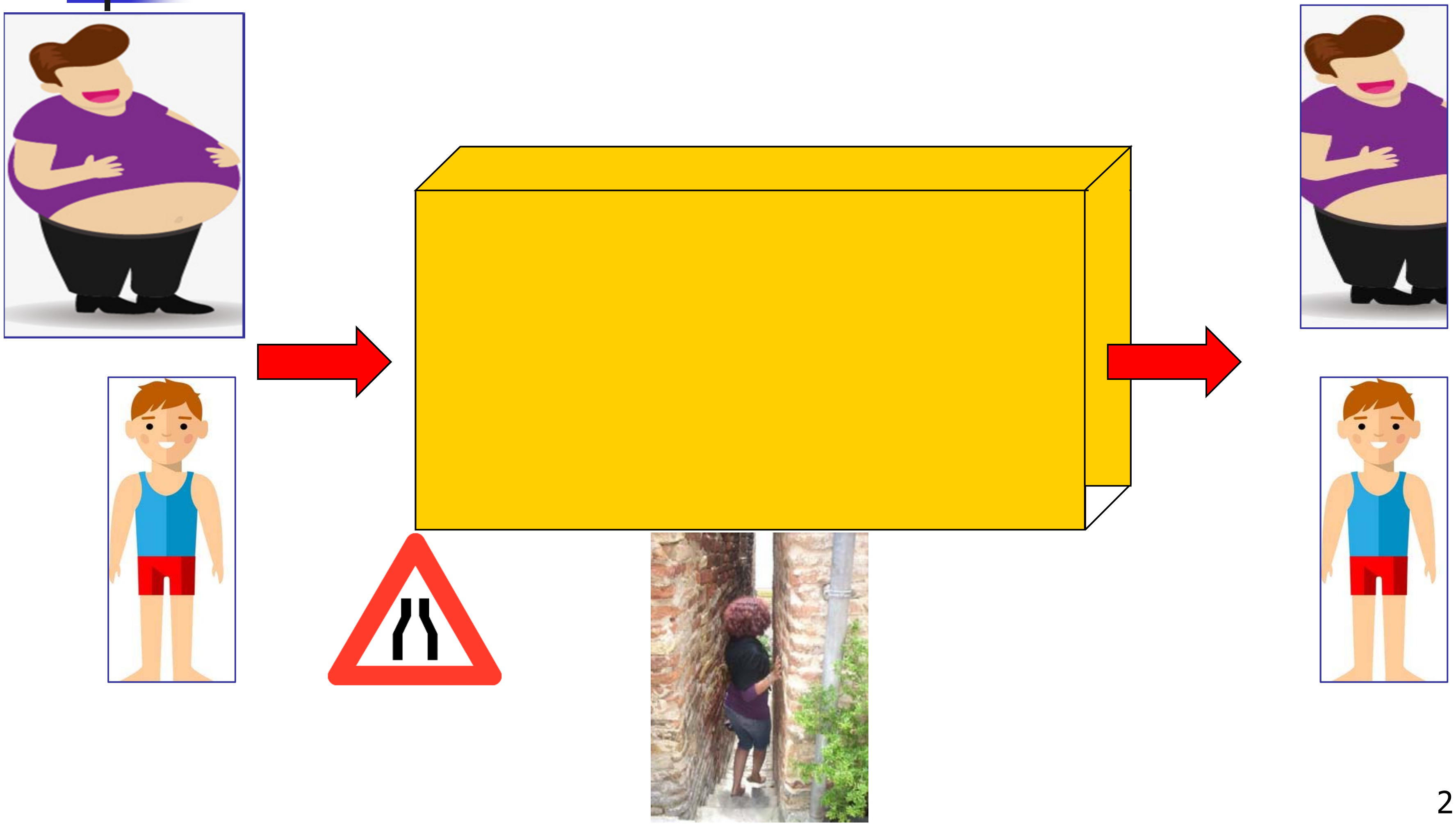
Corso di Comunicazioni Digitali

6 – Interferenza Intersimbolica (ISI)

Prof. Giovanni Schembra

Interferenza tra i simboli nel dominio del tempo

Distorsione del segnale



IMPORTANTISSIMA

Interferenza intersimbolica (ISI)

La banda di un impulso rettangolare è infinita

Se il sistema di trasmissione non filtra opportunamente

La durata di ogni impulso tende ad aumentare

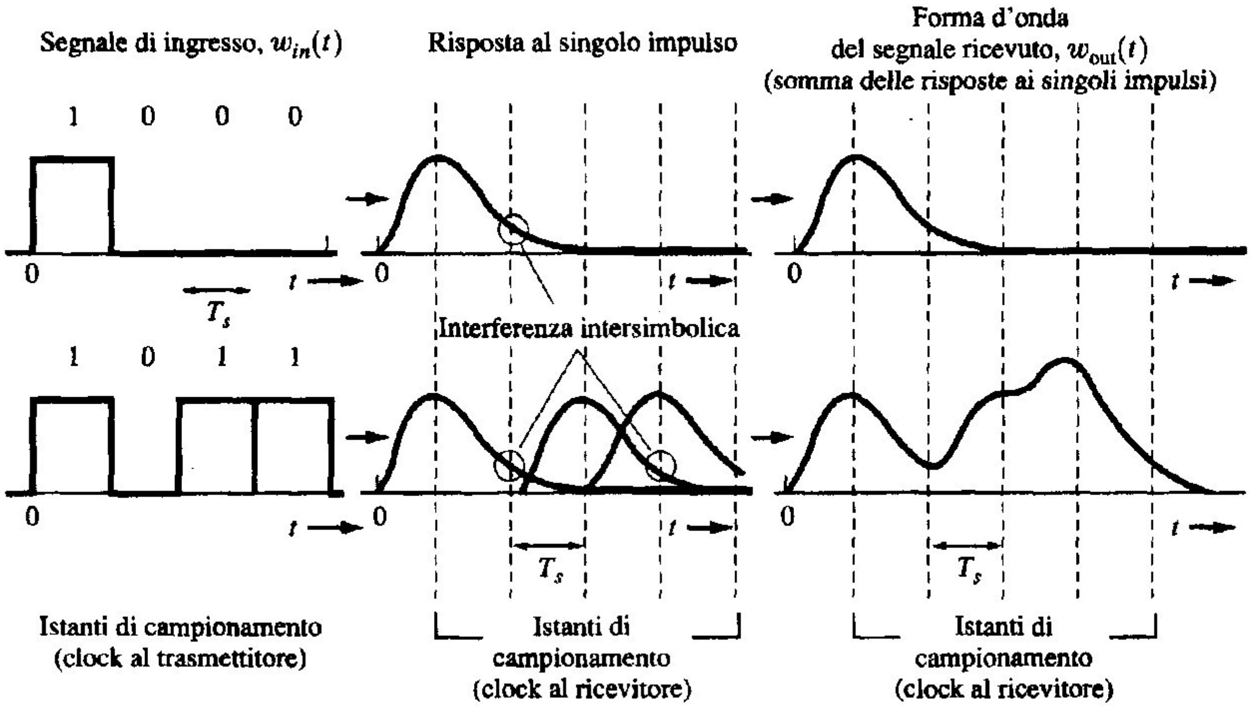
Ogni impulso tenderà ad invadere intervalli adiacenti

