Corso di Comunicazioni Digitali

2 – RICHIAMI DI TEORIA DEI SEGNALI

Prof. Giovanni Schembra

Nota bene:

- Nell’a.a. 2018/2019, l‘85% di chi non ha superato l’esame non aveva superato l’esame di Teoria dei Segnali

Da non trascurare

Alfabeto Greco

MAIUSCOLA	minuscola	nome
Α	α	alfa
Β	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
Ε	ε	epsilon
Ζ	ζ	zeta
Η	η	eta
Θ	θ	theta
Ι	ι	iota
Κ	κ	kappa
Λ	λ	lambda

. . .

. . .

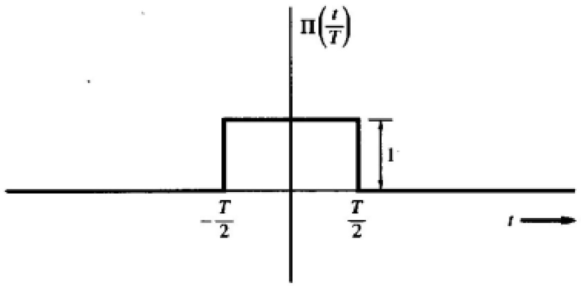
Μ	μ	mi
Ν	ν	ni
Ξ	ξ	xi
Ο	ο	omicron
Π	π	pi
Ρ	ρ	ro
Σ	σ	sigma
Τ	τ	tau
Υ	υ	upsilon
Φ	φ	phi
Χ	χ	chi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

TEORIA DEI SEGNALI DETERMINATI

Segnali notevoli

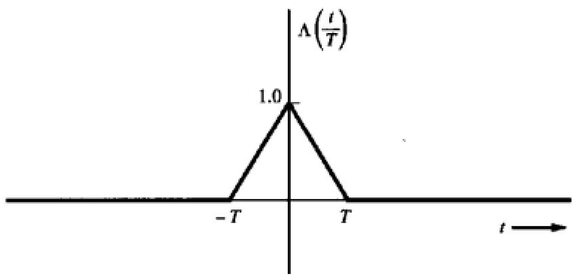
- **Funzione impulso rettangolare, $\Pi(t)$**

Definizione:
$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \le \dfrac{T}{2} \\ 0 & \text{se } |t| > \dfrac{T}{2} \end{cases}$$



- **Funzione impulso triangolare, $\Lambda(t)$**

Definizione:
$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \equiv \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{T} & \text{se } |t| \le T \\ 0 & \text{se } |t| > T \end{cases}$$

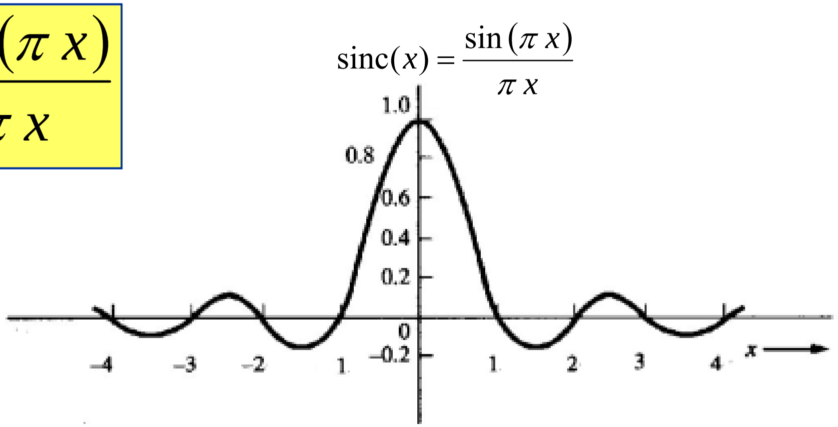


IMPORTANTISSIMA

Segnali notevoli: SENO CARDINALE

- **Segnale SENO CARDINALE, sinc(x)**

Definizione: $$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$



Si annulla sui valori interi non nulli del suo argomento

$$x(t) = A\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \Rightarrow \begin{cases} \langle x(t) \rangle = 0 \\ P_x = 0 \\ E_x = A^2 T \end{cases}$$

Il seno cardinale è un segnale di energia

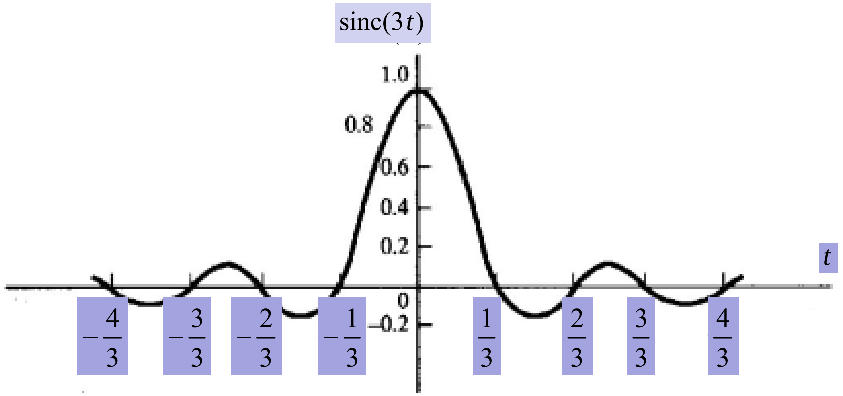
IMPORTANTISSIMA

Segnali notevoli: SENO CARDINALE

- **ESEMPIO**

$$\mathrm{sinc}(3t) = \frac{\sin(\pi 3t)}{\pi 3t}$$

Si annulla sui valori interi non nulli del suo argomento



Il calcolo avviene con la calcolatrice impostata su **rad**

$$\mathrm{sinc}(3t)\Big|_{t=0.15} = 0.6986$$

IMPORTANTISSIMA

Segnali notevoli: COSENO RIALZATO

È coseno rialzato nel dominio della frequenza

Definizione in frequenza:

$$W(f)=\begin{cases}1 & |f|<f_1\\ \frac{1}{2}\left\{1+\cos\left[\pi\frac{|f|-f_1}{2f_\Delta}\right]\right\} & f_1<|f|<B_\Sigma\\ 0 & |f|>B_\Sigma\end{cases}$$

