Corso di Comunicazioni Digitali

7 – MODULAZIONI ANALOGICHE E DIGITALI

Prof. Giovanni Schembra

Struttura della lezione

- **Inviluppo complesso e segnali modulati (→)**
- **Modulazione di ampiezza (→)**
  - AM, a banda laterale unica (DSB-SC), a banda laterale unica (SSB), a banda laterale unica (VSB)
- **Modulazione d'angolo (→)**
  - Modulazione di frequenza (FM)
  - Modulazione di fase (PM)

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLA MODULAZIONE

Definizioni

- **Segnale in banda passante (o passa-banda):**
  - segnale con spettro di ampiezza diverso da zero su di una certa banda nell'intorno di una frequenza $f = \pm f_c$, chiamata frequenza portante

- **Modulazione:**
  - Processo mediante il quale l'informazione è impressa su di un segnale sinusoidale *portante* con frequenza f_c, attraverso l'introduzione di una qualche variazione nell'ampiezza, nella fase o su entrambe

$\boxed{m(t)}$

- **Segnale modulante:**
  - Segnale originale prima della modulazione

$\boxed{s(t)}$

- **Segnale modulato:**
  - Segnale ottenuto dopo la modulazione

$\boxed{p(t)}$

- **Segnale portante:**
  - Sinusoide modulata in ampiezza e/o fase dal segnale modulante

Rappresentazione di un segnale mediante l'inviluppo complesso

- **Teorema fondamentale delle modulazioni:**
  - un qualunque segnale $v(t)$ in banda passante può essere rappresentato come:

$$v(t) = \mathrm{Re}\left\{g(t)\, e^{j\omega_c t}\right\}$$

BANDA BASE --> BANDA PASSANTE

dove:

$g(t)$	inviluppo complesso di $v(t)$	$g(t)$ è in banda base
f_c	frequenza portante di $v(t)$	$\omega_c = 2\pi\, f_c$

Rappresentazione dei segnali modulati

- **Modulazione:**
  - Processo mediante il quale l'informazione è impressa su di un segnale sinusoidale *portante* con frequenza f_c, attraverso l'introduzione di una qualche variazione nell'ampiezza, nella fase o su entrambe
- **Segnale modulato:**

$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{ g(t)\, e^{j\omega_c t} \right\}$$

$$\omega_c = 2\pi\, f_c$$

f_c : frequenza portante

- **L'inviluppo complesso $g(t)$ è una funzione del segnale modulante $m(t)$:**

$$g(t) = g[m(t)]$$

- **Dalla funzione g[ ] dipende il tipo di modulazione che si applica (es.: AM, FM, PM)**

Esempio: Modulazione in ampiezza (AM)

- **Inviluppo complesso di un segnale AM:**

$$g(t) = A_c\,[1 + m(t)]$$

- **La costante A_c determina il livello di potenza**

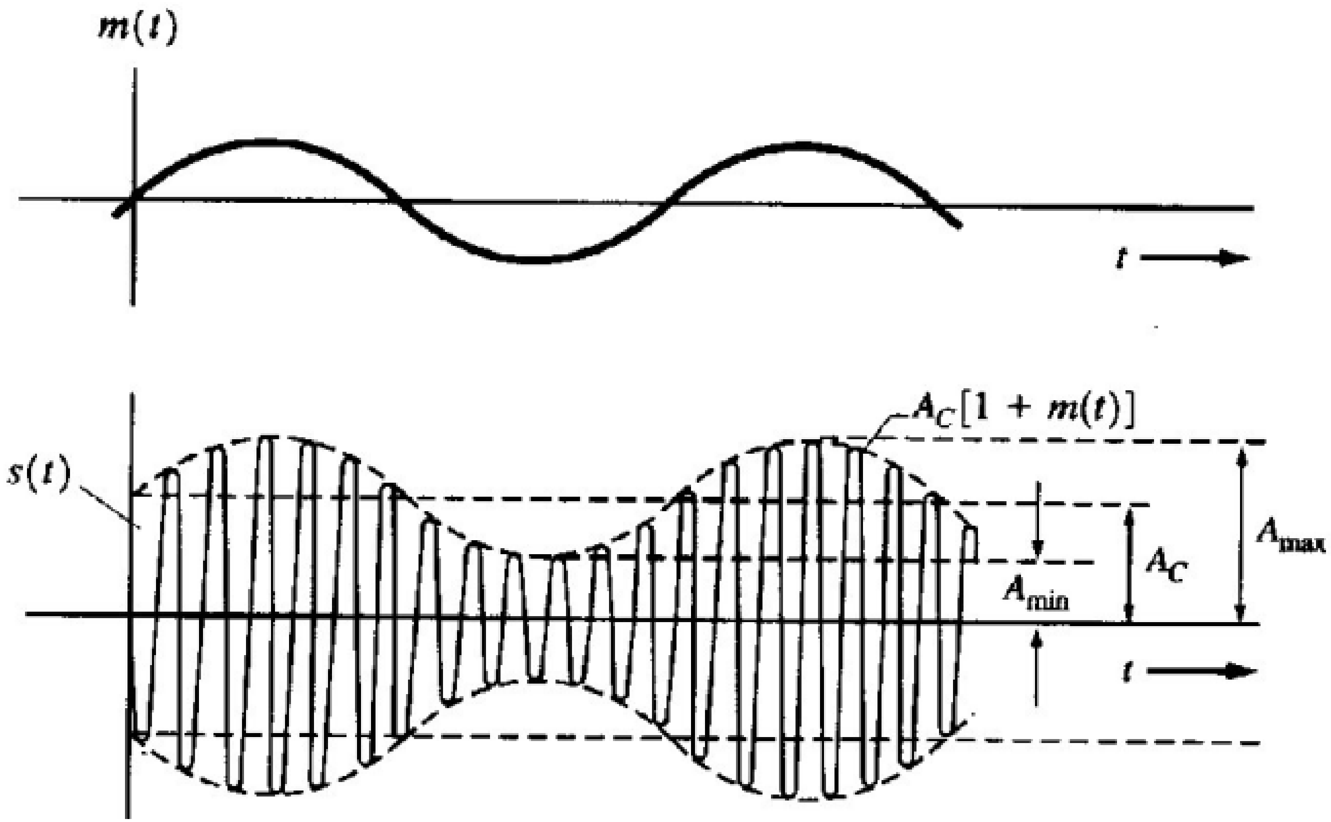
- **Il segnale $m(t)$ è il segnale modulante (analogico o digitale)**

- **Il segnale modulato AM è quindi:**

$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{g(t)\,e^{j\omega_c t}\right\} \Rightarrow s(t) = A_c\,[1 + m(t)]\cos\omega_c t$$

Esempio: Modulazione in ampiezza (AM)

AM: $g(t) = A_c[1 + m(t)]$ → $s(t) = A_c[1 + m(t)]\cos\omega_c t$



Inviluppo complesso per varie forme di modulazione (modulazioni in QUADRATURA)

Tipo di modulazione	Mappa $g(m)$	Corrispondenti modulazioni in quadratura	
		$x(t)$	$y(t)$
AM	$A_c[1 + m(t)]$	$A_c[1 + m(t)]$	0
DSB-SC	$A_c m(t)$	$A_c m(t)$	0
PM	$A_c e^{jD_p m(t)}$	$A_c \cos[D_p m(t)]$	$A_c \sin[D_p m(t)]$
FM	$A_c e^{jD_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\, d\sigma}$	$A_c \cos\left[D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\, d\sigma\right]$	$A_c \sin\left[D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma) d\sigma\right]$
SSB-AM-SC[b]	$A_c[m(t) \pm j\hat{m}(t)]$	$A_c m(t)$	$\pm A_c \hat{m}(t)$
SSB-PM[b]	$A_c e^{jD_p[m(t) \pm j\hat{m}(t)]}$	$A_c e^{\mp D_p \hat{m}(t)} \cos[D_p m(t)]$	$A_c e^{\mp D_p \hat{m}(t)} \sin[D_p m(t)]$
SSB-FM[b]	$A_c e^{jD_f \int_{-\infty}^{t} [m(\sigma) \pm j\hat{m}(\sigma)] d\sigma}$	$A_c e^{\mp D_f \int_{-\infty}^{t} \hat{m}(\sigma) d\sigma} \cos\left[D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\, d\sigma\right]$	$A_c e^{\mp D_f \int_{-\infty}^{t} \hat{m}(\sigma) d\sigma} \sin\left[D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\, d\sigma\right]$
SSB-EV[b]	$A_c e^{\{\ln[1+m(t)] \pm j\hat{\ln}[1+m(t)]\}}$	$A_c[1 + m(t)] \cos\{\hat{\ln}[1 + m(t)]\}$	$\pm A_c[1 + m(t)] \sin\{\hat{\ln}[1 + m(t)]\}$
SSB-SQ[b]	$A_c e^{(1/2)\{\ln[1+m(t)] \pm j\hat{\ln}[1+m(t)]\}}$	$A_c\sqrt{1 + m(t)} \cos\{\frac{1}{2} \hat{\ln}[1 + m(t)]\}$	$\pm A_c\sqrt{1 + m(t)} \sin\{\frac{1}{2} \hat{\ln}[1 + m(t)]\}$
QM	$A_c[m_1(t) + jm_2(t)]$	$A_c m_1(t)$	$A_c m_2(t)$

[a] $A_c > 0$ è una costante che fissa il livello di potenza del segnale

L, lineare; NL, non lineare;

$[\hat{\cdot}]$ indica la trasformata di Hilbert (ovvero la versione ruotata di –90° di $[\cdot]$)

Inviluppo complesso per varie forme di modulazione (modulazioni in AMPIEZZA E FASE)

L, lineare; NL, non lineare;

