HM2 Kapitel 1 Zusammenfassung

May 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Matrizen

1.1 Hermitesche Matrizen

- $\iff A^H = A$
- $\implies$ Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{R}$
- $\implies A$ normal
- $\implies$ unitär diagonalisierbar.

1.2 Invertierbare/Reguläre Matrizen

- $\iff \det A \neq 0$

1.3 Unitäre Matrizen

- $\iff A^H = A^{-1}$
- $\implies A$ regulär ($\iff$ invertierbar)
- $\implies |\det A| = 1$
- $\implies A$ normal
- $\implies$ Eigenvektoren orthonormal

1.4 Normale Matrizen

- $\iff A^H A = AA^H$
- $\iff A$ unitär diagonalisierbar

1.5 Diagonalisierbare Matrizen

- $\iff S^{-1}AS = D$, D Diagonalmatrix

1.5.1 Diagonalisierbarkeit zeigen

- Charakteristisches Polynom zerfällt in Linearfaktoren
- $\wedge$ Geometrische und Algebraische Vielfachheiten stimmen überein

1.5.2 Unitär Diagonalisierbare Matrizen

- $\iff \exists S$ unitär $|$ $S^H = S^{-1}$

1.6 Spur einer Matrix

Die Spur einer Matrix A ist die Summe der Hauptdiagonalelemente
$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = Spur(A)$.

- bei diagonalisierbaren Matrizen ist die Spur die Summe der Eigenwerte $\implies$ die Spur ähnlicher Matrizen ist gleich
- die Spur ist eine lineare Abbildung
- Vertauschung unter der Spur: $Spur(AB) = Spur(BA)$
- Invarianz bei zyklischen Vertauschungen $Spur(ABC) = Spur(BCA) = Spur(CAB)$

1.7 Diagonalisieren von Matrizen

Matrix A diagonalisierbar $\iff D_A = S^{-1}AS$, $A = SDS^{-1}$. Es sollen D_A und S berechnet werden.

1. Bestimmen der Eigenwerte λ_i mittels $\det(A - \lambda I) = 0$.
2. Bestimmen der Eigenräume $E(\lambda_i)$ zu den Eigenwerten mittels $(A - \lambda_i I) \cdot x = 0$
3. Bestimmen der Basisvektoren b der Eigenräume
4. $D_A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
   $S = (b_1, \ldots, b_n)$

1.8 Definitheit

Wenn eine Matrix nicht symmetrisch oder hermitesch ist, kann nur der symmetrische oder hermitesche Teil betrachtet werden: $A_S = \frac{1}{2}(A + A^T)$ bzw $A_H = \frac{1}{2}(A + A^H)$.

1.8.1 Definition

Eine Matrix ist genau dann

positiv definit,	falls $x^T Ax > 0$
positiv semidefinit,	falls $x^T Ax \geq 0$
negativ definit,	falls $x^T Ax < 0$
negativ semidefinit,	falls $x^T Ax \leq 0$.

1.8.2 Definitheit anhand von Eigenwerten

Eine Matrix ist genau dann

positiv definit,	wenn alle Eigenwerte größer als null sind;
positiv semidefinit,	wenn alle Eigenwerte größer oder gleich null sind;
negativ definit,	wenn alle Eigenwerte kleiner als null sind;
negativ semidefinit,	wenn alle Eigenwerte kleiner oder gleich null sind;
indefinit,	wenn positive und negative Eigenwerte existieren.

1.8.3 Definitheit anhand von Hauptminoren

Positiv definit: Führende Hauptminoren sind positiv
Negativ definit: Vorzeichen der führenden Hauptminoren alternieren (ungerade führende Hauptminoren negativ, alle geraden positiv).

1.9 Satz von Cayley-Hamilton

Matrix ist Nullstelle des Zugehörigen charakteristischen Polynoms:
$P_A(A) = (-1)^n(A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_0 E_n) = 0$
Durch Multiplizieren von A^{-1} lässt sich damit A^{-1} bestimmen.

2 Determinanten

2.1 Umfomungen von Determinanten

1. **Vertauschen** von Zeile oder Spalte $\implies$ Faktor -1 vor Determinante
2. **Multiplizieren** von Zeile $\implies$ Faktor vor Determinante
3. **Gauß** ohne Folgen
4. $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

3 Basiswechsel

Ein VR zur Basis A soll durch die Transformationsmatrix in die Basis B umgeformt werden. Berechnung der Trafomatrix mittels Gauß-Jodan:
$(B \mid A)$(Umformungen mit Gauß) $\implies$ $(E \mid T)$
mit E als Einheitsmatrix und T als Tranformationsmatrix.

3.1 Lineare Abbildung nach Basiswechsel

Wichtig: Transformationsschritte links anmultiplizieren.

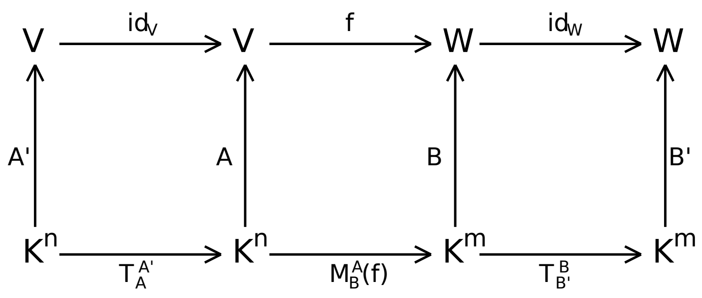

Abbildung 1: Basiswechsel linearer Abbildungen

In den meisten Fällen gilt bei uns $A = B$ und $A' = B'$ und somit $T_{B'}^{B}$ invers zu $T_{A}^{A'}$.

4 Skalarprodukte

Ein Skalarprodukt ist gegeben durch $f(x, y) =_{...}= x^T My$

1. $\iff$ M hermitesch $\wedge$ M positiv definit.

5 Lineare Abbildungen

5.1 Linearität zeigen

- Abbildung als Matrix darstellen
- $\alpha Lv = L(\alpha v) \wedge Lv_1 + Lv_2 = L(v_1 + v_2)$

5.2 Linearität widerlegen

- Additivität widerlegen: $Lv_1 + Lv_2 \neq L(v_1 + v_2)$
- Abbildung auf Null widerlegen: $L0 \neq 0$
- Skalarmultiplikation widerlegen: $\alpha Lv_1 \neq L(\alpha v_1)$

6 Gram Schmidt

1. $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$
2. $u_2' = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$
3. $u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|}$
4. $u_k' = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, u_i \rangle u_i$
5. $u_k = \frac{u_k'}{\|u_k'\|}$

7 Vektorräume

7.1 Voraussetzungen

- $V \neq \varnothing$
- $(V, +)$ abelsche Gruppe (kommutative Vektoraddition)
  - Assoziativität, Neutrales, Inverses, Kommutativität
- **Vektorraumaxiome**
  - $1 \cdot v = v$
  - $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda v + \mu v$, $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ Distributivgesetzt bzgl. Skalarmultiplikation, Vektoraddition
  - $\lambda(\mu v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$ Assoziativgesetz

7.2 Vektorraum zeigen

Einfacher als Axiome: **Unterraumkriterium**:

- Abgeschlossenheit bzgl. Vektoraddition
- Abgeschlossenheit bzgl. Skalarmultiplikation