B_Σ : banda occupata

$f_\Delta = B_\Sigma - f_0$

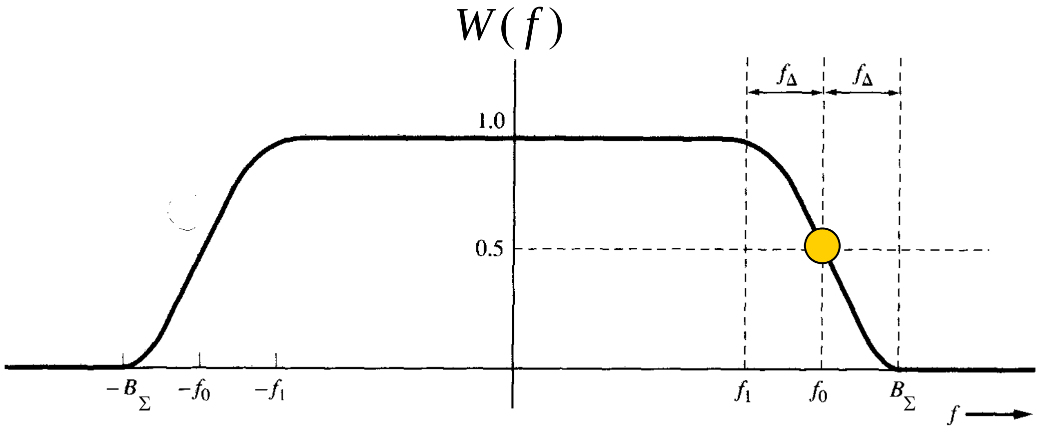
$f_1 = f_0 - f_\Delta$

f_0 : banda a - 6 dB

$$r=\frac{f_\Delta}{f_0}$$

Fattore di decadimento oppure ***rolloff***

$$0 \le r \le 1$$

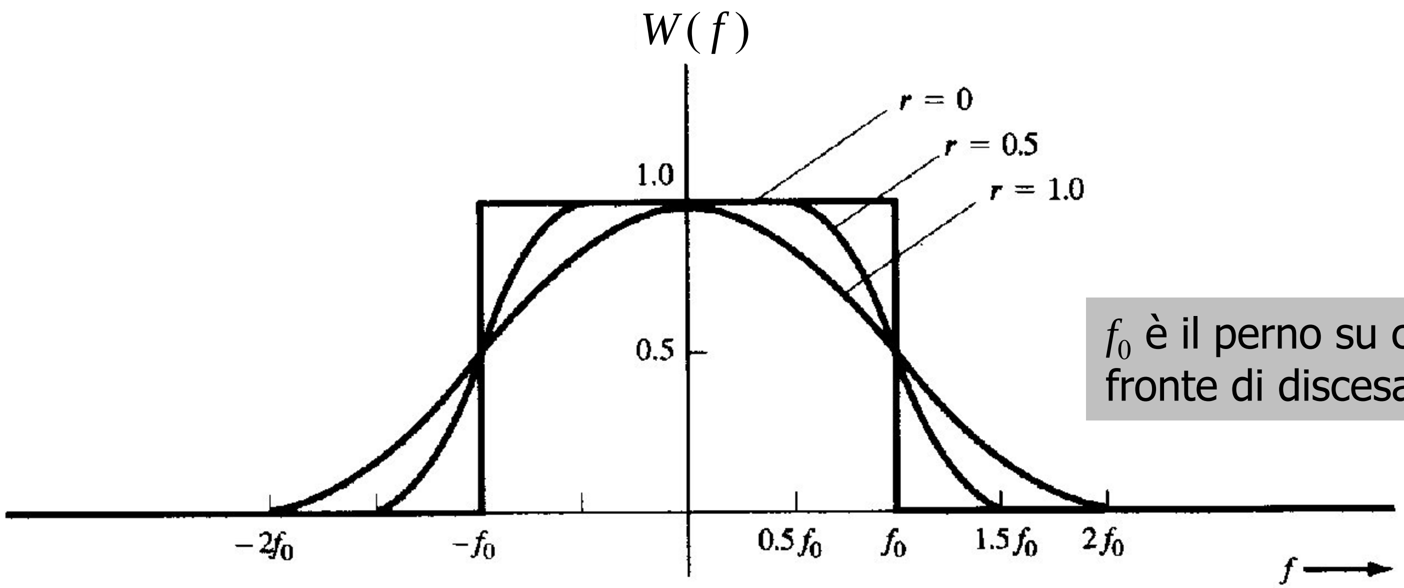


f_0 è il perno su cui ruota il fronte di discesa del filtro

IMPORTANTISSIMA

Segnali notevoli: COSENO RIALZATO

Definizione in frequenza:



f_0 è il perno su cui ruota il fronte di discesa del filtro

$r = 0$ →

- Impulso rettangolare in frequenza
- Occupazione minima di banda: $B_\Sigma = f_0$

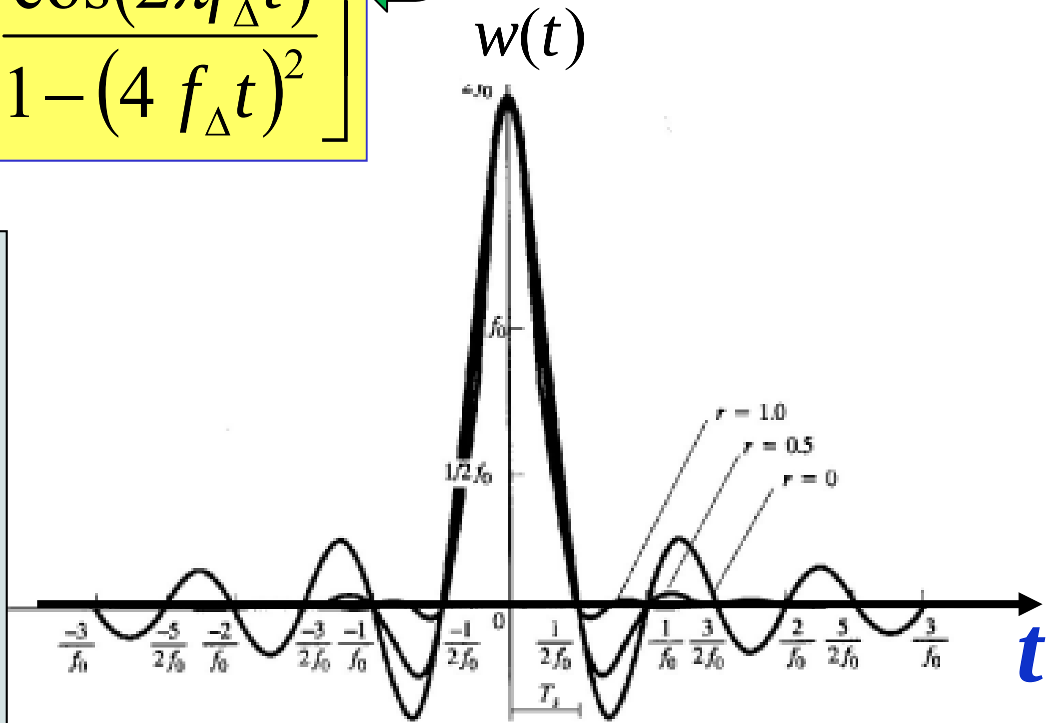
IMPORTANTISSIMA

Segnali notevoli: COSENO RIALZATO

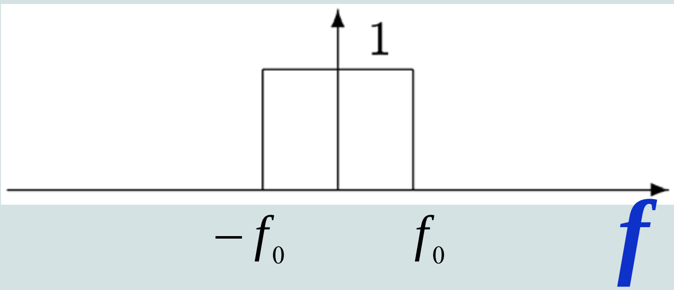
Definizione nel tempo:

Da non imparare a memoria

$$w(t) = 2 f_0 \mathrm{sinc}(2 f_0 t) \cdot \left[\frac{\cos(2\pi f_\Delta t)}{1-(4 f_\Delta t)^2} \right]$$