Tipo di modulazione	Corrispondenti modulazioni di ampiezza e fase: $R(t)$	$\theta(t)$	Linearità
AM	$A_c\|1 + m(t)\|$	$\begin{cases} 0, & m(t) > -1 \\ 180°, & m(t) < -1 \end{cases}$	L
DSB-SC	$A_c\|m(t)\|$	$\begin{cases} 0, & m(t) > 0 \\ 180°, & m(t) < 0 \end{cases}$	L
PM	A_c	$D_p m(t)$	NL
FM	A_c	$D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\, d\sigma$	NL
SSB-AM-SC[b]	$A_c\sqrt{[m(t)]^2 + [\hat{m}(t)]^2}$	$\tan^{-1}[\pm\hat{m}(t)/m(t)]$	L
SSB-PM[b]	$A_c e^{\pm D_p \hat{m}(t)}$	$D_p m(t)$	NL
SSB-FM[b]	$A_c e^{\pm D_f \int_{-\infty}^{t} \hat{m}(\sigma)d\sigma}$	$D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\, d\sigma$	NL
SSB-EV[b]	$A_c\|1 + m(t)\|$	$\pm \hat{\ln}[1 + m(t)]$	NL
SSB-SQ[b]	$A_c\sqrt{1 + m(t)}$	$\pm\frac{1}{2} \hat{\ln}[1 + m(t)]$	NL
QM	$A_c\sqrt{m_1^2(t) + m_2^2(t)}$	$\tan^{-1}[m_2(t)/m_1(t)]$	L

Spettro dei segnali in banda passante

- **Lo spettro di un segnale in banda passante può essere ricavato direttamente da quello del suo inviluppo complesso**
- **Teorema:**
  - dato un segnale in banda passante nella forma: $v(t) = \mathrm{Re}\left\{ g(t)\, e^{j\omega_c t} \right\}$

Spettro bilatero (per i segnali analogici)

$$V(f) = \frac{1}{2}\left[G(f - f_c) + G^*(-f - f_c) \right]$$

Densità spettrale di potenza (per i segnali digitali)

$$\mathcal{P}_v(f) = \frac{1}{4}\left[\mathcal{P}_g(f - f_c) + \mathcal{P}_g(-f - f_c) \right]$$

$G^*(f)$: Coniugato dello spettro dell'inviluppo complesso

Potenza dei segnali in banda passante

- **Potenza media totale normalizzata:**

$$P_v = \langle v^2(t) \rangle = \boxed{\frac{1}{2}\langle |g(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2}P_g}$$

- **Potenza di picco dell'inviluppo (PEP - Peek Envelope Power):**
  - potenza media che si otterrebbe se $|g(t)|$ fosse mantenuto al suo valore di picco
  - è equivalente a valutare la potenza media di un segnale sinusoidale a RF, non modulato, con valore di picco pari a:

$$v(t) = R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)] \Rightarrow \qquad A_p = \max[v(t)]$$

- **Teorema: la potenza normalizzata di picco dell'inviluppo è:**

$$P_{PEP} = \frac{1}{2}[\max|g(t)|]^2$$

Nota: la P_{PEP} viene utilizzata per fornire le specifiche di un apparato trasmettitore

MODULAZIONI D’AMPIEZZA

- MODULAZIONE AM DSB
- MODULAZIONE AM DSB-SC
- MODULAZIONI AM SSB (USSB E LSSB)
- MODULAZIONE AM VESTIGIALE

Modulazione di ampiezza (AM - Amplitude Modulation)

- **Dato un segnale $x(t)$, applichiamo un fattore moltiplicativo M per portarlo a valori compresi nell'intervallo [-1, +1]:**

$$\boxed{m(t) = M \cdot x(t)}$$ Segnale modulante

- **Inviluppo complesso di un segnale AM:**

$$\boxed{g(t) = A_c\,[1 + m(t)]}$$

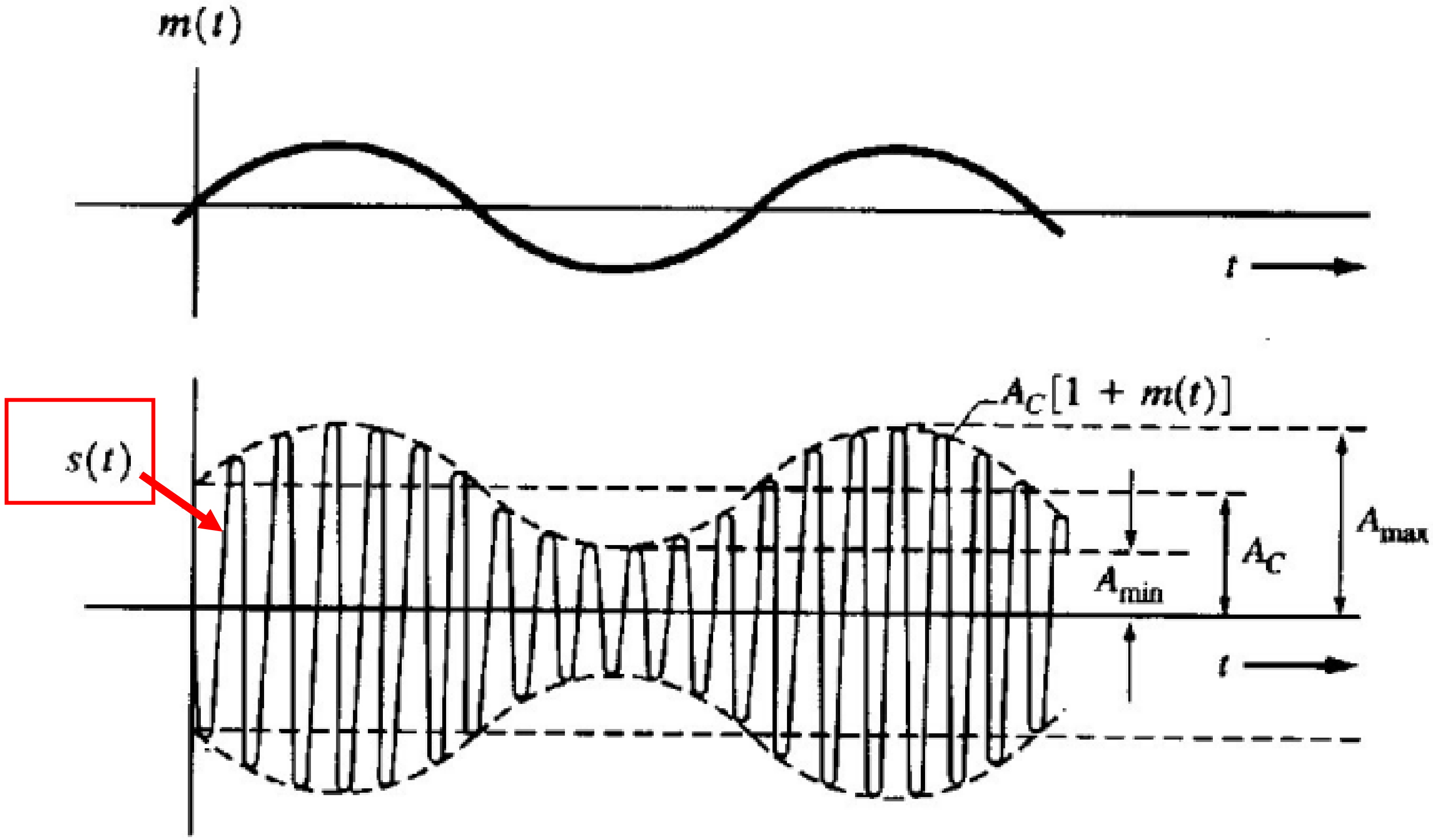
- **La costante A_c determina il livello di potenza**
- **Il segnale $m(t)$ è il segnale modulante (analogico o digitale)**
- **Il segnale modulato AM è quindi:**

$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{g(t)\cdot e^{j\omega_c t}\right\} = A_c\,[1 + m(t)]\cdot \mathrm{Re}\left\{e^{j\omega_c t}\right\}$$

$$\Longrightarrow \boxed{s(t) = A_c\,[1 + m(t)]\cos\omega_c t}$$

Modulazione di ampiezza (AM DSB)

Amplitude Modulation – Double Side band



(b) Segnale AM risultante

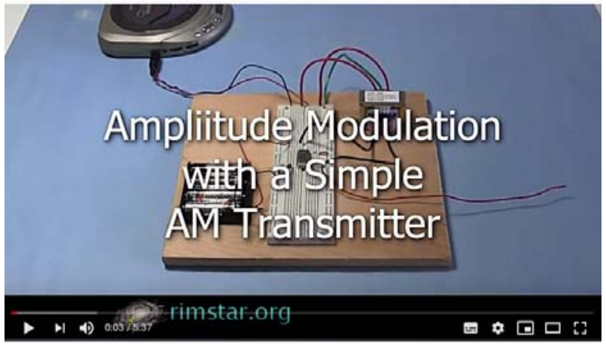
Profondità di modulazione

- **Ipotesi:**

$$\boxed{-1 \leq m(t) \leq 1}$$

NOTA: $\begin{cases} \min\{m(t) = -1\} \\ \max\{m(t) = +1\} \end{cases}$ contemporaneamente solo se il picco positivo e quello negativo del segnale prima della normalizzazione sono simmetrici rispetto all'asse x

---



YouTube

https://www.youtube.com/watch?v=R04yEKqgGPc

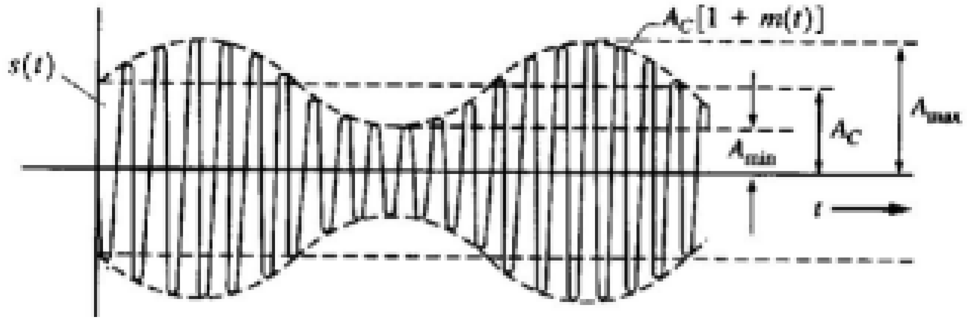
Profondità di modulazione

- **Definizioni:**
  - Profondità di modulazione positiva:
    $$\%\text{ modulazione positiva} = \frac{A_{\max} - A_c}{A_c} \cdot 100 = \max[m(t)] \cdot 100$$
  - Profondità di modulazione negativa:
    $$\%\text{ modulazione negativa} = \frac{A_c - A_{\min}}{A_c} \cdot 100 = -\min[m(t)] \cdot 100$$
  - Profondità di modulazione totale:
    $$\%\text{ modulazione} = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{2A_c} \cdot 100 = \frac{\max[m(t)] - \min[m(t)]}{2} \cdot 100$$

dove: $A_{\max}$: massimo di $A_c[1+m(t)]$

$A_{\min}$: minimo di $A_c[1+m(t)]$

A_c : livello di inviluppo AM in assenza di modulazione, cioé per $m(t)=0$



Spettro bilatero di un segnale modulato in ampiezza

Ricaviamo lo spettro di potenza di un segnale modulato in ampiezza (AM). Dalla Tabella 4-1, l'inviluppo complesso di un segnale AM è

$$g(t) = A_c[1 + m(t)]$$

e quindi il suo spettro è dato da

$$G(f) = A_c\delta(f) + A_cM(f) \qquad (4\text{-}19)$$

$m(t)$ è reale, allora $M^*(f) = M(-f)$

$\delta(f) = \delta(-f)$ (la funzione delta è pari per definizione).