Interferenza intersimbolica (ISI)

ISI: allargamento degli impulsi nel dominio del tempo, a causa di una limitazione della banda di trasmissione (nel dominio della frequenza

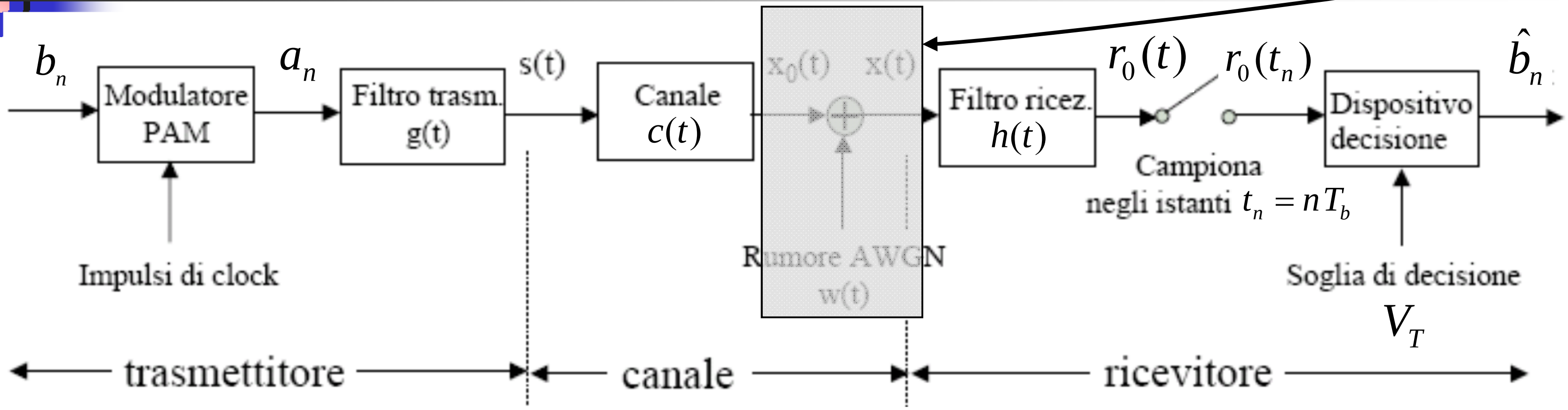
Effetto dell'ISI sul segnale ricevuto in un sistema di comunicazione binaria

ISI: allargamento degli impulsi nel dominio del tempo, a causa di una limitazione della banda di trasmissione (nel dominio della frequenza



Trascuriamo il rumore di canale

Sistema di trasmissione in banda base



- **Per capire come eliminare l'ISI:**

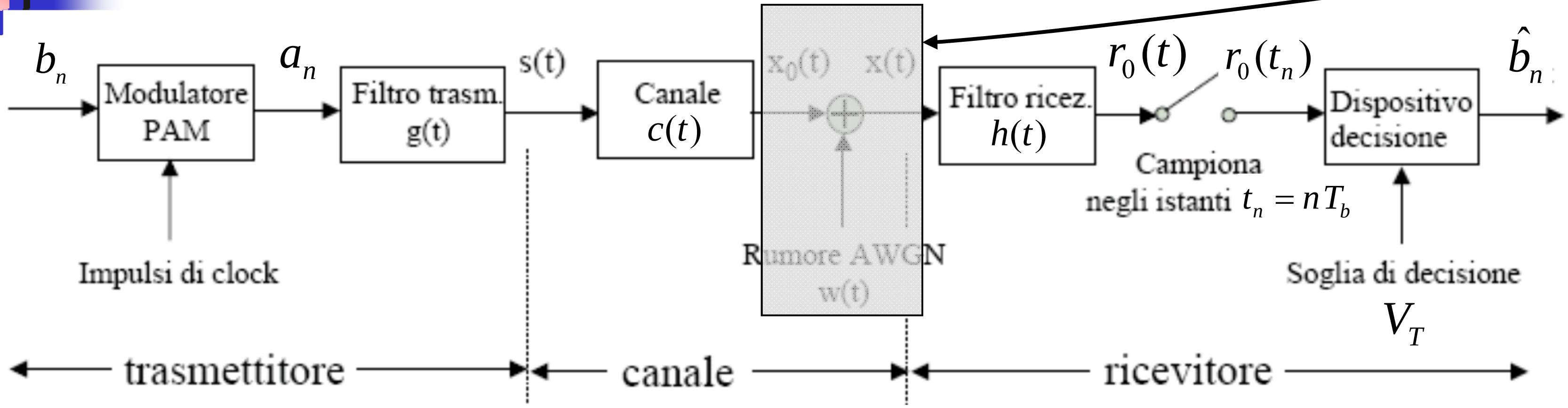
Step 1 scriviamo il segnale di ingresso al canale come una sequenza di impulsi formattatori (di ingresso) amplificati del valore fornito dal modulatore PAM

Step 2 scriviamo il segnale di ingresso al decisore a soglia come una sequenza di impulsi formattatori (di uscita) amplificati del valore originale fornito dal modulatore PAM

- cerchiamo di capire e controllare la forma degli impulsi formattatori di uscita

Trascuriamo il rumore di canale

Sistema di trasmissione in banda base



- **Consideriamo un segnale multilivello in ingresso al sistema di trasmissione**

Step 1

$$s(t) = \sum_n a_n g(t - nT_s)$$

$$s(t) = \sum_n a_n g(t) * \delta(t - nT_s) =$$

$$= \left[\sum_n a_n \delta(t - nT_s) \right] * g(t)$$

dove $g(t)$ è l'impulso elementare formattatore

Es.:Impulso rettangolare di durata T_s

$g(t) = \Pi(t/T_s) \qquad G(f) = T_s \operatorname{sinc}(T_s f)$

Simbolo di informazione:

$a_n \in \{a_1, \ldots, a_L\}$

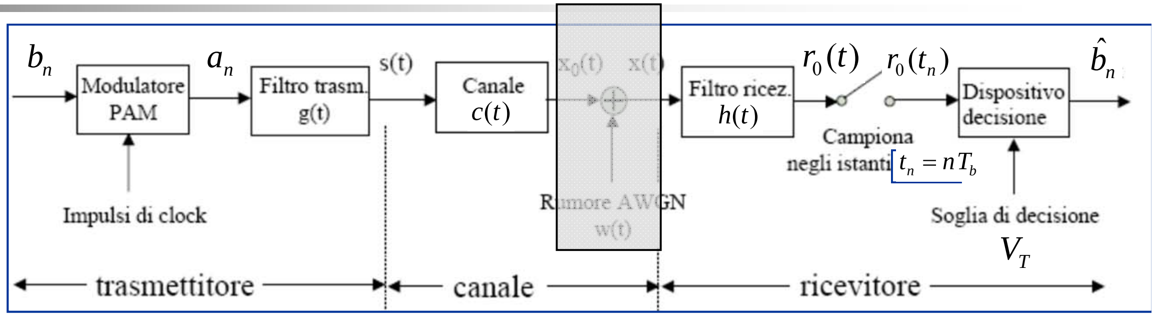
Velocità di simbolo:

$D = 1/T_s$

IMPORTANTE

Sistema di trasmissione in banda base

$$s(t)=\left[\sum_n a_n\delta(t-nT_s)\right]*g(t)$$



Step 2

$$r_0(t)=s(t)*[c(t)*h(t)]=\left[\sum_n a_n\delta(t-nT_s)*g(t)\right]*[c(t)*h(t)]=$$

$$=\left[\sum_n a_n\delta(t-nT_s)\right]*h_e(t)$$

1
$$r_0(t)=\left[\sum_n a_n\delta(t-nT_s)\right]*h_e(t)$$

$h_e(t)$: risposta all'impulso del sistema equivalente

2
$$r_0(t)=\sum_n a_n h_e(t-nT_s)$$

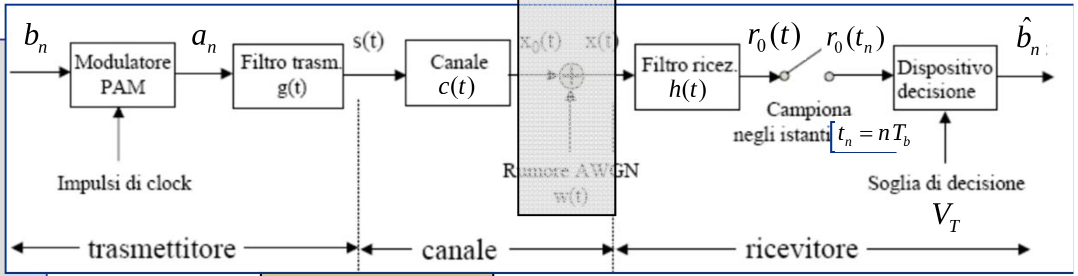
$h_e(t)$: forma dell'impulso formattatore in uscita

dove:

$$h_e(t)=g(t)*c(t)*h(t)$$

$$s(t)=\left[\sum_n a_n\delta(t-nT_s)\right]*g(t)$$

Sistema di trasmissione in banda base



1 $$r_0(t)=\left[\sum_n a_n\delta(t-nT_s)\right]*h_e(t)$$

2 $$r_0(t)=\sum_n a_n h_e(t-nT_s)$$

dove:

$$h_e(t)=g(t)*h_C(t)*h_R(t)$$

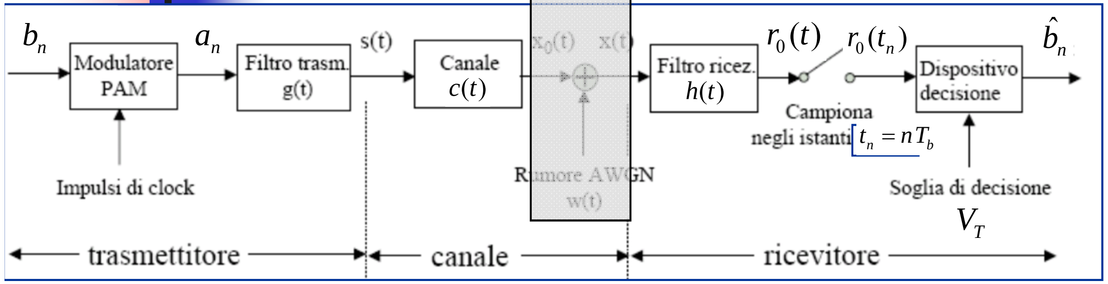
Il sistema complessivo con in ingresso un treno di impulsi formattati con impulso formattatore $g(t)$

EQUIVALE

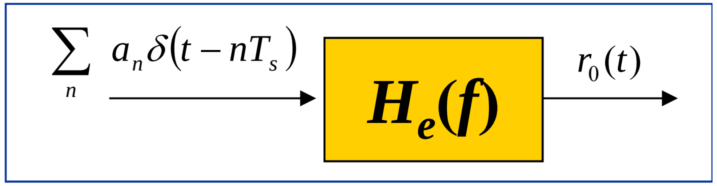
1 **ad un sistema con risposta impulsiva $h_e(t)$, e con in ingresso un treno di impulsi di Dirac di ampiezza pari ai simboli trasmessi**

$$s(t) = \sum_n a_n g(t - nT_s)$$

Sistema di trasmissione in banda base



$\equiv$



(2) $$r_0(t) = \sum_n a_n h_e(t - nT_s)$$

dove:

$$h_e(t) = g(t) * c(t) * h_R(t)$$
$$H_e(f) = G(f) \cdot C(f) \cdot H_R(f)$$

Abbiamo scoperto che, qualunque sia la forma dell'impulso elementare utilizzato:

- l'uscita è un treno di impulsi (impulsi elementari di uscita) di ampiezza pari ai simboli trasmessi
- ciascun impulso elementare di uscita ha la forma del segnale $h_e(t)$

In altre parole: $h_e(t)$ è la forma dell'impulso elementare all'uscita del sistema, prima del decisore a soglia

Annullamento dell'ISI

- **L'ISI è dovuto all'allargamento degli impulsi nel tempo**
- **Tale allargamento non può essere evitato perchè**

Il canale è a banda limitata

Il singolo impulso elementare a destinazione sarà dunque a banda limitata

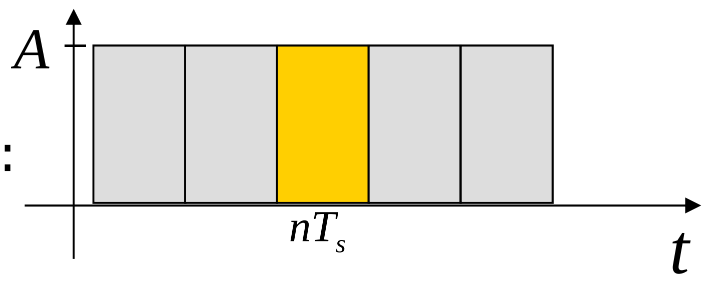
Il singolo impulso elementare a destinazione sarà dunque a DURATA ILLIMITATA

