

UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA

Dipartimento di Ingegneria Informatica, Modellistica, Elettronica e
Sistemistica (DIMES)

**Progetto del corso di
Fondamenti di Automatica**

Traccia: 96

Studente: Marco Scarpelli

Matricola: 250818

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Anno Accademico: 2024/2025

Data: luglio 2025

INDICE

Esercizio a ----- pag 2

Esercizio b ----- pag 21

Esercizio c ----- pag 32

Esercizio 1

- a. Si consideri il seguente sistema proprio LTI-TC descritto dalla risposta all'impulso

$$g(t) = \left(\frac{80}{193} e^{-2t} + \frac{4480e^{-2t}}{37249} - \frac{7600e^{-t/4} \sin(3t)}{111747} - \frac{4480e^{-t/4} \cos(3t)}{37249} \right) 1(t)$$

Determinare:

1. La funzione di trasferimento, i poli, gli zeri e i modi naturali del sistema;
2. La risposta al gradino e il suo grafico (evidenziare la componente transitoria e di regime);
3. La risposta alla rampa unitaria e il suo grafico (evidenziare la componente transitoria e di regime);
4. La risposta al segnale periodico elementare $u(t) = A \sin(\omega t + \theta) 1(t)$ (lo studente scelga una terna appropriata di valori A, ω, θ e discuta le caratteristiche di tale risposta forzata in maniera simile al punto precedente);
5. Un suo modello I-U equivalente (equazione differenziale ordinaria), valutando la risposta libera in base un insieme di condizioni iniziali scelte a piacere dallo studente;
6. Una volta individuata tale rappresentazione determinare le condizioni iniziali tali che la risposta al gradino coincida con il suo valore di regime (assenza di componente transitoria);
7. Valutare la risposta al segnale $u(t) = 1(-t)$.

L'esercizio 1 è stato svolto interamente utilizzando il software **Maple**

restart : with(inttrans) : with(PolynomialTools) :

Si consideri il seguente sistema proprio LTI-TC descritto dalla sua risposta all'impulso dove

$$g := t \rightarrow \left(\frac{80}{193} e^{-2t} + \frac{4480e^{-2t}}{37249} - \frac{7600e^{-\frac{t}{4}} \sin(3t)}{111747} - \frac{4480e^{-\frac{t}{4}} \cos(3t)}{37249} \right) :$$

Determinare:

1. La funzione di trasferimento, i poli, gli zeri e i modi naturali del sistema

Funzione di Trasferimento

La funzione di trasferimento (FdT) di un sistema lineare tempo-invariante e a parametri costanti (LTI-TC), indicata comunemente con G , è definita come il rapporto tra la trasformata di Laplace dell'uscita del sistema e quella dell'ingresso applicato:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \Rightarrow Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

Poiché la trasformata di Laplace dell'impulso di Dirac è pari a 1, la funzione di trasferimento può essere interpretata come la risposta in frequenza del sistema all'impulso unitario:

$$Y_F(s) = G(s)$$

In altre parole, la funzione di trasferimento $G(s)$ corrisponde alla trasformata di Laplace della risposta impulsiva $g(t)$ del sistema. Quindi, per ottenere la FdT si calcola la trasformata di Laplace della risposta all'impulso:

$$G(s) = L\{g(t)\}$$

$$G := s \rightarrow \text{laplace}(g(t), t, s) : G(s)$$

$$\frac{80(16s^2 - 8s + 169)}{193((4s+1)^2 + 144)(s+2)}$$

Poli e zeri

I poli del sistema sono quei valori che annullano il denominatore della funzione di trasferimento (FdT), sono cioè le radici del denominatore della funzione di trasferimento, ovvero i valori $p \in \mathbb{C}$ tali che $dG(p) = 0$. Nel nostro caso, i poli sono:

$$\text{poli}G := [\text{solve}(\text{denom}(G(s)), s)]$$

$$\text{poli}G := \left[-2, -\frac{1}{4} + 3i, -\frac{1}{4} - 3i \right]$$

Questi poli si trovano tutti nel semipiano sinistro del piano complesso (infatti, la loro parte reale è negativa), il che è un segnale importante per la stabilità del sistema.

Gli zeri del sistema sono invece i valori che annullano il numeratore della funzione di trasferimento, sono cioè le radici del numeratore della funzione di trasferimento, ovvero i valori $z \in \mathbb{C}$ tali che $nG(z) = 0$. Nel nostro caso, gli zeri sono:

$$\text{zeri}G := [\text{solve}(\text{numer}(G(s)), s)]$$

$$\text{zeri}G := \left[\frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{42}}{2}, \frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{42}}{2} \right]$$

Si nota che gli zeri si trovano nel semipiano destro, dato che la loro parte reale è positiva.

Da quanto analizzato possiamo dedurre:

- La presenza di un polo reale in -2 , e due poli complessi coniugati in $-\frac{1}{4} + 3i$ e $-\frac{1}{4} - 3i$, tutti nel semipiano sinistro, il che indica che il sistema BIBO stabile
- La presenza di due zeri complessi coniugati in $\frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{42}}{2}$ e $\frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{42}}{2}$, che si trovano nel semipiano destro
- Che non sono presenti poli nell'origine, quindi non ci sono effetti integrali

Modi naturali

Per quanto riguarda i **modi naturali del sistema** guardando la $g(t)$ nella traccia e sapendo che la risposta all'impulso è proprio la combinazione lineare dei modi, è facile notare che vi sono 3 modi naturali distinti

Riprendendo $g(t)$:

$g(t)$

$$\frac{19920 e^{-2t}}{37249} - \frac{7600 e^{-\frac{t}{4}} \sin(3t)}{111747} - \frac{4480 e^{-\frac{t}{4}} \cos(3t)}{37249}$$

$op(1, (1.3.1))$

$$\frac{19920 e^{-2t}}{37249}$$

$op(2, (1.3.1))$

$$- \frac{7600 e^{-\frac{t}{4}} \sin(3t)}{111747}$$

$op(3, (1.3.1))$

$$- \frac{4480 e^{-\frac{t}{4}} \cos(3t)}{37249}$$

Siccome stiamo parlando di modi right-sided, i tre modi naturali trovati andranno poi moltiplicati per $1(t)$

Alternativa:

Possiamo ricavare i modi naturali anche convertendo la nostra funzione in fratti semplici:
 $convert(G(s), parfrac)$

$$\frac{-71680 s - 139520}{37249 (16 s^2 + 8 s + 145)} + \frac{19920}{37249 (s + 2)}$$

evitandoci di svolgere l'anti-trasformata degli addendi per ricavare i modi naturali, possiamo procedere ricordando la forma polinomial-esponenziale:

$$\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\alpha t} 1(t) \Rightarrow \frac{1}{(s-\alpha)^k}$$

Notiamo che nel nostro caso i denominatori sono:

1. Primo denominatore: $16 \cdot s^2 + 8 \cdot s + 145$

di cui trovando le radici otterremo:

Due poli complessi coniugati:

polo 1: $s = -0.25 + 3i$

polo 2: $s = -0.25 - 3i$

Quindi:

$\alpha = -0.25$ (parte reale del polo)

Ci aspettiamo un termine del tipo:

$$e^{(-0.25t)} \cdot (A \cdot \cos(3t) + B \cdot \sin(3t))$$

2. Secondo denominatore: $(s + 2)$

$\alpha = -2$

Questo genera nel tempo un termine della forma:

$C \cdot e^{-2t}$, dove C è semplicemente un simbolo per indicare “qualche costante reale o complessa” che moltiplica l'esponenziale.

Riassumendo:

Ci aspettiamo termini del tipo:

$$- e^{-\frac{1}{4}t} \cdot (A \cdot \cos(3t) + B \cdot \sin(3t))$$

$$- C \cdot e^{-2t}$$

che richiama la forma trovata precedentemente

*I coefficienti A, B, C possono essere trovati, volendo, utilizzando il principio d'identità dei polinomi o la formula di Heaviside

2. La risposta al gradino e il suo grafico (evidenziare la componente transitoria e di regime)

Come già visto in precedenza, nel contesto dei sistemi LTI (lineari e tempo-invarianti), esiste una relazione diretta tra l'ingresso e l'uscita del sistema nel dominio complesso. Questa relazione si esprime tramite la funzione di trasferimento G(s), secondo la formula:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

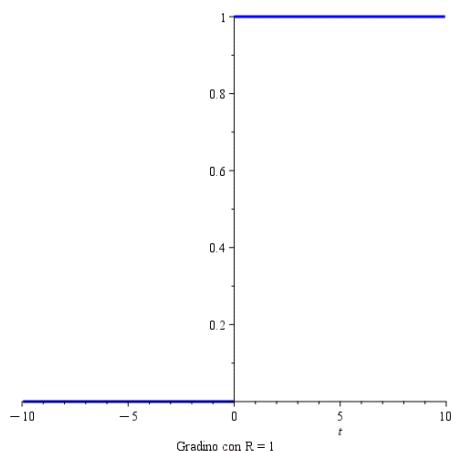
Dove Y(s) è la trasformata di Laplace dell'uscita e U(s) quella dell'ingresso

Quindi se il segnale in ingresso è un gradino, noto anche come funzione di Heaviside, nel dominio del tempo si rappresenta come:

$$u(t) = R \cdot 1(t)$$

dove R è il valore dell'ampiezza del gradino (in genere 1) e 1(t) è la funzione che vale 1 per $t \geq 0$ e 0 altrimenti.

`plot(Heaviside(t), color = blue, thickness = 3, caption = typeset("Gradino con R = 1"))`



Applicando la trasformata di Laplace all'ingresso, si ottiene:

$$U(s) = \frac{R}{S}$$

e avendo a che fare con un gradino unitario

$$U_{\text{gradino}} := s \rightarrow \frac{1}{s}$$

$$U_{\text{gradino}} := s \mapsto \frac{1}{s}$$

Di conseguenza, la trasformata dell'uscita diventa:

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

Questo significa che la risposta del sistema al gradino può essere ottenuta semplicemente moltiplicando la funzione di trasferimento per 1/s, e poi calcolando l'anti-trasformata di Laplace per tornare nel dominio del tempo.

Procediamo passo passo:

$$Y_{\text{gradino}} := s \rightarrow G(s) \cdot U_{\text{gradino}}(s) :$$

$$Y_{\text{gradino}}(s)$$

$$\frac{80 (16 s^2 - 8 s + 169)}{193 ((4 s + 1)^2 + 144) (s + 2) s}$$

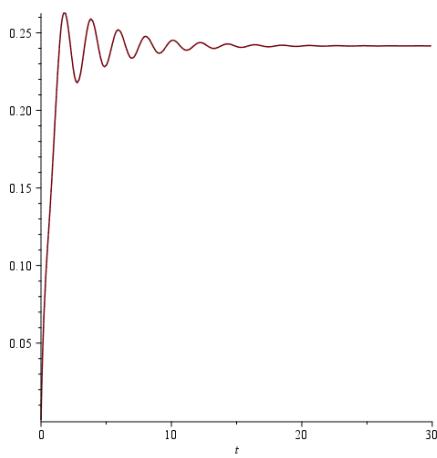
E nel dominio del tempo avremo:

$$y_{\text{gradino}} := t \rightarrow \text{invlaplace}(Y_{\text{gradino}}(s), s, t) : y_{\text{gradino}}(t)$$

$$\frac{1352}{5597} - \frac{9960 e^{-2t}}{37249} + \frac{64 e^{-\frac{t}{4}} (1308 \cos(3t) - 1921 \sin(3t))}{3240663}$$

Per capire anche cosa succede **graficamente**:

$$\text{plot}(y_{\text{gradino}}(t), t = 0 .. 30)$$



E riprendendo gli addendi della nostra risposta al gradino:

$$y_{\text{gradino}}(t)$$

$$\frac{1352}{5597} - \frac{9960 e^{-2t}}{37249} + \frac{64 e^{-\frac{t}{4}} (1308 \cos(3t) - 1921 \sin(3t))}{3240663}$$

Vediamo cosa rappresenta ciascun addendo :

a. Termine costante :

$$\frac{1352}{5597} \approx 0.2416$$

Questa è la componente di **regime** della risposta

. È il valore verso cui il sistema tende per $t \rightarrow \infty$, dopo che la risposta transitoria si è estinta.

b. Termine e^{-2t} :

$$-\frac{9960}{37249}e^{-2t} \approx -0.2673e^{-2t}$$

Questo termine rappresenta una componente **transitoria** esponenziale, che decade rapidamente a causa del polo reale $s = -2$.

c. Termine oscillatorio smorzato :

$$\frac{64}{3240663}e^{-\frac{t}{4}}(1308 \cos(3t) - 1921 \sin(3t))$$

Questo è l'altro termine che compone la nostra componente **transitoria**,

tipico dei poli complessi coniugati. La parte reale $\left(-\frac{1}{4}\right)$

determina lo smorzamento, mentre la parte immaginaria (± 3) determina la frequenza dell'oscillazione.

