# Corso di Comunicazioni Digitali

**9 – IL PCM per la TRASMISSIONE DI SEGNALI ANALOGICI SU CANALI DIGITALI**

**Prof. Giovanni Schembra**

# Sommario

# TRASMISSIONE DIGITALE

## CARATTERI GENERALI

## IL PCM – INTRODUZIONE E PRINCIPIO DI FUNZIONAMENTO

# Perché trasmettere in digitale un segnale analogico

- **Vantaggi del digitale:**
  - La circuiteria digitale è a basso costo
  - I segnali digitali derivanti da sorgenti analogiche (audio, video, voce) possono essere multiplati con segnali dati e trasmessi su di un'unica rete digitale
  - Indipendenza dalla dinamica (valore picco-picco) del segnale
  - Nei sistemi di telefonia digitale a lunga distanza con ripetitori è possibile rigenerare i segnali digitali, eliminandone completamente i disturbi
  - È possibile utilizzare delle tecniche di codifica di canale per proteggere i segnali dal rumore
- **Svantaggi del digitale:**
  - Necessità di maggiore banda rispetto ai segnali analogici

# Ripetitori di segnale in cascata sul percorso sorgente-destinazione

- **Per segnali analogici:**
  - Ripetitori lineari (filtri e amplificatori)
  - I disturbi e le distorsioni si accumulano ripetitore per ripetitore
- **Per segnali digitali:**
  - Ripetitori rigenerativi
  - Interpretano la sequenza di bit ricevuta con un rivelatore a soglia, e la rigenerano
  - Se non ci sono stati errori nella rivelazione, riproducono una replica del segnale digitale originale senza aggiunta di disturbi
  - La spaziatura tra tali ripetitori (lunghezza della tratta) dipende dall'attenuazione del portante (cavo in rame, fibra ottica, radioonde), e dalla quantità di rumore di canale

# Pulse-code modulation (PCM)

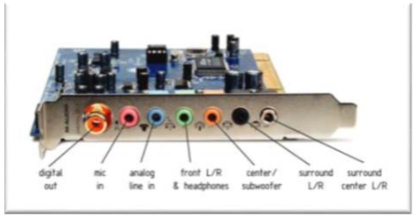
**Segnale analogico** → **PCM** → **Sequenza di bit**

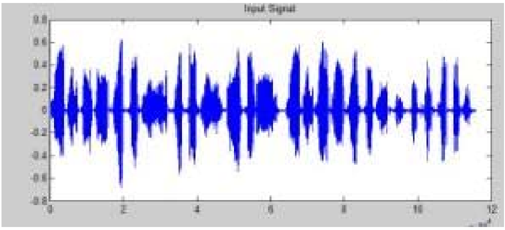
- **Definizione:**
  - la modulazione con codici a impulsi (pulse-code modulation - PCM) è un tipo particolare di **conversione analogico-digitale**
  - l'informazione contenuta nel campione (istantaneo) di un segnale analogico viene rappresentata da una "**parola di codice**" digitale organizzata in un flusso di dati binari
- **Parole di codice**
  - sia $n$ il numero di bit costituenti la singola parola di codice
  - esistono $M=2^n$ parole di codice distinte; ciascuna rappresenta un diverso livello di ampiezza del segnale [**QUANTIZZAZIONE**]:
  - l'esatto valore del segnale viene rimpiazzato dal più vicino degli $M$ valori permessi
- **Altre tecniche di conversione analogico-digitale:**
  - Modulazione delta
  - PCM differenziale (DPCM)

# Pulse-code modulation (PCM)

**Segnale analogico** → **PCM** → **Sequenza di bit**

- **Domanda: mi fate un esempio di dispositivo che implementa il PCM?**




1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1
1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0

# Assegniamo i giusti ruoli – un esempio

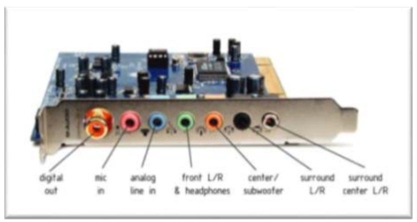
- **Trasmissione digitale**

  Es.: Schede di rete



- **Conversione analogico-digitale (PCM)**

  Es.: Schede audio



# Campionamento, quantizzazione e codifica

- **Tre fasi per la generazione del segnale PCM:**
  - **Fase 1: Campionamento**
    - genera un segnale PAM analogico con impulso rettangolare a partire dal segnale analogico
  - **Fase 2: Quantizzazione**
    - il segnale PAM viene quantizzato sostituendo ai valori nel continuo dei valori tra gli $M$ valori ammessi
    - quantizzazione:
      - **uniforme**: tutti i livelli di quantizzazione sono equidistanti
      - **non uniforme**: le ampiezze dei livelli di quantizzazione vengono scelte opportunamente a seconda del segnale da trasformare in digitale

# Campionamento, quantizzazione e codifica

- **Fase 2: Quantizzazione**
  - **errore di quantizzazione**:
    - differenza tra il segnale analogico all'ingresso del quantizzatore, e quello all'uscita del quantizzatore;
    - il **valore di picco dell'errore di quantizzazione** è pari alla metà del passo di quantizzazione

$$err_{quant}^{(MAX)} = \pm\frac{\Delta}{2}$$

    - campionando alla frequenza di Nyquist, e trascurando il rumore di canale, rimane ancora l'effetto del rumore di quantizzazione

# Campionamento, quantizzazione e codifica

- **Tre fasi per la generazione del segnale PCM:**
  - **Fase 3: Codifica**
    - Prende in ingresso il segnale PAM quantizzato ottenuto al passo precedente, e associa ad ogni valore del segnale quantizzato una parola di codice binaria
    - Esempio: codifica Gray, che associa parole che differiscono di un solo bit a livelli di quantizzazione adiacenti, in modo che errori su un singolo bit non di segno causano errori minimi nell'ampiezza ricostruita

# Campionamento, quantizzazione e codifica

- **Esempio: codice Gray per un segnale con $V_{pp}$=16 V**

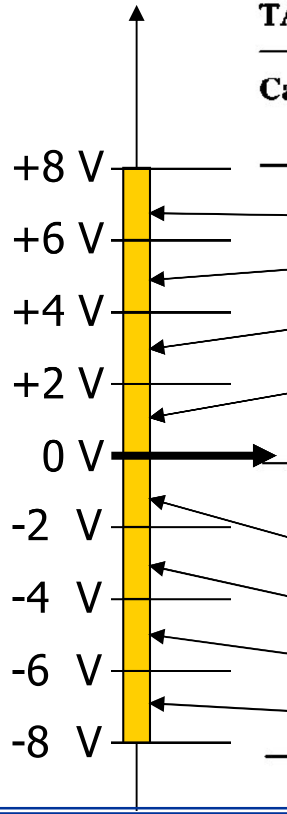



TABELLA 3-1 CODICE GRAY A TRE BIT PER M = 8 LIVELLI

| Campioni quantizzati di tensione | Parola di codice con codifica Gray (segnale PCM di uscita) |
|---|---|
| +7 | 110 |
| +5 | 111 |
| +3 | 101 |
| +1 | 100 |
| −1 | 000 |
| −3 | 001 |
| −5 | 011 |
| −7 | 010 |

Immagine speculare (a eccezione del bit di segno).