$r = 0$ → Coincide con un $\mathrm{sinc}(2f_0\, t)$

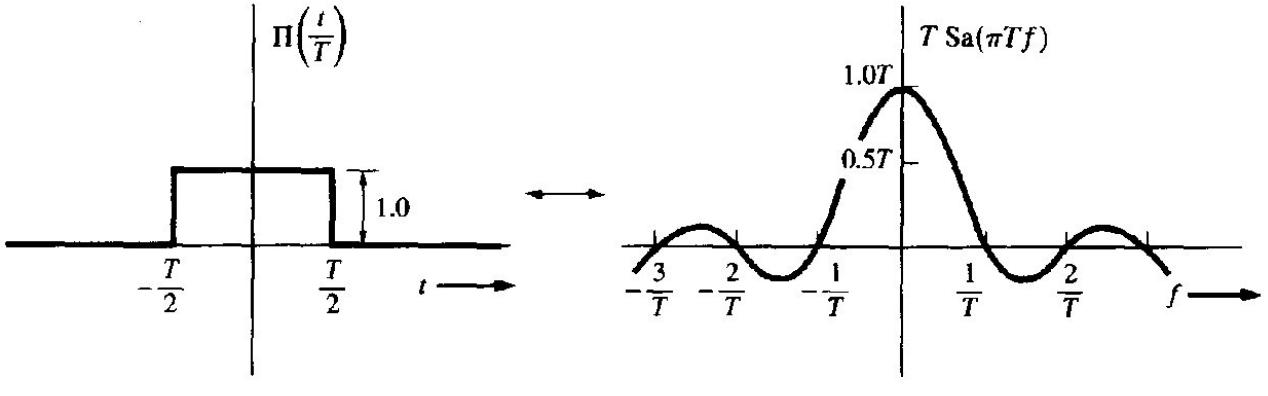


Spettri di un impulso rettangolare e di un impulso triangolare

Spettro bilatero di un impulso **rettangolare**:

$$w(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

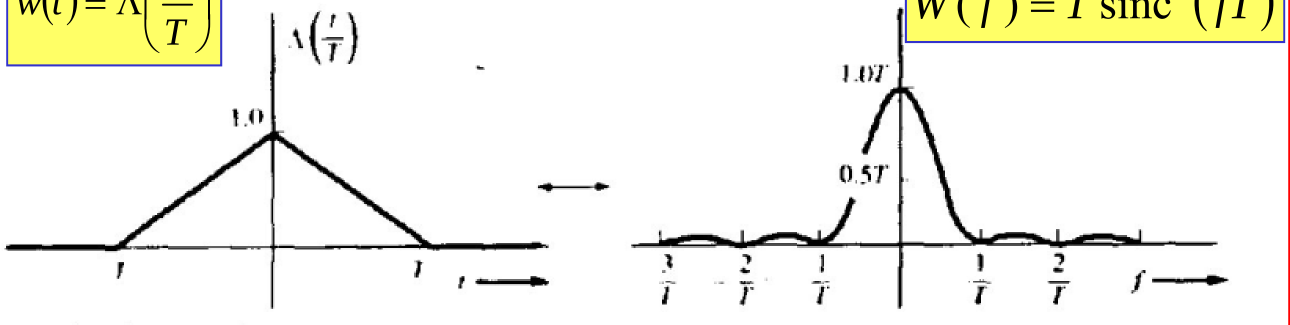
$$W(f) = T\,\mathrm{sinc}(Tf)$$



Spettro bilatero di un impulso **triangolare**:

$$w(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$$

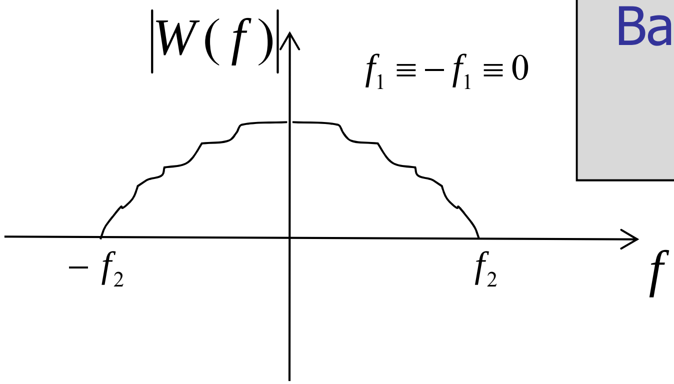
$$W(f) = T\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$



