Corso di Comunicazioni Elettriche

3 – MODULAZIONI DIGITALI:
IL TRASMETTITORE

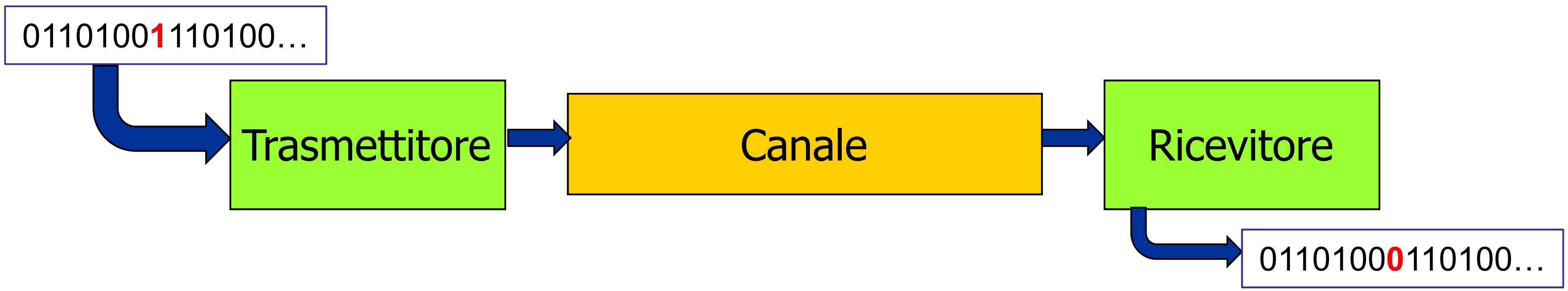
Prof. Giovanni Schembra

Sommario

- **Sistema di trasmissione digitale**
  - Trasmissione digitale con due o più simboli
  - Schema di riferimento della trasmissione digitale
  - Decodifica in assenza di rumore
  - Capacità di canale
- **Rappresentazione vettoriale dei segnali**
- **Codifica digitale multidimensionale**
- **Codifica 2-PAM**

SISTEMA DI TRASMISSIONE DIGITALE

Obiettivo: trasmettere una sequenza di bit ad un ricevitore remoto



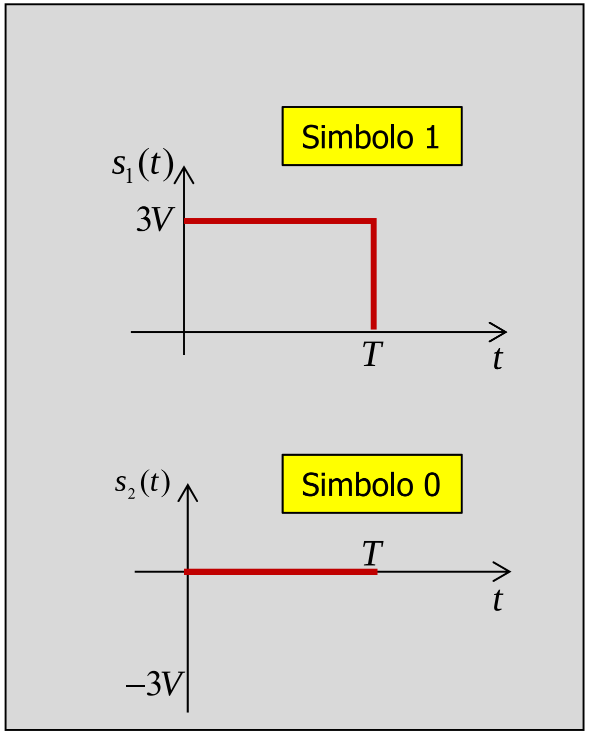
Esempi di codifica di una sequenza binaria da trasmettere

CASO 1: trasmissione digitale binaria

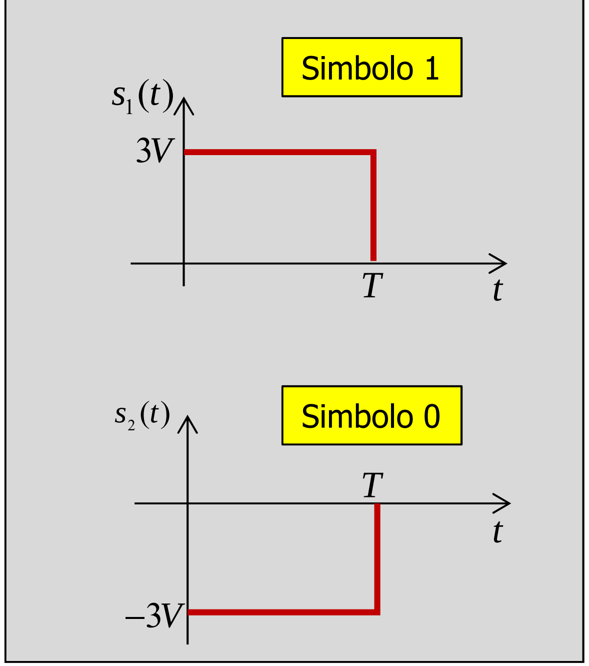
Simboli da trasmettere: {0,1}

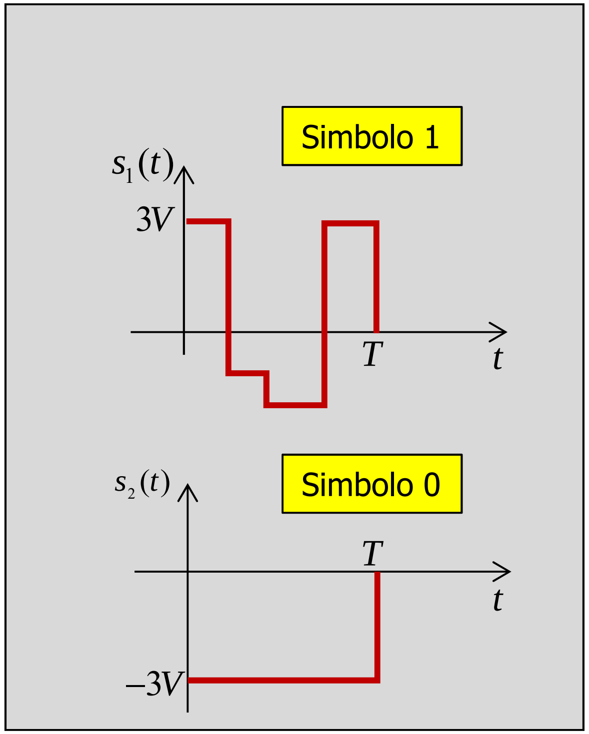
$N = 2$ simboli

Esempi di rappresentazione dei simboli



Segnali antipodali



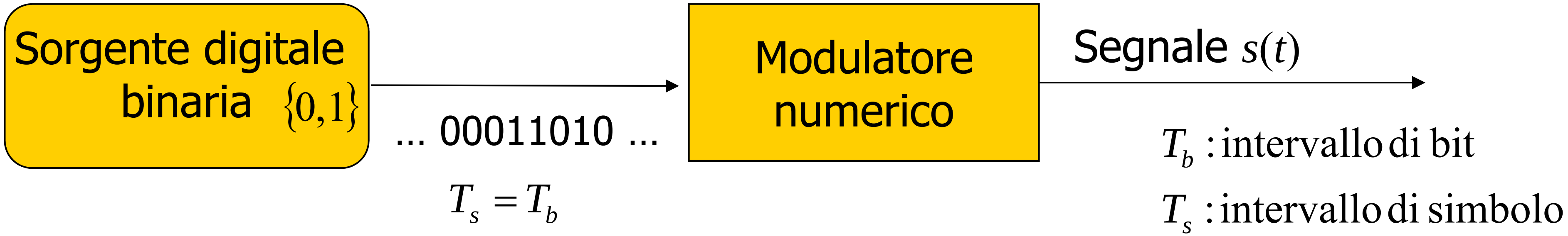


Trasmissione digitale con più di due simboli

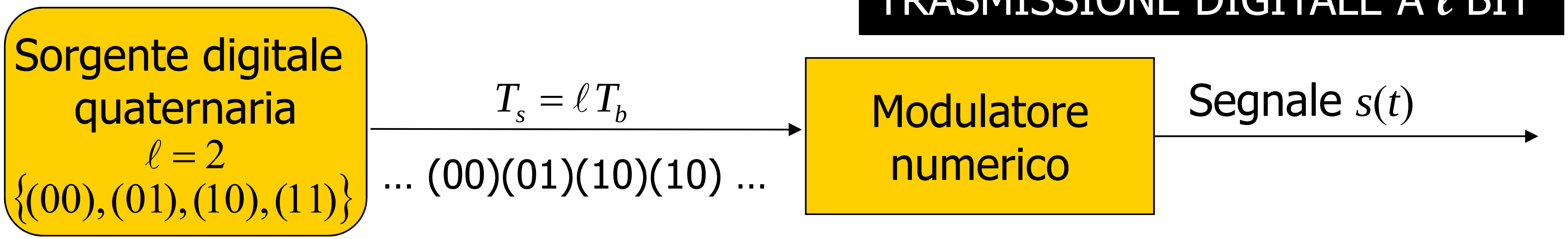
CASO 2: trasmissione digitale di simboli di ℓ bit

- **Obiettivo:** trasmettere i dati digitali emessi da una sorgente binaria, ad una symbol rate minore

TRASMISSIONE BINARIA



TRASMISSIONE DIGITALE A ℓ BIT



T_b : intervallo di bit $\quad T_s$: intervallo di simbolo

Esempi di codifica di una sequenza binaria da trasmettere

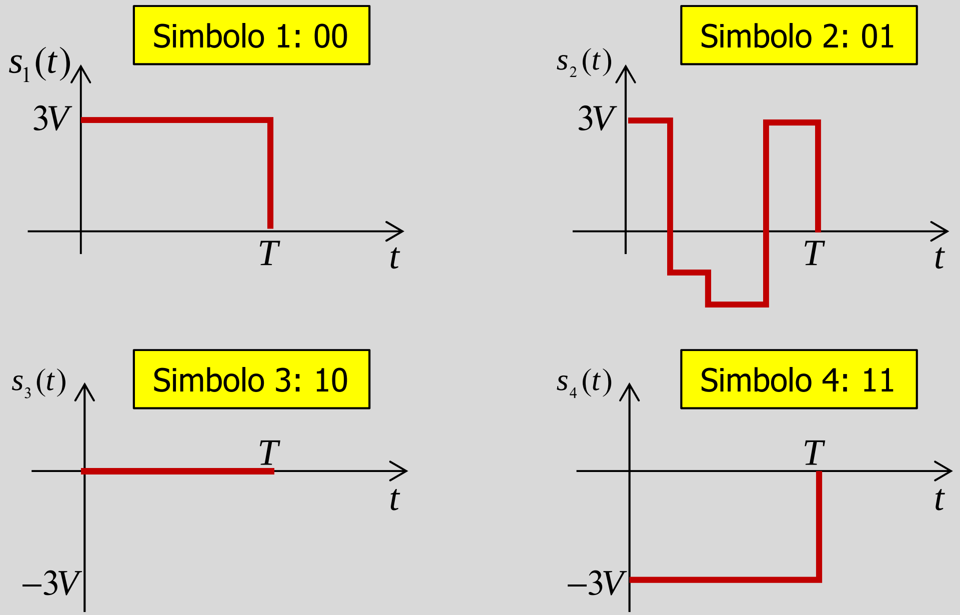
Esempio: trasmissione digitale a 4 simboli