Esercizio: calcolare il codice Gray a 2 bit e a 4 bit

# Codifica Gray

- **Attenzione: non confondiamo l'obiettivo della codifica Gray utilizzata nella trasmissione digitale con quella utilizzata nella conversione analogico-digitale**
- **Codifica Gray per trasmissione digitale:**
  - Se a causa del rumore di canale il ricevitore sbaglia un livello (es.: modulazione 2-PAM), e dunque si sbaglia un simbolo, si sbaglia un solo bit

Errore di un livello → Errore di un bit (BER minimizzata)

- **Codifica Gray nel PCM (per conversione A/D):**
  - L'errore su un bit fa saltare il decodificatore PCM di un solo livello, e dunque il fastidio percepito in playout è minimo, ottenendo così una massimizzazione dell'SNR

Errore di un bit → Salto di un solo livello (SNR massimizzato)

# Decodifica del segnale PCM

- **In ricezione: DECODIFICA**
  - si legge la tabella di codifica (es. codice Gray) al contrario per ottenere il segnale PAM a campionamento istantaneo di partenza
  - il segnale PAM a campionamento istantaneo rappresenterà il segnale analogico di partenza, a meno dell’errore di quantizzazione

**Sequenza di bit** → **PCM inverso** → **Segnale analogico (quantizzato)**

# Occupazione di banda dei segnali PCM

- **Il PCM è una modulazione non-lineare del segnale analogico d'ingresso; quindi il suo spettro non è facilmente calcolabile**
- **La banda di un segnale PCM (se trasmesso) dipende:**
  - dalla banda del segnale analogico di partenza
  - dalla velocità di bit
  - dalla forma dell'impulso elementare usato per rappresentare i dati
  - dal codice di linea
- **Velocità di bit (bit-rate):**

$$\boxed{R = n\, f_s}$$

dove $n$ : numero di bit per parola di codice

$f_s$ : frequenza di campionamento

**Per evitare aliasing:** $\boxed{f_s \geq 2B}$

# Occupazione di banda dei segnali PCM

- **Abbiamo dimostrato (quando abbiamo parlato di ISI) che, qualunque sia l'impulso di segnalazione e il codice di linea, la banda per trasmettere un segnale digitale è tale che:**

$$B_{PCM} \geq \frac{1}{2} R = \frac{1}{2} n f_s$$

il valore minimo è ottenuto quando l'impulso elementare associato ai dati binari è del tipo sinc(x)

IMPORTANTE: il valore reale dipenderà dalla scelta degli *impulsi* di segnalazione, e dal particolare *codice di linea* utilizzato

- **Ad esempio, per impulsi rettangolari con codice di linea NRZ unipolare o NRZ polare:**

Banda assoluta $B_{PCM}^{(ASS)} = \infty$

Banda al primo nullo $B_{PCM}^{(1° N)} = R = n f_s$

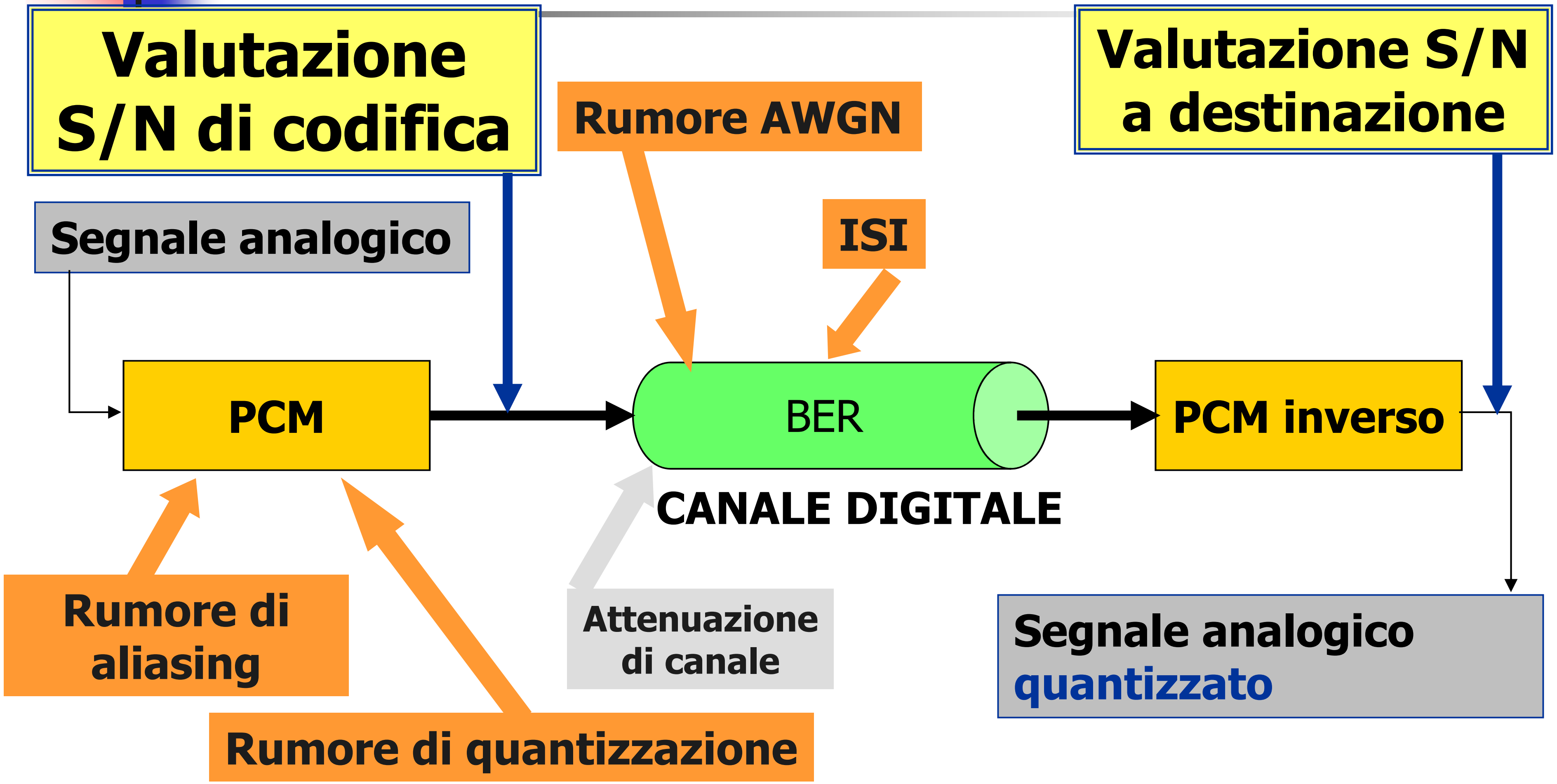
# DISTURBI SUL SEGNALE PCM

## LA QUALITÀ DEL SEGNALE ANALOGICO A DESTINAZIONE

# Disturbi sul segnale PCM

- **Cause dei disturbi sul segnale PCM ricevuto a destinazione**
  - distorsione da aliasing introdotta se il segnale analogico d'ingresso non è adeguatamente limitato in banda e campionato con frequenza sufficientemente elevata
  - rumore di quantizzazione: introdotto nel codificatore PCM a causa della quantizzazione su $M$ livelli. SI NOTA NELLA RICOSTRUZIONE DEL SEGNALE
  - presenza del canale Il canale che trasmette segnale digitale può causare errori sul bit (vedi analisi della **BER** per trasmissioni digitali) dovuti a:
    - interferenza intersimbolica (ISI) causata da una risposta in frequenza inadeguata del canale
    - Rumore additivo gaussiano bianco (AWGN) dovuta ad una risposta in frequenza inadeguata del canale