Concentriamoci ora sulla componente transitoria e sulla componente di regime:

$y_{gradino_regime} := t \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y_{gradino}(t)$:

$$y_{gradino_regime}(t)$$

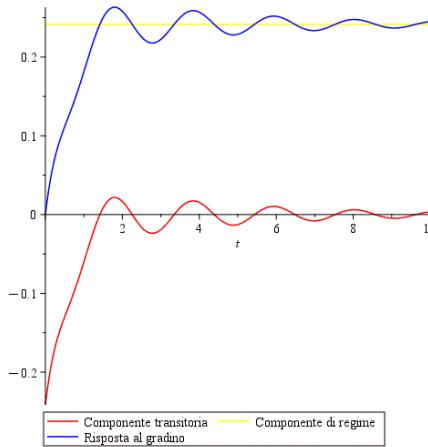
$$\frac{1352}{5597}$$

$y_{gradino_transitorio} := t \rightarrow y_{gradino}(t) - y_{gradino_regime}(t)$:

$$y_{gradino_transitorio}(t)$$

$$-\frac{9960 e^{-2t}}{37249} + \frac{64 e^{-\frac{t}{4}} (1308 \cos(3t) - 1921 \sin(3t))}{3240663}$$

```
plot([y_gradino_transitorio(t), y_gradino_regime(t), y_gradino(t)], t = 0 .. 10, legend
= ["Componente transitoria", "Componente di regime", "Risposta al gradino"], color
= ["red", "yellow", "blue"] )
```



Si può quindi notare, dal grafico, che la risposta al gradino
 è data dalla somma della componente transitoria con una costante pari al valore finale
 della risposta, cioè $1352/5597 \approx 0.2416$, che rappresenta il valore di regime

3. La risposta alla rampa unitaria e il suo grafico (evidenziare la componente transitoria e di regime)

*La rampa unitaria è un segnale che cresce linearmente nel tempo a partire da $t = 0$,
 ed è definita come :*

$$r(t) = R \cdot t \cdot 1(t)$$

*dove R rappresenta il coefficiente di inclinazione (tipicamente pari a 1) e $1(t)$ è la
 funzione gradino di Heaviside. Si tratta dunque di un segnale right
 – sided (cioè nullo per $t < 0$) che aumenta senza limiti per $t \rightarrow \infty$.*

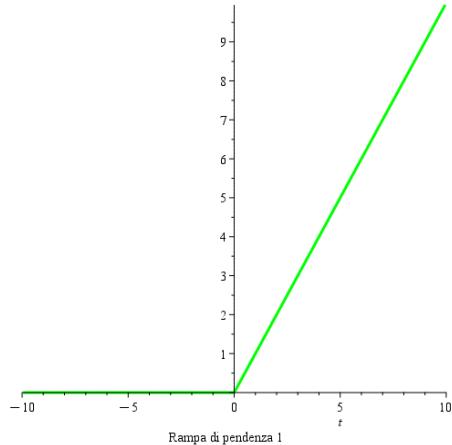
Per ricavare la risposta alla rampa, possiamo calcolare la L

- trasformata del segnale a rampa*
- . utilizzando per esempio il Teorema della moltiplicazione per t ,*
- particolarizzandolo però nel nostro caso a $n = 1$,*
- in quanto sappiamo che la rampa non è altro che il gradino moltiplicato per t*

L'analisi della risposta a una rampa unitaria 'è' utile per valutare la 'capacità' del sistema di seguire un riferimento che cresce costantemente, come ad esempio nel caso di inseguimenti di traiettorie lineari.

```
plot(t·Heaviside(t), color = green, thickness = 3, caption  

= typeset("Rampa di pendenza 1"))
```



Sapendo che la trasformata di Laplace della risposta alla rampa è :

$$U_{rampa} := s \rightarrow \frac{1}{s^2}$$

$$U_{rampa} := s \mapsto \frac{1}{s^2}$$

La risposta alla rampa del sistema si ricava dalla relazione $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$, pertanto avremo :

$$Y_{rampa} := s \rightarrow G(s) \cdot U_{rampa}(s) :$$

$$Y_{rampa}(s)$$

$$\frac{80 (16 s^2 - 8 s + 169)}{193 ((4 s + 1)^2 + 144) (s + 2) s^2}$$

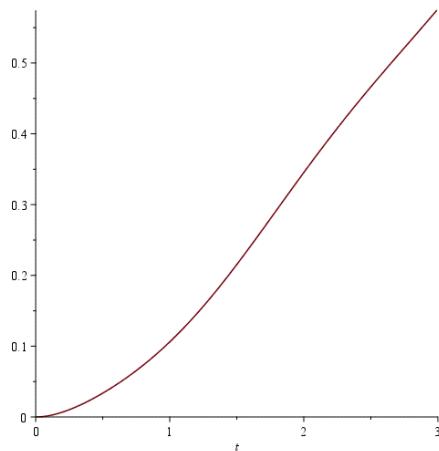
Allora, passando al dominio del tempo, la risposta sarà :

$$y_{rampa} := t \rightarrow \text{invlaplace}(Y_{rampa}(s), s, t) : y_{rampa}(t)$$

$$-\frac{612}{4205} + \frac{1352 t}{5597} + \frac{4980 e^{-2t}}{37249} + \frac{256 e^{-\frac{t}{4}} (21744 \cos(3t) + 17617 \sin(3t))}{469896135}$$

Vediamo cosa succede graficamente :

$$\text{plot}(y_{rampa}(t), t = 0 .. 3)$$



Concentriamoci ora sulla componente transitoria e di regime

$$y_{rampa_regime} := t \rightarrow \text{op}(1, (3.3)) + \text{op}(2, (3.3)) :$$

$$y_{rampa_regime}(t)$$

$$-\frac{612}{4205} + \frac{1352 t}{5597}$$

Transitoria :

Corrisponde agli effetti iniziali della risposta, legati alla struttura interna del sistema . Questa parte non parte da zero e si manifesta subito dopo l'applicazione dell'ingresso, ma progressivamente si attenua, fino a scomparire completamente con il passare del tempo.

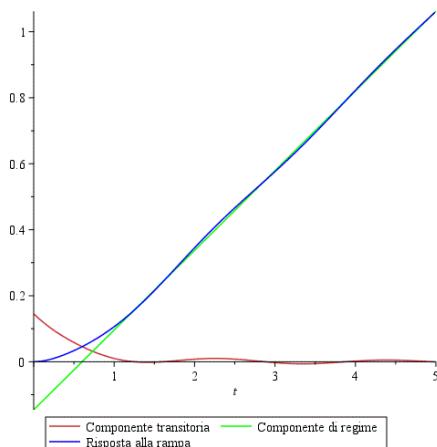
$y_{rampa_transitorio} := t \rightarrow y_{rampa}(t) - y_{rampa_regime}(t)$:

$y_{rampa_transitorio}(t)$

$$\frac{4980 e^{-2t}}{37249} + \frac{256 e^{-\frac{t}{4}} (21744 \cos(3t) + 17617 \sin(3t))}{469896135}$$

Visivamente:

```
plot([y_rampa_transitorio(t), y_rampa_regime(t), y_rampa(t)], t=0 ..5, legend
= ["Componente transitoria", "Componente di regime", "Risposta alla rampa"],
color = ["orange", "green", "blue"] )
```



Graficamente notiamo che inizialmente la risposta alla rampa (in blu) è influenzata sia dalla parte transitoria (in rosso) che da quella a regime (in verde), ma col passare del tempo la componente transitoria si annulla lasciando dominare la componente a regime.

4. La risposta al segnale periodico elementare

$$u(t) = A \sin(\omega t + \theta) \cdot 1(t)$$

Per analizzare la risposta del sistema LTI al segnale sinusoidale forzato

$$u(t) = A \cdot \sin(\omega t + \theta) \cdot 1(t)$$

è opportuno selezionare valori rappresentativi per i parametri A , ω , e θ . Le scelte seguenti sono motivate sia da considerazioni teoriche che pratiche:

- Ampiezza $A := 1$

L'ampiezza è posta pari a 1 in quanto tale scelta non altera qualitativamente la risposta del sistema: essendo il sistema lineare, l'uscita risulterà comunque proporzionale all'ampiezza dell'ingresso. Inoltre, un valore unitario permette di evidenziare il comportamento dinamico del sistema senza introdurre fattori di scala superflui.

- Frequenza angolare $\omega := 3$

Il valore della frequenza è stato scelto in corrispondenza della parte immaginaria dei poli complessi coniugati della risposta all'impulso, che evidenzia termini del tipo $\cos(3t)$ e $\sin(3t)$. Stimolare il sistema proprio a questa frequenza consente di osservare la sua risposta in corrispondenza della sua naturale tendenza oscillatoria. Ciò rende possibile analizzare fenomeni di amplificazione e di interazione con la dinamica interna del sistema.

- Fase iniziale $\theta := 0$

La fase iniziale è fissata a zero per semplificare l'analisi simbolica e grafica. Dal momento che la fase influenza esclusivamente lo spostamento temporale del segnale e non le sue componenti frequentiali o la struttura della risposta, la scelta $\theta = 0$ non compromette la generalità dell'analisi, ma ne facilita la chiarezza

Avremo quindi come segnale periodico in ingresso: $u(t) = \sin(3t)$

Pertanto con:

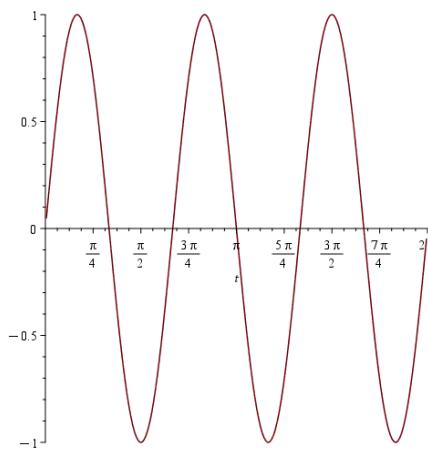
- $A := 1$:
- $\omega := 3$:
- $\theta := 0$:

$$u_{\text{armonica}} := t \rightarrow A \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta) :$$

$$u_{\text{armonica}}(t)$$

$$\sin(3t)$$

$$\text{plot}(u_{\text{armonica}}(t), t = 0 .. 2\pi)$$



Per ricavare la trasformata di Laplace di questo segnale ricordo che vale la seguente :

$$\sin(\omega t) \cdot 1(t) \Rightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

e nel nostro caso con $\omega = 3$ abbiamo che :

$$U_{segnalePeriodico} := s \rightarrow \text{laplace}(u_{armonica}(t), t, s) : U_{segnalePeriodico}(s) = \frac{3}{s^2 + 9}$$

Passando alla risposta al segnale periodico:

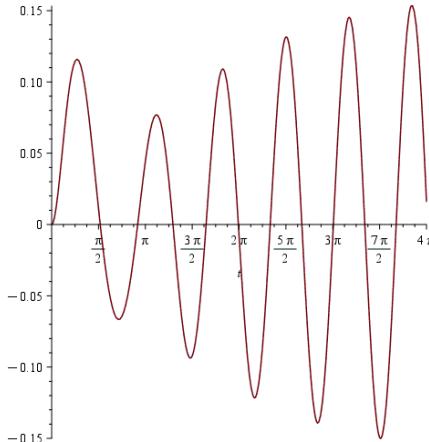
$$Y_{segnalePeriodico} := s \rightarrow G(s) \cdot U_{segnalePeriodico}(s) : Y_{segnalePeriodico}(s) = \frac{240 (16 s^2 - 8 s + 169)}{193 ((4 s + 1)^2 + 144) (s + 2) (s^2 + 9)}$$

Calcoliamo l'anti-trasformata di tale funzione per ricavare la risposta al segnale periodico nel dominio del tempo:

$$y_{segnalePeriodico} := t \rightarrow \text{invlaplace}(Y_{segnalePeriodico}(s), s, t) : y_{segnalePeriodico}(t) = \frac{59760 e^{-2t}}{484237} + \frac{32400 \cos(3t)}{1447693} - \frac{237920 \sin(3t)}{1447693} + \frac{1280 (-2448 \cos(3t) + 3937 \sin(3t)) e^{-\frac{t}{4}}}{21492673}$$