(c) Impulso triangolare e suo spettro

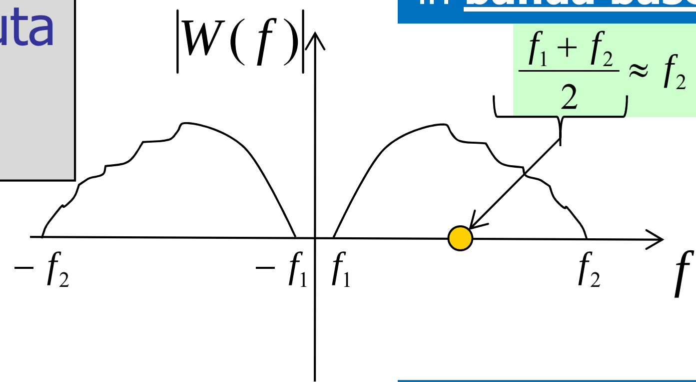
Banda di un segnale

- **Definizione: SEGNALE IN BANDA BASE**



Banda Assoluta

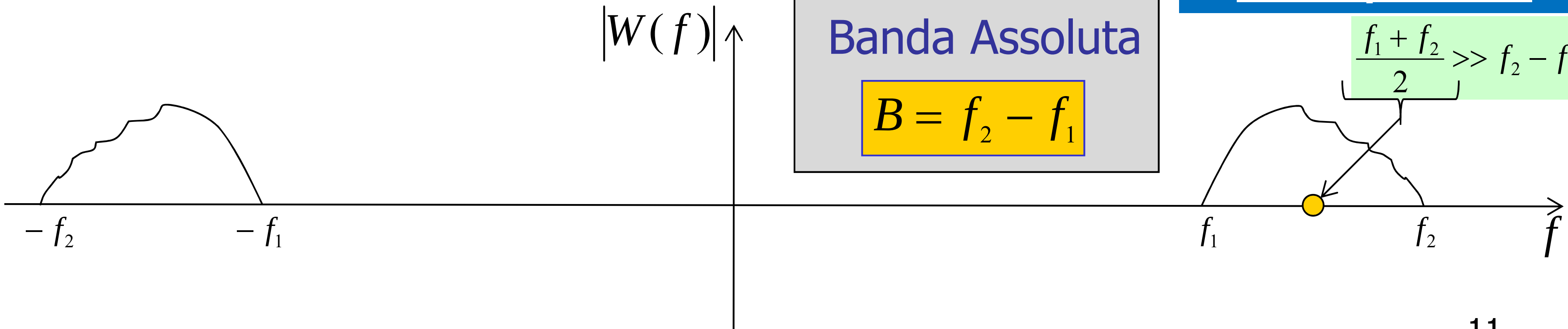
$$\boxed{B = f_2}$$



Condizione per essere in **banda base**

$$\frac{f_1 + f_2}{2} \approx f_2 - f_1$$

- **Definizione: SEGNALE IN BANDA PASSANTE**



Banda Assoluta

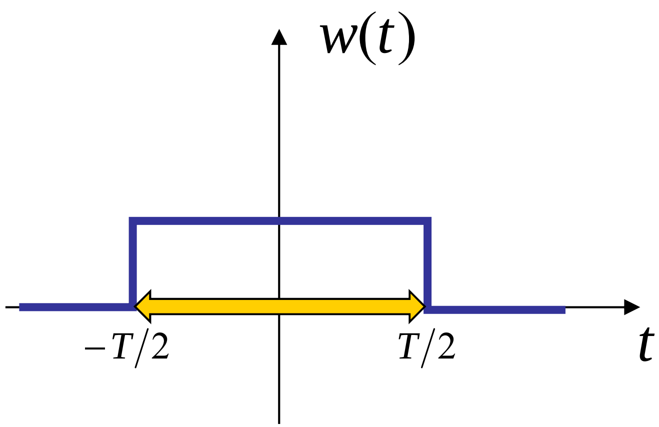
$$\boxed{B = f_2 - f_1}$$

Condizione per essere in **banda passante**

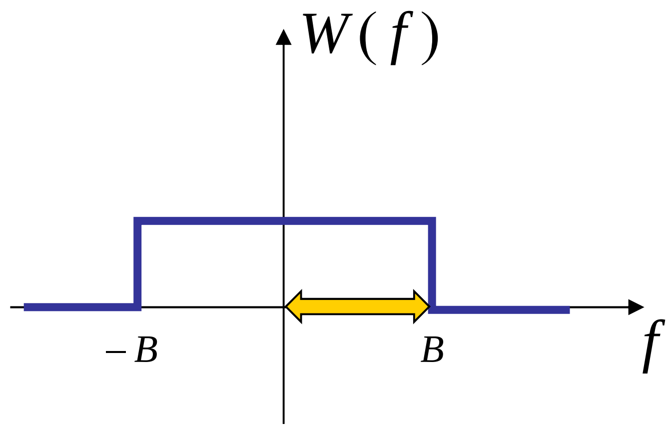
$$\frac{f_1 + f_2}{2} >> f_2 - f_1$$

Banda limitata in frequenza
Durata limitata nel tempo

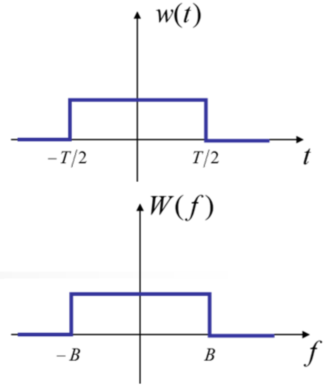
- **Osserviamo che:**
  - La **Banda di un segnale** si misura solo sulle frequenze positive
  - La **Durata di un segnale** si misura su tutto l'asse temporale



Segnale di durata *T*



Segnale di banda *B*



Segnali a banda limitata

- Definizione**: un segnale è a banda rigorosamente limitata *B* se:

$$\boxed{W(f)=0 \ \text{ per } \ |f| \geq B}$$

dove B è la banda del segnale

- Definizione**: un segnale è a durata rigorosamente limitata T se:**

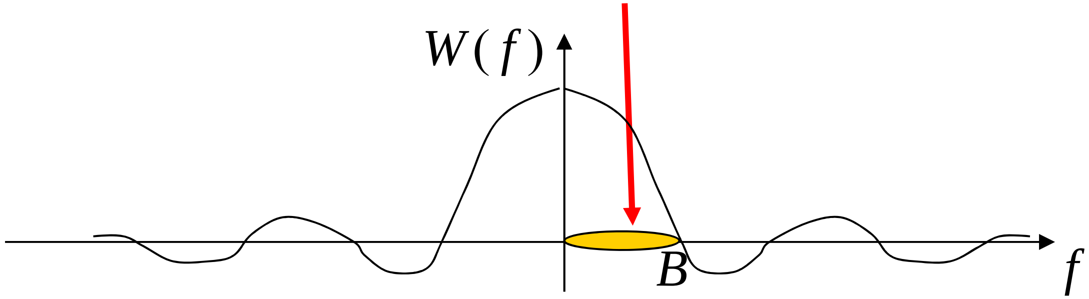
$$\boxed{\exists t_0 \ \text{ tale che: } \ w(t)=0 \ \text{ per } t \notin [t_0, t_0+T]}$$

dove T è la durata del segnale

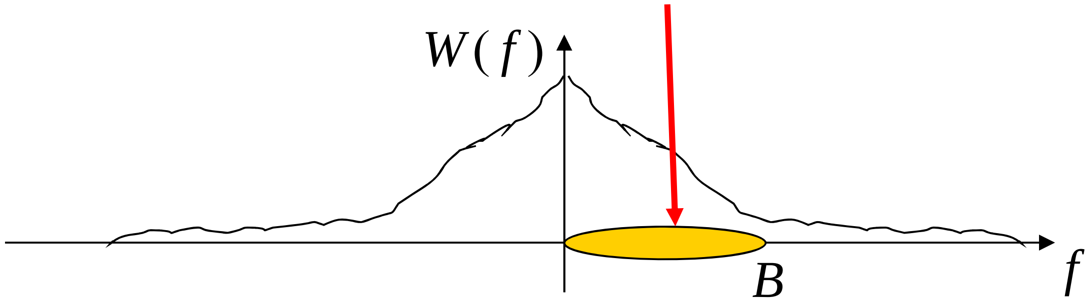
- **Teorema:**
  - un segnale a BANDA LIMITATA non può essere a DURATA LIMITATA
  - un segnale a DURATA LIMITATA non può essere a BANDA LIMITATA

Banda "ingegneristica" di un segnale

- **Definizione "ingegneristica" di banda per:**
  - segnali non rigorosamente limitati in banda

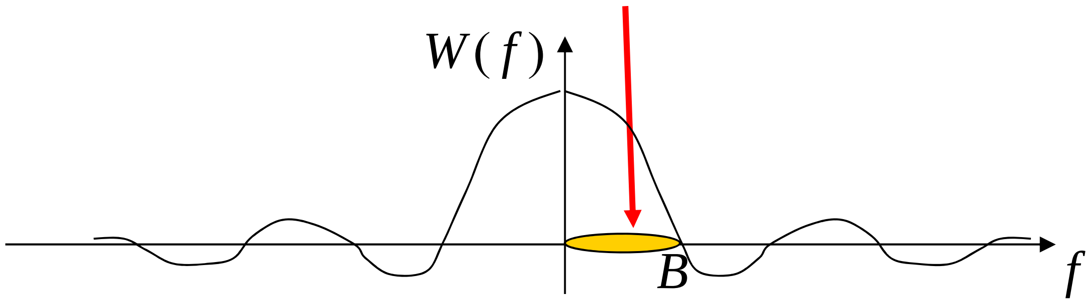


  - oppure segnali con spettro trascurabile per frequenze superiori ad una soglia:



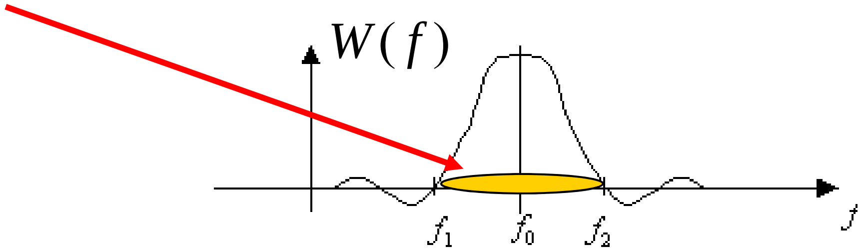
Banda "ingegneristica" di un segnale

- **BANDA AL PRIMO NULLO (per i segnali in banda base):**



- **BANDA NULLO-NULLO (per i segnali passa-banda):**

$$B = f_2 - f_1$$



TEORIA DEI SEGNALI DETERMINATI

CAMPIONAMENTO DI UN SEGNALE

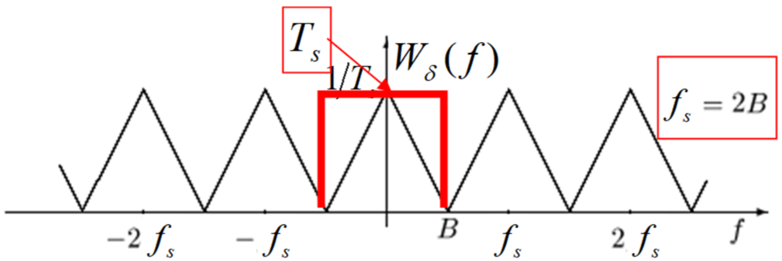
Teorema del campionamento

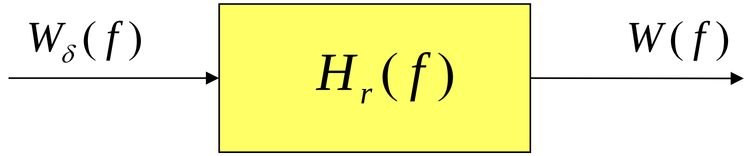
- Un segnale $w(t)$ a banda rigorosamente limitata, B, può essere ricostruito esattamente a partire dai propri campioni, purchè la frequenza di campionamento sia

$$f_s \geq 2B$$

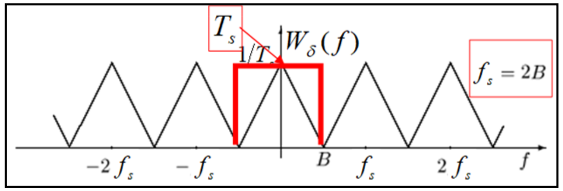
Condizione di Nyquist

- **Ricostruzione nel dominio della frequenza:**





$$H_r(f) = T_s \cdot \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) = T_s \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_s}\right)$$