# Rapporto segnale-rumore in uscita al sistema PCM




NOTA: In S/N, il segnale di cui si calcola la potenza è quello ricostruito, ed è completamente indipendente da quello utilizzato per trasmettere i bit sul canale digitale

# Rapporto segnale-rumore in uscita al sistema PCM

- **Ipotesi:**
  - Campionamento effettuato con la frequenza di Nyquist → Nessun rumore di aliasing
  - Quantizzazione uniforme e distribuzione uniforme del segnale su tutti i livelli
- **Si può dimostrare che:**

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk out}} = \frac{3M^2}{1+4\left(M^2-1\right)P_e}$$

S/N tra la potenza di picco del segnale e la potenza media statistica totale di disturbo in uscita al sistema PCM

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{M^2}{1+4\left(M^2-1\right)P_e}$$

S/N tra la potenza media del segnale e la potenza media statistica totale di disturbo in uscita al sistema PCM

dove: $P_e$ : probabilità di errore sul bit del canale digitale (BER)

- Nel caso in cui anche il rumore del canale sia trascurabile, abbiamo:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk out}} = 3M^2 \qquad \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = M^2$$

# Rapporto segnale-rumore in dB

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk out}} = 3M^2$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = M^2$$

$k \in \{1,3\}$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10\log_{10}\left(k\,M^2\right) = \boxed{10\log_{10} k} + 20\log_{10} 2^n = \alpha + n\,20\log_{10} 2 = \alpha + 6.02n$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 6.02\,n + \alpha}$$

dove:

$$\alpha = \begin{cases} 4.77 & \text{per l'SNR di picco} \\ 0 & \text{per l'SNR medio} \end{cases}$$

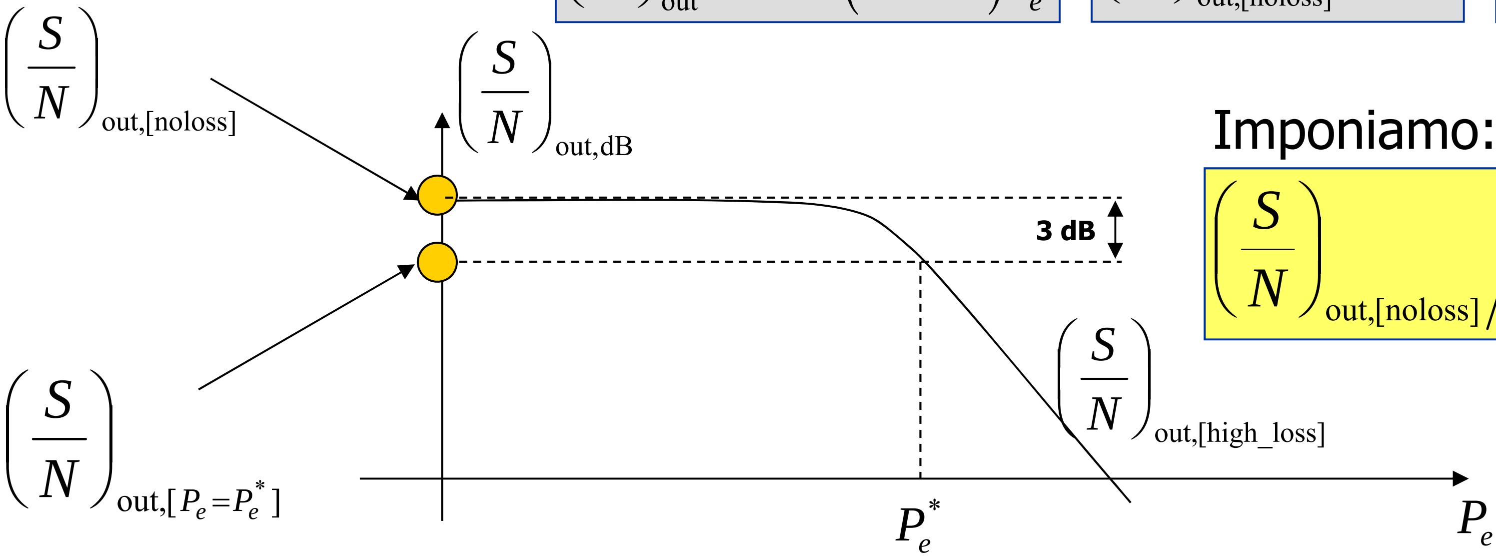
- **Regola dei 6 dB:**
  - Regola empirica per valutare le prestazioni di un sistema PCM
  - Ipotesi:
    - non vi siano errori sui bit
    - rumore casuale: il segnale di ingresso sia sufficientemente ampio da spazzolare tutti i possibili livelli di quantizzazione
    - Quantizzazione uniforme e distribuzione uniforme del segnale su tutti i livelli

**Aggiungendo un bit alla parola del segnale PCM, si migliora il rapporto segnale-rumore di 6 dB**

# Influenza della probabilità di errore di canale su SNR

- **SNR medio:**

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{M^2}{1+4\left(M^2-1\right)P_e} \qquad \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out,[noloss]}} = M^2 \qquad \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out,[high\_loss]}} \approx \frac{1}{4P_e}$$




Imponiamo:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out,[noloss]}} \Bigg/ \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out,}[P_e=P_e^*]} = \overset{-3\,\text{dB}}{2}$$

$$P_e^* = \frac{1}{4\left(M^2-1\right)}$$

$P_e^*$: **probabilità di errore di soglia del canale**

quando il canale introduce un errore con probabilità superiore,

- l'SNR a destinazione è dominato dal termine $1/4P_e$
- è inutile aumentare il numero di livelli di quantizzazione

# Influenza della probabilità di errore di canale su SNR

- **Progettazione di un codificatore PCM**
  - se non si conosce a-priori la probabilità di perdita del canale
  - si suppone che il canale introduca un rumore non superiore a -3 dB
  - si progetta il codificatore (scelta del numero di bit per parola di codice) in modo da avere un SNR in sorgente (prima del canale) pari al target SNR + 3 dB (+ l'eventuale attenuazione del canale)
  - in questo modo a valle del canale si ha un SNR non inferiore a quello target

