

OITAVA EDIÇÃO

# *Sistemas de Controle Modernos*

**RICHARD C. DORF**

*University of California, Davis*

**ROBERT H. BISHOP**

*The University of Texas at Austin*

Tradução

**Bernardo Severo da Silva Filho**

*Engenheiro Eletricista pelo Instituto Militar de Engenharia  
MSc pela École Nationale Supérieure de l'Aéronautique  
Coordenador do Curso de Pós-Graduação "Lato Sensu" em  
Engenharia Mecatrônica da Faculdade de Engenharia  
da Universidade do Estado do Rio de Janeiro*

**LTC**  
EDITORAS

Translation copyright © 1998 by Addison Wesley Longman, Inc.  
Original English language title: *Modern Control Systems*  
ISBN 0-201-30864-9  
Copyright © 1998. All Rights Reserved  
Published by arrangement with the original publisher,  
ADDISON WESLEY LONGMAN, a Pearson Education company.

Capa: Yvo Riezebos

Direitos exclusivos para a língua portuguesa  
Copyright © 2001 by  
**LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.**  
Travessa do Ouvidor, 11  
Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040  
Tel.: 21-221-9621  
Fax: 21-221-3202

Reservados todos os direitos. É proibida a duplicação ou  
reprodução deste volume, no todo ou em parte,  
sob quaisquer formas ou por quaisquer meios  
(eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia ou outros),  
sem permissão expressa da Editora.

*Dos melhores professores, quando eles se vão,  
seus alunos dirão: fizemos tudo sozinhos.*

Dedicado a:

***Lynda Ferrera Bishop***  
e  
***Joy MacDonald Dorf***

Em grato reconhecimento.

# *Sumário*

## **CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DE CONTROLE 1**

<b>1.1</b>	Introdução	1
<b>1.2</b>	A História do Controle Automático	3
<b>1.3</b>	Dois Exemplos do Uso de Retroação	5
<b>1.4</b>	A Prática da Engenharia de Controle	6
<b>1.5</b>	Exemplos de Sistemas de Controle Modernos	7
<b>1.6</b>	Montagem Automática e Robôs	12
<b>1.7</b>	A Evolução Futura dos Sistemas de Controle	13
<b>1.8</b>	Projeto de Engenharia	14
<b>1.9</b>	Projeto de Sistemas de Controle	15
<b>1.10</b>	Exemplo de Projeto: Controle de Velocidade de Mesa Rotativa	16
<b>1.11</b>	Exemplo de Projeto: Sistema de Controle de Aplicação de Insulina	17
<b>1.12</b>	Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura do Acionador de Disco	18
Exercícios		
	Problemas	20
	Problemas de Projeto	23
	Termos e Conceitos	24

## **CAPÍTULO 2 MODELOS MATEMÁTICOS DE SISTEMAS 25**

<b>2.1</b>	Introdução	25
<b>2.2</b>	Equações Diferenciais de Sistemas Físicos	26
<b>2.3</b>	Aproximações Lineares de Sistemas Físicos	30
<b>2.4</b>	Transformada de Laplace	32
<b>2.5</b>	Função de Transferência de Sistemas Lineares	37
<b>2.6</b>	Modelos em Diagramas de Blocos	48
<b>2.7</b>	Modelos em Diagramas de Fluxo de Sinal	52
<b>2.8</b>	Análise Computacional de Sistemas de Controle	56
<b>2.9</b>	Exemplos de Projeto	57
<b>2.10</b>	Simulação de Sistemas Usando o MATLAB	63
<b>2.11</b>	Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco	73
<b>2.12</b>	Sumário	75
Exercícios		
	Problemas	80
	Problemas Avançados	90
	Problemas de Projeto	90
	Problemas com MATLAB	91
	Termos e Conceitos	92

## **CAPÍTULO 3 MODELOS EM VARIÁVEIS DE ESTADO 93**

<b>3.1</b>	Introdução	93
<b>3.2</b>	Variáveis de Estado de Sistemas Dinâmicos	94
<b>3.3</b>	Equação Diferencial de Estado	96
<b>3.4</b>	Modelos de Estado em Diagramas de Fluxo de Sinal	98
<b>3.5</b>	Modelos de Estado em Diagramas de Fluxo de Sinal Alternativos	103
<b>3.6</b>	Função de Transferência a Partir das Equações de Estado	107

<b>3.7</b>	Resposta no Domínio do Tempo e Matriz de Transição de Estados	108
<b>3.8</b>	Discretização da Resposta no Domínio do Tempo	111
<b>3.9</b>	Equações em Variáveis de Estado de uma Espaçonave	115
<b>3.10</b>	Exemplo de Projeto: Acionador de Correia para Impressora	118
<b>3.11</b>	Análise de Modelos com Variáveis de Estado Usando o MATLAB	121
<b>3.12</b>	Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura do Acionador de Disco	124
<b>3.13</b>	Sumário	127
	Exercícios	127
	Problemas	129
	Problemas Avançados	135
	Problemas de Projeto	136
	Problemas com MATLAB	137
	Termos e Conceitos	138

#### **CAPÍTULO 4 CARACTERÍSTICAS DE SISTEMA DE CONTROLE COM RETROAÇÃO 139**

<b>4.1</b>	Sistemas de Controle a Malha Aberta e a Malha Fechada	139
<b>4.2</b>	Sensibilidade de Sistemas de Controle a Variações de Parâmetros	141
<b>4.3</b>	Controle da Resposta Transitória de Sistemas de Controle	144
<b>4.4</b>	Sinais de Perturbação em um Sistema de Controle com Retroação	146
<b>4.5</b>	Erro de Estado Estacionário	150
<b>4.6</b>	O Custo da Retroação	152
<b>4.7</b>	Exemplo de Projeto: Máquinas Perfuratrizes do Canal da Mancha	153
<b>4.8</b>	Exemplo de Projeto: Véículo Explorador de Marte	155
<b>4.9</b>	Características de Sistema de Controle com o MATLAB	157
<b>4.10</b>	Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco	162
<b>4.11</b>	Sumário	163
	Exercícios	166
	Problemas	167
	Problemas Avançados	173
	Problemas de Projeto	176
	Problemas com MATLAB	178
	Termos e Conceitos	179

#### **CAPÍTULO 5 O DESEMPENHO DE SISTEMAS DE CONTROLE COM RETROAÇÃO 180**

<b>5.1</b>	Introdução	180
<b>5.2</b>	Sinais de Entrada para Teste	181
<b>5.3</b>	Desempenho de um Sistema de Segunda Ordem	183
<b>5.4</b>	Efeitos de um Terceiro Pólo e de um Zero na Resposta de um Sistema de Segunda Ordem	188
<b>5.5</b>	Estimativa da Relação de Amortecimento	192
<b>5.6</b>	Localização das Raízes no Plano $s$ e a Resposta Transitória	192
<b>5.7</b>	Erro de Estado Estacionário de Sistemas de Controle com Retroação	194
<b>5.8</b>	Erro de Estado Estacionário de Sistemas com Retroação Não-Unitária	197
<b>5.9</b>	Índices de Desempenho	198
<b>5.10</b>	A Simplificação de Sistemas Lineares	206
<b>5.11</b>	Exemplo de Projeto: Controle de Posicionamento do Telescópio Hubble	208
<b>5.12</b>	Desempenho do Sistema Usando o MATLAB	210
<b>5.13</b>	Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco	214
<b>5.14</b>	Sumário	216
	Exercícios	218
	Problemas	220
	Problemas Avançados	224
	Problemas de Projeto	225
	Problemas com MATLAB	227
	Termos e Conceitos	228

#### **CAPÍTULO 6 A ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES COM RETROAÇÃO 229**

<b>6.1</b>	O Conceito de Estabilidade	229
<b>6.2</b>	O Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz	232

<b>6.3</b>	A Estabilidade Relativa de Sistemas de Controle com Retroação	239
<b>6.4</b>	A Estabilidade de Sistemas com Variáveis de Estado	240
<b>6.5</b>	Exemplo de Projeto: Controle de Manobra de Veículo sobre Lagartas	242
<b>6.6</b>	Estabilidade de Sistema Usando o MATLAB	244
<b>6.7</b>	Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco	250
<b>6.8</b>	Sumário	252
Exercícios 253		
Problemas 254		
Problemas Avançados 257		
Problemas de Projeto 258		
Problemas com MATLAB 260		
Termos e Conceitos 261		
<b>CAPÍTULO 7 O MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES 262</b>		
<b>7.1</b>	Introdução	262
<b>7.2</b>	O Conceito de Lugar das Raízes	263
<b>7.3</b>	O Procedimento do Lugar das Raízes	266
<b>7.4</b>	Um Exemplo de Análise e Projeto de Sistemas de Controle Utilizando o Método do Lugar das Raízes	277
<b>7.5</b>	Projeto de Parâmetro pelo Método do Lugar das Raízes	279
<b>7.6</b>	Sensibilidade e Lugar das Raízes	283
<b>7.7</b>	Controladores de Três Termos (PID)	289
<b>7.8</b>	Exemplo de Projeto: Sistema de Controle de um Manipulador de Laser	290
<b>7.9</b>	Projeto do Sistema de Controle de um Robô	292
<b>7.10</b>	Lugar das Raízes Usando o MATLAB	294
<b>7.11</b>	Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco	298
<b>7.12</b>	Sumário	299
Exercícios 303		
Problemas 305		
Problemas Avançados 313		
Problemas de Projeto 314		
Problemas com MATLAB 320		
Termos e Conceitos 321		
<b>CAPÍTULO 8 MÉTODOS DE RESPOSTA DE FREQÜÊNCIA 322</b>		
<b>8.1</b>	Introdução	322
<b>8.2</b>	Gráficos de Resposta de Freqüência	324
<b>8.3</b>	Um Exemplo de Desenho do Diagrama de Bode	338
<b>8.4</b>	Medidas de Resposta de Freqüência	340
<b>8.5</b>	Especificações de Desempenho no Domínio de Freqüência	341
<b>8.6</b>	Diagramas Logarítmicos de Magnitude e de Fase	344
<b>8.7</b>	Exemplo de Projeto: Sistema de Controle para Máquina de Gravação	345
<b>8.8</b>	Métodos de Resposta de Freqüência Usando MATLAB	347
<b>8.9</b>	Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco	352
<b>8.10</b>	Sumário	353
Exercícios 356		
Problemas 358		
Problemas Avançados 364		
Problemas de Projeto 365		
Problemas com MATLAB 367		
Termos e Conceitos 369		
<b>CAPÍTULO 9 ESTABILIDADE NO DOMÍNIO DE FREQÜÊNCIA 370</b>		
<b>9.1</b>	Introdução	370
<b>9.2</b>	Mapeamento de Contornos no Plano $s$	371
<b>9.3</b>	Critério de Nyquist	375
<b>9.4</b>	Estabilidade Relativa e Critério de Nyquist	383
<b>9.5</b>	Critérios de Desempenho no Domínio do Tempo Especificados no Domínio de Freqüência	388
<b>9.6</b>	Banda Passante de Sistema	394
<b>9.7</b>	Estabilidade de Sistemas de Controle com Retardos	395

<b>9.8</b>	Exemplo de Projeto: Veículo de Reconhecimento Controlado Remotamente	398
<b>9.9</b>	Controladores PID no Domínio de Freqüência	401
<b>9.10</b>	Estabilidade no Domínio de Freqüência Usando MATLAB	402
<b>9.11</b>	Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco	407
<b>9.12</b>	Sumário	409
	Exercícios	416
	Problemas	420
	Problemas Avançados	428
	Problemas de Projeto	430
	Problemas com MATLAB	434
	Termos e Conceitos	435

## CAPÍTULO 10 O PROJETO DE SISTEMAS DE CONTROLE COM RETROAÇÃO 436

<b>10.1</b>	Introdução	436
<b>10.2</b>	Abordagens ao Projeto de Sistemas	438
<b>10.3</b>	Estruturas de Compensação em Cascata	439
<b>10.4</b>	Projeto de Avanço de Fase Usando Diagramas de Bode	442
<b>10.5</b>	Projeto de Avanço de Fase Usando o Lugar das Raízes	447
<b>10.6</b>	Projeto de Sistemas Usando Estruturas de Integração	452
<b>10.7</b>	Projeto de Atraso de Fase Usando o Lugar das Raízes	454
<b>10.8</b>	Projeto de Atraso de Fase Usando Diagramas de Bode	457
<b>10.9</b>	Projeto de Sistemas com Diagramas de Bode Usando Métodos Analíticos e Computacionais	460
<b>10.10</b>	Sistemas com Filtragem Prévia	461
<b>10.11</b>	Projeto para Resposta Rápida sem Oscilação	464
<b>10.12</b>	Exemplo de Projeto: Sistema de Controle de Enrolamento de Rotores	465
<b>10.13</b>	Exemplo de Projeto: Plotadora X-Y	468
<b>10.14</b>	Projeto de Sistemas Usando MATLAB	470
<b>10.15</b>	Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco	475
<b>10.16</b>	Sumário	477
	Exercícios	478
	Problemas	480
	Problemas Avançados	489
	Problemas de Projeto	491
	Problemas com MATLAB	494
	Termos e Conceitos	495

## CAPÍTULO 11 O PROJETO DE SISTEMAS COM RETROAÇÃO COM VARIÁVEIS DE ESTADO 497

<b>11.1</b>	Introdução	497
<b>11.2</b>	Controlabilidade	498
<b>11.3</b>	Observabilidade	499
<b>11.4</b>	Sistemas de Controle Ótimo	500
<b>11.5</b>	Alocação de Pólos Usando Variáveis de Estado	508
<b>11.6</b>	Fórmula de Ackermann	512
<b>11.7</b>	Limitações da Retroação com Variáveis de Estado	513
<b>11.8</b>	Projeto com Modelo Interno	513
<b>11.9</b>	Exemplo de Projeto: Sistema Automático de Teste	516
<b>11.10</b>	Projeto com Variáveis de Estado Usando MATLAB	518
<b>11.11</b>	Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco	522
<b>11.12</b>	Sumário	523
	Exercícios	523
	Problemas	523
	Problemas Avançados	526
	Problemas de Projeto	528
	Problemas com MATLAB	530
	Termos e Conceitos	532

## CAPÍTULO 12 SISTEMAS DE CONTROLE ROBUSTOS 533

<b>12.1</b>	Introdução	533
<b>12.2</b>	Sistemas de Controle Robustos e Sensibilidade de Sistema	534

<b>12.3</b>	Análise de Robustez	537
<b>12.4</b>	Sistemas com Parâmetros Imprecisos	539
<b>12.5</b>	O Projeto de Sistemas de Controle Robustos	540
<b>12.6</b>	Controladores PID	545
<b>12.7</b>	O Projeto de Sistemas Robustos Controlados com PID	546
<b>12.8</b>	Exemplo de Projeto: Piloto Automático de Avião	549
<b>12.9</b>	Projeto de um Sistema de Controle para Telescópio Espacial	550
<b>12.10</b>	Projeto de um Acionador de Bobinadeira Robusto	552
<b>12.11</b>	Sistema de Controle com Modelo Interno Robusto	554
<b>12.12</b>	Projeto de um Torno Ultrapreciso com Diamante	556
<b>12.13</b>	Sistema com Retroação Pseudoquantitativa	558
<b>12.14</b>	Sistemas de Controle Robustos Usando MATLAB	560
<b>12.15</b>	Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco	563
<b>12.16</b>	Sumário	565
Exercícios 566		
Problemas 567		
Problemas Avançados 572		
Problemas de Projeto 575		
Problemas com MATLAB 581		
Termos e Conceitos 582		
<b>CAPÍTULO 13 SISTEMAS DE CONTROLE DIGITAL 583</b>		
<b>13.1</b>	Introdução	583
<b>13.2</b>	Aplicações de Sistemas de Controle com Computador Digital	584
<b>13.3</b>	Sistemas com Dados Amostrados	585
<b>13.4</b>	Transformada $z$	588
<b>13.5</b>	Sistemas com Retroação a Malha Fechada com Dados Amostrados	591
<b>13.6</b>	Análise de Estabilidade no Plano $z$	593
<b>13.7</b>	Desempenho de um Sistema de Segunda Ordem com Dados Amostrados	594
<b>13.8</b>	Sistemas a Malha Fechada com Compensação Digital por Computador	595
<b>13.9</b>	Projeto de um Sistema de Controle do Movimento de uma Mesa Transportadora	597
<b>13.10</b>	O Lugar das Raízes de Sistemas com Controle Digital	599
<b>13.11</b>	Implementação de Controladores Digitais	602
<b>13.12</b>	Sistemas de Controle Digital Usando MATLAB	603
<b>13.13</b>	Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco	607
<b>13.14</b>	Sumário	608
Exercícios 608		
Problemas 609		
Problemas Avançados 611		
Problemas de Projeto 612		
Problemas com MATLAB 613		
Termos e Conceitos 614		
<b>APÊNDICE A PARES DE TRANSFORMADA DE LAPLACE 617</b>		
<b>APÊNDICE B SÍMBOLOS, UNIDADES E FATORES DE CONVERSÃO 619</b>		
<b>APÊNDICE C UMA INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA MATRICIAL 621</b>		
<b>APÊNDICE D CONVERSÃO EM DECIBÉIS 628</b>		
<b>APÊNDICE E NÚMEROS COMPLEXOS 629</b>		
<b>APÊNDICE F FUNDAMENTOS DO MATLAB 632</b>		
<b>APÊNDICE G PARES DE TRANSFORMADA <math>z</math> 645</b>		
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 646</b>		
<b>ÍNDICE 656</b>		

# Exemplos de Projeto e Problemas de Projeto (PP)

---

<b>CAPÍTULO 1</b>	<b>Página</b>	<b>CAPÍTULO 6</b>	
Exemplo Controle de Velocidade de Mesa Rotativa	16	Exemplo Controle de Manobra de Veículo sobre Lagartas	242
Exemplo Sistema de Controle de Aplicação de Insulina	17	Exemplo Sistema de Leitura de Acionador de Disco	250
Exemplo Sistema de Leitura do Acionador de Disco	18	PPC6.1 Controle de Motor de Acionamento por Tração	258
PPC1.1 Controle de Motor de Acionamento	23	PP6.1 Controle de Ignição para Automóveis	258
PP1.1 Controle de Ruído em Automóveis	23	PP6.2 Controle de Veículo Guiado em Marte	258
PP1.2 Controle de Cruzeiro para Automóveis	23	PP6.3 Seleção de Parâmetros	258
PP1.3 Automação de Fazenda Produtora de Leite	23	PP6.4 Controle de Altitude do Ônibus Espacial	259
PP1.4 Controle de Solda	23	PP6.5 Sistema de Controle de Tráfego	259
PP1.5 Controle de Tração Veicular	24	PP6.6 Motocicleta Guiada por Robô	259
PP1.6 Redução de Vibrações no Telescópio Hubble	24		
<b>CAPÍTULO 2</b>		<b>CAPÍTULO 7</b>	
Exemplo Controle de um Motor Elétrico de Tração	57	Exemplo Sistema de Controle de um Manipulador de Laser	290
Exemplo Acelerômetro Mecânico	59	Exemplo Sistema de Controle de um Robô	292
Exemplo Projeto de um Robô de Laboratório	60	Exemplo Sistema de Leitura de Acionador de Disco	298
Exemplo Projeto de um Filtro Passa-Baixas	61	PPC7.1 Controle de Motor de Acionamento por Tração	314
Exemplo Sistema de Leitura de Acionador de Disco	73	PP7.1 Controle da Velocidade de Arfagem de um Avião	314
PPC2.1 Controle de Motor de Acionamento	90	PP7.2 Controle de Velocidade de um Helicóptero com	
PP2.1 Escolha de Funções de Transferência	90	Dois Rotores	315
PP2.2 Controle de Transmissão por TV	91	PP7.3 Veículo Explorador de Marte	315
PP2.3 Determinação de Função de Transferência	91	PP7.4 Máquina de Solda Controlada Remotamente	315
PP2.4 Derivador com Amplificadores Operacionais	91	PP7.5 Avião a Jato de Alto Desempenho	316
		PP7.6 Controle Automático do Movimento de Caminhão	316
		PP7.7 Sistema de Controle com Amplificadores	
		Operacionais	316
		PP7.8 Atuador da Junta do Cotovelo de um Braço	
		Robótico	316
<b>CAPÍTULO 3</b>		PP7.9 Automóvel com Direção nas Quatro Rodas	317
Exemplo Acionador de Correia para Impressora	118	PP7.10 Controle de Pilotagem de um Guindaste	317
Exemplo Sistema de Leitura de Acionador do Disco	124	PP7.11 Veículo para Exploração Planetária	317
PPC3.1 Controle do Motor de Acionamento por Tração	136	PP7.12 Controle de Distância entre Automóveis	317
PP3.1 Amortecedor para Motocicleta	136	PP7.13 Piloto Automático do Ângulo de Rolamento	
PP3.2 Equação Diferencial Matricial Diagonal	136	de Aeronaves	318
PP3.3 Sistema de Parada de Avião	136		
PP3.4 Sistema de Salto Livre	137		
<b>CAPÍTULO 4</b>		<b>CAPÍTULO 8</b>	
Exemplo Máquinas Perfuratrizes do Canal da Mancha	153	Exemplo Sistema de Controle para Máquina de Gravação	345
Exemplo Veículo Explorador de Marte	155	Exemplo Sistema de Leitura de Acionador de Disco	352
Exemplo Sistema de Leitura de Acionador de Disco	162	PPC8.1 Controle de Motor de Acionamento por Tração	365
PPC4.1 Controle de Motor de Acionamento por Tração	176	PP8.1 Sistema de Direção de Automóvel	365
PP4.1 Sistema de Controle de Velocidade	176	PP8.2 O Ambulante: Veículo Explorador Planetário	
PP4.2 Controle do Ângulo de Rolamento de um Avião	176	Autônomo	366
PP4.3 Sistema de Controle de Velocidade	177	PP8.3 Sistema de Controle de Posição de Frascos	366
PP4.4 Cirurgia de Olhos com Uso de Laser	177	PP8.4 Sistema Automático de Controle de Anestesia	367
PP4.5 Circuito Gerador de Pulses com Amplificadores			
Operacionais	178		
<b>CAPÍTULO 5</b>		<b>CAPÍTULO 9</b>	
Exemplo Controle de Posicionamento do Telescópio Hubble	208	Exemplo Veículo de Reconhecimento Controlado	
Exemplo Sistema de Leitura de Acionador de Disco	214	Remotamente	398
PPC5.1 Controle de Motor de Acionamento por Tração	225	Exemplo Sistema de Leitura de Acionador de Disco	407
PP5.1 Controle do Ângulo de Rolamento de um Avião		PPC9.1 Controle de Motor de Acionamento por Tração	430
de Caça a Jato	225	PP9.1 Robô Móvel para Remoção de Lixo Tóxico	430
PP5.2 Controle de Posição de um Braço Manipulador		PP9.2 Controle de um Braço Flexível	430
para Soldagem	226	PP9.3 Regulador Automático de Pressão Sangüínea	430
PP5.3 Sistema de Suspensão Ativa para Automóveis	226	PP9.4 Robô Jogador de Tênis	430
PP5.4 Controle de Orientação de um Satélite Espacial	226	PP9.5 Atuador eletro-hidráulico	432
PP5.5 Robô Ajustador de Peças Usinadas	226	PP9.6 Laminadora de Chapas de Aço	432
PP5.6 Sistema de Controle de Posição com Motor CC	227	PP9.7 Controle de Veículo Lunar	432
		PP9.8 Laminador de Aço de Alta Velocidade	432
		PP9.9 Controle de Temperatura de Dois Reservatórios	433
		PP9.10 Controle de Robô para Lingote Quente	434

<b>CAPÍTULO 10</b>				
Exemplo Sistema de Controle de Enrolamento de Rotores	465	Exemplo	Torno Ultrapreciso com Diamante	556
Exemplo Plotadora X-Y	468	Exemplo	Sistema de Leitura de Acionador de Disco	563
Exemplo Sistema de Leitura de Acionador de Disco	475	PPC12.1	Controle de Motor de Acionamento por Tração	575
PPC10.1 Controle de Motor de Acionamento por Tração	491	PP12.1	Controle de Posição de uma Mesa Rotativa	575
PP10.1 Dois Robôs em Cooperação	491	PP12.2	Controle de um Cassete para Fita Digital de Áudio (DAT) <sup>1</sup>	575
PP10.2 Controle de Direção de um Avião Biplano	491	PP12.3	Exatidão de Posicionamento de um Dispositivo GRID <sup>2</sup>	576
PP10.3 Sistema de Vôo de um Mastro	492	PP12.4	O sistema <i>Dexterous Hand Master</i>	577
PP10.4 Controle de um Robô Usando Visão	492	PP12.5	Controle de Microscópio	577
PP10.5 Controle de Inclinação para Trem de Alta Velocidade	492	PP12.6	Controle de Microscópio	578
PP10.6 Controle de uma Antena de Grande Porte	493	PP12.7	Controle Artificial da Articulação da Perna	578
PP10.7 Controle de Velocidade em um Transportador de Fita	493	PP12.8	Controle de Posição de um Elevador	579
PP10.8 Controle de Motor de Automóvel	493	PP12.9	Dispositivo Elétrico para Assistência Ventricular	579
PP10.9 Controle do Ângulo de Rolamento de uma Aeronave	494	PP12.10	Controle de um Robô Espacial	580
		PP12.11	Controle de Apontamento de um Painel Solar	580
		PP12.12	Controle de um Trem com Levitação Magnética	580
		PP12.13	Controle com PID de um Veículo Guiado em Marte	581
		PP12.14	Sistema de Referência Massa-Mola	581
<b>CAPÍTULO 11</b>				
Exemplo Sistema Automático de Teste	516	<b>CAPÍTULO 13</b>		
Exemplo Sistema de Leitura de Acionador de Disco	522	Exemplo	Sistema de Controle do Movimento de uma Mesa Transportadora	597
PPC11.1 Controle de Motor de Acionamento por Tração	528	Exemplo	Sistema de Leitura de Acionador de Disco	607
PP11.1 Levitação de uma Esfera de Aço	528	PPC13.1	Controle de Motor de Acionamento por Tração	612
PP11.2 Controle de Carburador de Automóvel	528	PP13.1	Sistema de Controle de Temperatura	612
PP11.3 Locomotiva Diesel-Elétrica	528	PP13.2	Sistema de Posicionamento de uma Cabeça de Leitura e de Gravação para um Acionador de Disco.	612
PP11.4 Controle de Helicóptero	529	PP13.3	Controle de Tração Veicular	612
PP11.5 Manufatura de Papel	529	PP13.4	Sistema de Máquina Ferramenta	612
PP11.6 Controle de Acionadores Acoplados	529	PP13.5	Controle de Extrusora para Polímeros	612
<b>CAPÍTULO 12</b>				
Exemplo Piloto Automático de Avião	549			
Exemplo Sistema de Controle para Telescópio Espacial	550			
Exemplo Acionador de Bobinadeira Robusto	552			

<sup>1</sup> DAT é a sigla em inglês para *Digital Audio Tape* (N.T.).

<sup>2</sup> GRID é a sigla em inglês para *Gamma-Ray Image Device* (N.T.).

## OS AUTORES

**Richard C. Dorf** é Professor de Engenharia Elétrica e de Computação na Universidade da Califórnia, em Davis. Conhecido como docente altamente envolvido com o campo da Engenharia Elétrica e sua aplicação às necessidades sociais e econômicas, o Professor Dorf tem escrito e editado diversos livros e manuais de sucesso sobre engenharia, inclusive o *best seller* *Engineering Handbook* e a segunda edição do *Electrical Engineering Handbook*. O Professor Dorf é Membro do IEEE (Fellow) e atua nos campos de projeto de sistemas de controle e robótica. O Dr. Dorf detém uma patente para o controlador PIDA.

**Robert H. Bishop** preside a Congregação Myron L. Begeman de Engenharia no Departamento de Engenharia Aeroespacial e Engenharia Mecânica na Universidade do Texas em Austin. Educador talentoso, o Professor Bishop foi agraciado, por sua contribuição em sala de aula, com o cobiçado Prêmio Lockheed Martin Tactical Aircraft Systems para Excelência no Ensino de Engenharia. Membro ativo da AIAA, do IEEE e da ASEE, também atua como Editor Associado do *Journal of Astronautical Sciences* da American Astronautical Society. O Dr. Bishop é um pesquisador renomado com interesse em guiamento, navegação e controle de veículos aeroespaciais.

## A CAPA

A missão Mars Pathfinder se constitui basicamente uma demonstração de engenharia das tecnologias e dos conceitos a serem usados nas futuras missões a Marte. A espaçonave Mars Pathfinder foi lançada a bordo de um veículo lançador Delta II-7925 no dia 4 de dezembro de 1996 de Cabo Canaveral na Flórida, Estados Unidos. O lançamento está mostrado na metade superior da capa. Depois de percorrer 497.418.000 km, a espaçonave chocou-se com a superfície marciana em 4 de julho de 1997, com uma velocidade de aproximadamente 18 m/s. Em função do impacto, a espaçonave ricocheteou aproximadamente 15 metros, em seguida ricocheteou outras 15 vezes e rolou, indo parar a cerca de um quilômetro do ponto inicial de impacto. O local do pouso é conhecido como a *Sagan Memorial Station* e é localizada na região Ares Vallis de coordenadas 19,33 N, 33,35 W. O veículo explorador Sojourner (pesando cerca de 10,5 kg) começou as operações de superfície no dia 6 de julho, depois de descer uma rampa com suas seis rodas no solo marciano. O Sojourner está mostrado na parte inferior da capa. O veículo é controlado por operadores na Terra a partir de imagens obtidas por ele mesmo. O retardo para que sinais e imagens provenientes de Marte alcancem a Terra é de aproximadamente 10 minutos. Este retardo requer um grau de autonomia de controle pelo Sojourner. O explorador investigou rochas com nomes interessantes como Barnacle Bill, Yogi e Scooby Doo.

Fotos da capa por cortesia da NASA.

O traçado da capa é cortesia de Robert K. Bishop.

# Prefácio

## SISTEMAS DE CONTROLE MODERNOS — O LIVRO

Em dezembro de 1996, a espaçonave Mars Pathfinder<sup>1</sup> foi enviada ao espaço a bordo de um veículo lançador descartável Delta II para iniciar uma jornada de sete meses no planeta vermelho. A missão Pathfinder, uma das primeiras missões da classe Discovery<sup>2</sup> da NASA,<sup>3</sup> é a primeira missão a pousar em Marte depois do sucesso da espaçonave Viking há mais de duas décadas. A Pathfinder desembarcou o primeiro veículo explorador autônomo, conhecido como *Sojourner*, para explorar a área do local de pouso. O veículo móvel *Sojourner*, mostrado na capa, possui uma massa de 10,5 kg e foi projetado para percorrer uma área de 300 m<sup>2</sup> durante cerca de 30 dias. O painel solar de 0,25 m<sup>2</sup> fornece 16 Wh de pico de energia e a bateria principal fornece uma alimentação de cerca de 150 Wh. O controle de manobra deste veículo tem de ser preciso e deve limitar o consumo de energia. A excitação advinda da missão Pathfinder continuará por um futuro previsível. A comunidade mundial estabeleceu um programa ambicioso para a exploração de Marte e os planos atuais prevêem pelo menos um lançamento de uma espaçonave com destino ao Planeta Vermelho em cada oportunidade ótima de lançamento (2001, 2003, 2005 e assim por diante). Os engenheiros de controle desempenham um papel crítico no sucesso de um programa de exploração planetária. O papel dos sistemas de controle para veículos autônomos continuará a crescer à medida que o hardware e o sistema operacional dos computadores de vôo forem sendo aperfeiçoados. Com efeito, o Pathfinder utilizou, pela primeira vez, um sistema operacional multitarefa produzido comercialmente, residente em uma estação de trabalho de 32 bits resistente a radiação, com um gigabyte de capacidade de armazenamento, que é programável em C. Este é um avanço considerável sobre os computadores da missão Apollo com uma memória fixa (ROM) de 36.864 palavras (a palavra tinha 16 bits) juntamente com uma memória volátil (RAM) de 2.048 palavras. A “linguagem de programação” Apollo era uma notação em pseudocódigo codificada e armazenada como uma lista de palavras de dados “interpretados” traduzidos em uma seqüência de enlaces de sub-rotinas.<sup>4</sup> Problemas interessantes do mundo real, como os veículos exploradores do tipo do *Sojourner*, são usados como exemplos ilustrativos ao longo do livro. Por exemplo, o problema de projeto de um explorador móvel é discutido no Exemplo de Projeto, na Seção 4.8.

A Engenharia de Controle<sup>5</sup> constitui um campo excitante e desafiador. Pela própria natureza, a engenharia de controle é uma matéria multidisciplinar e tem ocupado seu lugar como um curso do núcleo comum dos currículos de engenharia. É razoável esperar diferentes abordagens para dominar e praticar a arte da engenharia de controle. Como o assunto possui um forte fundamento matemático, é possível abordá-lo a partir de um ponto de vista estritamente teórico, enfatizando teoremas e demonstrações. Por outro lado, como o objetivo final é implementar controladores em sistemas reais, é possível adotar uma abordagem com propósitos específicos baseada somente na intuição e na experiência prática de projetar sistemas de controle com retroação. A abordagem adotada neste livro consiste em apresentar uma metodologia que, embora calcada em fundamentos matemáticos, enfatize a modelagem de sistemas físicos e o projeto de sistemas de controle práticos com especificações de sistema realísticas.

Acredita-se que a abordagem mais importante e produtiva para o aprendizado é fazer com que cada um redescubra e crie de novo as respostas e métodos do passado. Assim, o ideal é apresentar aos estudantes uma série de problemas e de perguntas e indicar algumas das respostas que foram obtidas ao longo das últimas décadas. O método tradicional — apresentar ao estudante não o problema, mas solução acabada — priva este estudante de todo a excitação, corta o impulso criativo e reduz a aventura da humanidade a um monte empoeirado de teoremas. A saída consiste, então, em apre-

<sup>1</sup>Literalmente *Desbravador de Marte*. (N. T.)

<sup>2</sup>Literalmente *Descobrimento*. (N. T.)

<sup>3</sup>NASA é a sigla em inglês da agência espacial norte-americana (*National Aeronautics and Space Administration*). (N. T.)

<sup>4</sup>Para leitura adicional sobre os sistemas de guiaamento, navegação e controle da Apollo, ver R. H. Battin, “An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics”, AIAA Education Series, J. S. Pzemieniecki/Series Editor-in-Chief, 1987.

<sup>5</sup>No Brasil é designada como Engenharia de Controle e Automação. (N. T.)

sentar alguns dos problemas importantes e sem resposta, que continuam a ser enfrentados, para se ter certeza de que foram verdadeiramente aprendidos e compreendidos, por cada um, individualmente.

O propósito deste livro é apresentar a estrutura da teoria de sistemas de controle com retroação e fornecer uma seqüência de descobertas excitantes à medida que se avança ao longo do texto e dos problemas. Se este livro for capaz de auxiliar o estudante a descobrir a teoria e a prática de sistemas de controle com retroação, terá tido sucesso.

## A QUEM SE DESTINA O LIVRO

Este texto é concebido para um curso de graduação introdutório em sistemas de controle para estudantes de engenharia. Há uma demarcação muito pequena entre as engenharias aeroespacial, química, elétrica, industrial e mecânica na prática de sistemas de controle; em consequência, este livro foi escrito sem nenhuma polarização consciente para qualquer um desses campos. Assim, espera-se que este livro seja igualmente útil para todas as áreas de engenharia e que talvez ilustre a utilidade da engenharia de controle. Os inúmeros problemas e exemplos representam todos os campos, e os exemplos de sistemas de controle sociológicos, biológicos, ecológicos e econômicos se destinam a dotar o leitor de uma visão da aplicabilidade geral da teoria de controle a muitas das facetas da vida. Acredita-se que expor os estudantes de uma área a exemplos e problemas de outras áreas irá dotá-los da capacidade de ver além do próprio campo de estudo. Muitos estudantes buscam oportunidades profissionais em outras áreas diferentes da sua. Por exemplo, muitos engenheiros eletricistas e mecânicos se encontram trabalhando na indústria aeroespacial, lado a lado com engenheiros aeronáuticos. Espera-se que esta introdução à engenharia de controle dê aos estudantes uma compreensão mais abrangente do projeto e da análise dos sistemas de controle.

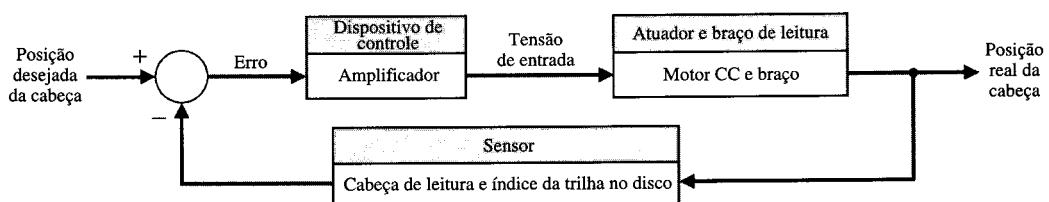
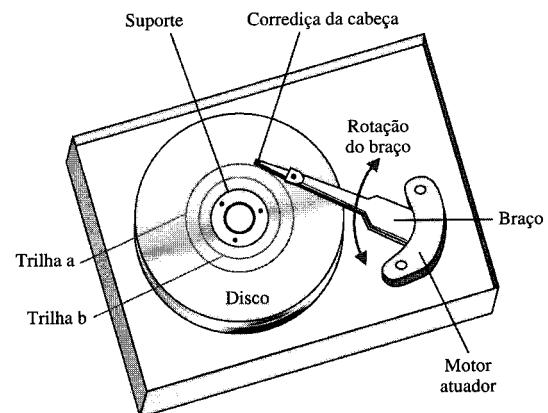
Em suas sete edições anteriores, *Sistemas de Controle Modernos* foi usado em cursos de engenharia do ciclo profissional em mais de 400 escolas e universidades. Foi usado também por estudantes de pós-graduação sem formação prévia em engenharia de controle.

## REVISADA E ATUALIZADA! — A OITAVA EDIÇÃO

Com a oitava edição continua a evoluir a ênfase em projeto que historicamente vem caracterizando esta obra. Usando os problemas de engenharia do mundo real associados com o projeto de um controlador para o sistema de leitura de um acionador de disco, foi desenvolvido o

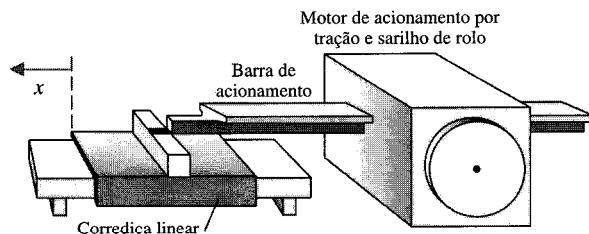


*Exemplo de Projeto Seqüencial* (identificado no texto por um ícone em forma de seta), que é considerado seqüencialmente em cada um dos capítulos usando os métodos e conceitos desse capítulo. Os acionadores de disco, usados em computadores de todos os portes e com uma venda mundial acima de 100 milhões de unidades em 1996, representam uma aplicação importante de engenharia de controle. Diversos aspectos do projeto de controladores para o sistema de leitura dos acionadores de disco são considerados em cada capítulo. Por exemplo, no Cap. 1, identificam-se os objetivos de controle, identificam-se as variáveis a serem controladas, escrevem-se as especificações de controle e se estabelece a configuração preliminar de sistema para o acionador de disco. Em seguida, no Cap. 2, são obtidos os modelos do processo, dos sensores e dos atuadores. Nos capítulos restantes continua-se o procedimento de projeto, enfatizando-se os pontos principais dos capítulos.





Com o mesmo espírito do *Exemplo de Projeto Sequencial*, foi desenvolvido um problema de projeto chamado *Problema de Projeto Continuado* (identificado no texto por um ícone em forma de seta tripla) para dar aos estudantes a oportunidade de construir um problema de projeto, de capítulo em capítulo. A maquinaria de alta precisão impõe demandas exigentes em sistemas com mesas deslizantes. No *Problema de Projeto Continuado*, os estudantes aplicam as técnicas e as ferramentas apresentadas em cada capítulo no desenvolvimento de uma solução de projeto que atenda os requisitos especificados.



### Valores Típicos de Parâmetros para Motor CC Controlado pela Armadura e Sarilho de Rolo e Corrediça Deslizante

$M_s$	Massa da corrediça	5,693 kg
$M_b$	Massa da barra de acionamento	6,96 kg
$J_m$	Inércia do rolo, haste, motor e tacômetro	$10,91 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
$r$	Raio do rolo	$31,75 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
$b_m$	Amortecimento do motor	0,268 N-m-sec/rad
$K_m$	Constante de torque	0,8379 N-m/amp
$K_b$	Constante de força contra-eletromotriz	0,838 V-sec/rad
$R_m$	Resistência do motor	1,36 $\Omega$
$L_m$	Indutância do motor	3,6 mH



A componente de projeto e análise assistidos por computador continuou a evoluir e a ser aperfeiçoadas no livro. O conjunto de problemas de fim de capítulo com uso do MATLAB<sup>6</sup> (identificada pelo ícone gráfico no texto) apresenta dois problemas adicionais por capítulo. Além disto, na oitava edição, muitas das soluções relativas a diversos componentes do *Exemplo de Projeto Sequencial* utilizam o MATLAB com os respectivos scripts incluídos nas figuras. O popular controlador industrial PID assume um lugar mais relevante na oitava edição. É introduzido pela primeira vez no Cap. 7, Seção 7.7. As discussões iniciais são acompanhadas com as seções do Cap. 9 e do Cap. 12. Discute-se a implementação em computador digital de um controlador PID na Seção 13.11 do Cap. 13.

Ao desenvolver esta edição do livro *Sistemas de Controle Modernos* teve-se por meta melhorá-lo sem perturbar os fundamentos básicos. Contudo, ao longo dos últimos três anos chamou a atenção dos autores (principalmente através do esforço dos revisores e do contato direto com os usuários via correio eletrônico) que certos pontos técnicos necessitavam ser esclarecidos. Tentou-se tratar cada assunto, na medida do razoável, e foram corrigidos todos os erros conhecidos (especialmente os dos gráficos de Nyquist do Cap. 9). Agradece-se o esforço de estudantes, professores e outros usuários que têm mantido contato com os autores.

## PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS

O livro é organizado em torno dos conceitos da teoria de sistemas de controle desenvolvidos nos domínios de freqüência e do tempo. Tentou-se realmente tornar moderna no melhor sentido a sele-

<sup>6</sup>MATLAB é uma marca registrada da The MathWorks, Inc.

ção de tópicos e também dos sistemas discutidos nos exemplos e problemas. Em consequência, o livro inclui discussão sobre sistemas de controle robustos e sensibilidade de sistema, modelos em variáveis de estado, controlabilidade e observabilidade, sistemas de controle por computador, controle com modelo interno, controladores PID robustos e projeto e análise auxiliados por computador, para citar alguns deles. Contudo, os tópicos clássicos da teoria de controle que provaram ser muito úteis na prática foram mantidos e expandidos.

**Construindo Princípios Básicos: Do Clássico ao Moderno.** O objetivo foi apresentar uma exposição clara dos princípios básicos das técnicas de projeto nos domínios de freqüência e do tempo. Os métodos clássicos da engenharia de controle são cobertos integralmente: transformada de Laplace e função de transferência; projeto com o lugar das raízes; análise de estabilidade com Routh-Hurwitz; métodos de resposta de freqüência, incluindo Bode, Nyquist e Nichols; erro de estado estacionário para sinais de teste padronizados; aproximação por meio de sistemas de segunda ordem; margem de fase e margem de ganho e banda passante. Além disso, a cobertura do método com variáveis de estado foi ampliada de forma significativa. As noções fundamentais de controlabilidade e de observabilidade para os modelos em variáveis de estado são discutidas e relacionadas aos diagramas de fluxo de sinal. É apresentada a retroação de estado plena com a fórmula de Ackermann para alocação de pólos, juntamente com uma discussão sobre as limitações da retroação com variáveis de estado.

Sobre esta forte fundamentação de princípios básicos, o livro oferece muitas oportunidades para explorar tópicos além dos tradicionais. Os recentes avanços na teoria de controle robusto são apresentados no Cap. 12. A implementação de sistemas de controle com computador digital é discutida no Cap. 13. Cada um dos capítulos, exceto o primeiro, usa uma seção com o MATLAB para apresentar ao estudante a noção de projeto e análise auxiliados por computador. O livro conclui com uma extensa seção de Referências, divididas por capítulo, para orientar o estudante na consulta a fontes adicionais de informação sobre a engenharia de controle.

**Desenvolvimento Progressivo de Habilidades na Solução de Problemas.** Ler os capítulos, assistir às aulas e tomar notas e trabalhar ao longo dos exemplos ilustrados são as partes do processo de aprendizagem. Mas o teste efetivo vem no fim dos capítulos com os problemas. O livro trata seriamente da questão da solução de problemas. Em cada capítulo há cinco tipos de problema:

- Exercícios
- Problemas
- Problemas Avançados
- Problemas de Projeto
- Problemas com MATLAB

Por exemplo, o conjunto de problemas sobre Modelos em Variáveis de Estado, Cap. 3, inclui 19 exercícios, 36 problemas, 6 problemas avançados, 5 problemas de projeto e 7 problemas com MATLAB. Os exercícios permitem que os estudantes utilizem prontamente os conceitos e métodos apresentados em cada capítulo resolvendo exercícios relativamente diretos antes de tratar de problemas mais complexos. Um terço dos exercícios é formulado com respostas. Os problemas requerem uma extensão dos conceitos do capítulo para situações novas. Introduzidos na sétima edição, os problemas avançados representam problemas de maior complexidade. Os problemas de projeto enfatizam a tarefa de projetar. Os problemas com MATLAB dão ao estudante a prática da solução de problemas usando computador. No total, o livro contém mais de 800 problemas. A abundância de problemas de complexidade crescente dá aos estudantes a confiança em sua capacidade de resolver problemas à medida que trabalham ao seu modo desde os exercícios até os problemas de projeto e com o uso do MATLAB.

Um conjunto de arquivos M, *Modern Control Systems Toolbox*, foi desenvolvido pelos autores para suplementar o texto. Os arquivos M contêm os scripts de cada um dos exemplos com MATLAB existentes no texto e no Apêndice F. É possível recuperar os arquivos M no endereço [ftp.aw.com](http://ftp.aw.com). O leitor poderá dirigir-se ao portal da web no endereço <http://www.awl.com/cseeng>. Também é possível obter os arquivos M no servidor anônimo de ftp [ftp.mathworks.com](http://ftp.mathworks.com), no diretório pub/books/dorf.

**Ênfase em Projeto sem Comprometer os Princípios Fundamentais.** O projeto de sistemas de controle complexos, do mundo real, constitui o tema mais importante ao longo do texto. A ênfase no projeto voltado às aplicações do mundo real visa ao interesse profissional da indústria. Cada capítulo contém pelo menos um exemplo de projeto:

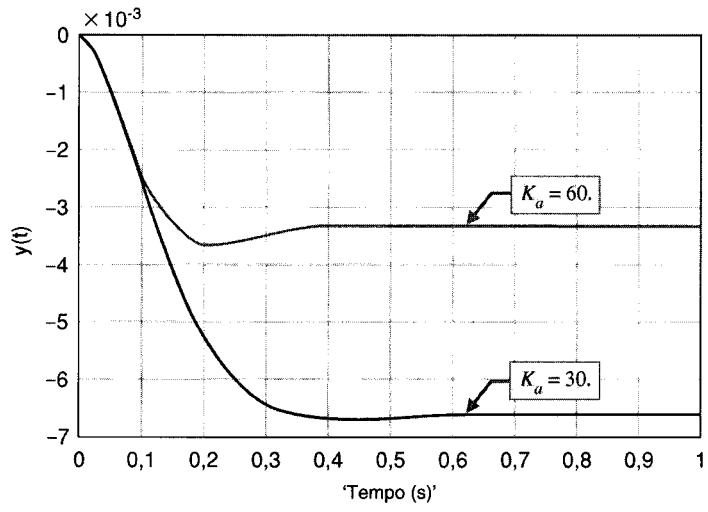
- controle de velocidade de mesa rotativa (Seção 1.10)
- robô de laboratório (Seção 2.9)
- acionador de correia para impressora (Seção 3.10)
- máquinas perfuratrizes do Canal da Mancha (Seção 4.7)
- controle de posicionamento do Telescópio Hubble (Seção 5.11)
- controle de manobra de veículo sobre lagartas (Seção 6.5)
- sistema de controle de um manipulador de laser (Seção 7.8)
- sistema de controle para máquina de gravação (Seção 8.7)
- veículo de reconhecimento controlado remotamente (Seção 9.8)
- plotadora x-y (Seção 10.13)
- sistema automático de teste (Seção 11.9)
- projeto de um torno ultrapreciso com diamante (Seção 12.12)
- projeto de um sistema de controle do movimento de uma mesa transportadora (Seção 13.9)

As seções com MATLAB auxiliam o estudante a utilizar os conceitos de análise e projeto de sistemas assistidos por computador e a refazer muitos dos exemplos de projeto. No Cap. 5, o Exemplo de Projeto Sequencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco é analisado usando o MATLAB. Um script em MATLAB que pode ser usado para analisar o projeto é apresentado na Fig. 5.45:

```
Ka=30; Selecionar  $K_a$ .
t=[0:0.01:1];
nc=[Ka*5];dc=[1];
ng=[1];dg=[1 20 0];
[num,den]=feedback(ng,dg,nc,dc);
num=-num;
y=step(num,den,t);
plot(t,y), grid
xlabel('Tempo (s)'), ylabel('y(t)')
```

A perturbação entra no somador com sinal negativo.

(a)

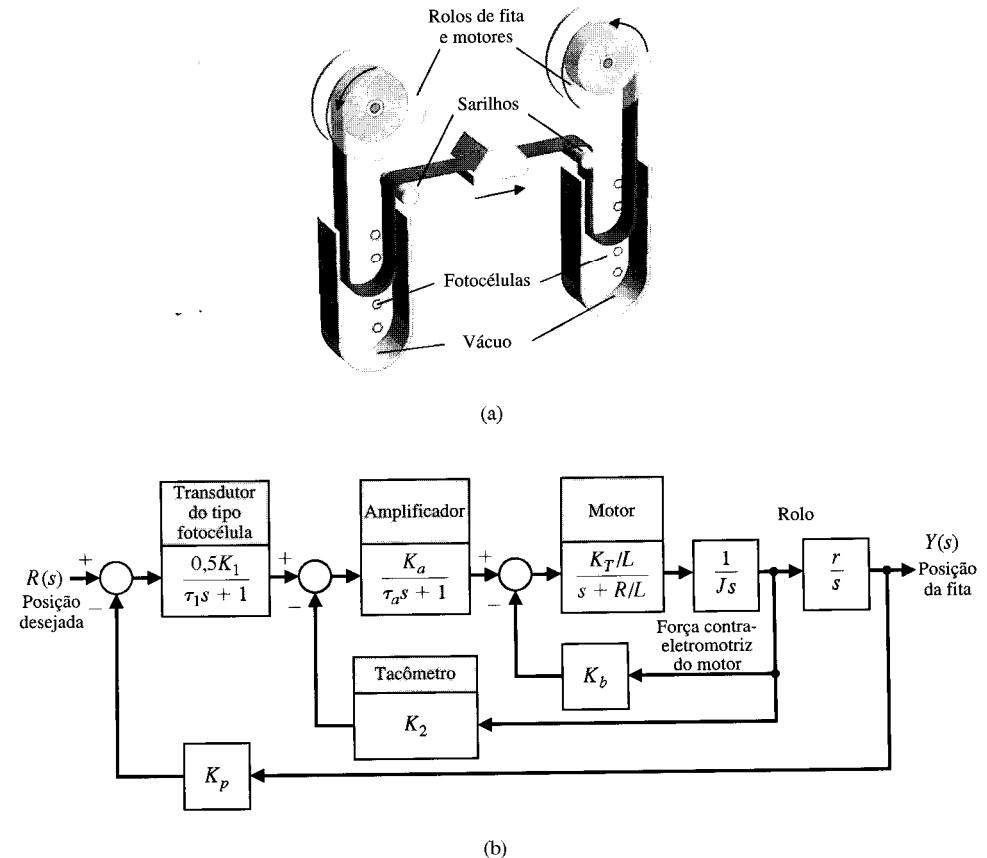


(b)

Em geral, cada script é enriquecido com notas através de caixas com comentários, ressaltando aspectos importantes do script. A saída que acompanha o script (geralmente um gráfico) também contém caixas com comentários apontando elementos importantes. Os scripts também podem ser usados com modificações na solução de outros problemas relacionados.

**Reforço do Aprendizado.** Cada capítulo começa com uma Apresentação, recentemente revisada, descrevendo os tópicos que o estudante pode esperar encontrar. Os capítulos terminam com um Sumário e com um resumo de Termos e Conceitos. Estas seções reforçam os conceitos importantes apresentados no capítulo e servem como referência para uso posterior.

O Problema 7.11 pede ao estudante que determine o valor de  $k_a$  para que seja possível atender os requisitos de projeto específicos. A Fig. P7.11 correspondente auxilia o estudante (a) a visualizar o problema e (b) dar o próximo passo para desenvolver o modelo de função de transferência:



## A ORGANIZAÇÃO

**Capítulo 1 Introdução aos Sistemas de Controle.** O Cap. 1 fornece uma introdução aos fundamentos históricos da teoria e da prática de controle. O objetivo deste capítulo é descrever a abordagem geral para projetar e construir sistemas de controle.

**Capítulo 2 Modelos Matemáticos de Sistemas.** No Cap. 2 são desenvolvidos modelos matemáticos de sistemas físicos na forma de entrada-saída ou de função de transferência. É considerada uma ampla gama de sistemas, incluindo sistemas mecânicos, elétricos e de fluido.

**Capítulo 3 Modelos em Variáveis de Estado.** No Cap. 3 são desenvolvidos modelos matemáticos na forma de variáveis de estado. São examinados a resposta transitória dos sistemas de controle e o desempenho destes sistemas por meio de métodos matriciais.

**Capítulo 4 Características de Sistema de Controle com Retroação.** As características dos sistemas de controle com retroação são descritas no Cap. 4. São discutidas as vantagens da retroação e é apresentado o conceito de sinal de erro do sistema.

**Capítulo 5 O Desempenho de Sistemas de Controle com Retroação.** No Cap. 5 é examinado o desempenho dos sistemas de controle. É feita uma correlação entre o desempenho de um sistema de controle e a localização dos pólos e zeros de sua função de transferência, no plano  $s$ .

**Capítulo 6 A Estabilidade de Sistemas Lineares com Retroação.** A estabilidade dos sistemas com retroação é investigada no Cap. 6. É estudada a relação entre a estabilidade do sistema e a equação característica da função de transferência deste. É apresentado o critério de Routh-Hurwitz.

**Capítulo 7 O Método do Lugar das Raízes.** O Cap. 7 trata do deslocamento, no plano  $s$ , das raízes da equação característica à medida que um ou dois parâmetros variam. O lugar das raízes no plano  $s$  é determinado por meio de um método gráfico. É apresentado, também, o conhecido controlador PID.

**Capítulo 8 Métodos de Resposta de Freqüência.** No Cap. 8 é usado um sinal estacionário senoidal como entrada para examinar a resposta do sistema em regime estacionário à medida que varia a freqüência da senóide. É considerado o desenvolvimento do gráfico da resposta de freqüência chamado gráfico de Bode.

**Capítulo 9 Estabilidade no Domínio de Freqüência.** É investigada, no Cap. 9, a estabilidade do sistema utilizando-se métodos de resposta de freqüência. São discutidos a estabilidade relativa e o critério de Nyquist.

**Capítulo 10 O Projeto de Sistemas de Controle com Retroação.** Diversas abordagens para projetar e compensar sistemas de controle são descritas e desenvolvidas no Cap. 10. São apresentadas várias alternativas de compensadores e é mostrado como eles podem colaborar para se obter um melhor desempenho.

**Capítulo 11 O Projeto de Sistemas com Retroação com Variáveis de Estado.** O principal tópico do Cap. 11 é o projeto de sistemas de controle usando modelos com variáveis de estado. São apresentados os testes de controlabilidade e de observabilidade e é discutido o conceito de projeto com modelo interno.

**Capítulo 12 Sistemas de Controle Robustos.** O Cap. 12 trata do projeto de sistemas de controle altamente precisos em presença de incertezas de vulto. São discutidos cinco métodos para projetar sistemas robustos abrangendo: lugar das raízes, resposta de freqüência, métodos ITAE para controladores PID robustos, modelos internos e retroação pseudoquantitativa.

**Capítulo 13 Sistemas de Controle Digital.** No Cap. 13 são descritos métodos para descrever e analisar o desempenho de sistemas de controle por computador. Discutem-se a estabilidade e o desempenho de sistemas com dados amostrados.

**Apêndices.** Os apêndices são:

- A Pares de Transformada de Laplace
- B Símbolos, Unidades e Fatores de Conversão
- C Uma Introdução à Álgebra Matricial
- D Conversão em Decibéis
- E Números Complexos
- F Fundamentos do MATLAB
- G Pares de Transformada  $z$

## AGRADECIMENTOS

Os autores desejam expressar seu sincero reconhecimento às seguintes pessoas que colaboraram para a elaboração da oitava edição: Mahmoud A. Abdallah, Central State University (OH); John N. Chiasson, University of Pittsburgh; Samy El-Sawah, California State Polytechnic University, Pomona; Peter J. Gorder, Kansas State University; Duane Hanselman, University of Maine, Ashok Iyer, University of Nevada, Las Vegas; Leslie R. Koval, University of Missouri-Rolla; L. G. Kraft, University of New Hampshire; Thomas Kurfess, Georgia Institute of Technology; Julio C. Mandojana, Mankato State University; Jure Medanic, University of Illinois at Urbana-Champaign; Eduardo A. Misawa, Oklahoma State University; Medhat M. Morsos, Kansas State University; Mark Nagurka, Marquette University; Carla Schwartz, The MathWorks, Inc.; D. Subbaram Naidu, Idaho State University; Ron Perez, University of Wisconsin-Milwaukee; Murat Tanyel, Dordt College; Hal Tharp, University of Arizona; John Valasek, Texas A&M University; Paul P. Wang, Duke University; e Ravi Warrier, GMI Engineering and Management Institute.

## **LINHAS ABERTAS PARA COMUNICAÇÃO**

Os autores e os editores gostariam de estabelecer uma linha direta de comunicação com os usuários de *Sistemas de Controle Modernos*. Todos os leitores são encorajados a enviar seus endereços eletrônicos (e-mails) e encaminhar através deles comentários e sugestões sobre esta e sobre futuras edições. Fazendo isto, será possível mantê-los informados sobre notícias de interesse geral com relação ao livro-texto e passar comentários interessantes de outros usuários.

Mantenham contato!

Richard C. Dorf  
Robert H. Bishop  
Addison Wesley Longman, Inc.  
LTC Editora

[dorf@ece.ucdavis.edu](mailto:dorf@ece.ucdavis.edu)  
[bishop@csr.utexas.edu](mailto:bishop@csr.utexas.edu)  
[aw.eng@aw.com](mailto:aw.eng@aw.com)  
[ltcet@unisys.com.br](mailto:ltcet@unisys.com.br)

## CAPÍTULO 1

# *Introdução aos Sistemas de Controle*

- 1.1 Introdução
- 1.2 A História do Controle Automático
- 1.3 Dois Exemplos do Uso de Retroação
- 1.4 A Prática da Engenharia de Controle
- 1.5 Exemplos de Sistemas de Controle Modernos
- 1.6 Montagem Automática e Robôs
- 1.7 A Evolução Futura dos Sistemas de Controle
- 1.8 Projeto de Engenharia
- 1.9 Projeto de Sistemas de Controle
- 1.10 Exemplo de Projeto: Controle de Velocidade de Mesa Rotativa
- 1.11 Exemplo de Projeto: Sistema de Controle de Aplicação de Insulina
- 1.12 Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura do Acionador de Disco

## APRESENTAÇÃO

Neste capítulo será descrito um procedimento geral para projetar sistemas de controle. Um sistema de controle consistindo de componentes interconectados é projetado para realizar um objetivo desejado. Para compreender a finalidade de um sistema de controle, é útil examinar exemplos de sistemas de controle ao longo da história. Estes sistemas primitivos incorporavam muitas das mesmas idéias de retroação usadas atualmente.

A prática da engenharia de controle moderna inclui o uso de estratégias de projeto de controle para aprimorar processos de manufatura, eficiência do uso de energia, controle avançado de automóveis, incluindo trânsito rápido, dentre outros. Serão examinadas estas interessantes aplicações de engenharia de controle.

Será discutida também a noção de desvios de projeto. O desvio aparece entre o sistema físico complexo sob investigação e o modelo usado na síntese do sistema de controle. A natureza interativa do projeto permite lidar com os desvios de modo eficaz enquanto se realiza o necessário balanço entre complexidade, desempenho e custo a fim de alcançar as especificações do projeto.

Finalmente, será apresentado um exemplo de projeto seqüencial: Sistema de Leitura do Acionador de Disco. Este exemplo será considerado seqüencialmente em cada capítulo do livro. Ele representa um problema de sistema de controle importante e prático, servindo simultaneamente como uma ferramenta útil de aprendizado.

### 1.1 INTRODUÇÃO

A engenharia diz respeito ao conhecimento e ao controle de materiais e forças da natureza para o benefício da humanidade. Dizem respeito aos engenheiros de sistemas de controle o conhecimento e o controle de segmentos à sua volta, chamados com freqüência de **sistemas**, com a finalidade de dotar a sociedade de produtos úteis e econômicos. Os objetivos duplos de conhecimento e controle são complementares, uma vez que o controle efetivo de sistemas requer que os sistemas sejam compre-

endidos e modelados. Além disso, a engenharia de controle deve considerar muitas vezes o controle de sistemas mal conhecidos, como sistemas de processos químicos. O presente desafio ao engenheiro de controle é a modelagem e o controle de sistemas modernos, complexos e interligados, como sistemas de controle de tráfego, processos químicos e sistemas robóticos. Simultaneamente, o engenheiro de sorte tem a oportunidade de controlar muitos dos sistemas úteis e interessantes ligados à automação industrial. Talvez a característica de maior relevo da engenharia de controle seja a oportunidade de controlar máquinas e processos industriais e econômicos para o benefício da sociedade.

A engenharia de controle é baseada nos fundamentos da teoria da retroação e na análise de sistemas lineares, e integra conceitos da teoria de circuitos e da teoria das telecomunicações. Por isso, a engenharia de controle não está limitada a qualquer um dos ramos da engenharia, mas é igualmente aplicável às engenharias aeronáutica, química, mecânica, do meio ambiente, civil e elétrica. Por exemplo, freqüentemente um sistema de controle inclui componentes elétricos, mecânicos e químicos. Além disso, ao se ampliar a compreensão da dinâmica de negócios, de processos sociais e políticos, será ampliada também a capacidade de controlar estes sistemas.

Um **sistema de controle** é uma interconexão de componentes formando uma configuração de sistema que produzirá uma resposta desejada do sistema. A base para análise de um sistema é formada pelos fundamentos fornecidos pela teoria dos sistemas lineares, que supõe uma relação de causa e efeito para os componentes de um sistema. Além disso, um componente ou **processo** a ser controlado pode ser representado por um bloco, como mostrado na Fig. 1.1. A relação de entrada-saída representa uma relação de causa e efeito do processo, que, por sua vez, representa um processamento de um sinal de entrada para fornecer um sinal de saída variável, quase sempre com uma amplificação de potência. Um **sistema de controle a malha aberta** utiliza um controlador ou atuador de controle para obter a resposta desejada, como mostrado na Fig. 1.2. Um sistema a malha aberta é um sistema sem retroação.

---

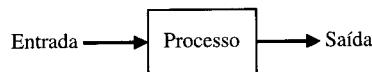
**Um sistema de controle a malha aberta utiliza um dispositivo de atuação para controlar diretamente o processo sem usar retroação.**

---

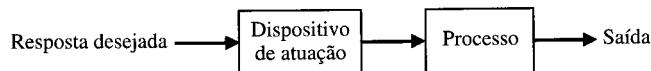
Ao contrário de um sistema de controle a malha aberta, um sistema de controle a malha fechada utiliza uma medida adicional da saída real para comparar a saída real com a resposta desejada. A medida da saída é chamada de **sinal de retroação**. Um sistema de controle com retroação a malha fechada simples é mostrado na Fig. 1.3. Um sistema de controle com retroação é um sistema que tende a manter uma relação preestabelecida entre uma variável de sistema e outra, comparando funções destas variáveis e usando a diferença como meio de controle.

Um sistema de controle com retroação usa freqüentemente uma função de uma relação preestabelecida entre a saída e a entrada para controlar o processo. Quase sempre a diferença entre a saída do processo sob controle e a referência de entrada é amplificada e usada para controlar o processo de modo que a diferença seja continuamente reduzida. O conceito de retroação tem sido o alicerce para a análise e o projeto dos sistemas de controle.

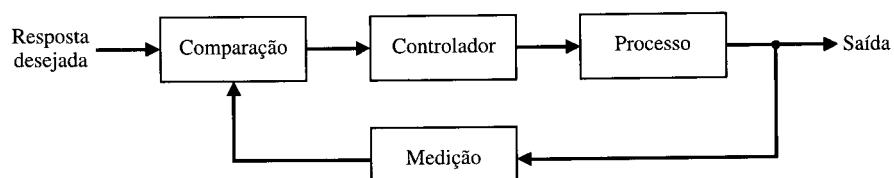
**Fig. 1.1** Processo a ser controlado.



**Fig. 1.2** Sistema de controle a malha aberta (sem retroação).



**Fig. 1.3** Sistema de controle a malha fechada (com retroação).



**Um sistema de controle a malha fechada usa uma medida da saída e a retroação deste sinal para compará-lo com a saída desejada (referência ou comando).**

Por causa do aumento de complexidade dos sistemas de controle e do interesse em obter um desempenho ótimo, a importância da engenharia de sistemas de controle cresceu na década passada. Além disso, como os sistemas se tornaram mais complexos, o inter-relacionamento de muitas variáveis controladas deve ser considerado na estrutura de controle. Um diagrama de blocos retratando um **sistema de controle multivariável** está mostrado na Fig. 1.4.

Um exemplo comum de sistema de controle a malha aberta é uma torradeira elétrica de cozinha. Um exemplo de um sistema de controle a malha fechada é uma pessoa dirigindo um automóvel (supondo que os olhos desta estejam abertos) a partir da observação da posição do automóvel na estrada e fazendo os ajustes apropriados.

A introdução da retroação permite controlar uma saída desejada e aprimorar a exatidão, porém isto requer atenção com vistas à estabilidade da resposta.

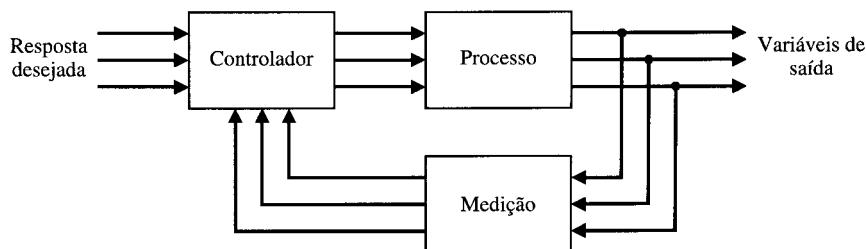


Fig. 1.4 Sistema de controle multivariável.

## 1.2 A HISTÓRIA DO CONTROLE AUTOMÁTICO

O uso da retroação nos sistemas de controle tem uma história fascinante. As primeiras aplicações do controle com retroação apareceram no desenvolvimento do mecanismo regulador de bôia na Grécia no período entre 300 a 1 a.C. [1, 2, 3]. O relógio d'água de Ktesibios usava um regulador de bôia (ver o Problema 1.11). Um lampião de óleo inventado por Philon aproximadamente em 250 a.C. usava um regulador de bôia para manter constante o nível do óleo combustível. Heron de Alexandria, que viveu no primeiro século d.C., publicou um livro intitulado *Pneumatica*, que ressaltava algumas formas de mecanismos de nível de água usando reguladores de bôia [1].

O primeiro sistema com retroação inventado na Europa moderna foi o regulador de temperatura de Cornelis Drebbel (1572-1633), da Holanda [1]. Dennis Papin (1647-1712) inventou o primeiro controlador de pressão para caldeiras a vapor em 1681. O regulador de pressão de Papin era uma forma de regulador de segurança similar à válvula de uma panela de pressão.

O primeiro controlador automático com retroação usado em um processo industrial é geralmente aceito como sendo o **regulador de esferas** de James Watt, desenvolvido em 1769 para controlar a velocidade de máquinas a vapor [1, 2]. O dispositivo, inteiramente mecânico, mostrado na Fig. 1.5,

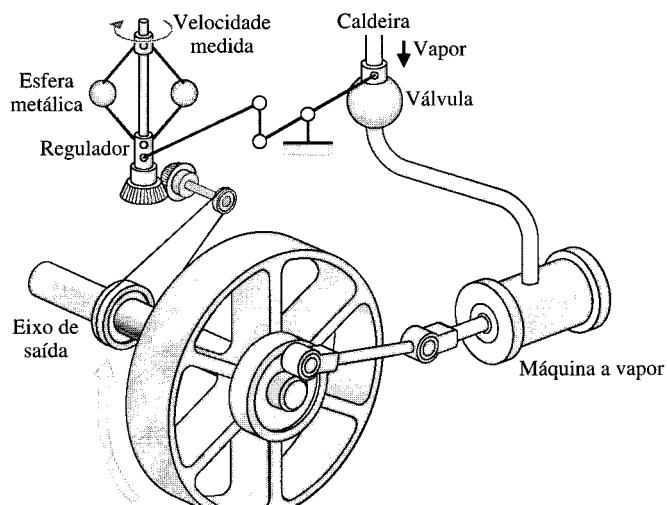


Fig. 1.5 Regulador de esferas de Watt.

media a velocidade do eixo de saída e utilizava o movimento das esferas devido à velocidade para controlar a válvula e portanto a quantidade de vapor que entrava na máquina. À medida que a velocidade aumenta, os pesos em forma de esfera se elevam e se afastam do eixo, fechando assim a válvula. As esferas móveis requerem potência da máquina para poder girar e por isso tornam a medida da velocidade menos precisa.

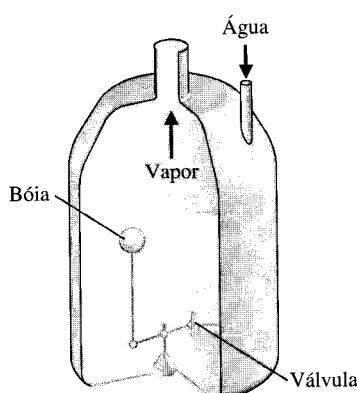
O primeiro sistema com retroação da história, reclamado pela Rússia, foi o regulador de bóia para nível da água, supostamente inventado por I. Polzunov em 1765 [4]. O sistema regulador de nível é mostrado na Fig. 1.6. A bóia detecta o nível da água e controla a válvula que veda o orifício de entrada de água na caldeira.

O período anterior a 1868 foi caracterizado pelo desenvolvimento do sistema de controle automático através de intuição e invenção. Os esforços para aumentar a exatidão do sistema de controle automático conduziram a uma menor atenuação das oscilações transitórias e até mesmo tornaram os sistemas instáveis. Tornou-se então imperativo desenvolver uma teoria de controle automático. J. C. Maxwell formulou uma teoria matemática relativa à teoria de controle usando um modelo de um regulador sob forma de equação diferencial [5]. O estudo de Maxwell preocupou-se com o efeito que os vários parâmetros do sistema tiveram sobre o desempenho deste. Durante o mesmo período, I. A. Vyshnegradskii formulou uma teoria matemática de reguladores [6].

Antes da Segunda Guerra Mundial, a teoria e a prática de controle se desenvolveram nos Estados Unidos e no Oeste da Europa de maneira diferente da que ocorreu na Rússia e no Leste Europeu. O principal incentivo para o uso da retroação nos Estados Unidos foi o desenvolvimento do sistema telefônico e dos amplificadores eletrônicos com retroação de Bode, Nyquist e Black, nos Laboratórios da Bell Telephone [7-10, 12]. O domínio da freqüência foi usado principalmente para descrever a operação de amplificadores com retroação em termos de banda passante e outras variáveis freqüenciais. Em contraste, matemáticos eminentes e mecânicos aplicados na então União Soviética inspiraram e dominaram o campo da teoria de controle. Por isso, a teoria russa cuidou de utilizar uma formulação no domínio do tempo usando equações diferenciais.

A teoria e a prática do controle automático receberam um grande estímulo durante a Segunda Guerra Mundial quando se tornou necessário projetar e construir pilotos automáticos para aviões, sistemas de posicionamento de canhões, sistemas de controle para antenas de radar e outros sistemas militares baseados na abordagem do controle com retroação. A complexidade e o desempenho esperados destes sistemas militares necessitaram de uma extensão das técnicas de controle disponíveis e promoveram o crescimento do interesse por sistemas de controle e o desenvolvimento de novos enfoques e de novos métodos. Antes de 1940, na maioria das vezes, o projeto de sistemas de controle era uma arte que envolvia abordagem de ensaio e erro. Durante os anos 1940, métodos matemáticos e analíticos aumentaram em número e utilidade e a engenharia de controle se constituiu por si mesma uma área específica da engenharia [10-12].

As técnicas de domínio de freqüência continuaram a dominar o campo de controle logo após a Segunda Guerra Mundial com o aumento do uso da Transformada de Laplace e do plano de freqüência complexa. Durante os anos 1950, a ênfase na teoria de engenharia de controle foi o desenvolvimento e o uso de métodos no plano  $s$  e, particularmente, a abordagem do lugar das raízes. Além disso, durante os anos 1980, a utilização de computadores digitais como componentes de controle tornou-se rotina. A tecnologia destes novos elementos de controle para executar cálculos rápidos e precisos era anteriormente indisponível para os engenheiros de controle. Nos dias atuais há mais de quatrocentos mil computadores para o controle digital de processos instalados nos Estados Unidos [14, 27]. Estes computadores são empregados especialmente para sistemas de controle de processos, nos quais muitas variáveis são medidas e controladas simultaneamente pelo computador.



**Fig. 1.6** Regulador de bóia de nível de água.

**TABELA 1.1 Alguns Marcos Históricos Selecionados no Desenvolvimento de Sistemas de Controle**

1769	Desenvolvimento da máquina a vapor e do regulador de esferas de James Watt. A máquina a vapor de Watt é usada freqüentemente para assinalar o início da Revolução Industrial na Grã-Bretanha. Durante a Revolução Industrial foram realizados grandes esforços no desenvolvimento da mecanização, uma tecnologia precedente da automação.
1800	O conceito de intercambiabilidade de partes manufaturadas de Eli Whitney foi demonstrado na fabricação de mosquetões. O desenvolvimento de Whitney é muitas vezes considerado o início da produção em massa.
1868	J. C. Maxwell formula um modelo matemático para o controle regulador de uma máquina a vapor.
1913	Introdução da máquina de montagem mecanizada de Henry Ford para a produção automobilística.
1927	H. W. Bode analisa amplificadores com retroação.
1932	H. Nyquist desenvolve um método para analisar a estabilidade de sistemas.
1952	Desenvolvido o Comando Numérico (CN) no Instituto de Tecnologia de Massachusetts para o controle dos eixos de máquinas ferramentas.
1954	George Devol desenvolve a “transferência programada de itens” considerado o primeiro projeto de robô industrial.
1960	Introduzido o primeiro robô Unimate, baseado nos projetos de Devol. O Unimate foi instalado em 1961 para alimentar máquinas de embutimento.
1970	Desenvolvidos modelos em variáveis de estado e o controle ótimo.
1980	Estudado amplamente o projeto de sistemas de controle robusto.
1990	As empresas orientadas para a exportação de produtos manufaturados enfatizam a automação.
1994	O controle com retroação é usado amplamente nos automóveis. Demanda da manufatura por sistemas robustos, confiáveis.

Com o advento do Sputnik e da era espacial, outros novos estímulos foram dados à engenharia de controle. Era necessário projetar sistemas de controle muito complexos e precisos para mísseis e sondas espaciais. Além disso, a necessidade de minimizar o peso dos satélites e controlá-los de forma precisa deu origem ao importante campo do controle ótimo. Devido a estas exigências, os métodos no domínio do tempo desenvolvidos por Liapunov, Minorsky e outros têm sido objeto de grande interesse nas duas últimas décadas. Teorias recentes do controle ótimo desenvolvidas por L. S. Pontryagin na então União Soviética e R. Bellman nos Estados Unidos, e estudos recentes sobre sistemas robustos, também contribuíram para o interesse em métodos no domínio do tempo. Torna-se evidente agora que a engenharia de controle deve considerar ambos: o domínio do tempo e o domínio da freqüência abordados simultaneamente na análise e projeto de sistemas de controle.

A Tabela 1.1 mostra de forma resumida um histórico do avanço dos sistemas de controle.

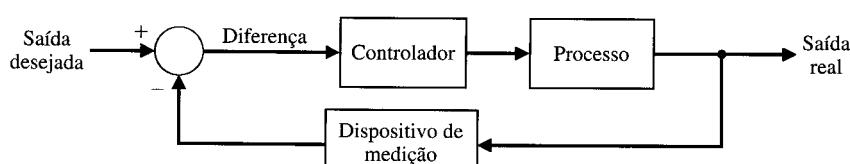
### 1.3 DOIS EXEMPLOS DO USO DE RETROAÇÃO

O conceito de retroação usado para obter um sistema de controle a malha fechada foi descrito na Seção 1.1 e ilustrado pelo sistema da Fig. 1.3. Muitos engenheiros pioneiros usaram o sistema de controle com retroação para alcançar o desempenho desejado. O sistema com retroação é mostrado na Fig. 1.7. A diferença entre o sinal de resposta desejada e uma medida razoavelmente precisa do **sinal de resposta real** (isto é, o erro) é calculada como mostrado na figura. Este modelo de sistema com retroação está ilustrado nos dois exemplos tratados a seguir, sobre o uso da retroação para aperfeiçoar a resposta de um sistema.

Harold S. Black se graduou pelo Instituto Politécnico Worcester em 1921 e ingressou nos Laboratórios Bell da American Telegraph and Telephone (AT&T). Em 1921, a maior tarefa com que se defrontavam os Laboratórios Bell era o aperfeiçoamento do sistema telefônico e o projeto de amplificadores de sinais aperfeiçoados. A Black foi atribuída a tarefa de linearizar, estabilizar e aperfeiçoar os amplificadores que foram usados em cascata na transmissão de conversação entre assinantes distanciados alguns milhares de milhas.

Black relata [8]:

Chegou então a manhã de terça-feira, do dia 2 de agosto de 1927, quando o conceito de amplificador com retroação negativa me veio à mente, num lampejo, enquanto fazia a travessia do rio Hudson no Lackawanna Ferry, a caminho do trabalho. Por mais de 50 anos tenho meditado sobre como e por que me veio a idéia, e hoje não posso dizer mais do que teria dito naquela manhã. Tudo o que sei é que após alguns anos de um



**Fig. 1.7** Sistema a malha fechada com retroação.

trabalho árduo sobre o problema, percebi inesperadamente que se enviasse a saída do amplificador de volta para a entrada, com inversão de fase, e evitasse que o instrumento oscilasse (cantasse, como se chamou então isso), teria exatamente o que desejava: um método de cancelar a distorção de saída. Abri o jornal da manhã e na página do *New York Times* esbocei um diagrama canônico simples de um amplificador com retroação negativa mais as equações para a amplificação com retroação. Assinei o esboço, e vinte minutos mais tarde, quando cheguei ao laboratório na Rua West 463, ele foi visto pessoalmente, compreendido e assinado por Earl C. Blessing.

Imaginei este circuito como capaz de conduzir a amplificadores extremamente lineares (40 a 50 dB de retroação negativa), mas uma importante questão era: Como saberia ser possível evitar auto-oscilações próximas sobre uma faixa de freqüências muito ampla quando muitas pessoas duvidavam que tais circuitos pudessem ser estáveis? Minha confiança se originou do trabalho que fizera dois anos antes a respeito de certos circuitos osciladores recentes e três anos antes no projeto de circuitos terminais, incluindo os filtros, e desenvolvendo a matemática para um sistema de telefonia portadora para circuitos de tarifa reduzida.

Um outro exemplo de descoberta de uma solução de engenharia para um problema de sistema de controle foi a criação de um sistema de direção de tiro por David B. Parkinson dos Laboratórios Bell Telephone. Na primavera de 1940, Parkinson, engenheiro de 29 anos de idade, tenta aperfeiçoar o registrador de nível automático, um instrumento que usava um registrador de papel para plotar a gravação de uma voltagem. Um componente crítico era um pequeno potenciômetro usado para controlar a pena do registrador por meio de um atuador.

Parkinson teve um sonho com um canhão antiaéreo capaz de abater aviões com sucesso. Ele descreveu a situação[13]:

Após três ou quatro tiros um dos homens da tripulação sorriu para mim e me encorajou a chegar mais perto do canhão. Quando me aproximei, ele apontou a extremidade exposta do munhão esquerdo. Lá estava montado o potenciômetro de controle do meu registrador de nível!

Na manhã seguinte Parkinson comprehendeu o significado do seu sonho:

Se meu potenciômetro podia controlar a pena do registrador, algo similar poderia, com a engenharia adequada, controlar um canhão antiaéreo.

Depois de considerável esforço, em 1 de Dezembro de 1941 foi entregue ao Exército dos Estados Unidos, para ser testado, um modelo de engenharia. Modelos de produção se tornaram disponíveis no início de 1943, e finalmente 3.000 controladores de canhões foram entregues. A entrada do controlador era fornecida pelo radar, e o canhão era apontado considerando-se os dados da posição atual do avião e os cálculos da posição futura do alvo.

## 1.4 A PRÁTICA DA ENGENHARIA DE CONTROLE

A engenharia de controle diz respeito a análise e projeto de sistemas orientados para objetivos. Por isto, a mecanização das políticas orientadas a objetivos tem crescido na hierarquia dos sistemas de controle orientados para objetivos. A teoria de controle moderna trata de sistemas que possuem como atributos auto-organização, serem adaptativos, serem robustos, com aprendizado, e ótimos. Este interesse despertou uma excitação ainda maior entre os engenheiros de controle.

O controle de um processo industrial (manufatura, produção e assim por diante) de modo automático em vez de manual é chamado freqüentemente de **automação**. A automação é utilizada amplamente nas indústrias química, de energia elétrica, de papel, automobilística e siderúrgica, dentre outras. Na sociedade industrial de hoje, o conceito de automação é uma questão central. As máquinas automáticas são usadas para aumentar a produção *per capita* dos operários de uma fábrica com o objetivo de compensar o aumento dos salários e os custos inflacionários. Assim, as indústrias estão interessadas na produtividade por trabalhador de suas fábricas. A **produtividade** é definida como a relação entre a saída obtida e a entrada de recursos utilizados [26]. Trata-se, neste caso, da produtividade de trabalho, que é a saída efetivamente obtida por cada hora de trabalho.

Além disso, as indústrias buscam fornecer produtos que sejam cada vez mais precisos, confiáveis, exatos e robustos. Por exemplo, o controle preciso e confiável do desempenho dos automóveis tem sido aperfeiçado notadamente durante as últimas décadas.

A transformação da mão-de-obra dos Estados Unidos na breve história do país resulta da mecanização progressiva do trabalho que acompanhou a evolução de uma república agrária para se converter em potência industrial mundial. Em 1820, mais de 70% da mão-de-obra trabalhava no campo. Em 1900, menos de 40% estavam envolvidos na agricultura. Hoje, menos de 5% trabalham na agricultura [15].

Em 1925, cerca de 588.000 pessoas — aproximadamente 1,3% da mão-de-obra da nação — eram necessárias para a extração de 520 milhões de toneladas de carvão betuminoso e linhita, predominantemente em minas no subsolo. Por volta de 1980, a produção foi superior a 774 milhões de tone-

ladas, mas a força do trabalho foi reduzida para 208.000 pessoas. Além disso, desse número, somente 136.000 pessoas foram empregadas nas operações subterrâneas de mineração. As minas de superfície altamente mecanizadas e altamente produtivas, com apenas 72.000 operários, produziram 482 milhões de toneladas, ou 62% do total [27].

A facilitação do trabalho humano através da tecnologia, um processo que começou na pré-história, está entrando em um novo estágio. A aceleração no ritmo da inovação tecnológica inaugurada pela Revolução Industrial até recentemente resultou principalmente no afastamento da força muscular humana das tarefas de produção. A revolução atual na tecnologia dos computadores está causando uma mudança social igualmente importante: a expansão da aquisição e do processamento de informações à medida que os computadores ampliam o alcance do cérebro humano [16].

Os sistemas de controle são usados para obter (1) aumento de produtividade e (2) melhoria de desempenho de um dispositivo ou sistema. A automação é usada para aumentar a produtividade e obter produtos de alta qualidade. A automação é a operação automática ou o controle de um processo, dispositivo, ou sistema. Utiliza-se o controle automático de máquinas e processos para gerar um produto dentro de tolerâncias especificadas e para obter alta precisão [28].

O termo *automação* se tornou popular primeiro na indústria automobilística. Linhas de transferência foram acopladas com máquinas-ferramentas automáticas para criar longas linhas de máquinas que poderiam produzir partes do motor, tais como o bloco de cilindros, virtualmente sem intervenção de operador. Na produção de partes do corpo, foram acoplados mecanismos de alimentação automática dotados de prensas de estampagem para aumentar a produtividade na conformação de lâminas de metal. Em muitas outras áreas onde os projetos permaneceram relativamente estáveis, como na produção de radiadores, linhas inteiramente automatizadas substituíram as operações manuais.

Com a demanda de uma produção flexível e personalizada emergindo nos anos noventa, têm crescido a automação flexível e a robótica [17, 25].

Há, aproximadamente, 150.000 engenheiros de controle nos Estados Unidos e igual número no Japão e na Europa. Só nos Estados Unidos, a indústria de controle mobiliza negócios num total de mais de 50 bilhões de dólares por ano! A teoria, a prática e as aplicações de controle automático constituem um ramo da engenharia muito amplo, excitante e extremamente útil. Dá para entender facilmente a motivação para o estudo de sistemas de controle modernos.

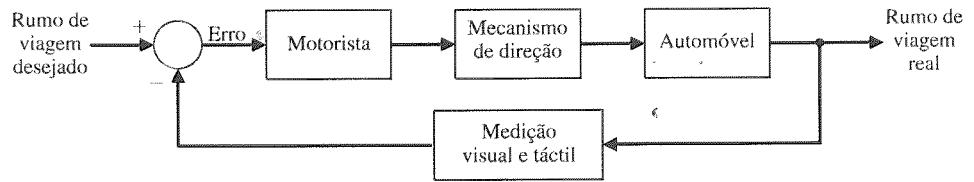
## 1.5 EXEMPLOS DE SISTEMAS DE CONTROLE MODERNOS

O controle com retroação é um fato fundamental da indústria e da sociedade modernas. Dirigir um automóvel é uma tarefa agradável quando o carro responde rapidamente aos comandos do motorista. Muitos carros possuem sistemas assistidos de direção e de freios, nos quais se utilizam amplificadores hidráulicos para amplificação da força aplicada aos freios ou à direção. Um diagrama de blocos simples de sistema de controle de direção de um automóvel é mostrado na Fig. 1.8(a). O rumo desejado é comparado com uma medida do rumo real para gerar uma medida do erro, como mostrado na Fig. 1.8(b). Esta medida é obtida por meio de retroação visual e táctil (movimento do corpo). Há uma retroação adicional proveniente da sensação da mão (sensor) sobre o volante de direção. Este sistema com retroação é uma versão familiar do sistema de controle de direção de um transatlântico ou dos controles de vôo em um grande avião. Um sinal de resposta típica de direção de percurso é mostrada na Fig. 1.8(c).

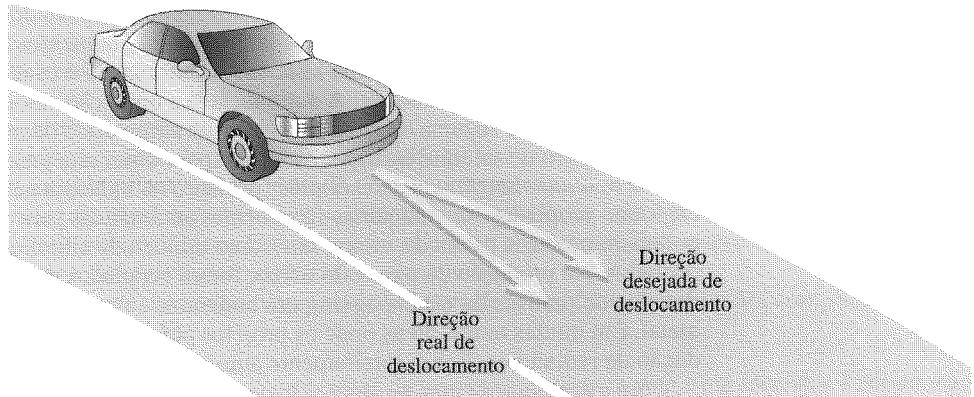
Os sistemas de controle operam em uma seqüência de malha fechada, como mostrado na Fig. 1.9. Com um sensor preciso, a saída medida é igual à saída real do sistema. A diferença entre a saída desejada e a saída real é igual ao erro, que é então ajustado pelo dispositivo de controle (tal como um amplificador). A saída do dispositivo de controle faz com que o atuador controle o processo no sentido de reduzir o erro. A seqüência, por exemplo, é a seguinte: se o navio estiver apontado incorretamente para a direita, o leme éacionado de modo a direcionar o navio para a esquerda. O sistema mostrado na Fig. 1.9 é um sistema de controle de **retroação negativa**, porque a saída é subtraída da entrada e a diferença é usada como sinal de entrada para o amplificador de potência.

Um sistema de malha fechada básico, manualmente controlado para regular o nível de fluido em um reservatório é mostrado na Fig. 1.10. A entrada é um nível de referência do fluido que o operador está instruído a manter. (Esta referência é memorizada pelo operador.) O amplificador de potência é o operador, e o sensor é visual. O operador compara o nível real com o nível desejado e abre ou fecha a válvula (atuador), ajustando o fluxo de saída do fluido para manter o nível desejado.

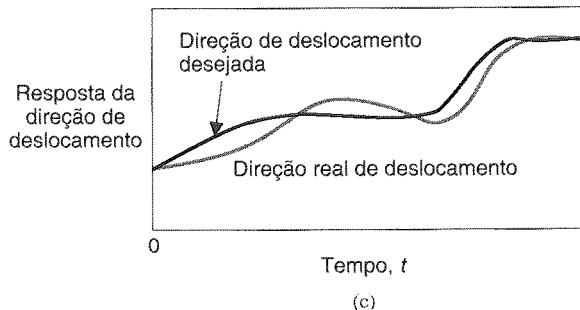
Outros sistemas de controles familiares têm os mesmos elementos básicos que o sistema mostrado na Fig. 1.9. Um refrigerador tem um ponto de ajuste de temperatura ou temperatura desejada, um termostato para medir a temperatura real e o erro, e um motor compressor para amplificação de potência. Outros exemplos de equipamentos domésticos são forno, sistema de calefação e aquecedor de água. Na indústria, existem controles de velocidade, controles de temperatura e de pressão em processos, controle de posição, de espessura, de composição e de qualidade, dentre muitos outros [14, 17, 18].



(a)

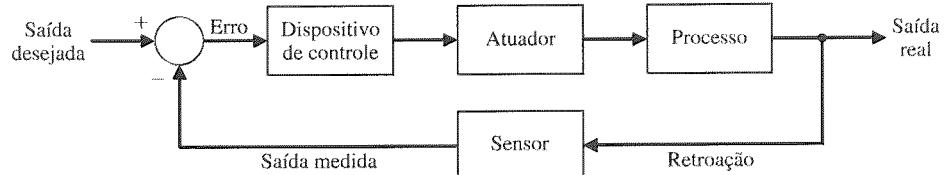


(b)

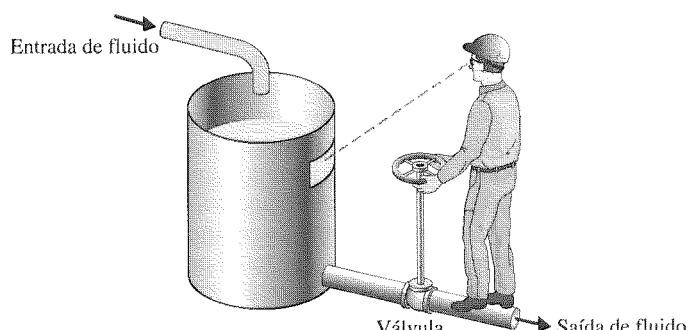


**Fig. 1.8** (a) Sistema de controle de direção do automóvel. (b) O motorista usa a diferença entre a direção real e a direção desejada da viagem para gerar um ajuste controlado da direção do volante. (c) Resposta típica de uma direção de viagem.

**Fig. 1.9** Um diagrama de blocos de um sistema com retroação negativa descrevendo um sistema de controle básico a malha fechada. O dispositivo de controle é usualmente chamado de "controlador".



**Fig. 1.10** Sistema de controle manual para regular o nível de fluido em um reservatório ajustando a válvula de saída. O operador observa o nível de fluido através de uma janela na parede lateral do reservatório.



**TABELA 1.2 Tarefas Difíceis: Seres Humanos Versus Máquinas Automáticas**

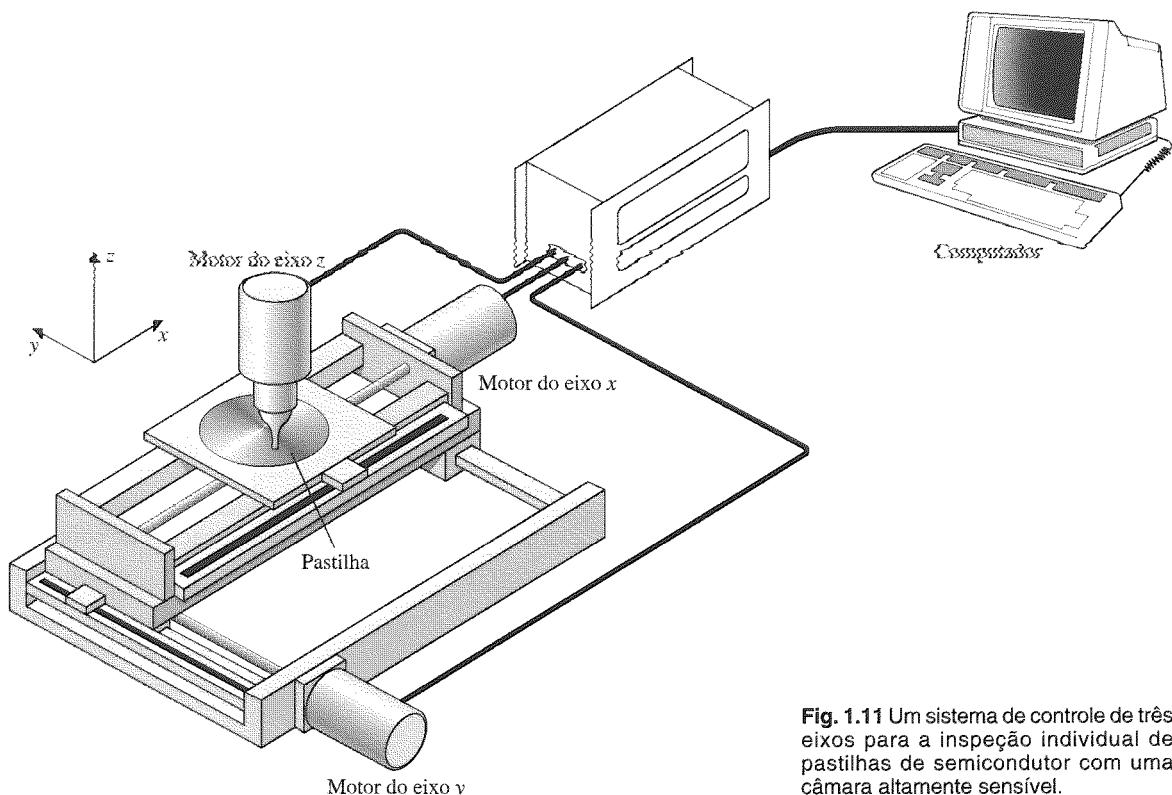
Tarefas Difíceis para Máquinas	Tarefas Difíceis para Seres Humanos
Inspecionar mudas em um viveiro.	Inspecionar um sistema em ambiente quente e tóxico.
Dirigir um veículo em terreno acidentado.	Montar um relógio repetitivamente.
Identificar as jóias mais caras em uma bandeja de jóias.	Pousar uma aeronave à noite, com mau tempo.

Em seu uso moderno, a automação pode ser definida como uma tecnologia que utiliza comandos programados para operar um dado processo, combinados com retroação de informação para determinar que os comandos sejam executados corretamente. A automação é usada freqüentemente em processos antes operados por seres humanos. Quando automatizado, o processo pode operar sem assistência ou interferência do homem. Na verdade, a maioria dos sistemas automatizados são capazes de executar suas funções com maior precisão e rigor, e em menos tempo, que os seres humanos. Um processo semi-automatizado é aquele que incorpora tanto seres humanos quanto robôs. Por exemplo, muitas operações de linha de montagem de automóveis exigem cooperação entre um operador humano e um robô inteligente.

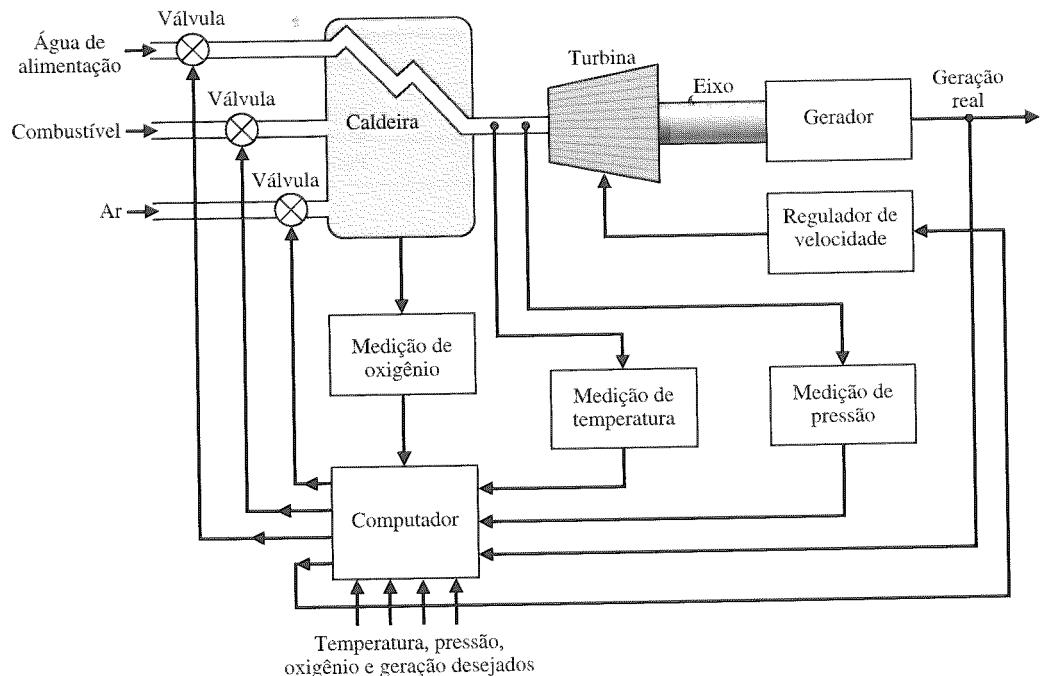
Um **robô** é uma máquina controlada por computador e envolve tecnologia intimamente associada com automação. A robótica industrial pode ser definida como um campo particular da automação no qual a máquina automatizada (isto é, o robô) é projetada para substituir o trabalho humano [18, 27, 33]. Assim, os robôs possuem certas características parecidas com as humanas. Hoje, a característica semelhante à humana mais comum é o manipulador mecânico que procura imitar um pouco o braço e o pulso dos seres humanos. Reconhece-se que as máquinas automáticas são bem adequadas para algumas tarefas, como assinalado na Tabela 1.2, e que outras tarefas são mais bem realizadas por seres humanos.

Uma outra aplicação importante da tecnologia de controle está no controle do automóvel moderno [19, 20]. Têm sido introduzidos sistemas de controle para a suspensão, a direção e o motor. Muitos carros novos têm um sistema de tração nas quatro rodas, bem como sistema de controle antiderrapagem.

Um sistema de controle de três eixos para inspeção individual de pastilhas de semicondutores está mostrado na Fig. 1.11. Este sistema usa um motor específico para acionar cada um dos eixos para a



**Fig. 1.11** Um sistema de controle de três eixos para a inspeção individual de pastilhas de semicondutor com uma câmera altamente sensível.

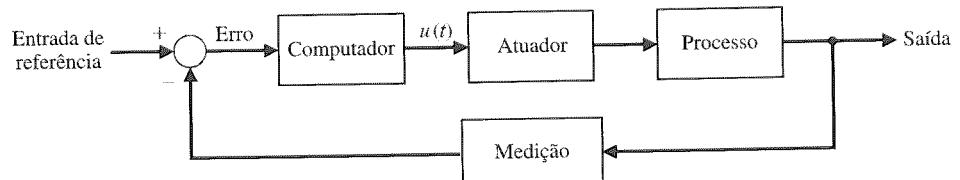


**Fig. 1.12** Sistema de controle coordenado para um termo-gerador.

posição desejada segundo os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. O objetivo é realizar um movimento suave e preciso segundo cada um dos eixos. Este sistema de controle é um dos importantes para a indústria de manufatura de semicondutores.

Tem havido recentemente uma considerável discussão envolvendo a distância entre a teoria e a prática na engenharia de controle. Como sempre, é natural que a teoria preceda as aplicações em muitos campos da engenharia de controle. Apesar disso, é interessante notar que na indústria de energia elétrica, a maior indústria nos Estados Unidos, a distância é relativamente insignificante. A indústria de energia elétrica está interessada principalmente na conversão, controle e distribuição de energia. É um fator crítico que o controle por computador seja cada vez mais aplicado à indústria de energia para aperfeiçoar o uso eficiente de recursos energéticos. Além disto, o controle de **usinas geradoras** para se obter um mínimo de perdas por emissão tem se tornado cada vez mais importante. As usinas modernas, de alta capacidade, acima de centenas de megawatts, requerem sistemas de controle automáticos para levar em conta a inter-relação das variáveis do processo e produção ótima de energia. É comum ter 90 ou mais variáveis manipuladas sob controle coordenado. Um modelo simplificado mostrando algumas das variáveis de controle importantes de um grande sistema com gerador térmico de caldeira é mostrado na Fig. 1.12. Este é um exemplo da importância de se medir muitas variáveis, como pressão e teor de oxigênio, para fornecer informações ao computador para os cálculos de controle. Estima-se que mais de quatrocentos mil sistemas de controle computadorizados estejam instalados nos Estados Unidos [14, 16, 36, 39]. O diagrama de um sistema de controle computadorizado está mostrado na Fig. 1.13; observe-se que o computador é o dispositivo de controle. A indústria de energia elétrica tem utilizado os aspectos modernos da engenharia de controle para aplicações expressivas e interessantes. Parece que, na indústria de processo, o fator que mantém o distanciamento das aplicações é a falta de instrumentação para medir todas as variáveis de processo importantes, incluindo a qualidade e a composição do produto. À medida que estes instrumentos se tornem disponíveis, as aplicações da teoria de controle moderna aos sistemas industriais devem ter um aumento significativo.

Uma outra indústria importante, a metalúrgica, tem tido considerável sucesso em controlar automaticamente seus processos. Com efeito, em muitos casos, as aplicações de controle estão além



**Fig. 1.13** Sistema controlado por computador.

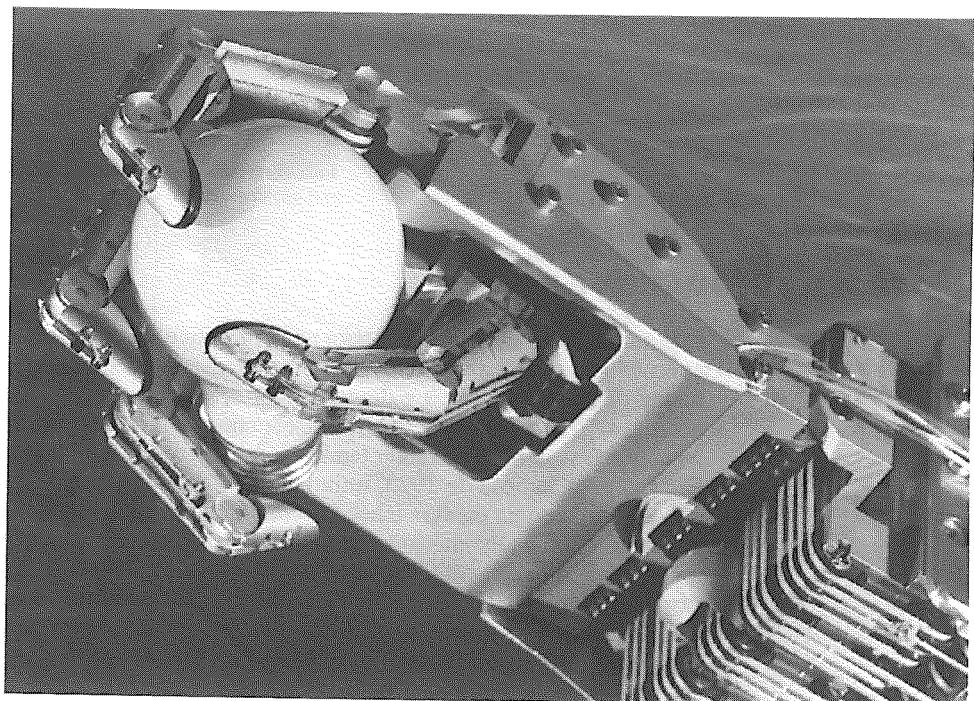
da teoria. Por exemplo, uma laminadora de aço por estiramento a quente, que envolve um investimento de 100 milhões de dólares, é controlada em temperatura, largura da chapa, espessura e qualidade.

Os custos com energia, rapidamente crescentes, acoplados à ameaça de redução da oferta, estão resultando em novos esforços para um gerenciamento automático eficiente da energia. Controladores computadorizados são usados para controlar o uso de energia na indústria e para estabilizar e conectar cargas uniformemente de modo a obter economia de combustível.

Tem havido recentemente um interesse considerável em aplicar os conceitos de controle com retroação para o controle automático de armazenamento e de estoque. Além disto, o controle automático de sistemas agrícolas (fazendas) está experimentando um interesse crescente. Silos e tratores controlados automaticamente têm sido desenvolvidos e testados. O controle automático de aerogeradores, de sistemas de aquecimento e de refrigeração solares e o desempenho de motores de combustão interna dos automóveis constituem exemplos modernos importantes [20, 21].

Além disto, tem havido muitas aplicações da teoria de sistemas de controle à experimentação biomédica, ao diagnóstico, às próteses e aos sistemas de controle biológicos [22, 23, 51]. Os sistemas de controle sob consideração abrangem desde o nível celular até o nível do sistema nervoso central e incluem regulação de temperatura e controle neurológico, respiratório e cardiovascular. A maioria dos sistemas de controle fisiológicos são sistemas a malha fechada. Contudo, constata-se não a existência de um único controlador, mas, em vez disto, de malhas de controle no interior de outras malhas de controle, formando uma hierarquia de sistemas. A modelagem da estrutura de processos biológicos confronta o analista com modelos de ordem elevada e de estrutura complexa. Próteses que auxiliam 46 milhões de deficientes físicos nos Estados Unidos da América são projetadas para dotá-las de recursos controlados automaticamente [22, 27, 42]. Uma mão artificial que utiliza sinais de retroação de força e é controlada pelos sinais de controle bioelétricos do membro amputado, chamada de sinais eletromiográficos, está mostrada na Fig. 1.14.

Finalmente, tem se tornado interessante e valioso tentar modelar processos com retroação predominantes nas esferas social, econômica e política. Esta abordagem, ainda incipiente na fase atual, parece ter um futuro razoavelmente promissor. A sociedade, naturalmente, é composta de muitos sistemas com retroação e entidades reguladoras, como a Interstate Commerce Commission e o Federal Reserve Board, que são controladores exercendo sobre a sociedade as forças necessárias para manter uma determinada saída. Um modelo simples de parâmetros concentrados do sistema de controle, com retroação, do produto nacional está mostrado na Fig. 1.15. Este tipo de modelo auxilia o analista a compreender os efeitos do controle do governo — caso existam — e os efeitos dinâmicos dos gastos governamentais. Naturalmente, muitas outras malhas não mostradas também existem, uma vez que, teoricamente, os gastos do governo não podem exceder os impostos



**Fig. 1.14** A mão robótica de Utah/MIT: Uma mão robótica dotada de 18 graus de liberdade, desenvolvida como ferramenta de pesquisa pelo Center for Engineering Design na Universidade de Utah e pelo Artificial Intelligence Laboratory do MIT. Ela é controlada por cinco microprocessadores Motorola 68000 e acionada por meio de 36 atuadores eletroneumáticos de alto desempenho por meio de tendões poliméricos de alta resistência. A mão tem três dedos e um polegar. Ela utiliza sensores de tato e tendões para o controle. (Fotografia de Michael Milochik. Cortesia da Universidade de Utah.)

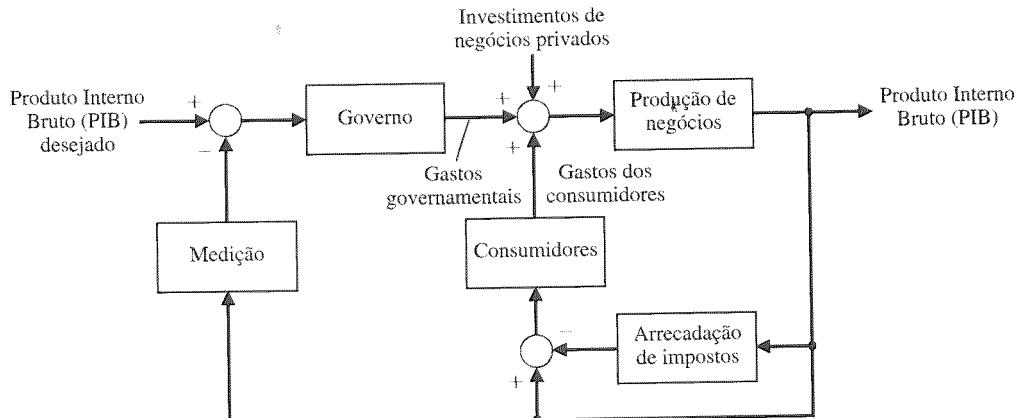


Fig. 1.15 Um modelo de sistema de controle do Produto Interno Bruto (PIB) com retroação.

arrecadados sem gerar um déficit, o qual, por sua vez é uma malha de controle contendo o Internal Revenue Service e o Congresso. Como é óbvio, em um país socialista, a malha devida aos consumidores é desenfatizada e o controle do Estado é enfatizado. Nesse caso, os blocos de medição devem ser precisos e devem responder rapidamente; estes dois requisitos são características muito difíceis de serem percebidas em um sistema burocrático. Este tipo de modelo de sistema social e econômico com retroação, embora usualmente não-rigoroso, fornece informação e ajuda na compreensão dos fenômenos envolvidos.

Os sistemas de controle com retroação são amplamente usados nas aplicações industriais. Um robô de laboratório está mostrado na Fig. 1.16. Milhares de robôs industriais e de laboratório estão atualmente em uso. Manipuladores podem apanhar objetos pesando centenas de quilos e posicioná-los com exatidão de um décimo de polegada ou melhor [28].

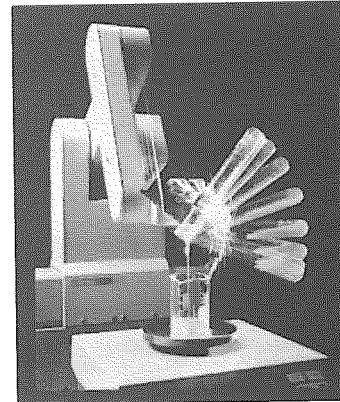
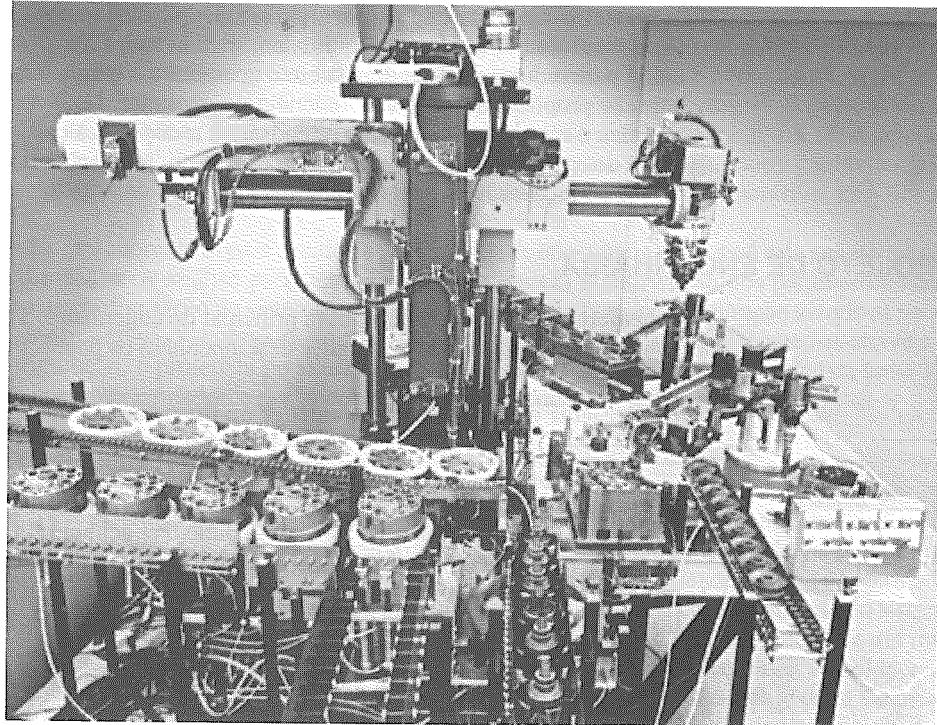


Fig. 1.16 Um robô de laboratório usado para preparação de amostras. O robô manipula pequenos objetos, tais como tubos de ensaio e sondas que entram e saem de lugares apertados a velocidades relativamente altas [41]. (© 1993 Hewlett-Packard Company. Reproduzido com autorização.)

## 1.6 MONTAGEM AUTOMÁTICA E ROBÔS

Os equipamentos de manuseio para uso doméstico, escolar e industrial são particularmente úteis na execução de tarefas arriscadas, repetitivas, tediosas ou simples. Máquinas que realizam automaticamente operações de carga e descarga, corte, soldagem ou fundição são usadas pela indústria para obter [14, 27, 28] precisão, segurança, economia e produtividade. O uso de computadores integrados a máquinas capazes de realizar tarefas como um operador humano foi previsto por diversos autores. Em sua peça famosa de 1923, intitulada *R.U.R.* [48], Karel Capek chamou operários artificiais de *robôs*, com base na palavra tcheca *robot*, que significa “trabalho”.

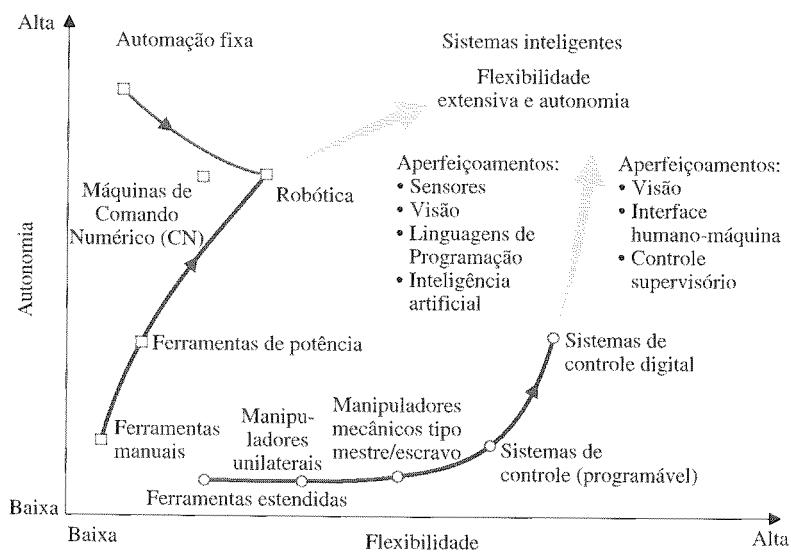
Como assinalado anteriormente, os robôs são computadores programáveis integrados com máquinas e, freqüentemente, substituem o trabalho humano em tarefas repetitivas específicas. Alguns dispositivos possuem até mesmo mecanismos antropomórficos, incluindo o que se poderia reconhecer como braços, pulsos e mãos mecânicos [14, 27, 28]. Os robôs são usados largamente nas atividades de exploração e de construção espaciais. Os robôs constituem, ainda, auxílios flexíveis e precisos em linhas de montagem, como está mostrado na Fig. 1.17.



**Fig. 1.17** Uma estação de montagem robótizada programável pode montar em 2 minutos e 42 segundos as 17 partes de um alternador para automóvel comercial. Na extremidade direita está uma caixa de controle através da qual pode ser ensinada ao robô uma seqüência de movimentos que são gravados na memória de um microcomputador. (Cortesia da *Scientific American*. Fotografia de Ben Rose.)

## 1.7 A EVOLUÇÃO FUTURA DOS SISTEMAS DE CONTROLE

O objetivo permanente dos sistemas de controle é prover ampla flexibilidade e nível elevado de autonomia. Estes dois conceitos de sistemas estão se aproximando deste objetivo através de diferentes caminhos evolutivos, como está mostrado na Fig. 1.18. Os robôs industriais de hoje são entendidos como bastante autônomos — uma vez programados, normalmente não há necessidade de intervenções humanas posteriores. Em virtude das limitações sensoriais, esses sistemas robóticos possuem flexibilidade limitada à adaptação a mudanças no ambiente de trabalho, que têm constituído motivação para pesquisas na área de visão por computador. O sistema de controle é muito adaptável, mas depende da supervisão humana. Os sistemas robóticos avançados estão tentando a adaptabilidade a tarefas através de maior ênfase na retroação sensorial. Áreas de pesquisa concentradas em inteligência artificial, fusão multisensorial, visão por computador e programação CAD/CAM *off line* tornarão os sistemas mais universais e econômicos. Os



**Fig. 1.18** Evolução futura dos sistemas de controle e da robótica.

sistemas de controle estão se movendo em direção a operações autônomas como um aperfeiçoamento do controle humano. As pesquisas em sistemas supervisórios, métodos de interface humano-máquina para reduzir a sobrecarga sobre o operador e o gerenciamento de bancos de dados em computador se propõem aumentar a eficiência do operador. Muitas atividades de pesquisa são comuns à robótica e aos sistemas de controle e visam à redução dos custos de implementação e a expansão do leque de aplicações. Isto engloba métodos de comunicações aperfeiçoados e linguagens de programação avançadas.

## 1.8 PROJETO DE ENGENHARIA

O projeto de engenharia é a tarefa principal do engenheiro. Trata-se de um procedimento complexo no qual a criatividade e a análise desempenham os papéis principais.

---

**Projetar é o processo de conceber ou inventar formas, partes e detalhes de um sistema para alcançar um fim específico.**

---

A atividade de projeto pode ser vista como um planejamento para dar lugar a um novo produto ou sistema. O projeto é uma ação inovadora onde o engenheiro usa de forma criativa conhecimentos e materiais para especificar a forma, a função e o conteúdo material de um sistema. As etapas de um projeto são (1) determinar uma necessidade oriunda dos valores de vários grupos, cobrindo o espectro que vai desde os responsáveis pela elaboração das políticas públicas até os consumidores; (2) especificar em detalhes o que deveria ser uma solução para essa necessidade e incorporar estes valores; (3) desenvolver e avaliar várias soluções alternativas para atingir estas especificações; e (4) decidir qual delas será projetada em detalhes e fabricada.

Um fator importante para um projeto realista é a limitação de tempo. O projeto se dá mediante prazos de realização impostos, e finalmente a opção se dá por um projeto que pode ser inferior ao ideal mas que seja considerado “suficientemente bom”. Em muitos casos, o prazo se constitui a única vantagem competitiva.

Um dos principais desafios para o projetista é escrever as especificações para a produção técnica. As **especificações** são enunciados que estabelecem explicitamente o que os dispositivos devem ser e fazer. O projeto de sistemas técnicos visa alcançar as especificações de projeto apropriadas e repousa sobre quatro características: complexidade, custo-benefício, desvios de projeto e riscos.

A **complexidade do projeto** resulta de uma ampla gama de ferramentas, recursos e conhecimentos a serem usados no processo. O grande número de fatores a serem considerados ilustra a complexidade da atividade de especificação do projeto, não somente na atribuição da importância relativa destes fatores em um projeto particular, mas também em dar-lhes substância sob forma numérica ou escrita, ou ambas.

O conceito de **custo-benefício** envolve a necessidade de se julgar quanto de um determinado compromisso deve ser feito entre dois critérios conflitantes, ambos desejáveis. O procedimento de projeto requer um compromisso eficiente entre critérios desejáveis porém conflitantes.

Ao se elaborar um dispositivo técnico, o produto final geralmente não se parece com o que foi originalmente visualizado. Por exemplo, a imagem a respeito do problema que se está resolvendo não é a que aparece na descrição escrita e finalmente nas especificações. Tais diferenças são intrínsecas na progressão a partir de uma idéia abstrata até sua realização.

Esta incapacidade de se estar absolutamente seguro a respeito de previsões sobre o desempenho de um objeto tecnológico conduz às principais incertezas a respeito dos efeitos reais de dispositivos e produtos projetados. Estas incertezas estão incorporadas na idéia de consequências não-intencionais ou **risco**. O resultado é que projetar sistemas é uma atividade de considerar riscos.

Complexidade, custo-benefício, desvios e risco são inerentes ao projeto de novos sistemas e equipamentos. Embora possam ser minimizados levando em consideração todos os efeitos em um determinado projeto, estarão sempre presentes no procedimento de projeto.

Dentro de um projeto de engenharia, há uma diferença fundamental entre os dois principais tipos de pensamento que devem estar presentes: análise de engenharia e síntese. A atenção é focalizada em modelos de sistemas físicos que são analisados para permitir uma visão integrada e que indicam as direções para melhoria. Por outro lado, a **síntese** é o procedimento por meio do qual são criadas novas configurações físicas.

Projetar é um processo que deve prosseguir em muitas direções antes de se encontrar o projeto que se deseja. Trata-se de um procedimento deliberado através do qual o projetista cria algo novo em resposta a uma necessidade reconhecida, ao mesmo tempo em que identifica restrições realis-

tas de implementação. O procedimento de projeto é inherentemente interativo — deve ser começado em algum ponto! Os engenheiros de sucesso aprendem a simplificar adequadamente sistemas complexos para fins de projeto e de análise. Desvios entre sistemas físicos complexos e os modelos de projeto são inevitáveis. **Desvios de projeto** são intrínsecos na progressão a partir do conceito inicial até o produto final. Sabe-se intuitivamente que é mais fácil melhorar incrementalmente um conceito inicial do que tentar criar no começo um projeto final. Em outras palavras, o projeto de engenharia não é um procedimento linear. Trata-se de um processo interativo, não-linear e criativo.

A principal abordagem para a maioria dos projetos de engenharia eficazes é a da análise paramétrica e da otimização. A análise paramétrica é baseada em (1) identificação dos parâmetros-chave, (2) geração da configuração de sistema e (3) avaliação de quão bem a configuração atende às necessidades. Estas três etapas formam um laço interativo. Após identificação dos parâmetros-chave e síntese da configuração, o projetista pode **otimizar** os parâmetros. Tipicamente, o projetista tenta identificar um conjunto limitado de parâmetros a serem ajustados.

## 1.9 PROJETO DE SISTEMAS DE CONTROLE

O projeto de sistemas de controle é um exemplo específico de projeto de engenharia. Aqui, novamente, a finalidade do projeto de engenharia de controle é obter a configuração, as especificações e a identificação dos parâmetros-chave de um sistema proposto para atender a uma necessidade real.

O primeiro passo no procedimento de projeto consiste em estabelecer a finalidade do sistema. Por exemplo, pode-se estabelecer que o objetivo é controlar com exatidão a velocidade de um motor. O segundo passo é identificar as variáveis que se deseja controlar (por exemplo, a velocidade do motor). O terceiro passo é escrever as especificações em termos da exatidão que se deve alcançar. Esta exatidão requerida leva à identificação de um sensor para medir a variável controlada.

Como um projetista, prossegue-se na primeira tentativa de configurar um sistema que conduza ao desempenho de controle desejado. Esta configuração de sistema consistirá, normalmente, de um sensor, de um processo sob controle, de um atuador e de um controlador, como está mostrado na Fig. 1.9. O próximo passo consiste em identificar um candidato a atuador. Este desejo, naturalmente, depende do processo, mas a atuação escolhida deve ser capaz de ajustar efetivamente o desempenho do processo. Por exemplo, se for desejado controlar a velocidade de um volante em rotação, será selecionado um motor como atuador. O sensor, neste caso, deverá ser capaz de medir com exatidão a velocidade angular do volante. Obtém-se então um modelo para cada um destes elementos.

O próximo passo é a seleção de um controlador, que quase sempre consiste de um amplificador somador que irá comparar a resposta desejada com a resposta real e em seguida encaminhar este sinal de medida de erro a um amplificador.

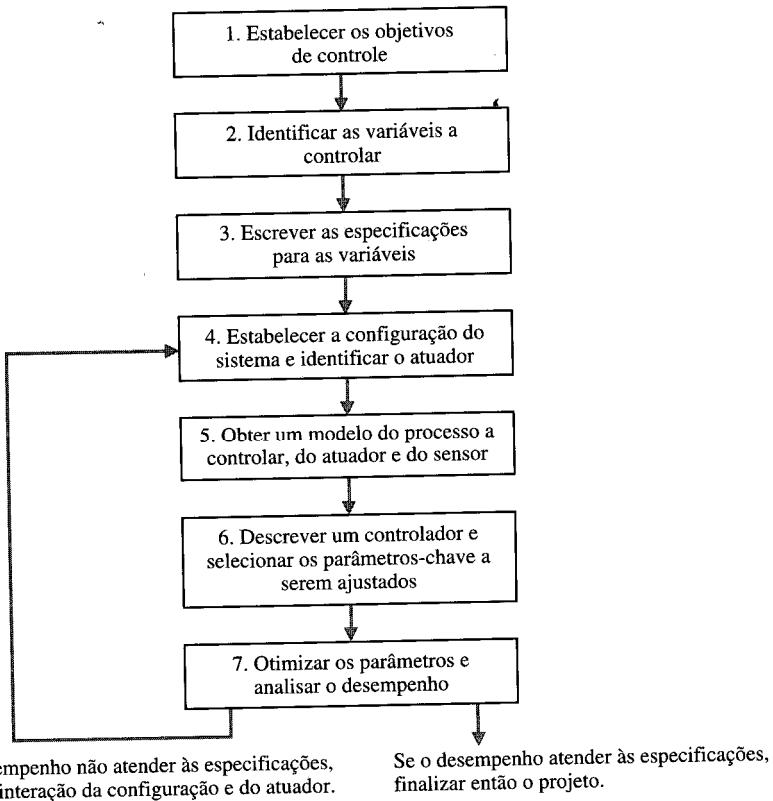
O último passo no procedimento de projeto é o ajuste dos parâmetros do sistema a fim de obter o desempenho desejado. Se, por meio do ajuste de parâmetros, tiver sido alcançado o desempenho desejado, o projeto será finalizado e se procederá à documentação dos resultados. Se não, será necessário estabelecer uma configuração de sistema melhorada e talvez selecionar um atuador e um sensor de melhor desempenho. Em seguida, serão repetidos os passos do projeto até que se seja capaz de atender às especificações ou até que se decida que as especificações estão muito apertadas e que poderiam ser relaxadas. O procedimento de projeto de sistemas de controle está resumido na Fig. 1.19.

As especificações de desempenho descreverão como o sistema a malha fechada deverá se comportar e incluirão (1) boa regulação contra perturbações, (2) respostas desejadas aos comandos, (3) sinais reais do atuador, (4) baixas sensibilidades e (5) robustez.

O procedimento de projeto tem sido afetado consideravelmente com o advento de computadores potentes e de baixo custo e de software eficiente para análise e projeto de sistemas de controle. Por exemplo, o Boeing 777, que incorpora os instrumentos de vôo mais avançados de todos os aviões comerciais dos Estados Unidos, foi quase totalmente projetado em computador [62, 63]. A verificação dos projetos finais em simulações de alta fidelidade em computador é essencial. Em muitas aplicações, a certificação do sistema de controle em simulações realísticas representa custos importantes em recursos financeiros e em tempo. Os pilotos de prova do Boeing 777 realizaram cerca de 2.400 vôos em simulações de alta fidelidade antes mesmo que o primeiro avião tivesse sido construído.

Um outro exemplo notável de projeto e análise auxiliados por computador é o veículo experimental DC-X da McDonnell Douglas Delta Clipper, que foi projetado, construído e posto em vôo em 24 meses. Ferramentas de projeto assistido por computador e geração automática de códigos contribuíram para uma redução de custos estimada de 80% e uma redução de tempo de 30% [64].

Em resumo, o problema de se projetar um controlador é o seguinte: dado um modelo de sistema para ser controlado (incluindo seus sensores e atuadores) e um conjunto de objetivos de projeto, encontrar um controlador adequado ou determinar que não existe nenhum.



**Fig. 1.19** O procedimento de projeto de sistemas de controle.

Se o desempenho não atender às especificações, repetir a interação da configuração e do atuador.

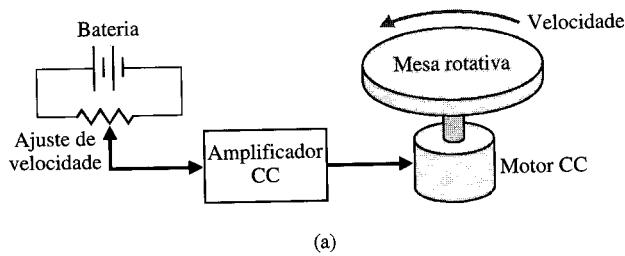
Se o desempenho atender às especificações, finalizar então o projeto.

## 1.10 EXEMPLO DE PROJETO: CONTROLE DE VELOCIDADE DE MESA ROTATIVA

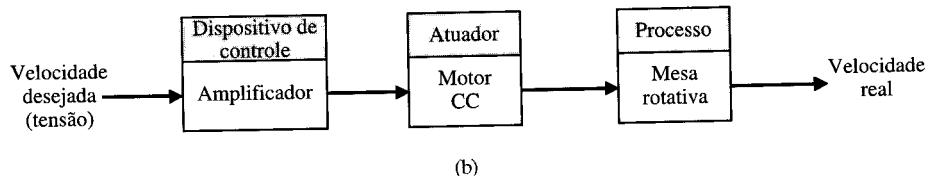
Inúmeros dispositivos modernos usam uma mesa rotativa para girar um disco com velocidade constante. Por exemplo, o leitor de CD, o acionador de disco de computador e o toca-fitas, todos exigem uma velocidade constante a despeito do desgaste do motor, de variações da carga e de alterações de outros componentes. O objetivo é projetar um sistema para controlar a velocidade da mesa rotativa capaz de assegurar que a velocidade real de rotação esteja dentro de uma porcentagem especificada da velocidade desejada [43, 46]. Serão considerados um sistema sem retroação e um sistema com retroação.

Para se obter a rotação do disco, será selecionado um motor CC como atuador, porque ele fornece uma velocidade proporcional à tensão elétrica que lhe é aplicada. Para aplicar a tensão de alimentação no motor, será selecionado um amplificador que possa fornecer a potência requerida.

O sistema a malha aberta (sem retroação) é mostrado na Fig. 1.20(a). Este sistema usa uma bateria como fonte de alimentação para fornecer uma tensão elétrica de referência que é proporcional à velocidade desejada. Esta tensão é amplificada e aplicada ao motor. O diagrama de blocos do sistema a malha aberta identificando o dispositivo de controle, o atuador e o processo está mostrado na Fig. 1.20(b).

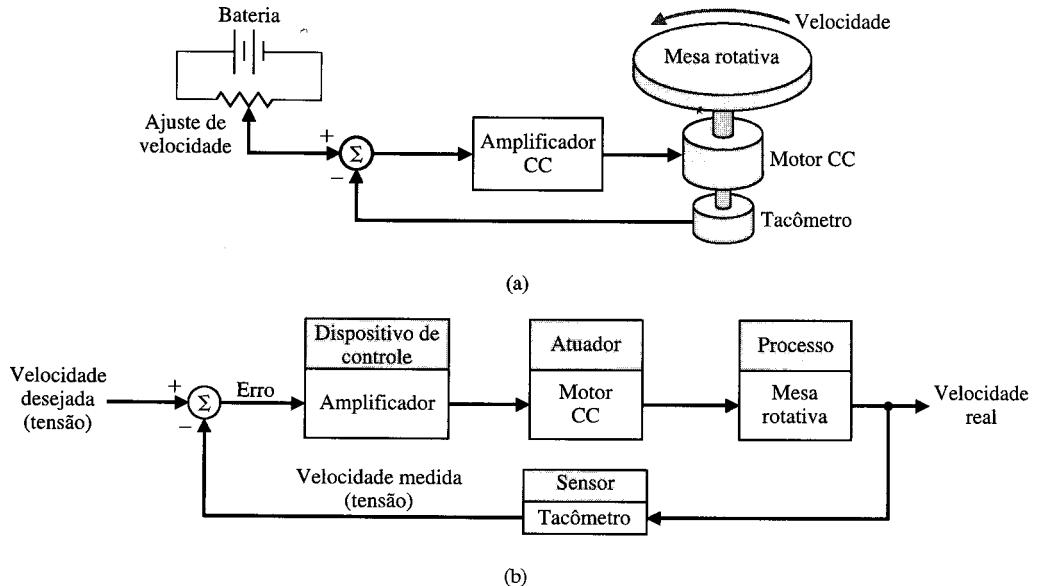


(a)



(b)

**Fig. 1.20** (a) Sistema de controle de velocidade de uma mesa rotativa a malha aberta (sem retroação). (b) Modelo em diagrama de blocos.



**Fig. 1.21** (a) Sistema de controle de velocidade de uma mesa rotativa a malha fechada. (b) Modelo em diagrama de blocos.

Para obter um sistema com retroação com a forma geral da Fig. 1.9, é preciso selecionar um sensor. Um sensor útil é um tacômetro que fornece uma tensão de saída proporcional à velocidade do seu eixo. Assim, o sistema com retroação a malha fechada adquire a forma mostrada na Fig. 1.21(a). O modelo em diagrama de blocos do sistema com retroação é mostrado na Fig. 1.21(b). A tensão de erro é gerada pela diferença entre a tensão de entrada e a tensão do tacômetro.

Espera-se que o sistema com retroação da Fig. 1.21 seja superior ao sistema a malha aberta da Fig. 1.20 porque o sistema com retroação responderá aos erros e trabalhará para reduzi-los. Usando componentes precisos, pode-se esperar uma redução de erro do sistema de retroação para um centésimo do erro do sistema a malha aberta.

## 1.11 EXEMPLO DE PROJETO: SISTEMA DE CONTROLE DE APLICAÇÃO DE INSULINA

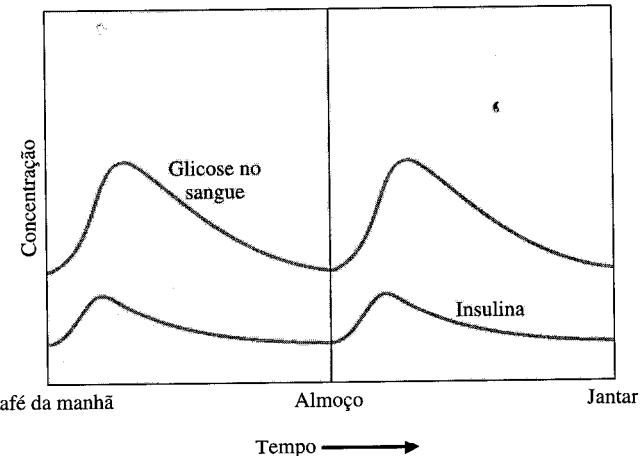
Para este e para os exemplos de projeto subsequentes, será utilizado o procedimento de projeto ilustrado na Fig. 1.19. No Capítulo 1 foi desenvolvido um plano de projeto preliminar utilizando os passos de 1 até 4 do procedimento de projeto da Fig. 1.19. Assim, para este exemplo, (1) será estabelecido o objetivo do controle, (2) serão identificadas as variáveis a controlar, (3) serão escritas as especificações preliminares e (4) será estabelecida uma ou mais configurações possíveis do sistema.

Os sistemas de controle têm sido utilizados no campo biomédico para criar sistemas automáticos de aplicação de medicamentos implantados em pacientes [29-31]. Os sistemas automáticos podem ser usados para regular a pressão sanguínea, a quantidade de açúcar no sangue e os batimentos cardíacos. Uma aplicação comum da engenharia de controle está no campo dos sistemas a malha aberta para aplicação de remédios, no qual são usados modelos matemáticos da relação dose-efeito de remédios. Um sistema de aplicação de remédios implantados no corpo usa um sistema a malha aberta, uma vez que não se dispõe de sensores de glicose miniaturizados. As melhores soluções recaem nas bombas de insulina de bolso programáveis individualmente, que podem aplicar a insulina ao longo do tempo de acordo com um histórico pré-ajustado. Os sistemas mais complicados usarão controle a malha fechada para medir o nível de glicose no sangue.

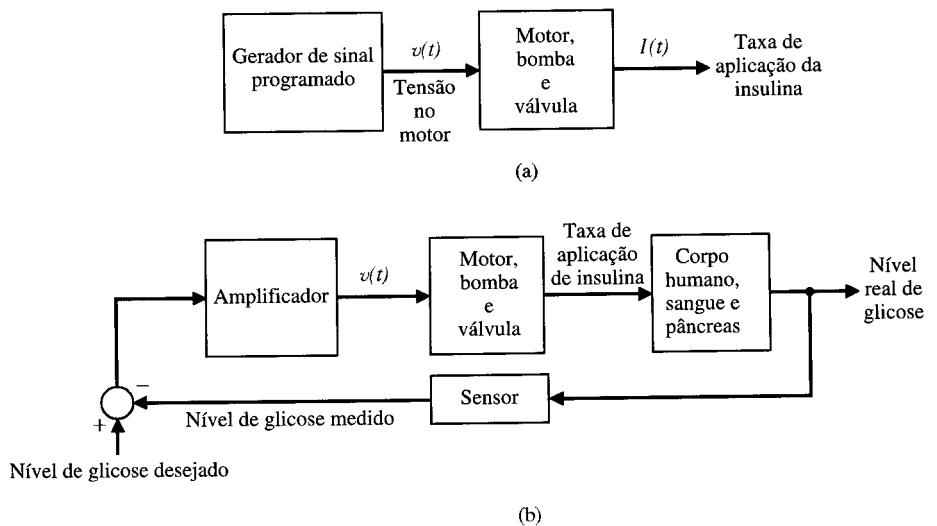
O objetivo (passo 1) é projetar um sistema para regular a concentração de açúcar no sangue de um diabético. A concentração de glicose e de insulina no sangue de uma pessoa saudável é mostrada na Fig. 1.22. O sistema deve suprir a insulina a partir de um reservatório implantado no paciente diabético.

Assim, a variável que se deseja controlar (passo 2) é a concentração de glicose no sangue. A especificação para o sistema de controle (passo 3) é prover o diabético da quantidade de glicose no sangue que aproxime de perto (siga de perto) da quantidade de glicose de uma pessoa saudável (Fig. 1.22).

No passo 4 é proposta uma configuração de sistema preliminar. Um sistema a malha aberta usaria um gerador de sinal pré-programado e uma bomba motora miniatura para regular a taxa de aplicação da insulina, como mostrado na Fig. 1.23(a). O sistema de controle com retroação usaria um sensor para medir a quantidade real de glicose e comparar esse nível com o desejado, ligando então a bomba motora quando fosse necessário, como mostrado na Fig. 1.23(b).



**Fig. 1.22** Níveis de glicose e de insulina no sangue de uma pessoa saudável.

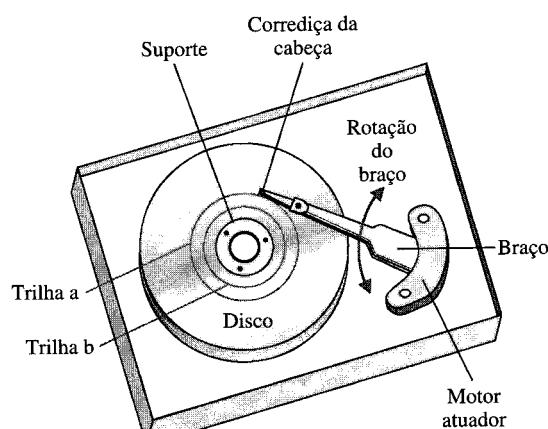


**Fig. 1.23** (a) Controle a malha aberta (sem retroação) e (b) a malha fechada do controle de glicose no sangue.

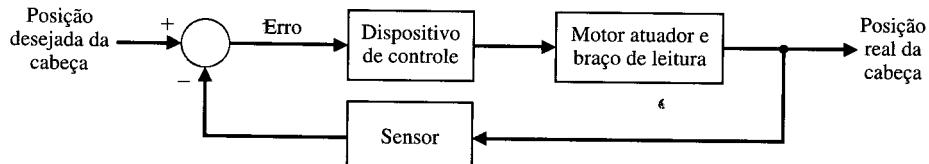
## 1.12 EXEMPLO DE PROJETO SEQÜENCIAL: SISTEMA DE LEITURA DO ACIONADOR DE DISCO



Este exemplo de projeto, identificado pelo ícone em forma de seta, será considerado seqüencialmente em cada capítulo. Será usado o procedimento de projeto da Fig. 1.19 em cada capítulo para identificar os passos que estejam sendo realizados. Por exemplo, no Cap. 1, o interesse diz respeito aos passos 1, 2, 3 e 4, onde se deve (1) identificar o objetivo do controle, (2) identificar as variáveis a controlar, (3) escrever as especificações iniciais para as variáveis e (4) estabelecer a configuração de sistema preliminar.



**Fig. 1.24** Diagrama de um acionador de disco.



**Fig. 1.25** Sistema de controle a malha fechada para o acionador de disco.

As informações podem ser rápida e eficientemente armazenadas em discos magnéticos. Os acionadores de disco são usados em computadores portáteis (*notebooks*) e em computadores de todos os tamanhos [54]. As vendas mundiais de acionadores de disco foi estimada em 100 milhões de unidades em 1996 [55]. Seja o diagrama básico de um acionador de disco o mostrado na Fig. 1.24. O objetivo do dispositivo leitor do acionador de disco é posicionar a cabeça de leitura a fim de que sejam lidos os dados armazenados em uma das trilhas do disco (passo 1). A variável para controlar precisamente (passo 2) é a posição da cabeça leitora (montada sobre um dispositivo deslizante). O disco gira com uma velocidade entre 1.800 e 7.200 rpm, e a cabeça “voa” acima do disco a uma distância menor que 100 nm. A especificação inicial para a precisão do posicionamento é de 1  $\mu\text{m}$  (passo 3). Além disso, planeja-se mover a cabeça da trilha a para a trilha b dentro de 50 ms, se possível. Assim, fica estabelecida uma configuração inicial de sistema como mostrado na Fig. 1.25. Este sistema a malha fechada proposto usa um motor para acionar (mover) o braço até o local desejado no disco. O projeto do acionador de disco será considerado mais adiante no Cap. 2.

## EXERCÍCIOS

(Os exercícios são aplicações diretas dos conceitos do capítulo.)

Os sistemas seguintes podem ser descritos por um diagrama de blocos mostrando a relação causa-efeito e a retroação (se presente). Identifique a função de cada bloco e a variável de entrada desejada, a variável de saída e a variável medida. Use a Fig. 1.9 como modelo onde for apropriado.

- E1.1** Uma fonte de sinal óptico preciso pode controlar o nível de potência da saída com exatidão de 1% [32]. Um laser é controlado por uma entrada de corrente para fornecer a potência de saída. Um microprocessador controla a corrente de entrada do laser. O microprocessador compara o nível desejado de potência com um sinal medido proporcional à potência de saída do laser obtida por meio de um sensor. Complete o diagrama de blocos representando este sistema de controle a malha fechada mostrado na Fig. E1.1, identificando a saída, a entrada, as variáveis medidas e o dispositivo de controle.
- E1.2** Um motorista de automóvel usa um sistema de controle para manter a velocidade do carro em um nível preestabelecido. Esboce um diagrama de blocos para ilustrar este sistema com retroação.
- E1.3** Espera-se que o número de robôs vendidos anualmente para automatização da indústria nos Estados Unidos cresça além de 20.000 unidades por volta do próximo século. Visite um restaurante local do tipo *fast-food* e discuta se o robô poderia substituir um ou mais trabalhadores.
- E1.4** Uma câmera com foco automático ajustará a distância das lentes ao filme usando um raio infravermelho ou ultra-som para deter-

minar a distância do objeto [45]. Esboce um diagrama de blocos deste sistema de controle a malha aberta e explique resumidamente sua operação.

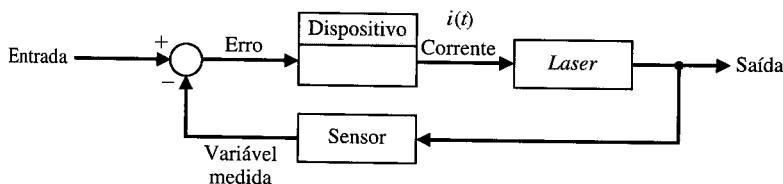
- E1.5** Tendo em vista que um veleiro não pode velejar diretamente contra o vento, e velejar com o vento soprando por trás é normalmente lento, a menor distância de viagem é raramente uma linha reta. Assim, os veleiros mudam abruptamente de rumo quando contra o vento — o familiar trajeto em zig-zague — e mudam de um lado para outro quando a favor do vento. A decisão tática de quando mudar abruptamente o rumo e para onde ir pode determinar o resultado da corrida.