Quindi :

$$\text{plot}(y_{segnalePeriodico}(t), t = 0 .. 4 \cdot \pi)$$



Concentriamoci nuovamente sulla componente transitoria e sulla componente di regime Regime:

$$y_{sp_regime} := t \rightarrow \text{op}(2, (4.4)) + \text{op}(3, (4.4)) :$$

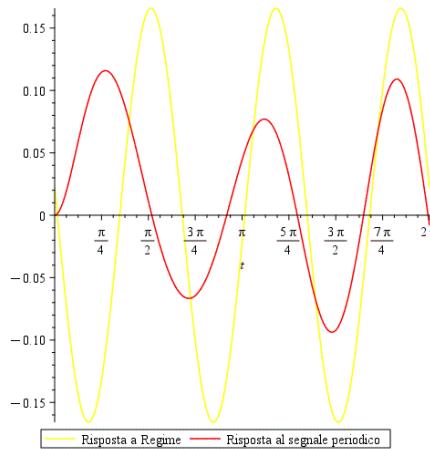
$$y_{sp_regime}(t) = \frac{32400 \cos(3t)}{1447693} - \frac{237920 \sin(3t)}{1447693}$$

Transitoria:

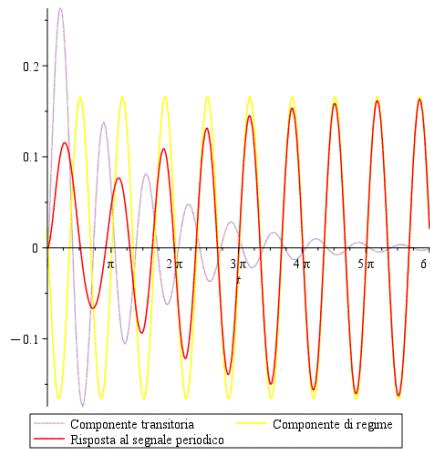
$$y_{sp_transitorio} := t \rightarrow y_{segnalePeriodico}(t) - y_{sp_regime}(t) :$$

$$y_{sp_transitorio}(t) = \frac{59760 e^{-2t}}{484237} + \frac{1280 (-2448 \cos(3t) + 3937 \sin(3t)) e^{-\frac{t}{4}}}{21492673}$$

```
plot([y_sp_regime(t), y_segnalePeriodico(t) ], t = 0 ..2· π, legend = ["Risposta a Regime", "Risposta al segnale periodico"], color = ["yellow", "red"] )
```



```
plot([y_sp_transitorio(t), y_sp_regime(t), y_segnalePeriodico(t) ], t = 0 ..6 π, legend = ["Componente transitoria", "Componente di regime", "Risposta al segnale periodico"], color = [#d2abd6, "yellow", "red"] )
```



5. Un suo modello I-U equivalente (equazione differenziale ordinaria), valutando la risposta libera

Un sistema lineare tempo-invariante (LTI), continuo nel tempo e inizialmente in quiete (cioè privo di energia immagazzinata), può essere descritto tramite un'equazione differenziale diretta che lega ingresso e uscita. La forma generale di tale rappresentazione, detta **modello ingresso-uscita (I-U) minimale**, è la seguente:

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) = b_0 u^{(n)}(t) + b_1 u^{(n-1)}(t) + \cdots + b_n u(t)$$

Questa equazione coinvolge le derivate dell'ingresso $u(t)$ e dell'uscita $y(t)$ fino all'ordine n . Il termine "minimale" si riferisce al fatto che il modello utilizza il minor numero possibile di variabili per rappresentare completamente il comportamento dinamico del sistema.

Per passare al dominio della variabile complessa s , si applica la trasformata di Laplace a entrambi i lati dell'equazione. Questo processo sfrutta la proprietà della trasformata di una derivata, la cui forma generale è:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} \dot{f}(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-)$$

Tuttavia, poiché il sistema è inizialmente in quiete, tutte le condizioni iniziali sono nulle, e quindi l'espressione si semplifica in:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s)$$

Applicando ciò all'equazione differenziale iniziale, si ottiene un'espressione algebrica nel dominio s :

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n) Y(s) = (b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n) U(s)$$

Separando i termini, si evidenzia il legame tra ingresso e uscita tramite la **funzione di trasferimento** del sistema:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

Questa funzione razionale rappresenta il comportamento del sistema nel dominio di Laplace, ed è fondamentale per prevedere la risposta del sistema a vari tipi di ingresso, così come per l'analisi della stabilità e della dinamica.

Dopo aver visto di cosa stiamo parlando, per ottenere il modello I-U equivalente relativo alla funzione di trasferimento

$G(s)$

$$\frac{80 (16 s^2 - 8 s + 169)}{193 ((4 s + 1)^2 + 144) (s + 2)}$$

possiamo trovare, con un po' di calcoli, l'equazione a cui possiamo applicare il teorema della derivata;

$$eq_in_s := 193((4 s + 1)^2 + 144) \cdot (s + 2) \cdot Y(s) = 80(16 s^2 - 8 s + 169) \cdot U(s)$$

$$eq_in_s := 193 ((4 s + 1)^2 + 144) (s + 2) Y(s) = 80 (16 s^2 - 8 s + 169) U(s)$$

simplify(eq_in_s)

$$193 (16 s^2 + 8 s + 145) (s + 2) Y(s) = (1280 s^2 - 640 s + 13520) U(s)$$

expand(eq_in_s)

$$3088 Y(s) s^3 + 7720 Y(s) s^2 + 31073 Y(s) s + 55970 Y(s) = 1280 U(s) s^2 - 640 U(s) s + 13520 U(s)$$

Applichiamo quindi su quest'ultima il teorema della derivata e ricavo grazie a questo l'equazione differenziale ordinaria nel dominio del tempo:

$$eqdiff := 3088 \cdot y'''(t) + 7720 y''(t) + 31073 \cdot y'(t) + 55970 y(t) = 1280 \cdot u''(t) - 640 \cdot u'(t) + 13520 u(t) :$$

Abbiamo quindi trovato il **modello IU minimale**

Poiché fino ad ora abbiamo lavorato ipotizzando che il sistema fosse inizialmente privo di condizioni iniziali, è necessario ora riutilizzare il teorema della derivata includendo esplicitamente i termini iniziali. Questo passaggio è fondamentale perché l'esercizio richiede di determinare la risposta libera, che emerge solo quando il sistema non si trova in quiete
Pertanto prima riporto nuovamente l'equazione differenziale ordinaria ottenuta nel dominio di Laplace:

$$eqdiffs := \text{subs}(\{\text{laplace}(y(t), t, s) = Y(s), \text{laplace}(u(t), t, s) = U(s)\}, \text{laplace}(eqdiff, t, s)) :$$

Ora vogliamo ricavare $Y(s)$ e separare la parte in cui compare $U(s)$ dal resto - vogliamo separare la **risposta libera** dalla **risposta forzata**.

Separiamo la risposta libera dalla risposta forzata:

$$Y := \text{collect}(\text{solve}(eqdiffs, Y(s)), U(s))$$

$$\begin{aligned} Y := & \frac{(1280 s^2 - 640 s + 13520) U(s)}{193 (16 s^3 + 40 s^2 + 161 s + 290)} \\ & + \frac{1}{193 (16 s^3 + 40 s^2 + 161 s + 290)} (3088 s^2 y(0) - 1280 s u(0) \\ & + 3088 s D(y)(0) + 7720 s y(0) - 1280 D(u)(0) + 640 u(0) + 3088 D^{(2)}(y)(0) \\ & + 7720 D(y)(0) + 31073 y(0)) \end{aligned}$$

Quello che abbiamo ottenuto è il modello IU, in cui compaiono le condizioni iniziali. Il denominatore di quest'ultimo prende il nome di polinomio caratteristico del sistema, i cui coefficienti corrispondono a quelli dell'equazione differenziale

Troviamo adesso la **risposta libera** e la **risposta forzata**

- **Risposta forzata** → dipende solo da $U(s)$ → rappresenta quindi il primo addendo della
 $Y_{\text{forzata}} := \text{op}(1, Y)$

$$Y_{\text{forzata}} := \frac{(1280 s^2 - 640 s + 13520) U(s)}{193 (16 s^3 + 40 s^2 + 161 s + 290)}$$

- **Risposta libera** → dipende solo dalle condizioni iniziali del sistema (quelle dell'ingresso poste a zero, in quanto il segnale in ingresso è nullo, e quelle dell'uscita, solitamente diverse da 0) → rappresenta quindi il secondo addendo della

$$Y_{\text{libera}} := \text{op}(2, Y)$$

$$\begin{aligned} Y_{\text{libera}} := & \frac{1}{193 (16 s^3 + 40 s^2 + 161 s + 290)} (3088 s^2 y(0) - 1280 s u(0) \\ & + 3088 s D(y)(0) + 7720 s y(0) - 1280 D(u)(0) + 640 u(0) + 3088 D^{(2)}(y)(0) \\ & + 7720 D(y)(0) + 31073 y(0)) \end{aligned}$$

A questo punto possiamo **valutare la risposta libera**

Per quanto riguarda le condizioni iniziali dell'ingresso le considero inizialmente nulle

$$Y_{libera} := eval(Y_{libera}, \{u(0) = 0, u'(0) = 0\})$$

$$\begin{aligned} Y_{libera} := & \frac{1}{193 (16 s^3 + 40 s^2 + 161 s + 290)} (3088 s^2 y(0) + 3088 s D(y)(0) \\ & + 7720 s y(0) + 3088 D^{(2)}(y)(0) + 7720 D(y)(0) + 31073 y(0)) \end{aligned}$$

Mentre per le condizioni iniziali dell'uscita ipotizzo:

$$y_{prova} := t \rightarrow e^{-2t}$$

$$y_{prova} := t \mapsto e^{-2t}$$

di cui le derivate in $t = 0$ sono:

$$y(0) = 1,$$

$$y'(t) = -2e^{-2t} \rightarrow y'(0) = -2$$

$$y''(t) = 4e^{-2t} \rightarrow y''(0) = 4$$

$$y'''(t) = -8e^{-2t} \rightarrow y'''(0) = -8$$

*Questo mi permette di mantere al contempo coerenza con la struttura esponenziale
presente nella risposta all'impulso*

$$Ylibs_{prova} := eval(Y_{libera}, \{y(0) = y_{prova}(0), y'(0) = y_{prova}'(0), y''(0) = y_{prova}''(0), y'''(0) = y_{prova}'''(0)\})$$

$$Ylibs_{prova} := \frac{3088 s^2 + 1544 s + 27985}{193 (16 s^3 + 40 s^2 + 161 s + 290)}$$

Eseguo l'espansione in fratti semplici

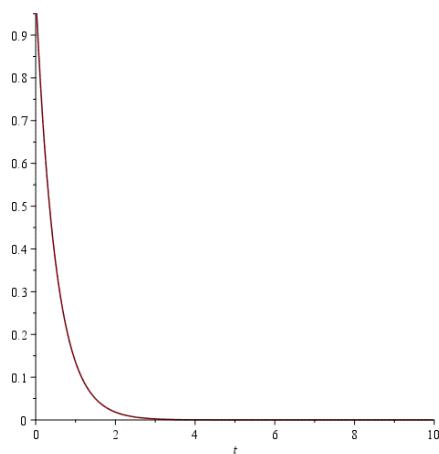
$$convert(Ylibs_{prova}, parfrac)$$

$$\frac{1}{s+2}$$

$$ylibera_{prova} := invlaplace(Ylibs_{prova}, s, t)$$

$$ylibera_{prova} := e^{-2t}$$

Dal punto di vista grafico, la nostra risposta libera si presenta come:
 $plot(ylibera_{prova}, t = 0 .. 10)$



Considerazioni personali:

La risposta libera ottenuta evidenzia un comportamento stabile del sistema: tutti i poli del polinomio caratteristico hanno parte reale negativa. Questo conferma che il sistema, anche in assenza di ingresso, tende naturalmente all'equilibrio.

