Data Science – Probabiliy

1. With a unfair 6-side dice, the probability of point 2 is twice than point 1, probability of point 3 is triple than point 1, and so on. What is the expected value and variance of this dice?

Zuerst müssen wir die Wahrscheinlichkeiten für jedes einzelne Ereignis ermitteln. Hierfür verwenden wir die Informationen aus der Aufgabenstellung, sowie das Wissen, dass die Summe aller Möglichkeiten insgesamt 1 ergeben muss.

$$P(1) = p\,; P(2) = 2p; P(3) = 3p; P(4) = 4p; P(5) = 5p; P(6) = 6p$$

$$\mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \mathrm{P}(3) + \mathrm{P}(4) + \mathrm{P}(5) + \mathrm{P}(6) = 1$$

$$21\mathrm{p} = 1$$

$$P(1) = \frac{1}{21}\ ;\ P(2) = \frac{2}{21};\ P(3) = \frac{3}{21}\ ;\ P(4) = \frac{4}{21}\ ;\ P(5) = \frac{5}{21}\ ;\ P(6) = \frac{6}{21}$$

Jetzt können wir mithilfe dieser Informationen den Erwartungswert und die Varianz berechnen.

Erwartungswert:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} i * P(i)$$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{21} + 2 \cdot \frac{2}{21} + 3 \cdot \frac{3}{21} + 4 \cdot \frac{4}{21} + 5 \cdot \frac{5}{21} + 6 \cdot \frac{6}{21}$$

$$E(X) = \frac{13}{3}$$

Varianz:

$$\mathrm{Var(X)} = \sum_{i=1}^{6} (i - E(X)^2 * P(i)$$

$$Var(X) = (1 - \frac{13}{3})^2 \cdot \frac{1}{21} + (2 - \frac{13}{3})^2 \cdot \frac{3}{21} + (3 - \frac{13}{3})^2 \cdot \frac{3}{21} + (4 - \frac{13}{3})^2 \cdot \frac{4}{21} + (5 - \frac{13}{3})^2 \cdot \frac{5}{21} + (6 - \frac{13}{3})^2 \cdot \frac{6}{21}$$

$$Var(X) = \frac{20}{9}$$

2. See Code in the github
   a. https://github.com/Marco201201/DS_Python_Exercises_EA6

3. I have a bag in front of me containing a 6-sided (with number 1 to 6) and a 12-sided dice (with number 1 to 12). My friend pulls one out at random, rolls it once, and tells me that the number is 5. What is the probability that my friend pulled out the 6-sided die?

Hier für müssen wir den Satz des Bayes verwenden. Im Beispiel gibt es die Ereignisse

$$W_6 = Ein\ 6 - seitger\ Würfel\ wird\ gezogen\ ; W_{12} = Ein\ 12 - seitger\ Würfel\ wird\ gezogen$$

$$E_5 = Eine\ 5\ wird\ gewürfelt$$

Der Satz von Bayes ist für das Beispiel wie folgt:

$$P(W_6|E_5) = \frac{P(E_5|W_6) * P(W_6)}{P(E_5)}$$

Wenn der 6-seitige Würfel gezogen wurde, beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine 5 zu werfen:

$$P(E_5|W_6) = \frac{1}{6}$$

Wenn hingegen 12-seitige Würfel gezogen wurde, beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine 5 zu werfen:

$$P(E_5|W_{12}) = \frac{1}{12}$$

Beide Würfel werden mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gezogen.

$$P(W_{12}) = P(W_5) = \frac{1}{2}$$

Mithilfe des Gesetzes der totalen Wahrscheinlichkeit können wir nun die Wahrscheinlichkeit für das Würfeln einer 5 ausrechnen.

$$P(E_5) = P(E_5|W_6) * P(W_6) + P(E_5|W_{12}) * P(W_{12})$$

$$P(E_5) = \frac{1}{8}$$

Nun besitzen wir alle Informationen, um den Satz des Bayes auszurechnen.

$$P(W_6|E_5) = \frac{\frac{1}{6} * \frac{1}{2}}{\frac{1}{8}} = \frac{2}{3}$$