Descrever o processo de um barco pegando seu rumo à medida que o vento muda de direção. Esboçar um diagrama de blocos retratando este processo.

- E1.6** Rodovias automatizadas podem ser importantes no próximo século. Considerar duas pistas de uma rodovia automatizada que se fundem em uma única faixa de rolamento e descrever um sistema de controle que assegure que os veículos se intercalam preservando um determinado espaçamento entre dois veículos.

- E1.7** Descrever o diagrama de blocos do sistema de controle de velocidade de um automóvel com um motorista humano.

- E1.8** Descrever o processo de biorretroação (*biofeedback*) humano usado para regular fatores como dores ou temperatura do corpo. A biorretroação (*biofeedback*) é uma técnica através da qual um ser humano pode, com algum sucesso, regular conscientemente o pulso, a reação à dor e a temperatura do corpo.



**Fig. E1.1** Diagrama de blocos parcial de uma fonte óptica.

## PROBLEMAS

(Os problemas requerem a extensão dos conceitos deste capítulo a novas situações.)

Os sistemas seguintes podem ser descritos por um diagrama de blocos mostrando a relação causa-efeito e a retroação (se presente). Cada bloco deve descrever sua função. Use a Fig. 1.9 como modelo onde for apropriado.

- P1.1** Muitos automóveis de luxo possuem sistemas de ar condicionado controlado por termostato para o conforto dos passageiros. Esboce um diagrama de blocos de um sistema de ar condicionado onde o motorista ajusta a temperatura interior desejada no painel de instrumentos. Identifique a função de cada elemento do sistema de refrigeração de ar controlado por termostato.
- P1.2** No passado, os sistemas de controle usavam um operador humano como parte de um sistema de controle a malha fechada. Esboce um diagrama de blocos do sistema de controle da válvula mostrado na Fig. P1.2.

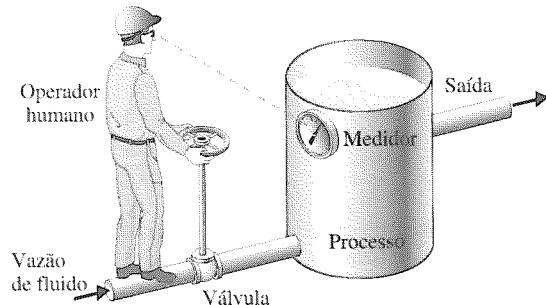


Fig. P1.2 Controle de vazão de fluido.

- P1.3** Num sistema de controle de processo químico, é relevante controlar a composição química do produto. Para fazer isto, uma medida de composição pode ser obtida usando-se um analisador infravermelho de fluxo, como mostrado na Fig. P1.3. A válvula no fluxo aditivo pode ser controlada. Complete a malha de controle com retroação e esboce um diagrama de blocos descrevendo a operação da malha de controle.

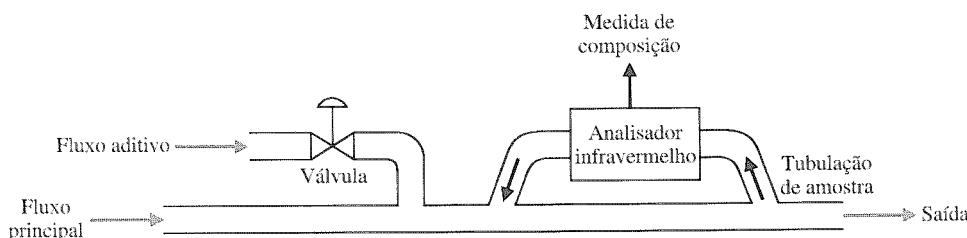


Fig. P1.3 Controle de composição química.

- P1.4** O controle preciso de um reator nuclear é importante nos geradores de sistemas de energia. Admitindo que o número de nêutrons presentes seja proporcional ao nível de potência, utiliza-se uma câmara de ionização para medir o nível de potência. A corrente,  $i_0$ , é proporcional ao nível de potência. A posição das pastilhas de grafite modera o nível de potência. Complete o sistema de controle do reator nuclear mostrado na Fig. P1.4 e esboce o diagrama de blocos descrevendo a operação da malha de controle com retroação.

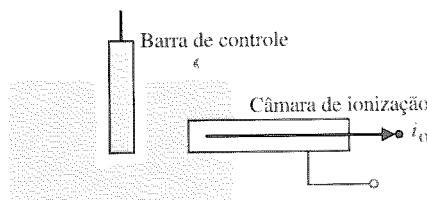


Fig. P1.4 Controle de reator nuclear.

- P1.5** Um sistema de controle de busca de luz, usado para rastrear o sol, é mostrado na Fig. P1.5. O eixo de saída, acionado por um motor através de um sistema de engrenagem com parafuso sem fim, tem um suporte no qual são montadas duas photocélulas. Complete o sistema a malha fechada para que o sistema siga a fonte de luz.

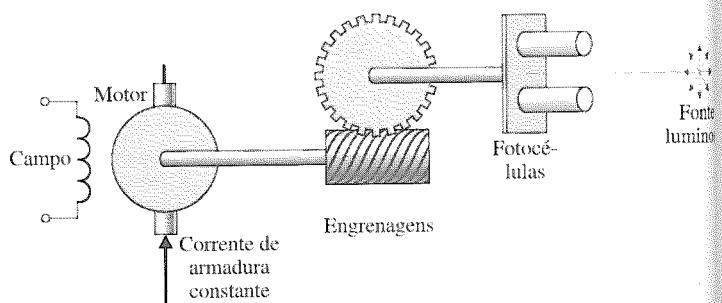


Fig. P1.5 Uma photocélula é montada em cada tubo. A luz incidente em cada célula é a mesma somente quando a fonte de luz está exatamente no meio, como está mostrado.

- P1.6** Os sistemas com retroação nem sempre envolvem retroação negativa. A inflação econômica, que é evidenciada pelo contínuo aumento de preços, é um sistema com **retroação positiva**. Um sistema de controle com retroação positiva, como o mostrado na

Fig. P1.6, adiciona o sinal de retroação ao sinal de entrada, e o sinal resultante é usado como entrada para o processo. Um modelo simples da espiral inflacionária preços-salários é mostrado na Fig. P1.6. Adicione malhas de retroação adicionais, tais como controle de legislação ou controle de impostos, para estabilizar o sistema. Admite-se que um aumento no salário do trabalhador, depois de algum retardo de tempo, resulta no aumento dos preços. Sob certas condições poderiam os preços ser estabilizados falsificando ou retardando a disponibilidade de dados sobre o custo

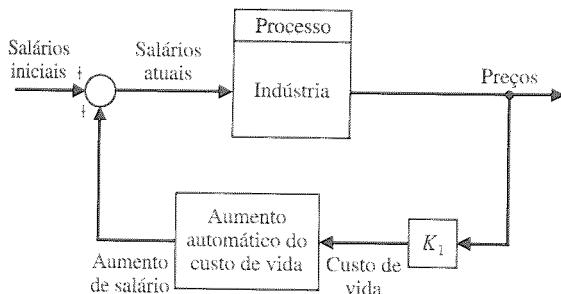


Fig. P1.6 Retroação positiva.

de vida? Como um programa nacional de diretrizes econômicas de salários e de preços afeta o sistema de retroação?

- P1.7** A história diz respeito a um sargento que parava numa joalheria toda manhã às 09:00h e comparava e acertava seu relógio com o cronômetro na vitrine. Finalmente, um dia o sargento entrou na loja e elogiou o proprietário pela exatidão do cronômetro.

"O cronômetro está aferido pelos sinais de tempo de Arlington?", perguntou o sargento.

"Não", disse o proprietário, "eu o acerto pelos tiros de canhão das cinco da tarde disparados pelo forte. Diga-me, Sargento, por que você pára todos os dias e verifica seu relógio?"

O sargento respondeu, "Eu sou o atirador do forte!"

A retroação predominante é, neste caso, positiva ou negativa? O cronômetro da joalheria erra dois minutos a cada período de 24 horas e o relógio do sargento erra três minutos a cada oito horas. Qual é o erro líquido na hora do canhão do forte após 12 dias?

- P1.8** O processo de aprendizagem professor-estudante é basicamente um processo de retroação que busca reduzir o erro do sistema a um mínimo. Com a ajuda da Fig. 1.3, construa um modelo com retroação do processo de aprendizagem e identifique cada bloco do sistema.

- P1.9** Modelos de sistemas de controle fisiológicos são ajudas valiosas para a profissão médica. O modelo do sistema de controle de batimento cardíaco é mostrado na Fig. P1.9 [23, 24, 51]. Este modelo inclui o processamento de sinais do sistema nervoso pelo cérebro. O sistema de controle de batimento cardíaco é, na realidade, um sistema multivariável, e as variáveis  $x$ ,  $y$ ,  $w$ ,  $v$ ,  $z$  e  $u$  são variáveis vetoriais. Em outras palavras, a variável  $x$  representa muitas variáveis do coração  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Examine o modelo do sistema de controle de batimento cardíaco e adicione ou elimine blocos, se necessário. Determine um modelo de sistema de controle de um dos seguintes sistemas de controle fisiológicos.

1. Sistema de controle respiratório.
2. Sistema de controle de adrenalina.
3. Sistema de controle do braço humano.
4. Sistema de controle do olho.

5. Sistema de controle do pâncreas e da quantidade de açúcar no sangue.
6. Sistema circulatório.

**P1.10** O papel dos sistemas de controle de tráfego aéreo está crescendo à medida que o tráfego de aviões cresce nos aeroportos congestionados. Os engenheiros estão desenvolvendo sistemas de controle de tráfego aéreo e sistemas que evitam a colisão usando os satélites de navegação do Sistema de Posicionamento Global (GPS — Global Positioning System) [34, 61]. O GPS permite a cada avião saber, de forma muito precisa, sua posição no corredor de aterrissagem no espaço aéreo. Esboce um diagrama de blocos retratando como um controlador de tráfego pode utilizar o GPS para evitar a colisão de aeronaves.

**P1.11** O controle automático de nível de água usando uma bóia foi usado no Oriente Médio como relógio de água [1, 11]. O relógio de água (Fig. P1.11) foi usado desde algum tempo antes de Cristo até o século dezesseste. Discuta a operação do relógio de água e estabeleça como a bóia fornece o controle com retroação que mantém a exatidão do relógio.

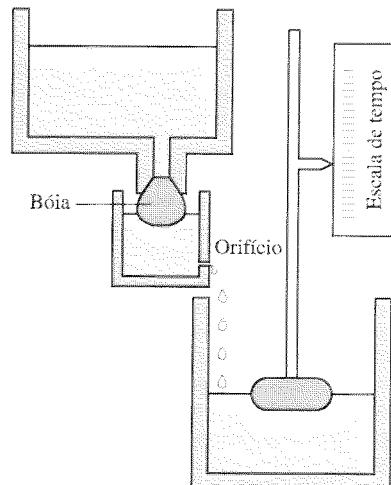


Fig. P1.11 Relógio de água. (De Newton, Gould e Kaiser, *Analytical Design of Linear Feedback Controls*. Wiley, New York, 1957, com permissão.)

**P1.12** Um mecanismo automático para moinho de vento foi inventado por Meikle por volta de 1750 [1, 11]. O mecanismo da ventoinha traseira mostrado na Fig. P1.12 gira a torre automaticamente na direção do vento. A ventoinha traseira do moinho de vento, em ângulo reto com as pás principais, é usada para girar a torre. A redução do mecanismo é da ordem de 3.000 para 1. Discuta a operação do moinho de vento e estabeleça a operação de retroação que mantém o eixo das pás principais na direção do vento.

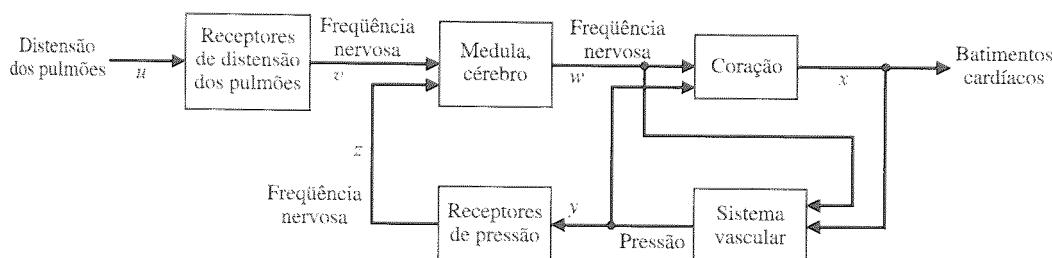
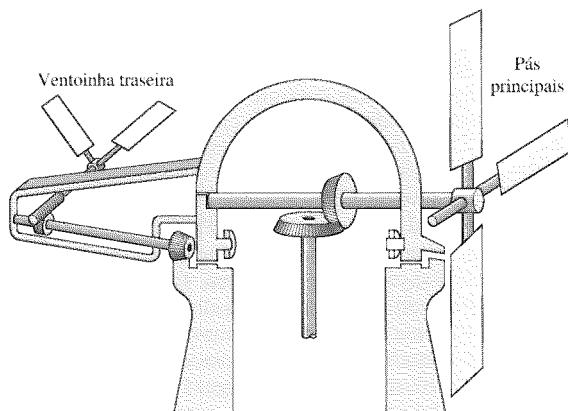
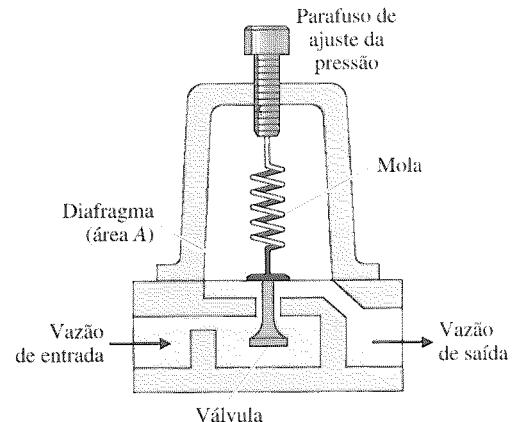


Fig. P1.9 Controle de ritmo cardíaco.



**Fig. P1.12** (De Newton, Gould e Kaiser, *Analytical Design of Linear Feedback Controls*. Wiley, New York, 1957, com permissão.)



**Fig. P1.18** Regulador de pressão.

**P1.13** Um exemplo comum de sistema de controle com duas entradas é o chuveiro doméstico com válvulas separadas para água quente e fria. O objetivo é obter (1) a temperatura desejada da água do chuveiro e (2) um fluxo de água desejado. Esboce um diagrama de blocos do sistema de controle a malha fechada.

**P1.14** Adam Smith (1723-1790) discutiu o resultado da livre competição entre os participantes de uma economia em seu livro *Wealth of Nations*. Pode-se dizer que Smith empregou mecanismos de retroação social para explicar suas teorias [44]. Smith sugere que (1) os trabalhadores disponíveis como um todo compararam os vários empregos possíveis e ingressam no que ofereça as maiores recompensas, e (2) em qualquer emprego a recompensa diminui quando o número de trabalhadores cresce. Seja  $r$  = total de recompensas sobre todos os negócios,  $c$  = total de recompensas em um negócio particular, e  $q$  = afluência de trabalhadores num negócio específico. Esboce um sistema de retroação para representar este sistema.

**P1.15** Pequenos computadores são usados em automóveis para controlar emissões e obter maior quilometragem por litro de gasolina. Um sistema de injeção de combustível controlado por computador ajusta automaticamente a proporção da mistura combustível-velar de modo a aumentar a quilometragem por litro de gasolina e reduzir significativamente a emissão de poluentes. Esboce um diagrama de blocos de um tal sistema para automóvel.

**P1.16** Todos os humanos já experimentaram a febre associada a uma enfermidade. A febre está relacionada com a mudança da entrada de controle no termostato do corpo. Este termostato, dentro do cérebro, normalmente regula a temperatura corporal nas proximidades de  $36^{\circ}\text{C}$  a despeito de se ter temperatura externa variando de  $-20^{\circ}$  a  $40^{\circ}\text{C}$  ou mais. Por causa da febre, a temperatura de entrada, ou desejada, é aumentada. Até mesmo muitos cientistas se surpreendem ao aprender que febre não indica nada de errado com o controle de temperatura do corpo, mas, em vez disto, uma regulação bem planejada em um nível superior de temperatura de entrada desejada. Esboce um diagrama de blocos do sistema de controle de temperatura e explique como uma aspirina abaixa a febre.

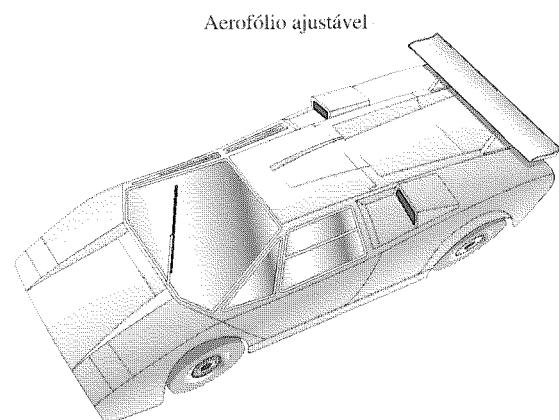
**P1.17** Jogadores de beisebol usam a retroação para estimar a trajetória da bola e acertar o arremesso [35]. Descreva o método usado por um batedor para estimar o local do arremesso de modo a ter o bastão na posição própria para acertar a bola.

**P1.18** Uma vista em corte de um regulador de pressão comumente usado é mostrada na Fig. P1.18. A pressão desejada é ajustada girando um parafuso calibrado. Este comprime a mola e ajusta uma força que se opõe ao movimento de subida do diafragma. A face inferior do diafragma é exposta à pressão da água que se deseja controlar. Assim, o movimento do diafragma é uma indicação da

diferença de pressão entre as pressões desejada e real. Este se comporta como um comparador. A válvula é conectada ao diafragma e se move de acordo com a diferença de pressão até alcançar uma posição na qual a diferença é zero. Esboce um diagrama de blocos mostrando o sistema de controle com a pressão de saída como um variável regulada.

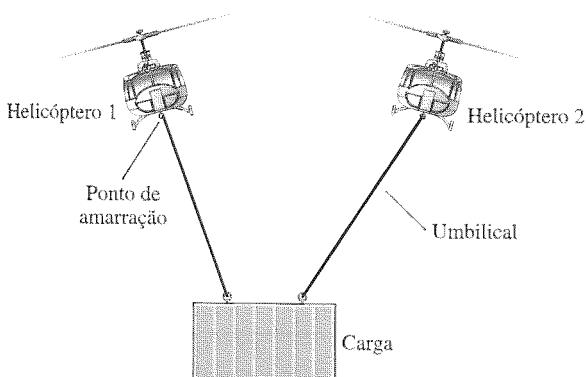
**P1.19** Ichiro Masaki, da General Motors, patenteou um sistema que ajusta automaticamente a velocidade do carro de modo a manter uma distância segura de veículos à frente. Usando uma câmera de vídeo, o sistema detecta e armazena uma imagem de referência do carro à frente. Ele então compara esta imagem com uma seqüência de imagens que estão chegando ao vivo à medida que os carros se deslocam na auto-estrada e calcula a distância. Masaki sugere que o sistema pode controlar a direção tão bem quanto a velocidade, permitindo aos motoristas atracar no carro à frente e ter uma espécie de "reboque computadorizado". Esboce um diagrama de blocos para o sistema de controle.

**P1.20** Um carro de corrida de alto desempenho com um aerofólio ajustável é mostrado na Fig. P1.20. Desenvolva um diagrama de blocos descrevendo a capacidade do aerofólio de manter uma aderência constante entre os pneus do carro e a superfície da pista de corrida. Por que é importante manter uma boa aderência na estrada?



**Fig. P1.20** Veículo de corrida de alto desempenho com um aerofólio ajustável.

**P1.21** O potencial de emprego de dois ou mais helicópteros para transportar cargas superpesadas para um único helicóptero é uma



**Fig. P1.21** Dois helicópteros usados para suspender e mover uma carga pesada.

questão bem aplicada no cenário de projetos de aeronaves civis e militares com rotor [38]. Os requisitos globais podem ser satisfeitos mais eficientemente com aviões menores usando susten-

tação múltipla para atender picos de demanda pouco freqüentes. Portanto, a principal motivação para se usar sustentação múltipla pode ser atribuída à promessa de se obter aumento de produtividade sem ter que fabricar helicópteros maiores e mais caros. Um caso específico de um arranjo de sustentação múltipla em que dois helicópteros transportam carregamento tem sido chamado de **sustentação geminada**. A Fig. P1.21 mostra uma configuração típica “pendente de dois pontos” de sustentação geminada no plano lateral/vertical.

Desenvolva o diagrama de blocos descrevendo a ação do piloto, a posição de cada helicóptero, e a posição da carga.

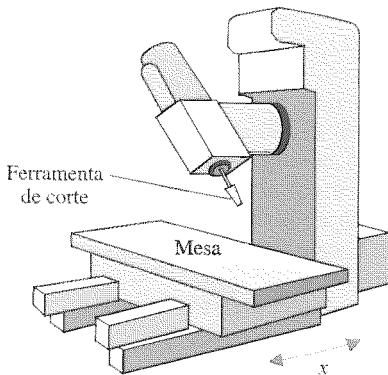
- P1.22** Os engenheiros desejam projetar um sistema de controle que permitirá a um prédio ou outra estrutura reagir à força de um terremoto como um ser humano faria. A estrutura cederia à força, mas somente o bastante, antes de reunir resistência para reagir de volta [50]. Desenvolva um diagrama de blocos de um sistema de controle para reduzir o efeito de uma força de terremoto.

- P1.23** Uma inovação nos limpadores de pára-brisa de carro de ação intermitente é o conceito de ajustar seu ciclo de limpeza de acordo com a intensidade da chuva [60]. Esboce um diagrama de blocos do sistema de controle do limpador de pára-brisa.

## PROBLEMAS DE PROJETO

(Os problemas de projeto enfatizam a tarefa de projeto. Os Problemas de Projeto Continuado (PPC) são elaborados sobre um problema de projeto de capítulo para capítulo.)

- PPC1.1** Os requisitos cada vez mais rigorosos da maquinaria moderna de alta precisão exigem cada vez mais dos sistemas de deslizamento [57]. O objetivo é controlar com precisão o deslocamento desejado da mesa mostrada na Fig. PPC1.1. Esboce um modelo de diagrama de blocos de um sistema de retroação para realizar o objetivo desejado. A mesa pode se mover na direção  $x$ , como mostrado.

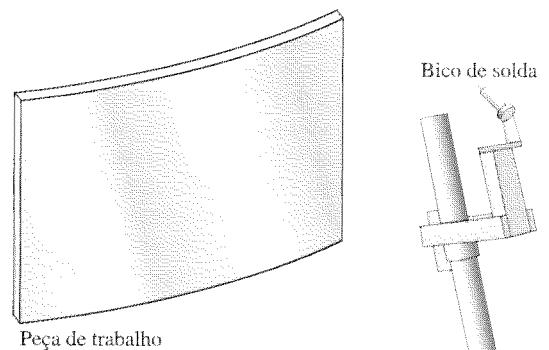


**Fig. PPC1.1** Máquina ferramenta com mesa.

ma de diagrama de blocos para um sistema de controle de cruzeiro.

- PP1.3** Como parte da automação de uma fazenda produtora de laticínios, está sob estudo a automação da ordenha das vacas [37]. Projete uma máquina de ordenhar que possa tirar o leite da vaca quatro ou cinco vezes ao dia de acordo com a demanda do gado. Esboce um diagrama de blocos e indique os dispositivos em cada bloco.

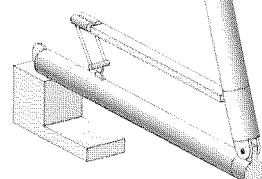
- PP1.4** A Fig. PP1.4 mostra um braço robótico de grande porte destinado a soldar estruturas de grandes dimensões. Esboçar o diagrama de blocos de um sistema de controle com retroação a malha fechada para controlar com exatidão o posicionamento do bico de solda.



**Fig. PP1.4** Soldador robótico.

- PP1.1** O ruído da estrada e do veículo que invade o interior do automóvel apressa a fadiga do ocupante. Projete o diagrama de blocos de um sistema de retroação “antibarulho” que reduzirá o efeito de barulhos indesejados. Indique o dispositivo dentro de cada um dos blocos.

- PP1.2** Muitos carros são dotados com o controle de cruzeiro, que, ao se pressionar um botão, mantém automaticamente a velocidade. Desta maneira, o motorista pode viajar a uma velocidade limite ou econômica sem necessitar verificar continuamente o velocímetro. Projete um controle de retroação na for-



**PP1.5** O controle de tração veicular, que inclui freio antiderrapante e aceleração antipatinamento, pode realçar o desempenho do veículo e seu manuseio. O objetivo deste controle é maximizar a tração do pneu evitando que os freios travem e também que os pneus patinem durante a aceleração. O deslizamento das rodas, diferença entre a velocidade do veículo e a velocidade da roda, é escolhida como a variável controlada por causa de sua forte influência sobre a força de tração entre o pneu e a estrada [19]. O coeficiente de aderência entre a roda e a estrada alcança um máximo para

valores baixos de deslizamento. Desenvolva um modelo de diagrama de blocos de um sistema de controle de tração de uma roda.

**PP1.6** O telescópio espacial Hubble foi consertado no espaço em dezembro de 1993 [47, 49, 52]. Um outro problema desafiador é o de amortecer as contrações que fazem vibrar a nave espacial cada vez que esta cruza a sombra da Terra. A pior vibração apresenta um período de 20 segundos, ou uma freqüência de 0,05 hertz. Projete um sistema de retroação que reduzirá as vibrações do telescópio Hubble.

## TERMOS E CONCEITOS

---

**Análise custo-benefício** O resultado de um julgamento quanto ao compromisso que deve ser feito entre critérios conflitantes.

**Automação** O controle de um processo por meios automáticos.

**Complexidade de projeto** O padrão complexo de partes envolvidas e conhecimento requerido.

**Desvio de projeto** A distância entre o sistema físico complexo e o modelo de projeto intrínseco para a progressão desde um conceito inicial ao produto final.

**Especificações** Definições que definem explicitamente o que o dispositivo ou produto deve ser ou deve fazer. Um conjunto de critérios de desempenho preestabelecidos.

**Otimização** O ajuste de parâmetros para obter o projeto mais favorável ou vantajoso.

**Processo** O dispositivo, a transformação ou o sistema sob controle.

**Processo a controlar** Veja Processo.

**Produtividade** A relação entre os recursos de saída e os recursos de entrada em um processo industrial.

**Projeto** O processo de imaginar ou inventar formas, partes e detalhes de um sistema para alcançar um propósito específico.

**Projeto de engenharia** O processo de projetar um sistema técnico.

**Regulador de esferas** Um dispositivo mecânico para controlar a velocidade de uma máquina a vapor.

**Retroação negativa** O sinal de saída é enviado de volta para que seja subtraído do sinal de entrada.

**Retroação positiva** O sinal de saída é enviado de volta para que possa ser adicionado ao sinal de entrada.

**Risco** Incertezas incorporadas nas consequências indesejadas de um projeto.

**Robô** Computadores programáveis integrados com um manipulador. Um manipulador reprogramável, multifuncional, usado para uma variedade de tarefas.

**Sinal de retroação** Uma medida da saída do sistema usada na retroação do sistema de controle.

**Síntese** O processo pelo qual novas configurações físicas são criadas. A combinação de elementos separados ou de dispositivos para formar um todo coerente.

**Sistema** Uma interconexão de elementos e dispositivos para um propósito desejado.

**Sistema de controle** Uma interconexão de componentes formando uma configuração de sistema que fornecerá uma resposta desejada.

**Sistema de controle a malha aberta** Um sistema que utiliza um dispositivo para controlar o processo sem usar retroação. Assim a saída não tem efeito sobre o sinal aplicado ao processo.

**Sistema de controle com retroação** Um sistema que usa uma medida da saída e compara esta com a saída desejada.

**Sistema de controle multivariável** Um sistema com mais de uma variável de entrada ou mais de uma variável de saída.

## CAPÍTULO 2

# *Modelos Matemáticos de Sistemas*

- 2.1 Introdução
- 2.2 Equações Diferenciais de Sistemas Físicos
- 2.3 Aproximações Lineares de Sistemas Físicos
- 2.4 Transformada de Laplace
- 2.5 Função de Transferência de Sistemas Lineares
- 2.6 Modelos em Diagramas de Blocos
- 2.7 Modelos em Diagramas de Fluxo de Sinal
- 2.8 Análise Computacional de Sistemas de Controle
- 2.9 Exemplos de Projeto
- 2.10 Simulação de Sistemas Usando MATLAB
- 2.11 Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco
- 2.12 Sumário

## APRESENTAÇÃO

Usam-se modelos matemáticos quantitativos de sistemas físicos para projetar e analisar sistemas de controle. O comportamento dinâmico é geralmente descrito através de equações diferenciais ordinárias. Será considerada uma gama ampla de sistemas, abrangendo sistemas mecânicos, hidráulicos e elétricos. Como a maioria dos sistemas físicos são não-lineares, serão discutidas aproximações de linearização que permitem o uso de métodos baseados na transformada de Laplace. Prossegue-se, então, a obtenção de relações do tipo entrada-saída, sob a forma de função de transferência, para componentes e subsistemas. Os blocos com função de transferência podem ser organizados em diagramas de blocos ou em diagramas de fluxo de sinal para descrever as interconexões. Os diagramas de blocos (e os diagramas de fluxo de sinal) constituem ferramentas naturais e convenientes para projetar e analisar sistemas de controle complicados. O capítulo será concluído com o desenvolvimento de modelos sob a forma de função de transferência para diversos componentes do Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco.

## 2.1 INTRODUÇÃO

Para compreender e controlar sistemas complexos, deve-se obter **modelos matemáticos** quantitativos destes sistemas. Torna-se necessário, por conseguinte, analisar as relações entre as variáveis do sistema e obter um modelo matemático. Como os sistemas sob consideração são dinâmicos por natureza, as equações que os descrevem são usualmente **equações diferenciais**. Além disto, se estas equações puderem ser **linearizadas**, pode-se utilizar a **transformada de Laplace** para simplificar o método de solução. Na prática, a complexidade dos sistemas e o desconhecimento de todos os fatores pertinentes requerem a introdução de **hipóteses** relativas à sua operação. Assim, freqüentemente será útil considerar o sistema físico, elaborar algumas hipóteses necessárias e linearizar o sistema. Em seguida, usando as leis físicas que descrevem o sistema linear equivalente, pode-se obter um conjunto de equações diferenciais lineares. Finalmente, utilizando ferramentas matemáticas, como a trans-

formada de Laplace, obtém-se uma solução que descreve a operação do sistema. Em resumo, a abordagem aos problemas de sistemas dinâmicos pode ser listada como a seguir:

1. Definir o sistema e seus componentes.
2. Formular o modelo matemático e listar as hipóteses necessárias.
3. Escrever as equações diferenciais que descrevem o modelo.
4. Resolver as equações em função das variáveis de saída desejáveis.
5. Examinar as soluções e as hipóteses.
6. Se necessário, reanalisar ou reprojetar o sistema.

## 2.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SISTEMAS FÍSICOS

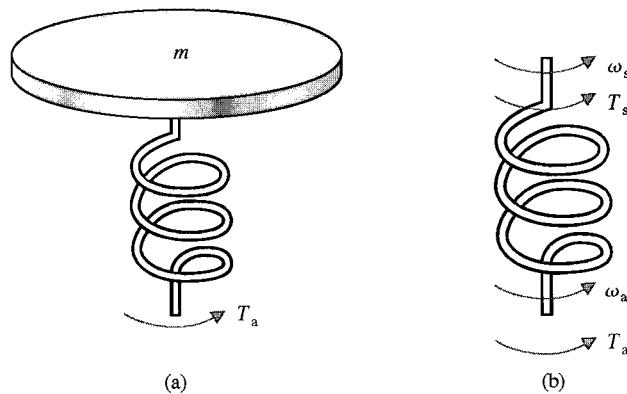
As equações diferenciais que descrevem o desempenho dinâmico de um sistema físico são obtidas utilizando-se as leis físicas do processo [1-3]. Esta abordagem se aplica igualmente bem a sistemas mecânicos [1], elétricos [3], fluidos e termodinâmicos [4]. Considere-se o sistema de torção mola-massa na Fig. 2.1 com o torque  $T_a(t)$ . Suponha-se que o elemento mola de torção seja desprovido de massa. Suponha-se que se deseja medir o torque  $T_s(t)$  transmitido à massa  $m$ . Como a mola é desprovida de massa, a soma dos torques que agem sobre a mola propriamente dita deve ser igual a zero, ou seja,

$$T_a(t) - T_s(t) = 0,$$

que implica em  $T_s(t) = T_a(t)$ . Constatata-se imediatamente que o torque externo  $T_a(t)$  aplicado à extremidade da mola é transmitido através da mola de torção. Por causa disto refere-se ao torque como uma **variável-através**. De modo semelhante, a diferença de velocidade angular associada ao elemento mola de torção é

$$\omega(t) = \omega_s(t) - \omega_a(t).$$

Assim, a diferença de velocidade angular é medida sobre o elemento mola de torção e é citada como uma **variável-sobre**. Estes mesmos tipos de argumento podem ser aplicados à maioria das variáveis físicas mais comuns (tais como força, corrente, volume, vazão etc.). Uma discussão mais completa a respeito de variáveis através e sobre pode ser encontrada em [30]. A Tabela 2.1 [5] fornece um resumo de variáveis através e sobre de sistemas dinâmicos. O Sistema Internacional (SI) de unidades é



**Fig. 2.1** (a) Sistema de torção mola-massa. (b) Elemento mola.

**TABELA 2.1 Resumo das Variáveis Através e Sobre para Sistemas Físicos**

Sistema	Variável de Elemento Através	Variável Através Integrada	Variável de Elemento Sobre	Variável Sobre Integrada
Elétrico	Corrente $i$	Carga, $q$	Diferença de Tensão, $v_{21}$	Enlace de fluxo, $\lambda_{21}$
Mecânico em translação	Força, $F$	Quantidade de movimento, $P$	Diferença de velocidade, $v_{21}$	Diferença de deslocamento, $y_{21}$
Mecânico em rotação	Torque, $T$	Momento cinético, $h$	Diferença de velocidade angular, $\omega_{21}$	Diferença de deslocamento angular, $\theta_{21}$
Fluido	Vazão volumétrica, $Q$	Volume, $V$	Diferença de pressão, $P_{21}$	Momento de pressão, $\gamma_{21}$
Térmico	Fluxo térmico, $q$	Energia térmica, $H$	Diferença de temperatura, $\mathcal{T}_{21}$	

**TABELA 2.2 Sistema Internacional de Unidades (SI)**

	Unidade	Símbolo
<b>Unidades Básicas</b>		
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Temperatura	kelvin	K
Corrente elétrica	ampère	A
<b>Unidades Derivadas</b>		
Velocidade	metros por segundo	m/s
Área	metro quadrado	m <sup>2</sup>
Força	newton	N = kgm/s <sup>2</sup>
Torque	quilogrâmetro	kgm
Pressão	pascal	Pa
Energia	joule	J = Nm
Potência	watt	W = J/s

fornecido na Tabela 2.2. A Tabela 2.3 facilita a conversão de outros sistemas de unidades para o SI. A Tabela 2.4 [5] fornece um resumo de equações que descrevem elementos dinâmicos lineares, a parâmetros concentrados. As equações na Tabela 2.4 correspondem a descrições idealizadas e apenas aproximadas das condições reais (por exemplo, quando uma aproximação linear a parâmetros concentrados for utilizada para descrever um elemento a parâmetros distribuídos).

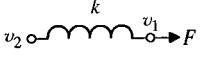
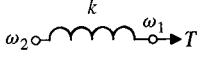
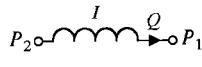
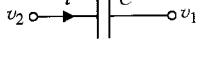
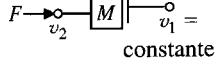
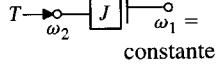
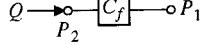
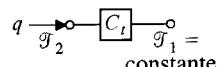
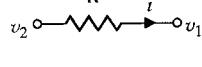
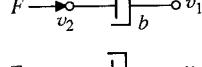
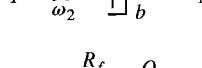
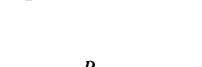
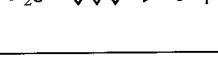
### Nomenclatura

- **Variável-através:**  $F$  = força,  $T$  = torque,  $i$  = corrente,  $Q$  = vazão volumétrica de fluido,  $q$  = fluxo térmico.
- **Variável-sobre:**  $v$  = velocidade de translação,  $\omega$  = velocidade angular,  $v$  = tensão elétrica,  $P$  = pressão,  $T$  = temperatura.
- **Armazenamento indutivo:**  $L$  = indutância,  $1/k$  = inverso da rigidez à translação ou à rotação,  $I$  = inertância fluida.
- **Armazenamento capacitivo:**  $C$  = capacidade,  $M$  = massa,  $J$  = momento de inércia,  $C_f$  = capacidade fluida,  $C_t$  = capacidade térmica.
- **Dissipadores de energia:**  $R$  = resistência,  $b$  = atrito viscoso,  $R_f$  = resistência fluida,  $R_t$  = resistência térmica.

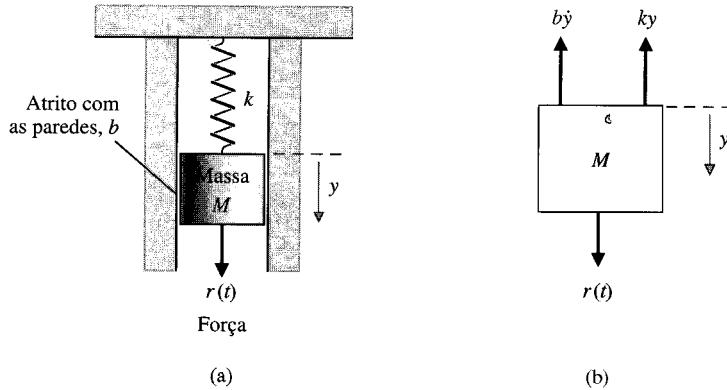
**TABELA 2.3 Fatores de Conversão para o Sistema Internacional de Unidades (SI)**

De	Multiplicar por	Para Obter
Comprimento polegadas pés	25,4 30,48	milímetros centímetros
Velocidade milhas por hora	0,4470	metros por segundo
Massa libras	0,4536	quilogramas
Força libras-força	4,448	newtons
Torque libras-pé	0,1383	quilogrâmetro
Potência HP(horsepower)	746	watts
Energia BTU (British Thermal Unit) quilowatt-hora	1055 $3,6 \times 10^6$	joules joules

TABELA 2.4 Resumo das Equações Diferenciais que Descrevem os Elementos Ideais

Tipo de Elemento	Elemento Físico	Equação de Descrição	Energia $E$ ou Potência $P$	Símbolo
	Indutância elétrica	$v_{21} = L \frac{di}{dt}$	$E = \frac{1}{2} Li^2$	
Armazenamento indutivo	Mola em translação	$v_{21} = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}$	$E = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k}$	
	Mola em rotação	$\omega_{21} = \frac{1}{k} \frac{dT}{dt}$	$E = \frac{1}{2} \frac{T^2}{k}$	
	Inércia fluida	$P_{21} = I \frac{dQ}{dt}$	$E = \frac{1}{2} IQ^2$	
	Capacitância elétrica	$i = C \frac{dv_{21}}{dt}$	$E = \frac{1}{2} Cv_{21}^2$	
	Massa em translação	$F = M \frac{dv_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2} Mv_2^2$	
Armazenamento capacitivo	Massa em rotação	$T = J \frac{d\omega_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2} J\omega_2^2$	
	Capacitância fluida	$Q = C_f \frac{dP_{21}}{dt}$	$E = \frac{1}{2} C_f P_{21}^2$	
	Capacitância térmica	$q = C_t \frac{d\mathcal{T}_2}{dt}$	$E = C_t \mathcal{T}_2$	
	Resistência elétrica	$i = \frac{1}{R} v_{21}$	$P = \frac{1}{R} v_{21}^2$	
	Amortecimento em translação	$F = bv_{21}$	$P = b v_{21}^2$	
Dissipadores de energia	Amortecimento em rotação	$T = b\omega_{21}$	$P = b \omega_{21}^2$	
	Resistência fluida	$Q = \frac{1}{R_f} P_{21}$	$P = \frac{1}{R_f} P_{21}^2$	
	Resistência térmica	$q = \frac{1}{R_t} \mathcal{T}_{21}$	$P = \frac{1}{R_t} \mathcal{T}_{21}$	

O símbolo  $v(t)$  é utilizado para designar tanto a tensão em circuitos elétricos, como a velocidade em sistemas mecânicos em translação e a diferença será estabelecida de acordo com o contexto de cada equação diferencial. Para os sistemas mecânicos se utilizam as leis de Newton e para os sistemas elétricos, a lei de Kirchhoff das tensões. Por exemplo, o sistema mecânico simples mola-massa-amortecedor mostrado na Fig.2.2(a) é descrito através da segunda lei de Newton para o movimento. (Este sistema poderia representar, por exemplo, a suspensão de um automóvel.) O diagrama de corpo livre da massa  $M$  está mostrado na Fig. 2.2(b). Neste exemplo mola-massa-amortecedor o atrito com as paredes foi modelado como **amortecimento viscoso**, ou seja, a força de atrito é linearmente proporcional à velocidade da massa. Na realidade, a força de atrito pode se comportar de uma forma mais complicada. Por exemplo, o atrito com as paredes pode se comportar como um **amortecimento**



**Fig. 2.2** (a) Sistema mola-massa-amortecedor. (b) Diagrama de corpo livre.

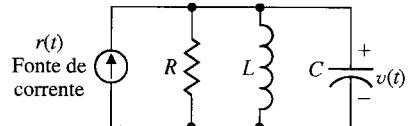
**de coulomb.** O atrito de Coulomb, também conhecido como atrito seco, é uma função não-linear da velocidade da massa e possui uma descontinuidade em torno da velocidade nula. Para uma superfície bem lubrificada, deslizante, o uso do atrito viscoso é apropriado e será utilizado aqui e nos exemplos massa-mola-amortecedor subseqüentes. Adicionando-se as forças aplicadas sobre \$M\$ e utilizando-se a segunda lei de Newton, resulta

$$M \frac{d^2y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = r(t), \quad (2.1)$$

onde \$k\$ é a constante de mola de uma mola ideal e \$b\$ é a constante de atrito viscoso. A Eq. (2.1) é uma equação diferencial linear de segunda ordem, a coeficientes constantes.

Alternativamente, pode-se descrever o circuito elétrico RLC da Fig. 2.3 utilizando-se a lei de Kirchhoff das correntes. Obtém-se, então, a seguinte equação integro-diferencial:

$$\frac{v(t)}{R} + C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt = r(t). \quad (2.2)$$



**Fig. 2.3** Circuito RLC.

A solução da equação diferencial que descreve o processo pode ser obtida através de métodos clássicos tais como o uso dos fatores de integração e o método dos coeficientes a determinar [1]. Por exemplo, ao deslocar a massa inicialmente de uma distância \$y(0)\$ e depois abandoná-la livremente, a resposta dinâmica de um **sistema subamortecido** é representada por uma equação do tipo

$$y(t) = K_1 e^{-\alpha_1 t} \sin(\beta_1 t + \theta_1). \quad (2.3)$$

Uma solução semelhante é obtida para a tensão do circuito RLC quando o circuito for submetido a uma corrente constante \$r(t) = 1\$. O valor da tensão é, então

$$v(t) = K_2 e^{-\alpha_2 t} \cos(\beta_2 t + \theta_2). \quad (2.4)$$

Uma curva de tensão típica de um circuito RLC subamortecido é mostrada na Fig. 2.4.

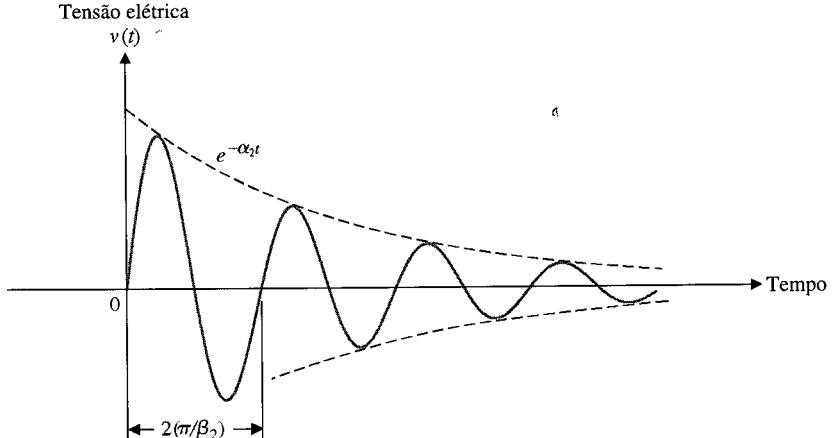
A fim de mostrar de forma mais ampla a grande semelhança entre as equações diferenciais para os sistemas mecânico e elétrico, a Eq. (2.1) será reescrita em função da velocidade:

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt}.$$

Tem-se, então,

$$M \frac{dv(t)}{dt} + b v(t) + k \int_0^t v(t) dt = r(t). \quad (2.5)$$

Constata-se imediatamente a equivalência das Eqs. (2.5) e (2.2), onde a velocidade \$v(t)\$ e a tensão elétrica \$v(t)\$ são variáveis equivalentes, usualmente chamadas **variáveis análogas**, e os sistemas são sistemas análogos. Em consequência, a solução para a velocidade é semelhante à Eq. (2.4), e a res-



**Fig. 2.4** Resposta de tensão típica de um circuito *RLC* subamortecido.

posta para um sistema subamortecido é mostrada na Fig. 2.4. O conceito de sistemas análogos é uma técnica muito útil e poderosa para a modelagem de sistemas. A analogia tensão elétrica-velocidade, freqüentemente chamada analogia força-corrente, é uma analogia natural porque ela relaciona a analogia entre variáveis através e sobre de sistemas elétricos e de sistemas mecânicos. Contudo, uma outra analogia que relaciona as variáveis velocidade e corrente elétrica é bastante usada e é chamada analogia força-tensão elétrica [22, 24].

Existem modelos análogos com soluções semelhantes para sistemas elétricos, mecânicos, térmicos e fluidos. A existência de sistemas e de soluções análogos dotam o analista da capacidade de estender a solução de um sistema a todos os sistemas análogos descritos através das mesmas equações diferenciais. Assim, o que se aprende acerca da análise e do projeto de sistemas elétricos é imediatamente estendido à compreensão de sistemas fluidos, térmicos e mecânicos.

## 2.3 APROXIMAÇÕES LINEARES DE SISTEMAS FÍSICOS

Uma grande maioria de sistemas físicos são lineares dentro de uma certa gama de valores das variáveis. Contudo, todos os sistemas se tornam em última análise não-lineares à medida que os valores das variáveis crescem sem limites. Por exemplo, o sistema mola-massa-amortecedor da Fig. 2.2 é linear e descrito pela Eq. (2.1) enquanto a massa for submetida a pequenos deslocamentos  $y(t)$ . Assim, se o valor de  $y(t)$  for aumentado continuamente, a mola poderia se distender demasiadamente e quebrar. Em consequência, a questão da linearidade e do domínio de aplicabilidade desta hipótese devem ser consideradas para cada sistema.

Um sistema é definido como linear em termos da excitação e da resposta do sistema. No caso do circuito elétrico, a excitação é a corrente de entrada  $r(t)$  e a resposta é a tensão elétrica  $v(t)$ . Em geral, uma **condição necessária** para um sistema ser linear pode ser determinada em função de uma excitação  $x(t)$  e de uma resposta  $y(t)$ . Quando o sistema em repouso for submetido a uma excitação  $x_1(t)$  produzirá uma resposta  $y_1(t)$ . Além disto, quando o sistema for submetido a uma excitação  $x_2(t)$  produzirá uma resposta correspondente  $y_2(t)$ . Para um sistema linear é necessário que a excitação  $x_1(t) + x_2(t)$  produza uma resposta  $y_1(t) + y_2(t)$ . Isto é chamado usualmente o **princípio da superposição**.

Além disto, é necessário que a magnitude do fator de escala seja preservada em um **sistema linear**. Considere-se, novamente, um sistema com uma entrada  $x$  que resulta em uma saída  $y$ . Então é necessário que a resposta de um sistema linear a uma entrada  $x$  multiplicada por uma constante  $\beta$  seja igual à resposta  $y$  multiplicada pela mesma constante de modo que a saída seja  $\beta y$ . Esta é a chamada propriedade da **homogeneidade**.

---

**Um sistema linear satisfaz as propriedades de superposição e homogeneidade.**

---

Um segundo sistema caracterizado pela relação  $y = x^2$  não é linear, porque a propriedade da superposição não é satisfeita. Um sistema representado pela relação  $y = mx + b$  não é linear, porque não satisfaz a propriedade da homogeneidade. Contudo, este segundo dispositivo pode ser considerado linear em torno de um ponto de operação  $x_0, y_0$  para pequenas variações  $\Delta x$  e  $\Delta y$ . Quando  $x = x_0 + \Delta x$  e  $y = y_0 + \Delta y$ , tem-se

$$y = mx + b$$

ou

$$y_0 + \Delta y = mx_0 + m \Delta x + b$$

e, por conseguinte  $\Delta y = m \Delta x$ , que satisfaz as condições necessárias.

Pode-se admitir a linearidade de muitos elementos mecânicos e elétricos sobre um domínio razoavelmente amplo de valores das variáveis [7]. Este não é usualmente o caso de elementos térmicos e fluidos que são mais freqüentemente não-lineares em sua essência. Felizmente, contudo, os elementos não-lineares são freqüentemente linearizados admitindo-se condições de pequeno sinal. Esta é a abordagem normal usada para obter um circuito linear equivalente de circuitos eletrônicos e transistores. Considere-se um elemento genérico com uma variável de excitação  $x(t)$  (do tipo através) e a variável de resposta  $y(t)$  (do tipo sobre). Diversos exemplos de variáveis de sistemas dinâmicos são dados na Tabela 2.1. A relação entre as duas variáveis pode ser escrita como

$$y(t) = g(x(t)), \quad (2.6)$$

onde  $g(x(t))$  indica que  $y(t)$  é uma função de  $x(t)$ . O ponto de operação normal é designado por  $x_0$ . Como a curva (função) é contínua sobre a faixa de interesse, pode-se utilizar uma expansão em **série de Taylor** em torno do ponto de operação [7]. Tem-se, então

$$y = g(x) = g(x_0) + \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)}{1!} + \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots \quad (2.7)$$

A inclinação da curva no ponto de operação,

$$\left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_0},$$

é uma boa aproximação da curva sobre uma pequena faixa de valores de  $(x - x_0)$ , o desvio em torno do ponto de operação. Assim, como uma aproximação razoável, a Eq. (2.7) se torna

$$y = g(x_0) + \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) = y_0 + m(x - x_0), \quad (2.8)$$

onde  $m$  é a inclinação da curva no ponto de operação. Finalmente, a Eq. (2.8) pode ser reescrita como a equação linear

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

ou

$$\Delta y = m \Delta x. \quad (2.9)$$

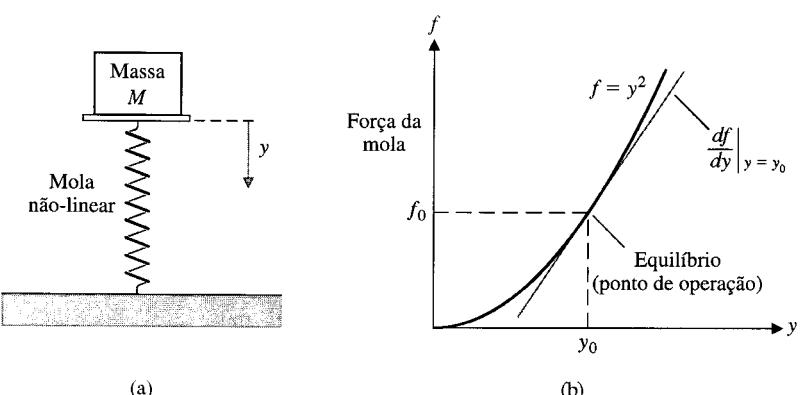
Considere-se o caso de uma massa  $M$  apoiada sobre uma mola não-linear, como mostrado na Fig. 2.5(a). O ponto normal de operação é a posição de equilíbrio que ocorre quando a força da mola equilibra a força gravitacional  $Mg$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade. Assim,  $f_0 = Mg$ , como está mostrado. Para a mola não-linear com  $f = y^2$ , a posição de equilíbrio é  $y_0 = (Mg)^{1/2}$ . O modelo linear para pequenos desvios é

$$\Delta f = m \Delta y,$$

onde

$$m = \left. \frac{df}{dy} \right|_{y_0},$$

como mostrado na Fig. 2.5(b). Assim  $m = 2y_0$ . Uma **aproximação linear** é igualmente precisa, uma vez que a hipótese de pequenos sinais é aplicável ao problema específico.



**Fig. 2.5** (a) Uma massa apoiada sobre uma mola não-linear. (b) A força da mola versus  $y$ .

Se a variável dependente  $y$  depender de diversas variáveis de excitação,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , então a relação funcional é escrita como

$$y = g(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.10)$$

A expansão em série de Taylor em torno do ponto de operação  $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ , é útil para se obter uma aproximação linear da função não-linear. Quando os termos de ordem mais alta são desprezados, a aproximação linear é escrita como

$$\begin{aligned} y &= g(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) + \frac{\partial g}{\partial x_1} \Big|_{x=x_0} (x_1 - x_{10}) + \frac{\partial g}{\partial x_2} \Big|_{x=x_0} (x_2 - x_{20}) \\ &\quad + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n} \Big|_{x=x_0} (x_n - x_{n0}), \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde  $x_0$  é o ponto de operação. Um exemplo irá ilustrar claramente a utilidade deste método.

### EXEMPLO 2.1

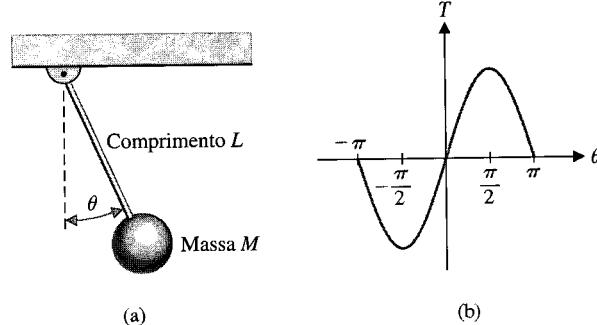
#### Modelo do oscilador tipo pêndulo

Considere-se o oscilador tipo pêndulo mostrado na Fig. 2.6(a). O torque aplicado à massa é

$$T = MgL \sin \theta, \quad (2.12)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade. A condição de equilíbrio para a massa é  $\theta_0 = 0^\circ$ . A relação não-linear entre  $T$  e  $\theta$  está mostrada graficamente na Fig. 2.6 (b). A primeira derivada calculada no ponto de equilíbrio fornece a aproximação linear, que é

$$T - T_0 \approx MgL \frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} (\theta - \theta_0),$$



**Fig. 2.6** Oscilador tipo pêndulo.

onde  $T_0 = 0$ . Tem-se, então

$$\begin{aligned} T &= MgL(\cos 0^\circ)(\theta - 0^\circ) \\ &= MgL\theta. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Esta aproximação é razoavelmente exata para  $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$ . Por exemplo, a resposta do modelo linear para uma oscilação de  $\pm 30^\circ$  é a mesma da resposta do pêndulo real não-linear a menos de um erro de 2%. ■

## 2.4 TRANSFORMADA DE LAPLACE

A capacidade de obter aproximações lineares de sistemas físicos permite ao analista o uso da **transformação de Laplace**. O método da transformada de Laplace substitui a solução mais difícil de equações diferenciais pela solução mais fácil de equações algébricas [1, 3]. A solução da resposta no domínio do tempo é obtida através das seguintes operações:

1. Obter as equações diferenciais.
2. Obter a transformação de Laplace das equações diferenciais.
3. Resolver a transformada algébrica resultante para a variável sob interesse.

A transformada de Laplace existe para as equações diferenciais lineares para as quais a integral de transformação converge. Pôr conseguinte, para que exista a transformada de  $f(t)$ , é suficiente que

$$\int_{0^-}^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < \infty,$$

para algum valor real, positivo  $\sigma_1[1]$ . Se a magnitude de  $f(t)$  for  $|f(t)| < M e^{\alpha t}$  para todos os valores positivos de  $t$ , a integral convergirá para  $\sigma_1 > \alpha$ . A região de convergência é, por conseguinte, dada por  $\infty > \sigma_1 > \alpha$ , e  $\sigma_1$  é conhecida como a abscissa de convergência. Sinais que sejam fisicamente realizáveis sempre possuem a transformada de Laplace. A **transformação de Laplace** para uma função do tempo,  $f(t)$ , é

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}\{f(t)\}. \quad (2.14)$$

A **transformada de Laplace inversa** é escrita como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{+st} ds. \quad (2.15)$$

As integrais de transformação têm sido usadas para deduzir tabelas de transformadas de Laplace que são usadas comumente para a grande maioria de problemas. Uma tabela de transformadas de Laplace é fornecida no Apêndice A e alguns pares importantes de transformadas de Laplace são dados na Tabela 2.5.

Alternativamente, a variável  $s$  de Laplace pode ser considerada o operador diferencial tal que

$$s \equiv \frac{d}{dt}. \quad (2.16)$$

Além disto pode-se ter o operador integral

$$\frac{1}{s} \equiv \int_{0^-}^t dt. \quad (2.17)$$

A transformação de Laplace inversa é usualmente obtida utilizando-se a expansão em frações parciais de Heaviside. Esta abordagem é particularmente útil na análise e no projeto de sistemas porque se pode observar claramente o efeito de cada raiz característica ou autovalor.

**TABELA 2.5 Pares de Transformada de Laplace Importantes**

$f(t)$	$F(s)$
Função degrau, $u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$f^{(k)}(t) = \frac{d^k f(t)}{dt^k}$	$s^k F(s) - s^{k-1} f(0^-) - s^{k-2} f'(0^-) - \dots - f^{(k-1)}(0^-)$
$\int_{-\infty}^t f(t) dt$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^0 f(t) dt$
Função impulso $\delta(t)$	1

Para ilustrar a utilidade da transformação de Laplace e os passos envolvidos na análise do sistema, reconsidere-se o sistema mola-massa-amortecedor descrito pela Eq. (2.1), qual seja

$$M \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = r(t). \quad (2.18)$$

Deseja-se obter a resposta,  $y$ , como uma função do tempo. A transformada de Laplace da Eq. (2.18) é

$$M \left( s^2 Y(s) - sy(0^-) - \frac{dy(0^-)}{dt} \right) + b(sY(s) - y(0^-)) + kY(s) = R(s). \quad (2.19)$$

Quando

$$r(t) = 0, \quad \text{e} \quad y(0^-) = y_0, \quad \text{e} \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0^-} = 0,$$

tem-se

$$Ms^2 Y(s) - Msy_0 + bsY(s) - by_0 + kY(s) = 0. \quad (2.20)$$

Resolvendo-se para  $Y(s)$ , obtém-se

$$Y(s) = \frac{(Ms + b)y_0}{Ms^2 + bs + k} = \frac{p(s)}{q(s)}. \quad (2.21)$$

O polinômio em denominador  $q(s)$ , quando igualado a zero, é chamado de **polinômio característico** porque as raízes desta equação determinam o caráter da resposta temporal. As raízes desta equação característica são também chamadas os **pólos** do sistema. As raízes do polinômio em numerador  $p(s)$  são chamadas os **zeros** do sistema; para exemplo,  $s = -b/M$  é um zero da Eq. (2.21). Pólos e zeros constituem freqüências críticas. Nos pólos, a função  $Y(s)$  se torna infinita, enquanto que nos zeros a função se torna igual a zero. O gráfico no **plano s** de freqüências complexas de pólos e zeros esboça graficamente o caráter da resposta transitória natural do sistema.

Para um caso específico, considere-se o sistema onde  $k/M = 2$  e  $b/M = 3$ . Então, a Eq. (2.21) se torna

$$Y(s) = \frac{(s + 3)y_0}{(s + 1)(s + 2)}. \quad (2.22)$$

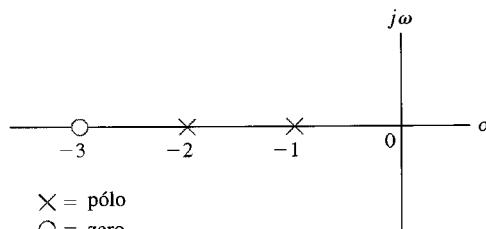
Os pólos e zeros de  $Y(s)$  no plano  $s$  estão mostrados na Fig. 2.7.

Expandindo-se a Eq. (2.22) em frações parciais, obtém-se

$$Y(s) = \frac{k_1}{s + 1} + \frac{k_2}{s + 2}, \quad (2.23)$$

Onde  $k_1$  e  $k_2$  são os coeficientes da expansão. Os coeficientes  $k_i$  são chamados **resíduos** e são calculados multiplicando-se a Eq. (2.22) pelo fator em denominador de  $Y(s)$  correspondente a  $k_i$  e fazendo  $s$  igual à raiz. Calculando  $k_1$  quando  $y_0 = 1$ , tem-se

$$\begin{aligned} k_1 &= \left. \frac{(s - s_1)p(s)}{q(s)} \right|_{s=s_1} \\ &= \left. \frac{(s + 1)(s + 3)}{(s + 1)(s + 2)} \right|_{s_1=-1} = 2 \end{aligned} \quad (2.24)$$



**Fig. 2.7** Um diagrama de pólos e zeros no plano  $s$ .

e  $k_2 = -1$ . Alternativamente, os resíduos de  $Y(s)$  nos respectivos pólos podem ser calculados graficamente a partir do diagrama de pólos e zeros no plano  $s$ , uma vez que a Eq. (2.24) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{s + 3}{s + 2} \Big|_{s=s_1=-1} \\ &= \frac{s_1 + 3}{s_1 + 2} \Big|_{s_1=-1} = 2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

A representação gráfica da Eq. (2.25) está mostrada na Fig. 2.8. O método gráfico de cálculo dos resíduos é particularmente valioso quando a ordem da equação característica for elevada e diversos pólos forem pares complexos conjugados.

A transformada de Laplace inversa da Eq. (2.22) é então

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s+2}\right\}. \quad (2.26)$$

Usando-se a Tabela 2.5, obtém-se

$$y(t) = 2e^{-t} - 1e^{-2t}. \quad (2.27)$$

Por fim, é normalmente desejado determinar o **estado estacionário** ou **valor final** da resposta  $y(t)$ . Por exemplo, a posição final ou de repouso em estado estacionário do sistema mola-massa-amortecedor poderia ser calculado. O **teorema do valor final** estabelece que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s), \quad (2.28)$$

onde é permitido um polo simples de  $Y(s)$  na origem, mas se excluem pólos sobre o eixo imaginário e no semiplano da direita e pólos múltiplos na origem. Assim, para o caso específico da mola, massa e amortecedor, tem-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = 0. \quad (2.29)$$

Portanto, a posição final para a massa é a posição normal de equilíbrio  $y = 0$ .

Para ilustrar claramente os pontos notáveis do método da transformada de Laplace, seja reconsidereado o sistema massa-mola-amortecedor para o caso subamortecido. A equação para  $Y(s)$  pode ser escrita como

$$Y(s) = \frac{(s + b/M)(y_0)}{(s^2 + (b/M)s + k/M)} = \frac{(s + 2\zeta\omega_n)(y_0)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (2.30)$$

em que  $\zeta$  é a **relação de amortecimento adimensional**, e  $\omega_n$  é a **frequência natural** do sistema. As raízes da equação característica são

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad (2.31)$$

onde, neste caso,  $\omega_n = \sqrt{k/M}$  e  $\zeta = b/(2\sqrt{kM})$ . Quando  $\zeta > 1$ , as raízes são reais; quando  $\zeta < 1$ , as raízes são complexas e conjugadas. Quando  $\zeta = 1$ , as raízes são repetidas e reais e a condição é chamada de **amortecimento crítico**.

Quando  $\zeta < 1$ , a resposta é subamortecida e

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}. \quad (2.32)$$

O diagrama de pólos e zeros de  $Y(s)$  no plano  $s$  é mostrado na Fig. 2.9, onde  $\theta = \cos^{-1} \zeta$ . Quando  $\zeta$  variar com o valor de  $\omega_n$  constante, as raízes complexas conjugadas percorrerão um lugar circular,

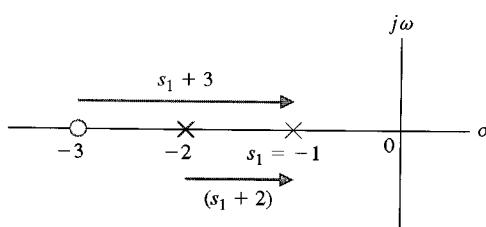
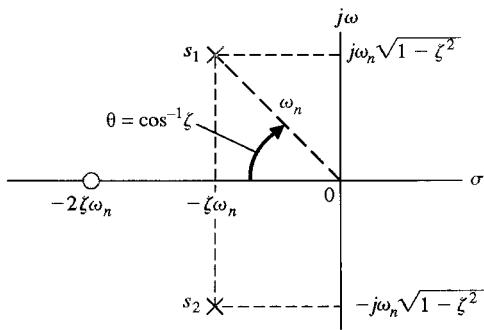
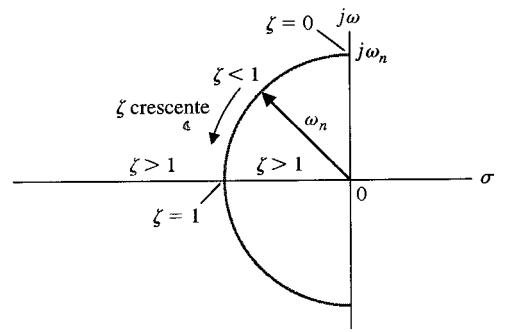


Fig. 2.8 Cálculo gráfico dos resíduos.



**Fig. 2.9** Um diagrama no plano s dos pólos e zeros de  $Y(s)$ .



**Fig. 2.10** O lugar das raízes à medida que  $\zeta$  varia com o valor de  $\omega_n$  constante.

como está mostrado na Fig. 2.10. A resposta transitória se torna cada vez mais oscilatória à medida que as raízes se aproximam do eixo imaginário quando  $\zeta$  tende a zero.

A transformada de Laplace inversa pode ser calculada usando-se o cálculo gráfico de resíduos. A expansão em frações parciais da Eq. (2.30) é

$$Y(s) = \frac{k_1}{(s - s_1)} + \frac{k_2}{(s - s_2)}. \quad (2.33)$$

Como  $s_2$  é o conjugado complexo de  $s_1$ , o resíduo  $k_2$  é o conjugado complexo de  $k_1$ , de modo que se obtém

$$Y(s) = \frac{k_1}{(s - s_1)} + \frac{k_1^*}{(s - s_1^*)},$$

onde o asterisco indica a relação de conjugado. O resíduo  $k_1$  é calculado a partir da Fig. 2.11 como

$$k_1 = \frac{(y_0)(s_1 + 2\zeta\omega_n)}{(s_1 - s_1^*)} = \frac{(y_0)M_1 e^{j\theta}}{M_2 e^{j\pi/2}}, \quad (2.34)$$

Em que  $M_1$  é a magnitude de  $(s_1 + 2\zeta\omega_n)$  e  $M_2$  é a magnitude de  $(s_1 - s_1^*)$ .<sup>†</sup> Neste caso, obtém-se

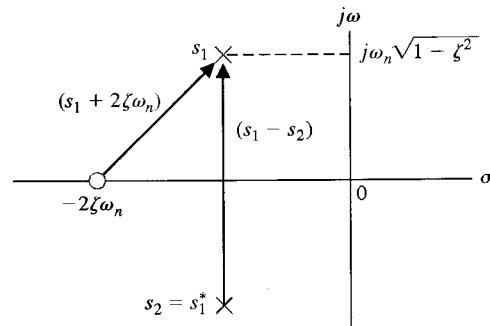
$$k_1 = \frac{(y_0)(\omega_n e^{j\theta})}{(2\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} e^{j\pi/2})} = \frac{(y_0)}{2\sqrt{1 - \zeta^2} e^{j(\pi/2 - \theta)}}, \quad (2.35)$$

onde  $\theta = \cos^{-1} \zeta$ . Por conseguinte,

$$k_2 = \frac{(y_0)}{2\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{j(\pi/2 - \theta)}. \quad (2.36)$$

Finalmente, encontra-se (usando  $\beta = \sqrt{1 - \zeta^2}$ )

$$\begin{aligned} y(t) &= k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} \\ &= \frac{y_0}{2\sqrt{1 - \zeta^2}} (e^{j(\theta - \pi/2)} e^{-\zeta\omega_n t} e^{j\omega_n \beta t} + e^{j(\pi/2 - \theta)} e^{-\zeta\omega_n t} e^{-j\omega_n \beta t}) \\ &= \frac{y_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \theta). \end{aligned} \quad (2.37)$$



**Fig. 2.11** Cálculo do resíduo  $k_1$ .

<sup>†</sup>Uma revisão sobre números complexos é apresentada no Apêndice E.

A solução, Eq. (2.37), também pode ser obtida usando-se o item 18 da Tabela A.1 no Apêndice A. As respostas transitórias para os casos superamortecido ( $\zeta > 1$ ) e subamortecido ( $\zeta < 1$ ) estão mostradas na Fig. 2.12. A resposta transitória que ocorre quando  $\zeta < 1$  apresenta uma oscilação cuja amplitude decresce com o tempo e que é chamada de **oscilação amortecida**.

A relação direta e clara entre a localização dos pólos no plano  $s$  e a forma da resposta transitória é interpretada diretamente a partir do diagrama de pólos e zeros no plano  $s$ . Além disto, a magnitude da resposta devida a cada uma das raízes, representada pelo resíduo, é visualizada claramente examinando-se os resíduos gráficos no plano  $s$ . A transformação de Laplace e a abordagem do plano  $s$  constituem técnicas muito úteis para a análise e o projeto de sistemas em que a ênfase é colocada no desempenho transitório e de estado estacionário. Com efeito, como o estudo de sistemas de controle diz respeito basicamente ao desempenho transitório e de regime permanente (estado estacionário) de sistemas dinâmicos, tem-se um motivo real para apreciar o valor das técnicas da transformada de Laplace.

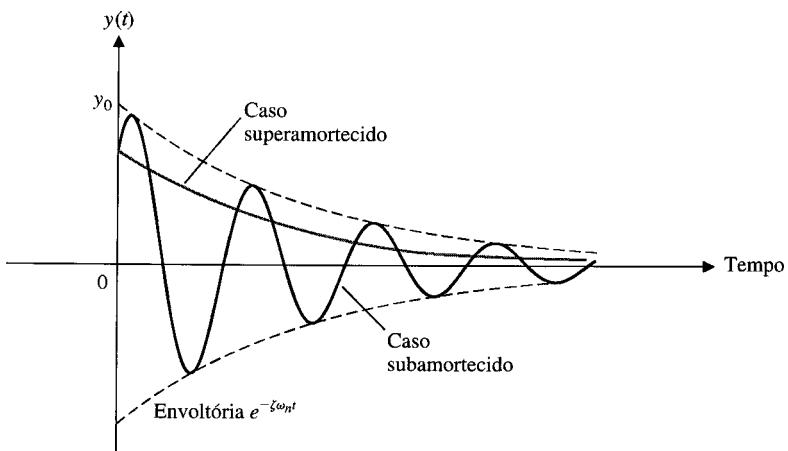


Fig. 2.12 Resposta do sistema mola-massa-amortecedor.

## 2.5 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE SISTEMAS LINEARES

A **função de transferência** de um sistema linear é definida como a relação entre a transformada de Laplace da variável de saída e a transformada de Laplace da variável de entrada, com todas as condições iniciais supostas iguais a zero. A função de transferência de um sistema (ou elemento) representa a relação que descreve a dinâmica do sistema sob consideração.

Uma função de transferência só pode ser definida para sistemas lineares e estacionários (parâmetros constantes). Um sistema não-estacionário, freqüentemente chamado de sistema variante no tempo, possui um ou mais parâmetros variáveis no tempo, e a transformada de Laplace não pode ser utilizada. Além disto, a função de transferência constitui uma descrição do tipo entrada-saída do comportamento do sistema. Assim, a descrição através de função de transferência não inclui qualquer informação quanto à estrutura interna do sistema e seu comportamento.

A função de transferência do sistema mola-massa-amortecedor é obtida a partir da equação original que o descreve, Eq. (2.19), reescrita com condições iniciais nulas como a seguir:

$$Ms^2Y(s) + bsY(s) + kY(s) = R(s). \quad (2.38)$$

Então a função de transferência é

$$\frac{\text{Saída}}{\text{Entrada}} = G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + k}. \quad (2.39)$$

A função de transferência do circuito  $RC$  mostrado na Fig. 2.13 pode ser obtida escrevendo-se a equação de Kirchhoff para a tensão, resultando

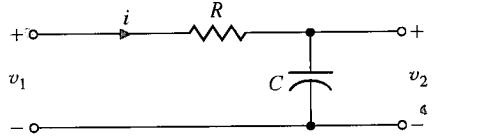
$$V_1(s) = \left( R + \frac{1}{Cs} \right) I(s). \quad (2.40)$$

A tensão de saída é

$$V_2(s) = I(s) \left( \frac{1}{Cs} \right). \quad (2.41)$$

Assim, resolvendo-se a Eq. (2.40) para  $I(s)$  e substituindo este valor na Eq. (2.41), tem-se

$$V_2(s) = \frac{(1/Cs)V_1(s)}{R + 1/Cs}.$$

Fig. 2.13 Circuito  $RC$ .

Em consequência a função de transferência é obtida através da relação  $V_2(s)/V_1(s)$ , que é

$$G(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{\tau s + 1} = \frac{(1/\tau)}{s + 1/\tau}, \quad (2.42)$$

onde  $\tau = RC$  é a **constante de tempo** do circuito. O pólo simples de  $G(s)$  é  $s = -1/\tau$ . A Eq. (2.42) poderia ser obtida imediatamente se fosse observado que o circuito é um divisor de tensão, no qual

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}, \quad (2.43)$$

e  $Z_1(s) = R$  e  $Z_2(s) = 1/Cs$ .

Um circuito elétrico multimalhas ou um sistema mecânico análogo multimassas resultam em um sistema de equações simultâneas na variável de Laplace. É usualmente mais conveniente resolver equações simultâneas usando matrizes e determinantes [1, 3, 16]. Uma introdução a matrizes e determinantes é fornecida no Apêndice C.

Considere-se o comportamento de longo prazo de um sistema e determine-se a resposta a determinadas entradas que permanecem depois que os transitórios desaparecem. Considere-se o sistema dinâmico representado pela equação diferencial

$$\frac{d^n y}{dt^n} + q_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + q_0 y = p_{n-1} \frac{d^{n-1} r}{dt^{n-1}} + p_{n-2} \frac{d^{n-2} r}{dt^{n-2}} + \dots + p_0 r, \quad (2.44)$$

onde  $y(t)$  é a resposta e  $r(t)$  é a entrada ou função forçante. Se as condições iniciais forem todas nulas, então a função de transferência é

$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{p(s)}{q(s)}R(s) = \frac{(p_{n-1}s^{n-1} + p_{n-2}s^{n-2} + \dots + p_0)}{(s^n + q_{n-1}s^{n-1} + \dots + q_0)}R(s). \quad (2.45)$$

A resposta na saída consiste de uma resposta natural (determinada pelas condições iniciais) mais uma resposta forçada determinada pela entrada. Tem-se agora

$$Y(s) = \frac{m(s)}{q(s)} + \frac{p(s)}{q(s)}R(s),$$

onde  $q(s) = 0$  é a equação característica. Se a entrada possuir uma forma racional do tipo

$$R(s) = \frac{n(s)}{d(s)},$$

então

$$Y(s) = \frac{m(s)}{q(s)} + \frac{p(s)}{q(s)} \frac{n(s)}{d(s)} = Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s), \quad (2.46)$$

onde  $Y_1(s)$  é a expansão em frações parciais da resposta natural,  $Y_2(s)$  é a expansão em frações parciais dos termos envolvendo fatores de  $q(s)$ , e  $Y_3(s)$  é a expansão em frações parciais dos termos envolvendo fatores de  $d(s)$ .

Tomando-se a transformada de Laplace inversa, resulta

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t).$$

A resposta transitória consiste de  $y_1(t) + y_2(t)$ , e a resposta em estado estacionário é  $y_3(t)$ .

## EXEMPLO 2.2

### Solução de uma equação diferencial

Considere-se um sistema descrito pela equação diferencial

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 3y = 2r(t),$$

onde as condições iniciais são  $y(0) = 1$ ,  $\frac{dy}{dt}(0) = 0$ , e  $r(t) = 1$ ,  $t \geq 0$ .

A transformada de Laplace conduz a

$$[s^2 Y(s) - sy(0)] + 4[sY(s) - y(0)] + 3Y(s) = 2R(s).$$

Como  $R(s) = 1/s$  e  $y(0) = 1$ , obtém-se

$$Y(s) = \frac{(s+4)}{(s^2 + 4s + 3)} + \frac{2}{s(s^2 + 4s + 3)},$$

Onde  $q(s) = s^2 + 4s + 3 = (s+1)(s+3) = 0$  é a equação característica e  $d(s) = s$ . Então, a expansão em frações parciais conduz a

$$\begin{aligned} Y(s) &= \left[ \frac{3/2}{(s+1)} + \frac{-1/2}{(s+3)} \right] + \left[ \frac{-1}{(s+1)} + \frac{1/3}{(s+3)} \right] + \frac{2/3}{s} \\ &= Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s). \end{aligned}$$

Assim, a resposta é

$$y(t) = \left[ \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \right] + \left[ -1e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-3t} \right] + \frac{2}{3},$$

E a resposta em estado estacionário é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{2}{3}. \blacksquare$$

### EXEMPLO 2.3

#### Função de transferência de sistema

Considere-se o sistema mecânico mostrado na Fig. 2.14(a) e seu circuito elétrico análogo mostrado na Fig. 2.14(b). O circuito elétrico é um análogo do tipo força-corrente como assinalado na Tabela 2.1. As velocidades  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  do sistema mecânico são análogas diretamente às tensões dos nós  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  do circuito elétrico. As equações simultâneas, admitindo-se que as condições iniciais são nulas, são

$$M_1 s V_1(s) + (b_1 + b_2) V_1(s) - b_1 V_2(s) = R(s), \quad (2.47)$$

$$M_2 s V_2(s) + b_1 (V_2(s) - V_1(s)) + k \frac{V_2(s)}{s} = 0. \quad (2.48)$$

Estas equações são obtidas usando-se as equações de força para o sistema mecânico da Fig. 2.14(a). Rearranjando as Eqs. (2.47) e (2.48), obtém-se

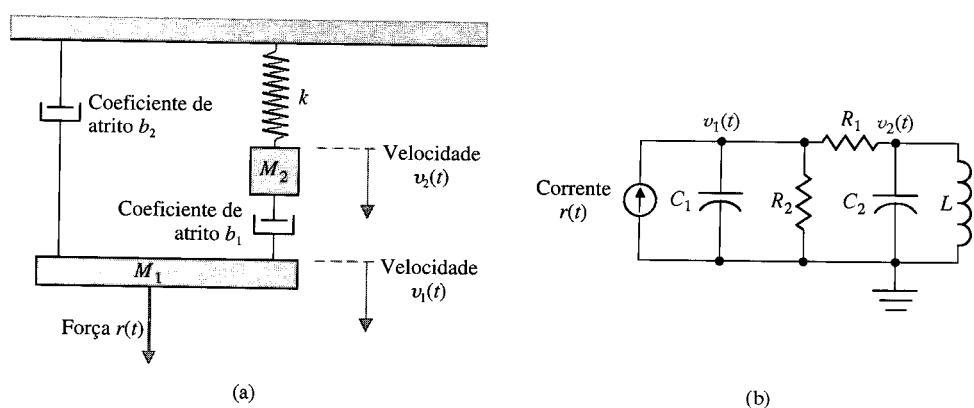
$$(M_1 s + (b_1 + b_2)) V_1(s) + (-b_1) V_2(s) = R(s),$$

$$(-b_1) V_1(s) + \left( M_2 s + b_1 + \frac{k}{s} \right) V_2(s) = 0,$$

ou, sob forma matricial, resulta

$$\begin{bmatrix} (M_1 s + b_1 + b_2) & (-b_1) \\ (-b_1) & M_2 s + b_1 + \frac{k}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Admitindo-se que a velocidade de  $M_1$  seja a variável de saída, resolve-se para  $V_1(s)$  por meio de inversão de matrizes ou da regra de Cramer para obter [1, 3]



**Fig. 2.14 (a)** Sistema mecânico com duas massas. **(b)** Circuito elétrico análogo com dois nós  $C_1 = M_1$ ,  $C_2 = M_2$ ,  $L = 1/k$ ,  $R_1 = 1/b_1$ ,  $R_2 = 1/b_2$ .

$$V_1(s) = \frac{(M_2 s + b_1 + (k/s))R(s)}{(M_1 s + b_1 + b_2)(M_2 s + b_1 + (k/s)) - b_1^2}. \quad (2.50)$$

Então, a função de transferência do sistema mecânico (ou elétrico) é

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{V_1(s)}{R(s)} = \frac{(M_2 s + b_1 + (k/s))}{(M_1 s + b_1 + b_2)(M_2 s + b_1 + (k/s)) - b_1^2} \\ &= \frac{(M_2 s^2 + b_1 s + k)}{(M_1 s + b_1 + b_2)(M_2 s^2 + b_1 s + k) - b_1^2 s}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Se for desejada a função de transferência em termos da posição  $x_1(t)$ , tem-se então

$$\frac{X_1(s)}{R(s)} = \frac{V_1(s)}{sR(s)} = \frac{G(s)}{s}. \blacksquare \quad (2.52)$$

Como exemplo, seja agora obter a função de transferência de um componente elétrico importante, o **motor de corrente contínua (CC)** [8]. Um motor CC é usado para mover cargas e é chamado de um **atuador**.

**Um atuador é um dispositivo que fornece potência motriz ao processo.**

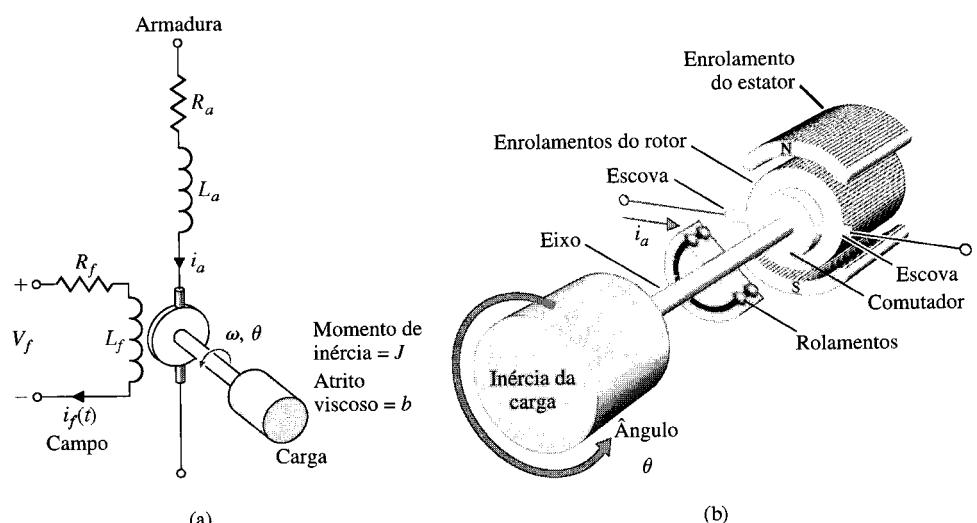
#### EXEMPLO 2.4

#### Função de transferência de um motor CC

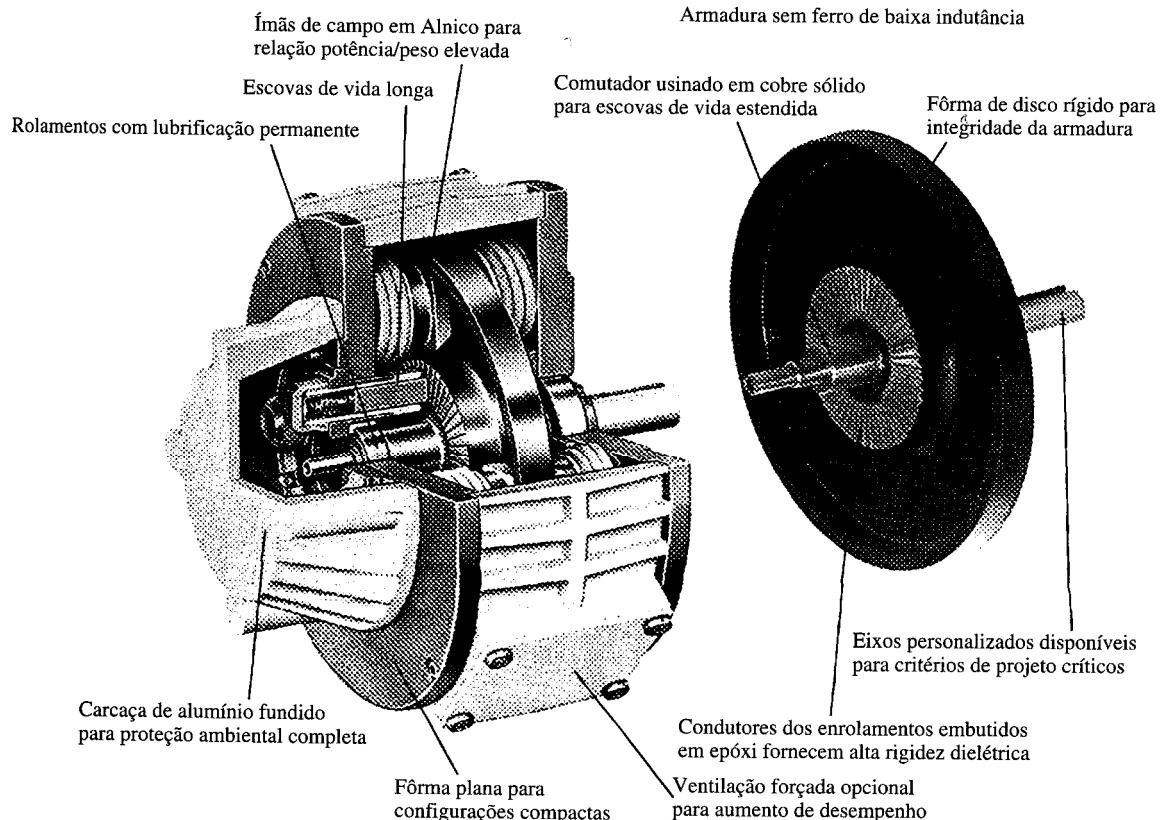
O motor CC é um dispositivo atuador de potência que entrega energia a uma carga, como está mostrado na Fig. 2.15(a); um esboço de um motor CC está mostrado na Fig. 2.15(b). Uma vista em corte de um motor CC do tipo panqueca é fornecida na Fig. 2.16. O motor CC converte energia elétrica de corrente contínua (CC) em energia mecânica rotativa. Uma fração importante do torque gerado no rotor (armadura) do motor está disponível para acionar uma carga externa. Devido a recursos tais como torque elevado, possibilidade de controle de velocidade sobre uma ampla faixa de valores, portabilidade, característica velocidade-torque bem comportada e adaptabilidade a vários tipos de métodos de controle, os motores CC ainda são usados largamente em numerosas aplicações de controle, incluindo manipuladores robóticos, mecanismos de transporte de fitas, acionadores de disco, máquinas-ferramentas e atuadores de servoválvulas.

A função de transferência do motor CC será deduzida por meio de uma aproximação linear do motor real, e os efeitos de segunda ordem, como histerese e queda de tensão nas escovas, serão desprezados. A tensão de entrada pode ser aplicada aos terminais de campo ou de armadura. O fluxo no entreferro do motor é proporcional à corrente de campo, desde que o campo não esteja saturado, ou seja

$$\phi = K_f i_f. \quad (2.53)$$



**Fig. 2.15** Diagrama de fiação (a) e esboço (b) de um motor CC.



**Fig. 2.16** Um motor CC do tipo panqueca com enrolamento de armadura plano e rotor de ímã permanente. Estes motores são capazes de fornecer torque elevado com um rotor de inércia reduzida. Um valor de constante de tempo mecânica típica está na faixa de 15 ms. (Cortesia de Mavilor Motors.)

O torque desenvolvido pelo motor é admitido como sendo relacionado linearmente a  $\phi$  e à corrente de armadura, como a seguir:

$$T_m = K_1 \phi i_a(t) = K_1 K_f i_f(t) i_a(t). \quad (2.54)$$

É evidente a partir da Eq. (2.54) que, para ter um elemento linear, uma das correntes deve ser mantida constante enquanto a outra se torna a corrente de entrada. Primeiramente será considerado o motor **controlado pela corrente de campo**, o qual fornece uma amplificação de potência substancial. Tem-se, então, em notação de transformada de Laplace

$$T_m(s) = (K_1 K_f I_a) I_f(s) = K_m I_f(s), \quad (2.55)$$

onde  $i_a = I_a$  é uma corrente de armadura constante e  $K_m$  é definida como a constante do motor. A corrente de campo se relaciona com a tensão de campo através de

$$V_f(s) = (R_f + L_f s) I_f(s). \quad (2.56)$$

O torque motor  $T_m(s)$  é igual ao torque entregue à carga. Esta relação pode ser expressa como

$$T_m(s) = T_L(s) + T_d(s), \quad (2.57)$$

onde  $T_L(s)$  é o torque na carga e  $T_d(s)$  é o torque perturbador, quase sempre desprezível. Contudo, muitas vezes, o torque perturbador deve ser considerado em sistemas sujeitos a forças externas, como as produzidas por rajadas de vento em antenas. O torque de carga para inércias em rotação, conforme está mostrado na Fig. 2.15, é escrito como

$$T_L(s) = J s^2 \theta(s) + b s \theta(s). \quad (2.58)$$

Rearranjando as Eqs. (2.55) e (2.57), tem-se

$$T_L(s) = T_m(s) - T_d(s), \quad (2.59)$$

$$T_m(s) = K_m I_f(s), \quad (2.60)$$

$$I_f(s) = \frac{V_f(s)}{R_f + L_f s}. \quad (2.61)$$

Em consequência a função de transferência do conjunto motor-carga, com  $T_d(s) = 0$ , é

$$\frac{\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{K_m}{s(Js + b)(L_f s + R_f)} = \frac{K_m/JL_f}{s(s + b/J)(s + R_f/L_f)}. \quad (2.62)$$

O modelo em diagrama de blocos do motor CC controlado pelo campo está mostrado na Fig. 2.17. Alternativamente, a função de transferência pode ser, escrita em termos das constantes de tempo do motor, como sendo

$$\frac{\theta(s)}{V_f(s)} = G(s) = \frac{K_m/bR_f}{s(\tau_f s + 1)(\tau_L s + 1)}, \quad (2.63)$$

onde  $\tau_f = L_f/R_f$  e  $\tau_L = J/b$ . Encontra-se que, tipicamente,  $\tau_L > \tau_f$  e muitas vezes a constante de tempo do campo pode ser desprezada.

**O motor CC controlado pela armadura** utiliza uma corrente de campo constante e, em consequência, o torque motor é

$$T_m(s) = (K_1 K_f I_f) I_a(s) = K_m I_a(s). \quad (2.64)$$

A corrente de armadura se relaciona com a tensão aplicada à armadura através da expressão

$$V_a(s) = (R_a + L_a s) I_a(s) + V_b(s), \quad (2.65)$$

onde  $V_b(s)$  é a tensão devida à força contra-eletromotriz proporcional à velocidade do motor. Tem-se, por conseguinte,

$$V_b(s) = K_b \omega(s), \quad (2.66)$$

e a corrente de armadura é

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - K_b \omega(s)}{(R_a + L_a s)}. \quad (2.67)$$

As Eqs. (2.58) e (2.59) representam o torque de carga, e assim

$$T_L(s) = Js^2 \theta(s) + bs \theta(s) = T_m(s) - T_d(s). \quad (2.68)$$

As relações para o motor CC controlado pela armadura estão mostradas esquematicamente na Fig. 2.18. Usando as Eqs. (2.64), (2.67) e (2.68), ou alternativamente, o diagrama de blocos, obtém-se a função de transferência (com  $T_d(s) = 0$ )

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[(R_a + L_a s)(Js + b) + K_b K_m]} \\ &= \frac{K_m}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Contudo, para muitos motores CC, a constante de tempo da armadura,  $\tau_a = L_a/R_a$ , pode ser desprezada e, por conseguinte,

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[R_a(Js + b) + K_b K_m]} = \frac{[K_m/(R_a b + K_b K_m)]}{s(\tau_1 s + 1)}, \quad (2.70)$$

onde a constante de tempo equivalente  $\tau_1 = R_a J / (R_a b + K_b K_m)$ .

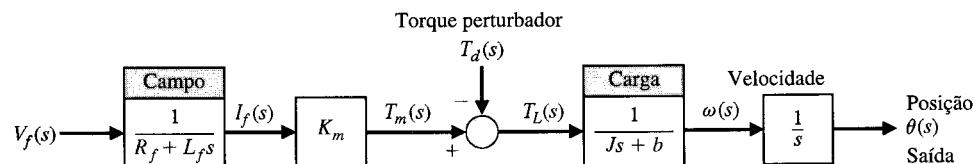


Fig. 2.17 Modelo em diagrama de blocos do motor CC controlado pelo campo.

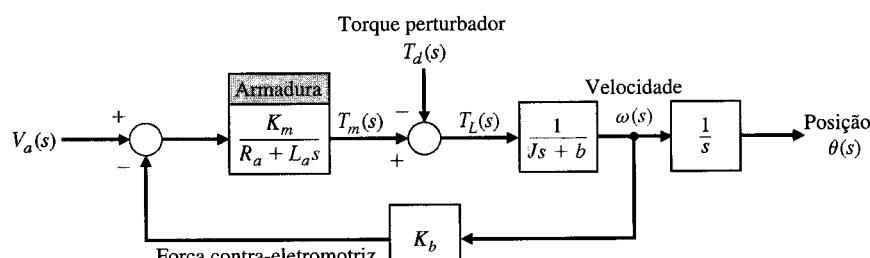
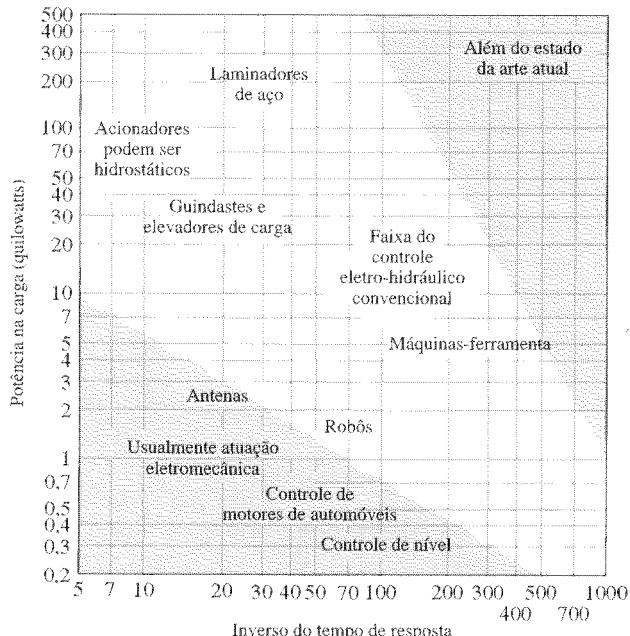


Fig. 2.18 Motor CC controlado pela armadura.

**TABELA 2.6 Parâmetros Típicos de um Motor CC Fracionário (em HP)**

Constante do motor $K_m$	$50 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m/A}$
Inércia do rotor $J_m$	$1 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2/\text{rad}$
Constante de tempo do campo $\tau_f$	1 ms
Constante de campo do rotor $\tau$	100 ms
Potência máxima de saída	1/4 hp, 187 W



**Fig. 2.19** Faixa de valores de tempo de resposta de controle e de potência na carga para dispositivos eletromecânicos e eletro-hidráulicos.

É interessante observar que  $K_m$  é igual a  $K_b$ . Esta igualdade pode ser mostrada considerando-se a operação do motor em estado estacionário e o equilíbrio de potência quando se despreza a resistência do rotor. A potência de entrada no rotor é  $(K_b\omega)i_a$  e a potência entregue ao eixo é  $T\omega$ . Na condição de estado estacionário, a potência de entrada é igual à potência entregue ao eixo de modo que  $(K_b\omega)i_a = T\omega$ ; como  $T = K_m i_a$  (Eq. 2.64), conclui-se que  $K_b = K_m$ .

Os motores elétricos são usados para movimentar cargas quando não se requer resposta rápida e para requisitos de pequena potência. Os valores típicos de parâmetros de um motor de potência fracionária (em HP) são fornecidos na Tabela 2.6. Atuadores que operam como um resultado de pressão hidráulica são utilizados para grandes cargas. A Fig. 2.19 mostra as faixas usuais de emprego para os acionadores eletromecânicos em contraste com os acionadores eletro-hidráulicos. Aplicações típicas são também mostradas na figura. ■

#### EXEMPLO 2.5

#### Função de transferência de atuador hidráulico

Um atuador útil no posicionamento linear de uma massa é o atuador hidráulico mostrado na Tabela 2.7, item 9 [9, 10]. O atuador hidráulico é capaz de prover uma elevada amplificação de potência. Será suposto que o fluido hidráulico é disponível a partir de uma fonte de pressão com valor constante e que a compressibilidade do fluido seja desprezível. Um deslocamento de entrada para baixo,  $x$ , move a válvula de controle e, assim, o fluido ingressa na parte superior do cilindro e o êmbolo é迫使ido para baixo. Um pequeno deslocamento  $x(t)$ , com baixa potência, provoca um deslocamento maior  $y(t)$ , de alta potência. A vazão volumétrica  $Q$  do fluido se relaciona com o deslocamento de entrada  $x(t)$  e com a pressão aplicada ao êmbolo pela expressão  $Q = g(x, P)$ . Usando a linearização por meio da série de Taylor como na Eq. (2.11), tem-se

$$Q = \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x_0, P_0} x + \left( \frac{\partial g}{\partial P} \right)_{P_0, x_0} P = k_x x - k_p P, \quad (2.71)$$

TABELA 2.7 Funções de Transferência de Elementos Dinâmicos e de Circuitos

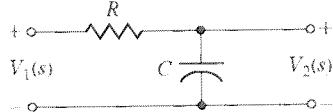
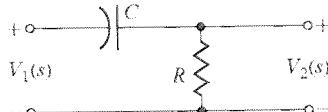
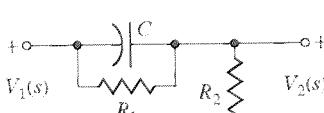
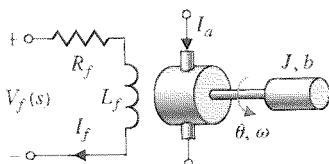
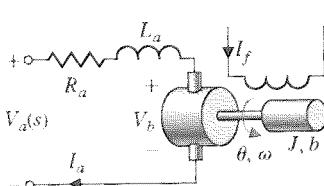
Elemento ou Sistema	$G(s)$
1. Circuito integrador, filtro	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$
	
2. Circuito diferenciador	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{RCs}{RCs + 1}$
	
3. Circuito diferenciador	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{s + 1/R_1 C}{s + (R_1 + R_2)/R_1 R_2 C}$
	
4. Circuito de filtro de avanço-atraso de fase	$\begin{aligned} \frac{V_2(s)}{V_1(s)} &= \frac{(1 + s\tau_a)(1 + s\tau_b)}{\tau_a\tau_b s^2 + (\tau_a + \tau_b + \tau_{ab})s + 1} \\ &= \frac{(1 + s\tau_a)(1 + s\tau_b)}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)} \end{aligned}$
$\tau_a = R_1 C_1$ $\tau_b = R_2 C_2$ $\tau_{ab} = R_1 C_2$ $\tau_1 \tau_2 = \tau_a \tau_b$ $\tau_1 + \tau_2 = \tau_a + \tau_b + \tau_{ab}$	
5. Motor CC, controlado pelo campo, atuador rotativo	$\frac{\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{K_m}{s(Js + b)(L_f s + R_f)}$
	
6. Motor CC, controlado pela armadura, atuador rotativo	$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[(R_a + L_a s)(Js + b) + K_b K_m]}$
	

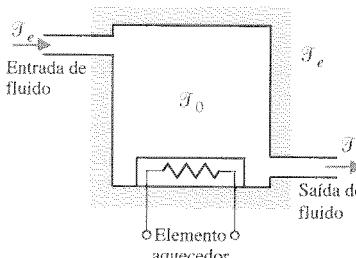
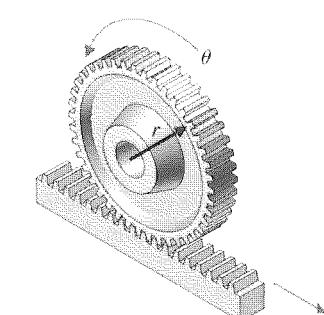
TABELA 2.7 Continuação

Elemento ou Sistema	$G(s)$
7. Motor CA, bifásico com enrolamento de controle, atuador rotativo	$\frac{\theta(s)}{V_c(s)} = \frac{K_m}{s(\tau s + 1)}$ $\tau = J/(b - m)$ <p><math>m</math> = inclinação (normalmente negativa) da curva de torque-velocidade linearizada</p>
8. Amplidina, amplificador de tensão e de potência	$\frac{V_o(s)}{V_c(s)} = \frac{(K/R_c R_q)}{(s\tau_c + 1)(s\tau_q + 1)}$ $\tau_c = L_c/R_c, \quad \tau_q = L_q/R_q$ <p>Para o caso de operação em vazio (sem carga) <math>i_d = 0, \tau_c \approx \tau_q, 0,05 \text{ s} &lt; \tau_c &lt; 0,5 \text{ s}</math></p> $V_{12} = V_q, \quad V_{34} = V_d$
9. Atuador hidráulico	$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s(Ms + B)}$ $K = \frac{Ak_x}{k_p}, \quad B = \left( b + \frac{A^2}{k_p} \right)$ $k_x = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right _{x_0}, \quad k_p = \left. \frac{\partial g}{\partial P} \right _{P_0},$ $g = g(x, P) = \text{vazão}$ <p><math>A</math> = área do êmbolo</p>
10. Trem de engrenagens, transformador de rotação	<p>Relação de engrenagens = <math>n = \frac{N_1}{N_2}</math></p> $N_2 \theta_L = N_1 \theta_m, \quad \theta_L = n \theta_m$ $\omega_L = n \omega_m$

TABELA 2.7 Continuação

Elemento ou Sistema	$G(s)$
11. Potenciômetro, controle de tensão	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R_2}{R} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ $\frac{R_2}{R} = \frac{\theta}{\theta_{\max}}$
12. Ponte potiométrica para detecção de erro	$V_2(s) = k_s(\theta_1(s) - \theta_2(s))$ $V_2(s) = k_s \theta_{\text{erro}}(s)$ $k_s = \frac{V_{\text{bateria}}}{\theta_{\max}}$
13. Tacômetro, sensor de velocidade	$V_2(s) = K_t \omega(s) = K_t s \theta(s);$ $K_t = \text{constante}$
14. Amplificador CC	$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{k_a}{s\tau + 1}$ $R_o = \text{resistência de saída}$ $C_o = \text{capacitância de saída}$ $\tau = R_o C_o, \tau \ll 1$ e é freqüentemente desprezada nos amplificadores para servomecanismos
15. Acelerômetro, sensor de aceleração	$x_o(t) = y(t) - x_{in}(t),$ $\frac{X_o(s)}{X_{in}(s)} = \frac{-s^2}{s^2 + (b/M)s + k/M}$ Para oscilações de freqüência baixa, onde $\omega < \omega_n$ , $\frac{X_o(j\omega)}{X_{in}(j\omega)} \approx \frac{\omega^2}{k/M}$

TABELA 2.7 Continuação

Elemento ou Sistema	$G(s)$
16. Sistema térmico de aquecimento	 $\frac{\mathcal{T}(s)}{q(s)} = \frac{1}{C_t s + (QS + 1/R)}, \text{ onde}$ <p><math>\mathcal{T} = T_o - T_e</math> = diferença de temperatura devida ao processo térmico</p> <p><math>C_t</math> = capacidade térmica</p> <p><math>Q</math> = vazão de fluido = constante</p> <p><math>S</math> = calor específico da água</p> <p><math>R_t</math> = resistência térmica do isolamento</p> <p><math>q(s)</math> = vazão do fluxo térmico do elemento aquecedor</p>
17. Cremalheira e pinhão	 $x = r\theta$ <p>converte movimento angular em movimento linear</p>

Onde  $g = g(x, P)$  e  $(x_0, P_0)$  é o ponto de operação. A força desenvolvida pelo êmbolo do atuador é igual à área,  $A$ , do êmbolo multiplicada pela pressão,  $P$ . Esta força é aplicada à massa, de modo que se tem

$$AP = M \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt}. \quad (2.72)$$

Assim, substituindo-se a Eq. (2.71) na Eq. (2.72), resulta

$$\frac{A}{k_p} (k_x x - Q) = M \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt}. \quad (2.73)$$

Além disto, a vazão volumétrica de fluido é relacionada ao movimento do êmbolo por

$$Q = A \frac{dy}{dt}. \quad (2.74)$$

Então, substituindo-se a Eq. (2.74) na Eq. (2.73) e rearrumando os termos, vem

$$\frac{Ak_x}{k_p} x = M \frac{d^2y}{dt^2} + \left( b + \frac{A^2}{k_p} \right) \frac{dy}{dt}. \quad (2.75)$$

Assim, usando a transformação de Laplace, obtém-se a função de transferência

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s(Ms + B)}, \quad (2.76)$$

onde

$$K = \frac{Ak_x}{k_p} \quad \text{e} \quad B = \left( b + \frac{A^2}{k_p} \right).$$

Observe-se que a função de transferência do atuador hidráulico é semelhante à do motor elétrico. Além disto, para um atuador operando em níveis de pressão elevada e requerendo resposta rápida no acionamento da carga, o efeito da compressibilidade do fluido deve ser levado em conta [4, 5].

A Tabela B.1 do Apêndice B fornece as unidades das variáveis no Sistema SI. São incluídos também, na Tabela B.2, os fatores de conversão de unidades do Sistema Britânico para o SI. ■

O conceito e a abordagem de função de transferência é muito importante porque dota o analista e o projetista de um modelo matemático útil dos elementos do sistema. A função de transferência será vista como um auxílio continuamente valioso no esforço de modelar sistemas dinâmicos. A abordagem é particularmente útil porque os pólos e zeros da função de transferência no plano  $s$  representam a resposta transitoria do sistema. As funções de transferência de diversos elementos dinâmicos são dadas na Tabela 2.7.

Em muitas situações de engenharia, a transmissão do movimento de rotação de um eixo para outro constitui um requisito fundamental. Por exemplo, a potência de saída de um motor de automóvel é transferida para as rodas de tração por meio de uma caixa de mudanças e de um diferencial. A caixa de engrenagens permite que o motorista escolha diferentes relações de transmissão dependendo da situação de tráfego, enquanto o diferencial possui um valor fixo. A velocidade do motor, neste caso, não é constante, uma vez que está sob o controle do motorista. Um outro exemplo é um conjunto de engrenagens que transfere a potência do eixo de um motor elétrico para o eixo de uma antena rotativa. São exemplos de conversores mecânicos as engrenagens, as correntes e as correias de acionamento. Um conversor elétrico comumente usado é o transformador. Um exemplo de dispositivo que converte movimento de rotação em movimento linear é o conjunto de engrenagens pinhão-cremalheira mostrado no número 17 na Tabela 2.7.

## 2.6 MODELOS EM DIAGRAMAS DE BLOCOS

Os sistemas dinâmicos que abrangem os sistemas de controle automático são representados matematicamente por um conjunto de equações diferenciais simultâneas. Como foi observado nas seções anteriores, a introdução da transformação de Laplace reduz o problema à solução de um conjunto de equações algébricas lineares. Como os sistemas de controle dizem respeito ao controle de variáveis específicas, isto requer a inter-relação entre as variáveis controladas e as variáveis de controle. Esta relação é representada tipicamente pela função de transferência do subsistema que relaciona as variáveis de entrada e de saída. Em consequência, pode-se admitir corretamente que a função de transferência é uma relação importante para o engenheiro de controle.

A importância da relação causa e efeito da função de transferência é evidenciada pela facilidade de representar a relação entre as variáveis do sistema através de diagramas. A representação das relações de sistemas em **diagrama de blocos** é predominante na engenharia de sistemas de controle. Os diagramas de blocos consistem de blocos operacionais, unidirecionais, que representam a função de transferência entre as variáveis de interesse. Um diagrama de blocos de motor CC e carga controlado pelo campo está mostrado na Fig. 2.20. A relação entre o deslocamento  $\theta(s)$  e a tensão de entrada  $V_f(s)$  é retratada claramente pelo diagrama de blocos.

Para representar um sistema com várias variáveis sob controle, utiliza-se uma interconexão de blocos. Por exemplo, o sistema mostrado na Fig. 2.21 possui duas variáveis de entrada e duas variáveis de saída [6]. Usando as relações de função de transferência, pode-se escrever as equações simultâneas para as variáveis de saída como sendo

$$Y_1(s) = G_{11}(s)R_1(s) + G_{12}(s)R_2(s), \quad (2.77)$$

$$Y_2(s) = G_{21}(s)R_1(s) + G_{22}(s)R_2(s), \quad (2.78)$$

onde  $G_{ij}(s)$  é a função de transferência relacionando a  $i$ -ésima variável de saída com a  $j$ -ésima variável de entrada. O diagrama de blocos representando este conjunto de equações está mostrado na Fig. 2.22. Em geral, para  $J$  entradas e  $I$  saídas, escrevem-se as equações simultâneas sob forma matricial como sendo

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_I(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \cdots & G_{1J}(s) \\ G_{21}(s) & \cdots & G_{2J}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{I1}(s) & \cdots & G_{IJ}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \\ \vdots \\ R_J(s) \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

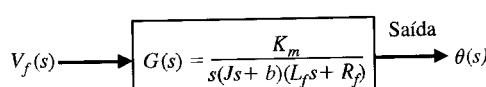
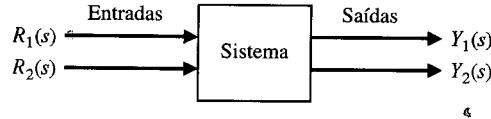
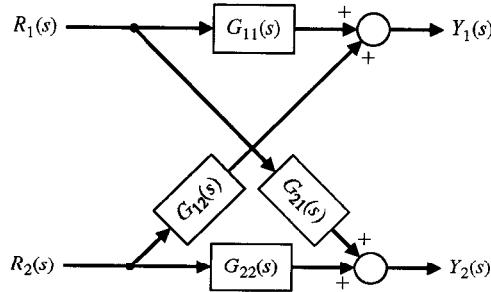


Fig. 2.20 Diagrama de blocos de um motor CC.

**Fig. 2.21** Representação em diagrama de blocos genérico de um sistema com duas entradas e duas saídas.



**Fig. 2.22** Diagrama de blocos de um sistema interconectado.



ou, simplesmente,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{GR}. \quad (2.80)$$

Aqui as matrizes  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{R}$  são matrizes coluna contendo as  $I$  variáveis de saída e as  $J$  variáveis de entrada, respectivamente, e  $\mathbf{G}$  é uma matriz função de transferência de  $I$  por  $J$ . A representação matricial da inter-relação entre diversas variáveis é particularmente útil em sistemas de controle complexos multivariáveis. Uma introdução à álgebra matricial é fornecida no Apêndice C para os que não estejam familiarizados com esta disciplina ou para aqueles que considerem útil uma revisão sobre o assunto [2].

A representação em diagrama de blocos de um dado sistema pode muitas vezes ser reduzida a um diagrama com um número menor de blocos que o diagrama original por meio das técnicas de redução. Como as funções de transferência representam sistemas lineares e invariantes no tempo, a multiplicação é comutativa. Portanto, como na posição 1 da Tabela 2.8, tem-se

$$X_3(s) = G_2(s)X_2(s) = G_1(s)G_2(s)X_1(s).$$

Quando dois blocos são conectados em cascata, como na posição 1 da Tabela 2.8, admite-se que

$$X_3(s) = G_2(s)G_1(s)X_1(s)$$

permanece verdadeiro. Isto pressupõe que, ao conectar o primeiro bloco com o segundo, o efeito de carga deste sobre o primeiro bloco é desprezível. Podem ocorrer o carregamento e a interação entre componentes ou sistemas interconectados. Se de fato ocorrer o carregamento entre dispositivos interconectados, o engenheiro deve considerar esta mudança na função de transferência e utilizar a função de transferência corrigida nos cálculos subsequentes.

As transformações dos diagramas de blocos e as técnicas de redução são deduzidas considerando-se a álgebra com as variáveis do diagrama. Por exemplo, considere-se o diagrama de blocos mostrado na Fig. 2.23. Este sistema de controle com retroação negativa está descrito pela equação relativa ao sinal atuante

$$E_a(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)Y(s). \quad (2.81)$$

Como a resposta se relaciona com o sinal atuante através de  $G(s)$ , tem-se

$$Y(s) = G(s)E_a(s), \quad (2.82)$$

e, portanto

$$Y(s) = G(s)[R(s) - H(s)Y(s)]. \quad (2.83)$$

Resolvendo em termos de  $Y(s)$ , resulta

$$Y(s)[1 + G(s)H(s)] = G(s)R(s). \quad (2.84)$$

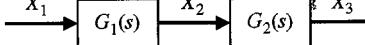
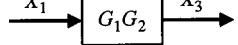
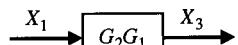
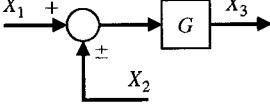
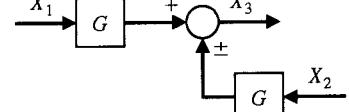
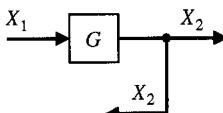
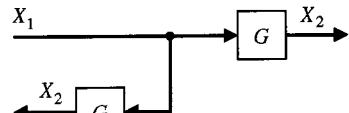
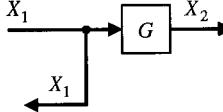
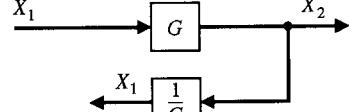
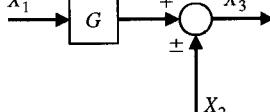
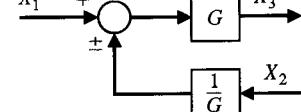
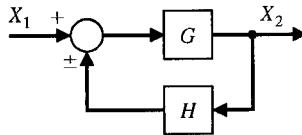
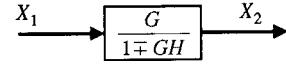
Por conseguinte a função de transferência relacionando a saída  $Y(s)$  à entrada  $R(s)$  é

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}.$$

(2.85)

Esta função de transferência a malha fechada é particularmente importante porque representa muitos dos sistemas de controle práticos existentes.

TABELA 2.8 Transformações com Diagrama de Blocos

Transformação	Diagrama Original	Diagrama Equivalente
1. Combinando blocos em cascata		 ou 
2. Deslocando para a frente um ponto de soma situado atrás de um bloco		
3. Deslocando para trás um ponto de derivação situado à frente de um bloco		
4. Deslocando para a frente um ponto de derivação situado atrás de um bloco		
5. Deslocando para trás um ponto de soma situado à frente de um bloco		
6. Eliminando um laço de retroação		

A redução do diagrama de blocos mostrado na Fig. 2.23 a uma representação com um único bloco é um exemplo de diversas reduções de diagramas de blocos úteis. Estas transformações de diagramas são fornecidas na Tabela 2.8. Todas as transformações na Tabela 2.8 podem ser deduzidas através de manipulações algébricas simples das equações que representam os blocos. A análise de sistemas pelo método da redução de diagrama de blocos propicia uma compreensão da contribuição de cada elemento componente melhor do que a que é possível obter através da manipulação das equações. A utilidade das transformações de diagramas de blocos será ilustrada através de um exemplo usando a redução de diagrama de blocos.

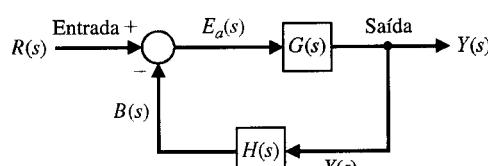
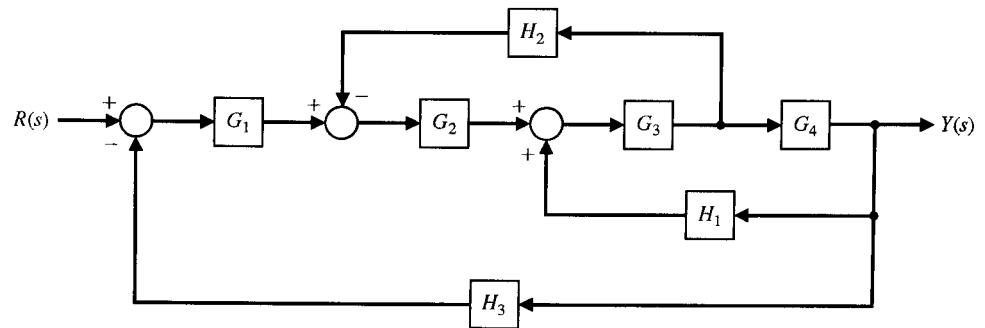


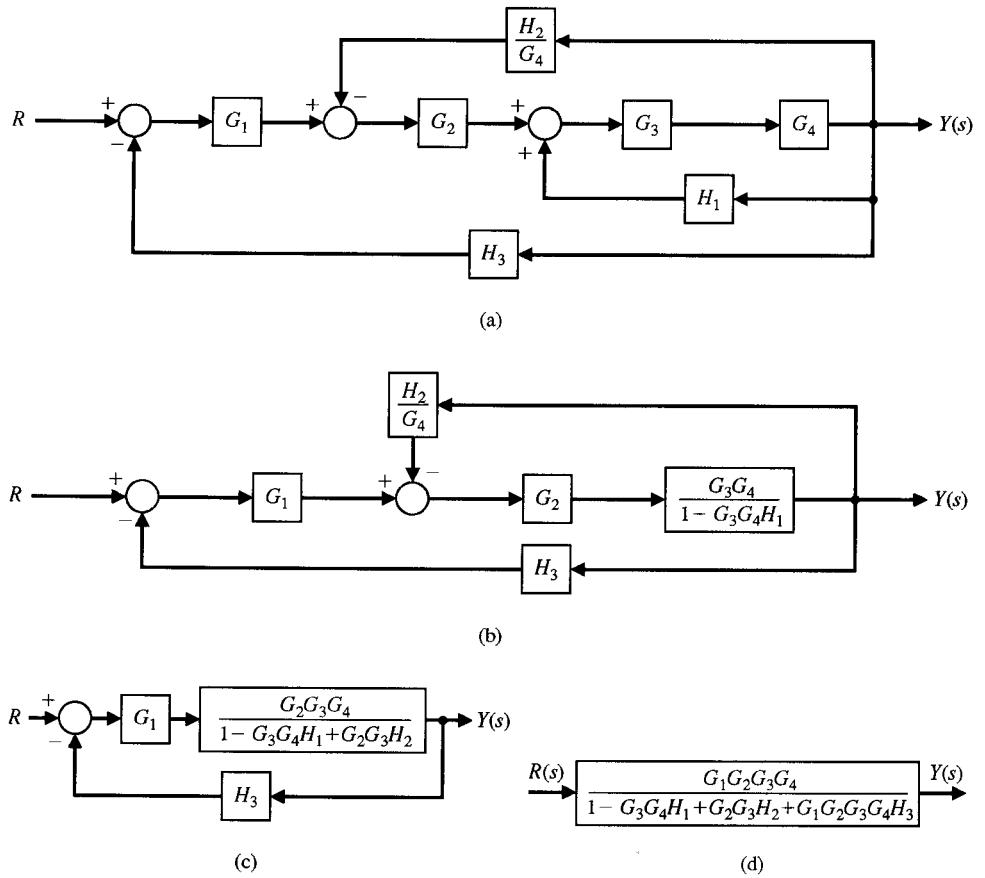
Fig. 2.23 Sistema de controle com retroação negativa.

**EXEMPLO 2.6****Redução de diagrama de blocos**

O diagrama de blocos de um sistema de controle multimalhas com retroação está mostrado na Fig. 2.24. É interessante observar que o sinal de retroação  $H_1(s)Y(s)$  é um sinal de retroação positiva e a malha  $G_3(s)G_4(s)H_1(s)$  é chamada de **laço com retroação positiva**. O procedimento de redução do diagrama de blocos se baseia na utilização da regra 6 na Tabela 2.8, a qual elimina os laços de retroação. Em consequência, as outras transformações são usadas para colocar o diagrama em uma forma pronta para a eliminação dos laços de retroação. Primeiramente, para eliminar o laço  $G_3G_4H_1$ , desloca-se  $H_2$  para depois do bloco  $G_4$  usando a regra 4 e obtendo-se, assim, a Fig. 2.25(a). Eliminando-se o laço  $G_3G_4H_1$  com o uso da regra 6, obtém-se a Fig. 2.25(b). Em seguida, eliminando-se o laço interno contendo  $H_2/G_4$ , obtém-se a Fig. 2.25(c). Finalmente, reduzindo-se o laço contendo  $H_3$  obtém-se a função de transferência a malha fechada do sistema como está mostrado na Fig. 2.25(d). Vale a pena examinar a forma do numerador e do denominador desta função de transferência a malha fechada. Observa-se que o numerador é composto da função de transferência em cascata dos elementos do canal de atuação à frente (*feedforward*) conectando a entrada  $R(s)$  à saída  $Y(s)$ . O denominador é composto de 1 menos a soma de cada uma das funções de transferência de laço. O sinal do laço  $G_3G_4H_1$



**Fig. 2.24** Sistema de controle com retroação com laços múltiplos.



**Fig. 2.25** Redução do diagrama de blocos do sistema da Fig. 2.24.

é mais porque se trata de um laço de retroação positiva, enquanto os laços  $G_1G_2G_3G_4H_3$  e  $G_2G_3H_2$  são laços de retroação negativa. Para ilustrar este ponto, o denominador pode ser reescrito como

$$q(s) = 1 - (+G_3G_4H_1 - G_2G_3H_2 - G_1G_2G_3G_4H_3). \quad (2.86)$$

Esta forma do numerador e do denominador é bastante próxima da forma geral de sistemas multimalhas com retroação, como será encontrado na seção a seguir. ■

A representação em diagrama de blocos de sistemas de controle com retroação é uma abordagem valiosa e largamente usada. O diagrama de blocos fornece ao analista uma representação gráfica das inter-relações entre as variáveis controlada e de entrada. Além disto, o projetista pode visualizar prontamente as possibilidades de adicionar blocos a um diagrama de blocos de um sistema existente de modo a alterar e melhorar o seu desempenho. A transição do método de diagrama de blocos para um método que utiliza uma representação por meio de arcos orientados em vez de blocos é conseguida prontamente e será apresentada na próxima seção.

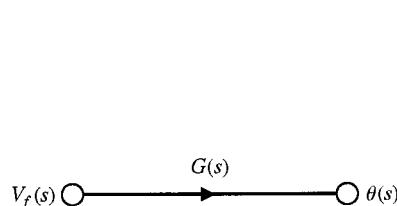
## 2.7 MODELOS EM DIAGRAMAS DE FLUXO DE SINAL

Os diagramas de blocos são adequados para a representação das inter-relações entre variáveis controlada e de entrada. Contudo, para um sistema com inter-relações razoavelmente complexas, o procedimento de redução do diagrama de blocos é trabalhoso e quase sempre bastante difícil de concluir. Um método alternativo para se determinar a relação entre variáveis de um sistema foi desenvolvido por Mason e é baseado em uma representação do sistema por meio de segmentos de arcos [4, 25]. A vantagem do método do percurso de arcos, chamado de método do diagrama de fluxo de sinal, é a disponibilidade de uma fórmula para obter o ganho de um diagrama de fluxo, a qual fornece a relação entre variáveis do sistema sem requerer qualquer redução ou manipulação do diagrama de fluxo.

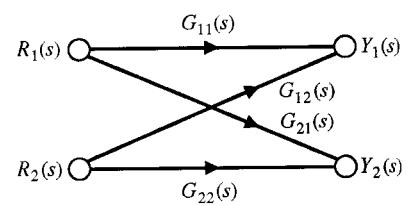
A transição de uma representação em diagrama de blocos para uma representação através de arcos orientados é fácil de obter reconsiderando-se os sistemas da seção anterior. Um **diagrama de fluxo** é um gráfico formado de nós conectados através de arcos orientados e constitui uma representação gráfica de um conjunto de relações lineares. Os diagramas de fluxo são particularmente úteis nos sistemas de controle com retroação, uma vez que a teoria da retroação está fundamentalmente relacionada com o fluxo e o processamento de sinais em sistemas. O elemento básico de um diagrama de fluxo de sinal é um segmento de percurso unidirecional chamado **ramo**, que relaciona a dependência de uma variável de entrada e de uma variável de saída de um modo equivalente a um bloco do diagrama de blocos. Assim, o ramo que relaciona a saída de um motor CC,  $\theta(s)$ , à tensão de campo,  $V_f(s)$ , é semelhante ao diagrama de blocos da Fig. 2.20 e está mostrado na Fig. 2.26. Os pontos de entrada e saída, ou junções, são chamados de **nós**. De modo semelhante, o diagrama de fluxo de sinal representando as Eqs. (2.77) e (2.78) e a Fig. 2.22 está mostrado na Fig. 2.27. A relação entre as variáveis é escrita próxima do arco direcional. Todos os ramos que saem de um nó passam (unidirecionalmente) o sinal nodal ao nó de saída de cada um dos ramos. A soma de todos os sinais que entram em um nó é igual à variável deste nó. Um **percurso** é um ramo ou uma seqüência contínua de ramos que podem ser atravessados de um sinal (nó) a outro sinal (nó). Um **laço** é um percurso fechado que se origina e termina em um mesmo nó de modo que ao longo do percurso nenhum nó seja encontrado duas vezes. Dois laços são ditos **disjuntos** quando não possuírem um nó comum. Dois laços que se tocam (não-disjuntos) compartilham um ou mais nós comuns. Em consequência, reconsiderando a Fig. 2.27, obtém-se

$$Y_1(s) = G_{11}(s)R_1(s) + G_{12}(s)R_2(s), \quad (2.87)$$

$$Y_2(s) = G_{21}(s)R_1(s) + G_{22}(s)R_2(s). \quad (2.88)$$



**Fig. 2.26** Diagrama de fluxo de sinal do motor CC.



**Fig. 2.27** Diagrama de fluxo de um sistema interconectado.

O diagrama de fluxo de sinal é simplesmente um método pictográfico de se escrever um sistema de equações algébricas de modo a indicar a interdependência das variáveis. Como um outro exemplo, considere-se o seguinte conjunto de equações algébricas simultâneas:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + r_1 = x_1 \quad (2.89)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + r_2 = x_2. \quad (2.90)$$

As duas variáveis de entrada são  $r_1$  e  $r_2$  e as variáveis de saída são  $x_1$  e  $x_2$ . Um diagrama de fluxo de sinal representando as Eqs. (2.89) e (2.90) está mostrado na Fig. 2.28. As Eqs. (2.89) e (2.90) podem ser reescritas como

$$x_1(1 - a_{11}) + x_2(-a_{12}) = r_1, \quad (2.91)$$

$$x_1(-a_{21}) + x_2(1 - a_{22}) = r_2. \quad (2.92)$$

A solução simultânea das Eqs. (2.91) e (2.92) usando os resultados da regra de Cramer resulta nas soluções

$$x_1 = \frac{(1 - a_{22})r_1 + a_{12}r_2}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21}} = \frac{(1 - a_{22})}{\Delta} r_1 + \frac{a_{12}}{\Delta} r_2, \quad (2.93)$$

$$x_2 = \frac{(1 - a_{11})r_2 + a_{21}r_1}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21}} = \frac{(1 - a_{11})}{\Delta} r_2 + \frac{a_{21}}{\Delta} r_1. \quad (2.94)$$

O denominador da solução é o determinante  $\Delta$  do conjunto de equações e é reescrito como

$$\Delta = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} = 1 - a_{11} - a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (2.95)$$

Neste caso, o denominador é igual a 1 menos cada uma das malhas próprias  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  e  $a_{12}a_{21}$ , mais o produto de dois laços disjuntos  $a_{11}$  e  $a_{22}$ . Os laços  $a_{22}$  e  $a_{21}a_{12}$  se tocam, bem como os laços  $a_{11}$  e  $a_{21}a_{12}$ .

O numerador para  $x_1$  com a entrada  $r_1$  é 1 vez  $(1 - a_{22})$ , que é o valor de  $\Delta$  que não toca o percurso 1 de  $r_1$  a  $x_1$ . Em consequência, o numerador de  $r_2$  para  $x_1$  é simplesmente  $a_{12}$  porque o percurso através de  $a_{12}$  toca todos os laços. O numerador para  $x_2$  é o simétrico ao de  $x_1$ .

Em geral, a dependência linear  $T_{ij}$  entre a variável independente  $x_i$  (chamada usualmente de variável de entrada) e uma variável dependente  $x_j$  é dada pela fórmula de Mason para o ganho do diagrama de fluxo [11, 12]:

$$T_{ij} = \frac{\sum_k P_{ijk} \Delta_{ijk}}{\Delta}, \quad (2.96)$$

onde  $P_{ijk}$  =  $k$ -ésimo percurso entre a variável  $x_i$  e a variável  $x_j$ ,

$\Delta$  = determinante do diagrama,

$\Delta_{ijk}$  = co-fator do percurso  $P_{ijk}$

e o somatório é feito para todos os  $k$  percursos possíveis entre  $x_i$  e  $x_j$ . O co-fator  $\Delta_{ijk}$  é o determinante com todos os laços que tocam o percurso  $k$  removidos. O determinante  $\Delta$  é

$$\Delta = 1 - \sum_{n=1}^N L_n + \sum_{m=1, q=1}^{M, Q} L_m L_q - \sum L_r L_s L_t + \dots, \quad (2.97)$$

onde  $L_q$  é igual ao valor da transmitância do  $q$ -ésimo laço. Portanto, a regra para calcular  $\Delta$  em termos dos laços  $L_1, L_2, L_3, \dots, L_N$  é

$$\Delta = 1 - (\text{soma de todos os ganhos de malhas distintas})$$

$$+ (\text{soma dos produtos de ganhos de todas as combinações de malhas disjuntas 2 a 2})$$

$$- (\text{soma dos produtos de ganhos de todas as combinações de malhas disjuntas 3 a 3})$$

$$+ \dots.$$

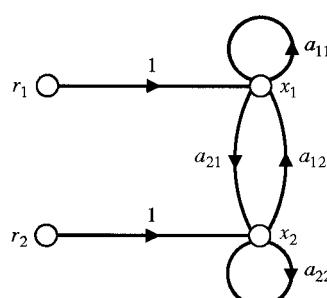


Fig. 2.28 Diagrama de fluxo de sinal de duas equações algébricas.

A fórmula do ganho é usada freqüentemente para relacionar a variável de saída  $Y(s)$  à variável de entrada  $R(s)$  e é dada sob a forma um tanto simplificada

$$T = \frac{\sum_k P_k \Delta_k}{\Delta}, \quad (2.98)$$

onde  $T(s) = Y(s)/R(s)$ . O ganho de percurso ou transmitância  $P_k$ (ou  $P_{ijk}$ ) é definido como a sucessão contínua de ramos que são atravessados no sentido das setas e com nenhum dos nós encontrados mais de uma vez. Um laço é definido como um percurso fechado no qual nenhum nó é encontrado mais de uma vez por passagem.

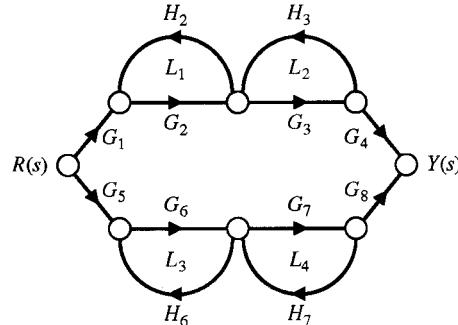
Diversos exemplos ilustrarão a utilidade e a facilidade deste método. Embora a equação de ganho (2.96) pareça assustadora, deve ser lembrado que ela representa um processo de representação resumida e não um processo complicado de solução.

### EXEMPLO 2.7

#### Função de transferência de sistema interativo

Um diagrama de fluxo de sinal com dois percursos está mostrado na Fig. 2.29. Um exemplo de sistema de controle com múltiplos percursos de sinal é o de um robô com diversas pernas. Os percursos conectando a entrada  $R(s)$  e a saída  $Y(s)$  são

$$\text{percurso 1: } P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 \quad \text{e} \quad \text{percurso 2: } P_2 = G_5 G_6 G_7 G_8$$



**Fig. 2.29** Sistema interativo com dois percursos.

Há quatro malhas próprias:

$$L_1 = G_2 H_2, \quad L_2 = H_3 G_3, \quad L_3 = G_6 H_6, \quad L_4 = G_7 H_7.$$

Os laços  $L_1$  e  $L_2$  não tocam  $L_3$  e  $L_4$ . Em consequência, o determinante é

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_3 + L_1 L_4 + L_2 L_3 + L_2 L_4). \quad (2.99)$$

O co-fator do determinante ao longo do percurso 1 é calculado, a partir de  $\Delta$ , removendo-se os laços que tocam o percurso 1. Assim, vem

$$L_1 = L_2 = 0 \quad \text{e} \quad \Delta_1 = 1 - (L_3 + L_4).$$

De modo semelhante, o co-fator para o percurso 2 é

$$\Delta_2 = 1 - (L_1 + L_2).$$

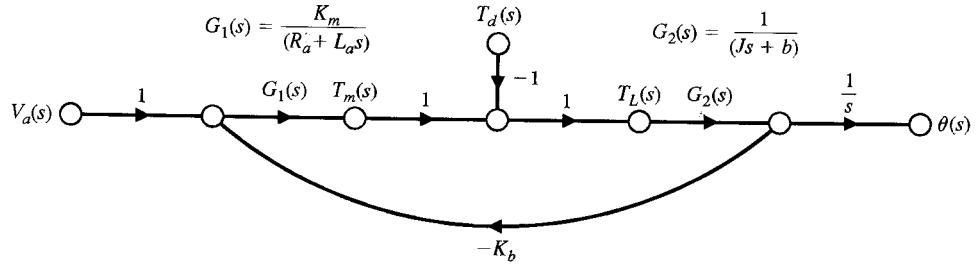
Portanto, a função de transferência do sistema é

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= T(s) = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 (1 - L_3 - L_4) + G_5 G_6 G_7 G_8 (1 - L_1 - L_2)}{1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 + L_1 L_3 + L_1 L_4 + L_2 L_3 + L_2 L_4}. \end{aligned} \quad ■ \quad (2.100)$$

### EXEMPLO 2.8

#### Motor controlado pela armadura

O diagrama de blocos do motor CC controlado pela armadura está mostrado na Fig. 2.18. Este diagrama foi obtido a partir das Eqs. (2.64)-(2.68). O diagrama de fluxo de sinal pode ser obtido seja a partir das Eqs. (2.64)-(2.68), seja a partir do diagrama de blocos e está mostrado na Fig. 2.30. Usan-



**Fig. 2.30** Diagrama de fluxo de sinal do motor CC controlado pela armadura.

do a fórmula de Mason do ganho do diagrama de fluxo de sinal, seja obter a função de transferência  $\theta(s)/V_a(s)$  com  $T_d(s) = 0$ . O percurso direto é  $P_1(s)$  que toca o único laço  $L_1(s)$ , onde

$$P_1(s) = \frac{1}{s} G_1(s) G_2(s) \quad \text{e} \quad L_1(s) = -K_b G_1(s) G_2(s).$$

Portanto, a função de transferência é

$$T(s) = \frac{P_1(s)}{1 - L_1(s)} = \frac{(1/s) G_1(s) G_2(s)}{1 + K_b G_1(s) G_2(s)} = \frac{K_m}{s[(R_a + L_a s)(J s + b) + K_a K_m]},$$

Que é exatamente a expressão deduzida anteriormente (Eq. 2.69). ■

A fórmula do ganho do diagrama de fluxo de sinal fornece uma abordagem razoavelmente direta para o cálculo de sistemas complicados. Para comparar o método com o da redução do diagrama de blocos, que não é na realidade muito mais difícil, considere-se o sistema complexo do Exemplo 2.6.

#### EXEMPLO 2.9

#### Função de transferência de sistema com laços múltiplos

Um sistema com laços múltiplos de retroação está mostrado na Fig. 2.24 sob a forma de diagrama de blocos. Não há razão alguma para se redesenhar o diagrama sob a forma de diagrama de fluxo de sinal, e portanto se prosseguirá como de hábito no uso da fórmula de Mason, Eq. (2.98). Há um percurso direto  $P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4$ . Os laços de retroação são

$$L_1 = -G_2 G_3 H_2, \quad L_2 = G_3 G_4 H_1, \quad L_3 = -G_1 G_2 G_3 G_4 H_3. \quad (2.101)$$

Todos os laços possuem nós comuns e, portanto, são todos não-disjuntos. Além disto o percurso  $P_1$  toca todos os laços, assim,  $\Delta_1 = 1$ . Por conseguinte a função de transferência a malha fechada é

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \Delta_1}{1 - L_1 - L_2 - L_3} \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 H_2 - G_3 G_4 H_1 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_3}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

#### EXEMPLO 2.10

#### Função de transferência de sistema complexo

Será considerado, finalmente, um sistema razoavelmente complexo que seria difícil reduzir por meio das técnicas de diagrama de blocos. Um sistema com diversos laços de retroação e percursos de ação à frente está mostrado na Fig. 2.31. Os percursos diretos são

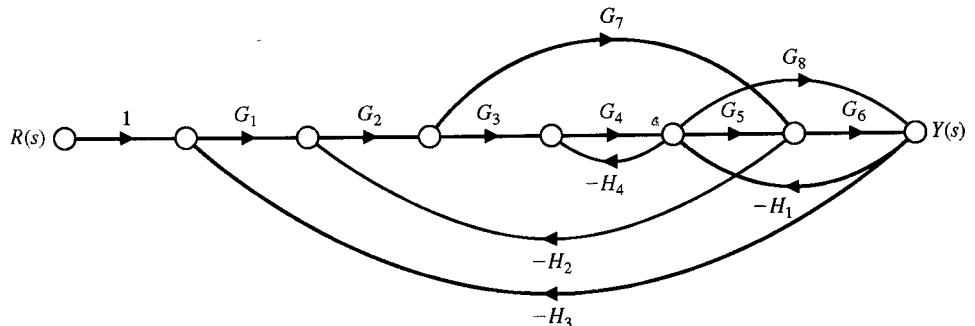
$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6, \quad P_2 = G_1 G_2 G_7 G_6, \quad P_3 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_8.$$

Os laços de retroação são

$$\begin{aligned} L_1 &= -G_2 G_3 G_4 G_5 H_2, \quad L_2 = -G_5 G_6 H_1, \quad L_3 = -G_8 H_1, \quad L_4 = -G_7 H_2 G_2, \\ L_5 &= -G_4 H_4, \quad L_6 = -G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_3, \quad L_7 = -G_1 G_2 G_7 G_6 H_3, \\ L_8 &= -G_1 G_2 G_3 G_4 G_8 H_3. \end{aligned}$$

O laço  $L_5$  não toca o laço  $L_4$  ou o laço  $L_7$ ; o laço  $L_3$  não toca o laço  $L_4$ ; e todos os outros laços se tocam. Em consequência, o determinante é

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8) \\ &\quad + (L_5 L_7 + L_5 L_4 + L_3 L_4). \end{aligned} \quad (2.103)$$



**Fig. 2.31** Sistema com laços múltiplos.

Os co-fatores são

$$\Delta_1 = \Delta_3 = 1 \quad \text{e} \quad \Delta_2 = 1 - L_5 = 1 + G_4 H_4.$$

Finalmente, a função de transferência é

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P_1 + P_2 \Delta_2 + P_3}{\Delta}. \blacksquare \quad (2.104)$$

Os diagramas de fluxo de sinal e a fórmula de Mason para o ganho podem ser usados de forma proveitosa na análise de sistemas de controle com retroação, de circuitos amplificadores eletrônicos, de sistemas estatísticos e de sistemas mecânicos, dentre muitos outros exemplos.

## 2.8 ANÁLISE COMPUTACIONAL DE SISTEMAS DE CONTROLE

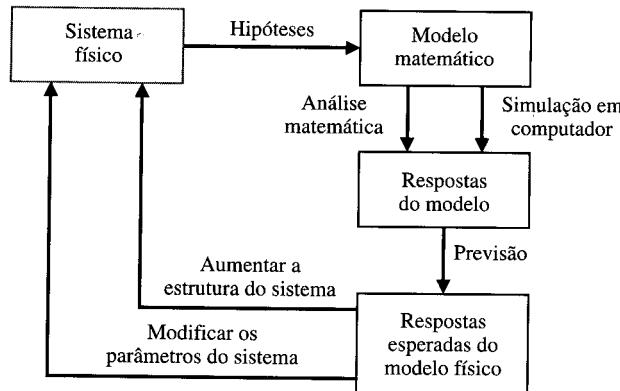
Um modelo computacional de um sistema sob forma matemática conveniente para demonstrar o comportamento do sistema pode ser usado para investigar projetos de um sistema planejado sem na realidade construir o sistema propriamente dito. Uma **simulação** em computador utiliza um modelo e as condições reais do sistema que está sendo modelado e os comandos de entrada reais aos quais o sistema será submetido.

Vários níveis de fidelidade de simulação (isto é, de exatidão) estão disponíveis para o engenheiro de controle. Nos estágios iniciais do processo de projetar, os pacotes de software altamente interativos são eficazes. Neste estágio, a velocidade do computador não é tão importante quanto o tempo necessário para se obter uma solução válida inicial e interagir e ajustar com detalhe essa solução. Uma boa capacidade gráfica de saída é crucial. As simulações de análise são geralmente de **baixa fidelidade** no sentido de que muitas das simplificações (como as linearizações) feitas no processo de projetar são retidas na simulação. Neste livro será usado o MATLAB como software de simulação, mas existem muitos outros pacotes semelhantes de software para o projeto de sistemas de controle que podem ser igualmente úteis.

À medida que o projeto amadurece, torna-se geralmente necessário conduzir **experimentos numéricos** em um ambiente de simulação mais realista. Por exemplo, se o projeto de um controlador de altitude de uma nave espacial supõe a inexistência de arrasto aerodinâmico, seria uma boa idéia incluir estes efeitos do arrasto no ambiente final de simulação. Desta forma, será possível quantificar o desempenho esperado da nave espacial quando estiver realmente em órbita. Neste ponto do processo de projetar, a velocidade de processamento do computador se torna mais importante, uma vez que tempos muito longos de simulação reduzem necessariamente o número de experimentos em computador que podem ser obtidos e correspondentemente se elevam os custos. Usualmente estas simulações de **alta fidelidade** são programadas em FORTRAN, C, C++, Ada, ou linguagens semelhantes.

Supondo que um modelo e a simulação são confiavelmente exatos, a simulação em computador apresenta as seguintes vantagens [14]:

1. O desempenho do sistema pode ser observado sob todas as condições concebíveis.
2. Os resultados do desempenho de sistemas de campo podem ser extrapolados com o modelo de simulação para fins de previsão.
3. As decisões relativas a sistemas futuros que se encontram presentemente no estágio conceitual podem ser examinadas.
4. Ensaios com sistemas sob teste podem ser realizados em um período de tempo muito reduzido.
5. Os resultados de simulação podem ser obtidos a um custo menor que o da experimentação real.
6. O estudo de situações hipotéticas pode ser efetuado mesmo quando a situação hipotética for irrealisável na vida real no presente momento.



**Fig. 2.32** Análise e projeto usando um modelo de sistema.

7. A modelagem e a simulação em computador é muitas vezes a única técnica viável ou segura para se analisar e avaliar um sistema.

A análise e o projeto de um sistema de controle são grandemente melhorados pelo uso da simulação como parte do processo esboçado na Fig. 2.32.

## 2.9 EXEMPLOS DE PROJETO

### EXEMPLO 2.11

#### Controle de um motor elétrico de tração

A maioria dos trens modernos e dos veículos de trânsito local utiliza motores elétricos de tração. O acionamento de um motor elétrico para um veículo de ferrovia está mostrado sob a forma de diagrama de blocos na Fig. 2.33(a), incorporando o controle necessário da velocidade do veículo. O objetivo do projeto é obter um modelo de sistema e a função de transferência a malha fechada do sistema,  $\omega(s)/\omega_d(s)$ , selecionar resistores apropriados  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , e  $R_4$ , e então prever a resposta do sistema.