Annullamento dell'ISI

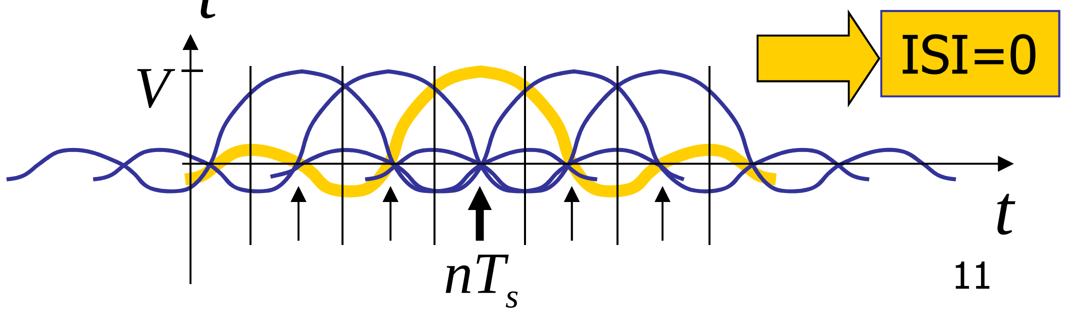
- **IDEA:**
  - possiamo fare in modo che, a destinazione, gli impulsi adiacenti siano nulli negli istanti di campionamento

ESEMPIO:

In sorgente:

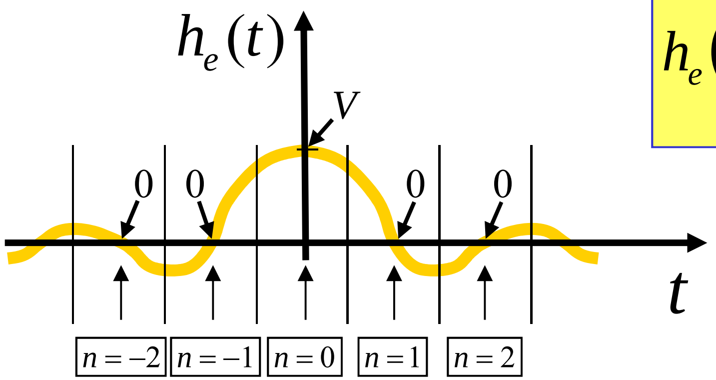


A destinazione



Primo criterio di Nyquist (ISI nulla)

- **Per eliminare l'ISI bisogna utilizzare una risposta in frequenza equivalente, $H_e(f)$, tale che la relativa risposta all'impulso soddisfi la condizione:**



$$h_e(t) = \begin{cases} V \neq 0 & t = 0 \\ 0 & t = nT_s \quad \forall n \neq 0 \end{cases}$$

ISI nulla

dove:
n : intero arbitrario
T_s : intervallo di segnalazione
V : qualunque valore non nullo

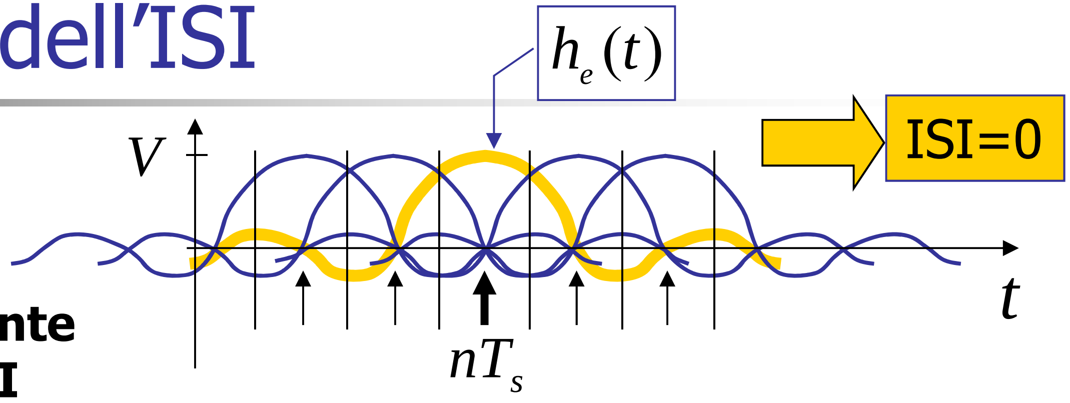
$h_e(t)$ è la risposta all'impulso del sistema equivalente

$$h_e(t) = g(t) * c(t) * h(t)$$

- **Se inviassimo all'ingresso del filtro di trasmissione all'istante $t=0$ un singolo impulso rettangolare di ampiezza A, in ricezione quest'ultimo avrebbe ampiezza V all'istante $t=0$, ma non causerebbe interferenza in quanto:** $h_e(nT_s) = 0 \quad \text{per } n \neq 0$

cioè al centro degli intervalli adiacenti (istanti di campionamento dei simboli adiacenti)

Annullamento dell'ISI



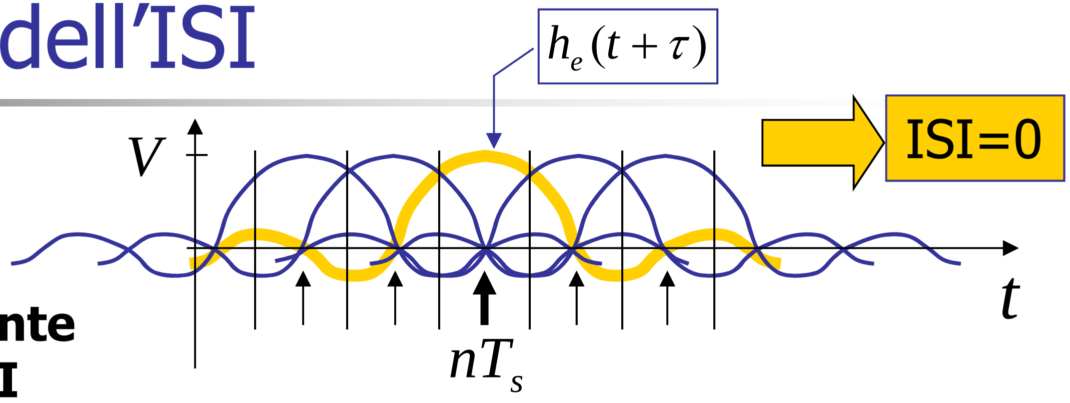
- **Decidiamo opportunamente $H_e(f)$, tale che annulli l'ISI**
- **Per ottenere l' $H_e(f)$ desiderato:**

APPROCCIO 1: utilizziamo un qualunque impulso formattatore in trasmissione, e scegliamo opportunamente il filtro in ricezione in modo che la <u>risposta globale</u> $H_e(f)$ annulli l'ISI

$$h_e(t) = g(t) * c(t) * h(t) \Rightarrow H_e(f) = G(f) * C(f) * H(f) \Rightarrow H(f) = \frac{H_e(f)}{G(f) \cdot C(f)}$$

- **In tal caso, il filtro in ricezione si chiama filtro equalizzatore**
- **Per adattarsi alla variabilità di $H_C(f)$, il filtro equalizzatore può essere adattativo** (da non confondere con il filtro adattato)
- **Criteri di Nyquist per il calcolo di $H_e(f)$ che minimizza l'ISI**