# CALCOLO DELL'SNR PER:

- Segnali con distribuzione qualunque
- Quantizzazione uniforme

# SNR per distribuzione qualunque del segnale

- **Ipotesi:**
  - Assenza di Aliasing, di rumore di canale e di ISI
  - Quantizzazione uniforme

$$\begin{cases} \boxed{\left(\dfrac{S}{N}\right)_{\text{dB,pk}} = 6.02\,n + 4.77} \\ \boxed{\left(\dfrac{S}{N}\right)_{\text{dB,medio}} = 6.02\,n + 4.77 - 20\log_{10}\dfrac{V_p}{x_{eff}}} \end{cases}$$

Potenza del rumore di quantizzazione in un livello di ampiezza Δ

$$P_N^{(\Delta)} = \int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} N^2 \, f_N(N)\, dN = \int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} N^2 \frac{1}{\Delta} dN =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left[\frac{N^3}{3}\right]_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\Delta^3}{24} + \frac{\Delta^3}{24}\right) = \frac{\Delta^2}{12}$$

$$\boxed{P_N^{(\Delta)} = \frac{\Delta^2}{12}}$$

# SNR per distribuzione qualunque del segnale

**Potenza MEDIA del rumore di quantizzazione per una quantizzazione a $M$ livelli**

Siano:

- $\Delta_i$ l'ampiezza del generico intervallo $i$-esimo
- $p_i = prob\{\text{campione di segnale} \in i\text{-esimo intervallo}\}$

$$\Rightarrow \quad P_N^{(TOT)} = \sum_{i=1}^{M} P_N^{(\Delta_i)} \cdot p_i = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{M} \Delta_i^2 \cdot p_i$$

**Potenza MEDIA del rumore di quantizzazione se i livelli sono tutti uguali**

$$\Delta_i = \Delta = \frac{2V_P}{M} \qquad \forall i \in [1, M]$$

$$P_N^{(TOT)} = \frac{\Delta^2}{12} \cdot \sum_{i=1}^{M} p_i = \frac{\Delta^2}{12} 1 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{4V_P^2}{12M^2} = \frac{V_P^2}{3M^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_N^{(TOT)} = \frac{V_P^2}{3M^2}}$$

# SNR in ricezione per segnale a distribuzione non uniforme

- **Ipotesi:**
  - Segnale a **distribuzione non uniforme**

    $$P_s^{(media)} = x_{eff}^2 \quad : \text{ potenza media del segnale}$$

    $$V_P \quad : \text{ valore di picco del segnale}$$

    **Fattore di Carico**: $\sigma_x = V_p / x_{eff} > 1$
  - **Canale rumoroso con BER**
- **SNR IN RICEZIONE**

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB,medio}} = \frac{P_s^{(media)}}{P_N^{(QUANT)} + P_N^{(BER)}}$$

dove:

$$P_N^{(QUANT)} = \frac{V_P^2}{3M^2}$$

Potenza di rumore di quantizzazione

$$P_N^{(BER)} = 4 \cdot \frac{V_P^2}{3} \frac{M^2 - 1}{M^2} P_e$$

Potenza di rumore per errore di canale

# Esempio 3-1: progetto di un segnale PCM per un sistema telefonico

Un segnale telefonico analogico occupa all'incirca la banda da 300 a 3400 Hz (banda vocale o fonica). Volendo convertire tale segnale in formato PCM, dobbiamo per cominciare fissare una frequenza di campionamento. Il minimo valore è $2 \times 3.4 = 6.8$k campioni/s.

Per poter usare un filtro anti-aliasing passa-basso di costo ragionevole, si deve fissare un'estensione ragionevole della banda di transizione, e quindi è necessario sovracampionare il segnale fino a 8000 campioni al secondo.

Questa è la frequenza di campionamento standard nei sistemi telefonici digitali in Europa e negli Stati Uniti. Rappresentando ogni campione con una parola di 8 bit otteniamo una velocità di bit pari a

$$R = (f_s \text{ campioni/s})(n \text{ bit/campione})$$

$$= (8\text{k campioni/s})(8 \text{ bit/campione}) = 64 \text{ kbit/s} \qquad (3\text{-}19)$$

# Esempio 3-1: progetto di un segnale PCM per un sistema telefonico

Sempre secondo il teorema di dimensionalità, la banda minima necessaria a trasmettere questo segnale PCM binario è (3-15a)

$$\boxed{(B)_{min} = \tfrac{1}{2}R} = 32\ \text{kHz} \qquad (3\text{-}20)$$

Tale banda necessita dell'uso di un impulso tipo $(\sin x)/x$ nel segnale digitale binario. Usando al contrario impulsi rettangolari, la banda è in teoria infinita, e in pratica può essere quantificata nella banda al primo nullo:

$$B_{PCM} = R = 64\ \text{kHz} \qquad (3\text{-}21)$$

La banda del segnale PCM è in questo caso pari a 64 kHz, quando la banda lorda (cioè considerando anche la zona di transizione del filtro anti-aliasing) del segnale telefonico analogico originale è pari a 4 kHz!

# Esempio 3-1: progetto di un segnale PCM per un sistema telefonico

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk out}} = 3M^2$$

Usando la (3-17a), osserviamo che il SNR di picco è

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk out}} = 3(2^8)^2 = 52.9 \text{ dB} \tag{3-22}$$

L'aggiunta di un eventuale bit di parità non modifica naturalmente il rumore di quantizzazione. Il bit di parità è un tipo di codifica a protezione d'errore che può servire a diminuire il numero di errori provocati dal rumore di canale o dall'ISI. Nell'esempio, questi effetti sono stati comunque trascurati perché si è ipotizzato $P_e = 0$.

(3-74)

$$D = \frac{2B}{1+r}$$

Un sistema di comunicazione digitale usa un segnale binario con impulso di tipo NRZ sagomato a coseno rialzato con fattore di rolloff 0.25 e con una velocità di bit di 64 kbit/s. Determiniamo la banda del segnale filtrato.

Dalla (3-74), la banda è $B$ = 40 kHz. Questa è inferiore a quella del segnale non filtrato, per il quale la banda al primo nullo è 64 kHz.

$D$

# Esempio 3-1: progetto di un segnale PCM per un sistema telefonico

## In altre parole:

Se noi utilizziamo un canale con banda $B_s$= 40 kHz, con risposta in frequenza opportunamente progettata (a forma di coseno rialzato), riusciamo a far passare un segnale con R=64 kbit/s senza introdurre ISI.

