uscita non potrà essere realizzato mediante un sistema lineare, stazionario a dimensione finita. Si noti anche che se il nucleo dato $K(t)$ non contempla la presenza di impulsi, ma solo funzioni regolari, la formulazione del problema può essere direttamente semplificata trascurando la presenza del legame diretto ingresso-uscita, quindi eliminando la matrice D .

Sorge spontanea la domanda: ma questa condizione è anche sufficiente?

Vale al proposito il seguente risultato.

Teorema 7.1.1 Il problema della realizzazione di un assegnato nucleo di variabile complessa $K(s)$ è risolvibile se e solo se le sue componenti sono funzioni razionali proprie.

La necessità è già stata discussa, la prova della sufficienza segue dalle diverse procedure di costruzione delle rappresentazioni con lo stato proposte nel seguito. Procedure che mostrano come a partire da una matrice di funzioni razionali proprie, si possa costruire, per ispezione sui coefficienti delle matrici che la descrivono, una sua realizzazione.

Si assuma, senza perdita di generalità che $K(s)$ sia una matrice di funzioni razionali strettamente proprie, sono tali le funzioni razionali quando il grado del numeratore è più basso del grado del denominatore. Si è detto senza perdita di generalità perché si può sempre passare da una forma propria ad una strettamente propria, infatti, una matrice razionale propria si può sempre scrivere come

$$\bar{K}(s) = K_0 + K(s)$$

con K_0 matrice costante e $K(s)$ matrice razionale strettamente propria. Posto $D = K_0$, il problema della realizzazione si riduce al calcolo di n, A, B, C per una matrice razionale strettamente propria del tipo

$$K(s) = \frac{B_0 + B_1 s + \dots + B_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} \quad (7.1)$$

ove le B_i sono matrici $(q \times p)$ di costanti. Si comprende quindi come la realizzazione del seguente nucleo

$$\bar{K}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{s+1}{s+2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_D + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{s+1}{s+2} \end{pmatrix}}_{K(s)},$$

possa essere ricondotta alla realizzazione di $K(s)$, razionale strettamente propria.

Prima di procedere all'esposizione di alcune procedure sistematiche vale la pena mettere in evidenza le situazioni più semplici. Si consideri ad esempio il generico nucleo caratterizzato da una funzione razionale di grado uno (il grado di una funzione razionale è quello del polinomio a denominatore), è data da

$$K(s) = \frac{h}{s+a}.$$

È immediato rendersi conto che

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -ax(t) + hu(t) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -ax(t) + u(t) \\ y(t) &= hx(t) \end{aligned}$$

sono due realizzazioni del nucleo dato. E nel caso in cui $a = 0$ e $h = 1$ si ottiene, ad ulteriore verifica, la rappresentazione dell'integratore.

7.2

Realizzazioni in forma canonica raggiungibile ed osservabile

Le due realizzazioni che vengono nel seguito proposte estendono quanto esposto al punto precedente nel calcolare la realizzazione di un nucleo di grado uno. I coefficienti del denominatore identificano la matrice dinamica, i coefficienti del numeratore la matrice degli ingressi o quella delle uscite.

7.2.1 Realizzazione in forma canonica raggiungibile

Una prima soluzione, detta **realizzazione in forma canonica raggiungibile**, A_r, B_r, C_r , di dimensione np , ove p indica il numero degli ingressi (seconda

dimensione del nucleo) e n il grado del minimo comune multiplo dei polinomi a denominatore, è data da

$$A_r = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \\ -a_0I & -a_1I & -a_2I & \dots & -a_{n-1}I \end{pmatrix}, \quad B_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{pmatrix}$$

$$C_r = (B_0 \ B_1 \ B_2 \ \dots \ B_{n-1})$$

ove le matrici identità, I , sono matrici che hanno dimensione $(p \times p)$ e, di conseguenza, le matrici A_r , B_r e C_r hanno dimensione $(np \times np)$, $(np \times p)$ e $(q \times np)$, rispettivamente.

Esempio 7.2.1 Assegnato il nucleo

$$K(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{s+1}{s} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} s \\ s+1 \end{pmatrix}}{s^2+s} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}s}{s^2+s}$$

otteniamo la realizzazione in forma raggiungibile

$$A_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infatti è facile verificare che

$$C_r(sI - A_r)^{-1} B_r = K(s)$$

Esempio 7.2.2 Assegnato il nucleo

$$K(s) = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}s}{1 + 3s + s^2}$$

in cui

$$p = 2 \quad q = 2$$

calcoliamo la realizzazione, di dimensione 4, data da

$$A_r = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -a_0I & -a_1I \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array} \right), \quad B_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_r = (B_0 \ | \ B_1) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

La dimostrazione che quella scritta è una realizzazione del nucleo dato segue dal calcolo della funzione di trasferimento:

$$C_r(sI - A_r)^{-1} B_r = C_r \frac{(sI - A_r)^{\alpha}}{(sI - A_r)} B_r$$

$$= (B_0 \ B_1 \ \dots \ B_{n-1}) \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & s + a_{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ove si è fatto riferimento al caso $p = q = 1$ per semplicità di notazioni. Si osservi, innanzitutto che il calcolo del determinante di $(sI - A_r)$ dà

$$a_0 + a_1 s + \dots + s^n$$

cioè che è sempre vero per una matrice A che ha la struttura di A_r : gli elementi dell'ultima riga sono proprio i coefficienti del polinomio caratteristico.

Il calcolo della funzione di trasferimento è notevolmente semplificato dalla struttura di B_r , che ha tutti zeri ed un 1 nell'ultima posizione. Basterà quindi calcolare solo l'ultima colonna della matrice aggiunta - trasposta; sviluppando i calcoli

$$\frac{(B_0 \ \dots \ B_{n-2} \ B_{n-1})}{a_0 + a_1 s + \dots + s^n} \begin{pmatrix} * & \dots & * & 1 \\ * & \dots & * & s \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & s^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(B_0 \ \dots \ B_{n-2} \ B_{n-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ s^{n-2} \\ s^n \end{pmatrix} = \frac{B_0 + B_1 s + \dots + B_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \dots + s^n}$$

e quindi

$$K(s) = \frac{B_0 + B_1 s + \dots + B_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \dots + s^n}.$$

Lo schema di realizzazione/simulazione associato a questa rappresentazione con lo stato (si pensi alla Figura 2.1) comporta operazioni di integrazione, moltiplicazione per costante e somma come messo in evidenza nella figura seguente in cui si è assunto per semplicità $n = 2$. Fissate quindi le matrici

$$A_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \quad B_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_r = (b_0 \ b_1)$$

si ha la rappresentazione con lo spazio di stato

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 + u$$

$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2$$

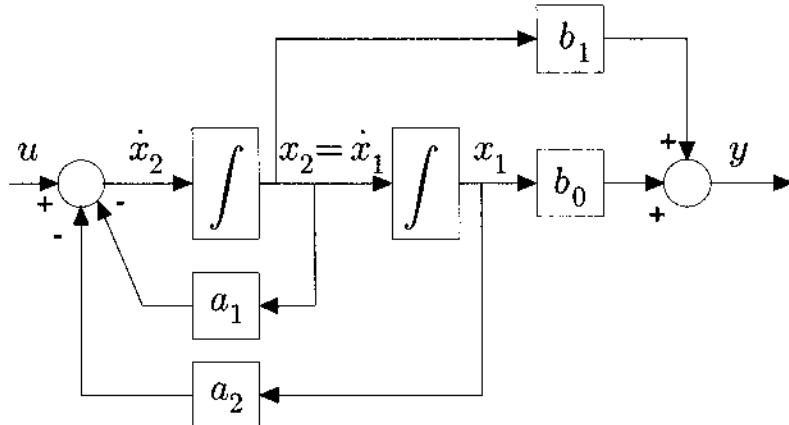


Figura 7.1

Si noti che la realizzazione individuata secondo questa tecnica ha dimensione $(np \times np)$; quindi tutte le volte che il numero di ingressi è uno, indipendentemente dal numero di uscite, la dimensione di questa realizzazione è n .

La realizzazione (A_r, B_r, C_r) è detta in forma canonica raggiungibile in quanto lo spazio di stato ad essa associato è tutto raggiungibile. Infatti, a partire dall'espressione

$$A_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_r = (B_0 \quad B_1 \quad \dots \quad B_{n-1})$$

si calcola facilmente la matrice di raggiungibilità

$$(B \quad \dots \quad A^{n-1}B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & * & * \\ 1 & * & \dots & * & * \end{pmatrix}$$

che ha determinante diverso da zero e perciò rango pieno e pari ad n . Ciò prova che la realizzazione (A_r, B_r, C_r) è tutta raggiungibile. Il risultato, provato nel caso $p = 1$ per semplicità di notazioni, è valido nel caso più generale, come si può verificare.

Si noti che la realizzazione ottenuta con la procedura indicata è tutta raggiungibile, ma non necessariamente osservabile, per ottenerne una che sia simultaneamente raggiungibile ed osservabile si può applicare la tecnica di scomposizione rispetto all'osservabilità per avere una rappresentazione di dimensione inferiore che ha ancora la stessa funzione di trasferimento.

7.2.2 Realizzazione in forma canonica osservabile

Una seconda soluzione è data dalla **realizzazione in forma canonica osservabile**, A_o, B_o, C_o , di dimensione nq , q il numero delle uscite (numero delle righe del nucleo)

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 I \\ I & 0 & \dots & 0 & -a_1 I \\ 0 & I & \dots & 0 & -a_2 I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & -a_{n-1} I \end{pmatrix}, \quad B_o = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$$

$$C_o = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ I)$$

ove le matrici identità, I , sono matrici che hanno dimensione $(q \times q)$ e, di conseguenza, le matrici A_o, B_o e C_o hanno dimensione $(nq \times nq)$, $(nq \times p)$ e $(q \times nq)$, rispettivamente. La realizzazione in forma canonica osservabile verifica

$$C_o(sI - A_o)^{-1} B_o = K(s).$$

Per verificarlo, fissati per semplicità $q = p = 1$, calcoliamo

$$C_o(sI - A_o)^{-1} B_o = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} s & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & s + a_{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}.$$

Poiché, analogamente al caso precedente,

$$|sI - A_o| = a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

otteniamo

$$\frac{(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1)}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} \begin{pmatrix} s & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & s + a_{n-1} \end{pmatrix}^a \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}.$$

In virtù della struttura della matrice C_o , l'unica cosa che vogliamo calcolare è l'ultima riga, in quanto le precedenti vengono moltiplicate per degli zeri, e quindi

$$\frac{(0 \ \dots \ 1)}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ \vdots & \dots & \vdots \\ * & \dots & * \\ 1 & \dots & s^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(1 \ \dots \ s^{n-1})}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}$$

$$= \frac{B_0 + \dots + B_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} = K(s).$$

Esempio 7.2.3 Si consideri il nucleo

$$K(s) = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}s}{3 + 2s + s^2}$$

con $q = p = 2$. La realizzazione in forma canonica osservabile è data da

$$\begin{aligned} A_o &= \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ \hline 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right), \quad B_o = \left(\begin{array}{c} B_0 \\ B_1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \\ C_o &= \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Esempio 7.2.4 Si consideri il nucleo

$$K(s) = \frac{(1 \ -1) + (2 \ 0)s}{3 + 2s + s^2}.$$

La realizzazione in forma canonica osservabile è data da

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B_o = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C_o = (0 \ 1).$$

Lo schema di realizzazione/simulazione associato a questa rappresentazione con lo stato comporta operazioni di integrazione, moltiplicazione per costante e somma come messo in evidenza nella Figura 7.2 seguente in cui si assume per semplicità $n = 2$ e quindi

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} \quad B_o = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad C_o = (0 \ 1)$$

il modello con lo spazio di stato associato al nucleo è dato da

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_0 x_2 + b_0 u \\ x_2 &= x_1 - a_1 x_2 + b_1 u \\ y &= x_2. \end{aligned}$$

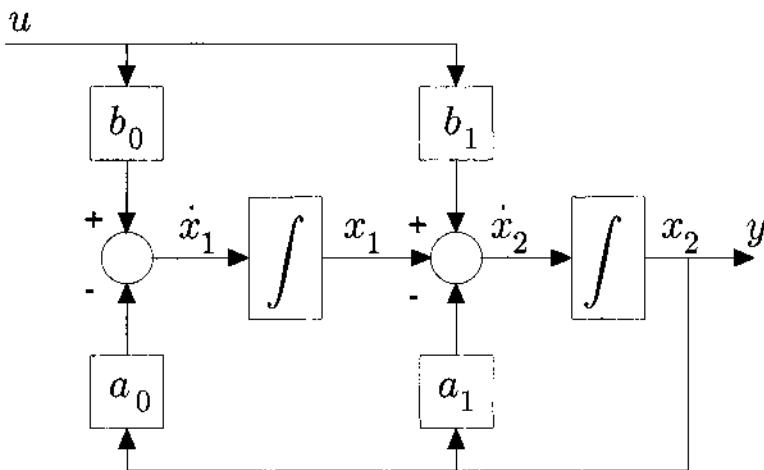


Figura 7.2

La realizzazione ora introdotta è detta in forma canonica osservabile in quanto dalla forma delle matrici A_0 e C_0 si ottiene la matrice di osservabilità

$$\begin{pmatrix} C_0 \\ C_0 A_0 \\ \vdots \\ C_0 A_0^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & * & * \\ 1 & * & \dots & * & * \end{pmatrix}$$

che è non singolare poiché triangolare destra. La realizzazione è dunque tutta osservabile. Il risultato, provato nel caso $q = 1$ per semplicità di notazioni, è valido nel caso più generale, come si può verificare.

Si noti che la realizzazione ottenuta con la procedura indicata è tutta osservabile, ma non necessariamente raggiungibile, per ottenerne una che sia simultaneamente raggiungibile ed osservabile si può applicare la tecnica di scomposizione rispetto alla raggiungibilità per avere una rappresentazione di dimensione inferiore che ha ancora la stessa funzione di trasferimento.

7.3

Le realizzazioni minime

Le tecniche di realizzazione proposte danno rappresentazioni con lo stato che hanno dimensione np , quella in forma canonica raggiungibile, nq quella in forma canonica osservabile. Se supponiamo, come usuale, che l'espressione di $K(s)$ è irriducibile (non vi sono fattori in comune tra il denominatore e tutti i numeratori), ciò che porterebbe a ridurre l'ordine del nucleo, valgono le seguenti osservazioni:

- le due tecniche propongono realizzazioni di dimensioni diverse se $p \neq q$. Si tratta di rappresentazioni con lo stato che hanno però la stessa funzio-

ne di trasferimento e quindi un sottoinsieme comune di modi eccitabili ed osservabili che le caratterizzano;

- è certamente da preferirsi la realizzazione di minore dimensione, in quanto sia dal punto di vista del calcolo (simulazione), che dal punto di vista della realizzazione di un emulatore fisico questo corrisponde a un risparmio;
- la realizzazione che contempla tutti e soli i modi naturali comuni è quella che ha dimensione inferiore rispetto a tutte le altre e diremo che è una realizzazione minima;
- se p o q è uguale ad uno, impiegando la tecnica opportuna, si ottiene una realizzazione di dimensione n . Tale realizzazione è minima in quanto come messo in evidenza nel Capitolo 4 i poli sono in generale un sottoinsieme degli autovalori, sono tutti e soli quelli che sono associati ai modi eccitabili ed osservabili;
- in base a quanto studiato nel Capitolo 6 si noti che una realizzazione minima è anche tutta raggiungibile ed osservabile;
- nel caso particolare di $p = q = 1$ ciascuna delle due realizzazioni in forma canonica è minima, e tutta raggiungibile ed osservabile;
- ancora ricordando dal Capitolo 6 che una rappresentazione raggiungibile ed osservabile ha modi tutti raggiungibili ed osservabili, possiamo anche dedurre che una realizzazione minima può essere calcolata a partire da una tutta raggiungibile applicando la tecnica della riduzione rispetto all'osservabilità (e che una realizzazione minima può essere calcolata a partire da una tutta osservabile applicando la tecnica della riduzione rispetto alla raggiungibilità).

Alcuni semplici esempi.

Esempio 7.3.1 La funzione con una costante di tempo τ e guadagno K :

$$K(s) = \frac{K}{1 + \tau s} = \frac{K/\tau}{\frac{1}{\tau} + s}$$

e quindi i modelli

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{1}{\tau}x(t) + \frac{K}{\tau}u(t) \\ y = x(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{1}{\tau}x(t) + u(t) \\ y = \frac{K}{\tau}x(t) \end{cases}$$

con

$$A = -\frac{1}{\tau} \quad B = \frac{K}{\tau} \quad C = 1 \quad e \quad A = -\frac{1}{\tau} \quad B = 1 \quad C = \frac{K}{\tau}$$

Esempio 7.3.2 Si consideri il doppio integratore:

$$K(s) = \frac{1}{s^2}$$

a cui associamo la realizzazione

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e il modello

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = u$$

$$y = x_1.$$

Esempio 7.3.3 Si consideri il nucleo

$$K(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ 0 & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

con $p = q = 2$ e $n = 2$. Il nucleo suddetto è una matrice di funzioni razionali strettamente proprie per cui ammette, secondo le tecniche proposte, realizzazioni di dimensione 4. In particolare, in riferimento alla realizzazione in forma canonica raggiungibile (7.2.2) otteniamo

$$A_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, B_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_r = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il modello così ottenuto è raggiungibile ma non osservabile. Infatti, otteniamo

$$\mathcal{I} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 6 & -1 & 7 \\ 0 & 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \text{gen} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La realizzazione in forma canonica raggiungibile genera, in questo caso, una componente inosservabile. Come visto nel Capitolo 6, esiste quindi una trasformazione di coordinate del tipo (6.10) con

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = Tx, \quad T^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

tale che, nelle nuove coordinate

$$\tilde{A} = TA_r T^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{array} \right), \quad \tilde{B} = TB_r = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C} = C_r T^{-1} = (0 \quad \tilde{C}_2) \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

con

$$K(s) = C_r(sI - A_r)^{-1} B_r = \tilde{C}_2(sI - \tilde{A}_{22})^{-1} \tilde{B}_2.$$

La componente osservabile del sistema, di dimensione tre, è descritta dal modello

$$\dot{z}_2 = \tilde{A}_{22} z_2 + \tilde{B}_2 u$$

$$y = \tilde{C}_2 z_2$$

con

$$\tilde{A}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le matrici suddette rappresentano una realizzazione minima (di dimensione 3) dello stesso nucleo $K(s)$ in (7.2). La realizzazione così ottenuta corrisponde alla componente osservabile e raggiungibile della realizzazione in forma raggiungibile di dimensione 4.

Il precedente esempio mostra come ottenere una realizzazione minima a partire da una raggiungibile del tipo (7.2.2) e lo studente non troverà difficoltà a calcolarne una minima a partire dalla realizzazione osservabile del tipo (7.2.3).

Si osservi anche che una realizzazione minima può essere calcolata a partire da una qualsiasi rappresentazione procedendo ad effettuare una riduzione rispetto ad entrambe le proprietà, indifferentemente dall'ordine.

Esercizio 7.3.1 Calcolare una realizzazione minima del nucleo in Esempio 7.3.3 a partire da una realizzazione in forma canonica osservabile.


Soluzione Esercizio 7.3.1

Un ulteriore aspetto a proposito della riduzione della dimensione delle realizzazioni è messo in luce nel seguente esempio che fa capire come impiegare in un contesto generale, $p \neq q$ entrambi maggiori di uno, una tecnica che potremmo definire di realizzazione per righe o per colonne, a partire da quelle proposte.

Esempio 7.3.4 Si consideri il sistema a due ingressi e due uscite

$$K(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{s+1}{s(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}.$$

Riscrivendo

$$K(s) = \frac{\begin{pmatrix} s^2 + 2s & 0 \\ 2s + 2 & s^2 + 1 \end{pmatrix}}{s^3 + 3s^2 + 2s} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}s + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}s^2}{2s + 3s^2 + s^3}$$

verifichiamo che il nucleo ammette, secondo le tecniche proposte, realizzazioni di dimensione 6 poiché $p = q = 2$ e il grado del denominatore di $K(s)$ è $n = 3$.

Ma vediamo come sia possibile procedere per calcolarne una di dimensione minore. È evidente che la matrice data definisce due collegamenti ingresso - uscita mediante vettori riga a due elementi, K_i , $i = 1, 2$, tra ciascun uscita e i due ingressi

$$K(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{s+1}{s(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1(s) \\ K_2(s) \end{pmatrix}.$$

Il primo è specificato da

$$K_1(s) = \frac{(1 \ 0)}{s+1}$$

ed è realizzabile mediante le matrici

$$A_o^1 = (-1) \quad B_o^1 = (1 \ 0) \quad C_o^1 = 1;$$

il secondo è specificato da

$$K_2(s) = \frac{(2 \ 0) + (0 \ 1)s}{s^2 + 2s}$$

ed è realizzabile mediante le matrici

$$A_o^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B_o^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_o^2 = (0 \ 1).$$

A partire dalle realizzazioni di $K_1(s)$ e $K_2(s)$, realizzazioni delle righe di $K(s)$, possiamo calcolare una realizzazione di dimensione 3 del nucleo dato mediante le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} A_o^1 & 0 \\ 0 & A_o^2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right), \quad B = \begin{pmatrix} B_o^1 \\ B_o^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_o^1 & 0 \\ 0 & C_o^2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

ottenute tenendo conto del fatto che il sistema risulta dalla connessione di due sottosistemi che hanno gli stessi ingressi e ciascuno definisce un'uscita.

Una tecnica alternativa consiste nel realizzare ciascuna colonna. In questo caso

$$K(s) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \hline \frac{s^2+1}{s(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{array} \right) = (K_1(s) \mid K_2(s)).$$

A ciascuna di queste colonne posso associare una realizzazione di dimensione 3 e 1 rispettivamente. Per $K_1(s)$ otteniamo

$$K_1(s) = \frac{\begin{pmatrix} s(s+2) \\ 2(s+1) \end{pmatrix}}{s(s+1)(s+2)} \implies n_1 = 3$$

mentre, per $K_2(s)$

$$K_2(s) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{s+2} \Rightarrow n_2 = 1.$$

La realizzazione complessiva avrà dimensione $N = n_1 + n_2 = 4$ se realizzate entrambe in forma canonica raggiungibile. Otteniamo quindi

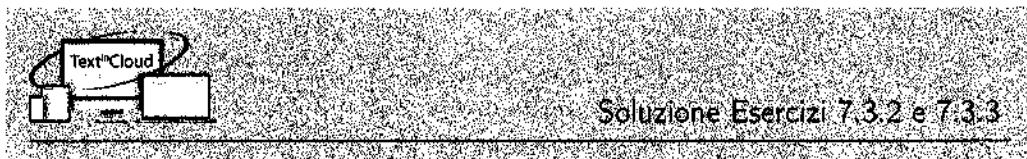
$$A = \begin{pmatrix} A_r^1 & 0 \\ 0 & A_r^2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \quad B = \begin{pmatrix} B_r^1 & 0 \\ 0 & B_r^2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$C = \begin{pmatrix} C_r^1 & C_r^2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

ove si è tenuto conto del fatto che il sistema risulta dalla connessione di due sottosistemi che hanno le stesse uscite e ciascuno un solo ingresso.

Esercizio 7.3.2 Calcolare una rappresentazione minima del nucleo in Esempio 7.3.3 mediante realizzazione per righe e per colonne (si veda Esempio 7.3.4).

Esercizio 7.3.3 Calcolare una rappresentazione minima del nucleo in Esempio 7.3.4 mediante riduzione della realizzazione in forma canonica raggiungibile (si veda Esempio 7.3.3).



Nel caso specifico dell'esempio trattato la tecnica di realizzazione per righe risulta essere più conveniente di quella per colonne; ma questo dipende dalle funzioni coinvolte. Queste procedure di realizzazione per righe e per colonne

rappresentano comunque utili strumenti di ausilio nel calcolo di realizzazioni di un dato nucleo.

Ma è possibile mettere a punto delle tecniche di realizzazione che consentano nel caso generale di individuare delle realizzazioni in forma minima? Un semplice metodo è proposto nel paragrafo seguente.

7.3.1 Realizzazione di Gilbert

La tecnica in questione, proposta da Gilbert (di cui porta il nome) nel 1963 in [1] rappresenta la versione semplificata di una procedura di realizzazione nota come tecnica di Smith-McMillan. La tecnica di Gilbert fornisce una procedura semplice per calcolare direttamente una realizzazione minima nel caso in cui il minimo comune multiplo a denominatore della $K(s)$ abbia radici semplici (equivolentemente i poli del nucleo siano semplici). Ciò che corrisponde, alla luce di quanto sappiamo sui sistemi dinamici, al fatto che il sistema dinamico sia caratterizzato da un operatore semplice (autovalori con molteplicità algebrica uguale a quella geometrica - ordine geometrico unitario).

La tecnica è molto semplice nella dimostrazione e nell'applicazione per il calcolo della realizzazione se, in particolare, ci si riferisce all'espansione in frazioni parziali nel dominio complesso. Ciò significa che

$$K(s) = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i}$$

in cui K_i sono i residui matriciali di dimensione $(q \times p)$, eventualmente a numeri complessi se corrispondenti ad un polo complesso.