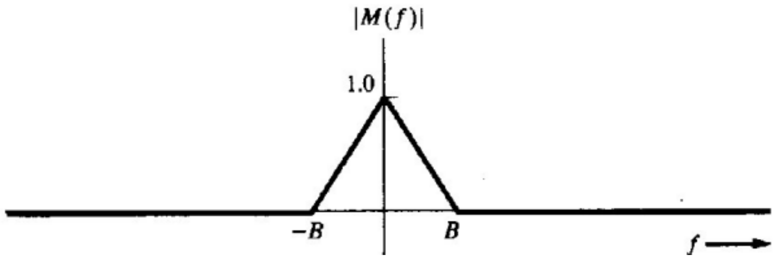
$$S(f) = \frac{1}{2}\left[G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)\right]$$

$$S(f) = \tfrac{1}{2}A_c[\delta(f - f_c) + M(f - f_c) + \delta(f + f_c) + M(f + f_c)] \qquad (4\text{-}20a)$$

Spettro bilatero di un segnale modulato in ampiezza

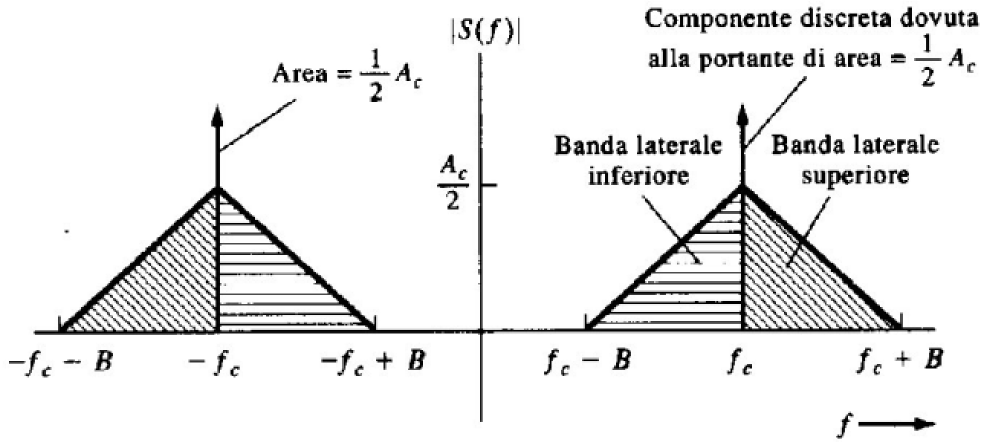
$$S(f) = \frac{1}{2} A_c[\delta(f - f_c) + M(f - f_c) + \delta(f + f_c) + M(f + f_c)] \quad (4\text{-}20a)$$

Esempio: Supponiamo che lo spettro di ampiezza del segnale modulante sia una funzione triangolare, come mostrato in Figura 4-2a. Tale spettro potrebbe essere generato ad esempio da una sorgente audio analogica con un forte contenuto di basse frequenze.



ESEMPIO: Modulante con spettro triangolare

Lo spettro del segnale AM risultante dalla (4-20) è mostrato in Figura 4-2b.



Spettro bilatero di un segnale modulato in ampiezza

$$S(f) = \frac{1}{2} A_c[\delta(f - f_c) + M(f - f_c) + \delta(f + f_c) + M(f + f_c)] \quad \text{(4-20a)}$$

Visto che $G(f - f_c)$ e $G^*(-f - f_c)$ non si sovrappongono, lo spettro di ampiezza è

$$|S(f)| = \begin{cases} \frac{1}{2}A_c\delta(f - f_c) + \frac{1}{2}A_c|M(f - f_c)|, & f > 0 \\ \frac{1}{2}A_c\delta(f + f_c) + \frac{1}{2}A_c|M(-f - f_c|, & f < 0 \end{cases} \quad \text{(4-20b)}$$

Il termine 1 in $g(t) = A_c[1 + m(t)]$ determina la presenza della funzione delta nello spettro in corrispondenza di $f = \pm f_c$, dove f_c è la frequenza portante assegnata.

Potenza media normalizzata del segnale AM

- **Potenza media normalizzata:**

$$\langle s^2(t)\rangle = \frac{1}{2}\langle |g(t)|^2\rangle = \frac{1}{2}A_c^2\langle [1+m(t)]^2\rangle = \frac{1}{2}A_c^2\langle 1+2m(t)+m^2(t)\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle s^2(t)\rangle = \frac{1}{2}A_c^2 + A_c^2\langle m(t)\rangle + \frac{1}{2}A_c^2\langle m^2(t)\rangle}$$

Se il segnale modulante ha valor medio nullo [$\langle m(t)\rangle = 0$]

NOTA: non è un caso generale, ma solo un esempio

$$\Rightarrow \boxed{\langle s^2(t)\rangle = \boxed{\frac{1}{2}A_c^2} + \boxed{\frac{1}{2}A_c^2\langle m^2(t)\rangle}}$$

potenza della portante

potenza delle bande laterali

Efficienza di modulazione e potenza di picco

- **Definizione: Efficienza di modulazione**
  - Rapporto percentuale tra la potenza del segnale modulato che trasporta l'informazione e la potenza totale
- **In un segnale AM:**
  - solo la componente di segnale legata alle bande laterali trasporta informazione; quindi l'efficienza di modulazione risulta:

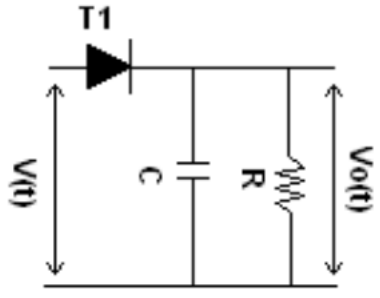
$$\eta_{\mathrm{mod}} = \frac{\langle s_{UTILE}^2(t)\rangle}{\langle s^2(t)\rangle} = \frac{\frac{1}{2}A_c^2\langle m^2(t)\rangle}{\frac{1}{2}A_c^2 + \frac{1}{2}A_c^2\langle m^2(t)\rangle} \Rightarrow \eta_{\mathrm{mod}} = \frac{\langle m^2(t)\rangle}{1+\langle m^2(t)\rangle}\cdot 100\%$$

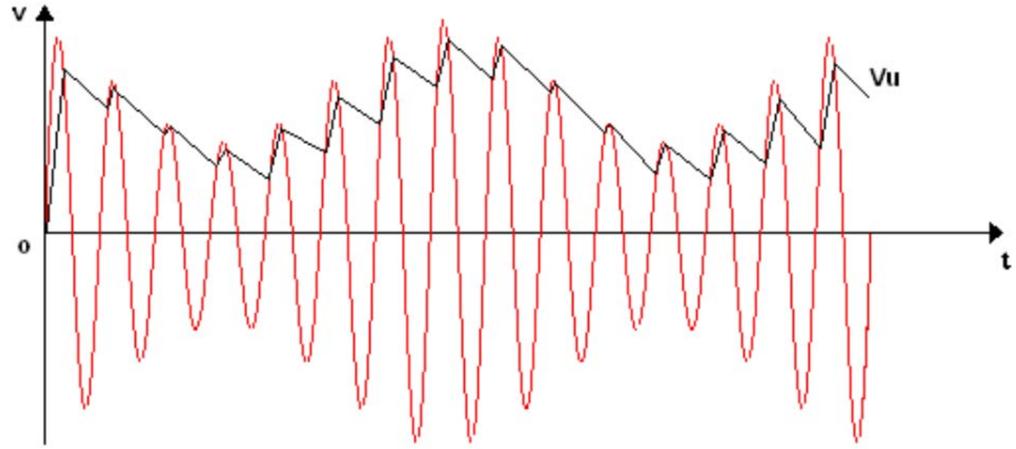
- **Nota:**
  - Il valore massimo di efficienza raggiungibile (nel caso irrealistico di segnale costante pari a 1) è il 50%. Dunque l'efficienza è sempre < 50%

- **Potenza di picco del segnale AM:**

$$P_{PEP} = \frac{1}{2}[\max|g(t)|]^2 \Rightarrow P_{PEP} = \frac{A_c^2}{2}\{1+\max[m(t)]\}^2$$

Demodulatore a inviluppo





- **La demodulazione si realizza con un rivelatore di inviluppo a diodo**
- **È un sistema molto economico, e molto efficiente nelle trasmissioni AM broadcast, dove i ricevitori sono molti e acquistati dagli utenti**
- **Funziona solo se l'inviluppo superiore è un segnale sempre positivo. Questo è garantito nella AM DSB-SC dal valore 1 che si trova nell'inviluppo complesso**

$$g(t) = A_c\,[1 + m(t)]$$

Modulazione AM a doppia banda laterale con portante soppressa (DSB-SC)

- **Double Side Band - Suppressed Carrier (DSB-SC):**
  - segnale AM senza portante