# CALCOLO DELL'SNR PER:

- Segnali con distribuzione qualunque
- Quantizzazione NON uniforme

# Quantizzazione non uniforme

- **Proprietà dei segnali vocali analogici:**
  - Distribuzione delle ampiezze non uniforme: i valori vicini allo zero si presentano con maggiore probabilità rispetto a quelli agli estremi della dinamica permessa

Soluzione:

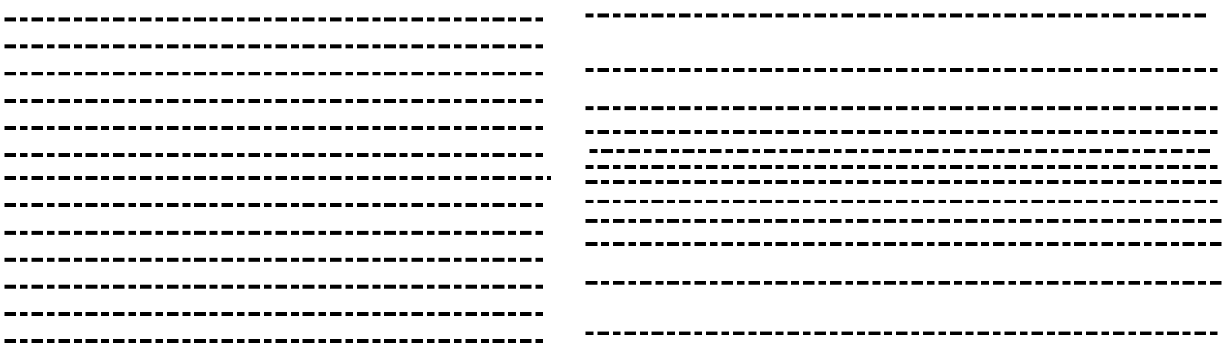
QUANTIZZAZIONE NON UNIFORME

Utilizzo di un passo di quantizzazione piccolo per valori dell'ampiezza vicini allo zero, e grande per valori maggiori

# Quantizzazione non uniforme

Utilizzo di un passo di quantizzazione piccolo per valori dell’ampiezza vicini allo zero, e grande per valori maggiori

UNIFORME | NON UNIFORME



# Tecnica equivalente (utilizzata nella pratica)

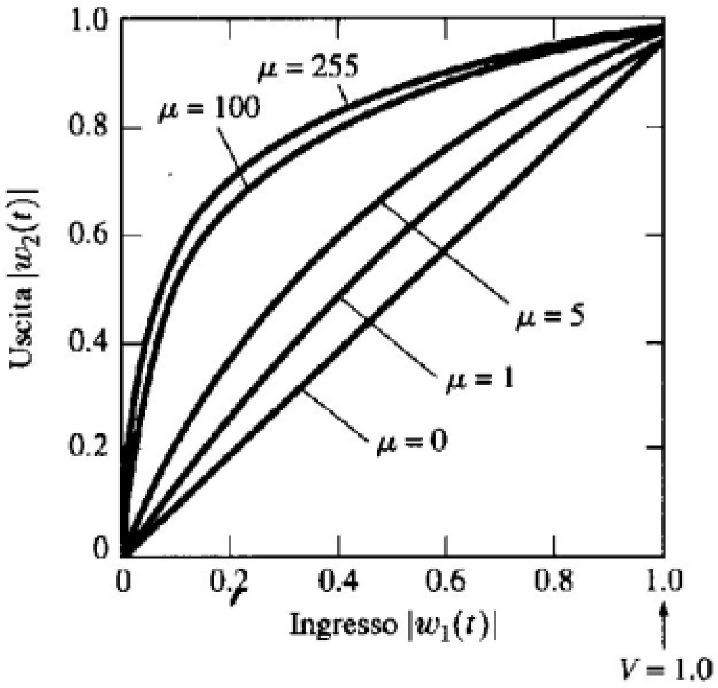
- **Definizione: Compressore**
  - dispositivo non lineare con amplificazione decrescente al crescere dell'ampiezza del segnale

- **Lo stesso risultato della quantizzazione non uniforme si ottiene:**
  - elaborando dapprima il segnale analogico con un compressore
  - e poi codificando il segnale in uscita dal compressore con un circuito PCM standard a quantizzazione uniforme

# Compressione a legge μ

$$|w_2(t)| = \frac{\ln(1+\mu\cdot|w_1(t)|)}{\ln(1+\mu)}$$

- **dove:**
  - il segnale $w_1(t)$ è normalizzato al valore di picco nell'intervallo (-1,+1)
  - $\mu$ è un parametro positivo
- **Nota:**
  - $\mu=0$ corrisponde alla quantizzazione uniforme (amplificazione lineare)
  - Aumentando $\mu$ il grado di compressione aumenta (non-lineare)
  - Il valore $\mu=255$ è utilizzato nelle reti telefoniche nord-americane e giapponesi
  - In Europa si utilizza la legge di compressione *A*

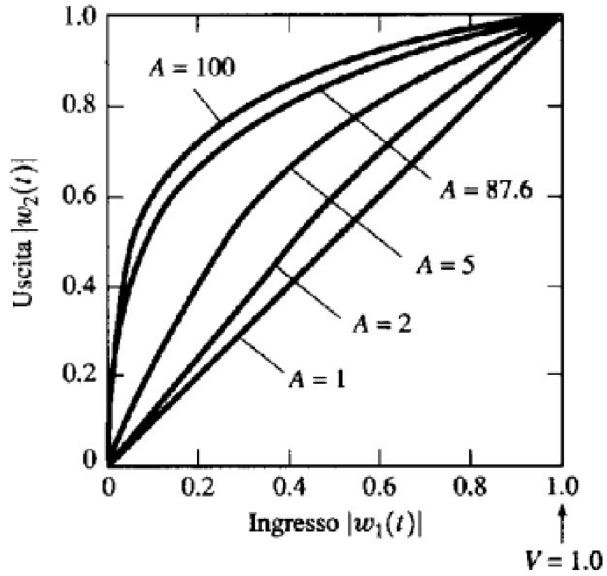


(b) Caratteristica del compressore di dinamica $\mu$-law

# Compressione a legge *A* (in Europa)

$$|w_2(t)| = \begin{cases} \dfrac{A \cdot |w_1(t)|}{1+\ln(A)} & 0 \le |w_1(t)| \le \dfrac{1}{A} \\ \dfrac{1+\ln(A \cdot |w_1(t)|)}{1+\ln(A)} & \dfrac{1}{A} < |w_1(t)| \le 1 \end{cases}$$

- **dove:**
  - il segnale $w_1(t)$ è normalizzato al valore di picco nell'intervallo (-1,+1)
  - $A$ è un parametro positivo




(c) - Caratteristica del compressore di dinamica *A*-law

# Operativamente …

$$|w_2(t)| = \frac{\ln\left(1+\mu\cdot|w_1(t)|\right)}{\ln(1+\mu)}$$

- **STEP 1: Calcolo del valore di ciascun campione, distorto con la legge di compressione**
  - Si prende il generico campione in valore assoluto
  - Si normalizza rispetto al valore di picco dell'intero segnale
  - Si applica la legge di compressione
  - Si amplifica per il valore di picco
  - Si riapplica il segno del campione originale

$$w_2(t_n) = \mathrm{sgn}\left(w_1(t_n)\right)\cdot\left[\frac{\ln\left(1+\mu\cdot\left\{\frac{|w_1(t_n)|}{V_P}\right\}\right)}{\ln(1+\mu)}\right]\cdot V_P$$