Se si indica con ρ_i il rango di K_i (si noti che se ad elementi complessi il suo rango è pari la massimo tra i ranghi della parte reale e immaginaria)

$$\rho_i = \text{rango}\{K_i\}$$

e siano C_i e B_i due matrici di dimensione interna ρ_i che caratterizzano una fattorizzazione minima del residuo

$$K_i = \underbrace{C_i}_{(q \times \rho_i)} \quad \underbrace{B_i}_{(\rho_i \times p)} .$$

Con queste premesse, una realizzazione minima del nucleo dato ha dimensione pari alla somma dei ranghi di ciascun residuo

$$N = \sum_{i=1}^n \rho_i$$

e matrici

- A diagonale ad elementi coincidenti con i poli dell'espansione in frazioni parziali con molteplicità ciascuno pari al rango del residuo relativo

$$A = \begin{pmatrix} p_1 I_{\rho_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 I_{\rho_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n I_{\rho_n} \end{pmatrix}$$

in cui I_{ρ_i} è la matrice identità di dimensione $\rho_i \times \rho_i$;

- B e C , l'aggregato delle matrici B_i e C_i

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_r \end{pmatrix} \quad C = (C_1 \quad \dots \quad C_r).$$

Si noti che quella calcolata è nel caso generale una realizzazione molto semplice e comoda da impiegare quando i poli sono reali. In questo caso si ha infatti direttamente una realizzazione del tipo che a noi interessa con matrice dinamica diagonale.

Esempio 7.3.5 Dato il nucleo

$$K(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{2}{s(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{s} + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{s+1} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{s+2} = \sum_{i=1}^3 \frac{K_i}{s-p_i}$$

otteniamo

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad 0)$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \quad 0)$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (-1 \quad 1)$$

e, quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nel caso in cui vi siano coppie di poli complessi coniugati la realizzazione che si ottiene è a coefficienti complessi; più precisamente vi sono sulla diagonale della matrice dinamica le coppie di poli complessi ripetuti tante volte quanto è il rango del residuo relativo (peraltro lo stesso per una coppia di coniugati) e le matrici degli ingressi e delle uscite presentano coefficienti complessi in corrispondenza. Il

passaggio alla realizzazione reale si realizza con una trasformazione di coordinate con tutti elementi unità in corrispondenza degli autovalori reali ed i seguenti blocchi di dimensione due

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{pmatrix}$$

in corrispondenza delle coppie di autovalori complessi coniugati. In realtà, come si può verificare, si tratta della trasformazione che rende la forma diagonale di un operatore regolare con autovalori reali e complessi, Λ_c nella forma diagonale a coefficienti reali Λ_R da noi impiegata. Infatti

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha + j\omega & 0 \\ 0 & \alpha - j\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}.$$

La dimostrazione della minimalità della realizzazione di Gilbert consiste nel mostrare che quella costruita è una rappresentazione con lo spazio di stato tutto raggiungibile e osservabile; quindi con tutti i modi eccitabili ed osservabili. La dimostrazione è molto semplice se si impiega il criterio di Hautus per la verifica delle proprietà dello stato.

Come mostrato da Hautus un sistema è tutto raggiungibile se e solo se la matrice

$$(A - \lambda I B)$$

ha rango pieno in corrispondenza di ogni autovalore λ della matrice A . In modo analogo, il sistema è tutto osservabile se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} A - \lambda I \\ C \end{pmatrix}$$

ha rango pieno per ogni autovalore λ della matrice A . La verifica che entrambe le proprietà sussistono nel caso della realizzazione di Gilbert è immediato in ragione della struttura diagonale della matrice dinamica e dei ranghi delle matrici B_i e C_i .

Si noti inoltre che, in sintonia con quanto osservato a proposito delle condizioni di completa eccitabilità ed osservabilità, affinché tali matrici abbiano rango pieno deve accadere che il sistema abbia un numero di ingressi ed uscite perlomeno uguale al numero di catene (in questo caso tutte di ordine uno) associate al polo p_i ; infatti il numero di tali catene è ρ_i , inferiore o uguale al minimo tra p e q .

Vale la pena infine sottolineare ancora una volta che la tecnica di realizzazione minima di Gilbert si applica nel caso di poli semplici del nucleo assegnato; questo conduce alla costruzione di una rappresentazione con lo stato caratterizzata da un operatore regolare con autovalori che hanno molteplicità algebrica (e geometrica) pari al rango del relativo residuo.

7.4

Sistemi a tempo discreto

Tutto quanto detto a proposito della realizzazione si estende con il necessario cambio di notazioni, al caso dei sistemi a tempo discreto. Poiché la struttura della funzione di trasferimento non cambia le soluzioni sono esattamente le stesse, basta sostituire la variabile z nelle espressioni del nucleo e nella trasformata della risposta impulsiva.



7.5

Realizzazioni di modelli ingresso-uscita in t

In quest'ultimo paragrafo si vogliono mettere in luce alcuni aspetti che riguardano la costruzione di rappresentazioni con lo stato a partire da modelli del comportamento forzato ingresso-uscita assegnati nel dominio del tempo anche specificando alcuni collegamenti con le proprietà strutturali.

Iniziamo col precisare che, come osservato più volte, le realizzazioni minime, quelle che hanno la dimensione più piccola possibile, sono le rappresentazioni con lo stato che sono simultaneamente raggiungibili ed osservabili, e quindi ridotte, se si pensa al processo di riduzione associato alle proprietà dello stato. Questo ci lascia comprendere come ad esempio assegnata una rappresentazione con lo stato una sua rappresentazione ridotta possa essere calcolata applicando le procedure di riduzione, ma anche calcolandone la funzione di trasferimento e derivando da questa una realizzazione minima. Queste diverse procedure conducono a individuare due diverse rappresentazioni che sono però equivalenti, collegate da una trasformazione di coordinate.

Per quanto riguarda la realizzazione di modelli ingresso-uscita assegnati nel dominio del tempo ci riferiamo alle due situazioni: è assegnato il nucleo nel dominio del tempo oppure è assegnato il legame ingresso-uscita per il tramite di un sistema di equazioni differenziali o alle differenze secondo le relazioni (4.28).

Un risultato che collega bene i diversi risultati relativi alle proprietà dello stato è espresso dal seguente teorema che stabilisce le condizioni necessarie e sufficienti per la realizzabilità di un assegnato nucleo di funzioni del tempo $K(t)$. Risultato che include quello dato e precisa altri elementi interessanti anche dal punto di vista delle applicazioni.

A questo fine è necessario introdurre la seguente matrice infinita, matrice di Hankel, definita come

$$H = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \dots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots \\ S_2 & S_3 & S_4 & \dots \\ S_3 & S_4 & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

con coefficienti matriciali S_i , di dimensione $q \times p$, dati da

$$S_i = \frac{d^i K(t)}{dt^i} \Big|_{t=0} \quad \text{oppure} \quad S_i = K(i) \quad i = 1, 2, \dots$$

nel caso tempo continuo, e tempo discreto rispettivamente.

La matrice di Hankel può anche essere calcolata a partire da una rappresentazione con lo stato applicando la definizione alla sua matrice delle risposte impulsive. Si ottengono, sia nel caso a tempo continuo che in quello a tempo discreto, i coefficienti

$$S_i \rightarrow CA^i B \quad i \geq 0.$$

Teorema 7.5.1 *Un nucleo $K(t)$ di dimensione $q \times p$ che stabilisce un funzionale lineare strettamente causale tra p -ingressi e q -uscite ammette una rappresentazione con lo stato se e solo se soddisfa una delle seguenti quattro condizioni:*

(i) *esiste un intero n e tre matrici A , B e C tali che*

$$Ce^{At}B = K(t) \quad \forall t \geq 0 \quad \text{oppure} \quad CA^{t-1}B = K(t) \quad t > 0;$$

(ii) *esistono due matrici di funzioni del tempo $Q(t)$ e $P(t)$ tali che*

$$K(t-\tau) = Q(t)P(\tau) \quad t \geq \tau \geq 0 \quad \text{oppure} \quad t > \tau \geq 0$$

(iii) *la matrice di Hankel associata a $K(t)$ ha dimensione finita;*

(iv) *la trasformata di Laplace $K(s)$ (la Z-trasformata $K(z)$) è una matrice di funzioni razionali strettamente proprie.*

La dimostrazione dell'equivalenza delle quattro condizioni enunciate è semplice e costituisce la prova di un risultato di per sé difficile da dimostrare, quello enunciato al punto (ii) che stabilisce nella fattorizzabilità del nucleo la condizione necessaria e sufficiente di realizzabilità nel dominio del tempo.

Un altro aspetto interessante è che l'equivalenza viene mostrata seguendo una procedura che potremmo definire circolare nel senso delle implicazioni: la prima implica la seconda, ..., fino a provare che la quarta implica la prima.

Per la dimostrazione si noti che la prima condizione è di per sé la definizione formale del problema. La seconda è implicata dalla prima come risulta immediatamente dalla seguente uguaglianza

$$Ce^{A(t-\tau)}B = Ce^{At}e^{-A\tau}B = Q(t)P(\tau)$$

(dalla relazione equivalente nel caso a tempo discreto

$$CA^{t-\tau-1}B = CA^{t-1}A^{-\tau}B = Q(t)P(\tau).$$

Che la seconda implica la terza è facilmente comprensibile nel caso tempo discreto in cui si vede che la matrice di Hankel in virtù delle relazioni precedenti ammette la fattorizzazione

$$H = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \end{pmatrix} (B \ AB \ A^2B \ \dots)$$

e quindi ha rango pari alla dimensione interna di tale fattorizzazione (la dimostrazione nel caso tempo continuo segue argomenti simili utilizzando gli sviluppi in serie delle funzioni coinvolte). La terza implica la quarta segue argomenti più complessi riposa sulla costruzione di una realizzazione che ha dimensione pari al rango della matrice di Hankel. Si noti, peraltro, che il rango di questa matrice che vede apparire nella fattorizzazione le matrici di osservabilità e raggiungibilità è pari alla dimensione minima; la realizzazione che viene costruita in questo caso è infatti minima. Che la quarta implica la prima è stato ampiamente mostrato nei paragrafi precedenti.

È importante ricordare quanto osservato: *le realizzazioni minime hanno dimensioni pari al rango della matrice di Hankel H*. Questo risultato è molto utile in quanto consente con un semplice test di rango di una matrice di calcolare la dimensione delle rappresentazioni ridotte di una data rappresentazione con lo stato, ma anche, senza calcolarne una realizzazione, la dimensione minima della rappresentazione con lo stato che rappresenta un dato nucleo. Tale calcolo si effettua a partire dai campioni del nucleo nel caso tempo discreto, dalle derivate in zero nel caso tempo continuo.

Un ultimo aspetto che appare utile riportare è la soluzione nel caso in cui si vuole calcolare una rappresentazione con lo stato di un legame ingresso-uscita assegnato per il tramite di un sistema di equazioni differenziali o alle differenze secondo le relazioni (4.28). La soluzione è molto semplice in questo caso in quanto basta osservare che in base al teorema della derivata nella trasformata di Laplace, nel caso a tempo continuo, al teorema della traslazione a sinistra nella \mathcal{Z} -trasformata, nel caso tempo discreto, si ha che

$$P(d)^{-1}Q(d) = W(z)|_d$$

è quindi sufficiente calcolare a partire dal modello (4.28) la (4.29), ed assumere questa come nucleo nella variabile complessa.

Esercizio 7.5.1 Calcolare la realizzazione del nucleo nell'Esempio 4.4.1.



Soluzione Esercizio 7.5.1

Approfondimento

Capitolo at glance!

Introduzione allo studio dei Sistemi Interconnessi

In questo capitolo sono trattati gli aspetti salienti collegati allo studio dei sistemi interconnessi, cioè costituiti da più parti, da più sottosistemi, tra loro collegati in modo da formare un sistema complessivo che mantenga le caratteristiche di linearità, stazionarietà e finita dimensione.

Le connessioni possibili sono realizzate a partire da condivisione, somme e sottrazioni di variabili e collegamenti elementari: in serie, in parallelo e a retroazione. Le interconnessioni sono descritte impiegando schemi a blocchi e grafi di flusso: a partire da queste viene mostrato come costruire il modello del sistema complessivo. Segue uno studio elementare del mantenimento delle proprietà. Un esame più approfondito è dedicato allo studio della proprietà di stabilità dei sistemi a retroazione. Tale indagine consente un collegamento con il comportamento in frequenza che è molto utile nel progetto dei sistemi di controllo.

8.1

Interconnessioni elementari

Si considerano nel seguito del paragrafo due sistemi: il primo S_1 che ha ingresso u_1 e uscita y_1 ; il secondo S_2 con ingresso u_2 e uscita y_2 . Assumeremo che S_1 e S_2 siano caratterizzati dalle rispettive rappresentazioni implicite con lo stato

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}, \quad S_2: \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 \end{cases} \quad (8.1)$$

oppure dalle rispettive funzioni di trasferimento

$$S_1: W_1(s), \quad S_2: W_2(s). \quad (8.2)$$

8.1.1 Connessione in serie

La **connessione in serie** (o **connessione in cascata**) si realizza imponendo il seguente *vincolo topologico*

$$u_2(t) = y_1(t);$$

tale connessione è possibile solo se le dimensioni di y_2 sono le stesse di u_1 . Imponendo il vincolo nelle rappresentazioni di S_1 e S_2 in (8.1) spariscono le variabili u_2 ed y_1 , sostituite da C_1x_1 . Se ora si assume che l'ingresso esterno sia u_1 e l'uscita y_2

$$u = u_1 \quad y = y_2$$

e si ricorda che lo stato rappresenta le variabili dei componenti con memoria e che quindi è naturale assumere come stato l'aggregato dei vettori di stato dei sottosistemi, si ottiene come modello complessivo la rappresentazione

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u \\ \dot{x}_2 = B_2C_1x_1 + A_2x_2 \\ y = C_2x_2. \end{cases}$$

e, in maniera compatta

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Questo primo collegamento elementare, noto come **connessione in cascata** (o **connessione in serie**) è rappresentato in modo evidente nella Figura 8.1.

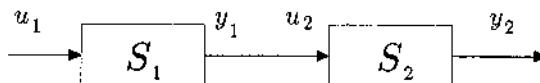


Figura 8.1: Connessione in serie.

È immediato dalla figura calcolare il modello complessivo in termini di funzione di trasferimento

$$Y(s) = W_2(s)Y_1(s) = W_2(s)W_1(s)U(s) = W(s)U(s)$$

che è quindi uguale al prodotto delle funzioni di trasferimento in ordine inverso di collegamento

$$W(s) = W_2(s)W_1(s).$$

8.1.2 Connessione in parallelo

La connessione in parallelo è riportata nella Figura 8.2.

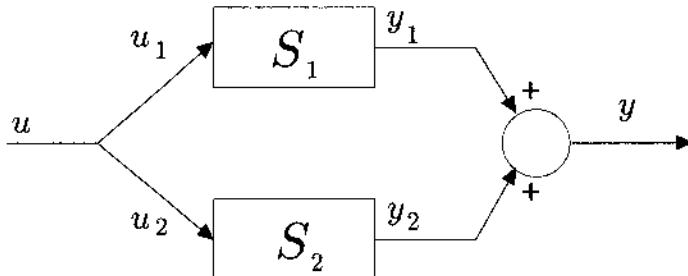


Figura 8.2: Connessione in parallelo.

Le condizioni di interconnessione, i vincoli topologici

$$u_1 = u_2 = u \quad y = y_1 + y_2.$$

sono in questo caso possibili se i due sottosistemi hanno lo stesso numero di ingressi e lo stesso numero di uscite. Imponendo i vincoli nelle rappresentazioni di S_1 e S_2 in (8.1), e assumendo, come naturale, come vettore di stato l'aggregato degli stati, si ottiene la rappresentazione con lo stato

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ y = C_1 x_1 + C_2 x_2. \end{cases}$$

e, in maniera compatta

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u \\ y &= (C_1 \quad C_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Anche in questo caso è immediato dalla figura calcolare il modello complessivo in termini di funzione di trasferimento

$$Y(s) = W_1(s)Y_1(s) + W_2(s)Y_2(s) = (W_1(s) + W_2(s))U(s) = W(s)U(s)$$

che è quindi uguale alla somma delle funzioni di trasferimento dei sottosistemi

$$W(s) = W_1(s) + W_2(s).$$

8.1.3 Connessione a retroazione

Il terzo ed ultimo tipo di collegamento elementare è dato dalla **connessione a retroazione** rappresentata in Figura 8.3.

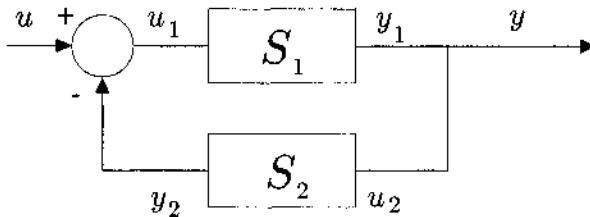


Figura 8.3: Connessione in retroazione.

I vincoli topologici, che possono essere imposti solo se il numero di uscite dell'uno è uguale al numero di ingressi dell'altro, sono

$$u_1 = u - y_2, \quad u_2 = y_1;$$

sostituiti questi nelle (8.1), assunto lo stato l'aggregato degli stati dei sottosistemi e notando che l'uscita complessiva del sistema è

$$y = y_1,$$

si ottiene la rappresentazione con lo stato del sistema complessivo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 - B_1 C_2 x_2 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = B_2 C_1 x_1 + A_2 x_2 \\ y = C_1 x_1. \end{cases}$$

e, in maniera compatta

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

L'interconnessione realizzata, come mostra bene la Figura 8.3, presenta un collegamento che esprime un ritorno indietro (contro reazione) rispetto a quello che può apparire un flusso di informazione generato dai segnali seguendo l'orientamento delle frecce. Il segno meno nel sommatore mette in evidenza una caratteristica saliente di questo tipo di collegamento che, come si avrà occasione di comprendere nello studiare le metodologie di progetto dei sistemi di controllo, rappresenta la modalità operativa elementare secondo la quale concepire ogni

intervento finalizzato a raggiungere prefissati obiettivi. Se infatti si immagina che $u(t)$ rappresenti un andamento che si desidererebbe far assumere all'uscita di un assegnato sistema, $u(t) - y(t)$ misura l'errore che si commette e costituisce l'informazione fondamentale per decidere come intervenire.

Tale collegamento che è l'archetipo degli schemi dei sistemi di controllo, rappresenta la logica secondo la quale funzionano tutti i processi che operano in tempo reale interagendo con l'ambiente: tutti gli esseri viventi in ogni attività. Nella sua forma elementare qui rappresentata risulta composto da un ciclo di reazione; nell'anello si distinguono due rami: il ramo diretto (catena diretta), in cui le frecce vanno da sinistra verso destra, ed il ramo in retroazione (catena di retroazione).

Il calcolo del modello funzione di trasferimento richiede in questo caso un minimo di attenzione, come è indicato nel seguito. Si ha infatti

$$Y(s) = W_1(s)(U(s) - W_2(s)Y(s))$$

da cui

$$(I + W_1(s)W_2(s))Y(s) = W_1(s)U(s)$$

e infine, nel caso di $p = q$ (tanti ingressi quante uscite),

$$W(s) = (I + W_1(s)W_2(s))^{-1}W_1(s)$$

Si noti che vale anche la relazione equivalente

$$W(s) = W_1(s)(I + W_2(s)W_1(s))^{-1}$$

ottenuta dalle uguaglianze

$$Y(s) = W_1(s)U_1(s) \quad \text{e} \quad U_1(s) = U(s) - W_2(s)W_1(s)U_1(s).$$

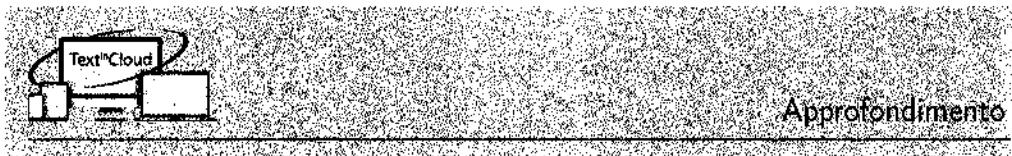
Nel caso particolare di sistemi ad un ingresso ed un'uscita le due espressioni calcolate si riducono a

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}$$

espressione che si legge come segue: la funzione di trasferimento del sistema a retroazione ad un anello è data dal rapporto tra la funzione di trasferimento della catena diretta (i.e., $W_1(s)$) diviso uno meno la funzione di trasferimento d'anello (i.e., $-W_1(s)W_2(s)$), che è dato dal prodotto di tutte le funzioni di trasferimento che si trovano nella catena diretta e a retroazione.

Le tre semplici connessioni esaminate mettono in luce come calcolare un modello, in t o in s , del sistema. Ma come si procede nel caso in cui i collegamenti, sebbene realizzati mediante le regole definite, sono molteplici?

In linea di principio per calcolare il modello complessivo si può procedere come indicato, imponendo i vincoli topologici e derivando i modelli delle parti. Tale modo di procedere può comportare difficoltà non facilmente superabili; è quindi necessario introdurre procedure sistematiche. Con questo obiettivo vengono qui di seguito introdotte notazioni grafiche più adatte di quelle degli schemi a blocchi finora utilizzati.



Approfondimento

8.2

Rappresentazioni di sistemi interconnessi mediante grafi di flusso

Negli schemi a blocchi, considerati fino ad ora, le variabili sono rappresentate da archi orientati che collegano blocchi; il blocco rappresenta il sistema che collega gli ingressi alle uscite; le connessioni avvengono impiegando direttamente, sommando o sottraendo variabili. In questo contesto quattro simboli caratterizzano lo schema di un sistema interconnesso: archi, blocchi, sommatori e lettere.

I **grafi di flusso** rappresentano uno strumento alternativo per descrivere i sistemi interconnessi. In essi le variabili, u ed y ad esempio, sono rappresentate da punti, detti anche nodi, i sistemi sono rappresentati da archi che collegano i nodi (un sistema ad esempio, è rappresentato da un arco che collega i due nodi u - y). Un sistema interconnesso sarà in questo contesto descritto da un grafo pesato in cui il peso, detto trasferenza dell'arco, rappresenta la funzione di trasferimento del sottosistema coinvolto.

Nei grafi di flusso una variabile che risulta essere allo stesso tempo ingresso di due o più sottosistemi è rappresentata da un nodo che ha più rami in uscita ciascuno corrispondente ad uno di essi. La convergenza su uno stesso nodo corrisponde alla somma della variabili che vi confluiscono. La differenza tra più variabili viene realizzata modificando il segno delle trasferenze di ramo. La notazione è quindi molto semplice e consente di rappresentare rapidamente le interconnessioni.

La simbologia è quella ben consolidata dei grafi con la particolarità annunciata che i nodi rappresentano le variabili, gli archi (anche chiamati rami) i sottosistemi, i pesi degli archi rappresentano le funzioni di trasferimento. Il grafo di flusso risultante dà la rappresentazione grafica del sistema interconnesso. I nodi terminali, con soli rami uscenti e con soli rami entranti, definiscono le variabili

d'ingresso e d'uscita con la particolarità che per meglio mettere in evidenza questo ruolo un nodo può essere separato aggiungendo un collegamento orientato di peso unitario tra le due parti (in modo da precisare l'orientamento). Questa procedura è ad esempio impiegata per specificare nel collegamento a retroazione qual è l'ingresso e quale l'uscita, questione che potrebbe non apparire definita se si realizza il grafo corrispondente che consiste in un ciclo fra due nodi. I grafici di flusso delle interconnessioni elementari sono riportati nella Figura 8.4 (nella pagina seguente).

La simbologia dei grafici di flusso è molto più snella e consente di rappresentare situazioni anche complesse come evidenziato in Figura 8.5.

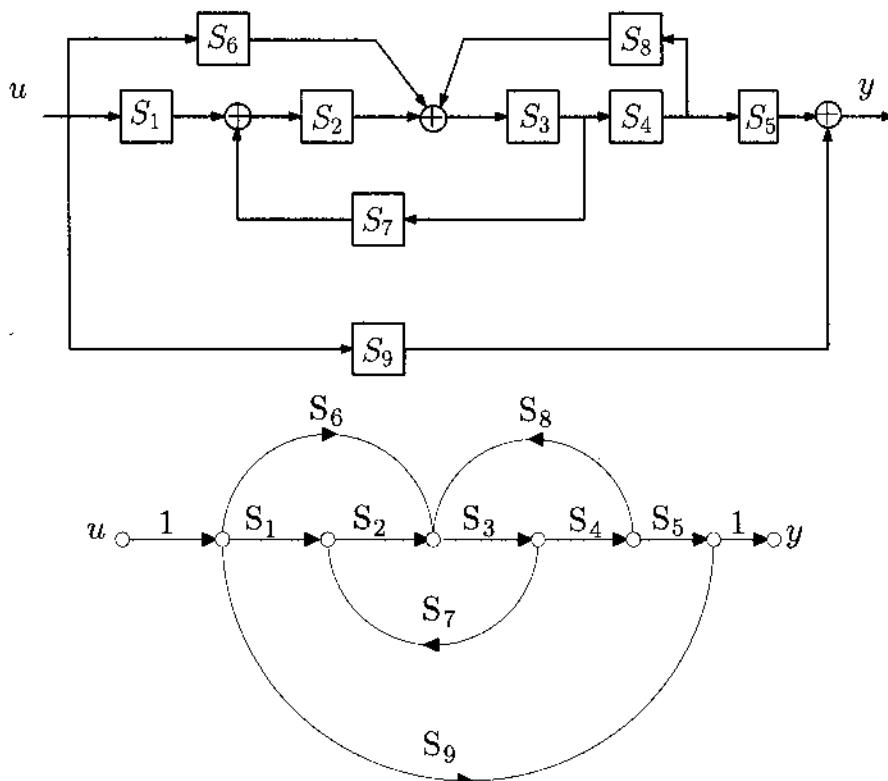
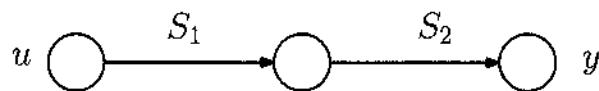
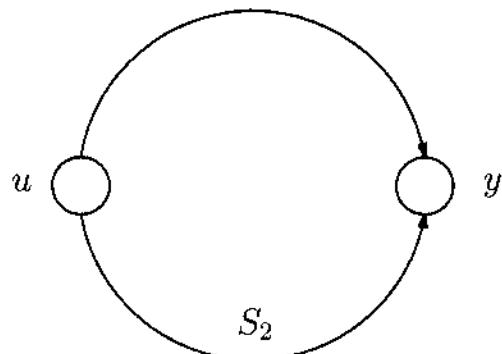


Figura 8.5: Esempio di schema a blocchi e corrispondente grafo di flusso.