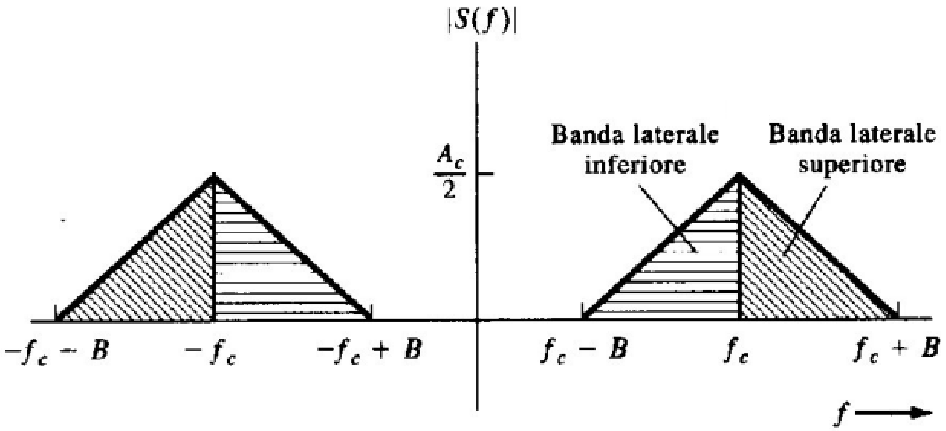
$$g(t) = A_c\, m(t)$$

$$s(t) = A_c\, m(t) \cos \omega_c t$$

  - Spettro:

$$S(f) = \frac{A_c}{2}\left[M(f - f_c) + M(f + f_c)\right]$$

come quello della modulazione AM, ma senza le funzioni delta in $-f_c$ e $+f_c$



ESEMPIO: Modulante con spettro triangolare

Modulazione AM a doppia banda laterale con portante soppressa (DSB-SC)

- **Rispetto al segnale AM:**

$$P_s = \langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{2}\langle g^2(t) \rangle = \frac{1}{2} A_c^2 \langle m^2(t) \rangle = \frac{1}{2} A_c^2 P_m$$

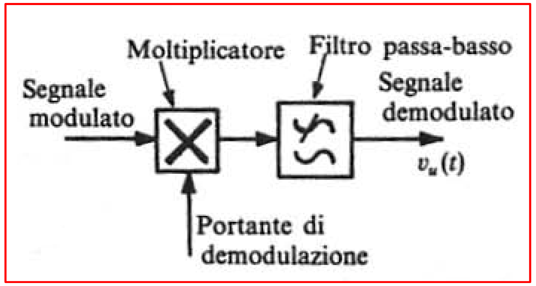
$$\boxed{P_s = \frac{1}{2} A_c^2 P_m}$$

  - Efficienza di modulazione: 100%

    non si ha nessuna aliquota di potenza in componenti discrete (nella portante)

  - Demodulazione: rivelatore sincrono

    più costoso di quello di inviluppo



Rivelatore sincrono

Modulazione AM a banda laterale unica (SSB-AM)

- **Definizione:**
  - **segnale a banda laterale superiore** (USSB - Upper Single Side Band)

$$S(f) = 0 \quad \text{per } |f| < f_c$$

  - **segnale a banda laterale inferiore** (LSSB - Lower Single Side Band)

$$S(f) = 0 \quad \text{per } |f| > f_c$$

- **Ci sono varie trasformazioni $g[m]$ per costruire un segnale SSB a partire dal segnale modulante $m(t)$**
- Usata in ambito militare e dai radioamatori nei sistemi HF (*High Frequency*)
- La banda del segnale SSB-AM è metà di quella dei segnali AM e DSB-SC

Modulazione AM a banda laterale unica (SSB-AM)

- **Single Side Band - AM (SSB-AM):**
  - inviluppo complesso:

$$g(t) = A_c[m(t) \pm j\,\hat{m}(t)]$$

Segno +	⇨	USSB
Segno -	⇨	LSSB

  - segnale modulato in banda base:

$$s(t) = A_c[m(t)\cos\omega_c t \mp \hat{m}(t)\sin\omega_c t]$$

- **Trasformata di Hilbert**

$\hat{m}(t)$ **Trasformata di Hilbert** di $m(t)$

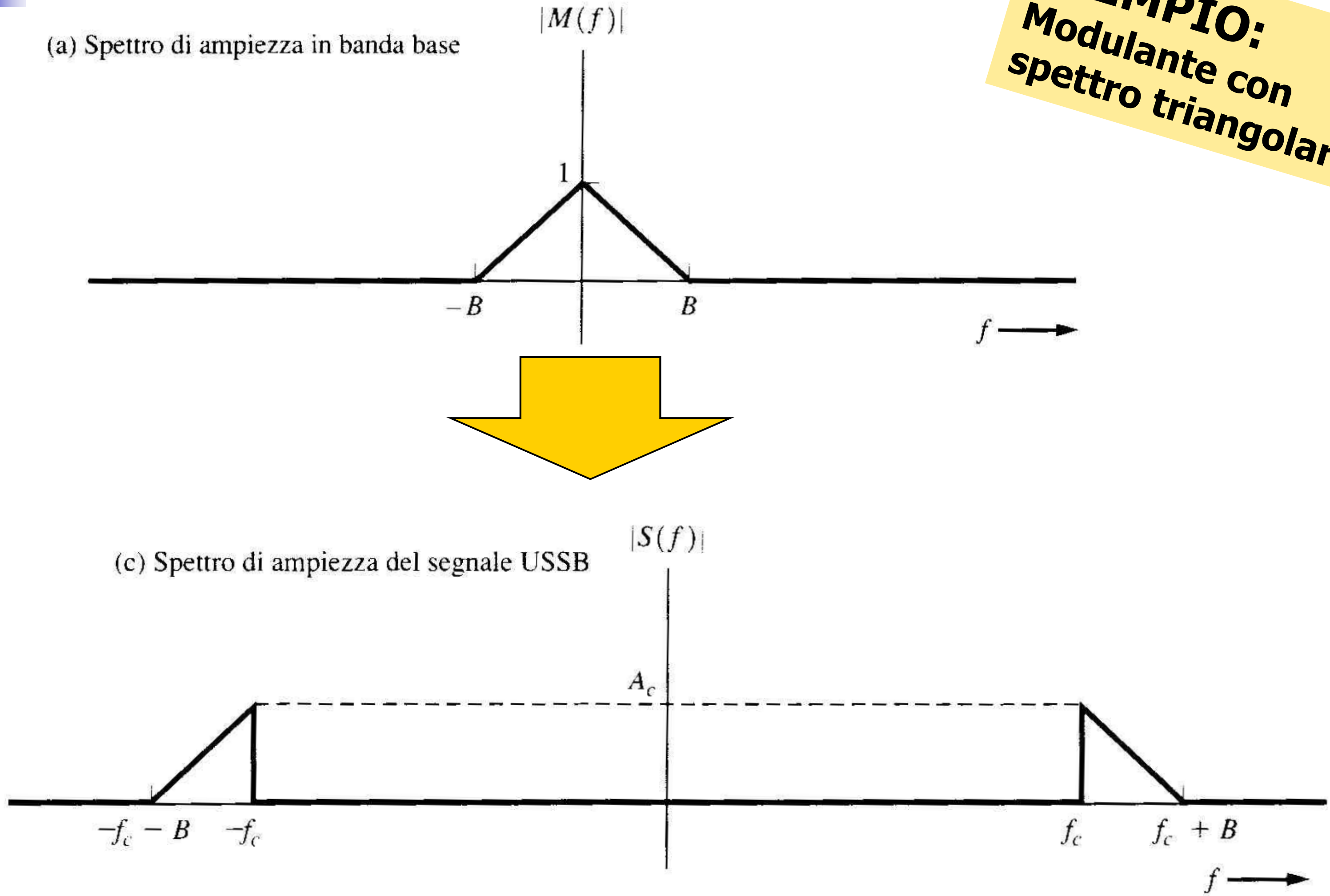
Sfasatore puro di 90°

$$\hat{m}(t) = m(t) * h(t)$$

dove: $h(t) = \dfrac{1}{\pi t}$ ⇨ $H(f) = \Im\{h(t)\} = \begin{cases} -j & f > 0 \\ j & f < 0 \end{cases}$

Modulazione SSB-AM: spettro di ampiezza di un segnale USSB

ESEMPIO: Modulante con spettro triangolare



Modulazione AM a banda laterale unica (SSB-AM)

- **Potenza media normalizzata**

$$\boxed{P_s = \left\langle s^2(t) \right\rangle = A_c^2 \, P_m}$$

  - cioè: la potenza del segnale SSB è quella del segnale modulante moltiplicata per il guadagno

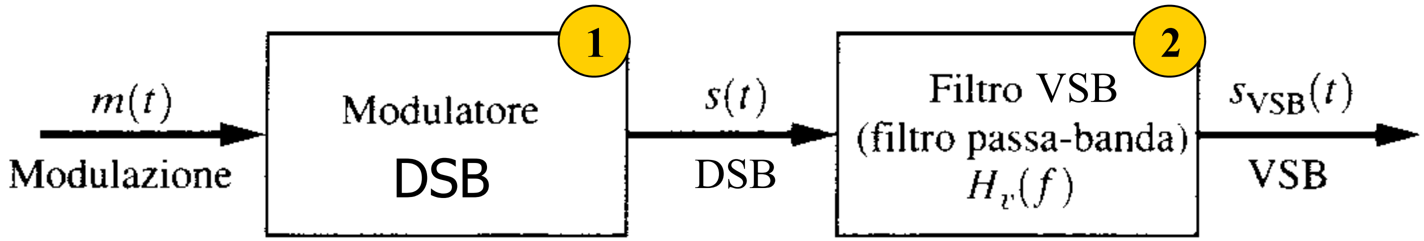
- **Potenza normalizzata di picco**

$$\frac{1}{2}\max\left\{|g(t)|^2\right\} = \frac{1}{2} A_c^2 \max\left\{m^2(t) + \hat{m}^2(t)\right\} \Longrightarrow \boxed{P_{PEP} = A_c^2}$$

