Sistemi Dinamici/ Teoria dei Sistemi

8/1/2024

TDS

Corso con CFU ....9........ Matricola [redacted]

Nome e Cognome [redacted]

1) Dato il sistema con funzione di trasferimento

$$F(s) = k\frac{s^2 - 1}{s(s^2 + 100)(s + 5)}$$

a. **(tutti)** Tracciare i diagrammi di Bode e polare per $k > 0$
b. **(solo per corsi 9 CFU)** Studiare la stabilità al variare di k del sistema retroazionato con guadagno di anello unitario

2) **(solo esame completo)** Dato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x(t) + u(t)\end{aligned}$$

a. Studiare Eccitabilità e osservabilità dei modi
b. Tracciare lo schema di simulazione
c. Calcolare le matrici $\Phi(t)$, $H(t)$, $\Psi(t)$ e $W(t)$.
d. Calcolare la risposta forzata e se esiste a regime permanente all'ingresso $u(t) = 2\delta_{-1}(t-1)$
e. Studiare la stabilità interna, esterna in ogni stato e nello stato zero
f. Calcolare la funzione di trasferimento del sistema tempo discreto equivalente ottenuto campionando con passo di campionamento $T = 2sec$

3) **(solo per i corsi 9 CFU)** Un sistema a tempo discreto lineare stazionario e a dimensione finita, con due ingressi ed una uscita si comporta nel seguente modo:
in corrispondenza all'ingresso $u_1(k) = \delta(k-2)$, e $u_2(k) = 0$ l'uscita risulta essere $\delta_{-1}(k-3)$
in corrispondenza all'ingresso $u_1(k) = 0$ e $u_2(k) = \delta_{-1}(k)$, l'uscita risulta essere $k\delta_{-1}(k)$

a. Calcolare la matrice delle funzioni di trasferimento del sistema
b. Calcolare una realizzazione minima

4) Si considerino i sistemi

$$F_1(s)k\frac{s-5}{s+1}, \qquad F_2(s) = \frac{1}{s-5}$$

a. Si studino gli effetti della loro connessione in serie sulle proprietà strutturali del sistema complessivo quando $u_2(t) = y_1(t)$ e quando $u_1(t) = y_2(t)$
b. **(solo esonerati)** studiare per quali valori di k il sistema ottenuto tramite la connessione in serie possa essere reso stabile internamente, esternamente in ogni stato o nello stato zero. Si considerino entrambe le connessioni e si giustifichino le risposte

5) **(tutti)** Calcolare il tempo di salita, la sovraelongazione. ed il tempo di assestamento di un sistema con funzione di trasferimento

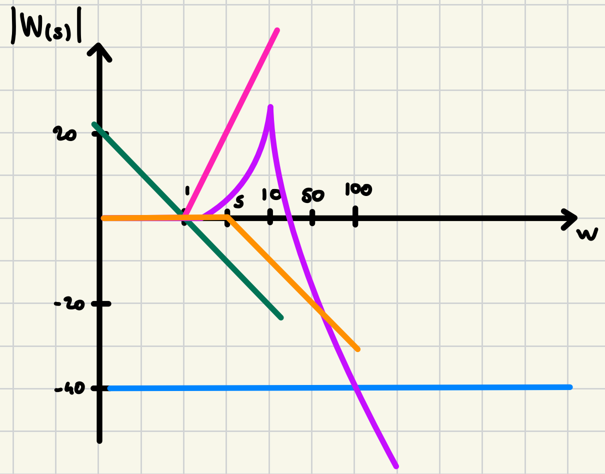
$$F(s) = \frac{10}{(s+1)(s+100)}$$

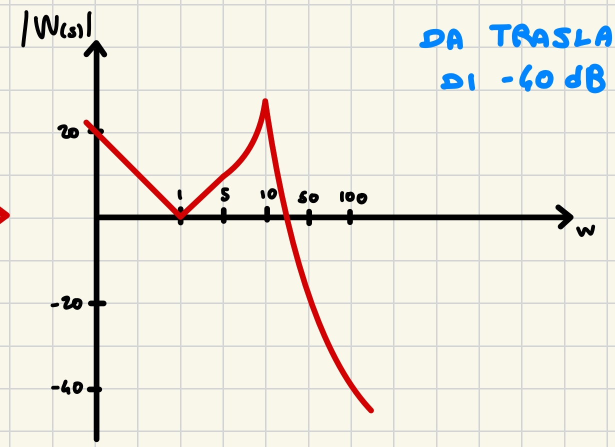
ESERCIZIO 1

$$F(s) = K\frac{(s^2-1)}{s(s^2+100)(s+5)} = -\frac{K}{500}\frac{(1+s)(1-s)}{s(1+s^2/100)(1+s/5)} \qquad K>0$$