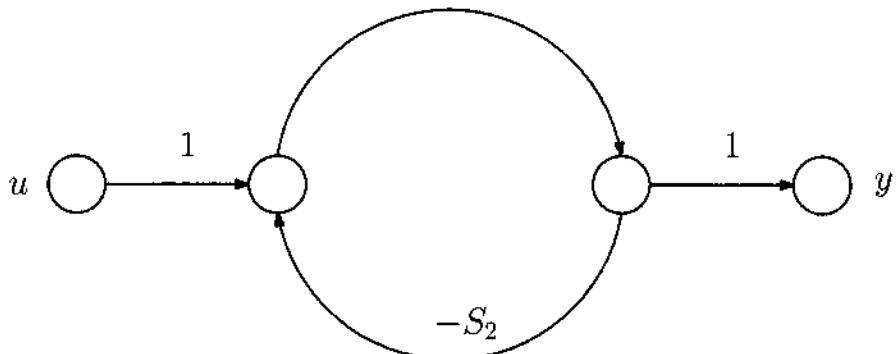
Prima di entrare nel dettaglio del loro impiego per il calcolo dei modelli, è opportuno ricordare due nozioni elementari di teoria dei grafici: percorso e ciclo. Un percorso tra due nodi è definito dalla successione degli archi che conducono da un nodo di partenza a quello d'arrivo; un ciclo è rappresentato dalla sequenza di archi che partendo da un nodo ritornano su di esso. Nel nostro caso il percorso e il ciclo saranno specificati dal prodotto delle trasferenze degli archi coinvolti.



(a) Serie.

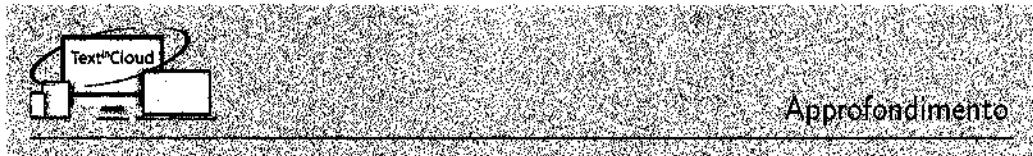
 S_1 

(b) Parallelo.

 S_1 

(c) Controreazione.

Figura 8.4: Grafi di flusso delle interconnessioni elementari.



8.3

Sistemi interconnessi: calcolo del modello

Vedremo in questo paragrafo come il grafo di flusso si presti per calcolare la funzione di trasferimento di un generico sistema interconnesso lineare, a partire dalla funzione di trasferimento dei sottosistemi, impiegando una procedura nota come **formula di Mason** e per calcolare, a partire dalle rappresentazioni con lo stato dei sottosistemi, la rappresentazione con lo stato del sistema complessivo.

Per il calcolo della funzione di trasferimento del sistema complessivo se si indica con S_i la funzione di trasferimento del generico, i -esimo sottosistema (detta **trasferenza di ramo nel grafo di flusso**), è utile l'impiego della procedura che viene spiegata nel seguito e che è sinteticamente descritta dalla seguente espressione nota come la **formula di Mason**. Se si indica con S la funzione di trasferimento del sistema complessivo, la formula di Mason si scrive come:

$$S = \frac{\sum_i \Delta_i P_i}{\Delta}$$

in cui

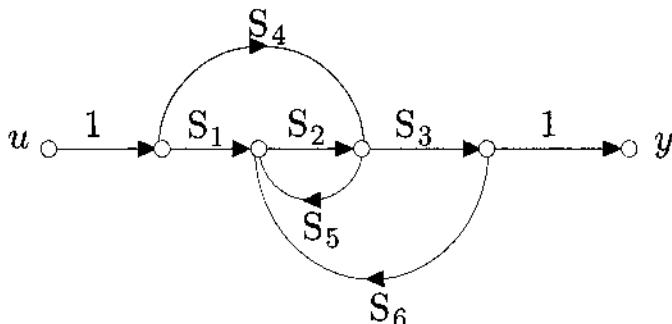
- P_i , indica la trasferenza dell' i -esimo cammino, privo di cicli, da u a y ;
- Δ , detto discriminante del grafo, è dato da

$$\Delta = 1 - (-1)^{k+1} \sum_k \sum_j P_j^k$$

con P_j^k prodotto di k trasferenze d'anello di anelli che non si toccano;

- Δ_i , indica Δ privato di tutti i prodotti di trasferenze che sono toccati da P_i .

Si consideri a titolo esemplificativo, e per comprendere come procedere, il sistema interconnesso rappresentato in Figura 8.6.



$$P_1 = S_4 S_3$$

$$P_2 = S_1 S_2 S_3$$

$$C_1 = S_2 S_5$$

$$L_0 = S_2 S_3 S_6$$

$$\Delta_1 = 1 \quad \Delta_2 = 1$$

$$\Delta = 1 - S_2 S_5 \cdot S_2 S_3 S_6$$

Da u a y si hanno due cammini privi di cicli

$$P_1 = S_1 S_2 S_3$$

$$P_2 = S_3 S_4,$$

inoltre,

$$\begin{aligned} \Delta = & 1 - (\text{somma trasferenze d'anello}) \\ & + (\text{somma di prodotti di trasferenze di coppie di anelli diversi}) \\ & - (\text{somma di prodotti di triple di anelli diversi}) + \dots \end{aligned}$$

nel caso preso in considerazione avremo

$$\Delta = 1 - S_2 S_5 - S_2 S_3 S_6$$

in quanto due cicli ($S_2 S_5$ ed $S_2 S_3 S_6$) si toccano, hanno addirittura un ramo in comune (si noti che basterebbe abbiano anche un solo nodo in comune per escludere il loro prodotto).

Δ_i , $i = 1, 2$, viene calcolato a partire da Δ eliminando i prodotti di funzioni di trasferimento che coinvolgono funzioni di trasferimento che stanno già in P_i ; nel caso in esame si ottiene

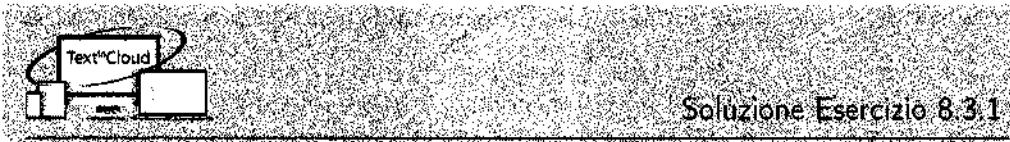
$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = 1 - S_2 S_5.$$

In conclusione per quanto riguarda la funzione di trasferimento, dell'esempio preso in considerazione, applicando la formula di Mason, si ottiene la seguente espressione:

$$S = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{S_1 S_2 S_3 + S_3 S_4 - S_2 S_3 S_4 S_5}{1 - S_2 S_5 - S_2 S_3 S_6}$$

Esercizio 8.3.1 Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema interconnesso descritto dal grafo di flusso in Figura 8.5.



Nel calcolo della rappresentazione con lo stato del sistema interconnesso il punto di partenza sono i modelli dei sottosistemi che supporremo del tipo

$$S_i : \begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i \\ y_i = C_i x_i. \end{cases}$$

La procedura euristica applicata per il calcolo del modello nel caso di collegamenti elementari serie, parallelo e retroazione, sebbene sempre applicabile, presenta difficoltà quando il grafo presenta cicli, in particolare nel caso in cui ve ne sono più di uno.

In presenza di numerosi sottosistemi, con molteplici connessioni in retroazione, è necessario fare riferimento ad una procedura sistematica che impiega il grafo di flusso. Tale procedura è fondata sulla considerazione fatta in precedenza: in assenza di cicli il calcolo della rappresentazione con lo stato può essere ottenuto direttamente per ispezione sul grafo imponendo i vincoli topologici. La procedura procede a modificare il grafo per renderlo aciclico e successivamente ricomporlo per recuperare il collegamento voluto generando i collegamenti nel modello necessari a rappresentare il sistema interconnesso assegnato.

Il calcolo del modello segue le seguenti fasi:

1. si separano i nodi, possibilmente in numero minimo, in modo che nel grafo risultante non ci siano più cicli. La separazione deve essere fatta in modo da lasciare tutti quanti i rami entranti da una parte e i rami uscenti dall'altra;
2. si calcola per ispezione sul grafo il modello del sistema interconnesso associato al grafo modificato;
3. si ricompongono, nel modello, le variabili associate ai nodi separati, ciò che è sufficiente ad ottenere il modello del sistema.

La procedura viene illustrata nel corso del seguente esempio.

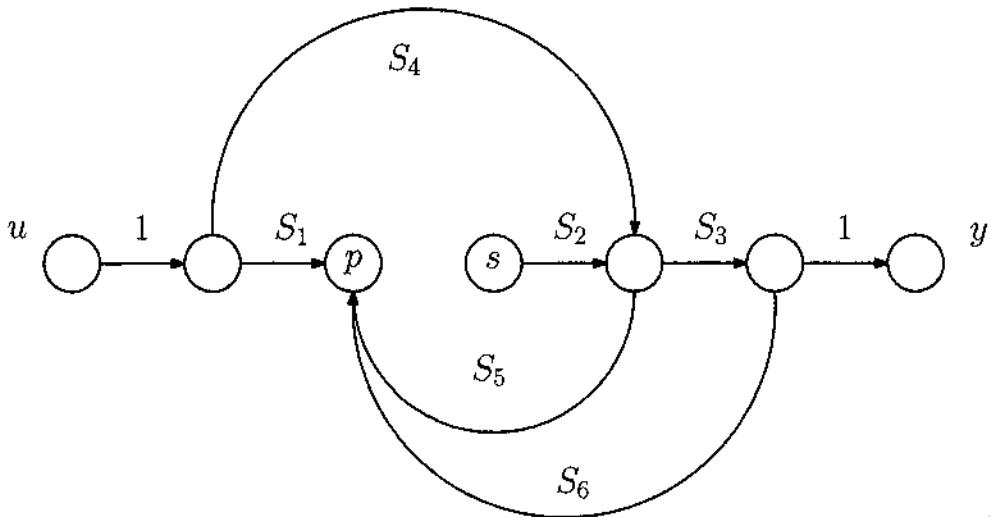


Figura 8.7: Esempio di grafo di flusso.

Esempio 8.3.1 Si consideri il sistema in Figura 8.7, dove il nodo che congiunge S_1 ad S_2 è stato preliminarmente separato, ciò che realizza nel caso in esame il numero minimo di separazioni di nodi per ottenere il grafo aciclico. Si indichi con p (pozzo) la variabile rappresentata dalla parte del nodo separato dove arrivano tutti i rami, con s (sorgente) la variabile della parte del nodo con rami solo uscenti.

A partire dal grafo così modificato è semplice calcolare la rappresentazione con lo stato del sistema che ha ingressi u ed s (nodi con soli rami uscenti), ed uscite y e p (nodi con rami sole entranti). Ricordando che il vettore di stato è pari all'aggregato dei vettori di stato dei sottosistemi, il modello complessivo si ottiene dalle rappresentazioni esplicite dei sottosistemi dove la variabile d'ingresso è sostituita con la somma delle variabili d'uscita dei sottosistemi associati agli archi entranti nel nodo che specifica l'ingresso in questione.

Nell'esempio allo studio si ottiene la rappresentazione

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 &= A_2 x_2 + B_2 s \\ \dot{x}_3 &= A_3 x_3 + B_3 C_2 x_2 + B_3 C_4 x_4 \\ \dot{x}_4 &= A_4 x_4 + B_4 u \\ \dot{x}_5 &= A_5 x_5 + B_5 C_2 x_2 + B_5 C_4 x_4 \\ \dot{x}_6 &= A_6 x_6 + B_6 C_3 x_3 \\ y &= C_3 x_3 \\ p &= C_1 x_1 + C_5 x_5 + C_6 x_6\end{aligned}$$

che si riscrive in forma compatta come

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_3C_2 & A_3 & B_3C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_5C_2 & 0 & B_5C_4 & A_5 & 0 \\ 0 & 0 & B_6C_3 & 0 & 0 & A_6 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \\ 0 & 0 \\ B_4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ s(t) \end{pmatrix} \quad (8.3a)$$

$$y(t) = (0 \ 0 \ C_3 \ 0 \ 0 \ 0)x(t) \quad (8.3b)$$

$$p(t) = (C_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ C_5 \ C_6)x(t)$$

Per ripristinare il grafo iniziale è sufficiente ricomporre il nodo diviso, ciò che significa che $p(t) = s(t)$. Facendo questo si ottiene la rappresentazione con lo stato del sistema interconnesso rappresentato dal grafo di flusso assegnato. La rappresentazione del sistema dato è dunque

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 & 0 & 0 & B_2C_5 & B_2C_6 \\ 0 & B_3C_2 & A_3 & B_3C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_5C_2 & 0 & B_5C_4 & A_5 & 0 \\ 0 & 0 & B_6C_3 & 0 & 0 & A_6 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \\ 0 \\ B_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (0 \ 0 \ C_3 \ 0 \ 0 \ 0)x(t).$$



Text Cloud

Approfondimento

8.4

Le proprietà del sistema interconnesso

Una volta in grado di calcolare il modello del sistema interconnesso la questione che naturalmente si pone è la seguente: quali le proprietà del sistema in relazione a quelle dei sottosistemi? In questo paragrafo viene fatto cenno agli aspetti salienti rispetto a proprietà che svolgono un ruolo centrale nel progetto: le proprietà dello spazio di stato e la stabilità.

Per quanto riguarda le proprietà dello stato la questione interessante da comprendere è se, e come, a partire da sottosistemi raggiungibili ed osservabili si possa avere perdita di una o di entrambe le proprietà a seguito dell'interconnessione.

Si tratta di un aspetto molto importante nel progetto dei sistemi di controllo che si pone proprio nei termini esposti in quanto alcuni metodi impiegano, per

soddisfare le specifiche di progetto, tecniche che realizzano perdite di raggiungibilità e/o osservabilità; e se ciò accade, non si può ammettere che le dinamiche che diventano non raggiungibili e/o non osservabili siano instabili.

C'è un modo semplice per la comprensione e le necessarie verifiche?

La soluzione riposa sulla nota proprietà, ben compresa e più volte sottolineata, che la funzione di trasferimento è caratterizzata dal sottosistema raggiungibile ed osservabile; i sottosistemi non raggiungibile e non osservabile non intervengono nell'espressione della funzione di trasferimento. Un modo semplice di fare la verifica consiste nel confrontare l'ordine della funzione di trasferimento (grado del polinomio a denominatore dopo avere fatto tutte le possibili semplificazioni) con la dimensione del sistema (che è necessariamente pari alla somma delle dimensioni dei sottosistemi).

Un esempio elementare di quanto asserito è nella connessione in serie dei due sottosistemi seguenti

$$W_1(s) = \frac{s+1}{s-1} \quad W_2(s) = \frac{1}{s+1}.$$

La funzione di trasferimento del sistema complessivo è

$$W(s) = \frac{1}{s-1}$$

ed ammette la seguente realizzazione con lo stato

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t) \quad y(t) = x(t).$$

Si è ottenuto un sistema di dimensione uno mentre la dimensione del sistema complessivo, interconnessione di due sottosistemi di dimensione uno, è due (si noti che alla stessa conclusione si arriva se invece di partire dalle funzioni di trasferimento si impiega una rappresentazione con lo stato dei sottosistemi, come si può verificare facilmente). Ebbene è facile verificare che la cancellazione zero-polo (nel prodotto) che ha realizzato la caduta dell'ordine, corrisponde ad una perdita di raggiungibilità. Per la verifica si può procedere nel modo seguente: si realizzano i due sottosistemi, calcolando le rappresentazioni con lo stato, e si calcola la rappresentazione con lo stato del sistema interconnesso; è questa la vera rappresentazione con lo stato del sistema complessivo. Nel caso in esame tale rappresentazione non risulta raggiungibile. Ovviamente la riduzione rispetto alla raggiungibilità restituirebbe la realizzazione della funzione di trasferimento.

Lo studente è invitato a verificare procedendo come indicato che alla cancellazione polo zero in una connessione in serie corrisponde una perdita di osservabilità.

Le precedenti semplici considerazioni ci permettono di trarre la seguente semplice conclusione: il sistema manifesta una perdita di raggiungibilità e/o osservabilità se il denominatore della funzione di trasferimento ha grado inferiore alla somma delle dimensioni dei sottosistemi; per comprendere cosa sia accaduto si deve impiegare la rappresentazione con lo stato del sistema complessivo (anche calcolando le dinamiche nascoste per l'ulteriore verifica della stabilità).

Si tratta di una procedura semplice ed efficace che è opportuno tenere presente.

Per quanto riguarda la stabilità del sistema interconnesso valgono le seguenti semplici, ma importanti considerazioni:

- le interconnessioni elementari serie e parallelo non modificano le proprietà di stabilità; più precisamente, come è anche facile verificare, gli autovalori dei sistemi connessi coincidono con l'aggregato degli autovalori dei sottosistemi;
- nell'interconnessione a retroazione la matrice dinamica cambia, le caratteristiche di stabilità sono quindi modificate (e modificabili); inoltre è importante osservare che gli autovalori del sistema complessivo sono gli stessi se si modifica la collocazione dei sottosistemi nel ciclo (si pensi al caso di sottosistemi ad un ingresso ed un'uscita), in particolare se il sottosistema S_2 viene posto in serie ad S_1 in catena diretta, riducendo all'unità la catena in retroazione;
- la proprietà delle interconnessioni serie e parallelo si estendono alla generica interconnessione che è specificata da un grafo di flusso aciclico: gli autovalori del sistema complessivo sono l'aggregato degli autovalori dei sottosistemi; al proposito si può verificare dal calcolo fatto nell'esercizio (8.4.1) precedente che la matrice del grafo in Figura 8.7 ha autovalori che coincidono con quelli delle matrici A_i , $i = 1, \dots, 6$, come risulta dalla struttura a blocchi della matrice (8.3a);
- la presenza di cicli nel grafo di flusso modifica le proprietà di stabilità; si verifichi quello che accade nell'Esercizio 8.4.1 dove la ricomposizione del nodo ha come conseguenza una modifica della matrice dinamica alterandone la struttura a blocchi precedente.

Le precedenti considerazioni ci lasciano intendere che sono da imputare alle interconnessioni in retroazione le modifiche del comportamento dinamico, eventualmente della stabilità, del sistema. Inoltre la proprietà non sembra essere alterata dalla collocazione nel ciclo dei sottosistemi. Su quest'ultimo aspetto, che riveste particolare interesse nello studio della stabilità dei sistemi a retroazione, si ritornerà nel prossimo paragrafo.

Esercizio 8.4.1 Assegnato il sistema in Figura 8.8

con

$$P(s) = \frac{1}{s+1}, \quad H(s) = k \frac{s+1}{s+2}$$

si studino le proprietà strutturali e la stabilità al variare di $k \in \mathbb{R}$.

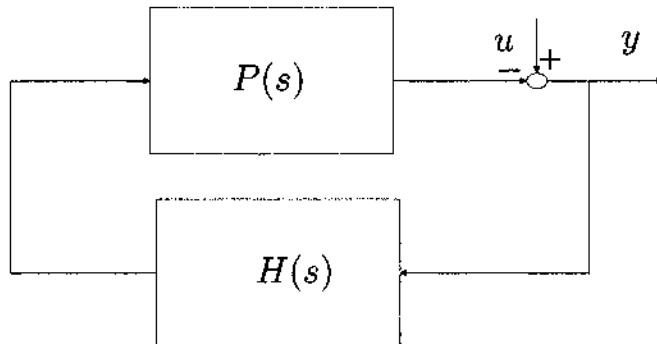


Figura 8.8: Schema di interconnessione per Esercizio 8.4.1.

Esercizio 8.4.2 Assegnato il sistema in Figura 8.9

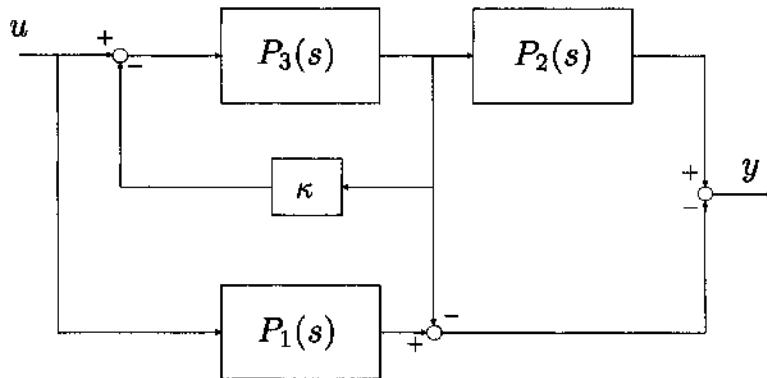


Figura 8.9: Schema di interconnessione per Esercizio 8.4.2.

con

$$P_1(s) = \frac{1}{s+3}, \quad P_2(s) = \frac{s+1}{s+2}, \quad P_3(s) = \frac{1}{s(s+2)}, \quad \kappa = 1$$

individuare la rappresentazione con lo stato del sistema complessivo e studiarne la stabilità interna ed esterna (nello stato zero e in ogni stato); calcolare inoltre una realizzazione del legame ingresso-uscita.

Esercizio 8.4.3 Assegnato il sistema in Figura 8.10

con

$$\Sigma_1 : P_1(s) = \frac{1}{s}, \quad \Sigma_2 : P_2(s) = \frac{k}{s^2+2}, \quad \Sigma_3 : P_3(s) = \frac{1}{s+2}$$

calcolare la rappresentazione con lo stato, studiare le proprietà strutturali e la stabilità interna ed esterna al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

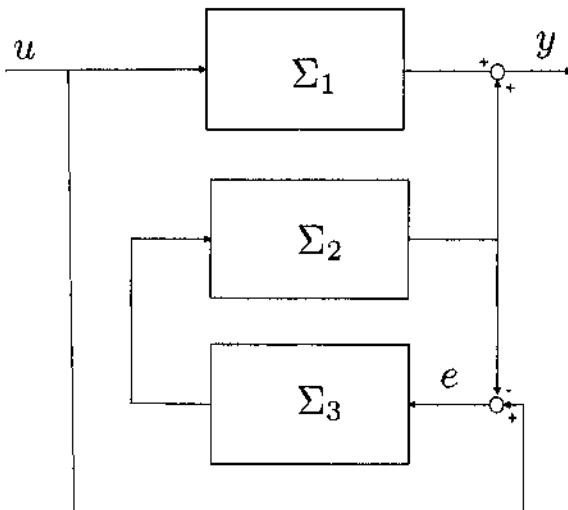


Figura 8.10: Schema di interconnessione per Esercizio 8.4.3.

TextCloudS

Soluzione Esercizi 8.4.1, 8.4.2 e 8.4.3

Approfondimento

8.5

Il criterio di Nyquist

Per comprendere la generalità dell'approccio, è utile fare riferimento al calcolo della rappresentazione con lo stato di un sistema S a partire dalle rappresentazioni dei sottosistemi.

Come visto precedentemente, a partire dal grafo di flusso di S , aperti alcuni nodi per rendere il grafo aciclico, viene individuata una rappresentazione con lo stato al sistema corrispondente al grafo modificato, con s come ulteriore ingresso e p ulteriore uscita

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_s s \\ y = Cx \\ p = C_p x \end{cases}$$

La riconnessione dei nodi aperti, che corrisponde a porre $s = p$, fornisce la rappresentazione con lo stato complessiva

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu + B_s C_p x \\ y &= Cx \end{cases}$$

riordinata come

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A + B_s C_p)x + Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$

Se si tiene conto, come detto, del fatto che un sistema interconnesso caratterizzato da un grafo di flusso aciclico ha per autovalori l'aggregato degli autovalori dei sottosistemi che lo compongono, ovvero che la proprietà di stabilità è equivalente alla proprietà di stabilità dei sottosistemi, si comprende che la possibile modifica della stabilità è collegata al passaggio da A ad $(A + B_s C_p)$.