O primeiro passo é descrever a função de transferência de cada bloco. Propõe-se o uso de um tacômetro para gerar uma tensão proporcional à velocidade e conectar esta tensão,  $v_t$ , a uma das entradas de um amplificador diferencial, como está mostrado na Fig. 2.33(b). O amplificador de potência é não-linear e pode ser representado aproximadamente por  $v_2 = 2e^{3v_t} = 2 \exp(3v_t) = g(v_t)$ , uma função exponencial com um ponto de operação nominal de,  $v_{t0} = 1,5$  V. Usando a técnica da Seção 2.3, obtém-se um modelo linear

$$v_2 = \left[ \frac{dg(v_t)}{dv_t} \right]_{v_{t0}} \Delta v_t = 2[3 \exp(3v_{t0})] \Delta v_t = 2[270] \Delta v_t = 540 \Delta v_t. \quad (2.105)$$

Então, descartando a notação com deltas e escrevendo a transformada de Laplace, resulta

$$V_2(s) = 540 V_1(s).$$

Igualmente, para o amplificador diferencial, vem

$$V_1 = \frac{1 + R_2/R_1}{1 + R_3/R_4} V_{in} - \frac{R_2}{R_1} v_t. \quad (2.106)$$

Deseja-se obter um controle de entrada que ajuste  $\omega_d(t) = v_{in}$  quando as unidades de  $\omega_d$  forem rad/s e as unidades de  $v_{in}$  forem volts. Então, quando  $v_{in} = 10$  V, a velocidade de regime estacionário será  $\omega = 10$  rad/s. Nota-se que  $v_t = K_t \omega_d$  em regime permanente, e se espera que, na condição de equilíbrio, a saída de regime permanente,  $v_1$ , seja

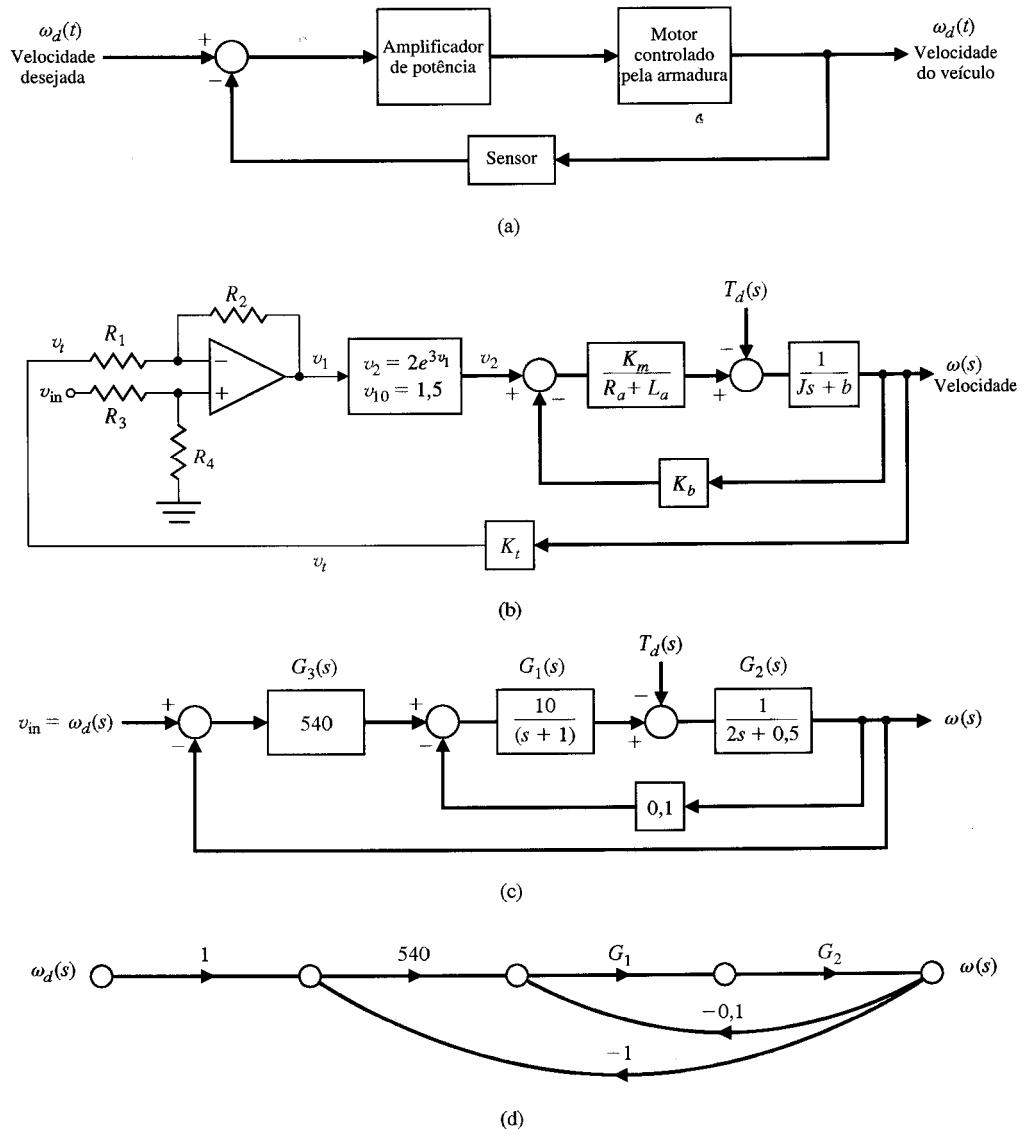
$$v_1 = \frac{1 + R_2/R_1}{1 + R_3/R_4} v_{in} - \left( \frac{R_2}{R_1} \right) K_t(v_{in}). \quad (2.107)$$

Quando o sistema estiver em equilíbrio,  $v_1 = 0$  e quando  $K_t = 0,1$  tem-se

$$\frac{1 + R_2/R_1}{1 + R_3/R_4} = \left( \frac{R_2}{R_1} \right) K_t = 1.$$

Esta relação poderá ser alcançada quando

$$R_2/R_1 = 10 \quad \text{e} \quad R_3/R_4 = 10.$$



**Fig. 2.33** Controle de velocidade de um motor elétrico de tração.

Os parâmetros do motor e da carga são dados na Tabela 2.9. O sistema completo está mostrado na Fig. 2.33(b). Usando a fórmula de Mason com o diagrama de fluxo de sinal da Fig. 2.33(d), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\omega(s)}{\omega_d(s)} &= \frac{540G_1(s)G_2(s)}{1 + 0,1G_1G_2 + 540G_1G_2} = \frac{540G_1G_2}{1 + 540,1G_1G_2} \\ &= \frac{5400}{(s + 1)(2s + 0,5) + 5401} = \frac{5400}{2s^2 + 2,5s + 5401,5} \\ &= \frac{2700}{s^2 + 1,25s + 2700,75}. \end{aligned} \quad (2.108)$$

**TABELA 2.9 Parâmetros de um Motor CC Grande**

$K_m = 10$	$J = 2$
$R_a = 1$	$b = 0,5$
$L_a = 1$	$K_b = 0,1$

Como a equação característica é de segunda ordem, observa-se que  $\omega_n = 52$  e  $\zeta = 0,012$ , e se espera que a resposta do sistema seja altamente oscilatória (subamortecida). ■

**EXEMPLO 2.12****Acelerômetro mecânico**

Um acelerômetro mecânico é usado para medir a aceleração de um trenó de teste suspenso em levitação, como está mostrado na Fig. 2.34. O trenó de teste levita magnéticamente suspenso sobre um trilho guia, a uma pequena distância  $\delta$  deste. O acelerômetro fornece uma medida da aceleração  $a(t)$  do trenó, uma vez que a posição  $y$  da massa  $M$  com relação à carcaça do acelerômetro é proporcional à aceleração da carcaça (e do trenó). O objetivo é projetar um acelerômetro com possibilidade de uma resposta dinâmica apropriada. Deseja-se projetar um acelerômetro com um tempo aceitável para que a característica de medida desejada,  $y(t) = qa(t)$ , seja alcançada ( $q$  é uma constante).

A soma das forças que agem sobre a massa é

$$-b \frac{dy}{dt} - ky = M \frac{d^2}{dt^2} (y + x)$$

ou

$$M \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = -M \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (2.109)$$

Como

$$M_s \frac{d^2x}{dt^2} = F(t),$$

a força de propulsão, tem-se

$$M \ddot{y} + b \dot{y} + ky = -\frac{M}{M_s} F(t)$$

ou

$$\ddot{y} + \frac{b}{M} \dot{y} + \frac{k}{M} y = -\frac{F(t)}{M_s}. \quad (2.110)$$

Selecionam-se os coeficientes onde  $b/M = 3$ ,  $k/M = 2$ ,  $F(t)/M_s = Q(t)$  e se considera a condição inicial  $y(0) = -1$  e  $\dot{y}(0) = 2$ . Obtém-se a equação da transformada de Laplace, quando a força é consequentemente  $Q(t)$  for uma função degrau, como se segue:

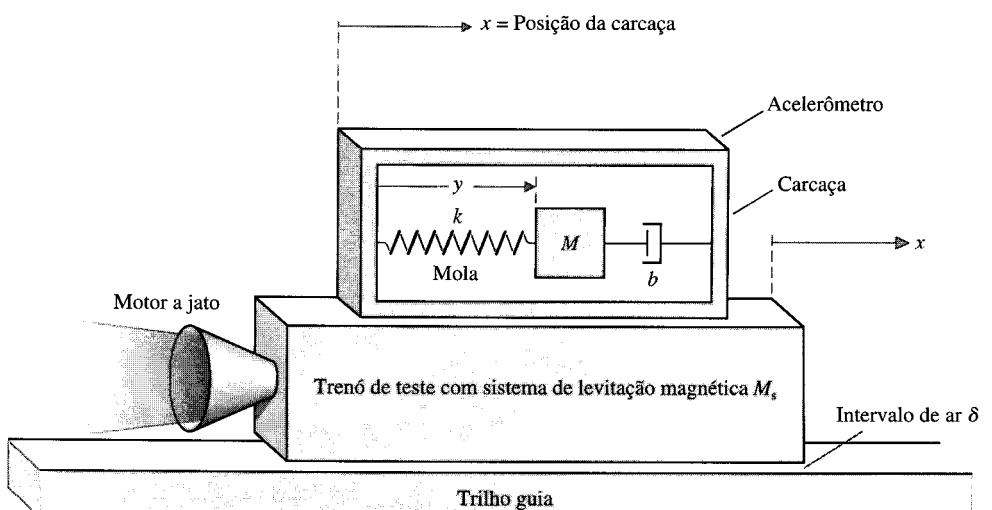
$$(s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = -Q(s). \quad (2.111)$$

Como  $Q(s) = P/s$ , onde  $P$  é a magnitude da função degrau, obtém-se

$$(s^2 Y(s) + s - 2) + 3(sY(s) + 1) + 2Y(s) = -\frac{P}{s}$$

ou

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = \frac{-(s^2 + s + P)}{s}. \quad (2.112)$$



**Fig. 2.34** Um acelerômetro montado sobre um trenó de teste para sistema de propulsão a jato.

Assim, a transformada da saída é

$$Y(s) = \frac{-(s^2 + s + P)}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{-(s^2 + s + P)}{s(s + 1)(s + 2)}. \quad (2.113)$$

Expandindo em frações parciais,

$$Y(s) = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + 1} + \frac{k_3}{s + 2}. \quad (2.114)$$

Tem-se, então

$$k_1 = \frac{-(s^2 + s + P)}{(s + 1)(s + 2)} \Big|_{s=0} = -\frac{P}{2}. \quad (2.115)$$

De modo semelhante,  $k_2 = +P$  e  $k_3 = (-P - 2)/2$ . Então

$$Y(s) = \frac{-P}{2s} + \frac{P}{s + 1} + \frac{-P - 2}{2(s + 2)}. \quad (2.116)$$

Portanto, a leitura de saída é

$$y(t) = \frac{1}{2}[-P + 2Pe^{-t} - (P + 2)e^{-2t}], \quad t \geq 0.$$

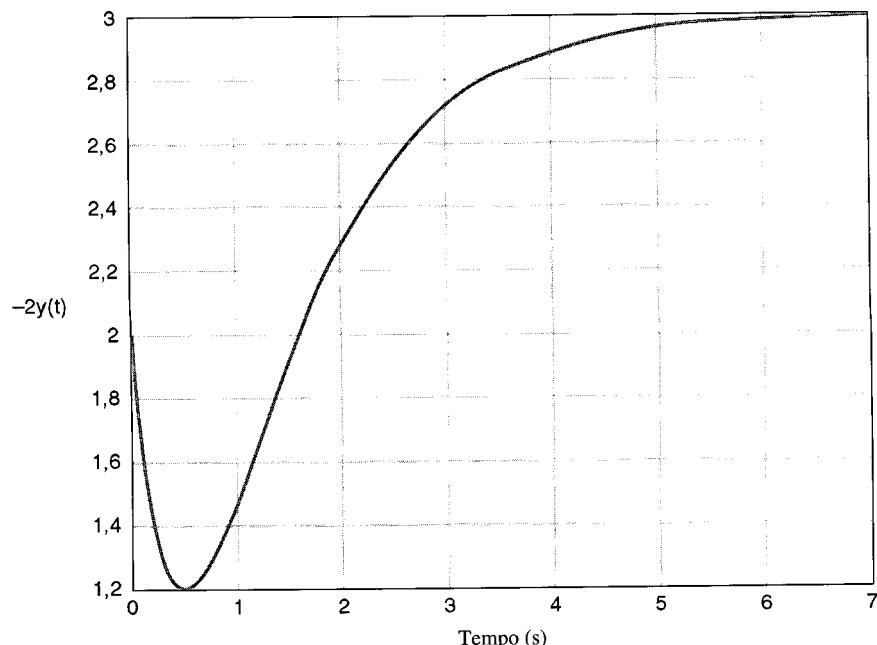


Fig. 2.35 Resposta do acelerômetro.

Um gráfico de  $y(t)$  está mostrado na Fig. 2.35 para  $P = 3$ . Pode-se ver que  $y(t)$  é proporcional à magnitude da força após 5 segundos. Assim, em regime estacionário, após 5 segundos, a resposta  $y(t)$  é proporcional à aceleração, como desejado. Se este período for excessivamente longo, deve-se aumentar a constante de mola,  $k$ , e o coeficiente de atrito viscoso e ao mesmo tempo reduzir a massa,  $M$ . Se for possível selecionar os componentes de modo que  $b/M = 12$  e  $k/M = 32$ , o acelerômetro obterá uma resposta proporcional em um segundo. (Deixa-se ao leitor mostrar isto.) ■

### EXEMPLO 2.13

#### Projeto de um robô de laboratório

Neste exemplo, procura-se mostrar o projeto físico de um dispositivo de laboratório e demonstrar a complexidade do modelo. Serão mostrados também muitos dos componentes comumente usados em um sistema de controle.

Um robô para uso em laboratório é mostrado na Fig. 1.16. O volume de trabalho de um robô de laboratório permite que o robô alcance toda área da bancada e possa acessar os instrumentos de análise existentes. Deve haver também uma área suficiente para estocar suprimentos das operações ainda não atendidas.

O robô de laboratório pode ser envolvido em três tipos de tarefas durante um experimento de análise. A primeira é a apresentação da amostra para análise, em que o robô é treinado a reconhecer um determinado número de diferentes bandejas com amostras, prateleiras e recipientes e introduzi-los no sistema. O segundo conjunto de tarefas envolve o transporte pelo robô de amostras entre as estações especializadas automatizadas para preparação química e análise instrumental. As amostras devem ser programadas e movimentadas entre estas estações quando necessário para completar a análise. No terceiro grupo de tarefas para o robô, uma automação flexível fornece nova capacidade para o laboratório de análise. O robô deve ser programado para simular o operador humano e trabalhar com vários dispositivos. Todos estes tipos de operações são requeridos para um robô de laboratório eficiente.

A Hewlett-Packard projetou o robô de laboratório ORCA, que é um braço antropomórfico, montado sobre um trilho, projetado para ser a configuração ótima para um laboratório de análise [15]. O trilho pode ser localizado em frente ou atrás de uma bancada de trabalho, ou colocado no meio de uma mesa quando se requer o acesso de ambos os lados do trilho. Comandos simples via software permitem mover o braço de uma extremidade à outra do trilho enquanto se mantém a posição do pulso (para transferir recipientes abertos) ou se trava a orientação angular do pulso (para transferir objetos em praticamente qualquer orientação angular). A configuração retilínea, em contraste com a geometria cilíndrica usada por muitos robôs, permite posicionar mais acessórios no interior do espaço de trabalho do robô e propicia uma excelente combinação com a bancada do laboratório. O movimento de todas as juntas é coordenado através de software, o que simplifica o uso do robô pela representação das suas posições e dos seus movimentos em um espaço de coordenadas cartesianas mais familiar.

As especificações físicas e de desempenho do sistema ORCA da Hewlett-Packard estão mostradas na Tabela 2.10.

**TABELA 2.10 Especificações de Hardware do Braço Robótico ORCA**

Braço	Montagem em Trilho, Articulada	Dispositivo de Programação Manual	Alavanca de Comando com Parada de Emergência
Graus de liberdade	Seis	Tempo de ciclo	4 s (move 1 polegada para cima, 12 polegadas lateralmente, 1 polegada para baixo e para trás)
Alcance	$\pm 54$ cm	Velocidade máxima	75 cm/s
Altura	78 cm	Tempo de retardo	50 ms típico (para deslocamentos com um único movimento)
Trilho	1 e 2 m	Carga útil	0,5 kg continuamente, 2,5 kg em transitório (com restrições)
Peso	8,0 kg	Deflexão vertical	< 1,5 mm com carga contínua
Precisão	$\pm 0,25$ mm	Seção reta da envoltória de trabalho	1 m <sup>2</sup>
Excursão do dedo (garra)	40 mm		
Rotação da garra	$\pm 77$ voltas		

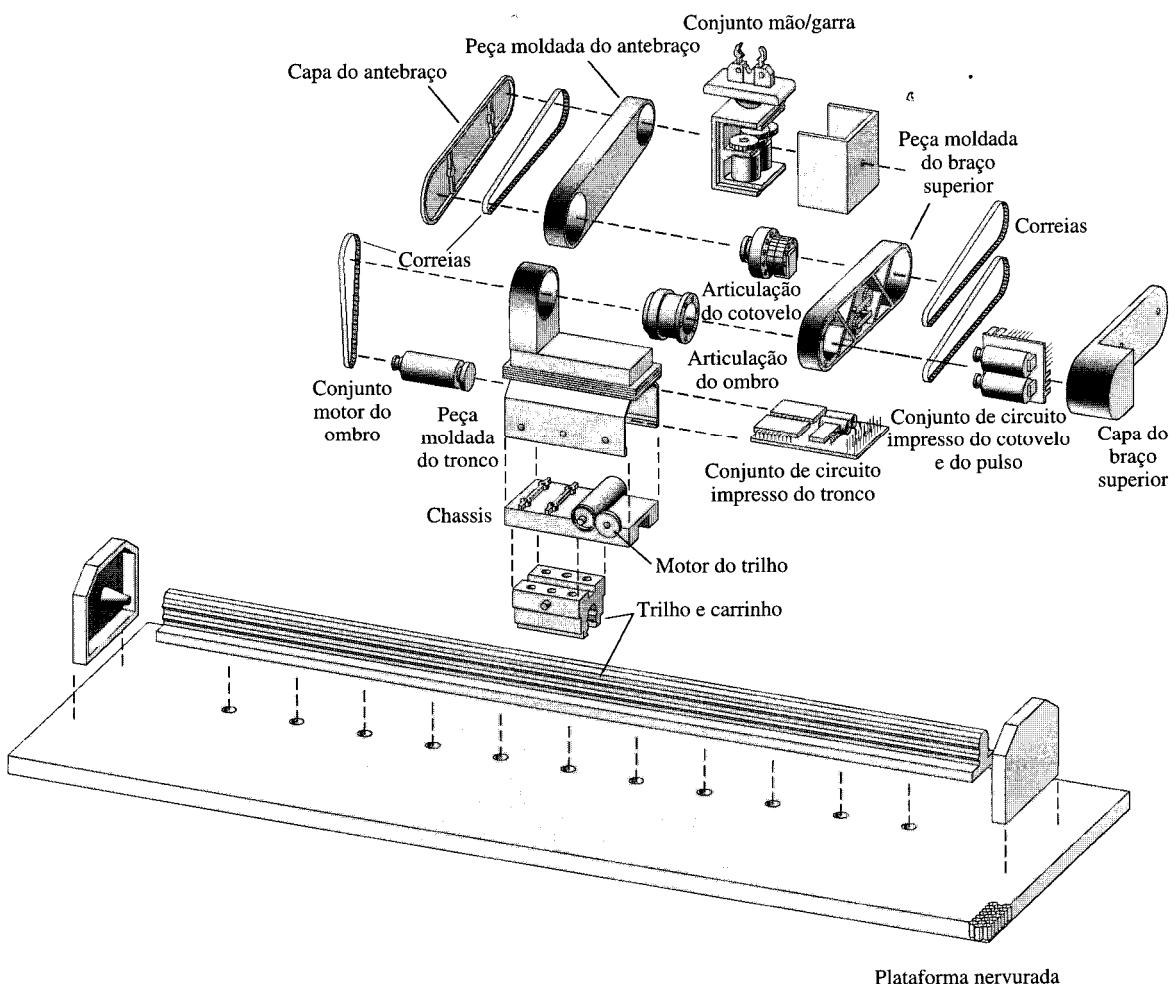
O projeto do robô de laboratório ORCA continuou com a seleção das partes componentes requeridas para se obter o sistema completo. A vista explodida do robô está mostrada na Fig. 2.36. Este dispositivo utiliza seis motores de corrente contínua, engrenagens, correias acionadoras, um trilho e um carrinho. As especificações são desafiadoras e requerem que o projetista modele rigorosamente os componentes do sistema e suas interconexões. ■

#### EXEMPLO 2.14

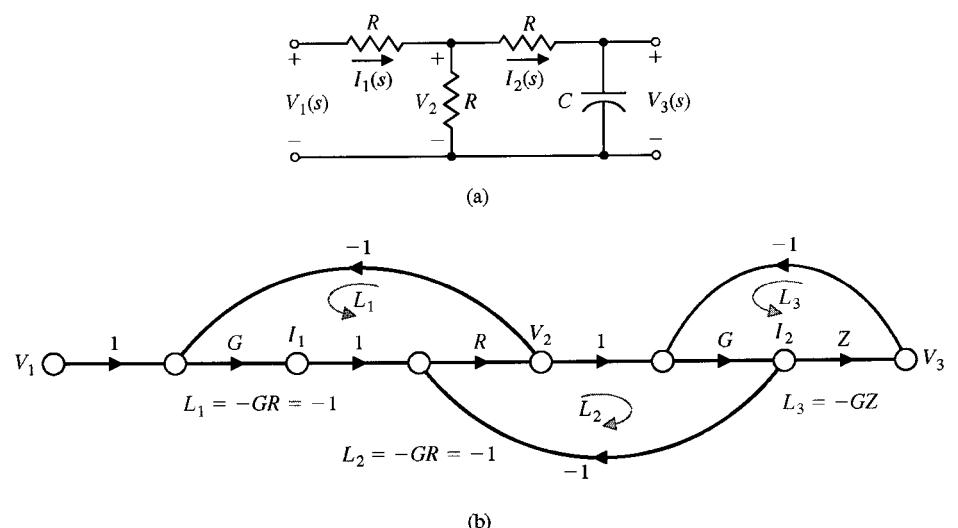
#### Projeto de um filtro passa-baixas

Nosso objetivo é projetar um filtro passa-baixas de primeira ordem que deixa passar sinais com freqüências abaixo de 106,1 Hz e atenua sinais com freqüências acima de 106,1 Hz. Além disto, o ganho estático deve ser 1/2.

Um circuito em escada com um elemento armazenador de energia, como está mostrado na Fig. 2.37(a), se comportará como uma rede de primeira ordem passa-baixas. Observe-se que o ganho estático será igual a 1/2 (abrir o circuito do capacitor). As equações de corrente e tensão são



**Fig. 2.36** Vista explodida do robô ORCA mostrando os componentes [15]. (Fonte: © Copyright 1993 Hewlett-Packard Company. Reproduzido com permissão.)



**Fig. 2.37** (a) Estrutura em cascata e (b) seu diagrama de fluxo.

$$\begin{aligned}I_1 &= (V_1 - V_2)G \\I_2 &= (V_2 - V_3)G \\V_2 &= (I_1 - I_2)R \\V_3 &= I_2 Z,\end{aligned}$$

onde  $G = 1/R$ ,  $Z(s) = 1/Cs$ , e  $I_1(s) = I_1$  (foi omitido o  $(s)$ ). O diagrama de fluxo de sinal construído para as quatro equações está mostrado na Fig. 2.37(b). Os três laços são  $L_1 = -GR = -1$ ,  $L_2 = -GR = -1$ , e  $L_3 = -GZ$ . Todos os laços tocam o percurso direto. Os laços  $L_1$  e  $L_3$  são disjuntos. Em consequência, a função de transferência é

$$\begin{aligned}T(s) &= \frac{V_3}{V_1} = \frac{P_1}{1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_3} = \frac{GZ}{3 + 2GZ} \\&= \frac{1}{3RCs + 2} = \frac{(1/3RC)}{(s + 2/3RC)}.\end{aligned}$$

Observe-se que o ganho estático é  $1/2$ , como esperado. Deseja-se polo em  $p = 2\pi(106,1) = 666,7 = 2000/3$ . Em consequência, requer-se  $RC = 0,001$ . Selecionando-se  $R = 1 \text{ k}\Omega$  vem  $C = 1 \mu\text{F}$ . Assim se obtém o filtro

$$T(s) = \frac{333,35}{(s + 666,7)}. \blacksquare$$

## 2.10 SIMULAÇÃO DE SISTEMAS USANDO O MATLAB\*

A aplicação de muitas das ferramentas de análise e de projeto de sistemas de controle clássicos e modernos é baseada em modelos matemáticos. O MATLAB pode ser usado com sistemas descritos sob a forma de função de transferência.

Esta seção será iniciada mostrando-se como usar o MATLAB para auxiliar a análise de um modelo matemático típico mola-massa-amortecedor de um sistema mecânico. Usando um conjunto de instruções em MATLAB (script), será desenvolvida uma aptidão de análise interativa para analisar os efeitos da freqüência natural e do amortecimento sobre a resposta livre do deslocamento da massa. Esta análise utilizará o fato de que se dispõe de uma solução analítica que descreve a resposta livre no domínio do tempo relativa ao deslocamento da massa.

Mais tarde, serão discutidas funções de transferência e diagramas de blocos. Em particular, o interesse reside em como o MATLAB pode auxiliar na manipulação de polinômios, no cálculo de pólos e zeros da função de transferência, no cálculo das funções de transferência a malha fechada, na redução de diagramas de blocos e no cálculo da resposta de um sistema a uma excitação em degrau unitário. A seção é concluída com o projeto do motor elétrico de tração do Exemplo 2.11.

As funções cobertas nesta seção são roots, roots1, series, parallel, feedback, cloop, poly, conv, polyval, printsys, minreal, pzmap, e step.

**Sistema Mola-Massa-Amortecedor.** Um sistema mecânico mola-massa-amortecedor está mostrado na Fig. 2.1. O movimento da massa, designado por  $y(t)$ , é descrito pela equação diferencial

$$My''(t) + b\dot{x}(t) + ky(t) = r(t).$$

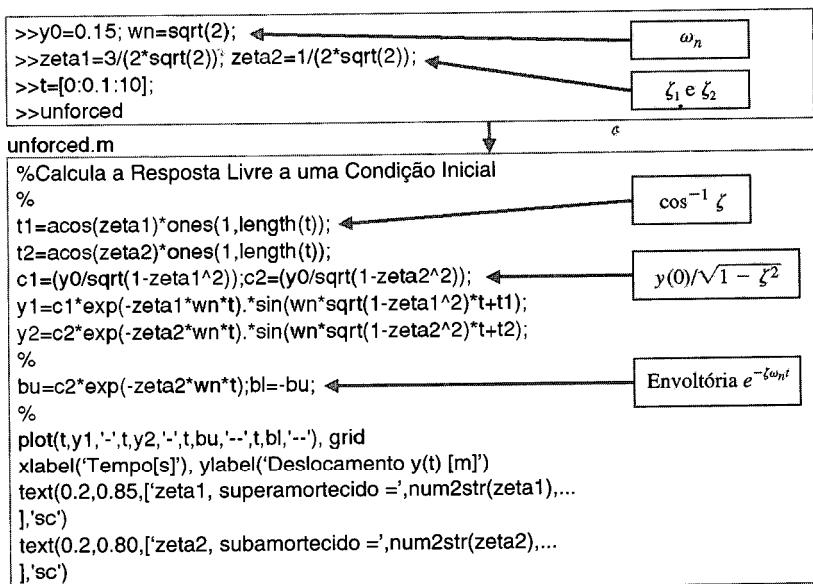
A resposta dinâmica livre,  $y(t)$ , do sistema mecânico mola-massa-amortecedor é

$$y(t) = \frac{y(0)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \theta),$$

onde  $\theta = \cos^{-1} \zeta$ . O deslocamento inicial é  $y(0)$ . A resposta transitória do sistema é **subamortecida** quando  $\zeta < 1$ , **superamortecida** quando  $\zeta > 1$ , e **criticamente amortecida** quando  $\zeta = 1$ . Pode-se usar o MATLAB para visualizar a resposta livre no domínio do tempo do deslocamento da massa a partir de um deslocamento inicial  $y(0)$ . Considerem-se os casos superamortecido e subamortecido:

- Caso 1:  $y(0) = 0,15 \text{ m}$ ,  $\omega_n = \sqrt{2} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ,  $\zeta_1 = \frac{3}{2\sqrt{2}}$  ( $\frac{k}{M} = 2$ ,  $\frac{b}{M} = 3$ )
- Caso 2:  $y(0) = 0,15 \text{ m}$ ,  $\omega_n = \sqrt{2} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ,  $\zeta_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$  ( $\frac{k}{M} = 2$ ,  $\frac{b}{M} = 1$ )

\*Ver o Apêndice F para obter uma introdução ao MATLAB.

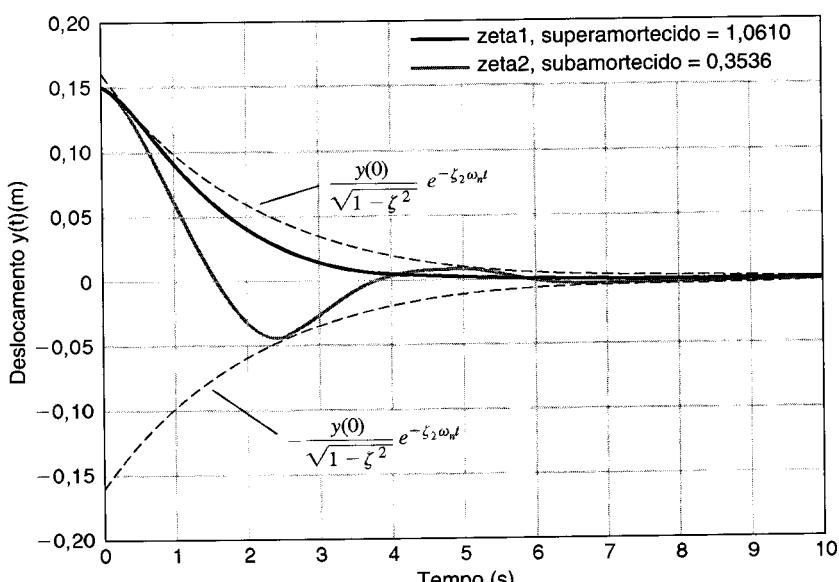


**Fig. 2.38** Conjunto de instruções para analisar o sistema mola-massa-amortecedor.

Os comandos em MATLAB para gerar o gráfico da resposta livre estão mostrados na Fig. 2.38. Ao início do uso do MATLAB, os valores das variáveis e parâmetros  $y(0)$ ,  $\omega_n$ ,  $t$ ,  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  são digitados no espaço de trabalho ao nível de comando. Em seguida, executa-se o programa `sistema_livre.m` para gerar os gráficos desejados. Isto cria uma possibilidade de análise interativa que permite analisar os efeitos da freqüência natural e do amortecimento na resposta livre do deslocamento da massa. Pode-se investigar os efeitos da freqüência natural e do amortecimento sobre a resposta temporal entrando-se com novos valores de  $\omega_n$ ,  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  no sinal de pedido de comando (prompt) e rodando novamente o programa `sistema_livre.m`. O gráfico da resposta temporal está mostrado na Fig. 2.39. Observe-se que o programa rotula o gráfico automaticamente com os valores dos coeficientes de amortecimento. Isto evita confusão ao se executarem muitas simulações interativas. O valor da freqüência natural poderia ser assinalado no gráfico. A utilização de programas constitui um aspecto importante do desenvolvimento de uma capacidade efetiva de análise e projeto interativos no MATLAB.

Para o problema mola-massa-amortecedor, a solução livre da equação diferencial estava prontamente disponível. Em geral, ao simular sistemas de controle com retroação a malha fechada sujeitos a diversas entradas e condições iniciais, é difícil tentar obter analiticamente uma solução. Nestes casos pode-se usar o MATLAB para calcular as soluções numericamente e exibir a solução graficamente.

O MATLAB pode ser usado para analisar sistemas descritos por meio de funções de transferência. Como a função de transferência é uma relação entre dois polinômios, começa-se investigando



**Fig. 2.39** Resposta livre do sistema mola-massa-amortecedor.

como o MATLAB manipula polinômios, recordando que trabalhar com funções de transferência significa que tanto o polinômio do numerador quanto o polinômio do denominador devem ser especificados.

No MATLAB, os polinômios são representados por vetores linha contendo os coeficientes do polinômio em ordem decrescente. Por exemplo, o polinômio

$$p(s) = s^3 + 3s^2 + 4$$

é introduzido como está mostrado na Fig. 2.40. Observe-se que mesmo com o coeficiente de  $s$  sendo igual a zero, ele é incluído na definição de entrada de  $p(s)$ .

Se  $\mathbf{p}$  for um vetor linha contendo os coeficientes de  $p(s)$  em ordem decrescente, então  $\text{roots}(\mathbf{p})$  é um vetor coluna contendo as raízes do polinômio. Reciprocamente, se  $\mathbf{r}$  for um vetor coluna contendo as raízes do polinômio, então  $\text{poly}(\mathbf{r})$  é um vetor linha com os coeficientes do polinômio em ordem decrescente. Pode-se calcular as raízes do polinômio  $p(s) = s^3 + 3s^2 + 4$  com a função  $\text{roots}$  como está mostrado na Fig. 2.40. A função  $\text{roots1}$  também calcula as raízes de um polinômio mas fornece um resultado mais exato quando o polinômio possui raízes repetidas. Na Fig. 2.40, é mostrado também como remontar o polinômio com a função  $\text{poly}$ . A multiplicação de polinômios é efetuada com a função  $\text{conv}$ . Suponha-se que se deseje expandir o polinômio  $n(s)$ , onde

$$n(s) = (3s^2 + 2s + 1)(s + 4).$$

Os comandos MATLAB associados usando a função  $\text{conv}$  estão mostrados na Fig. 2.41. Assim o polinômio expandido é

$$n(s) = 3s^3 + 14s^2 + 9s + 4.$$

A função  $\text{polyval}$  é usada para calcular o valor de um polinômio para um dado valor da variável. O polinômio  $n(s)$  tem o valor  $n(-5) = -66$ , conforme está mostrado na Fig. 2.41.

No próximo exemplo será obtido um gráfico com as localizações dos pólos e zeros no plano complexo. Isto será realizado usando a função  $\text{pzmap}$ , mostrada na Fig. 2.42. No gráfico de pólos e zeros, os zeros serão representados por um “o” e os pólos por um “x”. Se a função  $\text{pzmap}$  for chamada sem os argumentos da esquerda da igualdade, o gráfico será gerado automaticamente.

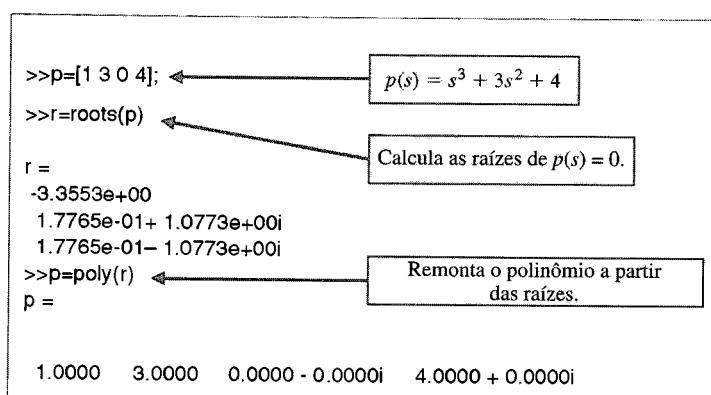


Fig. 2.40 Entrando com o polinômio  $p(s) = s^3 + 3s^2 + 4$  e calculando suas raízes.

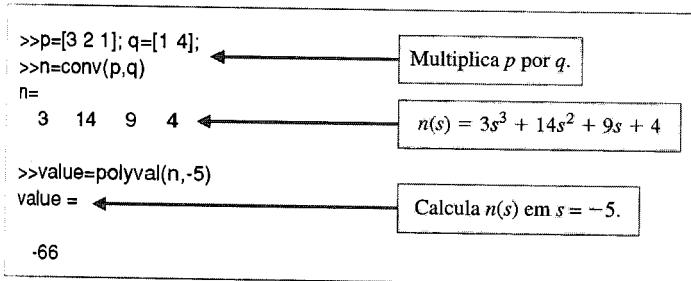


Fig. 2.41 Usando **conv** e **polyval** para multiplicar e calcular os polinômios  $(3s^2 + 2s + 1)(s + 4)$ .

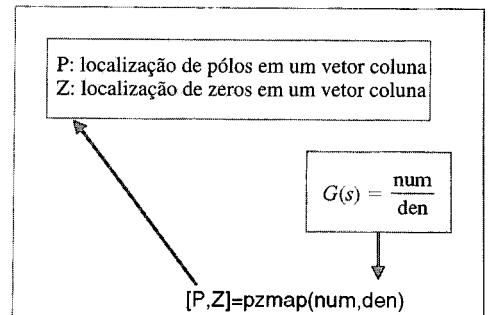


Fig. 2.42 A função  **pzmap**.

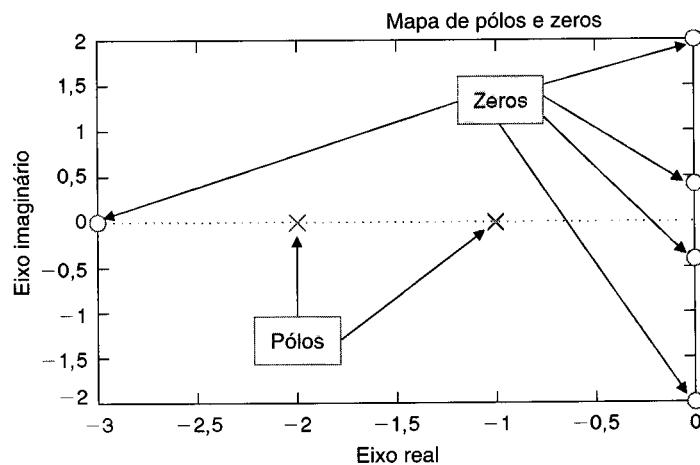
**EXEMPLO 2.15****Funções de transferência**

Considerem-se as funções de transferência

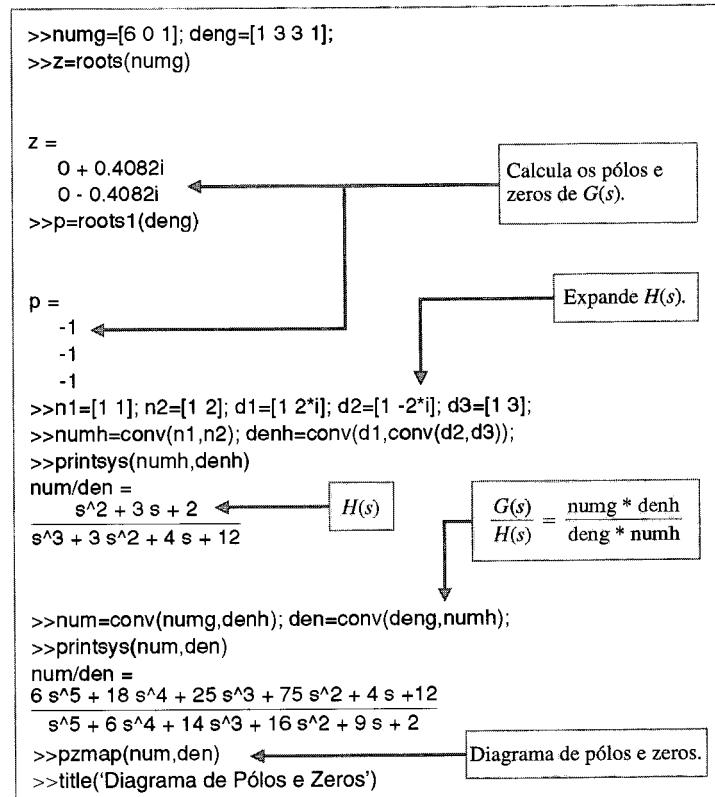
$$G(s) = \frac{6s^2 + 1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} \quad \text{e} \quad H(s) = \frac{(s + 1)(s + 2)}{(s + 2i)(s - 2i)(s + 3)}.$$

Utilizando um script em MATLAB, pode-se calcular os pólos e zeros de  $G(s)$ , a equação característica de  $H(s)$  e dividir  $G(s)$  por  $H(s)$ . Pode-se também obter um gráfico com o diagrama de pólos e zeros de  $G(s)/H(s)$  no plano complexo.

O diagrama de pólos e zeros da função de transferência  $G(s)/H(s)$  está mostrado na Fig. 2.43 e os comandos em MATLAB associados estão mostrados na Fig. 2.44. O diagrama de pólos e zeros mostra claramente as cinco localizações dos zeros, mas parece que há apenas dois pólos. Este não pode ser o caso, pois se sabe que o número de pólos deve ser maior ou igual ao número de zeros. Usando a função `roots1`, é possível certificar-se de que, na realidade, há quatro pólos em  $s = -1$ . Deste modo,



**Fig. 2.43** Diagrama de pólos e zeros para  $G(s)/H(s)$ .



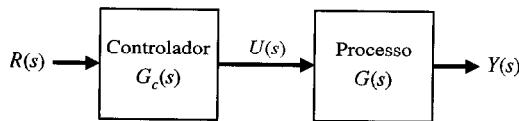
**Fig. 2.44** Exemplo de função de transferência para  $G(s)$  e  $H(s)$ .

pólos múltiplos ou zeros múltiplos na mesma localização não podem ser discernidos no diagrama de pólos e zeros. ■

**Modelos em Diagramas de Blocos.** Suponha-se que foram desenvolvidos modelos matemáticos na forma de funções de transferência para o processo a controlar, representado por  $G(s)$ , para o controlador, representado por  $G_c(s)$  e, possivelmente, muitos outros componentes do sistema, como sensores e atuadores. O objetivo é interconectar estes componentes para formar um sistema de controle. Serão utilizadas funções do MATLAB para efetuar as transformações de diagramas de blocos.

Um sistema de controle simples a malha aberta pode ser obtido interconectando-se em cascata um processo e um controlador, como está ilustrado na Fig. 2.45. É possível usar o MATLAB para calcular a função de transferência de  $R(s)$  para  $Y(s)$ , como se segue.

Fig. 2.45 Sistema de controle a malha aberta (sem retroação).



#### EXEMPLO 2.16

#### Conexão em cascata

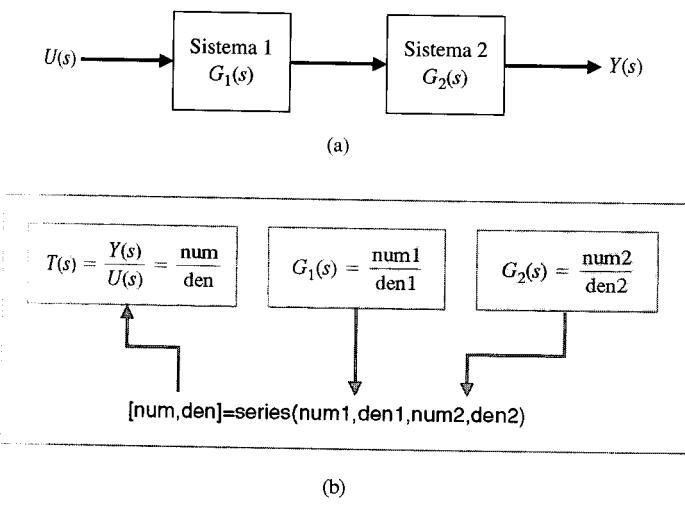
Seja o processo representado pela função de transferência  $G(s)$

$$G(s) = \frac{1}{500s^2},$$

e seja o controlador representado pela função de transferência  $G_c(s)$

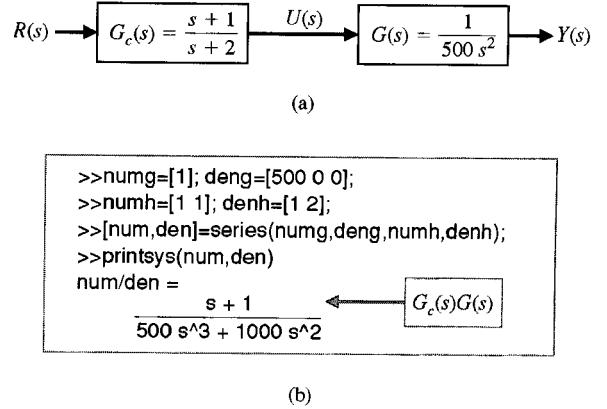
$$G_c(s) = \frac{s + 1}{s + 2}.$$

É possível usar a função **series** para colocar em cascata duas funções de transferência  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$ , como está mostrado na Fig. 2.46.



(b)

Fig. 2.46 (a) Diagrama de blocos. (b) A função **series**.



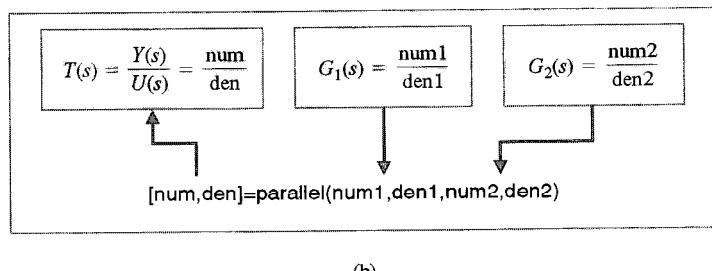
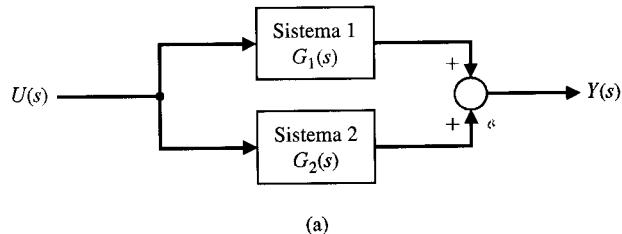
(b)

Fig. 2.47 Aplicação da função **series**.

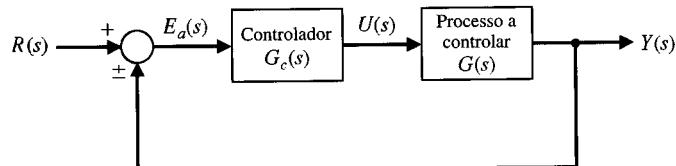
A função de transferência  $G_c(s)G(s)$  pode ser calculada usando a função **series** como está mostrado na Fig. 2.47. A função de transferência resultante,  $G_c(s)G(s)$ , é

$$G_c(s)G(s) = \frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{s + 1}{500s^3 + 1000s^2}. \blacksquare$$

Os diagramas de blocos apresentam muitas vezes funções de transferência em paralelo. Nestes casos, a função **parallel** pode ser bastante útil. A função **parallel** está descrita na Fig. 2.48.



**Fig. 2.48** (a) Diagrama de blocos. (b) A função **parallel**.



**Fig. 2.49** Sistema de controle básico com retroação unitária.

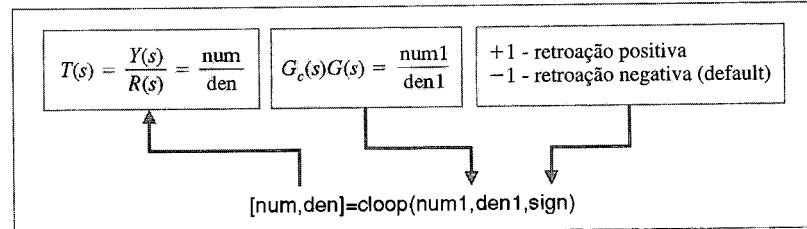
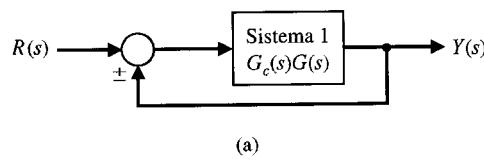
Um **sinal de retroação** pode ser introduzido em um sistema de controle fechando-se a malha com **retroação unitária**, conforme está mostrado na Fig. 2.49. O sinal  $E_a(s)$  é um **sinal de erro**; o sinal  $R(s)$  é a **entrada de referência**. Neste sistema de controle, o controlador está no percurso de ação à frente e a função de transferência a malha fechada é

$$T(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}.$$

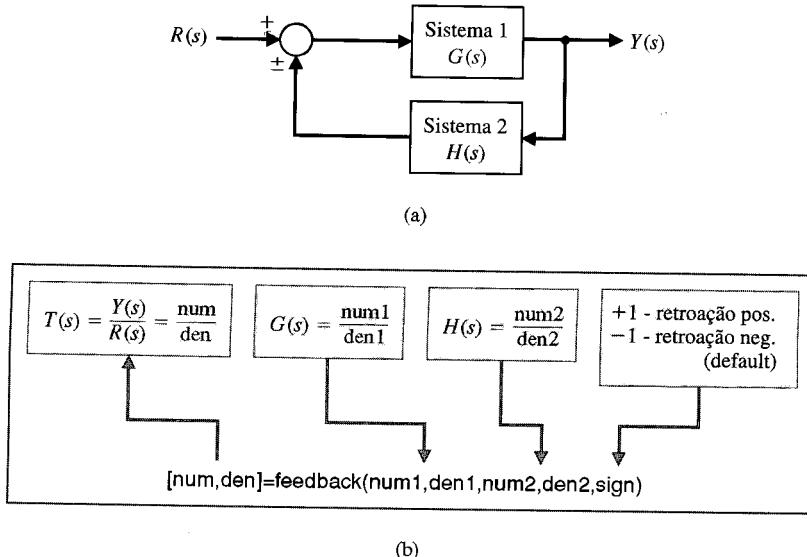
Há duas funções que podem ser usadas para auxiliar o procedimento de redução de diagramas de blocos no sentido de obter funções de transferência a malha fechada para sistemas de controle mono e multimalhas. Estas funções são **cloop** e **feedback**.

A função **cloop** calcula a função de transferência a malha fechada, como está mostrado na Fig. 2.50, com a configuração de sistema associada e pressupõe, como *default*, retroação unitária negativa.

A função **feedback** está mostrada na Fig. 2.51 com a configuração de sistema associada, que inclui  $H(s)$  no percurso de retroação. Para ambas as funções **cloop** e **feedback** se a entrada “sign” for omitida, será suposta retroação negativa.



**Fig. 2.50** (a) Diagrama de blocos. (b) A função **cloop**.

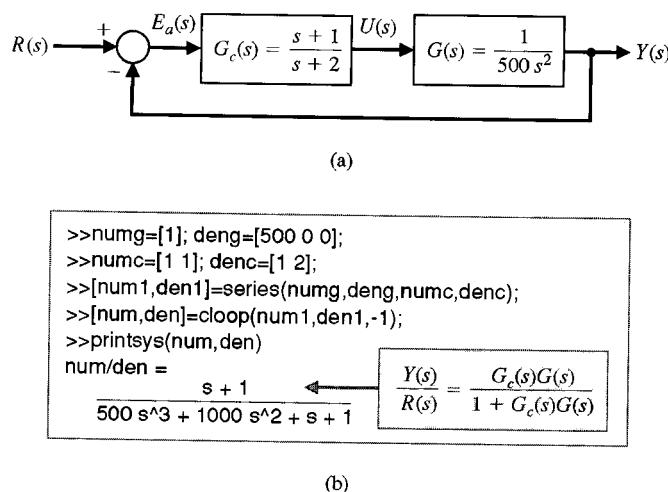


**Fig. 2.51** (a) Diagrama de blocos. (b) A função `feedback`.

### EXEMPLO 2.17

#### A função `cloop`

Seja o processo,  $G(s)$ , e o controlador,  $G_c(s)$ , como na Fig. 2.47(a). Para aplicar a função `cloop`, utiliza-se primeiro a função `series` para calcular  $G_c(s)G(s)$ , seguida da função `cloop` para fechar a malha.

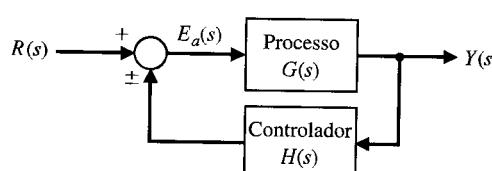


**Fig. 2.52** (a) Diagrama de blocos. (b) Aplicação da função `cloop`.

lha. A seqüência de comandos é mostrada na Fig. 2.52(b). A função de transferência a malha fechada, como está mostrada na Fig. 2.52(b) é

$$T(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{s + 1}{500s^3 + 1000s^2 + s + 1}.$$

Uma outra configuração básica de sistema de controle com retroação está mostrada na Fig. 2.53.



**Fig. 2.53** Sistema de controle básico com o controlador na malha de retroação.

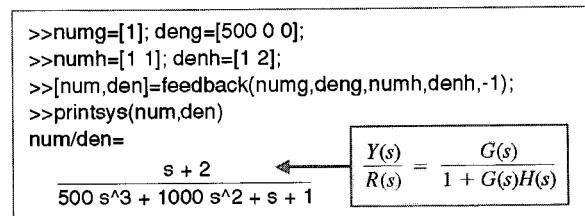
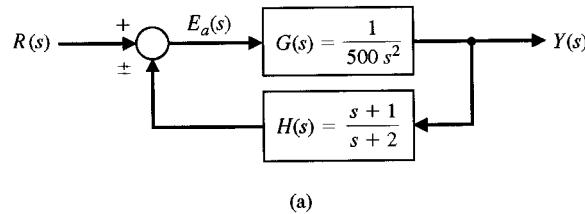
Neste caso, o controlador está localizado na malha de retroação. A função de transferência a malha fechada é

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}.$$

### EXEMPLO 2.18

#### A função *feedback*

Seja o processo,  $G(s)$ , e o controlador,  $H(s)$ , como está mostrado na Fig. 2.54(a). Para calcular a função de transferência a malha fechada com o controlador na malha de retroação, usa-se a função *fee-*



**Fig. 2.54** Aplicação da função *feedback* (a) diagrama de blocos, (b) script MATLAB.

dback. A seqüência de comandos está mostrada na Fig. 2.54(b). A função de transferência a malha fechada é

$$T(s) = \frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{s + 2}{500s^3 + 1000s^2 + s + 1}.$$

As funções do MATLAB *series*, *cloop* e *feedback* podem ser usadas como auxílio nas manipulações de diagramas de blocos com malhas múltiplas.

### EXEMPLO 2.19

#### Redução multimalhas

Um sistema com múltiplas malhas de retroação está mostrado na Fig. 2.24. O objetivo é calcular a função de transferência a malha fechada

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)},$$

onde

$$G_1(s) = \frac{1}{s + 10}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s + 1},$$

$$G_3(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 4s + 4}, \quad G_4(s) = \frac{s + 1}{s + 6},$$

e

$$H_1(s) = \frac{s + 1}{s + 2}, \quad H_2(s) = 2, \quad H_3(s) = 1.$$

Para este exemplo, será adotado um procedimento de cinco passos:

- Passo 1. Entrar com as funções de transferência do sistema no MATLAB.
- Passo 2. Deslocar  $H_2$  para atrás de  $G_4$ .

- Passo 3. Eliminar o laço  $G_3G_4H_1$ .
- Passo 4. Eliminar o laço que contém  $H_2$ .
- Passo 5. Eliminar o laço restante e calcular  $T(s)$ .

Os cinco passos são utilizados na Fig. 2.55 e a redução do diagrama de blocos correspondente está mostrada na Fig. 2.25. O resultado da execução dos comandos em MATLAB é

$$\frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 6s^2 + 5s + 2}{12s^6 + 205s^5 + 1066s^4 + 2517s^3 + 3128s^2 + 2196s + 712}$$

Deve-se ter cautela em chamar isto de função de transferência a malha fechada. A função de transferência é definida pela relação entrada-saída depois do cancelamento de pólos e zeros. Se forem calculados os pólos e zeros de  $T(s)$ , descobre-se que os polinômios em numerador e em denominador possuem o fator comum  $(s + 1)$ . Isto deve ser cancelado antes que se possa afirmar ter a função de transferência a malha fechada. Para ajudar no cancelamento de pólos e zeros, será usada a função **minreal**. A função **minreal**, mostrada na Fig. 2.56, remove os fatores de pólos e zeros comuns da função de transferência. O passo final no procedimento da redução do diagrama de blocos consiste em cancelar os fatores comuns, como está mostrado na Fig. 2.57. A função de transferência a malha fechada está dada na Fig. 2.57 como  $T(s) = \text{num}/\text{den}$ . Depois da aplicação da função **minreal**, en-

Fig. 2.55 Redução de diagrama de blocos multimalha.

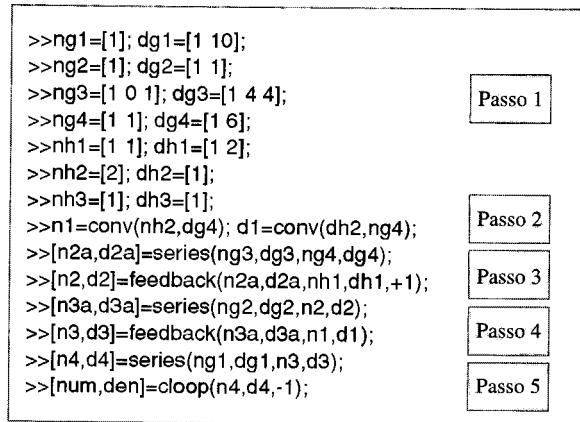


Fig. 2.56 A função **minreal**.

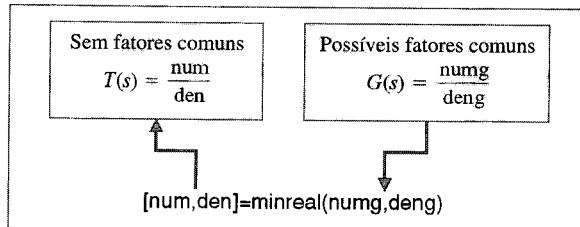
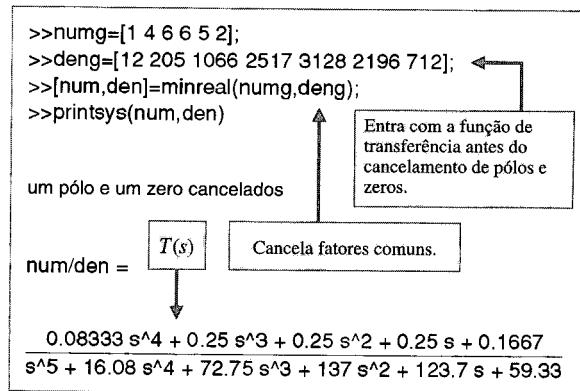


Fig. 2.57 Aplicação da função **minreal**.

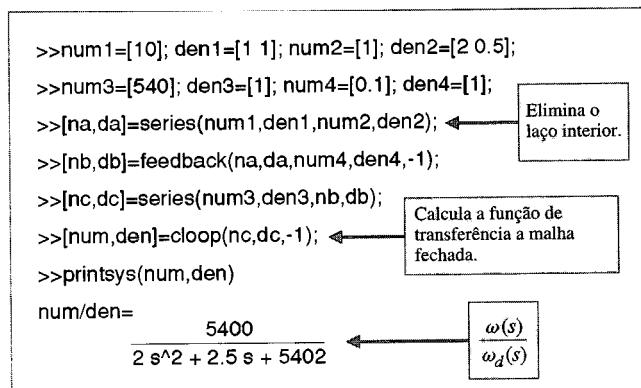


contra-se que o grau do polinômio do denominador foi reduzido de seis para cinco, implicando no cancelamento de um pôlo com um zero. ■

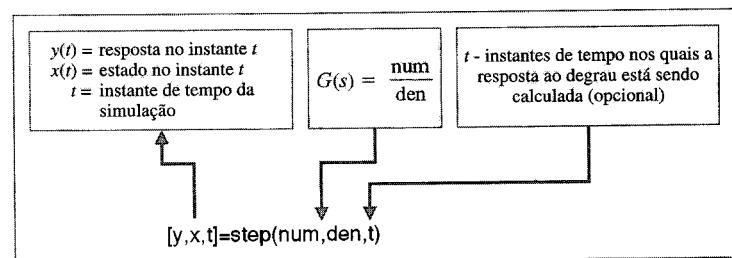
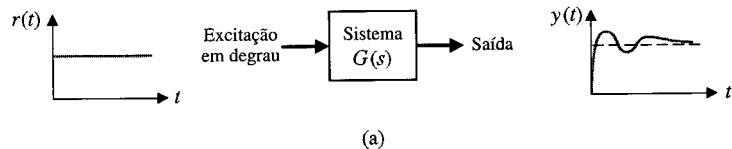
### EXEMPLO 2.20

#### Controle de um motor elétrico de tração

Finalmente, considere-se o sistema motor elétrico de tração do Exemplo 2.11. O diagrama de blocos está mostrado na Fig. 2.33(c). O objetivo é calcular a função de transferência a malha fechada e investigar a resposta de  $\omega(s)$  a um comando  $\omega_d(s)$ . O primeiro passo, como está mostrado na Fig. 2.58, consiste em calcular a função de transferência  $\omega(s)/\omega_d(s) = T(s)$ . A equação característica a malha fechada é de segunda ordem com  $\omega_n = 52$  e  $\zeta = 0,012$ . Como o amortecimento é pequeno, espera-se que a resposta seja altamente oscilatória. Pode-se investigar a resposta  $\omega(t)$  para uma entrada de referência,  $\omega_d(t)$ , utilizando a função **step**. A função **step**, mostrada na Fig. 2.59, calcula a resposta de um sistema linear a um degrau unitário.



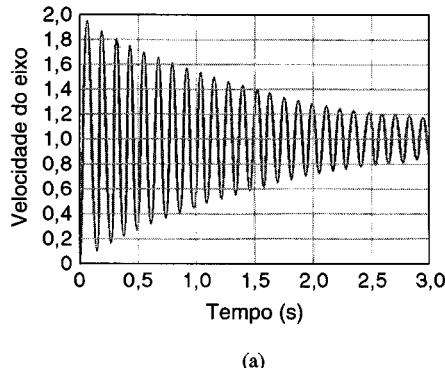
**Fig. 2.58** Redução do diagrama de blocos do motor elétrico de tração.



**Fig. 2.59** A função **step**.

A função **step** é muito importante, uma vez que as especificações de desempenho de sistemas de controle são dadas, freqüentemente, em termos da resposta ao degrau unitário. A resposta de estado, dada por  $x(t)$ , é uma saída da função **step** e será discutida em detalhes no Cap. 3, "Modelos em Variáveis de Estado". Foi incluído  $x$  na lista de argumentos à esquerda do sinal de igualdade, mas, no momento, esta variável não está sendo considerada.

Se o único objetivo for traçar o gráfico da saída,  $y(t)$ , pode-se usar a função **step** sem os argumentos da esquerda e obter o gráfico automaticamente com as legendas dos eixos. Se  $y(t)$  for necessário para qualquer outra finalidade além do gráfico, deve-se usar a função **step** com os argumentos da esquerda, seguida da função **plot** para traçar o gráfico da saída  $y(t)$ . Define-se  $t$  como um vetor linha contendo os instantes em que se deseja o valor da variável de saída  $y(t)$ .



mresp.m

```
% Este programa calcula a resposta ao
% degrau da Velocidade do Eixo de
% um Motor de Tração
%
num=[5400]; den=[2 2.5 5402];
t=[0:0.005:3];
[y,x,t]=step(num,den,t);
plot(t,y),grid
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Velocidade do eixo')
```

(b)

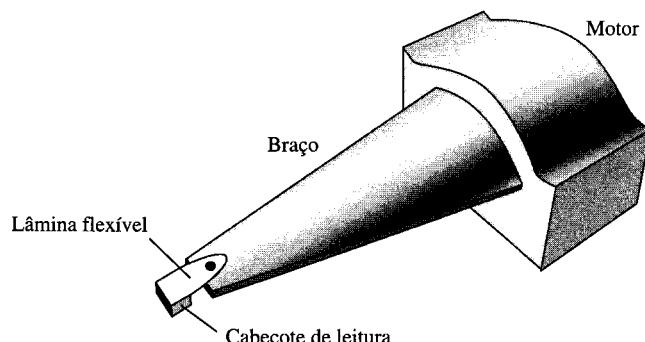
**Fig. 2.60** (a) Resposta ao degrau da velocidade de eixo de um motor de tração.  
 (b) Programa em MATLAB.

A resposta ao degrau de um motor elétrico de tração está mostrada na Fig. 2.60. Como esperado, a velocidade do eixo, dada pela saída  $y(t)$ , é altamente oscilatória. Observe-se que a saída é  $y(t) = \omega(t)$ . ■

## 2.11 EXEMPLO DE PROJETO SEQÜENCIAL: SISTEMA DE LEITURA DE ACIONADOR DE DISCO



Na Seção 1.12, foi desenvolvido um objetivo inicial para o sistema de acionamento de disco: posicionar a cabeça leitora, com precisão, em uma determinada trilha e deslocá-la de uma trilha para a outra em 10 ms, se possível. Neste capítulo serão completados os passos 4 e 5 do procedimento de projeto (Fig. 1.19). Torna-se necessário identificar o atuador, o sensor e o controlador (passo 4). Em seguida será obtido o modelo do processo a controlar  $G(s)$  e do sensor. O cabeçote de leitura do acionador de disco usa um motor CC de ímã permanente para mover angularmente o braço de leitura (ver Fig. 1.24). O motor CC é chamado um motor de bobina de áudio (*voice coil*) na indústria de acionadores de disco. A cabeça leitora é montada em um dispositivo deslizante, que é conectado ao braço como está mostrado na Fig. 2.61. Uma lâmina (mola metálica) é usada para permitir que a cabeça fique suspensa acima do disco a uma distância inferior a 100 nm. A cabeça de filme fino lê o fluxo magnético e fornece um sinal a um amplificador. O sinal de erro da Fig. 2.62(a) é fornecido pela leitura do erro a partir de uma trilha de índice pré-gravada. Admitindo-se uma cabeça leitora de precisão, o sensor possui uma função de transferência  $H(s) = 1$ , como está mostrado na Fig. 2.62(b). O modelo



**Fig. 2.61** Montagem de um cabeçote de leitura, mostrando a lâmina.

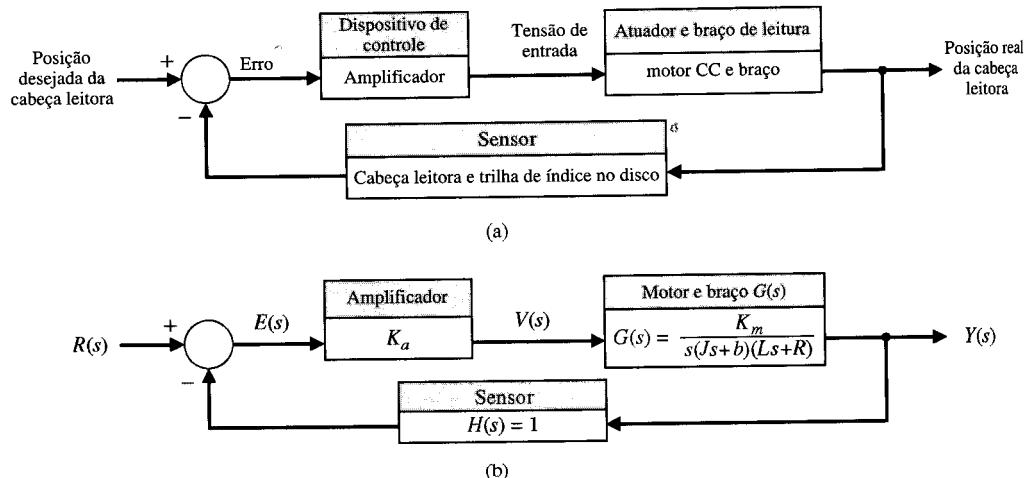


Fig. 2.62 Diagrama de blocos do modelo de um sistema de leitura de acionador de disco.

do motor de ímã permanente e o do amplificador estão mostrados na Fig. 2.62(b). Como uma boa aproximação, utiliza-se o modelo do motor CC controlado pela armadura, como foi mostrado anteriormente na Fig. 2.18 com  $K_b = 0$ . O modelo mostrado na Fig. 2.62(b) admite que a lâmina seja inteiramente rígida e não apresente deflexão significativa. No Cap. 4, será considerado o modelo em que a lâmina não pode ser considerada completamente rígida.

A Tabela 2.11 apresenta parâmetros típicos para o sistema de acionamento de disco. Tem-se, então

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K_m}{s(Js + b)(Ls + R)} \\ &= \frac{5000}{s(s + 20)(s + 1000)} \end{aligned} \quad (2.117)$$

Pode-se escrever também  $G(s)$  como

$$G(s) = \frac{K_m/bR}{s(\tau_L s + 1)(\tau s + 1)} \quad (2.118)$$

Onde  $\tau_L = J/b = 50$  ms e  $\tau = L/R = 1$  ms. Como  $\tau \ll \tau_L$ , freqüentemente se despreza  $\tau$ . Em consequência, tem-se

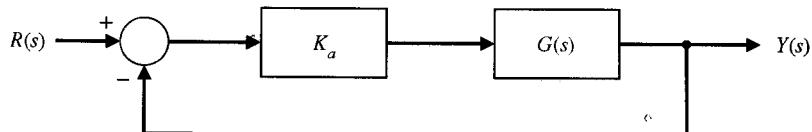
$$G(s) \approx \frac{K_m/bR}{s(\tau_L s + 1)} = \frac{0,25}{s(0,05s + 1)}$$

ou

$$G(s) = \frac{5}{s(s + 20)}$$

TABELA 2.11 Valores Típicos de Parâmetros para a Leitora do Acionador de Disco

Parâmetro	Símbolo	Valor Típico
Inércia do braço e da cabeça leitora	$J$	$1 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2/\text{rad}$
Coeficiente de atrito viscoso	$b$	$20 \text{ kg/m/s}$
Ganho do amplificador	$K_a$	$10 - 1000$
Resistência de armadura	$R$	$1\Omega$
Constante de torque do motor	$K_m$	$5 \text{ N} \cdot \text{m/A}$
Indutância da armadura	$L$	$1 \text{ mH}$



**Fig. 2.63** Diagrama de blocos de sistema a malha fechada.

O diagrama de blocos do sistema a malha fechada está mostrado na Fig. 2.63. Usando-se a transformação de diagrama de blocos da Tabela 2.8, resulta

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_a G(s)}{1 + K_a G(s)} \quad (2.119)$$

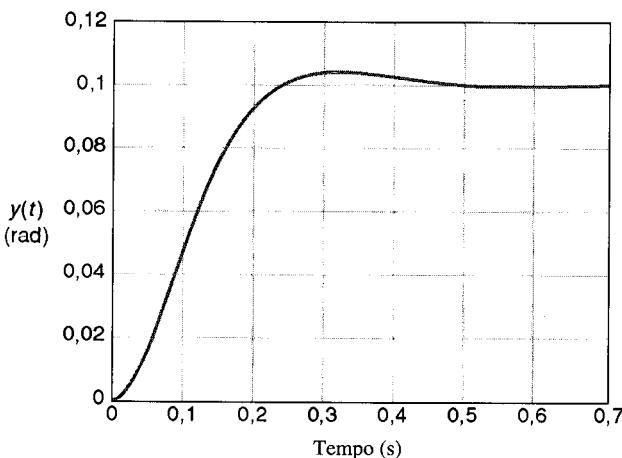
Usando o modelo aproximado de segunda ordem para  $G(s)$  obtém-se

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5K_a}{s^2 + 20s + 5K_a}$$

Quando  $K_a = 40$ , resulta

$$Y(s) = \frac{200}{s^2 + 20s + 200} R(s)$$

Usando a função `step` do MATLAB, obtém-se a resposta ao degrau para  $R(s) = 0,1/s$  rad, como está mostrado na Fig. 2.64.



**Fig. 2.64** Resposta do sistema mostrado na Fig. 2.63 para  $R(s) = 0,1/s$ .

## 2.12 SUMÁRIO

Neste capítulo, tratou-se de modelos matemáticos quantitativos de componentes e de sistemas de controle. Foram utilizadas equações diferenciais para construir modelos matemáticos que descrevem o desempenho dinâmico de sistemas físicos. Os sistemas físicos sob consideração abrangem sistemas mecânicos, elétricos, fluidos e termodinâmicos. Para obter uma aproximação linear de pequeno sinal para os componentes de controle não-lineares, utilizou-se uma aproximação linear usando a expansão em série de Taylor nas proximidades de um ponto de operação. Em seguida, com a aproximação linear, foi possível utilizar a transformação de Laplace e sua relação entrada-saída resultante dada pela função de transferência. A abordagem de sistemas lineares via função de transferência permite ao analista determinar a resposta do sistema a vários sinais de entrada em termos da localização de pólos e zeros da função de transferência. Foram desenvolvidos modelos de sistemas de componentes interconectados, usando as notações de funções de transferência. Foram obtidas as relações de blocos. Adicionalmente, foi investigado um modo alternativo de uso de modelos sob a forma de função de transferência por meio dos diagramas de fluxo de sinal. Foi examinada a fórmula de Mason para determinação do ganho em diagramas de fluxo de sinal, útil na obtenção de relações entre variáveis de um sistema, em sistemas com retroação complexos. A vantagem do método do diagrama de fluxo reside na disponibilidade da regra de Mason, a qual fornece a relação entre as variáveis de sistema sem a necessidade de recorrer a qualquer tipo de redução ou de manipulação do diagrama de fluxo de sinal. Assim, no Cap. 2, foi obtido um modelo matemático útil para sistemas de

controle com retroação. Isto foi feito através do desenvolvimento do conceito de função de transferência de sistemas lineares e da relação entre as variáveis de sistema sob a forma de diagramas de blocos e de diagramas de fluxo de sinal. Considerou-se a utilidade da simulação em computador de sistemas lineares e não-lineares para determinar a resposta de um sistema em diversas situações envolvendo valores de parâmetros e condições do ambiente. Finalmente, foi dada seqüência ao desenvolvimento do Sistema de Leitura de Acionador de Disco através da obtenção de um modelo sob a forma de função de transferência do motor e do braço.

## EXERCÍCIOS

(Os exercícios constituem aplicações diretas dos conceitos do capítulo.)

- E2.1** Um sistema com retroação unitária possui uma função não-linear  $y = f(e) = e^2$ , como está mostrado na Fig. E2.1. Para uma entrada  $r$  na faixa de 0 a 4, calcule e trace a curva da saída versus entrada com o sistema a malha aberta e com o sistema a malha fechada. Mostre que a retroação produz uma relação mais linear.

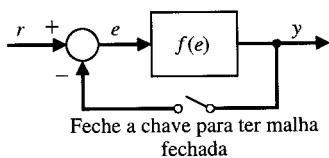


Fig. E2.1 Malha aberta e malha fechada.

- E2.2** Um termistor apresenta uma resposta à temperatura representada por

$$R = R_0 e^{-0.1T},$$

onde  $R_0 = 10.000 \Omega$ ,  $R$  = resistência e  $T$  = temperatura em graus Celsius. Obter um modelo linear para o termistor operando em  $T = 20^\circ\text{C}$  e para uma pequena faixa de variação de temperatura.

**Resposta:**  $\Delta R = -135 \Delta T$

- E2.3** A curva característica de força versus deslocamento de uma mola integrante do sistema mola-massa-amortecedor da Fig. 2.1 está mostrada na Fig. E2.3. Obtenha graficamente a constante de mola referente ao ponto de equilíbrio  $y = 0,5$  cm e a uma faixa de operação de  $\pm 1,5$  cm.

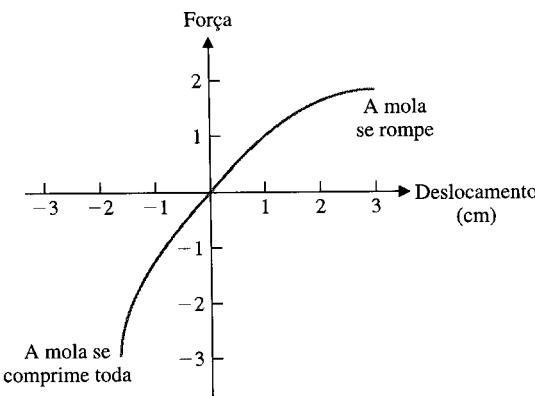


Fig. E2.3 Comportamento da mola.

- E2.4** Uma impressora utiliza um feixe de laser para imprimir rapidamente cópias para um computador. O laser é posicionado por um sinal de controle de entrada,  $r(t)$ , tal que

$$Y(s) = \frac{5(s + 100)}{s^2 + 60s + 500} R(s).$$

A entrada  $r(t)$  representa a posição desejada do feixe de laser.

- (a) Determine a saída  $y(t)$  quando  $r(t)$  for um degrau unitário de entrada.

- (b) Qual o valor final de  $y(t)$ ?

**Resposta:** (a)  $y(t) = 100 - 112,5e^{-10t} + 12,5e^{-50t}$ ,

$$(b) y_{ss} = 100$$

- E2.5** Um circuito de chaveamento é usado para converter um nível de tensão CC em uma saída de tensão CC. O circuito do filtro desenhado a eliminar as freqüências altas está mostrado na Fig. E2.5. Calcule a função de transferência  $V_2(s)/V_1(s)$ .

$$\text{Resposta: } V_2(s)/V_1(s) = \frac{C_1}{C_1 C_2 L s^2 + C_1 + C_2}$$

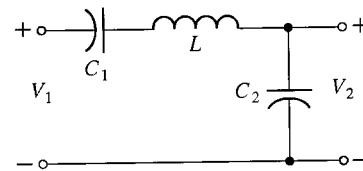


Fig. E2.5 Circuito de um filtro comutador de 150W (idealizado).

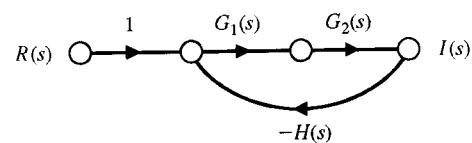
- E2.6** Um dispositivo não-linear é representado pela função

$$y = f(x) = x^{1/2}$$

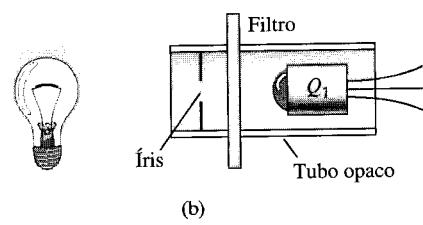
onde o ponto de operação para a entrada  $x_0 = 1/4$  é  $y_0 = 1/2$ . Determinar a aproximação linear na forma da Eq. (2.9).

**Resposta:**  $\Delta y = \Delta x/\sqrt{2}$

- E2.7** A intensidade luminosa de uma lâmpada permanece constante quando monitorada por uma malha de retroação controlada por meio de um fototransistor. Quando a tensão de alimentação cai, a saída luminosa da lâmpada também cai e o fototransistor  $Q_1$  conduz uma corrente menor. Como resultado, um transistor de potência conduz menos e carrega um capacitor mais rapidamente [25]. A tensão no capacitor controla diretamente a tensão na lâmpada. Um diagrama de fluxo do sistema está mostrado na Fig. E2.7.



(a)



(b)

Fig. E2.7 Controlador de lâmpada.

Determinar a função de transferência a malha fechada,  $I(s)/R(s)$  quando  $I(s)$  é a intensidade luminosa da lâmpada e  $R(s)$  é o comando, ou seja, o nível de iluminação desejado.

- E2.8** Um engenheiro de controle, N. Minorsky, nos anos 1930, projetou um sistema de direção de navio inovador para a Marinha dos Estados Unidos. O sistema está representado pelo diagrama de fluxo de sinal mostrado na Fig. E2.8, onde  $Y(s)$  é o curso do navio,  $R(s)$  é o curso desejado e  $A(s)$  é o ângulo do leme [17]. Determinar a função de transferência  $Y(s)/R(s)$ .

$$\text{Resposta: } \frac{Y(s)}{R(s)} =$$

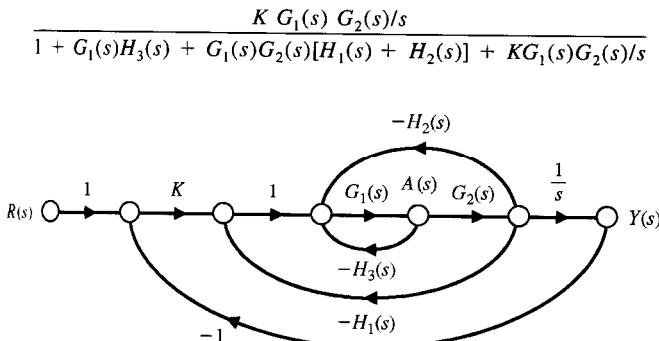


Fig. E2.8 Sistema de direção de navio.

- E2.9** Um sistema antibloqueio do sistema de freio nas quatro rodas de um automóvel utiliza retroação eletrônica para controlar a força de frenagem em cada uma das rodas [16]. Um diagrama de fluxo simplificado do sistema de controle do freio está mostrado na Fig. E2.9, onde  $F_f(s)$  e  $F_R(s)$  são, respectivamente, as forças de frenagem nas rodas dianteiras e traseiras e,  $R(s)$  é a resposta desejada do automóvel em uma pista gelada de rodovia. Determinar  $F_f(s)/R(s)$ .

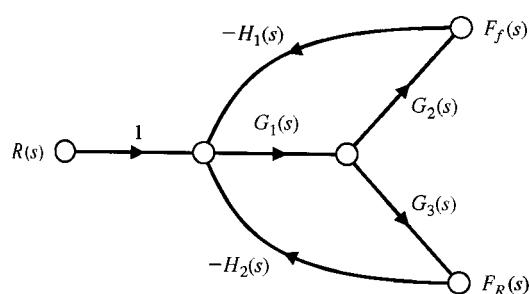
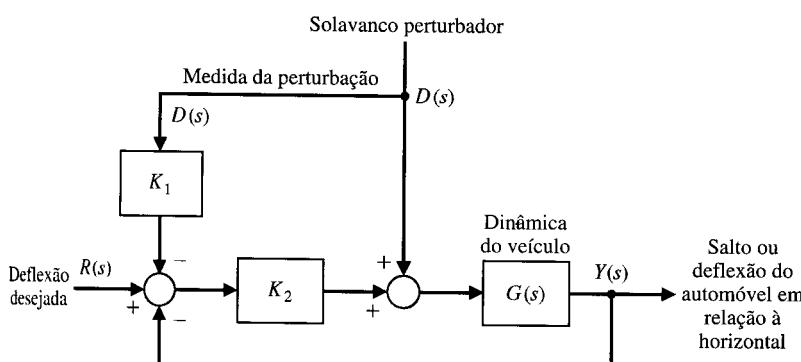


Fig. E2.9 Sistema de controle de frenagem.

- E2.10** Veículos para transitar fora de estrada são submetidos a muitas perturbações ao percorrer terrenos acidentados. Um sistema de suspensão ativa pode ser controlado por um sensor que veja,



“antecipadamente”, as condições da estrada. Um exemplo de sistema de suspensão simples que pode amoldar os solavancos está mostrado na Fig. E2.10. Determinar o ganho apropriado  $K_1$  de modo que o veículo não pule quando a deflexão desejada for  $R(s) = 0$  e a perturbação for  $D(s)$ .

**Resposta:**  $K_1K_2 = 1$ .

- E2.11** Uma mola apresenta uma característica força versus deslocamento conforme está mostrado na Fig. E2.11. Para pequenos desvios a partir do ponto de operação, determinar a constante de mola quando  $x_o$  for (a)  $-1,4$ ; (b)  $0$ ; (c)  $3,5$ .

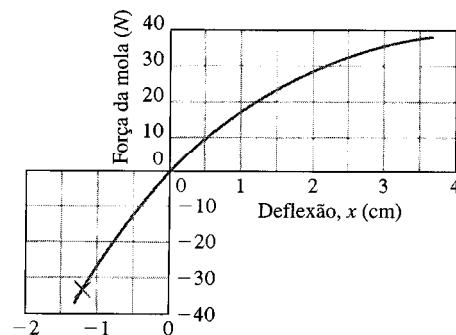


Fig. E2.11 Característica de mola.

- E2.12** Uma das aplicações mais benéficas de sistemas de controle automotivos é o controle ativo do sistema de suspensão. Um sistema de controle com retroação utiliza um amortecedor de choques constituído por um cilindro cheio de fluido compressível que fornece as forças de mola e de amortecimento [18]. O cilindro possui um êmbolo ativado através de um motor, um sensor de deslocamento e um êmbolo principal. A força de mola é gerada pelo deslocamento do êmbolo principal que comprime o fluido.

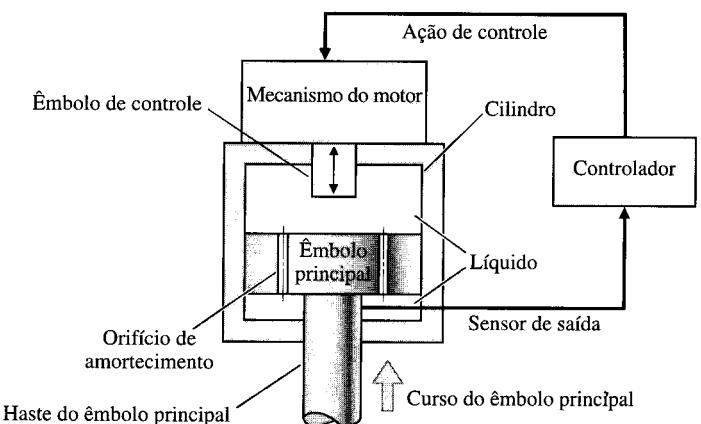


Fig. E2.12 Amortecedor ativo.

Fig. E2.10 Sistema de suspensão ativa.

Durante o deslocamento do êmbolo principal, o desequilíbrio de pressão entre as faces do êmbolo principal é usado para controlar o amortecimento. O êmbolo ativo varia o volume interno do cilindro. Este sistema com retroação é mostrado na Fig. E2.12. Desenvolver um modelo linear para este dispositivo usando a modelagem em diagrama de blocos.

**E2.13** Determinar a função de transferência

$$\frac{Y_1(s)}{R_1(s)}$$

para o sistema multivariável na Fig. E2.13.

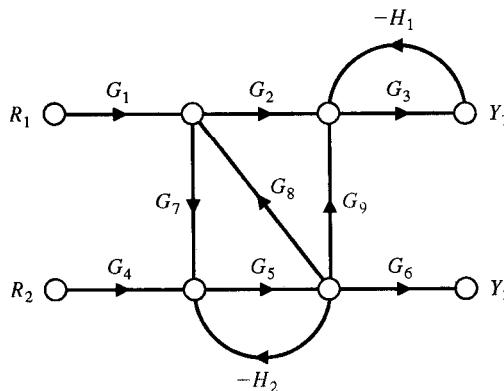


Fig. E2.13 Sistema multivariável.

**E2.14** Obter equações diferenciais em termos de  $i_1$  e de  $i_2$  para o circuito da Fig. E2.14.

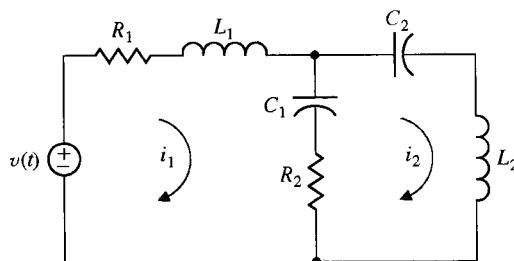


Fig. E2.14 Circuito elétrico.

**E2.15** O sistema de controle de posição de uma plataforma espacial é governado pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \frac{d^2p}{dt^2} + 2\frac{dp}{dt} + 4p &= \theta \\ v_1 &= r - p \\ \frac{d\theta}{dt} &= 0,6v_2 \\ v_2 &= 7v_1. \end{aligned}$$

As variáveis envolvidas são as seguintes:

- $r(t)$  = posição desejada da plataforma
- $p(t)$  = posição real da plataforma
- $v_1(t)$  = tensão de entrada no amplificador
- $v_2(t)$  = tensão de saída do amplificador
- $\theta(t)$  = posição angular do eixo do motor

Esboçar um diagrama de fluxo de sinal do sistema, identificando as partes componentes e suas transmitâncias. Em seguida, determinar a função de transferência do sistema  $P(s)/R(s)$ .

**E2.16** Uma mola usada em um sistema amortecedor de choques para automóveis desenvolve uma força,  $f$ , representada pela relação

$$f = kx^3,$$

onde  $x$  é o deslocamento da mola. Determinar um modelo linear para a mola quando  $x_0 = 1$ .

**E2.17** A saída,  $y$ , e a entrada,  $x$ , de um dispositivo são relacionados por

$$y = x + 0,4x^3.$$

- (a) Obter os valores da saída para a operação em estado estacionário em dois pontos de operação  $x_0 = 1$  e  $x_0 = 2$ . (b) Obter um modelo linearizado para ambos os pontos de operação e compará-los.

**E2.18** A função de transferência de um sistema é

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10(s + 2)}{s^2 + 8s + 15}.$$

Determinar  $y(t)$  quando  $r(t)$  for um degrau unitário de entrada.

**Resposta:**  $y(t) = 1,33 + 1,67e^{-3t} - 3e^{-5t}, t \geq 0$

**E2.19** Determinar a função de transferência  $V_0(s)/V(s)$  do circuito com amplificador operacional mostrado na Fig. E2.19. Supor que o amplificador operacional seja ideal. Determinar a função de transferência quando  $R_1 = R_2 = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 10 \mu\text{F}$  e  $C_2 = 5 \mu\text{F}$ .

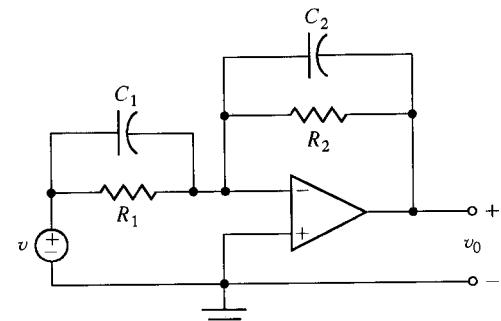


Fig. E2.19 Circuito com amplificadores operacionais.

**E2.20** O sistema de posicionamento de alta precisão de uma peça deslizante está mostrado na Fig. E2.20. Determinar a função de transferência  $X_p(s)/X_{in}(s)$  quando o coeficiente de atrito viscoso da haste acionadora é  $b_d = 1$ , a constante de mola da haste acionadora é  $k_d = 3$ ,  $m_c = 2/3$  e o atrito de deslizamento é  $b_s = 1$ .

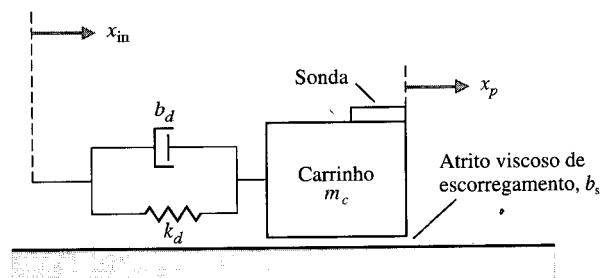


Fig. E2.20 Peça deslizante de precisão.

**E2.21** A velocidade de rotação  $\omega$  de um satélite mostrado na Fig. E2.21 é ajustada mudando-se o comprimento  $L$  da barra. A função de transferência entre  $\omega(s)$  e a variação incremental do comprimento da barra  $\Delta L(s)$  é

$$\frac{\omega(s)}{\Delta L(s)} = \frac{2,5(s + 2)}{(s + 5)(s + 1)^2}.$$

A variação de comprimento da barra é  $\Delta L(s) = 1/(4s)$ . Determinar a resposta de velocidade  $\omega(t)$ .

$$\text{Resposta: } \omega(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{128}e^{-5t} - \frac{35}{128}e^{-t} - \frac{5}{32}te^{-t}$$

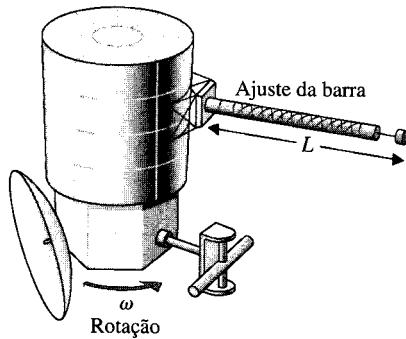


Fig. E2.21 Satélite.

**E2.22** Determinar a função de transferência a malha fechada  $T(s) = (Y(s))/(R(s))$  para o sistema da Fig. E2.22.

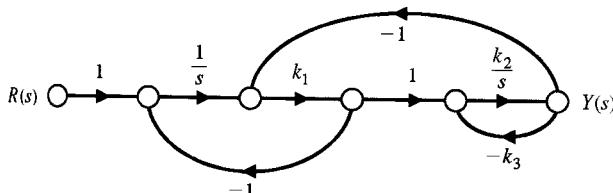


Fig. E2.22

**E2.23** O diagrama de blocos de um sistema está mostrado na Fig. E2.23. Determinar a função de transferência  $T(s) = Y(s)/R(s)$ .

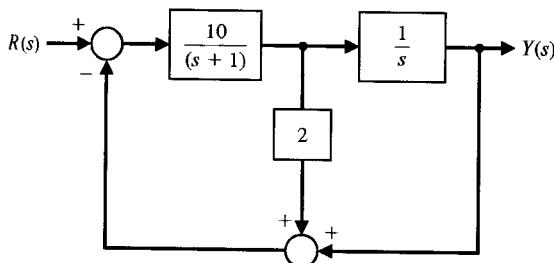


Fig. E2.23

**E2.24** Um amplificador pode apresentar uma zona morta como está mostrado na Fig. E2.24. Usar uma aproximação que emprega uma equação cúbica  $y = ax^3$  na região aproximadamente linear. Selecionar  $a$  e determinar a aproximação linear para o amplificador quando o ponto de operação for  $x = 0,6$ .

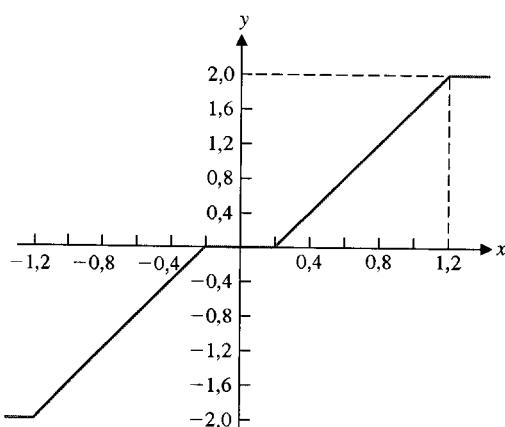


Fig. E2.24 Um amplificador com zona morta.

**E2.25** Determinar a função de transferência  $X_2(s)/F(s)$  para o sistema mostrado na Fig. E2.25. Ambas as massas deslizam sobre uma superfície, sem atrito e  $k = 1 \text{ N/M}$ .

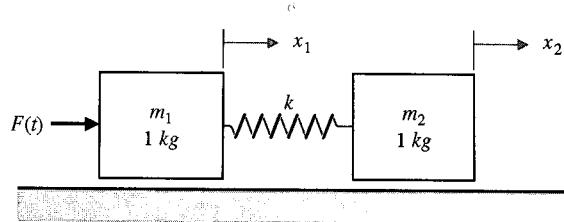


Fig. E2.25

$$\text{Resposta: } \frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2(s^2 + 2)}$$

**E2.26** Determinar a função de transferência  $Y(s)/D(s)$  para o sistema mostrado na Fig. E2.26

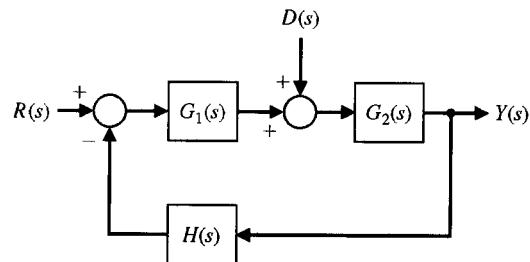


Fig. E2.26 Sistema com perturbação.

$$\text{Resposta: } \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

**E2.27** Determinar a função de transferência  $V_o(s)/V(s)$  para o circuito com amplificadores operacionais mostrado na Fig. E2.27 [1]. Seja  $R_1 = 167 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 240 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 100 \text{ k}\Omega$  e  $C = 1 \mu\text{F}$ . Considerar os amplificadores operacionais ideais.

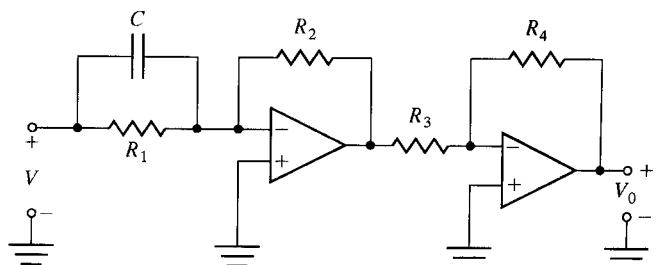
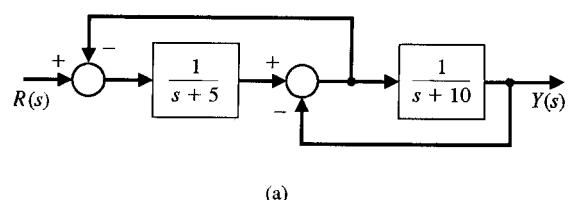


Fig. E2.27 Circuito com amplificadores operacionais.

**E2.28** Um sistema é mostrado na Fig. E2.28(a).

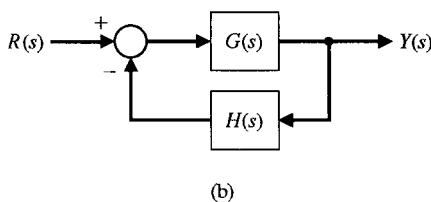
- (a) Determinar  $G(s)$  e  $H(s)$  do diagrama de blocos mostrado na Fig. E2.28(b) que são equivalentes aos do diagrama de blocos da Fig. E2.28(a).



(a)

Fig. E2.28 (a)

(b) Determinar  $Y(s)/R(s)$  para a Fig. E2.28(b).



(b)

Fig. E2.28 (b)

**E2.29** Um sistema está mostrado na Fig. E2.29.

(a) Determinar a função de transferência a malha fechada  $Y(s)/R(s)$ , quando  $G(s) = 24/(s^2 + 30s + 176)$ .

(b) Determinar  $Y(s)$  quando a entrada  $r(t)$  for um degrau unitário.  
(c) Determinar  $y(t)$  e traçar o gráfico correspondente, mostrando também o degrau desejado de entrada.

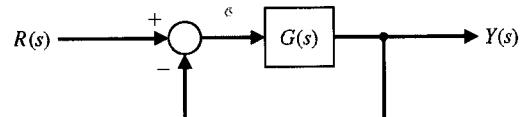


Fig. E2.29

**E2.30** Determinar os resíduos para a expansão de  $V(s)$  em frações parciais através de (a) cálculo numérico e (b) cálculo gráfico no plano s:

$$V(s) = \frac{540}{s^2 + 8s + 540}.$$

## PROBLEMAS

(Os problemas requerem uma extensão dos conceitos do capítulo para novas situações.)

**P2.1** Um circuito elétrico está mostrado na Fig. P2.1. Obter um conjunto de equações íntegro-diferenciais simultâneas que representem a rede.

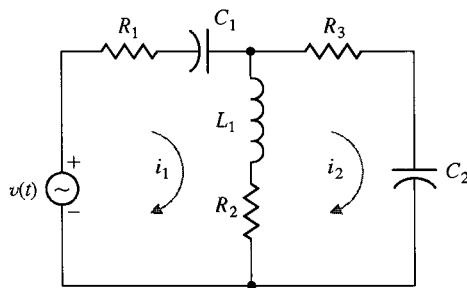


Fig. P2.1 Circuito elétrico.

**P2.2** Um amortecedor de vibrações mecânicas está mostrado na Fig. P2.2. Este sistema é representativo de muitas situações envolvendo a vibração de máquinas contendo componentes desbalanceados. Os parâmetros  $M_1$  e  $k_{12}$  podem ser escolhidos de tal modo que a massa principal  $M_1$  não vibre quando  $F(t) = a \sen \omega_0 t$ . (a) Esboçar o circuito elétrico análogo baseado na analogia força-corrente. (b) Obter as equações diferenciais que descrevem o sistema.

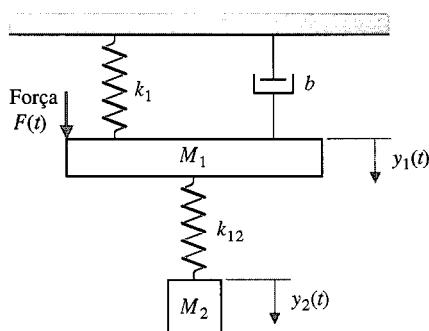


Fig. P2.2 Amortecedor de vibrações.

**P2.3** Um sistema mola-massa acopladas está mostrado na Fig. P2.3. Admite-se que as massas e molas são iguais. (a) Esboçar um cir-

cuito elétrico análogo baseado na analogia força-corrente. (b) Obter as equações diferenciais que descrevem o sistema.

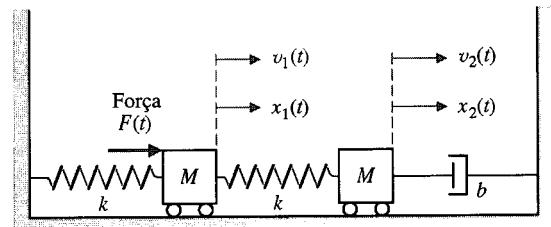


Fig. P2.3 Sistema de duas massas.

**P2.4** Um amplificador não-linear pode ser descrito pela seguinte curva característica:

$$v_o(t) = \begin{cases} v_{in}^2 & v_{in} \geq 0 \\ -v_{in}^2 & v_{in} < 0 \end{cases}$$

O amplificador será operado sobre uma faixa de valores para  $v_{in}$  de  $\pm 0,5$  volt em torno do ponto de operação. Descrever o amplificador por meio de uma aproximação linear (a) quando o ponto de operação for  $v_{in} = 0$ ; e (b) quando o ponto de operação for  $v_{in} = 1$  volt. Obter o esboço da função não-linear e a aproximação para cada caso.

**P2.5** O escoamento de um fluido através de um orifício pode ser representado pela equação não-linear

$$Q = K(P_1 - P_2)^{1/2},$$

onde as variáveis são mostradas na Fig. P2.5 e  $K$  é uma constante [2]. (a) Determinar uma aproximação linear para a equação de escoamento do fluido. (b) O que acontece com a aproximação obtida na parte (a) se o ponto de operação for  $P_1 - P_2 = 0$ ?

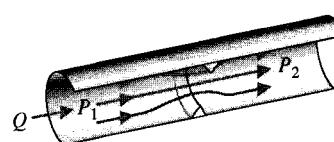


Fig. P2.5 Escoamento através de orifício.

**P2.6** Usando a transformação de Laplace, obter a corrente  $I_2(s)$  do Problema 2.1. Admitir que todas as correntes iniciais são iguais

a zero, que a tensão inicial nos terminais do capacitor  $C_1$  é zero,  $v(t)$  é zero e a tensão inicial nos terminais do capacitor  $C_2$  é 10 volts.

- P2.7** Obter a função de transferência do circuito diferenciador mostrado na Fig. P2.7.

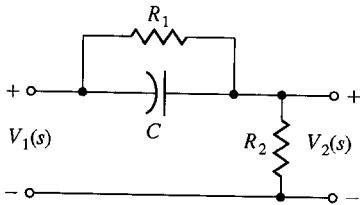


Fig. P2.7 Circuito diferenciador.

- P2.8** Estruturas em T são usadas freqüentemente como filtro em sistemas de controle de corrente alternada [8]. A Fig. P2.8 mostra um destes circuitos em T. Mostrar que a função de transferência da rede é

$$\frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1 + 2R_1Cs + R_1R_2C^2s^2}{1 + (2R_1 + R_2)Cs + R_1R_2C^2s^2}.$$

Esoque o diagrama de pólos e zeros quando  $R_1 = 0,5$ ,  $R_2 = 1$  e  $C = 0,5$ .

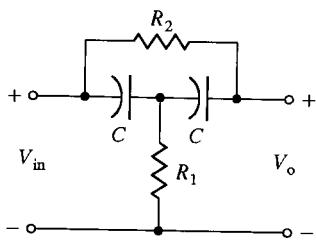


Fig. P2.8 Estrutura em T.

- P2.9** Determinar a função de transferência  $X_1(s)/F(s)$  para o sistema mola-massa acopladas do Problema 2.3. Esboce o diagrama de pólos e zeros no plano  $s$  para baixo amortecimento quando  $M = 1$ ,  $b/k = 1$  e

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{kM}} = 0,1.$$

- P2.10** Determinar a função de transferência  $Y_1(s)/F(s)$  para o sistema amortecedor de vibrações do Problema P2.2. Determinar os valores de parâmetros  $M_2$  e  $k_{12}$  tais que a massa  $M_1$  não vibre quando  $F(t) = a \operatorname{sen} \omega_0 t$ .

- P2.11** Amplificadores rotativos são freqüentemente usados em sistemas eletromecânicos que requeiram grandes amplificações de

potência [18, 19]. O amplidine é um amplificador de potência rotativo. Na Fig. P2.11 estão mostrados um amplidine e um servomotor. Obter a função de transferência  $\theta(s)/V_c(s)$  e desenhar o diagrama de blocos do sistema. Admitir  $v_d = k_2 i_q$  e  $v_q = k_1 i_c$ .

- P2.12** Um sistema de escoamento de fluido está mostrado na Fig. P2.12, onde um fluido incompressível está alimentando um reservatório aberto. Pode-se supor que a variação na vazão de saída  $\Delta Q_2$  seja proporcional à variação da altura de coluna  $\Delta H$ . Em estado estacionário,  $Q_1 = Q_2$  e  $Q_2 = kH^{1/2}$ . Usando uma aproximação linear, obter a função de transferência do reservatório,  $\Delta Q_2(s)/\Delta Q_1(s)$  [19].

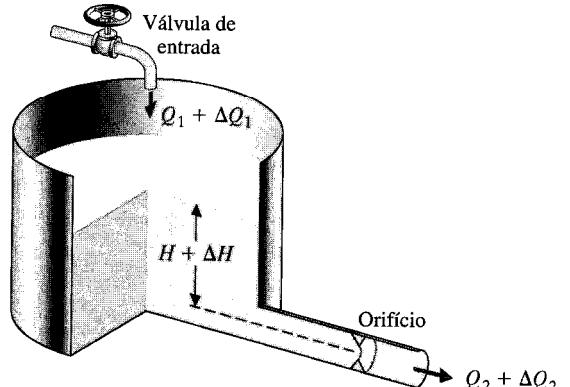


Fig. P2.12 Sistema de escoamento de fluido.

- P2.13** Um sistema de controle a malha aberta eletromecânico está mostrado na Fig. P2.13. O gerador, acionado com velocidade constante, fornece a tensão de campo para o motor. O motor possui uma inércia  $J_m$  e um atrito viscoso  $b_m$  nos mancais. Obter a função de transferência  $\theta_L(s)/V_f(s)$  e desenhar um diagrama de blocos do sistema. A tensão do gerador,  $v_g$ , pode ser suposta proporcional à corrente de campo,  $i_f$ .

- P2.14** Uma carga rotativa é conectada, através de um sistema de engrenagens, a um motor elétrico CC controlado pelo campo. Supõe-se que o motor seja linear. Ao se fazer um teste aplicando uma tensão constante de 80 V nos terminais de alimentação do motor, constata-se que a carga alcança uma velocidade de 1 rad/s em 1/2 s. A velocidade de saída em estado estacionário é de 2,4 rad/s. Determinar a função de transferência do motor,  $\theta(s)/V_f(s)$  em rad/V. A indutância do campo pode ser desprezada (ver Fig. 2.17). Observe, também, que a aplicação de 80 V aos terminais de alimentação do motor corresponde a um degrau de entrada com 80 V de magnitude.

- P2.15** Considere-se o sistema massa-mola esboçado na Fig. P2.15. Determinar uma equação diferencial que descreva o movimento da massa  $m$ . Obter a resposta do sistema a um deslocamento inicial  $x(0) = 1$ .

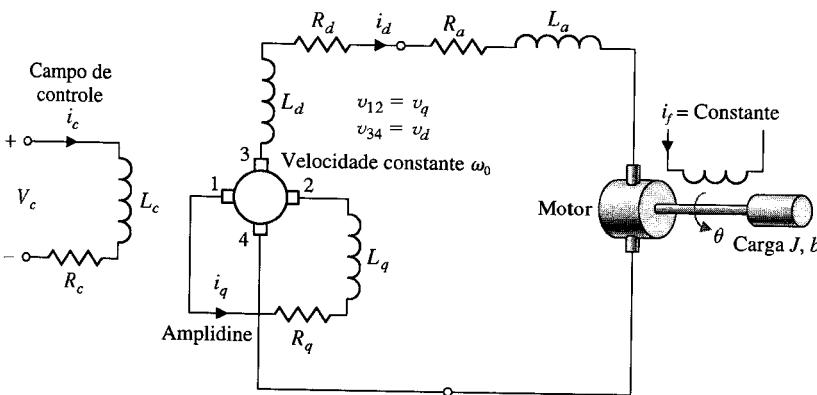


Fig. P2.11 Amplidine e motor controlado pela armadura.

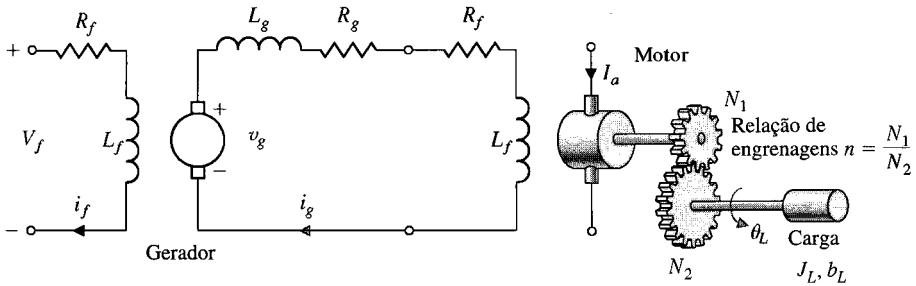


Fig. P2.13 Motor e gerador.

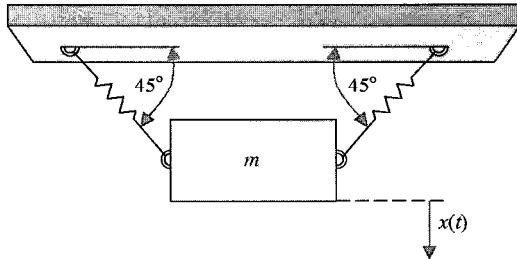


Fig. P2.15 Sistema suspenso massa-mola.

**P2.16** Obter um diagrama de fluxo de sinal para representar o seguinte conjunto de equações algébricas onde  $x_1$  e  $x_2$  são consideradas as variáveis dependentes e 6 e 11 são as entradas:

$$x_1 + 1,5x_2 = 6, \quad 2x_1 + 4x_2 = 11.$$

Determinar o valor de cada uma das variáveis dependentes usando a fórmula do ganho. Depois de resolver para  $x_1$  por meio da fórmula de Mason, verifique a solução através da regra de Cramer.

**P2.17** Um sistema mecânico, mostrado na Fig. P2.17, é submetido a um deslocamento conhecido  $x_3(t)$  com respeito à referência. (a) Determinar as duas equações independentes do movimento. (b) Obter as equações do movimento em termos da transformada de Laplace, considerando que as condições iniciais sejam nulas. (c) Esboçar um diagrama de fluxo de sinal representando as equações do sistema. (d) Obter a relação entre  $X_1(s)$  e  $X_3(s)$ ,  $T_{13}(s)$ , usando a fórmula de Mason para o ganho do diagrama de fluxo de sinal. Compare o trabalho necessário para obter  $T_{13}(s)$  pelo método de matrizes com o do uso da fórmula de Mason.

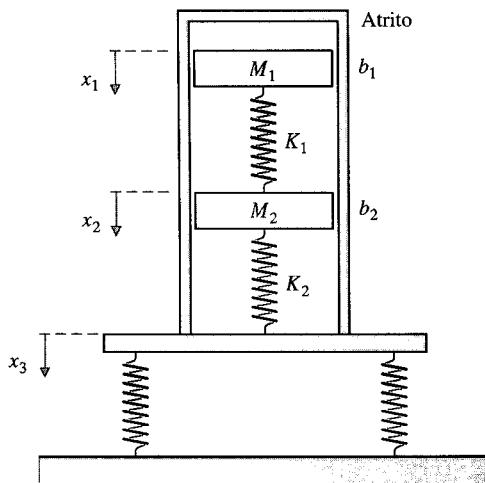


Fig. P2.17 Sistema mecânico.

**P2.18** Uma rede LC em cascata está mostrada na Fig. P2.18. Pode-se escrever as equações que descrevem a rede como a seguir:

$$\begin{aligned} I_1 &= (V_1 - V_a)Y_1, & V_a &= (I_1 - I_a)Z_2, \\ I_a &= (V_a - V_2)Y_3, & V_2 &= I_aZ_4. \end{aligned}$$

Construir um diagrama de fluxo de sinal a partir das equações e determinar a função de transferência  $V_2(s)/V_1(s)$ .

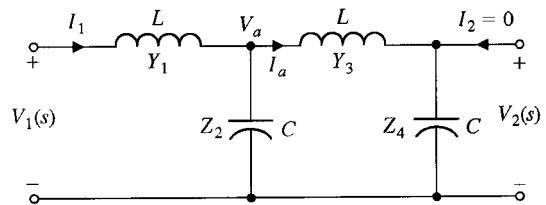
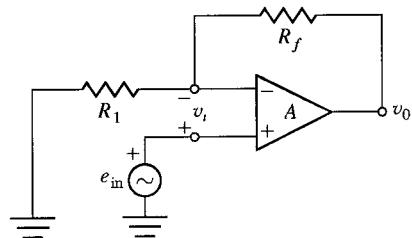
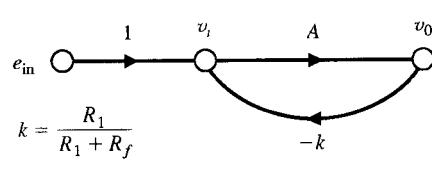


Fig. P2.18 Rede LC em cascata.

**P2.19** O amplificador operacional básico não-inversor está mostrado na Fig. P2.19(a) e a representação das equações do circuito sob a forma de diagrama de fluxo de sinal está mostrada na Fig. P2.19(b) [8]. (a) Escrever as equações de tensão e verificar a representação no diagrama de fluxo de sinal. (b) Usando o diagrama de fluxo de sinal, calcular o ganho do amplificador e verificar que  $T(s) = (R_f + R_f)/R_1$  quando  $A \gg 10^3$ .



(a)

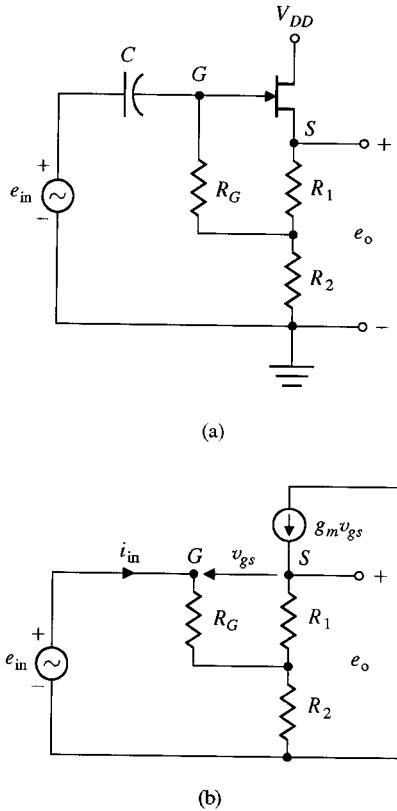


(b)

Fig. P2.19 Circuito não-inversor com amplificador operacional.

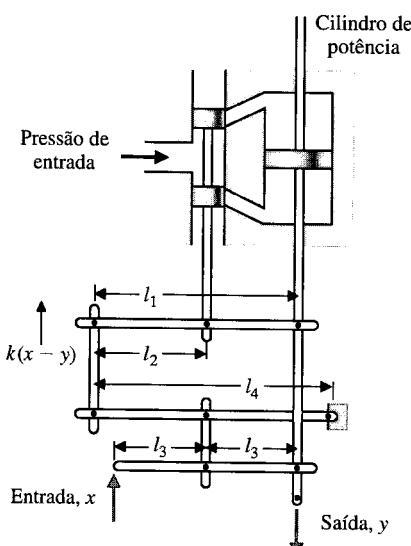
**P2.20** O amplificador seguidor de tensão oferece uma baixa impedância de saída e um ganho essencialmente unitário. O diagrama do circuito está mostrado na Fig. P2.20(a) e o modelo de pequeno sinal está mostrado na Fig. P2.20(b). Este circuito utiliza um FET (transistor de efeito de campo) e fornece um ganho aproximadamente unitário. Admitir que  $R_2 \gg R_1$  para fins de polarização e que  $R_g \gg R_2$ . (a) Calcular o ganho do amplificador. (b) Calcular

lar o ganho quando  $g_m = 2000 \mu\text{mhos}$  e  $R_s = 10 \text{ Kohms}$ , sendo  $R_s = R_1 + R_2$ . (c) Esboçar um diagrama de fluxo de sinal que representa as equações do circuito.



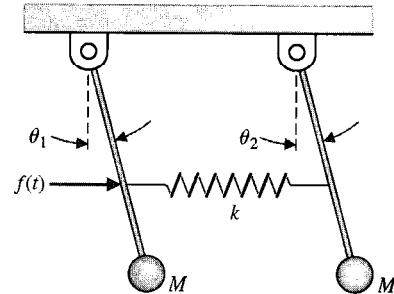
**Fig. P2.20** O amplificador seguidor de tensão ou de dreno comum usando um FET.

**P2.21** Um servomecanismo hidráulico com retroação mecânica está mostrado na Fig. P2.21 [19]. O êmbolo de potência possui uma área igual a  $A$ . Ao deslocar a haste da válvula de uma pequena quantidade  $\Delta z$ , o óleo fluirá para o cilindro a uma taxa  $p \cdot \Delta z$ , onde  $p$  é o coeficiente do orifício. Admite-se que a pressão de entrada do óleo seja constante. (a) Determinar um diagrama de fluxo de sinal a malha fechada para este sistema mecânico. (b) Obter a função de transferência a malha fechada  $Y(s)/X(s)$ .



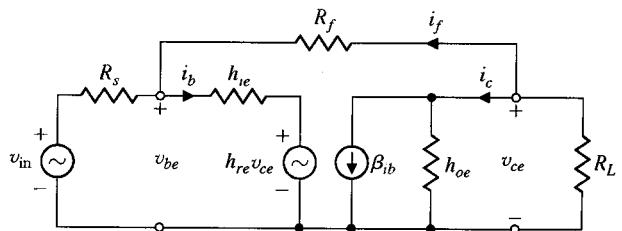
**Fig. P2.21** Servomecanismo hidráulico.

**P2.22** A Fig. P2.22 mostra dois pêndulos suspensos através de pivôs sem atrito e interconectados por uma mola ligada aos pontos médios [1]. Considerar que o pêndulo possa ser representado por uma massa  $M$  na extremidade de uma barra sem massa de comprimento  $L$ . Considerar, também, que os deslocamentos são pequenos e que se podem usar aproximações para  $\sin\theta$  e  $\cos\theta$ . A mola está situada entre os pontos médios das barras e fica não distendida quando  $\theta_1 = \theta_2$ . A força de entrada é representada por  $f(t)$ , que influencia somente a barra da esquerda. (a) Obter as equações do movimento e esboçar um diagrama de fluxo de sinal para elas. (b) Determinar a função de transferência  $T(s) = \theta_1(s)/F(s)$ . (c) Esboçar a localização de pólos e zeros de  $T(s)$  no plano  $s$ .



**Fig. P2.22** Cada uma das barras possui comprimento  $L$  e as extremidades da mola estão situadas em  $L/2$ .

**P2.23** Um circuito equivalente para pequenos sinais relativo a um amplificador a transistor na configuração de emissor comum está mostrado na Fig. P2.23. O circuito amplificador inclui um resistor de retroação  $R_f$ . Obter um modelo em forma de diagrama de fluxo de sinal para o amplificador com retroação e determinar a relação entrada-saída  $v_{ce}/v_{in}$ .



**Fig. P2.23** Amplificador de emissor comum.

**P2.24** Um amplificador de tensão transistorizado de dois estágios, com retroação, está mostrado na Fig. P2.24(a). Este circuito equivalente para corrente alternada omite os resistores de polarização e os capacitores em derivação. A Fig. P2.24(b) mostra uma representação deste circuito sob a forma de diagrama de fluxo de sinal. Este diagrama de fluxo despreza os efeitos de  $h_{re}$ , que é usualmente uma aproximação precisa, e considera que  $(R_2 + R_L) \gg R_1$ . (a) Determinar o ganho de tensão  $e_o/e_{in}$ . (b) Determinar o ganho de corrente  $i_c/i_{b1}$ . (c) Determinar a impedância de entrada  $e_{in}/i_{b1}$ .

**P2.25** Quase sempre esquecido é o fato de que H. S. Black, que se notabilizou pelo desenvolvimento de um amplificador com retroação negativa em 1927, tenha inventado três anos antes uma técnica conhecida como correção por ação à frente (*feedforward*) [20]. Experimentos recentes têm mostrado que esta técnica oferece o potencial para produzir uma excelente estabilização de amplificadores. O amplificador de Black está mostrado na Fig. P2.25(a) na forma em que foi registrada em 1924. O diagrama de fluxo de sinal está mostrado na Fig. P2.25(b). Determinar a função de transferência entre a saída  $Y(s)$  e a entrada  $R(s)$  e entre a saída e uma perturbação  $D(s)$ .  $G(s)$  é usada para o amplificador representado por  $\mu$  na Fig. P2.25(a).

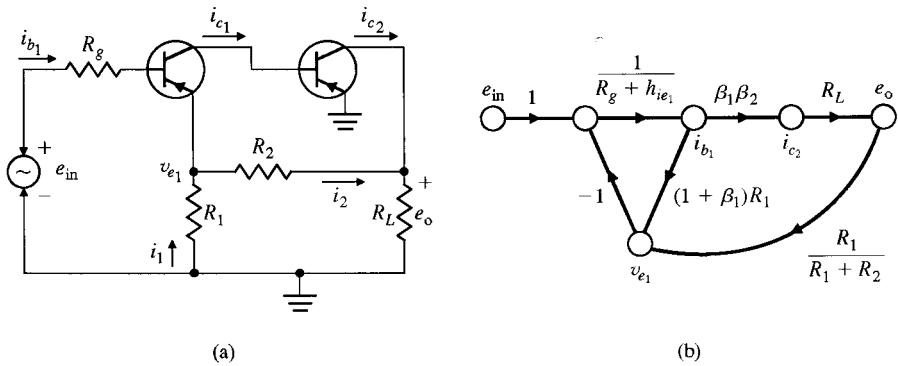


Fig. P2.24 Amplificador com retroação.

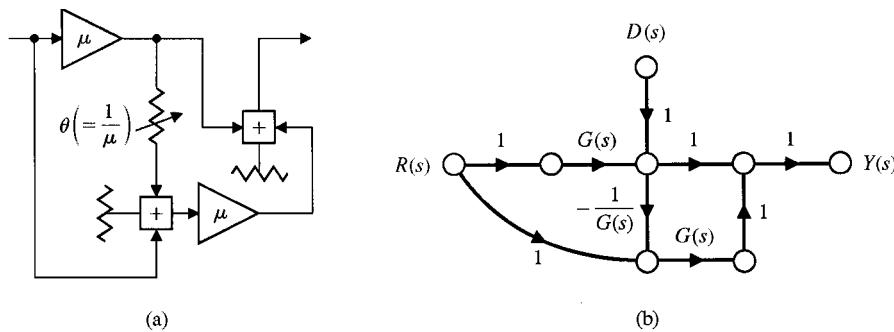


Fig. P2.25 Amplificador de H. S. Black.

**P2.26** Um robô apresenta uma flexibilidade significativa nos membros do braço com uma carga pesada na garra [6, 21]. Um modelo de duas massas do robô está mostrado na Fig. P2.26. Determinar a função de transferência  $Y(s)/F(s)$ .

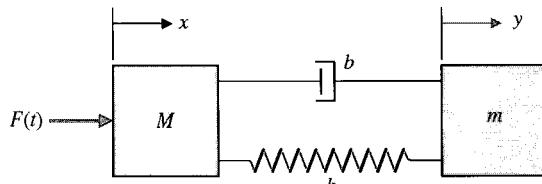


Fig. P2.26 Modelo mola-massa-amortecedor de um braço robótico.

**P2.27** A levitação magnética de trens propicia uma alternativa de alta velocidade e muito baixo atrito para rodas de aço sobre trilhos

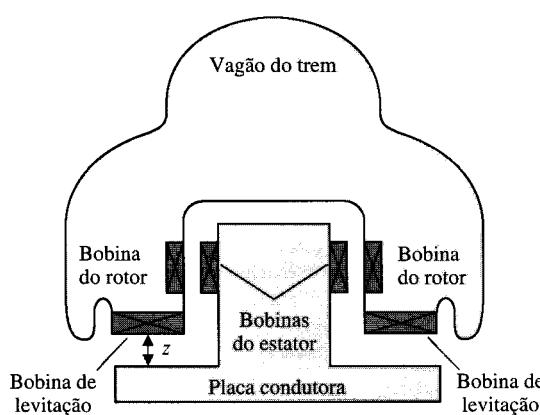


Fig. P2.27 Vista em corte do trem.

de aço. O trem flutua sobre um colchão de ar, como está mostrado na Fig. P2.27 [27]. A força de levitação  $F_L$  é controlada pela corrente  $i$  nas bobinas de levitação e pode ser aproximada por

$$F_L = k \frac{i^2}{z^2},$$

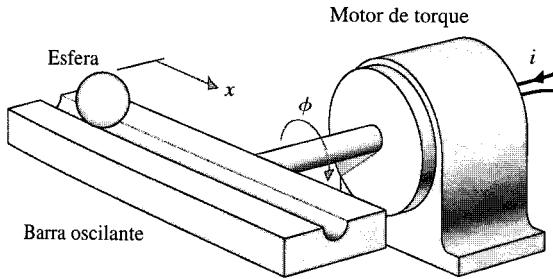
onde  $z$  é o espaçamento de ar. Esta força é oposta à força para baixo  $F = mg$ . Determinar as relações linearizadas entre o espaçamento de ar  $z$  e a corrente de controle nas proximidades da condição de equilíbrio.

**P2.28** Um modelo multimalhas de um sistema ecológico urbano deve incluir as seguintes variáveis: número de pessoas na cidade ( $P$ ), modernização ( $M$ ), migração para a cidade ( $C$ ), instalações para saneamento ( $S$ ), número de doenças ( $D$ ), bactérias/área ( $B$ ), e quantidade de lixo por área ( $G$ ), onde o símbolo para a variável é dado entre parênteses. Os seguintes laços de causa e efeito são considerados como hipóteses:

1.  $P \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow P$
2.  $P \rightarrow M \rightarrow C \rightarrow P$
3.  $P \rightarrow M \rightarrow S \rightarrow D \rightarrow P$
4.  $P \rightarrow M \rightarrow S \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow P$

Esboçar um diagrama de fluxo de sinal para estas relações de causalidade, usando símbolos apropriados para os ganhos. Indicar se supõe-se ser positivo ou negativo o ganho da transmissão. Por exemplo, o elo causal de  $S$  para  $B$  é negativo porque um aumento das instalações de saneamento conduz a uma redução do número de bactérias/área. Quais das quatro malhas são laços de retroação positiva e quais são laços de retroação negativa?

**P2.29** Deseja-se equilibrar uma esfera que rola sobre uma barra oscilante como está mostrado na Fig. P2.29. Admite-se que a corrente de entrada  $i$  no motor controla o torque com atrito desprezível. Supõe-se que a barra possa ser equilibrada próximo à horizontal ( $\phi = 0$ ); tem-se assim um pequeno desvio  $\phi$ . Determinar a função de transferência  $X(s)/I(s)$  e desenhar um diagrama



**Fig. P2.29** Barra oscilante e esfera.

de blocos ilustrando a função de transferência e mostrando  $\phi(s)$ ,  $X(s)$  e  $I(s)$ .

- P2.30** O elemento de medida ou sensor em sistemas com retroação é importante para a exatidão do sistema [6]. A resposta dinâmica do sensor é, quase sempre, importante para a exatidão do sistema. A maioria dos elementos sensores possui uma função de transferência do tipo

$$H(s) = \frac{k}{\tau s + 1}.$$

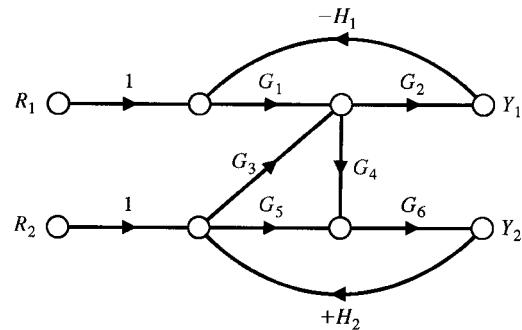
Investigar vários sensores existentes atualmente e determinar a exatidão disponível e a constante de tempo do sensor. Considere-se dois dentre os seguintes sensores: (1) posição linear, (2) temperatura com um termistor, (3) medição de tensão mecânica, (4) pressão.

- P2.31** Um sistema de controle de um carretel de cabo utiliza um tacômetro para medir a velocidade com que o cabo deixa o carretel. A saída do tacômetro é usada para controlar a velocidade do motor à medida que o cabo é desenrolado. O sistema está mostrado na Fig. P2.31. O raio do carretel,  $R$ , é de 4 m quando ele está cheio e de 2 m quando vazio. O momento de inércia do carretel é  $I = 18,5R^4 - 221$ . A taxa de variação do raio é

$$\frac{dR}{dt} = \frac{-D^2\dot{\omega}}{2\pi W},$$

onde  $W$  = largura do carretel e  $D$  = diâmetro do cabo. A velocidade real do cabo é  $v(t) = R\dot{\omega}$ . A velocidade desejada para o cabo é de 50 m/s. Desenvolver em computador digital uma simulação deste sistema e obter a resposta da velocidade durante 20 segundos para três valores de ganho  $K = 0,2, 0,4$  e  $0,6$ . A velocidade angular do carretel  $\dot{\omega} = d\theta/dt$  é igual a  $1/I$  vezes a integral do torque. Observe-se que a inércia varia com o tempo à medida que o cabo vai sendo desenrolado. Portanto, uma equação na simulação levará em conta esta variação. Selecionar o ganho  $K$  que limita a ultrapassagem a menos de 9% e ainda assim atinge a resposta mais rápida. Supor  $W = 2,0$ ,  $D = 0,1$  e  $R = 3,5$  em  $t = 0$ .

- P2.32** Um sistema de controle com acoplamento entre duas entradas e



**Fig. P2.32** Sistema com acoplamento entre variáveis.

duas saídas está mostrado na Fig. P2.32. Resolver para  $Y_1(s)/R_1(s)$  e  $Y_2(s)/R_1(s)$ , quando  $R_2 = 0$ .

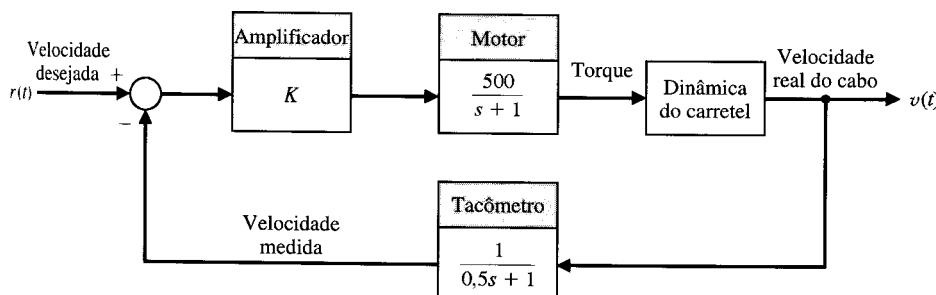
- P2.33** Um sistema consiste de dois motores elétricos que são acoplados por meio de uma correia contínua flexível. A correia também passa sobre um braço oscilante que é instrumentado para permitir medir a velocidade da correia e a tensão de esticamento desta. O problema de controle consiste em regular a velocidade da correia e a tensão variando-se os torques dos motores.

Um exemplo de um sistema prático semelhante ao mostrado ocorre nos processos de manufatura de fibras têxteis quando o fio é enrolado de um carretel para outro em alta velocidade. Entre os dois carretéis o fio é processado de uma forma que requer que a velocidade e a tensão sejam controladas entre limites definidos. Um modelo do sistema está mostrado na Fig. P2.33. Obter  $Y_2(s)/R_1(s)$ . Determinar uma relação para o sistema que fará  $Y_2$  independente de  $R_1$ .

- P2.34** Determinar a função de transferência  $Y(s)/R(s)$  para o sistema de controle de velocidade em marcha lenta de um motor de combustão interna com injeção de combustível mostrado na Fig. P2.34.

- P2.35** O sistema de suspensão de uma das rodas de uma camionete clássica está ilustrado na Fig. P2.35. A massa do veículo é  $m_1$  e a massa da roda,  $m_2$ . A mola da suspensão possui uma constante de mola  $k_1$  e o pneu, uma constante de mola  $k_2$ . A constante de amortecimento do amortecedor é  $b$ . Obter a função de transferência  $Y_1(s)/X(s)$ , a qual representa a resposta do veículo aos solavancos devidos a irregularidades da estrada.

- P2.36** Um sistema de controle com retroação tem a estrutura mostrada na Fig. P2.36. Determinar a função de transferência a malha fechada  $Y(s)/R(s)$  (a) através da manipulação do diagrama de blocos e (b) usando a fórmula de Mason para o ganho de um diagrama de fluxo de sinal. (c) Selecionar os ganhos  $K_1$  e  $K_2$  de modo que a resposta a malha fechada a uma entrada em degrau seja criticamente amortecida com as duas raízes em  $s = -10$ . (d) Traçar o gráfico da resposta criticamente amortecida a um degrau unitário. Qual o tempo requerido para que a resposta ao degrau atinja 90% do seu valor final?



**Fig. P2.31** Sistema de controle de um carretel de cabo.

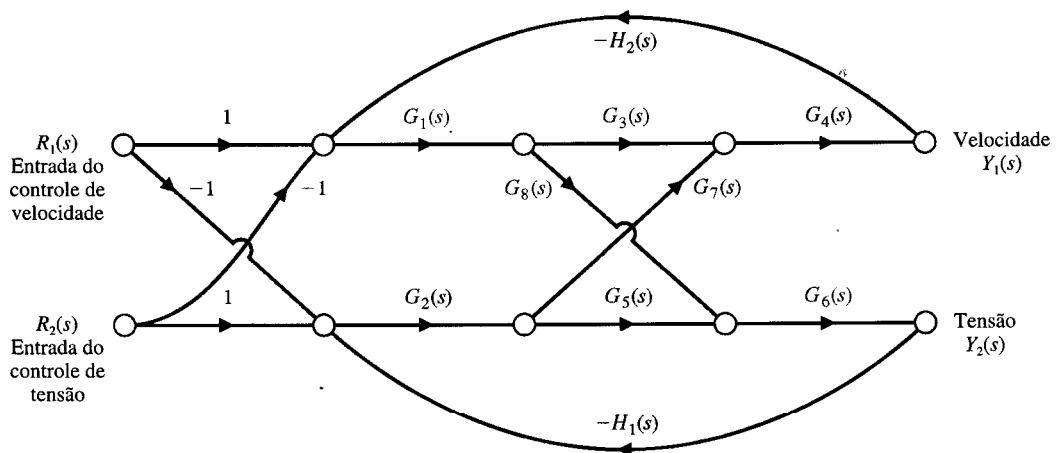


Fig. P2.33 Um modelo de acionamento acoplado de motores.

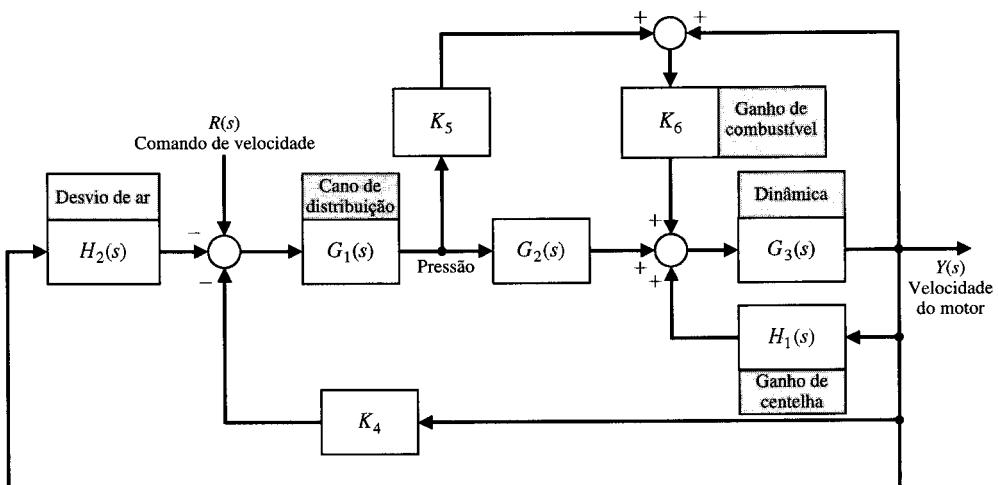


Fig. P2.34 Sistema de controle de velocidade de marcha lenta.

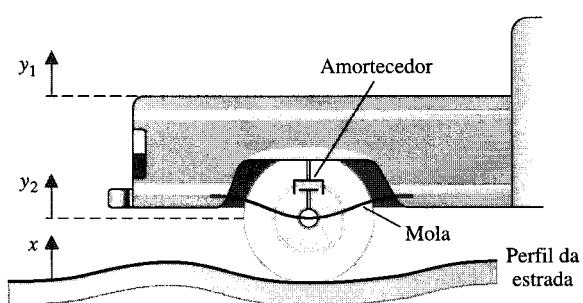


Fig. P2.35 Suspensão de uma camionete.

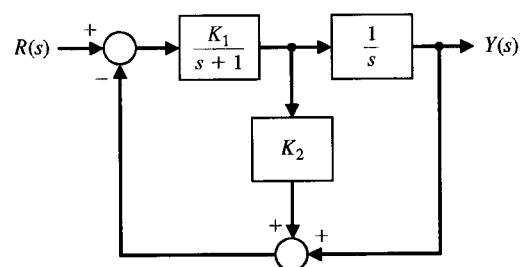


Fig. P2.36

**P2.37** Um sistema é representado pela Fig. P2.37. (a) Determinar a expansão em frações parciais e  $y(t)$  para uma excitação em rampe,  $r(t) = t$ ,  $t \geq 0$ . (b) Obter o gráfico de  $y(t)$  para a parte (a) e achar  $y(t)$  para  $t = 1,5s$ . (c) Determinar a resposta impulsional do sistema  $y(t)$ , para  $t \geq 0$ . (d) Obter o gráfico de  $y(t)$  para a parte (c) e achar  $y(t)$  para  $t = 1,5s$ .

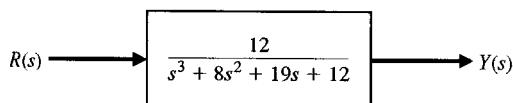


Fig. P2.37

**P2.38** Um sistema com duas massas está mostrado na Fig. P2.38 com uma força de entrada  $u(t)$ . Quando  $m_1 = m_2 = 1$  e  $K_1 = K_2 = 1$ , achar o conjunto de equações diferenciais que descrevem o sistema.

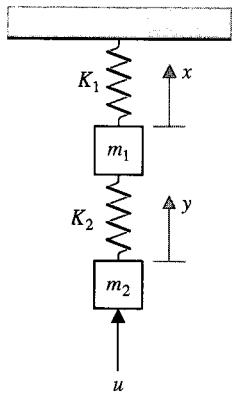


Fig. P2.38 Sistema com duas massas.

**P2.39** Um oscilador de inércia consiste de duas esferas de aço nas extremidades de uma haste esbelta e comprida, como está mostrado na Fig. P2.39. A haste está suspensa por meio de um fio fino que pode ser torcido com muitas voltas sem partir. O dispositivo pode ser torcido até 4.000 graus. Quanto tempo levará até que o movimento decaia para uma oscilação de somente 10 graus? Admitir que o fio possui uma constante de mola a torção de  $2 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m/rad}$  e que o coeficiente de atrito viscoso da esfera com o ar é  $2 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m/rad}$ . A esfera possui uma massa de 1 kg.

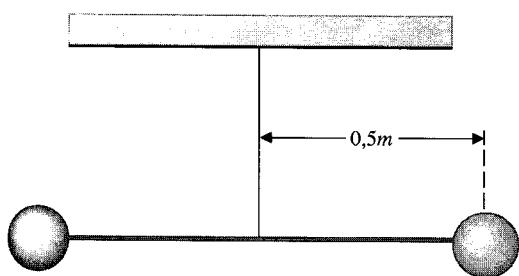


Fig. P2.39 Oscilador de fio torcido.

**P2.40** Para o circuito da Fig. P2.40, determinar a transformada de Laplace da tensão de saída  $V_0(s)$ . Admitir que o circuito está em estado estacionário para  $t < 0$ . Admitir que a chave se move instantaneamente do contacto 1 para o contacto 2, em  $t = 0$ .

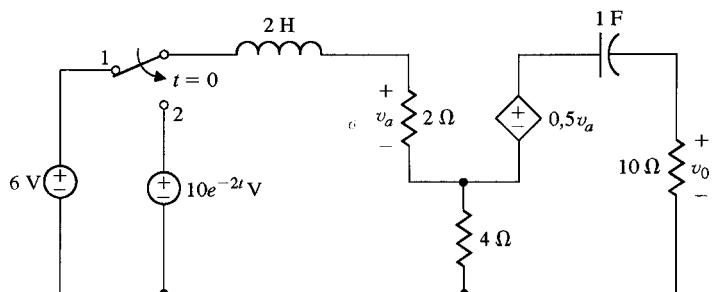


Fig. P2.40 Modelo de um circuito eletrônico.

**P2.41** Um dispositivo de amortecimento é utilizado para reduzir vibrações indesejadas de máquinas. Um líquido viscoso, tal como um óleo pesado, é colocado entre os volantes como está mostrado na Fig. P2.41. Quando a vibração se torna excessiva, o movimento relativo dos dois volantes cria o amortecimento. Quando o dispositivo estiver girando sem vibração, inexiste qualquer movimento relativo e não ocorre amortecimento. Obter  $\theta_1(s)$  e  $\theta_2(s)$ . Admitir que o eixo possui uma constante de mola  $K$  e que  $b$  é a constante de amortecimento do fluido. O torque de carga é  $T$ .

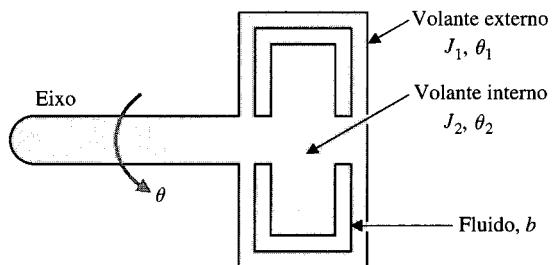


Fig. P2.41 Vista em corte de um dispositivo de amortecimento.

**P2.42** O controle lateral de um foguete com motor de tubeira móvel está mostrado na Fig. P2.42. O desvio lateral em relação a uma trajetória desejada é  $h$  e a velocidade axial do foguete é  $V$ . O torque de controle do motor é  $T_c$  e o torque perturbador é  $T_d$ . Deduzir as equações descritivas de um modelo linear do sistema e desenhar um diagrama de blocos com as funções de transferência apropriadas.

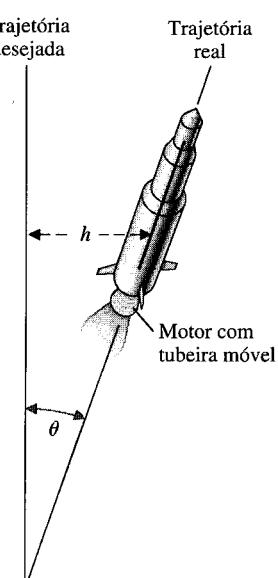


Fig. P2.42 Foguete com motor de tubeira móvel.

**P2.43** Em muitas aplicações, como a leitura de códigos de produtos em supermercados, impressão e manufatura, utiliza-se um dispositivo de varredura óptica (*scanner*) para ler códigos, como está mostrado na Fig. P2.43. Ao girar o espelho, produz-se uma força de atrito proporcional à sua velocidade angular. A constante de atrito viscoso é igual a  $0,04 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{rad}$  e o momento de inércia é igual  $0,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . A variável de saída é a velocidade angular,  $\omega(t)$ . (a) Obter a equação diferencial para o motor. (b) Achar a resposta do sistema quando o torque motor de entrada for um degrau unitário e a velocidade inicial em  $t = 0$  for igual a 0,5.