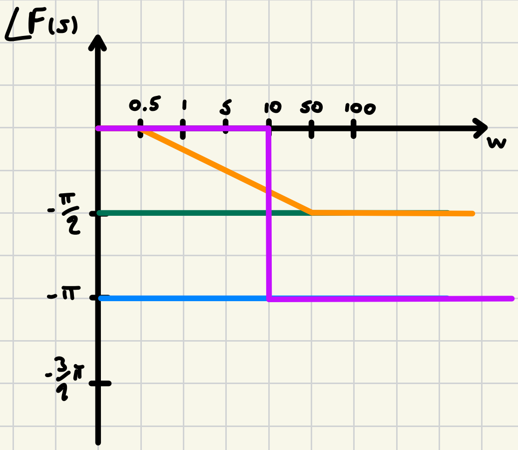
a)

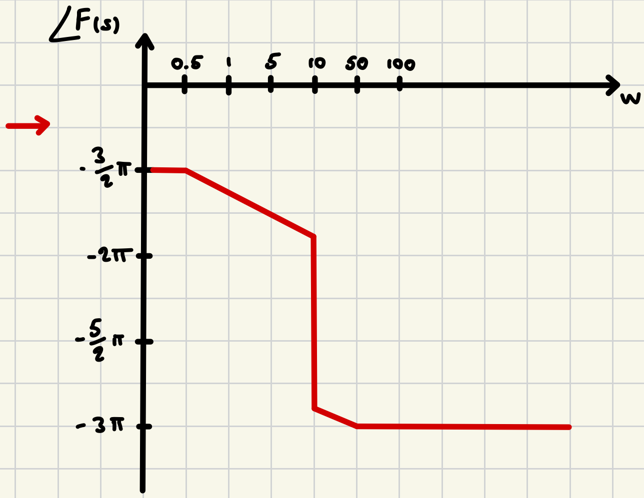
$$w_n = 10 \qquad \xi = 0 \qquad 20\log_{10}\left|\frac{K}{100}\right| = 20\log_{10}|K| - 40\,dB \xrightarrow{K=1} -40\,dB$$

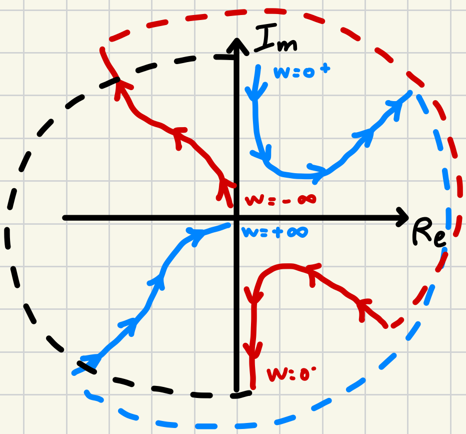




DA TRASLARE DI -40 dB







b) $F'(s) = \dfrac{F(s)}{1+F(s)} = \dfrac{K\dfrac{(s^2-1)}{s(s^2+100)(s+5)}}{1 + K\dfrac{(s^2-1)}{s(s^2+100)(s+5)}} = \dfrac{K(s^2-1)}{s(s^2+100)(s+5)+K(s^2-1)}$

$s^4 + 5s^3 + 100s^2 + 500s + Ks^2 - K = s^4 + 5s^3 + s^2(100+K) + 500s - K$

DA CARTESIO $\begin{cases} 100+K \geq 0 \\ -K \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} K \geq -100 \\ K \leq 0 \end{cases}$ STABILE SE $-100 \leq K \leq 0$
CONDIZIONE NECESSARIA

ROUTH: $s^4 + 5s^3 + s^2(100+K) + 500s - K$

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 100+K & -K \\ 3 & 5 & 500 & \\ 2 & K & -K & \\ 1 & 505 & & \\ 0 & -K & & \end{array}$$

$\rightarrow$ RICAVO $K>0$ E $K<0$ IMPOSSIBILE! $\rightarrow$ PROVO CON $K=0$ E VEDO SE È ALMENO STABILE SEMPLICEMENTE

SE SOSTITUISCO $K=0$ LA TERZA RIGA È TUTTA 0 E MI TROVO IN UN CASO CRITICO. LA RIGA PRECEDENTE DEVE ESSERE RELATIVA AI GRADI PARI DEL POLINOMIO, MA QUESTI SONO $5s^3 + 500s$ $\rightarrow$ SISTEMA INSTABILE

ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x(t) + u(t) \end{cases}$$

a) AUTOVALORI:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\left[(-1-\lambda)(1-\lambda) - 3\right] = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 4) \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -2 \end{matrix}$$

AUTOVETTORI:

$$\lambda_1 = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} u_1 = 0 \rightarrow \begin{cases} 2u_b + u_c = 0 \\ 2u_b + 3u_c = 0 \\ u_b = 0 \end{cases} \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} u_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} -3u_a + 2u_b + u_c = 0 \\ -u_b + 3u_c = 0 \\ u_b - 3u_c = 0 \end{cases} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = -2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} u_3 = 0 \rightarrow \begin{cases} u_a + 2u_b + u_c = 0 \\ u_b = -u_c \end{cases} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 9 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow T = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & -4 & -16 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -4/3 \\ 0 & 1/12 & 1/12 \\ 0 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

ECC E OSS:

$$Cu_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -3 \qquad v_1 B = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

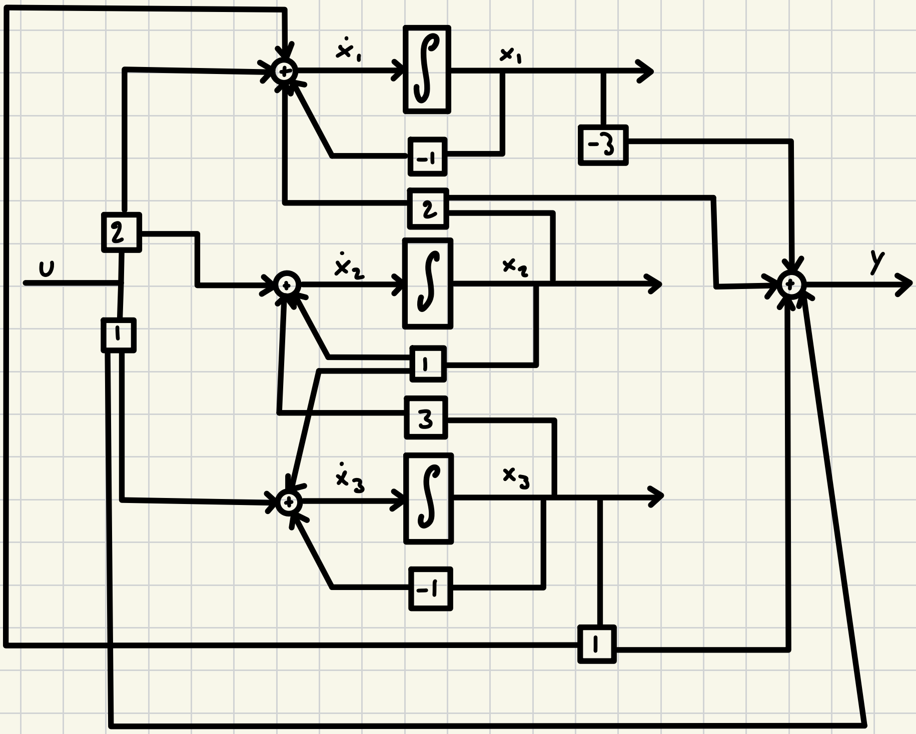
$$Cu_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \qquad v_2 B = \begin{pmatrix} 0 & 1/12 & 1/12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1/4$$

$$Cu_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 \qquad v_3 B = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1/4$$

	OSS	ECC	
λ_1	✓	×	APERIODICO CONVERGENTE
λ_2	×	✓	APERIODICO DIVERGENTE
λ_3	✓	✓	APERIODICO CONVERGENTE
	$\Psi(t)$	$H(t)$	

b) $$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x(t) + u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2u \\ \dot{x}_2 = \quad x_2 + 3x_3 + 2u \\ \dot{x}_3 = \quad x_2 - x_3 + u \\ y = -3x_1 + 2x_2 + x_3 + u \end{cases}$$



c) $$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} u_i v_i = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -4/3 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/12 & 1/12 \end{pmatrix} + e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 0 & 7/12 & 7/12 \\ 0 & 3/4 & 3/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} + e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$H(t) = \Phi(t)B = e^{2t}\begin{pmatrix} 0 & 7/12 & 7/12 \\ 0 & 3/4 & 3/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 7/4 \\ 9/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} + e^{-2t}\begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\Psi(t) = C\Phi t = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} + e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$W(t) = \begin{cases} C\Phi(t)B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 1/4 & -3/4 \\ 0 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -e^{-2t} \\ D = 1 \end{cases}$$