A partire dalle precedenti considerazioni, si può osservare che dal punto di vista della stabilità il sistema interconnesso può essere considerato equivalente ad un sistema del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + B_s u \\ y &= -C_p x \end{cases}$$

in cui si inserisce una retroazione unitaria dall'uscita, ossia si pone

$$u = v - y$$

In questo caso, infatti, si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A + B_s C_p)x + B_s v \\ y &= -C_p x \end{cases}$$

la cui matrice dinamica risulta essere $(A + B_s C_p)$. Quindi lo studio della stabilità del sistema complessivo può essere ricondotto allo studio della stabilità di un sistema a retroazione unitaria. Ciò lascia comprendere la generalità dello studio.

Per lo studio della stabilità di sistemi interconnessi o a retroazione, non avendo relazioni immediate tra autovalori dei sistemi componenti e autovalori del sistema complessivo, è necessario introdurre metodologie di studio specifiche.

Con riferimento al caso di sistema a retroazione, il criterio che si mostrerà nel seguito consente di stabilire le condizioni di stabilità del sistema complessivo a partire dalla conoscenza delle proprietà di stabilità del sistema in assenza di retroazione.

8.5.1 Il criterio di Nyquist

Lo studio della stabilità mediante il criterio di Nyquist fa riferimento ad un sistema descritto dalle equazioni

$$S: \begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$

in cui si introduce una retroazione dall'uscita $u = -y + v$, ottenendo il sistema

$$S_{CH}: \begin{cases} \dot{x} &= (A - BC)x + Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$

Il sistema S viene indicato come *sistema ad anello aperto* (o *a catena aperta*) mentre S_{CH} si definisce *sistema ad anello chiuso* (o *a catena chiusa*)

Si ponga ora

$$d_{AP}(s) = |sI - A| \quad (8.4)$$

che rappresenta il polinomio caratteristico per il sistema a ciclo aperto S , e

$$d_{CH}(s) = |sI - A + BC| \quad (8.5)$$

il polinomio caratteristico per il sistema a ciclo chiuso S_{CH} .

Il sistema complessivo risulta stabile quando il polinomio $d_{CH}(s)$ non ha radici a parte reale positiva. Per i due polinomi introdotti si può dimostrare che vale la relazione

$$\frac{d_{CH}(s)}{d_{AP}(s)} = |I + C(sI - A)^{-1}B| = |I + F(s)| \quad (8.6)$$

con $F(s) = C(sI - A)^{-1}B$ funzione di trasferimento del sistema S .

Infatti, a partire dalla relazione

$$\begin{aligned} |sI - A + BC| &= |sI - A||I + (sI - A)^{-1}BC| \\ &= |sI - A||I + C(sI - A)^{-1}B| \end{aligned}$$

si ha

$$\frac{d_{CH}(s)}{d_{AP}(s)} = \frac{|sI - A + BC|}{|sI - A|} = \frac{|sI - A||I + C(sI - A)^{-1}B|}{|sI - A|} \quad (8.7)$$

da cui la (8.6).

Si consideri ora un generico polinomio di variabile complessa, $p(s)$, di grado n . Siano p_1, \dots, p_n le sue radici. Se si pone $s = j\omega$ e si scrive il polinomio in forma fattorizzata, si ottiene

$$p(j\omega) = k(j\omega - p_1) \dots (j\omega - p_n)$$

Si supponga inizialmente che non vi siano radici a parte reale nulla.

Ciascuno dei fattori $(j\omega - p_i)$ può essere rappresentato nel piano complesso con un vettore che congiunge i punti p_i e $j\omega$. Con riferimento, per semplicità, alla Figura 8.11, si considerino due poli, uno a parte reale negativa (p_i) ed uno a parte reale positiva (p_j) e i due vettori corrispondenti.

Se si fa variare ω da $-\infty$ a $+\infty$, l'estremo di ciascun vettore varia posizionandosi in punti dell'asse immaginario via via crescenti; se si considera che per $\omega = -\infty$ i vettori sono verticali e diretti verso il basso, mentre per $\omega = +\infty$ sono sempre verticali ma diretti verso l'alto, se ne conclude che il vettore relativo ad una radice a parte reale negativa, ruotando in senso antiorario, ha una variazione di fase

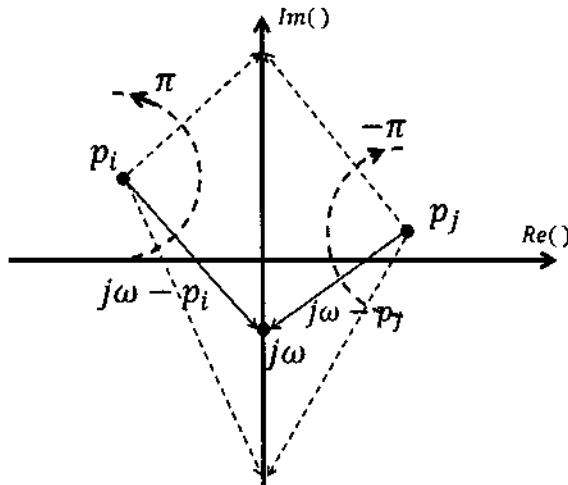


Figura 8.11: Allocazione nel piano complesso delle radici e variazione di fase corrispondente per $\omega = -\infty \rightarrow +\infty$.

di $+\pi$, mentre il vettore relativo ad una radice a parte reale positiva, ruotando in senso orario, ha una variazione di fase di $-\pi$. Definendo $\Delta_\varphi(p)$ la variazione di fase dell'intero polinomio quando ω varia da $-\infty$ a $+\infty$, se si indica con n_P il numero di radici a parte reale positiva di $p(s)$ si ha che

$$\Delta_\varphi(p) = (n - n_P)\pi - n_P\pi = n\pi - 2\pi n_P. \quad (8.8)$$

Se si riscrive la relazione (8.6) calcolando le funzioni in $s = j\omega$ e si calcolano le variazioni di fase di primo e secondo membro per ω che varia da $-\infty$ a $+\infty$, si può scrivere

$$\Delta_\varphi\left(\frac{d_{CH}(j\omega)}{d_{AP}(j\omega)}\right) = \Delta_\varphi(|1+F(j\omega)|)) \quad (8.9)$$

In virtù delle note proprietà sul prodotto e divisione di fasi di termini complessi, si può scrivere per il primo membro

$$\Delta_\varphi\left(\frac{d_{CH}(j\omega)}{d_{AP}(j\omega)}\right) = \Delta_\varphi(d_{CH}(j\omega)) - \Delta_\varphi(d_{AP}(j\omega)) \quad (8.10)$$

Per ciascuno dei due polinomi si può applicare la (8.8); indicato con Z_P il numero di radici a parte reale positiva di $d_{CH}(j\omega)$ e con P_P il corrispondente di $d_{AP}(j\omega)$, si ha

$$\Delta_\varphi\left(\frac{d_{CH}(j\omega)}{d_{AP}(j\omega)}\right) = (n\pi - 2\pi Z_P) - (n\pi - 2\pi P_P) = 2\pi(P_P - Z_P). \quad (8.11)$$

Considerando, per semplicità di trattazione, il caso di sistemi con un ingresso ed una uscita, per i quali la $F(j\omega)$ è una funzione scalare, il secondo membro di (8.9) si può riscrivere come $\Delta_\varphi(|1+F(j\omega)|))$. A partire dal diagramma polare di $|1+F(j\omega)|$, è possibile determinare il numero di giri che il vettore della funzione

comple compie attorno allo zero del piano complesso; se si indica tale numero con N , con il segno che indica il verso di rotazione, positivo per rotazioni antiorarie e negativo per rotazioni orarie, si ha

$$\Delta_\varphi(1 + F(j\omega)) = 2\pi N.$$

Pertanto, la relazione (8.9) si riscrive come

$$2\pi(P_P - Z_P) = 2\pi N \Rightarrow P_P - Z_P = N. \quad (8.12)$$

Ovviamente il sistema complessivo è asintoticamente stabile se e solo se $Z_P = 0$, per cui si ha

$$N = P_P$$

Questo fornisce la condizione di stabilità del criterio di Nyquist: *condizione necessaria e sufficiente per la stabilità asintotica di un sistema a retroazione unitaria è che il numero di giri che il vettore rappresentativo di $1 + F(j\omega)$ compie attorno allo zero o, ciò che è lo stesso, il numero di giri che il vettore rappresentativo di $F(j\omega)$ compie attorno al punto $(-1, j0)$, quando ω varia da $-\infty$ a $+\infty$ sia uguale al numero di autovalori a parte reale positiva del sistema in catena diretta.*

Si noti che il criterio consente di valutare la stabilità del sistema complessivo, a partire dalla conoscenza delle proprietà di stabilità del sistema in catena diretta e dall'esame grafico del comportamento in frequenza.

Nel caso particolare in cui nel sistema in catena diretta si abbia $P_P = 0$, si ha il criterio nella sua forma cosiddetta ridotta

$$N = 0.$$

Ricordando le considerazioni svolte a proposito dello studio della stabilità non si troverà difficoltà nel verificare che con riferimento ad un sistema interconnesso che presenta più sottosistemi in un unico ciclo a retroazione, lo studio della stabilità si riduce a quello su un sistema a retroazione unitaria in cui in catena diretta si assume sia presente l'interconnessione in cascata dei sottosistemi presenti nel ciclo.

Per chiarire i concetti, si consideri, come esempio, il sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento con guadagno, k , e costanti di tempo τ_i , $i = 1, 2, 3$, positivi

$$F(s) = \frac{k}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s)}.$$

Per le condizioni sulle costanti di tempo, si ha $P_P = 0$.

L'esame della rappresentazione polare di $F(j\omega)$ riportata nella Figura 8.12 lascia comprendere che il sistema a retroazione unitaria è stabile se il punto $(-1, j0)$ è esterno (a sinistra) alla curva, in quanto si avrebbe $N = 0$ e quindi $N = P_P$, instabile altrimenti, in quanto si avrebbe $N = -2$ e quindi $N \neq P_P$.

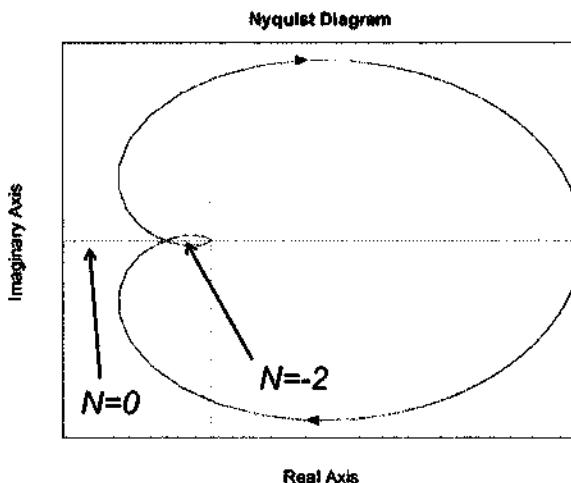


Figura 8.12: Diagramma polare per $F(j\omega) = \frac{k}{(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)(1+j\omega\tau_3)}$.

Si noti che il fatto che la curva circondi o meno il punto $(-1, j0)$ dipende, per fissati valori delle costanti di tempo, dal valore del guadagno k . In particolare al suo crescere il modulo aumenta, ciò che rende possibile l'attraversamento. È usuale nell'impiego del metodo fare riferimento ad un diagramma tracciato e, anziché scalare la curva di un fattore k variabile, valutare la stabilità al variare del guadagno modificando di un fattore inverso la scala sugli assi, ciò che corrisponde a spostare il punto $(-1, j0)$ collocandolo, nella scala originaria, nel punto $(-\frac{1}{k}, j0)$.

Caso di presenza di radici a parte reale nulla

In molte situazioni reali si ha a che fare con funzioni di trasferimento che hanno delle singolarità sull'asse immaginario. In questo caso il diagramma polare non può essere chiuso perché, avvicinandosi ω alla singolarità, l'ampiezza del diagramma polare tende all'infinito e se il diagramma non è chiuso non si può calcolare il numero di giri attorno al punto $(-1, j0)$.

Si consideri ad esempio il sistema

$$F(s) = \frac{k}{s(1+\tau s)}$$

con $k > 0$ e $\tau > 0$.

Nel piano complesso, si ha un polo in zero e uno sull'asse reale negativo in $-\frac{1}{\tau}$; nella costruzione del diagramma polare, all'avvicinarsi di ω a zero la curva andrà all'infinito, il diagramma risulta aperto e non è possibile determinare il numero di giri N .

La soluzione è modificare il diagramma polare in prossimità dei punti singolari in modo che il risultato sia una curva chiusa.

Per fare questo, non si considera più il diagramma polare, ma il diagramma di Nyquist, cioè il diagramma in cui si va a costruire l'immagine secondo la funzione $F(j\omega)$ non più dell'asse immaginario, ma del cosiddetto percorso di Nyquist: un percorso uncinato che coincide con l'asse immaginario in quasi tutti i punti, ma che, intorno ai punti singolari, i poli della $F(j\omega)$ che si trovano sull'asse immaginario vengono evitati attraverso un percorso che lascia l'asse immaginario e prima e riprendendolo e dopo, e percorrendo un arco di raggio ϵ , come illustrato nella Figura

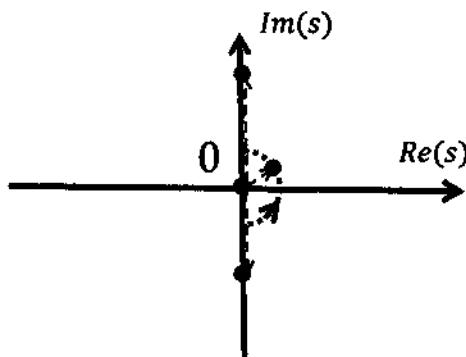


Figura 8.13: Esempio di percorso di Nyquist intorno al punto singolare $s = 0$.

Per convenzione si stabilisce che questo percorso uncinato lasci i poli che hanno parte reale nulla a sinistra, cioè li consideri a parte reale negativa. Con questa convenzione anche i poli a parte reale nulla saranno considerati nel semipiano complesso negativo. Si noti che, inoltre, con tale convenzione, $P_P = 0$ non corrisponde ad un sistema in catena diretta necessariamente stabile e neppure al limite di stabilità: infatti, i punti singolari non entrano nel computo di P_P .

Considerando questo percorso modificato, l'immagine della funzione $F(\cdot)$ risulta essere una curva chiusa. Per capire come la curva si chiude, si deve fare riferimento allo studio delle funzioni analitiche e al fatto che la funzione $F(s)$ è un rapporto tra polinomi e questo comporta che essa sia una funzione analitica che induce trasformazioni conformi, cioè che mantengono gli angoli e i versi di percorrenza. Quindi se nel dominio per andare dal punto A al punto B si percorre un uncino e ad un uncino corrisponde una variazione di fase di π intorno al punto singolare, anche nell'immagine accadrà la stessa cosa e quindi si deve fare una rotazione di π intorno all'immagine del punto singolare; questo significa che si mantengono i versi di percorrenza, che in questo caso lasciano a sinistra il punto singolare e quindi anche la sua immagine deve essere lasciato a sinistra. Il punto immagine è ovviamente il punto improprio che si trova all'infinito: In sintesi, la chiusura del diagramma di Nyquist si deve fare lasciando a sinistra il punto improprio che è l'immagine del punto singolare e questo si realizza con una chiusura in senso orario.

Diagrammi polari con chiusure, ossia diagrammi di Nyquist, sono già riportati nel Paragrafo 5.2.2.



Approfondimento

Capitolo at glance

Struttura interna, intervento e osservazione

*Lo studio sinora condotto ci ha fatto ben comprendere che le principali caratteristiche di comportamento di un sistema dinamico dipendono dalla collocazione degli autovalori nel piano complesso. Inoltre come messo in evidenza nello studio dei sistemi interconnessi la collocazione degli autovalori risulta alterata da connessioni a retroazione. La più semplice delle interconnessioni a retroazione può essere intesa come un **intervento** sul sistema impiegando misure, osservazioni, del suo comportamento.*

Si vuole mostrare nelle pagine seguenti che le proprietà di raggiungibilità e osservabilità degli stati hanno un rilievo particolare dal punto di vista dell'intervento e dell'osservazione, rispettivamente. Da un punto di vista complessivo, inoltre, mostreremo che esse esprimono in modo preciso le potenzialità di modifica del comportamento dinamico mediante una interconnessione del tipo citato.

Lo studio prende le mosse dallo schema di Figura 9.1.

Per quanto riguarda l'intervento, mostreremo che la raggiungibilità esprime proprio la possibilità di modificare gli autovalori agendo sul sistema tramite i canali di ingresso: più precisamente sono modificabili tutti e soli gli autovalori associati al sottosistema raggiungibile.

Per quanto riguarda le misure, mentre la presenza di stati inosservabili rispetto ad esse comporta impedimenti alla ricostruzione di differenti evoluzioni nello stato, in condizioni di completa osservabilità non solo è possibile ricostruire il comportamento interno, ma è possibile farlo fissando ad arbitrio la rapidità di convergenza. Più precisamente mostreremo che la velocità di ricostruzione è limitata dalle proprietà degli autovalori del sottosistema non osservabile.

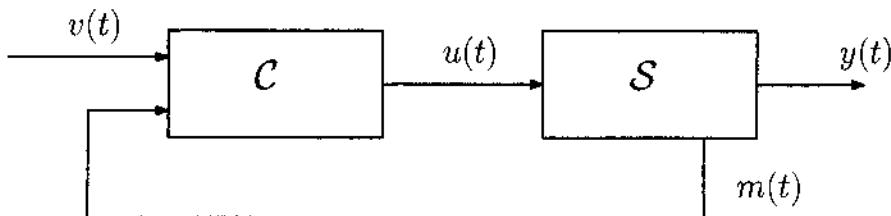


Figura 9.1

È assegnato il sistema interconnesso in Figura 9.1 in cui \mathcal{S} descrive il sottosistema dinamico assegnato

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx, \quad x(0) \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (9.1)$$

con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$, mentre C definisce un sottosistema di dimensione μ che chiameremo il **compensatore**, descritto da

$$C : \begin{cases} \xi = Lt + Mm + Nx \\ u = F\xi + Gu, \quad \xi(0) \in \mathbb{R}^\mu \end{cases}$$

con L, M, N, F, G matrici di opportune dimensioni.

Come variano le caratteristiche dinamiche del sistema complessivo al variare di C ?

9.1

L'assegnazione degli autovalori con reazione dallo stato

In questa prima parte faremo riferimento ad un compensatore istantaneo ($\mu = 0$) in cui le variabili misurate coincidono con lo stato stesso del sistema $m = x$. L'ingresso al sistema \mathcal{S} è in questo caso una funzione lineare dello stato e di una nuova variabile $v \in \mathbb{R}^p$, ingresso esterno. Si consideri quindi il sistema

$$\mathcal{S} : \quad \dot{x} = Ax + Bu \quad (9.2)$$

e il compensatore nella forma

$$C : \quad u = Fx + Gu, \quad G \neq 0 \quad (9.3)$$

Sostituendo nell'equazione della dinamica (9.2) l'espressione del compensatore (9.3) si ottiene la dinamica del sistema modificato \mathcal{S}_F

$$Sp(x) = (A + BF)x + BGu \quad (9.4)$$

Ciò premesso possiamo domandarci come variano, al variare della matrice F gli autovalori della matrice $(A + BF)$ e, più in particolare formulare il seguente problema.

Problema dell'assegnazione degli autovalori. Sotto quali condizioni comunque assegnata una n -pla di numeri complessi esiste una F tale che gli autovalori di $(A + BF)$ coincidano con essa? Come calcolare la matrice di guadagni in retroazione, F , associata a una fissata collocazione?

Due osservazioni preliminari:

- O₁.** se F è la matrice di guadagni che assegna gli autovalori al sistema nelle coordinate x , allora $\tilde{F} = F \cdot T^{-1}$ assegna gli autovalori al sistema nelle coordinate $\tilde{x} = Tx, |T| \neq 0$; infatti

$$x = T^{-1}\tilde{x} \implies u = Fx = FT^{-1}\tilde{x} = \tilde{F}\tilde{x}.$$

Ad ulteriore verifica si noti che le matrici dinamiche in x e \tilde{x} hanno gli stessi autovalori in quanto matrici simili

$$\sigma(A + BF) = \sigma(\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}) = \sigma(TAT^{-1} + TBFT^{-1}) = \sigma(T(A + BF)T^{-1});$$

- O₂.** è possibile modificare gli autovalori del solo sottosistema raggiungibile. Supponiamo, infatti, che il sistema non sia tutto raggiungibile, cioè

$$\rho(B| \dots | A^{n-1}B) = l < n$$

Sappiamo allora che in una nuova base dello spazio di stato in cui le prime l coordinate definiscono una base nell'insieme degli stati raggiungibili, cioè $\tilde{x} = (\tilde{x}'_1 \tilde{x}'_2)' = Tx$ con T definita come in (6.13)

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} l & n-l \\ \text{base in } \mathcal{R} & \mid \text{completamento} \end{pmatrix}$$

dove il completamento è rappresentato da $n - m$ vettori tali da rendere T^{-1} non singolare, la matrice dinamica e la matrice degli ingressi manifestano la seguente struttura

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad \tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e il sottosistema definito da A_{11}, B_1 è tutto raggiungibile

$$A_{11} \in \mathbb{R}^{l \times l}, \quad B_1 \in \mathbb{R}^{l \times p}, \quad \rho(B_1 \dots A_{11}^{l-1}B_1) = l.$$

La struttura delle matrici \tilde{A} e \tilde{B} consente di verificare facilmente che non è possibile modificare gli autovalori del sottosistema non raggiungibile. Poco, infatti

$$\tilde{F} = (\tilde{F}_1 \quad \tilde{F}_2)$$

risulta

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F} = \begin{pmatrix} A_{11} + B_1\tilde{F}_1 & A_{12} + B_1\tilde{F}_2 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

La struttura triangolare della matrice \tilde{A} consente di affermare che gli autovalori del sottosistema non raggiungibile caratterizzato da

$$\dot{\tilde{x}}_2 = A_{22}\tilde{x}_2$$

rimangono invariati. Inoltre poiché la scelta di \tilde{F}_2 non influenza gli autovalori si usa assumere $\tilde{F}_2 = 0$.

Le osservazioni precedenti mostrano anche che la matrice F può essere scelta senza perdita di generalità della forma

$$F = (\tilde{F}_1 \quad 0) T$$

con T una qualsiasi trasformazione che manifesti la scomposizione rispetto alla raggiungibilità.

Alla luce di quanto messo in evidenza, nel seguito si supporrà (A, B) raggiungibile. Al variare di F infatti, potranno variare solo gli autovalori che competono al sottosistema raggiungibile. Rimane infatti dimostrato che *la raggiungibilità è condizione necessaria per la risoluzione del problema dell'assegnabilità degli autovalori*.

9.1.1 Sistemi con un solo ingresso

Per dimostrare la sufficienza della condizione di raggiungibilità si consideri dapprima il caso di sistemi con un solo ingresso, $u \in \mathbb{R}$, e, in via preliminare, il caso in cui S sia in forma canonica raggiungibile.

Un caso particolare

Si consideri

$$\dot{x} = A_c x + b_c u$$

con (A_c, B_c) in **forma canonica raggiungibile**

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad b_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Fissati ad arbitrio n numeri complessi

$$\lambda_1^* \dots \lambda_n^* = \Lambda^* \quad \lambda_i^* \in \mathbb{C}$$

si calcoli il polinomio di grado n a coefficienti reali di cui sono radici

$$p^*(\lambda) = (\lambda - \lambda_1^*) \dots (\lambda - \lambda_n^*) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n. \quad (9.5)$$

E' facile verificare che con

$$F_c = (a_0 - \alpha_0 \quad \dots \quad a_{n-1} - \alpha_{n-1})$$

la matrice $(A_c + b_c F_c)$ ha autovalori coincidenti con la n -pla fissata

$$\sigma(A_c + b_c F_c) \equiv \{\lambda_1^* \dots \lambda_n^*\}.$$

Per la verifica basta ricordare che la struttura della matrice dinamica è quella canonica che presenta i coefficienti del polinomio caratteristico sull'ultima riga.