Annullamento dell'ISI

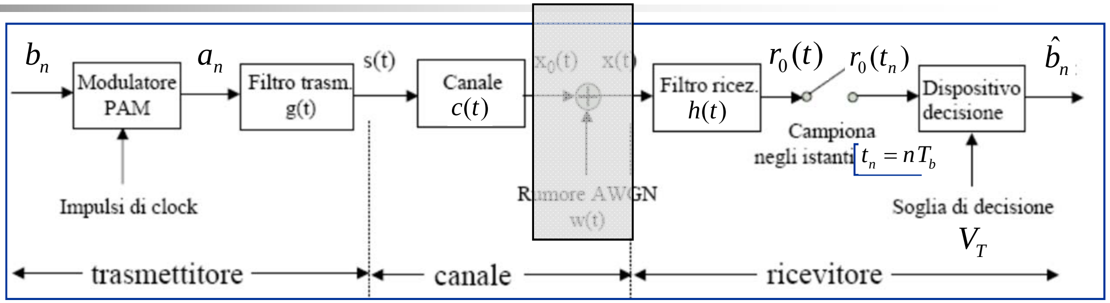


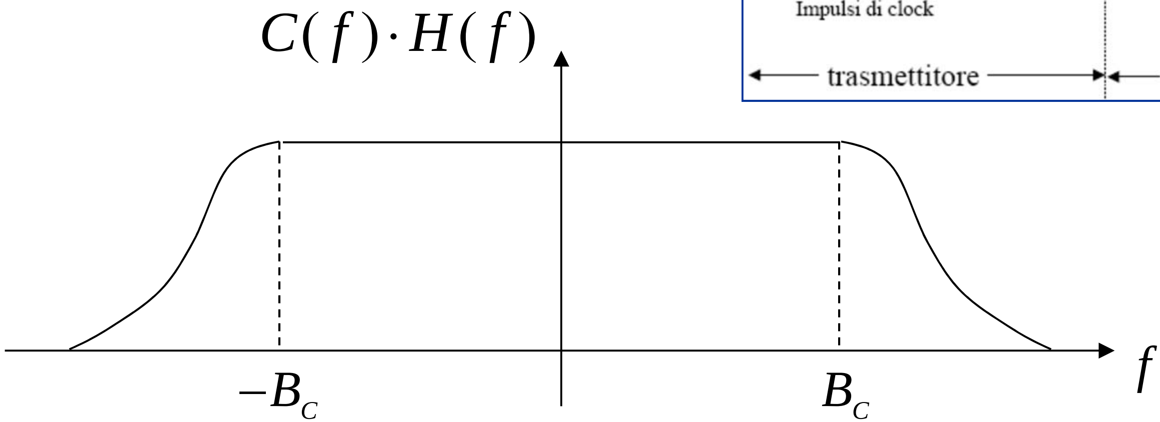
- **Decidiamo opportunamente $H_e(f)$, tale che annulli l'ISI**
- **Per ottenere l' $H_e(f)$ desiderato:**

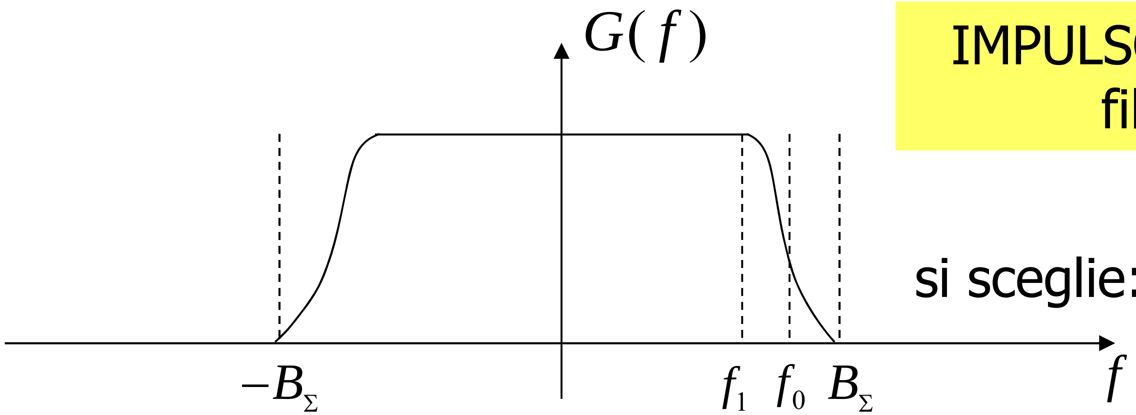
APPROCCIO 2: Scegliamo l'impulso formattatore $g(t)$ in ingresso al sistema in modo che:

- **sia a banda limitata (minore della banda del sistema {C*H} (canale + filtro di ricezione); diciamo B_C la banda del sistema {C*H}**
- **rispetti già in trasmissione il primo criterio di Nyquist (dato che non viene alterato da canale, lo rispetterà anche in ricezione)**

Annullamento dell'ISI – approccio 2







IMPULSO formattatore di ingresso: filtro a coseno rialzato

$$G(f) = H_e(f)$$

si sceglie: $B_\Sigma = B_C$ $\quad f_0 = \dfrac{D}{2}$

Passi da seguire per evitare il problema dell'ISI

- **PASSO 1:**
  - Decidere un segnale $h_e(t)$ che rispetti il primo criterio di Nyquist
- **PASSO 2:**
  - Decidere se applicarlo:
    - in trasmissione (Approccio 2)
    - ottenerlo in ricezione (Approccio 1) calcolando la $H(f)$ affinchè il sistema complessivo abbia risposta in frequenza $H_e(f)$

PASSO 1

Primo criterio di Nyquist (ISI nulla)

- **Scegliamo un segnale (impulso elementare) che nel dominio del tempo sia:**
  - non nullo al centro dell'intervallo di simbolo, cioè per $t=0$
  - nullo negli istanti centrali (istanti di prelievo del segnale da parte del decisore a soglia) di tutti gli altri intervalli di simbolo, cioè per $t=nT_s$
- **Consideriamo allora il segnale:**

$$h_e(t) = \text{sinc}(t/T_s) \xrightarrow{TF} H_e(f) = \frac{1}{f_s}\Pi\left(\frac{f}{f_s}\right) \qquad f_s = 1/T_s$$

Soddisfa il primo criterio di Nyquist

$\Rightarrow$ $ISI = 0$ Non vi sarà ISI

Richiede una banda passante del sistema pari a: $B_\Sigma = f_s/2$

PASSO 1

Primo criterio di Nyquist (ISI nulla)

$$h_e(t) = \mathrm{sinc}(t/T_s) \quad \xrightarrow{\text{TF}} \quad H_e(f) = \frac{1}{f_s}\Pi\left(\frac{f}{f_s}\right) \qquad f_s = 1/T_s$$