$N = 4$ simboli

Simboli da trasmettere:
{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)}

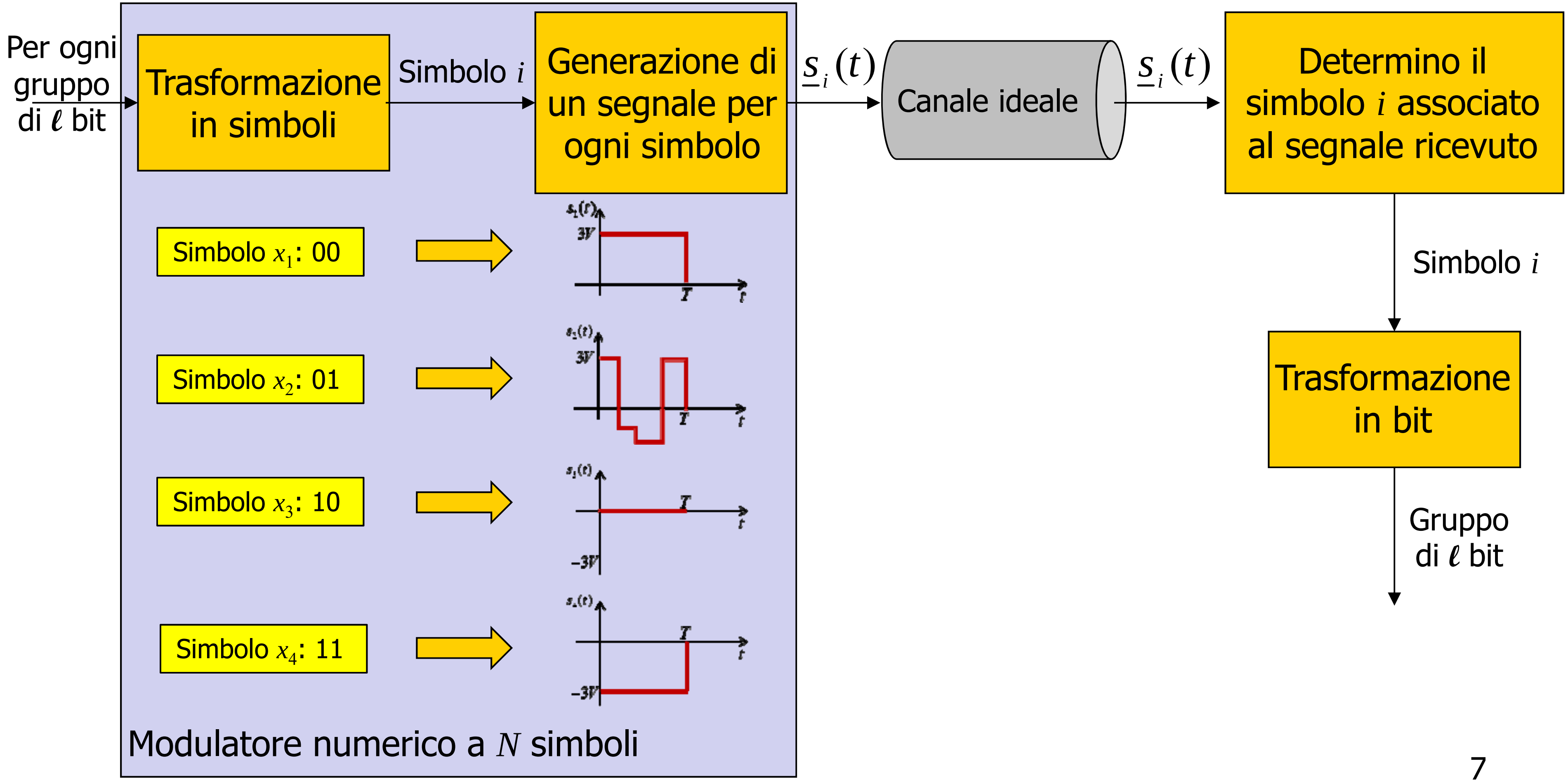
Esempi di rappresentazione dei simboli

Esempio di codifica



IMPORTANTISSIMA

Schema di riferimento della trasmissione digitale

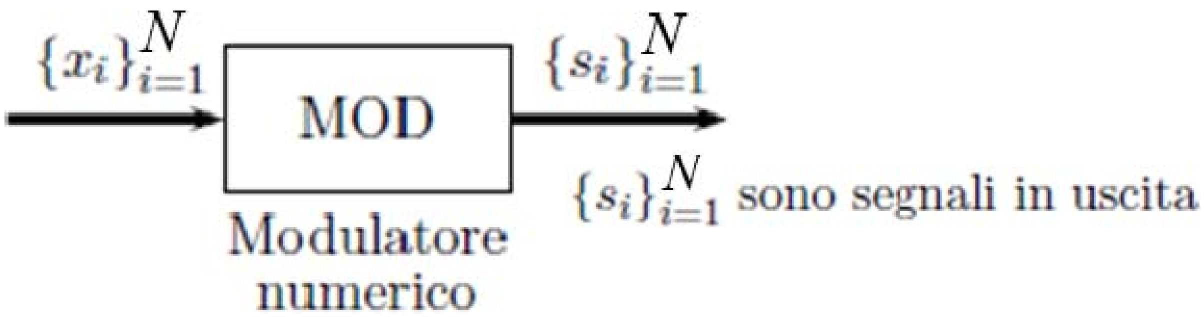


Trasmettitore digitale multidimensionale

- **Ipotesi e notazione**
  - Supponiamo di voler raggruppare i bit di un flusso dati binario in simboli da ℓ bit ciascuno
  - Supponiamo di avere un trasmettitore a $N=2^{\ell}$ simboli, cioè che ha un vocabolario di N simboli
  - Siano:

$\{x_1, x_2, ..., x_N\}$	vocabolario degli N simboli
$s_1(t), ..., s_N(t)$	gli N segnali associati ai simboli

MODULATORE NUMERICO



Esempio di trasmissione digitale multidimensionale

- **Supponiamo di voler trasmettere la seguente sequenza con un trasmettitore a 8 simboli**

110010100010101 …

Tabella di conversione da binario a digitale

$$\begin{bmatrix} s_1(t) & x_1 \equiv 010 \\ s_2(t) & x_2 \equiv 011 \\ s_3(t) & x_3 \equiv 001 \\ s_4(t) & x_4 \equiv 000 \\ s_5(t) & x_5 \equiv 100 \\ s_6(t) & x_6 \equiv 101 \\ s_7(t) & x_7 \equiv 111 \\ s_8(t) & x_8 \equiv 110 \end{bmatrix}$$

- **Dobbiamo allora trasmettere la sequenza:** $x_8\ x_1\ x_5\ x_1\ x_6\ \ldots$

- **SEGNALE TRASMESSO**

$s_8(t)$ | $s_1(t)$ | $s_5(t)$ | $s_1(t)$ | $s_6(t)$ → t

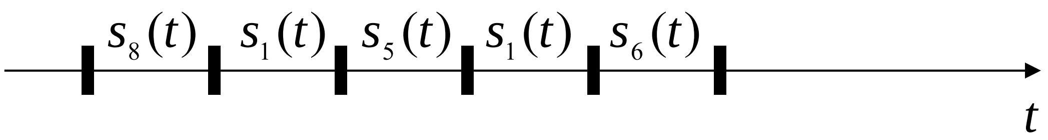
$$\boxed{s(t) = \sum_n v_n(t - nT_s)}$$ con $v_n(t) \in \{s_1(t), \ldots, s_8(t)\}$

Esempio di trasmissione digitale multidimensionale

- **Supponiamo di utilizzare i seguenti segnali:**

$$
\begin{aligned}
s_1(t) &= 1 \cdot \cos(2\pi\ f_c\, t) + 0 \cdot \sin(2\pi\ f_c\, t) \\
s_2(t) &= \sqrt{2}/2 \cdot \cos(2\pi\ f_c\, t) + \sqrt{2}/2 \cdot \sin(2\pi\ f_c\, t) \\
s_3(t) &= 0 \cdot \cos(2\pi\ f_c\, t) + 1 \cdot \sin(2\pi\ f_c\, t) \\
s_4(t) &= -\sqrt{2}/2 \cdot \cos(2\pi\ f_c\, t) + \sqrt{2}/2 \cdot \sin(2\pi\ f_c\, t) \\
s_5(t) &= -1 \cdot \cos(2\pi\ f_c\, t) + 0 \cdot \sin(2\pi\ f_c\, t) \\
s_6(t) &= -\sqrt{2}/2 \cdot \cos(2\pi\ f_c\, t) - \sqrt{2}/2 \cdot \sin(2\pi\ f_c\, t) \\
s_7(t) &= 0 \cdot \cos(2\pi\ f_c\, t) - 1 \cdot \sin(2\pi\ f_c\, t) \\
s_8(t) &= \sqrt{2}/2 \cdot \cos(2\pi\ f_c\, t) - \sqrt{2}/2 \cdot \sin(2\pi\ f_c\, t)
\end{aligned}
$$

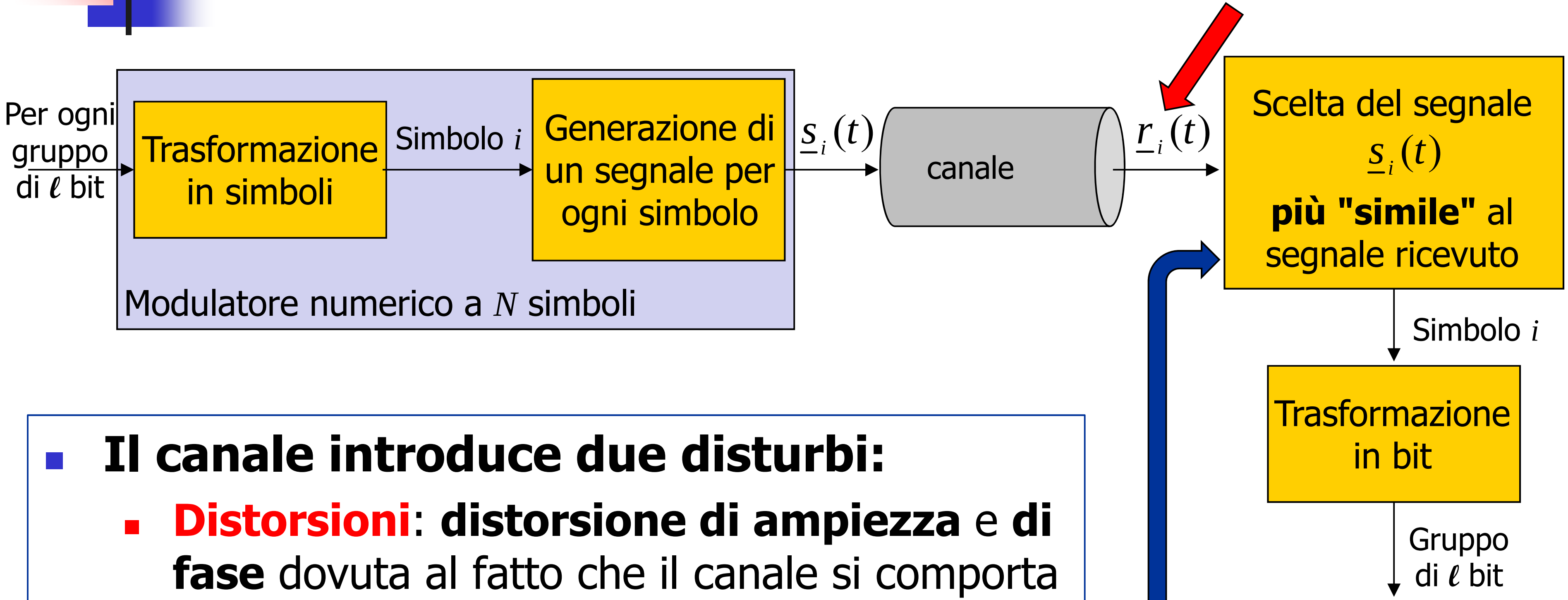
- **SEGNALE TRASMESSO**



$$
\boxed{s(t) = \sum_n v_n(t - nT_s)}
$$

IMPORTANTISSIMA

Decodifica in presenza di rumore



- **Il canale introduce due disturbi:**
  - **Distorsioni**: **distorsione di ampiezza** e **di fase** dovuta al fatto che il canale si comporta come un filtro LTI non ideale (tratta le frequenze del segnale in maniera diversa in termini di amplificazione e ritardi)
  - Aggiunta di **rumore Gaussiano bianco**