Il caso generale

Assegnato il sistema

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad u \in \mathbb{R}$$

con la coppia (A, b) raggiungibile, si mostrerà che esiste una matrice non singolare T_c tale che

$$T_c A T_c^{-1} = A_c \quad T_c b = b_c.$$

Calcolata T_c e, successivamente la F_c che assegna gli autovalori fissati ad (A_c, b_c) , la retroazione su (A, b) è

$$F = F_c T_c.$$

Per T_c , indicata con γ l'ultima riga dell'inversa della matrice di raggiungibilità, otteniamo

$$R^{-1} = (b \dots A^{n-1} b)^{-1} = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1) R^{-1} \quad \Rightarrow \quad T_c = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma A \\ \vdots \\ \gamma A^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Tale matrice è invertibile in quanto effettuando il prodotto $T_c R$ si ottiene

$$T_c R = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & * \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |T_c| \neq 0$$

con R non singolare. Per il calcolo nelle nuove coordinate

$$\tilde{A} = T_c A T_c^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} \gamma \\ \vdots \\ \gamma A^{n-1} \end{pmatrix} A = \tilde{A} \begin{pmatrix} \gamma \\ \vdots \\ \gamma A^{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

e

$$\tilde{b} = T_c b = \begin{pmatrix} \gamma \\ \vdots \\ \gamma A^{n-1} \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b_c.$$

La soluzione così calcolata ammette la seguente semplice espressione

$$\begin{aligned} F = F_c T_c &= (a_0 \dots a_{n-1}) \begin{pmatrix} \gamma \\ \vdots \\ \gamma A^{n-1} \end{pmatrix} - (\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}) \begin{pmatrix} \gamma \\ \vdots \\ \gamma A^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= -\gamma A^n + (\gamma A^n - \gamma p^*(A)) = -\gamma p^*(A) \end{aligned}$$

dove $p^*(\lambda)$ indica il polinomio caratteristico (9.5) che si desidera assegnare e $p^*(A)$ la matrice che si ottiene sostituendo in esso la matrice A al posto della variabile λ , ovvero

$$p^*(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1} + A^n.$$

La matrice di guadagni $F^0 = -\gamma A^n$, che corrisponde ad assegnare tutti gli autovalori a zero

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$$

rende la coppia (A, b) equivalente ad una cascata di n integratori. Più precisamente nelle coordinate $\tilde{x} = T_c x$ si ha

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 \\ &\vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{n-1} &= \tilde{x}_n \\ \dot{\tilde{x}}_n &= v. \end{aligned}$$

Questo fatto mette in luce un aspetto interessante che possiamo esprimere in questo modo: se (A, b) è raggiungibile esistono una retroazione dallo stato, F^0 , ed una trasformazione di coordinate, T_c , che portano la dinamica nella forma

$$T_c (A + bF^0) T_c^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = A_B \quad T_c b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b_B.$$

La coppia (A_B, b_B) è detta forma canonica di Brunovsky.

Alcune osservazioni

Rimane quindi dimostrato che condizione necessaria e sufficiente per assegnare ad arbitrio gli autovalori (problema di assegnazione degli autovalori) è la completa raggiungibilità del sistema (9.1).

Risulta comunque evidente dagli argomenti utilizzati nella prova (Paragrafo 9.1.1) che al variare di F possono essere spostati ad arbitrio tutti gli autovalori che competono al sottosistema raggiungibile, mentre quelli del sottosistema non raggiungibile rimangono invariati (per questo si usa dire che i modi che competono al sottosistema non raggiungibile rappresentano i **modi fissi**). In particolare, impiegando il test di Hautus, i modi fissi rispetto la raggiungibilità sono tutti e soli i modi associati agli autovalori $\lambda \in \sigma(A)$ per cui

$$\rho(A - \lambda I) < n$$

Questa osservazione dà lo spunto per stabilire un risultato più puntuale, rispetto al precedente, che può essere così enunciato: *condizione necessaria e sufficiente per collocare gli autovalori in una assegnata regione $\mathbb{C}^{-\alpha}$ ¹ del piano complesso è che quelli del sottosistema non raggiungibile siano inclusi in tale regione* (i.e., $\sigma(\tilde{A}_{22}) \subset \mathbb{C}^{-\alpha}$ in \mathbf{O}_2). Si usa riferirsi a quest'ultimo come **problema della collocazione degli autovalori**.

Un caso particolare, e di notevole interesse nella fase di progetto dei sistemi di controllo, è quello in cui la regione $\mathbb{C}^{-\alpha}$ in cui si vogliono assegnare gli autovalori corrisponde con il semipiano negativo (ovvero $\alpha = 0$ e $\mathbb{C}^- := \mathbb{C}^0$). Si usa riferirsi a quest'ultimo come **problema della stabilizzazione**. A tale proposito si può affermare che *condizione necessaria e sufficiente per la sua stabilizzazione mediante reazione dallo stato è che i modi fissi siano stabili*.

Per concludere si osserverà ancora una volta che una soluzione al problema dell'assegnazione degli autovalori o della stabilizzazione può essere calcolata come indicato in \mathbf{O}_1 e \mathbf{O}_2 : si effettua preliminarmente una trasformazione di coordinate per estrarre il sottosistema raggiungibile, si risolve l'assegnazione su tale sottosistema e si procede come indicato per esprimere la retroazione nelle coordinate originarie.

Esempio 9.1.1 Si consideri il pendolo invertito descritto dal modello

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \Omega^2 \theta - \alpha \omega + \beta u\end{aligned}$$

in cui $\alpha = -\frac{k^2}{JR}$, $\beta = \frac{K}{JR}$, $J = J_m + ml$ e $\Omega^2 = \frac{g}{l + \frac{J_m}{ml}}$. Il sistema è raggiungibile per $\beta \neq 0$; infatti, nelle variabili di stato $x = (\theta, \omega)'$ si ha una dinamica lineare stazionaria di dimensione due con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Omega^2 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix},$$

¹ $\mathbb{C}^{-\alpha} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) < -\alpha\}$ con $\alpha \geq 0$.

inoltre R è non singolare e risulta

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & -\alpha\beta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{1}{\beta} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\beta}(1 \quad 0).$$

Fissato il polinomio caratteristico desiderato (9.5) come $p^*(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \lambda^2$ otteniamo la matrice dei guadagni

$$\begin{aligned} F = -\gamma p^*(A) &= -\gamma(\alpha_0 I + \alpha_1 A + A^2) = \left(\begin{matrix} -\frac{\alpha_0}{\beta} & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_1}{\beta} \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} \Omega^2 & -\alpha \\ \frac{\Omega^2 - \alpha_0}{\beta} & -\frac{\alpha + \alpha_1}{\beta} \end{matrix} \right) \\ &= \left(\begin{matrix} \frac{\Omega^2 - \alpha_0}{\beta} & -\frac{\alpha + \alpha_1}{\beta} \end{matrix} \right). \end{aligned}$$

In quale relazione sono gli autovalori di S_F con i coefficienti di $F = (f_1 \quad \dots \quad f_n)$? Valgono le seguenti considerazioni:

- f_i (i coefficienti di guadagno) sono tanto più grandi quanto più gli autovalori di $(A + BF)$ sono lontani da quelli di A ;
- f_i sono in un certo senso *inversamente proporzionali* alla controllabilità del sistema;
- a valori di f_i grandi corrispondono ampiezze elevate e quindi possibili saturazioni degli ingressi.

Giova ricordare che a diverse collocazioni degli autovalori corrispondono diverse velocità con le quali si esaurisce l'evoluzione libera o, equivalentemente, si estingue il transitorio e si instaura l'andamento a regime. Possiamo dire che ad autovalori a parte reale negativa e molto lontani dall'asse immaginario corrisponde una modalità di funzionamento che potremo definire veloce (piccole costanti di tempo). Dal punto di vista del comportamento in frequenza, sappiamo che a questo corrisponde una funzione di trasferimento con banda passante elevata. Se si osserva che tali caratteristiche dipendono dalla collocazione degli autovalori nell'insieme, e sono condizionate in particolare dalla collocazione dell'autovalore più vicino all'asse immaginario, si comprende che per imporre fissate modalità di velocità di comportamento è necessario procedere a modifiche di collocazione ragionate. Un buon compromesso è spesso rappresentato dal collocare i poli tutti alla stessa distanza dall'origine secondo la configurazione Butterworth:

$$\left(\frac{s}{\omega_0} \right)^{2k} = (-1)^{k+1}.$$

Tale scelta corrisponde ad una collocazione nel piano complesso negativo con modulo costante e fase tale da dividere l'angolo con centro nell'origine rispetto all'asse immaginario (in $2k + 1$ angoli uguali).

9.1.2 Sistemi con più ingressi

La dimostrazione che la raggiungibilità è anche condizione sufficiente per l'assegnazione degli autovalori nel caso di sistemi a più ingressi è data nel Paragrafo

9.6 seguendo una procedura del tutto parallela a quella per i sistemi ad un solo ingresso.

Inteso dunque che la completa raggiungibilità di S è condizione necessaria e sufficiente per l'assegnazione della dinamica (o degli autovalori), le seguenti considerazioni ne mettono in luce alcuni aspetti particolari.

Innanzitutto si deve tenere presente che come suggerisce l'intuizione la disponibilità di più canali di ingresso rende più facilmente soddisfacibile la condizione che abbiamo visto essere necessaria di raggiungibilità del sistema. Se però da una parte la condizione è più facilmente soddisfatta esistono, nel caso di ingressi indipendenti, diverse soluzioni che corrispondono ad una stessa collocazione degli autovalori a ciclo chiuso. In altre parole non si ripresenta la situazione, per certi aspetti favorevole, del caso ad un solo ingresso in cui si ha una corrispondenza uno ad uno tra guadagni ed autovalori; ora a diverse matrici di guadagni in retroazione può corrispondere la stessa collocazione degli autovalori. Quale scegliere tra esse dipende da criteri che sono collegati alla teoria del controllo ottimo che non sono oggetto della presente trattazione elementare. In prima istanza si può affermare che una scelta ragionevole se non si hanno vincoli che privilegino alcuni canali di ingresso rispetto agli altri, consiste nel selezionare ciascun canale in relazione all'incisività dell'azione che si esercita attraverso di esso; in relazione all'indice di controllabilità così come risulta dalla procedura proposta nel Paragrafo 9.6. In base a tale considerazione tale procedura può essere considerata **ottima** rispetto ad un impiego non pesato di intervento sui diversi canali.

È scontato che si ha possibilità di modificare la dinamica attraverso ogni sottoinsieme di ingressi rispetto i quali sia soddisfatta la condizione di completa raggiungibilità.



Text Cloud

Approfondimento

9.2

Il problema della stima dello stato

Dato il sistema S , un sistema dinamico lineare Θ avente per ingressi gli ingressi e le uscite di S (ovvero y e u) e per uscite n variabili, z_1, \dots, z_n (in numero pari alle variabili di stato di S), è detto **ricostruttore asintotico dello stato** se il vettore $z(t)$ tende asintoticamente a $x(t)$; ovvero, il sistema

$$\Theta: \begin{cases} \dot{w} = Fw + Gu + Ky, & w_0 = w(0) \in \mathbb{R}^n \\ z = Hw + Ly \end{cases} \quad (9.6)$$

è un ricostruttore dello stato di \mathcal{S} in (9.1) se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - z(t)\| = 0.$$

Se il numero di uscite del sistema, q è maggiore o uguale al numero di variabili di stato n e $\rho(C) = n$ esiste una soluzione istantanea con $F = G = K = H = 0$ e $L = C^\dagger = (C^\top C)^{-1}C$ (pseudo-inversa di C). Si ha in tal caso

$$z = C^\dagger y = C^\dagger C x = x.$$

In analogia a quanto fatto nel Paragrafo 9.1 in cui abbiamo distinto i problemi in assegnabilità e assegnazione degli autovalori, distingueremo le due possibili situazioni, che peraltro sono strettamente collegate ai problemi precedenti, in **problema dell'osservatore** e **problema della ricostruzione** dello stato. Il primo riguarda l'esistenza, e il calcolo, di un dispositivo che sia in grado di ricostruire l'evoluzione dello stato con predefinite caratteristiche di convergenza; il secondo un dispositivo che consenta di ricostruire l'evoluzione dello stato. Qui di seguito viene trattato il problema del calcolo di un ricostruttore di dimensione pari a quella dello stato; in effetti come l'intuizione suggerisce se vi sono più uscite indipendenti queste già contengono informazioni sullo stato e il ricostruttore potrebbe avere dimensione inferiore. Tale problema viene affrontato nel Paragrafo 9.7.

9.2.1 Osservabilità e osservatore dello stato

Se \mathcal{S} è internamente asintoticamente stabile ($\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$) una scelta elementare consiste nell'assumere $w = Aw + Bu$, $z = w$. In tal caso un ricostruttore consiste in una copia della dinamica del sistema. Infatti, è chiaro che $w(t) \rightarrow x(t)$ poiché posto l'errore

$$\xi = w - x$$

otteniamo che questo evolve secondo la dinamica

$$\dot{\xi} = A\xi$$

e quindi, poiché $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$

$$\xi(t) = w(t) - x(t) = e^{At}\xi_0 \rightarrow 0 \implies w(t) \rightarrow x(t).$$

In questo modo non è però possibile modificare la velocità di convergenza con la quale w tende ad x . Tale velocità dipenderà dagli autovalori di A .

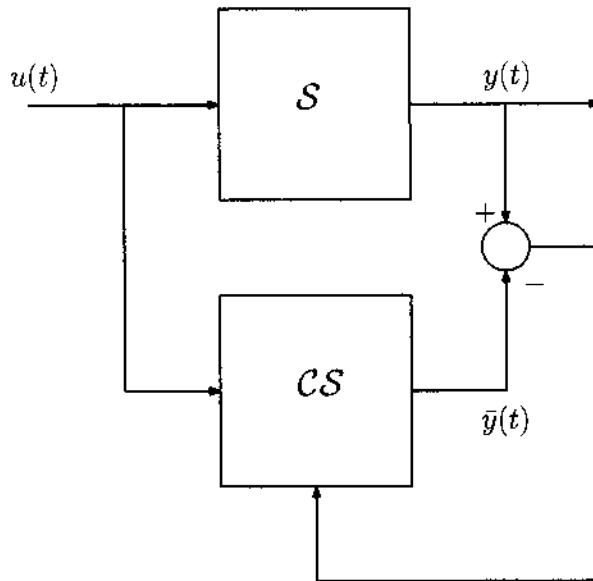


Figura 9.2

Inoltre, la scelta indicata non rappresenta certo un ricostruttore se $\sigma(A) \notin \mathbb{C}^+$. Appare spontaneo domandarsi se e in quale misura sia possibile riferirsi ad un dispositivo del tipo indicato modificandone la dinamica in modo proporzionale allo scostamento tra l'uscita misurata e quella fornita da una copia del sistema. Si pensi in tal caso ad un dispositivo del tipo indicato in Figura 9.2 dove CS rappresenta una copia di S modificata nella dinamica mediante un intervento proporzionale allo scostamento tra $y = Cx$ e $\bar{y} = Cw$. Si ottiene in tal modo:

$$\begin{aligned} u &= Aw + Bu + K(y - \bar{y}) \\ &= (A - KC)w + Bu + Ky \end{aligned}$$

In queste condizioni è facile rendersi conto del fatto che è possibile fare in modo che w tenda ad x con velocità assegnabile in maniera arbitraria (problema dell'osservatore) se e solo se la matrice

$$A - KC$$

ha autovalori assegnabili ad arbitrio al variare di K . Infatti, posto l'errore di stima definito come

$$\xi = w - x$$

esso evolve secondo l'equazione

$$\dot{\xi} = (A - KC)\xi \quad (9.7)$$

e quindi

$$\xi(t) = e^{(A-KC)t} \xi_0.$$

Il problema dell'osservatore è dunque ricondotto ad un problema di assegnazione degli autovalori alla matrice $A - KC$, che governa la dinamica dell'errore di stima (9.7).

Si osservi che il dispositivo indicato è un sistema del tipo (9.6) fissando $v = n$ con $F = A - KC$, $G = B$, $H = I$, $L = 0$.

9.2.2 Rilevabilità e ricostruttore dello stato

Se gli autovalori non possono essere assegnati ad arbitrio, ma per opportune scelte di K hanno parte reale negativa (ciò che accade nel caso in cui il sistema sia asintoticamente stabile e si assume $K = 0$) allora diremo che il problema della ricostruzione dello stato ha soluzione e il dispositivo indicato è un ricostruttore. Il problema della ricostruzione è dunque ricondotto al problema di rendere a parte reale negativa gli autovalori di $(A - KC)$ al variare di K (analogo alla stabilizzabilità).

Una diversa formulazione consente di ritrovare anche l'analogia con il problema della collocazione degli autovalori. Assumiamo che non si richieda di fissare la velocità di convergenza di w a x ad arbitrio. Siamo nel caso in cui la convergenza di w a x (e quindi di $\xi = w - x$ a 0) debba essere esponenziale ma non inferiore ad $e^{-\alpha t}$ per un certo $\alpha > 0$ fissato, ovvero in cui si richiede $\sigma(A - KC) \subset \mathbb{C}^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Il problema consiste nell'assicurare che gli autovalori di $(A - KC)$ siano tutti a parte reale inferiore a $-\alpha$. Anche in questo caso, il problema si riconduce ad un problema di assegnazione degli autovalori.

L'analogia con il problema studiato nella sezione precedente è completamente compresa se si osserva che la collocazione degli autovalori di $(A - KC)$ al variare di K è riconducibile al problema studiato nel Paragrafo 9.1. Basta osservare che una matrice e la sua trasposta hanno gli stessi autovalori, ovvero

$$\sigma(A - KC) = \sigma(A' + (-C')K').$$

Si perviene, quindi ad un problema di assegnazione del tipo studiato nel Paragrafo 9.1 in cui sono fissati $A = A'$ e $B = -C'$, ovvero la coppia $(A', -C')$ prende il posto di (A, B) .

Mostreremo ora che la proprietà di osservabilità svolge in questo problema il ruolo della proprietà di raggiungibilità nel problema di assegnazione degli autovalori con retroazione dallo stato (Paragrafo 9.1). Se, infatti il sistema è tutto osservabile, cioè

$$\rho \begin{pmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n,$$

la dinamica del ricostruttore (ovvero gli autovalori di $A - KC$ in (9.7)) può essere fissata ad arbitrio. In particolare, fissato l'insieme

$$\{\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*\} \subset \mathbb{C}$$

e indicato con $p^*(\lambda)$ il polinomio caratteristico del tipo (9.5) che si vuole assegnare alla matrice $(A - KC)$, si ha

$$K' = -\eta' p^*(A')$$

ove si è indicato con η' l'ultima riga dell'inversa della matrice di raggiungibilità costruita con A' e $-C'$. È semplice verificare che, a meno del segno, η coincide con l'ultima colonna dell'inversa della matrice di osservabilità e quindi, passando ai trasposti, si ottiene

$$K = p^*(A)\eta, \quad \eta = \begin{pmatrix} C \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

che assicura

$$\{\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*\} \equiv \sigma(A - KC).$$

Nel caso generale di rappresentazione non osservabile il calcolo di un ricostruttore più rapido di $e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$ assegnato ($\sigma(A - KC) \subset \mathbb{C}^{-\alpha}$), si riconduce ad una assegnazione parziale di autovalori e per questo problema valgono le stesse considerazioni dell'**O₂**, che vengono qui ripetute nel caso specifico.

Si assuma infatti che (9.1) non sia osservabile, ovvero

$$\rho \begin{pmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = m \leq n.$$

Allora, come visto nel Capitolo 6, esiste una trasformazione di coordinate $\tilde{x} = Tx$ con

$$T^{-1} = \begin{matrix} n-m & & m \\ \text{(base in} & \mathcal{I} & \text{| completamento)} \end{matrix}$$

tale che

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad CT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

se, e solo se $\sigma(A_{11}) \subset \mathbb{C}^{-\alpha}$ il problema ha soluzione. Per calcolare il ricostruttore, si calcola \tilde{K}_2 tale che $\sigma(A_{22} - \tilde{K}_2 C_2) \in \mathbb{C}^{-\alpha}$, e si ottiene

$$K = T^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{K}_2 \end{pmatrix}.$$

In particolare, impiegando il test di Hautus, i modi fissi rispetto l'osservabilità (ovvero gli autovalori di \tilde{A}_{11}) sono tutti e soli i modi associati agli autovalori $\lambda \in \sigma(A)$ per cui

$$\rho\left(\begin{pmatrix} A - \lambda I \\ C \end{pmatrix}\right) < n.$$

In sintesi, condizione necessaria e sufficiente affinché dato α esista un ricostruttore "più rapido" di $e^{-\alpha t}$ è che gli autovalori di A associati agli autovalori del sottosistema non osservabile appartengano a $\mathbb{C}^{-\alpha}$ ($\sigma(A_{22}) \subset \mathbb{C}^{-\alpha}$).

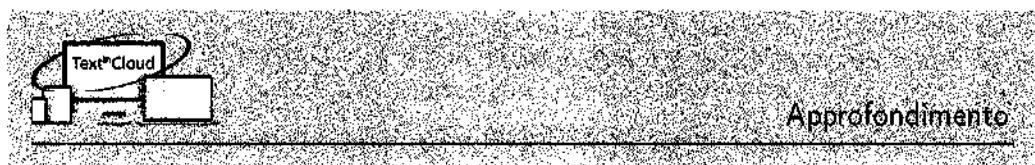
Come già detto un caso particolare, equivalente al problema della stabilizzazione, corrisponde alla scelta $\alpha = 0$, esistenza di un ricostruttore. Condizione necessaria e sufficiente per la sua risoluzione è che il sottosistema non osservabile sia stabile. Questa condizione è generalmente definita come **condizione di rilevabilità**.

Infine condizione necessaria e sufficiente affinché per ogni α esista un osservatore "più rapido" di $e^{-\alpha t}$ (problema dell'osservatore, con $\sigma(A - KC) \subset \mathbb{C}^{-\alpha}$), è che (A, C) sia osservabile.

Calcolato K in modo da garantire la convergenza desiderata il ricostruttore Θ (9.6) è caratterizzato dalle seguenti matrici

$$v = n \quad F = A - KC \quad G = B \quad H = I \quad L = 0.$$

In quanto segue senza ambiguità ed in linea con la terminologia adottata nella letteratura, si userà indistintamente il termine osservatore e ricostruttore per indicare un dispositivo che ricostruisce asintoticamente lo stato.



9.3

Il principio di separazione

Cosa accade se viene applicata una retroazione del tipo:

$$u = Fz + v$$

sul sistema S utilizzando le uscite del ricostruttore (9.6)?

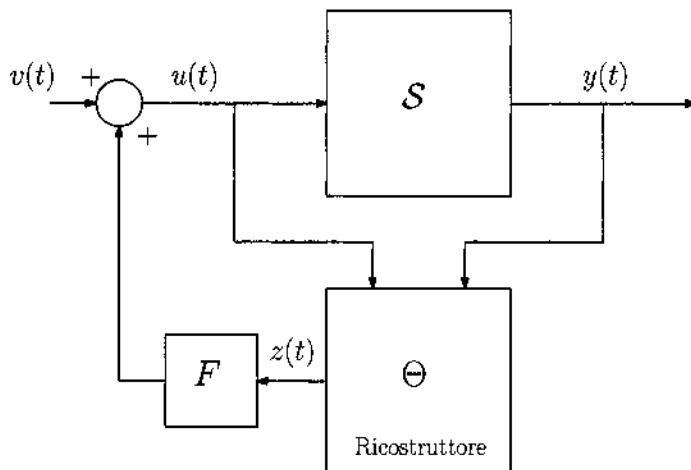


Figura 9.3

Questo problema viene ora esaminato utilizzando un osservatore non ridotto (con $z = w$ in (9.6)). Le stesse considerazioni possono essere ripetute nel caso generale.

Il sistema di controllo risulta essere così fatto (Figura 9.3):

$$\dot{x} = Ax + BFw + Bv \quad (9.8a)$$

$$w = KCx(A - KC + BF)w + Bv \quad (9.8b)$$

e, in maniera compatta

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BF \\ KC & A - KC + BF \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} v.$$

Posta la trasformazione di coordinate

$$T = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix}, \quad \zeta = w - x$$

il sistema è descritto dal modello equivalente

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BF & BF \\ 0 & A - KC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} v \quad (9.9a)$$

e matrice dinamica equivalente in forma rettangolare. Poiché

$$\sigma \begin{pmatrix} A & BF \\ KC & A - KC + BF \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} A + BF & BF \\ 0 & A - KC \end{pmatrix}$$

gli autovalori del sistema complessivo (9.8) risultano essere quelli delle matrici $(A + BF)$ e $(A - KC)$, ovvero

$$\sigma \begin{pmatrix} A + BF & BF \\ 0 & A - KC \end{pmatrix} = \sigma(A - KC) \cup \sigma(A + BF)$$

Questo fatto è noto come principio di separazione.

Se il sistema è tutto raggiungibile ed osservabile è possibile scegliendo F e K e fissare in modo arbitrario gli autovalori del sistema di controllo. Per fare questo si possono fissare in modo indipendente gli autovalori di $(A - KC)$ (immaginando di costruire un osservatore) e quelli di $(A + BF)$ (immaginando di assegnare gli autovalori con una reazione dello stato).

Con riferimento allo schema di controllo con reazione dall'uscita ora esaminato, le ultime considerazioni al di là del problema dell'assegnazione degli autovalori (che richiede la completa raggiungibilità e osservabilità), consentono di comprendere che il problema della collocazione degli autovalori ha soluzione se e solo se gli autovalori dei sottosistemi non raggiungibili e non osservabili appartengono già alla regione prestabilità $C^{-\alpha}$.

Un problema particolare, ma rilevante nelle applicazioni, è quello della stabilizzazione mediante reazione dall'uscita. Tale problema ammette soluzione utilizzando lo schema indicato se e solo se i sottosistemi non osservabile e non raggiungibile sono stabili asintoticamente, ovvero il sistema S sia stabilizzabile e rilevabile (da x , si intende).

Come già detto per la procedura di realizzazione del compensatore si seguono separatamente le procedure di assegnazione su $(A + BF)$ e $(A - KC)$.