Dal punto di vista del controllo automatico, ciò è importante perché:

- La dinamica interna è ben smorzata, quindi non genera instabilità o oscillazioni indesiderate;
- Il transitorio libero si estingue rapidamente, facilitando la progettazione del controllo sulla sola risposta forzata;

Questo tipo di comportamento è tipico di sistemi facilmente controllabili e ben condizionati dal punto di vista della risposta temporale

6. Una volta individuata tale rappresentazione determinare le condizioni iniziali tali che la risposta al gradino coincida con il suo valore di regime (assenza di componente transitoria)

Lo scopo di questa parte di esercizio è trovare quella risposta libera che annulli la componente transitoria della risposta forzata. In modo tale che da:

$$\text{Risposta} = \text{Risposta Libera} + (\text{Componente di regime} + \text{Componente transitoria})$$

vogliamo:

$$\text{Risposta} = \text{Componente di regime}$$

$$\text{Risposta} - \text{Componente di regime} = 0$$

$$\text{Risposta Libera} + \text{Componente transitoria} = 0$$

Nel nostro caso avremo la risposta al gradino (componente libera + componente forzata) che è data da:

$$Y_{\text{prova}} := \text{eval}(Y, \{u(0) = 0, u'(0) = 0\}) :$$

$$Y_{\text{completa_gradino}} := \text{eval}\left(Y_{\text{prova}}, U(s) = \frac{1}{s}\right)$$

$$\begin{aligned} Y_{\text{completa_gradino}} &:= \frac{1280 s^2 - 640 s + 13520}{193 (16 s^3 + 40 s^2 + 161 s + 290) s} \\ &+ \frac{1}{193 (16 s^3 + 40 s^2 + 161 s + 290)} (3088 s^2 y(0) + 3088 s D(y)(0) \\ &+ 7720 s y(0) + 3088 D^{(2)}(y)(0) + 7720 D(y)(0) + 31073 y(0)) \end{aligned}$$

Ciò che abbiamo appena ottenuto è composto da una risposta forzata e da una risposta libera, ma

non conosciamo le condizioni iniziali. Possiamo sfruttare però di sapere che il segnale in ingresso è il gradino, grazie al quale conosciamo già la componente a regime della risposta forzata.

Quest'ultima non è altro che la trasformata di Laplace della risposta forzata al gradino, già vista nella sezione 2

$$componenteRegimeGradino := \text{laplace}(y_{\text{gradino_regime}}(t), t, s)$$

$$componenteRegimeGradino := \frac{1352}{5597 s}$$

Il nostro scopo è che la risposta al gradino coincida con il suo valore di regime nel dominio del tempo, e per farlo bisogna eguagliare quindi la (6.1) con la risposta forzata al gradino

Avremo dunque questa equazione da risolvere:

$$\begin{aligned} Y_{\text{completa_gradino}} &= componenteRegimeGradino \\ \text{e quindi } Y_{\text{completa_gradino}} - componenteRegimeGradino &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{simplify}(Y_{\text{completa_gradino}} - (6.2))$$

$$\begin{aligned} &((89552 s^2 + 223880 s + 901117) y(0) + (89552 s + 223880) D(y)(0) - 21632 s^2 \\ &- 16960 s + 89552 D^{(2)}(y)(0) - 236232) / (89552 s^3 + 223880 s^2 + 901117 s \\ &+ 1623130) \end{aligned}$$

Questo è un polinomio in s parametrico, in cui i parametri sono le condizioni iniziali della risposta libera.

Procediamo utilizzando la funzione CoefficientVector che raccoglie in un vettore i coefficienti delle potenze di s , siccome noi vogliamo trovare quelle condizioni che fanno sì che il polinomio sia pari a zero. Dunque eguagliando i coefficienti a zero ottengo un sistema in $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, risolvibile in questo modo:

$$\text{CoefficientVector}(\text{numer}((6.3)), s)$$

$$\left[\begin{array}{l} -236232 + 89552 D^{(2)}(y)(0) + 223880 D(y)(0) + 901117 y(0) \\ 89552 D(y)(0) + 223880 y(0) - 16960 \\ 89552 y(0) - 21632 \end{array} \right]$$

$$prima_equazione := (6.4)[1] = 0$$

$$\begin{aligned} prima_equazione &:= -236232 + 89552 D^{(2)}(y)(0) + 223880 D(y)(0) + 901117 y(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$seconda_equazione := (6.4)[2] = 0$$

$$seconda_equazione := 89552 D(y)(0) + 223880 y(0) - 16960 = 0$$

$$terza_equazione := (6.4)[3] = 0$$

$$terza_equazione := 89552 y(0) - 21632 = 0$$

$$\begin{aligned} solve(\{ prima_equazione, seconda_equazione, terza_equazione \}, [y(0), y'(0), y''(0)]) \\ \left[\begin{array}{l} y(0) = \frac{1352}{5597}, D(y)(0) = -\frac{80}{193}, D^{(2)}(y)(0) = \frac{240}{193} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Verifichiamo che le condizioni iniziali trovate siano tali che la risposta al gradino coincida con il suo valore di regime, come richiesto dalla traccia

$$\text{simplify}(\text{eval}(Y_{\text{completa_gradino}}, (6.8)[1]))$$

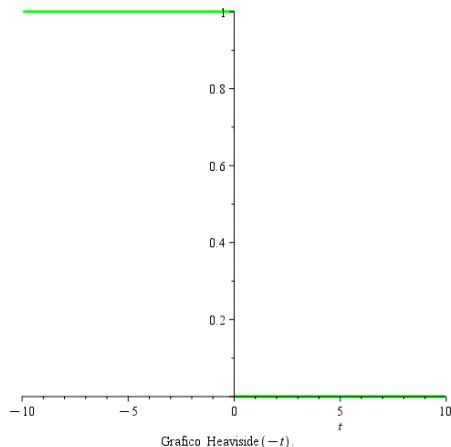
$$\frac{1352}{5597 \text{ s}}$$

Da quanto trovato il calcolo risulta essere corretto

7. Valutare la risposta al segnale $u(t) = 1(-t)$

L'ingresso $1(-t)$ rappresenta un gradino anticipato, ovvero un segnale che assume valore 1 per $t < 0$ e si annulla istantaneamente in corrispondenza di $t = 0$ e per tutti i tempi successivi. Si tratta della versione speculare del gradino unitario $1(t)$, rispetto all'asse delle ordinate e può essere interpretato come un segnale che si disattiva bruscamente all'istante iniziale, anziché attivarsi.

```
plot(Heaviside(-t), color = "green", thickness = 3, caption = typeset("Grafico ", Heaviside(-t), "."))
Grafico Heaviside(-t).
```



e partendo sempre dalla rappresentazione I-U del sistema, la risposta a questo segnale in ingresso avrà la seguente forma:

- per $t < 0$ la risposta al segnale $1(-t)$ coincide con la risposta a regime del gradino
- per $t \geq 0$ avremo solo il contributo della risposta libera

$$y(t) = \begin{cases} G(0) & t < 0 \\ y_{lib}(t) \Big|_{G=0} & t \geq 0 \end{cases}$$

Prendo:

valoreRegimeGradino := $y_{gradino_regime}(t)$

$$\text{valoreRegimeGradino} := \frac{1352}{5597}$$

Per $t < 0$ la risposta sarà quindi un segnale costante pari a $\frac{1352}{5597}$, mentre per $t > 0$ bisogna valutare la

risposta libera con le condizioni

$$\{y(0) = \text{valoreRegimeGradino}, y'(0) = 0, y''(0) = 0\}$$

$$\left\{ y(0) = \frac{1352}{5597}, D(y)(0) = 0, D^{(2)}(y)(0) = 0 \right\}$$

che sostituisco alla risposta libera

simplify(eval(op(2, Y_completa_gradino), (7.2)))

$$\frac{1352 (16 s^2 + 40 s + 161)}{5597 (16 s^3 + 40 s^2 + 161 s + 290)}$$

y_{lib_gradino_simmetrico} := invlaplace((7.3), s, t)

$$y_{\text{lib_gradino_simmetrico}} := \frac{6760 e^{-2t}}{37249} + \frac{2704 e^{-\frac{t}{4}} (72 \cos(3t) + 151 \sin(3t))}{3240663}$$

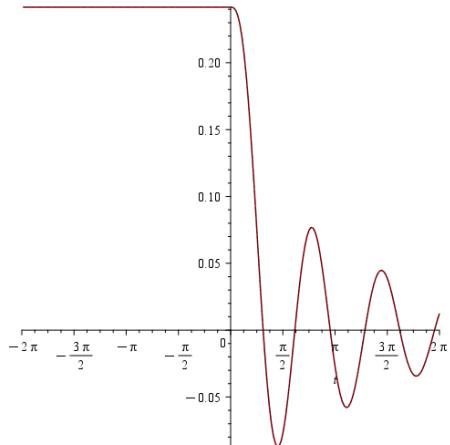
Una volta ottenuta la risposta libera per le condizioni iniziali imposte,

abbiamo ora entrambe le componenti della
risposta del sistema al segnale $1(-t)$, che scriviamo in modo più leggibile :

$$y_{\text{gradino_simmetrico}} := t \rightarrow \begin{cases} \text{valoreRegimeGradino} & t < 0 \\ y_{\text{lib_gradino_simmetrico}} & t \geq 0 \end{cases} : \\ y_{\text{gradino_simmetrico}}(t) = \begin{cases} \frac{1352}{5597} & t < 0 \\ \frac{6760 e^{-2t}}{37249} + \frac{2704 e^{-\frac{t}{4}} (72 \cos(3t) + 151 \sin(3t))}{3240663} & 0 \leq t \end{cases}$$

Dal punto di vista grafico avremo:

plot(y_{gradino_simmetrico}(t))



Il grafico evidenzia chiaramente come la risposta del sistema sia una trasformazione temporale speculare rispetto a quella prodotta da un ingresso a gradino classico. In altre parole, applicando un segnale invertito nel tempo, il sistema genera una risposta che riflette tale inversione. Questo comportamento conferma la struttura causale e la coerenza di un sistema lineare tempo-invariante: modificando temporalmente l'ingresso, la risposta si adatta in modo coerente, pur mantenendo la stessa dinamica.

Esercizio 2

b. Si rappresenti il Diagramma di Bode della seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1600(3s - 1)}{(2s + 5)(4s + 1)(15s + 1)}$$

L'esercizio 2 è stato realizzato con l'ausilio del software **Maple**

Concetti introduttivi: cos'è la risposta in frequenza

L'analisi in frequenza è una metodologia fondamentale nello studio dei sistemi dinamici, in particolare quelli stabili secondo il criterio BIBO (Bounded Input Bounded Output). Il cuore di quest'analisi è rappresentato dalla **risposta in frequenza**, che si ottiene valutando la **funzione di trasferimento** del sistema lungo l'asse immaginario del piano complesso, ovvero calcolando $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$

Essendo $G(j\omega)$ una funzione a valori complessi, a ogni pulsazione reale ω corrisponde un numero complesso che può essere descritto attraverso:

Modulo $|G(j\omega)|$, che rappresenta l'amplificazione (o attenuazione) del segnale sinusoidale;

Argomento $\angle G(j\omega)$, che esprime lo sfasamento introdotto dal sistema.

Il Teorema della Risposta in Frequenza

Per un sistema lineare, tempo-invariante e a tempo continuo (LTI-TC), vale il seguente principio: se si applica in ingresso un segnale sinusoidale elementare del tipo

$$u(t) = A \cdot \sin(\omega t + \theta) \cdot 1(t)$$

e il sistema è BIBO stabile, allora la risposta a regime sarà ancora una sinusoide della stessa frequenza: $y_{ss}(t) = Y \cdot \sin(\omega t + \xi) \cdot 1(t)$

dove:

- $Y = A \cdot |G(j\omega)|$ è l'ampiezza dell'uscita;
- $\xi = \theta + \angle G(j\omega)$ è la fase dell'uscita.

Diagramma di Bode: struttura e scopi

Il **diagramma di Bode** è uno strumento grafico di grande utilità per rappresentare la risposta in frequenza. Si compone di due grafici distinti ma sovrapposti:

- Il **diagramma del modulo**, in cui si rappresenta $20 \cdot \log_{10} |G(j\omega)|$ in funzione di ω ;
- Il **diagramma della fase**, che mostra l'andamento di $\angle G(j\omega)$.

Entrambi i grafici utilizzano una **scala logaritmica per le pulsazioni**: l'asse delle ascisse è costruito in **decadi**, ovvero ogni intervallo corrisponde a un fattore 10 di incremento in ω . Ad esempio, tra $\omega=1$ e $\omega=10$, o tra $\omega=100$ e $\omega=1000$, la distanza sulla scala è sempre la stessa, perché:

$$\log_{10} \left(\frac{\omega_b}{\omega_a} \right) = \text{numero di decadi}$$

Forma della funzione di trasferimento per il diagramma di Bode

Per costruire il diagramma di Bode in modo sistematico, è utile esprimere la funzione di trasferimento in una **forma normalizzata**, detta *forma di Bode*. A partire dalla forma fattorizzata:

$$G(s) = \tilde{k} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{s^{n_1} \cdot \prod_{i=1}^{n_2} (s - p_i)}$$

la si riscrive come:

$$G(s) = k \cdot \frac{\prod_{i=1}^m \left(1 + \operatorname{sgn}(-z_i) \frac{s}{\Omega_i} \right)}{s^{n_1} \cdot \prod_{i=1}^{n_2} \left(1 + \operatorname{sgn}(-p_i) \frac{s}{\omega_i} \right)}$$

dove:

- k è il **guadagno statico**, ottenuto come $\lim_{s \rightarrow 0} s^{n_1} \cdot G(s)$,
- $\Omega_i = |z_i|$ sono le **pulsazioni di rottura degli zeri**,
- $\omega_i = |p_i|$ sono le **pulsazioni di rottura dei poli**,
- la funzione segno tiene conto della posizione dei poli e degli zeri reali rispetto all'asse immaginario.