Si usa la rappresentazione vettoriale dei segnali

IMPORTANTISSIMA

Problemi introdotti sul canale

Il canale introduce principalmente due problemi:

1 - Distorsione di ampiezza, di fase e attenuazione

- Il canale può essere modellato con un filtro caratterizzato da una risposta in frequenza $H(f)$
- Dato che $H(f)$ non è costante su tutte le frequenze, il canale introduce una **distorsione di ampiezza**
- Negli intervalli di frequenza che $H(f)$ non ha fase lineare su tutte le frequenze, il canale introduce **distorsione di fase**
- Anche se negli intervalli di frequenza utilizzati per la trasmissione $H(f)$ fosse costante, avrebbe modulo minore di 1, introducendo così un'**attenuazione** sul segnale, ma questa si risolve banalmente con un amplificatore

IMPORTANTISSIMA

Problemi introdotti sul canale

Il canale introduce principalmente due problemi:

2 – Rumore

- Nel resto del corso per semplicità considereremo solo un rumore AWGN (Additive Gaussian White Noise)
- **Additivo**
  - Si somma al segnale trasmesso
- **Gaussian**
  - ***Processo aleatorio Gaussiano***, cioè tale che, se campionato in una *n*-upla di istanti qualunque, qualunque sia *n*, le variabili aleatorie estratte sono congiuntamente gaussiane.
  - Ne segue che, se campionato in un solo istante, la variabile aleatoria estratta è gaussiana
- **White**
  - Ha spettro di potenza costante, e quindi la funzione di autocorrelazione è un impulso di Dirac nell'origine. Ne segue che la potenza è infinita e la media è nulla

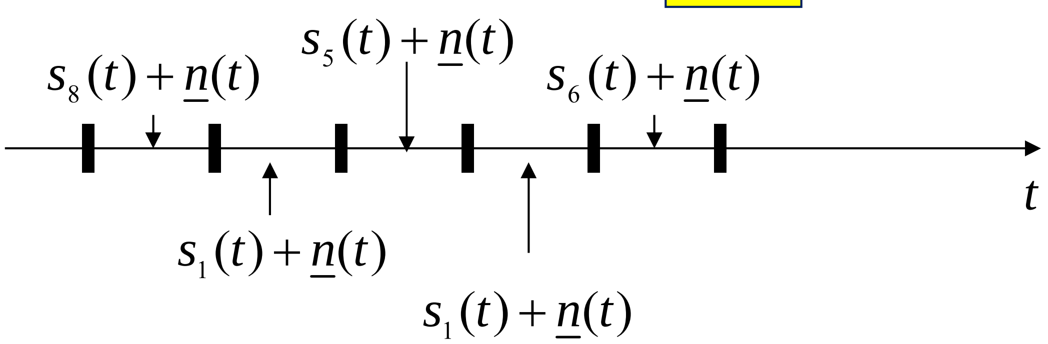
Modulatore e demodulatore numerico

Una volta ottenuti, i simboli possono essere trasmessi!!!

Associamo un segnale a energia finita ad ogni simbolo

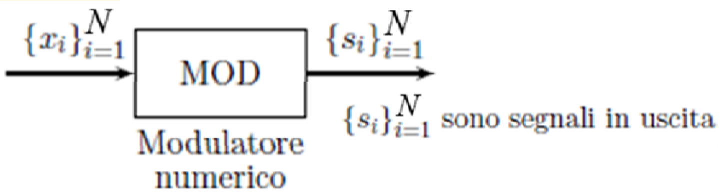
La sua **forma d'onda** avrà un impatto sulla banda. Se ha una banda superiore a quella del canale, verrà distorto, con possibile ISI (lo vedremo dopo)	La sua **energia** avrà un impatto sulla robustezza al rumore di canale

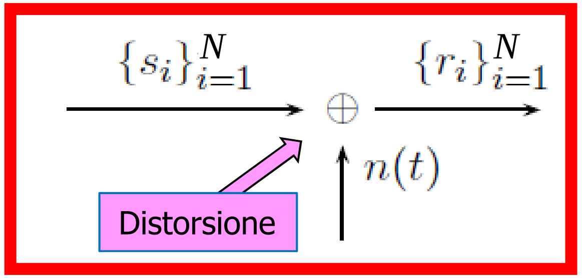
- **SEGNALE RICEVUTO** $\boxed{r(t)}$



Modulatore e demodulatore numerici

MODULATORE NUMERICO

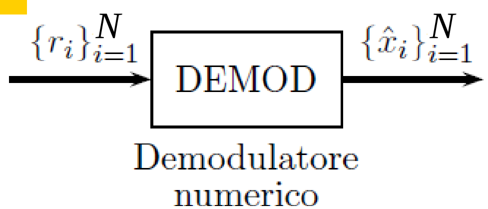




CANALE

DEMODULATORE NUMERICO

$\{r_i\}_{i=1}^N$ sono i segnali ricevuti in ingresso



$\{\hat{x}_i\}_{i=1}^N$ sono i simboli stimati in uscita

Il demodulatore deve dunque, in base ad alcuni parametri, *stimare* quale sia il simbolo che con più probabilità era stato emesso dalla sorgente.

Potenza media in trasmissione e in ricezione

Vedremo che, per garantire che la probabilità di errore sia non superiore ad una certa soglia, sarà necessario garantire una energia media per bit (E_b). Tale energia dovrà essere garantita in ricezione.

Ipotizzando un ritmo di trasmissione R=1/T, possiamo dire che sarà necessario ricevere una potenza media di segnale pari a:

$$P_r = E_b/T = E_b R$$

Potenza di ricezione

Ipotizzando inoltre un canale trasmissivo caratterizzato da una attenuazione (γ) costante nella banda di interesse possiamo ricavare anche la potenza in trasmissione:

$$P_t = P_r \gamma$$

Potenza in trasmissione

Si ricorda che γ è in genere molto grande (>>1) si ha infatti γ=1/K dove K è il guadagno (minore di 1) del mezzo trasmissivo.

Altre formule importanti: il DeciBel

- Definizione**: guadagno in deciBel di un circuito**

$$dB = 10\log_{10}\frac{P_{out}}{P_{in}}$$

- **Nota:**
  - questa definizione indica il livello di potenza in uscita rispetto a quello in ingresso, senza indicarne i livelli assoluti
- Definizione**: rapporto segnale-rumore in dB**

$$(S/N)_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{P_{segnale}}{P_{rumore}}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{V_{eff,segnale}}{V_{eff,rumore}}\right)$$

$$P = \frac{V_{eff}^2}{R}$$

Altre formule importanti

- **Il concetto di dBm**
  - **dBm** è un'abbreviazione di *decibel-milliwatts* per rappresentare il rapporto di potenza in decibel tra la potenza misurata e una potenza di riferimento di 1 mW
  - Usata per comodità nelle trasmissioni radio, a microonde e su fibra ottica per esprimere in maniera concise una misura di potenza assoluta valori di potenza assoluta molto grandi e molto piccolo
  - È definita come segue:

$$\boxed{P_{dBm} = 10\log_{10}\frac{P_{mW}}{1\,\mathrm{mW}}}$$

Esempio

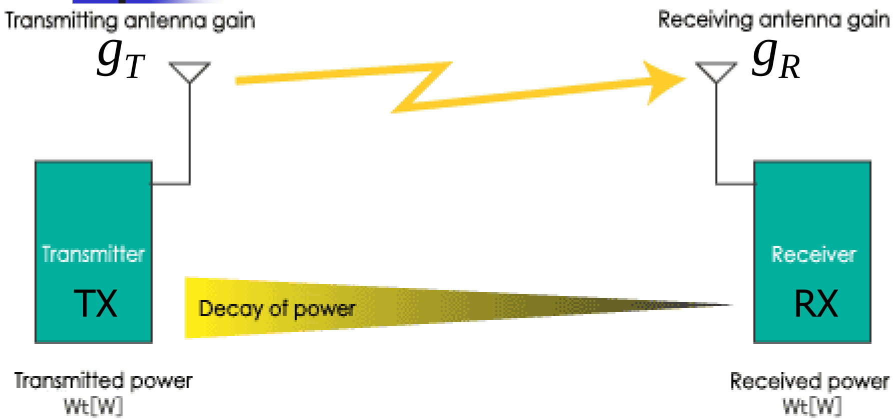
$$P_{lin} = 125\,\mathrm{mW} \qquad P_{dBm} = 10\log_{10}\frac{125\,\mathrm{mW}}{1\,\mathrm{mW}} = 20.96\,\mathrm{dBm}$$

Altre formule importanti

$$P_{dBm} = 10\log_{10}\frac{P_{mW}}{1\,\mathrm{mW}}$$

Power level	Power	Notes
80 dBm	100 kW	Typical transmission power of FM radio station with 50-kilometre range
60 dBm	1 kW	Typical combined radiated RF power of microwave oven elements
55 dBm	~300 W	Typical single-channel RF output power of a Ku-Band GEO-stationary satellite
40 dBm	10 W	Typical PLC (Power Line Carrier) transmit power
33 dBm	2 W	Maximum output from a UMTS/3G mobile phone (Power class 1 mobiles) Maximum output from a GSM850/900 mobile phone
27 dBm	500 mW	Typical cellular phone transmission power. Maximum output from a UMTS/3G mobile phone (Power class 2 mobiles)
21 dBm	125 mW	Maximum output from a UMTS/3G mobile phone (Power class 4 mobiles)
4 dBm	2.5 mW	Bluetooth Class 2 radio, 10 m range
0 dBm	1.0 mW	Bluetooth standard (Class 3) radio, 1 m range
−100 dBm	0.1 pW	Minimum received signal power of wireless network (802.11 variants) Typical received signal power from a GPS satellite
−127.5 dBm	0.178 fW	Minimum received signal power of wireless network (802.11 variants) Typical received signal power from a GPS satellite
−174 dBm	4 zW	Thermal noise floor for 1 Hz bandwidth at room temperature (20 °C)
10^{-15} W	fW	femtowatt
10^{-21} W	zW	zeptowatt

Legame tra potenza ricevuta e trasmessa nello spazio libero



$$P_R = P_T \frac{g_T g_R}{(4\pi d/\lambda)^2}$$

$$\gamma_{SL} = \left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2$$ Attenuazione in spazio libero

P_T : Potenza trasmessa

P_R : Potenza ricevuta

g_T : Guadagno dei dispositivi di tx

g_R : Guadagno dei dispositivi di rx

d : distanza tra tx ed rx

λ : Lunghezza d'onda del segnale trasmesso

$$\lambda = \frac{c}{f_c}$$

$c = 3 \cdot 10^8$ m/s (velocità della luce)

f_c : frequenza portante del segnale

IMPORTANTISSIMA

Capacità di canale: *C* [bit/s]

- **Bontà di un sistema di comunicazione:**
  - per i sistemi digitali, il sistema *ottimo* è quello che minimizza la probabilità di errore sul bit, con certi vincoli di potenza e di banda del segnale trasmesso
- **Teorema di Shannon**
  - Se la velocità di sorgente, *R*, è inferiore alla capacità del canale, *C*, la probabilità di errore sul bit può essere resa piccola a piacere (con codifiche di canale)
- **Definizione di capacità di canale (condizione limite: valore massimo della bit-rate sopportabile dal canale senza perdite):**

$$\boxed{R \leq C = B \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)}$$

B : larghezza di banda del canale in Hz

S/N : rapporto segnale - rumore (in scala lineare, e non in dB) all'ingresso del ricevitore

Capacità di canale

$$\boxed{R \le C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right)}$$

B : larghezza di banda del canale in Hz

S/N : rapporto segnale - rumore (in scala lineare, e non in dB) all'ingresso del ricevitore

- **Per aumentare la capacità di canale, possiamo:**
  - aumentare la banda assegnata al canale
  - aumentare la potenza del segnale in ricezione, *S*
    - aumentando la potenza del segnale in trasmissione
    - diminuendo l'attenuazione di canale (per esempio utilizzando un intervallo di frequenze in cui il canale attenua meno: modulazione)
    - utilizzando un canale meno rumoroso, ove possibile (schermatura del cavo, utilizzo di fibre ottiche, etc.)