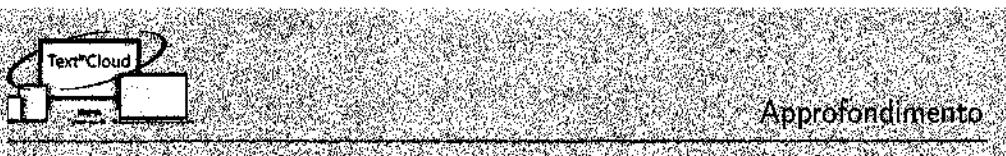
Un'ulteriore considerazione riguarda la funzione di trasferimento del sistema complessivo di dimensione $2n$. Il calcolo della matrice delle risposte impulsive in uscita può essere effettuato senza difficoltà nelle nuove coordinate (9.9) posta l'uscita $y = Cx$. Sviluppando il calcolo in virtù della presenza dei blocchi di zeri nella matrice dinamica e nella matrice degli ingressi si ottiene

$$W(t) = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} A+BF & BF \\ 0 & A-KC \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} = Ce^{(A+BF)t}B.$$

Si ottiene quindi la risposta impulsiva del sistema S a cui sia applicato un feedback dallo stato (e quindi di $S\mathcal{F}$). Questo vuol dire che, dal punto di vista del comportamento ingresso-uscita, l'impiego di un qualunque ricostruttore equivale ad effettuare un feedback dallo stato. Com'è possibile questo? Ricordando quanto visto nel Capitolo 8 e pensando al caso più semplice di un ingresso e un'uscita, questo è possibile solo in conseguenza di una cancellazione tra gli autovalori dell'osservatore (di $A - KC$) e gli zeri del sistema complessivo.

Questo spinge ad approfondire il discorso in merito alla collocazione degli zeri del sistema complessivo (9.9). Qualche considerazione in merito è in quello che segue.

Il problema della collocazione degli zeri con riferimento ad uno schema di assegnazione dall'uscita più generale di quello trattato, viene affrontato nel prossimo paragrafo.

**Approfondimento**

9.4

Assegnazione della dinamica con reazione dall'uscita

Faremo riferimento, in quanto segue, ad uno schema più generale di quello adottato nella sezione precedente, ispirato allo schema generale (9.3) all'inizio del capitolo in cui $L = A - KC + BF$ e $M = K$, ovvero

$$S: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad C: \begin{cases} \dot{w} = (A - KC + BF)w + KCx + Nv \\ u = Fw + Gv. \end{cases}$$

Per il principio di separazione il sistema di controllo ha $2n$ autovalori coincidenti con quelli di $(A + BF)$ ed $(A - KC)$.

Diverse scelte di N ed G non influenzano gli autovalori, ma gli zeri del sistema di controllo. Tali matrici possono quindi essere scelte in modo da consentire il soddisfacimento di specifiche che dipendono da essi; tra queste il comportamento al transitorio.

N ed G prendono il nome di matrici di guadagni in avanti o (termini di feed-forward).

9.4.1 Criteri di scelta di N e G

Nel seguito verranno analizzati diversi criteri per la scelta di N e G .

1. Ricostruzione dello stato indipendentemente da v .

Si consideri l'errore di stima dello stato $\xi = x - w$ e la dinamica dell'errore

$$\dot{\xi} = (\dot{x} - \dot{w}) = (A - KC)e + (BG - N)v$$

Per

$$N = BG$$

la dinamica dell'errore di stima è indipendente dall'ingresso v . In altre parole, la dinamica dell'errore di stima è non raggiungibile. Il sistema di controllo è riportato in Figura 9.4.

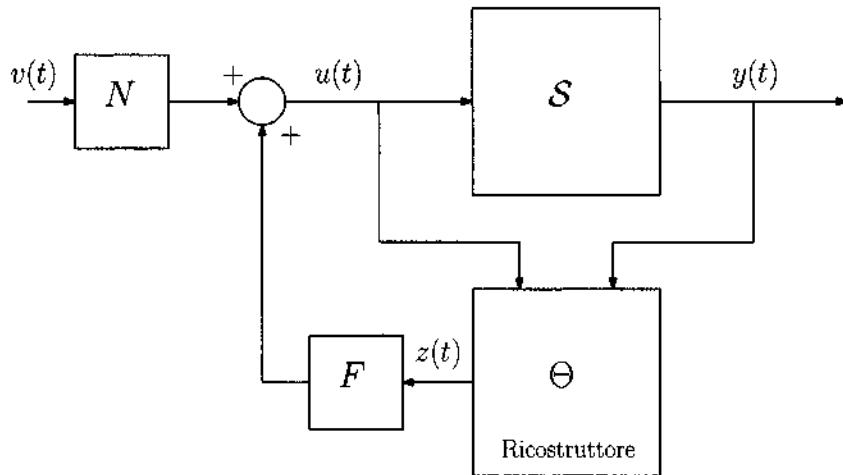


Figura 9.4

2. Controllare dall'esterno il sistema mediante il segnale $v-y$. Questo scenario è favoribile in alcuni casi pratici come radar, controllo termico, etc. Posto

$$N = -K \quad G = 0$$

si ottiene

$$\dot{w} = (A - KC + BF)w - K(v - y).$$

Il sistema di controllo è riportato in Figura 9.5.

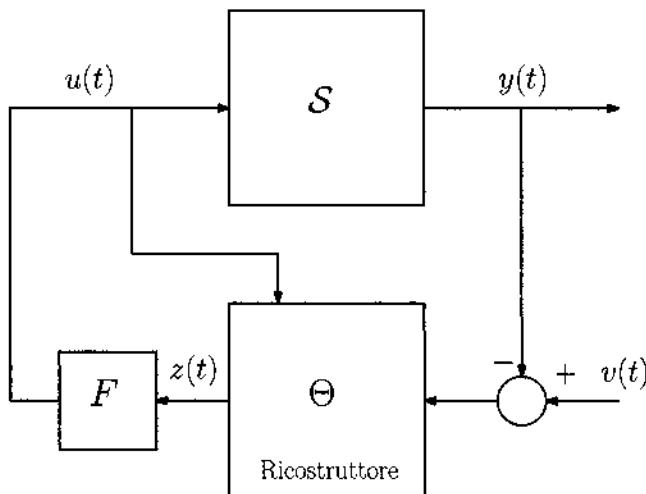


Figura 9.5

2. Scelta fondata su altri criteri, eventualmente di ottimo.

9.4.2 Gli zeri del sistema complessivo

Si consideri il caso di reazione dello stato analizzato nel paragrafo 9.1. Si consideri quindi

$$\mathcal{S}_F: \begin{cases} \dot{x} = (A + BF)x + BGv \\ y = Cx. \end{cases}$$

Come è noto gli zeri del sistema complessivo sono le radici del polinomio

$$\det \begin{pmatrix} sI - A - BF & -B \\ C & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Poiché per un'opportuna matrice di costanti, H , si ha

$$\det \begin{pmatrix} sI - A - BF & -B \\ C & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix} \cdot H$$

si comprende che gli zeri coincidono con quelli del sistema assegnato ciò che permette di concludere che gli zeri non cambiano sotto retroazione istantanea dallo stato.

9.4.3 Controreazione dinamica dall'uscita

Un compensatore dinamico, \mathcal{C} , introduce nuovi zeri nel sistema di controllo; si tratta degli zeri che competono ad esso, e sono quelli che soddisfano

$$\det \begin{pmatrix} sI - A + KC - BF & -N \\ F & G \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} sI - A + KC + \frac{N}{G}F - BF & -N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

cioè i nuovi zeri sono le radici del polinomio

$$\gamma(s) = \det(sI - A - BF + KC + \frac{N}{G}F). \quad (9.10)$$

Posto

$$A + BF - KC = \tilde{A}$$

e fissate F e K , gli zeri del compensatore coincidono con gli autovalori di $\tilde{A} - LF$ al variare di $L = \frac{N}{G}$

$$\gamma(s) = \det(sI - \tilde{A} + LF).$$

Si osservi che si tratta ancora una volta di un problema di assegnazione di autovalori. Le scelte di N e G indicate ai punti 1. e 2. comportano diverse collocazioni.

1. $N = BG$ sostituita nella 9.10 mostra che i nuovi zeri sono gli zeri di

$$\det(sI - A + KC)$$

cioè gli zeri aggiunti sono coincidenti con i poli dell'osservatore; Ciò corrisponde alla non controllabilità dell'osservatore in tale schema.

2. Fissato $N = K$ otteniamo

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} sI - A + KC - BF & -K \\ F & 0 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} sI - A - BF & -K \\ F & 0 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} sI - A & -K \\ F & 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Questo implica che gli zeri aggiunti sono quelli del sistema

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi + K\omega \\ r &= F\xi \end{aligned}$$

ovvero gli zeri della funzione di trasferimento

$$F(sI - A)^{-1}K.$$

In sintesi, e con riferimento allo schema di compensazione introdotto, mediante reazione dall'uscita si ottiene una funzione di trasferimento a ciclo chiuso

$$W(s) = K \frac{\gamma(s)N(s)}{D_C(s)\alpha(s)}$$

in cui: K è il guadagno; $N(s)$ polinomio a numeratore della funzione di trasferimento del sistema dato; $D_C(s) = \det(sI - A - BF)$; $\alpha(s) = \det(sI - A + KC)$; $\gamma(s)$ in (9.10) può essere fissato per soddisfare ad altre specifiche di progetto. Si noti inoltre quanto segue:

1. $\gamma(s) = \alpha(s) \Leftrightarrow N = BG$;
2. $\gamma(s)$ è il numeratore di $F(sI - A)^{-1}K \Leftrightarrow N = K$.

Si noti che comunque gli zeri del sistema rimangono tra gli zeri del sistema di controllo (a meno che non vengano cancellati da alcuni zeri di $D_C(s)$).

9.4.4 Ulteriori considerazioni sulla scelta di G

G può essere scelto in modo da fissare il guadagno del sistema complessivo. Se ad esempio, come spesso accade, si vuole tale guadagno pari a 1, posto $\bar{N} = \frac{N}{G}$ si ha:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BF & BF \\ 0 & A - KC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ B - \bar{N} \end{pmatrix} GV$$

che ha guadagno unitario se:

$$(C \quad 0) \begin{pmatrix} A + BF & BF \\ 0 & A - KC \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B \\ B - \bar{N} \end{pmatrix} G = 1$$

e quindi

$$G = 1 / C(A + BF)^{-1}B \left(1 - F(A - KC)^{-1}(B - \bar{N}) \right)$$

ove \bar{N} è stato fissato in modo da collocare ove desiderato gli zeri.



9.5

Assegnazione degli autovalori con regolazione

Il problema consiste nell'inserire un sistema di controllo con reazione dallo stato e vettore di guadagni in retroazione F , in un ulteriore ciclo di controllo con reazione dall'uscita, retroazione unitaria ed azione integrativa in catena diretta con guadagno F^0 . Lo schema del sistema complessivo è mostrato nella Figura 9.6.

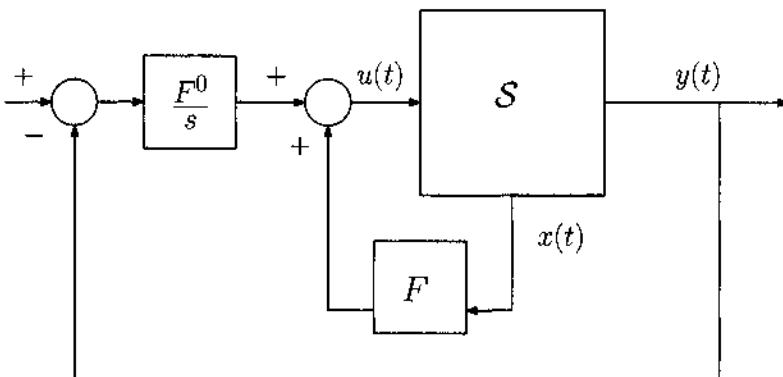


Figura 9.6

Il sistema così realizzato manifesta la proprietà di avere una risposta a regime permanente ad un ingresso costante coincidente con l'ingresso stesso. Si può infatti verificare senza difficoltà che la presenza di un polo in zero nella funzione di trasferimento della catena diretta comporta, indipendentemente dalle altre funzioni di trasferimento, un valore del guadagno del sistema complessivo pari ad uno.

Questa modalità di funzionamento che garantisce la possibilità di portare a regime l'uscita al valore dell'ingresso (**regolazione**), è classificata nel gergo della teoria del Controllo come comportamento di tipo 1.

Mostreremo ora che è possibile scegliere i coefficienti di F ed il guadagno dell'integratore, F^0 , in modo che il sistema a ciclo chiuso abbia anche autovalori assegnati se è possibile risolvere lo stesso problema di assegnazione degli autovalori sulla coppia (A, B) . Il sistema così realizzato sarà quindi in grado di assicurare la regolazione con una velocità assegnabile.

A questo fine si scrivano le equazioni del sistema complessivo

$$\dot{x} = (A + BF)x + BF^0z \quad (9.11a)$$

$$\dot{z} = -Cx + v \quad (9.11b)$$

con matrici

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A + BF & BF^0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A + BF & BF^0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}(F \quad F^0)$$

il problema dell'assegnazione degli autovalori al sistema che ha la struttura indicata si riconduce ad un problema di assegnazione di autovalori alla coppia

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.12)$$

Lo studio della raggiungibilità di tale coppia

$$R = \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^n B \\ 0 & -CB & \cdots & (-1)^n CA^{n-1} B \end{pmatrix} \quad (9.13)$$

consente di verificare che la proprietà del sistema complessivo è governata da quella di S (9.2). Infatti, la matrice (9.13) ha rango di un'unità superiore alla matrice di raggiungibilità associata alla coppia (A, B) poiché, data la sua struttura, l'ultima sua riga è indipendente dalle precedenti.

Vediamo questo come si riflette sulla collocazione degli autovalori al sistema complessivo nelle due situazioni di S raggiungibile e non raggiungibile.

Se S è raggiungibile, in base a quanto detto, possiamo scegliere F^0 ed F in modo che il sistema a ciclo chiuso abbia autovalori assegnabili ad arbitrio. Diremo in tal caso che il problema della regolazione con assegnabilità della dinamica ammette soluzione.

Se S non è tutto raggiungibile il sistema complessivo mantiene tra i suoi modi i modi fissi del processo. La verifica di quest'ultimo fatto può essere effettuata calcolando la rappresentazione con lo stato del sistema complessivo a partire da una rappresentazione di S immaginato scomposto secondo la proprietà di raggiungibilità. In virtù di questo e della proprietà di rango della coppia di matrici (9.12) il sistema complessivo avrà tra i suoi modi quelli fissi di S mentre gli altri potranno essere assegnati ad arbitrio. In particolare la stabilizzabilità di S assicura la stabilizzabilità del sistema complessivo con regolazione.

La procedura di calcolo di una soluzione è quella proposta per l'assegnazione degli autovalori applicata alla coppia (9.12).

Lo schema di regolazione con assegnazione della dinamica ora proposto impiega una reazione dallo stato ed una dall'uscita di S . Gli argomenti sviluppati

nel capitolo a proposito dell'assegnazione dei modi con reazione dall'uscita impiegando uno schema del tipo osservatore-assegnazione degli autovalori, rappresentano la prova dell'efficacia dell'adozione di uno schema per la regolazione con assegnazione della dinamica che impieghi solo reazioni dall'uscita. Valgono a tale proposito tutte le considerazioni fatte in precedenza nella discussione della separazione circa la collocazione degli autovalori (e degli zeri) per il sistema complessivo.

Gli stessi argomenti possono essere impiegati per il progetto di sistemi di controllo che abbiano autovalori assegnati e consentano di assicurare con assoluta precisione il mantenimento di una variazione lineare nel tempo dell'uscita. Si tratta di un sistema che manifesti la proprietà di avere una risposta a regime permanente ad un ingresso a rampa coincidente con l'ingresso stesso e la dinamica assegnata.

Il problema può essere affrontato con uno schema di controllo con reazione dallo stato e vettore di guadagni in retroazione F , in un ulteriore ciclo di controllo con reazione dall'uscita, retroazione unitaria ed una doppia azione integrativa in catena diretta con coefficienti del numeratore pari a F^0 ed F^1 . Lo schema del sistema complessivo è mostrato nella Figura 9.7.

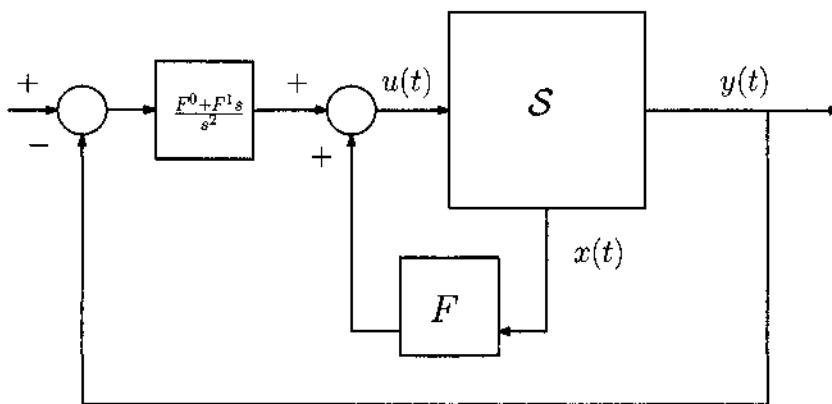


Figura 9.7

Si può infatti verificare senza difficoltà che la presenza di un doppio polo in zero nella funzione di trasferimento della catena diretta comporta, indipendentemente dalle altre funzioni di trasferimento, il soddisfacimento della citata proprietà nella risposta a regime.

Questa modalità di funzionamento che garantisce la possibilità di mantenere a regime l'uscita al valore dell'ingresso variabile linearmente, è classificata nel gergo della teoria del Controllo come comportamento di tipo 2.

Mostriremo ora che è possibile scegliere i coefficienti di F ed i coefficienti F^0 ed F^1 , in modo che il sistema a ciclo chiuso abbia anche autovalori assegnati se è possibile risolvere lo stesso problema di assegnazione degli autovalori sulla

coppia (A, B) . Il sistema così realizzato sarà quindi in grado di assicurare la regolazione con una velocità assegnabile.

A questo fine si proceda come nel caso precedente e si scrivano le equazioni del sistema complessivo. Si ottiene il sistema complessivo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + BF)x + BF^0 z_1 + BF^1 z_2 \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -Cx + w\end{aligned}$$

la cui matrice dinamica assume la forma

$$\begin{pmatrix} A + BF & BF^0 & BF^1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -C & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & B \\ 0 & 0 & 1 \\ -C & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (F \quad F^0 \quad F^1). \quad (9.14)$$

Data la struttura della matrice dinamica (9.14), il problema dell'assegnazione degli autovalori al sistema riduce ad un problema di assegnazione di autovalori alla coppia

$$\begin{pmatrix} A & B & B \\ 0 & 0 & 1 \\ -C & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.15)$$

Lo studio della raggiungibilità di (9.15)

$$R = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n+1}B \\ 0 & 0 & -CB & \cdots & (-1)^n CA^{n-1}B \\ 0 & -CB & CAB & \cdots & (-1)^{n+1} CA^nB \end{pmatrix} \quad (9.16)$$

consente di verificare che, ancora una volta, la proprietà del sistema complessivo è governata da quella di S . Infatti, la matrice (9.16) ha rango di un due unità superiore alla matrice di raggiungibilità associata alla coppia (A, B) ; e ciò in quanto, per la sua struttura, le ultime due righe sono non nulle e indipendenti tra loro e dalle precedenti.

Vediamo questo come si riflette sull'assegnazione degli autovalori al sistema complessivo nelle due situazioni di S raggiungibile e non raggiungibile.

Se S è raggiungibile, in base a quanto detto, possiamo scegliere F^0, F^1 ed F in modo che il sistema a ciclo chiuso abbia autovalori assegnabili ad arbitrio. Diremo in tal caso che il problema della regolazione con assegnabilità della dinamica ammette soluzione.

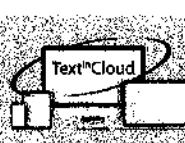
Se S non è tutto raggiungibile il sistema complessivo mantiene tra i suoi modi i modi fissi del processo. La verifica di quest'ultimo fatto può essere effettuata calcolando la rappresentazione con lo stato del sistema complessivo a partire da una rappresentazione di S immaginato scomposto secondo la proprietà di raggiungibilità. In virtù di questo e della proprietà di rango della coppia di matrici (9.15) il sistema complessivo avrà tra i suoi modi quelli fissi di S mentre gli altri potranno essere assegnati ad arbitrio. In particolare la stabilizzabilità di S assicura la stabilizzabilità del sistema complessivo con regolazione.

La procedura di calcolo di una soluzione è quella proposta per l'assegnazione degli autovalori applicata alla coppia (9.15).

Anche in questo caso lo schema di regolazione con assegnazione della dinamica ora proposto impiega una reazione dallo stato ed una dall'uscita di S . Gli argomenti sviluppati nel capitolo a proposito dell'assegnazione dei modi con reazione dall'uscita impiegando uno schema del tipo osservatore-assegnazione degli autovalori, rappresentano la prova dell'efficacia dell'adozione di uno schema per la regolazione con assegnazione della dinamica che impieghi solo reazioni dall'uscita. Valgono a tale proposito tutte le considerazioni fatte in precedenza nella discussione della separazione circa la collocazione degli autovalori (e degli zeri) per il sistema complessivo.

A conclusione del capitolo si osserva che gli argomenti impiegati possono essere estesi al caso generale del progetto di sistemi di controllo che abbiano autovalori assegnati e consentano di assicurare con assoluta precisione il mantenimento di una variazione nel tempo dell'uscita coincidente con quella di un ingresso di tipo $k - 1$. Si tratta di un sistema che manifesti la proprietà di avere una risposta a regime permanente ad un ingresso di tipo $(k - 1)$ coincidente con l'ingresso stesso e la dinamica assegnata. Questa modalità di funzionamento che garantisce la possibilità di mantenere a regime l'uscita al valore dell'ingresso variabile linearmente, è classificata nel gergo della teoria del Controllo come comportamento di tipo k .

Il problema può essere affrontato con uno schema di controllo del tipo precedente con una reazione dallo stato F ed un ulteriore ciclo di controllo con reazione dall'uscita, retroazione unitaria, e K azioni integrative in catena diretta con coefficienti del numeratore pari a F^0, F^1, \dots, F^{k-1} . La procedura di dimostrazione e progetto ripercorre i passi seguito nei due casi esaminati e consente di ottenere gli stessi risultati. La generalizzazione al caso di uno schema che impieghi solo una reazione dall'uscita può essere estesa al caso generale arrivando agli stessi risultati delle situazioni esaminate.



Text"Cloud

Approfondimento

9.6

Assegnazione degli autovalori: sistemi a più ingressi

In questa sezione, si vedrà come risolvere il problema di assegnazione sviluppato nel paragrafo 9.1 nel caso di $u \in \mathbb{R}^p$, $p > 1$. Si considererà per semplicità il caso di $p = 2$.

9.6.1 Un caso particolare

Si assuma che il sistema (9.2) sia nella forma

$$\dot{x} = A_c + B_c u \quad (9.17)$$

con

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_0^1 & -a_1^1 & \dots & -a_{n_1-1}^1 & -a_{n_1}^1 & -a_{n_1+1}^1 & \dots & -a_{n-1}^1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0^2 & -a_1^2 & \dots & -a_{n_1-1}^2 & -a_{n_1}^2 & -a_{n_1+1}^2 & \dots & -a_{n-1}^2 \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in cui

$$n_1 + n_2 = n$$

Una tale coppia (A_c, B_c) è raggiungibile e scelti ad arbitrio n autovalori, che immagineremo raggruppati in modo consistente con la partizione di A_c , possiamo calcolare i polinomi caratteristici corrispondenti

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \implies \{\lambda_1^1 \dots \lambda_{n_1}^1\} \cup \{\lambda_1^2 \dots \lambda_{n_2}^2 \dots \lambda_2^{n_2}\}$$

e quindi il polinomio caratteristico desiderato

$$\begin{aligned} p^*(\lambda) &= p_1^*(\lambda)p_2^*(\lambda) \\ p_1^*(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1^1) \dots (\lambda - \lambda_{n_1}^1) \\ &= \alpha_0^1 + \alpha_1^1 \lambda + \dots + \alpha_{n_1-1}^1 \lambda^{n_1-1} + \lambda^{n_1} \end{aligned}$$

e $i = 1, 2$. Posti i vettori riga

$$\begin{aligned} \underline{a}'_{n_1} &= (-a_0^1 \quad -a_1^1 \quad \dots \quad -a_{n_1-1}^1 \quad -a_{n_1}^1 \quad -a_{n_1+1}^1 \quad \dots \quad -a_{n-1}^1) \\ \underline{a}'_{n_1+n_2} &= (-a_0^2 \quad -a_1^2 \quad \dots \quad -a_{n_1-1}^2 \quad -a_{n_1}^2 \quad -a_{n_1+1}^2 \quad \dots \quad -a_{n-1}^2) \end{aligned}$$

la matrice dei guadagni

$$F_c = - \begin{pmatrix} \underline{a}'_{n_1} \\ \underline{a}'_{n_1+n_2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_0^1 & \dots & \alpha_{n_1-1}^1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_0^2 \\ & & & \dots & \alpha_{n_2-1}^2 \end{pmatrix}$$

assegna gli autovalori desiderati, ovvero

$$\sigma(A_c + B_c F_c) \equiv \{\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*\}.$$

Infatti, la matrice $A_c + B_c F_c$ assume la forma diagonale a blocchi

$$A_c + B_c F_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_0^1 & -\alpha_1^1 & \dots & -\alpha_{n_1-1}^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & -0 & \dots & 0 & -\alpha_1^2 & -\alpha_2^2 & \dots & -\alpha_{n_2-1}^2 \end{pmatrix}$$

9.6.2 Il caso generale

Assegnato il sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, con (A, B) raggiungibile si mostrerà che esistono matrici (T_c, Q_c) di dimensione $(n \times n)$ e $(p \times p)$ tali che il sistema (9.2) sia nella forma (9.17), ovvero

$$T_c A T_c^{-1} = A_c \quad T_c B Q_c = B_c.$$

T_c definisce una trasformata di coordinate in x , Q_c , una trasformazione di coordinate sugli ingressi. Poiché $(A_c + B_c F_c) = T_c (A + B Q_c F_c T_c) T_c^{-1}$ se F_c corrisponde ad un'arbitraria fissata n -pla di autovalori su (A_c, B_c)

$$F = Q_c F_c T_c$$

corrisponde alla stessa scelta di autovalori su A, B .