Modulazione AM a banda laterale unica (SSB-AM)

- **Vantaggi:**
  - Il segnale SSB-AM necessita di una banda dimezzata rispetto a quella di un segnale AM o DSB-SC
  - Fornisce un rapporto segnale-rumore all'uscita del ricevitore superiore a quello di un sistema AM, e uguale a quello del DSB-SC
- **Svantaggi:**
  - Il modulatore e il demodulatore sono di più difficile realizzazione rispetto al DSB-SC e, soprattutto, dell'AM

Modulazione a banda laterale vestigiale (o residua) - VSB



- **Segnale VSB:**

$$\boxed{s_{VSB}(t) = s(t) * h_v(t)}$$

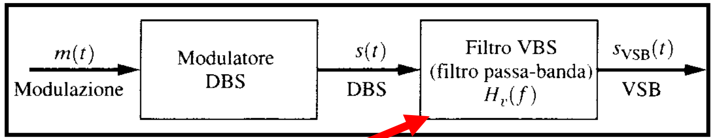
risposta impulsiva del filtro vestigiale

segnale (AM oppure DSB-SC)

- **Spettro del segnale VSB:**

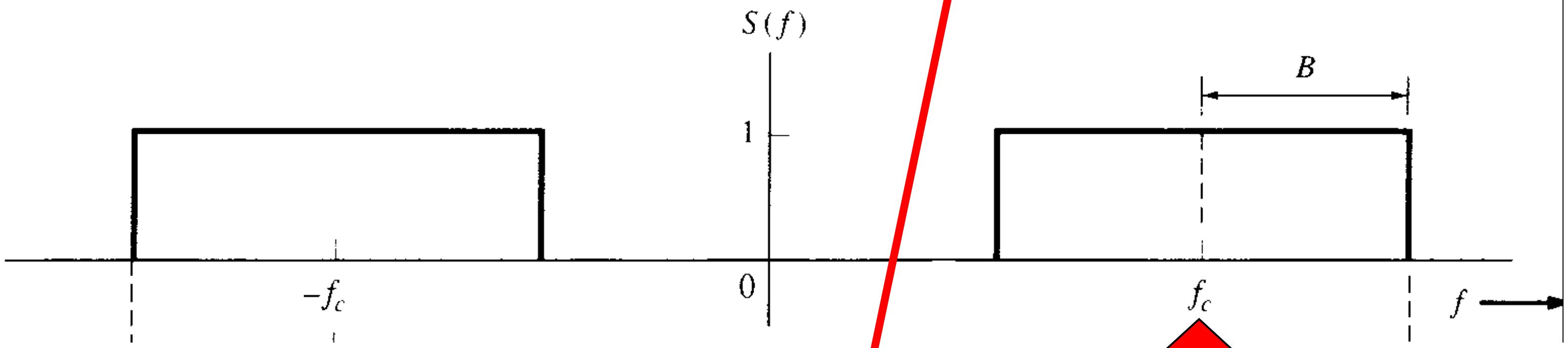
$$\boxed{S_{VSB}(f) = S(f) H_v(f)}$$

Spettri dei segnali nella modulazione vestigiale

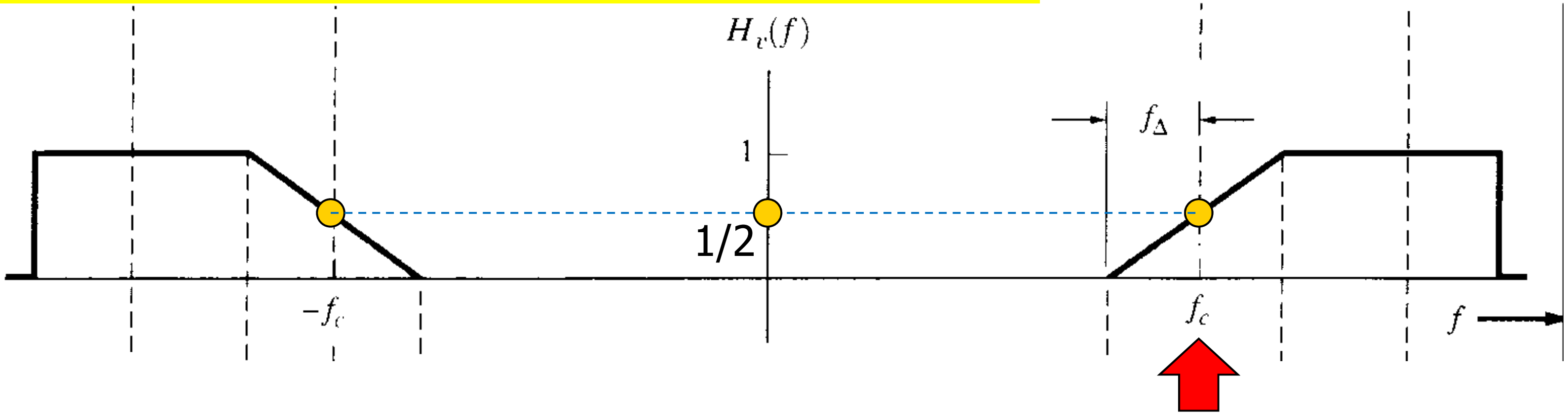


$$S_{VSB}(f) = S(f)H_v(f)$$

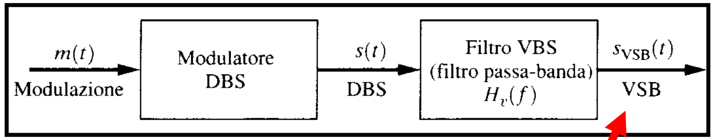
Spettro bilatero del segnale DSB-SC



Risposta in frequenza del FILTRO VESTIGIALE

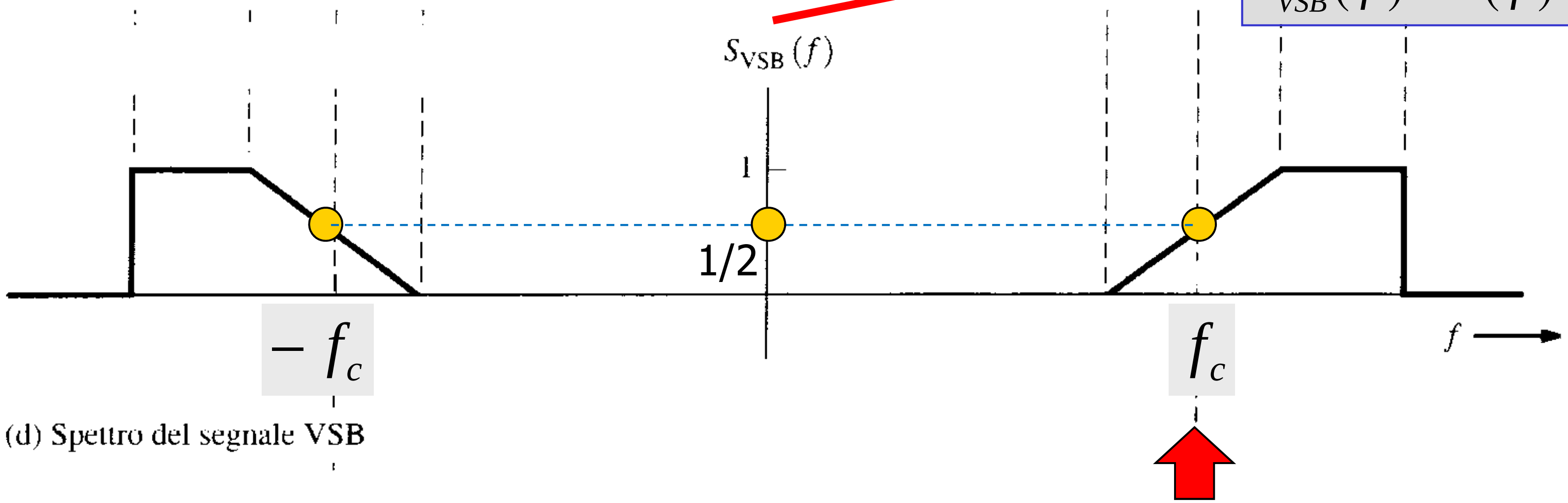


Spettri dei segnali nella modulazione vestigiale



SEGNALE MODULATO CON MODULAZIONE VESTIGIALE

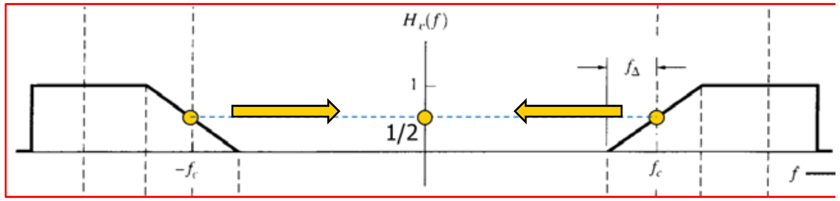
$$S_{VSB}(f) = S(f)H_v(f)$$



(d) Spettro del segnale VSB

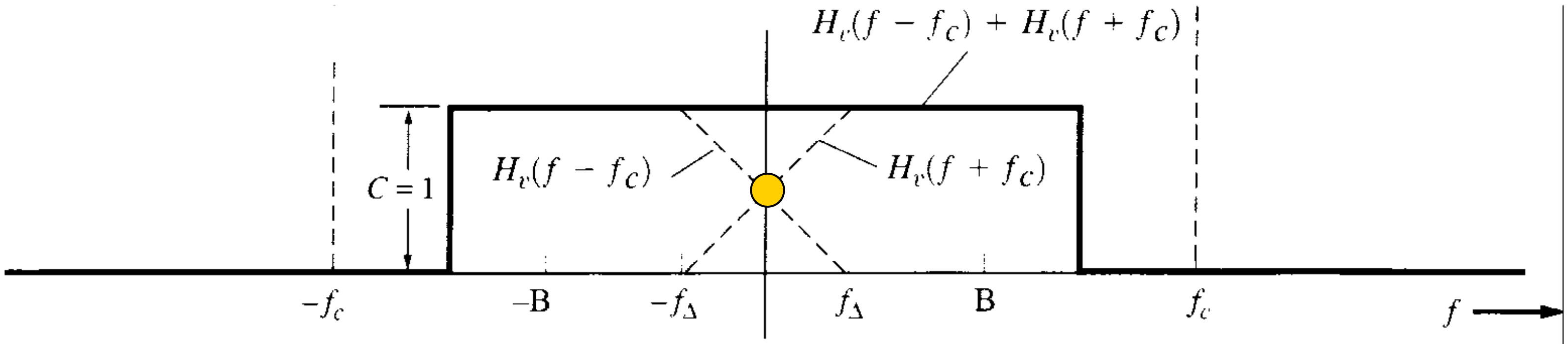
Attenzione: nel punto evidenziato con il cerchietto, centrato sulla frequenza portante, la funzione vale 1/2