Una volta messa in forma di Bode, si procede alla valutazione di $G(j\omega)$, da cui si derivano modulo e fase.

```

restart: with(inttrans): with(PolynomialTools): with(DynamicSystems): with(plots):
G := s → 1600·(3·s - 1) / (2·s + 5)·(4·s + 1)·(15·s + 1)
G := s ↪ 4800·s - 1600 / (2·s + 5)·(4·s + 1)·(15·s + 1)

```

Calcolo i poli e gli zeri della FdT

```
poliG0 := [solve(denom(G(s)), s)]
```

$$poliG0 := \left[-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{15} \right]$$

```
zeriG := [solve(numer(G(s)), s)]
```

$$zeriG := \left[\frac{1}{3} \right]$$

Calcolo i poli nell'origine

```
μ := numboccur(poliG0, 0)
```

$$\mu := 0$$

Elimino i poli nell'origine per calcolare le pulsazioni di taglio (non necessario)

```
poliG := remove(x→x=0, poliG0)
```

$$poliG := \left[-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{15} \right]$$

Diagramma dei Moduli

Partiamo dal contributo dei poli sul diagramma dei moduli

Nel nostro caso considerando i 3 poli trovati possiamo dire che:

```
ω_t := abs~(poliG0)
```

$$\omega_t := \left[\frac{5}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{15} \right] \quad (5)$$

Ogni polo reale negativo introduce una variazione di pendenza di -20 dB/dec dopo la sua pulsazione di rottura.

Dunque:

Pulsazione (rad/s)	Pendenza che inizia lì	Totale accumulato
$\omega = \frac{1}{15} \approx 0,0667$	-20 dB/dec	-20 dB/dec
$\omega = \frac{1}{4} = 0,25$	-20 dB/dec	-40 dB/dec
$\omega = \frac{5}{2} = 2,5$	-20 dB/dec	-60 dB/dec

Concentriamoci ora sul contributo degli zeri sul diagramma dei moduli

Non dimentichiamoci, come anche nel caso precedente, che il contributo sui moduli non dipende dal fatto che lo zero (o il polo) si trovi nel semipiano destro o sinistro

L'effetto di uno **zero reale** z_i , che introduce una **pulsazione di rottura** Ω_i , può essere rappresentato con la seguente espressione in decibel:

$$20 \cdot \log_{10} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\Omega_i} \right)^2} \right)$$

Per tracciare un'approssimazione del suo contributo sul diagramma di Bode, distinguiamo due intervalli di frequenza:

- **Bassa frequenza (BF):** quando $\omega \ll \Omega_i$, ovvero siamo molto prima della pulsazione di rottura
- **Alta frequenza (AF):** quando $\omega \gg \Omega_i$, cioè molto dopo la pulsazione di rottura

In questi due casi, possiamo semplificare il comportamento della funzione:

- Nella **zona a bassa frequenza**, la parte dentro il logaritmo tende a 1, quindi:

$$20 \cdot \log_{10}(\sqrt{1}) = 0 \text{ dB}$$

⇒ il contributo è **trascurabile**.

- In **alta frequenza**, il termine 1 diventa insignificante rispetto al rapporto ω/Ω_i , quindi:

$$20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\omega}{\Omega_i} \right)$$

⇒ otteniamo una **retta con pendenza +20 dB/dec.**

Nel nostro caso abbiamo trovato un solo zero quindi:

$$\Omega_t := \text{abs}(\text{zeri}G)$$

$$\Omega_t := \left[\frac{1}{3} \right] \quad (6)$$

Pulsazione (rad/s)	Pendenza che inizia li	Totale accumulato
$\Omega = \frac{1}{3} \approx 0,333$	+20 dB/dec (zero)	-40 dB/dec + 20 dB/dec = -20 dB/dec

Analizziamo ora il contributo del guadagno sul diagramma dei moduli

Il **guadagno costante** di un sistema influisce direttamente sulla posizione verticale del diagramma dei moduli. In termini decibel, tale contributo si calcola con la formula:

$$|k|_{dB} = 20 \cdot \log_{10}(|k|)$$

Questo valore rappresenta uno **spostamento verticale uniforme** dell'intero grafico:

- Se il modulo del guadagno $|k|$ è **maggiore di 1**, il valore in decibel risulterà **positivo**, e quindi il diagramma si sposterà **verso l'alto** di quella quantità.
- Se invece $|k|$ è **minore di 1**, il risultato sarà **negativo**, e il grafico verrà **traslato verso il basso**.

In sostanza, il guadagno agisce come un "fattore di elevazione" o "abbassamento" del diagramma, senza alterarne la forma, ma solo **alzandolo o abbassandolo** lungo l'asse verticale dei dB.

Nel nostro caso avremo un guadagno pari a $-\frac{1600}{5}$ → "cioè uguale a -320

Calcoliamo il guadagno ponendo $s = 0$:

$$G(0) = \frac{1600 \cdot (-1)}{5 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{-1600}{5} = -320$$

► In modulo:

$$|K| = 320$$

► In dB:

$$|K|_{dB} = 20 \cdot \log_{10}(320) \approx 50.10 \text{ dB}$$

```
>> mag2db(1600/5)
```

```
ans =
```

```
50.1030
```

Il guadagno è **positivo**, quindi il diagramma dei moduli sarà **spostato verso l'alto** di circa **+50 dB**.

Ma se avessimo avuto poli nell'origine?

In questo caso nel nostro sistema non ne abbiamo:

I poli nell'origine sono elementi importanti perché sono **gli unici** che influenzano la **pendenza iniziale** del diagramma dei moduli. Quando presenti, infatti, introducono una retta con pendenza negativa fin dall'inizio della scala delle frequenze.

Nel nostro caso specifico, **non sono presenti poli nell'origine**, e quindi:

- Il contributo iniziale alla pendenza del diagramma dei moduli è nullo, cioè:

$$\text{Pendenza iniziale} = 0 \text{ [dB/decade]}$$

In generale, la presenza di n_1 poli nell'origine modifica il modulo secondo la legge:

$$-n_1 \cdot |j\omega|_{\text{dB}} = -n_1 \cdot 20 \cdot \log_{10}(\omega)$$

che rappresenta **esattamente** (senza approssimazioni) una retta con **pendenza costante pari a $-20 \cdot n_1$ dB/dec.**

Riassumendo per il nostro sistema possiamo dire di avere:

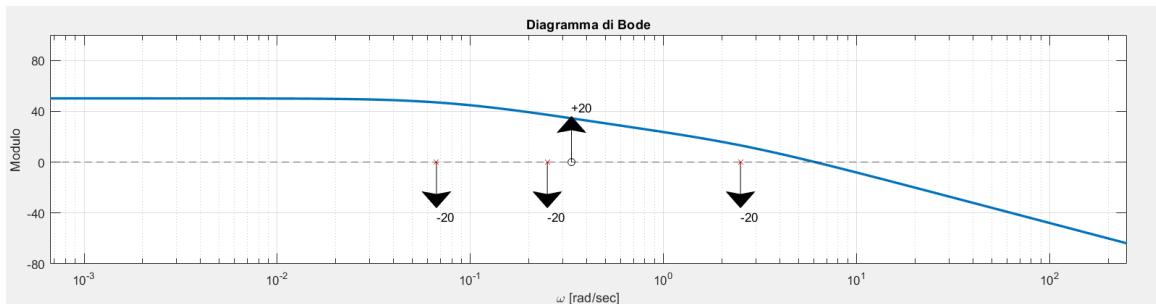
- Pendenza iniziale del diagramma:

$$0 \text{ dB/decade (nessun polo nell'origine)}$$

- Pendenza finale del diagramma:

$$0 + (1 \text{ zero} - 3 \text{ poli}) \cdot 20 = -40 \text{ dB/decade}$$

Per confermare tutto ciò che abbiamo detto utilizziamo una rappresentazione grafica del diagramma dei moduli (utilizzo il pacchetto `as_bode_completo`, fornito dal professore):



Passiamo ora al **diagramma delle fasi**:

Per ogni polo o zero, si considera una **zona di media frequenza** che si estende da **una decade prima** a **una decade dopo** la pulsazione di rottura

Contributo dei Poli Reali nel Semipiano Destro (RHP)

Nel diagramma delle fasi, la posizione di un polo nel **semipiano destro** o nel **semipiano sinistro** del piano complesso modifica in modo sostanziale l'andamento della curva

Analisi delle Tre Zone Frequenziali

L'approssimazione del contributo alla fase si costruisce suddividendo l'asse delle frequenze in tre aree distinte:

Bassa Frequenza (BF)

Quando $\omega \ll 0,1 \cdot \omega_i$, cioè molto prima della pulsazione di rottura, la parte immaginaria dell'espressione è trascurabile rispetto alla parte reale

Il contributo è quindi quasi nullo e il diagramma risulta piatto, aderente all'asse orizzontale.

Alta Frequenza (AF)

Nel caso opposto, quando $\omega \gg 10 \cdot \omega_i$, la parte immaginaria prevale e si può trascurare il termine costante nell'argomento.

Il grafico tende quindi a stabilizzarsi su una retta orizzontale a **+90°**

Media Frequenza (MF)

In questo intervallo, compreso tra $0,1 \cdot \omega$ e $10 \cdot \omega_i$, si osserva la transizione graduale tra le due condizioni precedenti. L'andamento è rappresentato da un segmento **inclinato** che collega i due livelli di fase:

- da 0° a 90°
- distribuiti su **due decadi**
- con **pendenza costante di +45° per decade**

Rappresentazione Grafica Semplificata

Per visualizzare il contributo di un polo reale RHP nel diagramma delle fasi, è buona prassi indicare **due frecce sulla scala logaritmica delle frequenze** in corrispondenza della pulsazione di rottura del polo:

- una **frecchia verso l'alto**, posta **una decade prima**, per indicare che la fase sta iniziando a salire (inizio della pendenza +45°/decade)
- una **frecchia verso il basso**, una decade dopo, a indicare che la fase si è ormai stabilizzata (fine della variazione)

Queste frecce aiutano a **visualizzare chiaramente** dove e come varia la fase a causa del polo.

Ma prima di passare al nostro diagramma delle fasi, continuiamo a parlare di altri due contributi importanti:

- **il guadagno statico complessivo del sistema**
- **eventuali poli (o zeri) nell'origine**, che nel nostro caso **non sono presenti**.

Contributo del Guadagno alla Fase

Il termine costante che compare nella funzione di trasferimento contribuisce direttamente alla fase complessiva del sistema. In particolare, il suo effetto si traduce nella fase dell'intero guadagno moltiplicativo k , ed è espresso semplicemente da:

$$\angle k$$

Il comportamento di questo termine è molto semplice:

- Se il guadagno è **positivo** ($k > 0$), allora il contributo alla fase è **nullo**, ovvero:

$$\angle k = 0^\circ$$

- Se invece il guadagno è **negativo** ($k < 0$), il contributo alla fase sarà:

$$\angle k = \pm 180^\circ$$

Applicazione al nostro caso:

$$K_b := \lim_{s \rightarrow 0} s^{\mu} \cdot G(s)$$

$K_b := -320$ (10)

Poiché il valore è **negativo**, il contributo in fase è:

$$\arg(G(0)) = \arg(-320) = \pm 180^\circ$$

Conclusione: nel nostro caso, il guadagno introduce un **contributo costante di $\pm 180^\circ$** alla fase dell'intero diagramma. Questo provoca uno **slittamento verticale del grafico delle fasi** (in alto o in basso, a seconda della convenzione scelta).

Contributo dei poli nell'origine nel diagramma delle fasi

Esaminiamo ora come influiscono eventuali poli posti nell'origine sul diagramma delle fasi.