Si assumerà nel seguito che $\rho(B) = p$ (numero degli ingressi). Se così non fosse ($\rho(B) = p_1 < m$) esisterebbe Q_1 tale che $B Q_1 = (B_1 \ 0)$ con $\rho(B_1) = p_1$ e la seguente procedura può essere applicata a B_1 .

Sia R la matrice di raggiungibilità associata alla coppia (A, B) e $\mathcal{R} = \text{Im}\{R\}$ il sottospazio degli stati raggiungibili. Posto $B = (b_1 \dots b_p)$, per il calcolo di T_c e Q_c , si fissi la base tale che, a seguito di un possibile riordino,

$$\mathcal{R} = \text{Im} \bar{R}$$

$$\bar{R} = (b_1 \ \dots \ A^{n_1-1} b_1 \ \dots \ b_p \ \dots \ A^{n_p-1} b_p)$$

per n_1, \dots, n_p tali che $n = n_1 + \dots + n_p$. Denotata, per $i = 1, \dots, p$, come γ_i la $n_1 + \dots + n_i$ -esima riga dell'inversa della matrice \bar{R} , le matrici non singolari

$$T_c = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_1 A^{n_1-1} \\ \vdots \\ \gamma_p \\ \vdots \\ \gamma_p A^{n_p-1} \end{pmatrix}, \quad Q_c = \left(\begin{pmatrix} \gamma_1 A^{n_1-1} \\ \vdots \\ \gamma_p A^{n_p-1} \end{pmatrix} B \right)^{-1}$$

mettono il sistema nella forma (9.17). Per vederlo, si fissi per semplicità $p = 2$, per cui otteniamo innanzitutto

$$Q_c B = \begin{pmatrix} \gamma_1 A^{n_1-1} \\ \gamma_2 A^{n_2-1} \end{pmatrix} (b_1 \quad b_2) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

il che prova che Q_c è non singolare. Per dimostrare che T_c è nonsingolare basta considerare

$$T_c \bar{R} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & * \end{pmatrix}$$

Per dimostrare il resto, si procede in maniera analoga al paragrafo 9.1 calcolando $\bar{A} = T_c A T_c^{-1}$ e $\bar{B} = T_c B Q_c$ e sfruttando le uguaglianze

$$TA = \bar{A}T, \quad TB = \bar{B}Q^{-1}.$$

La matrice F che assegna gli autovalori ad (A, B) è quindi data da:

$$F = Q_c F_c T_c = -Q_c \begin{pmatrix} \gamma_1 p_1^*(A) \\ \vdots \\ \gamma_p p_p^*(A) \end{pmatrix}$$

in cui $p^*(\lambda) = p_1^*(\lambda) \dots p_p^*(\lambda)$ è il polinomio caratteristico associato all'assegnazione degli autovalori desiderata.

Non è difficile verificare che con la retroazione $-Q_c F^0 = F$ il sistema complessivo S_F è equivalente a p catene di integratori indipendenti (ciascuna di dimensione n_i); più precisamente posto $\tilde{x} = T_c x$ si ha:

$$\begin{array}{ll} \dot{\tilde{x}}_1^1 = \tilde{x}_2^1 & \dot{\tilde{x}}_1^p = \tilde{x}_2^p \\ \vdots & \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_{n_1}^1 = v^1 & \dot{\tilde{x}}_{n_p}^p = v^p \end{array}$$

con lo stato

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^p \end{pmatrix}.$$

In altre parole se (A, B) è raggiungibile esiste una trasformazione degli ingressi Q_c , una retroazione dallo stato (F^0) ed una trasformazione di coordinate (T_c) tale che

$$T_c (A + B Q_c F^0) T_c^{-1} = A_B \quad T_c Q_c B = B_B.$$

La coppia $(A_B; B_B)$ è detta **forma canonica di Brunovsky**.

Dato un sistema raggiungibile con $\rho(B) = p$, allora per assegnare gli autovalori mediante feedback dallo stato occorrerà procedere come segue

1. calcolare n_1, \dots, n_p ;
2. calcolare $p_1^*(\lambda), \dots, p_m^*(\lambda)$ associati allo spettro desiderato;
3. calcolare $\gamma_1, \dots, \gamma_m, p_1^*(A), \dots, p_m^*(A)$ e quindi le matrici

$$Q_c = \begin{pmatrix} \gamma_1 A^{n_1-1} \\ \vdots \\ \gamma_p A^{n_p-1} \end{pmatrix} B^{-1} \quad F = -Q_c \begin{pmatrix} \gamma_1 p_1(A) \\ \vdots \\ \gamma_p p_p(A) \end{pmatrix}.$$

Esempio 9.6.1 Si consideri la coppia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In questo caso, otteniamo

$$Ab_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Ab_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A^2 b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{array}{ll} n_1 = 3 & \tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \\ n_2 = 2 & \end{array}$$

Calcoliamo quindi

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{4}) \\ \gamma_2 &= (-1 \ -\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

e quindi la matrice

$$Q_c = \begin{pmatrix} \gamma_1 A^2 B \\ \gamma_2 A B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fissato il polinomio caratteristico desiderato $p^*(\lambda) = p_1^*(\lambda)p_2^*(\lambda)$ con

$$\begin{aligned} p_1^*(\lambda) &= (1+\lambda)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 \\ p_2^*(\lambda) &= \lambda^2 + 2\lambda + 1 \end{aligned}$$

F risulta facilmente calcolabile.

TextCloud

Approfondimento**9.7****L'osservatore asintotico ridotto**

Una domanda si pone naturalmente: v , la dimensione della dinamica di un dispositivo (9.6) che ricostruisce l'evoluzione dello stato, deve essere necessariamente pari ad n o può essere inferiore? In effetti se $\rho(C) = q_1 \leq q$ sono già disponibili q_1 relazioni indipendenti tra le variabili di stato, la ricostruzione asintotica di $(n - q_1)$ variabili di stato deve poter consentire la ricostruzione asintotica di tutto lo stato. Su questa base nel seguito viene mostrato come costruire un osservatore in cui $v = n - q_1$; un tale osservatore viene detto **ridotto** in quanto la dimensione dello stato è minima.

Assegnato S , supponiamo che $\rho(C) = q$. Se così non è, ovvero $\rho(C) = q_1 < q$, possiamo calcolare una matrice Q di opportune dimensioni tale che

$$QC = \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(C_1) = q_1$$

e assumere queste q_1 uscite indipendenti come nuove uscite del sistema.

Assumiamo quindi che ci siano q uscite indipendenti e si consideri la matrice P , di dimensione $(q \times q)$ non singolare, tale che

$$PC = (I \quad C_2)$$

in cui I è la matrice identità di dimensione $(q \times q)$. A seguito di una tale trasformazione sulle uscite si ottiene

$$v = Py = x_1 + C_2 x_2$$

da cui si evince che se si riesce a ricostruire asintoticamente l'evoluzione di x_2 , sia $z_2 \rightarrow x_2$, poiché v viene misurato, mediante $z_1 = v - c_2 z_2$ è possibile ricostruire asintoticamente x_1 , $z_1 \rightarrow x_1$. Il problema è quindi quello di osservare asintomaticamente x_2 .

Si consideri quindi la trasformazione di coordinate

$$\tilde{x} = Tx = \begin{pmatrix} I & C_2 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

da cui

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{A}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{A}_{12}\tilde{x}_2 + \tilde{B}_1 u$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{A}_{21}\tilde{x}_1 + \tilde{A}_{22}\tilde{x}_2 + \tilde{B}_2 u$$

$$v = \tilde{x}_1.$$

Poiché si richiede che $z_2 \rightarrow \tilde{x}_2$ i seguenti passaggi conducono a successive scelte che consentano alla dinamica dell'errore ridotto $\xi_2 = z_2 - \tilde{x}_2$ di convergere verso lo zero.

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 - \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{H}(\tilde{F}w + \tilde{G}u + \tilde{K}v) + \tilde{L}(\tilde{A}_{11}v + \tilde{A}_{12}\tilde{x}_2 + \tilde{B}_1u) \\ &\quad - \tilde{A}_{21}v - \tilde{A}_{22}\tilde{x}_2 - \tilde{B}_2u.\end{aligned}$$

Per

$$\tilde{H} = I, \quad \tilde{G} = \tilde{B}_2 - \tilde{L}\tilde{B}_1$$

la dinamica dell'errore indipendente da u . Infatti, sviluppando i calcoli otteniamo

$$\dot{z}_2 - \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{F}z_2 - \tilde{F}\tilde{L}v + \tilde{K}v + \tilde{L}\tilde{A}_{11}v + \tilde{L}\tilde{A}_{12}\tilde{x}_2 - \tilde{A}_{21}v - \tilde{A}_{22}\tilde{x}_2.$$

Inoltre, fissando

$$\begin{aligned}\tilde{F} &= \tilde{A}_{22} - \tilde{L}\tilde{A}_{12} \\ \tilde{K} &= -\tilde{L}\tilde{A}_{12}\tilde{L} + \tilde{A}_{22}\tilde{L} - \tilde{L}\tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{21}\end{aligned}$$

otteniamo la dinamica dell'errore ridotto

$$\dot{\xi}_2 = \dot{z}_2 - \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{F}(\dot{z}_2 - \dot{\tilde{x}}_2) = \tilde{F}\xi, \quad \xi_2(t) = e^{\tilde{F}t}\xi_2(0).$$

Il problema è quindi ricondotto a quello di assegnare gli autovalori alla matrice $(\tilde{A}_{22} - \tilde{L}\tilde{A}_{12})$.

Non è difficile verificare che gli autovalori di \tilde{F} possono essere assegnati ad arbitrio se e solo se la coppia (A, C) è osservabile. Per verificare questo si considerino i seguenti sistemi

$$S_1: \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ y = x_1 \end{cases}$$

e

$$S_2: \begin{cases} \dot{\vartheta} = A_{22}\vartheta \\ \eta = A_{12}\vartheta. \end{cases}$$

Se S_2 è inosservabile esiste una condizione iniziale ϑ_0 tale che

$$\eta(t) = A_{12}e^{A_{22}t}\vartheta_0 \equiv 0$$

implicando che lo stato

$$\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vartheta_0 \end{pmatrix}$$

è inosservabile per S_1 come si vede facilmente dallo schema in Figura 9.8.

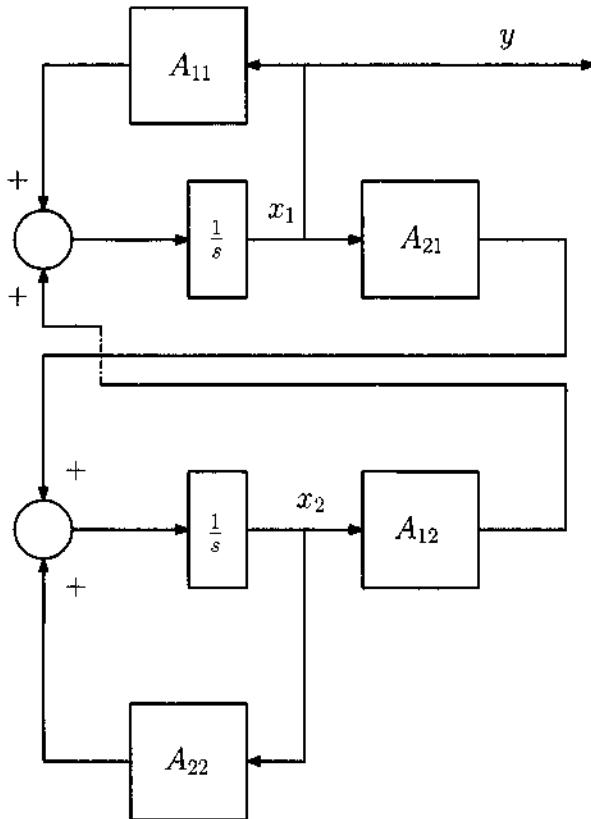


Figura 9.8

In conclusione, l'inosservabilità di S_2 implica l'inosservabilità di S_1 inosservabile. In modo analogo si mostra l'implicazione inversa.

Esempio 9.7.1 Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In questo caso, l'uscita corrisponde esattamente con una componente dello stato del sistema (i.e., $y = x_1$) per cui possiamo quindi costruire un osservatore ridotto di dimensione 2. A tal fine, poniamo quindi $\tilde{x} = x$ e $\tilde{A} = A$ con la partizione

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{11} &= 0 & \tilde{A}_{12} &= 0 & \tilde{B}_1 &= 0 \\ \tilde{A}_{21} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \tilde{A}_{22} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} & \tilde{B}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Fissiamo allora la matrice

$$\tilde{F} = \tilde{A}_{22} - \tilde{L}\tilde{A}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ l_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

e il polinomio

$$|\lambda I - \tilde{F}| = \left| \begin{pmatrix} \lambda + l_1 & -1 \\ 5 + l_2 & \lambda + 6 \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 + (l_1 + 6)\lambda + 6l_1 + l_2 + 5$$

coincidente con

$$p'(\lambda) = (\lambda + 5)^2 = \lambda^2 + 10\lambda + 25$$

per $l_1 = 4$ e $l_2 = -4$. L'osservatore ridotto è quindi dato da

$$\dot{w} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \end{pmatrix} y$$

$$z_1 = x_1$$

$$z_2 = w + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} x_1.$$

TextCloud

Approfondimento

Capitolo at glance!

Appendice

Forma spettrale di una matrice

Come è noto una generica matrice $M \in \mathbb{R}^{(n \times m)}$ rappresenta una trasformazione lineare tra uno spazio lineare di dimensione m ed un altro di dimensione n per assegnate basi $E^m = (\mathbf{e}_i)_1^m$ e $G^n = (\mathbf{g}_i)_1^n$ nei due spazi. Gli elementi degli spazi sono rappresentati dalle componenti rispetto a tali basi $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$, e la relazione

$$y = Mx$$

rappresenta nelle fissate basi la trasformazione lineare tra gli elementi dei due spazi.

Come varia la matrice al variare dei vettori di base?

In questo contesto una trasformazione lineare da uno spazio lineare di dimensione n in sé stesso, usualmente definita operatore lineare, è rappresentata da una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Al variare della base l'operatore assume la forma

$$\tilde{A} = TAT^{-1}$$

due matrici che sono collegate da una tale relazione, con T invertibile, si dicono simili. L'insieme delle trasformazioni simili rappresentano lo stesso operatore al variare della base dello spazio di stato.

Tutto ciò premesso la seguente domanda si pone: quale è la forma più semplice di un operatore al variare delle coordinate? Si tratta in altre parole di individuare per un dato operatore, eventualmente assegnato per il tramite di una sua rappresentazione in una prefissata base, la sua rappresentazione più semplice. La forma più semplice prende il nome di *forma spettrale*. Quale la forma spettrale di un operatore (equivolentemente di un'assegnata matrice)? Quale la base?

Forme semplici per quello che qui interessa sono quelle a partire dalle quali effettuare il calcolo dell'esponenziale di matrice. Si tratta come l'intuizione suggerisce delle forme che meno differiscono da matrici puramente diagonali. Per la

caratterizzazione di queste strutture un ruolo centrale è giocato dal concetto di invarianza.

Tutto parte dalla seguente osservazione: un operatore lineare in \mathbb{R}^n trasforma sottospazi in sottospazi. Si pone spontanea dunque la seguente domanda: esistono sottospazi che godono della proprietà che l'insieme dei suoi punti è trasformato in sé stesso? Che sono cioè invarianti rispetto all'applicazione dell'operatore?

A.1

Autovalori e autovettori

Iniziamo ad affrontare il problema per gradi cercando di caratterizzare le direzioni (sottospazi di dimensione uno) che sono invarianti. Un vettore u si dirà invariante sotto l'applicazione di A se

$$Au = \lambda u$$

se ciò accade è evidente che per la linearità ogni vettore nella direzione di u , sia ku con k reale, sarà trasformato nella stessa direzione, $k\lambda u$. Riscrivendo la precedente eguaglianza risulta evidente che il vettore u deve essere soluzione del sistema lineare omogeneo seguente

$$(A - \lambda I)u = 0. \quad (\text{A.1})$$

Per il teorema di Rouché-Capelli u esiste se e solo se esiste anche uno scalare λ in corrispondenza del quale il determinante di $(A - \lambda I)$ si annulla. Lo scalare λ ed il vettore $u \neq 0$ che soddisfano la (A.1) sono detti rispettivamente **autovalore** e **autovettore destro**.

La precedente equazione ha soluzione non banale $u \neq 0$ unicamente in corrispondenza dei valori di λ , gli autovalori appunto, che annullano il determinante della matrice

$$d(\lambda) = |(\lambda I - A)| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$$

che si chiama il *polinomio caratteristico della matrice A*. Per il teorema fondamentale dell'algebra un polinomio di grado n a coefficienti reali ha n zeri, che sono reali e a coppie di complessi coniugati; se supponiamo siano in numero di μ quelli reali ed in numero di γ le coppie di complessi coniugati, con $\mu + 2\gamma = n$. Se si tiene conto del fatto che tali zeri, reali e coppie di complessi, possono avere molteplicità maggiore di 1, supponendo che siano in numero di r gli zeri reali distinti e c le coppie di complessi distinti, si può riscrivere il polinomio caratteristico nella sua espressione fattorizzata a coefficienti reali come:

$$d(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{\mu_r} ((\lambda - \alpha_1)^2 - \omega_1^2)^{\gamma_1} \dots ((\lambda - \alpha_c)^2 - \omega_c^2)^{\gamma_c}$$

dove $\mu_1 + \dots + \mu_r = \mu$ e $\gamma_1 + \dots + \gamma_c = \gamma$.

Con le posizioni fatte diremo che λ_i è un **autovalore reale con molteplicità algebrica μ_i** , mentre (α_i, ω_i) sono la parte reale e immaginaria di una **coppia di autovalori complessi con molteplicità algebrica γ_i** .

Nella caratterizzazione della struttura di un operatore al variare delle coordinate, intervengono altri due parametri: la **molteplicità geometrica** dell'autovalore λ_i ed il suo **ordine geometrico**.

La prima è indicativa dell'esistenza di una forma puramente diagonale, la seconda fornisce un'informazione di maggiore dettaglio che sarà chiarita nel seguito.

La **molteplicità geometrica** dell'autovalore reale λ_i , che indicheremo con $\hat{\mu}_i$, è definita come

$$\hat{\mu}_i = \dim(\ker(A - \lambda_i I)).$$

e la molteplicità geometrica della coppia (α_k, ω_k) , che indicheremo con $\hat{\gamma}_k$, come

$$\hat{\gamma}_k = \dim(\ker_c(A - (\alpha_k + j\omega_k)I))$$

dove con \ker_c si indica il kernel nello spazio vettoriale sui numeri complessi.

Si noti che la molteplicità geometrica è perlomeno uguale ad uno, in quanto la matrice $(A - \lambda_i I)$ è singolare; inoltre essa è inferiore o uguale, alla molteplicità algebrica in quanto, come risulta dal teorema di Cailay-Hamilton, un risultato fondamentale di teoria delle matrici,

$$d(A) = 0$$

che si legge: ogni matrice quadrata è annullante del proprio polinomio caratteristico.

In base a quanto detto è importante ricordare che valgono le seguenti relazioni:

$$\mu \geq r \quad e \quad \gamma \geq c \quad e \quad \mu + 2\gamma = n$$

nel caso in cui per ogni autovalore reale ed ogni coppia di complessi la molteplicità algebrica sia uguale ad uno, *autovalori tutti distinti*,

$$\mu = r \quad e \quad \gamma = c \quad e \quad c + r = n.$$

Per quanto riguarda il suo **ordine geometrico**, esso, per un autovalore reale λ_i , è pari alla prima potenza di $(A - \lambda_i I)^l$ in corrispondenza della quale la caduta di rango è pari alla molteplicità algebrica dell'autovalore:

$$\dim(\ker(A - \lambda_i I)^{m_i}) = \mu_i.$$

Per una coppia (α_k, ω_k) , è pari alla prima potenza di $(A - (\alpha_k + j\omega_k)I)^l$ in corrispondenza della quale la caduta di rango è pari alla molteplicità algebrica dell'autovalore:

$$\dim(\ker(A - \lambda_i I)^{g_i}) = \gamma_i.$$

Passiamo ora in rassegna le diverse situazioni che si possono presentare.

A.1.1 A con autovalori tutti distinti

Inizieremo con il mostrare che quando gli autovalori sono tutti distinti, $\mu_i = \gamma_i = 1$, $\mu = r$ e $\gamma = c$, nella base degli autovettori l'operatore assume una forma che *diremo diagonale a coefficienti reali* e indicheremo come Λ_R . Detto in termini matriciali mostreremo che se indichiamo con u_i l'autovettore associato a λ_i e con (u_{ka}, u_{kb}) la coppia associata ad (α_k, ω_k) , e poniamo

$$U = (u_1 \ \dots \ u_r \ u_{1a} \ u_{1b} \ \dots \ u_{ca} \ u_{cb}) = T^{-1} \quad V = \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_r \\ v'_{1a} \\ v'_{1b} \\ \vdots \\ v'_{ca} \\ v'_{cb} \end{pmatrix} = U^{-1} = T$$

si ottiene

$$\begin{aligned} TAT^{-1} &= \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_r \\ v'_{1a} \\ v'_{1b} \\ \vdots \\ v'_{ca} \\ v'_{cb} \end{pmatrix} \cdot A \cdot (u_1 \ \dots \ u_r \ u_{1a} \ u_{1b} \ \dots \ u_{ca} \ u_{cb}) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \alpha_1 & \omega_1 & \\ & & & -\omega_1 & \alpha_1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \alpha_c & \omega_c \\ & & & & & & -\omega_c & \alpha_c \end{pmatrix} = \Lambda_R. \end{aligned}$$

Λ_R definisce la rappresentazione diagonale a coefficienti reali dell'operatore. La verifica è presto fatta a partire dalla seguente uguaglianza ottenuta dalla precedente premoltiplicando ambo i membri per T^{-1}

$$A(u_1 \dots u_r \ u_{1a} \ u_{1b} \dots u_{ca} \ u_{cb}) =$$

$$= (u_1 \dots u_r \ u_{1a} \ u_{1b} \dots u_{ca} \ u_{cb}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & \alpha_1 & \omega_1 \\ & & & -\omega_1 & \alpha_1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & \alpha_c & \omega_c \\ & & & & -\omega_c & \alpha_c \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

L'uguaglianza tra le prime r colonne dei prodotti a primo e secondo membro è assicurata dal fatto che λ_i e u_i sono autovalore ed autovettore corrispondente e, quindi, $(A - \lambda_i I)u_i = 0$ ciò che equivale a scrivere $Au_i = \lambda_i u_i$ (essendo Au_i la i -ma colonna del prodotto a primo membro e $\lambda_i u_i$ la i -ma colonna del prodotto a secondo membro). L'uguaglianza tra le rimanenti colonne è assicurata dalle proprietà sulla parte reale e immaginaria alla quale soddisfano gli autovettori complessi. Se, infatti $\lambda = (\alpha + j\omega)$ è autovalore associato all'autovettore $u = u_a + ju_b$, si ha

$$(A - (\alpha + j\omega)I)(u_a + ju_b) = 0$$

che è equivalente alle due uguaglianze tra parte reale e immaginaria

$$(A - \alpha I)u_a = -\omega u_b \quad (A - \alpha I)u_b = \omega u_a$$

(ciò che esprime anche che $(A - \lambda^* I)u^* = (A - (\alpha - j\omega)I)(u_a - ju_b) = 0$). Le precedenti uguaglianze sono poi, equivalenti alla seguente uguaglianza matriciale

$$A(u_a \ u_b) = (u_a \ u_b) \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

Questa espressione consente di concludere la verifica in esame.

Λ_R è la rappresentazione più semplice di un operatore regolare, un operatore che è rappresentato in prefissate coordinate da una matrice A che ha autovalori distinti.

Se si accettasse di fare i calcoli nello spazio vettoriale di dimensione n sui numeri complessi la matrice assumerebbe una forma diagonale con le coppie dei numeri complessi su di essa; gli autovettori associati ad ogni coppia sarebbero l'uno il complesso coniugato dell'altro.

Si osservi che nel caso esaminato la molteplicità geometrica di ciascun autovalore è pari a quella algebrica e quindi uno.

A.1.2 A diagonalizzabile a coefficienti reali

Risulta da quanto visto al punto precedente che se per ogni autovalore la molteplicità geometrica è uguale a quella algebrica ed è uguale ad uno, la matrice può

essere messa nella forma Λ_R , vedremo ora che in effetti una tale forma esiste ogni volta che le due molteplicità coincidono, indipendentemente dai loro valori.