- **STEP 2: Quantizzazione uniforme dei campioni ottenuti**

# Rapporto segnale-rumore in ricezione

In generale, l'SNR medio è:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB,medio}^{(Quant\_Uniforme)} = 6.02\,n + 4.77 - 20\log_{10}\frac{V_p}{x_{eff}}$$

## Legge A

$|x_{eff}| \rightarrow 0$ ⇒
$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB,medio}^{(A)} = \left(\frac{S}{N}\right)_{dB,medio}^{(Quant\_Uniforme)} + 20\log_{10}\frac{A}{1+\ln A}\ dB$$

$|x_{eff}| \rightarrow V_p$ ⇒
$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB,medio}^{(A)} = 6.02\,n + 4.77 - 20\log_{10}(1+\ln A)\ dB$$

## Legge μ

$|x_{eff}| \rightarrow 0$ ⇒
$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB,medio}^{(\mu)} = \left(\frac{S}{N}\right)_{dB,medio}^{(Quant\_Uniforme)} + 20\log_{10}\frac{\mu}{\ln(1+\mu)}\ dB$$

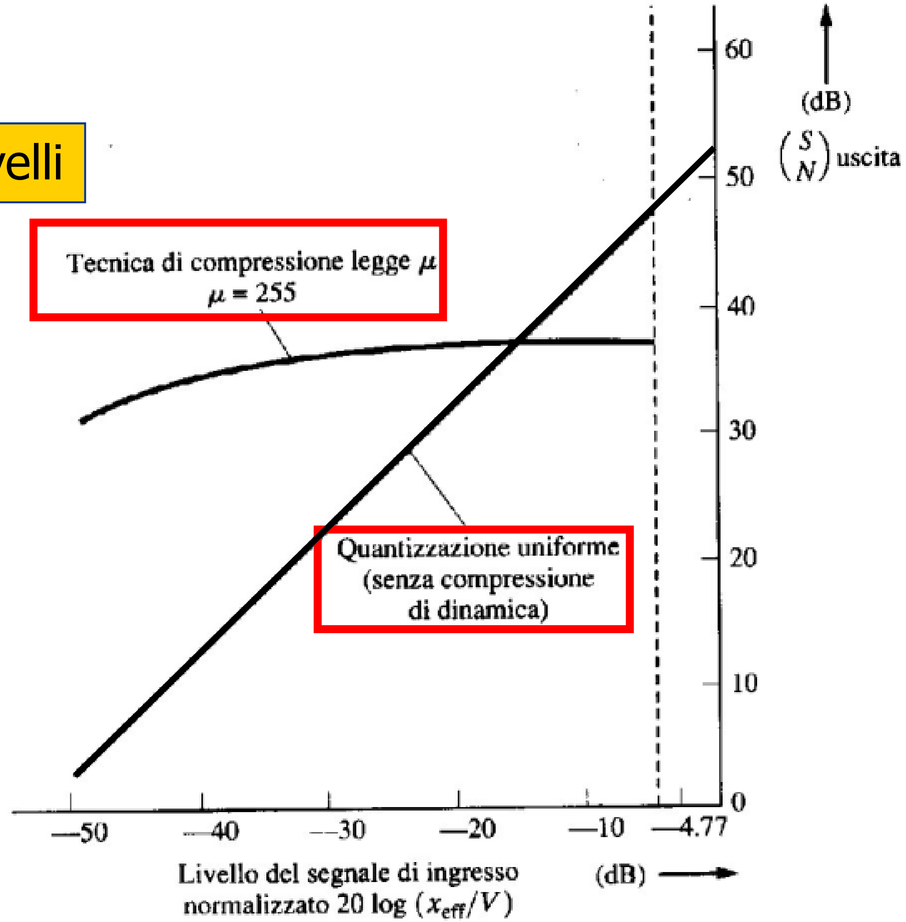
$|x_{eff}| \rightarrow V_p$ ⇒
$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB,medio}^{(\mu)} = 6.02\,n + 4.77 - 20\log_{10}(\ln(1+\mu))\ dB$$

# SNR medio in ricezione: confronto *companding* vs. *non-companding*

CASO di PCM telefonico ($n$=8) e legge μ

Distribuzione $f(x)$ gaussiana del segnale sui livelli

- **NOTA: il rapporto segnale-rumore medio in ricezione**
  - dipende dal livello del segnale per la quantizzazione uniforme
  - è relativamente insensibile al livello del segnale in caso di compading




$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB,medio}^{(Quant\_Uniforme)} = 6.02\,n + 4.77 - 20\log_{10}\frac{V_p}{x_{eff}}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB,medio}^{(\mu)} \approx 6.02\,n + 4.77 - 20\log_{10}\left(\ln(1+\mu)\right)\,dB$$

per $\mu$=255 $\quad 4.77 - 20\log_{10}\left[\ln(1+\mu)\right] = 4.77 - 14.878 = -10.11$

**ESERCIZIO 5.2:** Si deve progettare un sistema di comunicazione che utilizza la tecnica PCM per trasmettere un segnale analogico con le seguenti caratteristiche:

- spettro compreso tra 20 kHz e 40 kHz
- sono richiesti almeno 73 dB di rapporto segnale/rumore medio (in funzionamento sopra soglia)

Si richiede quanto segue:

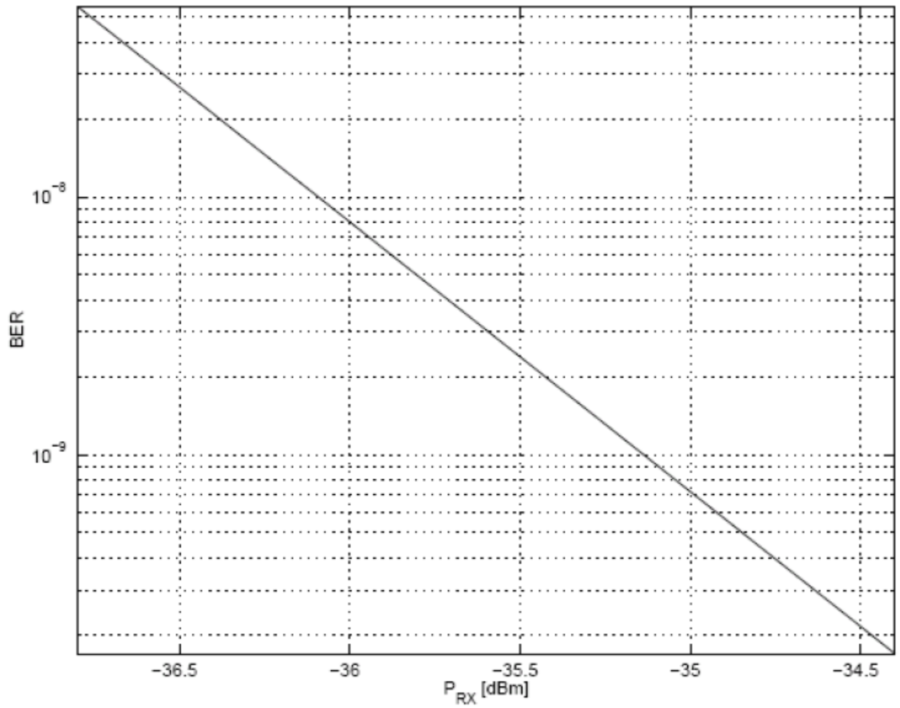
1. Calcolare il numero di bit richiesti dal quantizzatore
2. Calcolare il valore del rapporto segnale/rumore di quantizzazione
3. Calcolare la probabilità di errore $p_e^*$ che il sistema deve avere per lavorare sopra soglia
4. Calcolare la frequenza di campionamento necessaria