IMPORTANTISSIMA

RAPPRESENTAZIONE VETTORIALE DEI SEGNALI

Permette di trasformare un segnale in un punto geometrico.

IN RICEZIONE: l'interpretazione del simbolo trasmesso a partire dal segnale ricevuto potrà così essere effettuata con tecniche geometriche

Rappresentazione vettoriale dei segnali

- **Sia T il tempo richiesto per trasmettere un simbolo**
- **Consideriamo un segnale $s_i(t)$ definito sull'intervallo $[0, T]$**
- **Il segnale $s_i(t)$ viene utilizzato per trasmettere nel canale di comunicazione il simbolo x_i**
- **Energia del segnale $s_i(t)$:**

$$E_i = \int_0^T s_i^2(t)\, dt$$

- **DEFINIZIONE: Prodotto scalare tra due segnali reali**

$$\boxed{< s_i(t), s_j(t) >= \int_0^T s_i(t) \cdot s_j(t) dt}$$

Segnali ortogonali

- **Definizione:** $\psi_m(t)$ $\psi_n(t)$ segnali complessi SONO ORTOGONALI sull'intervallo $a < t < b$ se:

$$\langle \psi_n(t), \psi_m(t) \rangle = \int_a^b \psi_n(t)\,\psi_m^*(t)\,dt = 0 \qquad n \neq m$$

- **L'insieme di questi segnali ha quindi elementi tali che:**

$$\int_a^b \psi_n(t)\,\psi_m^*(t)\,dt = K_n\,\delta_{nm}$$

dove: $\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ 1 & \text{se } n = m \end{cases}$ Delta di Kronecker

- **Se:**

$K_n = 1 \;\; \forall n$ ⇒ l'insieme $\{\psi_n(t)\}$ è un insieme di segnali ortonormali

K_n è l'energia del segnale ψ_n

Rappresentazione di un segnale su base ortonormale e PROIEZIONE SUI VERSORI

- **Un qualunque segnale $s_i(t)$ può essere espresso in modo univoco mediante un insieme di segnali ortonormali, tramite uno sviluppo in serie:**

$$\boxed{s_i(t) = \sum_{m=1}^{+\infty} s_{i,m} \psi_m(t)}$$

IMPORTANTISSIMO

- **Ogni termine $s_{i,m}$ rappresenta la componente di $s_i(t)$ proiettata sul versore $\psi_m(t)$. Può essere ricavata come segue:**

COMPONENTE DI UN SEGNALE rispetto ad un versore

Prodotto scalare tra il segnale $s_i(t)$ e il generico m-esimo versore

$$s_{i,m} = < s_i(t), \psi_m(t) > = \int_0^T s_i(t) \cdot \psi_m(t) dt$$

Energia di un segnale multidimensionale

- **Dato un segnale $x(t)$**
  - rappresentato su una base ortonormale $\{\psi_k(t)\}_{k=1}^{M}$

cioè $$x(t) = \sum_{k=1}^{M} x_k \psi_k(t)$$

  - ha energia:

$$E_x = \int x^2(t)dt = \int \left[\sum_{k=1}^{M} x_k \psi_k(t)\right]^2 dt = \int \sum_{k=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} x_k x_n \psi_k(t)\psi_n(t)dt$$

$$= \sum_{k=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} x_k x_n \int \psi_k(t)\psi_n(t)dt = \sum_{k=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} x_k x_n \delta(k-n) = \sum_{k=1}^{M} x_k^2$$

ψ [pron.: psi]

Cioè: **l'energia di $x(t)$** corrisponde alla **distanza al quadrato del punto x dall'origine degli assi**

$$E_x = \sum_{k=1}^{M} x_k^2$$

Rappresentazione di un segnale su base ortonormale

- **Noti i versori, l'insieme delle componenti $s_{i,m}$ rappresenta in maniera univoca il segnale $s_i(t)$**

IMPORTANTISSIMO

$$\boxed{s_i(t) \Longleftrightarrow \underline{s}_i = (s_{i,1}, s_{i,2}, s_{i,3}, s_{i,4}, \ldots)}$$

- **Analogamente a quanto fatto per il calcolo dell'energia, si può dimostrare che:**

$$\boxed{< s_i(t), s_j(t) >= \int_0^T s_i(t) \cdot s_j(t)dt = \sum_{m=1}^{+\infty} s_{i,m} s_{j,m}}$$

Il prodotto scalare tra due segnali può essere ottenuto come la somma dei prodotti delle loro componenti

Procedimento di **ortogonalizzazione di Gram-Schmidt**

- **Obiettivo:**
  - costruire un insieme di segnali ortonormali che rappresentino un insieme qualsiasi di segnali $s_i(t)$
- **Applicazione:**
  - costruzione di una base di segnali ortonormali adatta per descrivere le forme d'onda utilizzate per trasmettere gli N simboli di un alfabeto discreto
- **Consideriamo N segnali:**

$$\boxed{\{s_i(t)\}_{i=1}^{N}}$$

definiti nell'intervallo $[0,T]$

nulli altrove

Procedimento di **ortogonalizzazione di Gram-Schmidt**

- **Determinare:**
  - un insieme di M funzioni ortonormali definite sull'intervallo $[0,T]$
  - tali che tutti gli N segnali $s_i(t)$ possano essere espressi come combinazione lineare di tali funzioni
- **Cardinalità dello spazio di tali funzioni ortonormali:**

$$\boxed{M \leq N}$$

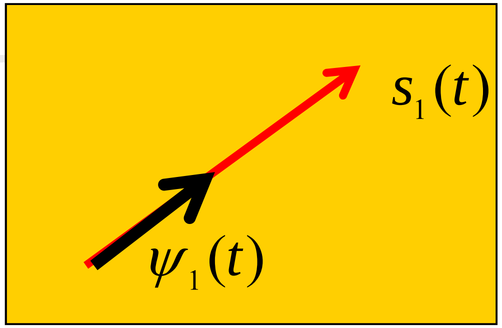
con N: cardinalità dello spazio dei simboli (numero di segnali)

M: cardinalità dello spazio ortonormale

Procedimento di **ortogonalizzazione di Gram-Schmidt**

- **Operativamente:**

Si pone $v_1(t) = s_1(t)$



Si determina la prima funzione ortonormale

$$\boxed{\psi_1(t) = \frac{v_1(t)}{\sqrt{E_{v_1}}}}$$

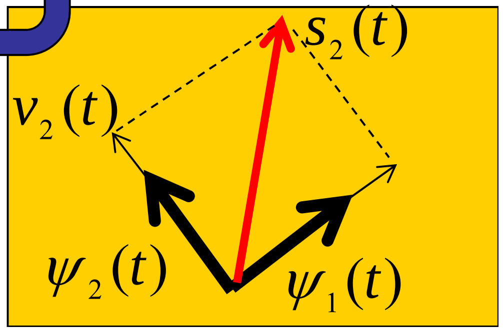
dove E_{v1} è l'energia del segnale $v_1(t)$

Proiezione di $s_2(t)$ lungo $\psi_1(t)$

Si pone $\boxed{v_2(t) = s_2(t) - \boxed{< s_2(t), \psi_1(t) >} \psi_1(t)}$

Il segnale $v_2(t)$ è ortogonale a $\psi_1(t)$

cioè si sottrae a $s_2(t)$ la sua componente lungo la funzione $\psi_1(t)$.



Si determina la seconda funzione ortonormale

$$\boxed{\psi_2(t) = \frac{v_2(t)}{\sqrt{E_{v_2}}}}$$

Procedimento di **ortogonalizzazione di Gram-Schmidt**

- **Si continua analogamente con le altre componenti:**

Si pone $\boxed{v_i(t) = s_i(t) - \sum_{j=1}^{i-1} < s_i(t), \psi_j(t) > \psi_j(t)}$

Si determina la *i*-esima funzione ortonormale $\boxed{\psi_i(t) = \frac{v_i(t)}{\sqrt{E_{v_i}}}}$

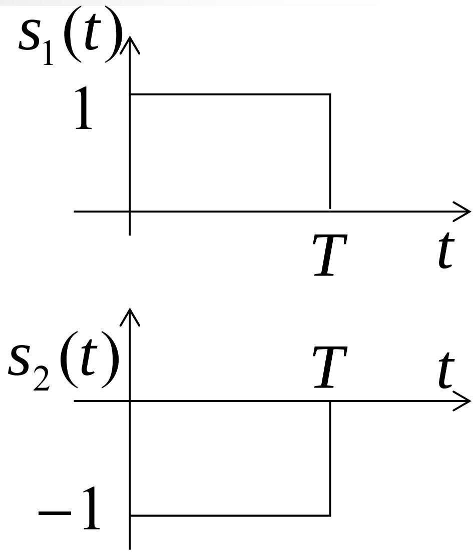
- **Caso possibile:** $\exists i \quad \text{tale che} \quad v_i(t) = 0$

$\Rightarrow \quad \psi_i(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M < N}$

Procedimento di **ortogonalizzazione di Gram-Schmidt**

ESEMPIO 1: Segnali antipodali

$$s_1(t) = -s_2(t)$$



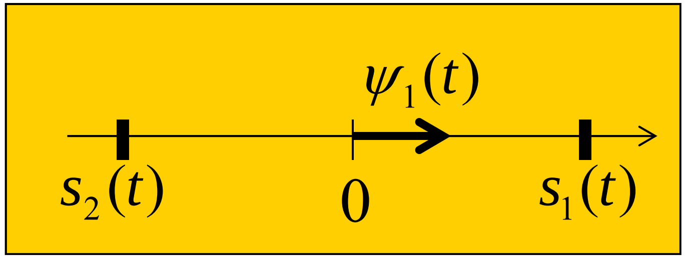
- **È sufficiente una base con un solo segnale:** $\psi_1(t)$

$\Rightarrow$ $N = 2 \qquad M = 1$

- **Se i due segnali hanno la stessa energia, *E***

$$s_1(t) = \sqrt{E} \cdot \psi_1(t) \qquad s_2(t) = -\sqrt{E} \cdot \psi_1(t)$$

$$\underline{s}_1(t) = \left(\sqrt{E}\right) \qquad \underline{s}_2(t) = \left(-\sqrt{E}\right)$$



Procedimento di **ortogonalizzazione di Gram-Schmidt**

ESEMPIO 2: Segnali ortogonali

$$\langle s_i(t), s_j(t) \rangle = 0 \quad \forall i, j, \ \text{con}\ i \neq j$$

In questo caso occorre utilizzare $N = M$ funzioni ortonormali

La funzione $\psi_i(t)$ per $1 \leq i \leq M$ è definita come

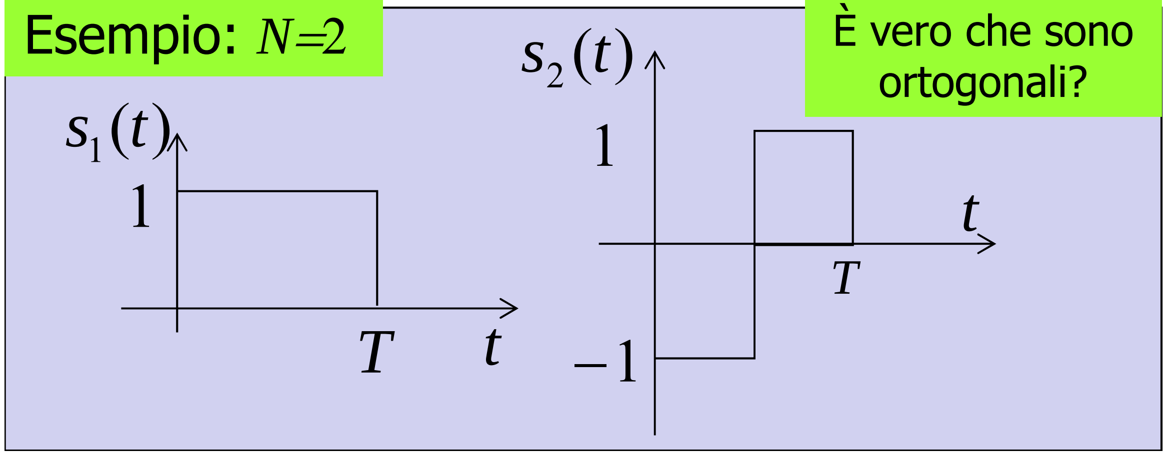
$$\boxed{\psi_i(t) = \frac{s_i(t)}{\sqrt{E_{s_i}}}}$$