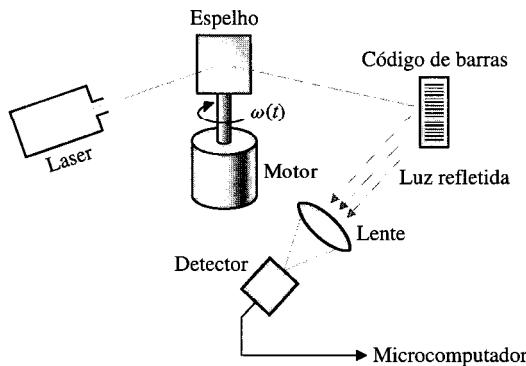


Fig. P2.43 Dispositivo de varredura óptica (*scanner*).

**P2.44** Um conjunto ideal de engrenagens está mostrado como o item 10 da Tabela 2.7. Desprezar a inércia e o atrito das engrenagens e admitir que o trabalho realizado por uma engrenagem seja igual ao realizado pela outra. Deduzir as relações dadas no item 10 da Tabela 2.7. Determinar, também, a relação entre os torques  $T_m$  e  $T_L$ .

**P2.45** Um conjunto ideal de engrenagens é conectado a uma carga constituída por um cilindro maciço, como está mostrado na Fig. P2.45. A inércia do eixo do motor e da engrenagem é  $J_m$ . Determinar (a) a inércia da carga  $J_L$  e (b) o torque no eixo do motor. Admitir que o atrito na carga é  $b_L$  e o atrito no eixo do motor é  $b_m$ . Admitir ainda que a densidade do disco de carga é  $\rho$ .

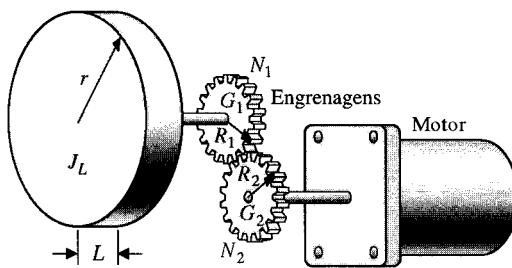


Fig. P2.45 Motor, engrenagens e carga.

**P2.46** Para utilizar a vantagem da força dos manipuladores robóticos e a vantagem intelectual dos seres humanos, tem sido examinada uma classe de manipuladores chamados **extensores** [23]. Um extensor é definido como um manipulador ativo usado por um ser humano para aumentar a força humana. O ser humano fornece uma entrada  $U(s)$ , como está mostrado na Fig. P2.46. O ponto terminal do extensor é  $P(s)$ . Determinar a saída  $P(s)$  devida a ambos os sinais  $U(s)$  e  $F(s)$  sob a forma

$$P(s) = T_1(s)U(s) + T_2(s)F(s).$$

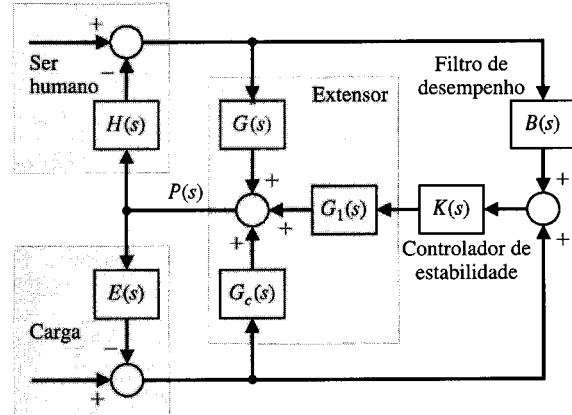


Fig. P2.46 Modelo de extensor.

**P2.47** Uma carga adicionada a um caminhão resulta em uma força  $F$  sobre a mola do suporte e o pneu se deforma como está mostrado na Fig. P2.47(a). O modelo para o movimento do pneu está mostrado na Fig. P2.47(b). Determinar a função de transferência  $X_1(s)/F(s)$ .

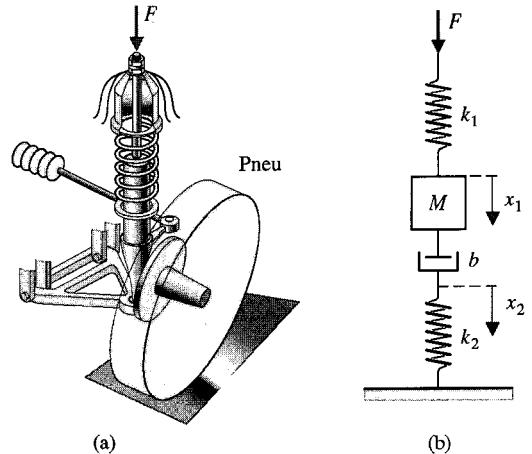


Fig. P2.47 Modelo de suporte de caminhão.

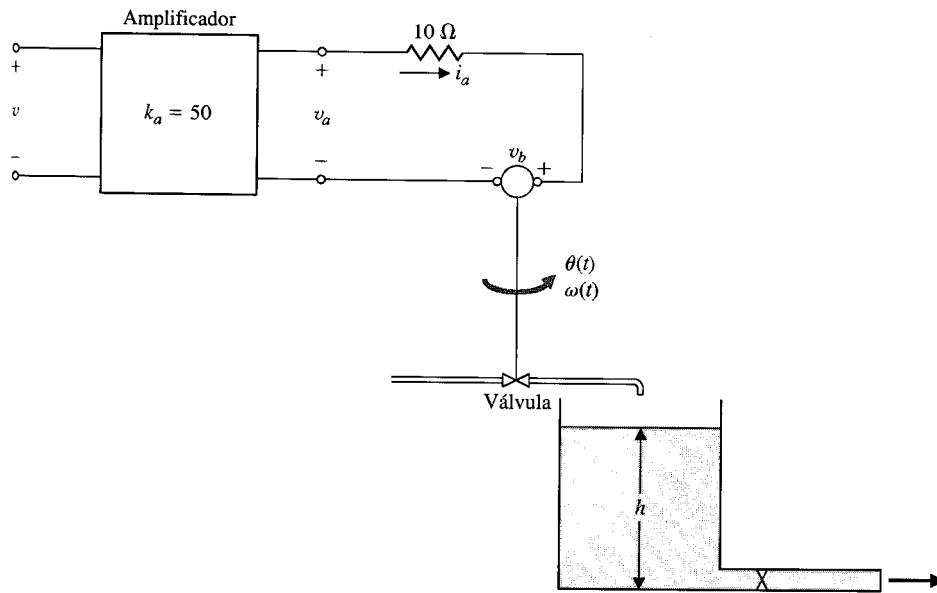
**P2.48** O nível de água,  $h(t)$ , é controlado por um sistema a malha aberta, como está mostrado na Fig. P2.48. Um motor CC controlado pela corrente de armadura  $i_a$  gira um eixo, que abre uma válvula. A indutância do motor CC é desprezível, isto é,  $L_a = 0$ . Igualmente, o atrito de rotação do eixo do motor e da válvula é desprezível, isto é,  $b = 0$ . A altura da água no reservatório é

$$h(t) = \int [1,6\theta(t) - h(t)]dt,$$

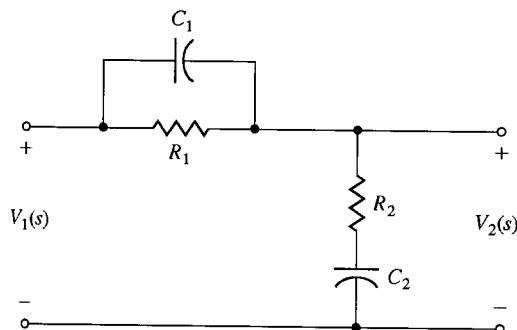
A constante do motor é  $K_m = 10$  e a inércia da árvore do motor e da válvula é  $J = 6 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Determinar (a) a equação diferencial para  $h(t)$  e  $v(t)$  e (b) a função de transferência  $H(s)/V(s)$ .

**P2.49** O circuito mostrado na Fig. P2.49 é chamado um filtro de avanço-atraso de fase e será usado no Cap. 10.

- Obter a função de transferência  $V_2(s)/V_1(s)$ .
- Determinar  $V_2(s)/V_1(s)$  quando  $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 200 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 1 \mu\text{F}$  e  $C_2 = 0,1 \mu\text{F}$ .
- Determinar a expansão em frações parciais de  $V_2(s)/V_1(s)$ .



**Fig. P2.48** Sistema de controle a malha aberta para o nível de água de um reservatório.



**Fig. P2.49** Filtro de avanço-atraso de fase.

**P2.50** Um sistema de controle a malha fechada está mostrado na Fig. P2.50.

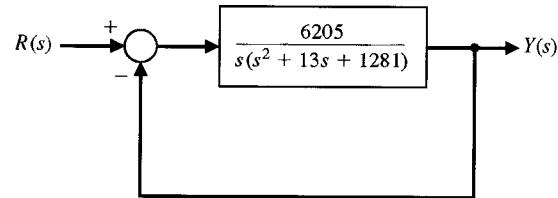
(a) Determinar a função de transferência

$$T(s) = Y(s)/R(s).$$

(b) Determinar os pólos e zeros de  $T(s)$ .

(c) Usar um degrau unitário de entrada,  $R(s) = 1/s$  e obter a expansão em frações parciais de  $Y(s)$  e o valor dos resíduos.

(d) Traçar o gráfico de  $y(t)$  e discutir o efeito dos pólos reais e complexos de  $T(s)$ . Dominarão a resposta os pólos reais ou os complexos?



**Fig. P2.50**

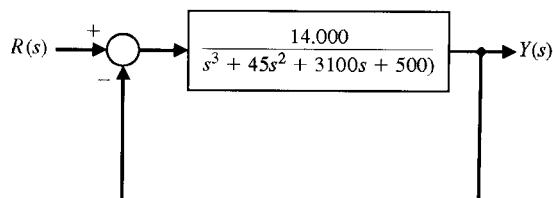
**P2.51** Um sistema de controle a malha fechada está mostrado na Fig. P2.51.

(a) Determinar a função de transferência  $T(s) = Y(s)/R(s)$ .  
 (b) Determinar os pólos e zeros de  $T(s)$ .

(c) Usar um degrau unitário de entrada,  $R(s) = 1/s$  e obter a expansão em frações parciais de  $Y(s)$  e o valor dos resíduos.

(d) Traçar o gráfico de  $y(t)$  e discutir o efeito dos pólos reais e complexos de  $T(s)$ . Dominarão a resposta os pólos reais ou os complexos?

(e) Prever o valor final de  $y(t)$  para a entrada em degrau unitário.



**Fig. P2.51**

## PROBLEMAS AVANÇADOS

**PA2.1** Um motor CC controlado pela armadura está acionando uma carga. A tensão de entrada é 5 V. A velocidade no instante  $t = 2$  s é de 30 rad/s e a velocidade de regime estacionário é de 70 rad/s quando  $t \rightarrow \infty$ . Determinar a função de transferência  $\omega(s)/V(s)$ .

**PA2.2** Um sistema tem um diagrama de fluxo de sinal como está mostrado na Fig. PA2.2. Determinar a função de transferência.

$$T(s) = \frac{Y_2(s)}{R_1(s)}.$$

Deseja-se desacoplar  $Y_2(s)$  de  $R_1(s)$  obtendo  $T(s) = 0$ . Selecionar  $G_5(s)$  em termos de outro  $G_i(s)$  de modo a obter o desacoplamento.

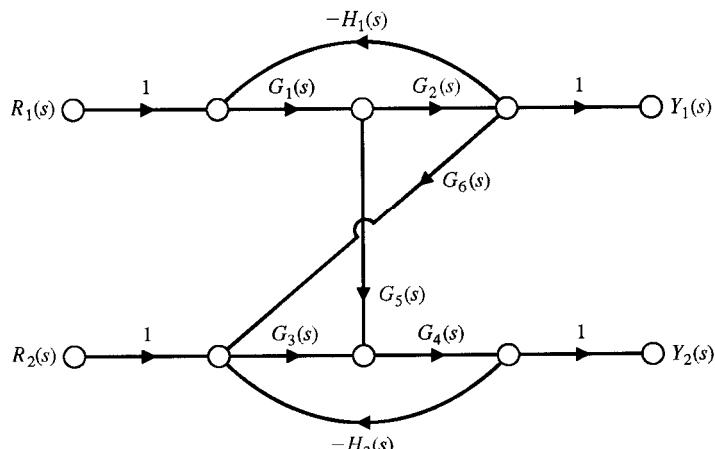


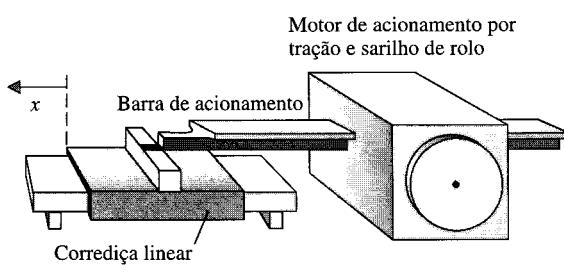
Fig. PA2.2

## PROBLEMAS DE PROJETO

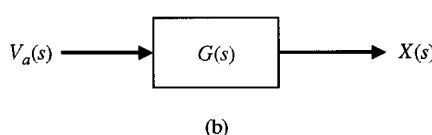
**PPC2.1** Deseja-se posicionar com elevada precisão a mesa de uma máquina, como está mostrado na Fig. PPC2.1. Um motor de acionamento por tração, com sarilho de rolo, possui algumas características desejáveis em comparação com o dispositivo mais comum de fuso com esferas recirculantes. O acionador por tração apresenta baixo atrito e não possui folgas. Entretanto, é sensível a perturbações. Desenvolver um modelo do acionador por tração mostrado na Fig. PPC2.1(a) com os parâmetros dados na Tabela PPC2.1. O acionador utiliza um motor CC controlado pela armadura com um sarilho de rolo associado ao eixo. A barra acionadora movimenta uma corredeira linear deslizante. A corredeira usa um mancal de ar, de modo que o atrito seja desprezível. Neste problema está sendo determinado o modelo a malha aberta, Fig. PPC2.1(b), e sua função de transferência. A malha de retroação será introduzida posteriormente.

**TABELA PPC2.1 Valores Típicos de Parâmetros para Motor CC Controlado pela Armadura e Sarilho de Rolo e Corredeira Deslizante**

$M_s$	Massa da corredeira	5,693 kg
$M_b$	Massa da barra de acionamento	6,96 kg
$J_m$	Inércia do rolo, haste, motor e tacômetro	$10,91 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
$r$	Raio do rolo	$31,75 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
$b_m$	Amortecimento do motor	0,268 N-m-s/rad
$K_m$	Constante de torque	0,8379 N-m/amp
$K_b$	Constante de força contra-eletromotriz	0,838 V-s/rad
$R_m$	Resistência do motor	1,36 Ω
$L_m$	Indutância do motor	3,6 mH



(a)



(b)

Fig. PPC2.1 (a) Motor tracionador, sarilho com rolamento, e corredeira linear. (b) Modelo em diagrama de blocos.

**PP2.1** Um sistema de controle está mostrado na Fig. PP2.1. As funções de transferência  $G_2(s)$  e  $H_2(s)$  são fixadas. Determinar as funções de transferência  $G_1(s)$  e  $H_1(s)$  de modo que a função de transferência a malha fechada  $Y(s)/R(s)$  seja exatamente igual a 1.

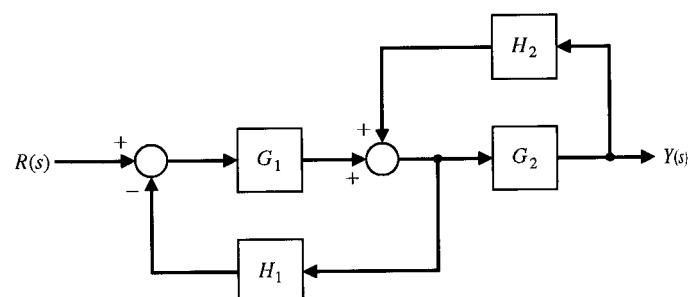


Fig. PP2.1 Escolha de funções de transferência.

**PP2.2** Um circuito de transmissão de um aparelho de televisão está representado pelo modelo da Fig. PP2.2. Selecionar a condutância desconhecida,  $G$ , de modo que a tensão,  $v$ , seja de 24 V. Cada condutância é dada em siemens (S).

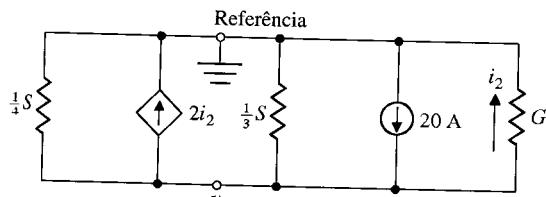


Fig. PP2.2 Circuito de transmissão de TV.

**PP2.3** Uma entrada  $r(t) = t$ ,  $t \geq 0$ , é aplicada a uma caixa preta com função de transferência  $G(s)$ . A resposta resultante na saída, quando todas as condições iniciais forem nulas, é

$$y(t) = 1 + \operatorname{sen} t + 2e^{-2t}, t \geq 0.$$

Determinar  $G(s)$  para este sistema.

**PP2.4** Um circuito com amplificador operacional que pode servir como filtro está mostrado na Fig. PP2.4. (a) Determinar a função de transferência do circuito, admitindo o amplificador operacional como sendo ideal. (b) Obter  $e_0(t)$  quando a entrada  $e_1(t) = At$ ,  $t \geq 0$ .

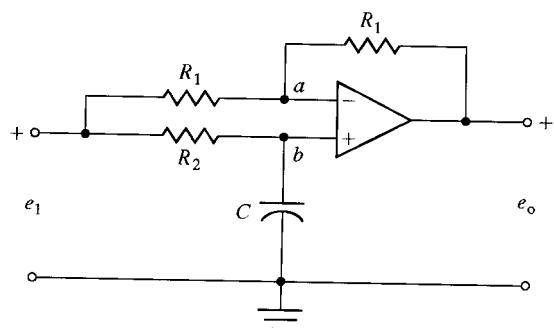


FIG. PP2.4 Circuito com amplificador operacional.



### PROBLEMAS COM MATLAB

**PM2.1** Considerem-se os polinômios

$$p(s) = s^2 + 2s + 1$$

$$q(s) = s + 1.$$

Calcule o seguinte usando o MATLAB

(a)  $p(s)q(s)$

(b) os pólos e zeros de  $G(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$

(c)  $p(-1)$

**PM2.2** Considere-se o sistema com retroação esboçado na Fig. PM2.2.

(a) Calcular a função de transferência a malha fechada usando as funções `series` e `cloop` e apresentar o resultado com a função `printsys`.

(b) Obter a resposta ao degrau unitário com a função `step` e verificar que o valor final da saída é 2/5.

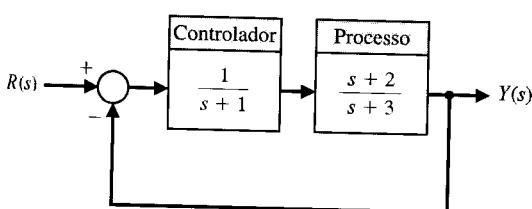


Fig. PM2.2 Sistema de controle com retroação negativa.

**PM2.3** Considere-se a equação diferencial

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u$$

Onde  $y(0) = \dot{y}(0) = 0$  e  $u(t)$  é um degrau unitário. Determinar a solução  $y(t)$  analiticamente e verificar com o MATLAB em um mesmo gráfico a solução analítica e a resposta ao degrau obtida com a função `step`.

**PM2.4** Considere-se o sistema mecânico esboçado na Fig. PM2.4. A entrada é dada por  $f(t)$  e a saída por  $y(t)$ . Determinar a função de transferência de  $f(t)$  para  $y(t)$  e, usando o MATLAB, traçar a curva da resposta a uma entrada em degrau unitário. Seja  $m = 10$ ,  $k = 1$  e  $b = 0,5$ . Mostrar que a amplitude máxima da saída é de cerca de 1,8.

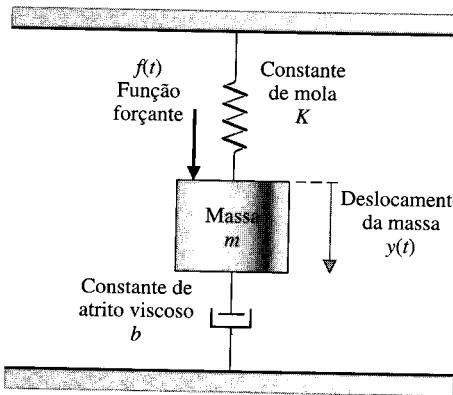


Fig. PM2.4 Sistema mecânico mola-massa-amortecedor.

**PM2.5** O sistema de controle de atitude de um satélite segundo um dos eixos pode ser representado pelo diagrama de blocos na Fig. PM2.5.

As grandezas  $k$ ,  $a$  e  $b$  são parâmetros do controlador e  $J$  é o momento de inércia do veículo espacial. Supor que o valor nominal do momento de inércia seja  $J = 10,8E + 08$  ( $\text{g} \cdot \text{cm}^2$ ) e que os valores dos parâmetros do controlador sejam  $k = 10,8E + 08$ ,  $a = 1$  e  $b = 8$ .

(a) Desenvolver um programa em MATLAB para calcular a função de transferência a malha fechada  $T(s) = \theta(s)/\theta_d(s)$ .

(b) Calcular e plotar a resposta a uma entrada em degrau de 10°.

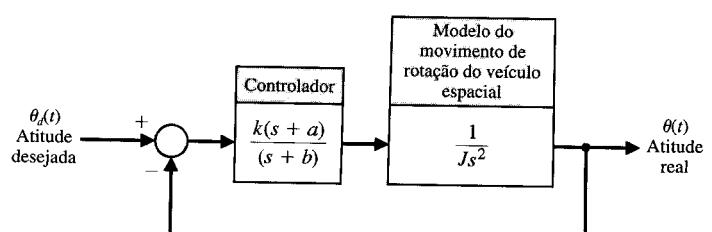


Fig. PM2.5 Diagrama de blocos do controle de atitude segundo um dos eixos de um veículo espacial.

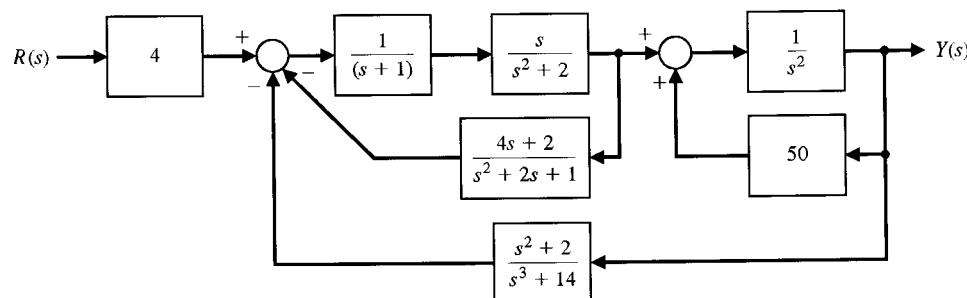
- (c) O valor exato do momento de inércia é geralmente desconhecido e muda lentamente com o tempo. Comparar o desempenho da resposta ao grau quando o momento de inércia da nave espacial,  $J$ , for reduzido de 20 e 50%. Usar os parâmetros do controlador  $k = 10,8e + 08$ ,  $a = 1$  e  $b = 8$  e um degrau de entrada de  $10^\circ$ . Discutir os resultados.

**PM2.6** Considere-se o diagrama de blocos na Fig. PM2.6.

- Usar o MATLAB para reduzir o diagrama de blocos da Fig. PM2.6 e calcular a função de transferência a malha fechada.
- Gerar um diagrama de pólos e zeros da função de transferência a malha fechada sob forma gráfica usando a função `pzmap`.
- Determinar explicitamente os pólos e zeros da função de transferência usando a função `roots` e correlacionar os resultados com o diagrama de pólos e zeros da parte (b).

**PM2.7** A relação entre a entrada e a saída de um sistema não-linear é dada por

$$y(x) = x^2 + x \operatorname{sen} x.$$



Uma aproximação linear é dada por

$$\tilde{y} = ax,$$

onde  $a$  é um coeficiente a ser determinado. Calcule o parâmetro  $a$  experimentalmente através do desenvolvimento de um programa em MATLAB que calcule e plote a diferença entre  $y$  e  $\tilde{y}$  em função do parâmetro  $a$  interativamente de modo que a máxima diferença entre  $y$  e  $\tilde{y}$  seja inferior a 20 quando  $0 \leq x \leq 10$ . Com o valor final obtido para  $a$ , traçar, em um mesmo gráfico,  $y(x)$  versus  $x$  e  $\tilde{y}(x)$  versus  $x$ , quando  $0 \leq x \leq 10$ .

**PM2.8** Um sistema possui a função de transferência

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{(15/z)(s + z)}{s^2 + 3s + 15}.$$

Traçar o gráfico da resposta do sistema quando  $r(t)$  for um degrau unitário para os valores de parâmetro  $z = 3, 6$  e  $12$ .

**Fig. PM2.6** Diagrama de blocos de um sistema de controle com múltiplas malhas de retroação.

## TERMOS E CONCEITOS

**Amortecimento crítico** O caso em que o amortecimento está na fronteira entre o subamortecido e o superamortecido.

**Aproximação linear** Um modelo aproximado que resulta em uma relação linear entre a saída e a entrada do dispositivo.

**Atuador** O dispositivo que faz com que o processo produza uma saída. O dispositivo que fornece a potência motriz ao processo.

**Diagrama de blocos** Blocos operacionais, unidirecionais, que representam as funções de transferência dos elementos do sistema.

**Diagrama de fluxo de sinal** Um diagrama que consiste de nós conectados através de ramos orientados e que constitui uma representação gráfica de um conjunto de relações lineares.

**Equação característica** A relação formada igualando-se a zero o denominador de uma função de transferência.

**Função de transferência** A relação entre a transformada de Laplace de uma variável de saída e a transformada de Laplace da variável de entrada.

**Modelos matemáticos** Descrições do comportamento de um sistema usando matemática.

**Motor CC** Um atuador elétrico que utiliza uma entrada de tensão como variável de controle.

**Oscilação amortecida** Uma oscilação na qual a amplitude decresce com o tempo.

**Regra da malha de Mason** Uma regra que habilita o usuário a obter a função de transferência através do traçado de percursos e malhas no sistema.

**Relação de amortecimento** Uma medida do amortecimento. Um número adimensional da equação característica de segunda ordem.

**Simulação** Um modelo de um sistema que é usado para investigar o comportamento do sistema quando for submetido a sinais de entrada reais.

**Sistema linear** Um sistema que satisfaz as propriedades de superposição e homogeneidade.

**Transformada de Laplace** Uma transformação de uma função  $f(t)$  no domínio do tempo em uma função  $F(s)$  no domínio da frequência complexa.

## CAPÍTULO 3

# *Modelos em Variáveis de Estado*

- 3.1 Introdução
- 3.2 Variáveis de Estado de Sistemas Dinâmicos
- 3.3 Equação Diferencial de Estado
- 3.4 Modelos de Estado em Diagramas de Fluxo de Sinal
- 3.5 Modelos de Estado em Diagramas de Fluxo de Sinal Alternativos
- 3.6 Função de Transferência a Partir das Equações de Estado
- 3.7 Resposta no Domínio do Tempo e Matriz de Transição de Estados
- 3.8 Discretização da Resposta no Domínio do Tempo
- 3.9 Equações em Variáveis de Estado de uma Espaçonave
- 3.10 Exemplo de Projeto: Acionador de Correia para Impressora
- 3.11 Análise de Modelos com Variáveis de Estado Usando o MATLAB
- 3.12 Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura do Acionador de Disco
- 3.13 Sumário

## APRESENTAÇÃO

No capítulo anterior foi usada a transformada de Laplace para obter modelos sob a forma de função de transferência de sistemas físicos lineares e invariantes no tempo descritos por equações diferenciais ordinárias. Este método é atraente porque propicia uma abordagem prática ao projeto e à análise e permite utilizar diagramas de bloco para interconectar subsistemas. Neste capítulo retorna-se a um método alternativo de modelagem de sistemas utilizando técnicas no domínio do tempo. Como anteriormente, serão considerados sistemas físicos descritos por uma equação diferencial ordinária de ordem  $n$ . Utilizando um conjunto (que não é único) de variáveis, conhecidas como variáveis de estado, pode-se obter um sistema de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem. Estas equações de primeira ordem são agrupadas, usando uma notação matricial compacta, em um modelo conhecido como modelo em variáveis de estado. O modelo em variáveis de estado no domínio do tempo conduz ele próprio diretamente à solução e à análise por computador. Será investigada a relação entre os modelos sob a forma de diagramas de fluxo de sinal e os modelos em variável de estado. São apresentados diversos sistemas físicos interessantes, incluindo uma espaçonave e um acionador de correia de uma impressora. O capítulo conclui com o desenvolvimento de um modelo em variáveis de estado para o Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura do Acionador de Disco.

### 3.1 INTRODUÇÃO

No capítulo precedente, foram desenvolvidas e estudadas diversas abordagens úteis para análise e projeto de sistemas com retroação. Utilizou-se a transformada de Laplace para transformar uma equação diferencial representando o sistema em uma equação algébrica expressa em termos da variável complexa  $s$ . Utilizando esta equação algébrica, foi possível obter uma representação sob a forma de função de transferência da relação entrada-saída.

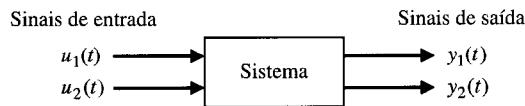
Com a disponibilidade dos computadores digitais, é conveniente considerar a formulação no domínio do tempo de equações representando os sistemas de controle. As técnicas no domínio do tem-

po podem ser usadas para sistemas não-lineares, variantes no tempo e multivariáveis. Um sistema de controle variante no tempo é um sistema para o qual um ou mais parâmetros do sistema podem variar em função do tempo. Por exemplo, a massa de um míssil varia em função do tempo à medida que o propelente vai sendo consumido durante o voo. Um sistema multivariável, como foi discutido na Seção 2.6, é um sistema com diversos sinais de entrada e de saída. A solução da formulação do problema de um sistema de controle no domínio do tempo é facilitada pela disponibilidade e pela facilidade de uso dos computadores digitais. Em consequência disto decorre o interesse em reconsiderar a descrição de sistemas dinâmicos no domínio do tempo uma vez que são representados por equações diferenciais. O domínio do tempo é o domínio matemático que incorpora a resposta e a descrição de um sistema em termos do tempo,  $t$ .

A representação de sistemas de controle no domínio do tempo constitui uma das bases da teoria de controle moderno e da otimização de sistemas. No Cap. 11, haverá oportunidade de projetar um sistema de controle ótimo utilizando métodos no domínio do tempo. Neste capítulo, será desenvolvida a representação de sistemas de controle no domínio do tempo e serão ilustrados vários métodos para a solução da resposta de sistemas em função do tempo.

### 3.2 VARIÁVEIS DE ESTADO DE SISTEMAS DINÂMICOS

A análise e o projeto de sistemas de controle no domínio do tempo utilizam o conceito de estado de um sistema [1-3, 5]. O estado de um sistema é um conjunto de variáveis tal que o conhecimento dos valores destas variáveis e das funções de entrada, com as equações que descrevem a dinâmica, fornecem os estados futuros e a saída futura do sistema. Em um sistema dinâmico, o estado do sistema num instante  $t$  é descrito em termos de um conjunto de valores das variáveis de estado  $[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ . As variáveis de estado são as variáveis que determinam o comportamento futuro de um sistema quando são conhecidos o estado presente do sistema e os sinais de excitação. Seja o sistema mostrado na Fig. 3.1, onde  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são os sinais de saída e  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  são os sinais de entrada. Um conjunto de variáveis de estado  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  para o sistema mostrado na figura é um conjunto tal que o conhecimento dos valores iniciais das variáveis de estado  $[x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)]$  no instante  $t_0$  e dos sinais de entrada  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  para  $t \geq t_0$ , é suficiente para determinar os valores futuros das saídas e das variáveis de estado [2].

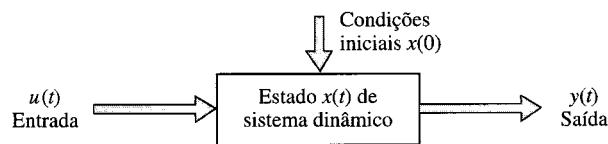


**Fig. 3.1** Diagrama de blocos de um sistema.

**As variáveis de estado descrevem a resposta futura de um sistema, dado o estado presente, as excitações de entrada e as equações que descrevem a dinâmica.**

A forma geral de um sistema dinâmico está mostrada na Fig. 3.2.

Um exemplo simples de variável de estado é o da situação de um interruptor de luz liga-desliga. O interruptor pode estar na posição ligado ou na posição desligado e, por conseguinte, a posição da chave pode assumir um dos dois valores possíveis. Assim, se for conhecido o estado presente (posição) do interruptor em  $t_0$  e se for aplicada uma entrada, será possível determinar o valor futuro do estado do elemento.



**Fig. 3.2** Sistema dinâmico.

O conceito de um conjunto de variáveis de estado para representar um sistema dinâmico pode ser ilustrado em termos do sistema mola-massa-amortecedor mostrado na Fig. 3.3. O número escolhido de variáveis de estado para representar este sistema deverá ser tão pequeno quanto possível a fim de evitar variáveis de estado redundantes. Um conjunto de variáveis de estado suficiente para descrever

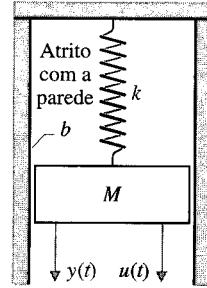


Fig. 3.3 Sistema mola-massa-amortecedor.

este sistema inclui a posição e a velocidade da massa. Por conseguinte, serão definidas as variáveis de estado como  $(x_1, x_2)$ , onde

$$x_1(t) = y(t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}.$$

A equação diferencial descreve o comportamento do sistema e é usualmente escrita como

$$M \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = u(t). \quad (3.1)$$

Para escrever a Eq. (3.1) em termos das variáveis de estado, substituem-se as variáveis de estado como definidas anteriormente e se obtém

$$M \frac{dx_2}{dt} + bx_2 + kx_1 = u(t). \quad (3.2)$$

Portanto, as equações diferenciais que descrevem o comportamento do sistema mola-massa-amortecedor podem ser escritas como um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem como a seguir:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad (3.3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{b}{M}x_2 - \frac{k}{M}x_1 + \frac{1}{M}u. \quad (3.4)$$

Este sistema de equações diferenciais descreve o comportamento do sistema em termos da taxa de variação de cada uma das variáveis de estado.

Como um outro exemplo de caracterização de variáveis de estado de um sistema, considere-se o circuito RLC mostrado na Fig. 3.4. O estado deste sistema pode ser descrito em termos de um conjunto de variáveis de estado  $(x_1, x_2)$ , onde  $x_1$  é a tensão elétrica no capacitor  $v_c(t)$  e  $x_2$  é igual à corrente no indutor  $i_L(t)$ . Esta escolha de variáveis de estado é intuitivamente satisfatória porque a energia armazenada no circuito pode ser descrita em termos destas variáveis como sendo

$$\mathcal{E} = (1/2)Li_L^2 + (1/2)Cv_c^2. \quad (3.5)$$

Portanto,  $x_1(t_0)$  e  $x_2(t_0)$  representam a energia total inicial do circuito e, assim, o estado do sistema em  $t = t_0$ . Para um circuito RLC passivo, o número de variáveis de estado requerido é igual ao número de elementos armazenadores de energia independentes. Utilizando-se a lei de Kirchhoff das correntes em um nó, obtém-se a primeira equação diferencial através da descrição da taxa de variação da tensão elétrica no capacitor como sendo

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt} = +u(t) - i_L. \quad (3.6)$$

A aplicação da lei de Kirchhoff das tensões na malha da direita fornece a equação que descreve a taxa de variação da corrente no indutor como

$$L \frac{di_L}{dt} = -Ri_L + v_c. \quad (3.7)$$

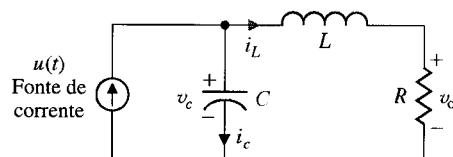


Fig. 3.4 Um circuito RLC.

A saída deste sistema é representada pela equação algébrica linear

$$v_o = Ri_L(t).$$

As Eqs. (3.6) e (3.7) podem ser reescritas como um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem em termos das variáveis de estado  $x_1$  e  $x_2$ , como se segue:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u(t), \quad (3.8)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = +\frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2. \quad (3.9)$$

O sinal de saída é então

$$y_1(t) = v_o(t) = Rx_2. \quad (3.10)$$

Utilizando-se as Eqs. (3.8) e (3.9) e as condições iniciais do circuito representadas por  $[x_1(t_0), x_2(t_0)]$ , pode-se determinar o comportamento futuro do sistema e sua saída.

As variáveis de estado que descrevem um sistema não constituem um conjunto único e podem ser escolhidos vários conjuntos alternativos. Por exemplo, para sistemas de segunda ordem, como o sistema mola-massa-amortecedor ou o circuito *RLC*, as variáveis de estado podem ser quaisquer combinações lineares independentes de  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ . Portanto, para o circuito *RLC* poderia ser escolhido o conjunto de variáveis de estado como sendo duas tensões,  $v_c(t)$  e  $v_L(t)$ , onde  $v_L$  é a tensão elétrica nos terminais do indutor. Então as novas variáveis de estado  $x_1^*$  e  $x_2^*$  se relacionam com as variáveis de estado antigas  $x_1$  e  $x_2$ , como

$$x_1^* = v_c = x_1, \quad (3.11)$$

$$x_2^* = v_L = v_c - Ri_L = x_1 - Rx_2. \quad (3.12)$$

A Eq. (3.12) representa a relação entre a tensão no indutor e as variáveis de estado anteriores  $v_c$  e  $i_L$ . Em um sistema real há diversas escolhas de conjuntos de variáveis de estado que especificam a energia armazenada no sistema e, portanto, descrevem a dinâmica do sistema de forma adequada. Uma escolha usada amplamente é a de um conjunto de variáveis de estado que possam ser medidas diretamente.

Uma abordagem alternativa para desenvolver o modelo de um dispositivo é o uso dos grafos de ligação (*bond graphs*). Os grafos de ligação podem ser usados para dispositivos e sistemas elétricos, mecânicos, hidráulicos e térmicos, bem como para uma combinação de vários tipos de elementos. Os grafos de ligação produzem um conjunto de equações na forma de variáveis de estado [7].

As variáveis de estado de um sistema caracterizam o seu comportamento dinâmico. O interesse do engenheiro recai fundamentalmente sobre os sistemas físicos, onde as variáveis são tensões, correntes, velocidades, posições, pressões, temperaturas e variáveis físicas semelhantes.

Contudo, o conceito de estado de sistema não fica restrito à análise de sistemas físicos e é particularmente útil ao se analisar sistemas biológicos, sociais e econômicos. Para estes sistemas, o conceito de estado é ampliado além do conceito de energia de um sistema físico segundo um ponto de vista mais abrangente de variáveis que descrevem o comportamento futuro do sistema.

### 3.3 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE ESTADO

O estado de um sistema é descrito por meio de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem escrito em termos das variáveis de estado ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ). Estas equações diferenciais de primeira ordem podem ser escritas na forma geral como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2m}u_m, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde  $\dot{x} = dx/dt$ . Assim, este sistema de equações diferenciais simultâneas pode ser escrito em forma matricial como a seguir [2, 5]:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

A matriz coluna consistindo das variáveis de estado é chamada de **vetor de estado** e é escrita como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

onde o negrito indica um vetor. O vetor dos sinais de entrada é definido como  $\mathbf{u}$ . Então, o sistema pode ser representado através de notação compacta da **equação diferencial de estado** como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}. \quad (3.16)$$

A equação diferencial (3.16) é comumente chamada de equação de estado.

A matriz  $\mathbf{A}$   $n \times n$  é uma matriz quadrada e  $\mathbf{B}$  é uma matriz  $n \times m$ .\* A equação diferencial de estado relaciona a taxa de variação do estado do sistema ao estado do sistema e aos sinais de entrada. Em geral, as saídas de um sistema linear podem ser relacionadas com as variáveis de estado e com os sinais de entrada pela **equação de saída**

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}, \quad (3.17)$$

onde  $\mathbf{y}$  é o conjunto dos sinais de saída expressos na forma de um vetor coluna.

Usam-se as equações (3.8) e (3.9) para obter a equação de estado diferencial relativa ao circuito *RLC* da Fig. 3.4. como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{L} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.18)$$

e a saída como

$$\mathbf{y} = [0 \ R] \mathbf{x}. \quad (3.19)$$

Para  $R = 3$ ,  $L = 1$  e  $C = 1/2$ , tem-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

e

$$\mathbf{y} = [0 \ 3] \mathbf{x}.$$

A solução da equação diferencial de estado (Eq. 3.16) pode ser obtida de modo semelhante à abordagem utilizada para resolver uma equação diferencial de primeira ordem. Seja a equação diferencial de primeira ordem

$$\dot{x} = ax + bu, \quad (3.20)$$

onde  $x(t)$  e  $u(t)$  são funções escalares do tempo. Espera-se uma solução exponencial da forma  $e^{at}$ . Aplicando a transformada de Laplace na Eq. (3.20), tem-se

$$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s),$$

e por conseguinte

$$X(s) = \frac{x(0)}{s - a} + \frac{b}{s - a} U(s). \quad (3.21)$$

A transformada de Laplace inversa da Eq. (3.21) resulta na solução

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{+a(t-\tau)}bu(\tau) d\tau. \quad (3.22)$$

\*Letras minúsculas em negrito representam grandezas vetoriais e letras maiúsculas em negrito representam matrizes. Para uma introdução a matrizes e a operações elementares com matrizes, consultar o Apêndice C e as referências [1] e [2].

Espera-se que a solução da equação diferencial de estado seja semelhante à Eq. (3.22) e seja de forma exponencial. A **função exponencial matricial** é definida como

$$e^{\mathbf{At}} = \exp(\mathbf{At}) = \mathbf{I} + \mathbf{At} + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^{k-1} t^k}{k!} + \cdots, \quad (3.23)$$

que converge para qualquer que seja o tempo finito  $t$  e para qualquer que seja a matriz  $\mathbf{A}$  [2]. Acha-se então a solução da equação diferencial de estado

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{At})\mathbf{x}(0) + \int_0^t \exp[\mathbf{A}(t - \tau)]\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (3.24)$$

A Eq. (3.24) pode ser obtida tomando-se a transformada de Laplace da Eq. (3.16) e rearrumando-se os termos na forma

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0) + [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s), \quad (3.25)$$

onde se observa que  $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \Phi(s)$ , que é a transformada de Laplace de  $\Phi(t) = \exp(\mathbf{At})$ . Tomando-se a transformada de Laplace inversa da Eq. (3.25) e observando-se que o segundo termo no lado direito da equação envolve o produto  $\Phi(s)\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$ , obtém-se a Eq.(3.24). A função exponencial matricial descreve a resposta livre do sistema e é chamada de **matriz fundamental** ou **matriz de transição de estados**  $\Phi(t)$ . Em consequência, a Eq. (3.24) pode ser escrita como

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (3.26)$$

A solução do sistema livre (isto é, quando  $\mathbf{u} = 0$ ) é simplesmente

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \cdots & \phi_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \cdots & \phi_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1}(t) & \cdots & \phi_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Observa-se assim que, para determinar a matriz de transição de estados, todas as condições iniciais são zeradas, exceto a de uma das variáveis de estado, e se calcula a saída de cada uma delas. Isto é, o termo  $\phi_{ij}(t)$  é a resposta da  $i$ -ésima variável de estado a uma condição inicial da  $j$ -ésima variável de estado quando há condições iniciais nulas em todos os demais estados. Será utilizada esta relação entre as condições iniciais e as variáveis de estado para calcular os coeficientes da matriz de transição de estados em uma seção mais adiante. Antes, contudo, serão desenvolvidos diversos modelos de estado em diagramas de fluxo de sinal e investigada a estabilidade de sistemas utilizando-se estes diagramas de fluxo.

### 3.4 MODELOS DE ESTADO EM DIAGRAMAS DE FLUXO DE SINAL

O estado de um sistema descreve o comportamento dinâmico desse sistema onde a dinâmica é representada por uma série de equações diferenciais de primeira ordem. Alternativamente, a dinâmica do sistema pode ser representada pela equação diferencial de estado como na Eq. (3.16). Em qualquer dos casos, é útil desenvolver um modelo de estado em diagrama de fluxo de sinal e usar este modelo para relacionar o conceito de variável de estado com a representação familiar de função de transferência.

Como foi aprendido nos capítulos anteriores, um sistema pode ser descrito significativamente por meio de uma relação entrada-saída, a função de transferência  $G(s)$ . Por exemplo, se houver interesse na relação entre a tensão de saída e a tensão de entrada do circuito da Fig. 3.4, pode ser obtida a função de transferência

$$G(s) = \frac{V_0(s)}{U(s)}.$$

A função de transferência do circuito RLC da Fig. 3.4 é da forma

$$G(s) = \frac{V_0(s)}{U(s)} = \frac{\alpha}{s^2 + \beta s + \gamma}, \quad (3.28)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são funções dos parâmetros do circuito  $R$ ,  $L$  e  $C$  respectivamente. Os valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  podem ser determinados a partir do diagrama de fluxo de sinal representando a equação diferencial que descreve o circuito. Para o circuito  $RLC$  (ver Eqs. 3.8 e 3.9), tem-se

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u(t), \quad (3.29)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2, \quad (3.30)$$

$$v_o = Rx_2. \quad (3.31)$$

O diagrama de fluxo que representa estas equações simultâneas está mostrado na Fig. 3.5, onde  $1/s$  indica uma integração. Usando a fórmula de Mason para o ganho do diagrama de fluxo de sinal, obtém-se a função de transferência

$$\frac{V_o(s)}{U(s)} = \frac{+R/LCs^2}{1 + (R/Ls) + (1/LCs^2)} = \frac{+R/LC}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}. \quad (3.32)$$

Infelizmente, muitos circuitos elétricos, sistemas eletromecânicos e outros sistemas de controle não são tão simples como o circuito  $RLC$  da Fig. 3.4 e, freqüentemente, constitui uma tarefa difícil determinar a série de equações diferenciais que descrevem o sistema. Em consequência, é muitas vezes mais simples deduzir a função de transferência do sistema por meio das técnicas do Cap. 2 e, em seguida, deduzir o modelo de estado a partir da função de transferência.

O modelo de estado em diagrama de fluxo de sinal pode ser deduzido diretamente a partir da função de transferência de um sistema. Contudo, como foi assinalado na Seção 3.3, há mais de um conjunto alternativo de variáveis de estado e, por conseguinte, há mais de uma forma possível de modelo de estado em diagrama de fluxo de sinal. Em geral, pode-se representar uma função de transferência como

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^n + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}, \quad (3.33)$$

onde  $n \geq m$  e todos os coeficientes  $a$  e  $b$  são números reais. Multiplicando-se o numerador e o denominador por  $s^{-n}$ , obtém-se

$$G(s) = \frac{s^{-(n-m)} + b_{m-1}s^{-(n-m+1)} + \dots + b_1s^{-(n-1)} + b_0s^{-n}}{1 + a_{n-1}s^{-1} + \dots + a_1s^{-(n-1)} + a_0s^{-n}}. \quad (3.34)$$

A familiaridade com a fórmula de Mason para o ganho do diagrama de fluxo de sinal permite reconhecer os fatores de retroação no denominador e os fatores de percurso à frente no numerador. A fórmula de Mason para o ganho de diagrama de fluxo de sinal foi discutida na Seção 2.7 e é escrita como

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_k P_k \Delta_k}{\Delta}. \quad (3.35)$$

Quando todos os laços de retroação se tocam e todos os percursos à frente tocam as malhas de retroação, a Eq. (3.35) se reduz a

$$G(s) = \frac{\sum_k P_k}{1 - \sum_{q=1}^N L_q} = \frac{\text{Soma dos fatores de percurso direto}}{1 - \text{soma dos fatores das malhas de retroação}}. \quad (3.36)$$

Há diversos diagramas de fluxo que poderiam representar a função de transferência. Duas configurações baseadas na fórmula de Mason para o ganho do diagrama de fluxo de sinal são de particular interesse e serão consideradas em detalhes. Na próxima seção, serão consideradas duas configurações de diagrama de fluxo adicionais.

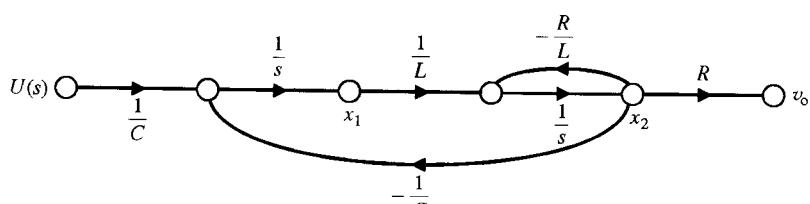


Fig. 3.5 Diagrama de fluxo de sinal relativo ao circuito  $RLC$ .

Para ilustrar a dedução do modelo de estado em diagrama de fluxo de sinal, considere-se inicialmente a função de transferência de quarta ordem

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \\ &= \frac{b_0s^{-4}}{1 + a_3s^{-1} + a_2s^{-2} + a_1s^{-3} + a_0s^{-4}}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

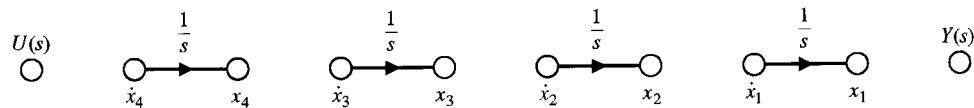
Observe-se primeiramente que o sistema é de quarta ordem e, em consequência, se identificam quatro variáveis de estado ( $x_1, x_2, x_3, x_4$ ). Recordando a fórmula de Mason, nota-se que o denominador pode ser considerado como 1 menos a soma dos ganhos de malha. Além disto, a função de transferência do numerador é igual ao fator do percurso direto do diagrama de fluxo. O diagrama de fluxo deve utilizar um número mínimo de integradores igual à ordem do sistema. Portanto, são usados quatro integradores para representar este sistema. Os nós necessários do diagrama de fluxo e os quatro integradores estão mostrados na Fig. 3.6. Considerando-se a interconexão série mais simples dos integradores, pode-se representar a função de transferência pelo diagrama de fluxo da Fig. 3.7. Examinando-se esta figura, nota-se que todas as malhas se tocam e que a função de transferência deste diagrama de fluxo é na verdade a Eq. (3.37). O leitor poderá verificar isto prontamente observando que o fator do percurso direto é  $b_0/s^4$  e o denominador é igual a 1 menos a soma dos ganhos de malha.

Considere-se agora a função de transferência de quarta ordem quando o numerador é um polinômio em  $s$ , de modo a se ter

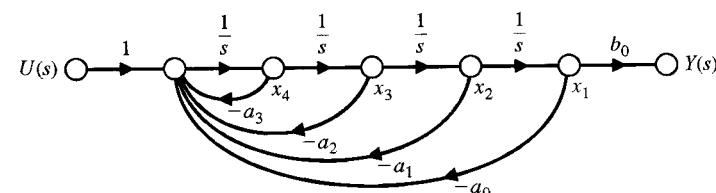
$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \\ &= \frac{b_3s^{-1} + b_2s^{-2} + b_1s^{-3} + b_0s^{-4}}{1 + a_3s^{-1} + a_2s^{-2} + a_1s^{-3} + a_0s^{-4}}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Os termos do numerador representam os fatores de percurso direto da fórmula de Mason para o ganho do diagrama de fluxo de sinal. Os percursos diretos tocarão todas as malhas, e uma realização da Eq. (3.38) em diagrama de fluxo está mostrada na Fig. 3.8. Os fatores do percurso direto são  $b_3/s$ ,  $b_2/s^2$ ,  $b_1/s^3$  e  $b_0/s^4$ , como é necessário para fornecer o numerador da função de transferência. Convém lembrar que a fórmula de Mason para o ganho do diagrama de fluxo de sinal indica que o numerador da função de transferência é simplesmente a soma dos fatores do percurso direto. Esta forma geral de diagrama de fluxo de sinal pode representar a função de transferência geral da Eq. (3.38) utilizando

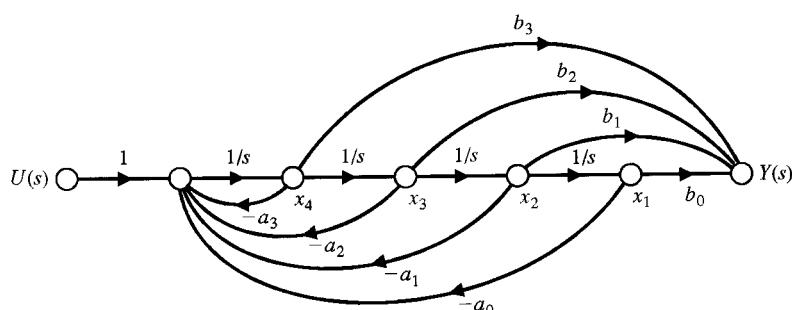
**Fig. 3.6** Nós e integradores de um diagrama de fluxo de sinal para sistema de quarta ordem.



**Fig. 3.7** Modelo de estado em diagrama de fluxo de sinal relativo a  $G(s)$  da Eq. (3.37).



**Fig. 3.8** Modelo de estado em diagrama de fluxo de sinal relativo a  $G(s)$  da Eq. (3.38) no formato de variáveis de fase.



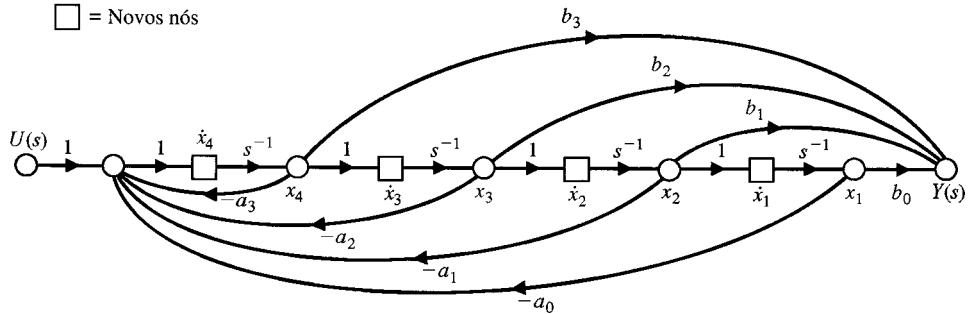


Fig. 3.9 Diagrama de fluxo da Fig. 3.8 com inserção de nós.

$n$  laços de retroação envolvendo os coeficientes  $a_n$  e os  $m$  fatores do percurso direto envolvendo os coeficientes  $b_m$ . A forma geral do modelo de estado em diagrama de fluxo mostrado na Fig. 3.8 é chamada de **formato em variáveis de fase**.

As variáveis de estado são identificadas na Fig. 3.8 como a saída de cada um dos elementos armazenadores de energia, isto é, a saída de cada um dos integradores. Para obter o sistema de equações diferenciais de primeira ordem que representa o modelo de estado da Fig. 3.8, será introduzido no diagrama de fluxo um novo conjunto de nós precedendo cada um dos integradores na Fig. 3.8 [5, 6]. Os nós são colocados antes de cada integrador e, por conseguinte, representam a derivada da saída de cada integrador. O diagrama de fluxo de sinal, incluindo os nós adicionais, está mostrado na Fig. 3.9. Usando o diagrama de fluxo desta figura, será possível obter o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem que descreve o modelo de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= x_3, & \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= -a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 - a_3x_4 + u,\end{aligned}\quad (3.39)$$

onde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as  $n$  **variáveis de fase**.

Além disto, a saída é simplesmente

$$y(t) = b_0x_1 + b_1x_2 + b_2x_3 + b_3x_4. \quad (3.40)$$

Tem-se, então, sob forma matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (3.41)$$

ou

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (3.42)$$

e a saída é

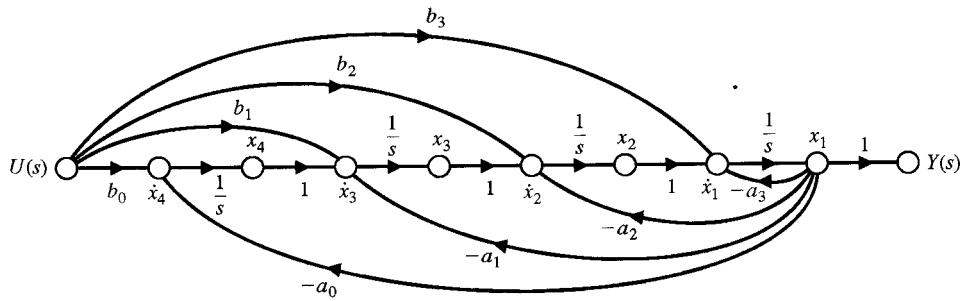
$$y(t) = \mathbf{Cx} = [b_0 \ b_1 \ b_2 \ b_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

A estrutura do diagrama de fluxo da Fig. 3.8 não é a única representação da Eq. (3.38); pode-se obter uma outra estrutura igualmente útil. Um diagrama de fluxo que representa a Eq. (3.38) igualmente bem mostrada na Fig. 3.10. Neste caso, os fatores de percurso direto são obtidos encaminhando o sinal  $U(s)$  à frente. Este modelo será chamado de **formato de entrada com ação à frente (feedforward)**.

Então o sinal de saída  $y(t)$  é igual à primeira variável de estado  $x_1(t)$ . Esta estrutura de diagrama de fluxo tem os fatores de percurso direto  $b_0/s^4, b_1/s^3, b_2/s^2, b_3/s$ , e todos os percursos diretos tocam as malhas de retroação. Por conseguinte a função de transferência resultante é, na realidade, igual à da Eq. (3.38).

Usando o diagrama de fluxo da Fig. 3.10 para obter o sistema de equações diferenciais de primeira ordem, resulta

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -a_3x_1 + x_2 + b_3u, & \dot{x}_2 &= -a_2x_1 + x_3 + b_2u, \\ \dot{x}_3 &= -a_1x_1 + x_4 + b_1u, & \dot{x}_4 &= -a_0x_1 + b_0u.\end{aligned}\quad (3.44)$$



**Fig. 3.10** Modelo de estado em diagrama de fluxo alternativo para a Eq. (3.38). Este modelo é chamado de formato de entrada com ação à frente (*feedforward*).

Assim, sob forma matricial, tem-se

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -a_3 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t). \quad (3.45)$$

Embora o diagrama de fluxo com entrada de ação à frente da Fig. 3.10 represente a mesma função de transferência que o diagrama de fluxo com variáveis de fase da Fig. 3.8, as variáveis de estado de cada um dos diagramas de fluxo não são iguais porque a estrutura de cada um dos diagramas é diferente. Além disto, reconhece-se que as condições iniciais do sistema podem ser representadas pelas condições iniciais dos integradores,  $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$ . Considere-se um sistema de controle e determine-se a equação diferencial de estado utilizando as duas formas de modelo de estado em diagrama de fluxo de sinal.

### EXEMPLO 3.1

#### Modelos com duas variáveis de estado

Um sistema de controle com uma única malha está mostrado na Fig. 3.11. A função de transferência do sistema a malha fechada é

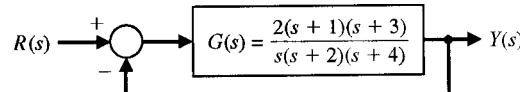
$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2s^2 + 8s + 6}{s^3 + 8s^2 + 16s + 6}.$$

Multiplicando-se o numerador e o denominador por  $s^{-3}$ , obtém-se

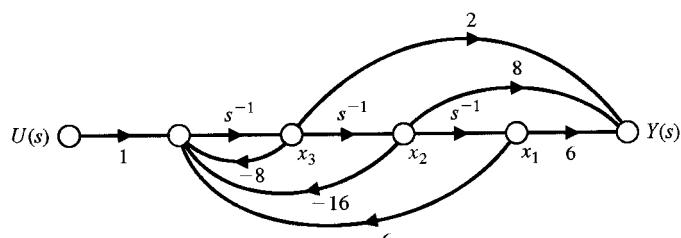
$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2s^{-1} + 8s^{-2} + 6s^{-3}}{1 + 8s^{-1} + 16s^{-2} + 6s^{-3}}. \quad (3.46)$$

O primeiro modelo é o modelo de estado em diagrama de fluxo com variáveis de fase usando a ação à frente das variáveis de estado para fornecer o sinal de saída, como está mostrado na Fig. 3.12. A equação diferencial de estado para este diagrama de fluxo é

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -16 & -8 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (3.47)$$



**Fig. 3.11** Sistema de controle com malha única.



**Fig. 3.12** Modelo de estado em diagrama de fluxo com variáveis de fase para  $T(s)$ .

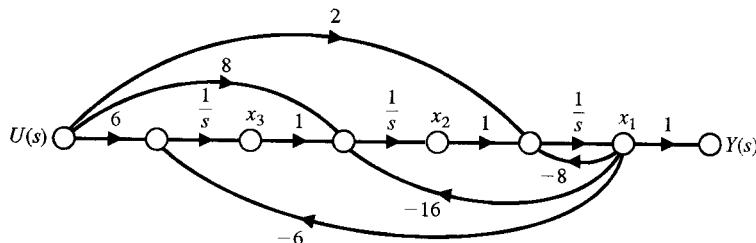


Fig. 3.13 Modelo de estado em diagrama de fluxo alternativo para  $T(s)$  usando o formato de entrada com ação à frente.

e a saída é

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} u(t), \quad (3.48)$$

O segundo modelo é o modelo de estado em diagrama de fluxo de sinal usando a ação à frente da variável de entrada, como está mostrado na Fig. 3.13. A equação diferencial vetorial para este diagrama de fluxo é

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} u(t), \quad (3.49)$$

e o sinal de saída é  $y(t) = x_1(t)$ . ■

Constata-se que é possível obter diretamente ambas as representações de  $T(s)$  em diagrama de fluxo de sinal. Além disto não é necessário fatorar os polinômios do numerador ou o do denominador para obter as equações diferenciais de estado. Evitar a fatoração de polinômios permite que se suprima o esforço cansativo envolvido na fatoração. Cada um dos dois modelos em diagrama de fluxo de sinal representa uma simulação em computador analógico da função de transferência. Ambos os modelos requerem três integradores porque o sistema é de terceira ordem. Contudo, é importante enfatizar que as variáveis de estado do modelo de estado da Fig. 3.12 não são idênticas às variáveis de estado do modelo de estado da Fig. 3.13. Naturalmente, um conjunto de variáveis de estado se relaciona ao outro conjunto de variáveis de estado por uma transformação linear adequada de variáveis. Uma transformação linear matricial é representada por  $\mathbf{z} = \mathbf{M}\mathbf{x}$ , que transforma o vetor  $\mathbf{x}$  no vetor  $\mathbf{z}$  por meio de uma matriz  $\mathbf{M}$  (ver Apêndice C, especialmente a Seção C.3, para uma introdução à álgebra matricial). Observa-se, finalmente, que a função de transferência da Eq. (3.33) representa um sistema linear monovariável com coeficientes constantes, e, por conseguinte, a função de transferência pode representar uma equação diferencial de ordem  $n$

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 u(t). \quad (3.50)$$

Assim, é possível obter as  $n$  equações diferenciais de primeira ordem para a equação diferencial de ordem  $n$  utilizando os modelos de estado em diagrama de fluxo de sinal desta seção.

### 3.5 MODELOS DE ESTADO EM DIAGRAMAS DE FLUXO DE SINAL ALTERNATIVOS

Freqüentemente o projetista de sistemas de controle estuda o diagrama de blocos de um sistema de controle real que representa dispositivos e variáveis físicas. Um exemplo de um modelo de motor CC com a velocidade no eixo como variável de saída está mostrado na Fig. 3.14 [9]. Deseja-se selecionar **variáveis físicas** como variáveis de estado. Assim, escolhe-se  $x_1 = y(t)$ , a velocidade de saída;  $x_2 = i(t)$ , a corrente de campo; e  $x_3(t) = u(t)$ , a tensão de campo. Pode-se desenhar um modelo em

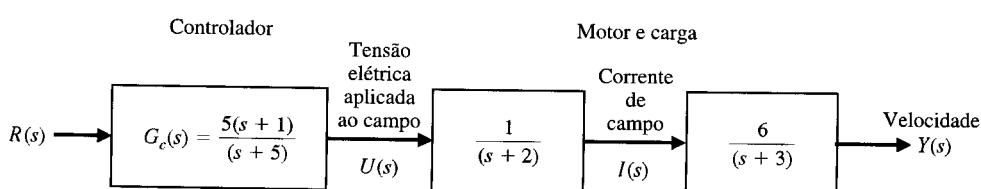
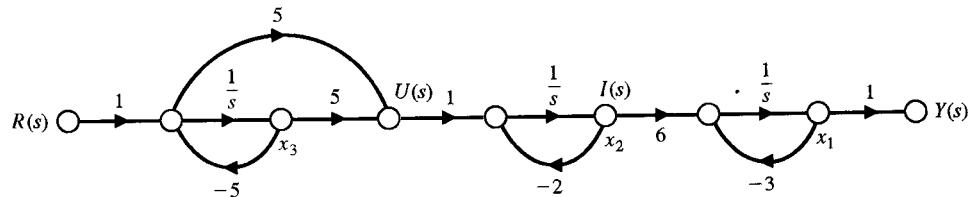


Fig. 3.14 Modelo em diagrama de blocos do controle a malha aberta de um motor CC tendo a velocidade como saída.



**Fig. 3.15** Diagrama de fluxo de sinal com variáveis de estado físicas para o diagrama de blocos da Fig. 3.14.

diagrama de fluxo de sinal para estas variáveis físicas, como está mostrado na Fig. 3.15. Note-se que as variáveis de estado  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são identificadas no diagrama de fluxo. Este formato será designado como o modelo de estado em diagrama de fluxo com variáveis de estado físicas. Este modelo é particularmente útil quando se deseja medir as variáveis de estado físicas. Observe-se que o modelo em diagrama de fluxo de cada bloco é determinado separadamente. Por exemplo, note-se que a função de transferência do controlador é

$$\frac{U(s)}{R(s)} = G_c(s) = \frac{5(s+1)}{(s+5)} = \frac{5 + 5s^{-1}}{1 + 5s^{-1}},$$

e que o diagrama de fluxo entre  $R(s)$  e  $U(s)$  representa  $G_c(s)$ .

A equação diferencial em variáveis de estado é obtida diretamente a partir da Fig. 3.15 como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (3.51)$$

e

$$y = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}. \quad (3.52)$$

Uma segunda forma de diagrama de fluxo conduz aos modos de resposta desacoplados. A função de transferência total do diagrama de blocos mostrado na Fig. 3.14 é

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{30(s+1)}{(s+5)(s+2)(s+3)} = \frac{q(s)}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)},$$

e a resposta transitória possui três modos ditados por  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$ . Estes modos são indicados pela expansão em frações parciais como

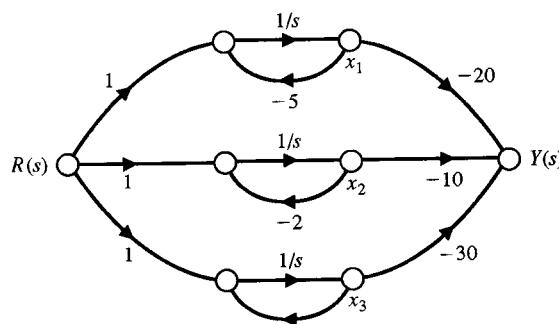
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{k_1}{(s+5)} + \frac{k_2}{(s+2)} + \frac{k_3}{(s+3)}. \quad (3.53)$$

Usando o procedimento descrito no Cap. 2, encontra-se  $k_1 = -20$ ,  $k_2 = -10$  e  $k_3 = -30$ . O diagrama de fluxo de sinal com variáveis de estado desacopladas, representando a Eq. (3.53), está mostrado na Fig. 3.16. A equação diferencial de estado matricial é

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

e

$$y(t) = [-20 \ -10 \ 30] \mathbf{x}. \quad (3.54)$$



**Fig. 3.16** Modelo de estado em diagrama de fluxo com variáveis desacopladas para o sistema mostrado no diagrama de blocos da Fig. 3.14.

**E**

**Fi  
en  
dis  
ep**

Observe-se que  $x_1$  foi escolhida como a variável de estado associada com  $s_1 = -5$ , que  $x_2$  foi escolhida como a variável de estado associada a  $s_2 = -2$ , e que  $x_3$  foi escolhida como a variável de estado associada a  $s_3 = -3$ , como indicado na Fig. 3.16. Esta escolha de variáveis de estado é arbitrária; por exemplo,  $x_1$  poderia ter sido escolhida como a variável de estado associada ao fator  $(s + 2)$ .

A forma desacoplada da equação diferencial matricial de estado mostra os pólos distintos do modelo  $-s_1, -s_2, \dots, -s_n$  e este formato é chamado freqüentemente de **forma diagonal** ou **forma canônica**. Um sistema que possua pólos distintos sempre poderá ser escrito em forma diagonal; em caso contrário, só poderá ser escrito em uma forma de blocos diagonais, conhecida como **forma canônica de Jordan** [29].

### EXEMPLO 3.2

#### Disseminação de uma doença epidêmica

A disseminação de uma doença epidêmica pode ser descrita por um sistema de equações diferenciais. A população sob estudo é constituída de três grupos,  $x_1, x_2$  e  $x_3$ , tais que o grupo  $x_1$  é o grupo suscetível à doença epidêmica,  $x_2$  é o grupo infectado com a doença e o grupo  $x_3$  é o grupo que foi removido da população inicial. A remoção de  $x_3$  se dá por imunização, morte ou segregação a partir do grupo  $x_1$ . O sistema com retroação pode ser representado pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -\alpha x_1 - \beta x_2 + u_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \beta x_1 - \gamma x_2 + u_2(t), \\ \frac{dx_3}{dt} &= \alpha x_1 + \gamma x_2.\end{aligned}$$

A taxa segundo a qual são adicionados novos susceptíveis à população é igual a  $u_1(t)$ , e a taxa segundo a qual são adicionados novos infectados à população é igual a  $u_2(t)$ . Para uma população fechada, tem-se  $u_1(t) = u_2(t) = 0$ . É interessante notar que estas equações poderiam igualmente representar a difusão de informações ou de novas idéias através de uma população.

As variáveis de estado físicas para este sistema são  $x_1, x_2$  e  $x_3$ . O diagrama de fluxo que representa este sistema de equações diferenciais é mostrado na Fig. 3.17. A equação diferencial vetorial é igual a

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta & 0 \\ \beta & -\gamma & 0 \\ \alpha & \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

Examinando-se a Eq. (3.55) e o diagrama de fluxo de sinal, constata-se que a variável de estado  $x_3$  é dependente de  $x_1$  e de  $x_2$  e não afeta as variáveis  $x_1$  e  $x_2$ .

Considere-se uma população fechada tal que  $u_1(t) = u_2(t) = 0$ . O ponto de equilíbrio deste sistema no espaço de estados é obtido fazendo-se  $dx/dt = 0$ . O ponto de equilíbrio no espaço de estados é o ponto no qual o sistema se mantém na condição de equilíbrio, ou repouso. Examinando-se a Eq. (3.55), encontra-se que o ponto de equilíbrio deste sistema é  $x_1 = x_2 = 0$ . Assim, para determinar se a doença epidêmica será eliminada da população, deve ser obtida a equação característica do sistema. A partir do diagrama de fluxo de sinal mostrado na Fig. 3.17 obtém-se o determinante do diagrama de fluxo

$$\Delta(s) = 1 - (-\alpha s^{-1} - \gamma s^{-1} - \beta^2 s^{-2}) + (\alpha \gamma s^{-2}), \quad (3.56)$$

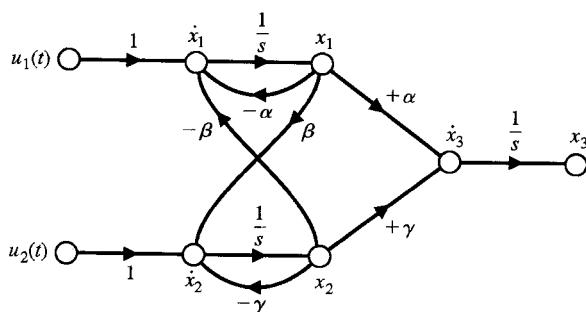


Fig. 3.17 Modelo de estado em diagrama de fluxo da disseminação de uma doença epidêmica.

onde há três malhas, duas das quais não se tocam. Assim, a equação característica é

$$q(s) = s^2 \Delta(s) = s^2 + (\alpha + \gamma)s + (\alpha\gamma + \beta^2) = 0. \quad (3.57)$$

As raízes desta equação característica permanecerão no semiplano  $s$  da esquerda quando  $(\alpha + \gamma) > 0$  e  $(\alpha\gamma + \beta^2) > 0$ . Quando as raízes estiverem no semiplano  $s$  da esquerda, espera-se que a resposta livre tenda a zero à medida que  $t \rightarrow \infty$ . ■

### EXEMPLO 3.3

#### Controle de um pêndulo invertido

O problema de equilibrar uma haste na palma da mão de uma pessoa está ilustrado na Fig. 3.18. A única condição de equilíbrio é  $\theta(t) = 0$  e  $d\theta/dt = 0$ . O problema de equilibrar a haste com a mão não é diferente do problema de controlar a atitude de um míssil durante os estágios iniciais do lançamento. Este problema é o clássico e desafiador problema do pêndulo invertido montado em um carrinho, como está mostrado na Fig. 3.19. O carrinho deve ser movimentado de modo que a massa  $m$  permaneça sempre em uma posição virada para cima. As variáveis de estado devem ser expressas em termos do ângulo de rotação  $\theta(t)$  e da posição do carrinho  $y(t)$ . As equações diferenciais que descrevem o movimento do sistema podem ser obtidas escrevendo-se a soma das forças na direção horizontal e a soma dos momentos em torno do ponto de pivotamento [2, 3, 10, 28]. Parte-se da suposição de que  $M \gg m$  e que o ângulo de rotação  $\theta$  é pequeno de modo que as equações sejam lineares. A soma das forças na direção horizontal é

$$M\ddot{y} + ml\ddot{\theta} - u(t) = 0, \quad (3.58)$$

onde  $u(t)$  é igual à força aplicada sobre o carrinho e  $l$  é a distância da massa  $m$  ao ponto de pivotamento. A soma dos torques em torno do pivô é

$$ml\ddot{y} + ml^2\ddot{\theta} - mlg\theta = 0. \quad (3.59)$$

As variáveis de estado para as duas equações diferenciais de segunda ordem são escolhidas como  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta})$ . Então, as Eqs. (3.58) e (3.59) são escritas em termos das variáveis de estado como

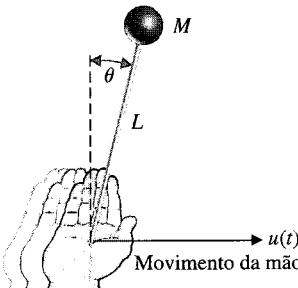
$$M\ddot{x}_2 + ml\ddot{x}_4 - u(t) = 0 \quad (3.60)$$

e

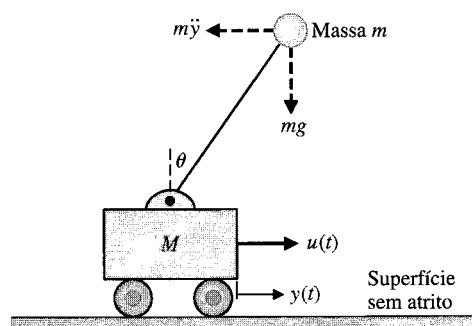
$$\ddot{x}_2 + l\ddot{x}_4 - gx_3 = 0. \quad (3.61)$$

Para obter as equações diferenciais de primeira ordem necessárias, resolve-se a Eq. (3.61) para  $l\ddot{x}_4$  e substitui-se na Eq. (3.60) resultando

$$M\ddot{x}_2 + mgx_3 = u(t), \quad (3.62)$$



**Fig. 3.18** Um pêndulo invertido equilibrado na mão de uma pessoa pelo movimento da mão para diminuir o valor de  $\theta(t)$ . Supor, para facilitar, que o pêndulo se move angularmente no plano x-y.



**Fig. 3.19** Um carrinho e um pêndulo invertido. O pêndulo é forçado a pivotar no plano vertical.

pois  $M \gg m$ . Substituindo  $\dot{x}_2$  da Eq. (3.60) na Eq. (3.61), tem-se

$$Ml\ddot{x}_4 - Mgx_3 + u(t) = 0. \quad (3.63)$$

Por conseguinte, as quatro equações diferenciais de primeira ordem podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= \frac{-mg}{M}x_3 + \frac{1}{M}u(t), \\ \dot{x}_3 &= x_4, & \dot{x}_4 &= \frac{g}{l}x_3 - \frac{1}{Ml}u(t). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Assim, as matrizes do sistema são

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(mg/M) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & g/l & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ -1/Ml \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

### 3.6 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA A PARTIR DAS EQUAÇÕES DE ESTADO

Dada uma função de transferência  $G(s)$ , pode-se obter as equações em variáveis de estado usando o modelo em diagrama de fluxo. Agora volta-se ao tema de determinar a função de transferência  $G(s)$  de um sistema com uma única entrada e uma única saída (SISO).\* Retornando às Eqs. (3.16) e (3.17), tem-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (3.66)$$

$$y = \mathbf{Cx}, \quad (3.67)$$

onde  $y$  é a única saída e  $u$  é a única entrada. As transformadas de Laplace das Eqs. (3.66) e (3.67) são

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{BU}(s) \quad (3.68)$$

$$Y(s) = \mathbf{CX}(s), \quad (3.69)$$

onde  $\mathbf{B}$  é uma matriz  $n \times 1$ , uma vez que  $u$  é uma entrada única. Observe-se que não foram incluídas condições iniciais, uma vez que se está procurando obter a função de transferência. Reordenando a Eq. (3.68), obtém-se

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{BU}(s).$$

Como  $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \Phi(s)$ , tem-se

$$\mathbf{X}(s) = \Phi(s)\mathbf{BU}(s).$$

Substituindo-se  $\mathbf{X}(s)$  na Eq. (3.67), resulta

$$Y(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{BU}(s). \quad (3.70)$$

Portanto, a função de transferência  $G(s) = Y(s)/U(s)$  é

$$G(s) = \boxed{\mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B}}. \quad (3.71)$$

#### EXEMPLO 3.4

#### Função de transferência do circuito RLC

Seja determinar a função de transferência  $G(s) = Y(s)/U(s)$  para o circuito RLC da Fig. 3.4, como descrito pelas equações diferenciais (ver Eqs. 3.18 e 3.19):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{C} \\ \frac{1}{L} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \text{e} \qquad \qquad \qquad y &= [0 \quad R] \mathbf{x}. \end{aligned}$$

\*SISO vem do inglês *single-input, single-output*, isto é, literalmente, única entrada, única saída. (N.T.)

Tem-se, então

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} s & \frac{1}{C} \\ \frac{-1}{L} & \left(s + \frac{R}{L}\right) \end{bmatrix}.$$

Por conseguinte, obtém-se

$$\Phi(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} \left(s + \frac{R}{L}\right) & \frac{-1}{C} \\ \frac{1}{L} & s \end{bmatrix},$$

onde

$$\Delta(s) = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}.$$

Então, a função de transferência é

$$\begin{aligned} G(s) &= [0 \quad R] \begin{bmatrix} \left(s + \frac{R}{L}\right) & \frac{-1}{C\Delta(s)} \\ \frac{1}{\Delta(s)} & \frac{s}{\Delta(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{R/LC}{\Delta(s)} = \frac{R/LC}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}, \end{aligned}$$

que está de acordo com o resultado obtido a partir da fórmula de Mason para o ganho do modelo em diagrama de fluxo de sinal (Eq. 3.32). ■

### 3.7 RESPOSTA NO DOMÍNIO DO TEMPO E MATRIZ DE TRANSIÇÃO DE ESTADOS

Deseja-se freqüentemente obter a expressão no domínio do tempo das variáveis de estado de um sistema de controle e assim examinar o desempenho do sistema. A resposta transitória de um sistema pode ser obtida diretamente calculando-se a solução da equação diferencial de estado vetorial. Constatou-se na Seção 3.3 que a solução para a equação diferencial de estado era (Eq. 3.24)

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (3.72)$$

Obviamente, se as condições iniciais  $\mathbf{x}(0)$ , a entrada  $\mathbf{u}(\tau)$  e a matriz de transição de estados  $\Phi(t)$  forem conhecidas, a expressão de  $\mathbf{x}(t)$  no domínio do tempo poderá ser calculada numericamente. Assim, o foco do problema recai sobre o cálculo de  $\Phi(t)$ , a matriz de transição de estados que representa a resposta do sistema. Felizmente, a matriz de transição de estados pode ser calculada diretamente usando as técnicas do diagrama de fluxo de sinal com as quais já se está familiarizado.

Antes de prosseguir com o cálculo da matriz de transição de estados usando o diagrama de fluxo de sinal, deve-se observar que existem vários outros métodos para o cálculo da matriz de transição, tais como o cálculo da série da exponencial

$$\Phi(t) = \exp(\mathbf{A}t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} \quad (3.73)$$

em forma truncada [2, 8]. Existem diversos métodos eficientes para o cálculo de  $\Phi(t)$  por meio de um algoritmo computacional [21].

Constatou-se na Eq. (3.25) que  $\Phi(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ . Em consequência, se  $\Phi(s)$  for obtida através da inversão de matriz, pode-se obter  $\Phi(t)$  observando-se que  $\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}$ . O procedimento de inversão de matrizes é geralmente trabalhoso para sistemas de ordem elevada.

Ex

do

A utilidade do modelo de estado em diagrama de fluxo de sinal para se obter a matriz de transição de estado se torna clara considerando-se a versão da transformada de Laplace da Eq. (3.72) quando a entrada for zero. Aplicando-se a transformada de Laplace na Eq. (3.72) quando  $\mathbf{u}(\tau) = 0$ , tem-se

$$\mathbf{X}(s) = \Phi(s)\mathbf{x}(0). \quad (3.74)$$

Portanto, pode-se calcular a transformada de Laplace da matriz de transição de estados a partir do diagrama de fluxo de sinal determinando a relação entre a variável de estado  $X_i(s)$  e as condições iniciais  $[x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)]$ . Então, a matriz de transição de estados é simplesmente a transformada inversa de  $\Phi(s)$ , isto é,

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}. \quad (3.75)$$

A relação entre a variável de estado  $X_i(s)$  e as condições iniciais  $\mathbf{x}(0)$  é obtida usando-se a fórmula de Mason do ganho do diagrama de fluxo de sinal. Assim, para um sistema de segunda ordem, seria obtido

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \phi_{11}(s)x_1(0) + \phi_{12}(s)x_2(0), \\ X_2(s) &= \phi_{21}(s)x_1(0) + \phi_{22}(s)x_2(0), \end{aligned} \quad (3.76)$$

e a relação entre  $X_2(s)$  como saída e  $x_1(0)$  como entrada pode ser calculada através da fórmula de Mason do ganho do diagrama de fluxo de sinal. Todos os elementos da matriz de transição de estados,  $\phi_{ij}(s)$ , podem ser obtidos calculando-se as relações individuais entre  $X_i(s)$  e  $x_j(0)$  a partir do modelo de estado em diagrama de fluxo. Um exemplo ilustrará esta abordagem para determinação da matriz de transição.

### EXEMPLO 3.5

#### Cálculo da matriz de transição de estados

Será considerado o circuito RLC da Fig. 3.4. Busca-se determinar  $\Phi(s)$  (1) através da inversão de matrizes  $\Phi(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$  e (2) usando a fórmula de Mason do ganho do diagrama de fluxo de sinal.

Primeiramente se determina  $\Phi(s)$  calculando  $\Phi(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ . Nota-se, a partir da Eq. (3.18), que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Então

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 & (s+3) \end{bmatrix}. \quad (3.77)$$

A matriz inversa é

$$\Phi(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} (s+3) & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}, \quad (3.78)$$

onde  $\Delta(s) = s(s+3) + 2 = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$ .

O modelo de estado em diagrama de fluxo de sinal do circuito RLC da Fig. 3.4 está mostrado na Fig. 3.5. Este circuito RLC, que foi discutido nas Seções 3.3 e 3.4, pode ser representado pelas variáveis de estado  $x_1 = v_c$  e  $x_2 = i_L$ . As condições iniciais,  $x_1(0)$  e  $x_2(0)$ , representam, respectivamente, a tensão inicial no capacitor e a corrente inicial no indutor. O diagrama de fluxo, incluindo as condições iniciais de cada variável de estado, está mostrado na Fig. 3.20. As condições iniciais aparecem como o valor inicial da variável de estado na saída de cada integrador.

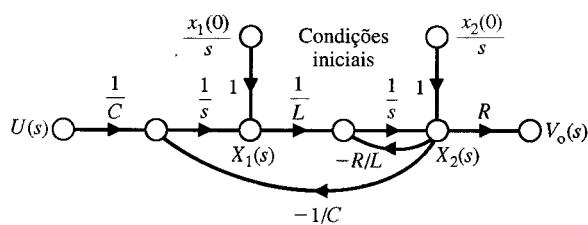
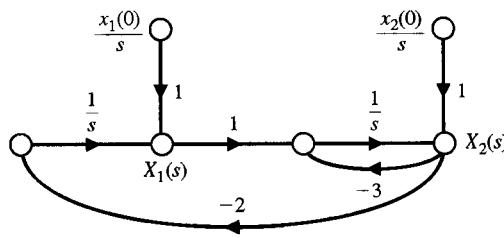


Fig. 3.20 Diagrama de fluxo do circuito RLC.



**Fig. 3.21** Diagrama de fluxo do circuito  $RLC$  com  $U(s) = 0$ .

Para obter  $\Phi(s)$ , faz-se  $U(s) = 0$ . Quando  $R = 3$ ,  $L = 1$  e  $C = 1/2$ , obtém-se o diagrama de fluxo mostrado na Fig. 3.21, onde os nós de entrada e de saída foram eliminados porque não são envolvidos no cálculo de  $\Phi(s)$ . Então, usando a fórmula de Mason para o ganho do diagrama de fluxo de sinal, obtém-se  $X_1(s)$  em função de  $x_1(0)$  como sendo

$$X_1(s) = \frac{1 \cdot \Delta_1(s) \cdot [x_1(0)/s]}{\Delta(s)}, \quad (3.79)$$

onde  $\Delta(s)$  é o determinante do diagrama e  $\Delta_1(s)$  é o co-fator do percurso. O determinante do diagrama é

$$\Delta(s) = 1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}.$$

O co-fator é  $\Delta_1 = 1 + 3s^{-1}$  porque o percurso entre  $x_1(0)$  e  $X_1(s)$  não toca a malha com o fator  $-3s^{-1}$ . Portanto, o primeiro elemento da matriz de transição é

$$\phi_{11}(s) = \frac{(1 + 3s^{-1})(1/s)}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}} = \frac{(s + 3)}{(s^2 + 3s + 2)}. \quad (3.80)$$

O elemento  $\phi_{12}(s)$  é obtido calculando-se a relação entre  $X_1(s)$  e  $x_2(0)$  como sendo

$$X_1(s) = \frac{(-2s^{-1})(x_2(0)/s)}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}}.$$

Obtém-se, portanto,

$$\phi_{12}(s) = \frac{-2}{s^2 + 3s + 2}. \quad (3.81)$$

De modo semelhante, para  $\phi_{21}(s)$  resulta

$$\phi_{21}(s) = \frac{(s^{-1})(1/s)}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}. \quad (3.82)$$

Finalmente, para  $\phi_{22}(s)$  se obtém

$$\phi_{22}(s) = \frac{1(1/s)}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}} = \frac{s}{s^2 + 3s + 2}. \quad (3.83)$$

Portanto, a matriz de transição de estados na forma de transformada de Laplace é

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} (s + 3)/(s^2 + 3s + 2) & -2/(s^2 + 3s + 2) \\ 1/(s^2 + 3s + 2) & s/(s^2 + 3s + 2) \end{bmatrix}. \quad (3.84)$$

Os fatores da equação característica são  $(s + 1)$  e  $(s + 2)$  de modo que

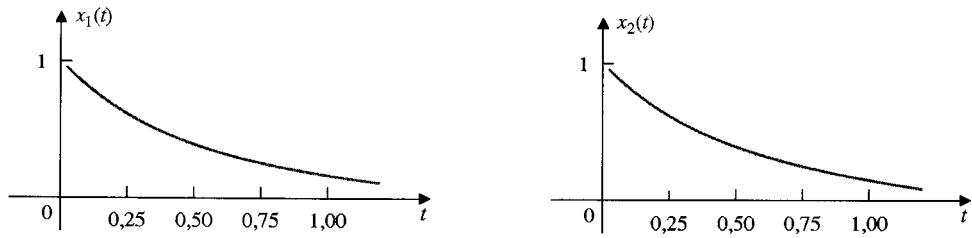
$$(s + 1)(s + 2) = s^2 + 3s + 2.$$

Então, a matriz de transição de estados é

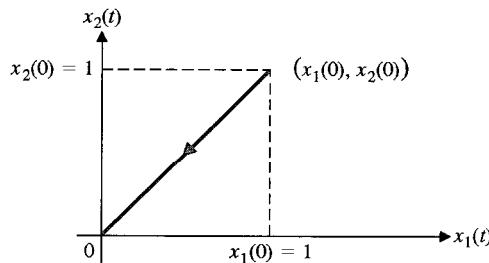
$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} = \begin{bmatrix} (2e^{-t} - e^{-2t}) & (-2e^{-t} + 2e^{-2t}) \\ (e^{-t} - e^{-2t}) & (-e^{-t} + 2e^{-2t}) \end{bmatrix}. \quad (3.85)$$

O cálculo da resposta do circuito  $RLC$ , no domínio do tempo, a diversas condições iniciais e sinais de entrada pode ser calculada agora utilizando-se a Eq. (3.72). Por exemplo, quando  $x_1(0) = 1$  e  $u(t) = 0$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \Phi(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}. \quad (3.86)$$



**Fig. 3.22** Resposta no domínio do tempo das variáveis de estado do circuito RLC para  $x_1(0) = x_2(0) = 1$ .



**Fig. 3.23** Trajetória do vetor de estado no plano ( $x_2$  versus  $x_1$ ).

A resposta do sistema para estas condições iniciais está mostrada na Fig. 3.22. A trajetória do vetor de estado  $[x_1(t), x_2(t)]$  no plano ( $x_2$  vs.  $x_1$ ) está mostrada na Fig. 3.23.

O cálculo da resposta no domínio do tempo é facilitado pela determinação da matriz de transição de estados. Embora esta abordagem seja limitada aos sistemas lineares, constitui um método poderoso e utiliza o já conhecido diagrama de fluxo de sinal para calcular a matriz de transição. ■

### 3.8 DISCRETIZAÇÃO DA RESPOSTA NO DOMÍNIO DO TEMPO

A resposta de um sistema representado pela equação diferencial de estado pode ser obtida utilizando-se uma **aproximação discreta no tempo**. A aproximação discreta no tempo se baseia na divisão do eixo dos tempos em incrementos de tempo suficientemente pequenos. Em seguida, os valores das variáveis de estado são calculados para sucessivos intervalos de tempo, isto é,  $t = 0, T, 2T, 3T, \dots$ , onde  $T$  é o incremento de tempo:  $\Delta t = T$ . Esta abordagem é um método familiar utilizado na análise numérica e nos métodos numéricos para computador digital. Se o incremento de tempo  $T$  for suficientemente pequeno em comparação com as constantes de tempo do sistema, a resposta calculada pelos métodos discretos no tempo será razoavelmente exata.

A equação diferencial de estado linear é escrita como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}. \quad (3.87)$$

A definição básica de uma derivada é

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t}. \quad (3.88)$$

Por conseguinte, pode-se utilizar esta definição de derivada e determinar o valor de  $\mathbf{x}(t)$  quando  $t$  é dividido em pequenos intervalos de tempo  $\Delta t = T$ . Assim, **aproximando** a derivada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}(t + T) - \mathbf{x}(t)}{T},$$

(3.89)

substitui-se na Eq. (3.87) para obter

$$\frac{\mathbf{x}(t + T) - \mathbf{x}(t)}{T} \cong \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t). \quad (3.90)$$

Resolvendo-se para  $\mathbf{x}(t + T)$ , tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t + T) &\cong T\mathbf{Ax}(t) + \mathbf{x}(t) + T\mathbf{Bu}(t) \\ &\cong (T\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{x}(t) + T\mathbf{Bu}(t), \end{aligned} \quad (3.91)$$

onde  $t$  é dividido em intervalos de largura  $T$ . Portanto, o tempo  $t$  é escrito como  $t = kT$ , onde  $k$  é um índice inteiro tal que  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Então, a Eq. (3.91) é escrita como

$$\mathbf{x}[(k + 1)T] \cong (T\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{x}(kT) + T\mathbf{Bu}(kT). \quad (3.92)$$

Por conseguinte, o valor do vetor de estado no  $(k + 1)$ -ésimo instante de tempo é calculado em função dos valores de  $\mathbf{x}$  e de  $\mathbf{u}$  no  $k$ -ésimo instante de tempo. A Eq. (3.92) pode ser reescrita como

$$\mathbf{x}(k + 1) \cong \psi(t)\mathbf{x}(k) + T\mathbf{B}\mathbf{u}(k), \quad (3.93)$$

onde  $\psi(T) = (T\mathbf{A} + \mathbf{I})$  e o símbolo  $T$  foi omitido nos argumentos das variáveis. A Eq. (3.93) relaciona de modo claro o resultado da operação para se obter  $\mathbf{x}(t)$  calculando a aproximação  $\mathbf{x}(k + 1)$  em função do valor anterior  $\mathbf{x}(k)$ . Esta operação de recorrência, conhecida como **método de Euler**, constitui uma série de cálculos seqüenciais e é muito adequada para o cálculo em computador digital. Outras abordagens de integração, como os conhecidos métodos de Runge—Kutta, também podem ser utilizados para se calcular a resposta no domínio do tempo da Eq. (3.87). Diversos métodos de integração [30] estão disponíveis no MATLAB. Para ilustrar esta abordagem de aproximação, considere-se o cálculo da resposta do circuito *RLC* da Fig. 3.4.

### EXEMPLO 3.6

#### Resposta de uma estrutura *RLC*

Será calculada a resposta do circuito *RLC* no domínio do tempo sem determinar a matriz de transição de estados, usando-se a aproximação discreta no tempo. Em consequência, como no Exemplo 3.5, serão adotados os valores  $R = 3$ ,  $L = 1$ , e  $C = 1/2$ . Então, como foi constatado nas Eqs. (3.18) e (3.19), a equação diferencial vetorial de estado é

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & -(1/C) \\ 1/L & -(R/L) \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} +(1/C) \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} +2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \end{aligned} \quad (3.94)$$

Deve-se escolher agora um intervalo de tempo  $T$  suficientemente pequeno de modo que a aproximação da derivada (Eq. 3.89) seja razoavelmente exata e tal que a solução da Eq. (3.92) seja exata. Usualmente se escolhe  $T$  menor que metade da menor constante de tempo do sistema. Portanto, como a menor constante de tempo é 0,5 s [lembrando que a equação característica é  $[(s + 1)(s + 2)]$ ], deve-se escolher  $T = 0,2$ . Note-se que à medida que se reduz o tamanho do incremento, o número de cálculos aumenta proporcionalmente. Usando  $T = 0,2$  s, a Eq. (3.92) é

$$\mathbf{x}(k + 1) \cong (0,2\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{x}(k) + 0,2\mathbf{B}\mathbf{u}(k). \quad (3.95)$$

Por conseguinte,

$$\psi(T) = \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad (3.96)$$

e

$$T\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.97)$$

Seja agora calcular a resposta do sistema quando  $x_1(0) = x_2(0) = 1$  e  $u(t) = 0$ . A resposta no primeiro instante, quando  $t = T$ , ou  $k = 0$ , é

$$\mathbf{x}(1) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,6 \end{bmatrix}. \quad (3.98)$$

Então, a resposta no instante de tempo  $t = 2T = 0,4$  segundo, ou  $k = 1$ , é

$$\mathbf{x}(2) \cong \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 0,36 \\ 0,36 \end{bmatrix}. \quad (3.99)$$

O valor da resposta para  $k = 2, 3, 4, \dots$  é calculado então de forma semelhante.

Compare-se agora a resposta real do sistema calculada na seção precedente usando-se a matriz de transição de estado com a resposta aproximada determinada pela discretização do tempo. Constatou-se no Exemplo 3.5 que o valor exato da variável de estado, quando  $x_1(0) = x_2(0) = 1$ , é  $x_1(t) = x_2(t) = e^{-2t}$ . Em consequência, os valores exatos podem ser facilmente calculados e comparados com os valores aproximados da resposta no domínio do tempo na Tabela 3.1. Os valores aproximados da resposta para  $T = 0,1$  segundo são também fornecidos na Tabela 3.1. O erro, quando  $T = 0,2$ , é aproximadamente uma constante igual a 0,07, e, assim, a percentagem do erro em relação ao valor inicial é de 7%. Quando  $T = 0,1$  segundo, o erro percentual em relação ao valor inicial é de aproximadamente 0,005%.

**TABELA 3.1**

Tempo $t$	0	0,2	0,4	0,6	0,8
Valor exato de $x_1(t)$	1	0,67	0,448	0,30	0,20
Valor aproximado de $x_1(t)$ , $T = 0,1$	1	0,64	0,41	0,262	0,168
Valor aproximado de $x_1(t)$ , $T = 0,2$	1	0,60	0,36	0,216	0,130

mente 3,5%. Se for usado  $T = 0,05$ , o valor da aproximação, quando  $t = 0,2$  segundo, é  $x_1(t) = 0,655$ , e o erro foi reduzido a 1,5% do valor inicial. ■

**EXEMPLO 3.7****Resposta no domínio do tempo de uma epidemia**

Seja reconsiderar a representação em variáveis de estado da disseminação de uma doença epidêmica apresentada no Exemplo 3.2. A equação diferencial vetorial de estado foi dada na Eq. (3.55). Quando as constantes forem  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ , tem-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}. \quad (3.100)$$

A equação característica deste sistema, como foi determinada na Eq. (3.57), é  $s(s^2 + s + 2) = 0$ , e portanto o sistema possui raízes complexas. Seja determinar a resposta transitória da disseminação da doença quando a taxa de novos elementos susceptíveis for zero, isto é,  $u_1 = 0$ . A taxa de acréscimo de novos infectados é representada por  $u_2(0) = 1$  e  $u_2(k) = 0$ , para  $k \geq 1$ ; isto é, um novo infectado é acrescido apenas no instante inicial de tempo (isto é equivalente a um pulso de entrada). A constante de tempo das raízes complexas é  $1/\zeta\omega_n = 2$  segundos, e portanto será usado  $T = 0,2$  segundo. (Note-se que as unidades reais de tempo deveriam ser meses e as unidades de entrada em milhares.)

Então, a equação discreta no tempo é

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2 \\ 0 \end{bmatrix} u_2(k). \quad (3.101)$$

Por conseguinte, a resposta no primeiro instante de tempo,  $t = T$ , é obtida para  $k = 0$  como

$$\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.102)$$

quando  $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$ . Então, a entrada  $u_2(k)$  é zero para  $k \geq 1$ , e a resposta em  $t = 2T$  é

$$\mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,04 \\ 0,16 \\ 0,04 \end{bmatrix}. \quad (3.103)$$

A resposta em  $t = 3T$  é então

$$\mathbf{x}(3) = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,04 \\ 0,16 \\ 0,04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,064 \\ 0,120 \\ 0,064 \end{bmatrix},$$

e os valores que se seguem podem ser calculados imediatamente. Naturalmente o valor físico real de  $x_1$  não pode se tornar negativo. O valor negativo para  $x_1$  é resultante de uma inadequação do modelo.

O método de aproximação discreta no tempo é particularmente útil para se calcular a resposta no domínio do tempo de sistemas não-lineares. A equação diferencial vetorial de estado básica pode ser escrita como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (3.104)$$

onde  $\mathbf{f}$  é uma função, não necessariamente linear, do vetor de estado  $\mathbf{x}$  e do vetor de entrada  $\mathbf{u}$ . O vetor coluna  $\mathbf{f}$  é uma matriz coluna de funções de  $\mathbf{x}$  e de  $\mathbf{u}$ . Se o sistema for uma função linear dos sinais de controle, a Eq. (3.104) se tornará

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (3.105)$$

Se o sistema for invariante no tempo — isto é, os coeficientes da equação diferencial forem constantes —, a Eq. (3.105) será então

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (3.106)$$

Seja considerar a Eq. (3.106) para um sistema não-linear e determinar a aproximação discreta no tempo. Usando-se a Eq. (3.89) como uma aproximação da derivada, tem-se

$$\frac{\mathbf{x}(t+T) - \mathbf{x}(t)}{T} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (3.107)$$

Em consequência, resolvendo para  $\mathbf{x}(k+1)$  quando  $t = kT$ , obtém-se

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + T[\mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)]. \quad (3.108)$$

De modo semelhante, a aproximação discreta no tempo geral da Eq. (3.104) é

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + T\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k). \quad (3.109)$$

Seja, agora, reconsiderar o exemplo precedente quando o sistema for não-linear. ■

### EXEMPLO 3.8

#### Modelo de epidemia aperfeiçoado

A disseminação de uma doença epidêmica é realmente mais bem representada por meio de um sistema de equações não-lineares como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha x_1 - \beta x_1 x_2 + u_1(t), \\ \dot{x}_2 &= \beta x_1 x_2 - \gamma x_2 + u_2(t), \\ \dot{x}_3 &= \alpha x_1 + \gamma x_2, \end{aligned} \quad (3.110)$$

onde a interação entre os grupos é representada pelo termo não-linear  $x_1 x_2$ . Como no exercício anterior, faz-se  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ , e  $u_1(t) = 0$ . Também,  $u_2(0) = 1$ , e  $u_2(k) = 0$  para  $k \geq 1$ . Seleciona-se o incremento de tempo como sendo  $T = 0,2$  segundo e as condições iniciais  $\mathbf{x}^T(0) = [1 \ 0 \ 0]$ . Então, substituindo  $t = kT$  e

$$\dot{x}_i(k) = \frac{x_i(k+1) - x_i(k)}{T} \quad (3.111)$$

na Eq. (3.110), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{x_1(k+1) - x_1(k)}{T} &= -x_1(k) - x_1(k)x_2(k), \\ \frac{x_2(k+1) - x_2(k)}{T} &= +x_1(k)x_2(k) - x_2(k) + u_2(k), \\ \frac{x_3(k+1) - x_3(k)}{T} &= x_1(k) + x_2(k). \end{aligned} \quad (3.112)$$

Resolvendo estas equações para  $x_i(k+1)$  e lembrando que  $T = 0,2$ , tem-se

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= 0,8x_1(k) - 0,2x_1(k)x_2(k), \\ x_2(k+1) &= 0,8x_2(k) + 0,2x_1(k)x_2(k) + 0,2u_2(k), \\ x_3(k+1) &= x_3(k) + 0,2x_1(k) + 0,2x_2(k). \end{aligned} \quad (3.113)$$

Então, a resposta para o primeiro instante,  $t = T$ , é

$$\begin{aligned} x_1(1) &= 0,8x_1(0) = 0,8, \\ x_2(1) &= 0,2u_2(k) = 0,2, \\ x_3(1) &= 0,2x_1(0) = 0,2. \end{aligned}$$

Novamente usando a Eq. (3.113) e observando que  $u_2(1) = 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} x_1(2) &= 0,8x_1(1) - 0,2x_1(1)x_2(1) = 0,608, \\ x_2(2) &= 0,8x_2(1) + 0,2x_1(1)x_2(1) = 0,192, \\ x_3(2) &= x_3(1) + 0,2x_1(1) + 0,2x_2(1) = 0,40. \end{aligned} \quad (3.114)$$

No terceiro instante, quando  $t = 3T$ , será obtido

$$x_1(3) = 0,463, \quad x_2(3) = 0,177, \quad x_3(3) = 0,56.$$

O cálculo dos valores da seqüência se seguem de maneira semelhante. Nota-se que a resposta do sistema não-linear difere consideravelmente da resposta do modelo linear considerado no exercício anterior. ■

O cálculo da resposta das variáveis de estado de um sistema linear é facilmente realizado usando (1) a aproximação da matriz de transição ou (2) a aproximação discreta no tempo. A matriz de transição de sistemas lineares é facilmente obtida a partir do modelo de estado em diagrama de fluxo de sinal. Para sistemas não-lineares, a aproximação discreta no tempo fornece uma aproximação adequada, e este método de aproximação é particularmente útil quando se usa um computador digital para efetuar cálculos numéricos.

### 3.9 EQUAÇÕES EM VARIÁVEIS DE ESTADO DE UMA ESPAÇONAVE

Nesta seção, as equações de movimento são apresentadas para uma espaçonave supostamente rígida controlada por volantes de inércia,\* em uma órbita circular ao redor da Terra [12-14]. O modelo não-linear da espaçonave inclui a cinemática de atitude da espaçonave, a dinâmica rotacional e o momento cinético do volante de inércia. As equações de atitude são expressas em termos dos ângulos de Euler relacionando um triângulo com eixos vinculados ao corpo a um triângulo ortogonal de referência que inclui a vertical local e a horizontal local (VLHL).

Admite-se que a espaçonave esteja em uma órbita circular com velocidade angular orbital  $n$ . Os sistemas de coordenadas de interesse são o triângulo ortogonal direto, que inclui a vertical local e a horizontal local (VLHL), e o triângulo com eixos vinculados ao corpo. O VLHL tem sua origem localizada no centro de massa da espaçonave e é definido na Fig. 3.24. O plano  $X_L-Z_L$  é o plano orbital instantâneo. O eixo  $Z_L$  se desenvolve ao longo do raio vetor geocêntrico para o veículo e é negativo no sentido radial para fora. O eixo  $Y_L$  se desenvolve ao longo do vetor momento angular orbital instantâneo e é negativo na direção do vetor angular. O eixo  $X_L$  completa o triângulo ortogonal direto.

Ao definir a orientação angular dos eixos ligados ao corpo da espaçonave com relação a um triângulo de referência, uma série de rotações dos ângulos de Euler é executada para determinar a orientação, de forma unívoca. Há três rotações principais: em torno dos eixos  $X$ ,  $Y$ , e  $Z$ . A seqüência de ângulos de Euler associada ao sistema em pauta é guinada, arfagem e rolamento (ver Fig. 3.25). Na seqüência,  $\theta = [\theta_1 \theta_2 \theta_3]^T$  são os ângulos de Euler de rolamento, de arfagem e de guinada do corpo com relação ao triângulo ortogonal VLHL de referência, e  $\omega = [\omega_1 \omega_2 \omega_3]^T$  são as velocidades angulares absolutas segundo os eixos do corpo.

A cinemática da atitude da espaçonave é dada por

$$\dot{\theta} = \mathbf{R}(\theta)\omega + \mathbf{n} \quad (3.115)$$

onde

$$\mathbf{R}(\theta) = \frac{1}{\cos \theta_3} \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\cos \theta_1 \sin \theta_3 & \sin \theta_1 \sin \theta_3 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_1 \cos \theta_3 & \cos \theta_1 \cos \theta_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ n \\ 0 \end{bmatrix}.$$

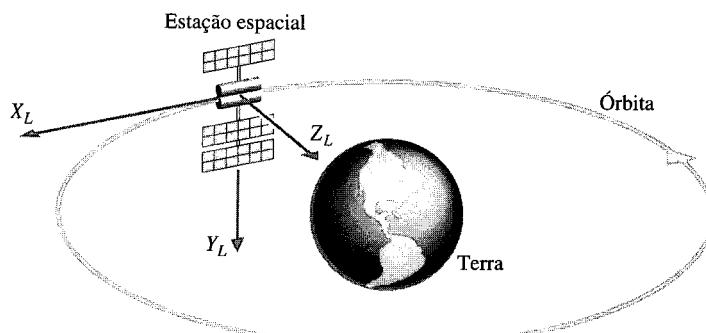
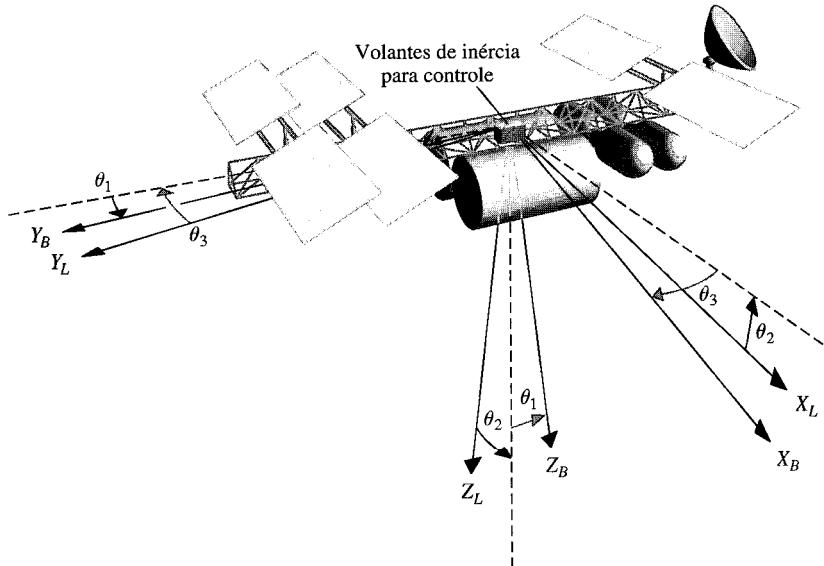


Fig. 3.24 Triângulo de referência VLHL para uma espaçonave.

\*CMG control moment gyro é também chamado de volante de inércia. (N.T.)



**Fig. 3.25** Espaçonave e giroscópios de controle.

A equação do momento cinético da espaçonave é [13]

$$\dot{\mathbf{H}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}, \quad (3.116)$$

onde  $\mathbf{H}$  indica o vetor do momento cinético no triedro ligado ao corpo e  $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$  é o vetor de torque externo (por exemplo, torques de gradiente da gravidade, torques aerodinâmicos e torques de controle). Visto que a espaçonave é rígida por hipótese, tem-se  $\mathbf{H} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$ , onde  $\mathbf{I}$  é a matriz inércia da espaçonave

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_2 & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_3 \end{bmatrix}.$$

O torque externo inclui o torque de gradiente da gravidade e o torque de controle do volante de inércia. Na ausência de perturbações externas (como torques aerodinâmicos), a Eq. (3.116) se torna

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\tau}_{gg} - \mathbf{u}, \quad (3.117)$$

onde  $\boldsymbol{\tau}_{gg}$  é vetor torque de gradiente da gravidade e  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$  é o vetor de torque de controle do volante de inércia.

O torque de gravidade é devido ao fato de o campo gravitacional da Terra não ser uniforme sobre o corpo da espaçonave. Com o campo gravitacional quadrático inverso da Terra, o torque de gradiente da gravidade pode ser expresso segundo os eixos ligados ao corpo como

$$\boldsymbol{\tau}_{gg} = 3n^2\mathbf{c} \times \mathbf{I}\mathbf{c}, \quad (3.118)$$

onde

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \end{bmatrix}.$$

A dinâmica de rotação pode ser expressa no triedro ligado ao corpo como

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + 3n^2\mathbf{c} \times \mathbf{I}\mathbf{c} - \mathbf{u}. \quad (3.119)$$

A dinâmica do volante de inércia pode ser deduzida de forma semelhante e é dada por

$$\dot{\mathbf{h}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} + \mathbf{u}, \quad (3.120)$$

onde  $\mathbf{h}$  é o momento cinético do volante de inércia e  $\mathbf{u}$  é o torque de controle do volante de inércia.

A abordagem convencional para o controle de atitude da espaçonave e para o projeto de gerenciamento do momento cinético consiste em desenvolver um modelo linear representando a atitude da espaçonave e o momento cinético do volante de inércia linearizando-se o modelo não-linear nas Eqs. (3.115), (3.119) e (3.120). Esta linearização é efetuada por uma aproximação em série de Taylor comum. Os métodos de projeto de controle linear podem ser facilmente aplicados.

Linearizar o modelo não-linear de espaçonave admitindo pequenos desvios de atitude, pequenas velocidades angulares, pequenos valores de momento de inércia do volante de inércia e produtos de inércia insignificantes (isto é,  $I_{ij} = 0$ ,  $i \neq j$ ) resulta em um desacoplamento do eixo de arfagem e dos eixos de guinada e de rolamento. As equações linearizadas para os eixos de rolamento e de guinada são

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3n^2\Delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \omega_2 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/I_2 \\ 1 \end{bmatrix} u_2,$$

onde

$$\Delta_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2}.$$

As equações linearizadas para os eixos de rolamento e de guinada são

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_3 \\ \dot{h}_1 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -n & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3n^2\Delta_1 & 0 & 0 & -n\Delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n\Delta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \\ \omega_1 \\ \omega_3 \\ h_1 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1/I_1 & 0 \\ 0 & -1/I_3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix},$$

onde

$$\Delta_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1}, \quad \text{e} \quad \Delta_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3}.$$

Convém observar que o problema de controle do eixo de arfagem é um problema de uma única entrada, enquanto o problema de controle de rolamento e de guinada é um problema de entradas múltiplas. Valores de parâmetros típicos para a estação espacial são

$$I_1 = 50,28E+6 \text{ (slug}\cdot\text{ft}^2\text{)},$$

$$I_2 = 10,80E+6,$$

$$I_3 = 58,57E+6,$$

e  $n = 0,0011$  rad/s. Com estes parâmetros típicos, a representação no espaço de estados do eixo de arfagem é dada por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad (3.121)$$

onde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \omega_2 \\ h_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2,7E-06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9,2E-08 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Geralmente o objetivo operacional é manter a espaçonave próxima de uma atitude apontando para a Terra, o que acarreta  $\theta_1 \approx 0$ ,  $\theta_2 \approx 0$ , e  $\theta_3 \approx 0$ . Fisicamente, isto significa que se deseja que o triedro ligado ao corpo esteja aproximadamente alinhado com o triedro VLHL. Deseja-se também manter o momento cinético do volante de inércia pequeno (isto é, que  $\mathbf{h}$  seja pequeno), porque quando o limite físico do momento cinético máximo for alcançado os volantes de inércia não podem mais gerar torque, e a espaçonave ficará descontrolada (obviamente esta não é uma condição desejável). Logo, linearizar as equações não-lineares por meio de uma série de Taylor supondo pequenos os ângulos, as velocidades angulares, e o momento cinético faz sentido em engenharia. Entretanto, a sensibilidade à suposição de produtos de inércia pequenos (isto é,  $I_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ ) depende altamente da configuração particular da espaçonave.

Um conjunto consistente de unidades para este problema é  $\boldsymbol{\theta}$  (rad),  $\boldsymbol{\omega}$  (rad/s),  $\mathbf{h}$  (ft-lb-s),  $\mathbf{u}$  (ft-lb),  $\tau_{gg}$  (ft-lb), e  $\mathbf{I}$  (slug-ft<sup>2</sup>). É claro que uma configuração equivalente de unidades SI pode ser obtida usando as conversões da Tabela 3.2.

**TABELA 3.2 Parâmetros do Dispositivo de Impressão**

Massa	$m = 0,2 \text{ kg}$
Sensor luminoso	$k_1 = 1 \text{ V/m}$
Raio	$r = 0,15 \text{ m}$
Motor	
Indutância	$L \approx 0$
Atrito	$b = 0,25 \text{ N-ms/rad}$
Resistência	$R = 2 \Omega$
Constante	$K_m = 2 \text{ N-m/A}$
Inércia	$J = J_{\text{motor}} + J_{\text{polia}}; \quad J = 0,01 \text{ kg-m}^2$

### 3.10 EXEMPLO DE PROJETO: ACIONADOR DE CORREIA PARA IMPRESSORA

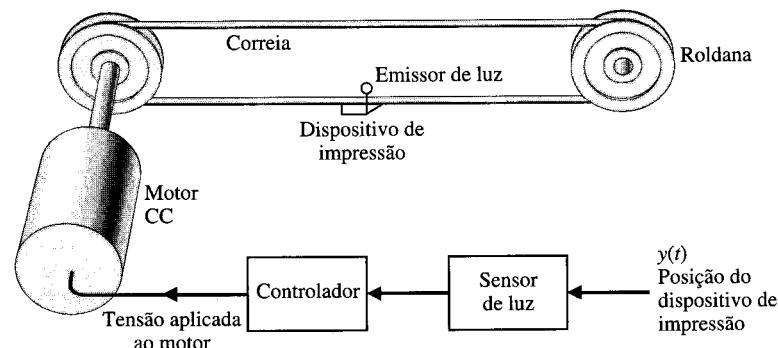
Uma impressora de baixo custo comumente usada com computadores utiliza um acionador de correia para mover o dispositivo de impressão lateralmente ao longo da página impressa [11]. O dispositivo de impressão pode ser com jato de tinta, com ponta esférica, ou térmico. Um exemplo de um acionador de correia para impressora com um motor CC como atuador é mostrado na Fig. 3.26. Neste modelo, um sensor de luz é usado para medir a posição do dispositivo de impressão, e a tensão da correia regula a flexibilidade de mola da correia. O objetivo do projeto é determinar o efeito da constante de mola  $k$  da correia e selecionar os parâmetros apropriados para o motor, para a roldana da correia e para o controlador. Para efetuar a análise, será determinado um modelo deste sistema de acionamento por correia e se fará a seleção de muitos dos parâmetros. Usando este modelo, será obtida a representação em diagramas de fluxo de sinal e serão selecionadas as variáveis de estado. Em seguida, determina-se uma função de transferência apropriada para o sistema e selecionam-se os outros parâmetros, exceto para a constante de mola. Finalmente, examina-se o efeito de uma modificação no valor da constante de mola no interior de um intervalo de valores realista.

Propõe-se o modelo do sistema de acionamento por meio de correia mostrado na Fig. 3.27. Este modelo supõe que a constante de mola da correia seja  $k$ , o raio da roldana seja  $r$ , a rotação angular do motor seja  $\theta$ , e a rotação angular da roldana no sentido trigonométrico seja  $\theta_p$ . A massa do dispositivo de impressão é  $m$ , e a posição é  $y(t)$ . Um sensor luminoso é usado para medir  $y$ , e a saída do sensor é uma tensão elétrica  $v_1$ , onde  $v_1 = k_1 y$ . O controlador fornece uma tensão de saída  $v_2$ , onde  $v_2$  é uma função de  $v_1$ . A tensão elétrica  $v_2$  é conectada ao campo do motor. Admite-se que se possa usar a relação linear

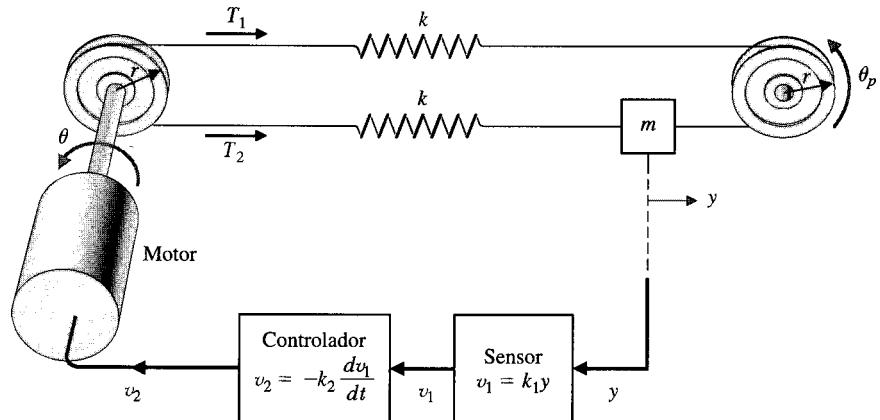
$$v_2 = - \left[ k_2 \frac{dv_1}{dt} + k_3 v_1 \right],$$

e se escolhem  $k_2 = 0,1$  e  $k_3 = 0$  (retroação de velocidade).

A inércia do motor e da roldana é  $J = J_{\text{motor}} + J_{\text{roldana}}$ . Planeja-se usar um motor CC de potência moderada. Selecionando-se um motor CC típico de 1/8 hp, acha-se  $J = 0,01 \text{ kg-m}^2$ , a indutância do campo é insignificante, a resistência do campo é  $R = 2 \Omega$ , a constante do motor é  $K_m = 2 \text{ N-m/A}$ , e o atrito do motor e da roldana é  $b = 0,25 \text{ N-ms/rad}$ . O raio da roldana é  $r = 0,15 \text{ m}$ . Os parâmetros do sistema são resumidos na Tabela 3.2.



**Fig. 3.26** Sistema de acionamento por correia para impressora.



**Fig. 3.27** Modelo de acionador de correia para impressora.

Serão escritas agora as equações de movimento para o sistema; note-se que  $y = r\theta_p$ . Então, a tensão  $T_1$  é

$$T_1 = k(r\theta - r\theta_p) = k(r\theta - y).$$

A tensão  $T_2$  é

$$T_2 = k(y - r\theta).$$

A tensão líquida aplicada à massa  $m$  é

$$T_1 - T_2 = m \frac{d^2y}{dt^2} \quad (3.122)$$

e

$$T_1 - T_2 = k(r\theta - y) - k(y - r\theta) = 2k(r\theta - y) = 2kx_1, \quad (3.123)$$

onde a primeira variável de estado é  $x_1 = (r\theta - y)$ . Seja a segunda variável de estado  $x_2 = dy/dt$  e se faça uso das Eqs. (3.122) e (3.123) para obter

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{2k}{m} x_1. \quad (3.124)$$

A primeira derivada de  $x_1$  é

$$\frac{dx_1}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} - \frac{dy}{dt} = rx_3 - x_2 \quad (3.125)$$

quando se seleciona a terceira variável de estado como  $x_3 = d\theta/dt$ . Requer-se agora uma equação diferencial descrevendo a rotação do motor. Quando  $L = 0$ , tem-se a corrente de campo  $i = v_2/R$  e o torque do motor  $T_m = K_m i$ . Por conseguinte,

$$T_m = \frac{K_m}{R} v_2,$$

e o torque do motor fornece o torque para acionar as correias mais as perturbações ou torques de carga indesejados, de modo que

$$T_m = T + T_d.$$

O torque  $T$  aciona o eixo da polia de modo que

$$T = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + r(T_1 - T_2).$$

Por conseguinte, nota-se que

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2},$$

e portanto

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{(T_m - T_d)}{J} - \frac{b}{J} x_3 - \frac{2kr}{J} x_1,$$

onde

$$T_m = \frac{K_m}{R} v_2, \quad \text{e} \quad v_2 = -k_1 k_2 \frac{dy}{dt} = -k_1 k_2 x_2.$$

Por conseguinte, obtém-se

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{-K_m k_1 k_2}{JR} x_2 - \frac{b}{J} x_3 - \frac{2kr}{J} x_1 - \frac{T_d}{J}. \quad (3.126)$$

As equações (3.124) a (3.126) são as três equações diferenciais de primeira ordem exigidas para descrever este sistema. A equação diferencial matricial é

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & r \\ \frac{2k}{m} & 0 & 0 \\ \frac{-2kr}{J} & \frac{-K_m k_1 k_2}{JR} & \frac{-b}{J} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{J} \end{bmatrix} T_d. \quad (3.127)$$

O diagrama de fluxo de sinal representando a equação diferencial matricial é mostrado na Fig. 3.28, onde se inclui a identificação do nó para o torque de perturbação  $T_d$ .

Pode-se utilizar o diagrama de fluxo para determinar a função de transferência  $X_1(s)/T_d(s)$ . O objetivo é reduzir o efeito da perturbação  $T_d$ , e a função de transferência mostrará como realizar este objetivo. Usando-se a fórmula de Mason para o ganho do diagrama de fluxo de sinal, obtém-se

$$\frac{X_1(s)}{T_d(s)} = \frac{-\frac{r}{J}s^{-2}}{1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1 L_2},$$

onde

$$L_1 = \frac{-b}{J}s^{-1}, \quad L_2 = \frac{-2k}{m}s^{-2}, \quad L_3 = \frac{-2kr^2s^{-2}}{J}, \quad L_4 = \frac{-2kK_m k_1 k_2 rs^{-3}}{mJR}.$$

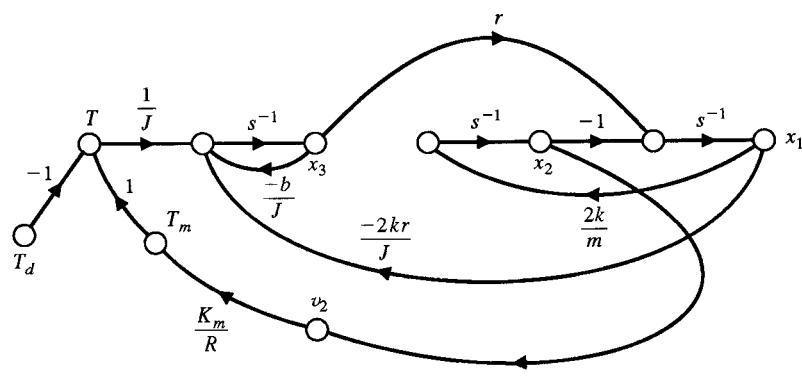
Portanto, tem-se

$$\frac{X_1(s)}{T_d(s)} = \frac{-\left(\frac{r}{J}\right)s}{s^3 + \left(\frac{b}{J}\right)s^2 + \left(\frac{2k}{m} + \frac{2kr^2}{J}\right)s + \left(\frac{2kb}{Jm} + \frac{2kK_m k_1 k_2 r}{JmR}\right)}.$$

Substituindo os valores dos parâmetros resumidos na Tabela 3.2, obtém-se

$$\frac{X_1(s)}{T_d(s)} = \frac{-15s}{s^3 + 25s^2 + 14,5ks + 1.000k(0,25 + 0,15k_2)}. \quad (3.128)$$

Deseja-se selecionar a constante de mola  $k$  e o ganho  $k_2$  de forma que a variável de estado  $x_1$  experimente uma redução rápida de valor quando ocorrer uma perturbação. Para fins de teste, considere-se um degrau de perturbação  $T_d(s) = a/s$ . Relembrando que  $x_1 = r\theta - y$ , busca-se uma pequena magnitu-



**Fig. 3.28** Modelo em diagrama de fluxo para acionador de correia para impressora.

de para  $x_1$  de forma que  $y$  seja praticamente igual ao valor desejado de  $r\theta$ . Se se tiver uma correia perfeitamente rígida com  $k \rightarrow \infty$ , então  $y = r\theta$ . Com um degrau de perturbação,  $T_d(s) = a/s$ , tem-se

$$X_1(s) = \frac{-15a}{s^3 + 25s^2 + 14,5ks + 1.000k(0,25 + 0,15k_2)}. \quad (3.129)$$

O teorema do valor final fornece

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX_1(s) = 0, \quad (3.130)$$

e assim o valor de estado estacionário de  $x_1(t)$  é zero. Precisa-se usar um valor realístico para  $k$  na faixa  $1 \leq k \leq 40$ . Para um valor médio de  $k = 20$  e  $k_2 = 0,1$ , tem-se

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{-15a}{s^3 + 25s^2 + 290s + 5300} \\ &= \frac{-15a}{(s + 22,56)(s^2 + 2,44s + 234,93)}. \end{aligned} \quad (3.131)$$

A equação característica possui uma raiz real e duas raízes complexas. A expansão em frações parciais conduz a

$$\frac{X_1(s)}{a} = \frac{A}{s + 22,56} + \frac{Bs + C}{(s + 1,22)^2 + (15,28)^2}, \quad (3.132)$$

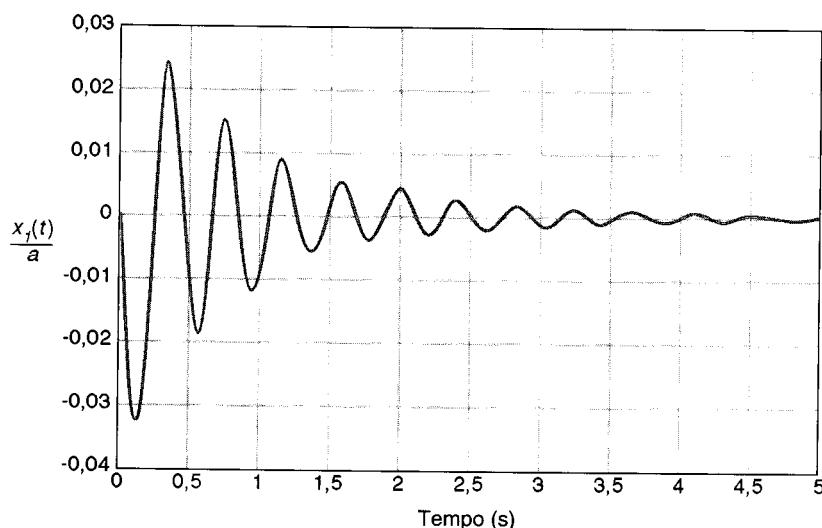
onde se encontra  $A = -0,0218$ ,  $B = 0,0218$ , e  $C = -0,4381$ . Obviamente, com estes resíduos pequenos a resposta para a perturbação unitária é relativamente pequena. Porque  $A$  e  $B$  são pequenos comparados com  $C$ , pode-se aproximar  $X_1(s)$  por

$$\frac{X_1(s)}{a} \cong \frac{-0,4381}{(s + 1,22)^2 + (15,28)^2}.$$

Usando a entrada 16 do Apêndice A, obtém-se

$$\frac{x_1(t)}{a} \cong -0,0287e^{-1,22t} \sin 15,28t. \quad (3.133)$$

A resposta real de  $x_1$  é mostrada na Fig. 3.29. Este sistema reduzirá o efeito da perturbação indesejada a uma magnitude relativamente pequena. Assim, foi alcançado o objetivo do projeto.



**Fig. 3.29** Resposta de  $x_1(t)$  para um degrau de perturbação: valor máximo = -0,0325.

### 3.11 ANÁLISE DE MODELOS COM VARIÁVEIS DE ESTADO USANDO O MATLAB

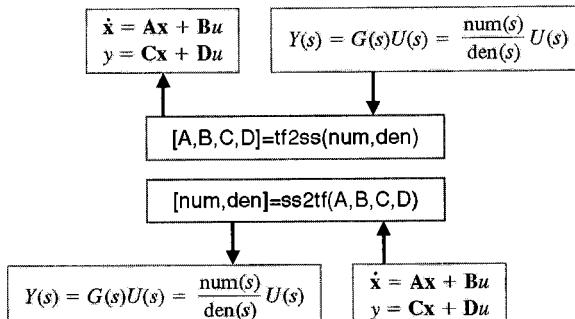
O método no domínio do tempo utiliza uma **representação no espaço de estados** de um modelo de sistema, dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}. \quad (3.134)$$

O vetor  $\mathbf{x}$  é o estado do sistema,  $\mathbf{A}$  é a matriz de sistema  $n \times n$  constante,  $\mathbf{B}$  é a matriz de entrada  $n \times m$  constante,  $\mathbf{C}$  é a matriz de saída  $p \times n$  constante e  $\mathbf{D}$  é uma matriz constante  $p \times m$ . O número de entradas,  $m$ , e o número de saídas,  $p$ , são consideradas uma única, pois estão sendo considerados somente problemas de única entrada, única saída (SISO). Por conseguinte,  $y$  e  $u$  não são variáveis representadas em negrito (matrizes).

Os principais elementos da representação no espaço de estados na Eq. (3.134) são o vetor de estado  $\mathbf{x}$  e as matrizes constantes ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ). Como a principal unidade computacional no MATLAB é a matriz, a representação no espaço de estados presta-se intrinsecamente bem ao ambiente do MATLAB. De fato, o MATLAB inclui tantos aspectos de métodos no espaço de estados que não seria possível discuti-los todos aqui. Três novas funções cobertas nesta seção são `tf2ss`, `ss2tf`, e `lsim`. Será considerado também o uso da função `expm` para calcular a matriz de transição de estados.

Dada uma função de transferência, pode-se obter uma representação no espaço de estados equivalente e vice-versa. O MATLAB tem duas funções que convertem sistemas a partir da função de transferência para o espaço de estados e de volta para a função de transferência. A função `tf2ss` converte uma representação em função de transferência para uma representação no espaço de estados; a função `ss2tf` converte uma representação no espaço de estados para uma função de transferência. Estas funções são mostradas na Fig. 3.30.



**Fig. 3.30** Conversão de modelo de sistema linear.

Por exemplo, considere-se o sistema de terceira ordem

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2s^2 + 8s + 6}{s^3 + 8s^2 + 16s + 6}. \quad (3.135)$$

Pode-se obter uma representação no espaço de estados com variáveis de fase usando a função `tf2ss`, como mostrado na Fig. 3.31. A representação no espaço de estados da Eq. (3.135) é dada pela Eq. (3.134), onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -8 & -16 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbf{C} = [2 \ 8 \ 6], \quad \mathbf{D} = [0].$$

Note-se que o formato no espaço de estados chamado por `tf2ss` utiliza as variáveis de estado definidas como apresentado na Fig. 3.32, que mostra  $x_1$  no integrador da extremidade esquerda.

A resposta no domínio do tempo do sistema da Eq. (3.134) é dada pela solução da equação diferencial vetorial

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \exp[\mathbf{A}(t - \tau)]\mathbf{B}u(\tau)d\tau. \quad (3.136)$$

A função exponencial matricial na Eq. (3.136) é a matriz de transição de estados,  $\Phi(t)$ , onde (Eq. 3.23)

$$\Phi(t) = \exp(\mathbf{A}t).$$

Pode-se usar a função `expm` para calcular a matriz de transição para um dado instante de tempo, como ilustrado na Fig. 3.33. A função `expm(A)` calcula a exponencial matricial. Em contraste, a função `exp(A)` calcula  $e^{a_{ij}}$  para cada um dos elementos  $a_{ij} \in \mathbf{A}$ .

Fl  
(3  
re  
fa  
sa

Fig  
dia  
co  
var  
esc

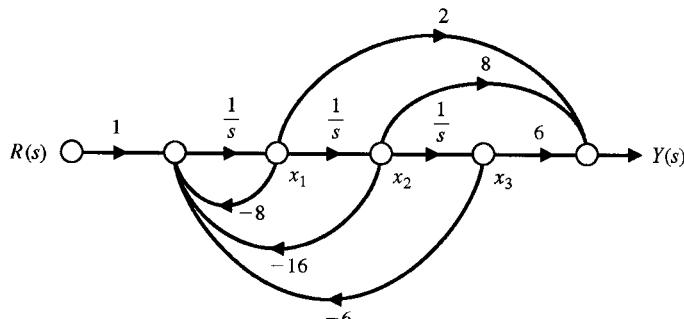
```
convert.m
%
% Converte G(s) = (2s^2+8s+6)/(s^3+8s^2+16s+6)
% em uma representação no espaço de estados
%
num=[2 8 6]; den=[1 8 16 6];
[A,B,C,D]=tf2ss(num,den);
printsys(A,B,C,D)
```

(a)

```
>>convert
a =
      x1        x2        x3
x1   -8.00000   -16.00000  -6.00000
x2    1.00000     0         0
x3     0         1.00000     0
b =
      u1
x1   1.00000
x2   0
x3   0
c =
      x1        x2        x3
y1   2.00000   8.00000   6.00000
d =
      u1
y1   0
```

(b)

**Fig. 3.31** Conversão da Eq. (3.135) para uma representação no espaço de estados com variáveis de fase. (a) Script MATLAB, (b) saída impressa.



**Fig. 3.32** Modelo em diagrama de fluxo de sinal com  $x_i$  sendo definida como a variável de estado mais à esquerda.

Por exemplo, seja considerar o circuito RLC da Fig. 3.4 descrito pela representação da Eq. (3.18) com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0], \quad \mathbf{D} = 0.$$

As condições iniciais são  $x_1(0) = x_2(0) = 1$  e a entrada  $u(t) = 0$ . Em  $t = 0,2$ , a matriz de transição de estados é dada na Fig. 3.33. O estado em  $t = 0,2$  é dado pelos métodos de transição de estado para ser

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{t=0,2} = \begin{bmatrix} 0,9671 & -0,2968 \\ 0,1484 & 0,5219 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} 0,6703 \\ 0,6703 \end{pmatrix}.$$

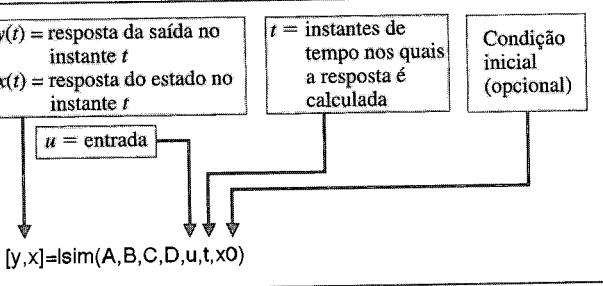
A resposta no domínio do tempo do sistema da Eq. (3.134) pode também ser obtida usando a função **lsim**. A função **lsim** pode receber como entrada condições iniciais não-nulas bem como uma função de entrada, como mostrado na Fig. 3.34. Usando a função **lsim**, pode-se calcular a resposta do circuito RLC como mostrado na Fig. 3.35.

**Fig. 3.33** Calculando a matriz de transição de estados para um tempo dado,  $\Delta t = dt$ .

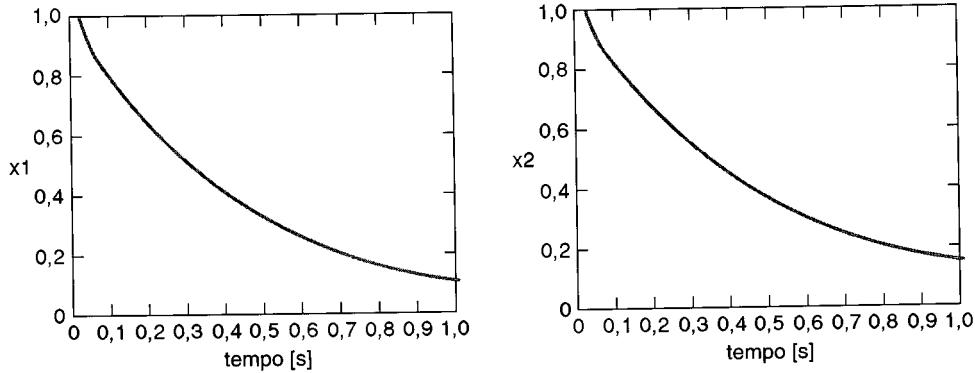
```
>>A=[0 -2; 1 -3]; dt=0.2; Phi=expm(A*dt)

Phi =
0,9671 -0,2968
0,1484 0,5219
```

Matriz de transição de estados para um  $\Delta t$  de 0,2 segundo



**Fig. 3.34** A função lsim para calcular a saída e a resposta de estado.



respostanotempo.m

```
A=[0 -2;1 -3];
B=[2;0];
C=[1 0];
D=[0];
x0=[1 1];
t=[0:0.01:1];
u=0*t;
[y,x]=lsim(A,B,C,D,u,t,x0);
subplot(211), plot(t,x(:,1))
xlabel('tempo [s]', ylabel('x1')
subplot(212), plot(t,x(:,2))
xlabel('tempo [s]', ylabel('x2')
```

Modelo no espaço de estados

Condições iniciais

Entrada zero

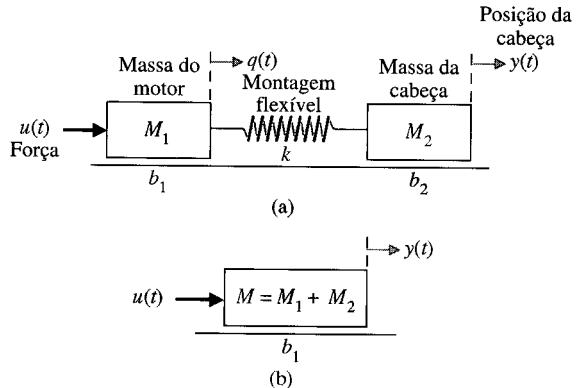
**Fig. 3.35** Calculando a resposta no domínio do tempo para condições iniciais não-nulas e entrada zero usando lsim.

Prevê-se que o estado em  $t = 0,2$  com a função lsim como sendo  $x_1(0,2) = x_2(0,2) = 0,6703$ . Se for possível comparar os resultados obtidos pela função lsim com os obtidos multiplicando-se o vetor de condição inicial de estado pela matriz de transição de estados, serão encontrados resultados exatamente idênticos.

### 3.12 EXEMPLO DE PROJETO SEQÜENCIAL: SISTEMA DE LEITURA DO ACIONADOR DE DISCO



Discos avançados possuem tanto quanto 5.000 trilhas por cm. Estas trilhas são tipicamente 1  $\mu\text{m}$  de largura. Conseqüentemente, existem severas exigências quanto à precisão do posicionamento da cabeça leitora e do movimento de uma trilha para outra. Neste capítulo será desenvolvido um modelo em variáveis de estado de um sistema acionador de disco que irá incluir o efeito da montagem flexível.



**Fig. 3.36** (a) Modelo do sistema de duas massas com uma mola. (b) Modelo simplificado com uma mola rígida.

Reconsidere-se a montagem da cabeça mostrada na Fig. 2.61. Uma vez que se deseja um braço leve e uma articulação para movimento rápido, deve-se considerar o efeito da montagem, que é uma peça muito fina constituída por uma lâmina de aço. Uma vez mais, deseja-se controlar com precisão a posição da cabeça  $y(t)$  conforme mostrado na Fig. 3.36(a) (passo 2 do procedimento de projeto da Fig. 1.19). Será feita uma tentativa para deduzir um modelo para o sistema mostrado na Fig. 3.36(a). Identificam-se, aqui, a massa do motor como  $M_1$  e a massa de montagem da cabeça como  $M_2$ . A mola da montagem é representada pela constante de mola  $k$ . A força  $u(t)$  para acionar a massa  $M_1$  é gerada pelo motor CC. Se a montagem for absolutamente rígida (sem efeito de mola), então se obtém o modelo simplificado mostrado na Fig. 3.36(b). Parâmetros típicos para o sistema de duas massas são dados na Tabela 3.3.

Seja obter o modelo em função de transferência do sistema simplificado da Fig. 3.36(b) (passo 5 do procedimento de projeto da Fig. 1.19). Note-se que  $M = M_1 + M_2 = 20,5 \text{ g} = 0,0205 \text{ kg}$ .

Tem-se, então,

$$M \frac{d^2y}{dt^2} + b_1 \frac{dy}{dt} = u(t). \quad (3.137)$$

Por conseguinte, o modelo sob a forma de função de transferência é

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(Ms + b_1)}.$$

Para os parâmetros da Tabela 3.3, obtém-se

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(0,0205s + 0,410)} = \frac{40}{s(s + 20)}.$$

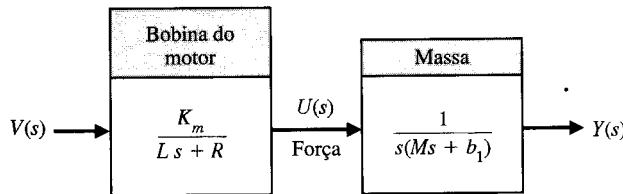
O modelo em função de transferência da cabeça leitora, incluindo o efeito da bobina motora, é mostrado na Fig. 3.37. Quando  $R = 1\Omega$ ,  $L = 1\text{mH}$ , e  $K_m = 125$ , obtém-se

$$G(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{5.000}{s(s + 20)(s + 1.000)}, \quad (3.138)$$

que é exatamente o mesmo modelo obtido no Cap. 2.

**TABELA 3.3 Parâmetros Típicos do Modelo Duas Massas**

Parâmetro	Símbolo	Valor
Massa do motor	$M_1$	$20 \text{ g} = 0,02 \text{ kg}$
Montagem flexível	$k$	$10 \leq k \leq \infty$
Montagem da cabeça	$M_2$	$0,5 \text{ g} = 0,0005 \text{ kg}$
Posição da cabeça	$x_2(t)$	variável, em mm
Atrito da massa 1	$b_1$	$410 \times 10^{-3} \text{ kg/m/s}$
Resistência do campo	$R$	$1\Omega$
Indutância do campo	$L$	$1\text{mH}$
Constante do motor	$K_m$	$125 \text{ N}\cdot\text{m/A}$
Atrito da massa 2	$b_2$	$4,1 \times 10^{-3} \text{ kg/m/s}$



**Fig. 3.37** Modelo em função de transferência do dispositivo da cabeça leitora com uma mola rígida.

Seja agora obter o modelo em variáveis de estado do sistema de duas massas mostrado na Fig. 3.36(a). Escrevem-se as equações diferenciais como

$$\begin{aligned} \text{Massa } M_1: M_1 \frac{d^2q}{dt^2} + b_1 \frac{dq}{dt} + k(q - y) &= u(t) \\ \text{Massa } M_2: M_2 \frac{d^2y}{dt^2} + b_2 \frac{dy}{dt} + k(y - q) &= 0 \end{aligned}$$

Para desenvolver o modelo em variáveis de estado, escolhem-se as variáveis  $x_1 = q$  e  $x_2 = y$ . Tem-se, então,

$$x_2 = \frac{dq}{dt} \quad \text{e} \quad x_4 = \frac{dy}{dt}.$$

Então, sob forma matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

tem-se

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} q \\ y \\ \dot{q} \\ \dot{y} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/M_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/M_1 & k/M_1 & -b_1/M_1 & 0 \\ k/M_2 & -k/M_2 & 0 & -b_2/M_2 \end{bmatrix}. \quad (3.139)$$

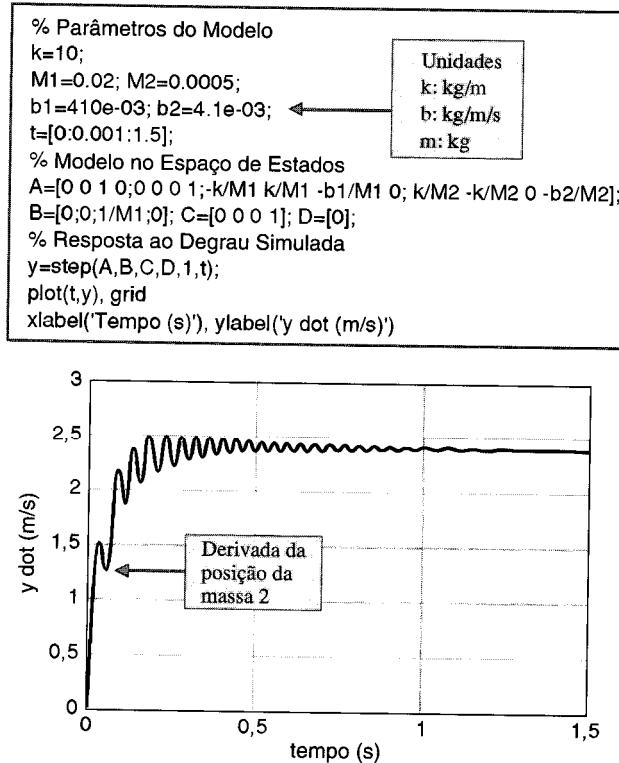
Note-se que a saída é  $\dot{y}(t) = x_4$ . Além disso, para  $L = 0$  ou indutância insignificante, então  $u(t) = K_m v(t)$ . Para os parâmetros típicos e para  $k = 10$ , tem-se

$$\mathbf{B}^T = [0 \ 0 \ 50 \ 0]$$

e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -500 & +500 & -20,5 & 0 \\ +20.000 & -20.000 & 0 & -8,2 \end{bmatrix}$$

A resposta de  $\dot{y}$  para  $v(t) = 1 \text{ V}, t > 0$  está mostrada na Fig. 3.38. Esta resposta é bastante oscilatória, e é claro que se deseja uma montagem muito rígida de modo que  $k > 100$ .