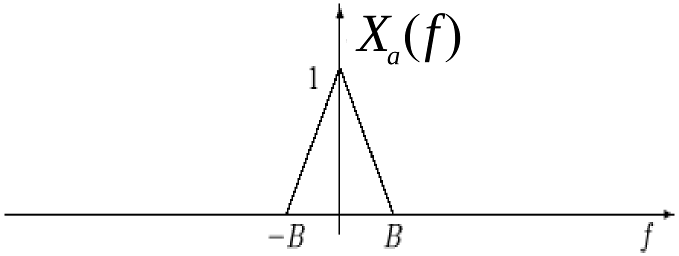


Il problema dell'Aliasing

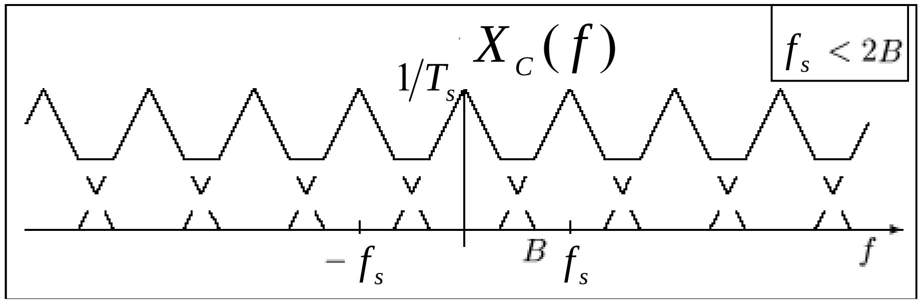
- Un segnale campionato nel tempo presenta uno spettro fatto da repliche dello spettro del segnale originale, centrate sui multipli della frequenza di campionamento

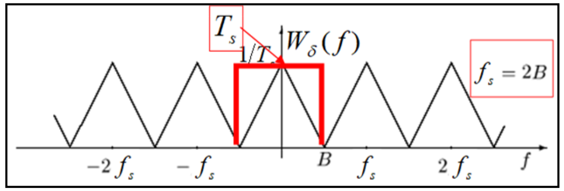
- Se si campiona un segnale analogico ad una frequenza di campionamento minore del doppio della banda, le repliche in frequenza si sovrappongono, e il segnale originale non è più ricostruibile (**ALIASING**)

Spettro del segnale analogico originale



Spettro del segnale campionato "male"
(è evidente il fenomeno dell'aliasing)

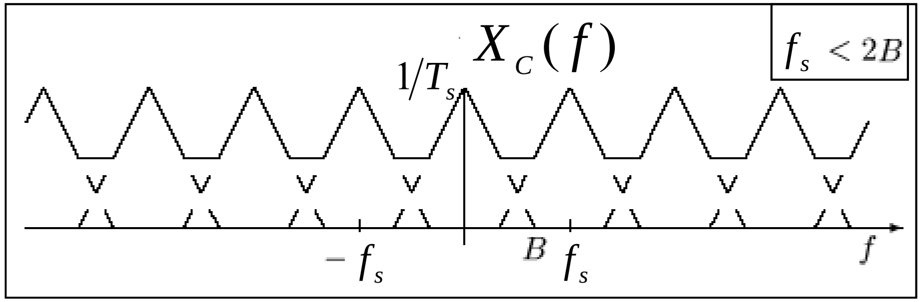




Il problema dell'Aliasing

- Se si campiona un segnale analogico ad una frequenza di campionamento minore del doppio della banda, le repliche in frequenza si sovrappongono, e il segnale originale non è più ricostruibile (**ALIASING**)

Spettro del segnale campionato "male"
(è evidente il fenomeno dell'aliasing)



NON CONFONDERE L'**ALIASING**
CON
L'**ISI** (INTERFERENZA INTERSIMBOLICA)

VARIABILI ALEATORIE

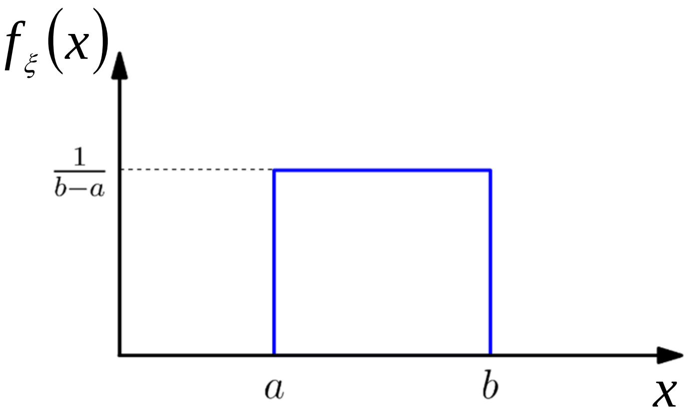
IMPORTANTISSIMA

Variabili aleatorie notevoli

UNIFORME

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{dF}{dx}=\dfrac{1}{b-a} & \text{se } a\le x\le b\\ & \text{altrove}\end{cases}$$

$$\eta_\xi=\frac{a+b}{2}$$

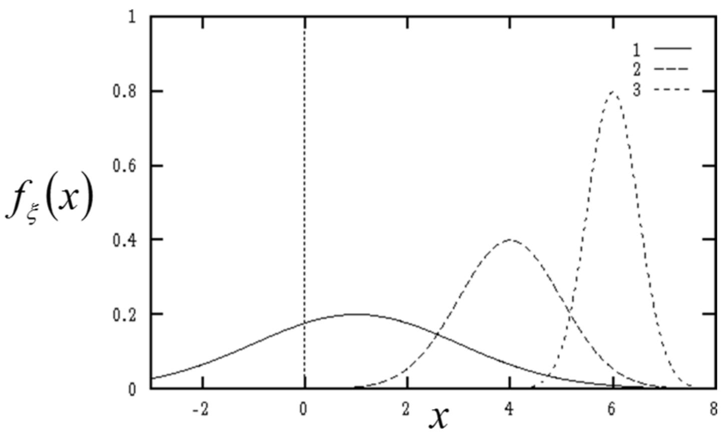


GAUSSIANA

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}}e^{-\frac{(x-\eta_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}}$$

caratterizzata da

$$\begin{cases}\sigma_\xi^2 = \text{varianza}\\ \eta_\xi = \text{valor medio}\end{cases}$$



IMPORTANTISSIMA

Variabile aleatoria **normale standard**

- **Una variabile aleatoria continua ξ è *normale standard* se:**
  - ξ è Gaussiana
  - con valor medio: $\boxed{\eta_\xi = 0}$
  - e varianza: $\boxed{\sigma_\xi^2 = 1}$