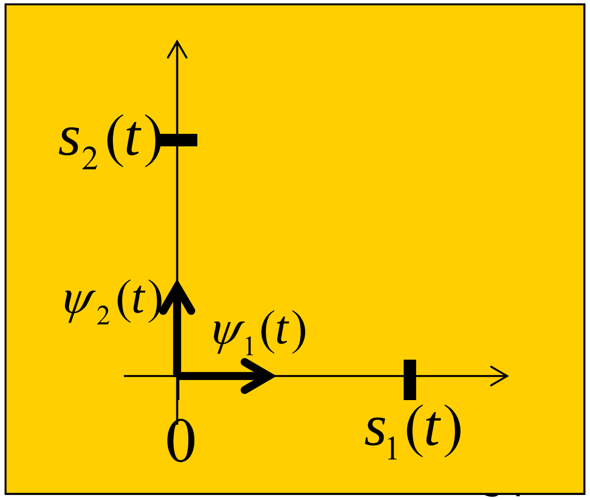
Se tutti gli N segnali $s_i(t)$ hanno la stessa energia E, il vettore corrispondente a $s_i(t)$ risulta

$$\boxed{\underline{s}_i(t) = (0, 0, ..., 0, s_{i,i} = \sqrt{E}, 0, ..., 0)}$$

Esempio: $N=2$

È vero che sono ortogonali?





Procedimento di **ortogonalizzazione di Gram-Schmidt**

ESEMPIO 3: Segnali biortogonali

$$\begin{cases} s_1(t) = -s_3(t) \\ s_2(t) = -s_4(t) \\ s_1(t) \text{ ed } s_2(t) \ \text{ ortogonali} \end{cases}$$

Questi segnali, detti *segnali biortogonali*, possono essere descritti mediante una base di due funzioni ortonormali $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$ definite nel seguente modo

$N = 4$

$M = 2$

$$\boxed{\psi_i(t) = \frac{s_i(t)}{\sqrt{E_{s_i}}}} \quad \text{per } i = 1 \text{ e } i = 2$$

Nel caso in cui i quattro segnali abbiano la stessa energia *E*, possono essere rappresentati nello spazio bidimensionale come

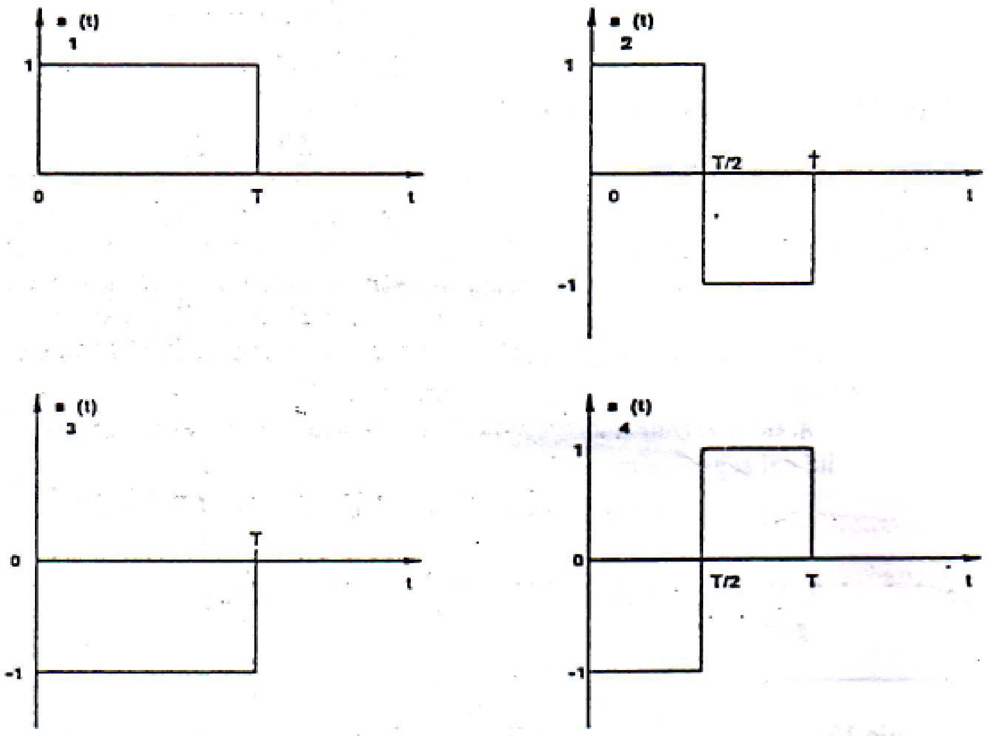
$$\begin{cases} \underline{s}_1 = (\sqrt{E}, 0) \\ \underline{s}_2 = (0, \sqrt{E}) \\ \underline{s}_3 = (-\sqrt{E}, 0) \\ \underline{s}_4 = (0, -\sqrt{E}) \end{cases}$$

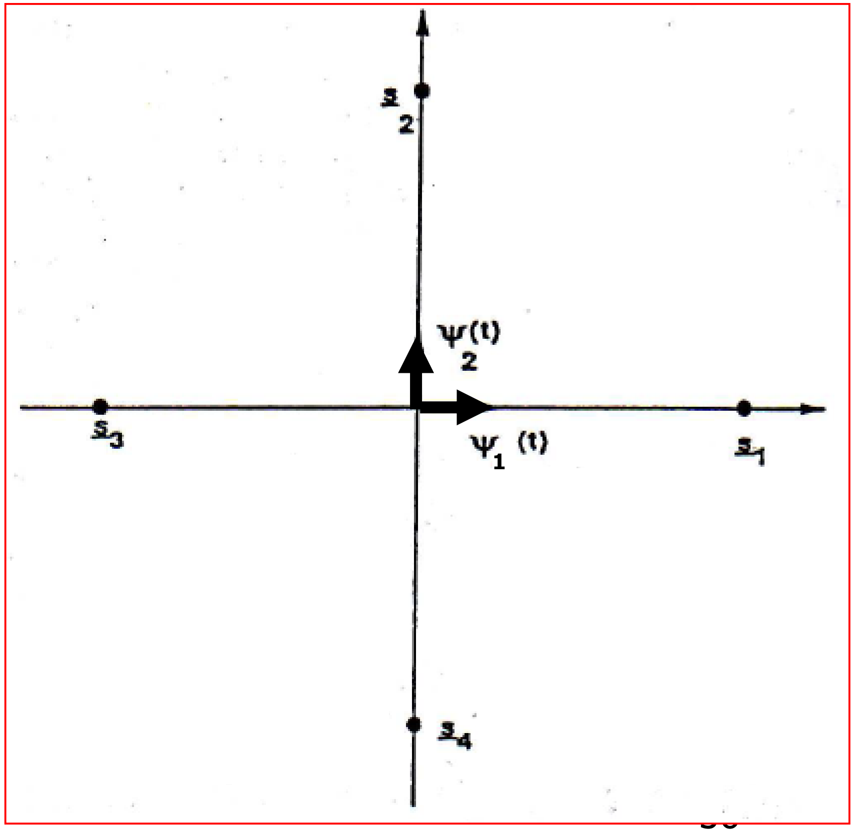
Detta anche
modulazione 4-PSK

Procedimento di **ortogonalizzazione di Gram-Schmidt**

ESEMPIO 3: Segnali biortogonali

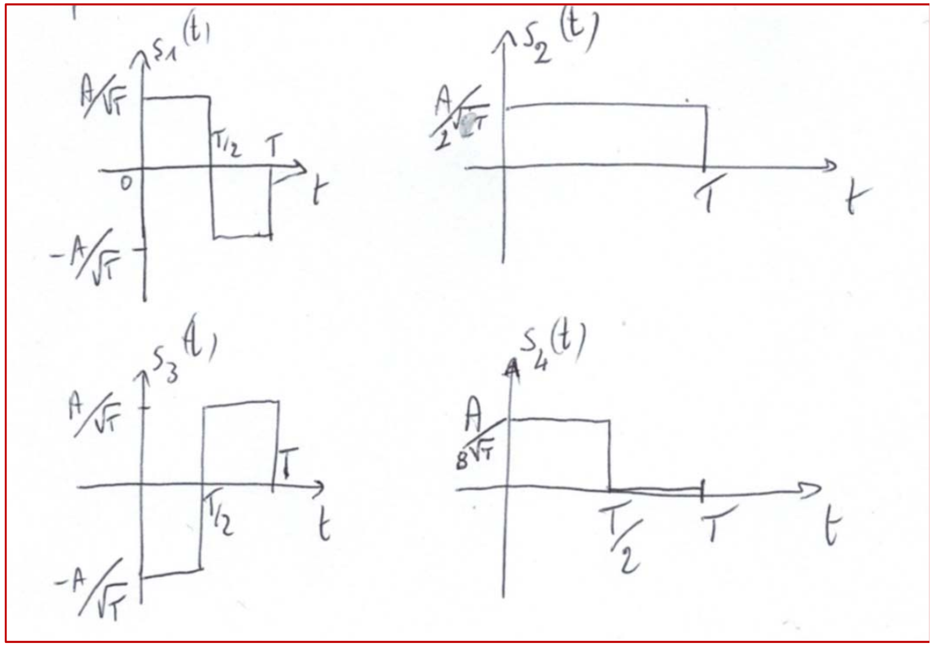
$$\begin{cases} s_1(t) = -s_3(t) \\ s_2(t) = -s_4(t) \\ s_1(t) \text{ ed } s_2(t) \ \text{ ortogonali} \end{cases}$$





ESERCITAZIONE SUL Procedimento di **ortogonalizzazione di Gram-Schmidt**

Si determini la base ortonormale dello spazio generato dai segnali rappresentati in figura, definiti nell'intervallo $(0, T)$, e si rappresenti la corrispondente costellazione



SOLUZIONE

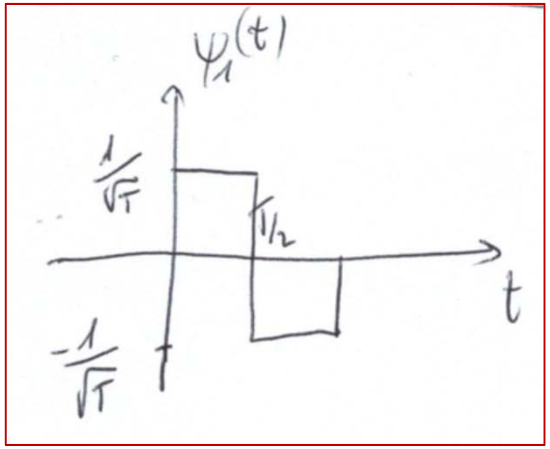
Energia dei segnali

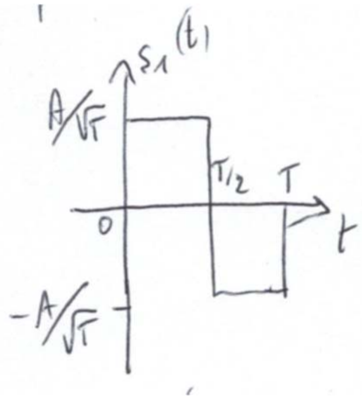
$$E_1 = \frac{T}{2}\frac{A^2}{T} + \frac{T}{2}\frac{A^2}{T} = A^2 \qquad E_3 = \frac{A^2}{T}\frac{T}{2} + \frac{A^2}{T}\frac{T}{2} = A^2$$

$$E_2 = \frac{A^2}{4T} \cdot T = \frac{A^2}{4} \qquad E_4 = \frac{A^2}{64T} \cdot \frac{T}{2} = \frac{A^2}{128}$$