- **Vedremo che:**
  - l'uso del sinc, come impulso elementare in uscita, minimizza la richiesta di banda del sistema

$$\boxed{B_\Sigma = B_{\Sigma,\min} = D/2}$$

- **In altre parole:**
  - per eliminare l'ISI è necessaria una banda di canale pari ad almeno $D/2$, ma si deve usare una formattazione dell'impulso elementare di destinazione a sinc

PASSO 1

Primo criterio di Nyquist (ISI nulla)

- **O, equivalentemente, usando come impulsi elementari in uscita dei sinc, un canale a banda B_Σ permette una frequenza di trasmissione pari a 2 volte la banda, cioè:**

$$\boxed{D = 1/T_s = 2B_\Sigma \text{ simboli/s}}$$

dove B_Σ : banda del sistema di trasmissione

PASSO 1

Primo criterio di Nyquist (ISI nulla)

- **Difficoltà di ordine pratico:**
  - La funzione di trasferimento complessiva $\boldsymbol{H_e(f)}$ è un filtro ideale passa-basso costante sulla banda $-B_\Sigma < f < B_\Sigma$. Ciò è <u>fisicamente irrealizzabile</u>, perché in frequenza il filtro avrebbe i fianchi verticali, e nel tempo la risposta impulsiva sarebbe causale (iniziata prima dell'istante di applicazione dell'impulso) e di durata infinita.
  - La <u>sincronizzazione TX-RX è molto difficile</u> perché sarebbe necessario un circuito di campionamento in ricezione molto complesso, dato che si dovrebbe campionare il sinc(x) proprio negli istanti di nullo. Il diagramma a occhio è molto stretto, e una sincronizzazione non accurata provocherebbe forte ISI
- **Soluzione:**
  - Ricerca di altre forme d'onda aventi la proprietà di essere nulle agli istanti di campionamento adiacenti, ma con code che decrescono più rapidamente di 1/x, per evitare il problema dell'ISI in caso di fluttuazioni dell'istante di campionamento

PASSO 1

Filtro di Nyquist a coseno rialzato

- **Definizione: filtro che ha risposta in frequenza data da:**

$$H_e(f) = \begin{cases} 1 & |f| < f_1 \\ \frac{1}{2}\left\{1+\cos\left[\frac{\pi |f| - f_1}{2 f_\Delta}\right]\right\} & f_1 < |f| < B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$

B_Σ : banda assoluta del sistema

$f_\Delta = B_\Sigma - f_0$

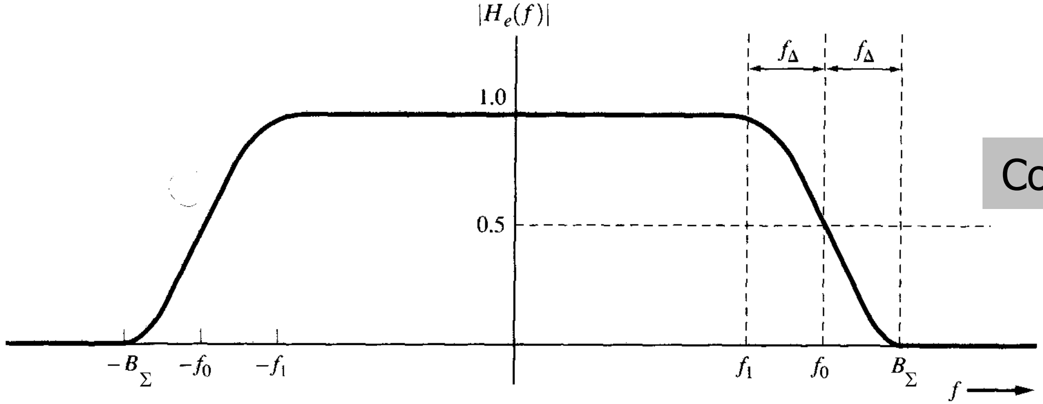
$f_1 = f_0 - f_\Delta$

f_0 : banda a - 6 dB

$$r = \frac{f_\Delta}{f_0}$$

Fattore di decadimento oppure *rolloff*

$0 \le r \le 1$

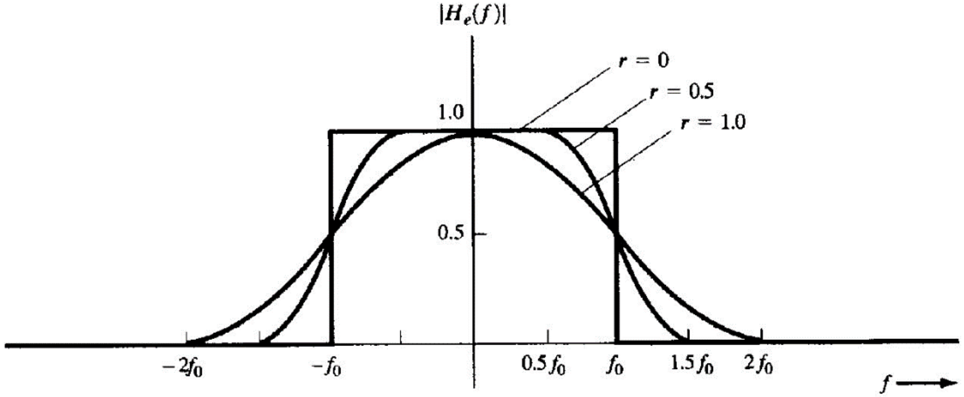


Corrispondente risposta impulsiva

$$h_e(t) = 2 f_0 \text{sinc}(2 f_0 t) \cdot \left[\frac{\cos(2\pi f_\Delta t)}{1-(4 f_\Delta t)^2}\right]$$