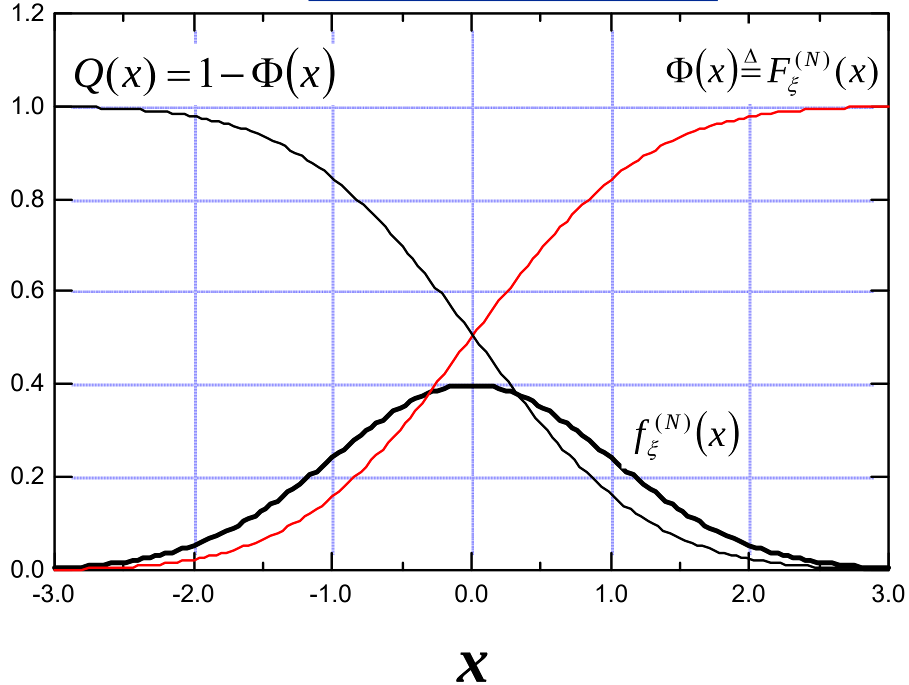
$$\boxed{Q(x) = 1 - \Phi(x)}$$

Funzione densità di probabilità

$$f_\xi^{(N)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Funzione distribuzione cumulativa

$$\Phi(x) \triangleq F_\xi^{(N)}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$



non esprimibile in forma chiusa

Funzioni deterministiche
- **non sono una cdf**
- **non sono una pdf**

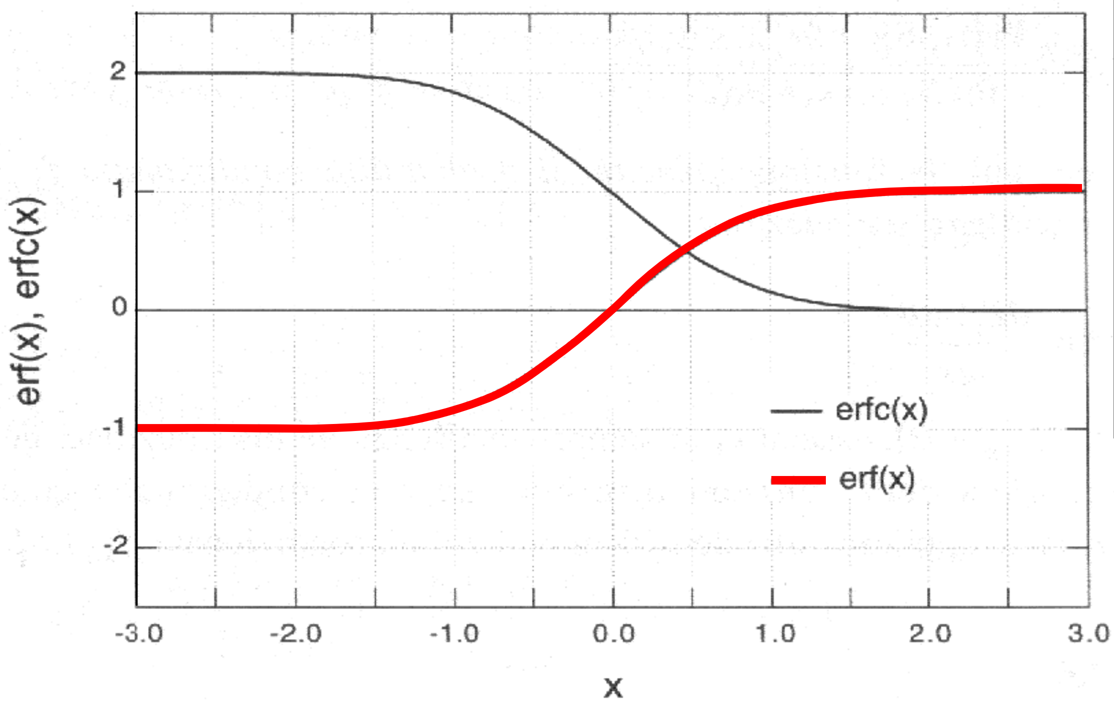
Funzioni erf(x) ed erfc(x)

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\theta^2} \, d\theta$$

Funzione error function

$$\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\theta^2} \, d\theta$$

Funzione error function complementare



Legame tra
v.a. normale standard ← →
funzione erfc

$$\Phi(x) = 1 - \frac{1}{2} \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$Q(x) = \frac{1}{2} \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\mathrm{erfc}(x) = 2 \cdot Q(\sqrt{2} \cdot x)$$

Calcolo della probabilità di un intervallo

- **Variabile aleatoria normale ξ caratterizzata da valor medio e varianza generici**

$$F_\xi(x) = \Phi\left(\frac{x-\eta_\xi}{\sigma_\xi}\right) \qquad \xi \in N\left(\eta_\xi, \sigma_\xi^2\right)$$

- **Probabilità che una v.a. Gaussiana assuma valori in un intervallo [*a*,*b*]**

$$\Pr\{a < \xi \le b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$$

$$\Pr\{a < \xi \le b\} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{a-\eta_\xi}{\sqrt{2\sigma_\xi^2}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{b-\eta_\xi}{\sqrt{2\sigma_\xi^2}}\right)\right]$$

$$\Pr\{a < \xi \le b\} = \Phi\left(\frac{b-\eta_\xi}{\sigma_\xi}\right) - \Phi\left(\frac{a-\eta_\xi}{\sigma_\xi}\right)$$

IMPORTANTISSIMA

Per calcolare

$$\Pr\{\xi \le b\}$$

$$\Pr\{\xi \le b\} = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{b-\eta_\xi}{\sqrt{2\sigma_\xi^2}}\right) = \Phi\left(\frac{b-\eta_\xi}{\sigma_\xi}\right)$$

Tabella utile per il calcolo numerico

DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARD E COMPLEMENTARE

x	Φ(x)	Q(x)	x	Φ(x)	Q(x)
-7.0000e+000	1.2798e-012	1.0000e+000	2.0000e-001	5.7926e-001	4.2074e-001
-6.8000e+000	5.2309e-012	1.0000e+000	4.0000e-001	6.5542e-001	3.4458e-001
-6.6000e+000	2.0558e-011	1.0000e+000	6.0000e-001	7.2575e-001	2.7425e-001
-6.4000e+000	7.7688e-011	1.0000e+000	8.0000e-001	7.8814e-001	2.1186e-001
-6.2000e+000	2.8232e-010	1.0000e+000	1.0000e+000	8.4134e-001	1.5866e-001
-6.0000e+000	9.8659e-010	1.0000e+000	1.2000e+000	8.8493e-001	1.1507e-001
-5.8000e+000	3.3157e-009	1.0000e+000	1.4000e+000	9.1924e-001	8.0757e-002
-5.6000e+000	1.0718e-008	1.0000e+000	1.6000e+000	9.4520e-001	5.4799e-002
-5.4000e+000	3.3320e-008	1.0000e+000	1.8000e+000	9.6407e-001	3.5930e-002
-5.2000e+000	9.9644e-008	1.0000e+000	2.0000e+000	9.7725e-001	2.2750e-002
-5.0000e+000	2.8665e-007	1.0000e+000	2.2000e+000	9.8610e-001	1.3903e-002
-4.8000e+000	7.9333e-007	1.0000e+000	2.4000e+000	9.9180e-001	8.1975e-003
-4.6000e+000	2.1125e-006	1.0000e+000	2.6000e+000	9.9534e-001	4.6612e-003
-4.4000e+000	5.4125e-006	9.9999e-001	2.8000e+000	9.9744e-001	2.5551e-003
-4.2000e+000	1.3346e-005	9.9999e-001	3.0000e+000	9.9865e-001	1.3499e-003
-4.0000e+000	3.1671e-005	9.9997e-001	3.2000e+000	9.9931e-001	6.8714e-004

Altra tabella utile

...