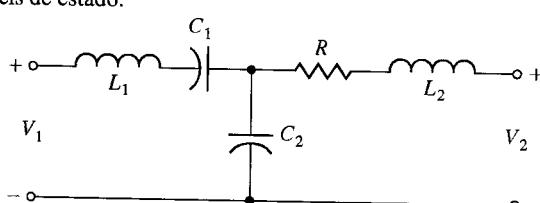
**Fig. 3.38** Resposta de  $y$  a um degrau de entrada para o modelo de duas massas com  $k = 10$ .

### 3.13 SUMÁRIO

Neste capítulo foram consideradas a descrição e a análise de sistemas no domínio de tempo. Foram discutidos o conceito de estado de um sistema e a definição de variáveis de estado de um sistema. Foi examinada a seleção de um conjunto de variáveis de estado em termos de variáveis que descrevem o armazenamento de energia de um sistema, e se observou a não-unicidade de um conjunto de variáveis de estado. Foram discutidas a equação diferencial de estado e a solução para  $\mathbf{x}(t)$ . Duas alternativas de estruturas de modelo em diagrama de fluxo de sinal foram consideradas para representar a função de transferência (ou a equação diferencial) de um sistema. Usando a fórmula de Mason do ganho de um diagrama de fluxo de sinal, notou-se a facilidade em obter um modelo de diagrama de fluxo. A equação diferencial de estado representando estes modelos de diagrama de fluxo também foi examinada. A resposta no domínio do tempo de um sistema linear e sua matriz de transição associada foi discutida, e a utilidade da fórmula de Mason do ganho do diagrama de fluxo de sinal para obtenção da matriz de transição foi ilustrada. Foram também considerados o cálculo discreto no tempo da resposta de um sistema não-linear e de um sistema de variante no tempo. Constatou-se que a aproximação discreta para uma resposta no domínio do tempo, bem como a formulação da matriz de transição para sistemas lineares, é facilmente tratável para programação e solução usando um computador digital. O uso do MATLAB para converter uma função de transferência para a forma de variáveis de estado e calcular a matriz de transição de estados foi discutido e ilustrado. O capítulo foi concluído com o desenvolvimento de um modelo em variáveis de estado para o Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura do Acionador de Disco.

### EXERCÍCIOS

- E3.1 Para o circuito mostrado na Fig. E3.1 identificar um conjunto de variáveis de estado.



**Fig. E3.1**  
Círculo RLC.

- E3.2 Um sistema de acionamento do braço de um robô para uma junta de articulação pode ser representado por uma equação diferencial [8]

$$\frac{dv(t)}{dt} = -k_1 v(t) - k_2 y(t) + k_3 i(t),$$

onde  $v(t)$  = velocidade,  $y(t)$  = posição, e  $i(t)$  é a corrente do motor de controle. Expressar as equações na forma de variáveis de estado e configurar a forma matricial para  $k_1 = k_2 = 1$ .

- E3.3** Um sistema pode ser representado pela equação diferencial do vetor de estado da Eq. (3.16) onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Achar as raízes características do sistema.

**Resposta:**  $s = -1/2 \pm j\sqrt{3}/2$

- E3.4** Obter a forma matricial de variáveis de estado com variáveis de fase para um sistema com equação diferencial

$$2 \frac{d^3y}{dt^3} + 4 \frac{d^2y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 8y = 10u(t).$$

- E3.5** Um sistema é representado por um diagrama de fluxo conforme mostrado na Fig. E3.5. Escrever as equações de estado para este diagrama de fluxo na forma das Eqs. (3.16) e (3.17)

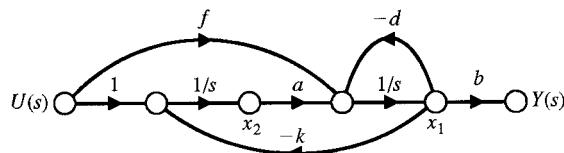


Fig. E3.5 Diagrama de fluxo de um sistema.

- E3.6** Um sistema está representado pela Eq. (3.16) onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Encontrar a matriz  $\Phi(t)$ . (b) Para condições iniciais  $x_1(0) = x_2(0) = 1$ , encontrar  $\mathbf{x}(t)$ .

**Resposta:** (b)  $x_1 = (1+t)$ ,  $x_2 = 1$ ,  $t \geq 0$

- E3.7** Considerar a mola e a massa mostrados na Fig. 3.3 onde  $M = 1$  kg,  $k = 100$  N/m, e  $b = 20$  N/m.s. (a) Achar a equação diferencial do vetor de estado. (b) Determinar as raízes da equação característica para este sistema.

**Resposta:** (a)  $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -20 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

(b)  $s = -10, -10$

- E3.8** A tarefa de pairar em baixa altitude sobre uma pista de aterrissagem móvel de um pequeno navio, sob comando manual, é muito difícil, em particular sob condições adversas de tempo e de mar. A condição de pairar é representada pela matriz  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Achar as raízes da equação característica.

- E3.9** Um circuito livre é mostrado na Fig. E3.9. As variáveis de estado físicas são escolhidas como sendo a carga em cada capacitor de modo que  $x_1 = q_1$  e  $x_2 = q_2$ . (a) Determinar o modelo em diagrama de fluxo com variáveis de estado físicas e obter a equação diferencial matricial. (b) Determinar o modelo em diagrama de fluxo diagonal (canônico) e a equação diferencial matricial. Observar que  $i_1 = dq_1/dt = dx_1/dt$  e  $i_2 = dq_2/dt$ . Admitir que a variável de saída é a corrente  $i_2$ .

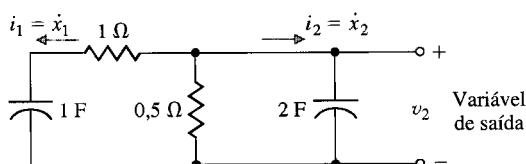


Fig. E3.9 Circuito RC.

- E3.10** Um sistema de controle de um veículo flutuante (disco voador) é representado por duas variáveis de estado, e [15]

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

(a) Achar as raízes da equação característica.

(b) Achar a matriz de transição de estados  $\Phi(t)$ .

**Resposta:** (a)  $s = -3, -2$

(b)  $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} & -2e^{-3t} & -6e^{-3t} + 6e^{-2t} \\ e^{-3t} & e^{-2t} & 3e^{-3t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix}$

- E3.11** Determinar a descrição em variáveis de estado no formato de variáveis de fase para o sistema descrito pela função de transferência

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{4(s+3)}{(s+2)(s+4)}.$$

- E3.12** Usar um modelo em variáveis de estado para descrever o circuito da Fig. E3.12. Obter a resposta a uma entrada em degrau unitário para corrente inicial zero e tensão inicial no capacitor igual a zero.

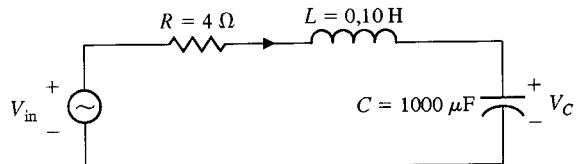


Fig. E3.12 Circuito RLC série.

- E3.13** Um sistema é descrito por duas equações diferenciais como

$$\frac{dy}{dt} + y - 2u + aw = 0,$$

$$\frac{dw}{dt} - by + 4u = 0,$$

onde  $w$  e  $y$  são funções do tempo e  $u$  é uma entrada  $u(t)$ . (a) Selecionar um conjunto de variáveis de estado. (b) Escrever a equação diferencial matricial e especificar os elementos das matrizes. (c) Determinar as raízes características do sistema em termos dos parâmetros  $a$  e  $b$ .

**Resposta:** (c)  $s = -1/2 \pm \sqrt{1 - 4ab}/2$

- E3.14** Desenvolver a representação no espaço de estados de um material radioativo de massa  $M$  ao qual é acrescentado material radioativo adicional à taxa  $r(t) = Ku(t)$ , onde  $K$  é uma constante. Identificar as variáveis de estado.

- E3.15** Considere-se o caso de duas massas conectadas como mostrado na Fig. E3.15. O atrito de deslizamento de cada massa tem a constante  $b$ . Determinar a equação diferencial de estado na forma matricial.

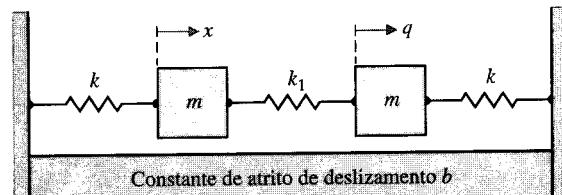


Fig. E3.15 Sistema de duas massas.

- E3.16** Dois carros com atrito de rolamento insignificante são conectados como mostrado na Fig. E3.16. A força de entrada é  $u(t)$ . Determinar a equação diferencial em variáveis de estado matricial.

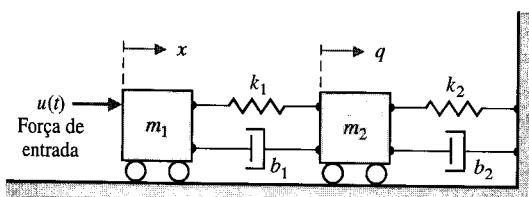


Fig. E3.16 Dois carros com atrito de rolo insignificante.

- E3.17** Determinar a equação diferencial matricial em variáveis de estado para o circuito mostrado na Fig. E3.17.

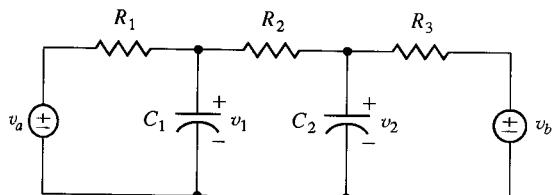


Fig. E3.17 Circuito RC.

- E3.18** Determinar a equação diferencial matricial em variáveis de estado para o circuito mostrado na Fig. E3.18. Fazer  $x_1 = i_1$ ,  $x_2 = i_2$  e  $x_3 = v$ .

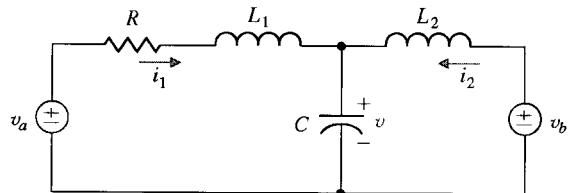


Fig. E3.18 Circuito RLC.

- E3.19** Um sistema de entrada única e saída única apresenta as equações matriciais

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

e

$$y = [10 \quad 0] \mathbf{x}.$$

Determinar a função de transferência  $G(s) = Y(s)/U(s)$  usando (a) o modelo de diagrama de fluxo de sinal e (b)  $\Phi(s)$ , transformada da inversa da matriz  $(sI - A)$ .

$$\text{Resposta: } G(s) = \frac{10}{s^2 + 4s + 3}$$

## PROBLEMAS

- P3.1** Um circuito RLC é mostrado na Fig. P3.1. (a) Identificar um conjunto adequado de variáveis de estado. (b) Obter o conjunto de equações diferenciais de primeira ordem em termo das variáveis de estado. (c) Escrever a equação diferencial de estado. (d) Desenhar o diagrama de fluxo em variáveis de estado.

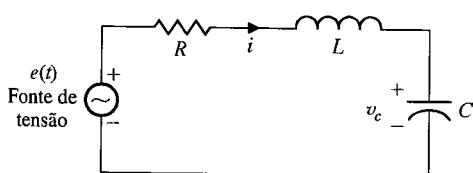


Fig. P3.1 Circuito RLC.

- P3.2** Um circuito em ponte equilibrada é mostrado na Fig. P3.2. (a) Mostrar que as matrizes A e B para este circuito são

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(2/(R_1 + R_2))C & 0 \\ 0 & -2R_1R_2/(R_1 + R_2)L \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = 1/(R_1 + R_2) \begin{bmatrix} 1/C & 1/C \\ R_2/L & -R_2/L \end{bmatrix}.$$

- (b) Esboçar o modelo de estado em diagrama de fluxo. As variáveis de estado são  $(x_1, x_2) = (v_c, i_L)$ .

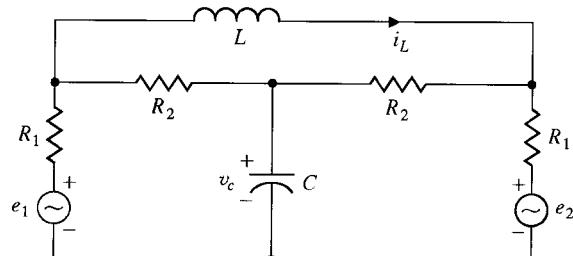


Fig. P3.2 Circuito em ponte equilibrada.

- P3.3** Um circuito RLC é mostrado na Fig. P3.3. Definir as variáveis de estado como  $x_1 = i_L$  e  $x_2 = v_c$ . (a) Obter a equação diferencial de estado. (b) Esboçar o modelo de estado em diagrama de fluxo.

**Resposta parcial:**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ -(1/C) & -(1/RC) \end{bmatrix}.$$

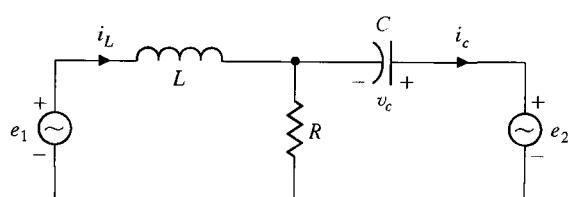


Fig. P3.3 Circuito RLC.

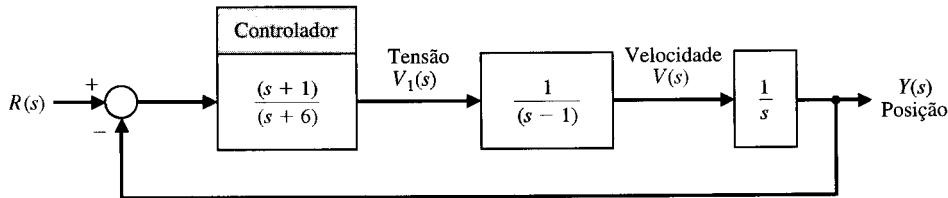


Fig. P3.5 Sistema a malha fechada.

**P3.4** A função de transferência de um sistema é

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 2s + 5}{s^3 + 2s^2 + 3s + 10}.$$

Esboçar o modelo em diagrama de fluxo e determinar a equação diferencial matricial em variáveis de estado para os seguintes formatos: (a) variáveis de fase, (b) entrada com ação à frente (*feedforward*).

- P3.5** Um sistema de controle a malha fechada é mostrado na Fig. P3.5.  
 (a) Determinar a função de transferência a malha fechada  $T(s) = Y(s)/R(s)$ . (b) Esboçar o modelo de estado em diagrama de fluxo para o sistema e determinar a equação diferencial matricial no formato de variáveis de fase. (c) Esboçar o modelo em diagrama de fluxo de sinal e determinar a equação diferencial matricial para as variáveis físicas mostradas na Fig. P3.5.
- P3.6** Determinar a equação matricial em variáveis de estado para o circuito mostrado na Fig. P3.6. Fazer  $x_1 = v_1$ ,  $x_2 = v_2$  e  $x_3 = i$ .

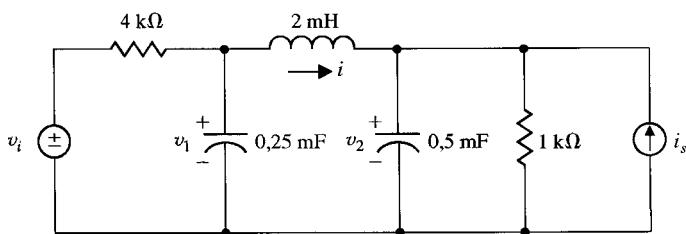


Fig. P3.6 Circuito RLC.

- P3.7** Um sistema de controle de profundidade automático para um robô submarino é mostrado na Fig. P3.7. A profundidade é medida por um transdutor de pressão. O ganho do atuador da superfície de popa é  $K = 1$  quando a velocidade vertical é 25 m/s. O submarino tem a função de transferência aproximada

$$G(s) = \frac{(s+1)^2}{(s^2+1)},$$

e o transdutor de retroação é  $H(s) = 2s + 1$ . (a) Obter o modelo de estado em diagrama de fluxo. (b) Determinar a equação diferencial de estado para o sistema. (c) Determinar se o sistema é estável.

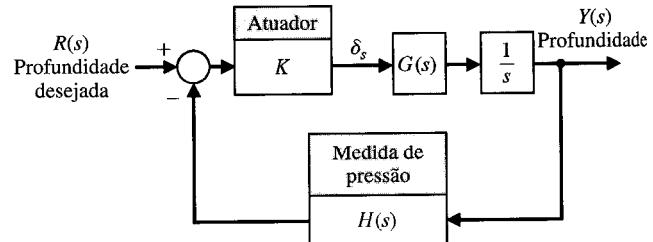


Fig. P3.7 Controle de profundidade de um submarino.

- P3.8** O pouso suave de um módulo lunar descendo na Lua pode ser modelado como mostrado na Fig. P3.8. Definir como variáveis de estado  $x_1 = y$ ,  $x_2 = dy/dt$ ,  $x_3 = m$  e o controle como  $u = dm/dt$ . Admitir que  $g$  é a aceleração da gravidade na lua. Obter as equações no espaço de estados para este sistema. Este modelo é linear?

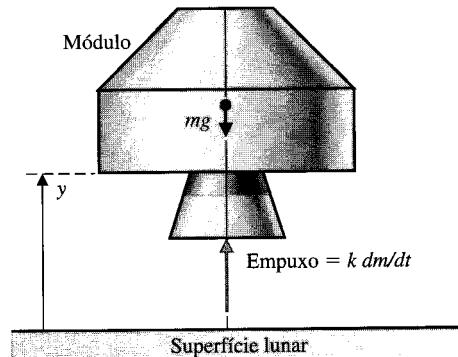


Fig. P3.8 Controle de alunissagem de módulo lunar.

- P3.9** Pode-se projetar um sistema de controle de velocidade utilizando componentes de fluxo de fluido. O sistema é um sistema de controle totalmente de fluido porque não pode ter quaisquer partes mecânicas em movimento. O fluido pode ser um gás ou um líquido. Deseja-se que o sistema mantenha a velocidade dentro de 0,5% da velocidade desejada usando uma alavanca de referência e uma válvula atuadora. Os sistemas de controle de fluido são robustos e confiáveis sobre uma ampla faixa de valores de

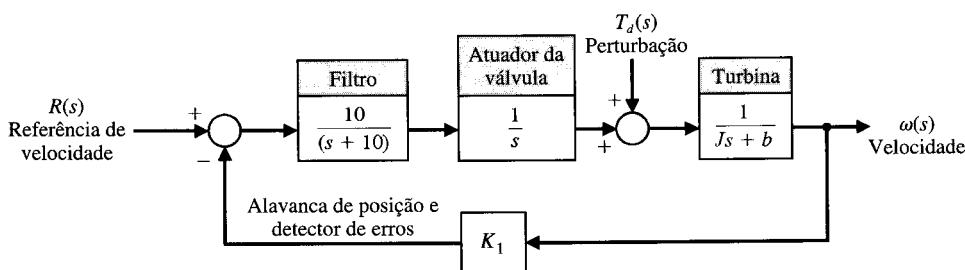


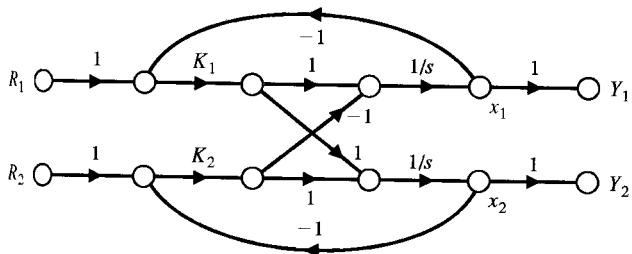
Fig. P3.9 Controle de turbina a vapor.

temperatura, de radiação electromagnética e nuclear, de aceleração e de vibração. A amplificação no sistema é realizada usando um amplificador de deflexão de jato de fluido. O sistema pode ser projetado para uma turbina a vapor de 500 kW com uma velocidade de 12.000 rpm. O diagrama de blocos do sistema é mostrado na Fig. P3.9. Em unidades adimensionais tem-se  $b = 0,1$ ,  $J = 1$  e  $K_1 = 0,5$ . (a) Determinar a função de transferência a malha fechada

$$T(s) = \frac{\omega(s)}{R(s)},$$

e esboçar o modelo de estado em diagrama de fluxo para a forma da Fig. 3.8, onde todas as variáveis de estado apresentam retroação para o nó de entrada. (b) Determinar a equação diferencial do vetor de estado. (c) Determinar a equação característica obtida a partir da matriz A.

**P3.10** Muitos sistemas de controle devem operar em duas dimensões, por exemplo, segundo os eixos x e y. Um sistema de controle de dois eixos é mostrado na Fig. P3.10, onde é identificado um conjunto de variáveis de estado. O ganho de cada eixo é  $K_1$  e  $K_2$ , respectivamente. (a) Obter a equação diferencial de estado. (b) Determinar a equação característica a partir da matriz A. (c) Determinar a matriz de transição de estados para  $K_1 = 1$  e  $K_2 = 2$ .



**Fig. P3.10** Sistema de dois eixos.

**P3.11** Um sistema é descrito pela Eq. 3.16 com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Com  $u(t) = 0$ , e  $x_1(0) = x_2(0) = 10$ . Determinar  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ .

**P3.12** Um sistema é descrito por sua função de transferência

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{8(s + 5)}{s^3 + 12s^2 + 44s + 48}.$$

- Determinar a representação em variáveis de fase.
- Determinar a representação canônica da equação matricial de estado.
- Determinar  $\Phi(t)$ , a matriz de transição de estados.

**P3.13** Reconsiderar o circuito RLC do Problema P3.1 onde  $R = 2,5$ ,  $L = 1/4$  e  $C = 1/6$ . (a) Determinar se o sistema é estável obtendo a equação característica com ajuda da matriz A. (b) Determinar a matriz de transição do circuito. (c) Quando a corrente inicial no indutor for 0,1 A,  $v_c(0) = 0$ , e  $e(t) = 0$ , determinar a resposta do sistema. (d) Repetir a parte (c) quando as condições iniciais forem iguais a zero e  $e(t) = E$ , para  $t > 0$ , onde  $E$  é uma constante.

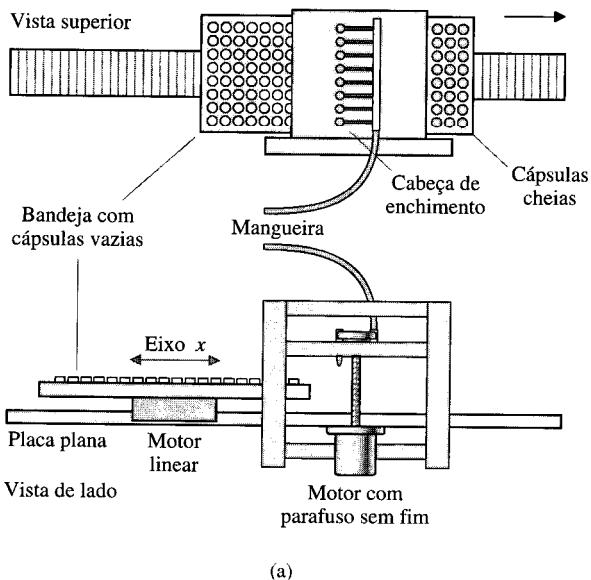
**P3.14** Determinar o modelo em diagrama de fluxo de sinal e a equação diferencial matricial usando o formato das variáveis de fase para um sistema com a função de transferência

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{s^2 + 7s + 2}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}.$$

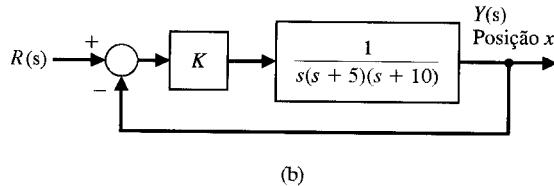
**P3.15** Determinar o modelo em diagrama de fluxo de sinal e a equação diferencial matricial para (a) o formato variáveis de fase e (b) o formato canônico (diagonal) quando

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{5(s + 6)}{s^3 + 10s^2 + 31s + 30}.$$

**P3.16** Um sistema para alimentar cápsulas com fluido radioativo é mostrado na Fig. P3.16(a). O eixo horizontal movendo a bandeja das cápsulas é acionado por um motor linear. O controle do eixo x é mostrado na Fig. 3.16(b). Admitir  $K = 500$ . Obter (a) uma representação em variáveis de estado e (b) a resposta do sistema a um degrau unitário. (c) Determinar as raízes características do sistema.



(a)



**Fig. P3.16** Distribuidor de fluido automático.

**P3.17** A dinâmica de um submarino controlado é significativamente diferente da de um avião, míssil, ou navio de superfície. Esta diferença resulta primordialmente do momento no plano vertical devido ao efeito do empuxo. Portanto, é interessante considerar o controle da profundidade de um submarino. As equações que descrevem a dinâmica do submarino que podem ser obtidas usando as leis de Newton e os ângulos definidos na Fig. P3.17. Para simplificar as equações, será admitido que  $\theta$  é um ângulo pequeno e que a velocidade  $v_r$  é constante e igual a 25 ft/s. As variáveis de estado do submarino, considerando somente o controle vertical, são  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = d\theta/dt$ , e  $x_3 = \alpha$ , onde  $\alpha$  é ângulo de ataque. Assim, a equação diferencial do vetor de estado para este sistema, quando o submarino tem um casco do tipo Albacore, é

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0,0071 & -0,111 & 0,12 \\ 0 & 0,07 & -0,3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0,095 \\ +0,072 \end{bmatrix} u(t),$$

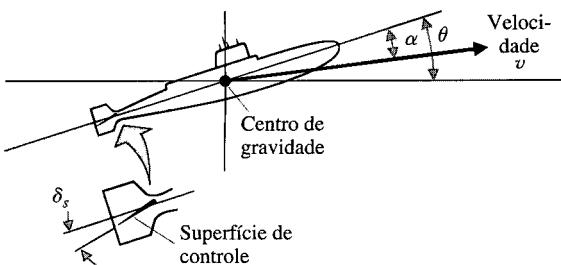


Fig. P3.17 Controle de profundidade de um submarino.

onde  $u(t) = \delta_s(t)$ , a deflexão da superfície de popa. (a) Determinar se o sistema é estável. (b) Usando a aproximação discreta, determinar a resposta do sistema a um comando em degrau de  $0,285^\circ$  da superfície de popa com condições iniciais iguais a zero. Usar um incremento de tempo  $T$  igual a 2 segundos. (c) Usando um incremento de tempo  $T = 0,5$  segundo e um computador digital, obter a resposta transitória para cada estado a intervalos de 80 segundos. Comparar a resposta calculada com as partes (b) e (c).

**P3.18** Um sistema é descrito por equações em variáveis de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 10 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [20 \quad 30 \quad 10] \mathbf{x}.$$

Determinar  $G(s) = Y(s)/U(s)$ .

**P3.19** Considerar o controle do robô mostrado na Fig. P3.19. O motor girando no cotovelo move o pulso através do antebraço, que possui alguma flexibilidade, como está mostrado [16]. A mola tem uma constante de mola  $k$  e a constante de amortecimento é  $b$ . Sejam as variáveis de estado  $x_1 = \phi_1 - \phi_2$  e  $x_2 = \omega_1/\omega_0$ , onde

$$\omega_0^2 = \frac{k(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}.$$

Escrever a equação das variáveis de estado na forma de matriz quando  $x_3 = \omega_2/\omega_0$ .

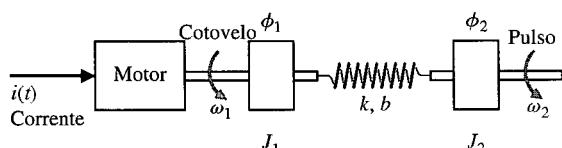


Fig. P3.19 Um robô industrial. (Cortesia da GCA Corporation.)

**P3.20** A derivada de uma variável de estado pode ser aproximada pela equação

$$\dot{x}(t) \approx \frac{1}{2T}[3x(k+1) - 4x(k) + x(k-1)].$$

Esta aproximação da derivada utiliza dois valores passados para estimar a derivada, enquanto que a Eq. (3.89) usa um valor passado de variável de estado. Usando esta aproximação para a derivada, repetir os cálculos para o Exemplo 3.6. Comparar a aproximação resultante para  $x_1(t)$ ,  $T = 0,2$ , com os resultados dados na Tabela 3.1. Esta é uma aproximação mais precisa?

**P3.21** Um reator nuclear que estava operando em equilíbrio com um elevado fluxo de nêutrons térmicos é parado repentinamente. No fechamento, as densidades de xenônio 135(X) e de iodo 135(I)

são  $7 \times 10^{16}$  e  $3 \times 10^{15}$  átomos por unidade de volume, respectivamente. As vidas médias das partículas de I 135 e Xe 135 são 6,7 e 9,2 horas, respectivamente. As equações de decaimento são [17, 23]

$$\dot{I} = -\frac{0,693}{6,7} I, \quad \dot{X} = -\frac{0,693}{9,2} X - I.$$

Determinar as concentrações de I 135 e Xe 135 como funções do tempo após a parada determinando (a) a matriz de transição e a resposta do sistema e (b) o cálculo discreto no tempo da resposta. Verificar que a resposta do sistema é a mostrada na Fig. P3.21.

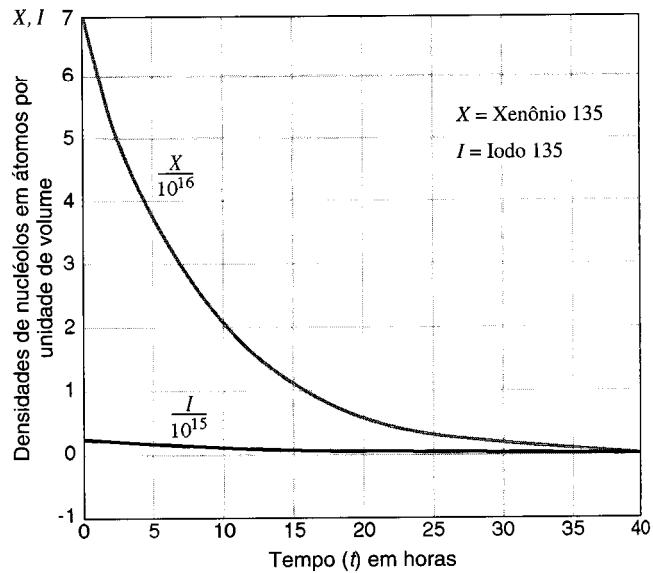


Fig. P3.21 Resposta de um reator nuclear.

**P3.22** Há várias formas que são equivalentes aos modelos de estado em diagrama de fluxo de sinal. Dois modelos de estado em diagrama de fluxo equivalentes para uma equação de quarta ordem (Eq. 3.38) são mostrados nas Figs. 3.8 e 3.10. Uma outra estrutura alternativa para um modelo de estado em diagrama de fluxo é mostrado na Fig. P3.22. Neste caso, o sistema é de segunda ordem e a função de transferência entrada-saída é

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}.$$

(a) Verificar que o diagrama de fluxo da Fig. P3.22 é de fato um modelo de  $G(s)$ . (b) Mostrar que a equação diferencial vetorial representando o modelo de diagrama de fluxo da Fig. P3.22 é

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_0 \end{bmatrix} u(t),$$

onde  $h_1 = b_1$ , e  $h_0 = b_0 - b_1 a_1$ .

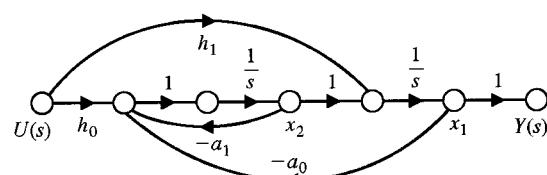


Fig. P3.22 Modelo de sistema de segunda ordem.

**P3.23** Determinar a equação diferencial matricial em variáveis de estado para o circuito mostrado na Fig. P3.23. As variáveis de estado são  $x_1 = i$ ,  $x_2 = v_1$  e  $x_3 = v_2$ . A variável de saída é  $v_0(t)$ .

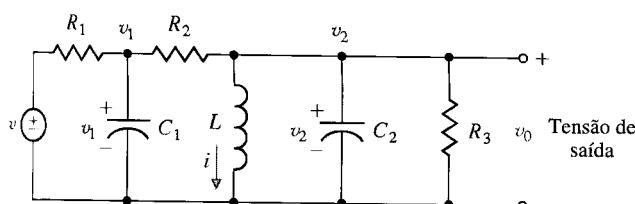


Fig. P3.23 Circuito RLC.

**P3.24** O sistema de dois reservatórios mostrado na Fig. 3.24(a) é controlado por um motor que ajusta a válvula de entrada e, em última análise, varia a vazão do fluxo de saída. O sistema apresenta a função de transferência

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{1}{s^3 + 10s^2 + 31s + 30}$$

para o diagrama de blocos mostrado na Fig. P3.24(b). Determinar o modelo em diagrama de fluxo e a equação diferencial matricial para os seguintes modelos em diagrama de fluxo: (a) variáveis de fase, (b) entrada com ação à frente (*feedforward*), (c) variáveis de estado físicas, e (d) variáveis de estado desacopladas.

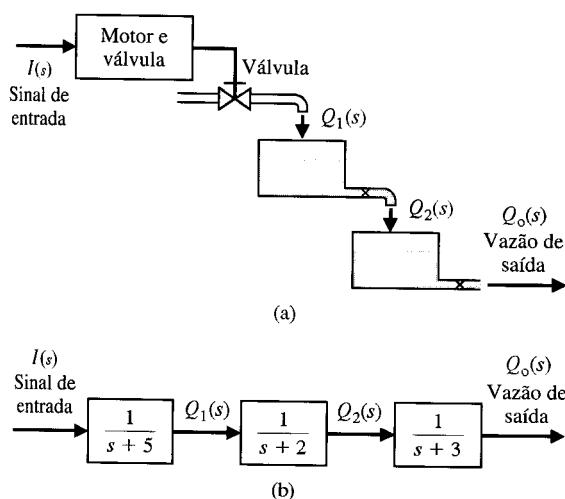


Fig. P3.24 Um sistema de dois reservatórios com a corrente do motor controlando a vazão de saída. (a) Diagrama físico, (b) diagrama de blocos.

**P3.25** Deseja-se usar controladores bem projetados para manter a temperatura de edifícios com sistemas de aquecimento com coletor solar. Um sistema de aquecimento solar pode ser escrito por [10]

$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + u_1 + u_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_2 + u_2 + d,$$

onde  $x_1$  = desvio de temperatura em torno de um equilíbrio desejado e  $x_2$  = temperatura do material armazenado (como um reservatório com água). Além disto,  $u_1$  e  $u_2$  são as respectivas vazões de fluxo do aquecimento convencional e do aquecimento solar, onde o meio de transporte é o ar forçado. Uma perturbação solar sobre a temperatura de armazenamento (como céu encoberto) é representada por  $d$ . Escrever as equações matriciais e

solucionar a resposta do sistema quando  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 1$  e  $d = 1$ , com condições iniciais zero.

**P3.26** Um sistema tem a seguinte equação diferencial:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t).$$

Determinar  $\Phi(s)$  e  $\Phi(t)$  para o sistema.

**P3.27** Um sistema tem um diagrama de bloco como mostrado na Fig. P3.27. Determinar a equação diferencial em variáveis de estado e a matriz de transição de estados  $\Phi(s)$ .

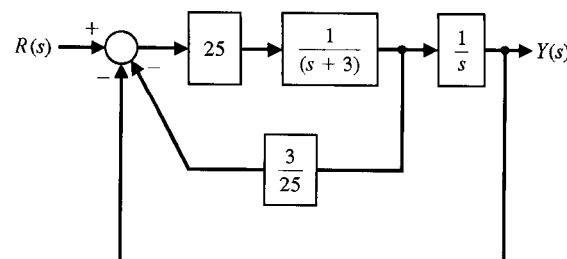


Fig. P3.27 Sistema com retroação.

**P3.28** Um giroscópio com um único grau de liberdade é mostrado na Fig. P3.28. Os giroscópios captam o movimento angular de um sistema e são usados nos sistemas de controle para vôo automático. O quadro móvel gira em torno do eixo de saída  $OB$ . A entrada é medida em torno do eixo de entrada  $OA$ . A equação do movimento angular em torno do eixo de saída é obtido igualando-se a taxa de variação do momento cinético à soma dos torques. Obter uma representação no espaço de estados do sistema giroscópio.

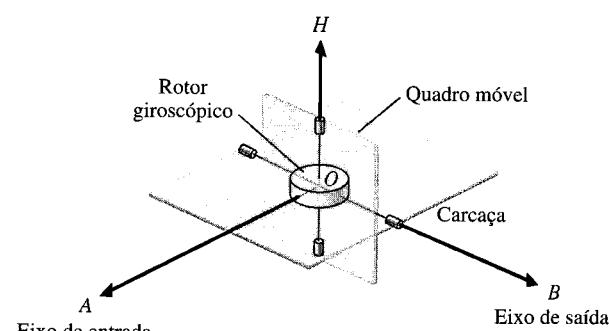
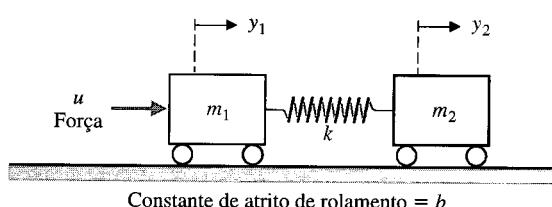


Fig. P3.28 Giroscópio.

**P3.29** Um sistema de duas massas é mostrado na Fig. P3.29. A constante de atrito de rolamento é  $b$ . Determinar a equação diferencial matricial quando a variável de saída é  $y_2(t)$ .



Constante de atrito de rolamento =  $b$

Fig. P3.29 Sistema de duas massas.

**P3.30** Tem havido um considerável esforço de engenharia no sentido de encontrar maneiras para realizar operações de manipulação no espaço — por exemplo, montagem de uma estação espacial e satélites de aquisição de alvos. Para executar tais tarefas, os ônibus espaciais transportam um Sistema Manipulador Remoto (SMR) no compartimento de carga [4, 15, 26]. O SMR tem demonstrado sua eficiência nas missões recentes do ônibus espacial, mas agora uma nova abordagem está considerada — um manipulador com segmentos infláveis de um braço. Tal projeto poderia reduzir o peso do manipulador de um fator de quatro, produzindo, ainda, um manipulador que, antes de ser inflado, ocuparia no máximo um oitavo do espaço no compartimento de carga do ônibus espacial destinado ao atual SMR.

O uso de um SMR no compartimento de carga do ônibus espacial para construir uma estrutura no espaço é mostrado na Fig. P3.30(a), e um modelo do braço flexível SMR é mostrado na Fig. P3.30(b), onde  $J$  é a inércia do motor de acionamento e  $L$  é a distância ao centro da gravidade do componente de carga. Deduzir as equações de estado para este sistema.

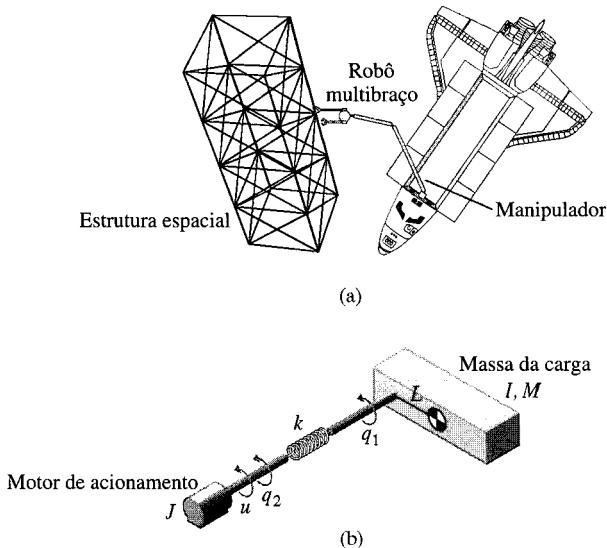


Fig. P3.30 Sistema manipulador remoto.

**P3.31** Obter as equações de estado para o circuito com duas entradas e uma saída mostrado na Fig. P3.31, onde a saída é  $i_2$ .

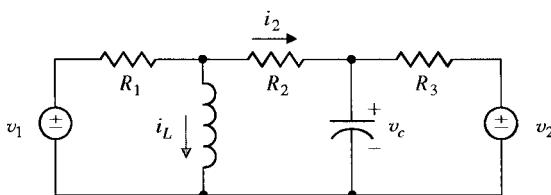


Fig. P3.31 Circuito RLC com duas entradas.

**P3.32** Extensores são manipuladores robóticos que estendem (aumentam) a força do braço humano nas tarefas de manobra de carga

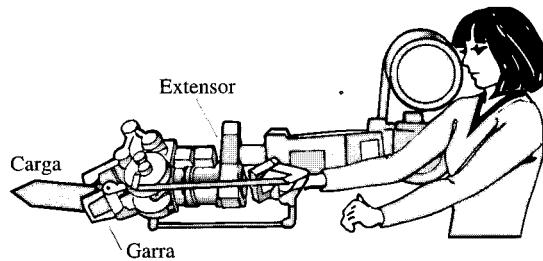


Fig. P3.32 Extensor para aumentar a força do braço humano em tarefas de manobra de cargas.

(Fig. P3.32) [23, 27]. O sistema é representado pela função de transferência

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{30}{s^2 + 4s + 3},$$

onde  $U(s)$  é a força da mão humana aplicada ao manipulador robótico e  $Y(s)$  é a força do manipulador robótico aplicada à carga. Usando a forma na Fig. 3.7, determinar as equações em variáveis de estado e a matriz de transição de estados para o formato de variáveis de fase.

**P3.33** Um remédio tomado oralmente é ingerido com uma taxa  $r$ . A massa do remédio no trato gastrointestinal é designada por  $m_1$  e na corrente sanguínea por  $m_2$ . A taxa de variação da massa do remédio no trato gastrointestinal é igual à taxa segundo a qual o remédio é ingerido menos a taxa segundo a qual o remédio entra na circulação do sangue, uma taxa que é considerada proporcional à massa presente. A taxa de variação da massa na circulação do sangue é proporcional à quantidade vinda do trato gastrointestinal menos a taxa segundo a qual a massa é perdida no metabolismo, que é proporcional à massa presente no sangue. Desenvolver a representação no espaço de estados para este sistema.

Para o caso especial onde os coeficientes de  $A$  são iguais a 1 (com o sinal apropriado), determinar a resposta quando  $m_1(0) = 1$  e  $m_2(0) = 0$ . Traçar o gráfico das variáveis de estado versus tempo e sobre o plano de estado  $x_1 - x_2$ .

**P3.34** A dinâmica de um foguete é representada por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2},$$

e é usada retroação por variável de estado onde  $x_1 = y(t)$ ,  $x_2 = \dot{y}(t)$ , e  $u = -x_2 - 0,5x_1$ . Determinar as raízes da equação característica deste sistema e a resposta do sistema quando as condições iniciais são  $x_1(0) = 0$  e  $x_2(0) = 1$ . A entrada  $U(s)$  é o torque aplicado e  $Y(s)$  é a altitude do foguete.

**P3.35** Um sistema tem a função de transferência

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{8}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}.$$

(a) Determinar a forma em variáveis de fase da equação diferencial matricial de estado. (b) Determinar o elemento  $\phi_{11}(t)$  da matriz de transição de estados para este sistema.

**P3.36** Determinar o modelo de estado em diagrama de fluxo do sistema com um único reservatório mostrado na Fig. P3.36. A indutância do motor é insignificante, a constante do motor é  $K_m = 10$ , a constante de força contra-eletromotriz é  $K_b = 0,0706$ , o atrito do motor é insignificante. A inércia da válvula e do motor é  $J = 0,006$  e a área do reservatório é  $50 \text{ m}^2$ . Notar que o motor é controlado por uma corrente de armadura  $i_a$ . Fazer  $x_1 = h$ ,  $x_2 = \theta$ , e  $x_3 = d\theta/dt$ . Admitir que  $q_1 = 80\theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo de rotação do eixo. A vazão de saída é  $q_0 = 50h(t)$ .

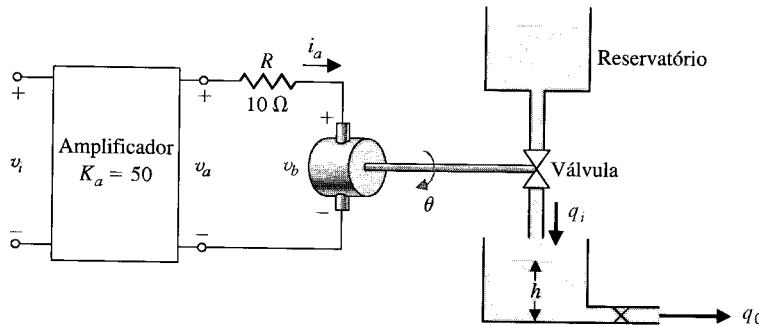


Fig. P3.36 Sistema com um reservatório.

### PROBLEMAS AVANÇADOS

**PA3.1** Considere-se o sistema de suspensão electromagnético mostrado na Fig. PA3.1. Um eletroímã é localizado na parte superior da montagem experimental. Deseja-se suspender uma esfera de aço utilizando a força electromagnética  $f$ . Note-se que este simples sistema de suspensão eletromagnético é essencialmente impraticável. Então, o controle com retroação se torna indispensável. Como sensor de distância, coloca-se uma sonda de indução padrão do tipo corrente parasita abaixo da esfera [25].

Supor que as variáveis de estado sejam  $x_1 = x$ ,  $x_2 = dx/dt$ , e  $x_3 = i$ . O eletroímã tem uma indutância  $L = 0,508 \text{ H}$  e uma resistência  $R = 23,2\Omega$ . Usar uma aproximação em série de Taylor para a força eletromagnética. A corrente é  $i_1 = (I_0 + i)$ , onde  $I_0 = 1,06 \text{ A}$  é o ponto de operação, e  $i$  é uma variável. A massa  $m$  é igual a  $1,75 \text{ kg}$ . A distância é  $x_g = (X_0 + x)$ , onde  $X_0 = 4,36 \text{ mm}$  é o ponto de operação, e  $x$  é a variável. A força eletromagnética é  $f = k(i_1/x_g)^2$ , onde  $k = 2,9 \times 10^{-4} \text{ Nm}^2/\text{A}^2$ . Determinar a equação diferencial matricial e a função de transferência equivalente  $X(s)/V(s)$ .

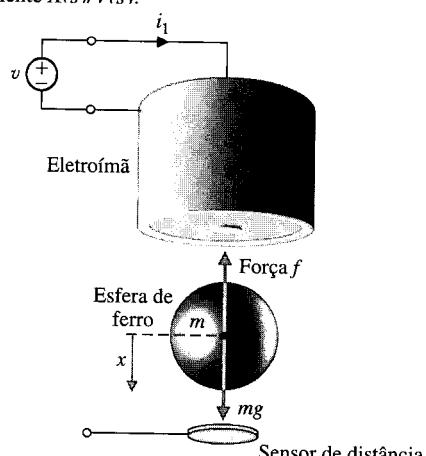


Fig. PA3.1 Sistema de suspensão eletromagnética.

**PA3.2** Considere-se a massa  $m$  montada sobre um carrinho, como mostrado na Fig. PA3.2. Determinar a função de transferência  $Y(s)/U(s)$  e usar a função de transferência para obter a equação diferencial matricial para o formato de variáveis de fase da Fig. 3.7.

**PA3.3** O controle do movimento de um veículo autônomo de um ponto para outro depende do controle preciso da posição do veículo [18]. O controle da posição do veículo autônomo  $Y(s)$  é obtido por meio do sistema mostrado na Fig. PA3.3. Determinar a forma diagonal canônica da equação diferencial matricial (ou o mais próximo possível da forma diagonal).

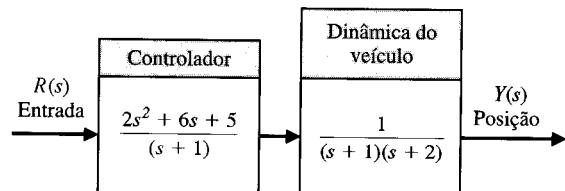


Fig. PA3.3 Controle de posição.

**PA3.4** Suspensões dianteiras têm se tornado equipamento padrão nas bicicletas para ciclismo de montanha. Em substituição ao garfo rígido que liga o pneu dianteiro da bicicleta à sua estrutura, tais suspensões absorvem a energia do impacto com as irregularidades do piso, protegendo dos choques simultaneamente a estrutura e o ciclista. Contudo, os garfos usados comumente utilizam somente um tipo de constante de mola e tratam os impactos ocorridos em alta e baixa velocidades — impactos que variam enormemente em solicitação — basicamente da mesma forma.

Um sistema de suspensão com pontos de ajuste múltiplos que fossem ajustáveis enquanto a bicicleta está em movimento seria atraente. Dispõe-se de uma mola espiral com ar e um amortecedor de óleo que permite ajustar a constante de amortecimen-

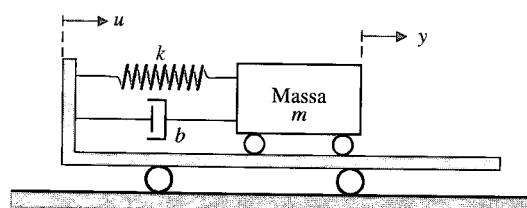


Fig. PA3.2 Massa sobre um carrinho.

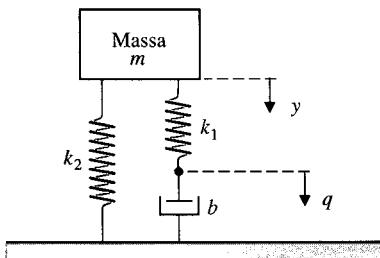


Fig. PA3.4 Amortecedor de choques.

to ao terreno bem como ao peso do ciclista [20]. O modelo de sistema de suspensão é mostrado na Fig. PA3.4, onde  $b$  é ajustável. Selecionar o valor apropriado para  $b$  para que a bicicleta acomode (a) um grande impacto em alta velocidade e (b) um pequeno impacto em baixa velocidade. Supor  $k_2 = 1$  e  $k_1 = 2$ .

**PA3.5** A Fig. PA3.5 mostra uma massa  $M$  suspensa a partir de outra massa  $m$  por meio de uma haste leve de comprimento  $L$ . Obter a equação diferencial matricial de estado usando um modelo linear supondo um pequeno ângulo para  $\theta$ .

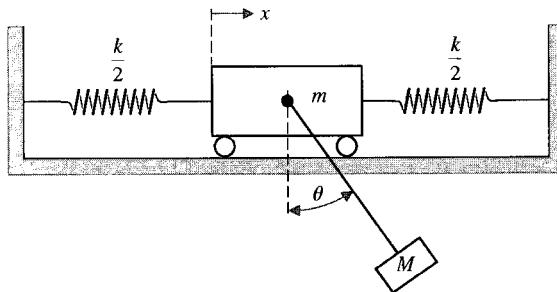
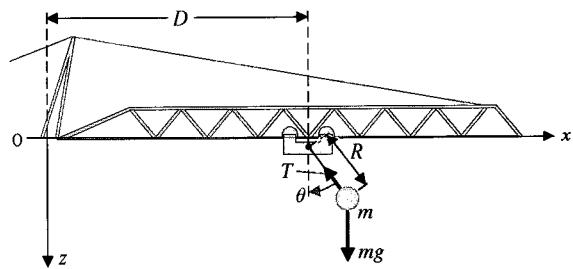


Fig. PA3.5 Massa suspensa de um carrinho.

**PA3.6** Considere-se um guindaste se movendo na direção  $x$  enquanto a massa  $m$  se move na direção  $z$ , como mostrado na Fig. PA3.6. O motor do carrinho e o motor do guindaste são muito potentes com respeito à massa do carrinho, ao cabo do guindaste, e à carga  $m$ . Considerar a entrada das variáveis de controle como sendo as distâncias  $D$  e  $R$ . Supor também que  $\theta < 50^\circ$ . Determinar um modelo linear e descrever a equação diferencial em variáveis de estado.

Fig. PA3.6 Um guindaste em movimento na direção  $x$  enquanto a massa se move na direção  $z$ .

## PROBLEMAS DE PROJETO

**PPC3.1** O acionamento de tração usa o sistema de sarilho do eixo mostrado na Fig. PPC2.1. Desprezar o efeito da indutância do motor e determinar um modelo em variáveis de estado para o sistema. Os parâmetros são dados na Tabela PPC2.1. O atrito da guia corrediça é desprezável.

**PP3.1** Um sistema mola-massa-amortecedor, como foi mostrado na Fig. 3.3, é usado como amortecedor de choque em uma motocicleta de alto desempenho. Os parâmetros originais selecionados são  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $b = 9 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ , e  $k = 20 \text{ N}/\text{m}$ . (a) Determinar a matriz de sistema, as raízes características e a matriz de transição de estados,  $\Phi(t)$ . Admite-se que as condições iniciais retratando situações difíceis são  $y(0) = 1$  e  $dy/dt|_{t=0} = 2$ . (b) Traçar a resposta de  $y(t)$  e  $dy/dt$  para os dois primeiros segundos. (c) Reprojetar o absorvedor de choque mudando a constante de mola e a constante do amortecedor para reduzir o efeito de uma alta taxa na força de aceleração,  $d^2y/dt^2$ , sobre o ciclista. A massa deve ficar constante em 1 kg.

**PP3.2** Um sistema tem a equação matricial em variáveis de estado na forma de variáveis de fase

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} u(t),$$

e  $y = 10x_1$ . Deseja-se que a forma diagonal canônica da equação diferencial seja

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [-5 \quad 5] \mathbf{z}.$$

Determinar os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $d$  que conduzem à equação diferencial matricial diagonal requerida.

**PP3.3** Um sistema de parada de avião é usado em um porta-aviões como mostrado na Fig. PP3.3. O modelo linear de cada absorvedor de energia tem uma força de arrasto  $f_D = K_D \dot{x}_3$ . Deseja-se parar o avião dentro de 30 m depois que este se engata no cabo de parada. A velocidade do avião aterrissando é de 60 m/s. Selecionar a constante requerida  $K_D$  e traçar o gráfico da resposta das variáveis de estado.

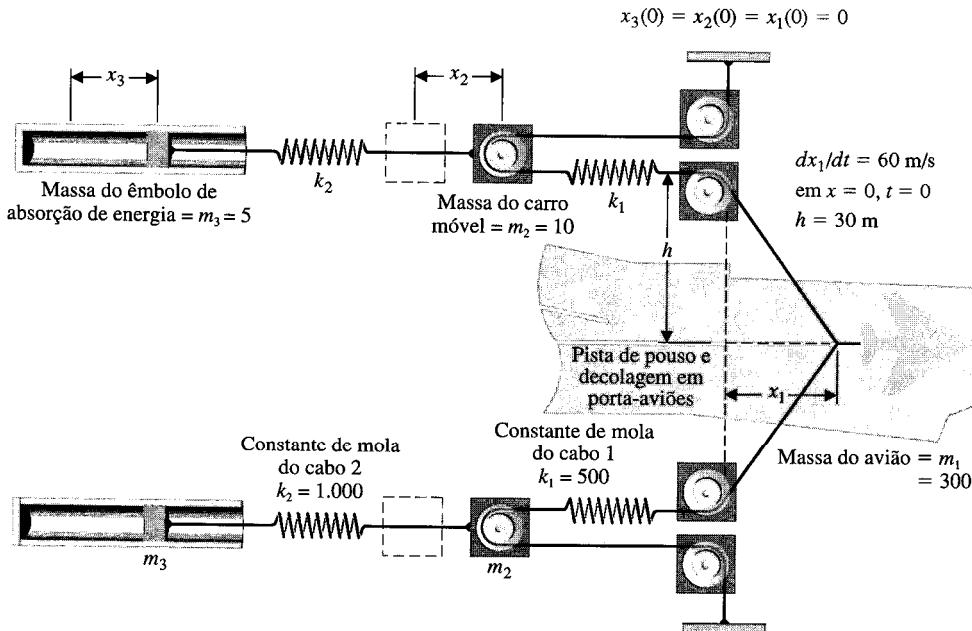


Fig. PP3.3 Sistema de parada de avião.

**PP3.4** A empresa Mile-High Bungi Jumping deseja projetar um sistema de salto livre com o saltador preso a um elemento elástico (que é uma corda) para que este saltador não possa bater no chão quando sua massa for inferior a 100 kg porém superior a 50 kg. Também deseja que o tempo do salto (que é o tempo durante o qual um saltador fica se movendo para cima e para baixo) seja

superior a 25 segundos mas inferior a 40 segundos. Determinar as características da corda. O saltador permanece em uma plataforma de 90 m acima do chão, e a corda será atada a uma viga fixada 10 m acima da plataforma. Admitir que o saltador tem 2 m e a corda é ligada a sua cintura (1 m de altura).

## PROBLEMAS COM MATLAB

**PM3.1** Determinar a representação em variáveis de estado para as seguintes funções de transferência (sem retroação) usando a função tf2ss:

$$(a) G(s) = \frac{1}{s + 10}$$

$$(b) G(s) = \frac{3s^2 + 10s + 1}{s^2 + 8s + 5}$$

$$(c) G(s) = \frac{s + 14}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

**PM3.2** Determinar uma representação de função de transferência para os seguintes modelos em variáveis de estado usando a função ss2tf:

$$(a) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0]$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0 \ 1 \ 0]$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 1].$$

**PM3.3** Considerar o circuito mostrado na Fig. PM3.3. A função de transferência de  $V_i$  para  $V_o$  é dada por

$$V_o(s)/V_i(s) = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1}.$$

Seja  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $C_1 = 0,5 \text{ F}$ , e  $C_2 = 0,1 \text{ F}$ .

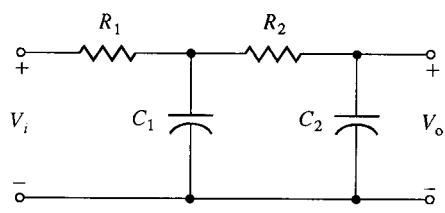


Fig. PM3.3 Circuito elétrico.

(a) Mostrar que uma representação em variáveis de estado é dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3,2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} V_i.$$

(b) Usando a representação em variáveis de estado da parte (a), traçar a resposta ao degrau unitário com a função step.

**PM3.4** Considerar o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}.$$

- (a) Usando a função `ss2tf`, determinar a função de transferência  $Y(s)/U(s)$ .  
 (b) Traçar a resposta do sistema à condição inicial  $\mathbf{x}(0) = [0 \ 0 \ 1]^T$  para  $0 \leq t \leq 10$ .  
 (c) Calcular a matriz de transição de estados usando a função `expm`, e determinar  $\mathbf{x}(t)$  em  $t = 10$  para a condição inicial dada na parte (b). Comparar o resultado com a resposta do sistema obtida na parte (b).

**PM3.5** Considere os dois sistemas

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -8 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} u, \quad (1)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}_1$$

e

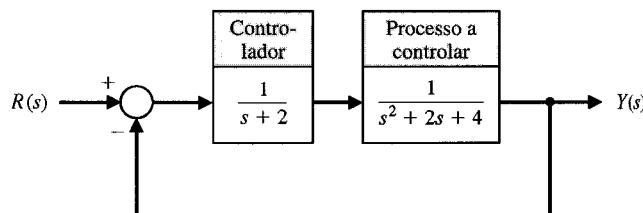
$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 0,5000 & 0,5000 & 0,7071 \\ -0,5000 & -0,5000 & 0,7071 \\ -6,3640 & -0,7071 & -8,0000 \end{bmatrix} \mathbf{x}_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [0,7071 \ -0,7071 \ 0] \mathbf{x}_2. \quad (2)$$

- (a) Usando a função `ss2tf`, determinar a função de transferência  $Y(s)/U(s)$  para o sistema (1).  
 (b) Repetir a parte (a) para o sistema (2).  
 (c) Comparar os resultados nas partes (a) e (b) e comentar.

**PM3.6** Considerar o sistema de controle a malha fechada da Fig. PM3.6.

- (a) Determinar uma representação em variáveis de estado do controlador usando MATLAB.

**Fig. PM3.6** Um sistema de controle com retroação a malha fechada.

4.1

4.2

4.3

4.4

4.5

4.6

4.7

4.8

4.9

4.10

4.11

- (b) Repetir a parte (a) para o processo a controlar.  
 (c) Com o controlador e o processo na forma de variáveis de estado, use as funções `series` e `cloop` para calcular uma representação de sistema a malha fechada em variáveis de estado e traçar a resposta do sistema de malha fechada ao impulso.

**PM3.7** Considere-se o sistema seguinte:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] \mathbf{x}$$

com

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Usando a função `lsim` obter e traçar a resposta do sistema (para  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ ) quando  $u(t) = 0$ .

**TERMOS E CONCEITOS**

**Aproximação resultante de discretização no tempo** Uma aproximação usada para obter a resposta no tempo de um sistema baseado na divisão do tempo em pequenos incrementos,  $\Delta t$ .

**Domínio do tempo** O domínio matemático que incorpora a resposta e a descrição do sistema em termos do tempo  $t$ .

**Equação diferencial de estado** A equação diferencial de estado para o vetor de estado:  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ .

**Estado de um sistema** Um conjunto de números tal que o conhecimento desses números e da função de entrada, com as equações que descrevem a dinâmica, fornece o estado futuro do sistema.

**Matriz de transição,  $\Phi(t)$**  A função exponencial matricial que descreve a resposta livre do sistema.

**Matriz fundamental** Ver matriz de transição.

**Retroação de estado** O sinal de controle para o processo é uma função direta de todas as variáveis de estado.

**Sistema variante no tempo** Um sistema para o qual um ou mais parâmetros podem variar com o tempo.

**Variáveis de estado** O conjunto de variáveis que descrevem o sistema.

**Vetor de estado** O vetor que contém todas as  $n$  variáveis de estado,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

AP

4.1

## CAPÍTULO 4

# *Características de Sistema de Controle com Retroação*

- 4.1 Sistemas de Controle a Malha Aberta e a Malha Fechada
- 4.2 Sensibilidade de Sistemas de Controle a Variações de Parâmetros
- 4.3 Controle da Resposta Transitória de Sistemas de Controle
- 4.4 Sinais de Perturbação em um Sistema de Controle com Retroação
- 4.5 Erro de Estado Estacionário
- 4.6 O Custo da Retroação
- 4.7 Exemplo de Projeto: Máquinas Perfuratrizes do Canal da Mancha
- 4.8 Exemplo de Projeto: Veículo Explorador de Marte
- 4.9 Características de Sistema de Controle com o MATLAB
- 4.10 Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco
- 4.11 Sumário

## APRESENTAÇÃO

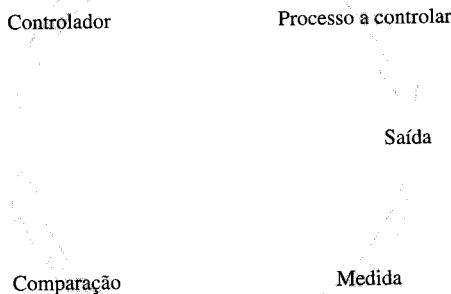
O principal tópico dos Capítulos 2 e 3 foi a modelagem matemática de sistemas físicos. Neste capítulo serão estendidas as idéias de modelagem para incluir características de sistemas de controle, tais como sensibilidade a incertezas do modelo, erros de estado estacionário, características da resposta transitória a sinais de entrada para teste e rejeição a perturbações. Investiga-se o papel importante do sinal de erro do sistema. Este sinal é usado para controlar o processo utilizando-se a noção de retroação. Falando de um modo geral, o objetivo é minimizar o sinal de erro.

Será desenvolvido, também, o conceito de sensibilidade do sistema a uma variação de parâmetro, uma vez que se deseja minimizar os efeitos de uma variação indesejável de parâmetro. Descreve-se, então, o desempenho transitório de um sistema com retroação e se mostra como este desempenho pode ser prontamente melhorado.

Deseja-se reduzir o efeito de sinais de entrada indesejáveis, chamados **perturbações**, no sinal de saída. Será mostrado como se pode projetar um sistema de controle de modo a reduzir o impacto dos sinais de perturbação. Naturalmente, os benefícios de um sistema de controle vêm com um custo que os acompanha. Será demonstrado como o custo de se usar retroação em um sistema de controle está associado ao dispositivo sensor de retroação. O capítulo conclui com uma análise do desempenho do Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco.

## 4.1 SISTEMAS DE CONTROLE A MALHA ABERTA E A MALHA FECHADA

Agora que se está capacitado a obter modelos matemáticos de componentes de sistemas de controle, serão examinadas as características dos sistemas de controle. Na Seção 1.1 um sistema de controle foi definido como uma interligação de componentes formando uma configuração de sistema que fornecerá uma saída de sistema desejada. Como a resposta desejada do sistema é conhecida, é gerado um sinal proporcional ao erro entre a resposta desejada e a resposta real. A utilização deste sinal para controlar o processo resulta em uma seqüência de operações a malha fechada que é chamada de sis-



**Fig. 4.1** Sistema a malha fechada.

tema com retroação. Esta seqüência de operações a malha fechada está mostrada na Fig. 4.1. A introdução da retroação para melhorar o sistema de controle é quase sempre necessária. É interessante que isto também é o caso de sistemas naturais, como sistemas biológicos e fisiológicos, e a retroação é inerente nestes sistemas. Por exemplo, o sistema de controle do ritmo cardíaco humano é um sistema de controle com retroação.

Para ilustrar as características e as vantagens de se introduzir a retroação, será considerado um sistema simples com uma única malha de retroação. A compreensão plena dos benefícios da retroação pode ser melhor obtida a partir de sistemas com uma única malha e depois estendida aos sistemas com malhas múltiplas.

Um sistema sem retroação, freqüentemente chamado de sistema direto ou sistema a malha aberta, está mostrado na Fig. 4.2.

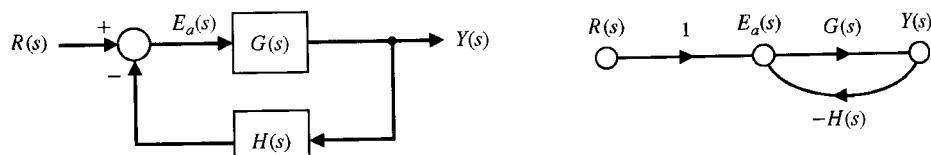
**Fig. 4.2** Um sistema direto.  
Um sistema sem retroação.



**Um sistema a malha aberta (sistema direto) opera sem retroação e gera diretamente a saída em resposta a um sinal de entrada.**

Em contraste, um sistema de controle com retroação negativa, a malha fechada, está mostrado na Fig. 4.3.

**Fig. 4.3** Sistema de controle a malha fechada (sistema com retroação).



**Um sistema a malha fechada usa uma medida do sinal de saída e a comparação com a saída desejada para gerar um sinal de erro que é aplicado ao atuador.**

As duas configurações de sistemas de controle são mostradas tanto sob a forma de diagrama de bloco quanto sob a forma de diagrama de fluxo de sinal, embora os diagramas de fluxo sejam usados predominantemente nos diagramas subsequentes.

Em muitos casos,  $H(s)$  é igual a 1 ou uma outra constante diferente de 1. A constante leva em consideração a conversão de grandezas tais como radianos em volts. Primeiramente, considere-se a condição de retroação unitária com  $H(s) = 1$ . Então  $E_a(s) = E(s)$  e

$$Y(s) = G(s)E(s) = G(s)[R(s) - Y(s)].$$

Resolvendo para  $Y(s)$ , tem-se

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} R(s). \quad (4.1)$$

O sinal de erro é

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s).$$

Por conseguinte, para reduzir o erro, a magnitude de  $[1 + G(s)]$  deve ser maior que 1 sobre toda a faixa de valores de  $s$  sob consideração.

Considere-se agora o caso em que  $H(s) \neq 1$ . A saída do sistema a malha fechada é

$$Y(s) = G(s)E_a(s) = G(s)[R(s) - H(s)Y(s)],$$

e portanto

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + GH(s)} R(s). \quad (4.2)$$

O sinal de erro atuante é

$$E_a(s) = \frac{1}{1 + GH(s)} R(s). \quad (4.3)$$

É óbvio que, para reduzir o erro, a magnitude de  $[1 + GH(s)]$  deve ser maior que 1 sobre a faixa de valores de  $s$  sob consideração. O sinal  $E_a(s)$  fornece uma medida do erro  $E(s)$ . Esta medida se torna mais e mais precisa à medida que a dinâmica de  $H(s)$  se torna desprezível e  $H(s) \approx 1$  para a faixa de valores de  $s$  sob consideração.

## 4.2 SENSIBILIDADE DE SISTEMAS DE CONTROLE A VARIAÇÕES DE PARÂMETROS

Um processo, representado pela função de transferência  $G(s)$ , qualquer que seja sua natureza, está sujeito a mudanças das condições ambientais, envelhecimento, ignorância dos valores exatos dos parâmetros do processo e a outros fatores naturais que afetam um procedimento de controle. Nos sistemas a malha aberta, todos estes erros e alterações resultam em modificações e inexatidão na saída. Contudo, um sistema a malha fechada sente a modificação na saída devida às mudanças no processo e tenta corrigir a saída. A **sensibilidade** de um sistema de controle a variações de parâmetros é de fundamental importância. Uma vantagem principal dos sistemas de controle com retroação a malha fechada é sua capacidade de reduzir a sensibilidade do sistema [1-4, 18].

Para o caso a malha fechada, se  $GH(s) \gg 1$  para todas as freqüências complexas de interesse, então, a partir da Eq. (4.2), se obtém

$$Y(s) \approx \frac{1}{H(s)} R(s). \quad (4.4)$$

Então, a saída é afetada somente por meio de  $H(s)$ , que pode ser uma constante. Se  $H(s) = 1$ , tem-se o resultado desejado; isto é, a saída é igual à entrada. Contudo, antes de se usar esta abordagem para todos os sistemas de controle, deve-se observar que o requisito  $G(s)H(s) \gg 1$  pode ocasionar uma resposta do sistema altamente oscilatória e mesmo instável. Mas o fato de que ao se aumentar a magnitude da função de transferência de malha  $G(s)H(s)$  reduz-se o efeito de  $G(s)$  sobre a saída é um conceito extremamente útil. Em consequência a **primeira vantagem** de um sistema com retroação é que o efeito da **variação de parâmetros do processo**,  $G(s)$ , é reduzido.

Para ilustrar o efeito de variação de parâmetros, considere-se uma mudança no processo tal que o novo processo seja  $G(s) + \Delta G(s)$ . Então, no caso a malha aberta, a mudança na transformada da saída é

$$\Delta Y(s) = \Delta G(s)R(s). \quad (4.5)$$

No sistema a malha fechada, tem-se

$$Y(s) + \Delta Y(s) = \frac{G(s) + \Delta G(s)}{1 + (G(s) + \Delta G(s))H(s)} R(s). \quad (4.6)$$

Então, a mudança na saída é

$$\Delta Y(s) = \frac{\Delta G(s)}{(1 + GH(s) + \Delta GH(s))(1 + GH(s))} R(s). \quad (4.7)$$

Quando  $GH(s) \gg \Delta GH(s)$ , como é freqüentemente o caso, tem-se

$$\Delta Y(s) = \frac{\Delta G(s)}{[1 + GH(s)]^2} R(s). \quad (4.8)$$

Examinando-se a Eq. (4.8), nota-se que a mudança na saída do sistema a malha fechada é reduzida de um fator  $[1 + GH(s)]$  que é usualmente muito maior que um sobre a faixa de valores das freqüências complexas sob interesse. O fator  $[1 + GH(s)]$  desempenha um papel muito importante nas características dos sistemas de controle com retroação.

A **sensibilidade do sistema** é definida pela relação entre a variação percentual na função de transferência do sistema pela relação percentual da função de transferência do processo. A função de transferência do sistema é

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}, \quad (4.9)$$

e, por conseguinte, a sensibilidade é definida como

$$S = \frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta G(s)/G(s)}. \quad (4.10)$$

No limite, para variações incrementais pequenas, a Eq. (4.10) se torna

$$S = \frac{\partial T/T}{\partial G/G} = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln G}. \quad (4.11)$$

**A sensibilidade do sistema é a relação entre a mudança na função de transferência e a mudança na função de transferência do processo (ou parâmetro) para uma pequena mudança incremental.**

Obviamente, a partir da Eq. (4.5) a sensibilidade do sistema a malha aberta é igual a 1. A sensibilidade a malha fechada é prontamente obtida a partir da Eq. (4.11). A função de transferência do sistema a malha fechada é

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + GH(s)}.$$

Por conseguinte, a sensibilidade do sistema com retroação é

$$S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G} \cdot \frac{G}{T} = \frac{1}{(1 + GH)^2} \cdot \frac{G}{G/(1 + GH)}$$

ou

$$S_G^T = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}. \quad (4.12)$$

Descobre-se uma vez mais que a sensibilidade do sistema pode ser reduzida abaixo da sensibilidade do sistema a malha aberta aumentando-se  $GH(s)$  sobre a faixa de freqüências de interesse.

A sensibilidade do sistema com retroação a mudanças no elemento de retroação  $H(s)$  é

$$S_H^T = \frac{\partial T}{\partial H} \cdot \frac{H}{T} = \left( \frac{G}{1 + GH} \right)^2 \cdot \frac{-H}{G/(1 + GH)} = \frac{-GH}{1 + GH}. \quad (4.13)$$

Quando  $GH$  é grande, a sensibilidade se aproxima da unidade e as mudanças sobre  $H(s)$  afetam diretamente a resposta de saída. Portanto, é importante utilizar componentes de retroação que não irão variar com mudanças ambientais ou que possam ser mantidos constantes.

Busca-se freqüentemente determinar  $S_\alpha^T$ , onde  $\alpha$  é um parâmetro na função de transferência de um bloco  $G$ . Usando-se a regra da cadeia, vem

$$S_\alpha^T = S_G^T S_\alpha^G. \quad (4.14)$$

Muitas vezes a função de transferência do sistema  $T(s)$  é uma fração da forma [1]:

$$T(s, \alpha) = \frac{N(s, \alpha)}{D(s, \alpha)}, \quad (4.15)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro que pode ser submetido a variações devidas ao meio ambiente. Então se pode obter a sensibilidade em relação a  $\alpha$  reescrevendo a Eq. (4.11) como

$$S_\alpha^T = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \alpha} = \frac{\partial \ln N}{\partial \ln \alpha} \Big|_{\alpha_0} - \frac{\partial \ln D}{\partial \ln \alpha} \Big|_{\alpha_0} = S_\alpha^N - S_\alpha^D, \quad (4.16)$$

onde  $\alpha_0$  é o valor nominal do parâmetro.

**Fig.  
de ai  
(b) C  
invei**

**Fig.  
(a) M  
bloco  
diagl**

A capacidade para reduzir o efeito da variação de parâmetros de um sistema de controle pelo acréscimo de um laço de controle constitui uma vantagem importante dos sistemas de controle com retroação. Para obter sistemas a malha aberta de elevada exatidão, os componentes da malha aberta  $G(s)$  devem ser selecionados cuidadosamente a fim de alcançar as especificações exatas. Contudo, um sistema a malha fechada permite que  $G(s)$  seja especificado com menor exatidão porque a sensibilidade a mudanças ou erros é reduzida pelo ganho de malha  $1 + GH(s)$ . Este benefício dos sistemas a malha fechada é uma enorme vantagem para os amplificadores eletrônicos da indústria de telecomunicações. Um exemplo simples ilustrará o valor da retroação para reduzir a sensibilidade.

**EXEMPLO 4.1**

## Amplificador inversor

O circuito integrado de um amplificador operacional pode ser fabricado em uma simples fatia de silício e vendido por menos de um dólar. Em consequência disto, os circuitos integrados (CI) de amplificadores operacionais (amp op) são usados amplamente. O símbolo modelo de um amplificador operacional está mostrado na Fig. 4.4(a) [6]. Pode-se admitir que o valor do ganho  $A$  seja superior a  $10^4$ . O circuito amplificador inversor básico está mostrado na Fig. 4.4(b). Devido à alta impedância de entrada do amplificador operacional, a corrente de entrada no amplificador é extremamente pequena ( $admitir R_i \rightarrow \infty$ ). A equação de correntes no nó  $n$  pode ser escrita como

$$\frac{\nu_{in} - \nu_n}{R_1} + \frac{\nu_o - \nu_n}{R_f} = 0. \quad (4.17)$$

Como o ganho do amplificador é  $-A$ ,  $v_o = -Av_n$  e, por conseguinte

$$\nu_n = -\frac{\nu_0}{A}, \quad (4.18)$$

e se pode substituir a Eq. (4.18) na Eq. (4.17) obtendo-se

$$\frac{v_{in}}{R_1} + \frac{v_o}{AR_1} + \frac{v_o}{R_f} + \frac{v_o}{AR_f} = 0. \quad (4.19)$$

Resolvendo-se em termos da tensão de saída, tem-se

$$v_o = \frac{-A(R_f/R_i)v_{in}}{1 + (R_s/R_i) + A}. \quad (4.20)$$

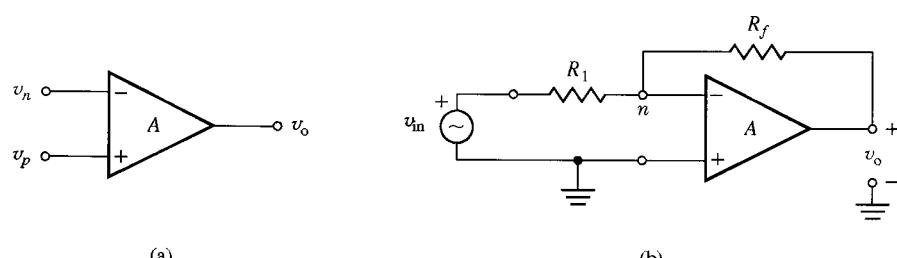
Alternativamente, quando  $A \gg 1$  é possível reescrever a Eq. (4.20) como a seguir:

$$\frac{v_0}{v_{in}} = \frac{-A}{1 + A(R_s/R_c)} = \frac{-A}{1 + Ak}, \quad (4.21)$$

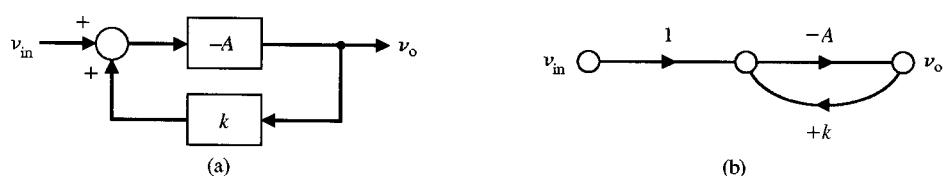
onde  $k = R_1 / R_f$ . A representação do amplificador inversor sob a forma de diagrama de fluxo de sinal está mostrada na Fig. 4.5. Observe-se que, quando  $|A| \gg 1$ , tem-se

$$T = \frac{v_o}{v_i} = -\frac{1}{k} = -\frac{R_f}{R_i}. \quad (4.22)$$

O fator de retroacção no diagrama é  $H(s) = k$  e a função de transferência a malha aberta é  $G(s) = -A$ .



**Fig. 4.4** (a) Símbolo modelo de amplificador operacional.  
 (b) Circuito amplificador inversor.



**Fig. 4.5** Amplificador inversor.  
 (a) Modelo em diagrama de blocos. (b) Modelo em diagrama de fluxo de sinal.

O amplificador operacional está sujeito a variações na amplificação  $A$ . A sensibilidade da malha aberta é a unidade. A sensibilidade do amplificador a malha fechada é

$$S_A^T = \frac{\partial T/T}{\partial A/A} = \frac{1}{1 - GH} = \frac{1}{1 + Ak}. \quad (4.23)$$

Se  $A = 10^4$  e  $k = 0,1$ , tem-se

$$S_A^T = \frac{1}{1 + 10^3}, \quad (4.24)$$

ou seja, o valor da sensibilidade é aproximadamente igual a 0,001, que é um milésimo do valor da sensibilidade a malha aberta. A sensibilidade devida a mudanças na resistência de retroação  $R_f$  (ou no fator  $k$ ) é

$$S_k^T = \frac{GH}{1 - GH} = \frac{-Ak}{1 + Ak}, \quad (4.25)$$

e a magnitude da sensibilidade a  $k$  é aproximadamente igual a um. ■

Um retorno ao conceito de sensibilidade será feito em capítulos posteriores para enfatizar a importância da sensibilidade no projeto e na análise de sistemas de controle.

### 4.3 CONTROLE DA RESPOSTA TRANSITÓRIA DE SISTEMAS DE CONTROLE

Uma das características mais importantes dos sistemas de controle é sua resposta transitória. A **resposta transitória** é a resposta de um sistema como uma função do tempo. Como o objetivo dos sistemas de controle é fornecer uma resposta desejada, a resposta transitória de sistemas de controle freqüentemente deve ser ajustada até que esteja satisfatória. Se o sistema de controle a malha aberta não fornecer a resposta satisfatória, então o processo,  $G(s)$ , deve ser substituído por um processo adequado. Em contraste, um sistema a malha fechada pode, freqüentemente, ser ajustado para conduzir à resposta desejada por meio dos parâmetros da malha de retroação. Deve-se observar que freqüentemente é possível alterar a resposta de um sistema a malha aberta pela inserção de um controlador em cascata adequado,  $G_1(s)$ , precedendo o processo,  $G(s)$ , conforme está mostrado na Fig. 4.6. É necessário, então, projetar a função de transferência em cascata  $G_1(s)G(s)$  de modo que a função de transferência resultante forneça a resposta transitória desejada.

Para tornar este conceito mais rapidamente compreensível, considere-se um sistema de controle específico que possa ser operado a malha aberta e a malha fechada. Sistemas de controle de velocidade, como o que está mostrado na Fig. 4.7, são utilizados com freqüência em processos industriais para movimentar materiais e produtos. Diversos sistemas de controle de velocidade importantes são usados em laminadoras de aço para enrolar as chapas de aço e movimentar o aço através do laminador [19]. A função de transferência do sistema a malha aberta (sem retroação) foi obtida na Eq. (2.70) e para  $\omega(s)/V_a(s)$  se tem

$$\frac{\omega(s)}{V_a(s)} = G(s) = \frac{K_1}{(\tau_1 s + 1)}, \quad (4.26)$$

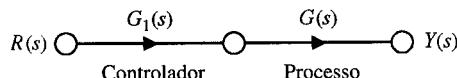


Fig. 4.6 Sistema controlador em cascata (sem retroação).

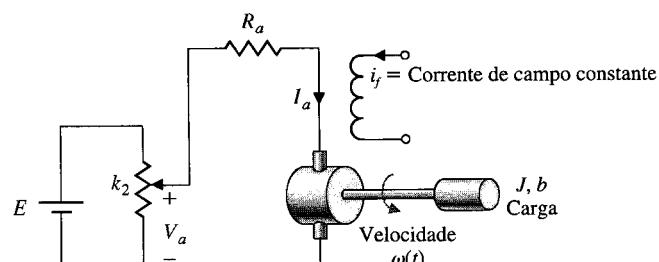


Fig. 4.7 Sistema de controle de velocidade a malha aberta (sem retroação).

Fig.  
co  
má  
de  
má  
tra

onde

$$K_1 = \frac{K_m}{(R_a b + K_b K_m)} \quad \text{e} \quad \tau_1 = \frac{R_a J}{(R_a b + K_b K_m)}.$$

No caso de um laminador de aço, a inércia dos rolos é bastante grande e se torna necessário um motor de grande porte controlado pela armadura. Se os rolos de aço forem submetidos a um comando em degrau para mudança de velocidade de

$$V_a(s) = \frac{k_2 E}{s}, \quad (4.27)$$

a resposta de saída é

$$\omega(s) = G(s)V_a(s). \quad (4.28)$$

A mudança de velocidade transitória é então

$$\omega(t) = K_1(k_2 E)(1 - e^{-t/\tau_1}). \quad (4.29)$$

Se esta resposta transitória for muito lenta, não resta senão escolher um outro motor com uma constante de tempo  $\tau_1$  diferente, se possível. Contudo, como  $\tau_1$  é dominada pela inércia da carga,  $J$ , resta pouca esperança de que se altere muito a resposta transitória.

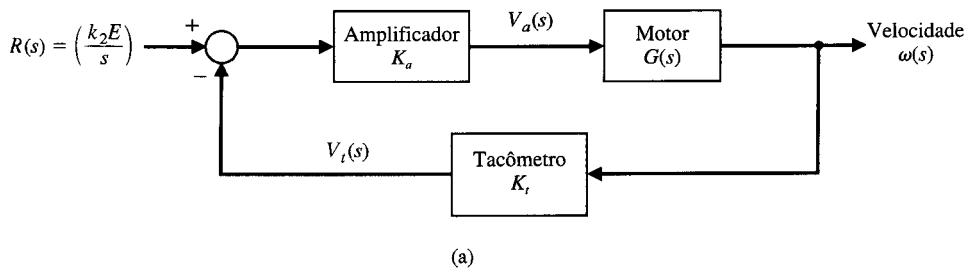
Um sistema de controle a malha fechada é facilmente obtido utilizando-se um tacômetro para gerar uma tensão proporcional à velocidade, como está mostrado na Fig. 4.8(a). Esta tensão é subtraída da tensão de um potenciômetro e amplificada como está mostrado na Fig. 4.8(a). Um circuito prático de amplificador transistorizado para implementar esta retroação em aplicações de pequena potência está mostrado na Fig. 4.8(b) [1, 5, 7]. A função de transferência a malha fechada é

$$\begin{aligned} \frac{\omega(s)}{R(s)} &= \frac{K_a G(s)}{1 + K_a K_t G(s)} \\ &= \frac{K_a K_1}{\tau_1 s + 1 + K_a K_t K_1} = \frac{K_a K_1 / \tau_1}{s + [(1 + K_a K_t K_1) / \tau_1]}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

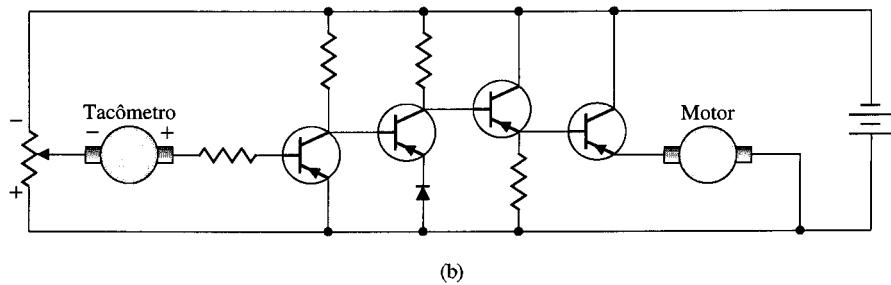
O ganho do amplificador  $K_a$  pode ser ajustado para se alcançar as especificações requeridas da resposta transitória. A constante de ganho do tacômetro  $K_t$  também pode ser ajustada, se necessário.

A resposta transitória a uma mudança em degrau no comando de entrada é então

$$\omega(t) = \frac{K_a K_1}{(1 + K_a K_t K_1)} (k_2 E)(1 - e^{-pt}), \quad (4.31)$$



(a)



(b)

**Fig. 4.8** (a) Sistema de controle de velocidade a malha fechada. (b) Sistema de controle de velocidade a malha fechada transistorizado.

onde  $p = (1 + K_a K_t K_1)/\tau_1$ . Como supõe-se muito grande a inércia da carga, altera-se a resposta aumentando-se  $K_a$ , e se tem a resposta aproximada

$$\omega(t) \approx \frac{1}{K_t} (k_2 E) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{(K_a K_t K_1)t}{\tau_1}\right) \right]. \quad (4.32)$$

Para uma aplicação típica, o pólo a malha aberta deve ser  $1/\tau_1 = 0,10$  enquanto o pólo a malha fechada deve ser de pelo menos  $(K_a K_t K_1)/\tau_1 = 10$ , um fator de 100 na melhoria da velocidade de resposta. Deve ser observado que para se alcançar o ganho  $K_a K_t K_1$ , o ganho do amplificador  $K_a$  deve ser razoavelmente grande e o sinal de tensão aplicada à armadura do motor e o sinal de torque associado serão maiores na operação a malha fechada que na operação a malha aberta. Portanto será necessário um motor de maior potência para se evitar saturação do motor. As respostas dos sistemas a malha aberta e a malha fechada são mostradas na Fig. 4.9. Note-se a resposta rápida do sistema a malha fechada.

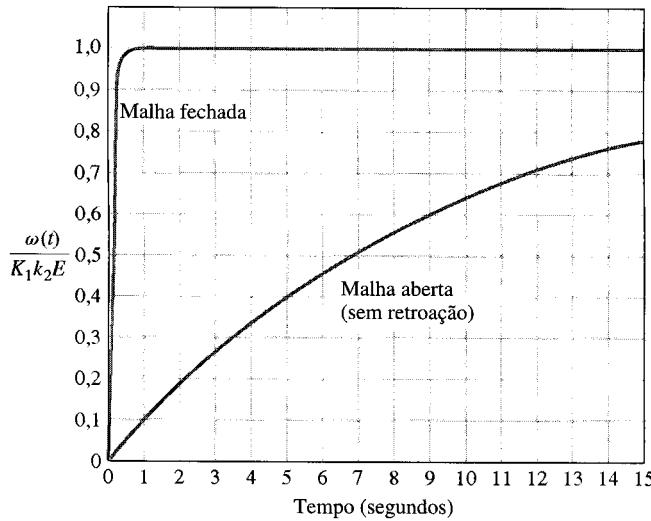
Ao se considerar este sistema de controle de velocidade, valerá a pena determinar a sensibilidade dos sistemas a malha aberta e a malha fechada. Como antes, a sensibilidade do sistema a malha aberta a uma variação da constante do motor ou a uma variação da constante do potenciômetro  $k_2$  é a unidade. A sensibilidade do sistema a malha fechada a uma variação no valor de  $K_m$  é

$$\begin{aligned} S_{K_m}^T &= S_G^T S_{K_m}^G = \frac{1}{1 + GH(s)} \\ &= \frac{1}{1 + K_a K_t G(s)} = \frac{[s + (1/\tau_1)]}{[s + (K_a K_t K_1 + 1)/\tau_1]}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Usando valores típicos fornecidos no parágrafo anterior, tem-se

$$S_{K_m}^T = \frac{(s + 0,10)}{(s + 10)}. \quad (4.34)$$

Constata-se que a sensibilidade é uma função de  $s$  e deve ser calculada para diversos valores de freqüência. Este tipo de análise de freqüência é direto mas será postergado até um capítulo posterior. Contudo, vê-se claramente que em uma freqüência baixa específica — por exemplo,  $s = j\omega = j1$  — a magnitude da sensibilidade é aproximadamente  $|S_{K_m}^T| \approx 0,1$ .



**Fig. 4.9** Resposta do sistema de controle de velocidade a malha aberta e a malha fechada quando  $\tau = 10$  e  $K_1 K_a K_t = 100$ . O tempo para alcançar 98% do valor final no sistema a malha aberta e no sistema a malha fechada é, respectivamente, de 40 segundos e de 0,4 segundo.

#### 4.4 SINAIS DE PERTURBAÇÃO EM UM SISTEMA DE CONTROLE COM RETROAÇÃO

O terceiro efeito mais importante da retroação em um sistema de controle é o controle e a eliminação do efeito de sinais de perturbação. Um **sinal de perturbação** é um sinal de entrada indesejável que afeta o sinal de saída do sistema. Muitos sistemas de controle são submetidos a sinais de perturbação externos que fazem com que o sistema forneça uma saída inexata. Os amplificadores eletrônicos possuem ruído inerente gerado no interior dos circuitos integrados ou dos transistores; as antenas de radar são submetidas a rajadas de vento; e muitos sistemas geram sinais de distorção indesejados devidos

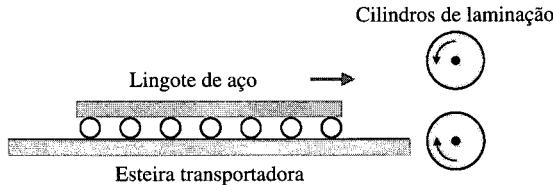


Fig. 4.10 Laminadora de aço.

a elementos não-lineares. Os sistemas com retroação possuem o recurso benéfico de poder reduzir efetivamente os efeitos de distorção, de ruído e de perturbações indesejáveis.

Como exemplo específico de um sistema com uma perturbação indesejável, considere-se o sistema de controle de velocidade de um laminador de aço. Os rolos através dos quais passa o aço são sujeitos a grandes mudanças de cargas ou perturbações. Até que um lingote de aço se aproxime dos rolos de laminação, estes giram em vazio. Contudo, quando um lingote de aço é apresentado para ser laminado, a carga nos rolos de laminação muda imediatamente para um valor grande. Este efeito de carga pode ser aproximado por uma mudança em degrau do torque perturbador, como está mostrado na Fig. 4.11. Alternativamente, podem ser examinadas as curvas de velocidade *versus* torque de um motor típico, como está mostrado na Fig. 4.12.

O modelo sob a forma de função de transferência de um motor CC controlado pela armadura com uma perturbação de torque na carga foi determinado no Exemplo 2.3 e está mostrado na Fig. 4.11, onde se admitiu que  $L_a$  é desprezível. O erro para o sistema mostrado na Fig. 4.11 é

$$E(s) = R(s) - \omega(s),$$

e  $R(s) = \omega_d(s)$ , a velocidade desejada. Para facilidade de cálculo, seja  $R(s) = 0$  e, em decorrência,  $E(s) = -\dot{\omega}(s)$ .

A mudança na velocidade devida a uma perturbação na carga é, então,

$$E(s) = -\omega(s) = \left( \frac{1}{Js + b + (K_m K_b / R_a)} \right) T_d(s). \quad (4.35)$$

O erro de velocidade em estado estacionário devido ao torque perturbador na carga  $T_d(s) = D/s$  é encontrado usando-se o teorema do valor final. Em consequência, para o sistema a malha aberta tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{Js + b + (K_m K_b / R_a)} \right) \left( \frac{D}{s} \right) \\ &= \frac{D}{b + (K_m K_b / R_a)} = -\omega_0(\infty). \end{aligned} \quad (4.36)$$

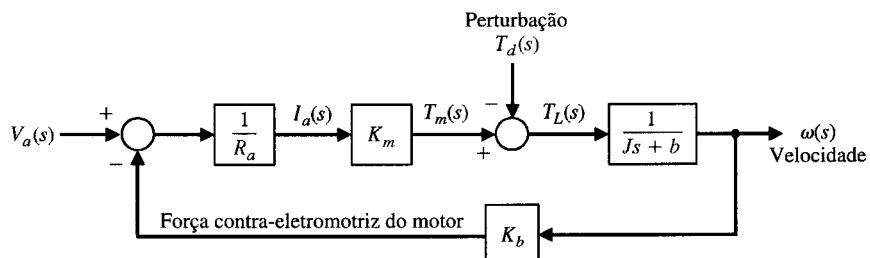
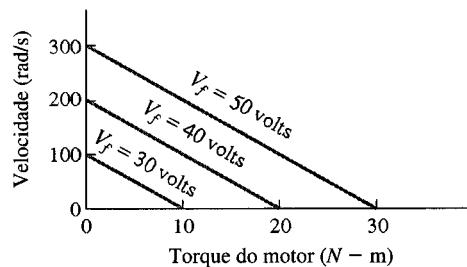
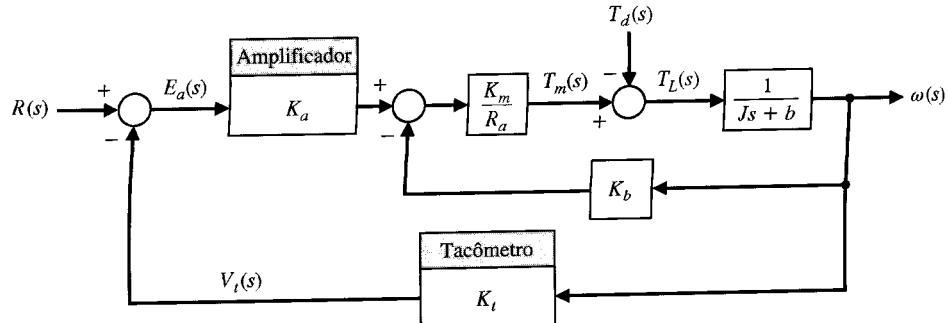


Fig. 4.11 Sistema de controle de velocidade a malha aberta (sem retroação externa).

Fig. 4.12 Curvas características torque *versus* velocidade do motor.



**Fig. 4.13** Sistema de controle tacômetro de velocidade a malha fechada.

O sistema de controle de velocidade a malha fechada está mostrado em forma de diagrama de blocos na Fig. 4.13. O sistema a malha fechada está mostrado na forma de diagrama de fluxo de sinal na Fig. 4.14, onde  $G_1(s) = K_a K_m / R_a$ ,  $G_2(s) = 1 / (J_s + b)$  e  $H(s) = K_t + (K_b / K_a)$ . O erro, da malha fechada do sistema da Fig. 4.14,  $E(s) = -\omega(s)$ , pode ser obtido utilizando-se a expressão de Mason para o ganho do diagrama de fluxo de sinal:

$$E(s) = -\omega(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} T_d(s). \quad (4.37)$$

Então, se  $G_1G_2H(s)$  for muito maior que 1 sobre a faixa de valores de  $s$ , obtém-se o resultado aproximado

$$E(s) \approx \frac{1}{G_1(s)H(s)} T_d(s). \quad (4.38)$$

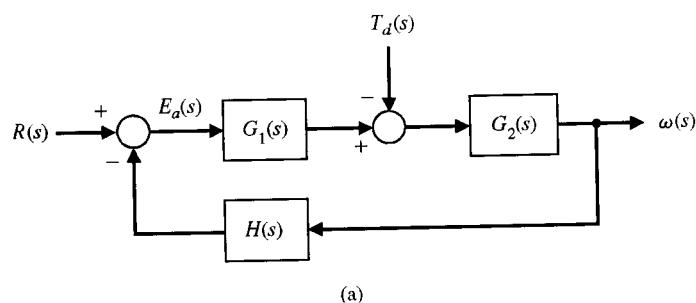
Por conseguinte se se fizer  $G_1(s)H(s)$  suficientemente grande, o efeito da perturbação pode ser reduzido pela retroação a malha fechada. Observe-se que

$$G_1(s)H(s) = \frac{K_a K_m}{R_a} \left( K_t + \frac{K_b}{K_a} \right) \approx \frac{K_a K_m K_t}{R_a},$$

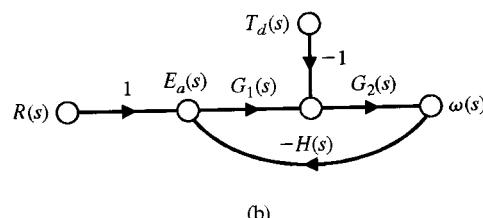
pois  $K_a \gg K_b$ . Tenta-se assim obter um ganho de amplificador  $K_a$  com valor elevado e manter  $R_a < 2 \Omega$ . O erro para o sistema mostrado na Fig. 4.14 é

$$E(s) = R(s) - \omega(s),$$

e  $R(s) = \omega_d(s)$ , a velocidade desejada. Para facilidade de cálculo, examinar  $\omega(s)$  com  $R(s) = 0$ .



(a)



(b)

**Fig. 4.14** Sistema a malha fechada. (a) Modelo em diagrama de blocos. (b) Modelo em diagrama de fluxo de sinal.

A saída do sistema de controle de velocidade da Fig. 4.13 devida a uma perturbação da carga, quando a entrada  $R(s) = 0$ , pode ser obtida usando-se a fórmula de Mason para o ganho do diagrama de fluxo de sinal, como se segue:

$$\begin{aligned}\omega(s) &= \frac{-[1/(Js + b)]}{1 + (K_t K_a K_m / R_a)[1/(Js + b)] + (K_m K_b / R_a)[1/(Js + b)]} T_d(s) \\ &= \frac{-1}{Js + b + (K_m / R_a)(K_t K_a + K_b)} T_d(s).\end{aligned}\quad (4.39)$$

A saída em estado estacionário pode ser obtida utilizando-se o teorema do valor final e se tem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s\omega(s)) = \frac{-1}{b + (K_m / R_a)(K_t K_a + K_b)} D; \quad (4.40)$$

quando o ganho  $K_a$  do amplificador for suficientemente elevado, obtém-se

$$\omega(\infty) \approx \frac{-R_a}{K_a K_m K_t} D = \omega_c(\infty). \quad (4.41)$$

A relação entre as saídas de velocidade de estado estacionário devidas a uma perturbação do sistema a malha fechada e do sistema a malha aberta é

$$\frac{\omega_c(\infty)}{\omega_0(\infty)} = \frac{R_a b + K_m K_b}{K_a K_m K_t} \quad (4.42)$$

e é usualmente inferior a 0,02.

Esta vantagem do sistema de controle de velocidade com retroação também pode ser ilustrada considerando-se as curvas de torque *versus* velocidade do sistema a malha fechada, que são mostradas na Fig. 4.15. A melhoria do sistema com retroação é evidenciada pelas curvas quase horizontais, o que indica que a velocidade é quase independente do torque de carga.

Uma das principais razões de se introduzir a retroação é a capacidade de atenuar os efeitos de perturbações e de ruídos que ocorrem no interior da malha de retroação. Um ruído que é predominante em muitos sistemas é o gerado pelo sensor de medição. Este ruído,  $N(s)$ , pode ser representado como mostrado na Fig. 4.16. O efeito do ruído na saída é

$$Y(s) = \frac{-G_1 G_2 H_2(s)}{1 + G_1 G_2 H_1 H_2(s)} N(s), \quad (4.43)$$

que é aproximadamente

$$Y(s) \approx -\frac{1}{H_1(s)} N(s). \quad (4.44)$$

Obviamente o projetista deve obter um valor máximo de  $H_1(s)$ , que é equivalente a maximizar a relação sinal-ruído do sensor de medição. Esta necessidade é equivalente a requerer que os elementos de retroação  $H(s)$  sejam bem projetados e operados com o mínimo de ruído, de deriva e de variação de parâmetros. Isto é equivalente ao requisito determinado a partir da função sensibilidade, Eq. (4.13), que mostrou que  $S_H^T \cong 1$ . Portanto, deve-se prestar atenção sobre a necessidade de assegurar a qualidade e a constância dos sensores e dos elementos de retroação. Usualmente isto é possível porque os elementos de retroação operam em níveis baixos de potência e podem ser bem projetados a um custo razoável.

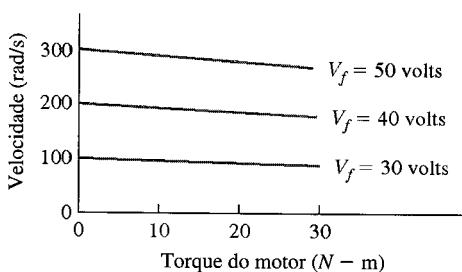


Fig. 4.15 Curvas características torque *versus* velocidade do sistema a malha fechada.

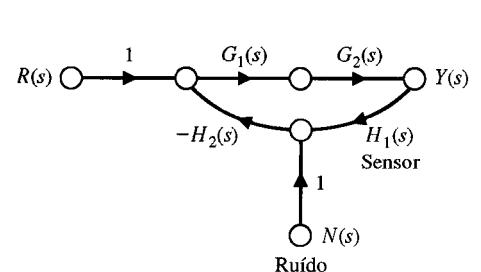


Fig. 4.16 Sistema de controle a malha fechada com ruído na medição.

A equivalência da sensibilidade  $S_G^T$  e da resposta do sistema a malha fechada a uma perturbação pode ser ilustrada considerando-se a Fig. 4.14. A sensibilidade do sistema a  $G_2$  é

$$S_{G_2}^T = \frac{1}{1 + G_1 G_2 H(s)} \cong \frac{1}{G_1 G_2 H(s)}. \quad (4.45)$$

O efeito da perturbação sobre a saída (com  $R(s) = 0$ ) é

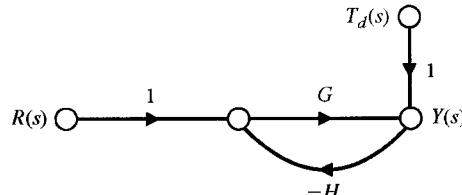
$$\frac{Y(s)}{T_d(s)} = \frac{-G_2(s)}{1 + G_1 G_2 H(s)} \cong \frac{-1}{G_1 H(s)}. \quad (4.46)$$

Em ambos os casos, descobre-se que os efeitos indesejáveis poderiam ser atenuados aumentando-se  $G_1(s) = K_a$ , o ganho do amplificador. A utilização da retroação em sistemas de controle visa, fundamentalmente, reduzir a sensibilidade do sistema a variações de parâmetros e o efeito das perturbações de entrada. É notável que o esforço para reduzir os efeitos de variações de parâmetros ou de perturbações é equivalente, e se tem a circunstância feliz de que elas são reduzidas simultaneamente. Como uma ilustração final deste fato, nota-se que para o sistema mostrado na Fig. 4.17 o efeito de ruído ou de perturbação sobre a saída é

$$\frac{Y(s)}{T_d(s)} = \frac{1}{1 + GH(s)}, \quad (4.47)$$

que é identicamente igual à sensibilidade  $S_G^T$ .

Freqüentemente, o ruído está presente na entrada dos sistemas de controle. Por exemplo, o sinal na entrada do sistema poderia ser  $r(t) + n(t)$ , onde  $r(t)$  é a resposta desejada e  $n(t)$  é o sinal de ruído. O sistema de controle, neste caso, processará simplesmente o ruído bem como o sinal de entrada  $r(t)$  e não será capaz de melhorar a relação sinal-ruído, que está presente na entrada do sistema. Contudo, se os espectros de freqüência dos sinais de ruído e de entrada forem de natureza diferente, a relação sinal-ruído poderá ser maximizada, muitas vezes simplesmente projetando a função de transferência a malha fechada que tenha uma resposta de freqüência passa-baixas.



**Fig. 4.17** Sistema de controle a malha fechada com ruído na saída.

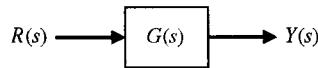
## 4.5 ERRO DE ESTADO ESTACIONÁRIO

Um sistema de controle com retroação é valioso porque dá ao engenheiro o recurso de ajustar a resposta transitória. Além do mais, como foi visto, a sensibilidade do sistema e o efeito de perturbações podem ser reduzidos significativamente. Por conseguinte, como um requisito adicional, deve-se examinar e comparar o erro final de estado estacionário de um sistema a malha aberta com o de um sistema a malha fechada. O **erro de estado estacionário** é o erro depois que a resposta transitória desapareceu, deixando apenas a resposta contínua.

O erro do sistema a malha aberta mostrado na Fig. 4.18 é

$$E_0(s) = R(s) - Y(s) = (1 - G(s))R(s). \quad (4.48)$$

**Fig. 4.18** Sistema de controle a malha aberta (sem retroação).

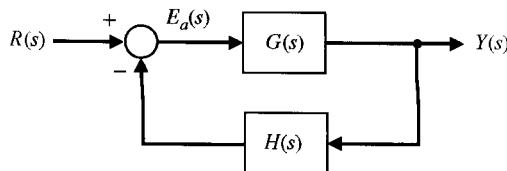


O erro do sistema a malha fechada,  $E_c(s)$ , mostrado na Fig. 4.19, quando  $H(s) = 1$ , é (Eq. 4.2)\*

$$E_c(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s).$$

(4.49)

\*A retroação não-unitária ( $H(s) \neq 1$ ) será discutida na Seção 5.8.



**Fig. 4.19** Sistema de controle com retroação a malha fechada.

Para calcular o erro de estado estacionário, utiliza-se o teorema do valor final, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s). \quad (4.50)$$

Portanto, usando uma entrada em degrau unitário como entrada de comparação, obtém-se para o sistema a malha aberta

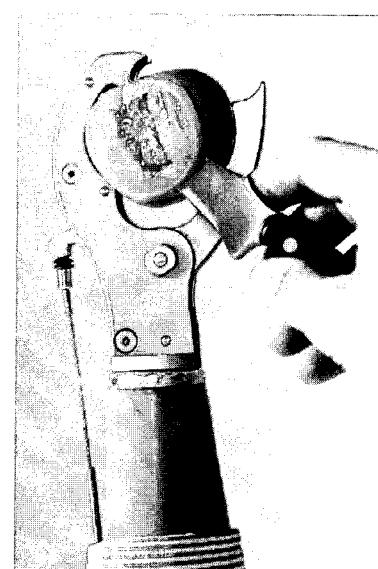
$$e_0(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s(1 - G(s))\left(\frac{1}{s}\right) = \lim_{s \rightarrow 0} (1 - G(s)) = 1 - G(0). \quad (4.51)$$

Para o sistema a malha fechada, quando  $H(s) = 1$ , tem-se

$$e_c(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\left(\frac{1}{1 + G(s)}\right)\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{1 + G(0)}. \quad (4.52)$$

O valor de  $G(s)$  quando  $s = 0$  é freqüentemente chamado de ganho estático e é normalmente maior que 1. Por conseguinte, o sistema a malha aberta apresentará usualmente um erro estacionário de valor significativo. Ao contrário, o sistema a malha fechada com um ganho estático de malha  $G(0)$  elevado terá um erro estacionário pequeno.

Examinando-se a Eq. (4.51), constata-se que o sistema de controle a malha aberta pode possuir erro estacionário nulo ajustando-se e calibrando-se o ganho estático do sistema,  $G(0)$ , de modo que  $G(0) = 1$ . Em consequência, pode-se perguntar logicamente: qual a vantagem do sistema a malha fechada neste caso? Uma vez mais retorna-se ao conceito de sensibilidade do sistema a uma variação de parâmetros como resposta a esta pergunta. Nos sistemas a malha aberta, pode-se calibrar os sistemas de modo que  $G(0) = 1$ , mas durante a operação é inevitável que os parâmetros de  $G(s)$  mudem de valor devido a alterações nas condições ambientais e que o ganho estático deixe de ser igual a 1. Porém, como se trata de sistemas a malha aberta, o erro estacionário permanecerá diferente de zero até que se faça a manutenção e a recalibração. Ao contrário, os sistemas a malha fechada com retroação monitoram continuamente o erro estacionário e fornecem um sinal atuante para reduzir o erro de regime permanente. Assim, percebe-se que é a sensibilidade do sistema às alterações de parâmetros, aos efeitos do ambiente e aos erros de calibração que encorajam a introdução da retroação negativa. Um exemplo de engenhoso sistema de controle com retroação está mostrado na Fig. 4.20.



**Fig. 4.20** A Grip II é uma prótese de mão artificial operada com cabo. Ela pode ser usada para operar manualmente a mudança de marcha em um automóvel, segurar um clipe de papel, fatiar um tomate e executar outras tarefas normais que requerem duas mãos. Baseia-se em uma ação de cabo do tipo "puxe para fechar" e tem uma força de preensão de 0 a 110 libras (cerca de 50 kgf). A mão propicia o movimento de um polegar e de um dedo indicador e se fecha quando se exerce um esforço sobre o cabo pelos músculos das costas do paciente. O sistema de visão do paciente fornece a retroação, mas o paciente fica sem o sentido de tato que a maioria das pessoas utiliza para agarrar um objeto delicadamente. (Cortesia da Therapeutic Recreation Systems, Inc.)

A vantagem do sistema a malha fechada em reduzir o erro estacionário resultante das alterações de valores de parâmetros e de erros de calibração pode ser ilustrada por meio de um exemplo. Considere-se um sistema com uma função de transferência do processo

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}, \quad (4.53)$$

que representaria um processo de controle térmico, um regulador de tensão ou um processo de controle de nível de água. Para um valor de referência específico desejado da variável de entrada, que pode ser representado por uma função de entrada em degrau unitário normalizada, tem-se  $R(s) = 1/s$ . Então, o erro estacionário do sistema a malha aberta é, como na Eq. (4.51),

$$e_0(\infty) = 1 - G(0) = 1 - K \quad (4.54)$$

quando se usa um sistema de unidades consistente para  $R(s)$  e  $K$ . O erro do sistema a malha fechada da Fig. 4.19 é

$$E_c(s) = R(s) - T(s)R(s),$$

onde  $T(s) = G(s)/(1 + GH(s))$ . O erro estacionário é

$$e_c(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\{1 - T(s)\} \frac{1}{s} = 1 - T(0).$$

Quando  $H(s) = 1/(\tau_1 s + 1)$ , obtém-se  $H(0) = 1$  e  $G(0) = K$ . Tem-se então

$$e_c(\infty) = 1 - \frac{K}{1 + K} = \frac{1}{1 + K}. \quad (4.55)$$

Para o sistema a malha aberta teria sido possível calibrar o sistema de modo que  $K = 1$  e o erro estacionário fosse igual a zero. Para o sistema a malha fechada, deveria ser ajustado um valor elevado para o ganho  $K$ , por exemplo  $K = 100$ . Então o erro estacionário do sistema seria  $e_c(\infty) = 1/101$ .

Se a calibração do ajuste de ganho deriva ou se altera por qualquer razão de  $\Delta K/K = 0,1$ , uma variação de 10%, o erro estacionário a malha aberta será  $\Delta e_0(\infty) = 0,1$  e a variação percentual no ajuste da calibração será

$$\frac{\Delta e_0(\infty)}{|r(t)|} = \frac{0,10}{1}, \quad (4.56)$$

ou seja, 10%. Em contraposição, o erro estacionário do sistema a malha fechada, com  $\Delta K/K = 0,1$  é  $e_c(\infty) = 1/91$  se o ganho diminuir. Assim, resulta a alteração em

$$\Delta e_c(\infty) = \frac{1}{101} - \frac{1}{91}, \quad (4.57)$$

e a mudança relativa é

$$\frac{\Delta e_c(\infty)}{|r(t)|} = 0,0011, \quad (4.58)$$

ou seja, 0,11%. Isto na realidade é uma grande melhoria.

## 4.6 O CUSTO DA RETROAÇÃO

A adição da retroação a um sistema de controle resulta nas vantagens resumidas nas seções anteriores. Naturalmente, contudo, estas vantagens têm um custo que as acompanha. O custo da retroação se manifesta primeiro no aumento do número de **componentes** e na **complexidade** do sistema. Para adicionar a retroação, é necessário considerar alguns componentes de retroação, na qual o componente de medição (sensor) é o elemento chave. O sensor é freqüentemente o componente mais caro de um sistema de controle. Além disso, o sensor introduz ruído e inexatidões no sistema.

O segundo custo da retroação é a **perda de ganho**. Por exemplo, em um sistema de malha única, o ganho de malha aberta é  $G(s)$  e é reduzido para  $G(s)/(1 + G(s))$  em um sistema com retroação unitária negativa. A redução no ganho a malha fechada é  $1/(1 + G(s))$ , que é exatamente o fator que reduz a sensibilidade do sistema a variações de parâmetros e a perturbações. Usualmente tem-se ganho a malha aberta com sobra, e se deseja trocar isto por um aumento no controle da resposta do sistema.

Deve-se notar que é o ganho da transmitância entrada-saída que é reduzido. O sistema de controle retém o ganho de potência substancial de um amplificador de potência e do atuador, o qual é plenamente utilizado no sistema a malha fechada.

Finalmente, um custo da retroação é a introdução da possibilidade de **instabilidade**. Embora o sistema a malha aberta seja estável, o sistema a malha fechada pode não ser sempre estável. A questão da estabilidade do sistema a malha fechada fica postergada até o Capítulo 6, onde poderá ser tratada mais completamente.

A adição da retroação nos sistemas dinâmicos resulta em alguns problemas a mais para o projetista. Contudo, na maioria dos casos, as vantagens mais que superam as desvantagens, e se utiliza um sistema com retroação. Portanto, é necessário considerar a complexidade adicional e o problema da estabilidade ao se projetar um sistema de controle.

Tornou-se claro que se deseja ter a saída do sistema  $Y(s)$  igual à entrada  $R(s)$ . Em consequência, depois de refletir, alguém poderia perguntar: Por que não fazer simplesmente a função de transferência  $G(s) = Y(s)/R(s)$  igual a 1? (Ver Fig. 4.2.) A resposta a esta pergunta se torna evidente uma vez relembrado que foi necessário o processo  $G(s)$  para se obter a saída desejada; isto é, a função de transferência  $G(s)$  representa um processo real e possui dinâmica que não pode ser desprezada. Fazer  $G(s)$  igual a 1 implica que a saída estará diretamente conectada à entrada. Deve-se lembrar que se deseja uma saída específica, tal como temperatura, rotação de um eixo, ou velocidade de um motor, enquanto a entrada pode ser ajuste de um potenciômetro ou uma tensão elétrica. O processo  $G(s)$  é necessário para prover o processo físico entre  $R(s)$  e  $Y(s)$ . Portanto, uma função de transferência  $G(s) = 1$  é irrealisável, e deve-se levar em conta uma função de transferência prática.

#### 4.7 EXEMPLO DE PROJETO: MÁQUINAS PERFURATRIZES DO CANAL DA MANCHA

A construção do túnel sob o Canal da Mancha da França para a Grã-Bretanha começou em dezembro de 1987. A primeira conexão entre os túneis escavados a partir de cada um dos países foi realizada em novembro de 1990. O túnel tem um comprimento de 23,5 milhas e foi perfurado 200 pés abaixo do nível do mar. O túnel, concluído em 1992 a um custo total de 14 bilhões de dólares, atende 50 viagens de trem diariamente. Esta construção é um elo crítico entre a Europa e a Grã-Bretanha, tornando possível um trem chegar a Paris a partir de Londres em três horas.

As máquinas que operaram de ambas as extremidades do Canal perfuraram em direção ao meio. Para obter uma ligação no meio do Canal com a precisão necessária, um sistema de orientação a laser manteve as máquinas precisamente alinhadas. Um modelo do controle das máquinas perfuratrizes é mostrado na Fig. 4.21, onde  $Y(s)$  é o ângulo real da direção de deslocamento da máquina de perfurar e  $R(s)$  é o ângulo desejado. O efeito de carga sobre a máquina é representado pela perturbação  $D(s)$ .

O objetivo do projeto é selecionar o ganho  $K$  para que a resposta a mudanças no ângulo de entrada seja a desejável, mantendo, ao mesmo tempo, o erro mínimo devido a perturbações. Usando a fórmula de ganho do diagrama de fluxo de sinal de Mason, a saída devida às duas entradas será

$$\begin{aligned} Y(s) &= T(s)R(s) + T_d(s)D(s) \\ &= \frac{K + 11s}{s^2 + 12s + K} R(s) + \frac{1}{s^2 + 12s + K} D(s). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Assim, para reduzir o efeito da perturbação, deseja-se selecionar um ganho maior que 10. Quando se seleciona  $K = 100$  e se faz  $d(t) = 0$ , tem-se como resposta ao degrau a resposta a um degrau unitário  $r(t)$  mostrada na Fig. 4.22(a). Fazendo-se a entrada  $r(t) = 0$  e determinando-se a resposta a uma perturbação em degrau unitário, obtém-se  $y(t)$ , como mostrado na Fig. 4.22(b). O efeito da perturbação é bastante pequeno. Se for selecionado um ganho  $K$  igual a 20, as respostas de  $y(t)$  a uma entrada em degrau unitário  $r(t)$  e a uma perturbação em degrau unitário  $d(t)$  são exibidas juntas na Fig. 4.23. Como a ultrapassagem da resposta é pequena (menor que 4%) e o estado estacionário é alcançado em dois segundos, pode-se preferir  $K = 20$ . Os resultados são resumidos na Tabela 4.1.

O erro de estado estacionário do sistema a uma entrada em degrau unitário  $R(s) = 1/s$  é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K + 11s}{s(s + 1)}} \left( \frac{1}{s} \right) = 0. \quad (4.60)$$

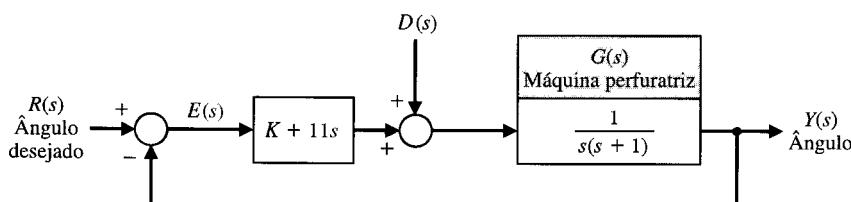
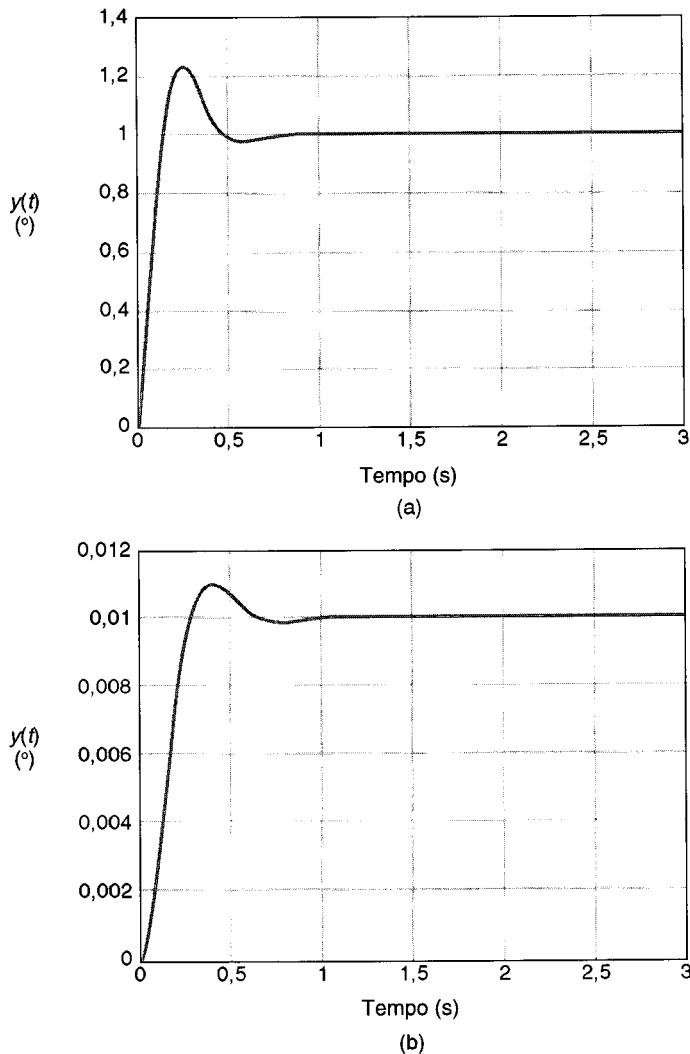
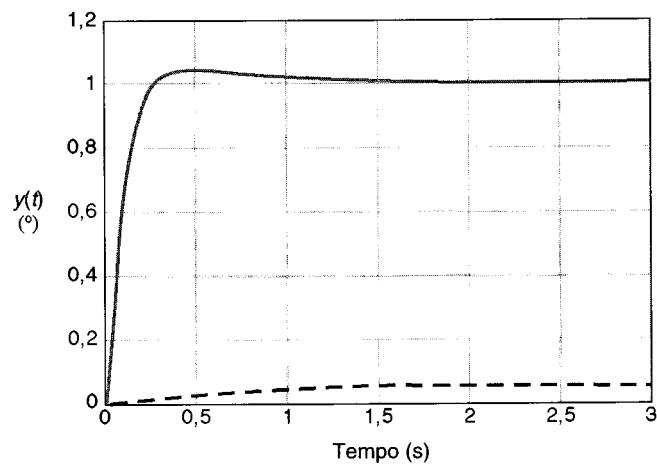


Fig. 4.21 Um modelo em diagrama de blocos do sistema de controle de uma máquina perfuradriz.



**Fig. 4.22** A resposta de  $y(t)$  para (a) uma entrada  $r(t)$  em degrau unitário e (b) uma perturbação em degrau unitário  $D(s) = 1/s$  para  $K = 100$ .



**Fig. 4.23** A resposta  $y(t)$  para uma entrada em degrau unitário (linha cheia) e para uma perturbação em degrau unitário (linha tracejada) para  $K = 20$ .

**TABELA 4.1 Resposta do Sistema de Perfuração para Dois Valores de Ganho**

Ganho <i>K</i>	Ultrapassagem da Resposta a <i>r(t) = Degrau</i>	Tempo para a Resposta Alcançar o Estado Estacionário (Criterio de 2%) a <i>r(t) = Degrau</i>	Resposta do Estado Estacionário <i>y(t)</i> para <i>d(t) = Degrau</i> com <i>r(t) = 0</i>	Erro de Estado Estacionário da Resposta a <i>r(t) = Degrau</i> com <i>d(t) = 0</i>
100	22%	0,7s	0,01	0
20	4%	1,0s	0,05	0

O valor de estado estacionário de  $y(t)$  quando a perturbação for um degrau unitário,  $D(s) = 1/s$ , e o valor desejado for  $r(t) = 0$  será

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{s(s + 12) + K} \right] = \frac{1}{K}. \quad (4.61)$$

Assim o valor de estado estacionário é 0,01 e 0,05 para  $K = 100$  e 20, respectivamente.

Finalmente se examina a sensibilidade do sistema a uma mudança no processo  $G(s)$  usando a Eq. (4.12). Então

$$S_G^T = \frac{s(s + 1)}{s(s + 12) + K}. \quad (4.62)$$

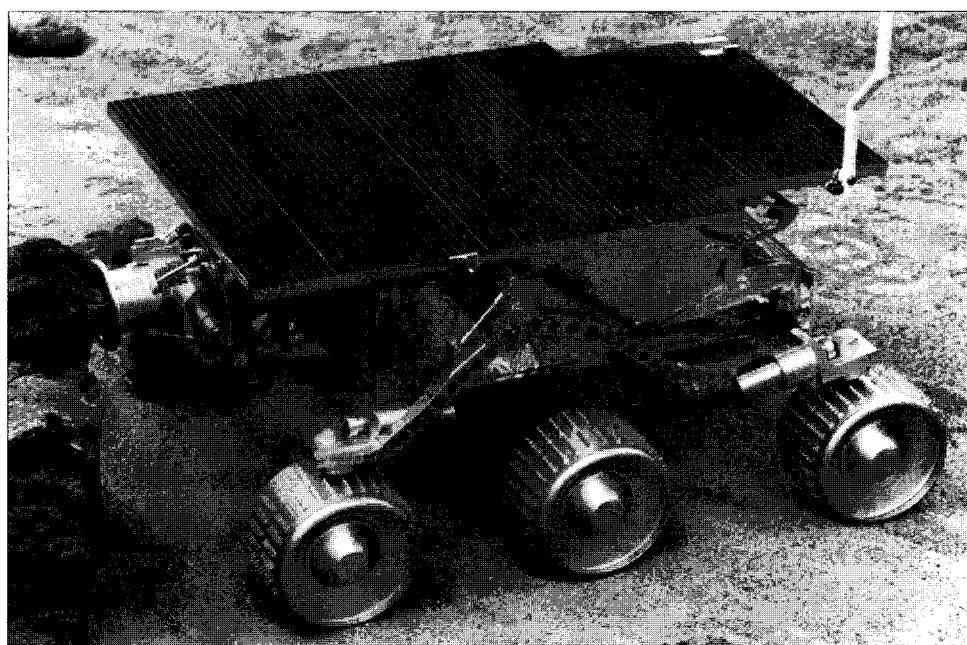
Para baixas freqüências ( $|s| < 1$ ), a sensibilidade pode ser aproximada por

$$S_G^T \approx \frac{s}{K}, \quad (4.63)$$

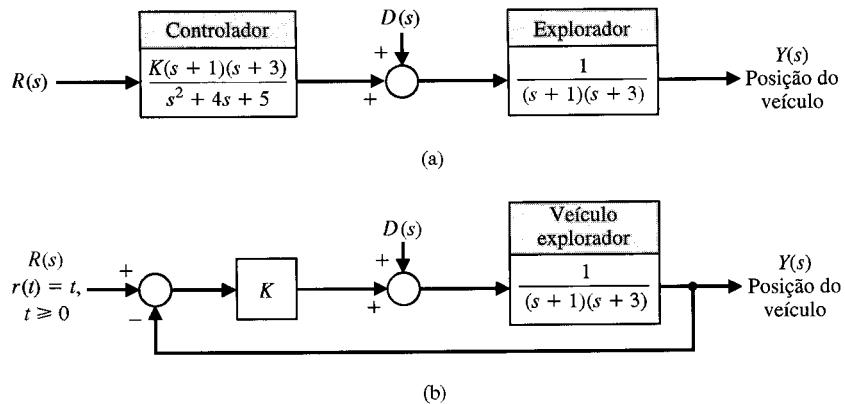
onde  $K \geq 20$ . Assim a sensibilidade do sistema é reduzida aumentando-se o ganho  $K$ . Neste caso, escolhe-se  $K = 20$  como uma solução de projeto razoável.

#### 4.8 EXEMPLO DE PROJETO: VEÍCULO EXPLORADOR DE MARTE

O veículo explorador de Marte, Sojourner, alimentado com energia solar, é mostrado na Fig. 4.24. O veículo pode ser controlado da Terra enviando-lhe comandos de itinerário,  $r(t)$ . Espera-se usar um sinal de entrada em rampa,  $r(t) = t$ ,  $t \geq 0$ . O sistema pode ser operado sem retroação, como está mostrado na Fig. 4.25(a), ou com retroação, como mostrado na Fig. 4.25(b). O objetivo é operar o explorador com efeitos de perturbação (tais como pedras) modestos e com baixa sensibilidade a mudanças no ganho  $K$ .



**Fig. 4.24** O explorador de Marte, movido a energia solar, chamado Sojourner, aterrissou em Marte em 4 de julho de 1997 e foi ativado para trabalhar em 5 de julho de 1997. O explorador de 23 libras é controlado por um operador na Terra que atua nos controles do veículo explorador [21, 22]. (Foto por cortesia da NASA.)



**Fig. 4.25** Sistema de controle do veículo explorador; (a) a malha aberta (sem retroação) e (b) a malha fechada com retroação. A entrada é  $R(s) = 1/s$ .

A função de transferência para o sistema a malha aberta é

$$T_o(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + 4s + 5}, \quad (4.64)$$

e a função de transferência do sistema a malha fechada é

$$T_c(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + 4s + 3 + K}. \quad (4.65)$$

Então, para  $K = 2$ ,

$$T(s) = T_o(s) = T_c(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 5}.$$

Portanto, pode-se comparar a sensibilidade dos sistemas a malha aberta e a malha fechada para a mesma função de transferência.

A sensibilidade para o sistema a malha aberta é

$$S_K^{T_o} = \frac{dT_o}{dK} \frac{K}{T_o} = 1, \quad (4.66)$$

e a sensibilidade para o sistema a malha fechada é

$$S_K^{T_c} = \frac{dT_c}{dK} \frac{K}{T_c} = \frac{s^2 + 4s + 3}{s^2 + 4s + 3 + K}. \quad (4.67)$$

Para examinar o efeito da sensibilidade em baixas freqüências, faz-se  $s = j\omega$  para obter

$$S_K^{T_c} = \frac{(3 - \omega^2) + j4\omega}{(3 + K - \omega^2) + j4\omega}. \quad (4.68)$$

Para  $K = 2$ , a sensibilidade em freqüências baixas,

$$\omega < 0,1, \text{ é } |S_K^{T_c}| \approx 0,6.$$

Um gráfico freqüencial da magnitude da sensibilidade é mostrado na Fig. 4.26. Note-se que a sensibilidade para freqüências baixas é

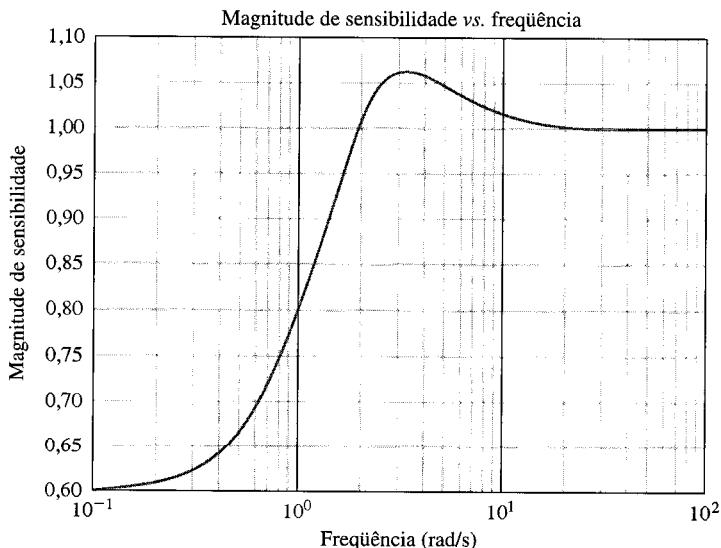
$$|S_K^{T_c}| < 0,8, \quad \omega \leq 0,8.$$

O efeito da perturbação pode ser determinado fazendo-se  $R(s) = 0$  e  $D(s) = 1/s$ . Então, para sistema a malha aberta, tem-se o valor de estado estacionário

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left\{ \frac{1}{(s+1)(s+3)} \right\} \frac{1}{s} = \frac{1}{3}. \quad (4.69)$$

A saída do sistema a malha fechada devida a uma perturbação em degrau unitário,  $D(s) = 1/s$ , é (ver Seção 4.4)

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left\{ \frac{1}{(s^2 + 4s + 3 + K)} \right\} \frac{1}{s} = \frac{1}{3 + K}. \quad (4.70)$$



**Fig. 4.26** A magnitude da sensibilidade do sistema a malha fechada para o veículo explorador de Marte.

Quando  $K = 2$ ,  $Y(\infty) = 1/5$ . Como se busca minimizar o efeito da perturbação, é claro que um valor maior de  $K$  seria desejável. Um aumento no valor de  $K$ , tal como  $K = 50$ , reduzirá mais ainda o efeito da perturbação bem como reduzirá a magnitude da sensibilidade (Eq. 4.68). No entanto, à medida que se aumenta  $K$  além de  $K = 50$ , o desempenho transitório do sistema para uma rampa de entrada  $r(t)$  começa a se deteriorar.

## 4.9 CARACTERÍSTICAS DE SISTEMA DE CONTROLE COM O MATLAB

Nesta seção, as vantagens da retroação serão ilustradas com dois exemplos. O objetivo é ilustrar o uso do MATLAB na análise do sistema de controle. No primeiro exemplo, será introduzido o controle com retroação de um sistema de velocidade taquimétrico no esforço para rejeitar perturbações. O exemplo de sistema de controle de velocidade com tacômetro pode ser encontrado na Seção 4.3. A redução na sensibilidade do sistema a variações do processo, o ajustamento de respostas transitórias e a redução no erro de estado estacionário serão demonstrados no segundo exemplo, o exemplo da máquina perfuratriz do Canal da Mancha na Seção 4.7.

### EXEMPLO 4.2

#### Sistema de controle de velocidade

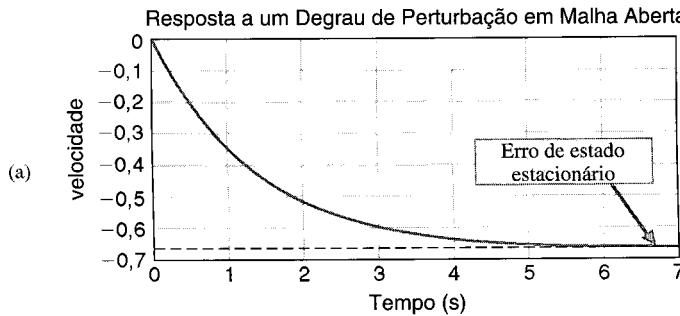
A descrição do diagrama de blocos a malha aberta do motor CC controlado pela armadura submetido a uma perturbação de torque de carga,  $T_d(s)$ , é mostrado na Fig. 4.13. Os valores para vários parâmetros (obtidos da Fig. 4.11) estão na Tabela 4.2. São dadas duas entradas para o sistema,  $V_a(s)$  e  $T_d(s)$ . Contando com o **princípio da superposição**, que se aplica ao sistema linear em tela, considera-se cada uma das entradas separadamente. Para investigar os efeitos de perturbações sobre o sistema, faz-se  $V_a(s) = 0$  e se considera somente a perturbação  $T_d(s)$ . Inversamente, para investigar a resposta do sistema a uma referência de entrada, faz-se  $T_d(s) = 0$  e se considera somente a entrada  $V_a(s)$ .

O diagrama de blocos do sistema de controle de velocidade com tacômetro a malha fechada é mostrado na Fig. 4.13. Os valores para  $K_a$  e  $K_t$  são dados na Tabela 4.2.

Se o sistema apresentar uma boa rejeição a perturbações, então se espera que a perturbação  $T_d(s)$  tenha um pequeno efeito sobre a saída  $\omega(s)$ . Considere-se, primeiro, o sistema a malha aberta na Fig. 4.11. Pode-se usar o MATLAB para obter a função de transferência relacionando  $T_d(s)$  a  $\omega(s)$  e calcular a resposta na saída a uma perturbação em degrau unitário (isto é,  $T_d(s) = 1/s$ ). A resposta no tempo a uma perturbação em degrau unitário é mostrada na Fig. 4.27(a). O script opentach.m, mostrado na Fig. 4.27(b), é usado para analisar o sistema de velocidade com tacômetro a malha aberta.

**TABELA 4.2 Parâmetros do Sistema de Controle com Tacômetro**

$R_a$	$K_m$	$J$	$b$	$K_b$	$K_a$	$K_t$
1	10	2	0,5	0,1	54	1



opentach.m

```
% Exemplo de Velocidade com Tacômetro
%
Ra=1; Km=10; J=2; b=0.5; Kb=0.1;
num1=[1]; den1=[J,b]; num2=[Km*Kb/Ra]; den2=[1];
[num,den]=feedback(num1,den1,num2,den2);
%
num=-num; % Muda o sinal da perturbação, uma vez que a perturbação tem sinal negativo no diagrama.
printsys(num,den)
%
[yo,x,t]=step(num,den); plot(t,yo) % Calcula a resposta a uma perturbação em degrau.
title('Resposta a um Degrau de Perturbação em Malha Aberta')
xlabel('tempo [s]'), ylabel('velocidade'), grid
%
yo(length(t)) % Erro estacionário → último valor da saída yo.
```

(b)

**Fig. 4.27** Análise de um sistema de controle de velocidade a malha aberta.  
(a) Resposta e (b) script MATLAB.

A função de transferência a malha aberta é

$$\frac{\omega(s)}{T_d(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{-1}{2s + 1,5}.$$

Como o valor desejado de  $\omega(t)$  é zero (lembre que  $V_o(s) = 0$ ), o erro de estado estacionário é exatamente o valor final de  $\omega(t)$ , que se designa por  $\omega_o(t)$  para indicar malha aberta. O erro de estado estacionário, mostrado no gráfico da Fig. 4.27(a), é aproximadamente o valor da velocidade quando  $t = 7$  segundos. Poderá ser obtido um valor aproximado do erro de estado estacionário olhando o último valor do vetor  $y_o$ , que foi calculado no processo de gerar o gráfico da Fig. 4.27(a). O valor de estado estacionário aproximado de  $\omega_o$ , é

$$\omega_o(\infty) \approx \omega_o(7) = -0,66 \text{ rad/s.}$$

O gráfico verifica que, de fato, o estado estacionário foi alcançado.

Num modo semelhante, começa-se a análise do sistema a malha fechada obtendo a função de transferência a malha fechada relacionando  $T_d(s)$  com  $\omega(s)$  e então gerando resposta no domínio de tempo,  $\omega(t)$ , a uma perturbação em degrau unitário. O sinal de resposta na saída e o script cltach.m são mostrados na Fig. 4.28. A função de transferência a malha fechada para uma perturbação de entrada é

$$\frac{\omega(s)}{T_d(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} = \frac{-1}{2s + 541,5}.$$

Como antes, o erro de estado estacionário é exatamente o valor final de  $\omega(t)$ , designado por  $\omega_c(t)$  para indicar malha fechada. O erro de estado estacionário é mostrado no gráfico da Fig. 4.28(a). Pode-se obter um valor aproximado do erro de estado estacionário observando o último valor no vetor saída  $y_c$ , que foi calculado no processo de geração do gráfico da Fig. 4.28(a). O valor aproximado de estado estacionário de  $\omega$  é

$$\omega_c(\infty) \approx \omega_c(0,02) = -0,002 \text{ rad/s.}$$

Espera-se geralmente que  $\omega_c(\infty)/\omega_o(\infty) < 0,02$ . A relação entre o estado estacionário de velocidade a malha fechada e o estado estacionário de velocidade a malha aberta para uma perturbação em degrau unitário, neste exemplo, é

$$C \frac{\omega_c(\infty)}{\omega_o(\infty)} = 0,003.$$

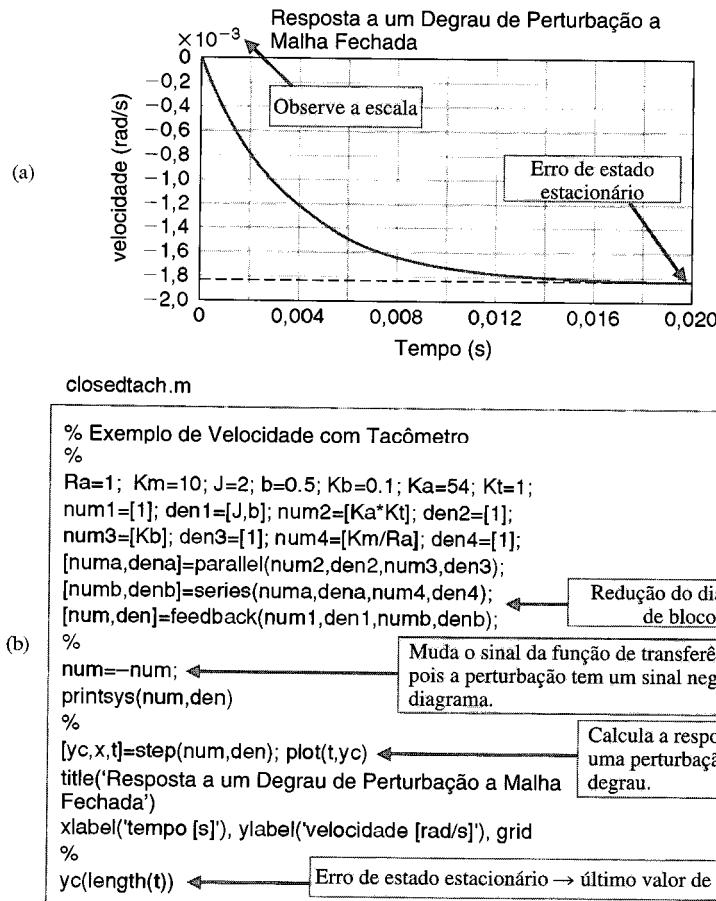


Fig. 4.28 Análise de um sistema de controle de velocidade a malha fechada.  
(a) Resposta e (b) script MATLAB.