PASSO 1

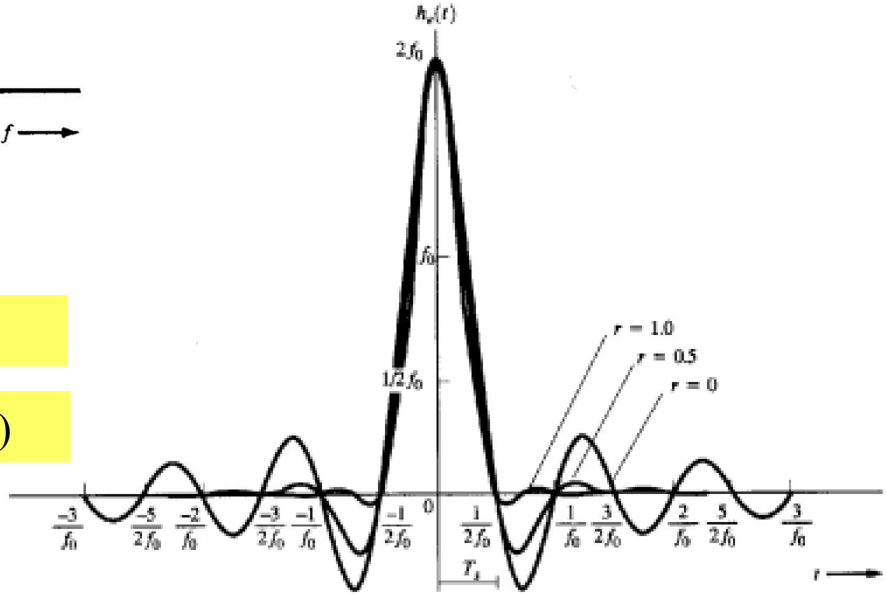
Filtro di Nyquist a coseno rialzato



(a) Spettro di ampiezza

$r = 0$ → banda minima: $B_\Sigma = f_0$

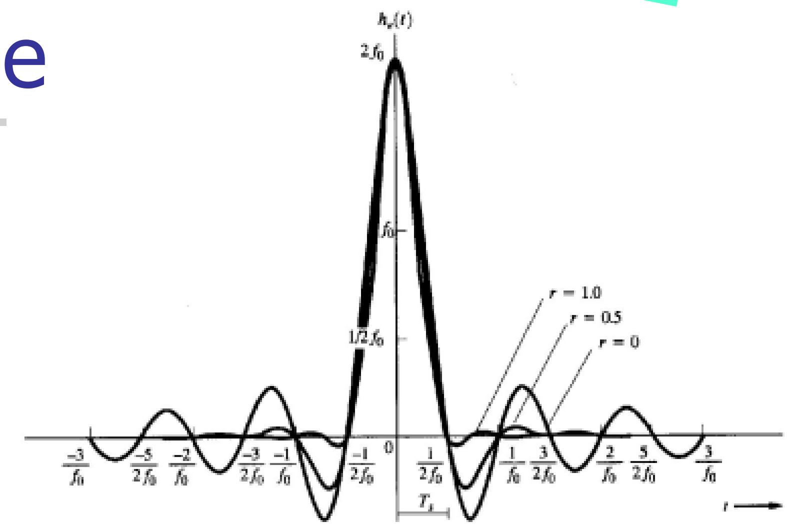
risposta impulsiva di tipo $\mathrm{sinc}(x)$



(b) Risposta impulsiva

Filtro di Nyquist a coseno rialzato: velocità di segnalazione

PASSO 1



- **Per ottenere assenza di ISI**
  - Dalla figura di $h_e(t)$ notiamo che dobbiamo imporre che:

$$\boxed{h_e(t) = 0 \quad \forall\, t = n/(2 f_0),\ n \neq 0} \qquad \boxed{\forall r}$$

  - Il filtro a coseno rialzato $h_e(t)$ soddisfa il primo criterio di Nyquist purché si scelga un valore di f_0 pari a:

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2}\frac{1}{T_s} = \frac{D}{2}}$$

IMPORTANTISSIMO

Filtro di Nyquist a coseno rialzato: velocità di segnalazione

PASSO 1

Per avere assenza di ISI

La banda a -6dB del filtro a coseno rialzato deve essere metà della velocità di segnalazione

Ulteriori parametri del filtro

$$f_\Delta = B_\Sigma - f_0 \qquad r = \frac{f_\Delta}{f_0}$$

$$\boxed{B_\Sigma = \frac{1+r}{2} D}$$

Banda occupata

Symbol rate massima di trasmissione su un canale a banda B_Σ

$$\boxed{D = \frac{2B_\Sigma}{1+r}}$$

PASSO 1

Filtri di Nyquist

- **Teorema:**
  - Un filtro si dice di Nyquist se la sua risposta in frequenza è:

$$H_e(f) = \begin{cases} \Pi\left(\dfrac{f}{2f_0}\right) + Y(f) & \text{se} \; |f| < 2f_0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

CON $f_0 = \dfrac{D}{2}$

dove:
- $Y(f)$ è una funzione reale pari intorno a $f=0$

$$Y(-f) = Y(f) \qquad |f| < 2f_0$$

- $Y(f)$ è una funzione reale dispari intorno a $f=f_0$

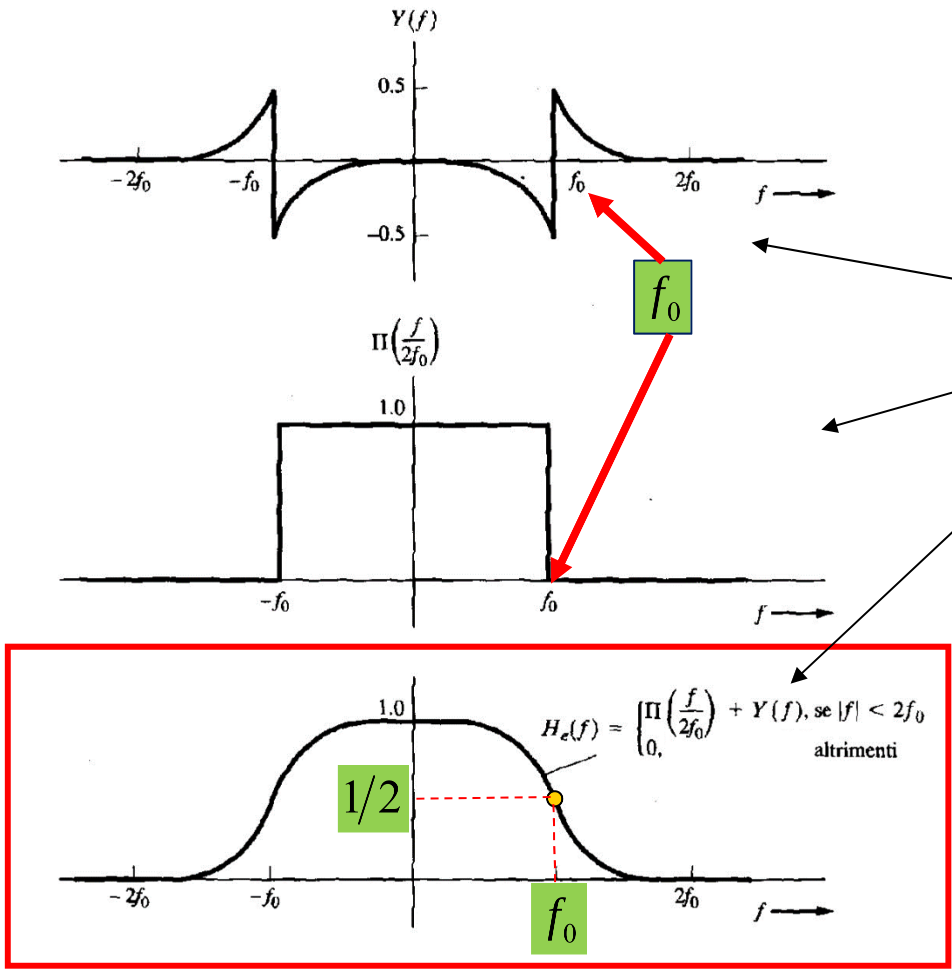
$$Y(-f+f_0) = -Y(f+f_0) \qquad |f| < f_0$$