Per comprendere come questo sia possibile basta ricordare la definizione di molteplicità geometrica. Dalla definizione data, infatti, se la matrice $(A - \lambda_i I)$ ha rango $(n - \mu_i)$ si possono, per il teorema di Rouché-Capelli calcolare μ_i autovettori indipendenti soluzioni dell'equazione agli autovettori

$$(A - \lambda_i I)u_i = 0$$

e questo è possibile in corrispondenza ad ogni autovalore. Ad ogni autovalore può dunque essere associato un autospazio, U_i di dimensioni pari alla sua molteplicità; inoltre tali autospazi sono tra loro indipendenti. Con analogo ragionamento per le coppie di complessi coniugati si comprende che possono essere calcolati $(\mu + 2\gamma) = n$ autovettori indipendenti che possono essere utilizzati per definire una nuova base.

Impiegando ora gli autovettori per definire le nuove coordinate e con l'attenzione di ripetere nella forma diagonale Λ_R l'autovalore reale e la coppia di complessi coniugati tante volte quanta è la molteplicità si dimostra con gli stessi argomenti il risultato. Si noti, per concludere che in base a quanto detto, in luogo dei coefficienti r e c nella matrice Λ_R vi saranno μ e γ

$$\mu = \sum_1^r \mu_i \quad \gamma = \sum_1^c \gamma_k$$

(maggiori di r e c nel caso di autovalori a molteplicità maggiore di uno).

A.2

La forma di Jordan

Nel caso generale di matrice non regolare, presenza di autovalori a molteplicità geometrica maggiore di uno, la forma canonica più semplice che assume un operatore è quella cosiddetta *a blocchi di Jordan*, J .

In tal caso, scegliendo opportunamente le nuove coordinate negli autospazi associati agli autovalori, autospazi scomponibili a loro volta in sottospazi associati a "catene di autovettori generalizzati", si ottiene una forma del tipo:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_h \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

se $h = (r + 2c)$ sono gli autovalori distinti.

La dimensione del generico blocco di Jordan, J_l , è pari alla molteplicità algebrica di λ_l , per un autovalore reale, al doppio della molteplicità algebrica per una coppia di autovalori complessi coniugati. Inoltre esso ha la forma seguente:

$$J_l = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{\delta_l} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

dove δ_l è uguale alla molteplicità geometrica ed i blocchi $B_j, j = 1, \dots, \delta_l$ hanno la forma

$$B_j = \begin{pmatrix} \lambda_l & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & \lambda_l \end{pmatrix}$$

se λ_l è un numero reale,

$$\bar{B}_j = \begin{pmatrix} \Lambda_l & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & I & \\ & & & \Lambda_l \end{pmatrix}, \quad \Lambda_l = \begin{pmatrix} \alpha_l & \omega_l \\ -\omega_l & \alpha_l \end{pmatrix}$$

per una coppia di autovalori complessi e coniugati.

La dimensione massima dei blocchi è pari all'ordine geometrico dell'autovalore ed è assunta dal primo, B_1 , come risulta dalla procedura per la costruzione di J che viene messa in evidenza nel seguito.

A.2.1 Procedura di calcolo di J

La procedura conduce alla individuazione di una base rispetto alla quale un assegnato operatore lineare assume la forma di Jordan messa in luce in precedenza. Tale base è composta da autospazi indipendenti, ciascuno associato ad un autovalore e di dimensione pari alla sua molteplicità algebrica, nel caso di autovalore reale - di dimensione pari al doppio della molteplicità algebrica per una coppia di autovalori complessi.

Se indichiamo con U_i^R il generico autospazio associato all'autovalore reale λ_i , e con U_k^C il generico autospazio associato alla coppia (α_k, ω_k) dovrà risultare

$$\left(\bigoplus_{i=1}^r U_i^R \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^c U_k^C \right) = \mathbb{R}^n.$$

Se ora si effettua una trasformazione di coordinate con

$$T^{-1} = (U_1^R, \dots, U_r^R, U_1^C, \dots, U_c^C)$$

è semplice verificare, con gli stessi argomenti impiegati per mostrare la (A.2), che in queste nuove coordinate l'operatore assume la forma (A.3).

Ciò premesso ci resta da dimostrare che con riferimento al generico autovalore λ_l , sia esso reale o coppia di complessi, per una opportuna scelta delle coordinate per l'autospazio corrispondente, U_l , la struttura del blocco di Jordan, J_l , è quella indicata in (A.4).

Per fare questo, al fine di limitare la complessità delle notazioni e senza perdita di generalità in virtù della (A.3), si supporrà che la matrice dinamica sia caratterizzata da un solo autovalore che indicheremo genericamente con λ e che supporremo essere un numero reale per semplicità di esposizione.

La trattazione può essere generalizzata al caso di autovalori complessi impiegando gli stessi argomenti.

Valutiamo preliminarmente quelli che potremmo definire i due casi limite: il caso già esaminato in cui l'autovalore ha $\hat{\mu} = \mu$ e $m = 1$, e quello opposto in cui $\hat{\mu} = 1$ e $m = \mu$.

Già sappiamo che se λ , autovalore di molteplicità μ (nel caso in esame anche uguale a n), avesse molteplicità geometrica uguale a quella algebrica $\hat{\mu} = \mu$, potrei calcolare μ autovettori indipendenti risolvendo l'equazione

$$(A - \lambda I)u = 0$$

e nella base di questi autovettori l'operatore assumerebbe la forma puramente diagonale, cioè del tipo (A.4) con $\delta_i = \mu$ e $B_j = \lambda$.

Cosa accade nel caso in cui $\hat{\mu} = 1$? In questo caso l'ordine geometrico dell'autovalore è pari a μ , altrimenti detto la prima potenza della matrice $(A - \lambda I)$ in corrispondenza della quale si ha una perdita di rango pari a μ è proprio la potenza di ordine μ . Ciò è conseguenza del Teorema di Cayley-Hamilton e del fatto che l'incremento di dimensione del kernel della potenza di una matrice singolare è inferiore o uguale all'incremento della dimensione all'ordine precedente.

Questo mostra l'esistenza di una base del kernel di

$$(A - \lambda I)^{\mu} U = 0$$

composta da vettori u^k che soddisfano, per $k = 1, \dots, \mu$, il sistema di equazioni

$$(A - \lambda I)^k u^k \neq 0 \quad (\text{A.5})$$

$$(A - \lambda I)^i u^k \neq 0 \quad i = 0, \dots, k-1 \quad (\text{A.6})$$

Tali vettori sono detti *autovettori generalizzati di ordine k* e ciascuno di essi rappresenta, al crescere di k , il vettore rappresentativo dell'incremento del kernel. In formule u^k , soddisfa:

$$\ker(A - \lambda I)^k = \ker(A - \lambda I)^{k-1} \oplus \text{gen}\{u^k\}.$$

Tali vettori possono essere calcolati a partire da quello di ordine massimo, μ , scalando di uno ad ogni passo e calcolando ad ogni passo un solo vettore in quanto il kernel aumenta di uno ad ogni potenza. L'insieme di vettori calcolati in questo modo definisce quella che tecnicamente viene denominata una catena di autovettori generalizzati di ordine pari all'ordine geometrico μ .

A titolo di esempio di consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha autovalore $\lambda = 1$ con $\mu = 3$ e $\hat{\mu} = 1$. $(A - \lambda I)^3 = 0$ ed un autovettore generalizzato di ordine geometrico tre, u^3 , che soddisfa le (A.6) è il vettore e_3 (infatti

$(A - I)u^3 \neq 0$, $(A - I)^2u^3 \neq 0$ ed e_3 è il complemento a \mathbb{R}^3 di $\ker(A - \lambda I)^2$. Per u^2 con analogia procedura si ottiene il vettore e_1 (complemento a $\ker(A - \lambda I)^2$ di $\ker(A - \lambda I)$) ed infine $u^1 = e_2$. Si ottiene dunque

$$U = \text{gen}\{u^1\} \oplus \text{gen}\{u^2\} \oplus \text{gen}\{u^3\} = \text{gen}\{e_2\} \oplus \text{gen}\{e_1\} \oplus \text{gen}\{e_3\}.$$

Nella base composta da questa catena, a partire da quello di ordine uno, l'operatore assume una forma del tipo (A.4) con $\delta_l = 1$ e $J_l = B_1$. La verifica può ancora una volta essere fatta con gli stessi argomenti impiegati per mostrare la (A.2) ed impiegando una T^{-1} con colonne pari all'aggregato degli autovettori, da quello di ordine uno fino a quello di ordine pari all'ordine geometrico μ .

Nell'esempio precedente, con $T^{-1} = (e_2 e_1 e_3)$, si ottiene:

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La situazione è più complessa nel caso generale in cui, sempre con riferimento ad un solo autovalore, la molteplicità geometrica assume un valore intermedio: $1 < \hat{\mu} < \mu$.

Il punto di partenza è rappresentato dal calcolo dell'ordine geometrico m , cioè la prima potenza in corrispondenza della quale $(A - \lambda I)^m$ ha un kernel di dimensione μ . Sia, per ogni $k \leq m$, U^k una base di vettori che soddisfano

$$\ker(A - \lambda I)^k = \ker(A - \lambda I)^{k-1} \oplus U^k \quad (\text{A.7})$$

Si tratta di vettori che soddisfano le precedenti relazioni (A.6), e quindi di autovettori generalizzati di ordine k , che possono essere calcolati anche in questo caso a partire da $k = m$ ed a scalare fino ad arrivare a $k = 1$. Si noti che procedendo in questo modo vengono individuati complessivamente μ autovettori che definiscono una base di $(\ker(A - \lambda I)^m)$. Se indichiamo con $d_i = \dim(\ker(A - \lambda I)^i)$ con $i = 1, \dots, m$, si ha che

$$\hat{\mu} = d_1 < d_2 \cdots < d_m = \mu \quad e \quad \dim(U^k) = d_k - d_{k-1}.$$

Se ora l'insieme dei μ vettori di base degli autopazi così calcolati: U^m, U^{m-1}, \dots, U^1 vengono opportunamente riordinati a partire dagli autovettori del primo ordine, che sono $\hat{\mu}$ e più numerosi un virtù della (A.7), si ottengono $\hat{\mu}$ catene di dimensione non crescente di autovettori generalizzati, la prima di lunghezza m .

u_1^1	\dots	$u_{\hat{\mu}-1}^1$	$u_{\hat{\mu}}^1$
\vdots		\vdots	\vdots
$u_1^{\hat{\mu}}$	\dots	$u_{\hat{\mu}-1}^{\hat{\mu}}$	$u_{\hat{\mu}}^{\hat{\mu}}$
$u_1^{\hat{\mu}+1}$	\dots	$u_{\hat{\mu}-1}^{\hat{\mu}+1}$	
\vdots	\vdots	\ddots	
$u_1^{\hat{\mu}-1}$	\dots	$u_{\hat{\mu}-1}^{\hat{\mu}-1}$	
$u_1^{\hat{\mu}-1+1}$			
\vdots			
u_1^m			

Se ora indichiamo con U_j , $j = 1, \dots, \hat{\mu}$, i sottospazi generati da tali catene, essi definiscono nel caso in esame una base dello spazio di stato

$$U_1 \oplus \dots \oplus U_{\hat{\mu}} = \mathbb{R}^n$$

e se si effettua la trasformazione di coordinate:

$$T^{-1} = (U_1, \dots, U_{\hat{\mu}}) = (u_1^1 \dots u_1^m, \dots, u_{\hat{\mu}}^1 \dots)$$

si ottiene una forma di Jordan caratterizzata da un solo blocco J , associato all'unico autovalore λ ,

$$J = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{\hat{\mu}} \end{pmatrix} \quad B_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

con $\dim(B_1) = m$ e le dimensioni degli altri blocchi B_j pari alla dimensione della catena corrispondente (sia questa b_j). È infine utile osservare che ciascuno dei sottospazi U_j è a sua volta un sottospazio invariante.

Possiamo ora generalizzare quanto sinora detto al caso di più autovalori. A ciascuno di essi può essere associato un autospazio U_i , generato da $\hat{\mu}_i$ catene di autovettori la prima delle quali ha lunghezza massima e pari all'ordine geometrico dell'autovalore, m_i :

$$U_i = U_{i1} \oplus \dots \oplus U_{i\hat{\mu}_i} = \text{gen}\{(u_{i1}^1) \dots (u_{i1}^{m_i}) \dots (u_{i\hat{\mu}_i}^1)\},$$

dove il primo dei sottospazi che generano U_i , U_{i1} , è quello che ha dimensione maggiore e pari all'ordine geometrico dell'autovalore; ciascuno degli U_{ij} inoltre, sottospazio generato dalla j -ma catena di autovettori associata all'autovalore λ_i , è un autospazio (sottospazio invariante).

Si ha in effetti che

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\hat{\mu}_i} \oplus U_{ij} = \mathbb{R}^n \quad (\text{A.8})$$

Esempio A.2.1 Si consideri a titolo di esempio la seguente matrice con un solo autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica $\mu = 5$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e geometrica $\hat{\mu} = 2$, come risulta dal fatto che la caduta di rango di $(A - \lambda I)$ è due. Dobbiamo dunque calcolare due catene di autovettori, generatori di due sottospazi U_1 e U_2 , che soddisfano

$$U_{11} \oplus U_{12} = \mathbb{R}^5$$

le cui dimensioni sono pari all'ordine geometrico dell'autovalore, m , (la prima potenza alla quale la matrice $(A - \lambda I)$ si annulla) per U_{11} , e il complemento a 5, per U_{12} . Procediamo dunque nel calcolo secondo quanto indicato in precedenza nella (A.7):

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A - \lambda I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e $(A - \lambda I)^4 = \mathbf{0}$. Risulta quindi $m = 4$, inoltre il difetto di rango di $(A - \lambda I)^3$ (d_3) è 4, quello di $(A - \lambda I)^2$ (d_2) è 3, mentre quello di $(A - \lambda I)$ (d_1) è 2. Possiamo ora calcolare i sottospazi U^k definiti nella (A.7); U^4 , U^3 ed U^2 hanno dimensione uno ed U^1 ha dimensione due; inoltre essi possono essere calcolati a partire da U^4 , che è dato da:

$$U^4 = \text{gen}\{u^4\} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

mentre U^3 , U^2 possono essere calcolati mediante le relazioni che ne specificano le caratteristiche di autovettori generalizzati (A.6):

$$(A - \lambda I)U^4 = U^3 = \text{gen}\{u^3\} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$(A - \lambda I)^2U^4 = (A - \lambda I)U^3 = U^2 = \text{gen}\{u^2\} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

infine per U^1 , che ha dimensione due, un elemento della base può essere calcolato con la stessa regola:

$$(A - \lambda I)^3U^4 = (A - \lambda I^2)U^3 = (A - \lambda I)U^2 = U_1^1 = \text{gen}\{u_1^1\} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

il secondo U_2^1 come generico complemento ad U_1^1 in $\ker(A - \lambda I)$

$$U^1 = \text{gen}\{u_1^1, u_2^1\} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Se ora procediamo come indicato a ordinare le basi così calcolate per formare una catena di ordine 4, generata dall'autovettore u_1^1 che definisce i primi 4 vettori della nuova base, e una di ordine uno, costituita dal solo autovettore u_2^1 (si noti che l'apice 1 specifica l'ordine dell'autovettore), si ottiene per la (A.8)

$$U_{11} \oplus U_{12} = U^1 = \text{gen}\{u_1^1, u_1^2, u_1^3, u_1^4, u_2^1\} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

dove si è aggiunto ai generatori di U^4 , U^3 e U^2 , il pedice per specificare la provenienza (origine della catena). Si verifichi in conclusione che nella base indicata risulta

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esempio A.2.2 Come ulteriore esempio si consideri la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

che ha il solo autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica $\mu = 5$ e geometrica $m = 3$. $\hat{\mu} = d_1 = 2$, $d_2 = 3$ e $d_3 = \mu = 5$; si hanno dunque due catene di lunghezza 3 e due che possono essere calcolate con seguendo la procedura indicata a partire da $u^3 = \mathbf{e}_5$.

Esercizio A.2.1 In che relazione sono matrici che hanno gli stessi blocchi di Jordan disposti diversamente?

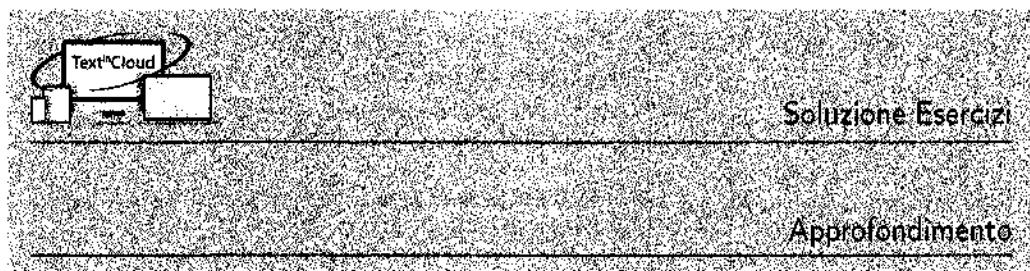
Esercizio A.2.2 Scrivere la forma di Jordan delle matrici di dimensione 7 con un solo autovalore con molteplicità geometriche 3 e ordine geometrico 3.

Esercizio A.2.3 Scrivere la trasformazione di coordinate che inverte l'ordine dei vettori di un'assegnata base.

Esercizio A.2.4 Sussiste una qualche relazione tra μ , $\hat{\mu}$ e m ? È possibile ad esempio che $\mu = 9$, $\hat{\mu} = 3$ e $m = 2$?

Esercizio A.2.5 Quale l'ordine massimo e minimo di un autovalore che ha $\mu = 8$ e $\hat{\mu} = 3$?

Esercizio A.2.6 Caratterizzare gli autospazi di una matrice in forma di Jordan di dimensione 4 con un solo autovalore a molteplicità geometrica 2 e ordine geometrico 3.



Bibliografia

- [1] Elmer G Gilbert. Controllability and observability in multivariable control systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control*, 1(2):128–151, 1963.
- [2] Gene F Franklin, J David Powell, and Michael L Workman. *Digital control of dynamic systems*, volume 3. Addison-Wesley Reading, MA, 1998.
- [3] Wilson J Rugh. *Linear system theory*. Prentice-Hall, Inc., 1996.
- [4] Alan Friedman. Linear systems. 1965.
- [5] Karl J Åström and Björn Wittenmark. *Computer-controlled systems: theory and design*. Courier Corporation, 2013.
- [6] Salvatore Monaco. *Sistemi Lineari. Elementi di Analisi*. Società Editrice Esculapio, 2000-2011.
- [7] Thomas Kailath. *Linear systems*, volume 156. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [8] Eduardo D Sontag. *Mathematical control theory: deterministic finite dimensional systems*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [9] Antonio Ruberti and Alberto Isidori. *Teoria dei Sistemi*. Edizione Boringhieri, 1979.
- [10] David G Luenberger. *Introduction to dynamic systems; theory, models, and applications*. John Wiley & S., 1979.
- [11] Roger W Brockett. *Finite dimensional linear systems*. SIAM, 2015.
- [12] W.M. Wonham. *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*. Springer Nature, 1985.
- [13] Giovanni Marro. *Teoria dei sistemi e del controllo*. Zanichelli, 1989.

- [14] Howard Harry Rosenbrock. *State-space and multivariable theory*. Wiley Interscience Division, 1970.
- [15] Jan C Willems. Dissipative dynamical systems part i: General theory. *Archive for rational mechanics and analysis*, 45(5):321–351, 1972.
- [16] Ogata Katsuhiko and Luigi Biagiotti. Fondamenti di controlli automatici. ediz. mylab. con contenuto digitale per accesso on line. 2020.

Indice analitico

- banda passante, 232
- connessione a retroazione, 314
- connessione in cascata, 312
- connessione in parallelo, 313
- connessione in serie, 312
- costante di tempo, 65
- criterio di Lyapunov, 122, 123, 128
- criterio di Nyquist, 331
- decomposizione rispetto l'osservabilità, 268
- decomposizione rispetto la raggiungibilità, 273
- diagramma polare, 228
- diagrammi di Bode, 228, 235
- discretizzazione, 92
- esponenziale di matrice, 39
- evoluzione forzata, 41, 82
- evoluzione libera, 41, 56, 57, 61, 69, 82
- forma canonica di Jordan, 53
- forma di Bode, 182
- forma spettrale della matrice di transizione, 51
- forma spettrale di A , 50
- forma spettrale di A^t , 86
- formula di Mason, 319
- funzione di trasferimento, 162, 177
- funzione generatrice, 38, 80
- funzioni canoniche, 84
- funzioni canoniche di ordine k , 43
- grafo di flusso, 316
- guadagno, 210
- instabilità, 101
- integrale di convoluzione, 42
- interconnessioni elementari, 311
- matrice delle funzioni di trasferimento, 162
- matrice delle risposte impulsive, 41, 82
- matrice di osservabilità, 262
- matrice di raggiungibilità, 268
- matrice di sistema, 178
- matrice di transizione, 48, 53
- metodo di Gilbert, 304
- metodo di Lyapunov, 122
- modellistica a scatola nera, 43
- modi alternanti, 87
- modi aperiodici, 87
- modi fissi, 341
- modi naturali, 56
- modi naturali aperiodici, 60
- modi naturali pseudoperiodici, 58
- modi pseudoperiodici, 87
- modo naturale eccitabile, 73
- modo naturale multiplo, 68
- modo naturale multiplo pseudoperiodico, 68

- modo naturale osservabile, 73
modulo alla risonanza, 232
momenti della risposta impulsiva,
230
osservatore ridotto, 364
poli, 163
polinomio minimo, 164, 166
problema della realizzazione, 45
pulsazione naturale, 66
rappresentazione esplicita, 39, 81
rappresentazione implicita, 38, 80
rappresentazione poli-zeri, 181
rappresentazioni equivalenti, 19, 46
realizzazione, 290, 291
realizzazione di Gilbert, 304
realizzazione in forma canonica
osservabile, 296
realizzazione in forma canonica
raggiungibile, 292
realizzazione minima, 299
regolazione, 355
risposta a regime permanente, 220,
221
risposta armonica, 223
risposta forzata, 164
risposta forzata a ingressi canonici,
164
risposta indiciale, 192
risposta transitoria, 221
Routh, 109
schema di simulazione., 39
scomposizione di Kalman, 277
scomposizione rispetto
l'osservabilità, 265
sistema astratto orientato, 37
sistema dinamico, 47
sistemi interconnessi, 311
smorzamento, 66
sommatoria di convoluzione, 83
sottospazio raggiungibile, 268
stabilità, 101
stabilità asintotica, 106
stabilità asintotica globale, 103, 106
stabilità esterna, 138
stabilità esterna nello stato zero,
138
stati indistinguibili, 260
stati inosservabili, 260
stato di equilibrio, 100
stato raggiungibile, 267
tempo di assestamento, 227
teorema del valore finale, 192
teorema del valore iniziale, 192
teorema della convoluzione, 163
teorema della derivata, 160
teorema della traslazione a destra,
197
teorema della traslazione a sinistra,
205
teorema di Cetaev, 127
teorema di Krasovskii, 127
teorema di La Salle, 126
test di Hautus, 306
trasferenze, 317
trasformata di Laplace, 159
trasformazione dello stato, 19
trasformazione in uscita, 38, 80
zeri di sistema, 178
zeri di trasmissione, 178

Quali sono i fondamenti teorici che sono alla base del comportamento dei sistemi complessi? Come comprendere e valutare le prestazioni di un sistema che si comporta in maniera autonoma?

La Teoria dei Sistemi ci introduce alla comprensione dei paradigmi e dei concetti che popolano il sorprendente mondo dell'Automatica.

Dopo una breve introduzione destinata ad illustrare in modo succinto il punto di vista dell'Automatica, viene presentata la classe di modelli che sono oggetto di studio: si tratta delle rappresentazioni con lo stato lineari, stazionarie a dimensione finita, sia a tempo continuo che discreto. Lo studio nel dominio del tempo e della variabile complessa, sino alla caratterizzazione del comportamento in frequenza consente di mettere in evidenza i riscontri applicativi ai risultati teorici. Lo studio della stabilità interna ed esterna, delle proprietà dello spazio di stato, dei modelli dei sistemi interconnessi e delle loro proprietà in relazione a quelle dei componenti, sono i tasselli di un mosaico dei metodi fondamentali che vengono illustrati. La loro utilità nella valutazione delle prestazioni e nel progetto dei sistemi di controllo viene messa in luce nell'ultimo capitolo dove viene studiato il problema della modifica della dinamica con controllazione dall'uscita.

Gli autori sono docenti di Automatica del Dipartimento di Ingegneria Informatica, Automatica e Gestionale *Antonio Ruberti*, Università degli Studi di Roma *La Sapienza*. Hanno una lunga esperienza di insegnamento in corsi di base ed avanzati del settore, tra i quali Teoria dei Sistemi, Fondamenti di Automatica, Digital Control Systems, Nonlinear Systems and Control.

salvatore.monaco@uniroma1.it
claudia.califano@uniroma1.it
paolo.digiamberardino@uniroma1.it
mattia.mattioni@uniroma1.it



Nel TextⁱⁿCloud

- Volume completo
- Approfondimenti
- Soluzioni agli esercizi



ISBN 978-88-9385-268-5



Feedback

Euro 32,00