Foi conseguida uma melhoria considerável na rejeição da perturbação. É evidente que a adição da malha de retroação negativa reduziu o efeito de perturbação na saída. Isto demonstra a **propriedade de rejeição de perturbação** dos sistemas com retroação a malha fechada. ■

#### EXEMPLO 4.3

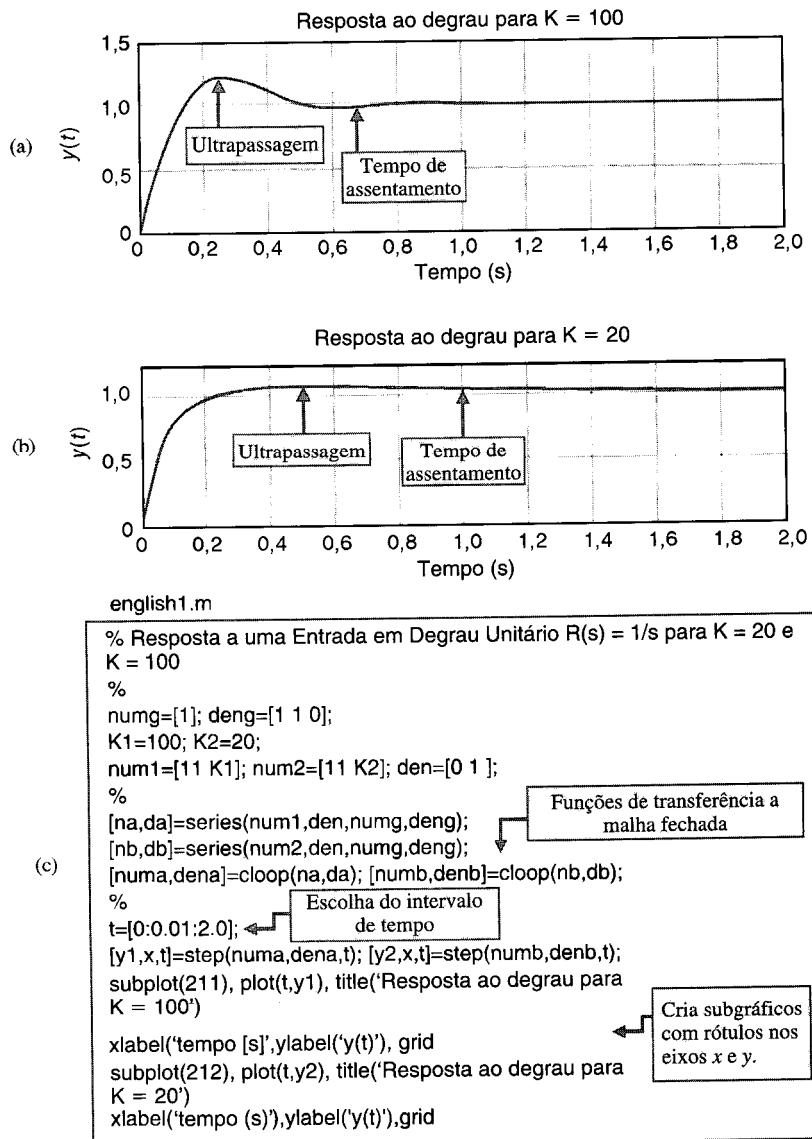
#### Máquinas perfuratrizes do Canal da Mancha

A descrição em diagrama de blocos das máquinas perfuratrizes do Canal da Mancha é mostrada na Fig. 4.21. A função de transferência da saída devida às duas entradas é

$$Y(s) = \frac{K + 11s}{s^2 + 12s + K} R(s) + \frac{1}{s^2 + 12s + K} D(s).$$

O efeito do ganho de controle de  $K$  na resposta transitória é mostrado na Fig. 4.29 ao longo do script `english1.m` usado para gerar os gráficos. Comparando os dois gráficos das partes (a) e (b), pode-se ver que diminuindo  $K$  diminui a **ultrapassagem**. Embora isto não seja tão óbvio a partir dos gráficos da Fig. 4.29, é também verdade que diminuindo  $K$  aumenta o **tempo de assentamento**. Isto pode ser verificado olhando mais de perto (no nível de comando do MATLAB) os dados usados para gerar os gráficos. Este exemplo demonstra como a resposta transitória pode ser alterada pelo ganho  $K$  do controle com retroação. Com base na análise até aqui, seria preferível usar  $K = 20$ . Outras considerações devem ser levadas em conta antes de se estabelecer o projeto final.

Antes de fazer a escolha final de  $K$ , é importante considerar a resposta do sistema a uma perturbação em degrau unitário, como está mostrado na Fig. 4.30. Constatata-se que aumentando  $K$  se reduz a resposta de estado estacionário de  $y(t)$  a uma perturbação em degrau. O valor da resposta de estado estacionário de  $y(t)$  é 0,05 e 0,01 para  $K = 20$  e 100, respectivamente. Os erros de estado estacionário, a ultrapassagem percentual e o tempo de assentamento (critério dos 2%) estão resumidos na Ta-



**Fig. 4.29** Resposta para entrada em degrau com (a)  $K = 100$  e (b)  $K = 20$ . (c) script MATLAB.

bela 4.3. Os valores de estado estacionário para uma perturbação de entrada podem ser previstos a partir do teorema do valor final, como a seguir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left\{ \frac{1}{s(s + 12) + K} \right\} \frac{1}{s} = \frac{1}{K}.$$

Se a única consideração do projeto for a rejeição de perturbações, será preferível usar  $K = 100$ .

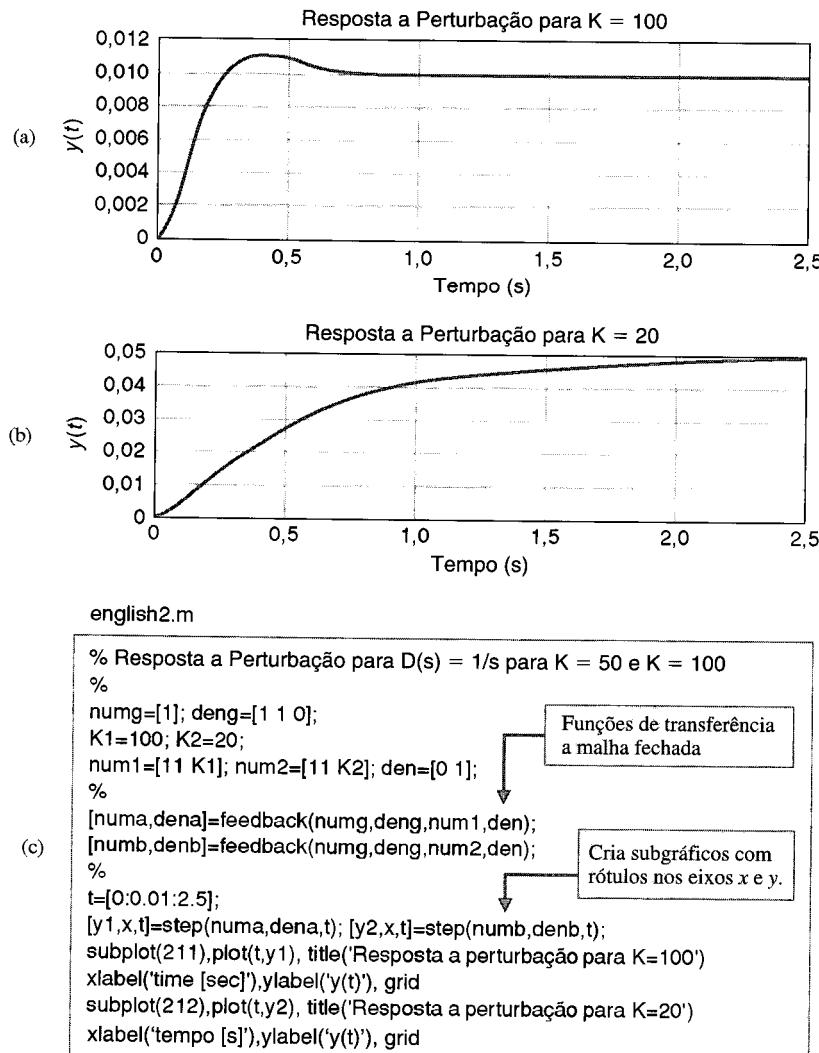
Acabou-se de experimentar uma situação de análise custo-benefício muito comum no projeto de sistemas de controle. Neste exemplo, em particular, o aumento de  $K$  conduz a uma melhor rejeição de perturbação, enquanto que a diminuição de  $K$  conduz a um melhor desempenho (isto é, menor ultrapassagem). A decisão final sobre como escolher  $K$  cabe ao projetista. Embora o MATLAB possa certamente ajudar no projeto do sistema de controle, não pode substituir a capacidade de tomada de decisão e a intuição do engenheiro.

O passo final na análise é verificar a sensibilidade do sistema a alterações do processo. A sensibilidade do sistema é dada por (Eq. 4.62)

$$S_G^T = \frac{s(s + 1)}{s(s + 12) + K}.$$

Pode-se calcular os valores de  $S_G^{T(s)}$  para diferentes valores de  $s$  e gerar um gráfico da sensibilidade do sistema. Para baixas freqüências, pode-se aproximar a sensibilidade do sistema por

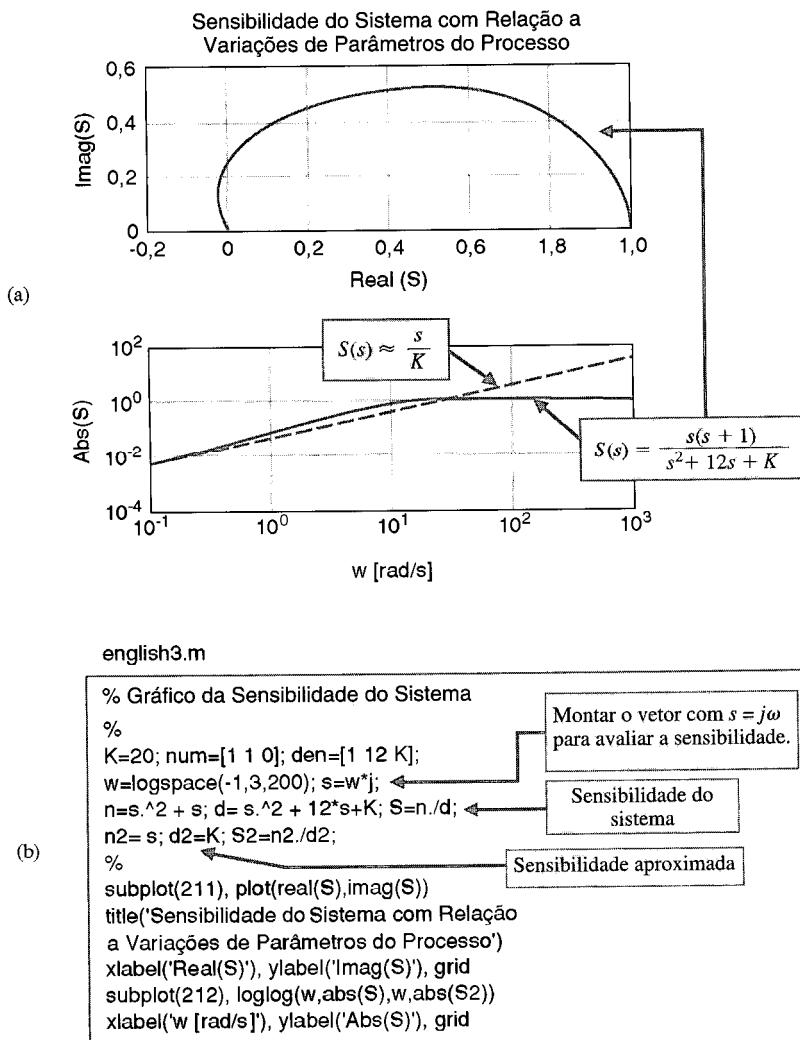
$$S_G^T \approx \frac{s}{K}.$$



**Fig. 4.30** Resposta a uma perturbação em degrau (a)  $K = 100$  e (b)  $K = 20$  (c) script MATLAB.

**TABELA 4.3 Resposta do Sistema de Controle da Máquina Perfuratriz para  $K = 20$  e  $K = 100$**

	$K = 20$	$K = 100$
P.O.	4%	22%
$T_s$	1,0s	0,7s
$e_{ss}$	5%	1%



**Fig. 4.31** (a) Sensibilidade do sistema com relação a variações do processo ( $s = j\omega$ ). (b) Script MATLAB.

Aumentando-se o valor do ganho  $K$  reduz-se a sensibilidade do sistema. O gráfico da sensibilidade do sistema quando  $s = j\omega$  está mostrado na Fig. 4.31 para  $K = 20$ . ■

#### 4.10 EXEMPLO DE PROJETO SEQUENCIAL: SISTEMA DE LEITURA DE AÇÃOADOR DE DISCO



O projeto de um sistema de açãoador de disco é um exercício de compromisso e de otimização. O açãoador de disco deve posicionar, com precisão, a cabeça de leitura ao mesmo tempo que deve ser capaz de reduzir os efeitos devidos à variação de parâmetros e aos choques e vibrações externos. O braço mecânico e a conexão flexível poderão apresentar ressonância em freqüências que podem ser provocadas por excitações tais como choques mecânicos sobre um computador portátil. As perturbações na operação do açãoador de disco incluem choques mecânicos, desgaste ou desalinhamento nos mancais do eixo, bem como alterações nos parâmetros devidas a mudanças ocorridas com os componentes. Nesta seção será examinado o desempenho do sistema de açãoador de disco sob a ação de perturbações e de mudanças nos parâmetros do sistema. Adicionalmente será examinado o erro de estado estacionário do sistema a um comando em degrau e a resposta transitória à medida que o ganho do amplificador,  $K_a$ , é ajustado. Assim, nesta seção estão sendo realizados os passos 6 e 7 do procedimento de projeto da Fig. 1.19.

Considere-se o sistema mostrado na Fig. 4.32. Este sistema a malha fechada usa como controlador um amplificador com ganho variável. Usando os parâmetros especificados na Tabela 2.11, obtém-se as funções de transferência mostradas na Fig. 4.33. Primeiro serão determinados os estados estacionários para uma entrada em degrau unitário,  $R(s) = 1/s$ , quando  $D(s) = 0$ . Então, para  $H(s) = 1$ , será obtido,

$$E(s) = \frac{1}{1 + K_a G_1(s) G_2(s)} R(s).$$

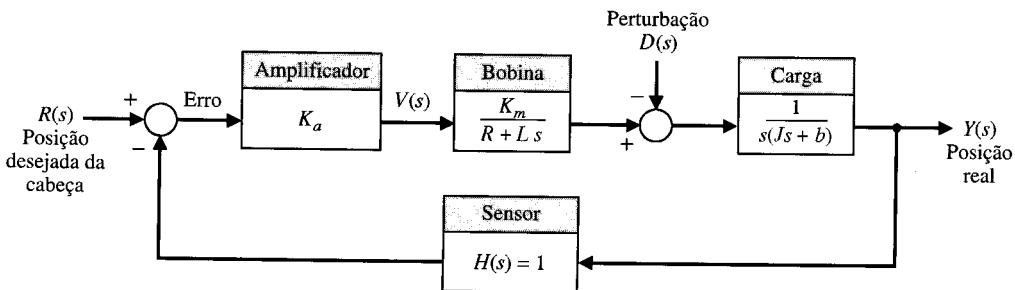
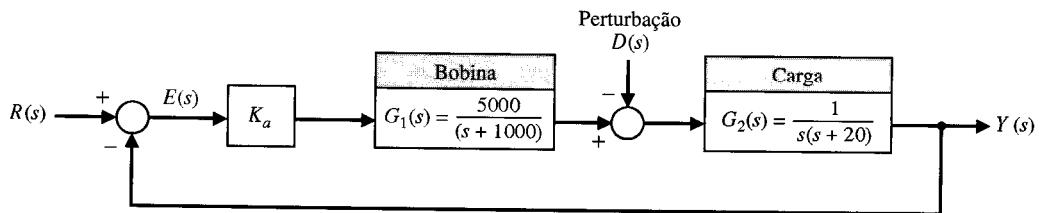


Fig. 4.32 Sistema de controle para cabeça de leitura de acionador de disco.

Fig. 4.33 Sistema de controle de cabeça de acionador de disco com os parâmetros típicos da Tabela 2.11.



Logo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{1}{1 + K_a G_1(s) G_2(s)} \right] \frac{1}{s}. \quad (4.71)$$

Então, o erro de estado estacionário é  $e(\infty) = 0$  para uma entrada em degrau. Este desempenho é obtido a despeito de alterações nos parâmetros do sistema.

Seja agora determinar o desempenho transitório do sistema à medida que  $K_a$  é ajustado. A função de transferência a malha fechada (com  $D(s) = 0$ ) é

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_a G_1(s) G_2(s)}{1 + K_a G_1(s) G_2(s)} \\ &= \frac{5000 K_a}{s^3 + 1020s^2 + 20000s + 5000 K_a}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Usando os comandos do script MATLAB mostrado na Fig. 4.34(a), obtém-se as respostas do sistema para  $K_a = 10$  e  $K_a = 80$ , mostradas na Fig. 4.34(b). Obviamente o sistema é mais rápido na resposta ao comando de entrada quando  $K_a = 80$ , mas a resposta é inaceitavelmente oscilatória.

Seja determinar agora o efeito da perturbação  $D(s) = 1/s$  quando  $R(s) = 0$ . Deseja-se reduzir o efeito da perturbação a um nível insignificante. Usando o sistema da Fig. 4.33, obtém-se a resposta  $Y(s)$  para a entrada  $D(s)$  quando  $K_a = 80$  como

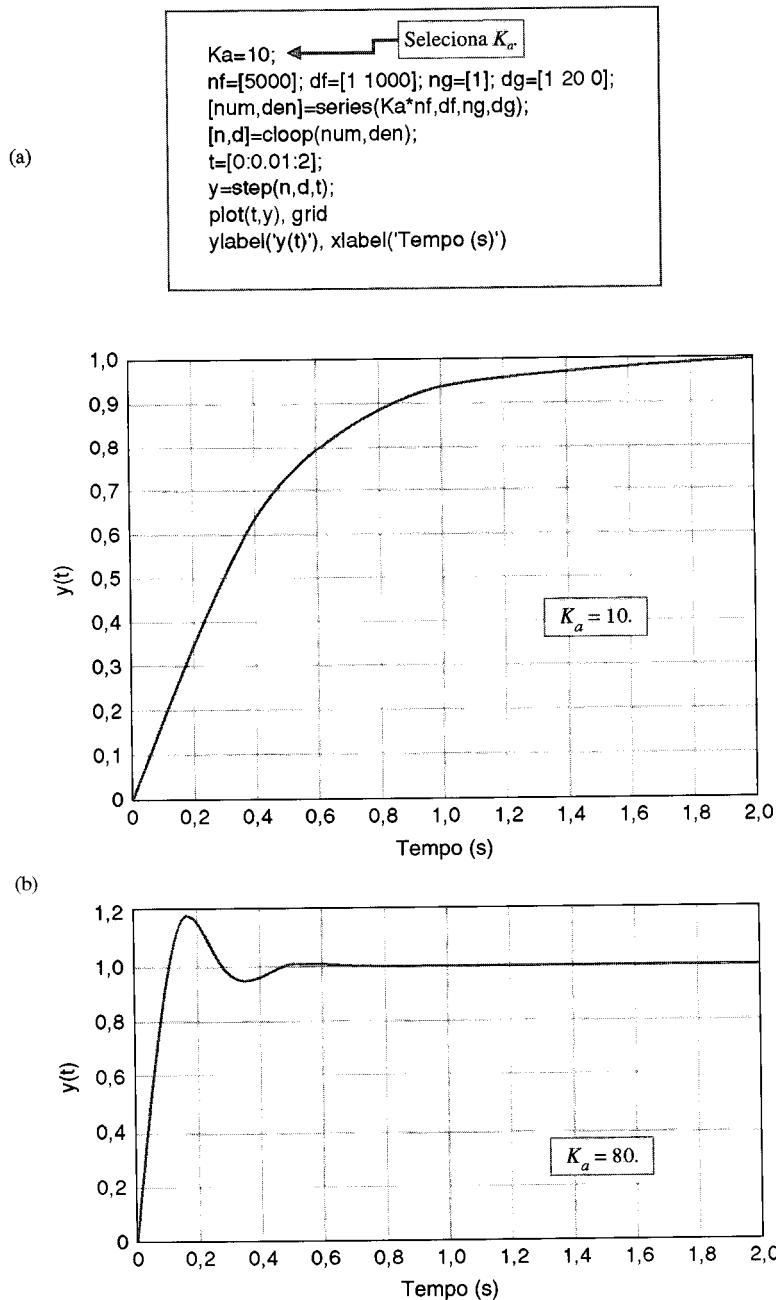
$$Y(s) = \frac{G_2(s)}{1 + K_a G_1(s) G_2(s)} D(s) \quad (4.73)$$

Usando-se o script MATLAB mostrado na Fig. 4.35(a), obtém-se a resposta do sistema quando  $K_a = 80$  e  $D(s) = 1/s$ , como está mostrado na Fig. 4.35(b). A fim de reduzir ainda mais o efeito da perturbação, seria necessário aumentar o valor de  $K_a$  acima de 80. Contudo, a resposta a um comando em degrau  $r(t) = 1$ ,  $t > 0$  seria inaceitavelmente oscilatória. No próximo capítulo se tentará determinar o melhor valor para  $K_a$ , considerando o requisito especificado de se ter uma resposta rápida, porém não-oscilatória.

## 4.11 SUMÁRIO

As razões fundamentais para se usar retroação, a despeito do custo e da complexidade adicional, são as seguintes:

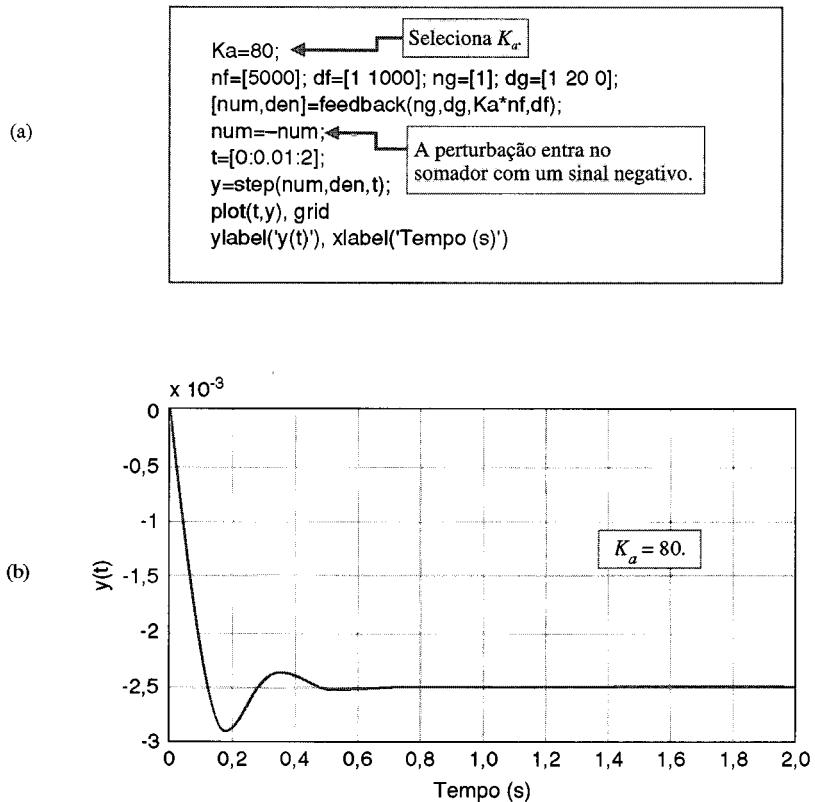
1. Diminuição da sensibilidade do sistema com relação a variações nos parâmetros do processo  $G(s)$ .
2. Facilidade de controlar e ajustar a resposta transitória do sistema.
3. Melhoria na rejeição a perturbações e ruídos no interior do sistema.
4. Melhoria na redução do erro de estado estacionário do sistema.



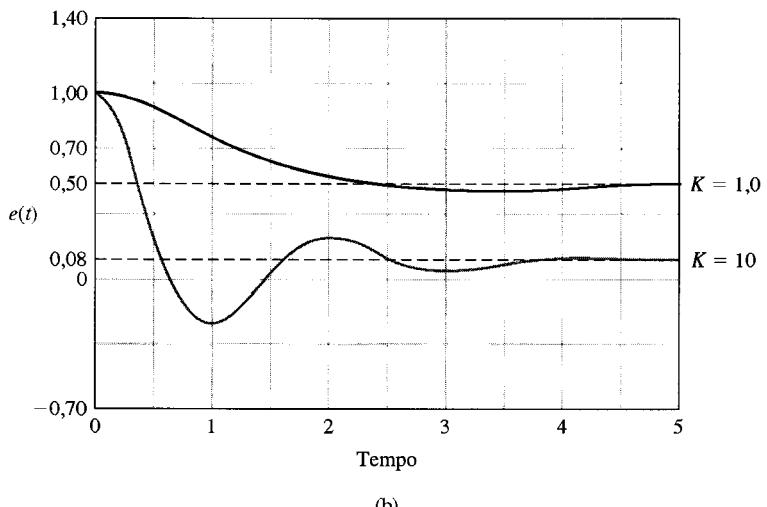
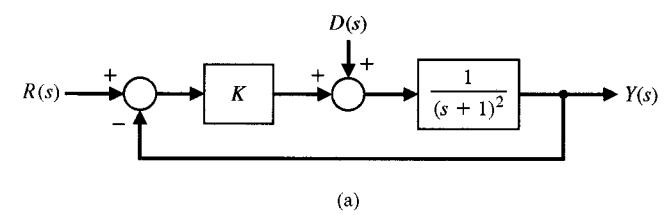
**Fig. 4.34** Resposta a malha fechada. (a) Script MATLAB. (b) Resposta a um degrau para  $K_a = 10$  e  $K_a = 80$ .

Os benefícios da retroação podem ser ilustrados considerando-se o sistema mostrado na Fig. 4.36(a). Este sistema pode ser considerado para diversos valores de ganho,  $K$ . A Tabela 4.4 resume os resultados do sistema quando operado como um sistema a malha aberta (desconectando-se o percurso de retroação) e para diversos valores de ganho,  $K$ , com a retroação ligada. Fica evidente que o tempo de subida e a sensibilidade do sistema são reduzidos quando o ganho é aumentado. Além disto, o sistema com retroação demonstra excelente redução do erro de estado estacionário à medida que se aumenta o ganho. Finalmente, a Fig. 4.36(b) mostra a resposta para uma perturbação em degrau unitário distúrbio (para  $R(s) = 0$ ) e mostra como um ganho maior reduzirá o efeito da perturbação.

Os sistemas de controle de retroação possuem muitas características benéficas, e não é surpresa encontrar uma enorme gama de sistemas com retroação em diversos campos como indústria, governo e natureza.



**Fig. 4.35** Resposta a uma perturbação em degrau. (a) Script MATLAB. (b) Resposta a uma perturbação em degrau unitário para  $K_a = 80$ .



**Fig. 4.36** (a) Sistema de controle com retroação constituído por malha única. (b) O erro em resposta a uma perturbação em degrau unitário para  $R(s) = 0$ .

TABELA 4.4 Resposta do Sistema Mostrado na Fig. 4.36(a).

	Malha Aberta*		Malha Fechada	
	K = 1	K = 1	K = 8	K = 10
Tempo de subida (segundos) (10% a 90% do valor final)	3,35	1,52	0,45	0,38
Ultrapassagem percentual de (%)	0	4,31	33	40
Valor final de $y(t)$ devido a perturbação $D(s) = 1/s$	1,0	0,50	0,11	0,09
Variância percentual do erro de estado estacionário para entrada em degrau unitário	0	50%	11%	9%
Variância percentual no erro estacionário devido a 10% de decréscimo no valor de K	10%	5,3%	1,2%	0,9%

\*Resposta somente quando  $K = 1$  exatamente.

## EXERCÍCIOS

- E4.1** Um sistema de malha fechada é usado para rastrear o Sol de modo a obter o máximo de energia a partir de um painel fotovoltaico. O sistema de rastreamento pode ser representado pela Fig. 4.3 com  $H(s) = 1$  e

$$G(s) = \frac{100}{\tau s + 1},$$

onde  $\tau = 3$  segundos, nominalmente. (a) Calcular a sensibilidade deste sistema por uma pequena mudança no valor de  $\tau$ . (b) Calcular a constante de tempo da resposta do sistema a malha fechada.

**Resposta:**  $S = -3s/(3s + 101)$ ;  $\tau_c = 3/101$  segundos

- E4.2** Um sistema digital de áudio é projetado para minimizar o efeito de perturbações e de ruídos, como mostra a Fig. E4.2. Como aproximação, pode-se representar  $G(s) = K_2$ . (a) Calcular a sensibilidade do sistema com relação a  $K_2$ . (b) Calcular o efeito da perturbação sobre  $V_o$ . (c) Que valor seria selecionado para  $K_1$  para minimizar o efeito da perturbação?

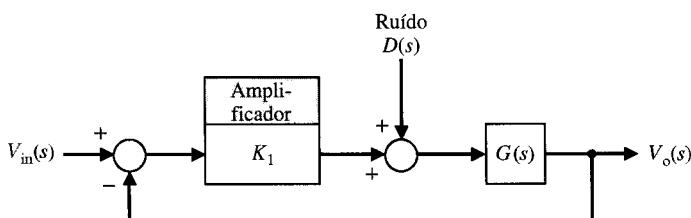


Fig. E4.2 Sistema de áudio digital.

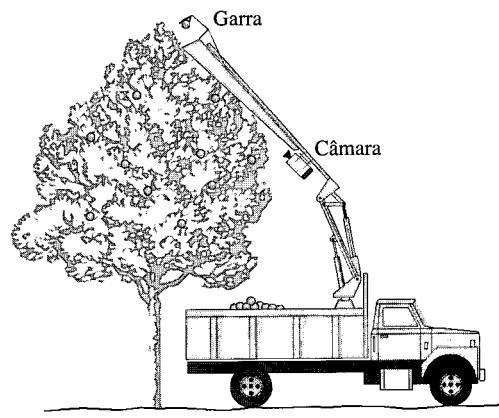
- E4.3** Um braço de robô e uma câmara poderiam ser usados para colher frutas, como está sendo mostrado na Fig. E4.3(a). A câmara é usada para fechar a malha de retroação com um microcomputador, que controla o braço [8, 9]. O processo é

$$G(s) = \frac{K}{(s + 3)^2}.$$

(a) Calcular o erro de estado estacionário esperado da garra para um comando em degrau de amplitude A, como uma função de K. (b) Indicar um possível sinal de perturbação para este sistema.

$$\text{Resposta: (a)} e_{ss} = \frac{A}{1 + K/9}$$

- E4.4** Um acionador de disco magnético requer um motor para posicionar uma cabeça de leitura/gravação sobre pistas de dados na



(a)

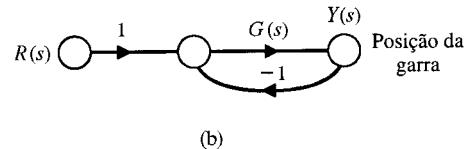


Fig. E4.3 Robô para colher frutas.

superfície de um disco em rotação, como está mostrado na Fig. E4.4. O motor e a cabeça são representados por

$$G(s) = \frac{10}{s(\tau s + 1)},$$

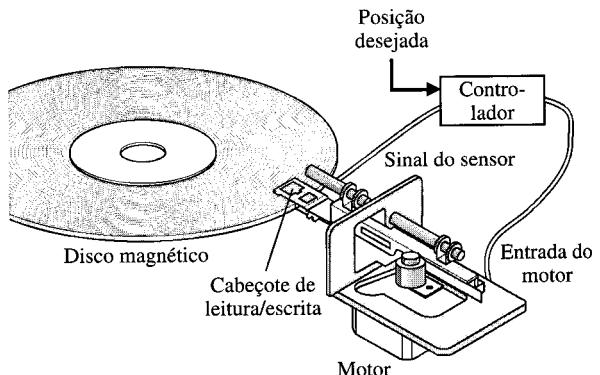
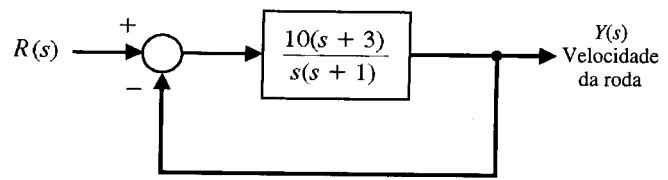


Fig. E4.4 Controle de acionamento de disco.

onde  $\tau = 0,001$  segundo. O controlador pega a diferença entre as posições real e desejada e gera um erro. Este erro é multiplicado por um amplificador  $K$ . (a) Qual é o erro estacionário de posição para uma mudança em degrau na posição desejada? (b) Calcular o valor requerido para  $K$  a fim de conduzir a um erro estacionário de 0,1 mm para uma entrada em rampa de 10 cm/s.

**Resposta:**  $e_{ss} = 0$ ;  $K = 100$

- E4.5** A maioria das pessoas já experimentou um projetor de transparências fora de foco. Um projetor com foco automático se ajusta para compensar variações na posição da transparência e perturbações de temperatura [11]. Desenhar um diagrama de blocos de um sistema de foco automático e descrever como funciona o sistema. Uma projeção de transparência fora de foco é um exemplo visual de erro estacionário.
- E4.6** Veículos com tração nas quatro rodas são comuns em regiões onde as condições das estradas no inverno são quase sempre escoregadias devidas à neve e ao gelo. Um acionamento com tração nas quatro rodas com freios antibloqueio usa um sensor para conservar cada uma das rodas girando a fim de manter a tração. Um sistema está mostrado na Fig. E4.6. Obter a resposta a malha fechada deste sistema ao tentar manter constante a velocidade da roda. Usar um programa de computador para determinar a resposta quando  $R(s) = A/s$ .
- E4.7** Os submersíveis com casco de plástico transparente têm o potencial para revolucionar o lazer subaquático. Um veículo sub-

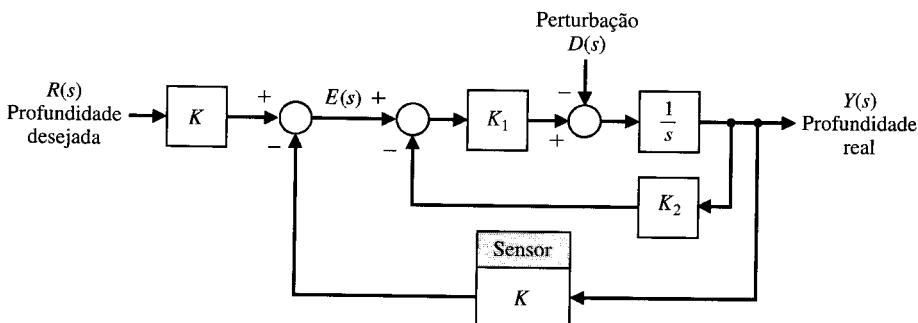


**Fig. E4.6** Automóvel com tração nas quatro rodas.

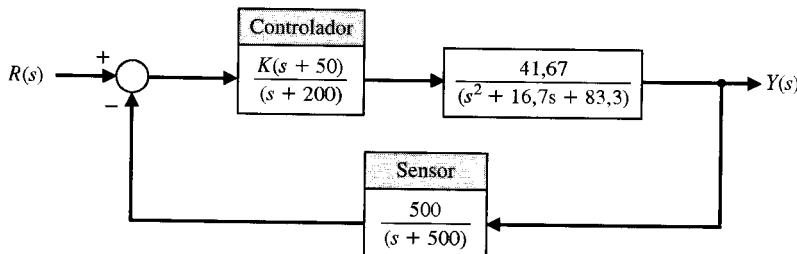
mersível pequeno possui um sistema de controle de profundidade de como está ilustrado na Fig. E4.7.

- (a) Determinar a função de transferência a malha fechada  $T(s) = Y(s)/R(s)$ .  
 (b) Determinar a sensibilidade  $S_K^T$  e  $S_{K_1}^T$ .  
 (c) Determinar o erro estacionário devido a uma perturbação  $D(s) = 1/s$ .  
 (d) Calcular a resposta  $y(t)$  para uma entrada em degrau  $R(s) = 1/s$  quando  $K = K_2 = 1$  e  $1 < K_1 < 10$ . Selecionar  $K_1$  para a resposta mais rápida.

- E4.8** Considerar o sistema de controle com retroação da Fig. E4.8.  
 (a) Determinar o erro de estado estacionário para uma entrada em degrau em termos do ganho  $K$ . (b) Determinar a ultrapassagem para a resposta ao degrau com  $40 \leq K \leq 400$ . (c) Traçar o gráfico de a ultrapassagem e o erro estacionário versus  $K$ .



**Fig. E4.7** Sistema de controle de profundidade.



**Fig. E4.8**

## PROBLEMAS

- P4.1** A função de transferência de um sistema de escoamento de fluido obtida no Problema 2.12 pode ser escrita como

$$G(s) = \frac{\Delta Q_2(s)}{\Delta Q_1(s)} = \frac{1}{\tau s + 1},$$

onde  $\tau = RC$ ,  $R$  é uma constante equivalente à resistência oferecida pelo orifício de modo que  $1/R = (1/2)kH_0^{-1/2}$  e  $C$  = área da seção reta

do reservatório. Como  $\Delta H = R\Delta Q_2$ , tem-se a seguinte função de transferência relacionando a coluna de líquido a uma variação na entrada

$$G_1(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta Q_1(s)} = \frac{R}{RCs + 1}.$$

Um sensor flutuador de nível e uma válvula podem ser usados para formar um sistema de retroação a malha fechada como está mos-

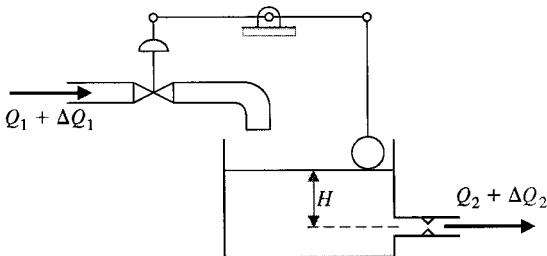
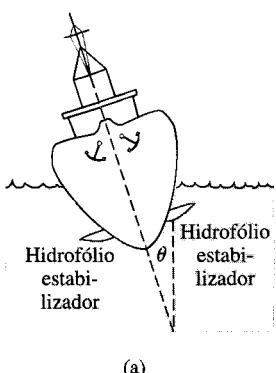


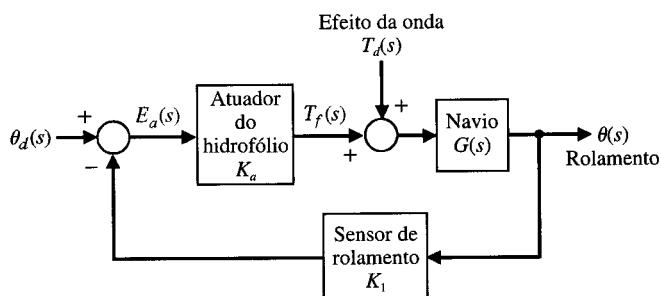
Fig. P4.1 Controle de nível em reservatório.

trado na Fig. P4.1. Supondo o flutuador com massa insignificante, a válvula é controlada de modo que uma redução no fluxo,  $\Delta Q_1$ , é proporcional a um aumento na altura da coluna de fluido,  $\Delta H$ , ou  $\Delta Q_1 = -K\Delta H$ . Desenhar um diagrama de fluxo de sinal ou um diagrama de blocos a malha fechada. Determinar e comparar os sistemas a malha aberta e a malha fechada quanto a (a) sensibilidade a mudanças na constante do atuador  $K_a$  e no sensor de rolamento  $K_1$ ; (b) capacidade de reduzir os efeitos de perturbação no nível  $\delta H(s)$ ; e (c) erro de estado estacionário do nível (altura da coluna de fluido) para uma variação na entrada  $\Delta Q_1(s)$ .

**P4.2** É importante assegurar conforto aos passageiros de um navio através da estabilização das oscilações devidas às ondas [13]. A maioria dos sistemas de estabilização de navios utiliza hidrofólios ou superfícies estabilizantes que se projetam para fora na água para gerar os torques de estabilização sobre o navio. Um diagrama de blocos simples de um sistema de estabilização de navio está mostrado na Fig. P4.2. O movimento de rolamento de um navio pode ser visto como o de um pêndulo oscilando  $\theta$  graus em torno da vertical com um período típico de 3 segundos. A função de transferência de um navio típico é



(a)



(b)

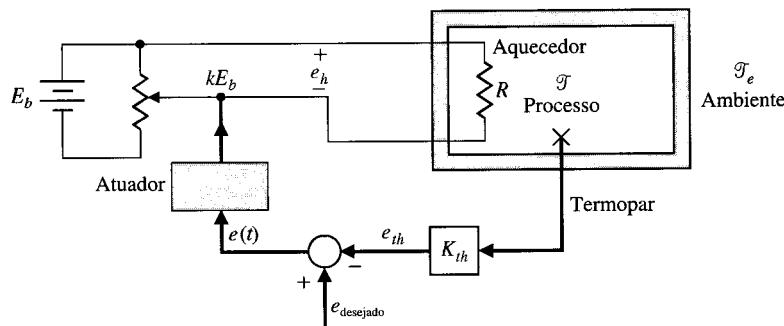
Fig. P4.2 Sistema de estabilização de navio. O efeito das ondas produz um torque sobre o navio,  $T_d(s)$ .

Fig. P4.3 Sistema de controle de temperatura.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

onde  $\omega_n = 3$  rad/s e  $\zeta = 0,20$ . Com este valor baixo do fator de amortecimento  $\zeta$ , as oscilações continuam por vários ciclos e a amplitude de rolamento pode alcançar 18° com as amplitudes de ondas esperadas em um mar normal. Determinar e comparar os sistemas a malha aberta e a malha fechada quanto a (a) sensibilidade a mudanças na constante do atuador  $K_a$  e no sensor de rolamento  $K_1$ ; (b) capacidade de reduzir os efeitos de perturbações de ondas em degrau. Observe-se que o valor desejado de rolamento  $\theta_d(s)$  é zero grau.

**P4.3** Uma das variáveis mais importantes que devem ser controladas em sistemas industriais e químicos é a temperatura. Uma representação simples de um sistema térmico está mostrada na Fig. P4.3 [14]. A temperatura  $\mathcal{T}$  do processo é controlada por meio do aquecedor com resistência  $R$ . Uma aproximação da dinâmica relaciona linearmente o calor perdido a partir do processo com a diferença de temperatura ( $\mathcal{T} - \mathcal{T}_e$ ). Esta relação prevalece se a diferença de temperatura for relativamente pequena e se o armazenamento de energia no aquecedor e nas paredes do vaso forem insignificantes. Admite-se também que a tensão elétrica aplicada ao aquecedor,  $e_b$ , seja proporcional a  $e_{desejado}$ , ou seja,  $e_b = k_E b e(t)$ , onde  $k_E$  é a constante do atuador. Então, a resposta do sistema linearizado a malha aberta é

$$\mathcal{T}(s) = \frac{(k_1 k_E b)}{\tau s + 1} E(s) + \frac{\mathcal{T}_e(s)}{\tau s + 1},$$

onde

- $\tau = MC/\rho A$ ,
- $M$  = massa no interior do reservatório,
- $A$  = área da superfície do reservatório,
- $\rho$  = constante de transferência de calor,
- $C$  = calor específico,
- $k_1$  = uma constante de dimensão,
- $e_{th}$  = tensão de saída do termopar.

Determinar e comparar os sistemas a malha aberta e a malha fechada quanto a (a) sensibilidade a mudanças na constante  $K = k_a k_e E_b$ ; (b) capacidade de reduzir os efeitos de uma perturbação em degrau na temperatura ambiente,  $\Delta T_e(s)$ ; e (c) o erro estacionário do controlador de temperatura para uma mudança em degrau na entrada,  $e_{\text{desejado}}$ .

- P4.4** Um sistema de controle possui dois percursos diretos de sinal, como está mostrado na Fig. P4.4. (a) Determinar a função de transferência total  $T(s) = Y(s)/R(s)$ . (b) Calcular a sensibilidade  $S_G^T$  usando a Eq. (4.16). (c) A sensibilidade depende de  $U(s)$  ou de  $M(s)$ ?

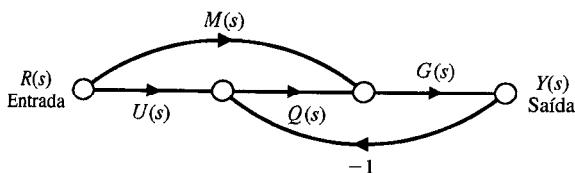


Fig. P4.4 Sistema com dois percursos diretos.

- P4.5** Grandes antenas de microondas vêm se tornando cada vez mais importantes para a radioastronomia e para o rastreamento de satélites. Uma antena grande, por exemplo, com 60 pés de diâmetro, fica sujeita a torques consideráveis devidos a rajadas de vento. É requerido de uma antena proposta que ela apresente um erro inferior a  $0,10^\circ$  sob um vento de 35 mph. Experimentos mostram que esta força de vento de 35 mph exerce uma perturbação máxima de 200.000 ft-lb, ou equivalente a 10 volts na entrada da amplidina,  $T_d(s)$ . Um problema no acionamento de grandes antenas é a forma da função de transferência que possui uma ressonância estrutural. O servossistema da antena está mostrado na Fig.

P4.5. A função de transferência do conjunto antena, motor de acionamento e amplidina é aproximadamente

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)},$$

onde  $\zeta = 0,707$  e  $\omega_n = 15$ . A função de transferência do amplificador de potência é aproximadamente

$$G_1(s) = \frac{k_a}{\tau s + 1},$$

onde  $\tau = 0,15$  segundo. (a) Determinar a sensibilidade do sistema a uma mudança no parâmetro  $k_a$ . (b) O sistema é submetido a uma perturbação  $T_d(s) = 10/s$ . Determinar o valor requerido de  $k_a$  a fim de manter o erro estacionário do sistema inferior a  $0,10^\circ$  quando a entrada  $R(s)$  for igual a zero. (c) Determinar o erro do sistema ao ser submetido a uma perturbação  $T_d(s) = 10/s$  quando for operado como um sistema a malha aberta ( $k_a = 0$ ) com  $R(s) = 0$ .

- P4.6** Sistemas de controle automático de velocidade serão necessários nos carros de passageiros que trafegarem nas auto-estradas automáticas do futuro. Um modelo de sistema de controle de velocidade com retroação para um veículo padrão está mostrado na Fig. P4.6. A perturbação de carga devida a uma declividade percentual,  $\Delta D(s)$ , também está mostrada. O ganho  $K_e$  do motor varia no interior da faixa de 10 a 1000 para os diversos modelos de automóveis. A constante de tempo do motor,  $\tau_e$ , é de 20 segundos. (a) Determinar a sensibilidade do sistema às variações no ganho do motor  $K_e$ . (b) Determinar o efeito do torque de carga sobre a velocidade. (c) Determinar a declividade percentual  $\Delta D(s) = \Delta d/s$  para a qual o carro estanca (velocidade  $V(s) = 0$ ) em termos dos fatores de ganho. Observe-se que, com declividade constante, a solução de estado estacionário é suficiente. Admitir que  $R(s) = 30/s$  km/h e que  $K_e K_t >> 1$ . Quando  $(K_g/K_t) = 2$ , que declividade percentual faria o automóvel estancar?

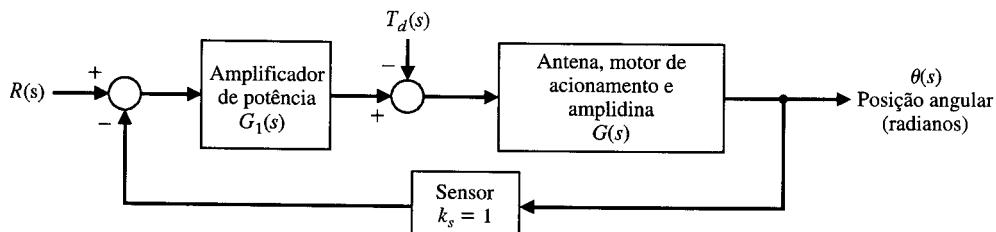


Fig. P4.5 Sistema de controle de antena.

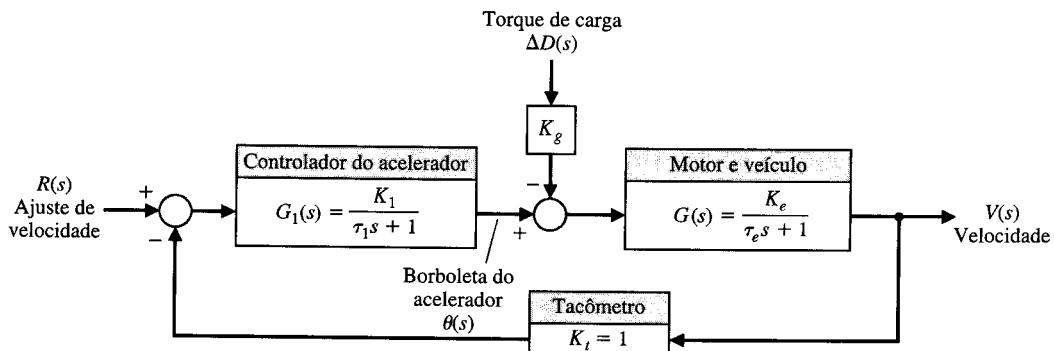


Fig. P4.6 Controle de velocidade de automóvel.

- P4.7** Um robô utiliza retroação para controlar a orientação do eixo de cada uma das suas juntas. O efeito de carga varia devido a objetos de carga variáveis e à posição estendida do braço. O sistema será defletido pela carga transportada pela garra. Assim, o sistema pode ser representado pela Fig. P4.7, onde o torque de carga é  $D(s)$ . Admitir  $R(s) = 0$  na posição índice (referência). (a) Qual é o efeito de  $T_L(s)$  sobre  $Y(s)$ ? (b) Determinar a sensibilidade da malha fechada em relação a  $k_2$ . (c) Qual é o erro estacionário quando  $R(s) = 1/s$  e  $T_L(s) = 0$ ?

- P4.8** Variações extremas de temperatura resultam em muitas falhas de circuitos eletrônicos [1]. Os sistemas de controle de temperatura com retroação reduzem as variações de temperatura usando um aquecedor para se sobrepor a baixas temperaturas externas. O diagrama de blocos de um sistema está mostrado na Fig. P4.8. O efeito de uma queda na temperatura ambiente é um decréscimo em degrau de  $D(s)$ . A temperatura real do circuito eletrônico é  $Y(s)$ . A dinâmica da mudança de temperatura do circuito eletrônico está representada por

$$G(s) = \frac{200}{s^2 + 20s + 200}.$$

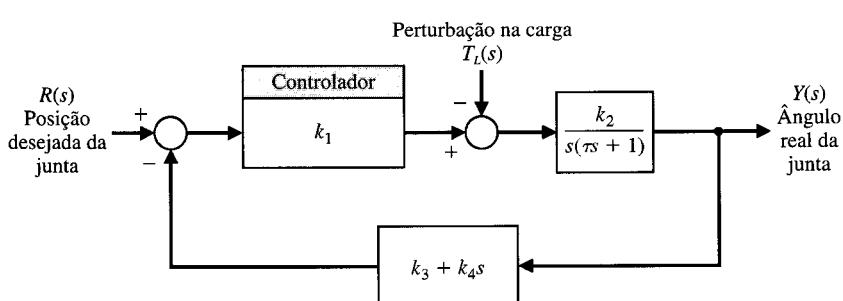


Fig. P4.7 Sistema de controle de robô.

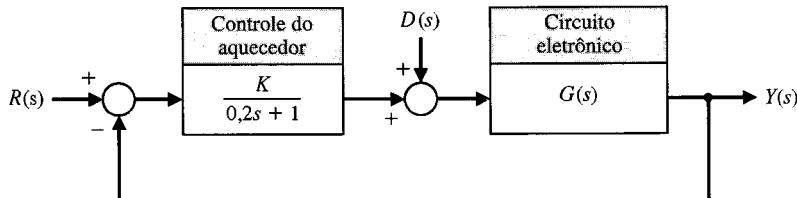
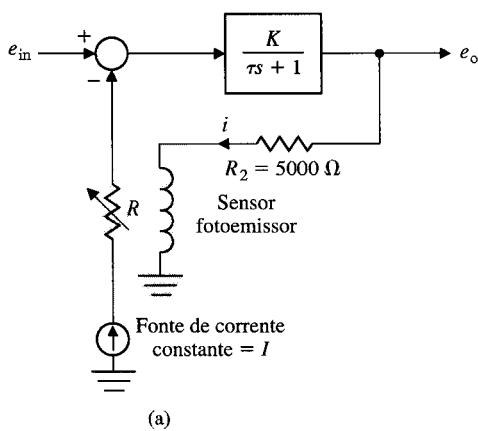
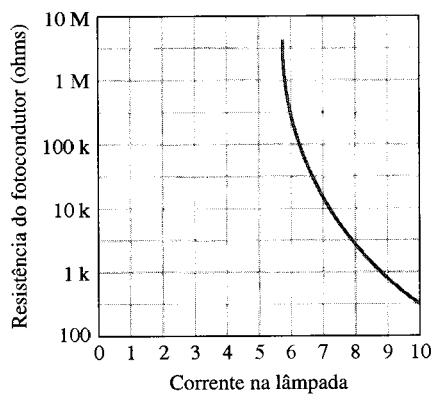


Fig. P4.8 Sistema de controle de temperatura.



(a)



(b)

Fig. P4.9 Sistema fotossensor.

**P4.10** Em uma instalação de processamento de papel é importante manter uma tensão constante sobre a folha contínua de papel entre os rolos de desenrolar e de enrolar. A tensão varia à medida que as espessuras das bobinas varia e é necessário ajustar a velocidade do motor do cilindro de enrolamento, como está mostrado na Fig. P4.10. Se a velocidade do motor de enrolar não estiver controlada, à medida que o papel for sendo transferido do cilindro alimentador para o cilindro de enrolar a velocidade  $v_0$  diminui e a tensão de tração sobre o papel cai [10, 14]. A combinação de três roletes e da mola fornece uma medida da tensão aplicada ao papel. A força da mola é igual a  $k_1 y$  e o conjunto transformador diferencial linear, retificador e amplificador pode ser representado por  $e_o = -k_2 y$ . Por conseguinte, uma medida da tensão é descrita pela relação  $2T(s) = k_1 y$ , onde  $y$  é o deslocamento a partir da condição de equilíbrio e  $T(s)$  é a componente vertical do desvio de tensão a partir da situação de equilíbrio. A constante de tempo do motor é  $\tau = L_a/R_a$  e a velocidade tangencial do cilindro de enrolar é duas vezes a velocidade angular do motor, isto é,  $v_0(t) = 2\omega_0(t)$ . A equação do motor é, então,

$$E_0(s) = \frac{1}{K_m} [\tau s \omega_0(s) + \omega_0(s)] + k_3 \Delta T(s),$$

onde  $\Delta T =$  perturbação de tensão. (a) Esboçar o diagrama de blocos do sistema a malha fechada, incluindo a perturbação  $\Delta T(s)$ . (b) Adicionar ao diagrama de blocos o efeito de uma perturbação na velocidade da bobina de desenrolar,  $\Delta V_1(s)$ . (c) Determinar a sensibilidade do sistema à constante do motor  $K_m$ . (d) Determinar o erro estacionário de tensão quando ocorrer uma perturbação em degrau na velocidade de entrada  $\Delta V_1(s) = A/s$ .

**P4.11** Um objetivo importante do processo de fabricação de papel é manter consistência uniforme da matéria-prima de saída encaminhada para secagem e bobinagem. Um diagrama do sistema de controle de diluição da consistência de matéria-prima espessa está mostrado na Fig. P4.11(a). A quantidade de água adicionada determina a consistência. O diagrama de fluxo de sinal do sistema está mostrado na Fig. P4.11(b). Seja  $H(s) = 1$

$$G_c(s) = \frac{K}{(8s + 1)}, \quad G(s) = \frac{1}{(4s + 1)}.$$

Determinar (a) a função de transferência a malha fechada  $T(s) = Y(s)/R(s)$ , (b) a sensibilidade  $S_K^T$  e o erro estacionário a uma variação em degrau na consistência desejada  $R(s) = A/s$ . (d) Calcular o valor de  $K$  requerido para um erro estacionário admissível de 1%.

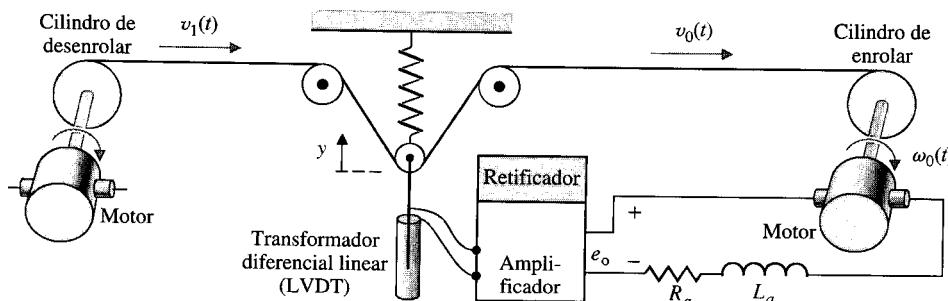
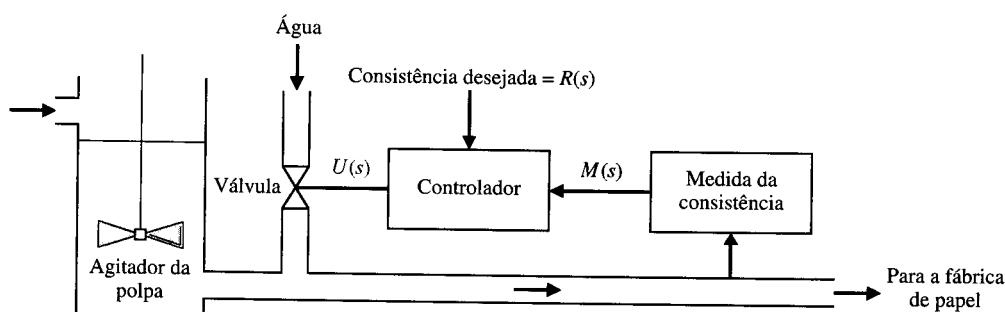
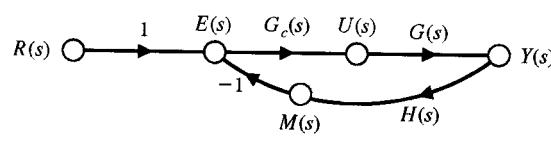


Fig. P4.10 Controle de tensão em papel.



(a)



(b)

Fig. P4.11 Sistema de fabricação de papel.

- P4.12** Dois sistemas com retroação são mostrados sob a forma de diagrama de fluxo de sinal nas Figs. P4.12(a) e (b). (a) Calcular as funções de transferência  $T_1$  e  $T_2$  de cada sistema. (b) Mostrar que  $T_1 = T_2 = 100$  quando  $K_1 = K_2 = 100$ . (c) Comparar as sensibilidades dos dois sistemas com respeito ao parâmetro  $K_1$  para os valores nominais de  $K_1 = K_2 = 100$ .

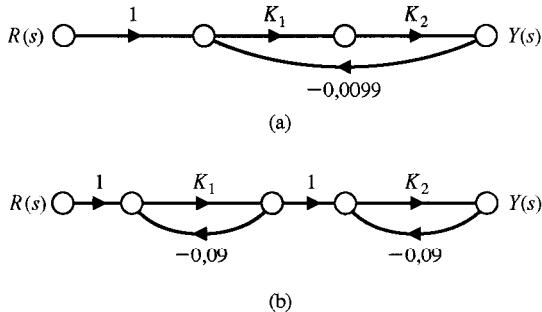


Fig. P4.12 Dois sistemas com retroação.

- P4.13** Uma forma de uma função de transferência é

$$T(s) = \frac{G_1(s) + kG_2(s)}{G_3(s) + kG_4(s)}.$$

- (a) Usar a Eq. (4.16) para mostrar que [1]

$$S_k^T = \frac{k(G_2G_3 - G_1G_4)}{(G_3 + kG_4)(G_1 + kG_2)}.$$

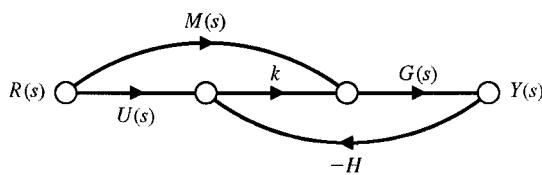


Fig. P4.13 Sistema a malha fechada.

- (b) Determinar a sensibilidade do sistema mostrado na Fig. P4.13, usando a equação verificada no item (a).

- P4.14** Um avião hipersônico proposto deverá subir até 100.000 pés, voar a 3800 milhas por hora e cruzar o Pacífico em 2 horas. O controle de velocidade da aeronave poderia ser representado pelo modelo da Fig. P4.14. Achar a sensibilidade da função de transferência a malha fechada,  $T(s)$ , a uma pequena variação no parâmetro  $a$ .

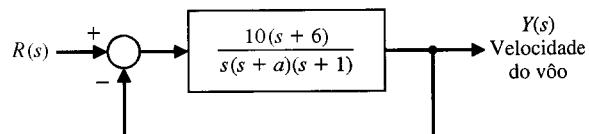


Fig. P4.14 Sistema de controle de velocidade de um avião hipersônico.

- P4.15** O sistema de pilotagem de um navio moderno pode ser representado pelo sistema mostrado na Fig. P4.15 [16, 20]. Achar o efeito estacionário produzido por uma força de vento constante representada por  $D(s) = 1/s$ , para  $K = 5$  e  $K = 30$ . (a) Supor que o comando de entrada do leme  $R(s)$  seja igual a zero, sem qualquer perturbação, e que não foi ajustado. (b) Mostrar que o leme pode então ser utilizado para trazer de volta o desvio do navio a zero.

- P4.16** Um sistema de dois reservatórios contendo líquido aquecido apresenta o modelo mostrado na Fig. P4.16, onde  $T_0$  é a temperatura do fluido escoando no interior do primeiro reservatório e  $T_2$  é a temperatura do líquido escoando na saída do segundo reservatório. O sistema de dois reservatórios possui um aquecedor no reservatório 1 com uma entrada de calor controlável  $Q$ . As constantes de tempo são  $\tau_1 = 10s$  e  $\tau_2 = 50s$ . (a) Determinar  $T_2(s)$  em termos de  $T_0(s)$  e de  $T_{2d}(s)$ . (b) Se  $T_{2d}(s)$ , a temperatura desejada de saída, for mudada instantaneamente de  $T_{2d}(s) = A/s$  para  $T_{2d}(s) = 2A/s$ , com  $T_0(s) = A/s$ , determinar a resposta transitória de  $T_2(t)$  quando  $G_c(s) = K = 500$ . (c) Achar o erro estacionário,  $e_{ss}$ , para o sistema do item (b), quando  $E(s) = T_{2d}(s) - T_2(s)$ .

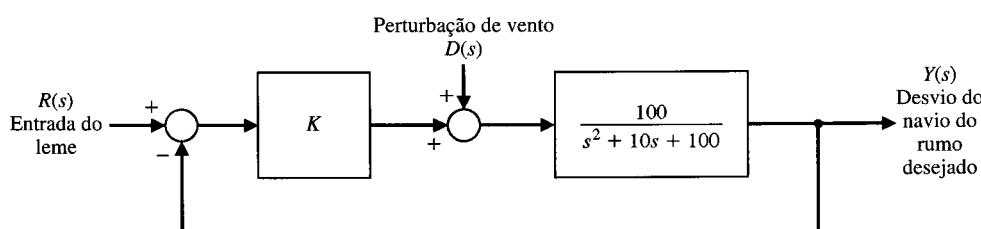


Fig. P4.15 Controle de rumo de um navio.

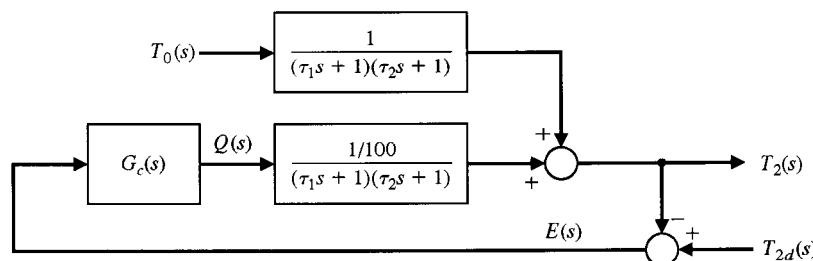


Fig. P4.16 Controle de temperatura de dois reservatórios.

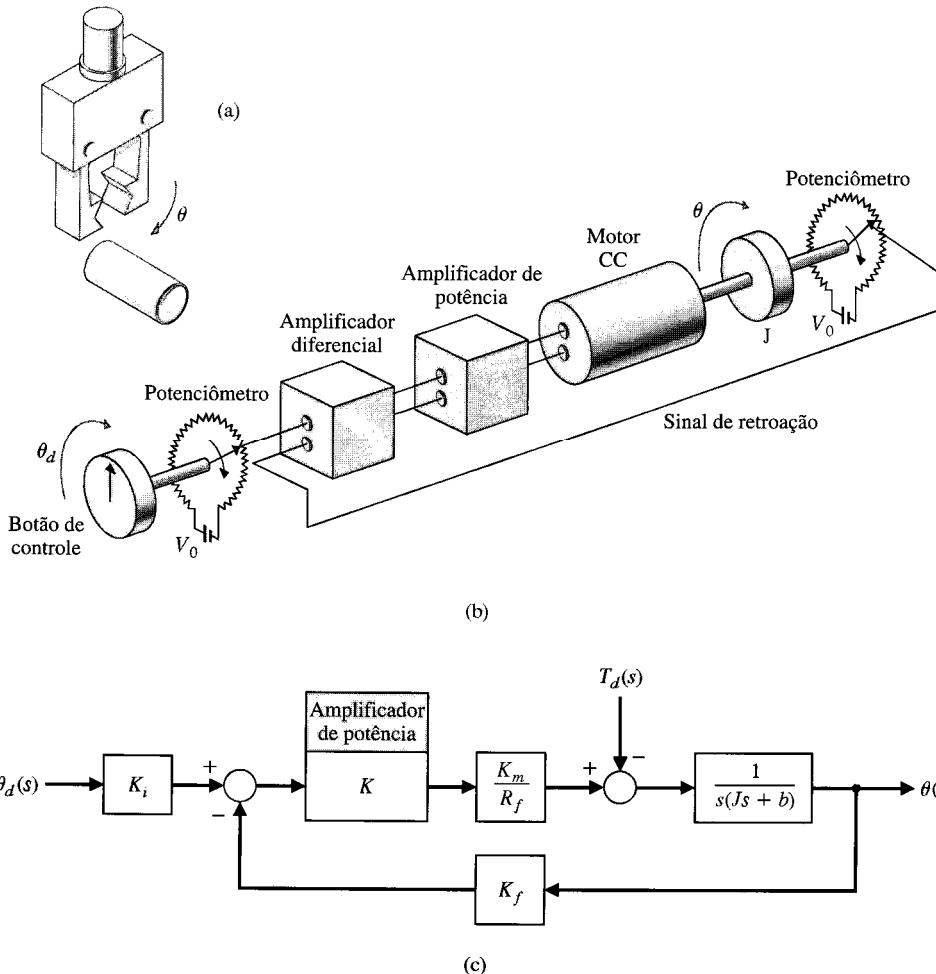


Fig. P4.17 Controle de garra robótica.

P4.17 Uma garra de robô, mostrada na parte (a) da Fig. P4.17, deve ser controlada para que se feche de um ângulo  $\theta$  usando um sistema de controle de um motor CC, como está mostrado na parte (b). O modelo do sistema de controle está mostrado na parte (c), em que  $K_m = 30$ ,  $R_f = 1 \Omega$ ,  $K_f = K_i = 1$ ,  $J = 0,1$  e  $b = 1$ .

(a) Determinar a resposta do sistema,  $\theta(t)$ , a uma mudança em degrau  $\theta_d(t)$  quando  $K = 20$ . (b) Supondo  $\theta_d(t) = 0$ , achar o efeito de uma perturbação de carga  $T_d(s) = A/s$ . (c) Determinar o erro estacionário,  $e_{ss}$ , quando a entrada for  $r(t) = t$ ,  $t > 0$ . (Considerar  $T_d = 0$ .)

## PROBLEMAS AVANÇADOS

PA4.1 Um regulador de nível de reservatório está mostrado na Fig. PA4.1(a). Deseja-se regular o nível  $h$  em resposta a uma variação na perturbação  $q_3$ . É mostrado o diagrama de blocos para pequenas variações em torno das condições de equilíbrio com o valor desejado  $h_d(t) = 0$ . Determinar a equação para o erro  $E(s)$  e determinar o erro estacionário a uma perturbação em degrau unitário quando (a)  $G(s) = K$  e (b)  $G(s) = K/s$ .

PA4.2 A junta de articulação do ombro de um braço robótico utiliza um motor CC com controle pela armadura e um conjunto de engrenagens no eixo de saída. O modelo do sistema está mostrado na Fig. PA4.2 com um torque perturbador  $D(s)$ , que representa o efeito da carga. Determinar o erro estacionário quando o ângulo de entrada desejado for um degrau tal que  $\theta_d(s) = A/s$ ,  $G_c(s) = K$  e a perturbação for igual a zero. Determinar o erro estacionário quando  $\theta_d(s) = 0$  e o efeito de carga for  $D(s) = M/s$  para (a)  $G_c(s) = K$  e (b)  $G_c(s) = K/s$ .

PA4.3 Uma máquina-ferramenta é projetada para seguir um determinado percurso tal que

$$r(t) = (2 - t + 0,5t^2)u(t),$$

onde  $u(t)$  é a função de degrau unitária. O sistema de controle da máquina-ferramenta está mostrado na Fig. PA4.3.

(a) Determinar o erro estacionário quando  $r(t)$  for o percurso desejado e  $D(s) = 0$ .

(b) Traçar o gráfico do erro  $e(t)$  para o percurso desejado na parte (a) para  $0 < t \leq 10$  segundos.

(c) Se a entrada desejada for  $r(t) = 0$ , achar o erro estacionário quando  $D(s) = 1/s$ .

(d) Traçar o gráfico do erro  $e(t)$  para a parte (c) para  $0 < t \leq 10$  segundos.

PA4.4 Um motor CC controlado pela armadura com retroação taquimétrica está mostrado na Fig. PA4.4. Supor  $K_m = 10$ ,  $J = 1$  e  $R = 1$ .

(a) Determinar o ganho necessário  $K$  para restringir o erro estacionário devido a uma entrada em rampa  $v(t) = t$ ,  $t > 0$ , a 0,1 (admitir  $D(s) = 0$ ).

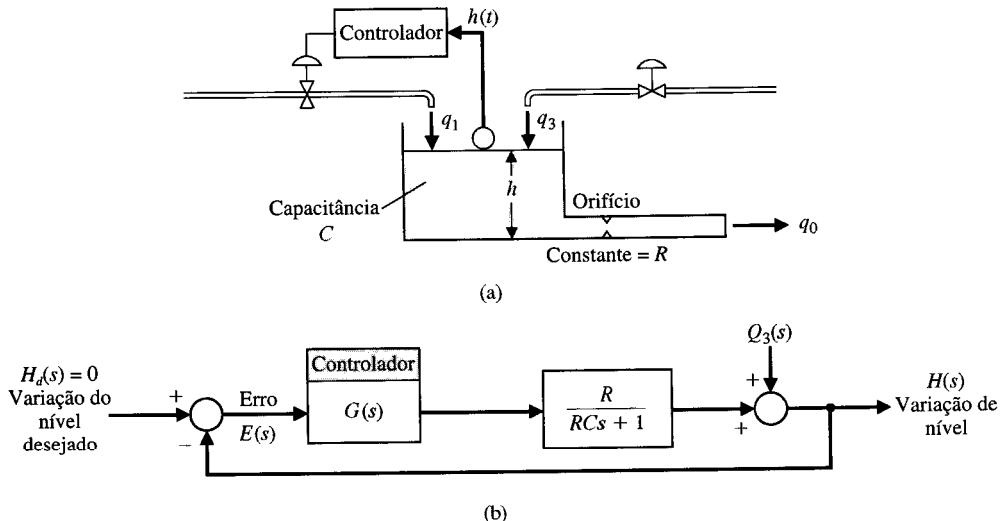


Fig. PA4.1 Regulador de nível de um reservatório.

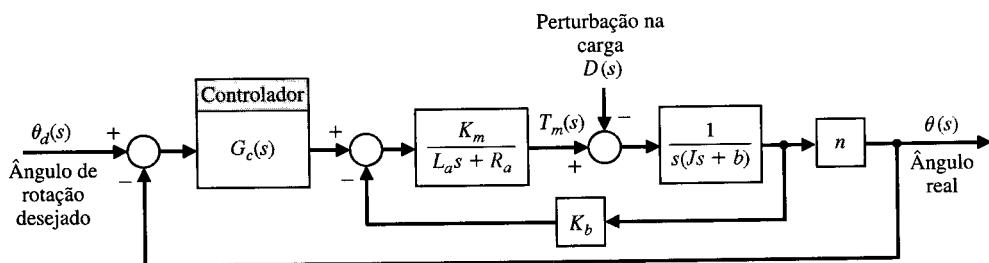


Fig. PA4.2 Controle de uma junta robótica.

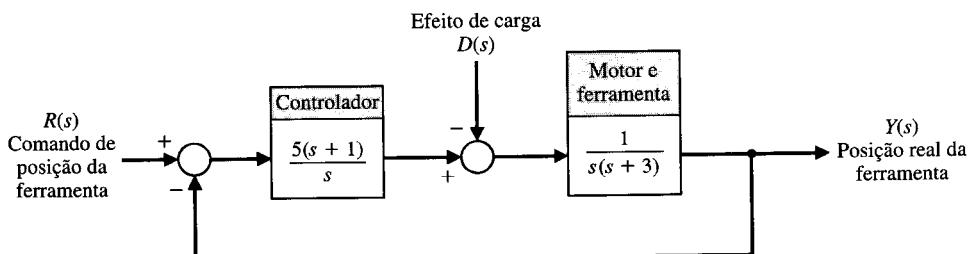


Fig. PA4.3

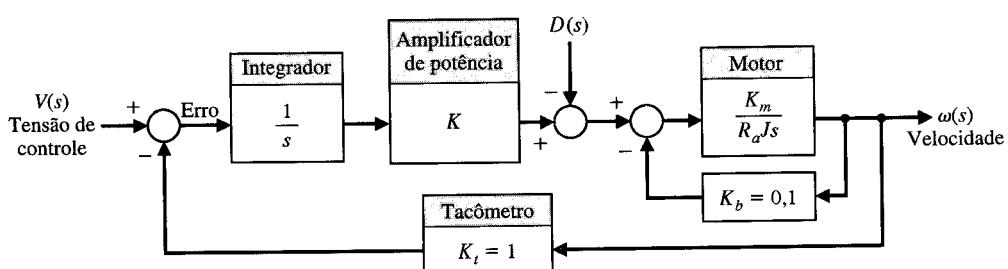


Fig. PA4.4 Motor CC com retroação.

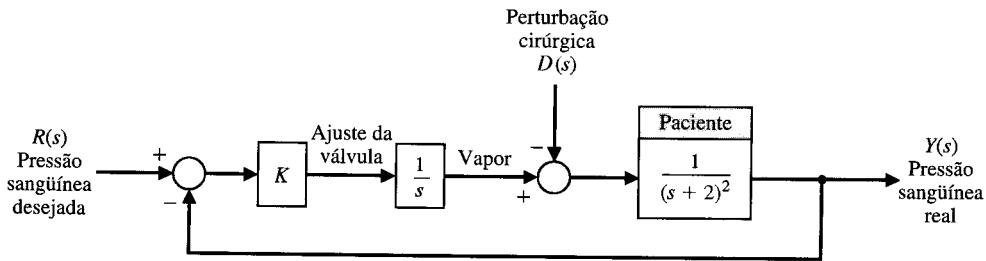


Fig. PA4.5 Controle de pressão sanguínea.

- (b) Para o valor de ganho escolhido no item (a), determinar e traçar o gráfico do erro  $e(t)$  devido a uma perturbação em rampa tal que  $d(t) = t$ ,  $0 \leq t \leq 5$  segundos.

**PA4.5** Um sistema que controla a pressão arterial média durante a anestesia foi projetado e testado [12]. Postula-se que o nível de pressão arterial é um indicador da profundidade da anestesia durante o ato cirúrgico. Um diagrama de blocos do sistema é mostrado na Fig. PA4.5, onde o impacto da cirurgia é representado pela perturbação  $D(s)$ .

- Determinar o erro estacionário devido a uma perturbação  $D(s) = 1/s$  (fazer  $R(s) = 0$ ).
- Determinar o erro estacionário para uma entrada em rampa  $r(t) = t$ ,  $t > 0$ , (fazer  $D(s) = 0$ ).
- Selecionar um valor adequado de  $K$  menor ou igual a 10 e traçar o gráfico da resposta  $y(t)$  a uma perturbação em degrau unitário (supor  $r(t) = 0$ ).

**PA4.6** Um circuito útil, chamado de estrutura de avanço de fase, que será utilizado no Cap. 10, está mostrado na Fig. PA4.6.

- Determinar a função de transferência  $G(s) = V_o(s)/V(s)$ .
- Determinar a sensibilidade de  $G(s)$  com respeito ao valor da capacitância  $C$ .
- Determinar e traçar o gráfico da resposta transitória  $v_o(t)$  para uma entrada em degrau,  $V(s) = 1/s$ .

**PA4.7** Um sistema de controle com retroação com ruído de sensor e perturbação está mostrado na Fig. PA4.7. O objetivo

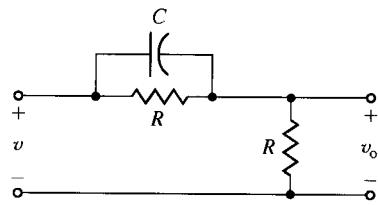


Fig. PA4.6 Um circuito de avanço de fase.

é reduzir os efeitos do ruído e da perturbação. Fazer  $R(s) = 0$ .

- Determinar o efeito da perturbação em  $Y(s)$ .
- Determinar o efeito do ruído em  $Y(s)$ .
- Selecionar o melhor valor para  $K$ , com  $1 \leq K \leq 100$  de modo que o erro estacionário devido à perturbação e ao ruído seja minimizado. Admitir  $D(s) = A/s$  e  $N(s) = B/s$ .

**PA4.8** O diagrama de blocos do sistema de controle de uma máquina-ferramenta está mostrado na Fig. PA4.8.

- Determinar a função de transferência  $T(s) = Y(s)/R(s)$ .
- Determinar a sensibilidade  $S_b^T$ .
- Selecionar  $K$ , com  $1 \leq K \leq 50$  de modo que os efeitos devidos à perturbação e à  $S_b^T$  sejam minimizados.

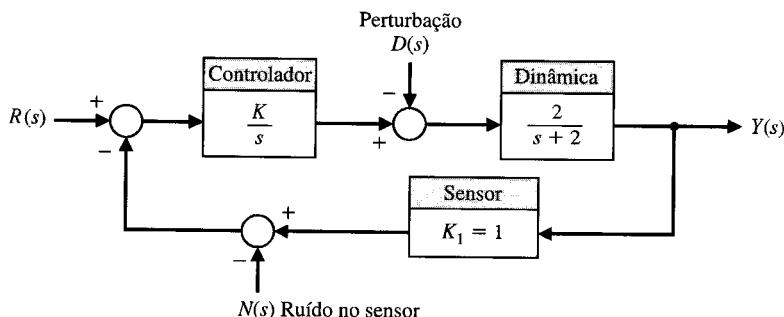


Fig. PA4.7

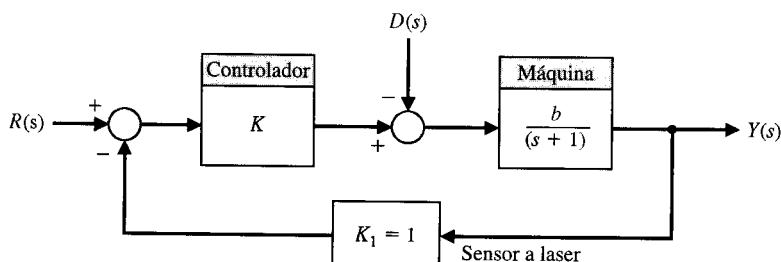


Fig. PA4.8 Controle de máquina-ferramenta.

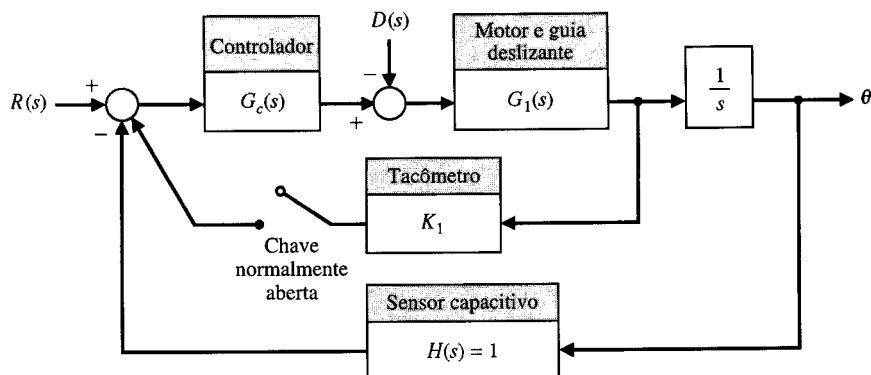
**PROBLEMAS DE PROJETO**

**PPC4.1** O sistema de acionamento por sarilho de uma guia deslizante foi descrita em PPC2.1. A posição da guia deslizante,  $x$ , é medida com um sensor capacitivo, como está mostrado na Fig. PPC4.1, que é bastante linear e preciso. Esboçar o modelo do sistema com retroação e determinar a resposta do sistema quando o controlador for um amplificador e  $H(s) = 1$ . Determinar a resposta ao degrau para diversos valores selecionados de ganho do amplificador,  $G_c(s) = K_a$ .

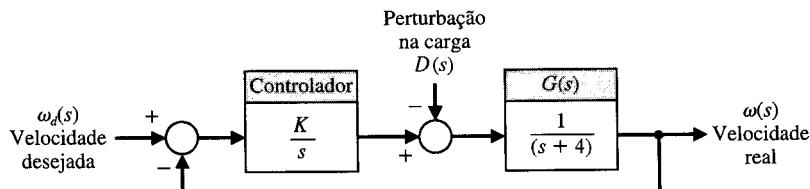
**PP4.1** Um sistema de controle de velocidade a malha fechada é submetido a uma perturbação devida à carga, como está mostrado na

Fig. PP4.1. A velocidade desejada é  $\omega_d(t) = 100 \text{ rad/s}$  e a perturbação de carga é um degrau unitário  $D(s) = 1/s$ . Admitir que a velocidade reduziu a velocidade em vazio de 100 rad/s e está em estado estacionário. (a) Determinar o efeito em regime estacionário da perturbação na carga e (b) traçar o gráfico de  $\omega(t)$  para valores selecionados de ganho de modo que  $10 \leq K \leq 25$ . Determinar valores adequados para o ganho  $K$ .

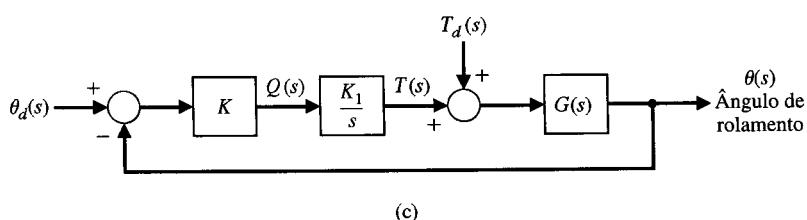
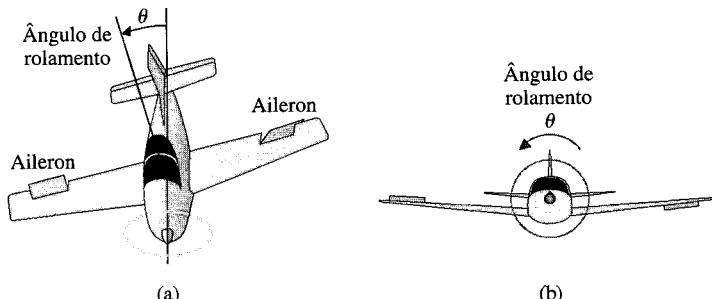
**PP4.2** O controle do ângulo de rolamento de um aeroplano é conseguido usando-se o torque desenvolvido pelos elerons, como está mostrado nas Figs. PP4.2(a) e (b). Um modelo linear do sistema



**Fig. PPC4.1** Modelo de sistema com retroação com sensor de medição capacitivo. O tacômetro pode ser instalado no motor (opcional) e a chave permanecerá normalmente aberta.



**Fig. PP4.1** Sistema de controle de velocidade.



**Fig. PP4.2** Controle do ângulo de rolamento de um aeroplano.

de controle de rolamento de um pequeno avião experimental está mostrado na Fig. PP4.2(c), onde  $q(t)$  é a vazão de fluido para dentro do cilindro hidráulico e

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 9}.$$

O objetivo é manter um pequeno ângulo de rolamento  $\theta$  devido a perturbações. Selecionar um ganho apropriado,  $KK_1$ , que reduzirá o efeito de perturbações ao mesmo tempo em que se consegue obter uma resposta transitória desejável a um degrau de perturbação, com  $\theta_d(t) = 0$ . Para requerer uma resposta transitória desejável, fazer  $KK_1 < 35$ .

**PP4.3** O sistema de controle de velocidade da Fig. PP4.1 é alterado de modo que  $G(s) = 1/(s + 5)$  e a retroação é  $K_1$ , como está mostrado na Fig. PP4.3.

- (a) Determinar a faixa de valores permitidos para  $K_1$  de modo que o erro de estado estacionário seja  $e_{ss} \leq 1\%$ .
- (b) Determinar valores adequados para  $K_1$  e  $K$  de modo que a magnitude do erro estacionário devido a uma perturbação de vento  $d(t) = 2t$  mrad/s,  $0 \leq t < 5$  s, seja inferior a 0,1 mrad.

**PP4.4** Os lasers vêm sendo usados há mais de 25 anos para fazer cirurgia de olhos. Eles podem cortar os tecidos ou auxiliar na coagulação [17]. O laser permite ao oftalmologista aplicar calor em um ponto no olho de forma controlada. Muitos tratamentos usam a retina como alvo do laser. A retina é um tecido sensorial fino situado na superfície interna da parte de trás do olho e é o real transdutor do olho, convertendo energia luminosa em pulsos elétricos. Acidentalmente esta camada descola da parede, resultando na morte da área descolada por ausência de sangue e conduzindo à cegueira parcial senão total desse olho. O laser pode ser usado para “soldar” a retina no seu lugar próprio na parede interna.

Sistemas de posição automatizados habilitam o oftalmologista a indicar para o controlador onde as lesões estão presentes. O controlador monitora então a retina e controla a posição do laser de modo tal que cada lesão é colocada no devido lugar. Uma câmera de vídeo com grande angular é necessária para monitorar o movimento da retina, como está mostrado na Fig. PP4.4(a). Se o olho se mover durante a irradiação, o laser deve ser redirecionado ou desligado. O sistema de controle de posição está mostrado

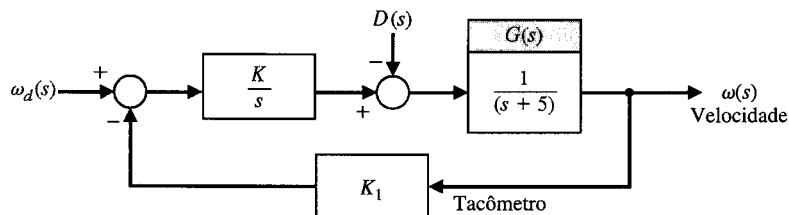
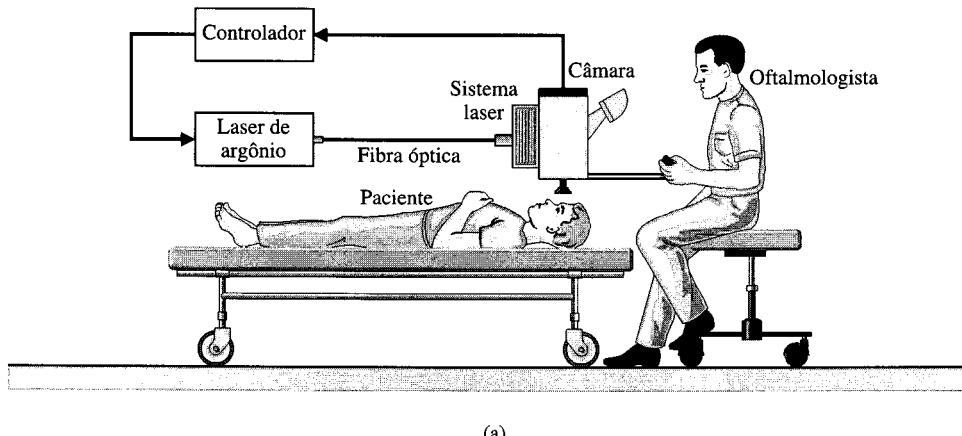
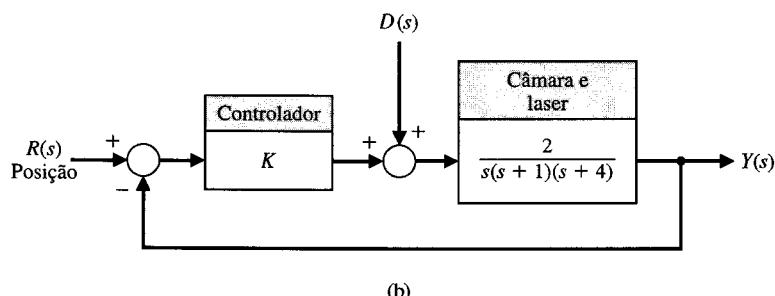


Fig. PP4.3 Sistema de controle de velocidade.



(a)



(b)

Fig. PP4.4 Sistema de cirurgia do olho com laser.

na Fig. PP4.4(b). Selecionar um ganho apropriado para o controlador de modo que a resposta transitória a uma mudança em degrau  $r(t)$  seja satisfatória e o efeito de perturbações devidas a ruídos no sistema sejam minimizados. Assegurar também que o erro estacionário a um comando em degrau seja zero. Para garantir uma resposta transitória aceitável, requerer  $K < 10$ .

**PP4.5** Um circuito com amplificador operacional pode ser usado para gerar um pulso de curta duração. O circuito mostrado na Fig. PP4.5 pode gerar um pulso  $v_0(t) = 5e^{-100t}$ ,  $t > 0$ , quando a entrada  $v(t)$  for um degrau unitário [6]. Selecionar valores adequados de resistores e de capacitores. Admitir um amplificador operacional ideal.

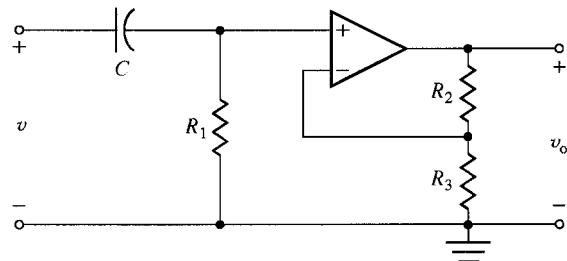


Fig. PP4.5 Circuito com amplificador operacional.

## PROBLEMAS COM MATLAB

**PM4.1** Considerar a função de transferência (sem retroação)

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 25}.$$

Quando a entrada for um degrau unitário, o valor de estado estacionário desejado da saída deve ser igual a 1. Usando a função step do MATLAB, mostrar que o erro de estado estacionário a um degrau unitário de entrada é igual a 0,8.

**PM4.2** Considerar o sistema com retroação unitária com

$$G(s) = \frac{100}{s(s + 15)}.$$

Obter a resposta ao degrau com o MATLAB e determinar a ultrapassagem percentual. Qual é o erro estacionário?

**PM4.3** Considerar a função de transferência a malha fechada

$$T(s) = \frac{10K}{s^2 + 20s + K}.$$

Obter uma família de respostas ao degrau para  $K = 1, 10$  e  $100$ . Traçar o gráfico simultâneo das respostas e desenvolver uma tabela de resultados que inclua a ultrapassagem percentual, o tempo de assentamento e o erro de estado estacionário.

**PM4.4** Considerar o sistema de controle a malha fechada mostrado na Fig. PM4.4. Desenvolver um script em MATLAB para auxiliar na procura de um valor de  $k$  de modo que a ultrapassagem per-

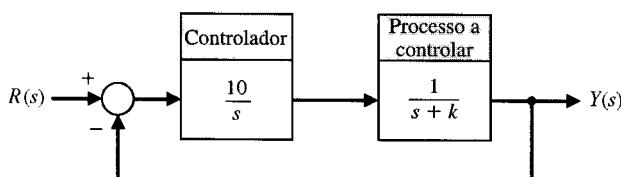


Fig. PM4.4 Sistema de controle com retroação negativa a malha fechada.

centual a uma entrada em degrau unitário seja maior que 1% e menor que 10%. O script deve ser capaz de calcular a função de transferência a malha fechada  $T(s) = Y(s)/R(s)$  e gerar a resposta ao degrau. Verificar graficamente que o erro estacionário para uma entrada em degrau unitário é zero.

**PM4.5** Considerar o sistema de controle a malha fechada mostrado na Fig. PM4.5. O ganho do controlador é  $K = 2$ . O valor nominal do parâmetro de processo é  $a = 1$ . O valor nominal é usado apenas para fins de projeto, uma vez que na realidade o valor não é conhecido com precisão. O objetivo da análise é investigar a sensibilidade do sistema a malha fechada com relação ao parâmetro  $a$ .

(a) Para  $a = 1$ , mostrar analiticamente que o valor estacionário de  $y(t)$  é igual a 2 quando  $r(t)$  for um degrau unitário. Verificar que a resposta ao degrau unitário permanece no interior da faixa de 2% do valor final depois de 4 segundos.

(b) A sensibilidade do sistema a mudanças no valor do parâmetro  $a$  pode ser investigada estudando-se os efeitos das alterações do parâmetro na resposta transitória. Traçar o gráfico da resposta ao degrau para  $a = 0,5, 2$  e  $5$  e discutir os resultados.

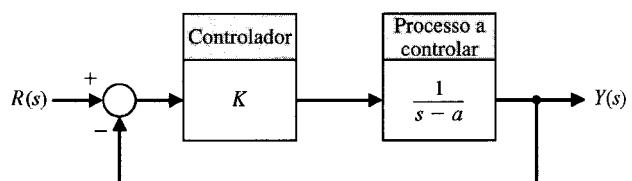
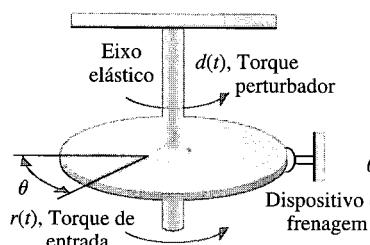
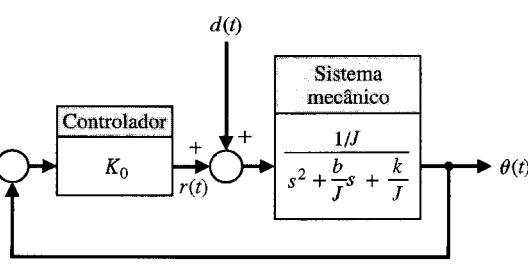


Fig. PM4.5 Sistema de controle a malha fechada com incerteza sobre o parâmetro  $a$ .

**PM4.6** Considerar o sistema mecânico de movimento angular da Fig. PM4.6(a). O torque devido à torção do eixo é  $-k\theta$ ; o torque de amortecimento devido ao dispositivo de frenagem é  $-b\dot{\theta}$ ; o torque perturbador é  $d(t)$ ; o torque de entrada é  $r(t)$  e o momen-



(a)



(b)

Fig. PM4.6 (a) Sistema mecânico com movimento angular. (b) Sistema de controle com retroação mecânica com movimento angular.

to de inércia do sistema mecânico é  $J$ . A função de transferência do sistema mecânico em movimento angular é

$$G(s) = \frac{1/J}{s^2 + (b/J)s + k/J}.$$

Um sistema de controle a malha fechada está mostrado na Fig. PM4.6(b). Supor: ângulo desejado  $\theta_d = 0^\circ$ ,  $k = 5$ ,  $b = 0,9$  e  $J = 1$ .  
 (a) Determinar a resposta  $\theta(t)$  do sistema a malha aberta a uma perturbação em degrau unitário  $d(t)$  usando o MATLAB (fazer  $r(t) = 0$ ).

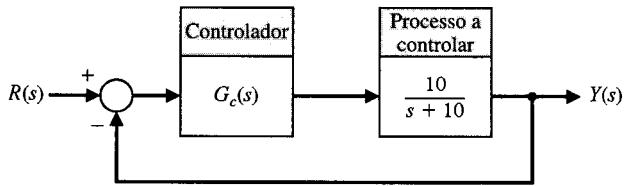
(b) Com o ganho do controlador  $K_0 = 50$ , determinar a resposta a malha fechada,  $\theta(t)$ , a uma perturbação em degrau unitário,  $d(t)$ , usando o MATLAB.

(c) Traçar, num mesmo diagrama, os gráficos da resposta a malha aberta e a malha fechada a uma perturbação. Discutir os resultados e elaborar um argumento para usar o controle com retroação a malha fechada a fim de melhorar as propriedades de rejeição de perturbações do sistema.

**PM4.7** Um sistema de controle com retroação negativa está esboçado na Fig. PM4.7. Supor que o objetivo do projeto é encontrar um controlador,  $G_c(s)$ , de mínima complexidade tal que o sistema a malha fechada possa rastrear uma entrada em degrau com erro estacionário nulo.

(a) Como primeira tentativa, considerar um simples controlador proporcional

$$G_c(s) = K,$$



**Fig. PM4.7** Sistema de controle simples com uma malha única de retroação.

onde  $K$  é um ganho fixo. Seja  $K = 2$ . Usando o MATLAB, traçar o gráfico da resposta ao degrau unitário e determinar, a partir do gráfico, o erro estacionário.

(b) Considerar agora um controlador mais complexo

$$G_c(s) = K_0 + \frac{K_1}{s},$$

onde  $K_0 = 2$  e  $K_1 = 20$ . Este controlador é conhecido como controlador proporcional e integral (PI). Traçar o gráfico da resposta ao degrau unitário e determinar, a partir do gráfico, o erro estacionário.

(c) Comparar os resultados dos itens (a) e (b) e discutir a relação custo × benefício entre a complexidade do controlador e o desempenho de erro de acompanhamento em regime permanente.

## TERMOS E CONCEITOS

**Erro de estado estacionário** (erro estacionário ou erro permanente) O erro quando o período de tempo é grande e a resposta transitória desapareceu, deixando uma resposta contínua.

**Resposta transitória** A resposta do sistema como uma função do tempo.

**Sensibilidade do sistema** A relação da variação na função de transferência do sistema pela variação da função de transferência do processo (ou parâmetro) para uma alteração incremental.

**Sinal de erro** A diferença entre a saída desejada,  $R(s)$ , e a saída real,  $Y(s)$ . Portanto,  $E(s) = R(s) - Y(s)$ .

**Sinal de perturbação** Um sinal de entrada indesejável que afeta o sinal de saída do sistema.

**Sistema a malha aberta** Um sistema sem retroação que gera diretamente a saída em resposta a um sinal de entrada.

**Sistema a malha fechada** Um sistema com uma medida do sinal de saída e uma comparação com a saída desejada para gerar um sinal de erro que é aplicado ao atuador.

**Sistema direto** Ver sistema a malha aberta.

# *O Desempenho de Sistemas de Controle com Retroação*

- 5.1 Introdução**
- 5.2 Sinais de Entrada para Teste**
- 5.3 Desempenho de um Sistema de Segunda Ordem**
- 5.4 Efeitos de um Terceiro Pólo e de um Zero na Resposta de um Sistema de Segunda Ordem**
- 5.5 Estimativa da Relação de Amortecimento**
- 5.6 Localização das Raízes no Plano  $s$  e a Resposta Transitória**
- 5.7 Erro de Estado Estacionário de Sistemas de Controle com Retroação**
- 5.8 Erro de Estado Estacionário de Sistemas com Retroação Não-Unitária**
- 5.9 Índices de Desempenho**
- 5.10 A Simplificação de Sistemas Lineares**
- 5.11 Exemplo de Projeto: Controle de Posicionamento do Telescópio Hubble**
- 5.12 Desempenho do Sistema Usando o MATLAB**
- 5.13 Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco**
- 5.14 Sumário**

## **APRESENTAÇÃO**

A capacidade de se ajustar o regime transitório e o estado estacionário da resposta de um sistema de controle com retroação é uma consequência útil do projeto de sistemas de controle. Um dos primeiros passos do procedimento de projeto consiste em se especificar as medidas de desempenho. Neste capítulo serão apresentadas as especificações usuais no domínio do tempo tais como ultrapassagem percentual, tempo de acomodação, tempo de pico, tempo de subida, erro de acompanhamento em estado estacionário. Serão utilizados sinais de entrada de teste selecionados como o degrau e a rampa para testar a resposta do sistema de controle. Será discutida a correlação entre o desempenho do sistema e o posicionamento no plano  $s$  dos pólos e zeros da função de transferência do sistema. Serão desenvolvidas relações importantes entre as especificações de desempenho e os valores de freqüência natural e de relação de amortecimento para sistemas de segunda ordem. Com base no conceito de pólos dominantes, as idéias associadas aos sistemas de segunda ordem serão extrapoladas para sistemas de ordem mais elevada.

Será considerado o conceito de um índice de desempenho para representar o desempenho do sistema através de um único número (ou índice). Será apresentado um conjunto das medidas quantitativas de desempenho que, usualmente, representam o desempenho de sistemas de controle. O capítulo concluir com uma análise de desempenho do Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco.

### **5.1 INTRODUÇÃO**

A capacidade de se ajustar o desempenho em regime transitório e em regime permanente é uma característica vantajosa dos sistemas de controle com retroação. Ao se analisar e projetar um sistema de con-

trole deve-se definir uma medida para o seu desempenho. Assim, com base no desempenho desejado para o sistema de controle, podem-se ajustar os valores de parâmetros do sistema para que seja alcançada a resposta desejada. Como os sistemas de controle são inherentemente dinâmicos, seu desempenho é especificado, usualmente, em termos de ambas as respostas transitória e de regime estacionário. A **resposta transitória** é a parte da resposta que desaparece com o tempo. A **resposta em regime estacionário** é a parte da resposta que ocorre muito tempo depois da aplicação de um sinal de entrada.

As **especificações de projeto** para os sistemas de controle incluem vários índices de resposta temporal para um comando de entrada especificado bem como uma desejada exatidão em regime permanente. Quase sempre, ao longo de qualquer projeto, as especificações são revisadas para atender compromissos. Em consequência, muito raramente as especificações se constituem um conjunto rígido de requisitos, mas, em vez disto, uma primeira tentativa de listar um desempenho desejado. A análise de compromisso e o ajuste de especificações estão ilustrados graficamente na Fig. 5.1. O parâmetro  $p$  pode minimizar a medida de desempenho  $M_2$  se for selecionado um valor muito pequeno para  $p$ . Contudo, isto resulta em um valor muito grande para a medida  $M_1$ , uma situação indesejável. Se as medidas de desempenho forem igualmente importantes, o ponto de interseção  $p_{\min}$  fornece o melhor compromisso. Este tipo de compromisso é normalmente encontrado no projeto de sistemas de controle. Está claro que se as especificações originais pedissem que ambos os valores de  $M_1$  e  $M_2$  fossem zero, as especificações não poderiam ser atendidas simultaneamente e seria necessário alterá-las para permitir o valor de compromisso obtido com  $p_{\min}$  [1, 12, 17, 23].

As especificações estabelecidas em termos das medidas de desempenho indicam ao projetista a qualidade do sistema. Em outras palavras, as medidas de desempenho ajudam a responder à pergunta: Quão bem o sistema desempenha a tarefa para a qual foi projetado?

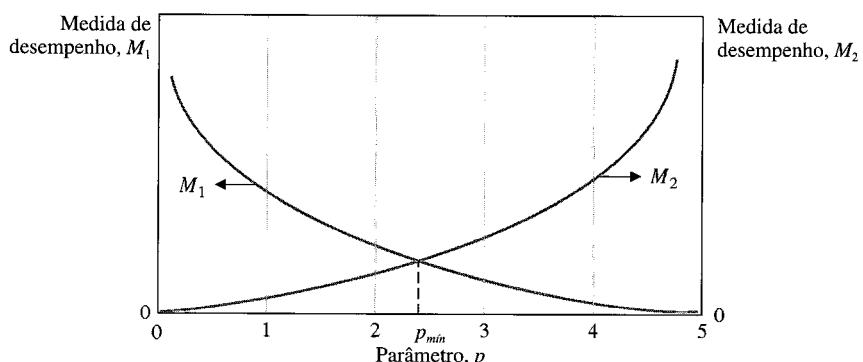


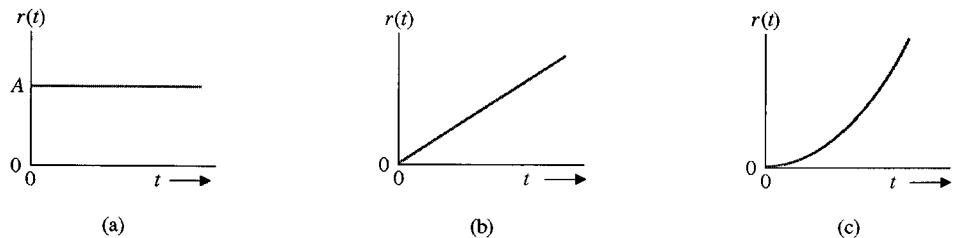
Fig. 5.1 Duas medidas de desempenho versus o valor do parâmetro  $p$ .

## 5.2 SINAIS DE ENTRADA PARA TESTE

As especificações de desempenho no domínio do tempo são índices importantes, uma vez que os sistemas de controle são sistemas inherentemente no domínio do tempo. Isto é, o transitório do sistema ou o desempenho no tempo constitui o comportamento de maior interesse para os sistemas de controle. É necessário determinar inicialmente se o sistema é estável utilizando-se as técnicas dos capítulos que se seguem. Se o sistema for estável, a resposta a um sinal de entrada especificado proporcionará várias medidas de desempenho. Contudo, como o sinal efetivo de entrada do sistema é usualmente desconhecido, escolhe-se normalmente um **sinal de entrada para teste**. Esta abordagem é bastante útil porque existe uma correlação razoável entre a resposta de um sistema a um sinal de entrada padronizado para teste e a capacidade do sistema para atuar sob condições normais de operação. Além disto, o uso de sinais de entrada padronizados permite que o projetista compare diversos projetos em competição. Muitos sistemas de controle são submetidos a sinais de entrada muito semelhantes aos sinais de teste padronizados.

Os sinais de entrada para teste comumente usados são a entrada em degrau, a entrada em rampa e a entrada parabólica. Estas entradas estão mostradas na Fig. 5.2. As equações que representam estes sinais de teste são dadas na Tabela 5.1, onde a transformada de Laplace pode ser obtida usando-se a Tabela 2.5. O sinal em rampa é a integral da entrada em degrau e a parábola é simplesmente a integral da entrada em rampa. A **função impulso unitário** também é útil para fins de sinal de teste. O impulso unitário se baseia em uma função retangular  $f_\epsilon(t)$  tal que

$$f_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon, & -\frac{\epsilon}{2} \leq t \leq \frac{\epsilon}{2}; \\ 0, & \text{nos outros valores de } t, \end{cases}$$



**Fig. 5.2** Sinais de entrada para teste: (a) degrau, (b) rampa, (c) parábola.

**TABELA 5.1 Sinais de Entrada para Teste**

Sinal de Teste	$r(t)$	$R(s)$
Degrau	$r(t) = A, t > 0$ $= 0, t < 0$	$R(s) = A/s$
Rampa	$r(t) = At, t > 0$ $= 0, t < 0$	$R(s) = A/s^2$
Parábola	$r(t) = At^2, t > 0$ $= 0, t < 0$	$R(s) = 2A/s^3$

onde  $\epsilon > 0$ . À medida que  $\epsilon$  tende para zero, a função  $f_\epsilon(t)$  tende para a função impulso unitário  $\delta(t)$ , que tem as seguintes propriedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a)g(t) dt = g(a). \quad (5.1)$$

A entrada em impulso é útil quando se considera a integral de convolução para uma saída  $y(t)$  em termos de uma entrada  $r(t)$ , que é escrita como

$$y(t) = \int_{-\infty}^t g(t - \tau)r(\tau)d\tau = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)R(s)\}. \quad (5.2)$$

Esta relação é mostrada em forma de diagrama de blocos na Fig. 5.3. Quando a entrada é uma função impulso unitário, tem-se

$$y(t) = \int_{-\infty}^t g(t - \tau)\delta(\tau)d\tau. \quad (5.3)$$

A integral tem valor somente em  $\tau = 0$  e, por conseguinte,

$$y(t) = g(t),$$

a resposta impulsional do sistema com função de transferência  $G(s)$ . O sinal de teste para resposta impulsional pode ser freqüentemente utilizado em sistemas dinâmicos submetendo o sistema a um pulso retangular com área  $A$  de grande amplitude e de pequena largura.

Os sinais de teste padronizado são da forma geral

$$r(t) = t^n, \quad (5.4)$$

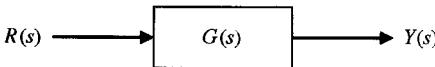
E a transformada de Laplace é

$$R(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}. \quad (5.5)$$

Assim é possível relacionar a resposta a um sinal de teste à resposta de um outro sinal de teste com a forma da Eq. (5.4). O sinal de entrada em degrau é o mais fácil de ser gerado e de calcular e é usualmente escolhido para testes de desempenho.

Considere-se a resposta do sistema mostrado na Fig. 5.3 a uma entrada em degrau unitário quando

$$G(s) = \frac{9}{(s + 10)}.$$



**Fig. 5.3** Sistema de controle direto (a malha aberta) (sem retroação).

Então a saída é

$$Y(s) = \frac{9}{s(s + 10)},$$

a resposta durante o regime transitório é

$$y(t) = 0,9(1 - e^{-10t}),$$

e a resposta em regime permanente é

$$y(\infty) = 0,9.$$

Se o erro for  $E(s) = R(s) - Y(s)$ , então o erro em regime estacionário será

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 0,1.$$

### 5.3 DESEMPEÑHO DE UM SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM

Seja considerar um sistema de segunda ordem com uma única malha e determinar sua resposta a uma excitação em degrau unitário. Um sistema de controle com retroação a malha fechada está mostrado na Fig. 5.4. A saída a malha fechada é

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} R(s) = \frac{K}{s^2 + ps + K} R(s). \quad (5.6)$$

Utilizando-se a notação generalizada da Seção 2.4, pode-se reescrever a Eq. (5.6) como

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s).$$

(5.7)

Para uma entrada em degrau unitário, obtém-se

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}, \quad (5.8)$$

para a qual a resposta transitória, como foi obtida a partir da tabela de transformadas de Laplace no Apêndice A, é

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \beta t + \theta), \quad (5.9)$$

onde  $\beta = \sqrt{1 - \zeta^2}$ ,  $\theta = \cos^{-1}\zeta$  e  $0 < \zeta < 1$ . A resposta transitória deste sistema de segunda ordem para diversos valores da relação de amortecimento  $\zeta$  está mostrada na Fig. 5.5. À medida que  $\zeta$  diminui, as raízes a malha fechada tendem para o eixo imaginário e a resposta se torna crescentemente oscilatória. A resposta a um degrau de entrada em função de  $\zeta$  e do tempo também está mostrada na Fig. 5.5(b).

A transformada de Laplace do impulso unitário é  $R(s) = 1$  e, portanto, a saída para um impulso é

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (5.10)$$

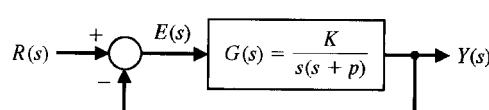
que é  $T(s) = Y(s)/R(s)$ , a função de transferência do sistema a malha fechada. A resposta transitória a uma função de entrada em impulso é, por conseguinte,

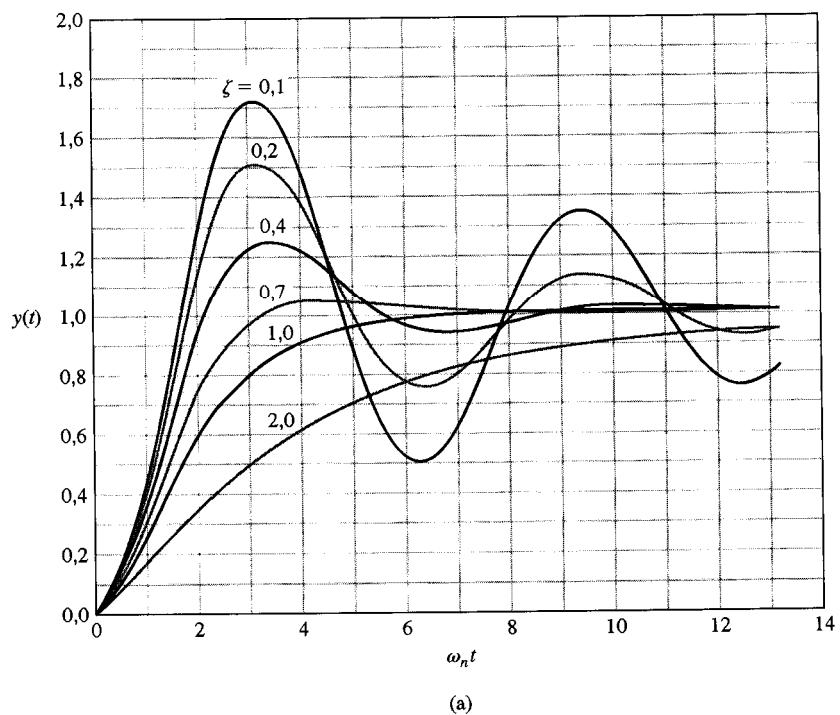
$$y(t) = \frac{\omega_n}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \beta t, \quad (5.11)$$

que é simplesmente a derivada da resposta a uma entrada em degrau. A resposta impulsional do sistema de segunda ordem está mostrada na Fig. 5.6 para diversos valores da relação de amortecimento,  $\zeta$ . O projetista é capaz de selecionar diversas medidas de desempenho a partir da resposta do sistema a uma entrada em degrau ou em impulso.

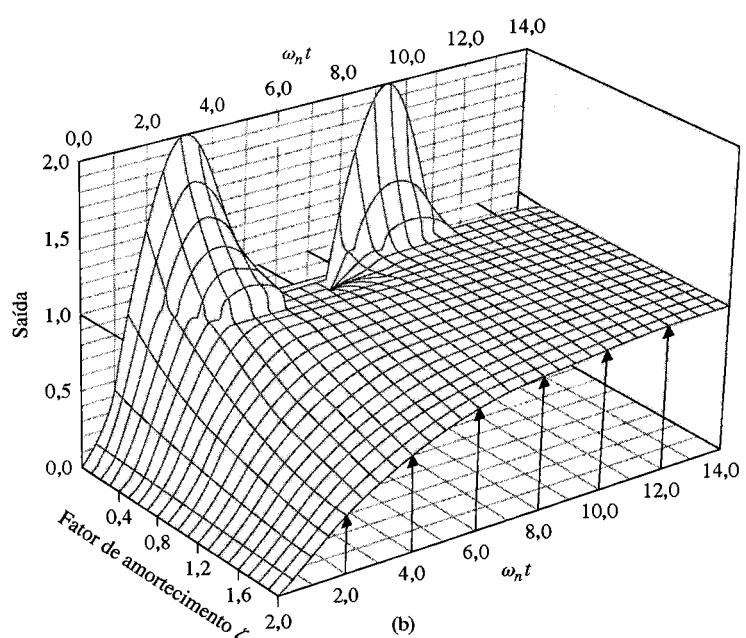
Medidas de desempenho padronizadas são definidas usualmente em termos da resposta do sistema ao degrau, como está mostrado na Fig. 5.7. A rapidez da resposta é medida pelo **tempo de subida**,  $T_s$ , e pelo **tempo de pico**,  $T_p$ . Para sistemas subamortecidos com ultrapassagem, o tempo de subida de 0 a 100% é um índice útil. Se o sistema for superamortecido, então o tempo de pico não é

**Fig. 5.4** Sistema de controle a malha fechada (com retroação).

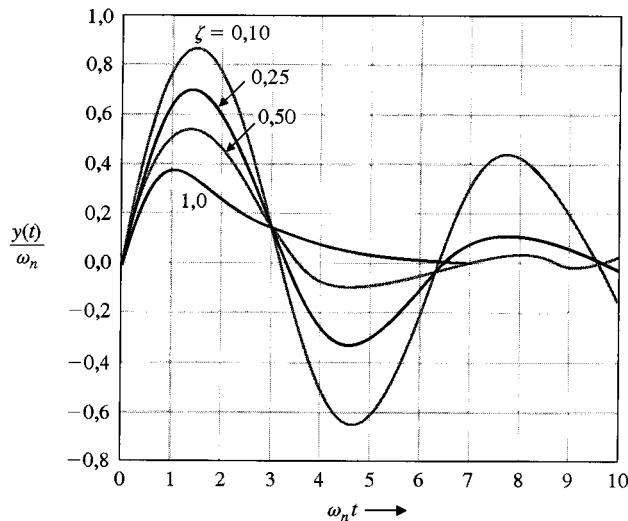




(a)



**Fig. 5.5** (a) Resposta transitória de um sistema de segunda ordem (Eq. 5.9) a uma entrada em degrau. (b) A resposta transitória de um sistema de segunda ordem (Eq. 5.9) a uma entrada em degrau, em função de  $\zeta$  e de  $\omega_n t$ . (Cortesia do Professor R. Jacquot, Universidade de Wyoming.)



**Fig. 5.6** Resposta de um sistema de segunda ordem a uma entrada em impulso.

definido e o tempo de subida de 10 a 90%,  $T_{r_1}$ , é normalmente usado. A semelhança de casamento de forma entre a resposta real e a entrada em degrau é medida pela ultrapassagem percentual e pelo tempo de assentamento,  $T_s$ . A **ultrapassagem percentual**, U.P., para uma entrada em degrau unitário é definida por

$$\text{U.P.} = \frac{M_{p_t} - f_v}{f_v} \times 100\% \quad (5.12)$$

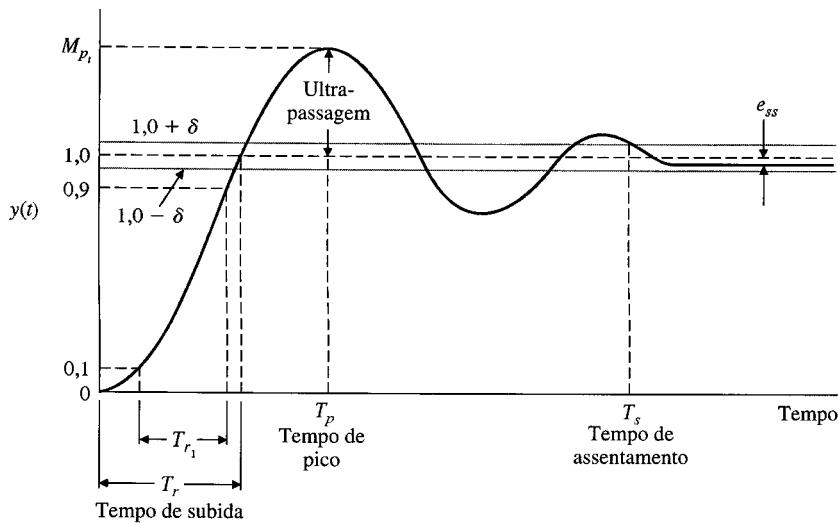
onde  $M_{p_t}$  é o valor de pico da resposta temporal e  $f_v$  é o valor final da resposta. Normalmente  $f_v$  é a magnitude da entrada, mas muitos sistemas possuem um valor final significativamente diferente da magnitude desejada de entrada. Para o sistema com um degrau unitário representado pela Eq. (5.8), tem-se  $f_v = 1$ .

O **tempo de assentamento** (ou tempo de acomodação),  $T_s$ , é definido como o tempo requerido para a resposta do sistema permanecer com valores no interior de uma certa faixa percentual,  $\delta$ , da amplitude de entrada. Esta faixa de  $\pm\delta$  está mostrada na Fig. 5.7. Para o sistema de segunda ordem com constante de amortecimento a malha fechada  $\zeta\omega_n$ , com a resposta descrita pela Eq. (5.9), busca-se determinar o tempo,  $T_s$ , para o qual os valores da resposta permanecem no interior de uma faixa de 2% em torno do valor final. Isto ocorre, aproximadamente, quando

$$e^{-\zeta\omega_n T_s} < 0,02$$

ou

$$\zeta\omega_n T_s \approx 4.$$



**Fig. 5.7** Resposta de um sistema de controle (Eq. 5.9) ao degrau.

Por conseguinte, tem-se

$$T_s = 4\tau = \frac{4}{\zeta\omega_n}. \quad (5.13)$$

Define-se, assim, o tempo de acomodação como igual a quatro constantes de tempo (isto é,  $\tau = 1/\zeta\omega_n$ ) das raízes dominantes da equação característica. O erro de regime estacionário do sistema pode ser medido pela resposta do sistema ao degrau, como está mostrado na Fig. 5.7.

A resposta transitória do sistema pode ser descrita em termos de dois fatores:

1. A rapidez da resposta, como representada pelo tempo de subida e pelo tempo de pico.
2. A proximidade da resposta em relação à resposta desejada, como representada pela ultrapassagem e pelo tempo de acomodação.

Como seria de esperar, estes requisitos são contraditórios e se deve obter um compromisso. Para se obter uma relação explícita para  $M_p$  e  $T_p$ , em função de  $\zeta$ , pode-se derivar a Eq. (5.9) e igualar a zero. Alternativamente, pode-se utilizar a propriedade da transformada de Laplace da derivada, que pode ser escrita como

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = sY(s)$$

quando o valor inicial de  $y(t)$  é zero. Em consequência é possível obter a derivada de  $y(t)$  multiplicando-se a Eq. (5.8) por  $s$  e assim chegando ao segundo membro da Eq. (5.10). Calculando-se a transformada inversa do segundo membro da Eq. (5.10), obtém-se a Eq. (5.11), que é igual a zero quando  $\omega_n\beta t = \pi$ . Em consequência, encontra-se que a relação para o tempo de pico neste sistema de segunda ordem é

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad (5.14)$$

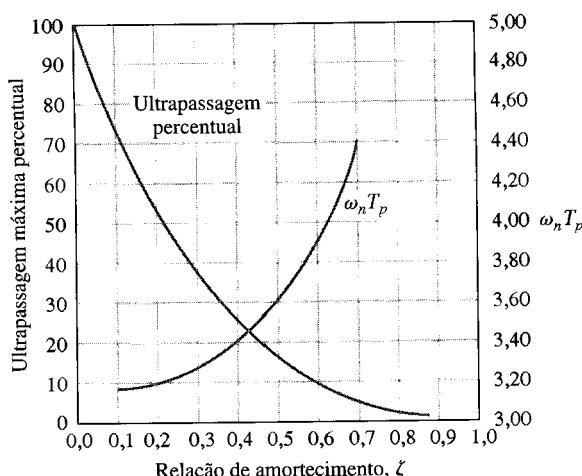
e o valor de pico da resposta é

$$M_{p_t} = 1 + e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (5.15)$$

Assim, a ultrapassagem percentual é

$$U.P. = 100e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (5.16)$$

A Fig. 5.8 apresenta o valor de ultrapassagem percentual versus valor de  $\zeta$ . Adicionalmente, o valor do tempo de pico normalizado,  $\omega_n T_p$ , versus  $\zeta$  está mostrado na Fig. 5.8. Estão listados na Tabela 5.2 os valores de ultrapassagem percentual versus os valores da relação de amortecimento para alguns valores selecionados. Novamente se estabelece a necessidade de uma solução de compromisso entre rapidez de resposta e ultrapassagem aceitável.



**Fig. 5.8** Ultrapassagem percentual e tempo de pico normalizado versus relação de amortecimento para um sistema de segunda ordem (Eq. 5.8).

**TABELA 5.2 Pico de Ultrapassagem Percentual Versus Relação de Amortecimento para um Sistema de Segunda Ordem**

Relação de amortecimento	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
Ultrapassagem percentual	0,2	1,5	4,6	9,5	16,3	25,4	37,2

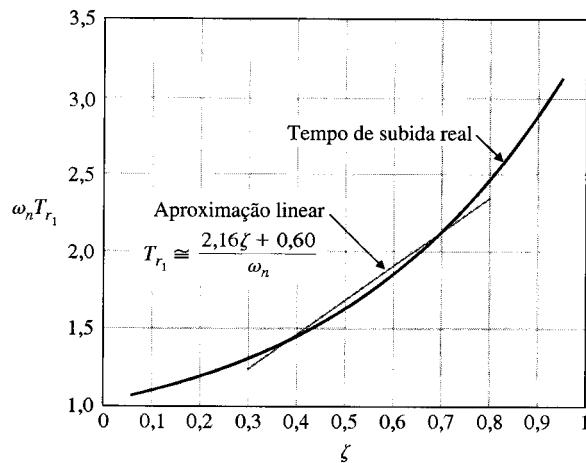
A rapidez de resposta ao degrau pode ser medida pelo tempo consumido em passar de 10 a 90% da magnitude do degrau de entrada. Esta é a definição de tempo de subida  $T_{r_1}$  mostrada na Fig. 5.7. O tempo de subida normalizado  $\omega_n T_{r_1}$  versus  $\zeta$  ( $0,05 \leq \zeta \leq 0,95$ ) está mostrado na Fig. 5.9. Embora seja difícil obter expressões analíticas exatas para  $T_{r_1}$ , pode ser utilizada a aproximação linear:

$$T_{r_1} = \frac{2,16\zeta + 0,60}{\omega_n}, \quad (5.17)$$

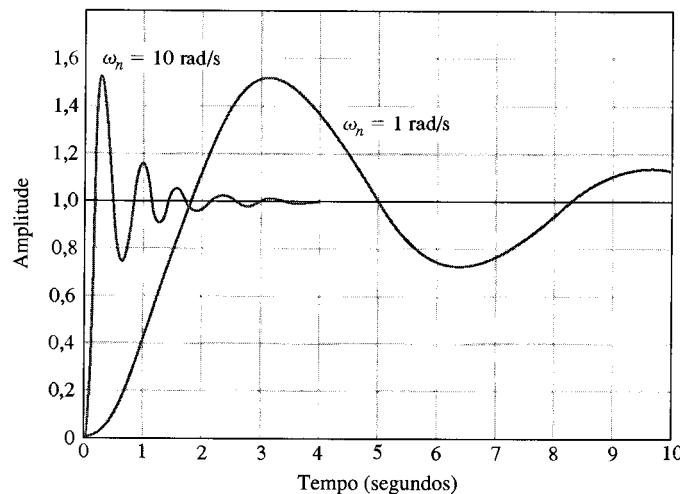
que é exata para  $0,3 \leq \zeta \leq 0,8$ . Esta aproximação linear está mostrada na Fig. 5.9.

A rapidez de uma resposta a uma excitação em degrau, como descrita pela Eq. (5.17), é dependente de  $\zeta$  e de  $\omega_n$ . Para um dado valor de  $\zeta$ , a resposta é tão mais rápida quanto maior o valor de  $\omega_n$ , como está mostrado na Fig. 5.10. Note-se que o valor de ultrapassagem independe do valor de  $\omega_n$ .

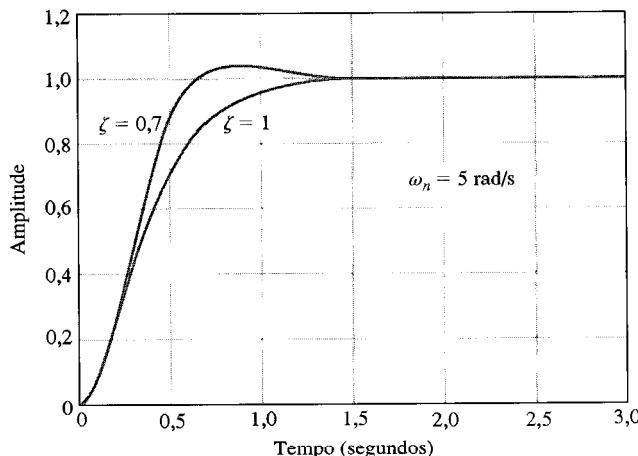
Para um dado  $\omega_n$ , a resposta é tão mais rápida quanto menor for o valor de  $\zeta$ , como está mostrado na Fig. 5.11. A rapidez de resposta, contudo, estará limitada pelo valor de ultrapassagem que pode ser aceito.



**Fig. 5.9** Tempo de subida normalizado  $T_{r_1}$  versus  $\zeta$  para um sistema de segunda ordem.



**Fig. 5.10** Resposta ao degrau unitário para  $\zeta = 0,2$ , com  $\omega_n = 1$  e  $\omega_n = 10$ .



**Fig. 5.11** Resposta ao degrau unitário para  $\omega_n = 5$  com  $\zeta = 0,7$  e  $\zeta = 1$ .

#### 5.4 EFEITOS DE UM TERCEIRO PÓLO E DE UM ZERO NA RESPOSTA DE UM SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM

As curvas apresentadas na Fig. 5.8 são exatas somente para o sistema de segunda ordem da Eq. (5.8). Contudo, elas fornecem uma fonte consideravelmente boa de dados porque muitos sistemas possuem um par de raízes dominantes e a resposta ao degrau pode ser estimada utilizando-se a Fig. 5.8. Esta abordagem, embora seja uma aproximação, evita o cálculo da transformada inversa de Laplace a fim de se determinar a ultrapassagem percentual e outras medidas de desempenho. Por exemplo, para um sistema de terceira ordem com uma função de transferência a malha fechada

$$T(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\zeta s + 1)(\gamma s + 1)}, \quad (5.18)$$

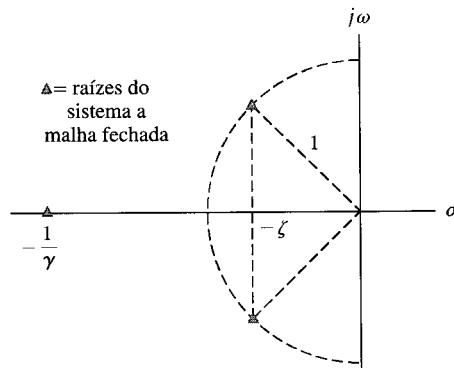
o plano  $s$  está mostrado na Fig. 5.12. Este sistema de terceira ordem está normalizado com  $\omega_n = 1$ . Foi constatado experimentalmente que o desempenho indicado pelos valores de ultrapassagem percentual,  $U.P.$ , e do tempo de assentamento,  $T_s$ , era representado pelas curvas do sistema de segunda ordem quando [4]

$$|1/\gamma| \geq 10|\zeta\omega_n|.$$

Em outras palavras, a resposta de um sistema de terceira ordem pode ser aproximada pelas **raízes dominantes** do sistema de segunda ordem quando a parte real das raízes dominantes for inferior a  $1/10$  da parte real da terceira raiz [17, 23].

Usando-se uma simulação em computador, com  $\zeta = 0,45$ , pode-se determinar a resposta de um sistema a uma excitação em degrau unitário. Quando  $\gamma = 2,25$ , obtém-se uma resposta superamortecida porque a parte real dos pólos complexos é  $-0,45$ , enquanto o pôlo real é igual a  $-0,444$ . O tempo de assentamento no interior da faixa de 2% do valor final pode ser encontrado via simulação como sendo de 9,6 segundos. Se  $\gamma = 0,90$  ou  $1/\gamma = 1,11$  for comparado com  $\zeta\omega_n = 0,45$  dos pólos complexos, obtém-se uma ultrapassagem percentual de 12% e um tempo de assentamento de 8,8 segundos. Se as raízes complexas fossem dominantes, teriam sido previstos uma ultrapassagem percentual de 20% e um tempo de assentamento de  $4/\zeta\omega_n = 8,9$  segundos. Os resultados são resumidos na Tabela 5.3.

Deve-se observar que as medidas de desempenho da Fig. 5.8 estão corretas apenas para funções de transferência sem zeros finitos. Se a função de transferência possuir zeros finitos e eles estiverem



**Fig. 5.12** Um diagrama no plano  $s$  de um sistema de terceira ordem.

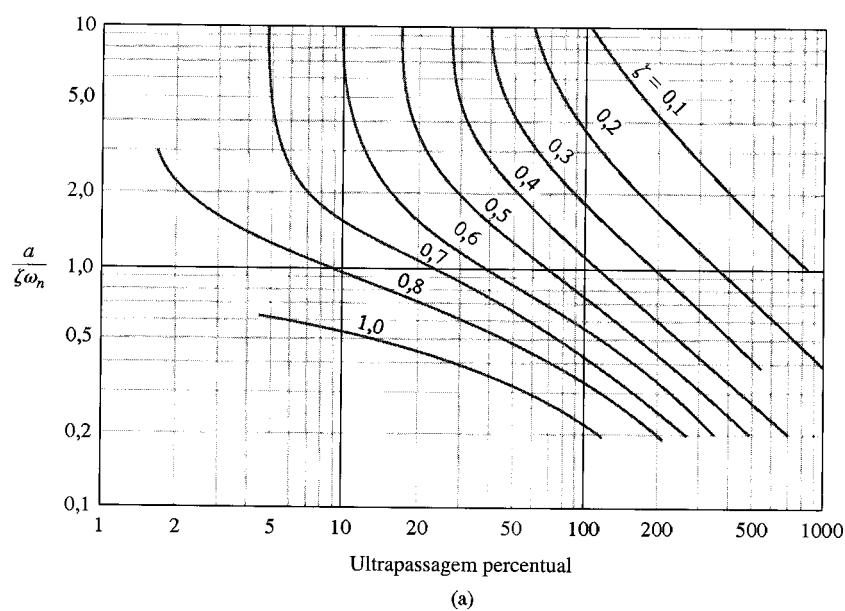
TABELA 5.3 Efeito de um Terceiro Pólo (Eq. 5.18) para  $\zeta = 0,45$ 

$\gamma$	$\frac{1}{\gamma}$	Ultrapassagem Percentual	Tempo de Assentamento*
2,25	0,444	0	9,63
1,5	0,666	3,9	6,3
0,9	1,111	12,3	8,81
0,4	2,50	18,6	8,67
0,05	20,0	20,5	8,37
0	$\infty$	20,5	8,24

\*Nota: O tempo de assentamento está na forma normalizada,  $\omega_n T_s$ , e utiliza um critério de 2%.

localizados relativamente perto dos pólos dominantes complexos, então os zeros afetarão de forma significativa a resposta transitória do sistema [5].

A resposta transitória de um sistema com um zero e dois pólos pode ser afetada pela localização do zero [5]. A ultrapassagem percentual para um degrau de entrada, em função de  $a/\zeta\omega_n$ , para  $\zeta \leq 1$ , é dada na Fig. 5.13(a) para a função de transferência



(a)

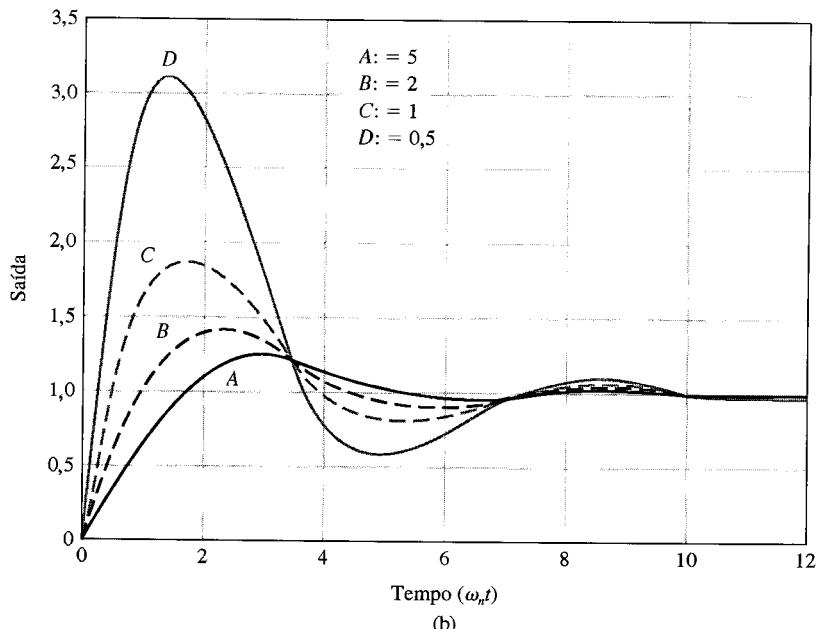


Fig. 5.13 (a) Ultrapassagem percentual em função de  $\zeta$  e de  $\omega_n$  quando um sistema de segunda ordem contém um zero. (De R. N. Clark, *Introduction to Automatic Control Systems*, New York, Wiley, 1962, redesenhado com permissão.) (b) A resposta para a função de transferência do sistema de segunda ordem com um zero, para quatro valores da relação  $(a/\zeta\omega_n)$ :  $A = 5$ ,  $B = 2$ ,  $C = 1$  e  $D = 0,5$  quando  $\zeta = 0,45$ .

TABELA 5.4 Resposta de um Sistema de Segunda Ordem com um Zero e  $\zeta = 0,45$ 

$a/\zeta\omega_n$	Ultrapassagem Percentual	Tempo de Assentamento*	Tempo de Pico
5	23,1	8,0	3,0
2	39,7	7,6	2,2
1	89,9	10,1	1,8
0,5	210,0	10,3	1,5

\*Nota: O tempo está normalizado, como  $\omega_n t$ , e se utiliza o critério de 2% para o tempo de assentamento.

$$T(s) = \frac{(\omega_n^2/a)(s + a)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

A resposta transitória real para uma entrada em degrau está mostrada na Fig. 5.13(b) para valores selecionados de  $a/\zeta\omega_n$ . A resposta real com estes valores selecionados está resumida na Tabela 5.4 para  $\zeta = 0,45$ .

A correlação da resposta de um sistema no domínio do tempo com a localização no plano  $s$  dos pólos da função de transferência a malha fechada é muito útil para se selecionar as especificações de um sistema. Para ilustrar claramente a utilidade do plano  $s$ , considere-se um simples exemplo.

### EXEMPLO 5.1

#### Seleção de parâmetros

Um sistema de controle com retroação dotado de uma única malha está mostrado na Fig. 5.14. Deseja-se selecionar o ganho  $K$  e o parâmetro  $p$  de modo que as especificações no domínio do tempo sejam alcançadas. A resposta transitória a um degrau deve ser a mais rápida possível para uma ultrapassagem inferior a 5%. Além disto, o tempo de assentamento para uma faixa de 2% do valor final deve ser inferior a 4 segundos. A relação de amortecimento  $\zeta$  para uma ultrapassagem percentual de 4,3% é 0,707. Esta relação de amortecimento é mostrada graficamente como uma reta na Fig. 5.15. Como o tempo de assentamento é

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \leq 4 \text{ s},$$

é necessário que a parte real dos pólos complexos de  $T(s)$  seja

$$\zeta\omega_n \geq 1.$$

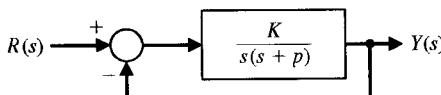


Fig. 5.14 Sistema de controle com malha única de retroação.

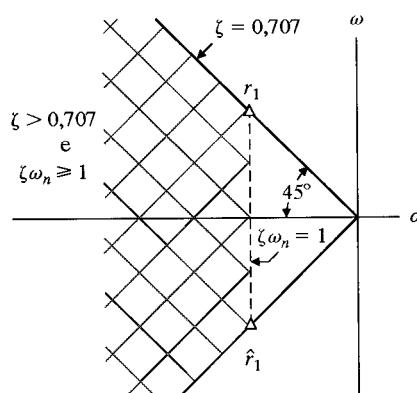


Fig. 5.15 Especificações e localizações de raízes no plano  $s$ .

Esta região também está mostrada na Fig. 5.15. A região que satisfará ambos os requisitos no domínio do tempo está mostrada com hachuras no plano  $s$  da Fig. 5.15.

Quando se escolhem as raízes a malha fechada como sendo  $r_1 = -1 + j1$  e  $\hat{r}_1 = -1 - j1$ , então resulta  $T_s = 4s$  e uma ultrapassagem percentual de 4,3%. Portanto  $\zeta = 1/\sqrt{2}$  e  $\omega_n = 1/\zeta = \sqrt{2}$ . A função de transferência a malha fechada é

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K}{s^2 + ps + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

Será necessário, assim, que se tenham  $K = \omega_n^2 = 2$  e  $p = 2\zeta\omega_n = 2$ . Um entendimento pleno da correlação existente entre a localização das raízes a malha fechada e a resposta transitória do sistema é importante para o analista e o projetista do sistema. Assim, este assunto será tratado com mais detalhes nas seções seguintes. ■

#### EXEMPLO 5.2

##### Pólos dominantes de $T(s)$

Seja o sistema com função de transferência a malha fechada

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{\frac{\omega_n^2}{a}(s + a)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(1 + \tau s)}.$$

Tanto o pólo quanto o zero reais podem afetar a resposta transitória. Se  $a >> \zeta\omega_n$  e  $\tau << \zeta\omega_n$ , então o pólo e o zero terão pouco efeito sobre a resposta ao degrau.

Admita-se que

$$T(s) = \frac{62,5(s + 2,5)}{(s^2 + 6s + 25)(s + 6,25)}.$$

Observe-se que o ganho estático é igual a 1 ( $T(0) = 1$ ) e se espera um erro estacionário nulo para uma entrada em degrau. Tem-se  $\zeta\omega_n = 3$ ,  $\tau = 0,16$  e  $a = 2,5$ . Os pólos e zeros estão mostrados no plano  $s$  na Fig. 5.16. Como uma primeira aproximação, despreza-se o pólo real e se obtém

$$T(s) \approx \frac{10(s + 2,5)}{(s^2 + 6s + 25)}.$$

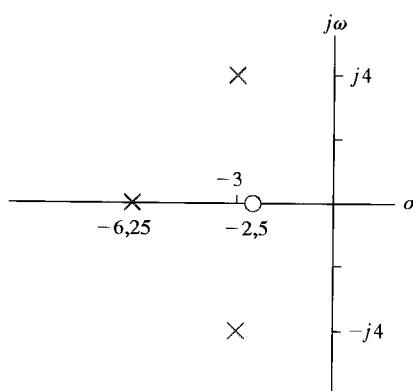


Fig. 5.16 Os pólos e zeros no plano  $s$  para um sistema de terceira ordem.

Tem-se agora  $\zeta = 0,6$  e  $\omega_n = 5$  para os pólos dominantes acompanhados de um zero para o qual  $a/(\zeta\omega_n) = 0,833$ . Usando-se a Fig. 5.13(a), obtém-se que a ultrapassagem percentual é de 55%. Espera-se um tempo de assentamento para valores no interior da faixa de 2% do valor final de

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0,6(5)} = 1,33 \text{ s}.$$

Usando-se uma simulação em computador do sistema de terceira ordem real, encontra-se uma ultrapassagem igual a 38% e um tempo de assentamento de 1,6 segundo. Assim, o efeito de amortecimento do terceiro pólo de  $T(s)$  é no sentido de reduzir a ultrapassagem e de aumentar o tempo de assentamento (assim o pólo real não pode ser desprezado). ■

## 5.5 ESTIMATIVA DA RELAÇÃO DE AMORTECIMENTO

A relação de amortecimento pode ser calculada a partir da resposta do sistema a uma excitação em degrau [14]. A resposta ao degrau de um sistema de segunda ordem para uma entrada em degrau unitário é dada pela Eq. (5.9) e repetida aqui:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \beta t + \theta),$$

onde  $\beta = \sqrt{1 - \zeta^2}$  e  $\theta = \cos^{-1} \zeta$ . Portanto, a freqüência do termo senoidal amortecido para  $\zeta < 1$  é

$$\omega = \omega_n(1 - \zeta^2)^{1/2} = \omega_n \beta,$$

e o número de ciclos em um segundo é  $\omega/2\pi$ .

A constante de tempo para o decaimento exponencial é  $\tau = 1/(\zeta \omega_n)$  em segundos. O número de ciclos da senóide amortecida durante uma constante de tempo é

$$(\text{ciclos/s}) \times \tau = \frac{\omega}{2\pi \zeta \omega_n} = \frac{\omega_n \beta}{2\pi \zeta \omega_n} = \frac{\beta}{2\pi \zeta}.$$

Admitindo-se que a resposta decaia  $n$  constantes de tempo visíveis, tem-se

$$\text{ciclos visíveis} = \frac{n\beta}{2\pi \zeta}. \quad (5.19)$$

Para o sistema de segunda ordem a resposta ao degrau permanece no interior da faixa de 2% do valor de estado estacionário após quatro constantes de tempo ( $4\tau$ ). Portanto  $n = 4$ , e

$$\text{ciclos visíveis} = \frac{4\beta}{2\pi \zeta} = \frac{4(1 - \zeta^2)^{1/2}}{2\pi \zeta} \approx \frac{0,55}{\zeta} \quad (5.20)$$

para  $0,2 \leq \zeta \leq 0,6$ .

Como exemplo, seja examinar a resposta mostrada na Fig. 5.5(a) para  $\zeta = 0,4$ . Começa-se em  $y(t) = 0$  como primeiro ponto de mínimo e conta-se 1,4 ciclo visível (até que a resposta permaneça no interior da faixa de 2% do valor final). Estima-se, então o valor de  $\zeta$  como

$$\zeta = \frac{0,55}{\text{ciclos}} = \frac{0,55}{1,4} = 0,39.$$

É possível usar esta aproximação para sistemas com pólos complexos dominantes de modo que

$$T(s) \approx \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}.$$

Pode-se estimar então a relação de amortecimento  $\zeta$  a partir da resposta real de um sistema físico.

Um método alternativo para se estimar  $\zeta$  consiste em se determinar a ultrapassagem percentual da resposta ao degrau e usar a Fig. 5.8 para estimar  $\zeta$ . Por exemplo, determina-se uma ultrapassagem percentual de 25% para  $\zeta = 0,4$  a partir da resposta da Fig. 5.5(a). Usando-se a Fig. 5.8, estima-se que  $\zeta = 0,4$ , como esperado.

## 5.6 LOCALIZAÇÃO DAS RAÍZES NO PLANO s E A RESPOSTA TRANSITÓRIA

A resposta transitória de um sistema de controle com retroação a malha fechada pode ser descrita em termos da localização dos pólos da função de transferência. A função de transferência a malha fechada é escrita em geral como

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\sum P_i(s)\Delta_i(s)}{\Delta(s)},$$

onde  $\Delta(s) = 0$  é a equação característica do sistema. Para o sistema de malha única da Fig. 5.14, a equação característica se reduz a  $1 + G(s) = 0$ . São os pólos e zeros de  $T(s)$  que determinam a resposta transitória. Contudo, para um sistema a malha fechada, os pólos de  $T(s)$  são as raízes da equação característica  $\Delta(s) = 0$  e os pólos de  $\sum P_i(s)\Delta_i(s)$ . A resposta de um sistema (com ganho estático = 1) sem raízes repetidas a uma entrada em degrau unitário pode ser formulada em expansão de frações parciais como

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{s + \sigma_i} + \sum_{k=1}^N \frac{B_k s + C_k}{s^2 + 2\alpha_k s + (\alpha_k^2 + \omega_k^2)}, \quad (5.21)$$

onde  $A_i$ ,  $B_k$  e  $C_k$  são constantes. As raízes do sistema devem ser ou  $s = -\sigma_i$  ou pares conjugados complexos do tipo  $s = -\alpha_k \pm j\omega_k$ . Então, a transformada inversa resulta na resposta transitória como uma soma de termos:

$$y(t) = 1 + \sum_{i=1}^M A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{k=1}^N D_k e^{-\alpha_k t} \sin(\omega_k t + \theta_k), \quad (5.22)$$

onde  $D_k$  é uma constante e depende de  $B_k$ ,  $C_k$ ,  $\alpha_k$  e  $\omega_k$ . A resposta transitória é composta da saída em estado estacionário, de termos exponenciais e de termos senoidais com amortecimento. Para a resposta ser estável — isto é, limitada para uma entrada em degrau — deve-se requerer que a parte real das raízes,  $-\sigma_i$  e  $-\alpha_k$ , estejam na parte da esquerda no plano  $s$ . A resposta ao impulso para várias localizações de raízes está mostrada na Fig. 5.17. A informação conferida pela localização das raízes é gráfica, na realidade, e usualmente compensa o esforço de se determinar a localização das raízes no plano  $s$ .