-3.8000e+000	7.2348e-005	9.9993e-001
-3.6000e+000	1.5911e-004	9.9984e-001
-3.4000e+000	3.3693e-004	9.9966e-001
-3.2000e+000	6.8714e-004	9.9931e-001
-3.0000e+000	1.3499e-003	9.9865e-001
-2.8000e+000	2.5551e-003	9.9744e-001
-2.6000e+000	4.6612e-003	9.9534e-001
-2.4000e+000	8.1975e-003	9.9180e-001
-2.2000e+000	1.3903e-002	9.8610e-001
-2.0000e+000	2.2750e-002	9.7725e-001
-1.8000e+000	3.5930e-002	9.6407e-001
-1.6000e+000	5.4799e-002	9.4520e-001
-1.4000e+000	8.0757e-002	9.1924e-001
-1.2000e+000	1.1507e-001	8.8493e-001
-1.0000e+000	1.5866e-001	8.4134e-001
-8.0000e-001	2.1186e-001	7.8814e-001
-6.0000e-001	2.7425e-001	7.2575e-001
-4.0000e-001	3.4458e-001	6.5542e-001
-2.0000e-001	4.2074e-001	5.7926e-001
0.0	5.0000e-001	5.0000e-001

3.4000e+000	9.9966e-001	3.3693e-004
3.6000e+000	9.9984e-001	1.5911e-004
3.8000e+000	9.9993e-001	7.2348e-005
4.0000e+000	9.9997e-001	3.1671e-005
4.2000e+000	9.9999e-001	1.3346e-005
4.4000e+000	9.9999e-001	5.4125e-006
4.6000e+000	1.0000e+000	2.1125e-006
4.8000e+000	1.0000e+000	7.9333e-007
5.0000e+000	1.0000e+000	2.8665e-007
5.2000e+000	1.0000e+000	9.9644e-008
5.4000e+000	1.0000e+000	3.3320e-008
5.6000e+000	1.0000e+000	1.0718e-008
5.8000e+000	1.0000e+000	3.3157e-009
6.0000e+000	1.0000e+000	9.8659e-010
6.2000e+000	1.0000e+000	2.8232e-010
6.4000e+000	1.0000e+000	7.7689e-011
6.6000e+000	1.0000e+000	2.0558e-011
6.8000e+000	1.0000e+000	5.2309e-012
7.0000e+000	1.0000e+000	1.2799e-012

Esempio di calcolo

Esempio: Gaussiana con **media 5** e **varianza 10**

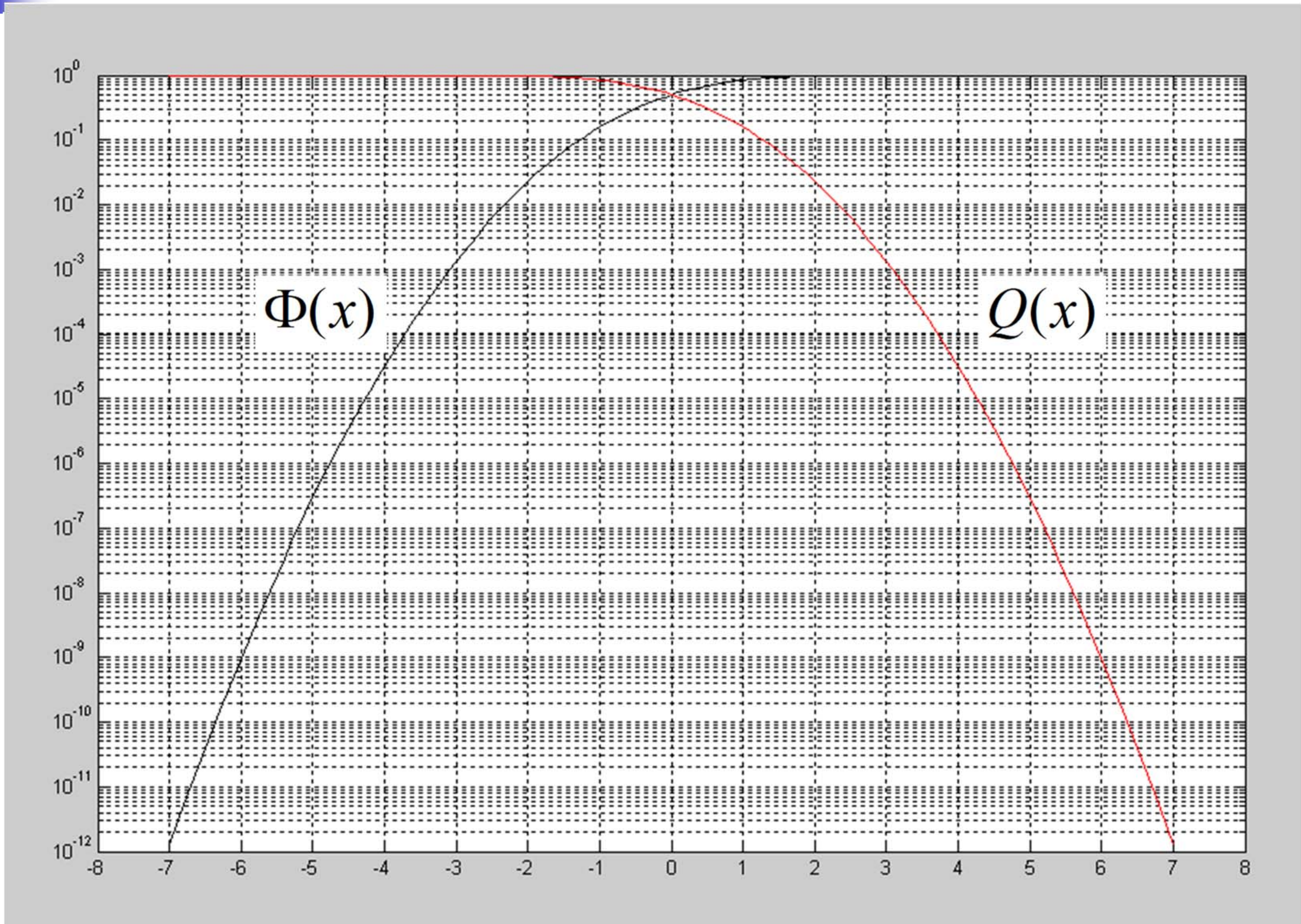
Con la tabella precedente:

$$\Pr\{\xi \le 12\} = F_{N(5,10)}(x)\Big|_{x=12} = \Phi\left(\frac{x-5}{\sqrt{10}}\right)\Bigg|_{x=12} = \Phi(2.21) = 0.987$$

Analogamente, con il Matlab:

$$\Pr\{\xi \le 12\} = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{12-5}{\sqrt{2\cdot 10}}\right) = 0.987$$