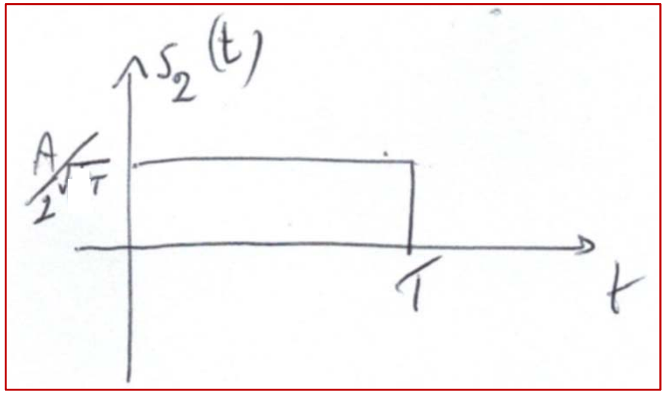
$$V_1(t) = s_1(t)$$

$$\psi_1(t) = \frac{V_1(t)}{\sqrt{E_1}}$$

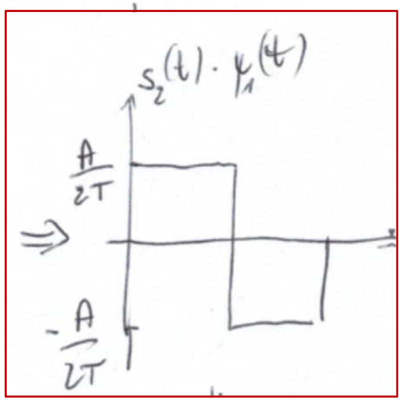




$$V_2(t) = s_2(t) - \langle s_2(t), \psi_1(t) \rangle \, \psi_1(t)$$



$$\boxed{\langle s_2(t), \psi_1(t) \rangle}$$



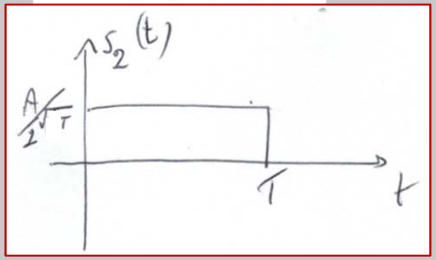
Area = 0

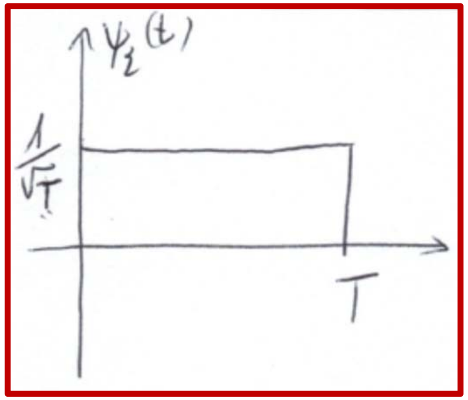
$$\langle s_2(t), \psi_1(t) \rangle = 0$$

$$v_2(t) = s_2(t) - \langle s_2(t), \psi_1(t) \rangle \, \psi_1(t) \Rightarrow v_2(t) = s_2(t) - \emptyset \cdot \psi_1(t)$$

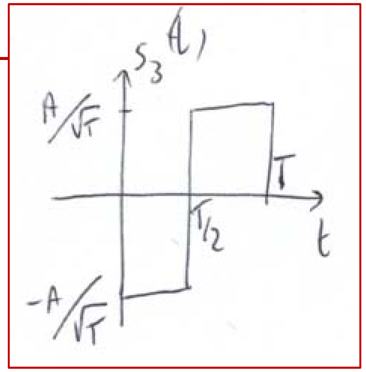
$$\Rightarrow v_2(t) = s_2(t)$$

$$\psi_2(t) = \frac{s_2(t)}{\sqrt{E_2}}$$

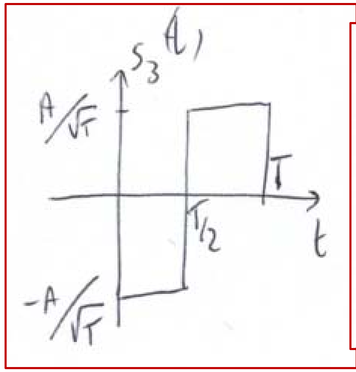


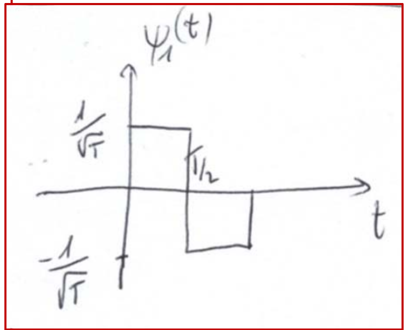


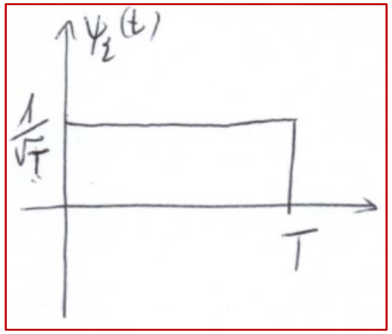
$$v_3(t) = s_3(t) - \langle s_3(t), \psi_1(t) \rangle \, \psi_1(t) - \langle s_3(t), \psi_2(t) \rangle \, \psi_2(t)$$

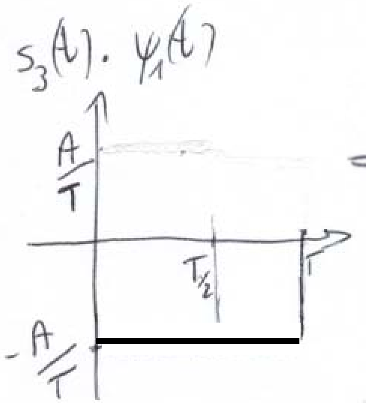


$$V_3(t) = s_3(t) - \langle s_3(t), \psi_1(t) \rangle \psi_1(t) - \langle s_3(t), \psi_2(t) \rangle \psi_2(t)$$



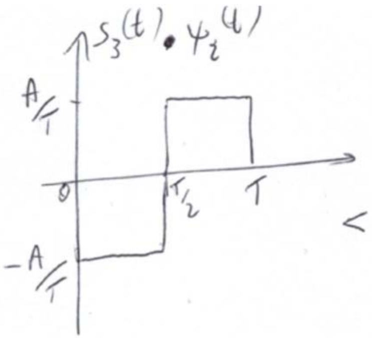






$\Rightarrow$ Area $= -A$

$$\boxed{\langle s_3(t), \psi_1(t) \rangle = -A}$$

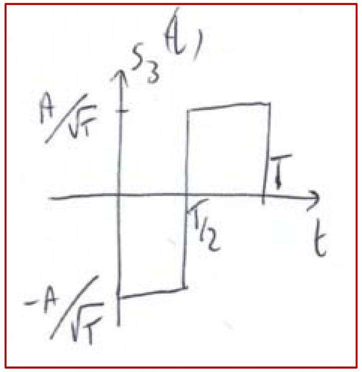


Area $= 0$

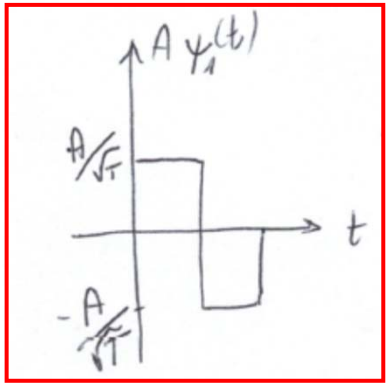
$\langle s_3(t), \psi_2(t) \rangle = 0$

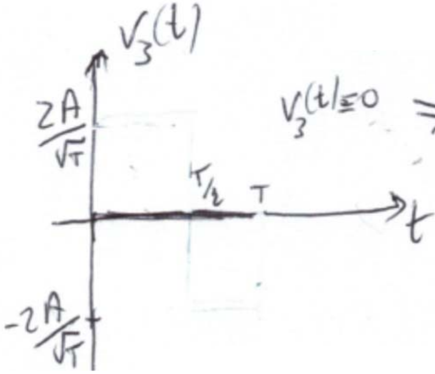
Dunque

$$V_3(t) = s_3(t) - (-A)\,\psi_1(t) - 0 \cdot \psi_2(t) = s_3(t) + A\,\psi_1(t)$$



+



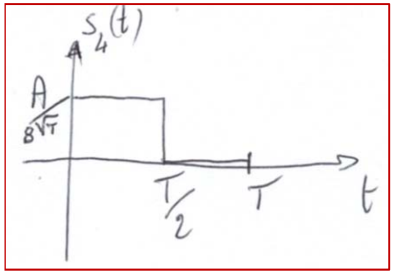


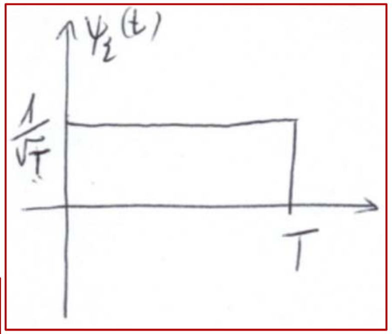
$v_3(t) \equiv 0 \Rightarrow E_{v_3} = 0$

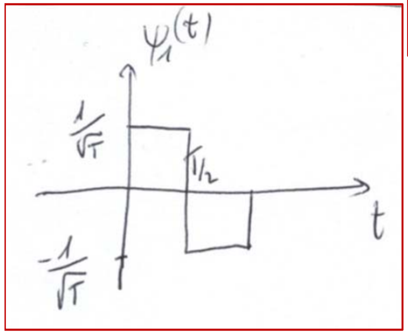
$$\boxed{\psi_3(t) = 0}$$

$$v_4(t) = s_4(t) - \langle s_4(t), \psi_1(t) \rangle \psi_1(t) - \langle s_4(t), \psi_2(t) \rangle \psi_2(t) +$$

$$- \langle s_4(t), \psi_3(t) \rangle \psi_3(t)$$

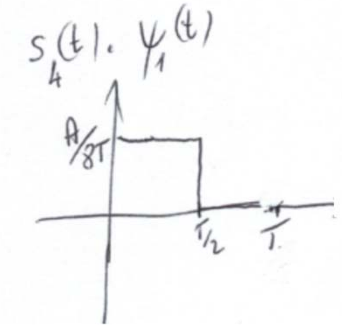




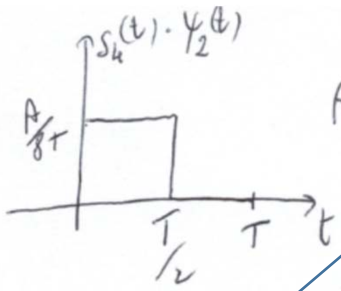


$$v_4(t) = s_4(t) - \langle s_4(t), \psi_1(t)\rangle \psi_1(t) - \langle s_4(t), \psi_2(t)\rangle \psi_2(t) +$$
$$- \langle s_4(t), \psi_3(t)\rangle \psi_3(t)$$

Calcoliamo $v_4(t)$



$$\text{Area} = \frac{A}{8T} \cdot \frac{T}{2} = \frac{A}{16}$$



$$\text{Area} = \frac{A}{8T} \cdot \frac{T}{2} = \frac{A}{16}$$

TRA $\left(0 \text{ e } \frac{T}{2}\right)$:

$$\frac{A}{8\sqrt{T}} - \frac{A}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} - \frac{A}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} = \emptyset$$