5. Calcolare il bit-rate risultante

6. Supponendo che il sistema garantisca una probabilità di errore pari a $p_e = \frac{p_e^*}{2}$, calcolare il rapporto segnale/rumore corrispondente

7. Supponendo che il sistema PCM progettato nella sezione precedente si appoggi su un sistema in ponte radio con le seguenti caratteristiche:

   - Guadagno dell'antenna trsmittente e ricevente: $G_{TX} = G_{RX} = 35$ dB
   - Frequenza di trasmissione: $f_c = 10$ GHz
   - Distanza tra le antenne: $D = 10$ km
   - Probabilità di errore del sistema di trasmissione digitale su cui si appoggia il sistema di trasmissione PCM, in funzione della potenza ricevuta dall'antenna ricevente data dal seguente grafico:




Individuare la potenza richiesta al ricevitore del ponte radio per garantire 73 dB di rapporto segnale/rumore medio all'uscita del sistema PCM

8. Calcolare la potenza trasmessa dall'antenna trasmittente per garantire 73 dB di rapporto segnale/rumore medio all'uscita del sistema PCM

**SOLUZIONE**

1. Siccome il rapporto segnale/rumore all'uscita del sistema PCM peggiora di 3 dB in corrispondenza della probabilità di errore di soglia, bisogna garantire che il nostro sistema abbia 3 dB di margine rispetto a quanto richiesto per garantire il rispetto delle specifiche nel caso peggiore, per cui:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} \geq 73 \text{ dB} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{S}{N}\right)_Q \geq 76 \text{ dB} \simeq 6 \cdot n_{bit}$$

$$n_{bit} = \frac{76}{6} = 12.666 \qquad \Rightarrow \qquad n_{bit} = 13$$

2. Avendo scelto di utilizzare $n_{bit} = 13$, il rapporto segnale/rumore effettivo vale:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_Q \simeq 6 \cdot n_{bit} = 78 \text{ dB}$$

3. La probabilità di errore di soglia vale:

$$p_e^* = \frac{1}{4(2^{2n} - 1)} = 3.72 \cdot 10^{-9}$$

4. La minima frequenza di campionamento, per il teorema di Nyquist, deve essere pari a due volte la massima frequenza presente nel segnale $x(t)$, quindi:

$$f_c \geq 2B_{max} = 80 \text{ kHz}$$

essendo

$$B_{max} = 40 \text{ kHz}$$

5. Il bit rate risultante vale:

$$R_B = n_{bit} \cdot f_c = 1.04 \text{ Mbit/s}$$

6. Supponendo che la probabilità di errore sia $p_e = \frac{p_e^*}{2} = 1.86 \cdot 10^{-9}$ si ottiene il seguente rapporto segnale/rumore in uscita dal sistema PCM:

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)_{out} &= \frac{M^2}{1 + 4(M^2 - 1)p_e} \\ &= \frac{2^{26}}{1 + 4(2^{26} - 1)1.86 \cdot 10^{-9}} \\ &= 4.47 \cdot 10^7 = 76.5 \text{ dB} \end{aligned}$$

7. Per far sì che il rapporto segnale/rumore del sistema non scenda sotto 73 dB devo garantire che la probabilità di errore del sistema di trasmissione sia inferiore alla probabilità di errore di soglia che vale $p_e^* = 3.72 \cdot 10^{-9}$. Dal grafico che lega la probabilità di errore alla potenza ricevuta si trova che:

$$P_{RX} = -35.7 \text{ dBm}$$

8. Per calcolare quanto vale la potenza trasmessa che consente di rispettare le specifiche si utilizza la formula della propagazione in spazio libero:

$$P_{RX} = P_{TX} G_{TX} G_{RX} \left( \frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2$$

e sostituendo:

$$G_{TX} = G_{RX} = 35 \text{ dB} = 3162.27$$

$$\lambda_c = \frac{c}{f_c} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^{10}} = 0.03 \text{ m}$$

$$R = D = 10^4 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} P_{TX} &= P_{RX} \left( \frac{4\pi R}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{G_{TX} G_{RX}} \\ &= 472.26 \text{ mW} = 26.74 \text{ dBm} \end{aligned}$$

**Esercizio 3:** Si consideri un segnale vocale con una densità di probabilità di tipo esponenziale bilatera trancata nell'intrevallo normalizzato $[-1, 1]$, cioè:

$$f_v(x) = \begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ ke^{-\alpha|x|} & |x| \leq 1 \end{cases}$$

Il segnale è inviato ad un sistema PCM:

1. Calcolare il valore della costante $k$ (in funzione di $\alpha$) e disegnare qualitativamente l'andamento della densità $f_v(x)$, interpretandone il significato al variare di $\alpha$.

2. Calcolare la varianza (potenza) del segnale $v(t)$.

3. Calcolare la varianza dell'errore di quantizzazione nel caso di utilizzo di un quantizzatore uniforme ad $M$ livelli nell'intervallo $[-1, 1]$

4. Calcolare lo stesso parametro calcolato del punto (3) ma utilizzando un quantizzatore non uniforme con:

   - $M_1$ intervalli (uguali) in $\left[-1/2, 1/2\right]$
   - $M_2 = M - M_1$ intervalli (uguali) in $\left[-1, -1/2\right] \cup \left[1/2, 1\right]$

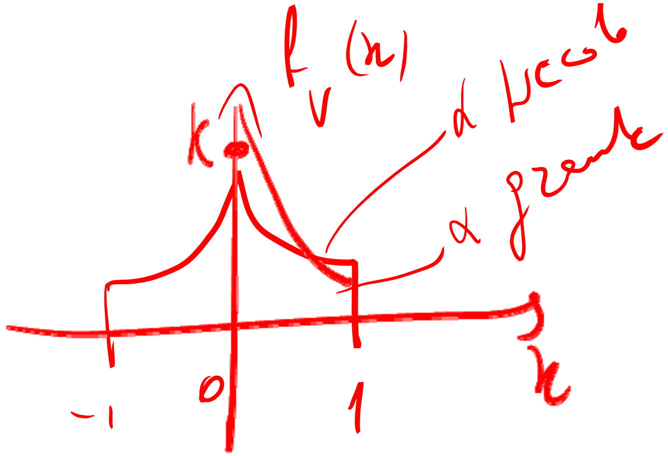
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_V(x)\,dx = 1 \qquad \int_{-1}^{1} k\,e^{-\alpha|x|}\,dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{\alpha}{2\left(1-e^{-\alpha}\right)}\, e^{-\alpha|x|}$$

!?!