Altro grafico utile



PROCESSI ALEATORI

Processo aleatorio GAUSSIANO

Processo aleatorio RUMORE BIANCO

IMPORTANTISSIMA

Processi aleatori Gaussiani

DA IMPARARE A MEMORIA

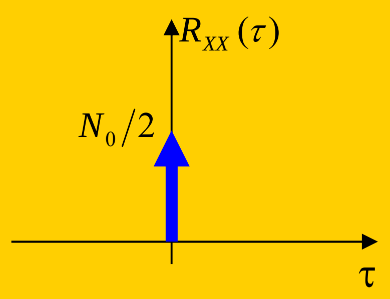
- **Definizione:**
  - un processo aleatorio $X(t)$ è Gaussiano se le n variabili aleatorie $[X(t_1), \ldots, X(t_n)]$ da esso estratte agli istanti $[t_1, \ldots, t_n]$ risultano <u>congiuntamente</u> Gaussiane per ogni n, e per qualunque n-upla di istanti
- **Proprietà fondamentali:**
  - se un processo Gaussiano è stazionario in senso lato, allora è anche stazionario in senso stretto
  - due processi gaussiani, se incorrelati, sono anche indipendenti

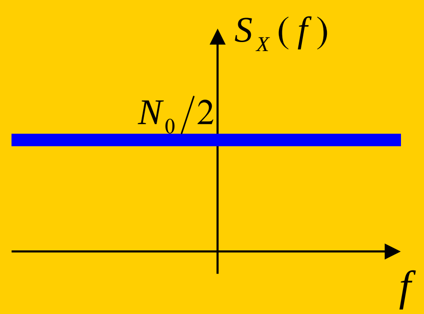
NON CONFONDERE I **PROCESSI ALEATORI GAUSSIANI**
CON
LE **VARIABILI ALEATORIE GAUSSIANE**

IMPORTANTISSIMA

Rumore bianco

- **Il rumore bianco è un processo aleatorio (cioè un modello matematico astratto) caratterizzato da:**
  - Funzione di autocorrelazione impulsiva
  - Spettro costante



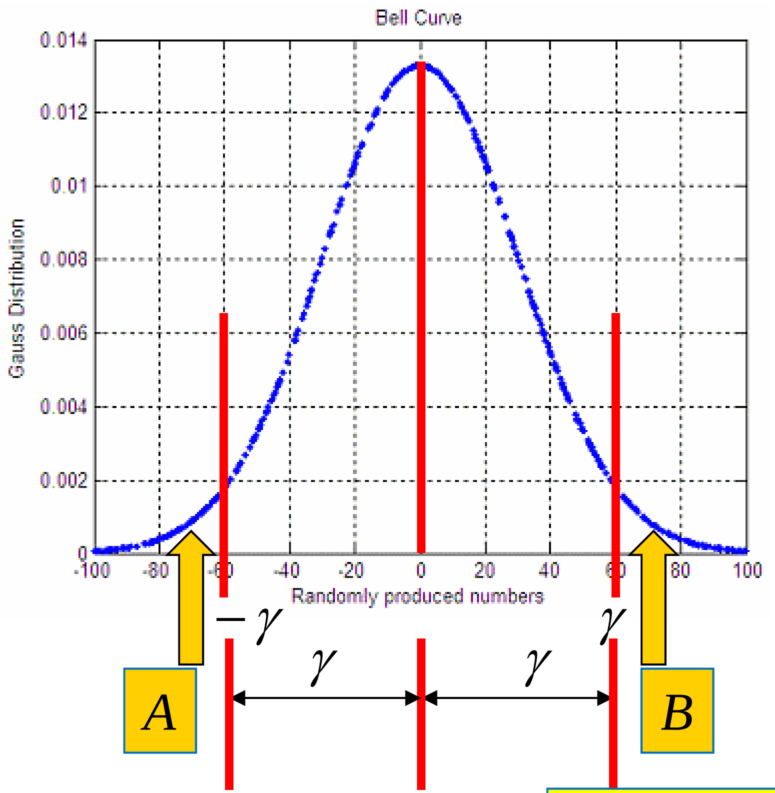


Ne segue che:

Media nulla	Potenza infinita!!!

Le due formule in giallo sono IMPORTANTISSIME

Calcolo di probabilità di una Gaussiana a media nulla



Data una v.a. gaussiana ξ a media nulla e varianza σ_ξ^2

$$\Pr\{\xi \le -\gamma\} = A \qquad \Pr\{\xi \le \gamma\} = 1 - B = 1 - A$$

Graficamente vediamo che:

$$A = B = \Pr\{\xi > \gamma\} =$$

$$= 1 - \Pr\{\xi \le \gamma\} = 1 - F_\xi(\gamma) =$$

$$= 1 - \Phi_\xi\left(\frac{\gamma - \mu_\xi}{\sigma_\xi}\right) = Q\left(\frac{\gamma}{\sigma_\xi}\right)$$

$$\mu_\xi = 0$$

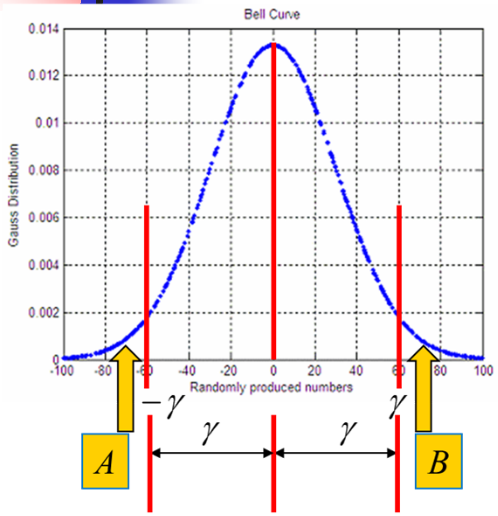
$$1 - \Phi_\xi(x) = Q(x)$$

$$A = Q\left(\frac{\gamma}{\sigma_\xi}\right) \qquad A = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\gamma}{\sigma_\xi}\right)$$

Le tre formule in giallo sono IMPORTANTISSIME

Calcolo di probabilità di una Gaussiana a media nulla

x	Φ(x)	Q(x)
2.0000e-001	5.7926e-001	4.2074e-001
4.0000e-001	6.5542e-001	3.4458e-001



$$A = Q\left(\frac{\gamma}{\sigma_\xi}\right) \qquad A = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\gamma}{\sigma_\xi}\right)$$

$$\Pr\{\xi \le \gamma\} = 1 - B = 1 - A$$

Esercizio:

consideriamo un segnale $n(t)$, rumore Gaussiano bianco con spettro per unità di banda pari a $P(f) = N_0/2 = 18 \quad \forall f$ (*)

$$\text{Prob}\{n \le 1.6971\} = 1 - B = 1 - A = 1 - \frac{1}{2} erfc\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1.6971}{\sqrt{N_0/2}}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} erfc(0.28285) = 1 - Q(0.4) = 1 - 0.34458 = 0.6542$$

$+\gamma$

Analogamente:

$$\text{Prob}\{n \ge -1.6971\} = 1 - A = 1 - \frac{1}{2} erfc\left(\frac{1.6971}{\sqrt{2 N_0/2}}\right) =$$

$$= 1 - Q\left(\frac{1.6971}{\sqrt{N_0/2}}\right) = 1 - Q(0.4) = 1 - 0.34458 = 0.65542$$

$-\gamma$

$$A = Q\left(\frac{\gamma}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

(*) Dimostreremo nella Lezione4b che la potenza media statistica (valore quadratico medio) della variabile aleatoria componente di rumore Gaussiano bianco all'istante t, coincidente anche con la varianza σ^2 perché a media nulla, è pari a $N_0/2$, cioè uguale all'ordinata della densità spettrale di potenza