d) $u(t) = 2\delta_{-1}(t-1)$ → CONSIDERO $u(t) = \delta_{-1}(t)$ → $U(s) = 1/s$

$$W(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = (-3\ \ 2\ \ 1)\begin{pmatrix} s+1 & -2 & -1 \\ 0 & s-1 & -3 \\ 0 & -1 & s+1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-3\ \ 2\ \ 1)\frac{1}{s^3+s^2-4s-4}\begin{pmatrix} s^2-4 & 2s+3 & s+5 \\ 0 & s^2+2s+1 & 3s+3 \\ 0 & s+1 & s^2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-3\ \ 2\ \ 1)\frac{1}{s^3+s^2-4s-4}\begin{pmatrix} 2s^2+5s+3 \\ 2s^2+7s+5 \\ s^2+2s+1 \end{pmatrix} = \frac{-s^2+s+2}{s^3+s^2-4s-4} + D = -\frac{1}{s+2} + 1$$

OPPURE

$$W(t) = \begin{cases} C\Phi(t)B = -e^{-2t} \\ D = 1 \end{cases} \rightarrow W(s) = \mathcal{L}[W(t)] = -\frac{1}{s+2} + 1$$

$$y_F(s) = W(s)\cdot U(s) = \left(-\frac{1}{s+2} + 1\right)\cdot\frac{1}{s} = \frac{s+1}{s(s+2)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+2}$$

$$R_1 = \lim_{s\to 0} s\cdot y_F(s) = \lim_{s\to 0}\frac{s+1}{s+2} = \frac{1}{2} \quad / \quad R_2 = \lim_{s\to -2}(s+2)\cdot y_F(s) = \lim_{s\to -2}\frac{s+1}{s} = \frac{1}{2}$$

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[y_F(s)] = [R_1 + R_2 e^{-2t}]\delta_{-1}(t)$$

$$\downarrow$$

$$y_F(t-1) = 2[R_1 + R_2 e^{-2(t-1)}]\delta_{-1}(t-1) = (1 + e^{-2(t-1)})\delta_{-1}(t-1)$$

e) INTERNAMENTE: INSTABILE PERCHÈ NON TUTTI GLI AUTOVAL HANNO $Re(\lambda_i) \le 0$

ESTERNAMENTE: DEVE ESSERE $Re(\lambda_o) \le 0$ E $Re(\lambda_{o,E}) < 0$

$\lambda_1 = -1$ SOLO OSS CON $Re(\lambda_1) \le 0$, $\lambda_3 = -2$ OSS E ECC CON $Re(\lambda_3) < 0$

QUINDI STABILE ESTERNAMENTE

ESTERNAMENTE STATO ZERO:

$$y(t) = \Psi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau)\,d\tau \xrightarrow{t_0=0} y(t) = \int_0^t W(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$$

CONSIDERO SOLO $Re(\lambda_{E,O}) < 0$ (SODDISFATTA), QUINDI STABILE ESTER. NELLO STATO ZERO.

f) $W(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right]_{t=KT}\right]$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right]_{t=KT} = (1+e^{-4K})\,\delta_{-1}(t)$$

$$W(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left[(1+e^{-4K})\,\delta_{-1}(t)\right] = \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-4}}\right) = \frac{z-1}{z-e^{-4}}$$

3) **(solo per i corsi 9 CFU)** Un sistema a tempo discreto lineare stazionario e a dimensione finita, con due ingressi ed una uscita si comporta nel seguente modo:
in corrispondenza all'ingresso $u_1(k) = \delta(k-2)$, e $u_2(k) = 0$ l'uscita risulta essere $\delta_{-1}(k-3)$
in corrispondenza all'ingresso $u_1(k) = 0$ e $u_2(k) = \delta_{-1}(k)$, l'uscita risulta essere $k\delta_{-1}(k)$

a. Calcolare la matrice delle funzioni di trasferimento del sistema
b. Calcolare una realizzazione minima