▪ Contributo dei poli in origine

Se il sistema presenta n_1 poli nell'origine, questi generano un contributo alla fase pari a:

$$-n_1 \cdot \arg(j\omega)$$

Dal momento che $j\omega$ è un numero puramente immaginario, la sua fase è costante e vale $+90^\circ$. Ne consegue che ogni polo nell'origine introduce un **ritardo costante di 90°** , quindi complessivamente un contributo di:

$$-n_1 \cdot 90^\circ$$

▪ Impatto sulla fase iniziale e finale

Queste considerazioni ci aiutano a prevedere il comportamento della fase alle estremità dello spettro in frequenza:

- **Fase iniziale (a bassa frequenza):**

È determinata principalmente dalla **fase del guadagno statico** e da eventuali **poli nell'origine**. Infatti, a bassa frequenza, i poli e gli zeri finiti non contribuiscono ancora alla fase, per cui si ha:

$$\phi_{\text{iniziale}} = \arg(k) - n_1 \cdot 90^\circ$$

- **Fase finale (ad alta frequenza):**

Più articolata, dipende dall'effetto complessivo dei poli e degli zeri, distinguendo tra quelli nel semipiano sinistro (stabili) e destro (instabili). La formula completa è:

$$\phi_{\text{finale}} = \arg(k) - n_1 \cdot 90^\circ + (n_z^- - n_p^-) \cdot 90^\circ - (n_z^+ - n_p^+) \cdot 90^\circ$$

Dove:

- n_z^- , n_p^- : numero di zeri e poli nel semipiano sinistro (LHP)
- n_z^+ , n_p^+ : numero di zeri e poli nel semipiano destro (RHP)

Comportamento della fase iniziale e finale

Nel nostro sistema la funzione di trasferimento è:

$$G(s) = \frac{1600(3s - 1)}{(2s + 5)(4s + 1)(15s + 1)}$$

Come abbiamo visto in precedenza, **non ci sono poli nell'origine**. Inoltre, il guadagno statico è negativo:

$$G(0) = \frac{1600 \cdot (-1)}{5 \cdot 1 \cdot 1} = -320$$

Quindi il contributo iniziale alla fase sarà determinato **solo dal segno del guadagno**, il quale comporta uno **slittamento costante di $\pm 180^\circ$** . Di conseguenza:

$$\boxed{\text{Fase iniziale} = 180^\circ}$$

Per valutare la **fase finale**, dobbiamo calcolare il contributo complessivo di zeri e poli:

- Numero di **zeri nel semipiano sinistro** (parte reale negativa):

$$n_z^- = 0$$

- Numero di **zeri nel semipiano destro** (parte reale positiva):

$$n_z^+ = 1 \rightarrow \text{lo zero è in } s = \frac{1}{3} > 0$$

- Numero di **poli nel semipiano sinistro**:

Tutti i poli si trovano a parte reale negativa:

$$n_p^- = 3$$

- Numero di **poli nel semipiano destro**:

$$n_p^+ = 0$$

Ora usiamo la formula per la fase finale:

$$\phi_{\text{finale}} = \arg(k) - n_1 \cdot 90^\circ + (n_z^- - n_p^-) \cdot 90^\circ - (n_z^+ - n_p^+) \cdot 90^\circ$$

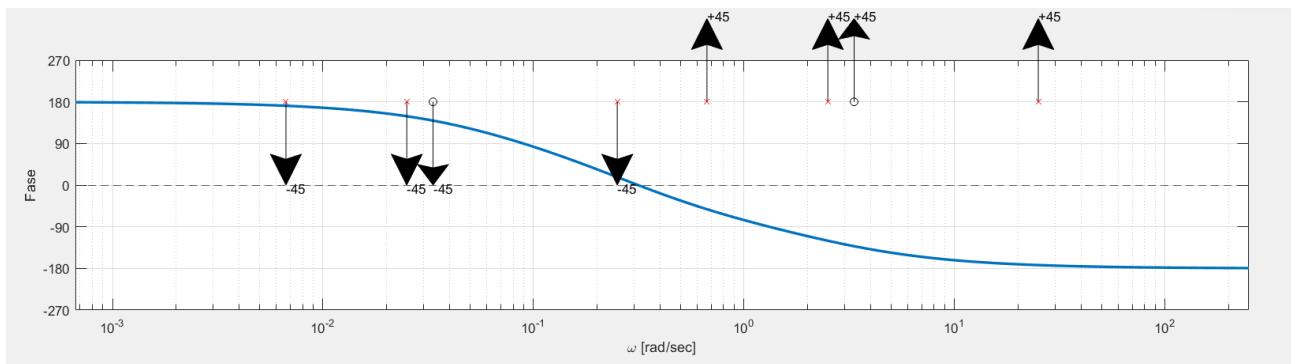
Nel nostro caso:

- $\arg(k) = 180^\circ$ (guadagno negativo)
- Nessun polo nell'origine: $n_1 = 0$
- $n_z^- = 0, n_p^- = 3, n_z^+ = 1, n_p^+ = 0$

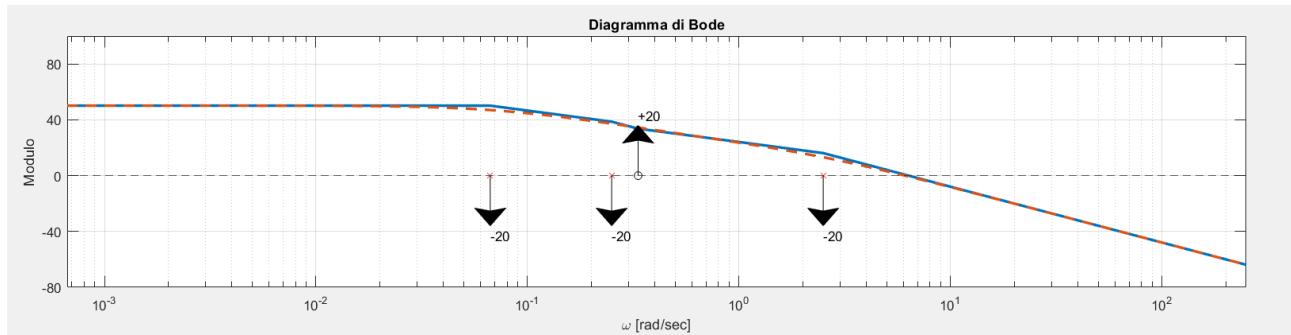
Sostituendo:

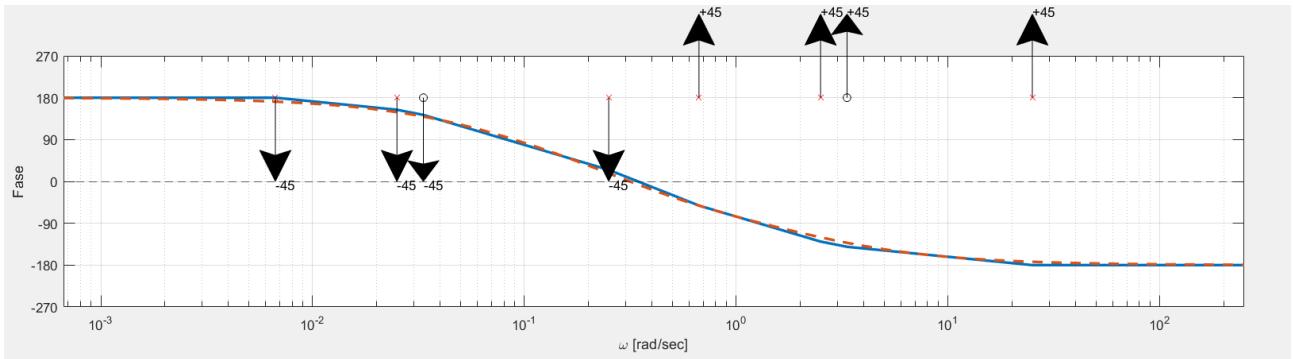
$$\phi_{\text{finale}} = 180 - 0 + (0 - 3) \cdot 90 - (1 - 0) \cdot 90 = 180 - 270 - 90 = \boxed{-180^\circ}$$

Facciamo uso nuovamente del pacchetto `as_bode_completo` per vedere graficamente il diagramma delle fasi



A questo punto possiamo anche rappresentare il diagramma vero sovrapposto a quello **asintotico**:





Esercizio 3

Si consideri il seguente schema di controllo in retroazione algebrica ed unitaria.

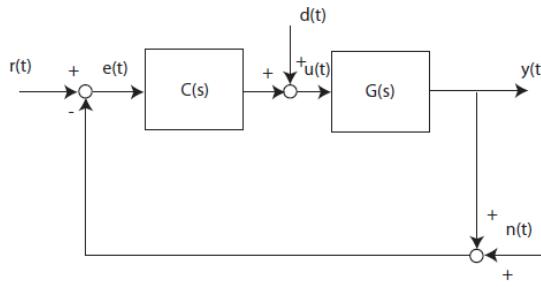


Figure 1:

dove $G(s)$ rappresenta la f.d.t. del processo

$$G(s) = \frac{20(s+2)}{(s+1)^2(s+40)}$$

Si chiede di determinare un regolatore $C(s)$ di struttura semplice che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

1. errore alla rampa non superiore al 20 %;
2. Picco di Risonanza $M_{r,dB} \leq 3$ dB, banda passante $0.2 \leq \omega_{BW} \leq 0.8 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$

L'esercizio 3 è stato svolto interamente utilizzando il software **Matlab**

Cos'è un problema di controllo?

1. Dal punto di vista dell'uscita:

Progettare $C(s)$ in modo tale che, dato un riferimento $R(s)$, l'uscita regolata $Y(s)$ segua quanto più fedelmente possibile il riferimento:

$$Y(s) \approx R(s)$$

2. Dal punto di vista dell'errore:

Progettare $C(s)$ affinché l'**errore di inseguimento** $E(s) = R(s) - Y(s)$ sia il più vicino possibile a zero:

$$E(s) \approx 0$$

Relazioni fondamentali nello schema in retroazione

Nel tipico schema a retroazione unitaria senza considerare disturbi esterni né rumore (cioè ponendo $D(s) = 0, N(s) = 0$), la funzione di trasferimento complessiva a ciclo chiuso è:

$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \cdot R(s)$$

Qui definiamo:

- $L(s) = C(s)G(s)$: la **funzione di anello**, ovvero la risposta del sistema in **ciclo aperto**.
- $F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$: la **sensitività complementare**, ovvero la **funzione di trasferimento a ciclo chiuso**.
- $S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$: la **sensitività**, cioè la funzione che lega il riferimento all'errore.

Usando queste definizioni, possiamo riscrivere l'errore di inseguimento come:

$$E(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \cdot R(s) = S(s) \cdot R(s)$$

E anche l'uscita come:

$$Y(s) = F(s) \cdot R(s)$$

Il ruolo della funzione di anello $L(s)$

La progettazione del regolatore $C(s)$ ha effetto diretto su $L(s)$, che a sua volta determina le prestazioni del sistema. Tuttavia, anche se si progetta agendo su $L(s)$, l'impatto si riflette indirettamente su $F(s)$ e $S(s)$, le funzioni a ciclo chiuso. Perciò è fondamentale capire come la scelta di $C(s)$ influisce sul comportamento complessivo del sistema.

Stabilità Interna del Sistema

Un prerequisito fondamentale per il corretto funzionamento del sistema è che sia **stabile internamente**, cioè:

Per ogni ingresso limitato (riferimento $R(s)$, disturbo $D(s)$, rumore $N(s)$), tutte le variabili di uscita (uscita $Y(s)$, errore $E(s)$, segnale di controllo $U(s)$) devono rimanere limitate.

Poiché questa definizione operativa è poco pratica per la progettazione, si adotta un criterio più gestibile:

Criterio di Stabilità Interna

Un sistema a retroazione è stabile internamente **se e solo se**:

1. È soddisfatto il **criterio di Nyquist** (o un suo equivalente).
2. Non ci sono **cancellazioni nel semipiano destro** (incluso l'asse immaginario) tra i poli di $C(s)$ e $G(s)$.