- **allora:**
  - non vi sarà interferenza intersimbolica all'uscita del sistema se la velocità di segnalazione è pari a: $D = f_s = 2f_0$

PASSO 1

Filtri di Nyquist

Numero infinito di filtri di Nyquist



$$H_e(f) = \begin{cases} \Pi\left(\dfrac{f}{2f_0}\right) + Y(f) & \text{se} \, |f| < 2f_0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esempio:

$$H_e(f) = \begin{cases} 1 & |f| < f_1 \\ \dfrac{1}{2}\left\{1 + \cos\left[\dfrac{\pi |f| - f_1}{2 f_\Delta}\right]\right\} & f_1 < |f| < B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$

Filtro di Nyquist a coseno rialzato: realizzabilità del filtro

$$f_0 = D/2$$

$$D = \frac{2B_\Sigma}{1+r} \qquad B_\Sigma = \frac{1+r}{2}D$$

$$r = \frac{2B_\Sigma}{D} - 1$$

Si sceglie quello a r=1

Nessun filtro | $0 \le r \le 1$ | Qualunque filtro

0 — $D/2$ — D — B_C

$B_C > D$ ⇒ $r = \frac{2B_C}{D} - 1 > 1$ ⇒ qualunque filtro di Nyquist a coseno rialzato elimina l'ISI → conviene scegliere $r=1$ per minimizzare la complessità del filtro

$\frac{D}{2} \le B_C \le D$ ⇒ $0 \le r \le 1$ ⇒ è possibile trovare un r tale da annullare l'ISI

$B_C < \frac{D}{2}$ ⇒ $r < 0$ ⇒ non è possibile trovare un r tale da annullare l'ISI

Progettazione del filtro di Nyquist con codifica L-PAM multilivello

- **Se vogliamo utilizzare meno banda, possiamo raggruppare i bit a gruppi di ℓ**

$$\Downarrow$$

- **La banda minima diventa:** $B_{MIN}^{(\ell)} = \dfrac{B_{MIN}^{(bin)}}{\ell}$

  dove $B_{MIN}^{(bin)}$ è la banda minima con segnalazione binaria

$$B_{MIN}^{(bin)} = R/2$$

- **Calcolo di ℓ : ℓ è il minimo intero tale che**

$$\frac{B_{MIN}^{(bin)}}{\ell} \leq B_C \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ell = \left\lceil \frac{B_{MIN}^{(bin)}}{B_C} \right\rceil}$$

Progettazione del filtro di Nyquist con codifica L-PAM multilivello

- **Una volta scelto ℓ, progettiamo il filtro a cos rialzato**

Imponiamo: $\boxed{B_\Sigma = B_C}$ per sfruttare tutta la banda del canale

$$r = \frac{2B_\Sigma}{D} - 1$$

dove

$$D = \frac{R}{\ell}$$

$$f_0 = B_{MIN}^{(\ell)} = R/(2\ell)$$

- **PASSO 0 (prima di iniziare la progettazione):**

IMPORTANTE

Calcoliamo la capacità di canale

$$C = B_C \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)$$

Se si cerca di trasmettere un flusso binario con bitrate

$R > C$ → Non è possibile farlo senza ISI → Non ha senso progettare il filtro di Nyquist per eliminare l'ISI

Annullamento ISI con filtro adattato

- **È possibile annullare l'ISI utilizzando in ricezione un filtro adattato?**
- **Ricordiamo che:**
  - l'ISI si può annullare se l'impulso formattatore in ricezione soddisfa il primo criterio di Nyquist (si annulla negli istanti centrali degli intervalli di simbolo adiacenti all'intervallo di emissione)
  - lo spettro dell'impulso formattatore in ricezione è dato da:

$$\boxed{H_e(f) = G(f) \cdot C(f) \cdot H(f)}$$

  - dove:
    - $G(f)$: spettro dell'impulso formattatore
    - $C(f)$: funzione di trasferimento del canale
    - $H(f)$: funzione di trasferimento del filtro di ricezione

$$H_e(f) = G(f) \cdot C(f) \cdot H(f)$$

Annullamento ISI con filtro adattato

- **Indichiamo con B_C la banda di canale**
- **Notiamo che, nell'intervallo di frequenze** $f \in [-B_C, +B_C]$ **risulta:**

$$C(f) = 1 \qquad \forall f \in [-B_C, +B_C] \Rightarrow H_e(f) = G(f) \cdot H(f)$$

FILTRO ADATTATO

$$H(f) = K\, G^*(f)\, e^{-j2\pi f T_b}$$

Definiamo:

Raised cosine filter (RC)

$$RC(f) = \begin{cases} 1 & |f| < f_1 \\ \dfrac{1}{2}\left\{1 + \cos\left[\dfrac{\pi |f| - f_1}{2 f_\Delta}\right]\right\} & f_1 < |f| < B_\Sigma \\ 0 & |f| > B_\Sigma \end{cases}$$

Square Root Raised cosine filter (SRRC)

$$SRRC(f) = \begin{cases} 1 & |f| < f_1 \\ \sqrt{\dfrac{1}{2}\left\{1 + \cos\left[\dfrac{\pi |f| - f_1}{2 f_\Delta}\right]\right\}} & f_1 < |f| < B_\Sigma \\ 0 & |f| > B_\Sigma \end{cases}$$

$$H_e(f) = G(f) \cdot C(f) \cdot H(f)$$

Annullamento ISI con filtro adattato

FILTRO ADATTATO

$$H(f) = K\,G^*(f)\,e^{-j2\pi f T_b}$$

Raised cosine filter (RC)

$$RC(f) = \begin{cases} 1 & |f| < f_1 \\ \frac{1}{2}\left\{1 + \cos\left[\frac{\pi |f| - f_1}{2 f_\Delta}\right]\right\} & f_1 < |f| < B_\Sigma \\ 0 & |f| > B_\Sigma \end{cases}$$

Square Root Raised cosine filter (SRRC)

$$SRRC(f) = \begin{cases} 1 & |f| < f_1 \\ \sqrt{\frac{1}{2}\left\{1 + \cos\left[\frac{\pi |f| - f_1}{2 f_\Delta}\right]\right\}} & f_1 < |f| < B_\Sigma \\ 0 & |f| > B_\Sigma \end{cases}$$

- **Scegliamo allora i filtri di trasmissione e ricezione come segue:**

$$|H_e(f)| = RC(f)$$

$$|G(f)| = \sqrt{|H_e(f)|} = SRRC(f)$$

$$H(f) = \sqrt{|H_e(f)|} \cdot e^{-j2\pi f T_b}$$

$\Rightarrow$

$H(f)$ è adattato a $G(f)$

$|H_e(f)| = RC(f)$ rispetta il primo criterio di Nyquist