2 INGRESSI, 1 USCITA

a) $u_1(k) = \delta(k-2) \qquad u_2(k) = 0$

$$y_1(z) = (x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = x_1 u_1 + x_2 u_2 = \mathcal{Z}[\delta_{-1}(k-3)] \rightarrow$$

$$\rightarrow (1 \cdot z^{-2})\, x_1 = \frac{z}{z-1} \cdot z^{-3} \rightarrow x_1 = \frac{1}{z-1}$$

b) $u_1(k) = 0 \qquad u_2(k) = \delta_{-1}(k)$

$$y_2(z) = (x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = x_1 u_1 + x_2 u_2 = \mathcal{Z}[k\,\delta_{-1}(k)] \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{z}{z-1} \cdot x_2 = \frac{z}{(z-1)^2} \rightarrow x_2 = \frac{1}{z-1}$$

$$W(z) = \left(\frac{1}{z-1} \;\Big|\; \frac{1}{z-1}\right)$$

4) Si considerino i sistemi

$$F_1(s)k\frac{s-5}{s+1}, \qquad F_2(s)=\frac{1}{s-5}$$

a. Si studino gli effetti della loro connessione in serie sulle proprietà strutturali del sistema complessivo quando $u_2(t)=y_1(t)$ e quando $u_1(t)=y_2(t)$

b. **(solo esonerati)** studiare per quali valori di k il sistema ottenuto tramite la connessione in serie possa essere reso stabile internamente, esternamente in ogni stato o nello stato zero. Si considerino entrambe le connessioni e si giustifichino le risposte

a) $u_2(t)=y_1(t)$:

$u=u_1 \rightarrow \boxed{F_1} \xrightarrow{y_1=u_2} \boxed{F_2} \xrightarrow{y_2=y}$

$$F_1:\begin{cases}\dot{x}_1=A_1x_1+B_1u_1\\ y_1=u_2=C_1x_1+D_1u_1\end{cases} \qquad F_2:\begin{cases}\dot{x}_2=A_2x_2+B_2u_2=A_2x_2+B_2C_1x_1+B_2D_1u_1\\ y=y_2=C_2x_2+D_2u_2=C_2x_2+D_2C_1x_1+D_2D_1u_1\end{cases}$$

$$F_{TOT}:\begin{cases}\dot{x}_1=A_1x_1+B_1u_1\\ \dot{x}_2=B_2C_1x_1+A_2x_2+B_2D_1u_1\\ y=D_2C_1x_1+C_2x_2+D_2D_1u_1\end{cases} \rightarrow \quad A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ B_2C_1 & A_2\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}B_1\\ B_2D_1\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}D_2C_1 & C_2\end{pmatrix} \qquad D=D_2D_1$$

$$W(s)=F_1\cdot F_2=K\frac{(s-5)}{(s+1)}\cdot\frac{1}{(s-5)}=\frac{K}{s+1}$$

POLO ELIMINATO, MODO NON PIÙ OSS/ECC

$u_1(t)=y_2(t)$:

$u=u_2 \rightarrow \boxed{F_2} \xrightarrow{y_2=u_1} \boxed{F_1} \xrightarrow{y_1=y}$

$$F_2:\begin{cases}\dot{x}_2=A_2x_2+B_2u_2\\ y_2=u_1=C_2x_2+D_2u_2\end{cases} \qquad F_1:\begin{cases}\dot{x}_1=A_1x_1+B_1u_1=A_1x_1+B_1C_2x_2+B_1D_2u_2\\ y_1=y=C_1x_1+D_1u_1=C_1x_1+D_1C_2x_2+D_1D_2u_2\end{cases}$$

$$F_{TOT}:\begin{cases}\dot{x}_2=A_2x_2+B_2u_2\\ \dot{x}_1=B_1C_2x_2+A_1x_1+B_1D_2u_2\\ y=D_1C_2x_2+C_1x_1+D_1D_2u_2\end{cases} \rightarrow \quad A=\begin{pmatrix}A_2 & 0\\ B_1C_2 & A_1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}B_2\\ B_1D_2\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}D_1C_2 & C_1\end{pmatrix} \qquad D=D_1D_2$$

$$W(s)=F_2\cdot F_1=\frac{1}{(s-5)}\cdot K\frac{(s-5)}{(s+1)}=\frac{K}{s+1}$$

considerino entrambe le connessioni e si g...

5) **(tutti)** Calcolare il tempo di salita, la sovraelongazione. ed il tempo di assestamento di un sistema con funzione di trasferimento

$$F(s) = \frac{10}{(s+1)(s+100)}$$

ABBIAMO DUE POLI REALI → $\nexists$ SOVRAELONGAZIONE (SERVONO POLI CC)

SCEGLIAMO IL POLO DOMINANTE, QUELLO PIÙ VICINO ALL'ORIGINE → $(s+1)$

$$t_s = \frac{\log 9}{1} \qquad T_a = -\frac{\log\left(\frac{100 \cdot 100}{0.9\,(100-1)}\right)}{1}$$