Iniziamo a risolvere l'esercizio assegnato dalla traccia

Questa è la nostra funzione di trasferimento scritta su **Matlab**

```
>> s = zpk('s');
>> G = (20*(s+2))/(((s+1)^2)*(s+40))
```

$G =$

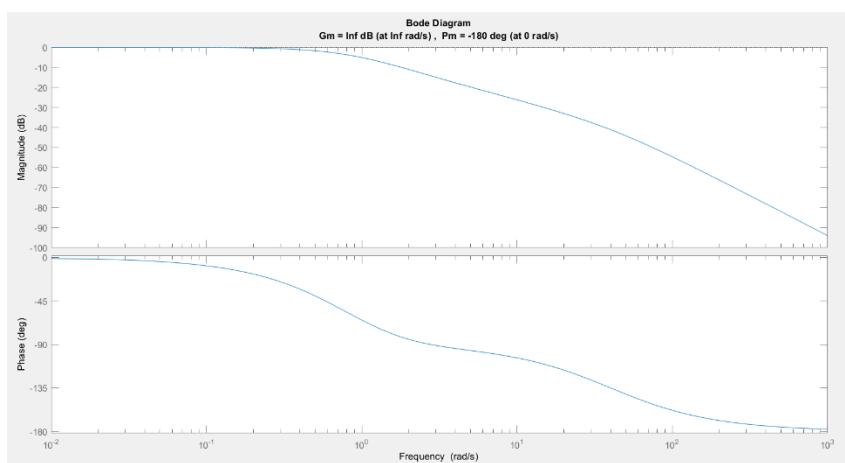
$$\frac{20 (s+2)}{(s+1)^2 (s+40)}$$

Continuous-time zero/pole/gain model.

Abbiamo:

- solo poli LHP $\rightarrow [-40, -1, -1]$ \rightarrow quindi l'impianto è **asintoticamente stabile**
- nessun polo nell'origine, quindi nessuna integrazione naturale
- uno zero LHP $\rightarrow [-2]$
- guadagno positivo $\rightarrow [1]$

Concentriamoci adesso sul Diagramma di Bode dell'impianto $G(j\omega)$



Comportamento qualitativo di Bode

Possiamo ora rappresentare il **diagramma di Bode** di $G(j\omega)$. Dal punto di vista qualitativo, osserviamo che:

- Il **diagramma dei moduli** è **monotono decrescente**, coerente con un impianto stabile e privo di risonanze;
- Il **diagramma delle fasi** mostra un andamento regolare, con variazioni di fase associate alla presenza dei poli e dello zero reali;
- La **frequenza di attraversamento** del modulo unitario (0 dB) esiste ed è **unica**: ciò consente di utilizzare senza ambiguità il **Criterio di Bode** per la verifica della stabilità;
- Il **margine di guadagno** è infinito, ossia la stabilità è sempre mantenuta → non esiste una pulsazione per cui la fase sia -180°

Conclusioni preliminari

Dal momento che:

- **Tutti i poli dell'impianto sono nel semipiano sinistro**
- **Non ci sono poli nell'origine**
- **Non sono presenti poli o zeri nel semipiano destro (RHP)**

possiamo affermare che **non ci saranno cancellazioni RHP indesiderate tra il controllore e l'impianto**. Il sistema quindi è a fase minima e quindi:

Per garantire la **stabilità interna** del sistema a retroazione sarà sufficiente **verificare il Criterio di Bode**, pertanto sfruttiamo la seguente:

Considerando un sistema retroazionato la cui funzione di anello $L(s)$ soddisfa le seguenti condizioni:

1. "È **BIBO stabile**, a meno di eventuali poli nell'origine;"
2. "Il guadagno statico k_b è **positivo**;"
3. "Il **diagramma dei moduli** è **monotono decrescente** e presenta **una sola pulsazione di attraversamento**,"

allora il sistema in retroazione è **BIBO stabile** se il **margine di fase** Φ_m risulta **maggiore di zero**.

1. errore alla rampa non superiore al 20 %

Il primo punto richiede che lo schema di controllo in retroazione abbia un **errore di inseguimento alla rampa unitaria**, o **errore di velocità** $e_{\infty,v}$

inferiore al 20%. Si tratta di un errore percentuale, che possiamo convertire in valore numerico:

$$e_{\infty,v} \leq 20\% \Rightarrow e_{\infty,v} \leq 0.2$$

A questo punto possiamo dire che il problema di cui stiamo parlando è un **problema di precisione statica**, o come si suol dire **problema di asservimento di velocità**. Un problema di questo tipo consiste nello studio, a transitorio esaurito, delle tre uscite di un sistema retroazionato:

1. **uscita regolata**, $Y(s)$
2. **errore di inseguimento**, $E(s)$
3. **segnalettore attuatore**, $U(s)$

supponendo che il sistema sia **internamente stabile**.

Problema di inseguimento alla velocità

Quando si parla di un problema di inseguimento alla velocità, il riferimento considerato è un segnale che cresce linearmente nel tempo, ovvero una **rampa**:

$$r(t) = R \cdot t \cdot u(t) \iff R(s) = \frac{R}{s^2}$$

In questo contesto, il parametro di interesse è l'**errore a regime per un riferimento rampante**, noto anche come **errore di velocità**:

$$e_{\infty,v} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

Questo valore ci guiderà nella progettazione del regolatore, in particolare nella scelta della struttura (guadagno e numero di poli in origine).

Per calcolare $e_{\infty,v}$, utilizziamo un importante risultato dell'analisi nei sistemi dinamici: il **teorema del valore finale**.

Teorema del valore finale

Sia $f(t)$ una funzione appartenente alla classe \mathcal{L} e supponiamo che esista il limite finito:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = f_\infty$$

Allora, se $F(s)$ è la trasformata di Laplace di $f(t)$, si ha:

$$f_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

Applicazione al calcolo dell'errore di velocità

Applicando il teorema del valore finale alla funzione errore $e(t)$, si ottiene:

$$e_{\infty,v} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s)$$

Poiché il riferimento è una rampa $R(s) = \frac{R}{s^2}$, e assumendo retroazione unitaria con funzione d'anello $L(s) = G(s)C(s)$, si ha:

$$E(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \cdot R(s) = \frac{R}{s^2(1 + L(s))}$$

Pertanto:

$$e_{\infty,v} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{R}{s^2(1 + L(s))} = \frac{R}{\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot L(s)}$$

Costante di velocità

Si definisce la **costante di velocità del sistema** come:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot L(s)$$

Quindi, possiamo esprimere l'errore di velocità in forma compatta:

$$e_{\infty,v} = \frac{R}{K_v}$$

Interpretazione della costante di velocità

L'errore in risposta a una rampa è **inversamente proporzionale** alla costante di velocità del sistema. In altre parole:

- Se K_v è grande, l'errore sarà piccolo.
- Se K_v è piccolo, l'errore sarà grande.
- Se $K_v = 0$, l'errore diverge.

Il valore di K_v dipende dal **tipo della funzione di anello** (cioè, dal numero di poli in origine):

- **Tipo 0:** nessun polo in 0 $\rightarrow K_v = 0 \rightarrow e_{\infty,v} = \infty$
- **Tipo 1:** un polo in 0 $\rightarrow K_v$ finito e non nullo $\rightarrow e_{\infty,v} = \frac{R}{K_v}$
- **Tipo ≥ 2 :** almeno due poli in 0 $\rightarrow K_v = \infty \rightarrow e_{\infty,v} = 0$

Nel nostro caso, non avendo poli nell'origine, come abbiamo visto prima, avremo a che fare con un sistema di tipo 0.

In base alle richieste del problema è necessario che la funzione di anello $L(s) = C(s) \cdot G(s)$ sia di tipo 1. Per ottenere ciò, il regolatore $C(s)$ deve introdurre un polo nell'origine

Inoltre, dato che si richiede che l'errore di velocità sia inferiore al 20%, ovvero $e_{\infty,v} \leq 0.2$

non basta inserire un integratore: serve anche un guadagno per regolare l'ampiezza dell'errore entro il limite specificato.

Pertanto, si propone un controllore della forma:

$$C(s) = \frac{k}{s}$$

Con questa scelta, la funzione di anello del sistema retroazionato diventa:

$$L(s) = C(s) \cdot G(s) = \frac{k}{s} \cdot \frac{20(s+2)}{(s+1)^2(s+40)}$$

Ora applichiamo la definizione di errore di velocità:

$$e_{\infty,v} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot L(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \left(s \cdot \frac{k}{s} \cdot \frac{20(s+2)}{(s+1)^2(s+40)} \right)}$$

Osserviamo che $\frac{k}{s} \cdot s = k$, quindi:

$$e_{\infty,v} = \frac{1}{k \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \frac{20(s+2)}{(s+1)^2(s+40)}} = \frac{1}{k \cdot \frac{20 \cdot 2}{1^2 \cdot 40}} = \frac{1}{k}$$

Quindi:

$$e_{\infty,v} = \frac{1}{k}$$

Ora imponiamo il vincolo richiesto dal problema:

$$\frac{1}{k} \leq 0.2 \quad \Rightarrow \quad k \geq 5$$

Possiamo ad esempio scegliere:

$$k = 6$$

e ottenere la funzione di anello corrispondente:

$$L(s) = \frac{6}{s} \cdot \frac{20(s+2)}{(s+1)^2(s+40)}$$

Continuando ad utilizzare Matlab:

```
>> k = 6;
>> C_s = k/s;
```

```
>> L = series(C_s, G)
```

L =

$$\frac{120(s+2)}{s(s+1)^2(s+40)}$$

Continuous-time zero/pole/gain model.

```
>> [km, phim, wp, wt] = margin(L)
```

km =

2.3177

phim =

6.9306

wp =

2.7522

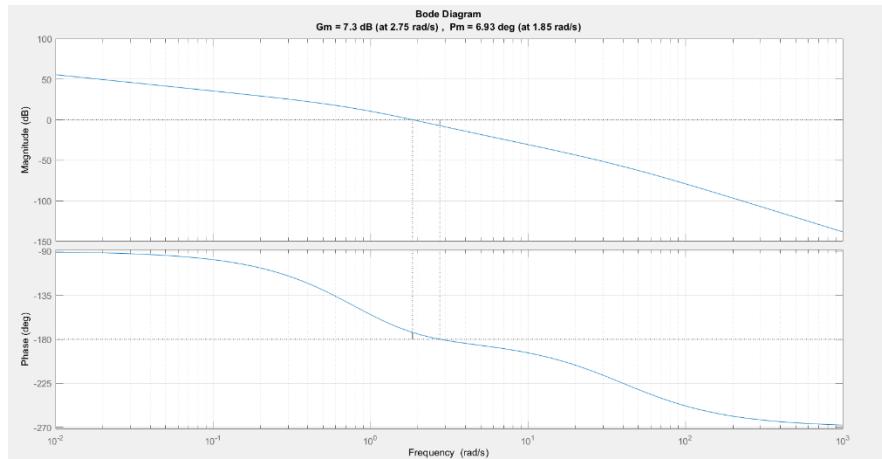
wt =

1.8480

```
>> margin(L)
```

```
>> grid
```

Rappresentiamo quindi il diagramma della funzione di anello con $C(s) = \frac{k}{s}$



Analizziamo il Diagramma di Bode e vediamo che:

- Il diagramma dei moduli è monotono decrescente
- La pulsazione di attraversamento è unica (sarebbe $\omega_T = 1.85$)

Inoltre per quanto riguarda la funzione di anello

$$L =$$

$$\frac{120 (s+2)}{s (s+1)^2 (s+40)}$$

avremo:

- guadagno positivo
- solo poli a parte reale strettamente negativa e un polo nell'origine.
- uno zero a parte reale strettamente negativa

In conclusione possiamo dire che la funzione di anello è a fase minima e rispetta i requisiti del Criterio di Bode. E' possibile pertanto applicare il Criterio di Bode per la verifica della stabilità del sistema retroazionato:

siccome il margine di fase è positivo ($\Phi M = 6.93$) possiamo affermare che è verificata la stabilità in retroazione.

2. Picco di Risonanza $M_{r,\text{dB}} \leq 3 \text{ dB}$, banda passante $0.2 \leq \omega_{BW} \leq 0.8 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$

In questa seconda parte del progetto, ci concentriamo sulla **regolazione della risposta in frequenza del sistema**, agendo principalmente sulla **funzione di anello** nella **zona di media frequenza**. L'obiettivo è quello di **rispettare le specifiche dinamiche** imposte, senza compromettere le caratteristiche statiche già garantite nel punto precedente.

L'idea è quella di **integrare al regolatore esistente**, che si occupa dell'errore a regime, **alcuni blocchi aggiuntivi** progettati appositamente per modellare il comportamento dinamico del sistema. Possiamo pensare al controllore complessivo come a un prodotto del tipo:

$$C(s) = \frac{K}{s^r} \cdot C_1(s) \cdot C_2(s) \cdots C_l(s)$$

Dove:

- Il termine $\frac{K}{s^r}$ serve per soddisfare i **vincoli statici**.
- I blocchi $C_1(s), C_2(s), \dots$ sono chiamati **reti correttive**, e hanno il compito di **agire selettivamente nella zona centrale dello spettro**, cioè nella **media frequenza**, per intervenire su parametri come **il margine di fase e la banda passante**.