É importante para o analista de sistemas de controle compreender a relação entre a representação em frequências complexas de um sistema linear, através dos pólos e zeros de sua função de transferência, e sua resposta no domínio do tempo ao degrau e a outras entradas. Muitos dos cálculos de análise e de projeto em áreas como processamento de sinais e controle são feitos no plano de frequências complexas, onde o modelo do sistema é representado em termos de pólos e zeros de sua função de transferência  $T(s)$ . Por outro lado, o desempenho do sistema é quase sempre analisado examinando-se as respostas no domínio do tempo, particularmente ao se tratar com sistemas de controle.

O projetista de sistema competente deve ser capaz de antever os efeitos provocados pela adição, supressão ou deslocamento de pólos e zeros de  $T(s)$  no plano  $s$  sobre as respostas ao degrau e ao impulso. Além disto, o projetista deve ser capaz de visualizar que devem ser feitas mudanças nos pólos e zeros de  $T(s)$  a fim de efetuar as alterações desejadas nas respostas do modelo às entradas em degrau e em impulso.

Um projetista experiente presta atenção aos efeitos das localizações de zeros sobre a resposta do sistema. Os pólos de  $T(s)$  determinam os modos particulares de resposta e os zeros de  $T(s)$  estabelecem os pesos relativos das funções correspondentes aos modos individuais. Por exemplo, deslocar um zero para perto de um pôlo específico reduzirá a contribuição relativa da função modal correspondente ao pôlo.

É possível desenvolver um programa de computador que permita especificar um conjunto arbitrário de pólos e zeros para a função de transferência de um sistema linear. Em seguida, o computador calculará e traçará individualmente o gráfico das respostas do sistema ao impulso e ao degrau. Ele as mostrará também sob forma reduzida juntamente com o diagrama de pólos e zeros.

Uma vez que o programa tenha sido executado para um conjunto de pólos e zeros, o usuário pode modificar a localização de um ou mais deles. São apresentados, então, gráficos mostrando antigas e novas configurações de pólos e zeros no plano complexo e antigas e novas respostas ao impulso e ao degrau.

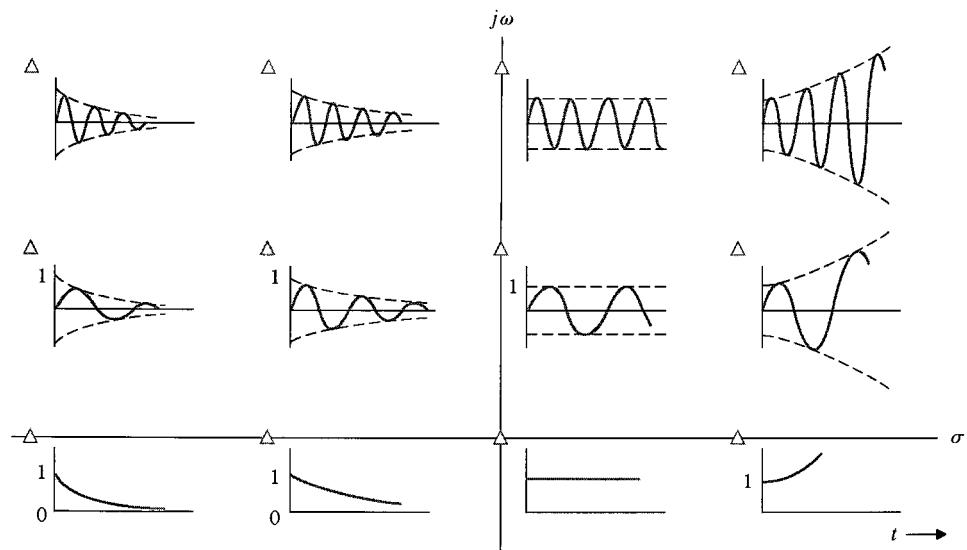


Fig. 5.17 Resposta impulsional para diversas localizações de raízes no plano  $s$ . (A raiz conjugada não está mostrada.)

## 5.7 ERRO DE ESTADO ESTACIONÁRIO DE SISTEMAS DE CONTROLE COM RETROAÇÃO

Uma das razões fundamentais de se usar retroação, a despeito de seu custo e do aumento de complexidade, é a melhoria imediata na redução do erro de regime permanente do sistema. Como foi ilustrado na Seção 4.5, o erro de regime permanente (estado estacionário) de um sistema a malha fechada estável é usualmente muitas ordens de magnitude menor que o erro do sistema a malha aberta. O sinal atuante no sistema, que é uma medida do erro do sistema, é designado por  $E_a(s)$ . Contudo, o erro real do sistema é  $E(s) = R(s) - Y(s)$ . Considerando-se o sistema de controle a malha fechada da Fig. 5.18, tem-se

$$E(s) = R(s) - \frac{G(s)}{1 + GH(s)} R(s) = \frac{[1 + GH(s) - G(s)]}{1 + GH(s)} R(s).$$

O erro do sistema é igual ao sinal  $E_a(s)$  quando  $H(s) = 1$ . Então

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s).$$

O erro de estado estacionário, quando  $H(s) = 1$ , é assim

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}. \quad (5.23)$$

É útil determinar o erro de estado estacionário do sistema com retroação unitária ( $H(s) = 1$ ) para as três entradas de teste padronizadas.

**Entrada em Degrau.** O erro de estado estacionário para uma entrada em degrau de magnitude  $A$  é, portanto,

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(A/s)}{1 + G(s)} = \frac{A}{1 + G(0)}.$$

É a forma da função de transferência de malha aberta  $G(s)$  que determina o erro de estado estacionário. A função de transferência de malha aberta é escrita sob forma geral como

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^M (s + z_i)}{s^N \prod_{k=1}^Q (s + p_k)}, \quad (5.24)$$

onde  $\prod$  designa o produto de fatores. Por conseguinte, a função de transferência de malha aberta à medida que  $s$  tende a zero depende do número  $N$  de integrações. Se  $N$  for maior que zero, então  $G(0)$  tenderá para infinito e o erro de estado estacionário tenderá a zero. O número de integradores é usualmente indicado rotulando-se o sistema como sendo do tipo  $N$ .

Portanto, para um sistema do tipo zero,  $N = 0$ , o erro de estado estacionário é

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + G(0)} = \frac{A}{1 + \left( K \prod_{i=1}^M z_i / \prod_{k=1}^Q p_k \right)}. \quad (5.25)$$

A constante  $G(0)$  é designada por  $K_p$ , a **constante de erro de posição**, e é dada por

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s).$$

O erro estacionário de acompanhamento para uma entrada em degrau de magnitude  $A$  é dado, por conseguinte, por

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}. \quad (5.26)$$

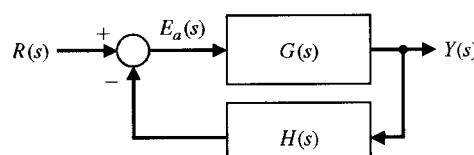


Fig. 5.18 Sistema de controle a malha fechada.

Portanto, o erro de estado estacionário para uma entrada em degrau de um sistema com um ou mais integradores,  $N \geq 1$ , é zero porque

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{1 + (K \prod z_i / s^N \prod p_k)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{As^N}{s^N + (K \prod z_i / \prod p_k)} = 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

**Entrada em Rampa.** O erro de estado estacionário para uma entrada em rampa (velocidade) com inclinação  $A$  é

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(A/s^2)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s + sG(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{sG(s)}. \quad (5.28)$$

Novamente, o erro de estado estacionário depende do número de integrações  $N$ . Para um sistema do tipo zero,  $N = 0$ , o erro de estado estacionário é infinito. Para um sistema do tipo um,  $N = 1$ , o erro é

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s \{ [K \prod (s + z_i)] / [s \prod (s + p_k)] \}},$$

ou

$$e_{ss} = \frac{A}{(K \prod z_i / \prod p_k)} = \frac{A}{K_v}, \quad (5.29)$$

onde  $K_v$  é designada a **constante de erro de velocidade**. A constante de erro de velocidade é calculada como

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s).$$

Quando a função de transferência possuir dois ou mais integradores,  $N \geq 2$ , obtém-se erro de estado estacionário nulo. Quando  $N = 1$ , existirá um erro de estado estacionário. Contudo, a velocidade em regime permanente na saída será igual à velocidade de entrada (ver a Fig. 5.20).

**Entrada em Aceleração.** Quando o sinal de entrada do sistema for  $r(t) = At^2/2$ , o erro de estado estacionário será então

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(A/s^3)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s^2 G(s)}. \quad (5.30)$$

O erro de estado estacionário é infinito para um integrador; para dois integradores,  $N = 2$ , obtém-se

$$e_{ss} = \frac{A}{K \prod z_i / \prod p_k} = \frac{A}{K_a}, \quad (5.31)$$

onde  $K_a$  é denominada a **constante de erro de aceleração**. A constante de erro de aceleração é

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s).$$

Quando o número de integradores for maior ou igual a três, então o erro de estado estacionário do sistema será zero.

Os sistemas de controle são muitas vezes descritos em termos do seu tipo e das constantes de erro,  $K_p$ ,  $K_v$  e  $K_a$ . As definições das constantes de erro e o erro de estado estacionário para os três sinais de entrada estão resumidos na Tabela 5.5. A utilidade das constantes de erro pode ser ilustrada considerando-se um exemplo simples.

**TABELA 5.5 Sumário dos Erros de Estado Estacionário**

Número de Integradores de $G(s)$ , Tipo de Sistema	Degrau $r(t) = A$ , $R(s) = A/s$	Entrada Rampa $At$ , $A/s^2$	Parábola $At^2/2$ , $A/s^3$
0	$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}$	Infinito	Infinito
1	$e_{ss} = 0$	$\frac{A}{K_v}$	Infinito
2	$e_{ss} = 0$	0	$\frac{A}{K_a}$

**EXEMPLO 5.3****Controle de direção de um robô móvel**

Uma pessoa seriamente deficiente poderia usar um robô móvel como um dispositivo de assistência ou como um criado [8]. O sistema de controle de direção para um tal robô pode ser representado pelo diagrama de blocos mostrado na Fig. 5.19. O controlador de direção,  $G_1(s)$ , é

$$G_1(s) = K_1 + K_2/s. \quad (5.32)$$

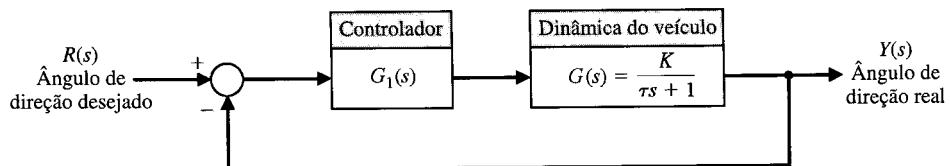
O erro de estado estacionário do sistema para uma entrada em degrau quando  $K_2 = 0$  e  $G_1(s) = K_1$  é, por conseguinte,

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}, \quad (5.33)$$

onde  $K_p = KK_1$ . Quando  $K_2$  for maior que zero, tem-se um sistema do tipo um,

$$G_1(s) = \frac{K_1 s + K_2}{s},$$

e o erro estacionário é zero para uma solicitação de entrada em degrau.



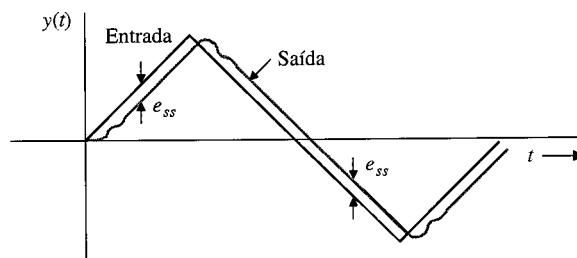
**Fig. 5.19** Diagrama de blocos de um sistema de controle de direção para um robô móvel.

Se o comando de direção for uma solicitação em rampa, o erro em estado estacionário será, então

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v}, \quad (5.34)$$

onde

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_1(s) G(s) = K_2 K.$$



**Fig. 5.20** Resposta a uma onda triangular.

A resposta transitória do veículo a um sinal de entrada em forma de onda triangular quando  $G_1(s) = (K_1 s + K_2)/s$  está mostrada na Fig. 5.20. A resposta transitória mostra claramente o efeito do erro estacionário, o qual não será objeto de questionamento se  $K_v$  for suficientemente grande. Observe-se que a saída alcança a velocidade requerida pelo sinal de entrada, mas exibe um erro de estado estacionário. ■

As constantes de erro,  $K_p$ ,  $K_v$  e  $K_a$ , de um sistema de controle descrevem a capacidade de o sistema reduzir ou eliminar o erro de estado estacionário. Elas são, por conseguinte, utilizadas como medidas numéricas do desempenho em regime permanente (estado estacionário). O projetista determina as constantes de erro para um dado sistema e tenta determinar métodos de aumentar as constantes de erro ao mesmo tempo em que mantém uma resposta transitória aceitável. No caso do sistema de controle de direção é desejável aumentar o fator de ganho  $KK_2$  a fim de aumentar  $K_v$  e reduzir o erro em estado estacionário. Contudo, um aumento em  $KK_2$  resulta em uma diminuição consequente da relação de amortecimento,  $\zeta$ , do sistema e, portanto, em uma resposta mais oscilatória a um degrau de entrada. Uma solução de compromisso seria determinar o maior valor possível de  $K_v$  com base no menor valor aceitável para  $\zeta$ .

## 5.8 ERRO DE ESTADO ESTACIONÁRIO DE SISTEMAS COM RETROAÇÃO NÃO-UNITÁRIA

Um sistema com retroação genérico está mostrado na Fig. 5.21 com  $H(s)$  não igual à unidade. Para um sistema no qual a retroação seja não-unitária, as unidades da saída,  $Y(s)$ , são usualmente diferentes da saída do sensor. Por exemplo, um sistema de controle de velocidade está mostrado na Fig. 5.22, onde  $H(s) = K_2$ . As constantes  $K_1$  e  $K_2$  levam em conta a conversão de um conjunto de unidades para outro conjunto de unidades (aqui se convertem radianos/segundo em volts). Pode-se selecionar  $K_1$  e assim se definir  $K_1 = K_2$  e deslocar os blocos  $K_1$  e  $K_2$  para depois do ponto de soma. Obtém-se, então, o diagrama de blocos equivalente mostrado na Fig. 5.23. Obtém-se, assim, um sistema com retroação unitária, como desejado.

Seja retornar ao sistema da Fig. 5.21 com  $H(s)$ . O caso em que

$$H(s) = \frac{K_2}{(\tau s + 1)}$$

possui um ganho estático para  $H(s)$  de

$$\lim_{s \rightarrow 0} H(s) = K_2.$$

O fator  $K_2$  é um fator de conversão de unidades. Se for definido  $K_1 = K_2$ , então o sistema é transformado no da Fig. 5.23 (para o cálculo do ganho estático ou de regime permanente). Então o erro do sistema mostrado na Fig. 5.23 é  $E(s)$ , onde

$$E(s) = R(s) - Y(s) = [1 - T(s)]R(s), \quad (5.35)$$

uma vez que  $Y(s) = T(s)R(s)$ . Observe-se que

$$T(s) = \frac{K_1 G(s)}{1 + K_1 G(s)}$$

e, portanto,

$$E(s) = \frac{1}{1 + K_1 G(s)} R(s).$$

Então o erro de regime estacionário para uma excitação em degrau unitário é

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1}{1 + K_1 G(0)}. \quad (5.36)$$

Em geral, sempre se pode determinar o erro real do sistema usando-se a Eq. (5.23).

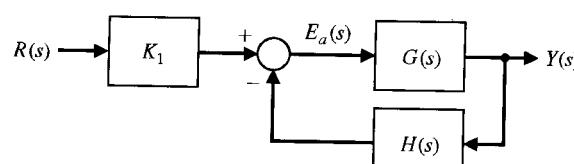


Fig. 5.21 Um sistema com retroação não-unitária.

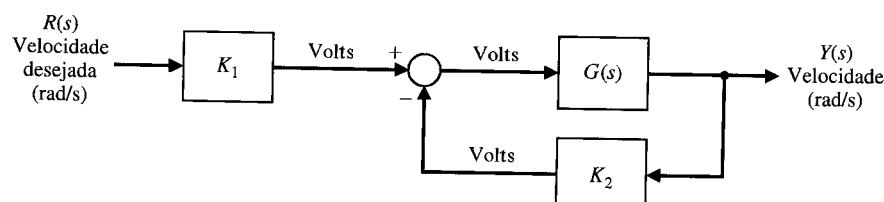


Fig. 5.22 Um sistema de controle de velocidade.

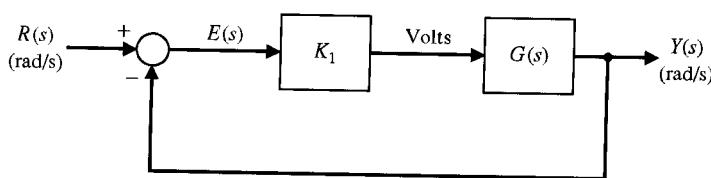


Fig. 5.23 O sistema de controle de velocidade da Fig. 5.22 com  $K_1 = K_2$ .

**EXEMPLO 5.4****Erro estacionário**

Seja determinar o valor apropriado de  $K_1$  e calcular o erro de estado estacionário para uma solicitação de entrada em degrau unitário para o sistema mostrado na Fig. 5.21 quando

$$G(s) = \frac{40}{(s + 5)}$$

e

$$H(s) = \frac{20}{(s + 10)} = \frac{K_2}{(0,1s + 1)}.$$

Pode-se reescrever  $H(s)$  como

$$H(s) = \frac{2}{(0,1s + 1)}.$$

Escolhendo-se  $K_1 = K_2 = 2$ , é possível utilizar a Eq. (5.36) para determinar

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_1 G(0)} = \frac{1}{1 + 2(8)} = \frac{1}{17},$$

ou 5,9% da magnitude do sinal de entrada em degrau. ■

**EXEMPLO 5.5****Sistema com retroação**

Seja considerar o sistema da Fig. 5.24, em que se considera não ser possível introduzir um ganho  $K_1$  em seguida a  $R(s)$ , como foi feito para o sistema da Fig. 5.21. Assim, o erro real é dado pela Eq. (5.35),

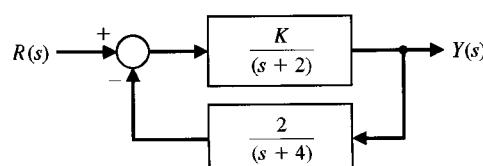
$$E(s) = [1 - T(s)]R(s).$$

Seja determinar um ganho  $K$  apropriado de modo que o erro estacionário a uma solicitação em degrau seja minimizado. O erro estacionário é

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s[1 - T(s)]\frac{1}{s},$$

onde

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{K(s + 4)}{(s + 2)(s + 4) + 2K}.$$



**Fig. 5.24** Um sistema com retroação  $H(s)$ .

Tem-se, então,

$$T(0) = \frac{4K}{8 + 2K}.$$

O erro estacionário para uma entrada em degrau unitário é

$$e_{ss} = [1 - T(0)].$$

Assim, para se obter erro estacionário nulo, é necessário que

$$T(0) = \frac{4K}{8 + 2K} = 1,$$

ou  $8 + 2K = 4K$ . Assim  $K = 4$  conduzirá a um erro estacionário nulo. ■

**5.9 ÍNDICES DE DESEMPENHO**

Constata-se, na literatura recente sobre controle automático, uma ênfase acentuada na formulação matemática e na medida do desempenho de sistemas de controle. A teoria de controle moderna sugere que o engenheiro de sistemas possa especificar quantitativamente o desempenho requerido do sistema. Por conseguinte, um índice de desempenho pode ser calculado e usado para se medir o de-

desempenho do sistema. A medida quantitativa do desempenho de um sistema é necessária para a operação de sistemas de controle adaptativos modernos, para a optimização paramétrica de sistemas de controle e para o projeto ótimo de sistemas.

Quer o objetivo seja melhorar o projeto de um sistema ou projetar um sistema de controle, o índice de desempenho deve ser escolhido e medido.

**Um índice de desempenho é uma medida quantitativa do desempenho de um sistema e é escolhido de modo que a ênfase seja dada às especificações de sistema importantes.**

Um sistema é considerado um **sistema de controle ótimo** quando os parâmetros do sistema são ajustados de modo que o índice alcance um valor extremo, comumente um valor mínimo. Um índice de desempenho, para ser útil, deve ser um número sempre positivo ou nulo. Então, o melhor sistema é definido como o sistema que minimiza este índice.

Um índice de desempenho adequado é a integral do quadrado do erro, ISE (*Integral of the Square of the Error*), que é definido como

$$\text{ISE} = \int_0^T e^2(t) dt. \quad (5.37)$$

O limite superior  $T$  é um tempo finito escolhido um tanto arbitrariamente, de modo que a integral tenda a um valor estacionário. É usualmente conveniente escolher  $T$  como o tempo de assentamento,  $T_s$ . A resposta ao degrau para um sistema de controle com retroação específico está mostrada na Fig. 5.25(b), e o erro na Fig. 5.25(c). O quadrado do erro está mostrado na Fig. 5.25(d) e a integral do quadrado do erro, na Fig. 5.25(e). Este critério irá discriminar sistemas excessivamente superamortecidos de sistemas excessivamente subamortecidos. O valor mínimo da integral ocorrerá para um valor de compromisso do amortecimento. O índice de desempenho da Eq. (5.37) é facilmente adaptado para medições práticas porquanto é possível construir prontamente um circuito que gera o quadrado do sinal de entrada (quadrador). Além disto, o quadrado do erro é matematicamente conveniente para fins analíticos e computacionais.

Um outro critério de desempenho rapidamente instrumentado é o da integral do valor absoluto do erro, IAE (*Integral of the Absolute magnitude of the Error*), que pode ser escrito como

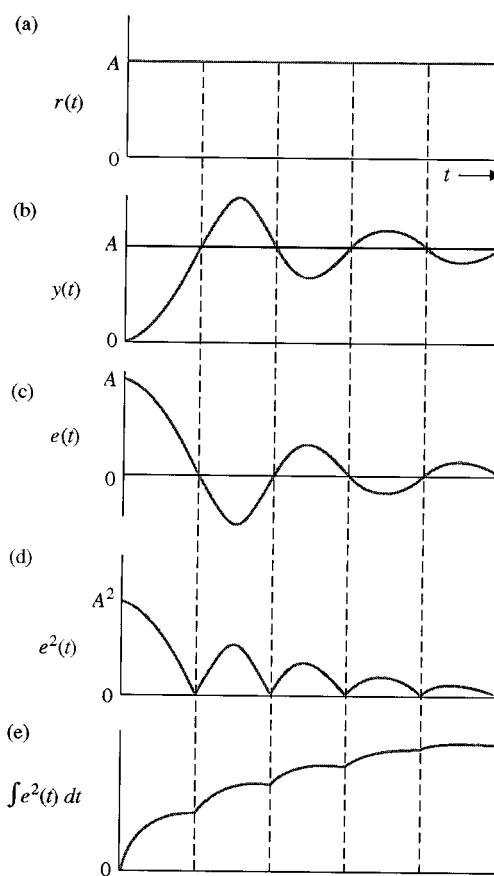


Fig. 5.25 O cálculo da integral do quadrado do erro.

$$\text{IAE} = \int_0^T |e(t)| dt. \quad (5.38)$$

Este índice é particularmente útil para estudos de simulação em computador.

Para reduzir a contribuição de grandes erros iniciais no valor da integral de desempenho, bem como enfatizar erros que acontecem mais tarde na resposta, tem sido proposto o seguinte índice [6]:

$$\text{ITAE} = \int_0^T t|e(t)| dt. \quad (5.39)$$

Este índice de desempenho é designado como a integral do tempo multiplicado pelo valor absoluto do erro, ITAE (*Integral of Time multiplied by Absolute Error*). Um outro índice semelhante é da integral do tempo multiplicado pelo quadrado do erro, ITSE (*Integral of Time multiplied by the Squared Error*):

$$\text{ITSE} = \int_0^T te^2(t) dt. \quad (5.40)$$

O índice de desempenho ITAE fornece a melhor seletividade dentre os índices de desempenho; isto é, o valor mínimo da integral é prontamente discernível ao serem variados os parâmetros do sistema. A forma geral da integral de desempenho é

$$I = \int_0^T f(e(t), r(t), y(t), t) dt, \quad (5.41)$$

onde  $f$  é uma função do erro, do sinal de entrada, do sinal de saída e do tempo. Podem ser obtidos inúmeros índices baseados em combinações de valores das variáveis e do tempo. Vale a pena observar que a minimização de IAE ou de ISE é quase sempre de significado prático. Por exemplo, a minimização de um índice de desempenho pode ser diretamente relacionada à minimização de combustível de aeronaves e de veículos espaciais.

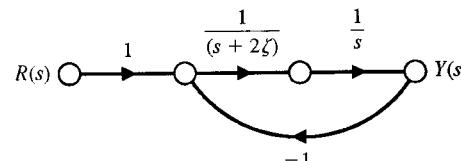
Os índices de desempenho são úteis para analisar e projetar sistemas de controle. Dois exemplos ilustrarão a utilidade desta abordagem.

#### EXEMPLO 5.6

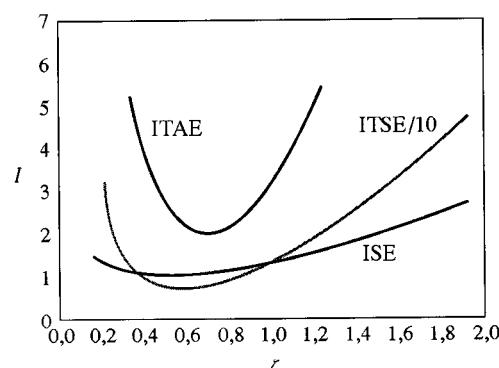
#### Critérios de desempenho

Um sistema de controle com retroação monomialha está mostrado na Fig. 5.26, onde a freqüência natural é o valor normalizado,  $\omega_n = 1$ . A função de transferência a malha fechada é então

$$T(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}. \quad (5.42)$$



**Fig. 5.26** Sistema de controle com retroação monomialha.



**Fig. 5.27** Três critérios de desempenho para um sistema de segunda ordem.

Três índices de desempenho — ISE, ITSE e ITAE — calculados para diversos valores de  $\zeta$  e para uma solicitação de entrada em degrau estão mostrados na Fig. 5.27. Estas curvas mostram a seletividade do critério ITAE em comparação com o índice ISE. O valor da relação de amortecimento  $\zeta$  selecionado com base no índice ITAE é 0,7, que, para um sistema de segunda ordem, resulta em uma resposta rápida ao degrau com uma ultrapassagem percentual de 4,6%. ■

**EXEMPLO 5.7****Sistema de controle de telescópio espacial**

O diagrama de fluxo de sinal do sistema de controle de apontamento de um telescópio espacial está mostrado na Fig. 5.28 [11]. Deseja-se selecionar a magnitude do ganho  $K_3$  para minimizar o efeito da perturbação  $D(s)$ . A perturbação neste caso é equivalente a um erro inicial de atitude. A função de transferência a malha fechada para a perturbação é obtida usando-se a regra de Mason para o ganho do diagrama de fluxo de sinal como a seguir:

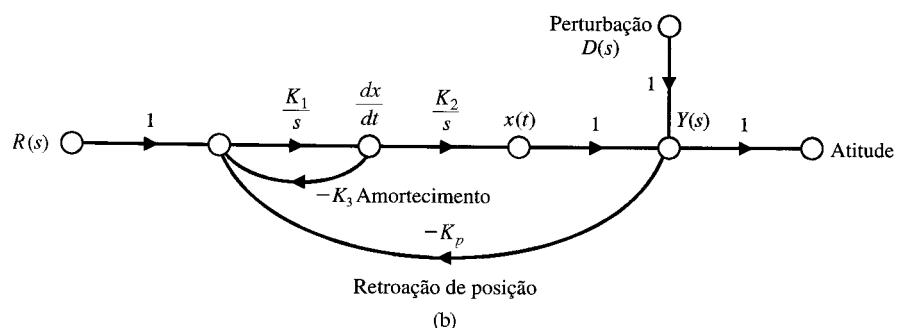
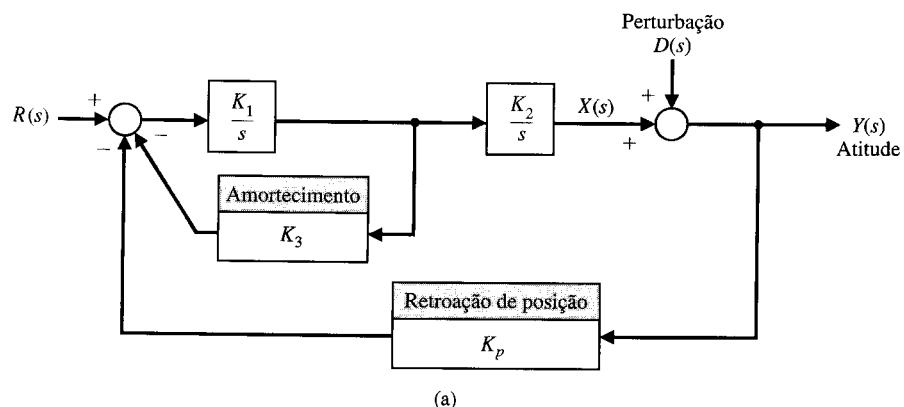
$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{D(s)} &= \frac{P_1(s)\Delta_1(s)}{\Delta(s)} \\ &= \frac{1 \cdot (1 + K_1 K_3 s^{-1})}{1 + K_1 K_3 s^{-1} + K_1 K_2 K_p s^{-2}} \\ &= \frac{s(s + K_1 K_3)}{s^2 + K_1 K_3 s + K_1 K_2 K_p}.\end{aligned}\quad (5.43)$$

Valores típicos para as constantes são  $K_1 = 0,5$  e  $K_1 K_2 K_p = 2,5$ . Então, a freqüência natural do veículo é  $f_n = \sqrt{2,5}/2\pi = 0,25$  Hz. Para uma perturbação em degrau unitário, é possível calcular analiticamente o mínimo de ISE. A atitude  $y(t)$  é

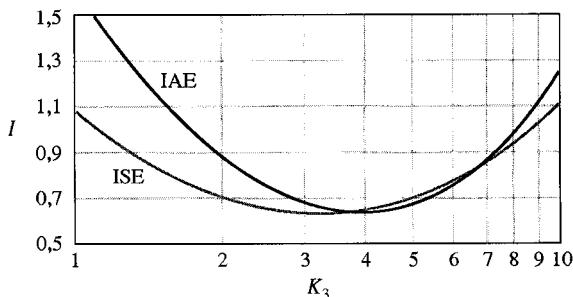
$$y(t) = \frac{\sqrt{10}}{\beta} \left[ e^{-0,25K_3 t} \sin\left(\frac{\beta}{2}t + \psi\right) \right], \quad (5.44)$$

onde  $\beta = K_3 \sqrt{(K_3^2/8) - 5}$ . Elevando-se  $y(t)$  ao quadrado e integrando o resultado, tem-se

$$\begin{aligned}I &= \int_0^\infty \frac{10}{\beta^2} e^{-0,5K_3 t} \sin^2\left(\frac{\beta}{2}t + \psi\right) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{10}{\beta^2} e^{-0,5K_3 t} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\beta t + 2\psi) \right) dt \\ &= \left( \frac{1}{K_3} + 0,1K_3 \right).\end{aligned}\quad (5.45)$$



**Fig. 5.28** Um sistema de controle de apontamento de um telescópio espacial. (a) Diagrama de blocos. (b) Diagrama de fluxo de sinal.



**Fig. 5.29** Os índices de desempenho do sistema de controle do telescópio versus  $K_3$ .

Derivando  $I$  e igualando o resultado a zero, obtém-se

$$\frac{dI}{dK_3} = -K_3^{-2} + 0,1 = 0. \quad (5.46)$$

Por conseguinte, o mínimo de ISE é obtido quando  $K_3 = \sqrt{10} = 3,2$ . Este valor de  $K_3$  corresponde a uma relação de amortecimento  $\zeta$  de 0,50. Os valores de ISE e de IAE para este sistema estão plotados na Fig. 5.29. O mínimo para o índice de desempenho IAE é obtido quando  $K_3 = 4,2$  e  $\zeta = 0,665$ . Embora o critério ISE não seja tão seletivo quanto o critério IAE, é claro que é possível resolver analiticamente para obter o valor mínimo de ISE. O mínimo do índice IAE é obtido medindo-se o valor real de IAE para diversos valores do parâmetro sob interesse. ■

Um sistema de controle é ótimo quando o índice de desempenho selecionado for minimizado. Contudo, o valor ótimo dos parâmetros depende diretamente da definição de ótimo, isto é, do índice de desempenho. Assim, nos Exemplos 5.6 e 5.7 constatou-se que o ajuste ótimo variou para diferentes índices de desempenho.

Os coeficientes que minimizarão o critério de desempenho ITAE para uma solicitação em degrau foram determinados para a função de transferência a malha fechada genérica [6]:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}. \quad (5.47)$$

Esta função de transferência possui um erro estacionário nulo para uma entrada em degrau. Observa-se que a função de transferência possui  $n$  pólos e nenhum zero. Os coeficientes ótimos para o critério ITAE são dados na Tabela 5.6. As respostas usando coeficientes ótimos para uma entrada em degrau são dadas na Fig. 5.30 para os critérios ISE, IAE e ITAE. As respostas são fornecidas para o tempo normalizado,  $\omega_n t$ . Outras formas padronizadas de diferentes índices de desempenho são disponíveis e podem ser úteis em auxiliar o projetista na determinação da faixa de valores de coeficientes para um problema específico. Um exemplo final ilustrará a utilidade de formas padronizadas para o ITAE.

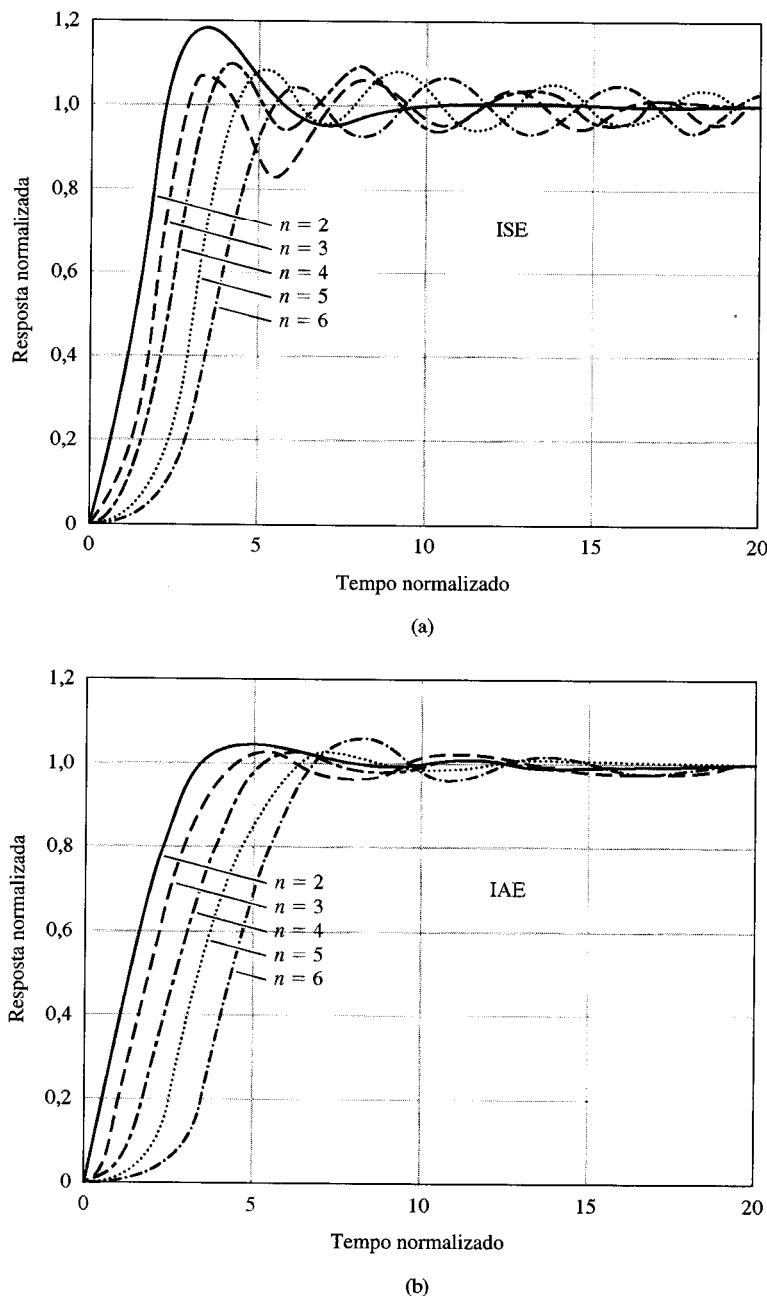
#### EXEMPLO 5.8

#### Controle de duas câmaras

Um sistema de controle preciso e rápido é necessário em um sistema que permite a representação de atores vivos no interior de cenários miniaturizados complexos. O sistema de duas câmaras está mos-

**TABELA 5.6** Os Coeficientes Ótimos de  $T(s)$  com Base no Critério ITAE para uma Entrada em Degrau

$s + \omega_n$
$s^2 + 1,4\omega_n s + \omega_n^2$
$s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 2,15\omega_n^2 s + \omega_n^3$
$s^4 + 2,1\omega_n s^3 + 3,4\omega_n^2 s^2 + 2,7\omega_n^3 s + \omega_n^4$
$s^5 + 2,8\omega_n s^4 + 5,0\omega_n^2 s^3 + 5,5\omega_n^3 s^2 + 3,4\omega_n^4 s + \omega_n^5$
$s^6 + 3,25\omega_n s^5 + 6,60\omega_n^2 s^4 + 8,60\omega_n^3 s^3 + 7,45\omega_n^4 s^2 + 3,95\omega_n^5 s + \omega_n^6$



**Fig. 5.30** Respostas ao degrau de uma função de transferência normalizada usando coeficientes ótimos para (a) ISE, (b) IAE, e (c) ITAE. A resposta é expressa em tempo normalizado,  $\omega_n t$ .

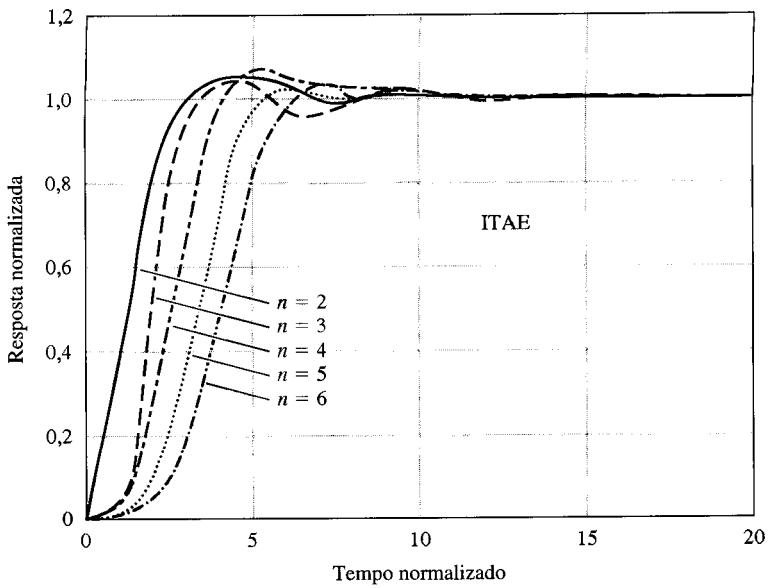
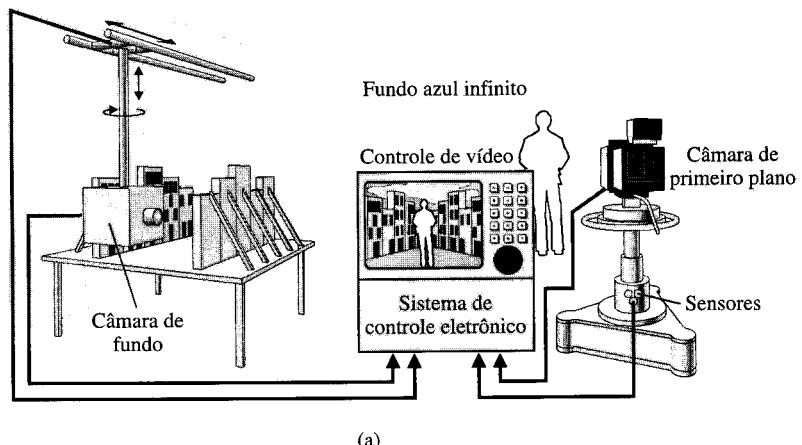


Fig. 5.30 Continuação

(c)

trado na Fig. 5.31(a), em que uma das câmaras está posicionada sobre o ator e a outra sobre o cenário miniaturizado. O desafio é obter uma coordenação rápida e precisa das duas câmaras usando a informação do sensor da câmera da frente para controlar o movimento da câmera de fundo. O diagrama de blocos do sistema da câmera de fundo está mostrado na Fig. 5.31(b) para um dos eixos do movimento da câmera de fundo. A função de transferência a malha fechada é

$$T(s) = \frac{K_a K_m \omega_0^2}{s^3 + 2\zeta\omega_0 s^2 + \omega_0^2 s + K_a K_m \omega_0^2}. \quad (5.48)$$



**Fig. 5.31** A câmera de primeiro plano, que tanto pode ser uma câmera de filme ou de vídeo, é vinculada ao palco do ciclorama azul. A instalação eletrônica servocontrolada permite associar as duas câmaras por meio de dispositivos eletrônicos servoassistidos. A câmera de fundo enquadra o cenário miniatura com uma lente periscópica e reproduz instantaneamente todos os movimentos da câmera de fundo na escala do cenário miniatura. A instalação de controle de vídeo permite que a imagem composta seja monitorada e gravada ao vivo. Parte (a) reimpressa com permissão a partir da *Electronic Design* 24, 11, May 24, 1976. Direitos autorais © Hayden Publishing Co., Inc., 1976.)

A forma padrão de um sistema de terceira ordem dada pela Tabela 5.6 requer que

$$2\zeta\omega_0 = 1,75\omega_n, \quad \omega_0^2 = 2,15\omega_n^2, \quad K_a K_m \omega_0^2 = \omega_n^3.$$

Examinando a Fig. 5.30(c) para  $n = 3$ , estima-se que o tempo de assentamento seja de aproximadamente 14 segundos (tempo normalizado). Então estima-se

$$\omega_n T_s = 8.$$

Como se quer uma resposta rápida, será selecionado um valor elevado para  $\omega_n$  para que o tempo de assentamento seja menor que 1 segundo. Assim,  $\omega_n$  será fixado em 10 rad/s. Então, para um sistema ITAE é necessário que os parâmetros da dinâmica da câmara sejam

$$\omega_0 = 14,67 \text{ rad/s}$$

e

$$\zeta = 0,597.$$

É necessário que o produto dos ganhos do amplificador e do motor seja

$$K_a K_m = \frac{\omega_n^3}{\omega_0^2} = \frac{\omega_n^3}{2,15\omega_n^2} = \frac{\omega_n}{2,15} = 4,65.$$

Então, a função de transferência a malha fechada é

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{1000}{s^3 + 17,5s^2 + 215s + 1000} \\ &= \frac{1000}{(s + 7,08)(s + 5,21 + j10,68)(s + 5,21 - j10,68)}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Os locais das raízes a malha fechada ditados pelo sistema ITAE são mostrados na Fig. 5.32. A relação de amortecimento das raízes complexas é  $\zeta = 0,44$ . Porém, as raízes complexas não são dominantes. A resposta real para uma entrada em degrau usando uma simulação de computador mostrou que a ultrapassagem é de somente 2% e o tempo de assentamento dentro de 2% do valor final é igual a 0,75 segundo.

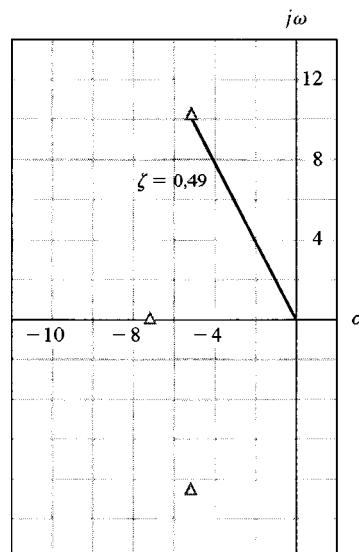


Fig. 5.32 As raízes a malha fechada de um sistema ITAE mínimo.

**TABELA 5.7 Os Coeficientes Ótimos de  $T(s)$  Baseados no Critério ITAE para uma Entrada em Rampa**

---

$s^2 + 3,2\omega_n s + \omega_n^2$	
$s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 3,25\omega_n^2 s + \omega_n^3$	
$s^4 + 2,41\omega_n s^3 + 4,93\omega_n^2 s^2 + 5,14\omega_n^3 s + \omega_n^4$	
$s^5 + 2,19\omega_n s^4 + 6,50\omega_n^2 s^3 + 6,30\omega_n^3 s^2 + 5,24\omega_n^4 s + \omega_n^5$	

---

Para uma entrada em rampa, os coeficientes foram determinados para minimizar o critério ITAE para a função de transferência geral a malha fechada [6]:

$$T(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}. \quad (5.50)$$

Esta função de transferência apresenta um erro de estado estacionário igual a zero para uma rampa de entrada. Os coeficientes ótimos para esta função de transferência são dados na Tabela 5.7. A função de transferência, Eq. (5.50), implica que o processo  $G(s)$  tenha duas ou mais integrações puras, como é necessário para se ter erro de estado estacionário nulo. ■

## 5.10 A SIMPLIFICAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

É bastante útil estudar sistemas complexos com funções de transferência de ordem elevada usando modelos aproximados de ordem mais baixa. Por exemplo, um sistema de quarta ordem poderia ser aproximado por um sistema de segunda ordem conduzindo ao uso dos índices de desempenho na Fig. 5.8. Dispõe-se de vários métodos para reduzir a ordem da função de transferência de sistemas.

Uma maneira relativamente simples para eliminar um determinado pólo sem importância é observar o pólo que tenha parte real negativa muito maior que a dos outros pólos. Espera-se assim que esse pólo afete a resposta transitória de modo insignificante.

Por exemplo, se se tiver um processo onde

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+30)},$$

é possível, com toda a certeza, desconsiderar o impacto do pólo em  $s = -30$ . Contudo, deve-se observar a resposta em estado estacionário do sistema e, desta maneira, reduzir o sistema para

$$G(s) = \frac{(K/30)}{s(s+2)}.$$

Uma abordagem mais sofisticada tenta casar, tão perto quanto possível, a resposta de freqüência da função de transferência de ordem reduzida com a da função de transferência original. Embora os métodos de resposta da freqüência sejam descritos no Cap. 8, o método de aproximação associado depende de manipulações algébricas e é apresentado aqui. Será considerado que um sistema de ordem elevada possa ser descrito pela função de transferência

$$H(s) = K \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + 1}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + 1}, \quad (5.51)$$

na qual os pólos estão no semiplano  $s$  da esquerda, e  $m \leq n$ . A função de transferência aproximada de ordem mais baixa é

$$L(s) = K \frac{c_p s^p + \dots + c_1 s + 1}{d_g s^g + \dots + d_1 s + 1}, \quad (5.52)$$

onde  $p \leq g < n$ . Observe-se que a constante de ganho  $K$  é a mesma para os sistemas original e aproximado, de modo a assegurar a mesma resposta de estado estacionário. O método esboçado no Exemplo 5.9 é baseado na seleção  $c_i$  e  $d_i$  de maneira que  $L(s)$  tenha uma resposta de freqüência (veja Cap. 8) muito próxima à de  $H(s)$ . Isto é equivalente a estabelecer que se tenha  $H(j\omega)/L(j\omega)$  se desviando o mínimo da unidade para várias freqüências. Os coeficientes  $c$  e  $d$  são obtidos utilizando-se a seguinte equação:

$$M^{(k)}(s) = \frac{d^k}{ds^k} M(s), \quad (5.53)$$

e

$$\Delta^{(k)}(s) = \frac{d^k}{ds^k} \Delta(s), \quad (5.54)$$

onde  $M(s)$  e  $\Delta(s)$  são os polinômios do numerador e do denominador de  $H(s)/L(s)$ , respectivamente. Define-se também

$$M_{2q} = \sum_{k=0}^{2q} \frac{(-1)^{k+q} M^{(k)}(0) M^{(2q-k)}(0)}{k!(2q-k)!}, \quad q = 0, 1, 2 \dots \quad (5.55)$$

e uma equação completamente idêntica de  $\Delta_{2q}$ . As soluções para os coeficientes  $c$  e  $d$  são obtidas equacionando-se

$$M_{2q} = \Delta_{2q} \quad (5.56)$$

para  $q = 1, 2, \dots$  até o número requerido para resolver os coeficientes desconhecidos.

Considere-se um exemplo para esclarecer o uso destas equações.

**EXEMPLO 5.9****Um modelo simplificado**

Considere-se o sistema de terceira ordem

$$H(s) = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{1}{1 + (\frac{11}{6})s + s^2 + (\frac{1}{6})s^3}. \quad (5.57)$$

Usando o modelo de segunda ordem

$$L(s) = \frac{1}{1 + d_1s + d_2s^2}, \quad (5.58)$$

$M(s) = 1 + d_1s + d_2s^2$ , e  $\Delta(s) = 1 + (\frac{11}{6})s + s^2 + (\frac{1}{6})s^3$ . Então

$$M^0(s) = 1 + d_1s + d_2s^2, \quad (5.59)$$

e  $M^0(0) = 1$ . De modo semelhante, tem-se

$$M^1 = \frac{d}{ds}(1 + d_1s + d_2s^2) = d_1 + 2d_2s. \quad (5.60)$$

Portanto,  $M^1(0) = d_1$ . Prosseguindo este processo, encontra-se:

$$\begin{aligned} M^0(0) &= 1 & \Delta^0(0) &= 1, \\ M^1(0) &= d_1 & \Delta^1(0) &= \frac{11}{6}, \\ M^2(0) &= 2d_2 & \Delta^2(0) &= 2, \\ M^3(0) &= 0 & \Delta^3(0) &= 1. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Iguala-se agora  $M_{2q} = \Delta_{2q}$  para  $q = 1$  e  $2$ . Encontra-se para  $q = 1$ :

$$\begin{aligned} M_2 &= (-1) \frac{M^0(0)M^2(0)}{2} + \frac{M^1(0)M^1(0)}{1} + (-1) \frac{M^2(0)M^0(0)}{2} \\ &= -d_2 + d_1^2 - d_2 = -2d_2 + d_1^2. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Como a equação para  $\Delta_2$  é semelhante, tem-se:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \frac{\Delta^0(0)\Delta^2(0)}{2} + \frac{\Delta^1(0)\Delta^1(0)}{1} + (-1) \frac{\Delta^2(0)\Delta^0(0)}{2} \\ &= -1 + \frac{121}{36} - 1 = \frac{49}{36}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Segue-se da Eq. (5.56) com  $q = 1$  que  $M_2 = \Delta_2$ , portanto

$$-2d_2 + d_1^2 = \frac{49}{36}. \quad (5.64)$$

Concluindo o processo para  $M_4 = \Delta_4$  obtém-se

$$d_2^2 = \frac{1}{18}. \quad (5.65)$$

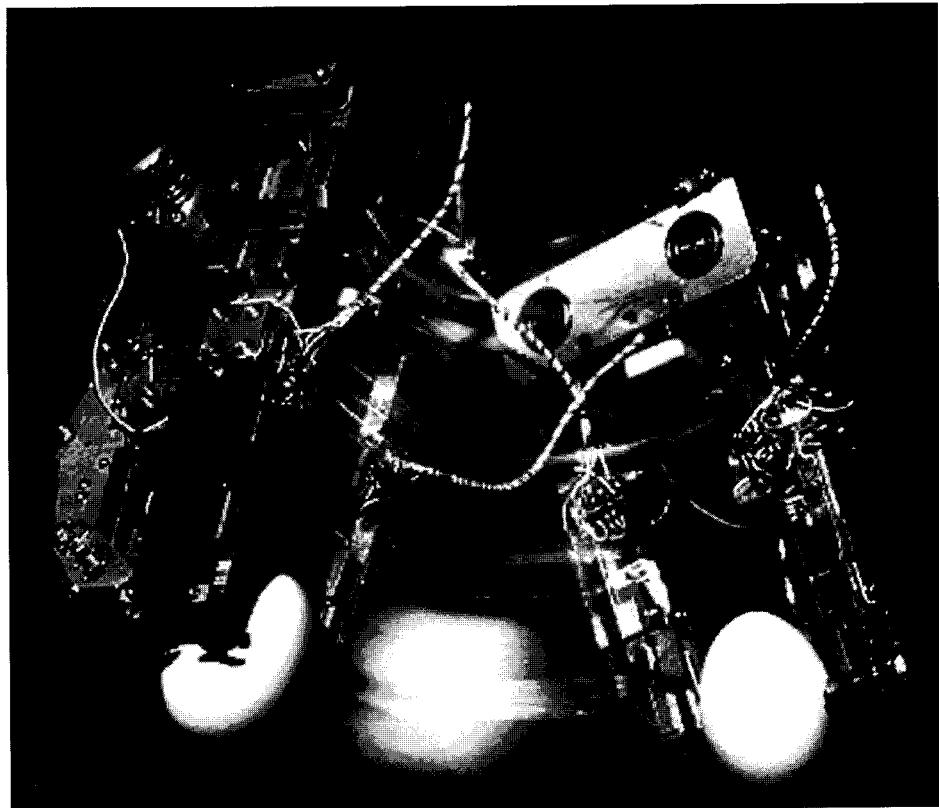
Solucionando as Eqs. (5.64) e (5.65) produzem-se  $d_1 = 1,615$  e  $d_2 = 0,625$ . (Os outros conjuntos de soluções são rejeitados porque conduzem a pólos instáveis.) A função de transferência do sistema de ordem mais baixa é

$$L(s) = \frac{1}{1 + 1,615s + 0,625s^2} = \frac{1,60}{s^2 + 2,584s + 1,60}. \quad (5.66)$$

É interessante ver que os pólos de  $H(s)$  são  $s = -1, -2, -3$ , enquanto os pólos de  $L(s)$  são  $s = -1,029$  e  $-1,555$ . Como o modelo de ordem mais baixa tem dois pólos, pode-se estimar que seria uma resposta ao degrau ligeiramente superamortecida com um tempo de assentamento, no interior da faixa de 2% do valor final, de aproximadamente 3 segundos. ■

Às vezes, é desejável reter os pólos dominantes do sistema original,  $H(s)$ , no modelo de ordem mais baixa. Isto pode ser obtido especificando-se o denominador de  $L(s)$  para ser os pólos dominantes de  $H(s)$  e permitindo que o numerador de  $L(s)$  seja submetido à aproximação. Um sistema complexo como a mão de um robô mostrada na Fig. 5.33 é um exemplo de um sistema de ordem elevada que pode ser representado convenientemente por um modelo de ordem baixa.

Um outro método recente e útil para reduzir a ordem é o método de aproximação de Routh baseado na idéia de truncar a tabela de Routh usada para determinar estabilidade. A aproximação de Routh pode ser calculada por um algoritmo recursivo finito que é adequado para programação em um computador digital [22].



**Fig. 5.33** Uma mão robótica de alto desempenho dotada de tato delicado ilustra o desafio dos sistemas de controle modernos de alto desempenho. (Foto por cortesia da Hitachi America Ltd.)

## 5.11 EXEMPLO DE PROJETO: CONTROLE DE POSICIONAMENTO DO TELESCÓPIO HUBBLE

O telescópio espacial Hubble em órbita é o mais complexo e mais caro instrumento científico já construído. Lançado a 380 milhas acima do globo terrestre em 24 de abril de 1990, o telescópio, empurrou a tecnologia para novos limites. O espelho do telescópio, com 2,4 metros, possui a superfície mais lisa que a de qualquer espelho construído até então, e seu sistema de posicionamento pode centrá-lo sobre uma moeda de dez centavos a uma distância de 400 milhas [9, 10, 21]. O espelho possuía uma aberração esférica que foi largamente corrigida durante uma missão no espaço em dezembro de 1993 [24]. Considere-se o modelo de sistema de posicionamento do telescópio mostrado na Fig. 5.34.

O objetivo do projeto é escolher  $K_1$  e  $K$  de modo que (1) a ultrapassagem percentual da saída a um comando em degrau,  $r(t)$ , seja menor ou igual a 10%, (2) o erro de estado estacionário a um comando de rampa seja minimizado, e (3) o efeito de uma perturbação em degrau seja reduzido. Como o sistema tem uma malha interna, a redução de diagrama de blocos pode ser usada para obter o sistema simplificado da Fig. 5.34(b).

A fórmula de Mason para o ganho de diagrama de fluxo de sinal pode ser usada para obter a saída devida às duas entradas do sistema da Fig. 5.34(b):

$$Y(s) = T(s)R(s) + [T(s)/K]D(s), \quad (5.67)$$

onde

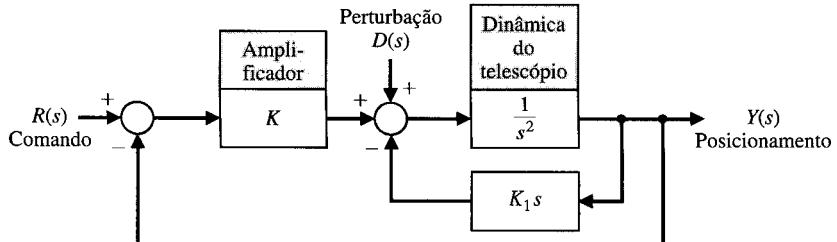
$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{KG(s)}{1 + L(s)}.$$

O erro  $E(s)$  é

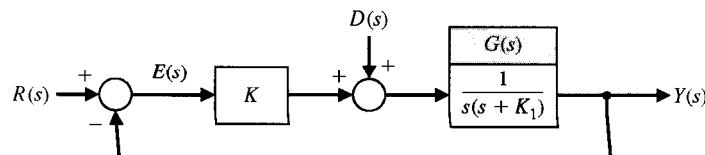
$$E(s) = \frac{1}{1 + L(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1 + L(s)}D(s). \quad (5.68)$$

Primeiro, seja selecionar  $K$  e  $K_1$  para alcançar o requisito de ultrapassagem percentual exigida para uma entrada em degrau,  $R(s) = A/s$ . Fazendo  $D(s) = 0$ , tem-se

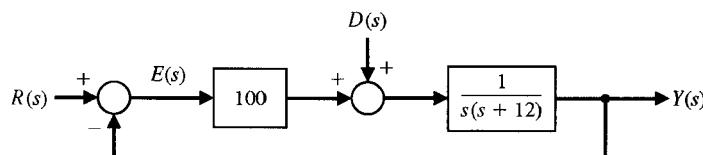
$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}R(s) \\ &= \frac{K}{s(s + K_1) + K} \left( \frac{A}{s} \right) = \frac{K}{s^2 + K_1s + K} \left( \frac{A}{s} \right). \end{aligned} \quad (5.69)$$



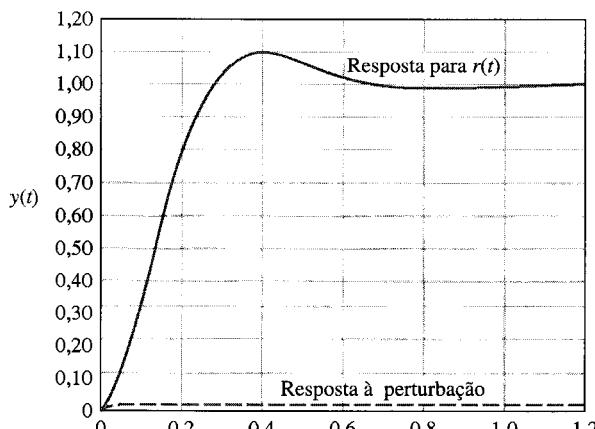
(a)



(b)



(c)



(d)

**Fig. 5.34** (a) Sistema de posicionamento do telescópio Hubble, (b) diagrama de blocos reduzido, (c) projeto de sistema, e (d) resposta do sistema a um comando de entrada em degrau e a uma perturbação em degrau.

Para estabelecer uma ultrapassagem percentual menor que 10%, seleciona-se  $\zeta = 0,6$  examinando a Fig. 5.8 ou usando a Eq. (5.16) para determinar que a ultrapassagem será de 9,5% para  $\zeta = 0,6$ . Em seguida examina-se o erro de estado estacionário para uma rampa,  $r(t) = Bt$ ,  $t \geq 0$ , usando (Eq. 5.28):

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{B}{sKG(s)} \right\} = \frac{B}{(K/K_1)}. \quad (5.70)$$

O erro de estado estacionário devido uma perturbação em degrau unitário é igual a  $-1/K$ . (Você pode mostrar isto?) A resposta transitória do erro devido a uma perturbação em degrau pode ser reduzida aumentando  $K$  (ver Eq. 5.68). Em resumo, busca-se um grande valor de  $K$  e um grande valor

de  $(K/K_1)$  para obter um erro de estado estacionário pequeno para uma entrada em rampa (ver a Eq. 5.70). Entretanto, precisa-se de  $\zeta = 0,6$  para limitar a ultrapassagem.

Para o projeto em pauta, precisa-se selecionar  $K$ . A equação característica do sistema é (com  $\zeta = 0,6$ )

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = (s^2 + 2(0,6)\omega_n s + K). \quad (5.71)$$

Portanto,  $\omega_n = \sqrt{K}$ , e o segundo termo do denominador da Eq. (5.69) requer  $K_1 = 2(0,6)\omega_n$ . Então,  $K_1 = 1,2\sqrt{K}$ , ou a relação  $K/K_1$  se torna

$$\frac{K}{K_1} = \frac{K}{1,2\sqrt{K}} = \frac{\sqrt{K}}{1,2}.$$

Selecionando  $K = 25$ , tem-se  $K_1 = 6$  e  $K/K_1 = 4,17$ . Se for selecionado  $K = 100$ , tem-se  $K_1 = 12$  e  $K/K_1 = 8,33$ . Realisticamente deve-se limitar  $K$  para que a operação do sistema permaneça linear. Usando-se  $K = 100$ , obtém-se o sistema mostrado na Fig. 5.34(c). As respostas do sistema a uma entrada em degrau unitário e a uma perturbação em degrau unitário estão mostradas na Fig. 5.34(d). Note-se como o efeito da perturbação é relativamente insignificante.

Finalmente, nota-se que o erro de estado estacionário para uma rampa de entrada (ver Eq. 5.70) é

$$e_{ss} = \frac{B}{8,33} = 0,12B.$$

Este projeto, usando  $K = 100$ , é um sistema excelente.

## 5.12 DESEMPENHO DO SISTEMA USANDO O MATLAB

Nesta seção serão investigadas as especificações de desempenho no domínio de tempo fornecidas em termos de resposta transitória a um dado sinal de entrada e os erros de acompanhamento resultantes em estado estacionário. Conclui-se com uma discussão da simplificação de sistemas lineares. As funções do MATLAB introduzidas nesta seção são `impulse` e `lsim`. Estas funções são usadas para simular sistemas lineares.

**Especificações no Domínio do Tempo.** As especificações de desempenho no domínio do tempo são fornecidas geralmente em termos da resposta transitória de um sistema a um dado sinal de entrada. Como os sinais de entrada são geralmente desconhecidos, é usado um sinal de teste padronizado como entrada. Considere-se o sistema de segunda ordem mostrado na Fig. 5.35. A saída a malha fechada é

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s). \quad (5.72)$$

Já foi discutido o uso da função `step` para calcular a resposta do sistema ao degrau. Agora será considerado outro sinal de teste importante: o impulso. A resposta ao impulso é a derivada em relação ao tempo da resposta ao degrau. Calcula-se a resposta ao impulso com a função `impulse` mostrada na Fig. 5.36.

Pode-se obter um gráfico semelhante ao da Fig. 5.5(a) com a função `step`, como está mostrado na Fig. 5.37. Usando a função `impulse`, pode-se obter um gráfico semelhante ao da Fig. 5.6. A resposta de um sistema de segunda ordem para uma função impulso de entrada é mostrada na Fig. 5.38. No script, fez-se  $\omega_n = 1$ , que é equivalente a calcular a resposta ao degrau *versus*  $\omega_n t$ . Isto fornece um gráfico mais geral para qualquer  $\omega_n > 0$ .

Em muitos casos, pode ser necessário simular a resposta do sistema a uma entrada arbitrária porém conhecida. Nestes casos, usa-se a função `lsim`. A função `lsim` é mostrada na Fig. 5.39. Um exemplo de uso de `lsim` é dado no Exemplo 5.10.

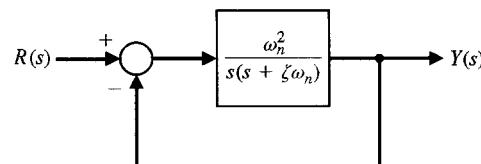


Fig. 5.35 Sistema com retroação de segunda ordem de malha única.

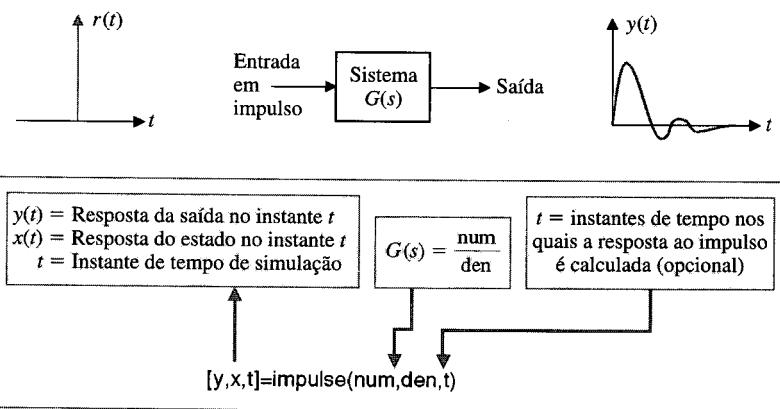
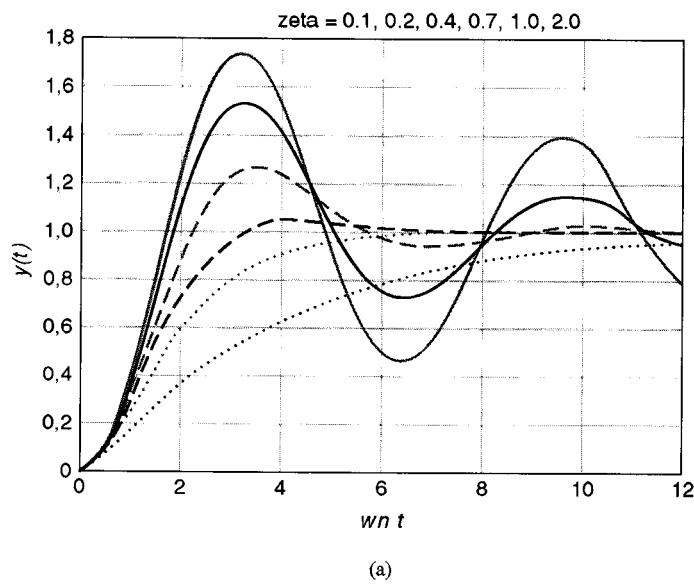


Fig. 5.36 A função impulse.



stepresp.m

```
% Calcula a resposta de um sistema de segunda ordem ao degrau
% Duplica a Figura 5.5(a)
%
t=[0:0.1:12]; num=[1];
zeta1=0.1; den1=[1 2*zeta1 1];
zeta2=0.2; den2=[1 2*zeta2 1];
zeta3=0.4; den3=[1 2*zeta3 1];
zeta4=0.7; den4=[1 2*zeta4 1];
zeta5=1.0; den5=[1 2*zeta5 1];
zeta6=2.0; den6=[1 2*zeta6 1];
%
[y1,x,t]=step(num,den1,t); [y2,x,t]=step(num,den2,t);
[y3,x,t]=step(num,den3,t); [y4,x,t]=step(num,den4,t);
[y5,x,t]=step(num,den5,t); [y6,x,t]=step(num,den6,t);
%
plot(t,y1,t,y2,t,y3,t,y4,t,y5,t,y6)
xlabel('wn t'), ylabel('Y(t)')
title('zeta = 0.1, 0.2, 0.4, 0.7, 1.0, 2.0'), grid
```

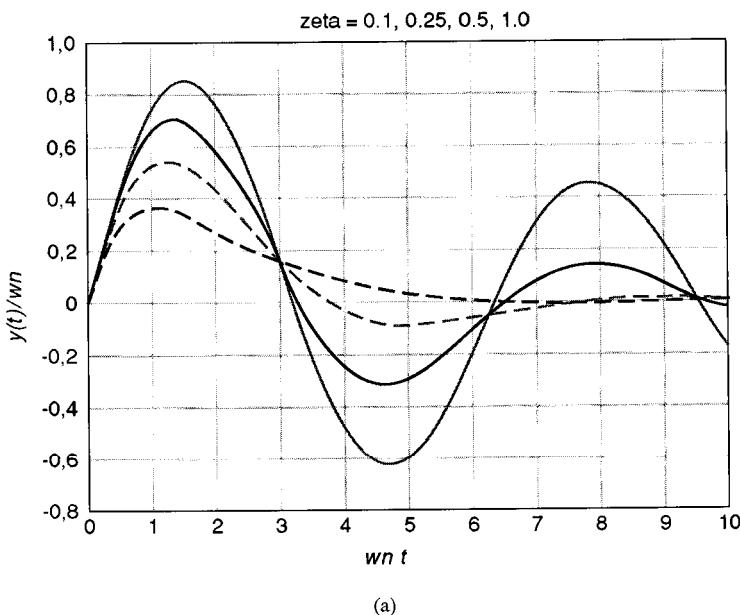
Configura o polinômio do denominador para cada zeta diferente.

Calcula a resposta ao degrau.

Gera gráficos e rótulos.

(b)

Fig. 5.37 (a) Resposta de um sistema de segunda ordem a uma entrada em degrau. (b) Script em MATLAB.



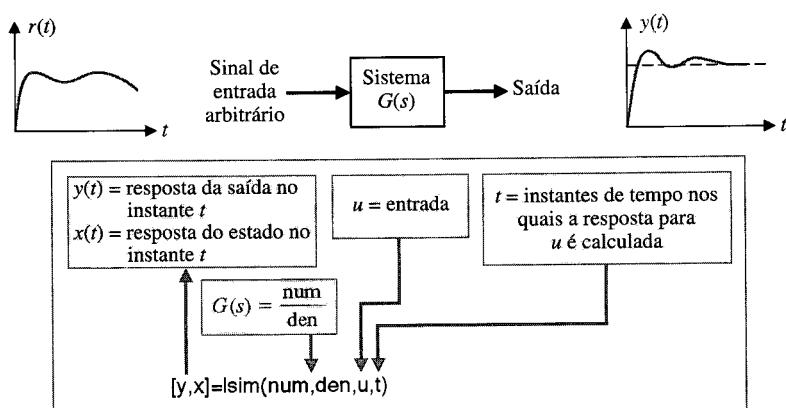
(a)

impresp.m

```
% Calcula a resposta de um sistema de segunda ordem ao impulso
% Duplica a Figura 5.6
%
t=[0:0.1:10]; num=[1];
zeta1=0.1; den1=[1 2*zeta1 1]; % Configura o polinômio do denominador para cada zeta diferente.
zeta2=0.25; den2=[1 2*zeta2 1];
zeta3=0.5; den3=[1 2*zeta3 1];
zeta4=1.0; den4=[1 2*zeta4 1];
%
[y1,x,t]=impulse(num,den1,t); % Calcula a resposta ao impulso.
[y2,x,t]=impulse(num,den2,t);
[y3,x,t]=impulse(num,den3,t);
[y4,x,t]=impulse(num,den4,t);
%
plot(t,y1,t,y2,t,y3,t,y4) % Gera gráficos e rótulos.
xlabel('wn t'), ylabel('y(t)/wn')
title('zeta = 0.1, 0.25, 0.5, 1.0'), grid
```

(b)

**Fig. 5.38** (a) Resposta de um sistema de segunda ordem a uma função de entrada em impulso. (b) Script em MATLAB.



**Fig. 5.39** A função `lsim`.

**EXEMPLO 5.10****Controle de direção de um robô móvel**

O diagrama de blocos para um sistema de controle de direção de um robô móvel é mostrado na Fig. 5.23. Suponha-se que o controlador de direção,  $G_1(s)$ , seja

$$G_1(s) = K_1 + \frac{K_2}{s}.$$

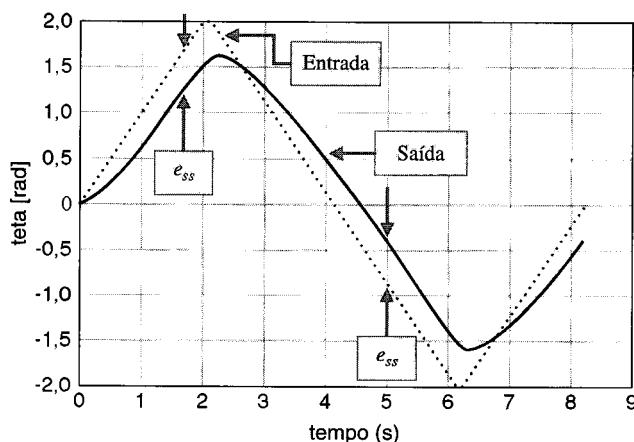
Quando a entrada for uma rampa, o erro de estado estacionário será

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v}, \quad (5.73)$$

onde

$$K_v = K_2 K.$$

O efeito da constante,  $K_2$ , do controlador sobre o erro de estado estacionário é evidente na Eq. (5.73). Sempre que  $K_2$  for grande, o erro de estado estacionário será pequeno.



(a)

mobilerobot.m

```
% Calcula a resposta do Sistema de Controle
% do Robô Móvel a uma onda de entrada triangular
%
numg=[10 20]; deng=[1 10 0]; G G1(s)
[num,den]=cloop(numg, deng);
t=[0:0.1:8.2];
v1=[0:0.1:2]'; v2=[2:-0.1:-2]'; v3=[-2:0.1:0]';
u=[v1;v2;v3];
[y,x]=lsim(num,den,u,t);
plot(t,y,t,u),
xlabel('tempo [s]', ylabel('theta [rad]'), grid
```

(b)

**Fig. 5.40** (a) Resposta transitória do sistema de controle de direção do robô móvel a uma rampa de entrada. (b) Script em MATLAB.

Pode-se simular a resposta do sistema a malha fechada para uma rampa de entrada usando a função `lsim`. Os ganhos do controlador  $K_1$ ,  $K_2$  e do sistema  $K$  podem ser representados simbolicamente no script de modo que diversos valores possam ser selecionados e simulados. Os resultados são mostrados na Fig. 5.40 para  $K_1 = K = 1$ ,  $K_2 = 2$  e  $\tau = 1/10$ . ■

**Simplificação de Sistemas Lineares.** Pode ser possível desenvolver um modelo aproximado de ordem mais baixa que aproxime a resposta de entrada-saída de um modelo de ordem elevada. Um procedimento para aproximar funções de transferência é dado na Seção 5.10. Pode-se usar o MATLAB para comparar o modelo aproximado ao modelo real, como ilustrado no exemplo seguinte.

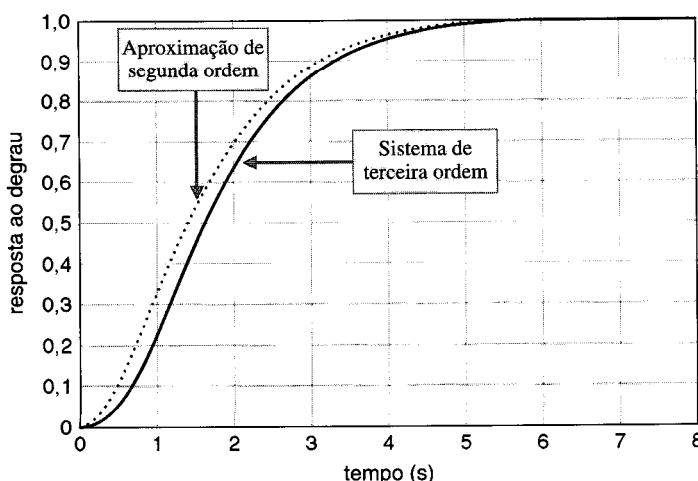
**EXEMPLO 5.11****Um modelo simplificado**

Considere-se um sistema de terceira ordem

$$H(s) = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}.$$

Uma aproximação de segunda ordem (ver Exemplo 5.9) é

$$L(s) = \frac{1,60}{s^2 + 2,584s + 1,60}.$$



(a)

stepcomp.m

```
% Compara a resposta ao degrau da aproximação de segunda ordem
%
num1=[6]; den1=[1 6 11 6];
num2=[1.6]; den2=[1 2.584 1.6];
t=[0:0.1:8];
[y1,x,t]=step(num1,den1,t);
[y2,x,t]=step(num2,den2,t);
plot(t,y1,t,y2), grid
xlabel('tempo [s]'), ylabel('resposta ao degrau')
```

(b)

**Fig. 5.41** (a) Comparação da resposta ao degrau de uma função de transferência aproximada versus a função de transferência real. (b) Script em MATLAB.

Uma comparação de suas respectivas respostas ao degrau é dada na Fig. 5.41. ■

### 5.13 EXEMPLO DE PROJETO SEQÜENCIAL: SISTEMA DE LEITURA DE ACIONADOR DE DISCO



Na Seção 4.10 considerou-se a resposta do sistema de controle a malha fechada da cabeça de leitura. Considere-se mais ainda o sistema mostrado na Fig. 4.34. Nesta seção será considerado o procedimento de projeto repetido como Fig. 5.42. Será especificado o desempenho desejado para o sistema como requerido no Passo 3. Então se tentará ajustar o ganho  $K_a$  do amplificador para obter o melhor desempenho possível.

O objetivo é obter a resposta mais rápida a uma entrada  $r(t)$  em degrau, ao mesmo tempo que (1) se limita a ultrapassagem e a natureza oscilatória da resposta e (2) se reduz o efeito de uma perturbação sobre a posição de saída da cabeça de leitura. As especificações estão resumidas na Tabela 5.8.

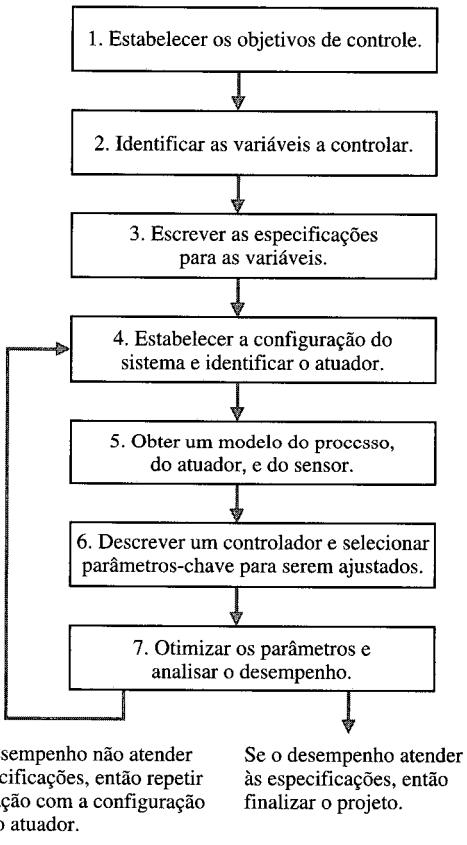


Fig. 5.42 O procedimento de projeto de sistemas de controle.

**TABELA 5.8 Especificações para a Resposta Transitória**

Medida de Desempenho	Valor Desejado
Ultrapassagem percentual	Menor que 5%
Tempo de assentamento	Menor que 250 ms
Valor máximo da resposta a uma perturbação em degrau unitário	Menor que $5 \times 10^{-3}$

Considere-se o modelo de segunda ordem do motor e do braço, no qual se despreza o efeito da indutância da bobina. Tem-se então o sistema a malha fechada mostrado na Fig. 5.43. Então, a saída (ver Seção 5.3) quando  $D(s) = 0$  é

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{5K_a}{s(s + 20) + 5K_a} R(s) \\
 &= \frac{5K_a}{s^2 + 20s + 5K_a} R(s) \\
 &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s).
 \end{aligned} \tag{5.74}$$

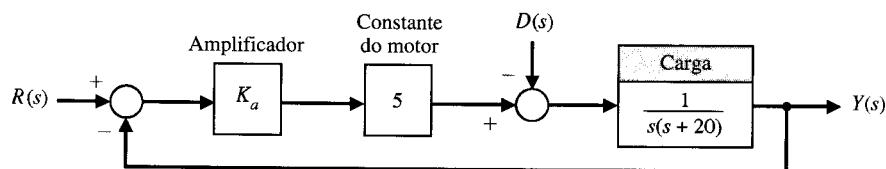
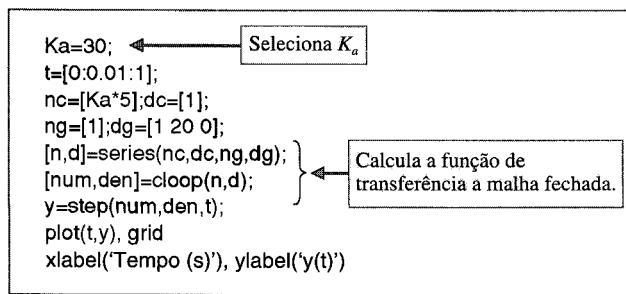
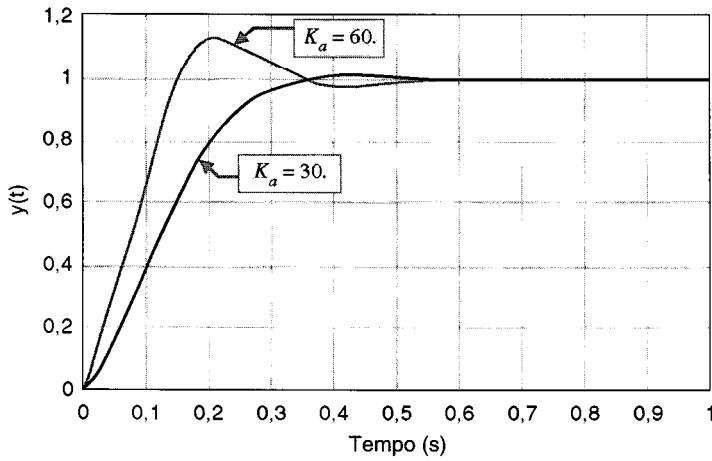


Fig. 5.43 Modelo de sistema de controle com um modelo de segunda ordem do motor e carga.



(a)



(b)

Fig. 5.44 Resposta do sistema a uma entrada em degrau unitário,  $r(t) = 1$ ,  $t > 0$ .  
 a) Script em MATLAB. (b)  
 Resposta para  $K_a = 30$  e  $60$ .

Fig.  
 siste  
 em c  
 s. (a  
 Res|

TABELA 5.9 Resposta de um Modelo de Segunda Ordem a uma Entrada em Degrau

$\zeta_a$	20	30	40	60	80
Ultrapassagem percentual	0	1,2%	4,3%	10,8%	16,3%
Tempo de assentamento (s)	0,55	0,40	0,40	0,40	0,40
Relação de amortecimento	1	0,82	0,707	0,58	0,50
Valor máximo da resposta $y(t)$ a uma perturbação em degrau unitário	$-10 \times 10^{-3}$	$-6,6 \times 10^{-3}$	$-5,2 \times 10^{-3}$	$-3,7 \times 10^{-3}$	$-2,9 \times 10^{-3}$

Portanto  $\omega_n^2 = 5K_a$ , e  $2\zeta\omega_n = 20$ . Determina-se então a resposta do sistema usando o MATLAB, como mostrado na Fig. 5.44. A Tabela 5.9 dá as medidas do desempenho para valores selecionados de  $K_a$ .

Quando  $K_a$  for aumentado para 60, o efeito de uma perturbação é reduzido por um fator de 2. Pode-se mostrar isto traçando o gráfico da saída  $y(t)$  como resultado de uma perturbação em degrau unitário, como mostrado na Fig. 5.45. Claramente, se se deseja atingir os objetivos com este sistema é preciso selecionar um valor de compromisso para o ganho. Neste caso, seleciona-se  $K_a = 40$  como a melhor solução de compromisso. No entanto, este compromisso não alcança todas as especificações. No próximo capítulo será reconsiderado o procedimento de projeto da Fig. 5.42 e troca da configuração do sistema de controle pelo retorno ao Passo 4 do procedimento de projeto.

## 5.14 SUMÁRIO

Neste capítulo considerou-se a definição e a medida do desempenho de um sistema de controle com retroação. O conceito de uma medida ou índice de desempenho foi discutido e a utilidade dos sinais de teste padrão foi resumida. Em seguida, foram delineadas diversas medidas de desempenho para sinais de teste padronizados como entrada. Por exemplo, foram considerados a ultrapass-

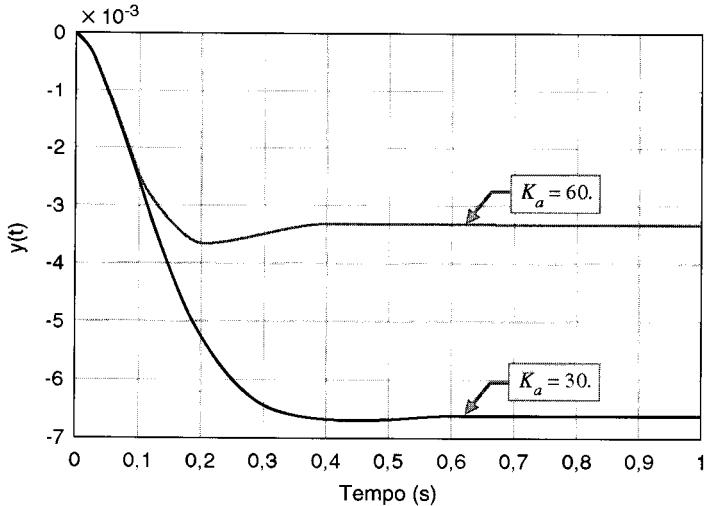
Fig.  
 siste  
 ram|  
 2 e f  
 1)(s  
 esta  
 med  
 valo  
 torna

```

Ka=30; Seleciona  $K_a$ .
t=[0:0.01:1];
nc=[Ka*5];dc=[1];
ng=[1];dg=[1 20 0];
[num,den]=feedback/ng,dg,nc,dc;
num=-num;
y=step(num,den,t);
plot(t,y), grid
xlabel('Tempo (s)'), ylabel('y(t)')

```

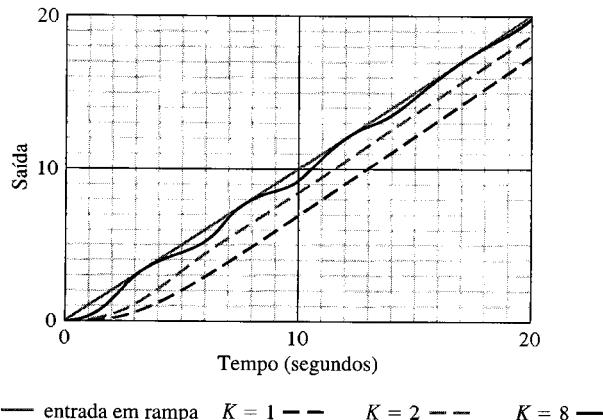
(a)



(b)

**Fig. 5.45** Resposta do sistema a uma perturbação em degrau unitário,  $D(s) = 1/s$ . (a) Script em MATLAB. Resposta para  $K_a = 30$  e  $60$ .

sagem, o tempo de pico e o tempo de assentamento da resposta do sistema sob teste para um sinal de entrada em degrau. Foi assinalado o fato de que freqüentemente as especificações da resposta desejada são contraditórias, e foi proposto o conceito de compromisso de projeto. Foi discutida a relação entre a localização no plano  $s$  das raízes da função de transferência do sistema e a resposta do sistema. Uma das medidas mais importantes do desempenho do sistema é o erro de estado estacionário para sinais de entrada de teste específicos. Assim, foi desenvolvida a relação do erro de estado estacionário em termos de parâmetros do sistema utilizando-se o teorema de valor final. A eficácia de um sistema de controle com retroação é demonstrada na Fig. 5.46. Finalmente foi resumida a utilidade do índice do desempenho integral, e foram completados alguns exemplos de projeto que minimizaram um índice de desempenho de sistema. Assim, o interesse esteve voltado para a definição e a utilidade de medidas quantitativas do desempenho de sistemas de controle com retroação.



**Fig. 5.46** A resposta de um sistema com retroação a uma rampa de entrada com  $K = 1, 2$  e  $8$  quando  $G(s) = K/[s(s + 1)(s + 3)]$ . O erro de estado estacionário é reduzido à medida que se aumenta o valor de  $K$ , mas a resposta se torna oscilatória para  $K = 8$ .

**EXERCÍCIOS**

**E5.1** Um sistema de controle de um motor para um acionador de disco de computador deve reduzir o efeito de perturbações e de variações de parâmetro, bem como reduzir o erro de estado estacionário. Deseja-se não ter erro de estado estacionário para o sistema de controle da posição da cabeça, que é da forma mostrada na Fig. 5.18, onde  $H(s) = 1$ . (a) Qual o tipo de sistema requerido? (Quantas integrações?) (b) Se a entrada for um sinal em rampa, então, para se obter um erro de estado estacionário zero, que tipo de sistema é exigido?

**E5.2** O motor, a carroceria e os pneus de um carro de corrida afetam a aceleração e a velocidade possíveis de serem atingidas [11]. O controle de velocidade de um carro é representado pelo modelo mostrado na Fig. E5.2. (a) Calcular o erro de estado estacionário do carro para um comando em degrau na velocidade. (b) Calcular a ultrapassagem da velocidade a um comando em degrau.

**Resposta:** (a)  $e_{ss} = A/11$ ; (b) U.P. = 20,8%.

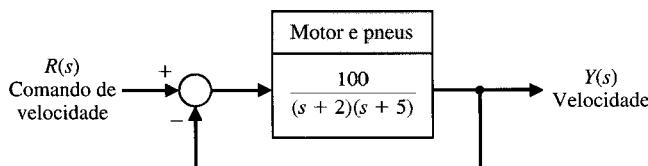
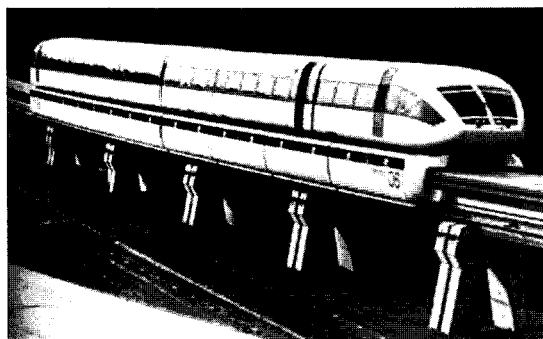


Fig. E5.2 Controle de velocidade de carro de corrida.

**E5.3** Durante anos, a Amtrak lutou para atrair passageiros para suas rotas no Meio-oeste americano, usando tecnologia desenvolvida décadas antes. Durante o mesmo tempo, as estradas de ferro estrangeiras foram desenvolvendo novos sistemas de trilhos para passageiros que poderiam competir de forma lucrativa com a viagem aérea. Dois destes sistemas, o TGV francês e o Shinkansen japonês, alcançam a velocidade de 160 mph [20]. O Transrapid-06, um trem experimental americano com levitação magnética, é mostrado na Fig. E5.3(a).

O uso de levitação magnética e de propulsão eletromagnética para propiciar um movimento do veículo sem contacto faz a tecnologia do Transrapid-06 radicalmente diferente da existente nas linhas de metrô. A parte inferior das laterais do vagão TR-06



(a)

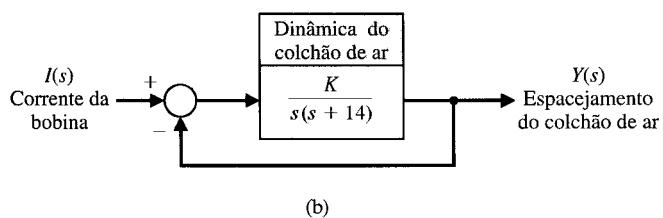


Fig. E5.3 Controle de trem com levitação eletromagnética.

(onde existiriam as rodas do vagão nos carros convencionais) envolve uma guia. Ímãs na parte inferior da guia atraem eletroímãs da "envoltória", puxando-a para cima na direção da guia. Isto suspende o veículo cerca de um centímetro acima da guia. (Ver Problema 2.27.)

O controle da levitação é representado pela Fig. E5.3(b). (a) Usando a Tabela 5.6 para uma entrada em degrau, selecionar  $K$  para que o sistema forneça uma resposta ITAE ótima. (b) Usando a Fig. 5.8, determinar a ultrapassagem esperada para uma entrada em degrau de  $I(s)$ .

**Respostas:**  $K = 100$ ; 4,6%

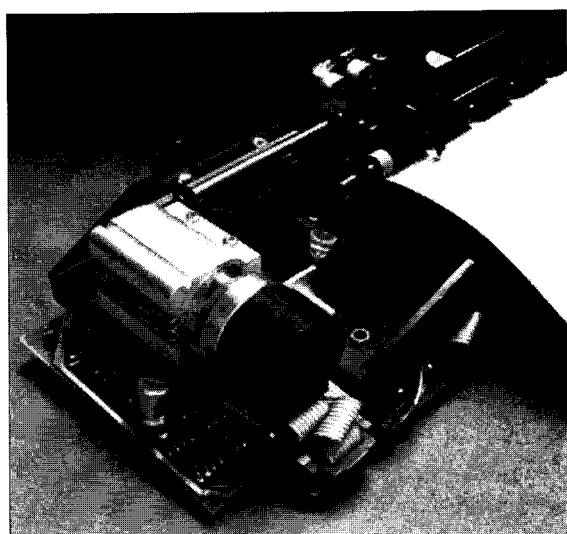
**E5.4** Um sistema com retroação unitária negativa possui um processo

$$G(s) = \frac{2(s + 8)}{s(s + 4)}.$$

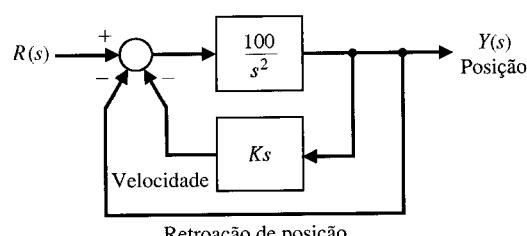
(a) Determinar a função de transferência de malha fechada  $T(s) = Y(s)/R(s)$ . (b) Encontrar a resposta no domínio do tempo  $y(t)$  para uma entrada em degrau  $r(t) = A$  para  $t > 0$ . (c) Usando a Fig. 5.13(a), determinar a ultrapassagem da resposta. (d) Usando o teorema do valor final, determinar o valor de estado estacionário de  $y(t)$ .

**Resposta:** (b)  $y(t) = 1 - 1,07e^{-3t} \operatorname{sen}(\sqrt{7}t + 1,2)$

**E5.5** Uma plotadora de baixa inércia é mostrada na Fig. E5.5(a). Este sistema pode ser representado pelo diagrama de blocos mostrado na Fig. E5.5(b) [18]. (a) Calcular o erro de estado estacionário para uma entrada em rampa. (b) Selecionar um valor de  $K$  que resultará em ultrapassagem zero a uma entrada em degrau mas uma resposta tão rápida quanto permitida.



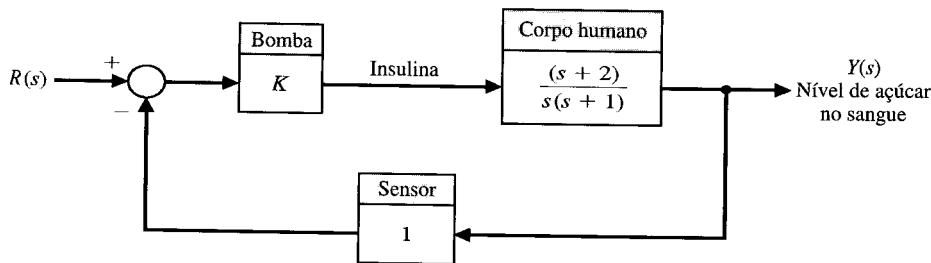
(a)



Retroação de posição

(b)

Fig. E5.5 (a) A plotadora x-y da Hewlett-Packard. (Cortesia da Hewlett-Packard Co.) (b) Diagrama de blocos da plotadora.



**Fig. E5.6** Controle de nível de açúcar no sangue.

Plotar os pólos e zeros deste sistema e discutir a dominância de pólos complexos. Qual a ultrapassagem esperada para uma entrada em degrau?

- E5.6** O controle efetivo de injeções de insulina pode resultar em vidas melhores para as pessoas diabéticas. A injeção de insulina controlada automaticamente por meio de uma bomba e de um sensor que mede açúcar no sangue pode ser muito eficaz. Uma bomba e um sistema de injeção possuem um controle com retroação como está mostrado na Fig. E5.6. Calcular o valor adequado do ganho  $K$  para que a ultrapassagem da resposta a um degrau devido à injeção da droga seja de aproximadamente 7%.  $R(s)$  é o nível desejado de açúcar no sangue e  $Y(s)$  é o nível real. (Sugestão: Use Fig. 5.13a.)

**Resposta:**  $K = 1,67$

- E5.7** Um sistema de controle para posição da cabeça do acionador de disco flexível tem a função de transferência a malha fechada

$$T(s) = \frac{0,313(s + 0,8)}{(s + 0,25)(s^2 + 0,3s + 1)}.$$

Plotar os pólos e zeros deste sistema e discutir a dominância de pólos complexos. Qual a ultrapassagem esperada para uma entrada em degrau?

- E5.8** Um sistema de controle com retroação unitária negativa tem o processo

$$G(s) = \frac{K}{s(s + \sqrt{2K})}.$$

(a) Determinar a ultrapassagem percentual e o tempo de assentamento (usando um critério de assentamento de 2%) devido a uma entrada em degrau unitário.

(b) Para qual faixa de valores de  $K$  o tempo de assentamento será inferior a 1 segundo?

- E5.9** Um sistema de controle de segunda ordem tem a função de transferência a malha fechada  $T(s) = Y(s)/R(s)$ . As especificações do sistema para uma entrada em degrau são as seguintes:

(1) Percentual de ultrapassagem  $\leq 5\%$ .

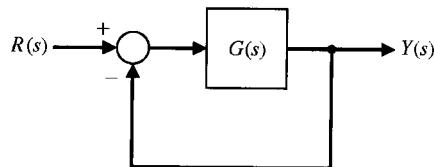
(2) Tempo de assentamento  $< 4$  segundos.

(3) Tempo de pico  $T_p < 1$  segundo.

Mostrar a área permitível para os pólos de  $T(s)$  para se obter a resposta desejada. Usar o critério de assentamento de 2% para determinar o tempo de assentamento.

- E5.10** Um sistema com retroação unitária está mostrado na Fig. E5.10. Determinar o erro de estado estacionário para uma entrada em degrau e em rampa quando

$$G(s) = \frac{10(s + 4)}{s(s + 1)(s + 2)(s + 5)}.$$



**Fig. E5.10** Sistema com retroação unitária.

- E5.11** Todo mundo está familiarizado com a roda gigante de Ferris presente em feiras e carnavais. George Ferris, nascido em Galesburg, Illinois, em 1859, mudou-se mais tarde para Nevada e então se graduou no Instituto Politécnico de Rensselaer em 1881. Por volta de 1891, Ferris teve experiência considerável com ferro, aço e construção de pontes. Ele imaginou e construiu sua famosa roda gigante para a Exposição de Colúmbia de 1893 em Chicago [9]. Para evitar perturbar os passageiros, considere-se o requisito de que a velocidade em estado estacionário seja controlada com uma variação de 5% em torno da velocidade desejada para o sistema mostrado na Fig. E5.11.

(a) Determinar o ganho  $K$  requerido para atender a especificação de estado estacionário.

(b) Para o ganho da parte (a), determinar e plotar o erro  $e(t)$  para uma perturbação  $D(s) = 1/s$ . A velocidade varia mais que 5%? (Faça  $R(s) = 0$  para facilidade de cálculo.)

- E5.12** Para o sistema com retroação unitária mostrado na Fig. E5.10, determinar o erro de estado estacionário para uma entrada em degrau e em rampa quando

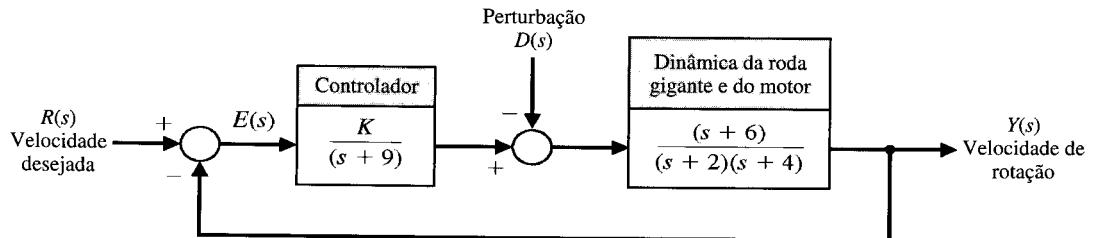
$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 14s + 50}.$$

**Respostas:**  $e_{ss} = 0,83$  para um degrau e  $e_{ss} = \infty$  para uma rampa.

- E5.13** Um sistema com retroação é mostrado na Fig. E5.13.

(a) Determinar o erro de estado estacionário para um degrau unitário quando  $K = 0,4$  e  $G_p(s) = 1$ .

(b) Selecionar um valor apropriado para  $G_p(s)$  para que o erro de



**Fig. E5.11** Controle de velocidade de uma roda gigante de Ferris.

estado estacionário seja igual a zero para uma entrada em degrau unitário.

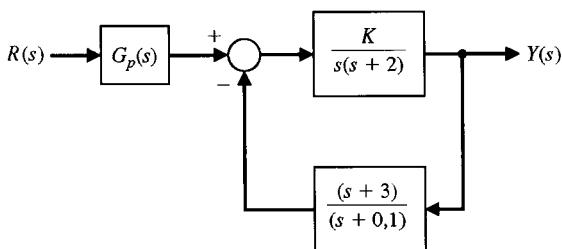


Fig. E5.13 Sistema com retroação.

**E5.14** Um sistema de controle de malha fechada tem uma função de transferência  $T(s)$  como se segue:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{500}{(s+10)(s^2 + 10s + 50)}.$$

Plotar  $y(t)$  para uma entrada em degrau  $R(s)$  quando (a) o real  $T(s)$  for usado, e (b) usando os pólos complexos relativamente dominantes. Comparar os resultados.

**E5.15** Um sistema de segunda ordem é

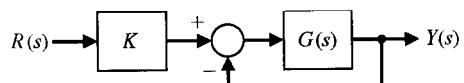
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{(10/z)(s+z)}{(s+1)(s+8)}.$$

Considerar o caso em que  $1 < z < 8$ . Obter a expansão em frações parciais, e plotar  $y(t)$  para uma entrada  $r(t)$  em degrau, para  $z$  igual a 2, 4 e 6.

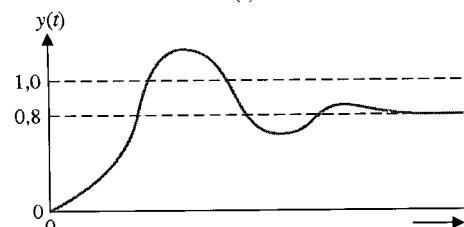
**E5.16** Uma função de transferência de sistema de controle a malha fechada  $T(s)$  tem dois complexos conjugados dominantes. Esboçar a região no plano  $s$  da esquerda onde os pólos complexos devam ser localizados para alcançar as especificações dadas.

- (a)  $0,6 \leq \zeta \leq 0,8, \omega_n \leq 10$
- (b)  $0,5 \leq \zeta \leq 0,707, \omega_n \geq 10$
- (c)  $\zeta \geq 0,5, 5 \leq \omega_n \leq 10$
- (d)  $\zeta \leq 0,707, 5 \leq \omega_n \leq 10$
- (e)  $\zeta \geq 0,6, \omega_n \leq 6$

**E5.17** Um sistema é mostrado na Fig. E5.17(a). A resposta a um degrau unitário, quando  $K = 1$ , é mostrado na Fig. E5.17(b). Determinar o valor de  $K$  para que o erro de estado estacionário seja igual a zero.  
Resposta:  $K = 1,25$ .



(a)



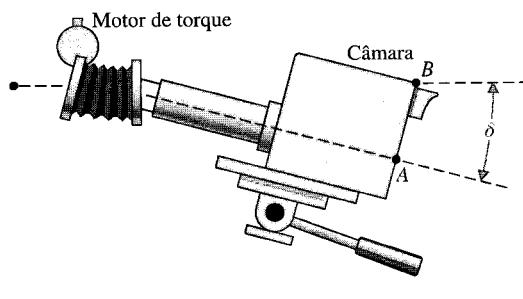
(b)

Fig. E5.17

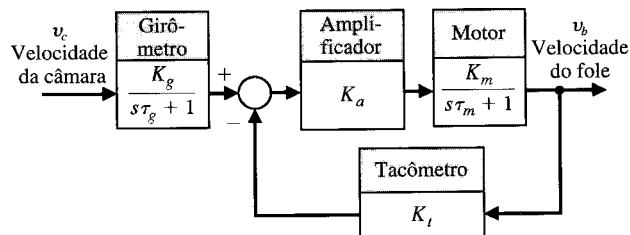
## PROBLEMAS

**P5.1** Um problema importante nos sistemas de televisão são o deslocamento abrupto ou a rotação cônica da imagem devidos à movimentação da câmera. Este efeito ocorre quando a câmera é montada em veículos em movimento como caminhões e aeroná-

ves. O sistema Dynalens foi projetado para reduzir o efeito do movimento com varredura rápida; ver Fig. P5.1. Espera-se um movimento de varredura máxima de  $25^\circ/\text{s}$ . Seja  $K_g = K_t = 1$  e admita-se que  $\tau_g$  seja insignificante. (a) Determinar o erro do



(a)



(b)

Fig. P5.1 Controle de movimento cônico da câmera.

- sistema  $E(s)$ . (b) Determinar o ganho de malha necessário,  $K_a K_m K_p$ , quando for admissível um erro de estado estacionário de 1% s. (c) A constante de tempo do motor é 0,40 s. Determinar o ganho de malha necessário para que o tempo de assentamento dentro de 2% do valor final de  $v_b$  seja menor ou igual a 0,03 s.
- P5.2** Um sistema de controle a malha fechada específica deve ser projetado para se obter uma resposta subamortecida a uma entrada em degrau. As especificações do sistema são as seguintes:

$$20\% > \text{ultrapassagem percentual} > 10\%$$

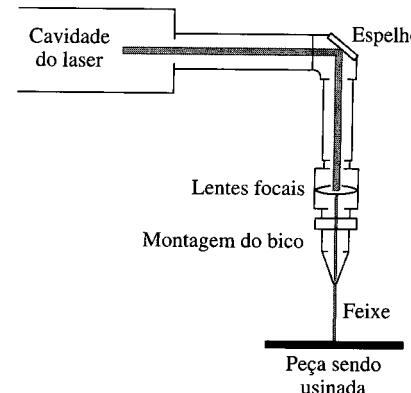
$$\text{Tempo de assentamento} < 0,6 \text{ s.}$$

- (a) Identificar a área desejada para as raízes dominantes do sistema. (b) Determinar o menor valor possível da terceira raiz,  $r_3$ , se as raízes conjugadas complexas devem representar a resposta dominante. (c) A função de transferência do sistema a malha fechada  $T(s)$  é de terceira ordem, e a retroação possui ganho unitário. Determinar a função de transferência direta  $G(s) = Y(s)/E(s)$  quando o tempo de assentamento no interior da faixa de 2% do valor final for 0,6 s e a ultrapassagem percentual for de 20%.
- P5.3** Um feixe de laser pode ser usado para soldar, perfurar, gravar, cortar e marcar metais, como está mostrado na Fig. P5.3(a) [16]. Suponha-se que se deseja, como requisito de trabalho, marcar uma curva parabólica por meio de um laser preciso com um sistema de controle a malha fechada, como mostrado na Fig. P5.3(b). Calcular o ganho necessário para resultar um erro de estado estacionário de 5 mm para  $r(t) = t^2 \text{ cm}$ .
- P5.4** A função de transferência a malha aberta de um sistema com retroação negativa unitária é

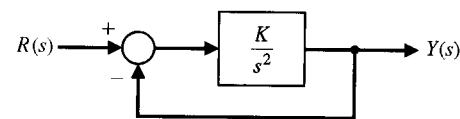
$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)}.$$

A resposta do sistema a uma entrada em degrau é especificada como a seguir:

$$\begin{aligned} \text{tempo de pico } T_p &= 1,1 \text{ s,} \\ \text{Ultrapassagem percentual} &= 5\%. \end{aligned}$$



(a)

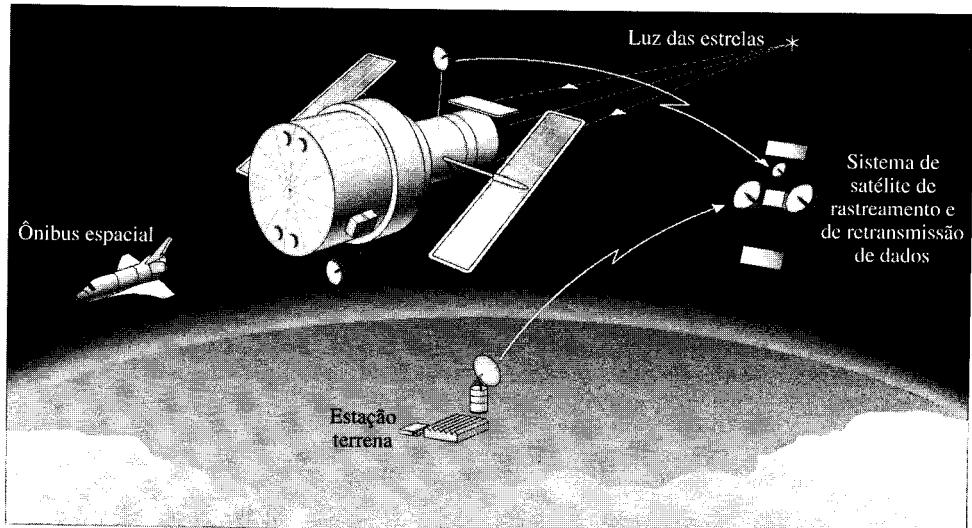


(b)

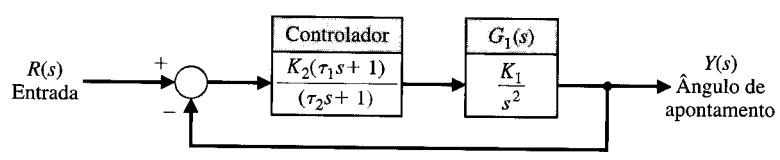
**Fig. P5.3** Controle do feixe de laser.

- (a) Determinar se ambas especificações podem ser atendidas simultaneamente. (b) Se as especificações não puderem ser atendidas simultaneamente, determinar um valor de compromisso para  $K$  para que as especificações de tempo de pico de ultrapassagem percentual sejam abrandadas na mesma proporção.

- P5.5** Um telescópio espacial deve ser lançado para realizar experimentos astronômicos [9]. Deseja-se que o sistema de controle de posicionamento seja capaz de uma resolução de 0,01 minuto de arco



(a)



(b)

**Fig. P5.5** (a) O telescópio espacial. (b) O sistema de controle de apontamento do telescópio espacial.

e de rastrear objetos solares com movimento aparente de até 0,21 minuto de arco por segundo. O sistema é ilustrado na Fig. P5.5(a). O sistema de controle está mostrado na Fig. P5.5(b). Admitir que  $\tau_1 = 1$  segundo e  $\tau_2 = 0$  (uma aproximação). (a) Determinar o ganho  $K = K_1K_2$  necessário para que a resposta a um comando em degrau seja tão rápida quanto razoável com uma ultrapassagem menor que 5%. (b) Determinar o erro de estado estacionário do sistema para uma entrada em degrau e em rampa. (c) Determinar o valor de  $K_1K_2$  para um sistema opcional ITAE (1) para uma entrada em degrau e (2) para uma entrada em rampa.

**P5.6** Um robô é programado para seguir um percurso preestabelecido com uma ferramenta ou com um maçarico de soldagem [8, 13]. Considerar que a ferramenta do robô deva seguir um percurso em dente de serra como está mostrado na Fig. P5.6(a). A função de transferência do processo é

$$G(s) = \frac{100(s+1)}{s(s+5)(s+7)}$$

para o sistema a malha fechada mostrado na Fig. 5.6(b). Calcular o erro de estado estacionário.

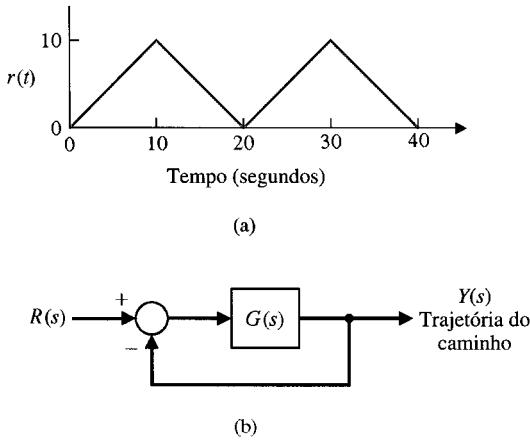


Fig. P5.6 Controle de percurso do robô.

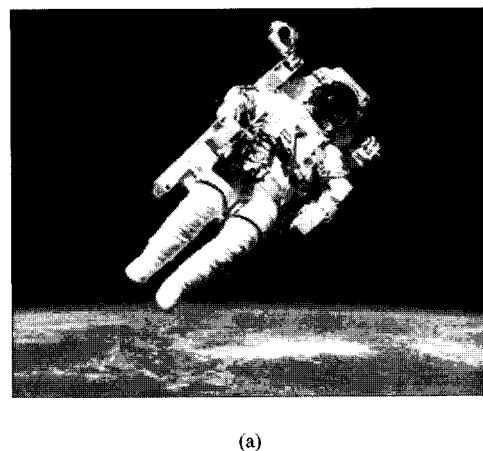
**P5.7** O astronauta Bruce McCandless II realizou o primeiro passeio espacial livre, sem cordão umbilical, no dia 7 de fevereiro de 1984, usando um dispositivo de propulsão a jato de gás ilustrado na Fig. P5.7(a). O controlador pode ser representado por um ganho  $K_2$ , como mostrado na Fig. P5.7(b). O momento de inércia do conjunto homem-equipamento, com os braços ao longo do corpo, é 25 kg·m<sup>2</sup>. (a) Determinar o ganho necessário  $K_3$  para manter um erro de estado estacionário igual a 1 cm quando a entrada for uma rampa  $r(t) = t$  (metros). (b) Com este ganho  $K_3$ , determinar o ganho necessário  $K_1K_2$  para restringir a ultrapassagem percentual a 10%. (c) Determinar analiticamente o ganho  $K_1K_2$  para minimizar o índice de desempenho ISE para uma entrada em degrau.

**P5.8** Um painel fotovoltaico (células solares) gera uma tensão elétrica contínua que pode ser usada para acionar motores CC ou que pode ser convertida para potência CA e conectada à rede de distribuição. Deseja-se manter a potência de safda do painel no seu nível máximo possível acompanhando as variações de incidência solar durante o dia. Um tal sistema a malha fechada é mostrado na Fig. P5.8. A função de transferência para o processo é

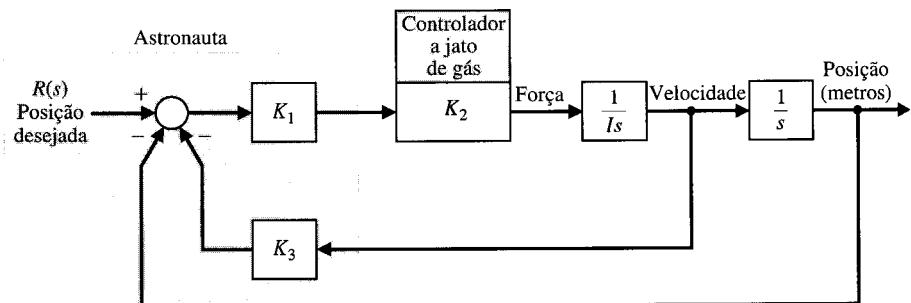
$$G(s) = \frac{K}{s+5},$$

onde  $K = 10$ . Encontrar (a) a constante de tempo do sistema a malha fechada e (b) o tempo de assentamento dentro da faixa de 2% do valor final quando ocorrem perturbações tais como nuvens.

**P5.9** A antena que recebe e transmite sinais para o satélite de telecomunicações *Telstar* é a maior antena de corneta já construída. A antena de microondas tem 177 ft (cerca de 50 m) de comprimento, pesa 340 toneladas, e se movimenta sobre uma pista circular. Uma foto da antena é mostrada na Fig. P5.9. O satélite *Telstar* tem 34 polegadas de diâmetro e se move a aproximadamente 16.000 mph numa altitude de 2500 milhas. A antena deve ser



(a)



(b)

Fig. P5.7 O astronauta Bruce McCandless II é mostrado a poucos metros do ônibus espacial Challenger em órbita terrestre. Ele usou um dispositivo de propulsão a nitrogênio controlado manualmente chamado de unidade de manobra pilotada. (Cortesia da NASA — Administração Nacional da Aeronáutica e do Espaço.) (b) Diagrama de blocos do controlador.

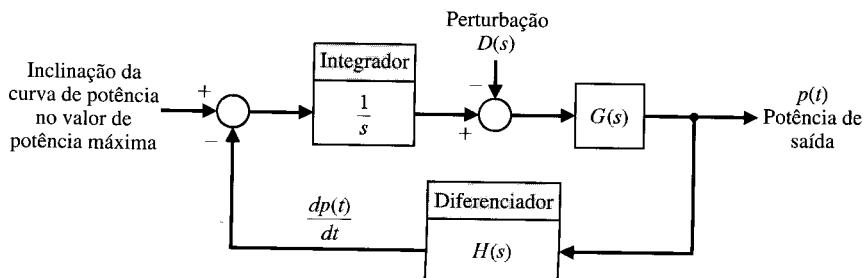


Fig. P5.8 Controle de célula solar.

posicionada precisamente com uma tolerância de 1/10 de grau, porque o feixe de microondas possui uma largura de 0,2° e é altamente atenuado em função da grande distância. Se a antena estiver seguindo o satélite móvel, determinar o valor de  $K_v$  necessário para o sistema.

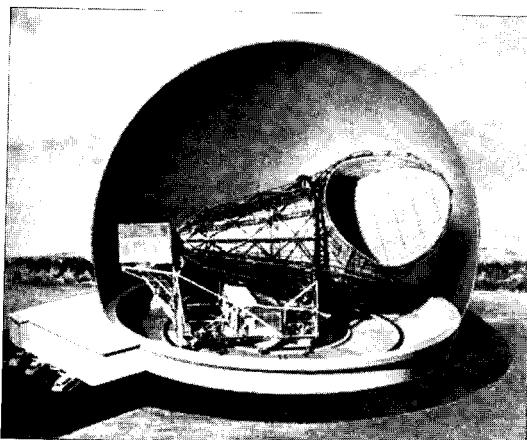


Fig. P5.9 Um modelo da antena para o Sistema Telstar em Andover, Maine. (Foto por cortesia de Bell Telephone Laboratories, Inc.)

- P5.10** Um sistema de controle de velocidade de um motor CC controlado pela armadura usa a força contra-eletromotriz (fcem) como sinal de retroação. (a) Desenhar o diagrama de blocos deste sistema (veja Eq. 2.66). (b) Calcular o erro de estado estacionário do sistema para um comando de entrada em degrau ajustando a velocidade em um novo nível. Supor que  $R_a = L_a = J = b = 1$ , que a constante do motor é  $K_m = 1$ , e que  $K_b = 1$ . (c) Selecionar um ganho de retroação para o sinal fcem que produz uma resposta a uma entrada em degrau com uma ultrapassagem de 15%.

- P5.11** Um sistema de controle com retroação unitária simples possui uma função de transferência do processo

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = G(s) = \frac{K}{s}.$$

A entrada de sistema é uma função degrau com uma amplitude A. A condição inicial do sistema no instante  $t_0$  é  $y(t_0) = Q$ , onde  $y(t)$  é a saída do sistema. O índice de desempenho é definido como

$$I = \int_0^{\infty} e^2(t) dt.$$

- (a) Mostrar que  $I = (A - Q)^2 / 2K$ . Determinar o ganho  $K$  que minimizará o índice de desempenho  $I$ . Este valor de ganho é possível na prática? (c) Selecionar um valor prático de ganho e determinar o valor resultante do índice de desempenho.
- P5.12** As viagens de trem entre cidades aumentarão à medida que forem desenvolvidos trens de alta velocidade, fazendo o tempo de viagem do centro de uma cidade ao centro da outra equivalente ao tempo de viagem por avião. A Japanese National Railway (Estrada de Ferro Nacional Japonesa) tem um trem chamado Bullet Express (Trem-Bala) que trafega entre Tóquio e Osaka na linha

Tokaido. Este trem percorre 320 milhas em 3 horas e 10 minutos, uma velocidade média de 101 mph [20]. Esta velocidade aumentará à medida que novos sistemas forem usados, tais como sistemas de suspensão magnética, para obter veículos flutuando sobre guias de alumínio. Para manter a velocidade desejada, é proposto um sistema de controle de velocidade que conduza a erro de estado estacionário nulo para uma entrada em rampa. Um sistema de terceira ordem é suficiente. Determinar a função de transferência do sistema ótimo,  $T(s)$ , para um critério de desempenho ITAE. Estimar o tempo de assentamento (critério de 2%) e a ultrapassagem para uma entrada em degrau quando  $\omega_n = 10$ .

- P5.13** Deseja-se aproximar um sistema de quarta ordem por um modelo de ordem mais baixa. A função de transferência do sistema original é

$$H(s) = \frac{s^3 + 7s^2 + 24s + 24}{s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24}$$

$$= \frac{s^3 + 7s^2 + 24s + 24}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}.$$

Mostrar que se for obtido um modelo de segunda ordem pelo método da Seção 5.10, e não forem especificados os pólos e o zero de  $L(s)$ , então

$$L(s) = \frac{0,2917s + 1}{0,399s^2 + 1,375s + 1}$$

$$= \frac{0,731(s + 3,428)}{(s + 1,043)(s + 2,4)}.$$

- P5.14** Deseja-se achar o modelo de ordem mais baixa para o sistema original do Problema 5.13, quando os pólos do modelo de segunda ordem são especificados como sendo  $-1$  e  $-2$  e o modelo tem um zero não especificado. Mostrar que este modelo de segunda ordem é

$$L(s) = \frac{0,986s + 2}{s^2 + 3s + 2} = \frac{0,986(s + 2,028)}{(s + 1)(s + 2)}.$$

- P5.15** Um amplificador magnético com baixa impedância de saída é mostrado na Fig. P5.15 em cascata com um filtro passa-baixas e um pré-amplificador. O amplificador possui uma alta impedância de entrada e ganho 1 e é usado para adicionar os sinais como está mostrado. Selecionar um valor para a capacitância  $C$  para que a função de transferência  $V_o(s)/V_{in}(s)$  apresente uma relação de

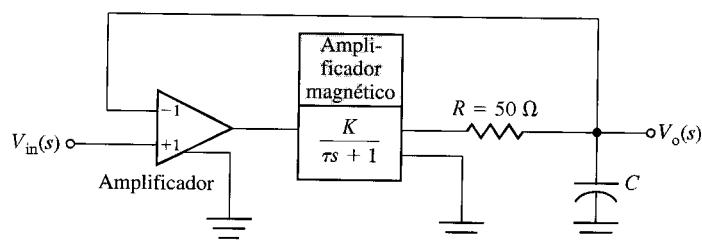


Fig. P5.15 Amplificador com retroação.

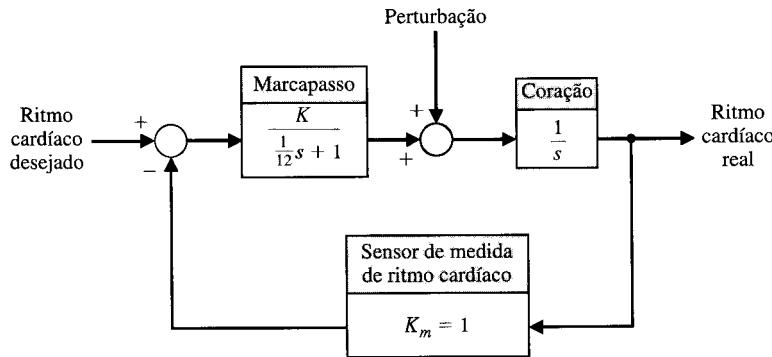


Fig. P5.16 Marcapasso cardíaco.

amortecimento de  $1/\sqrt{2}$ . A constante de tempo do amplificador magnético é igual a 1 segundo, e o ganho é  $K = 10$ . Calcular o tempo de assentamento (critério de 2%) do sistema resultante.

**P5.16** Os marcapassos eletrônicos para corações humanos regulam a velocidade de bombeamento do coração. Um sistema a malha fechada proposto que inclui um marcapasso e a medida da pulsação do coração está mostrado na Fig. P5.16 [2, 3]. A função de transferência de bombeamento do coração e do marcapasso é definida como sendo

$$G(s) = \frac{K}{s(s/12 + 1)}.$$

Projetar o ganho do amplificador que conduz a um sistema com um tempo de assentamento para uma perturbação em degrau de menos de 1 segundo. Deseja-se que a ultrapassagem para um degrau na pulsação desejada do coração seja inferior a 10%. (a) Encontrar uma faixa de valores adequada para  $K$ . (b) Se o valor nominal de  $K$  for  $K = 10$ , determinar a sensibilidade do sistema a pequenas mudanças no valor de  $K$ . (c) Avaliar a sensibilidade da parte (b) em regime contínuo (CC) (fazer  $s = 0$ ). (d) Avaliar a magnitude da sensibilidade na pulsação normal do coração de 60 batidas por minuto.

**P5.17** Considerar o sistema de terceira ordem original dado no Exemplo 5.9. Determinar um modelo de primeira ordem com um polo não especificado e sem zeros que representará o sistema de terceira ordem.

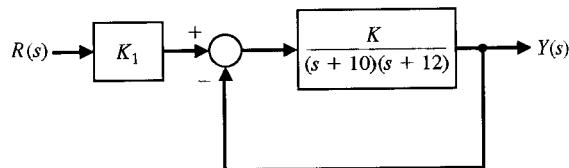
**P5.18** Um sistema de controle a malha fechada com retroação unitária negativa tem um processo a controlar com uma função de transferência

$$G(s) = \frac{8}{s(s^2 + 6s + 12)}.$$

- (a) Determinar a função de transferência a malha fechada  $T(s)$ .
- (b) Determinar uma aproximação de segunda ordem para  $T(s)$  usando o método de Seção 5.10. (c) Usando o MATLAB ou um programa de computador adequado, plotar a resposta de  $T(s)$  e da aproximação de segunda ordem a uma entrada em degrau unitário e comparar os resultados.

**P5.19** Um sistema é mostrado na Fig. P5.19.

- (a) Determinar o erro de estado estacionário para uma entrada em degrau unitário em termos de  $K$  e  $K_1$ , onde  $E(s) = R(s) - Y(s)$ .
- (b) Selecionar  $K_1$ , para que o erro de estado estacionário seja zero.

Fig. P5.19 Sistema com ganho prévio,  $K_1$ .

## PROBLEMAS AVANÇADOS

**PA5.1** Uma função de transferência a malha fechada é

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{96(s+3)}{(s+8)(s^2 + 8s + 36)}.$$

- (a) Determinar o erro de estado estacionário para uma entrada em degrau unitário  $R(s) = 1/s$ .
- (b) Supor que os pólos complexos sejam dominantes e determinar a ultrapassagem e o tempo de assentamento dentro da faixa de 2% do valor final.
- (c) Traçar o gráfico da resposta do sistema real e compará-lo com o do sistema estimado da parte (b).

**PA5.2** Um sistema a malha fechada está mostrado na Fig. PA5.2. Traçar o gráfico da resposta para uma entrada em degrau unitário do

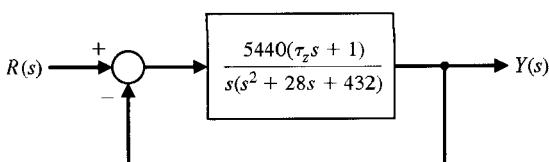


Fig. PA5.2 Sistema com um zero variável.

sistema para  $\tau_z = 0, 0,05, 0,1$ , e  $0,5$ . Registrar o percentual de ultrapassagem, o tempo de subida e o tempo de assentamento (critério de 2%) à medida que  $\tau_z$  varia. Descrever o efeito da variação de  $\tau_z$ . Comparar a localização de zero,  $1/\tau_z$ , com a localização das raízes do sistema a malha fechada.

**PA5.3** Um sistema a malha fechada está mostrado na Fig. PA5.3. Traçar o gráfico da resposta para uma entrada em degrau unitário do sistema para  $\tau_p = 0, 0,5, 2$ , e  $5$ . Registrar o percentual de ultrapassagem, o tempo de subida e o tempo de assentamento (critério de 2%) à medida que  $\tau_p$  varia. Descrever o efeito da variação de  $\tau_p$ . Comparar a localização do polo do sistema a malha aberta,  $1/\tau_p$ , com a localização das raízes do sistema a malha fechada.

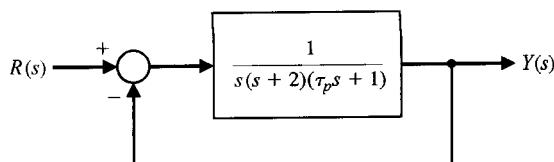


Fig. PA5.3 Sistema com um polo variável no processo a controlar.

**PA5.4** O controle de velocidade de um trem de alta velocidade é representado por um sistema mostrado na Fig. PA5.4 [20]. Determinar a equação do erro de estado estacionário para  $K$  para uma entrada  $r(t)$  em degrau unitário. Considerar os três valores para  $K$  iguais a 1, 10 e 100.

- Determinar o erro de estado estacionário.
- Determinar e plotar a resposta  $y(t)$  para (i) uma entrada  $r(t)$  em degrau unitário e (ii) para uma perturbação  $d(t)$  em degrau unitário.
- Criar uma tabela mostrando ultrapassagem, tempo de assentamento (critério de 2%),  $e_{ss}$  para  $r(t)$ , e  $|y/d|_{\max}$  para os três valores de  $K$ . Selecionar a melhor solução de compromisso.

**PA5.5** Um sistema com um controlador é mostrado na Fig. PA5.5. O zero do controlador pode ser variado. Sejam os valores  $\alpha = 0, 10, 100$ .

- Determinar o erro de estado estacionário para uma entrada  $r(t)$  em degrau para  $\alpha = 0$  e  $\alpha \neq 0$ .

- Traçar o gráfico da resposta do sistema para uma perturbação em degrau para cada um dos três valores de  $\alpha$ . Comparar os resultados e selecionar o melhor valor dos três valores de  $\alpha$ .

**PA5.6** O modelo em diagrama de blocos de um motor CC controlado pela armadura é mostrado na Fig. PA5.6.

- Determinar o erro de estado estacionário para uma entrada em rampa,  $r(t) = t$ ,  $t \geq 0$ , em termos de  $K$ ,  $K_b$  e  $K_m$ .

- Sejam os valores  $K_m = 10$  e  $K_b = 0,05$  e a seleção de  $K$  para que o erro de estado estacionário seja igual a 1.

- Traçar o gráfico da resposta do sistema para uma entrada em rampa durante 20 segundos. As respostas são aceitáveis?

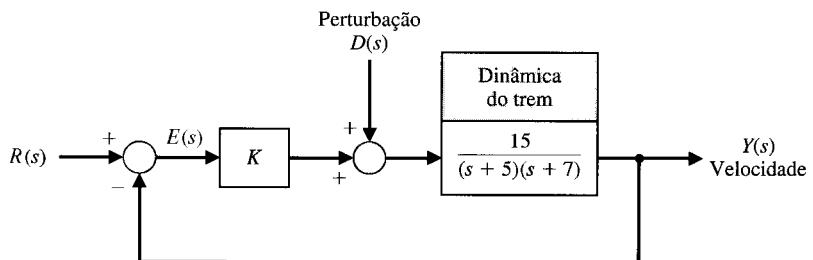


Fig. PA5.4 Controle de velocidade.

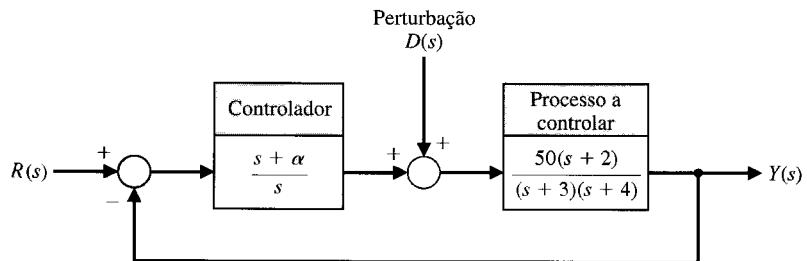


Fig. PA5.5 Sistema com parâmetro  $\alpha$  de controle.

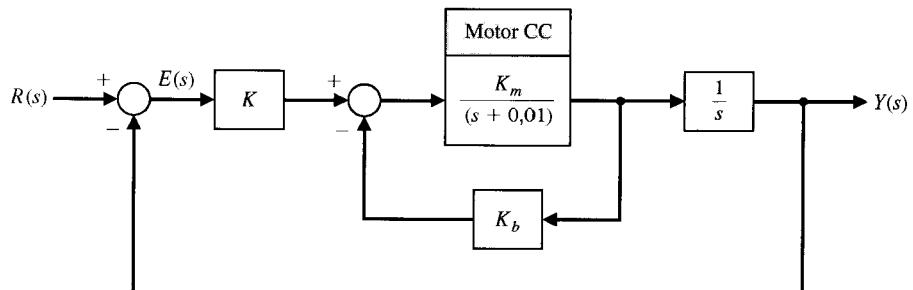


Fig. PA5.6 Controle de motor CC.

## PROBLEMAS DE PROJETO

**PPC5.1** O sistema de acionamento por sarilho dos exercícios anteriores (ver PPC1.1-PPC4.1) sofre uma perturbação devido às mudanças ocorridas com a peça que está sendo usinada à medida que o material é removido. O controlador é um amplificador  $G_c(s) = K_a$ . Calcular o efeito de uma perturbação em degrau unitário e determinar o melhor valor de ganho do amplificador para que a ultrapassagem devida a um comando de passo  $r(t) = A$ ,  $t > 0$  seja menor que 5%, ao mesmo tempo que se reduz tanto quanto possível o efeito da perturbação.

**PP5.1** O piloto automático para o controle de rolamento de um caça a jato está mostrado na Fig. PP5.1. O objetivo é selecionar um valor

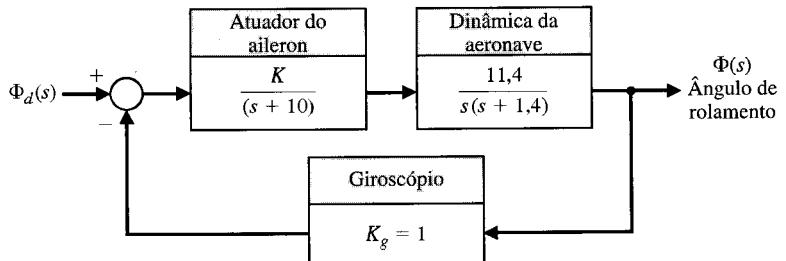
de  $K$  adequado para que a resposta a um comando em degrau unitário  $\phi_d(t) = A$ ,  $t \geq 0$ , venha a fornecer uma resposta  $\phi(t)$  que seja rápida e apresente uma ultrapassagem de menos de 20%.

- Determinar a função de transferência a malha fechada  $\phi(s)/\phi_d(s)$ .

- Determinar as raízes da equação característica para  $K = 0,7, 3$  e  $6$ .

- Usando o conceito de raízes dominantes, encontre a ultrapassagem esperada e o tempo de pico para o sistema de segunda ordem aproximado.

- Plotar a resposta real e comparar com os resultados aproximados da parte (c).
- Selecionar o ganho  $K$  para que a ultrapassagem percentual seja igual a 16%. Qual é o resultado do tempo de pico?



**Fig. PP5.1** Controle de ângulo de rolagem.

**PP5.2** O projeto do controle para um braço de solda com um longo alcance requer a seleção cuidadosa de parâmetros [13]. O sistema é mostrado na Fig. PP5.2, onde  $\zeta = 0,2$ , e o ganho  $K$  e a freqüência natural  $\omega_n$  podem ser selecionados. (a) Determinar  $K$  e  $\omega_n$  para que a resposta a uma entrada em degrau unitário atinja um tempo de pico para a primeira ultrapassagem (acima do nível desejado de 1) menor ou igual a 1 segundo e a ultrapassagem seja menor que 5%. (Sugestão: Tente  $0,1 < K/\omega_n < 0,3$ .) (b) Plotar a resposta do sistema projetado na parte (a) a uma entrada em degrau.

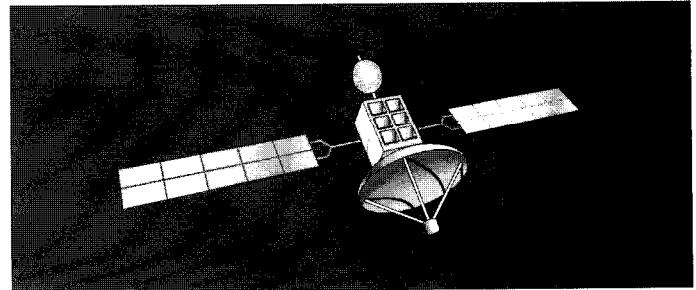
**PP5.3** Os sistemas de suspensão ativa para os automóveis modernos proporcionam viagens confortáveis e firmes. O projeto de um sistema de suspensão ativa ajusta as válvulas do amortecedor de modo a estabelecer as condições da viagem. Um pequeno motor elétrico, como mostrado na Fig. PP5.3, muda os ajustes das válvulas [15]. Selecionar um valor de projeto para  $K$  e para o parâmetro  $q$  de modo a satisfazer o desempenho ITAE para um comando em degrau,  $R(s)$ , e um tempo de assentamento (critério de 2%) para a resposta ao degrau menor ou igual a 0,5 segundo. Depois de concluir o projeto, prever o resultado da ultrapassagem para uma entrada em degrau.

**PP5.4** O satélite espacial mostrado na Fig. PP5.4(a) usa um sistema de controle para reajustar sua orientação, como está mostrado na Fig. PP5.4(b).

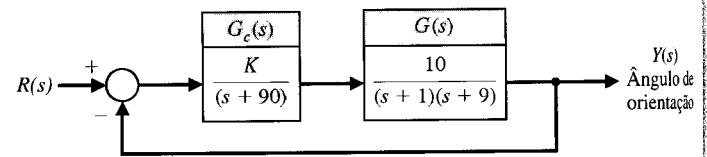
(a) Determinar um modelo de segunda ordem para o sistema a malha fechada.

(b) Usando o modelo de segunda ordem, selecionar um ganho  $K$  de modo que a ultrapassagem percentual seja menor que 15% e o erro de estado estacionário a uma excitação em degrau seja inferior a 12%.

(c) Verificar o projeto determinando o desempenho real do sistema de terceira ordem.



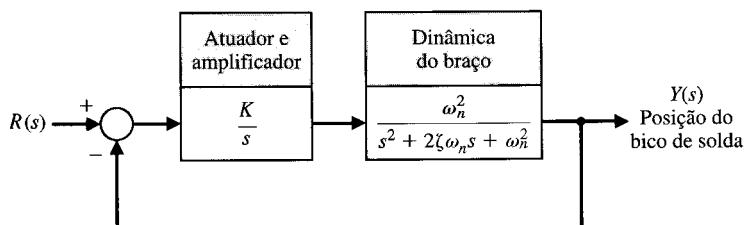
(a)



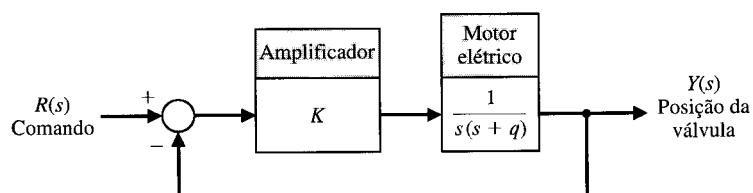
(b)

**Fig. PP5.4** Controle de um satélite espacial.

**PP5.5** Um robô ajustador pode ser usado para suavizar os cantos vivos de peças usinadas segundo um percurso planejado previamente (sinal de comando de entrada). Na prática, ocorrem erros devido a imperfeições do robô, erros de usinagem, tolerâncias grandes e o desgaste da ferramenta. Estes erros podem ser eliminados usando a retroação de força para modificar o percurso durante a execução [9, 13].



**Fig. PP5.2** Controle de posição da ponta de solda.



**Fig. PP5.3** Sistema de suspensão ativa.

Embora o controle de força tenha sido capaz de lidar com o problema da exatidão, tem sido mais difícil solucionar o problema da estabilidade do contato. Com efeito, fechando a malha de força e introduzindo um sensor de força flexível no pulso (o tipo de controle de força mais comum), pode-se acrescentar o problema da estabilidade. Um modelo de um sistema de robô ajustador está mostrado na Fig. PP5.5. Determinar a região de estabilidade

de do sistema para  $K_1$  e  $K_2$ . Admitir que ambos os ganhos ajustáveis são maiores que zero.

**PP5.6** O modelo para um sistema de controle de posição usando um motor CC é mostrado na Fig. PP5.6. O objetivo é selecionar  $K_1$  e  $K_2$  para que o tempo de pico seja 0,5 segundo e a ultrapassagem percentual (U.P.) para uma entrada em degrau seja insignificante ( $0,5\% < \text{U.P.} < 2\%$ ).

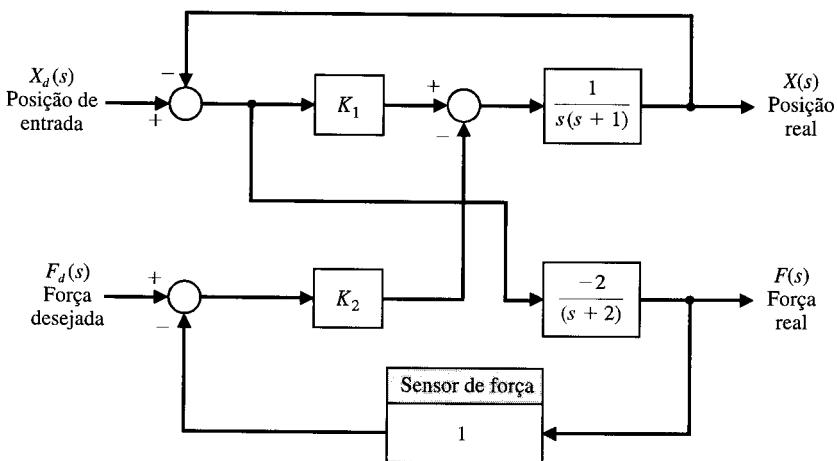


Fig. PP5.5 Robô ajustador.

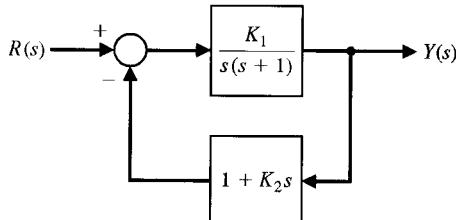


Fig. PP5.6 Robô de controle de posição.



## PROBLEMAS COM MATLAB

**PM5.1** Considere a função de transferência a malha fechada

$$T(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}.$$

Obter analiticamente a resposta ao impulso e comparar o resultado com o obtido usando a função impulse do MATLAB.

**PM5.2** Um sistema com retroação unitária negativa tem a função de transferência a malha aberta.

$$G(s) = \frac{s + 5}{s^2(s + 10)}.$$

Usando lsim, obter a resposta do sistema a malha fechada para uma entrada em rampa unitária,

$$R(s) = 1/s^2.$$

Considerar o intervalo de tempo  $0 \leq t \leq 25$ . Qual é o erro de estado estacionário?

**PM5.3** O conhecimento prático da relação entre as localizações de pólos dos sistema de segunda ordem mostrado na Fig. PM5.3 e a resposta transitória é importante no projeto de controle. Com isso em mente, considerar os seguintes quatro casos

$$(1) \omega_n = 2, \zeta = 0,$$

$$(2) \omega_n = 2, \zeta = 0,1,$$

$$(3) \omega_n = 1, \zeta = 0,$$

$$(4) \omega_n = 1, \zeta = 0,2.$$

Usando as funções impulse e subplot, crie um gráfico contendo quatro subgráficos, cada um deles retratando a resposta ao impulso de um dos quatro casos listados anteriormente. Comparar o gráfico com a Fig. 5.17, na Seção 5.3, e discutir os resultados.