Demodulazione di un segnale vestigiale



- **Il demodulatore può essere:**
  - Sincrono se il segnale d'ingresso è DSB-SC
  - Rivelatore d'inviluppo, se è presente la portante con un livello sufficiente
- **Vincolo per non avere distorsione sul segnale demodulato:**
  - Il filtro vestigiale deve essere tale che:

$$\boxed{H_v(f-f_c)+H_v(f+f_c)=C} \qquad \forall |f|\le B$$



(e) Proprietà di simmetria vestigiale

MODULAZIONI D'ANGOLO

- MODULAZIONE DI FASE
- MODULAZIONE DI FREQUENZA

Modulazione d'angolo

- **Modulazione d'angolo (o angolare)**
  - Inviluppo complesso:

$$\boxed{g(t) = A_c\, e^{j\theta(t)}}$$

  - Il modulo dell'inviluppo complesso è costante $\boxed{R(t) = |g(t)| = A_c}$
  - La fase è funzione del segnale modulante $m(t)$
  - Complessivamente $g(t)$ è una funzione non lineare del segnale modulante $m(t)$
  - Il segnale modulato in angolo risulta:

$$\boxed{s(t) = \mathrm{Re}\left\{g(t)\, e^{j\omega_c t}\right\}} \Rightarrow \boxed{s(t) = A_c\left[\cos\left(\omega_c t + \theta(t)\right)\right]}$$

- La modulazione di fase e la modulazione di frequenza sono due casi particolari di modulazione angolare

Modulazione di fase e di frequenza

- **Modulazione di fase (PM - Phase Modulation)**
  - la fase istantanea dell'inviluppo complesso è proporzionale al segnale modulante: $\boxed{\theta(t) = D_p\, m(t)}$
  - la costante D_p:
    - sensibilità di fase del modulatore (oppure costante di deviazione di fase)
    - misurata rad/V, se il segnale $s(t)$ è una tensione
- **Modulazione di frequenza (FM - Frequency Modulation)**
  - la fase istantanea dell'inviluppo complesso è proporzionale all'integrale del segnale modulante: $\boxed{\theta(t) = D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\, d\sigma}$
  - la costante D_f:
    - sensibilità di frequenza (oppure costante di deviazione di frequenza)
    - misurata (rad/s)/V, se il segnale $s(t)$ è una tensione

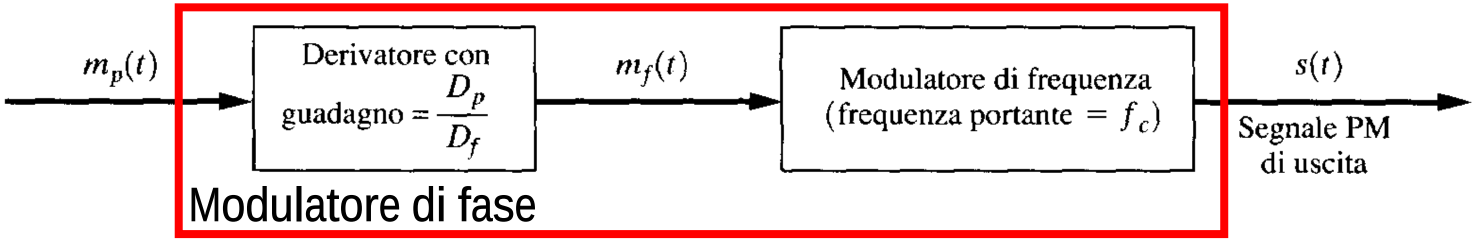
Relazione PM / FM

PM: $\theta(t) = D_p \, m_p(t)$

FM: $\theta(t) = D_f \int_{-\infty}^{t} m_f(\sigma)\, d\sigma$

Generazione di un segnale PM utilizzando un modulatore FM

- **È possibile ottenere un modulatore di FASE da un modulatore di FREQUENZA**

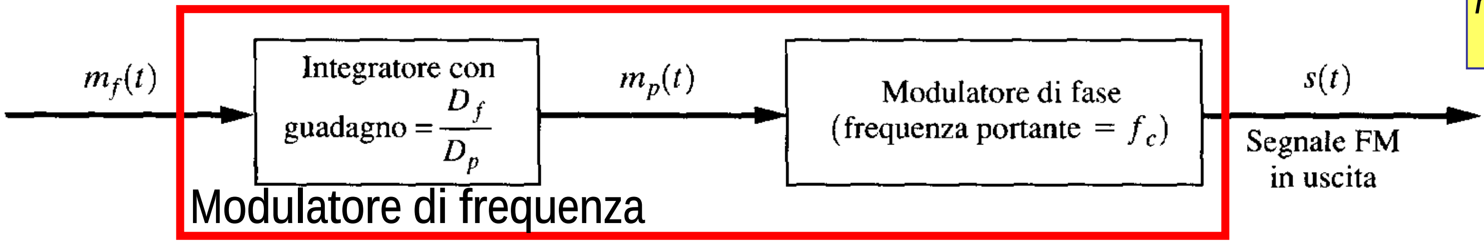


$$m_f(t) = \frac{D_p}{D_f} \frac{d}{dt} m_p(t)$$

Generazione di un segnale PM utilizzando un modulatore FM

- **È possibile ottenere un modulatore di FREQUENZA da un modulatore di FASE**

$$m_p(t) = \frac{D_f}{D_p} \int_{-\infty}^{t} m_f(\sigma)\, d\sigma$$



Frequenza istantanea

Per un segnale modulato angolarmente possiamo scrivere:

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi\, f_c\, t + \theta(t)\right] = A_c \cos\, \psi(t)$$

- Fase istantanea di un segnale modulato: fase presente in un particolare istante

$$\boxed{\psi(t) = 2\pi\, f_c\, t + \theta(t)}$$

Definiamo:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\psi(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\theta(t)}$$

- Frequenza istantanea di un segnale modulato: frequenza presente in un particolare istante

Deviazione di frequenza

$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\theta(t)$$

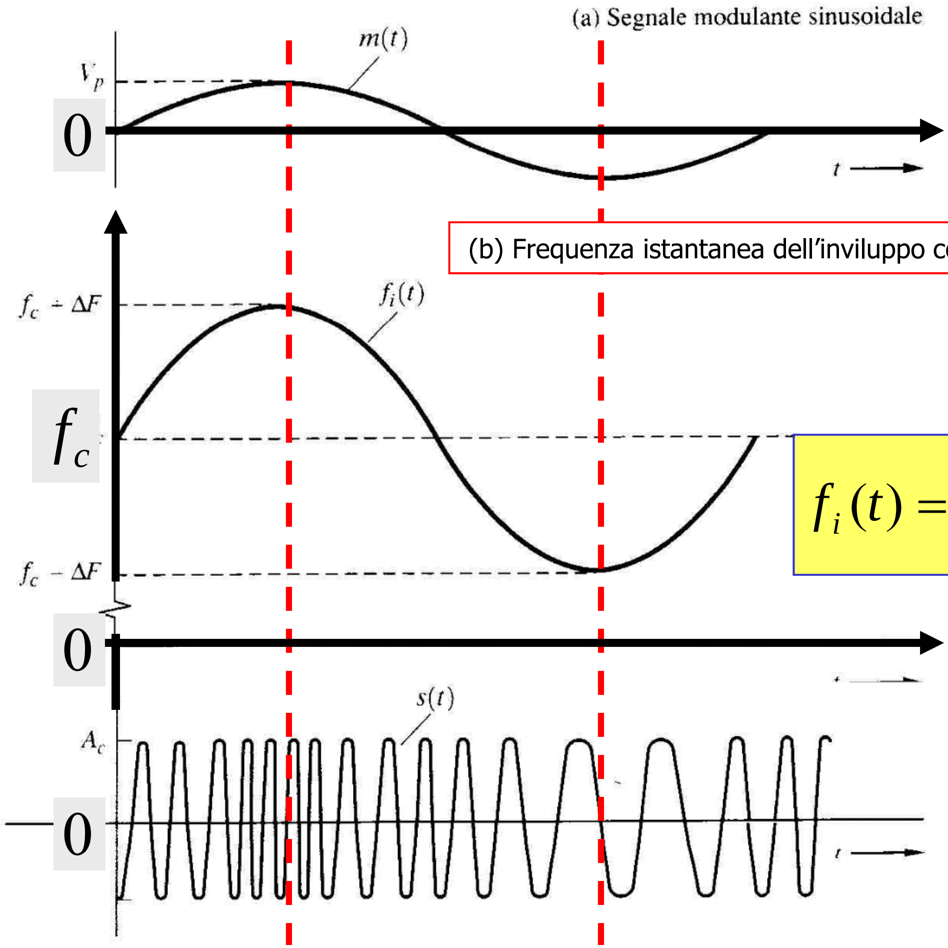
Deviazione di frequenza dalla frequenza portante $$f_d(t) = f_i(t) - f_c = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{d}{dt}\theta(t)\right]$$

Deviazione di frequenza di picco $$\Delta F = \max\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{d}{dt}\theta(t)\right]\right\}$$

Deviazione di frequenza picco-picco $$\Delta F_{pp} = \max\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{d}{dt}\theta(t)\right]\right\} - \min\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{d}{dt}\theta(t)\right]\right\}$$

- Per un segnale FM: $\Delta F = \frac{1}{2\pi} D_f V_p$ dove: $V_p = \max\{m(t)\}$