2) $$P_V = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2\,dt \underset{\text{ergodic}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_V(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x^2\, k\, e^{-\alpha|x|}\,dx = \frac{2-\left(\alpha^2+2\alpha+2\right)e^{-\alpha}}{\alpha^2\left(1-e^{-\alpha}\right)}$$



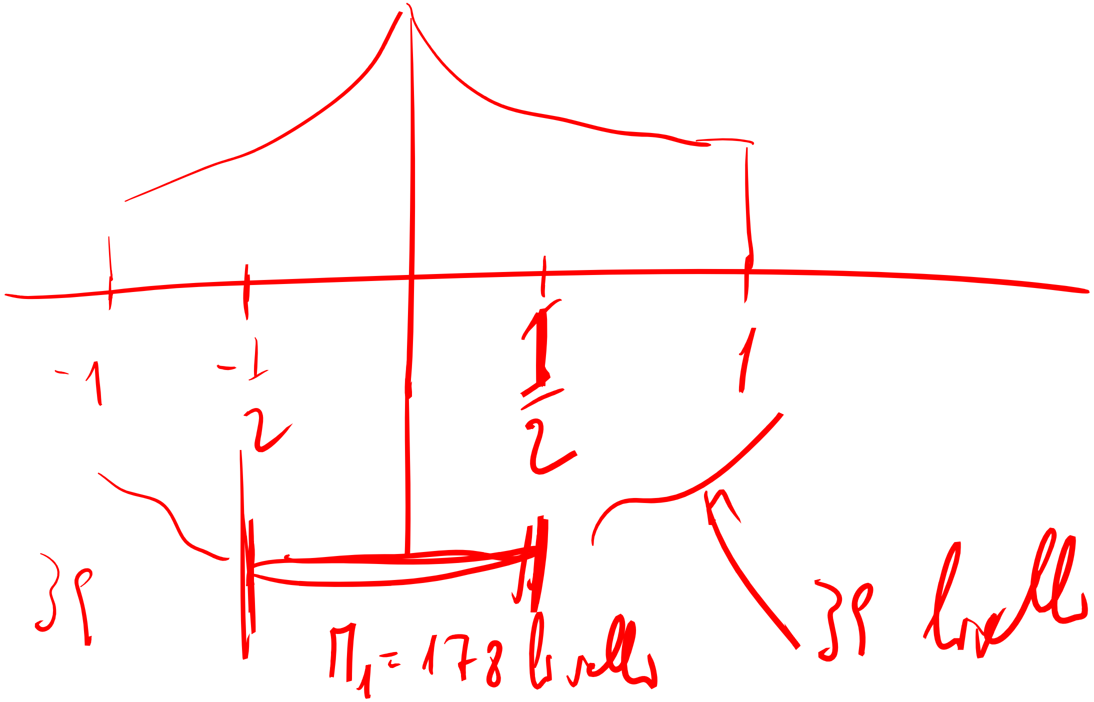

$$f_V(x) = \begin{cases} K e^{-\alpha x} & x \in (-1,1) \\ 0 & \end{cases}$$

3) $P_N^{(unif)} = \dfrac{\Delta^2}{12} = \dfrac{4}{M^2} \cdot \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{3M^2}$

$$\boxed{\Delta = \frac{V_{pp}}{M} = \frac{2}{M}}$$

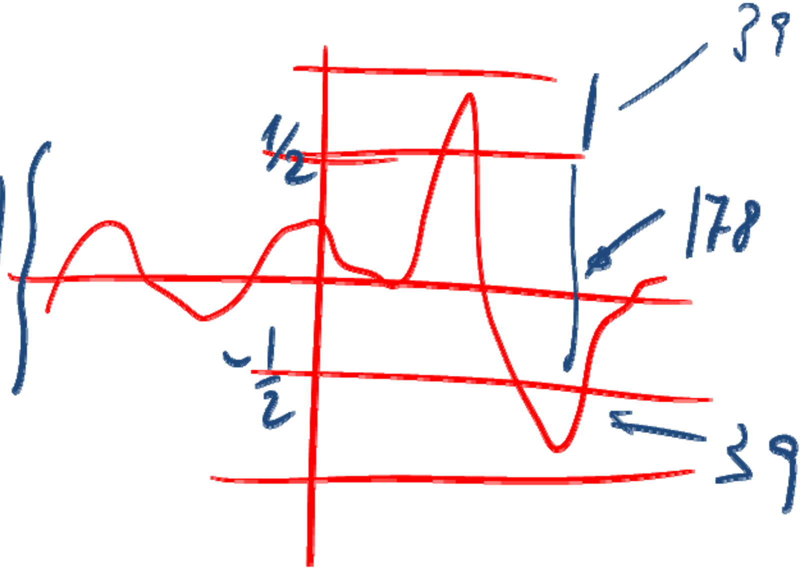
$M = 256$ $\quad P_N^{(unif)} = \dfrac{1}{3 \cdot 256^2} = 5.09 \cdot 10^{-6}$

Es.: $M_1$=178




$$\Delta_{INT} = \frac{1}{178} \Leftarrow \Delta_{INT} = \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{M_1}$$

$$\Delta_{EXT} = \frac{1}{78} \Leftarrow \Delta_{EST} = \frac{1}{M_2}$$



$$P^{(N)}_{INT} = \frac{\Delta^2_{INT}}{12} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{M_1}\right)^2 = 2.63 \cdot 10^{-6}$$

$$P^{(N)}_{EXT} = \frac{\Delta^2_{EXT}}{12} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{M_2}\right)^2 = 1.37 \cdot 10^{-5}$$

$$P^{(N)}_{TOT} = P^{(N)}_{INT} \cdot \underbrace{\text{Prob}\left\{x_v \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right\}}_{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_v(x)\,dx \,=\, \frac{1-e^{-\alpha/2}}{1-e^{-\alpha}}} + P^{(N)}_{EXT} \cdot \underbrace{\text{Prob}\left\{x_v \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right\}}_{1-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_v(x)\,dx}$$

$$=$$

$\alpha = 0.5 \Rightarrow P^{(N)}_{TOT} = 3.47 \; 10^{-6} \longrightarrow$ quantizz. non uniforme

$$\boxed{P^{(segnale)} = 70.5 \; 10^{-3}}$$

Quantizz. uniforme: $P^{(N)}_{TOT} = 5.08 \; 10^{-6}$

Legge $\mu$ $\quad X_{eff} = \sqrt{P^{segnale}} = 2.65 \; 10^{-1}$

$X_{eff} \to 0$ $\quad \frac{S}{N} = 10 \log_{10} \frac{70.5 \; 10^{-3}}{5.08 \; 10^{-6}} + 20 \log_{10} \frac{255}{\ln(1+255)}$