TRA $\left(\frac{T}{2} \text{ e } T\right)$:

$$0 - \frac{A}{16}\left(-\frac{1}{\sqrt{T}}\right) - \frac{A}{16}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) = \emptyset$$

$$v_4(t) \equiv 0 \Rightarrow \boxed{\psi_4(t) = 0}$$

Calcoliamo ora la costellazione

$$\begin{cases} s_1(t) = v_1(t) = \\ \psi_1(t) = \dfrac{v_1(t)}{\sqrt{E_1}} \end{cases} \Rightarrow s_1(t) = \sqrt{E_1}\ \psi_1(t)$$

$$s_1(t) = (\sqrt{E_1}, 0)$$

$$\hookrightarrow \boxed{s_1(t) = (A, 0)}$$

$$\longleftrightarrow$$

$$v_2(t) = s_2(t) - \langle s_2(t), \psi_1(t) \rangle \psi_1(t)$$

$$\Rightarrow s_2(t) = v_2(t) + \langle s_2(t), \psi_1(t) \rangle \psi_1(t)$$

$$s_2(t) = \sqrt{E_2}\ \psi_2 + 0 \cdot \psi_1(t)$$

$$\Rightarrow s_2(t) = (0, \sqrt{E_2})$$

$$\rightarrow \boxed{s_2(t) = (0, A/2)}$$

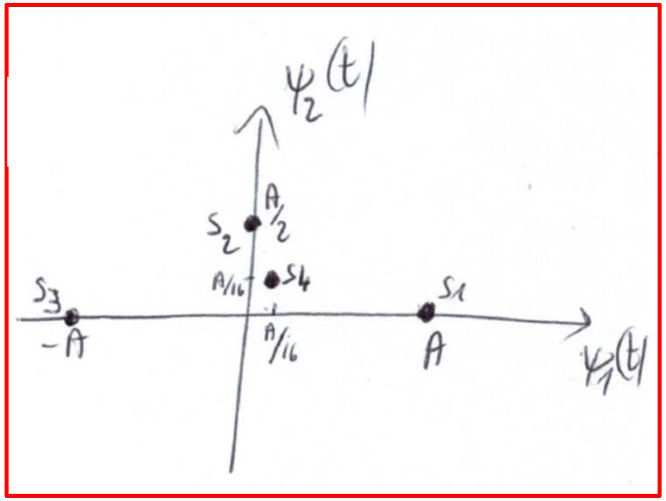
$$V_3(t) = s_3(t) - \langle s_3(t), \psi_1(t)\rangle \psi_1(t) - \langle s_3(t), \psi_2(t)\rangle \psi_2(t)$$

$$\Rightarrow s_3(t) = \underbrace{V_3(t)}_{=0} + (-A)\,\psi_1(t) + \emptyset\,\psi_2(t)$$

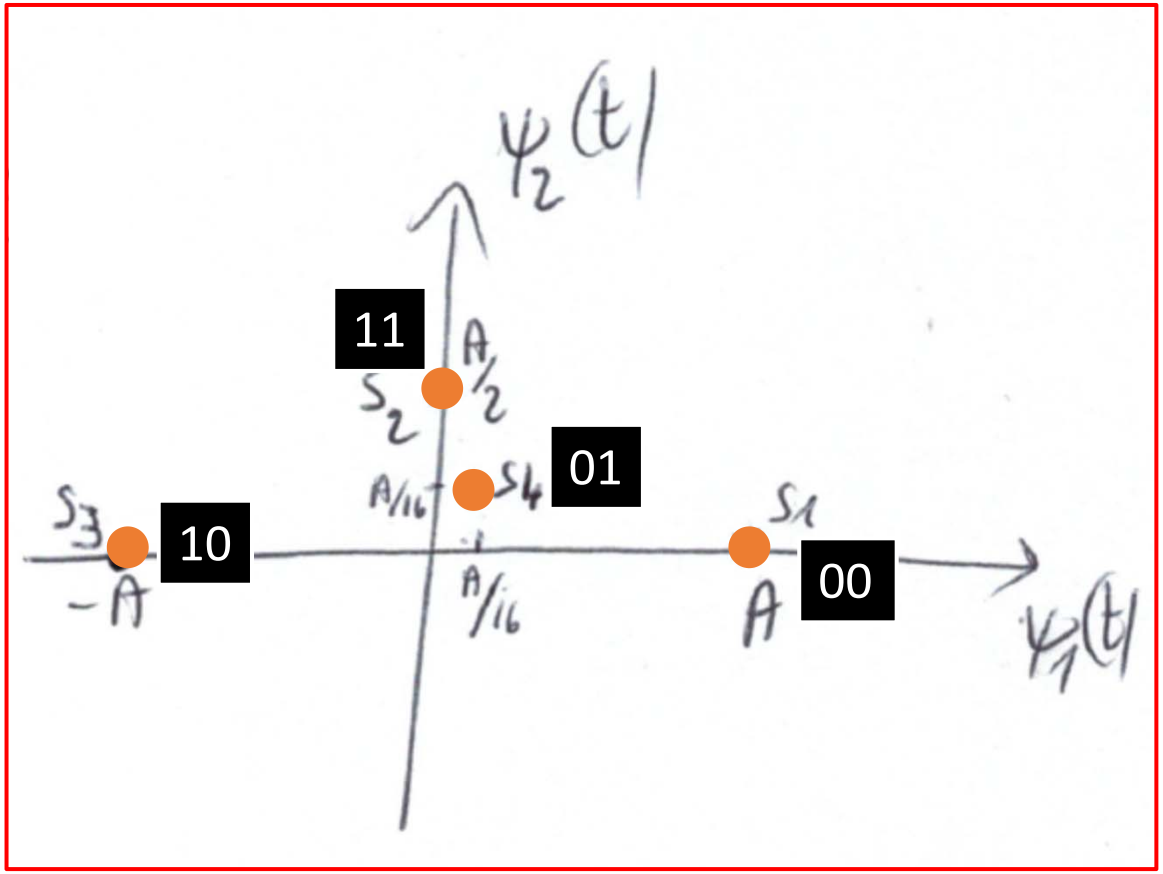
$$\Rightarrow \boxed{s_3(t) = (-A, \emptyset)}$$

$$s_4(t) = \underbrace{V_4(t)}_{0} + \frac{A}{16}\psi_1(t) + \frac{A}{16}\psi_2(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{s_4(t) = \left(\frac{A}{16}; \frac{A}{16}\right)}$$



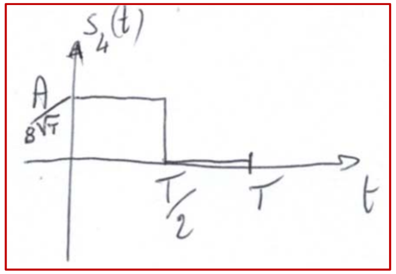
Possibile assegnazione di simboli ai segnali



Esempio di trasmissione

$\boxed{01}$111001000110010010100111 01

$$s_4(t) = \frac{A}{16}\psi_1(t) + \frac{A}{16}\psi_2(t)$$



CODIFICA DIGITALE MULTIDIMENSIONALE

IMPORTANTISSIMA

Applicazione della rappresentazione vettoriale dei segnali alle comunicazioni digitali

Decidiamo di trasmettere raggruppando i bit a ℓ a ℓ, cioè utilizzando N simboli

Scegliamo N segnali per rappresentarli

Gram-Schmidt

Determiniamo il minimo numero M di versori per rappresentare gli N segnali

Ogni segnale, e quindi ogni simbolo, può essere rappresentato geometricamente da un punto nello spazio M–dimensionale

Per trasmettere il generico simbolo x_i, trasmetterò il seguente segnale:

$$s_i(t) = \sum_{m=1}^{M} s_{i,m} \psi_m(t)$$

$s_{i,m}$ sono le coordinate del simbolo nello spazio M-dimensionale

A causa dei disturbi sul canale, il segnale trasmesso per ciascun simbolo verrà distorto, e quindi il suo punto nello spazio verrà spostato

Il demodulatore numerico dovrà determinare (geometricamente) il simbolo che più probabilmente è stato trasmesso, tra quelli della costellazione di trasmissione

Progettazione del modulatore digitale

Obiettivo: rappresentare *N* simboli diversi per trasmettere una sequenza con un vocabolario di *N* simboli

Approcci equivalenti

1

Scelgo *N* segnali → Applico il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt → Derivo gli *M* versori (che verranno utilizzati in ricezione per l'interpretazione dei simboli ricevuti)

Applico il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt → Derivo la costellazione (un insieme di *N* punti *M*-dimensionali)

2

Scelgo *M* versori → Scelgo una costellazione (un insieme di *N* punti *M*-dimensionali) → Derivo gli *N* segnali come combinazione lineare degli *M* versori, usando le coordinate dei punti della costellazione

Trasmettitore digitale multidimensionale

- **Ipotesi e notazione**
  - Supponiamo di voler raggruppare i bit di un flusso dati binario in simboli da ℓ bit ciascuno
  - Supponiamo di avere un trasmettitore a $N=2^\ell$ simboli, cioè che ha un vocabolario di N simboli
  - Supponiamo di aver scelto gli N segnali in uno spazio M-dimensionale, cioè che necessitano di M versori per essere rappresentati
  - Siano:

$1, 2, \ldots, N$	gli N simboli
$s_1(t), \ldots, s_N(t)$	gli N segnali associati ai simboli
$\psi_1(t), \ldots, \psi_M(t)$	gli M versori della base ortonormale

Esempio di trasmissione digitale multidimensionale

- **Supponiamo di voler trasmettere la seguente sequenza con un trasmettitore a 8 simboli**

110010100010101 …

- **Dobbiamo allora trasmettere la sequenza:** $x_8\, x_1\, x_5\, x_1\, x_6 \ldots$

$$s_i(t) = \sum_{m=1}^{M} s_{i,m} \psi_m(t)$$

Tabella di conversione da binario a digitale

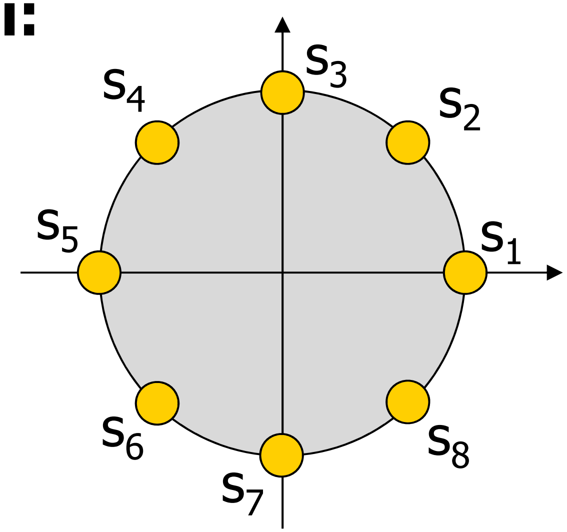
$$\begin{bmatrix} s_1(t) & x_1 \equiv 010 \\ s_2(t) & x_2 \equiv 011 \\ s_3(t) & x_3 \equiv 001 \\ s_4(t) & x_4 \equiv 000 \\ s_5(t) & x_5 \equiv 100 \\ s_6(t) & x_6 \equiv 101 \\ s_7(t) & x_7 \equiv 111 \\ s_8(t) & x_8 \equiv 110 \end{bmatrix}$$

Esempio di trasmissione digitale multidimensionale

Supponiamo di utilizzare i seguenti segnali:

$$s_1(t) = [1 \cdot \cos(2\pi\, f_c\, t) + 0 \cdot \sin(2\pi\, f_c\, t)] \cdot \Pi(t/T_S)$$
$$s_2(t) = \left[\sqrt{2}/2 \cdot \cos(2\pi\, f_c\, t) + \sqrt{2}/2 \cdot \sin(2\pi\, f_c\, t)\right] \cdot \Pi(t/T_S)$$
$$s_3(t) = [0 \cdot \cos(2\pi\, f_c\, t) + 1 \cdot \sin(2\pi\, f_c\, t)] \cdot \Pi(t/T_S)$$
$$s_4(t) = \left[-\sqrt{2}/2 \cdot \cos(2\pi\, f_c\, t) + \sqrt{2}/2 \cdot \sin(2\pi\, f_c\, t)\right] \cdot \Pi(t/T_S)$$
$$s_5(t) = [-1 \cdot \cos(2\pi\, f_c\, t) + 0 \cdot \sin(2\pi\, f_c\, t)] \cdot \Pi(t/T_S)$$
$$s_6(t) = \left[-\sqrt{2}/2 \cdot \cos(2\pi\, f_c\, t) - \sqrt{2}/2 \cdot \sin(2\pi\, f_c\, t) \cdot \Pi(t/T_S)\right]$$
$$s_7(t) = [0 \cdot \cos(2\pi\, f_c\, t) - 1 \cdot \sin(2\pi\, f_c\, t)] \cdot \Pi(t/T_S)$$
$$s_8(t) = \left[\sqrt{2}/2 \cdot \cos(2\pi\, f_c\, t) - \sqrt{2}/2 \cdot \sin(2\pi\, f_c\, t)\right] \cdot \Pi(t/T_S)$$