Il principio è quello di **intervenire "ex-ante"**, cioè **prima di chiudere l'anello**, progettando queste reti correttive in modo da influenzare indirettamente:

- Il **picco di risonanza** M_r , che è correlato al margine di fase.
- La **banda passante** ω_{BW} , legata alla pulsazione di attraversamento ω_c .

Per progettare correttamente il sistema, possiamo usare le seguenti relazioni **approssimate**, che sono valide per sistemi ben modellati secondo il criterio di Bode:

$$\begin{cases} \varphi_M \approx 100 \cdot \delta \\ \omega_c \lesssim \omega_{BW} \end{cases}$$

Dove:

- φ_M è il **margine di fase**.
- δ è l'**ammortizzazione** (smorzamento relativo).
- ω_c è la **frequenza di attraversamento** del guadagno unitario.
- ω_{BW} è la **banda passante**.

Una volta progettati i correttori (ovvero le reti che modificano l'andamento di Bode), potremo chiudere l'anello e verificare che i valori di M_r e ω_{BW} siano compatibili con le specifiche date dal problema.

Il picco di risonanza M_r è il massimo assoluto del diagramma dei moduli della risposta in frequenza. Affinché $M_r \leq 3\text{dB}$, lo smorzamento δ deve essere maggiore o uguale al valore critico, calcolabile con la funzione `smorz_Mr` del package Reti correttive fornita dal docente.

```
>> delta_cr = smorz_Mr(3)
```

```
delta_cr =
```

```
0.3832
```

Dal calcolo effettuato in precedenza risulta che lo **smorzamento critico** richiesto è:

$$\delta_{cr} = 0,3832$$

Da quanto visto nelle relazioni teoriche, possiamo approssimare il **margine di fase** come:

$$\varphi_M \approx 100 \cdot \delta_{cr} \approx 38,3^\circ$$

Approssimando, possiamo dire che per soddisfare le specifiche richieste, il sistema dovrà avere un **margine di fase minimo di circa 39°**.

Inoltre, ricordando che la **banda passante** ω_{BW} rappresenta l'intervallo di frequenze in cui il sistema riesce a rispondere con distorsioni accettabili (tipicamente entro i -3 dB), possiamo usare la stima:

$$\omega_{BW} \geq \omega_c$$

dove ω_c è la **frequenza di attraversamento** della funzione di anello, ovvero il punto in cui il modulo è unitario (0 dB). Questa rappresenta un **minorante** per la banda passante.

Infine, poiché all'aumentare del **picco di risonanza** M_r lo smorzamento δ tende a diminuire (sono inversamente proporzionali), per mantenere $M_r \leq 3\text{dB}$, è necessario garantire un **margine di fase di almeno 39°**.

In conclusione, le specifiche dinamiche impongono che vengano soddisfatte le seguenti condizioni sulla funzione di anello:

$$\varphi_M \geq 39^\circ \quad \text{e} \quad 0,2 \leq \omega_c \leq 0,8 \text{ rad/s}$$

Sceglieremo adesso il margine di fase e la frequenza di attraversamento:

```
>> wc_des = 0.4
```

```
wc_des =
```

```
0.4000
```

```
>> phiM_des = 40
```

```
phiM_des =
```

In questo modo:

- $\omega_c^{\text{des}} = 0,4 \text{ rad/s}$ è una scelta ragionevole, ben dentro l'intervallo specificato,
- $\varphi_M^{\text{des}} = 40^\circ$ soddisfa il vincolo minimo di 39° legato allo smorzamento calcolato in precedenza.

Possiamo a questo punto utilizzare, per semplificarci il lavoro, una funzione Matlab, che, assegnata la funzione di anello, la pulsazione di attraversamento di progetto ed il margine di fase di progetto ci dice direttamente che tipo di rete correttiva serve e fornisce il guadagno (amplificazione o attenuazione) e lo sfasamento che la rete correttiva deve fornire in corrispondenza della pulsazione di attraversamento di progetto.

```
>> [m, theta] = tiporete(L, wc_des, phiM_des)
Ti serve una rete attenuatrice
```

m =

0.0758

theta =

-5

Nel nostro caso, abbiamo bisogno, da quanto risulta dalla funzione Matlab, **di una rete attenuatrice**

Una **rete attenuatrice** è descritta dalla seguente funzione di trasferimento:

$$C_{\text{lag}}(s) = \frac{1 + s \tau_z}{1 + s \tau_p} = \frac{1 + s \alpha T}{1 + s T}$$

in cui $\tau_p = T > 0$ è la costante di tempo del polo e $\tau_z = \alpha T > 0$ è la costante di tempo dello zero. Il parametro α , pari al rapporto tra la costante di tempo dello zero e la costante di tempo del polo, termine adimensionale, soddisfa la seguente condizione

$$0 < \alpha < 1$$

Quindi, riassumendo, la rete attenuatrice è descritta da una funzione di trasferimento impropria che presenta uno zero ed un polo nelle seguenti locazioni

$$z = -\frac{1}{\tau_z} = -\frac{1}{\alpha T}, \quad p = -\frac{1}{\tau_p} = -\frac{1}{T}$$

```

>> [alpha, T] = attenuatrice(wc_des, m, theta)

alpha =
0.0755

```

T =

349.6690

Otteniamo dunque la seguente rete correttrice:

```

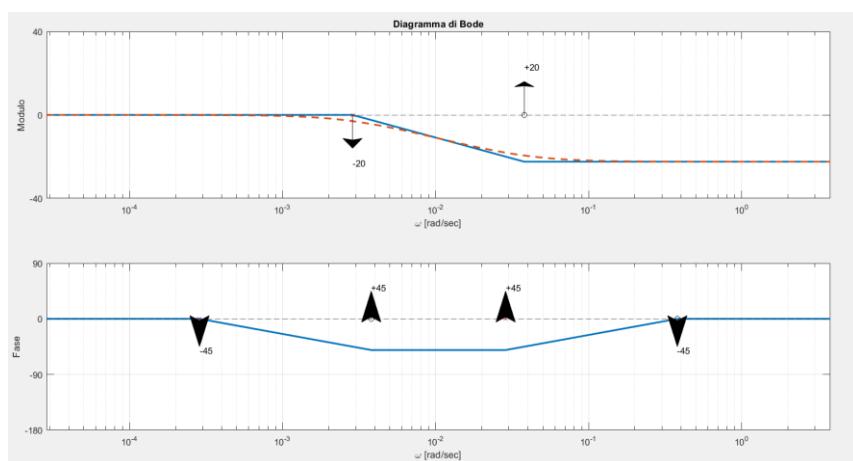
>> C_lag = (1+s*alpha*T) / (1+s*T)

C_lag =
0.0755 (s+0.03788)
-----
(s+0.00286)

```

Continuous-time zero/pole/gain model.

Graficamente avremo una forma di questo tipo:



Costruiamo ora la funzione complessiva e vediamo se tutto è rispettato:

```
>> L_new = series(L,C_lag)

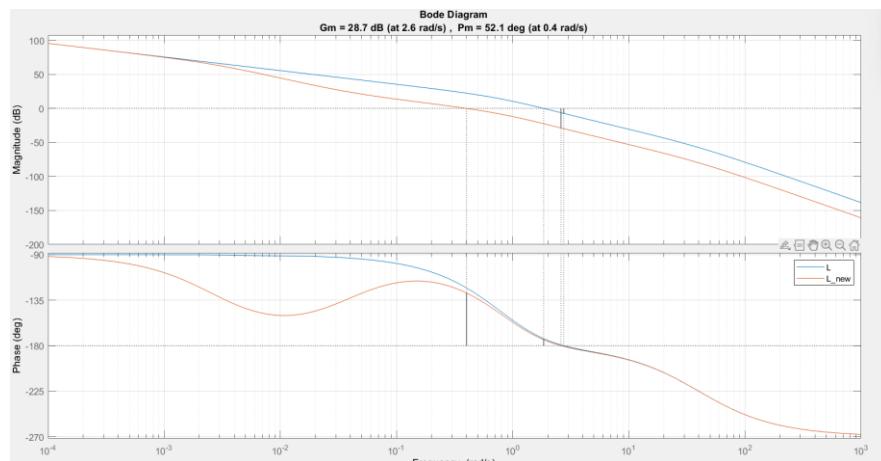
L_new =


$$\frac{9.0599 (s+0.03788) (s+2)}{s (s+0.00286) (s+1)^2 (s+40)}$$

```

Continuous-time zero/pole/gain model.

```
>> margin(L)
>> hold on
>> margin(L_new)
>> legend;
>> grid;
>> F = feedback(L_new, 1)
```



Possiamo notare dunque che sia la pulsazione di attraversamento (0.4 rad/s) e sia il margine di fase (52,1 gradi) rientrano nei valori che ci eravamo prefissati.

Chiudiamo ora l'anello e facciamo una verifica POST-ANTE, per controllare che anche il picco di risonanza e la banda passante rientrino nei valori richiesti

```

>> F = feedback(L_new, 1)

F =

```

$$\frac{9.0599 (s+2) (s+0.03788)}{(s+40.01) (s+1.337) (s+0.04114) (s^2 + 0.6195s + 0.312)}$$

Continuous-time zero/pole/gain model.

```

>> bandwidth(F)

ans =

```

$$0.6828$$

```

>> mag2db(getPeakGain(F))

ans =

```

$$1.2562$$

Pertanto il picco di risonanza trovato risulta essere:

$$1,25 \text{ dB} \leq 3 \text{ dB}$$

E la banda passante:

$$0,2 \leq 0,68 \leq 0,8 \text{ rad/s}$$

Proprio come noi volevamo ottenere

Per concludere, possiamo fare un'ulteriore controllo, considerando in questo caso la funzione F_{med} , la quale non è altro che l'approssimazione della funzione F, in cui teniamo inconsiderazione solo il trinomio dominante, che contiene i poli più vicini all'asse

immaginario. Questa pertanto risulta essere l'approssimazione in media frequenza del sistema

```
>> F_med = (0.312) / (s^2+0.6195*s+0.312)
```

```
F_med =
```

$$\frac{0.312}{(s^2 + 0.6195s + 0.312)}$$

Continuous-time zero/pole/gain model.

```
>> bodemag(F)
>> hold on
>> bodemag(F_med)
>> legend;
>> grid;
>> bandwidth(F_med)
```

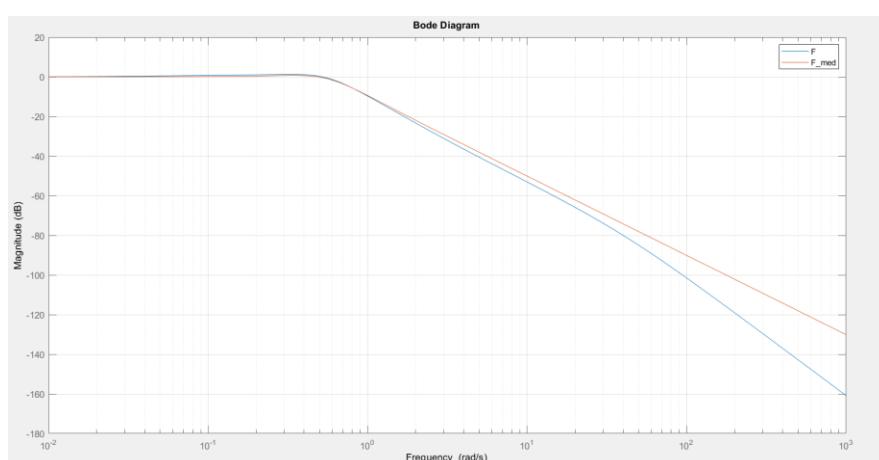
```
ans =
```

```
0.6736
```

```
>> mag2db(getPeakGain(F_med))
```

```
ans =
```

```
0.6963
```



Anche in questo caso notiamo come l'approssimazione effettuata continua a rispettare i criteri richiesti dal progetto

Conclusioni

Nel progetto sono state affrontate tre fasi principali. In primo luogo, è stato analizzato un sistema LTI a partire dalla sua risposta all'impulso, ricavandone la funzione di trasferimento e studiandone il comportamento rispetto a diversi ingressi. Successivamente, è stato esaminato il comportamento in frequenza di un sistema tramite il diagramma di Bode, utile per comprendere la dinamica del processo. Infine, è stato progettato un regolatore semplice che, grazie all'uso di una rete attenuatrice, ha permesso di soddisfare le specifiche imposte su errore alla rampa, picco di risonanza e banda passante, garantendo prestazioni adeguate e stabilità del sistema in retroazione.