Segnale FM di un segnale modulante sinusoidale



(c) Segnale FM corrispondente

$$\theta(t) = D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\,d\sigma$$

$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\theta(t)$$

ESERCIZIO PER CASA:
Fare un grafico analogo per la modulazione di fase

Analisi della modulazione di frequenza

$$\Delta F = \frac{1}{2\pi} D_f V_p$$

Se aumenta l'ampiezza del segnale modulante, Vp

Aumento della deviazione, ΔF

Aumento della banda del segnale FM

La potenza media rimane però costante, e pari a $P = \frac{A_c^2}{2}$

Aumentando Vp, le componenti spettrali vicino alla frequenza portante decrescono in ampiezza

Cominciano a comparire frequenze sempre più lontane

Nota: comportamento differente da quello della modulazione AM, dove il segnale modulante influenza la potenza del segnale modulato, ma non la banda

Deviazione di fase

$$\theta(t) = D_p\, m(t)$$

- **Definizione:**
  - Fase istantanea di un segnale modulato: fase presente in un particolare istante $\psi(t) = 2\pi\, f_c\, t + \theta(t)$
  - Fase istantanea di un segnale modulato in assenza di segnale modulante $\psi(t) = 2\pi\, f_c\, t$

Deviazione di fase rispetto alla fase nulla	$\theta(t)$
Deviazione di fase di picco	$\Delta\theta = \max\{\theta(t)\}$

- Per un segnale PM: $\Delta\theta = D_p V_p$ dove: $V_p = \max\{m(t)\}$

Indici di modulazione angolare

- Definizione:
  - Indice di modulazione di fase: $\boxed{\beta_p = \Delta\theta}$
  - Indice di modulazione di frequenza:

$$\boxed{\beta_f = \frac{\Delta F}{B}}$$

dove: B: banda del segnale modulante

ΔF: deviazione di frequenza di picco

Spettro dei segnali modulati d'angolo

- **Spettro:**

$$\boxed{s(f)=\frac{1}{2}\left[G(f-f_c)+G^*(-f-f_c)\right]}$$

dove: $G(f)=\Im\{g(t)\}=\Im\{A_c e^{j\theta(t)}\}$

- Per i segnali modulati d'angolo, $g(t)$ è una funzione non lineare di $m(t)$

⇓

- Non esiste una formula semplice e generale che mette in relazione $G(f)$ e $M(f)$, come per l'AM

- La teoria dipende dal particolare tipo di segnale
- Non vale il principio di sovrapposizione: lo spettro FM relativo alla somma di due segnali NON È uguale alla somma dei due spettri

Regola di Carson per il calcolo della banda

- **IN GENERALE, per tutte le modulazioni d'angolo:**
  - La banda di un segnale modulato d'angolo dipende da β e da f_m.
- **Regola di Carson**:
  - Il 98% della potenza totale è contenuta nella banda:

$$\boxed{B_T = 2(\beta + 1)B}$$

dove:

  - β: indice di modulazione di fase o quello di frequenza
  - B: banda del segnale modulante
- Fornisce un'indicazione di massima per valutare la banda di un segnale PM o FM (con modulante anche non sinusoidale, purché a banda limitata)

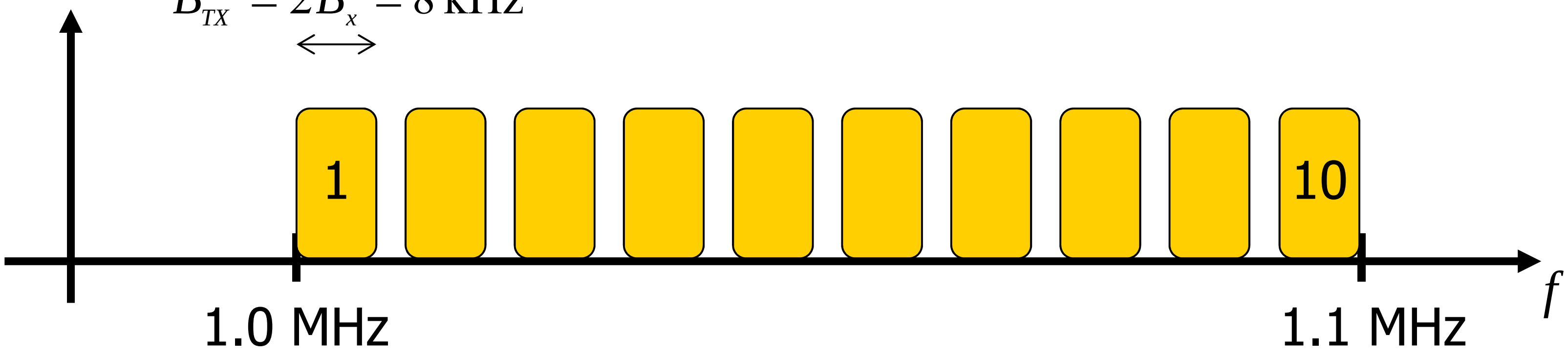
ESERCIZI

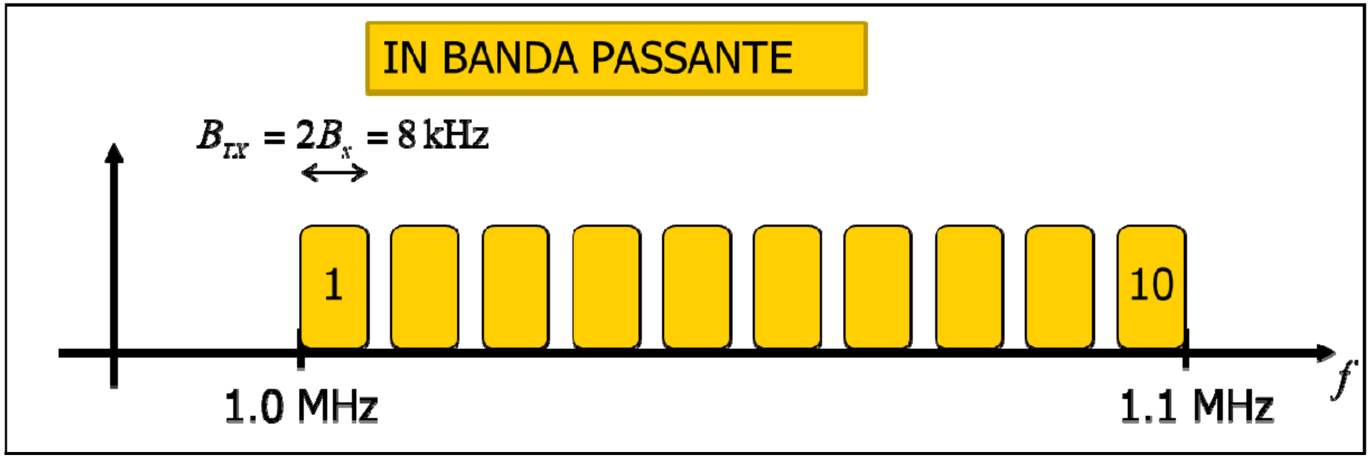
Esercizio 11: Modulazione AM e multiplazione di frequenza

Si consideri un gruppo di N=10 segnali modulanti in banda base $x_i(t)$, statisticamente indipendenti tra loro e aventi banda $B_x = 4$ kHz. Ciascun segnale viene modulato AM-DSB-SC attorno ad una frequenza f_i. Sapendo che sul canale di trasmissione è disponibile una banda limitata all'intervallo [1MHz, 1.1MHz] stabilire una allocazione della frequenze f_i che consenta di separare correttamente gli N segnali in ricezione. Quanto vale il risultante intervallo di guardia in frequenza tra i canali?

IN BANDA PASSANTE

$B_{TX} = 2B_x = 8\,\text{kHz}$





Frequenza Prima portante: $f_1 = 1\ \text{MHz} + 4\ \text{kHz} = 1.004\ \text{kHz}$

Le frequenze delle altre portanti: $f_i = f_1 + (i-1)(8\,\text{kHz} + B_G)$

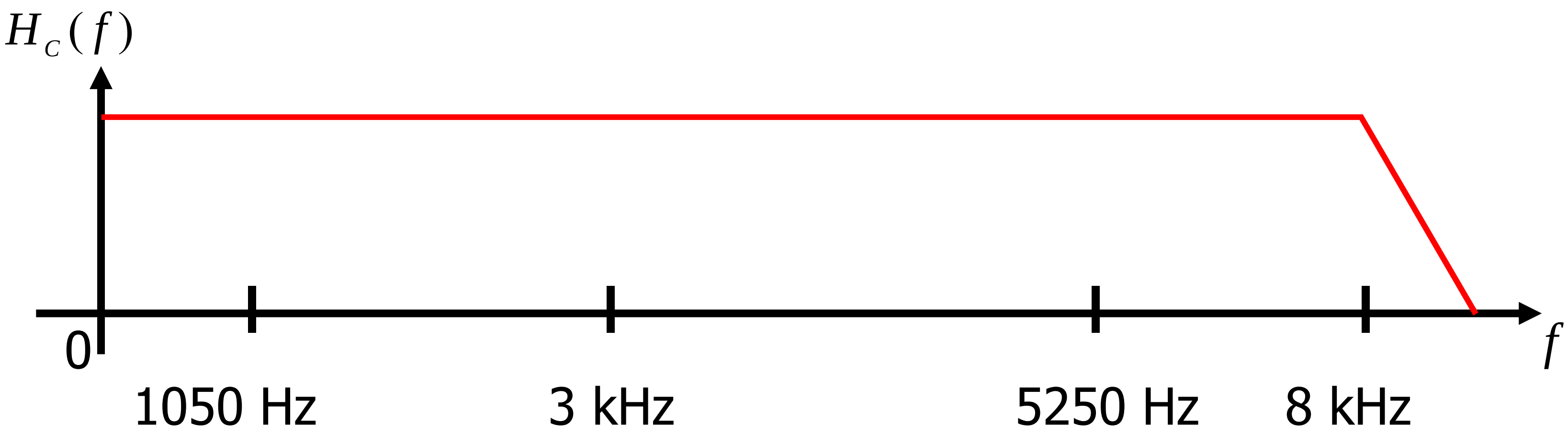
Banda di guardia:

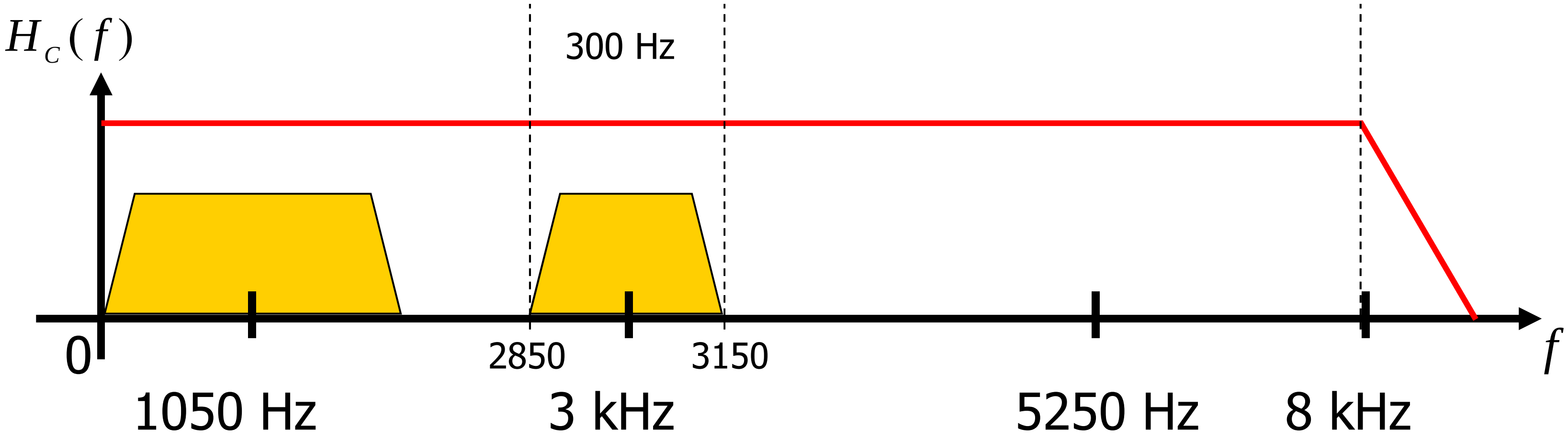
$$B_G = \frac{\text{Intero intervallo} - \text{intervallo occupato dai 10 canali}}{\text{numero di bande di guardia}} =$$

$$= \frac{100\,\text{kHz} - 80\,\text{kHz}}{9} = 2.2\,\text{kHz}$$

Siano date 3 trasmissioni in modulazione di frequenza (FM), con portante rispettivamente a 1050 Hz, 3 kHz, 5250 Hz su un canale che si comporta come un filtro passa-basso con frequenza di taglio $B_c = 8$ kHz. La seconda onda, centrata a 3 kHz, modula con $\beta_2 = 0.5$ un segnale con banda di 100 Hz. Gli altri segnali FM, invece, portano una modulante con banda di 300 Hz. Supponendo la modulante sinusoidale:

1. calcolare l'intervallo di frequenze occupate dal secondo segnale;
2. progettare il valore di β_1 da utilizzare affinchè il primo segnale modulato abbia banda massima, ma tale da non sovrapporsi al secondo segnale;
3. progettare il valore di β_3 da utilizzare affinchè il terzo segnale modulato abbia banda massima, ma tale da non sovrapporsi al secondo segnale, e tale che il terzo segnale non invada frequenze superiori a B_c ;
4. calcolare le ampiezze delle tre portanti affinchè la potenza di ciascun segnale FM non superi il valore di 1 W;





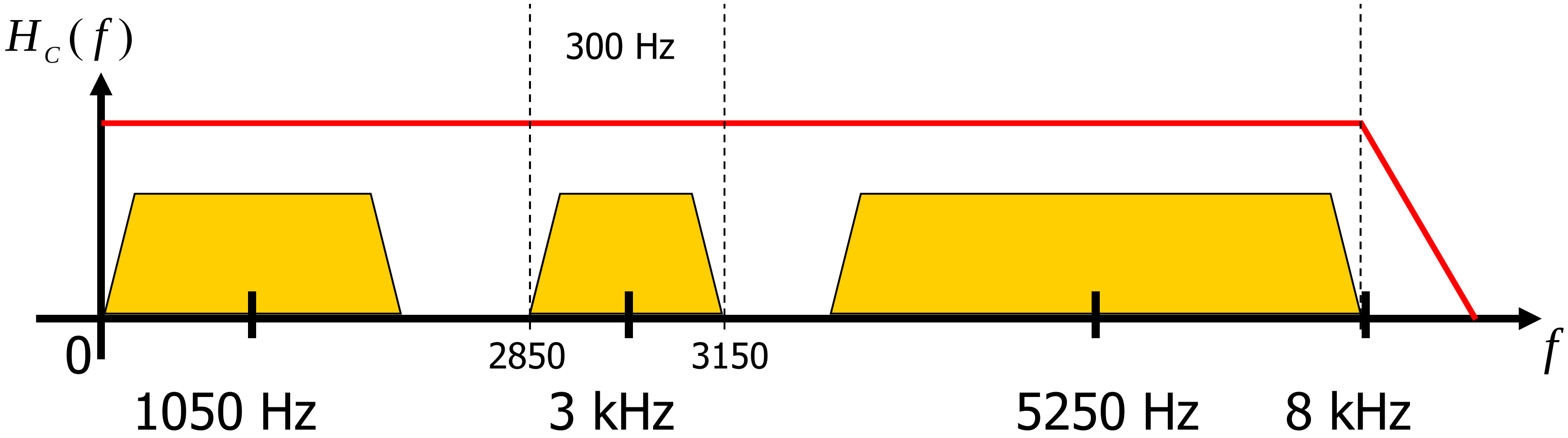
1) Per non avere sovrapposizione bisogna calcolare la banda del secondo segnale. Secondo l'approssimazione di Carson:

$$B_2 = 2(\beta_2 + 1) f_m = 2(0.5+1)100 = 300 \text{ Hz}$$

Dunque il secondo segnale si estende nell'intervallo: $[2.85, 3.15]$kHz {3 – 0.15 = 2.85 kHz e 3 + 0.15 = 3.15 kHz}.

2) Il primo segnale (per non sovrapporsi) potrà occupare da 1050 Hz a 2.85 kHz = 1800 Hz (in alto), e altrettanto in basso. Tuttavia in basso ha solo a disposizione 1050 Hz. Quindi dovrà occupare una banda di 1050 Hz sia verso il basso, che verso l'alto. Dunque:

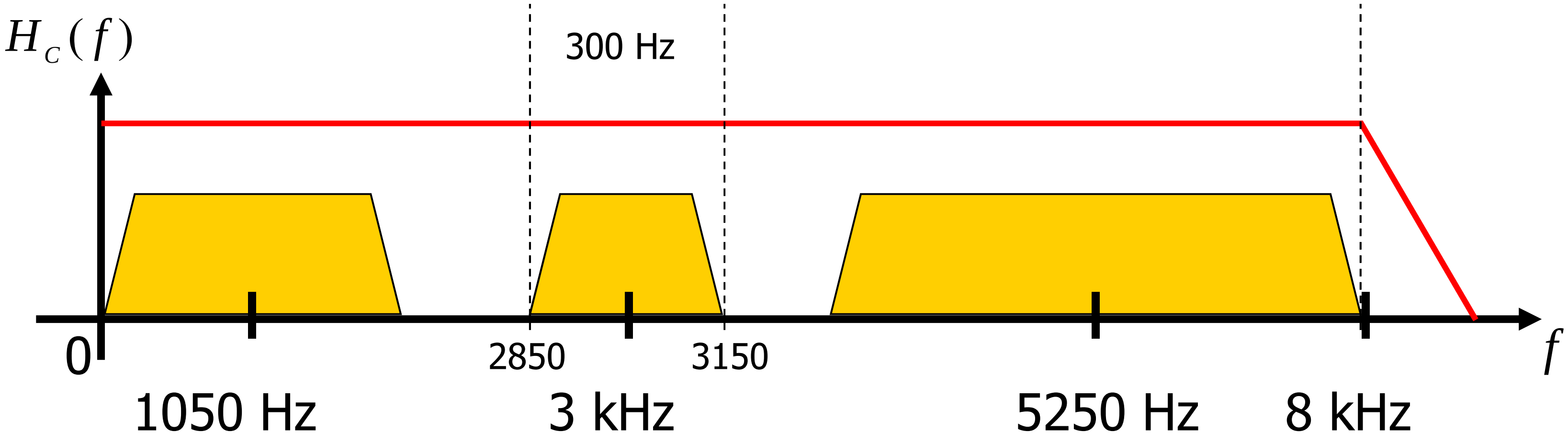
$$B_1 = 2 \cdot 1050 = 2(\beta_1 + 1)300 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \beta_1 = 2.5$$



3) Per il terzo segnale abbiamo 2 vincoli. La non sovrapposizione con il secondo richiede che la banda occupata non scenda da 5250 oltre 3150 Hz, cioè non occupi più di 2100 Hz in basso e 2100 Hz in alto. In questo caso:

$$B_3 = 2 \cdot 2100 = 2(\beta_3 + 1)300 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \beta_3 = 6$$

Con queste scelte, è necessario un canale con massima frequenza passante $5250 + 2100 = 7350$ Hz. Dato che il canale ha $B_c = 8$ kHz, il β_3 calcolato soddisfa anche la condizione che il segnale modulato non invada frequenze esterne a quelle disponibili.



4) Per quanto riguarda la potenza, ogni segnale FM trasporta un valore di potenza indipendente dall'indice di modulazione. In particolare:

$$P_{FM} = \frac{A^2}{2}$$

ove $A = A_c$ è l'ampiezza della portante.

ove A è l'ampiezza della portante.
Perciò, dato che ogni segnale non può portare più di 1 W, si avrà:

$$P_{FM_1} = P_{FM_2} = P_{FM_3} = 1 = \frac{A^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad A = \sqrt{2}\ V$$