COSTELLAZIONE



Per rendere i segnali limitati nell'intervallo di simbolo, e ad energia finita

Per avere energia unitaria

BASE ORTONORMALE

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(2\pi\, f_c\, t) \cdot \Pi\left(\frac{t}{T_S}\right)$$

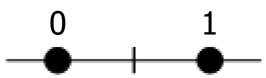
$$\psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin(2\pi\, f_c\, t) \cdot \Pi\left(\frac{t}{T_S}\right)$$

Possibili tecniche di modulazione

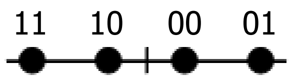
- **Rappresentazione dei simboli con segnali in uno spazio <u>monodimensionale</u>**
  - Modulazione binaria 2-PAM
  - Modulazione digitale L-PAM
- **Rappresentazione dei simboli con segnali in uno spazio <u>multidimensionale</u>**
  - Modulazioni digitali bidimensionali
    - N-PSK
    - N-QAM
    - Modulazioni con una costellazione bidimensionale generica
  - Modulazioni digitali M-dimensionali
    - N-FSK

Esempi

MODULAZIONI MONODIMENSIONALI



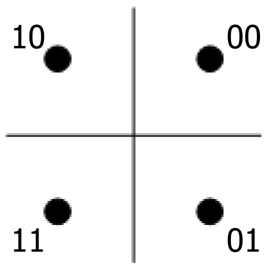
2-PAM



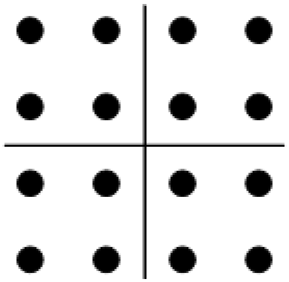
4-PAM

Un solo versore, detto anche IMPULSO FORMATTATORE

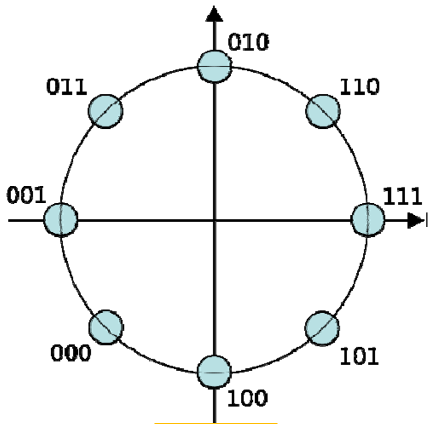
MODULAZIONI BIDIMENSIONALI



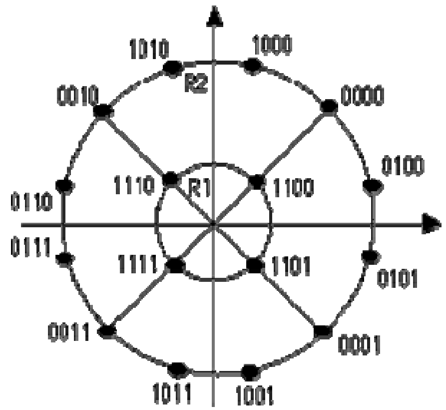
4-PSK
o
4-QAM



16-QAM



8-PSK



Modulazioni con una costellazione bidimensionale generica

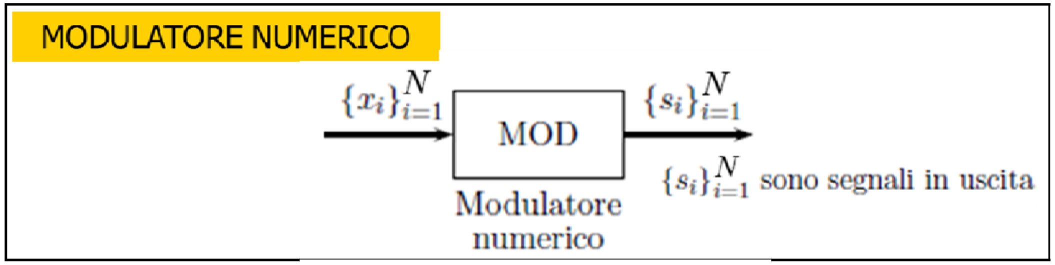
Modulatore e demodulatore numerico

Una volta ottenuti, i simboli possono essere trasmessi!!!

Associamo un segnale a energia finita ad ogni simbolo

La sua forma d'onda avrà un impatto sulla banda. Se ha una banda superiore a quella del canale, verrà distorto, con possibile ISI (lo vedremo dopo)

La sua energia avrà un impatto sulla robustezza al rumore di canale



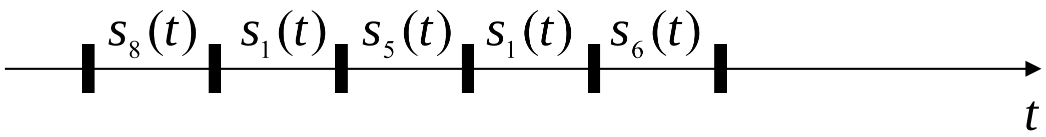
- **Esempio:**
  - Sorgente binaria, con simboli 0 e 1

$$\boxed{S \longrightarrow \{s_1(t), s_2(t)\}}$$

Esempio di trasmissione digitale multidimensionale

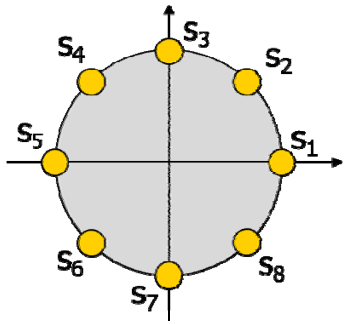
SEQUENZA DI SIMBOLI DA TRASMETTERE: $s_8\ s_1\ s_5\ s_1\ s_6\ \ldots$

- **SEGNALE TRASMESSO**

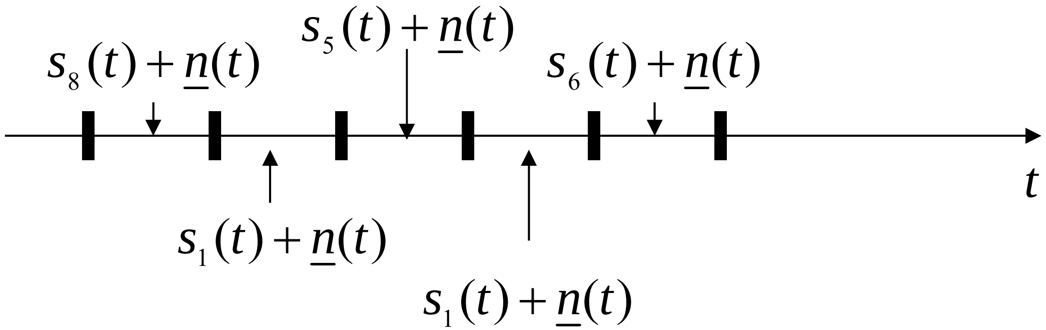


$$s(t)=\sum_n v_n(t-nT_s)=\sum_n\left[\sum_{k=1}^{2} s_{n,k}\cdot\psi_k(t-nT_s)\right]$$

COSTELLAZIONE

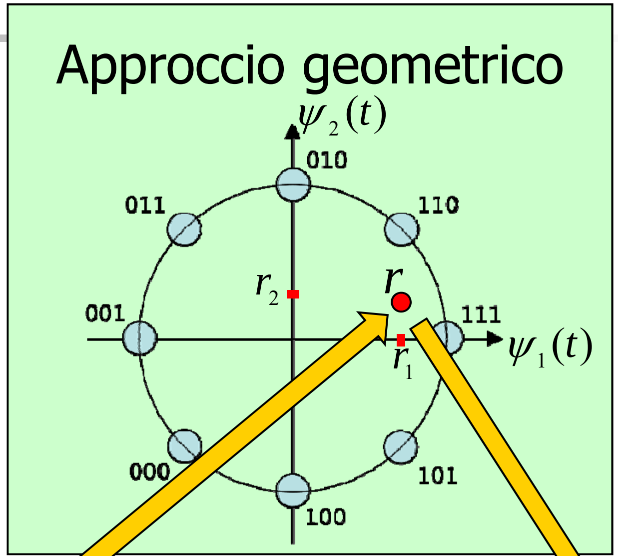


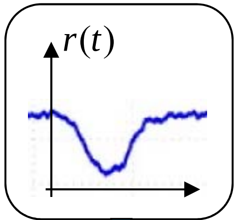
- **SEGNALE RICEVUTO** $r(t)$



$$s_1(t)=1\cdot\cos(2\pi f_c t)+0\cdot\sin(2\pi f_c t)$$
$$s_2(t)=\sqrt{2}/2\cdot\cos(2\pi f_c t)+\sqrt{2}/2\cdot\sin(2\pi f_c t)$$
$$s_3(t)=0\cdot\cos(2\pi f_c t)+1\cdot\sin(2\pi f_c t)$$
$$s_4(t)=-\sqrt{2}/2\cdot\cos(2\pi f_c t)+\sqrt{2}/2\cdot\sin(2\pi f_c t)$$
$$s_5(t)=-1\cdot\cos(2\pi f_c t)+0\cdot\sin(2\pi f_c t)$$
$$s_6(t)=-\sqrt{2}/2\cdot\cos(2\pi f_c t)-\sqrt{2}/2\cdot\sin(2\pi f_c t)$$
$$s_7(t)=0\cdot\cos(2\pi f_c t)-1\cdot\sin(2\pi f_c t)$$
$$s_8(t)=\sqrt{2}/2\cdot\cos(2\pi f_c t)-\sqrt{2}/2\cdot\sin(2\pi f_c t)$$

Demodulazione per ottenere i simboli trasmessi





$r = (r_1, r_2)$

Canale → $r(t)$ → Calcolo delle componenti r_1 ed r_2 rispetto ai versori → (r_1, r_2) → Decisione del simbolo che più verosimilmente è stato trasmesso

$$r_1 = \langle r(t), \psi_1(t) \rangle$$

$$r_2 = \langle r(t), \psi_2(t) \rangle$$

$s_1 = 111$

Probabilità di errore sul simbolo e sul bit

Es.: trasmissione multisimbolo

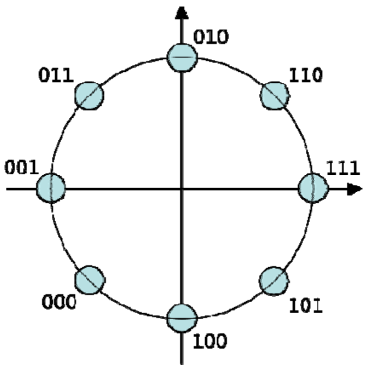
$\ell = 3 \Rightarrow L = 8 \;\; \text{simboli}$

	Trasmissione	Ricezione
Simbolo	x_i	$\hat{x}_j$
Codifica	000	001

- **Probabilità di errore sul simbolo**

$$\mathcal{P}(e) = \mathcal{P}(\hat{x}_j | x_i)$$

- **Probabilità di errore sul bit**
  - dipende dalla codifica usata per convertire i bit in simboli
  - se si usa una **codifica Gray** (se simboli adiacenti differiscono di un solo bit), e il rumore non è elevato, l'errore su un simbolo causa un errore su uno solo dei bit, e quindi:



$$\boxed{P(b) = \frac{P(e)}{\ell}}$$