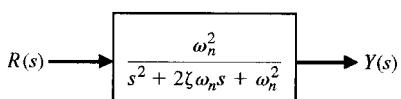


Fig. PM5.3 Um sistema de segunda ordem simples.

**PM5.4** Considerar o sistema de controle mostrado na Fig. PM5.4.

(a) Mostrar analiticamente que a ultrapassagem percentual esperada da resposta do sistema a malha fechada para uma entrada em degrau é de cerca de 50%.

(b) Usando o MATLAB, plotar a resposta do sistema a malha fechada a uma entrada em degrau unitário e estimar a ultrapassa-

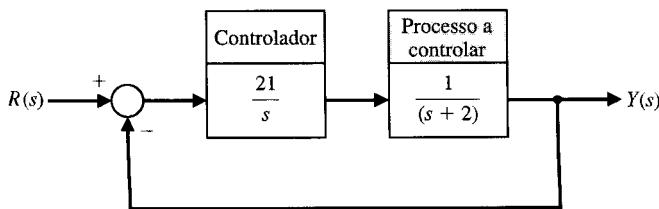


Fig. PM5.4 Um sistema de controle com retroação negativa.

gem percentual a partir do gráfico. Comparar o resultado com o da parte (a).

**PM5.5** A função de transferência a malha aberta de um sistema com retroação negativa unitária é

$$G(s) = \frac{50}{s(s+5)}.$$

Plotar, com o MATLAB, a resposta ao degrau unitário e determinar os valores aproximados do pico de ultrapassagem,  $M_p$ , do tempo de pico,  $T_p$ , e do tempo de assentamento,  $T_s$  (2% de critério) a partir do gráfico. Rotular o gráfico com os valores aproximados de  $M_p$ , de  $T_p$  e de  $T_s$ .

**PM5.6** Um piloto automático projetado para manter uma aeronave em vôo reto e nivelado é mostrado na Fig. PM5.6.

(a) Supor que o controlador seja um controlador de ganho constante dado por  $G_c(s) = 2$ . Usando a função lsim, calcular e plotar a resposta à rampa  $\theta_d(t) = at$ , onde  $a = 0,5^\circ/\text{s}$ . Determinar o erro de altitude depois de 10 segundos.

(b) Se for aumentada a complexidade do controlador, é possível reduzir o erro estacionário de rastreamento. Com este objetivo em mente, supor que se substitua o controlador de ganho constante por um controlador mais sofisticado

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} = 2 + \frac{1}{s}.$$

Este tipo de controlador é conhecido como um controlador proporcional e integral (PI). Repetir a simulação da parte (a) com o controlador PI e comparar o erro estacionário de rastreamento do controlador de ganho constante *versus* o do controlador PI.

**PM5.7** O diagrama de blocos de uma malha de velocidade para piloto automático de um míssil é mostrado na Fig. PM5.7. Usando as fórmulas analíticas para sistemas de segunda ordem, prever os valores de  $M_p$ , de  $T_p$  e de  $T_s$  para o sistema a malha fechada devidos a uma entrada em degrau unitário. Comparar os resultados previstos com os da resposta real a uma entrada em degrau obtida com o MATLAB. Expliar quaisquer diferenças.

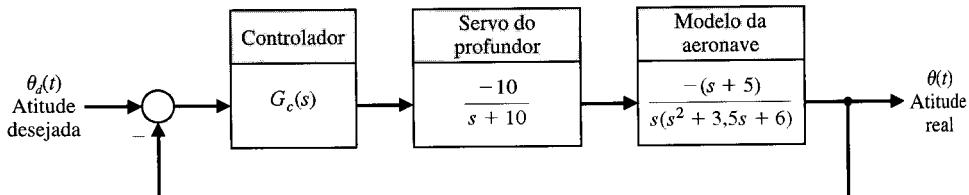


Fig. PM5.6 Um diagrama de blocos de piloto automático de aeronave.

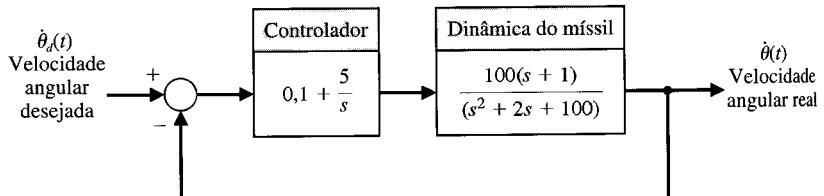


Fig. PM5.7 Um piloto automático da malha de velocidade de um míssil.

## TERMOS E CONCEITOS

**Constante de erro de velocidade,  $K_v$**  A constante calculada como  $\lim_{s \rightarrow 0} [sG(s)]$ . O erro de estado estacionário para uma rampa de entrada (com inclinação  $A$ ) para um sistema é igual a  $A/K_v$ .

**Especificações de projeto** Um conjunto de critérios de desempenho preestabelecidos.

**Índice de desempenho** Uma medida quantitativa do desempenho de um sistema.

**Raízes dominantes** As raízes da equação característica responsáveis pela resposta transitória dominante do sistema.

**Sinal de entrada para teste** Um sinal de entrada usado como teste padrão da capacidade do sistema em responder adequadamente.

**Sistema de controle ótimo** Um sistema cujos parâmetros são ajustados para que o índice de desempenho alcance um valor extremo.

**Tempo de assentamento** O tempo requerido para que a saída do sistema se acomode no interior de uma faixa de valores percentuais da amplitude de entrada.

**Tempo de pico** O tempo necessário para que um sistema responda a uma entrada em degrau e alcance o valor máximo da resposta.

**Tempo de subida** O tempo para que um sistema responda a uma entrada em degrau e alcance uma resposta igual a uma porcentagem da magnitude de entrada. O tempo de subida 0-100%,  $T_p$ , dimensiona o tempo para 100% da magnitude de entrada. Alternativamente,  $T_{10}$  dimensiona o tempo de 10% a 90% da resposta ao degrau de entrada.

**Tipo de sistema** O número  $N$  dos pólos da função de transferência,  $G(s)$ , na origem.  $G(s)$  é a função de transferência do percurso direto.

**Ultrapassagem** A quantidade alcançada pela resposta real do sistema além da resposta desejada.

## CAPÍTULO 6

# A Estabilidade de Sistemas Lineares com Retroação

- 6.1 O Conceito de Estabilidade
- 6.2 O Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz
- 6.3 A Estabilidade Relativa de Sistemas de Controle com Retroação
- 6.4 A Estabilidade de Sistemas com Variáveis de Estado
- 6.5 Exemplo de Projeto: Controle de Manobra de Veículo sobre Lagartas
- 6.6 Estabilidade de Sistema Usando o MATLAB
- 6.7 Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco
- 6.8 Sumário

## APRESENTAÇÃO

Assegurar a estabilidade de um sistema de controle a malha fechada é uma questão central no projeto de sistemas de controle. Sabendo-se que um sistema de controle a malha fechada instável geralmente não tem nenhum valor prático, buscam-se métodos para auxiliar a análise e o projeto de sistemas estáveis. Um sistema estável deve apresentar uma saída limitada se a entrada correspondente for limitada. Isto é conhecido como estabilidade do tipo entrada-limitada saída-limitada e constitui um dos principais tópicos deste capítulo.

A estabilidade de um sistema com retroação se relaciona diretamente com a localização das raízes da equação característica da função de transferência do sistema. O método de Routh-Hurwitz é introduzido como uma ferramenta útil para determinar a estabilidade do sistema. A técnica permite calcular o número de raízes da equação característica no semiplano da direita sem calcular efetivamente os valores das raízes. Assim, pode-se determinar a estabilidade sem o encargo adicional de determinar a localização das raízes características. Isto fornece um método de projeto para se determinar valores de certos parâmetros do sistema que conduzirão à estabilidade a malha fechada. Para sistemas estáveis será introduzida a noção de estabilidade relativa, que permite calcular o grau de estabilidade. O capítulo conclui com o projeto de um controlador estabilizante baseado no método de Routh-Hurwitz para o Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco.

## 6.1 O CONCEITO DE ESTABILIDADE

Ao se considerar o projeto e a análise de sistemas de controle com retroação, a **estabilidade** é da maior importância. De um ponto de vista prático, um sistema de controle a malha fechada que seja instável é de pouco valor. Como em toda regra geral, há exceções, mas para os objetivos em vista será declarado que todos os projetos de controle devem resultar em um sistema a malha fechada estável. Muitos sistemas físicos são inherentemente instáveis a malha aberta. A maioria dos aviões de caça modernos são *projetados para serem instáveis* a malha aberta, e sem o controle ativo com retroação ajudando o piloto não poderiam voar. O controle ativo é introduzido pelos engenheiros para estabilizar o processo instável — isto é, o avião — de modo que outras considerações como desempenho em regime transitório possam ser atribuídas. Com o uso da retroação é possível estabilizar processos instáveis e, assim, mediante a escolha judiciosa de valores de parâmetros, ajustar o desempenho em regime transitório. Para processos estáveis a malha aberta utiliza-se ainda a retroação para ajustar o desempenho a malha fechada de modo a alcançar as especificações de projeto. Estas es-

pecificações tomam a forma de erros de acompanhamento em estado estacionário, ultrapassagem percentual, tempo de assentamento, tempo de pico e outros índices discutidos nos Caps. 4 e 5.

Pode-se dizer que um sistema com retroação a malha fechada é estável ou não. Este tipo de caracterização estável/não estável é referida como **estabilidade absoluta**. Um sistema que possua estabilidade absoluta é dito um sistema estável — abandonando-se o rótulo absoluto. Dado um sistema a malha fechada que seja estável, é possível caracterizar adicionalmente o grau de estabilidade. Isto é referido como **estabilidade relativa**. Os pioneiros de projeto de aeronaves estavam familiarizados com a noção de estabilidade relativa — quanto mais estável fosse uma aeronave, tanto mais difícil era manobrá-la (isto é, girá-la em torno de seus eixos). Uma consequência da relativa instabilidade dos aviões de caça modernos é uma alta manobrabilidade. Um avião de caça é menos estável que um avião de transporte comercial, podendo manobrar mais rapidamente. Com efeito, os movimentos de um avião de caça podem ser bastante violentos para os “passageiros”. Como será discutido na próxima seção, determina-se se um sistema é estável (no sentido absoluto) determinando-se que todos os pólos da função de transferência estejam no semiplano  $s$  da esquerda ou, de modo equivalente, que todos os autovalores da matriz  $A$  estejam no semiplano  $s$  da esquerda. Sabendo-se que todos os pólos (ou autovalores) estejam no semiplano  $s$  da esquerda, investiga-se a estabilidade relativa examinando-se as localizações relativas dos pólos (ou autovalores).

Um **sistema estável** é definido como um sistema com resposta limitada (sem exceder valores de magnitude limitados). Isto é, se o sistema for submetido a uma excitação limitada ou a uma perturbação e a resposta for limitada em magnitude, o sistema é dito estável.

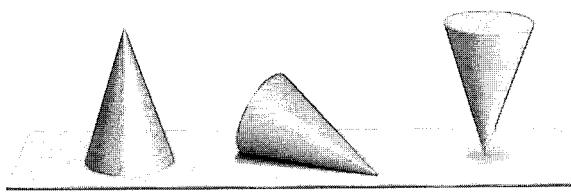
---

**Um sistema estável é um sistema dinâmico com uma resposta limitada a uma entrada limitada.**

---

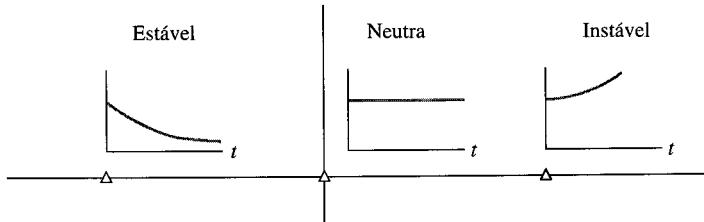
O conceito de estabilidade pode ser ilustrado considerando-se um cone de seção reta circular colocado sobre uma superfície plana. Se o cone estiver repousando sobre a base e for deslocado ligeiramente, retornará à sua posição de equilíbrio original. Estas posição e resposta são ditas estáveis. Se o cone estiver apoiado sobre a geratriz e for deslocado ligeiramente, ele rola sem nenhuma tendência a abandonar o apoio sobre a geratriz. Esta posição é designada como a estabilidade neutra. Por outro lado, se o cone for apoiado sobre o vértice e abandonado, ele cai para um dos lados. Esta posição é dita instável. Estas três posições estão ilustradas na Fig. 6.1.

A estabilidade de um sistema dinâmico é definida de maneira semelhante. A resposta a um deslocamento, ou condição inicial, resultará em uma resposta decrescente, neutra ou crescente. Especificamente, segue-se da definição de estabilidade que um sistema linear é estável se e somente se o valor absoluto da resposta impulsional,  $g(t)$ , integrada sobre uma faixa infinita for finito. Isto é, em termos da integral de convolução Eq. (5.1) para uma entrada limitada, requer-se que  $\int_0^\infty |g(t)| dt$  seja finita. A localização dos pólos de um sistema no plano  $s$  indica a resposta transitória resultante. Os pólos no semiplano  $s$  da esquerda resultam em uma resposta decrescente a perturbações de entrada. De modo semelhante, pólos simples sobre o eixo  $j\omega$  e no semiplano  $s$  da direita resultam em resposta neutra ou crescente, respectivamente, a uma perturbação de entrada. Esta divisão do plano  $s$  está mostrada na Fig. 6.2. Evidentemente, os pólos de um sistema dinâmico desejável devem estar na parte esquerda do plano  $s$  [1-3].



**Fig. 6.1** A estabilidade de um cone.

(a) Estável      (b) Neutra      (c) Instável



**Fig. 6.2** Estabilidade no plano  $s$ .

Um exemplo comum de efeito desestabilizante potencial da retroação é o da retroação em sistemas de alto-falante e amplificador de áudio usados para falar ao público em auditórios. Neste caso, um alto-falante produz os sinais de áudio que são uma versão amplificada dos sons captados pelo microfone. Juntamente com as outras entradas de áudio, o som originado no próprio alto-falante pode ser sentido pelo microfone. Quão forte é a intensidade particular deste sinal depende da distância entre o microfone e o alto-falante. Devido a propriedades de atenuação do ar, quanto maior for a distância, mais fraco será o sinal que atinge o microfone. Adicionalmente, devido à velocidade finita de propagação das ondas sonoras no ar há um retardo entre o sinal produzido pelo alto-falante e o recebido pelo microfone. Neste caso a saída do percurso de retroação é somada ao sinal externo de entrada. Este é um exemplo de retroação positiva.

À medida que a distância entre o alto-falante e o microfone diminui, percebe-se que, se o microfone for colocado muito próximo do alto-falante, o sistema será instável. O resultado desta instabilidade é uma amplificação excessiva e uma distorção dos sinais de áudio e um apito oscilatório.

Um outro exemplo de sistema instável está mostrado na Fig. 6.3. A primeira ponte sobre o Desfiladeiro de Tacoma (Tacoma Narrows) em Puget Sound, Washington, foi aberta ao tráfego no dia 1º de julho de 1940. Percebeu-se que a ponte oscilava todas as vezes que o vento soprava. Depois de quatro meses, no dia 7 de novembro de 1940, um vento produziu uma oscilação que cresceu em amplitude até que a ponte se rompeu. A Fig. 6.3(a) mostra a condição de início das oscilações; a Fig. 6.3(b) mostra o colapso catastrófico [5].

Em termos de sistemas lineares, reconhece-se que o requisito de estabilidade pode ser definido em termos da localização dos pólos da função de transferência a malha fechada. A função de transferência a malha fechada pode ser escrita como

$$T(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{K \prod_{i=1}^M (s + z_i)}{s^N \prod_{k=1}^Q (s + \sigma_k) \prod_{m=1}^R [s^2 + 2\alpha_m s + (\alpha_m^2 + \omega_m^2)]}, \quad (6.1)$$

onde  $q(s) = \Delta(s) = 0$  é a equação característica cujas raízes são os pólos do sistema a malha fechada. A resposta a uma entrada em impulso (quando  $N = 0$ ) será então

$$y(t) = \sum_{k=1}^Q A_k e^{-\sigma_k t} + \sum_{m=1}^R B_m \left( \frac{1}{\omega_m} \right) e^{-\alpha_m t} \sin(\omega_m t + \theta_m), \quad (6.2)$$

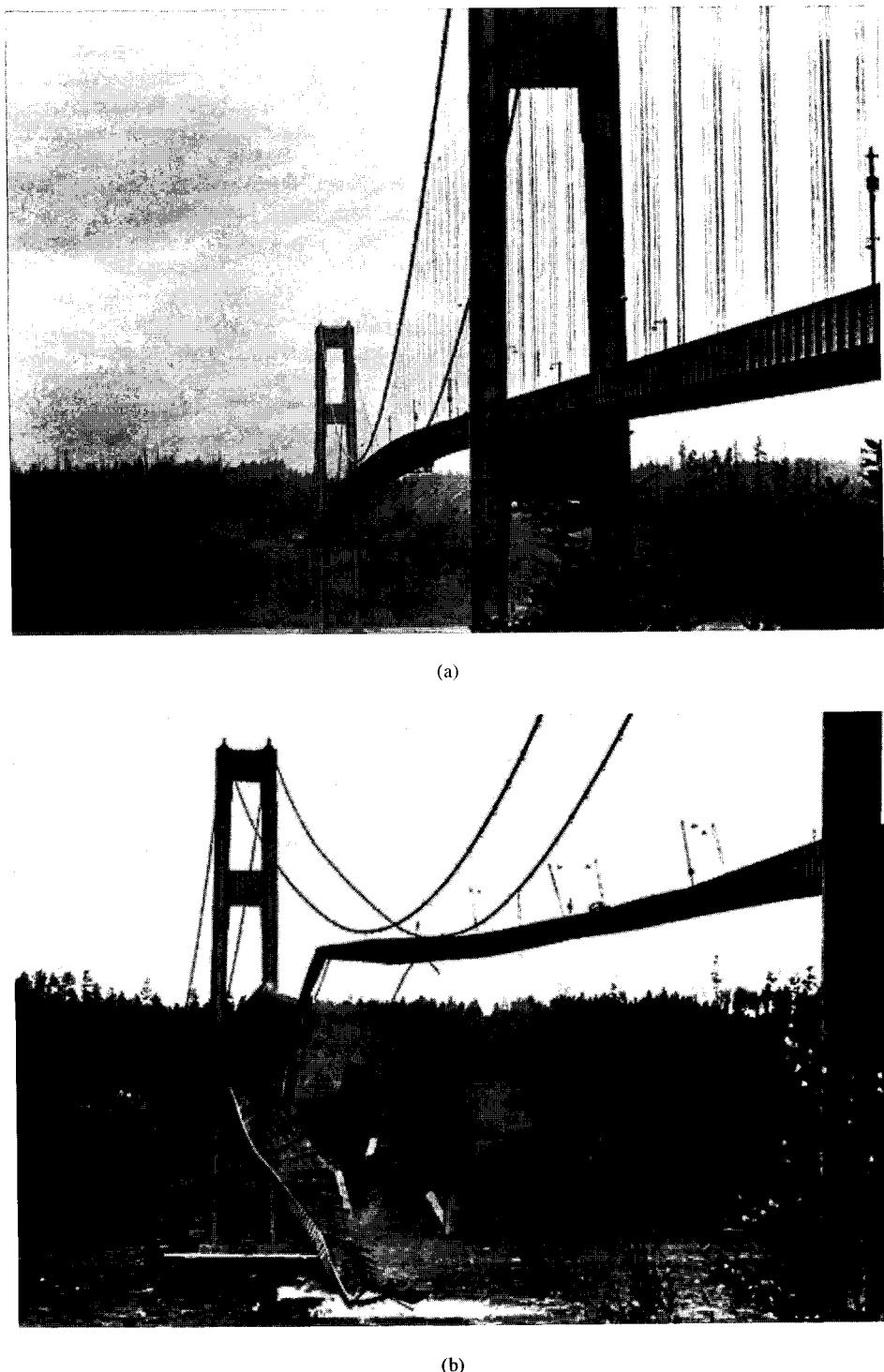
onde  $A_k$  e  $B_m$  são constantes que dependem de  $\sigma_k$ ,  $z_i$ ,  $\alpha_m$ ,  $K$  e  $\omega_m$ . Para se obter uma resposta limitada, os pólos do sistema a malha fechada devem estar no lado esquerdo do plano  $s$ . Assim, **uma condição necessária e suficiente para um sistema com retroação ser estável é que todos os pólos da função de transferência do sistema tenham parte real negativa**. Um sistema é estável se todos os pólos da função de transferência estiverem no semiplano da esquerda. Um sistema será chamado não estável se nem todas as raízes estiverem no semiplano  $s$  da esquerda. Se a equação característica possuir raízes simples sobre o eixo imaginário (eixo  $j\omega$ ) com todas as outras raízes no semiplano  $s$  da esquerda, a saída em regime permanente terá oscilações mantidas para uma entrada limitada, a menos que a entrada seja uma senóide (que é limitada) cuja freqüência é igual à magnitude das raízes no eixo  $j\omega$ . Neste caso, a saída se torna ilimitada. Tal sistema é dito **marginalmente estável**, uma vez que somente certas entradas limitadas (senóides com a freqüência dos pólos) farão a saída se tornar ilimitada. Para um sistema instável, a equação característica possui pelo menos uma raiz no semiplano  $s$  da direita ou raízes  $j\omega$  repetidas; neste caso, a saída se tornará ilimitada para qualquer tipo de entrada.

Por exemplo, se a equação característica de um sistema a malha fechada for

$$(s + 10)(s^2 + 16) = 0,$$

então o sistema é dito marginalmente estável. Se este sistema for excitado por uma senóide de freqüência  $\omega = 4$ , a saída se tornará ilimitada.

Para assegurar a estabilidade de um sistema de controle com retroação, deve-se determinar as raízes da equação característica  $q(s)$ . Contudo, o interesse principal é determinar a resposta à indagação: O sistema é estável? Se forem calculadas as raízes da equação característica a fim de responder a esta questão, foi determinada mais informação do que a necessária. Em consequência têm sido desenvolvidos diversos métodos que fornecem a resposta requerida sim ou não à pergunta sobre a estabilidade. As três abordagens para a questão da estabilidade são (1) a abordagem do plano  $s$ , (2) a abordagem no plano de freqüência ( $j\omega$ ) e (3) a abordagem no domínio do tempo. A abordagem da freqüência ( $j\omega$ ) é esboçada no Cap. 9 e a discussão da abordagem no domínio do tempo é considerada na Seção 6.4.



**Fig. 6.3** Ponte sobre o desfiladeiro de Tacoma (a) ao começarem as oscilações e (b) na ruptura catastrófica.

## 6.2 O CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE ROUTH-HURWITZ

A discussão e a determinação da estabilidade têm ocupado o interesse de muitos engenheiros. Maxwell e Vishnegradsky foram os primeiros a considerar a questão da estabilidade de sistemas dinâmicos. No final dos anos 1800, A. Hurwitz e E. J. Routh publicaram independentemente um método de investigar a estabilidade de um sistema linear [6, 7]. O método de estabilidade de Routh-Hurwitz fornece uma resposta à questão da estabilidade considerando a equação característica do sistema. A equação característica no domínio de Laplace é escrita como

$$\Delta(s) = q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0. \quad (6.3)$$

Para assegurar a estabilidade do sistema é necessário determinar se alguma das raízes de  $q(s)$  se situa no semiplano  $s$  da direita. Se a Eq. (6.3) for escrita sob forma fatorada, tem-se

$$a_n(s - r_1)(s - r_2) \cdots (s - r_n) = 0, \quad (6.4)$$

onde  $r_i = i$ -ésima raiz da equação característica. Multiplicando-se os fatores, tem-se

$$\begin{aligned} q(s) &= a_n s^n - a_n(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)s^{n-1} \\ &\quad + a_n(r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3 + \cdots)s^{n-2} \\ &\quad - a_n(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + \cdots)s^{n-3} + \cdots \\ &\quad + a_n(-1)^n r_1r_2r_3 \cdots r_n = 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Em outras palavras, para uma equação de grau  $n$ , obtém-se

$$\begin{aligned} q(s) &= a_n s^n - a_n(\text{soma de todas as raízes})s^{n-1} \\ &\quad + a_n(\text{soma dos produtos de raízes tomadas duas a duas})s^{n-2} \\ &\quad - a_n(\text{soma dos produtos de raízes tomadas 3 a 3})s^{n-3} \\ &\quad + \cdots + a_n(-1)^n(\text{produto de todas as } n \text{ raízes}) = 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Examinando-se a Eq. (6.5), observa-se que todos os coeficientes do polinômio devem ter o mesmo sinal se todas as raízes estiverem no semiplano  $s$  da esquerda. Também é necessário para um sistema estável que todos os coeficientes sejam não-nulos. Estes requisitos são necessários mas não suficientes. Isto é, sabe-se imediatamente que o sistema é instável se elas não forem atendidas; contudo, se forem satisfeitas, deve-se prosseguir para garantir a estabilidade do sistema. Por exemplo, se a equação característica for

$$q(s) = (s + 2)(s^2 - s + 4) = (s^3 + s^2 + 2s + 8), \quad (6.7)$$

o sistema é instável e, contudo, o polinômio possui todos os coeficientes positivos.

O critério de Routh-Hurwitz é um critério necessário e suficiente para a estabilidade de sistemas lineares. O método foi desenvolvido inicialmente em termos de determinantes, mas se utilizará a formulação mais conveniente de um arranjo em forma de tabela.

O critério de Routh-Hurwitz é baseado na ordenação dos coeficientes da equação característica

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (6.8)$$

em um arranjo ou tabela como a seguir [4]:

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\cdots$
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\cdots$

As linhas adicionais da tabela são então completadas como a seguir:

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	
$s^{n-2}$	$b_{n-1}$	$b_{n-3}$	$b_{n-5}$	
$s^{n-3}$	$c_{n-1}$	$c_{n-3}$	$c_{n-5}$	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
$s^0$	$h_{n-1}$			

onde

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= \frac{(a_{n-1})(a_{n-2}) - a_n(a_{n-3})}{a_{n-1}} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \\ b_{n-3} &= -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

e

$$c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix},$$

e assim por diante. O algoritmo para calcular os elementos do arranjo pode ser elaborado com base em determinantes ou usando a forma da equação para  $b_{n-1}$ .

**O critério de Routh-Hurwitz estabelece que o número de raízes de  $q(s)$  com parte real positiva é igual ao número de trocas de sinal da primeira coluna da tabela de Routh.** Este critério requer que não haja troca de sinal na primeira coluna para se ter um sistema estável. Este requisito é ao mesmo tempo necessário e suficiente.

Quatro casos distintos de configuração da primeira coluna podem ser considerados. Cada um deles deve ser tratado separadamente, sendo requeridas modificações convenientes no procedimento de cálculo do arranjo: (1) Nenhum elemento da primeira coluna é zero; (2) há um zero na primeira coluna, mas alguns outros elementos da linha que contém o zero na primeira coluna são diferentes de zero; (3) há um zero na primeira coluna e os outros elementos da linha são também iguais a zero; e (4) como em (3) com raízes repetidas sobre o eixo  $j\omega$ .

Para ilustrar este método com clareza, serão apresentados vários exemplos para cada caso.

### Caso 1. Nenhum elemento nulo na primeira coluna.

#### EXEMPLO 6.1

#### Sistema de segunda ordem

O polinômio característico de um sistema de segunda ordem é

$$q(s) = a_2s^2 + a_1s + a_0.$$

O arranjo de Routh é escrito como

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & a_2 & a_0 \\ s & a_1 & 0 \\ s^0 & b_1 & 0 \end{array}$$

onde

$$b_1 = \frac{a_1a_0 - (0)a_2}{a_1} = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix} = a_0.$$

Portanto, o requisito para um sistema de segunda ordem ser estável é simplesmente que todos os coeficientes sejam positivos ou todos os coeficientes sejam negativos. ■

#### EXEMPLO 6.2

#### Sistema de terceira ordem

O polinômio característico de um sistema de terceira ordem é

$$q(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0.$$

O arranjo de Routh é

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & a_3 & a_1 \\ s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & c_1 & 0, \end{array}$$

onde

$$b_1 = \frac{a_2a_1 - a_0a_3}{a_2}, \quad \text{e} \quad c_1 = \frac{b_1a_0}{b_1} = a_0.$$

Para um sistema de terceira ordem ser estável, é necessário e suficiente que os coeficientes sejam positivos e  $a_2a_1 > a_0a_3$ . A condição quando  $a_2a_1 = a_0a_3$  resulta no caso de estabilidade marginal, e um par de raízes se localiza sobre o eixo imaginário do plano  $s$ . Este caso marginal é reconhecido como Caso 3 porque há um zero na primeira coluna quando  $a_2a_1 = a_0a_3$  e será discutido no âmbito do Caso 3.

Como exemplo final de equações características que resultam em nenhum elemento zero na primeira coluna, considere-se um polinômio

$$q(s) = (s - 1 + j\sqrt{7})(s - 1 - j\sqrt{7})(s + 3) = s^3 + s^2 + 2s + 24. \quad (6.9)$$

O polinômio satisfaz todas as condições necessárias porque todos os coeficientes existem e são positivos. Assim, usando o arranjo de Routh, tem-se

$s^3$	1	2
$s^2$	1	24
$s^1$	-22	0
$s^0$	24	0

Como aparecem duas trocas de sinal na primeira coluna, descobre-se que duas raízes de  $q(s)$  se encontram no semiplano  $s$  da direita, e o conhecimento prévio é confirmado. ■

**Caso 2. Zeros na primeira coluna enquanto alguns dos outros elementos da linha que contém um zero na primeira coluna são não nulos.** Se somente um elemento do arranjo for nulo, pode-se substituí-lo por um número pequeno positivo  $\epsilon$  que se faz tender a zero depois de completar o arranjo. Por exemplo, seja o seguinte polinômio característico:

$$q(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10. \quad (6.10)$$

O arranjo de Routh é então

$s^5$	1	2	11
$s^4$	2	4	10
$s^3$	$\epsilon$	6	0
$s^2$	$c_1$	10	0
$s^1$	$d_1$	0	0
$s^0$	10	0	0

onde

$$c_1 = \frac{4\epsilon - 12}{\epsilon} = \frac{-12}{\epsilon}, \quad \text{e} \quad d_1 = \frac{6c_1 - 10\epsilon}{c_1} \rightarrow 6.$$

Há duas mudanças de sinal devidas ao grande valor negativo na primeira coluna de  $c_1 = -12/\epsilon$ . Por conseguinte o sistema é instável e duas raízes estão no semiplano  $s$  da direita.

### EXEMPLO 6.3

#### Sistema instável

Como exemplo final do Caso 2, considere-se o polinômio característico

$$q(s) = s^4 + s^3 + s^2 + s + K, \quad (6.11)$$

onde se deseja determinar o ganho  $K$  que resulta em estabilidade marginal. O arranjo de Routh é então

$s^4$	1	1	$K$
$s^3$	1	1	0
$s^2$	$\epsilon$	$K$	0
$s^1$	$c_1$	0	0
$s^0$	$K$	0	0

onde

$$c_1 = \frac{\epsilon - K}{\epsilon} \rightarrow \frac{-K}{\epsilon}.$$

Assim, para qualquer valor de  $K$  maior do que zero o sistema é instável. Além disto, como o último termo na primeira coluna é igual a  $K$ , um valor negativo de  $K$  resultará em um sistema instável. Conseqüentemente, o sistema é instável para todos os valores do ganho  $K$ . ■

**Caso 3. Zeros na primeira coluna, e os outros elementos da linha que contêm o zero são também iguais a zero.** O Caso 3 ocorre quando todos os elementos de uma linha são iguais a zero ou quando a linha consiste de um único elemento que é igual a zero. Esta condição ocorre quando o polinômio contém singularidades que são localizadas simetricamente em torno da origem do plano

*s*. Portanto, o Caso 3 acontece quando ocorrem fatores como  $(s + \sigma)(s - \sigma)$  ou  $(s + j\omega)(s - j\omega)$ . Este problema é contornado usando-se o **polinômio auxiliar**,  $U(s)$ , que precede imediatamente a linha de elementos zero no arranjo de Routh. A ordem do polinômio auxiliar é sempre par e indica o número de pares de raízes simétricas.

Para ilustrar esta abordagem, seja considerar um sistema de terceira ordem com um polinômio característico:

$$q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K, \quad (6.12)$$

onde  $K$  é um ganho de malha ajustável. O arranjo de Routh é então

$s^3$	1	4
$s^2$	2	$K$
$s^1$	$\frac{8 - K}{2}$	0
$s^0$	$K$	0

Para um sistema estável, é necessário que

$$0 < K < 8.$$

Quando  $K = 8$ , há duas raízes sobre o eixo  $j\omega$  e um caso de estabilidade marginal. Note-se que se obtém uma linha de zeros (Caso 3) quando  $K = 8$ . O polinômio auxiliar,  $U(s)$ , é a equação da linha que precede a linha de zeros. A equação da linha que precede a linha de zeros, neste caso, é obtida a partir da linha  $s^2$ . É bom lembrar que esta linha contém as potências pares de  $s$  e, por conseguinte, neste caso se tem

$$U(s) = 2s^2 + Ks^0 = 2s^2 + 8 = 2(s^2 + 4) = 2(s + j2)(s - j2). \quad (6.13)$$

Para mostrar que o polinômio auxiliar,  $U(s)$ , é na verdade um fator do polinômio característico, divide-se  $q(s)$  por  $U(s)$  para obter

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}s + 1 \\ 2s^2 + 8 \overline{s^3 + 2s^2 + 4s + 8} \\ \hline s^3 + 4s \\ \hline 2s^2 + 8 \\ \hline 2s^2 + 8 \end{array}$$

Quando  $K = 8$ , os fatores do polinômio característico são

$$q(s) = (s + 2)(s + j2)(s - j2). \quad (6.14)$$

A resposta do caso marginal é uma oscilação não aceitável.

**Caso 4. Equação característica com raízes repetidas sobre o eixo  $j\omega$ .** Se as raízes da equação característica sobre o eixo  $j\omega$  forem simples, o sistema não é estável nem instável; é chamado, em vez disto, marginalmente estável, uma vez que possui um modo senoidal não amortecido. Se as raízes sobre o eixo  $j\omega$  forem repetidas, a resposta do sistema será instável, com a forma  $t[\operatorname{sen}(\omega t + \phi)]$ . Os critérios de Routh-Hurwitz não revelam esta forma de instabilidade [21].

Considere-se um sistema com o polinômio característico

$$q(s) = (s + 1)(s + j)(s - j)(s + j)(s - j) = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1.$$

O arranjo de Routh é

$s^5$	1	2	1
$s^4$	1	2	1
$s^3$	$\epsilon$	$\epsilon$	0
$s^2$	1	1	
$s^1$	$\epsilon$	0	
$s^0$	1		

onde  $\epsilon \rightarrow 0$ . Observe-se a ausência de troca de sinal, uma condição que indica falsamente que o sistema é marginalmente estável. A resposta impulsional do sistema cresce com o tempo segundo  $t[\operatorname{sen}($

$+ \phi]$ . O polinômio auxiliar na linha  $s^2$  é  $(s^2 + 1)$  e o polinômio auxiliar na linha  $s^4$  é  $(s^4 + 2s^2 + 1) = (s^2 + 1)^2$ , indicando raízes repetidas sobre o eixo  $j\omega$ .

#### EXEMPLO 6.4

#### Controle de um robô

Seja considerar o controle de um braço robótico, como mostrado na Fig. 6.4. Há uma previsão de que, pelo ano 2000, haverá cerca de 100.000 robôs em todo o mundo [10]. O robô mostrado na Fig. 6.4 é um sistema microrrobótico de seis pernas que utiliza pernas altamente flexíveis com controladores de alto ganho que podem se tornar instáveis e oscilar. Sob esta condição, tem-se o polinômio característico

$$q(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 24s^2 + 3s + 63. \quad (6.15)$$

O arranjo de Routh é

$s^5$	1	4	3
$s^4$	1	24	63
$s^3$	-20	-60	0
$s^2$	21	63	0
$s^1$	0	0	0

Por conseguinte, o polinômio auxiliar é

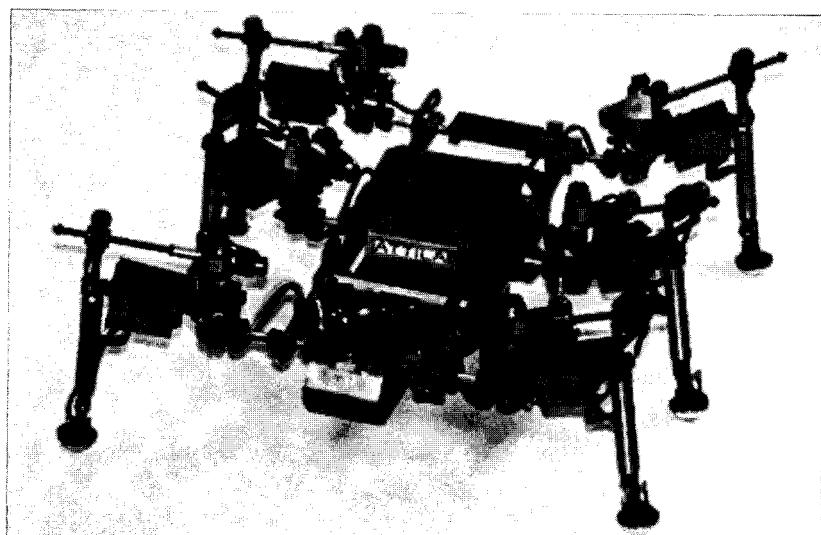
$$U(s) = 21s^2 + 63 = 21(s^2 + 3) = 21(s + j\sqrt{3})(s - j\sqrt{3}), \quad (6.16)$$

que indica que há duas raízes sobre o eixo imaginário. Para examinar as raízes restantes, divide-se o polinômio característico pelo polinômio auxiliar para obter

$$\frac{q(s)}{s^2 + 3} = s^3 + s^2 + s + 21.$$

Estabelecendo um arranjo de Routh para esta equação, tem-se

$s^3$	1	1
$s^2$	1	21
$s^1$	-20	0
$s^0$	21	0



**Fig. 6.4** Um sistema microrrobótico completamente integrado, com seis pernas. O projeto com seis pernas fornece o máximo de agilidade. As pernas também fornecem um sistema sensorial exclusivo para interação com o ambiente. É equipado com uma rede de sensores que compreende 150 sensores de 12 tipos diferentes. As pernas são instrumentadas de modo que o robô possa determinar o relevo do terreno, a textura da superfície, a dureza e mesmo a cor. A câmera giroestabilizada e um telêmetro podem ser usados para obter dados além do alcance imediato do robô. Este sistema de alto desempenho é capaz de andar rapidamente, passar sobre obstáculos e realizar movimentos dinâmicos. (Cortesia da IS Robotics Corporation.)

As duas mudanças de sinal na primeira coluna indicam a presença de duas raízes no semiplano  $s$  da direita e o sistema é instável. As raízes no semiplano  $s$  da direita são  $s = +1 \pm j\sqrt{6}$ . ■

### EXEMPLO 6.5

#### Controle de solda

Nas fábricas de automóveis de hoje são usados grandes robôs de solda. O cabeçote de solda é deslocado para diferentes pontos do corpo do automóvel e se requer uma resposta rápida e precisa. O diagrama de blocos do sistema de posicionamento de um cabeçote de solda está mostrado na Fig. 6.5. Deseja-se determinar a faixa de valores de  $K$  e de  $a$  para a qual o sistema é estável. A equação característica é

$$1 + G(s) = 1 + \frac{K(s + a)}{s(s + 1)(s + 2)(s + 3)} = 0.$$

Portanto  $q(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + (K + 6)s + Ka = 0$ . Estabelecendo-se o arranjo de Routh, resulta

$s^4$	1	11	$Ka$
$s^3$	6	$(K + 6)$	
$s^2$	$b_3$	$Ka$	
$s^1$	$c_3$		
$s^0$	$Ka$		

onde

$$b_3 = \frac{60 - K}{6}, \quad \text{e} \quad c_3 = \frac{b_3(K + 6) - 6Ka}{b_3}.$$

O coeficiente  $c_3$  define a faixa de  $K$  e de  $a$ , enquanto  $b_3$  requer que  $K$  seja inferior a 60. Fazendo-se  $c_3 = 0$ , obtém-se

$$(K - 60)(K + 6) + 36Ka = 0.$$

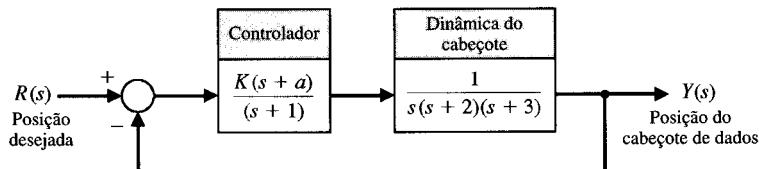


Fig. 6.5 Controle de posição de um cabeçote de solda.

A relação requerida entre  $K$  e  $a$  é então

$$a \leq \frac{(60 - K)(K + 6)}{36K}$$

quando  $a$  for positivo. Assim, se  $K = 40$ , será necessário  $a \leq 0,639$ . ■

A forma geral da equação característica de um sistema de ordem  $n$  é

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + \omega_n^n = 0.$$

Divide-se tudo por  $\omega_n^n$  e usa-se  $\hat{s} = s/\omega_n$  para obter a forma normalizada da equação característica:

$$\hat{s}^n + b\hat{s}^{n-1} + c\hat{s}^{n-2} + \dots + 1 = 0.$$

Por exemplo, normaliza-se

$$s^3 + 5s^2 + 2s + 8 = 0$$

dividindo-se tudo por  $8 = \omega_n^3$ , obtendo-se

$$\frac{s^3}{\omega_n^3} + \frac{5}{2}\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2}{4}\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1 = 0,$$

**TABELA 6.1 O Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz**

<i>n</i>	Equação Característica	Critério
2	$s^2 + bs + 1 = 0$	$b > 0$
3	$s^3 + bs^2 + cs + 1 = 0$	$bc - 1 > 0$
4	$s^4 + bs^3 + cs^2 + ds + 1 = 0$	$bcd - d^2 - b^2 > 0$
5	$s^5 + bs^4 + cs^3 + ds^2 + es + 1 = 0$	$bcd + b - d^2 - b^2e > 0$
6	$s^6 + bs^5 + cs^4 + ds^3 + es^2 + fs + 1 = 0$	$(bcd + bf - d^2 - b^2e)e + b^2c - bd - bc^2f - f^2 + bfe + cdf > 0$

Nota: As equações são normalizadas por  $(\omega_n)^n$ .

ou

$$\hat{s}^3 + 2.5\hat{s}^2 + 0.5\hat{s} + 1 = 0,$$

onde  $\hat{s} = s/\omega_n$ . Neste caso,  $b = 2.5$  e  $c = 0.5$ . Usando-se esta forma normalizada da equação característica, sumariza-se o critério de estabilidade para equações características até o sexto grau, como está fornecido na Tabela 6.1. Observe-se que  $bc = 1.25$  e que o sistema é estável.

### 6.3 A ESTABILIDADE RELATIVA DE SISTEMAS DE CONTROLE COM RETROAÇÃO

A verificação da estabilidade usando o critério de Routh-Hurwitz fornece somente uma resposta parcial à questão de estabilidade. O critério de Routh-Hurwitz assegura a estabilidade absoluta de um sistema determinando se alguma das raízes da equação característica está no semiplano  $s$  da direita. Contudo, se o sistema satisfizer e for absolutamente estável, é desejável determinar a **estabilidade relativa**; isto é, é necessário investigar o amortecimento relativo de cada uma das raízes da equação característica. A estabilidade relativa de um sistema pode ser definida como uma propriedade que é medida pela parte real relativa de cada raiz ou par de raízes. Assim a raiz  $r_2$  é relativamente mais estável que as raízes  $r_1$  e  $\hat{r}_1$ , como está mostrado na Fig. 6.6. A estabilidade relativa de um sistema também pode ser definida em termos dos coeficientes de amortecimento  $\zeta$  relativos de cada par de raízes complexas e portanto em termos da velocidade de resposta e da ultrapassagem em vez do tempo de assentamento.

Assim, a investigação da estabilidade relativa de cada uma das raízes é evidentemente necessária porque, como foi visto no Cap. 5, a localização dos pólos a malha fechada no plano  $s$  determina o desempenho do sistema. Portanto, é imperativo que se reexamine o polinômio característico  $q(s)$  e se considerem diversos métodos para a determinação da estabilidade relativa.

Como a estabilidade relativa de um sistema é ditada pela localização das raízes da equação característica, a primeira abordagem usando uma formulação no plano  $s$  é estender o critério de Routh-Hurwitz para assegurar estabilidade relativa. Isto pode ser feito simplesmente usando-se uma substituição de variáveis, que desloca os eixos do plano  $s$  de modo a utilizar o critério de Routh-Hurwitz. Examinando-se a Fig. 6.6, observa-se que um deslocamento do eixo vertical do plano  $s$  para  $-\sigma_1$  resultará nas raízes  $r_1$  e  $\hat{r}_1$  aparecendo sobre o eixo deslocado. O valor correto para se deslocar o eixo vertical deve ser obtido na base de tentativa e erro. Assim, sem resolver o polinômio  $q(s)$  de quinta ordem, é possível determinar a parte real das raízes dominantes  $r_1$  e  $\hat{r}_1$ .

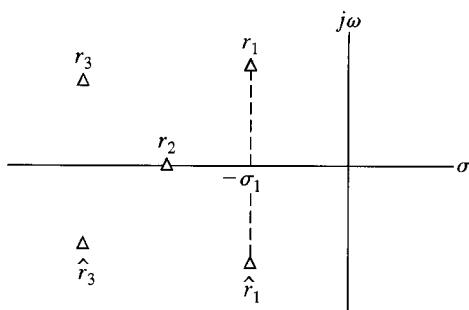


Fig. 6.6 Localização de raízes no plano  $s$ .

#### EXEMPLO 6.6

#### Deslocamento de eixos

Considere-se a equação característica simples de terceira ordem

$$q(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4. \quad (6.17)$$

Como primeira tentativa, seja  $s_n = s + 2$  e observe-se que se obtém um arranjo de Routh sem ocorrência de zero na primeira coluna. Contudo, ao se definir a variável deslocada  $s_n$  igual a  $s + 1$ , obtém-se

$$(s_n - 1)^3 + 4(s_n - 1)^2 + 6(s_n - 1) + 4 = s_n^3 + s_n^2 + s_n + 1. \quad (6.18)$$

Então, o arranjo de Routh é estabelecido como

$s_n^3$	1	1
$s_n^2$	1	1
$s_n^1$	0	0
$s_n^0$	1	0

Há raízes sobre o eixo imaginário deslocado que podem ser obtidas a partir do polinômio auxiliar

$$U(s_n) = s_n^2 + 1 = (s_n + j)(s_n - j) = (s + 1 + j)(s + 1 - j). \blacksquare \quad (6.19)$$

O deslocamento de eixo do plano  $s$  para assegurar a estabilidade relativa de um sistema é uma abordagem muito útil, particularmente para sistemas de ordem elevada com diversos pares de raízes a malha fechada complexas conjugadas.

## 6.4 A ESTABILIDADE DE SISTEMAS COM VARIÁVEIS DE ESTADO

A estabilidade de um sistema modelado por meio de diagrama de fluxo com variáveis de estado pode ser determinada prontamente. A estabilidade de um sistema com função de transferência  $T(s)$  relacionando saída e entrada pode ser determinada examinando-se o polinômio do denominador de  $T(s)$ . Por conseguinte, se a função de transferência for escrita como

$$T(s) = \frac{p(s)}{q(s)},$$

onde  $p(s)$  e  $q(s)$  são polinômios em  $s$ , então a estabilidade do sistema está representada pelas raízes de  $q(s)$ . O polinômio  $q(s)$ , quando igualado a zero, é chamado de equação característica. As raízes da equação característica devem estar no semiplano  $s$  da esquerda para que o sistema apresente uma resposta temporal exata. Portanto, para assegurar a estabilidade de um sistema representado por uma função de transferência, investiga-se a equação característica e se utiliza o critério de Routh-Hurwitz. Se o sistema que está sendo investigado for representado por um diagrama de fluxo de sinal com variáveis de estado, obtém-se a equação característica calculando o determinante do diagrama de fluxo. Como ilustração deste método, seja investigar a estabilidade do sistema do Exemplo 3.1.

### EXEMPLO 6.7

#### Estabilidade de um sistema

A função de transferência  $T(s)$  examinada no Exemplo 3.1 é

$$T(s) = \frac{2s^2 + 8s + 6}{s^3 + 8s^2 + 16s + 6}. \quad (6.20)$$

O polinômio característico para este sistema é

$$q(s) = s^3 + 8s^2 + 16s + 6. \quad (6.21)$$

Este polinômio característico também é obtido diretamente do modelo em diagrama de fluxo de sinal na Fig. 3.8 ou do mostrado na Fig. 3.10. Usando o critério de Routh-Hurwitz, acha-se que o sistema é estável e que todas as raízes de  $q(s)$  estão no semiplano  $s$  da esquerda. ■

Determina-se freqüentemente o modelo em diagrama de fluxo com variáveis de estado diretamente a partir de um conjunto de equações diferenciais de estado. Neste caso, pode-se usar o diagrama de fluxo diretamente na determinação da estabilidade do sistema obtendo-se a equação característica a partir do determinante  $\Delta(s)$  do diagrama de fluxo. Uma ilustração desta abordagem auxiliará a compreensão deste método.

### EXEMPLO 6.8

#### Estabilidade de um sistema de segunda ordem

Um sistema de segunda ordem é descrito por duas equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = +1x_2 - Kx_1 + Ku,$$

onde a notação com um ponto sobre a variável implica na primeira derivada desta variável e  $u(t)$  é a entrada. O diagrama de fluxo deste conjunto de equações diferenciais está mostrado na Fig. 6.7.

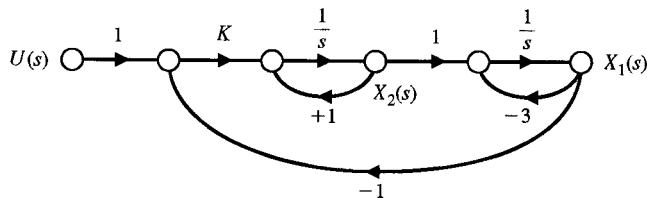


Fig. 6.7 Modelo em diagrama de fluxo para as equações em variáveis de estado do Exemplo 6.8.

Usando a fórmula do ganho de Mason para o diagrama de fluxo de sinal, observam-se três malhas:

$$L_1 = s^{-1}, \quad L_2 = -3s^{-1}, \quad \text{e} \quad L_3 = -Ks^{-2},$$

onde  $L_1$  e  $L_2$  não compartilham nenhum nó. Por conseguinte, o determinante é

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_2 = 1 - (s^{-1} - 3s^{-1} - Ks^{-2}) + (-3s^{-2}).$$

Multiplica-se por  $s^2$  a fim de obter a equação característica

$$s^2 + 2s + (K - 3) = 0.$$

Como todos os coeficientes devem ser positivos, é necessário  $K > 3$  para estabilidade. ■

Um método de obtenção da equação característica diretamente da equação diferencial vetorial se baseia no fato de que a solução do sistema livre é uma função exponencial. A equação diferencial vetorial sem sinais de entrada é

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}, \quad (6.22)$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vetor de estado. A solução é de forma exponencial e se pode definir uma constante  $\lambda$  tal que a solução do sistema para uma variável de estado seja  $x_i(t) = k_i e^{\lambda i t}$ . Os  $\lambda_i$  são chamados de raízes características ou de autovalores do sistema e são simplesmente as raízes da equação característica. Fazendo-se  $\mathbf{x} = \mathbf{k} e^{\lambda t}$  e substituindo-se este valor na Eq. (6.22), tem-se

$$\lambda \mathbf{k} e^{\lambda t} = \mathbf{A} \mathbf{k} e^{\lambda t}, \quad (6.23)$$

ou

$$\lambda \mathbf{x} = \mathbf{Ax}. \quad (6.24)$$

A Eq. (6.24) pode ser reescrita como

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (6.25)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade e  $\mathbf{0}$  é a matriz nula. A solução deste sistema de equações simultâneas possui uma solução não-trivial se e somente se o determinante se anular; isto é somente se

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0. \quad (6.26)$$

A equação de ordem  $n$  em  $\lambda$  resultante do cálculo do determinante é a equação característica, e a estabilidade do sistema pode ser prontamente determinada. Seja reconsiderar o sistema de terceira ordem descrito no Exemplo 3.2 para ilustrar esta abordagem.

## EXEMPLO 6.9

### Sistema epidêmico fechado

A equação diferencial vetorial do sistema epidêmico é dada na Eq. (3.55) e repetida aqui como

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta & 0 \\ \beta & -\gamma & 0 \\ \alpha & \gamma & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

A equação característica é então

$$\begin{aligned} \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \det \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta & 0 \\ \beta & -\gamma & 0 \\ \alpha & \gamma & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \det \begin{bmatrix} (\lambda + \alpha) & \beta & 0 \\ -\beta & (\lambda + \gamma) & 0 \\ -\alpha & -\gamma & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda[(\lambda + \alpha)(\lambda + \gamma) + \beta^2] \\ &= \lambda[\lambda^2 + (\alpha + \gamma)\lambda + (\alpha\gamma + \beta^2)] = 0. \end{aligned}$$

Obtém-se assim a equação característica do sistema e ela é semelhante à que foi obtida na Eq. (3.57) pelos métodos de diagrama de fluxo. A raiz adicional  $\lambda = 0$  resulta da definição de  $x_3$  como a integral de  $(\alpha x_1 + \gamma x_2)$  e  $x_3$  não afeta as outras variáveis. Assim, a raiz  $\lambda = 0$  indica a integração conectada com  $x_3$ . A equação característica indica que o sistema é marginalmente estável quando  $(\alpha + \gamma) > 0$  e  $(\alpha\gamma + \beta^2) > 0$ . ■

Como um outro exemplo, seja reconsiderar o pêndulo invertido descrito no Exemplo 3.4. A matriz de sistema é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(mg/M) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & g/l & 0 \end{bmatrix}.$$

A equação característica pode ser obtida a partir do determinante de  $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$  como a seguir:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & mg/M & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -(g/l) & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \left[ \lambda \left( \lambda^2 - \frac{g}{l} \right) \right] = \lambda^2 \left( \lambda^2 - \frac{g}{l} \right) = 0.$$

A equação característica indica que há duas raízes em  $\lambda = 0$ , uma raiz em  $\lambda = +\sqrt{g/l}$  e uma raiz em  $\lambda = -\sqrt{g/l}$ . Portanto, o sistema é instável, porque há uma raiz no semiplano  $s$  da direita em  $\lambda = +\sqrt{g/l}$ . As duas raízes em  $\lambda = 0$  resultarão também em uma resposta ilimitada.

## 6.5 EXEMPLO DE PROJETO: CONTROLE DE MANOBRA DE VEÍCULO SOBRE LAGARTAS

O projeto de um controle de manobra para um veículo sobre lagartas envolve a seleção de dois parâmetros [8]. Na Fig. 6.8, o sistema mostrado na parte (a) possui o modelo mostrado na parte (b). As duas lagartas são operadas com velocidades diferentes a fim de manobrar o veículo. Selecionar  $K$  e  $a$  de modo que o sistema seja estável e que o erro estacionário a um comando em rampa seja menor ou igual a 24% da magnitude do comando.

A equação característica do sistema com retroação é

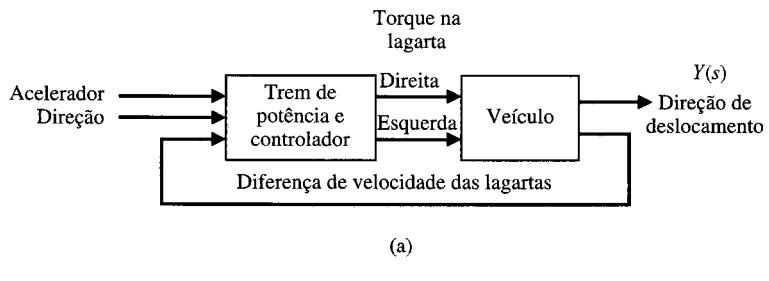
$$1 + G_c G(s) = 0,$$

ou

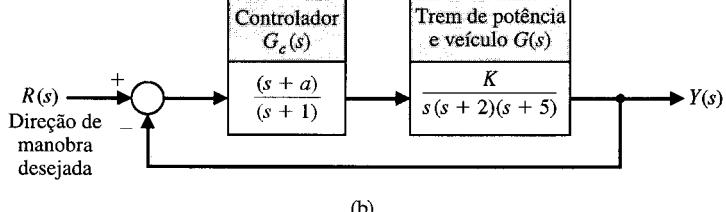
$$1 + \frac{K(s+a)}{s(s+1)(s+2)(s+5)} = 0. \quad (6.27)$$

Tem-se, por conseguinte,

$$s(s+1)(s+2)(s+5) + K(s+a) = 0,$$



(a)



**Fig. 6.8** (a) Sistema de controle de manobra de um veículo com duas lagartas.  
(b) Diagrama de blocos.

ou

$$s^4 + 8s^3 + 17s^2 + (K + 10)s + Ka = 0. \quad (6.28)$$

Para determinar a região estável para  $K$  e  $a$ , constrói-se o arranjo de Routh como

$s^4$	1	17	$Ka$
$s^3$	8	$(K + 10)$	0
$s^2$	$b_3$	$Ka$	
$s^1$	$c_3$		
$s^0$	$Ka$		

onde

$$b_3 = \frac{126 - K}{8}, \quad \text{e} \quad c_3 = \frac{b_3(K + 10) - 8Ka}{b_3}.$$

Para que os elementos da primeira coluna sejam positivos, é necessário que  $Ka$ ,  $b_3$  e  $c_3$  sejam positivos. Portanto, é necessário que

$$\begin{aligned} K &< 126, \\ Ka &> 0, \\ (K + 10)(126 - K) - 64Ka &> 0. \end{aligned} \quad (6.29)$$

A região de estabilidade para  $K > 0$  está mostrada na Fig. 6.9. O erro estacionário para uma entrada em rampa  $r(t) = At$ ,  $t > 0$  é

$$e_{ss} = A/K_v,$$

onde

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_c G = Ka/10.$$

Por conseguinte, tem-se

$$e_{ss} = \frac{10A}{Ka}. \quad (6.30)$$

Para  $e_{ss}$  ser igual a 23,8% de  $A$ , será requerido  $Ka = 42$ . Isto pode ser satisfeito pelo ponto selecionado na região estável para  $K = 70$  e  $a = 0,6$ , como está mostrado na Fig. 6.9. Um outro projeto aceitável seria atendido para  $K = 50$  e  $a = 0,84$ . Pode ser calculada uma série de combinações de valores de  $K$  e de  $a$  que podem satisfazer  $Ka = 42$ , permanecendo no interior da região estável, e que serão soluções de projeto aceitáveis. Contudo, nem todos os valores selecionados de  $K$  e de  $a$  permanecerão no interior da região estável. Note-se que  $K$  não pode exceder 126.

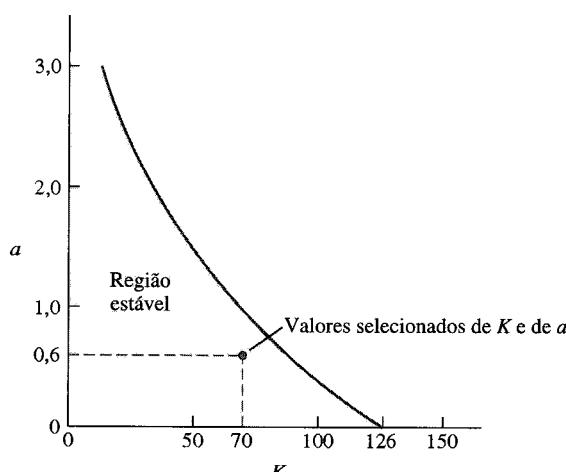


Fig. 6.9 A região estável.

## 6.6 ESTABILIDADE DE SISTEMA USANDO O MATLAB

Esta seção começa com uma discussão do método de estabilidade de Routh-Hurwitz. Será visto como o MATLAB pode auxiliar na análise de estabilidade fornecendo um método fácil e exato para o cálculo dos pólos da equação característica. Para o caso da equação característica como uma função de um único parâmetro, será possível gerar um gráfico exibindo o deslocamento dos pólos à medida que o parâmetro varia. A seção termina com um exemplo.

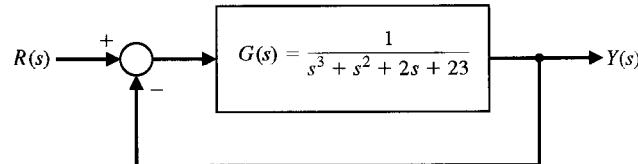
A função introduzida nesta seção é a função `for`, usada para repetir um certo grupo de comandos um número específico de vezes.

**Estabilidade de Routh-Hurwitz.** Como assinalado anteriormente, o critério de Routh-Hurwitz é um critério necessário e suficiente para estabilidade. Dada uma equação característica com coeficientes fixos, pode-se usar Routh-Hurwitz para determinar o número de raízes no semiplano  $s$  da direita. Por exemplo, considere-se a equação

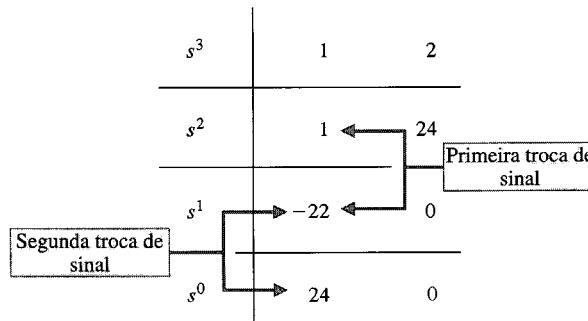
$$q(s) = s^3 + s^2 + 2s + 24 = 0$$

associada com o sistema de controle a malha fechada mostrado na Fig. 6.10. A tabela de Routh-Hurwitz correspondente está mostrada na Fig. 6.11. As duas trocas de sinal na primeira coluna indicam que há duas raízes do polinômio característico no semiplano  $s$  da direita; portanto, o sistema a malha fechada é instável. Com o uso do MATLAB, pode-se verificar o resultado do método de Routh-Hurwitz calculando-se diretamente as raízes da equação característica, como está mostrado na Fig. 6.12, por meio da função `roots`. É bom lembrar que a função `roots` calcula as raízes de um polinômio.

Todas as vezes em que a equação característica for função de um único parâmetro, pode-se utilizar o método de Routh-Hurwitz para determinar a faixa de valores que o parâmetro pode assumir



**Fig. 6.10** Sistema de controle a malha fechada com  $T(s) = Y(s)/R(s) = 1/(s^3 + s^2 + 2s + 24)$ .



**Fig. 6.11** Arranjo de Routh para o sistema de controle a malha fechada com  $T(s) = Y(s)/R(s) = 1/(s^3 + s^2 + 2s + 24)$ .

```
>>numg=[1]; deng=[1 1 2 23];
>>[num,den]=cloop(numg,deng);
>>roots(den)
```

ans =

-3.0000

1.0000 + 2.6458i  
1.0000 - 2.6458i

Raízes instáveis

**Fig. 6.12** Usando a função `roots` para calcular os pólos do sistema a malha fechada do sistema mostrado na Fig. 6.10.

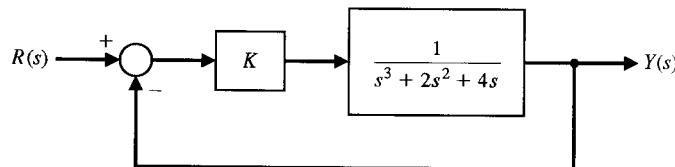


Fig. 6.13 Sistema de controle a malha fechada com  
 $T(s) = Y(s)/R(s) = K(s^3 + 2s^2 + 4s + K)$ .

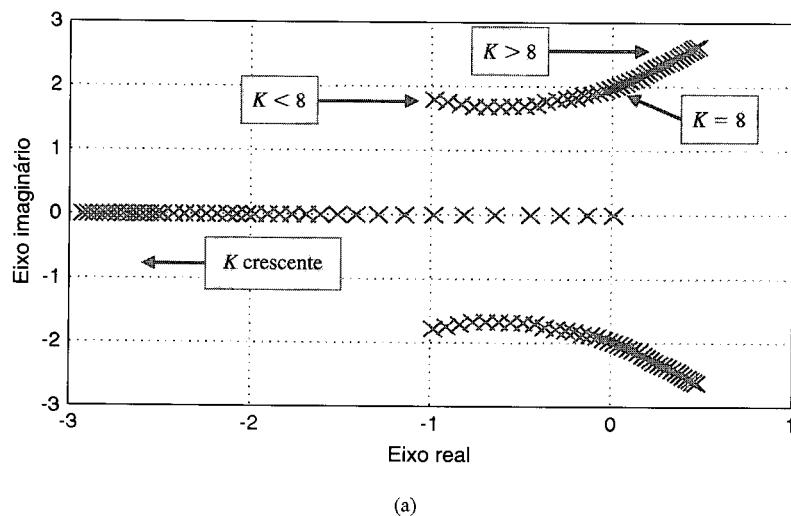
mantendo a estabilidade. Considere-se o sistema com retroação a malha fechada da Fig. 6.13. A equação característica é

$$q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K = 0.$$

Usando a abordagem de Routh-Hurwitz, encontra-se  $0 \leq K \leq 8$  como requisito de estabilidade (ver a Eq. 6.12). Pode-se usar o MATLAB para verificar este resultado graficamente. Como está mostrado na Fig. 6.14(a), cria-se o vetor de valores de  $K$  para os quais se deseja calcular as raízes da equação característica. Em seguida, usando-se a função `roots`, são calculadas e plotadas as raízes da equação característica, como está mostrado na Fig. 6.14(b). Pode-se ver que, à medida que  $K$  aumenta, raízes da equação característica se movem na direção do semiplano  $s$  da direita quando  $K$  tende a 8, e entram finalmente no semiplano  $s$  da direita quando  $K > 8$ .

O script da Fig. 6.14 contém a função `for`. Esta função fornece um mecanismo para executar de forma repetitiva uma série de declarações um certo número de vezes. A função `for` em conexão com a declaração `end` define um laço de cálculo repetitivo. A Fig. 6.15 descreve o formato da função `for` e fornece um exemplo ilustrativo da sua utilização. O exemplo define um laço que se repete 10 vezes. Durante a  $i$ -ésima iteração, onde  $1 \leq i \leq 10$ , o  $i$ -ésimo elemento do vetor  $a$  é feito igual a 20, e o escalar  $b$  é recalculado.

O método de Routh-Hurwitz permite estabelecer declarações definitivas referentes à estabilidade absoluta de um sistema linear. O método não se aplica à obtenção da estabilidade relativa, que é diretamente relacionada com a localização das raízes da equação característica. O método de Routh-



(a)

```
% Este script calcula as raízes da equação característica
% q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K for 0 < K < 20
%
K=[0:0.5:20];
for i=1:length(K)
    q=[1 2 4 K(i)];
    p(:,i)=roots(q);
end
plot(real(p),imag(p),'x'), grid
xlabel ('Eixo real'), ylabel ('Eixo imaginário')
```

(b)

Fig. 6.14 (a) Gráfico da localização das raízes de  $q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K$  para  $0 \leq K \leq 20$ . (b) Script em MATLAB.

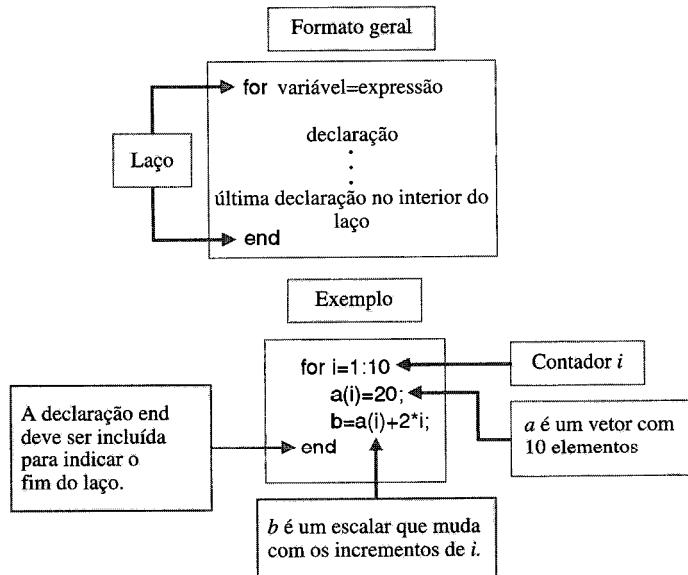


Fig. 6.15 A função **for** e um exemplo ilustrativo.

Hurwitz diz quantos pólos estão no semiplano *s* da direita, mas não a localização específica dos pólos. Com o MATLAB, pode-se calcular, de modo fácil, os pólos explicitamente, permitindo assim comentar a respeito da estabilidade relativa do sistema.

#### EXEMPLO 6.10

#### Controle de veículo sobre lagartas

O diagrama de blocos do sistema de controle para um veículo sobre duas lagartas está mostrado na Fig. 6.8. O objetivo do projeto é descobrir valores de *a* e de *K* tais que o sistema seja estável e que o erro estacionário a uma entrada em rampa seja inferior ou igual a 24% do comando. Pode-se usar o critério de Routh-Hurwitz para auxiliar a busca de valores apropriados para *a* e *K*. A equação característica a malha fechada é

$$q(s) = s^4 + 8s^3 + 17s^2 + (K + 10)s + aK = 0.$$

Usando a tabela de Routh, descobre-se que, para haver estabilidade, é necessário

$$K < 126, \quad aK > 0.$$

Para valores positivos de *K*, pode-se restringir a busca a  $0 < K < 126$  e  $a > 0$ . A abordagem será a utilização do MATLAB para encontrar uma região parametrizada de *a* versus *K* na qual a estabilidade é assegurada. Em seguida, pode-se descobrir um conjunto de pares (*a*, *K*) pertencente à região estável tal que seja alcançada a especificação de erro em estado estacionário. Este procedimento, mostrado na Fig. 6.16, envolve a seleção de uma faixa de valores de *a* e de *K* e o cálculo das raízes do polinômio característico para valores específicos de *a* e de *K*. Para cada valor de *K*, acha-se o primeiro valor de *a* que resulta em pelo menos uma raiz da equação característica no semiplano *s* da direita. O processo é repetido até que toda a faixa de valores selecionada para *a* e *K* tenha sido esgotada. O gráfico dos pares (*a*, *K*) define a separação entre as regiões estável e instável.

A região à esquerda do gráfico de *a* versus *K* na Fig. 6.16 é a região estável, uma vez que corresponde a  $K < 126$ .

Admitindo-se que  $r(t) = At$ ,  $t > 0$ , então o erro estacionário é

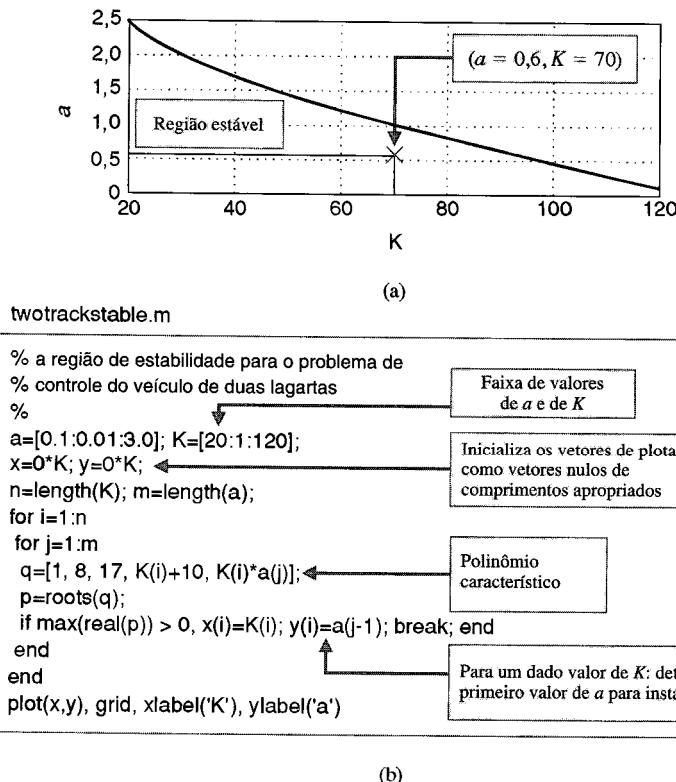
$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s(s+1)(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+2)(s+5) + K(s+a)} \cdot \frac{A}{s^2} = \frac{10A}{aK},$$

onde foi usado o fato de que

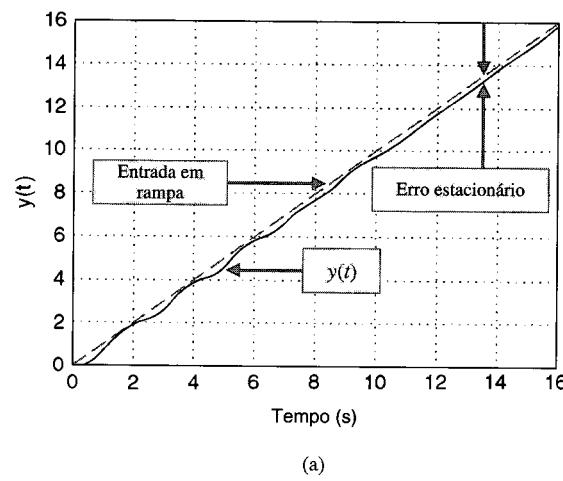
$$E(s) = \frac{1}{1 + G_c G(s)} R(s) = \frac{s(s+1)(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+2)(s+5) + K(s+a)} R(s).$$

Dada a especificação de estado estacionário,  $e_{ss} < 0,24A$ , descobre-se que a especificação é atendida quando

$$\frac{10A}{aK} < 0,24A,$$



**Fig. 6.16** (a) Regi o de estabilidade para  $a$  e  $K$  para o controle de manobra do v e culo com duas lagartas.  
 (b) Script em MATLAB.



aKrampt.m

```

% Este script calcula a resposta do problema do
% controle da manobra de um v e culo sobre duas
% lagartas com  $a=0,6$  e  $K=70$ 
%
t=[0:0.01:10]; u=t; % u = entrada em rampa unit ria
numgc=[1 0.6]; dengc=[1 1];
numg=[70]; deng=[1 7 10 0];
[numa,dena]=series(numgc,dengc,numg,deng);
[num,den]=cloop(numa,dena);
[y,x]=lsim(num,den,u,t); % Simula o linear
plot(t,y,t,u), grid
xlabel('Tempo [s]'), ylabel('y(t)')

```

(b)

**Fig. 6.17** (a) Resposta do controle de manobra de um v e culo com duas lagartas a uma entrada em rampa para  $a = 0,6$  e  $K = 70$ . (b) Script em MATLAB.

ou

$$aK > 41,67. \quad (6.31)$$

Quaisquer valores de  $a$  e de  $K$  que permaneçam na região estável na Fig. 6.16 e que satisfaçam a Eq. (6.31) conduzirão a um projeto aceitável. Por exemplo,  $K = 70$  e  $a = 0,6$  irão satisfazer todos os requisitos de projeto. A função de transferência a malha fechada (com  $a = 0,6$  e  $K = 70$ ) é

$$T(s) = \frac{70s + 42}{s^4 + 8s^3 + 17s^2 + 80s + 42}.$$

Os pólos a malha fechada associados a esta escolha são

$$\begin{aligned}s &= -7,0767, \\s &= -0,5781, \\s &= -0,1726 + 3,1995i, \text{ e} \\s &= -0,1726 - 3,1995i.\end{aligned}$$

A correspondente resposta a uma entrada em rampa unitária está mostrada na Fig. 6.17. O erro em estado estacionário é inferior a 0,24, como desejado. ■

**A Estabilidade de Sistemas com Variáveis de Estado.** Seja agora voltar o enfoque sobre a determinação da estabilidade de sistemas descritos sob a forma de variáveis de estado. Admita-se que se tem um sistema descrito na forma de espaço de estados como na Eq. (6.22). A estabilidade pode ser calculada com a **equação característica** associada com a matriz de sistema  $\mathbf{A}$ . A equação característica é

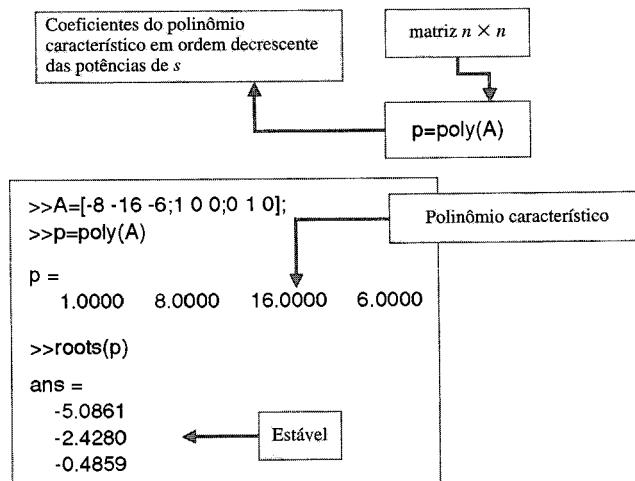
$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0. \quad (6.32)$$

O primeiro membro da equação característica é um polinômio em  $s$ . Se todas as raízes da equação característica possuírem parte real negativa (isto é,  $\operatorname{Re}(s_i) < 0$ ), então o sistema será estável.

Quando o modelo do sistema for dado na forma de variáveis de estado, deve-se calcular o polinômio característico associado com a matriz  $\mathbf{A}$ . A este respeito há várias opções. Pode-se calcular a equação característica diretamente da Eq. (6.32) computando manualmente o determinante de  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ . Em seguida, pode-se calcular as raízes por meio da função `roots` para verificar a estabilidade ou, alternativamente, pode-se utilizar o método de Routh-Hurwitz para detectar quaisquer raízes instáveis. Infelizmente, os cálculos manuais podem se tornar longos, especialmente se a dimensão de  $\mathbf{A}$  for elevada. Seria interessante evitar este cálculo manual, se possível. Neste sentido, pode-se contar com o auxílio do MATLAB para evitar este esforço.

A função `poly` descrita na Seção 2.10 pode ser usada para calcular a equação característica associada com  $\mathbf{A}$ . É bom lembrar que a função `poly` é usada para formar um polinômio a partir de um vetor de raízes. Ela também pode ser usada para calcular a equação característica de  $\mathbf{A}$ , como está ilustrado na Fig. 6.18. A matriz de entrada  $\mathbf{A}$  é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -8 & -16 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$



**Fig. 6.18** Calculando o polinômio característico de  $\mathbf{A}$  com a função `poly`.

e o polinômio característico associado é

$$s^3 + 8s^2 + 16s + 6.$$

Se  $\mathbf{A}$  for uma matriz  $n \times n$ ,  $\text{poly}(\mathbf{A})$  é o polinômio característico representado pelo vetor linha de  $n + 1$  elementos cujos elementos são os coeficientes do polinômio característico.

### EXEMPLO 6.11

#### Região de estabilidade para um processo a controlar instável

Um avião do tipo pulso-jato possui um sistema de controle como está mostrado na Fig. 6.19 [17]. Admite-se que  $z > 0$  e  $p > 0$ . O sistema a malha aberta (sem retroação) é instável, uma vez que a equação característica do processo com controlador é

$$s(s - 1)(s + p) = s[s^2 + (p - 1)s - p] = 0.$$

Note-se que, como o termo entre colchetes possui um coeficiente negativo, a equação característica possui pelo menos uma raiz no semiplano  $s$  da direita. A equação característica do sistema a malha fechada é

$$s^3 + (p - 1)s^2 + (K - p)s + Kz = 0.$$

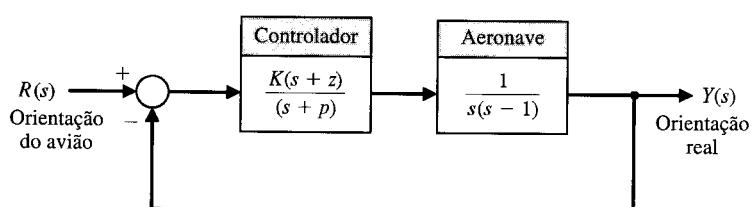


Fig. 6.19 Sistema de controle de um avião pulso-jato. Supor  $z > 0$  e  $p > 0$ .

O objetivo é determinar a região de estabilidade para  $K$ ,  $p$  e  $z$ . A tabela de Routh é

$s^3$	1	$(K - p)$
$s^2$	$(p - 1)$	$Kz$
$s$	$b_2$	
$s^0$		$Kz$

onde

$$b_2 = \frac{(p - 1)(K - p) - Kz}{(p - 1)}.$$

A partir do critério de Routh-Hurwitz se descobre que é necessário  $Kz > 0$  e  $p > 1$ . Fazendo-se  $b_2 = 0$ , tem-se

$$(p - 1)(K - p) - Kz = K[(p - 1) - z] - p(p - 1) = 0.$$

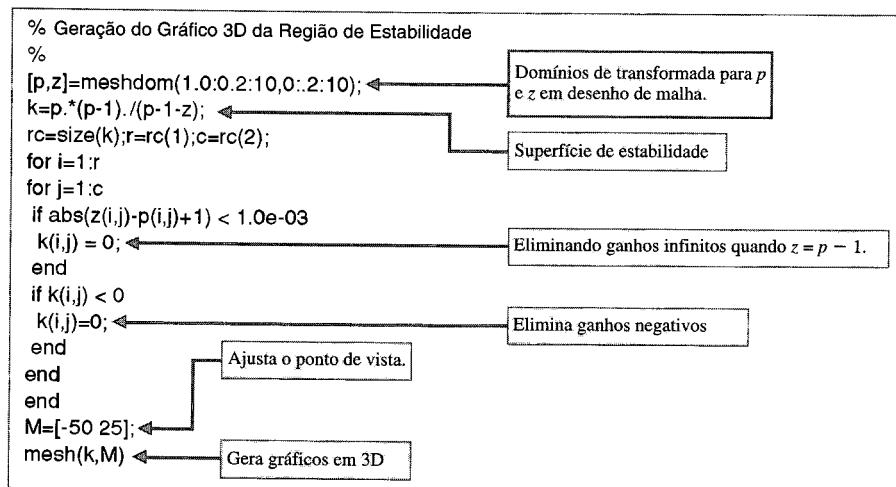


Fig. 6.20 Script MATLAB para a região de estabilidade.

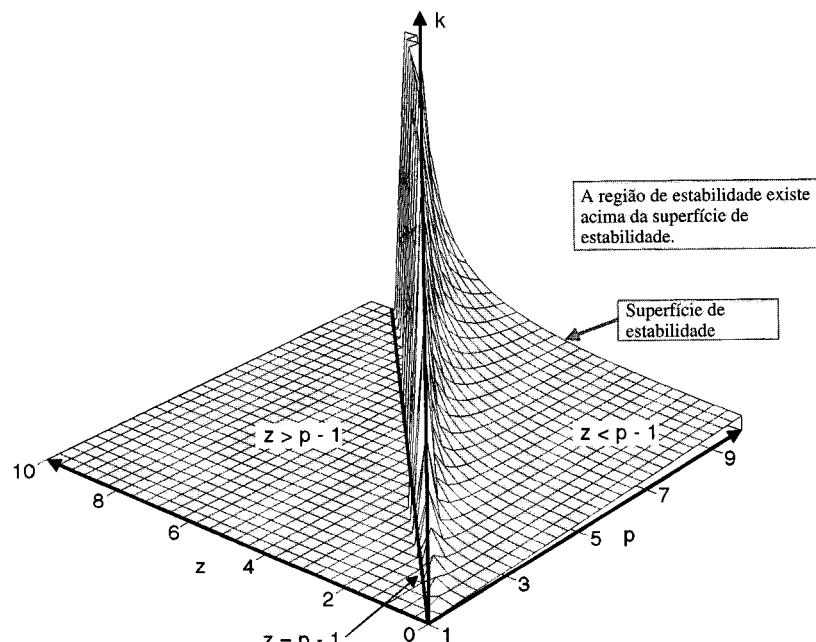
Por conseguinte, requer-se que

$$K > \frac{p(p - 1)}{(p - 1) - z}. \quad (6.33)$$

Considerem-se três casos:

1.  $z > p - 1$ : Como  $p > 1$ , qualquer valor de  $K > 0$  satisfará as condições de estabilidade.
2.  $z = p - 1$ : Não existe nenhum valor de  $0 < K < \infty$  que conduza à estabilidade.
3.  $z < p - 1$ : Qualquer valor de  $0 < K < \infty$  satisfazendo a condição de estabilidade da Eq. (6.33) para um dado  $p$  e um dado  $z$  resultará em estabilidade.

As condições de estabilidade podem ser esboçadas graficamente. O script em MATLAB usado para gerar uma superfície tridimensional de estabilidade está mostrado na Fig. 6.20. Este script usa a função `mesh` para criar uma superfície tridimensional e a função `meshdom` para gerar arranjos para uso com a superfície dada por `mesh`.



**Fig. 6.21** A região tridimensional de estabilidade está acima da superfície mostrada.

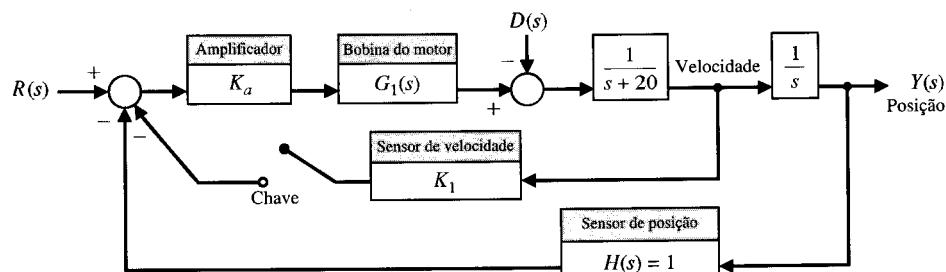
O gráfico tridimensional da região de estabilidade para  $K$ ,  $p$  e  $z$  está mostrado na Fig. 6.21. Um ponto de estabilidade aceitável é  $z = 1$ ,  $p = 10$ , e  $K = 15$ . ■

## 6.7 EXEMPLO DE PROJETO SEQUENCIAL: SISTEMA DE LEITURA DE ACIONADOR DE DISCO



Na Seção 5.13 foi examinado o projeto de um sistema de cabeça de leitura com um ganho ajustável  $K_a$ . Nesta seção será examinada a estabilidade do sistema à medida que  $K_a$  é ajustado e em seguida o sistema será reconfigurado como Passo 4 do procedimento de projeto (ver Fig. 5.42).

Seja considerar o sistema mostrado na Fig. 6.22. Este é o mesmo sistema com um modelo de motor e carga considerado no Cap. 5, exceto que se adicionou um sensor para retroação de velocidade, como



**Fig. 6.22** O sistema de acionamento a malha fechada da cabeça leitora de disco com uma retroação opcional de velocidade.

está mostrado na Fig. 6.22. Inicialmente se considera o caso em que a chave está aberta. Então, a função de transferência a malha fechada é

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_a G_1(s) G_2(s)}{1 + K_a G_1(s) G_2(s)}, \quad (6.34)$$

onde

$$G_1(s) = \frac{5.000}{s + 1000}$$

e

$$G_2(s) = \frac{1}{s(s + 20)}.$$

A equação característica é

$$s(s + 20)(s + 1000) + 5000K_a = 0, \quad (6.35)$$

ou

$$s^3 + 1020s^2 + 20000s + 5000K_a = 0.$$

Usa-se o arranjo tabular de Routh

$s^3$	1	20000
$s^2$	1020	$5000K_a$
$s$	$b_1$	
$s^0$	5000K <sub>a</sub>	

onde

$$b_1 = \frac{(20000)1020 - 5000K_a}{1020}.$$

O caso  $b_1 = 0$  resulta em estabilidade marginal quando  $K_a = 4080$ . Usando-se a equação auxiliar, tem-se  $1020s^2 + 5000(4080) = 0$ ,

ou as raízes sobre o eixo  $j\omega$  são  $s = \pm j141,4$ . Para que o sistema seja estável,  $K_a < 4080$ .

Seja agora a adição da retroação de velocidade pelo fechamento da chave no sistema da Fig. 6.22. A função de transferência a malha fechada para o sistema é então

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_a G_1(s) G_2(s)}{1 + [K_a G_1(s) G_2(s)](1 + K_1 s)}, \quad (6.36)$$

uma vez que o fator de retroação é igual a  $(1 + K_1 s)$ , como está mostrado na Fig. 6.23.

A equação característica é então

$$1 + [K_a G_1(s) G_2(s)](1 + K_1 s) = 0,$$

ou

$$s(s + 20)(s + 1000) + 5000K_a(1 + K_1 s) = 0.$$

Tem-se, por conseguinte,

$$s^3 + 1020s^2 + [20000 + 5000K_a K_1]s + 5000K_a = 0.$$

Então, o arranjo tabular de Routh é

$s^3$	1	$(20000 + 5000K_a K_1)$
$s^2$	1020	$5000K_a$
$s^1$	$b_1$	
$s^0$	5000K <sub>a</sub>	

onde

$$b_1 = \frac{(20000 + 5000K_a K_1) - 5000K_a}{1020}.$$

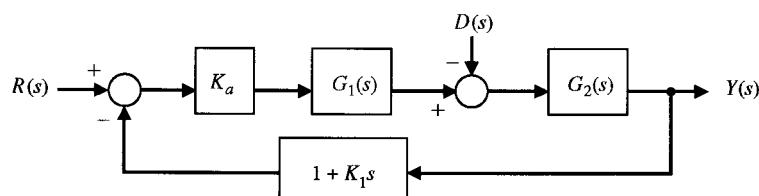


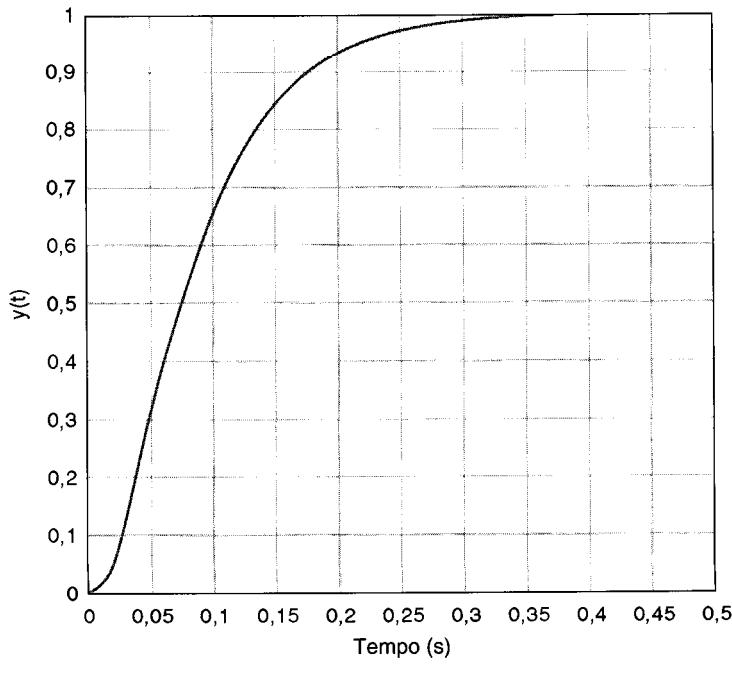
Fig. 6.23 Sistema equivalente com a chave da retroação de velocidade fechada.

```

Ka=100; K1=0.05;
ng1=[5000]; dg1=[1 1000];
ng2=[1]; dg2=[1 20 0];
nc=[K1 1]; dc=[0 1];
[n,d]=series(Ka*ng1,dg1,ng2,dg2);
[num,den]=feedback(n,d,nc,dc);
t=[0:0.001:0.5];
y=step(num,den,t);
plot(t,y),grid
xlabel('Tempo (s)'), ylabel(y(t)')
```

Seleciona o ganho de retroação de velocidade  $K_1$  e o ganho do amplificador  $K_a$ .

(a)



**Fig. 6.24** Resposta do sistema com retroação de velocidade. (a) Script MATLAB. (b) Resposta com  $K_a = 100$  e  $K_1 = 0,05$ .

Para garantir estabilidade, é necessário selecionar o par  $(K_a, K_1)$  tal que  $b_1 > 0$ , onde  $K_a > 0$ . Quando  $K_1 = 0,05$  e  $K_a = 100$ , pode-se determinar a resposta usando o MATLAB como está mostrado na Fig. 6.24. O tempo de assentamento (critério de 2%) é aproximadamente de 260 ms e a ultrapassagem percentual é igual a zero. O desempenho do sistema está resumido na Tabela 6.2. As especificações de desempenho estão praticamente satisfeitas e algumas interações sobre  $K_1$  são necessárias para se obter o tempo de assentamento desejado de 250 ms.

**TABELA 6.2 Desempenho do Sistema Acionador de Disco Comparado com as Especificações**

Medida de Desempenho	Valor Desejado	Resposta Real
Ultrapassagem percentual	Inferior a 5%	0%
Tempo de assentamento	Inferior a 250 ms	260 ms
Resposta máxima a uma perturbação unitária	Inferior a $5 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-3}$

## 6.8 SUMÁRIO

Neste capítulo, considerou-se o conceito de estabilidade de um sistema de controle com retroação. Foi destacada uma definição de sistema estável em termos de uma resposta limitada e em relação com a localização, no plano  $s$ , dos pólos da função de transferência do sistema.

Foi introduzido o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz e foram considerados diversos exemplos. Foi também considerada a estabilidade relativa de um sistema de controle com retroação em termos da localização, no plano  $s$ , dos pólos e zeros da função de transferência do sistema. Foi considerada a estabilidade de sistemas definidos na forma de variáveis de estado.

## EXERCÍCIOS

- E6.1** Um sistema possui uma equação característica  $s^3 + 3Ks^2 + (2 + K)s + 4 = 0$ . Determinar a faixa de valores de  $K$  para um sistema estável.

**Resposta:**  $K > 0,53$

- E6.2** Um sistema possui uma equação característica  $s^3 + 9s^2 + 26s + 24 = 0$ . Usando o critério de Routh-Hurwitz, mostrar que o sistema é estável.

- E6.3** Determinar as raízes da equação característica  $s^4 + 9,5s^3 + 30,5s^2 + 37s + 12 = 0$ .

- E6.4** Um sistema de controle possui a estrutura mostrada na Fig. E6.4. Determinar o ganho para o qual o sistema se torna instável.

**Resposta:**  $0 < K < 1,5$

- E6.5** Um sistema com retroação possui uma função de transferência de malha

$$GH(s) = \frac{K}{(s + 1)(s + 3)(s + 6)},$$

onde  $K = 10$ . Achar as raízes da equação característica deste sistema.

- E6.6** Para o sistema com retroação do Exercício E6.5, encontrar o valor de  $K$  para se ter duas raízes sobre o eixo imaginário. Determinar o valor das três raízes.

**Resposta:**  $s = -10, \pm j5,2$

- E6.7** Um sistema com retroação negativa possui uma função de transferência de malha

$$GH(s) = \frac{K(s + 2)}{s(s - 1)}.$$

(a) Determinar o valor do ganho quando o coeficiente  $\zeta$  das raízes a malha fechada for igual a 0,707. (b) Determinar o valor do ganho quando o sistema a malha fechada possuir duas raízes sobre o eixo imaginário.

- E6.8** Projetistas têm desenvolvido aviões de caça pequenos, velozes, com decolagem vertical, invisíveis ao radar (aviões Stealth). Este conceito de aeronave utiliza tubeiras móveis que giram rapidamente para manobrar o avião [22]. O sistema de controle de rumo ou direção está mostrado na Fig. E6.8. Determinar o ganho máximo do sistema para operação estável.

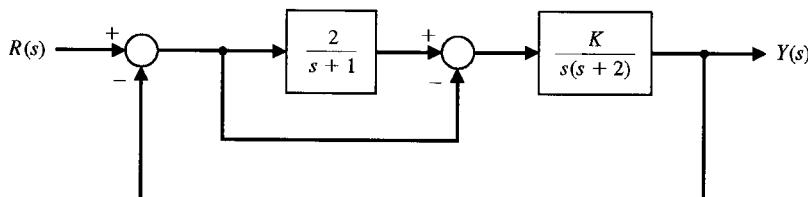


Fig. E6.4 Sistema com ação à frente (*feedforward*).

Fig. E6.8 Controle de rumo de aeronave.

- E6.9** Um sistema possui uma equação característica  $s^3 + 3s^2 + (K + 1)s + 4 = 0$ . Determinar a faixa de valores de  $K$  para um sistema estável.

**Resposta:**  $K > 1/3$

- E6.10** Todos os seres humanos usam os olhos e os ouvidos para obter equilíbrio. O sistema de orientação permite que as pessoas permaneçam sentadas ou de pé em uma posição desejada mesmo quando se está em movimento. Este sistema de orientação funciona principalmente a partir das informações recebidas pelo ouvido interno, onde os canais semicirculares sentem a aceleração angular e os otolitos medem acelerações lineares. Mas estas medidas de aceleração precisam ser suplementadas por sinais visuais. Tentar a seguinte experiência: (a) Ficar em pé, com os pés alinhados um à frente do outro, mãos apoiadas nos quadris e cotovelos curvados para fora. (b) Fechar os olhos. Percebeu a ocorrência de uma oscilação de baixa freqüência que cresceu até você perder o equilíbrio? Esta posição de orientação é estável com e sem o uso dos olhos?

- E6.11** Um sistema com função de transferência  $Y(s)/R(s)$  é

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{23(s + 1)}{s^4 + 6s^3 + 2s^2 + s + 3}.$$

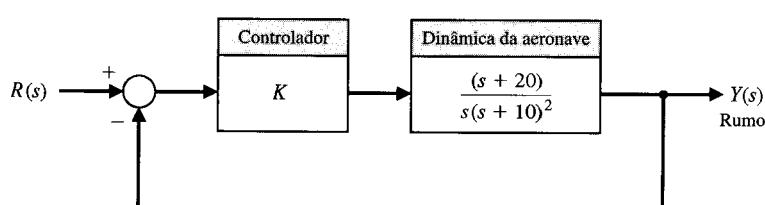
Determinar o erro de estado estacionário a uma excitação em degrau unitário. O sistema é estável?

- E6.12** Um rotor é suspenso sem contacto, por meio de mancais magnéticos. A técnica de suspensão sem contacto para rotores se torna muito importante em aplicações industriais leves e pesadas [14]. A equação diferencial matricial para um sistema de mancais magnéticos é

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

onde  $\mathbf{x}^T = [y, dy/dt, i]$ ,  $y$  = espaçamento entre o mancal e o rotor e  $i$  é a corrente eletromagnética. Determinar se o sistema é estável.

**Resposta:** Estável



**E6.13** Um sistema possui uma equação característica

$$q(s) = s^6 + 9s^5 + 31,25s^4 + 61,25s^3 + 67,75s^2 + 14,75s + 15 = 0.$$

- (a) Determinar se o sistema é estável usando o critério de Routh-Hurwitz. (b) Determinar as raízes da equação característica.

**Resposta:** (a) marginalmente estável; (b)  $s = -3, -4, -1 \pm 2j, \pm 0,5j$

**E6.14** Um sistema possui uma equação característica

$$q(s) = s^4 + 9s^3 + 45s^2 + 87s + 50 = 0.$$

- (a) Determinar se o sistema é estável usando o critério de Routh-Hurwitz. (b) Determinar as raízes da equação característica.

**E6.15** A equação diferencial matricial do modelo em variáveis de estado de um sistema possui

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determinar a equação característica. (b) Determinar se o sistema é estável. (c) Determinar as raízes da equação característica.

**Resposta:** (a)  $q(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0$

**E6.16** Um sistema possui uma equação característica

$$q(s) = s^3 + 10s^2 + 16s + 160 = 0.$$

- (a) Determinar se o sistema é estável usando o critério de Routh-Hurwitz. (b) Determinar as raízes da equação característica.

**E6.17** Determinar se o sistema com as seguintes equações características são estáveis ou instáveis:

- (a)  $s^3 - 4s^2 + 6s + 100 = 0$   
 (b)  $s^4 - 6s^3 - s^2 - 17s - 6 = 0$   
 (c)  $s^2 + 6s + 3 = 0$

**E6.18** Determinar as raízes dos seguintes polinômios:

- (a)  $s^3 + 10,4s^2 + 36,2s + 40,8 = 0$   
 (b)  $s^3 + 9s^2 + 27s + 27 = 0$

**E6.19** Um sistema possui a equação característica

$$q(s) = s^3 + 10s^2 + 29s + K = 0.$$

Deslocar o eixo vertical para a direita do valor 2 usando  $s = s_n - 2$  e determinar o valor de ganho  $K$  de modo que as duas raízes complexas sejam  $s = -2 \pm j$ .

**E6.20** Um sistema possui uma função de transferência  $Y(s)/R(s) = T(s) = 1/s$ . (a) Este sistema é estável? (b) Se  $r(t)$  for um degrau unitário, determine a resposta  $y(t)$ .

**E6.21** Um sistema é representado pela Eq. (6.22) onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -k & -2 \end{bmatrix}.$$

Achar a faixa de valores de  $k$  para a qual o sistema é estável.

## PROBLEMAS

**P6.1** Utilizando o critério de Routh-Hurwitz, determinar a estabilidade dos seguintes polinômios:

- (a)  $s^2 + 5s + 2$   
 (b)  $s^3 + 4s^2 + 6s + 6$   
 (c)  $s^3 + 2s^2 - 4s + 20$   
 (d)  $s^4 + s^3 + 2s^2 + 10s + 8$   
 (e)  $s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + K$   
 (f)  $s^5 + s^4 + 2s^3 + s + 5$   
 (g)  $s^5 + s^4 + 2s^3 + s^2 + s + K$

Determinar o número de raízes, caso existam, no semiplano  $s$  da direita. Determine também quando  $K$  for ajustável à faixa de valores de  $K$  que resulta em um sistema estável.

**P6.2** Um sistema de controle de antena foi analisado no Problema 4.5 e se determinou que, para reduzir o efeito de uma perturbação do vento, o ganho do amplificador magnético  $k_a$  deveria ser o maior possível. (a) Determinar o valor limitante de ganho para manter o sistema estável. (b) Deseja-se ter um tempo de assentamento igual a 1,5 segundo. Usando um deslocamento de eixo e o critério de Routh-Hurwitz, determine o valor de ganho que satisfaçõe este requisito. Admitir que as raízes complexas do sistema a malha fechada dominam a resposta transitória. (Esta aproximação é válida neste caso?)

**P6.3** A solda por arco é uma das mais importantes áreas de aplicação dos robôs industriais [11]. Na maioria das situações de uso da solda na manufatura, as incertezas quanto às dimensões da peça, à geometria da junta e ao processo de soldagem em si requerem o uso de sensores para manter a qualidade da solda. Diversos sistemas utilizam um sistema de visão para medir a geometria do cordão de material fundido, como está mostrado na Fig. P6.3. Este sistema usa uma taxa de alimentação constante do eletrodo a ser fundido. (a) Calcular o valor máximo de  $K$  para que resulte um sistema estável. (b) Para um valor igual à metade do valor máximo achado no item (a), determinar as raízes da equação característica. (c) Estimar o valor de ultrapassagem do sistema da parte (b) quando for submetido a uma entrada em degrau.

**P6.4** Um sistema de controle com retroação está mostrado na Fig. P6.4. A função de transferência do processo é

$$G(s) = \frac{K(s + 40)}{s(s + 10)},$$

e a função de transferência da retroação é  $H(s) = 1/(s + 20)$ . (a) Determinar o valor limitante de  $K$  para se ter um sistema estável. (b) Para o ganho que resulta em estabilidade marginal, determinar a magnitude das raízes imaginárias. (c) Reduzir o ganho à metade da magnitude que resulta em estabilidade marginal e

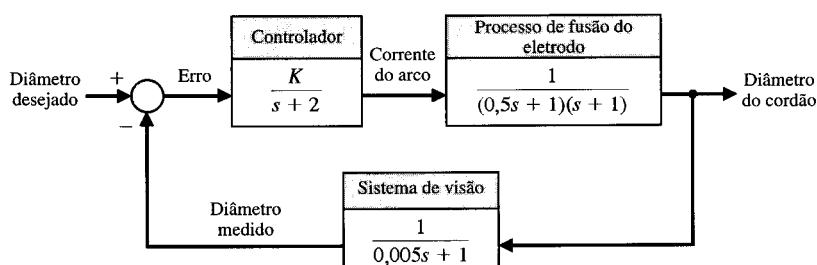


Fig. P6.3 Controle de solda.

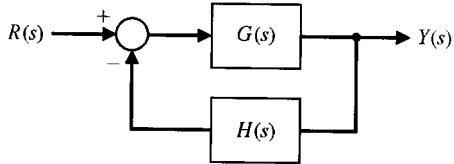


Fig. P6.4 Sistema com retroação.

determinar a estabilidade relativa do sistema (1) pelo deslocamento do eixo imaginário e usando o critério de Routh-Hurwitz e (2) pela determinação do posicionamento das raízes. Mostre que as raízes se situam entre  $-1$  e  $-2$ .

- P6.5 Determinar a estabilidade relativa dos sistemas com as seguintes equações características (1) pelo deslocamento de eixo no plano  $s$  e usando o critério de Routh-Hurwitz e (2) pela determinação das raízes complexas no plano  $s$ :

$$(a) s^3 + 3s^2 + 4s + 2 = 0.$$

$$(b) s^4 + 9s^3 + 30s^2 + 42s + 20 = 0.$$

$$(c) s^3 + 19s^2 + 110s + 200 = 0.$$

- P6.6 Um sistema de controle com retroação unitária está mostrado na Fig. P6.6. Determinar a estabilidade relativa do sistema para cada uma das seguintes funções de transferência por meio da localização das raízes complexas no plano  $s$ .

$$(a) G(s) = \frac{65 + 33s}{s^2(s + 9)}$$

$$(b) G(s) = \frac{24}{s(s^3 + 10s^2 + 35s + 50)}$$

$$(c) G(s) = \frac{3(s + 4)(s + 8)}{s(s + 5)^2}$$

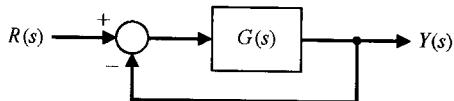


Fig. P6.6 Sistema com retroação unitária.

- P6.7 O modelo linear de um detector de fase (*phase-lock loop*) pode ser representado pela Fig. P6.7 [9]. Os sistemas de bloqueio de fase são projetados para manter uma diferença de fase nula entre o sinal da portadora de entrada e o de um oscilador local controlado por tensão (VCO). Os detectores de fase encontram aplicação na televisão em cores, no rastreamento de mísseis e na telemetria espacial. O filtro para uma aplicação particular é escolhido como

$$F(s) = \frac{10(s + 10)}{(s + 1)(s + 100)}.$$

Deseja-se minimizar o erro de estado estacionário do sistema para uma mudança em rampa no sinal com informação de fase. (a) Determinar o valor limitante do ganho  $K_a K = K_v$  a fim de manter o sistema estável. (b) Decidiu-se que um erro de estado estacionário igual a 1% é aceitável para um sinal em rampa de 100 rad/s. Para esse valor de ganho  $K_v$ , determinar a localização das raízes do sistema.

- P6.8 Um sistema de controle de velocidade muito interessante e útil foi projetado para o controle de uma cadeira de rodas. Deseja-se capacitar pacientes paralíticos do pescoço para baixo a dirigirem eles próprios cadeiras de rodas motorizadas. Um sistema proposto utilizando sensores de velocidade montados em um chapéu está mostrado na Fig. P6.8. O chapéu sensor fornece um sinal de saída proporcional à magnitude do movimento da cabeça. Há um sensor montado a intervalos de  $90^\circ$  de modo que possam ser comandados deslocamentos para a frente, à esquerda, à direita ou a ré. Valores típicos para as constantes de tempo são  $\tau_1 = 0,5$  s,  $\tau_3 = 1$  s e  $\tau_4 = 1/4$  s.

- (a) Determinar o ganho limite  $K = K_1 K_2 K_3$  para um sistema estável.  
 (b) Quando o ganho  $K$  for definido com 1/3 do valor limite, determinar se o tempo de assentamento do sistema no interior de 2% do valor final é inferior a 4 s. (c) Determinar o valor de ganho que resulta em um sistema com tempo de assentamento de 4 s. Obter também o valor das raízes da equação característica quando o tempo de assentamento for igual a 4 s.

- P6.9 Um dispositivo de memória de fita cassete foi projetado como memória de massa [1]. É necessário controlar rigorosamente a velocidade da fita. O controle de velocidade do acionamento da fita está representado pelo sistema mostrado na Fig. P6.9. (a) Determinar o ganho limite para um sistema estável. (b) Deter-

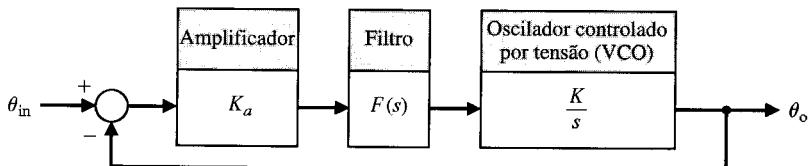


Fig. P6.7 Sistema de detecção de fase (*phase-lock loop*).

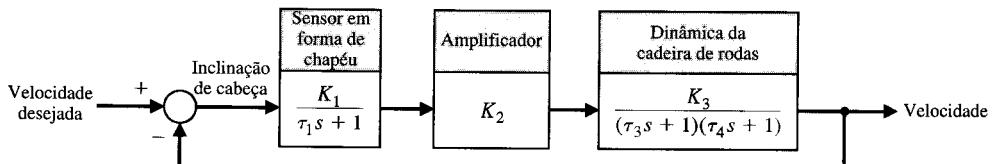


Fig. P6.8 Sistema de controle de cadeira de rodas.

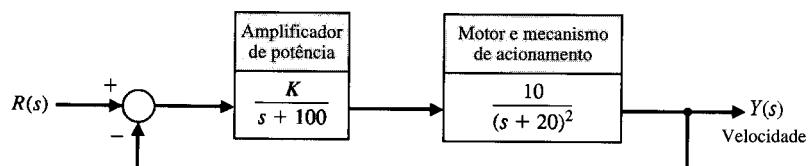


Fig. P6.9 Sistema de controle de acionamento de fita.

minar um valor de ganho adequado de modo que a ultrapassagem percentual a uma excitação em degrau seja de aproximadamente 5%.

**P6.10** Os robôs podem ser usados nas operações de manufatura e de montagem que requerem manipulação precisa, rápida e versátil [10, 11]. A função de transferência a malha aberta de um acionador direto de um braço pode ser aproximada por

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + 10)}{s(s + 3)(s^2 + 4s + 8)}.$$

(a) Determinar o valor do ganho  $K$  quando o sistema oscila. (b) Calcular as raízes do sistema a malha fechada para o valor de  $K$  determinado no item (a).

**P6.11** Um sistema de controle com retroação possui uma equação característica

$$s^3 + (1 + K)s^2 + 10s + (5 + 15K) = 0.$$

O parâmetro  $K$  deve ser positivo. Qual o valor máximo que  $K$  pode ter antes que o sistema se torne instável? Quando  $K$  for igual ao valor máximo o sistema oscila. Determine a freqüência de oscilação.

**P6.12** Um sistema de controle com retroação possui uma equação característica

$$s^6 + 2s^5 + 9s^4 + 16s^3 + 24s^2 + 32s + 16 = 0.$$

Determinar se o sistema é estável e determinar os valores das raízes.

**P6.13** A estabilidade do sistema motocicleta e piloto é uma área importante de estudos porque muitos projetos de motocicletas resultam em veículos difíceis de controlar [12, 13]. As características de manuseio de uma motocicleta devem incluir um modelo do piloto bem como um do veículo. A dinâmica do sistema motocicleta e piloto pode ser representada por uma função de transferência a malha aberta (Fig. P6.4)

$$GH(s) = \frac{K(s^2 + 30s + 1125)}{s(s + 20)(s^2 + 10s + 125)(s^2 + 60s + 3400)}.$$

(a) Como uma aproximação, calcule a faixa de valores aceitáveis para  $K$  para um sistema estável quando se desprezam o polinômio do numerador (zeros) e o polinômio do denominador ( $s^2 + 60s + 3400$ ). (b) Calcular a faixa real de valores aceitáveis de  $K$  levando em conta todos os pólos e zeros.

**P6.14** Um sistema possui uma função de transferência

$$T(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

Fig. P6.15 Sistema de controle de elevador.

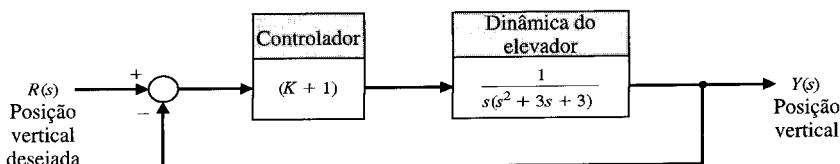
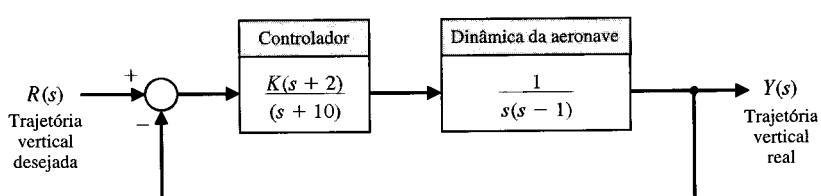


Fig. P6.17 Sistema de controle de um avião pulso-jato.



(a) Determinar se o sistema é estável. (b) Determinar as raízes da equação característica. (c) Traçar o gráfico da resposta do sistema a uma entrada em degrau unitário.

**P6.15** No dia 16 de julho de 1993, o elevador da Torre Panorâmica de Yokohama, de 70 andares, operando a uma velocidade de pico de 45 km/h (28 mph), foi inaugurado como o mais rápido dos elevadores super-rápidos. Para atingir tal velocidade sem deixar o estômago dos passageiros no térreo, o elevador acelera durante períodos mais longos, em vez de fazê-lo precipitadamente. Ao subir, ele alcança velocidade plena somente no 27.º andar; ele começa a desacelerar 15 andares depois. O resultado é um pico de aceleração semelhante ao dos outros elevadores de arranha-céus — um pouco menos que um décimo da força da gravidade.

Foi uma inventividade admirável realizar isto com segurança e conforto. Freios especiais de cerâmica tiveram de ser desenvolvidos; os de aço fundiram. Sistemas controlados por computador amortecem as vibrações. O elevador foi conformado aerodinamicamente para reduzir o ruído do vento ao se deslocar rapidamente para cima e para baixo [20]. Um sistema de controle proposto para a posição vertical do elevador está mostrado na Fig. P6.15. Determinar a faixa de valores de  $K$  para um sistema estável.

**P6.16** Considere-se o caso de coelhos e raposas na Austrália. O número de coelhos é  $x_1$ , e se eles fossem deixados sozinhos este número cresceria indefinidamente (até que se exaurissem as fontes de alimento), de modo que

$$\dot{x}_1 = kx_1.$$

Contudo, com raposas presentes no continente, tem-se

$$\dot{x}_1 = kx_1 - ax_2,$$

onde  $x_2$  é o número de raposas. Agora, se as raposas necessitam de coelhos para existir, tem-se

$$\dot{x}_2 = -hx_2 + bx_1.$$

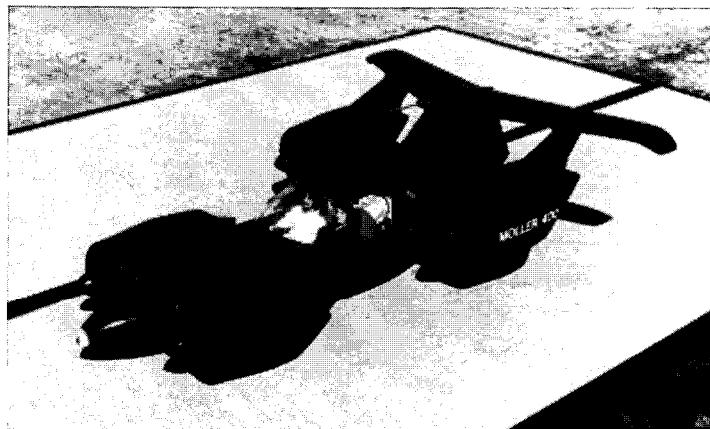
Determinar se este sistema é estável e, por conseguinte, decai até a condição  $x_1(t) = x_2(t) = 0$  quando  $t = \infty$ . Quais os requisitos sobre  $a$ ,  $b$ ,  $h$  e  $k$  para um sistema estável? Qual é o resultado quando  $k$  for maior que  $h$ ?

**P6.17** O objetivo de um avião de decolagem e aterrissagem vertical (VTOL) é o de conseguir operar a partir de aeroportos relativamente pequenos e ainda operar como um avião normal no nível de cruzeiro [17]. Uma aeronave decolando na vertical de forma semelhante à de um míssil (ao final) é inherentemente instável (veja o Exemplo 3.4 para uma discussão do pêndulo invertido). Um sistema de controle utilizando jatos ajustáveis pode controlar o veículo como está mostrado na Fig. P6.17. (a) Determinar a faixa de valores de ganho para a qual o sistema é estável. (b) Determinar o ganho  $K$  para o qual o sistema é mar-

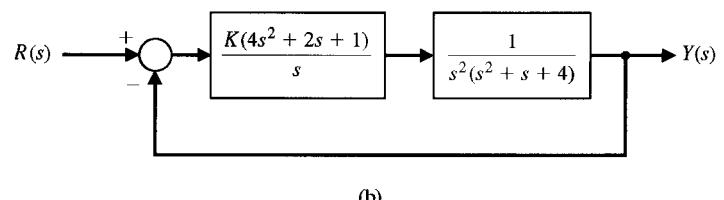
ginalmente estável e as raízes da equação característica para este valor de  $K$ .

**P6.18** Um veículo de decolagem vertical está mostrado na Fig. P6.18(a). Os quatro motores basculam para a decolagem. O sistema de

controle de altitude está mostrado na Fig. P6.18(b). (a) Para  $K = 1$ , determinar se o sistema é estável. (b) Determinar, caso exista, a faixa de valores para estabilidade para  $K > 0$ .



(a)



**Fig. P6.18** (a) Avião de decolagem vertical (cortesia da Moller International).  
(b) Sistema de controle.

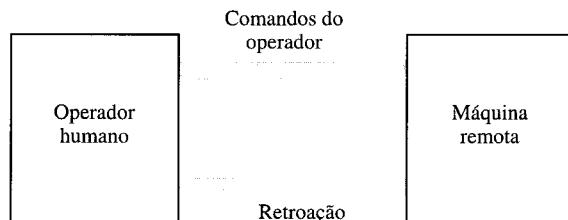
## PROBLEMAS AVANÇADOS

**PA6.1** Um sistema de controle teleoperado incorpora simultaneamente uma pessoa (operador) e uma máquina remota. O sistema de operação remota normal se baseia em um enlace unidirecional para a máquina e uma retroação limitada para o operador. Um acoplamento de duas vias usando troca bidirecional de informações permite melhor operação [19]. No caso do controle remoto de um robô, uma retroação de força mais uma retroação de posição é útil. A equação característica de um sistema teleoperado, como mostrado na Fig. PA6.1, é

$$s^4 + 10s^3 + K_1s^2 + 2s + K_2 = 0,$$

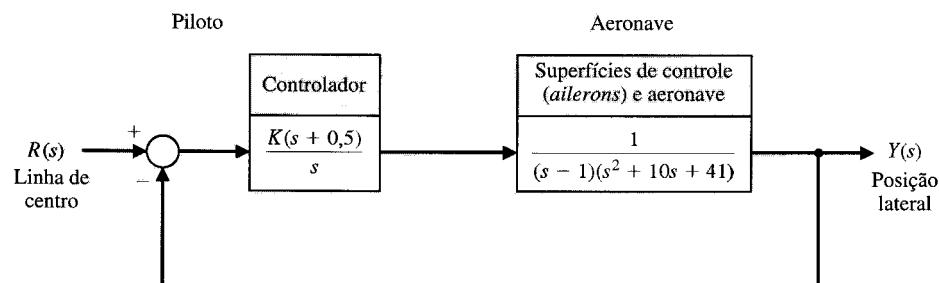
onde  $K_1$  e  $K_2$  são fatores de ganho de retroação. Determinar e traçar o gráfico da região de estabilidade deste sistema para  $K_1$  e  $K_2$ .

**PA6.2** Considere-se o caso de piloto naval pousando uma aeronave sobre um porta-aviões. O piloto tem de executar três tarefas básicas.



**Fig. PA6.1** Modelo de uma máquina teleguiada.

cas. Primeiro o piloto deve guiar a chegada do avião ao navio pela linha central da pista. A segunda tarefa é manter a aeronave com a inclinação correta e a terceira tarefa é manter a velocidade correta. Um modelo de um sistema de controle lateral está mostrado na Fig. PA6.2. Determinar a faixa de valores para estabilidade para  $K \geq 0$ .



**Fig. PA6.2** Controle de posição lateral para aterrissagem de um avião comercial.

**PA6.3** Um sistema de controle está mostrado na Fig. PA6.3. Deseja-se que o sistema seja estável e que o erro de estado estacionário a uma entrada em degrau unitário seja inferior ou igual a 0,05 (5%).  
 (a) Determinar a faixa de valores de  $\alpha$  que satisfaz os requisitos de erro.  
 (b) Determinar a faixa de valores de  $\alpha$  que satisfaz a estabilidade requerida.  
 (c) Selecionar um valor de  $\alpha$  que satisfaça ambos os requisitos.

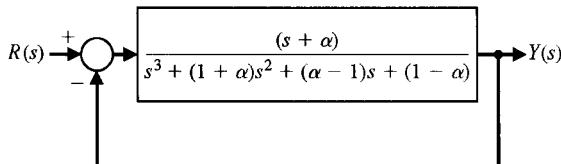
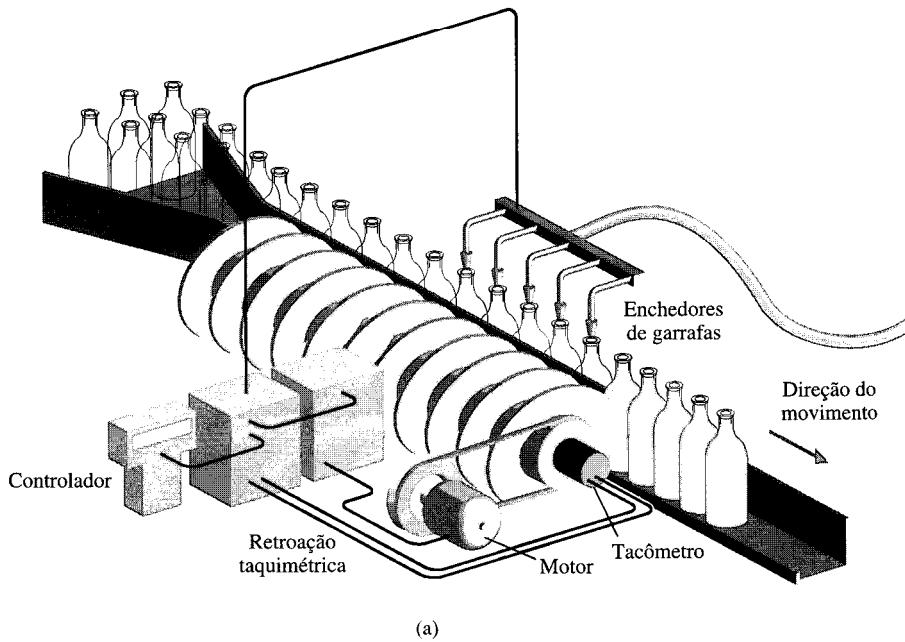
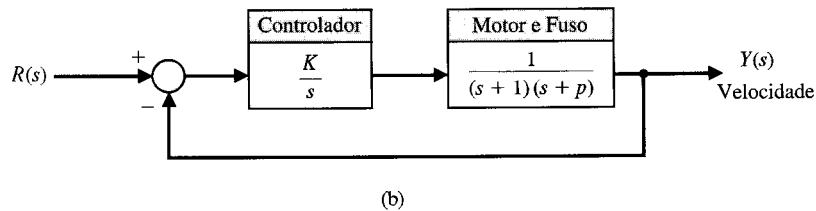


Fig. PA6.3

**PA6.4** Uma linha de enchimento de garrafas usa um mecanismo de fuso alimentador, como mostrado na Fig. PA6.4. A retroação do tacômetro é usada para manter o controle preciso da velocidade. Determinar e plotar a faixa de valores de  $K$  e  $p$  que permite operação estável.



(a)



(b)

**Fig. PA6.4** Controle de velocidade de uma linha de enchimento de garrafas:  
 (a) layout do sistema,  
 (b) diagrama de blocos.

## PROBLEMAS DE PROJETO

**PPC6.1** O sistema de acionamento por sarilho do problema PPC5.1 usa o amplificador como controlador. Determinar o valor máximo do ganho  $K_a$  antes de o sistema se tornar instável.

**PP6.1** O controle da ignição por centelha de um motor de automóvel requer desempenho constante sobre uma ampla gama de parâmetros [15]. O sistema de controle está mostrado na Fig. PP6.1, com um ganho  $K$  do controlador a ser selecionado. O parâmetro  $p$  é igual a 2 para muitos carros, mas pode ser igual a zero para os de alto desempenho. Selecionar um ganho  $K$  que resultará em um sistema estável para ambos os valores de  $p$ .

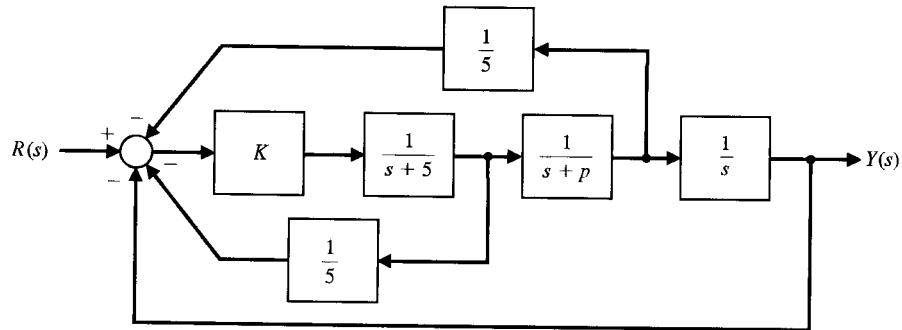
**PP6.2** Um veículo guiado automaticamente em Marte está representado pelo sistema da Fig. PP6.2. O sistema possui uma roda manobrável na frente e na parte de trás do veículo e o projeto requer que  $H(s) = Ks + 1$ . Determinar (a) o valor de  $K$  requerido para

estabilidade, (b) o valor de  $K$  quando uma raiz da equação característica for igual a  $s = -5$ , e (c) o valor das duas raízes restantes para o ganho selecionado na parte (b). (d) Obter a resposta do sistema devida a um comando em degrau, para o ganho selecionado na parte (b).

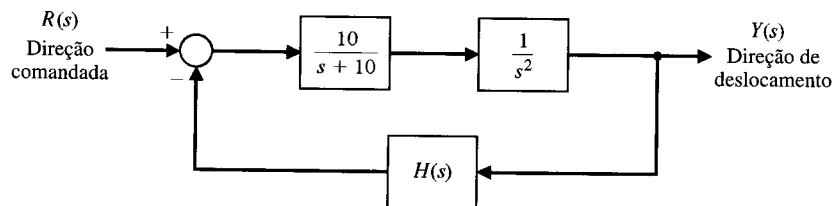
**PP6.3** Um sistema com retroação negativa unitária com

$$G(s) = \frac{K(s + 2)}{s(1 + \tau s)(1 + 2s)}$$

possui dois parâmetros a serem selecionados. (a) Determinar e plotar a região de estabilidade para este sistema. (b) Selecionar  $\tau$  e  $K$  tais que o erro de estado estacionário à entrada em rampa seja inferior ou igual a 25% da magnitude de entrada. (c) Determinar a ultrapassagem percentual para uma entrada em degrau no projeto selecionado no item (b).



**Fig. PP6.1** Controle de um motor de automóvel.



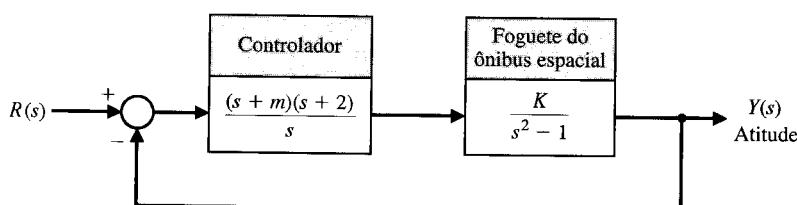
**Fig. PP6.2** Controle de um veículo dirigido para Marte.

**PP6.4** O sistema de controle de atitude de um ônibus espacial está mostrado na Fig. PP6.4 [18]. (a) Determinar a faixa de valores do ganho  $K$  e do parâmetro  $m$  tal que o sistema seja estável e traçar o gráfico da região de estabilidade. (b) Selecionar os valores do ganho e do parâmetro de modo que o erro em estado estacionário a uma excitação em rampa seja inferior ou igual a 10% da magnitude de entrada. (c) Determinar a ultrapassagem percentual para uma entrada em degrau no projeto selecionado no item (b).

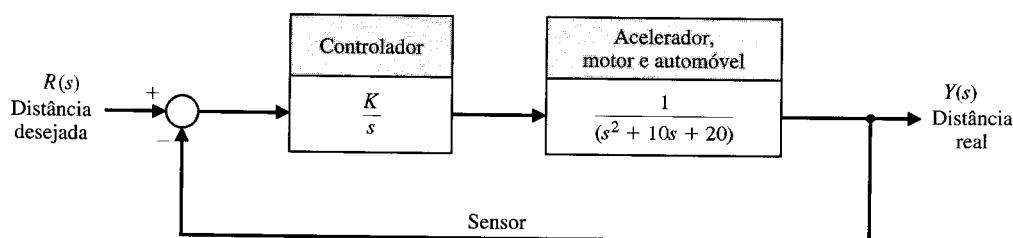
**PP6.5** Um sistema de controle de tráfego é projetado para controlar a distância entre veículos como está mostrado na Fig. PP6.5 [15]. (a) Determinar a faixa de valores de  $K$  para a qual o sistema é estável. (b) Se  $K_m$  for o valor máximo de  $K$  de modo que as

raízes da equação característica estejam sobre o eixo  $j\omega$ , então fazer  $K = K_m/N$ , onde  $6 < N < 7$ . Deseja-se que o tempo de pico seja inferior a 2 segundos e que a ultrapassagem percentual seja inferior a 18%. Determinar um valor apropriado para  $N$ .

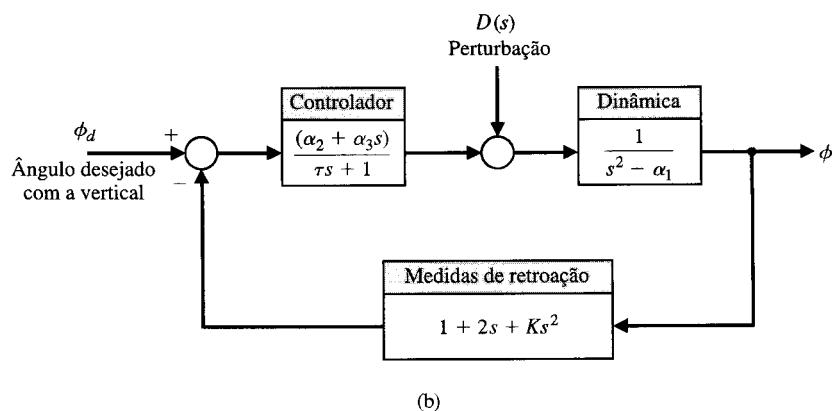
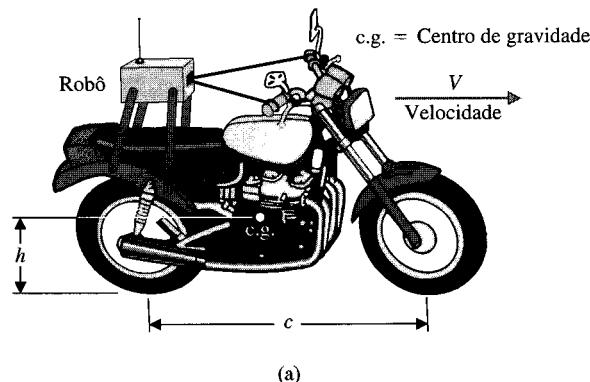
**PP6.6** Considere-se a possibilidade de um robô dirigir uma motocicleta, como está mostrado na Fig. PP6.6(a) [22]. O diagrama de blocos do modelo do sistema está mostrado na Fig. PP6.6(b). Determinar a faixa de valores de  $K$  para a operação estável da moto quando  $\alpha_1 = g/h = 9$ ,  $\alpha_2 = V/hc = 2,7$  e  $\alpha_3 = V/hc = 1,35$ . Admitir que a motocicleta está se deslocando com velocidade constante  $V = 2$  m/s. A constante de tempo do controlador é  $\tau = 0,2$  s e  $K > 0$ .



**Fig. PP6.4** Controle de atitude do ônibus espacial.



**Fig. PP6.5** Controle de distância de tráfego.



**Fig. PP6.6** (a) Motocicleta controlada por robô.  
(b) Diagrama de blocos do sistema.



### PROBLEMAS COM MATLAB

**PM6.1** Determinar as raízes das seguintes equações características:

- $q(s) = s^3 + 3s^2 + 5s + 7 = 0$ .
- $q(s) = s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 2s + 1 = 0$ .
- $q(s) = s^4 + 2s^2 + 1 = 0$ .

**PM6.2** Considerar um sistema com retroação unitária negativa com

$$G(s) = \frac{K(s^2 - s + 2)}{s^2 + 2s + 1}.$$

Usando o MATLAB, calcular as raízes do polinômio característico da função de transferência a malha fechada para  $K = 1, 2$  e  $5$ . Para quais valores de  $K$  o sistema a malha fechada será estável?

**PM6.3** Um sistema com retroação unitária negativa possui a função de transferência a malha aberta

$$G(s) = \frac{s + 1}{s^3 + 4s^2 + 6s + 10}.$$

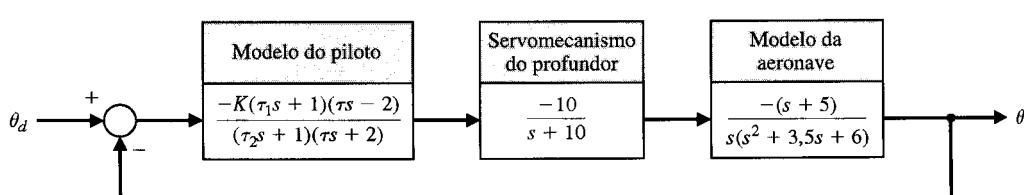
Usando o MATLAB determinar a função de transferência a malha fechada e mostrar que as raízes da equação característica são  $s_1 = -2,89$ ,  $s_{2,3} = -0,55 \pm j1,87$ .

**PM6.4** Considerar a função de transferência

$$T(s) = \frac{1}{s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + s + 2}.$$

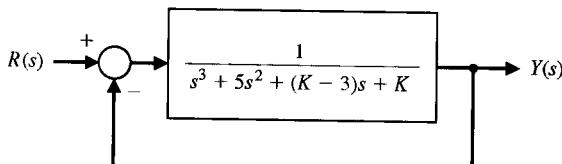
(a) Usando o método de Routh-Hurwitz, determinar se o sistema é estável. Se não for estável, quantos pólos existem no semiplano  $s$  da direita? (b) Usando o MATLAB, calcular os pólos de  $T(s)$  e verificar o resultado da parte (a). (c) Traçar a resposta ao degrau unitário e discutir os resultados.

**PM6.5** Um modelo de “piloto de papel” é utilizado algumas vezes no projeto e na análise do controle de aeronaves para representar o piloto na malha. Um diagrama de blocos de uma aeronave com um piloto “na malha” está mostrado na Fig. PM6.5. A variável  $\tau$  representa o tempo de retardo do piloto. Pode-se representar um piloto mais lento com  $\tau = 0,5$  e um piloto mais rápido com  $\tau = 0,25$ . As variáveis restantes no modelo do piloto são admitidas como sendo  $K = 1$ ,  $\tau_1 = 2$  e  $\tau_2 = 0,5$ . Usando o MATLAB, calcular os pólos da função de transferência a malha fechada para pilotos rápidos e lentos. Comentar os resultados. Qual o máximo tempo de retardo do piloto admissível para estabilidade?



**Fig. PM6.5** Uma aeronave com o piloto na malha.

**PM6.6** Considerar o sistema de controle com retroação da Fig. PM6.6. Usando a função `for`, desenvolver um script em MATLAB para calcular os pólos da função de transferência a malha fechada para  $0 \leq K \leq 5$  e plotar os resultados designando os pólos pelo símbolo “ $\times$ ”. Determinar, com o método de Routh-Hurwitz, a máxima faixa de valores de  $K$  para estabilidade. Calcular as raízes da equação característica quando  $K$  tiver o menor valor permitido para estabilidade.



**Fig. PM6.6** Um sistema de controle com retroação monomalha com parâmetro  $K$ .

**PM6.7** Considerar o sistema sob a forma de variáveis de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -15 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [1 \ 1 \ 0] \mathbf{x}.$$

- (a) Calcular a equação característica usando a função `poly`. (b) Calcular as raízes da equação característica e determinar se o sistema é estável. (c) Obter o gráfico da resposta  $y(t)$  quando  $u(t)$  for um degrau unitário e quando o sistema estiver com condições iniciais nulas.

## TERMOS E CONCEITOS

**Critério de Routh-Hurwitz** Um critério para determinar a estabilidade de um sistema examinando-se a equação característica da função de transferência. O critério estabelece que o número de raízes da equação característica com parte real positiva é igual ao número de mudanças de sinal dos coeficientes da primeira coluna do arranjo tabular de Routh.

**Estabilidade** Uma medida de desempenho de um sistema. Um sistema é estável se todos os pólos da função de transferência possuírem parte real negativa.

**Estabilidade relativa** A propriedade que é medida pela parte real relativa de cada raiz ou par de raízes da equação característica.

**Polinômio auxiliar** A equação que precede imediatamente a linha nula do arranjo tabular de Routh.

**Sistema estável** Um sistema dinâmico com resposta limitada a uma entrada limitada.

## CAPÍTULO 7

# O Método do Lugar das Raízes

- 7.1 Introdução
- 7.2 O Conceito de Lugar das Raízes
- 7.3 O Procedimento do Lugar das Raízes
- 7.4 Um Exemplo de Análise e Projeto de Sistemas de Controle Utilizando o Método do Lugar das Raízes
- 7.5 Projeto de Parâmetro pelo Método do Lugar das Raízes
- 7.6 Sensibilidade e Lugar das Raízes
- 7.7 Controladores de Três Termos (PID)
- 7.8 Exemplo de Projeto: Sistema de Controle de um Manipulador de Laser
- 7.9 Projeto do Sistema de Controle de um Robô
- 7.10 Lugar das Raízes Usando o MATLAB
- 7.11 Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco
- 7.12 Sumário

## APRESENTAÇÃO

Nos capítulos precedentes discutiu-se como o desempenho de um sistema com retroação pode ser descrito em função da localização das raízes características no plano  $s$ . Sabe-se que a resposta de um sistema com retroação a malha fechada pode ser ajustada para se alcançar o desempenho desejado através da seleção judiciosa de um ou mais parâmetros do sistema. É muito útil determinar como as raízes da equação característica se deslocam ao longo do plano  $s$  à medida que se varia o valor de um parâmetro.

O lugar das raízes no plano  $s$  pode ser determinado por meio de um método gráfico. O gráfico do lugar das raízes à medida que varia um parâmetro do sistema é conhecido como o diagrama do lugar das raízes. O **lugar das raízes** é uma ferramenta poderosa para se analisar e projetar sistemas de controle com retroação e se constitui o principal tópico deste capítulo. Serão discutidas técnicas práticas de obtenção manual de um esboço do lugar das raízes. Serão considerados também os gráficos do lugar das raízes gerados por computador e será ilustrada sua eficácia no procedimento de projeto. É introduzido o popular controlador PID como estrutura prática de controlador.

Também será mostrado que é possível usar os métodos de lugar das raízes para projetar quando dois ou três parâmetros variam. Isto fornece a oportunidade de se projetar sistemas com retroação com dois ou três parâmetros ajustáveis. Por exemplo, o controlador PID possui três parâmetros ajustáveis. Define-se também uma medida de sensibilidade de uma raiz especificada a uma pequena variação incremental ocorrida com um parâmetro de sistema. O capítulo termina com o projeto de um controlador baseado nos métodos do lugar das raízes para o projeto de um controlador para o Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco.

## 7.1 INTRODUÇÃO

A estabilidade relativa e o desempenho de um sistema de controle a malha fechada estão diretamente relacionados com a localização das raízes da equação característica a malha fechada no plano  $s$ . Frequentemente é necessário ajustar um ou mais parâmetros a fim de se obter o posicionamento adequado das raízes. Portanto, vale a pena determinar como as raízes da equação característica de um dado

sistema se deslocam pelo plano  $s$  à medida que os parâmetros mudam de valor; ou seja, é útil determinar o **lugar** das raízes no plano  $s$  à medida que um parâmetro tenha o seu valor modificado. O **método do lugar das raízes** foi introduzido por Evans em 1948 e tem sido desenvolvido e utilizado extensamente na prática da engenharia de controle [1-3]. A técnica do lugar das raízes é um método gráfico de esboçar, no plano  $s$ , o lugar geométrico das raízes à medida que um parâmetro é variado. De fato, o método do lugar das raízes fornece ao engenheiro uma medida da sensibilidade das raízes do sistema a uma variação de um parâmetro sob consideração. A técnica do lugar das raízes pode ser usada com grande vantagem em conjunto com o critério de Routh-Hurwitz.

O método do lugar das raízes fornece informação gráfica, por conseguinte, pode-se usar um esboço aproximado no sentido de obter informação qualitativa referente à estabilidade e ao desempenho do sistema. Além disto, pode-se investigar o lugar das raízes da equação característica de um sistema com múltiplas malhas tão rapidamente quanto de um sistema com uma única malha. Se a localização das raízes não for satisfatória, os ajustes de parâmetro necessários quase sempre podem ser很容易mente determinados com exatidão a partir do lugar das raízes [4].

## 7.2 O CONCEITO DE LUGAR DAS RAÍZES

O desempenho dinâmico de um sistema de controle a malha fechada é descrito pela função de transferência a malha fechada

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{p(s)}{q(s)}, \quad (7.1)$$

onde  $p(s)$  e  $q(s)$  são polinômios em  $s$ . As raízes da equação característica  $q(s)$  determinam os modos da resposta do sistema. No caso do sistema de malha única mostrada na Fig. 7.1, tem-se a equação característica

$$1 + KG(s) = 0, \quad (7.2)$$

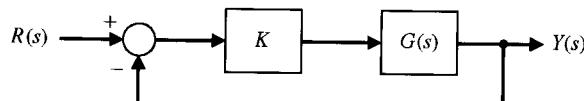


Fig. 7.1 Sistema de controle a malha fechada com um parâmetro  $K$  variável.

onde  $K$  é um parâmetro variável. As raízes características do sistema devem satisfazer a Eq. (7.2), onde se posicionam as raízes no plano  $s$ . Como  $s$  é uma variável complexa, a Eq. (7.2) pode ser escrita na forma polar como

$$|KG(s)| / \angle KG(s) = -1 + j0, \quad (7.3)$$

e por conseguinte é necessário que

$$|KG(s)| = 1$$

e

$$\angle KG(s) = 180^\circ \pm k360^\circ, \quad (7.4)$$

onde  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

---

**O lugar das raízes** é o percurso das raízes da equação característica traçado no plano  $s$  à medida que um parâmetro do sistema é alterado.

---

O sistema de segunda ordem simples considerado nos capítulos anteriores é mostrado na Fig. 7.2. A equação característica que representa este sistema é

$$\Delta(s) = 1 + KG(s) = 1 + \frac{K}{s(s+2)} = 0$$

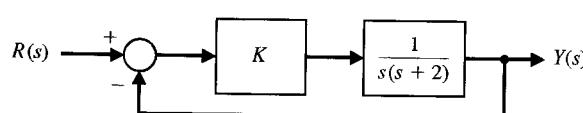


Fig. 7.2 Sistema de controle com retroação unitária. O ganho  $K$  é um parâmetro variável.

ou, alternativamente,

$$q(s) = s^2 + 2s + K = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0. \quad (7.5)$$

O lugar das raízes à medida que se varia o ganho  $K$  é encontrado requerendo-se

$$|G(s)| = \left| \frac{K}{s(s+2)} \right| = 1 \quad (7.6)$$

e

$$\angle G(s) = \pm 180^\circ, \pm 540^\circ, \dots \quad (7.7)$$

O ganho  $K$  pode ser variado a partir de zero até um valor positivo infinitamente grande. Para um sistema de segunda ordem, as raízes são

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad (7.8)$$

e para  $\zeta < 1$ , sabe-se que  $\theta = \cos^{-1} \zeta$ . Graficamente, para os dois pólos a malha aberta, como está mostrado na Fig. 7.3, o lugar das raízes é uma linha vertical para  $\zeta \leq 1$  a fim de satisfazer o requisito angular, dado pela Eq. (7.7). Por exemplo, como está mostrado na Fig. 7.4, em uma raiz  $s_1$ , os ângulos são

$$\left| \frac{K}{s(s+2)} \right|_{s=s_1} = -\angle s_1 - \angle(s_1 + 2) = -[(180^\circ - \theta) + \theta] = -180^\circ. \quad (7.9)$$

Este requisito angular é satisfeito em qualquer ponto da linha vertical que é uma bissetriz perpendicular ao segmento de linha que vai de 0 a  $-2$ . Além disso, o ganho  $K$  neste ponto particular  $s_1$  é encontrado usando-se a Eq. (7.6) como

$$\left| \frac{K}{s(s+2)} \right|_{s=s_1} = \frac{K}{|s_1| |s_1 + 2|} = 1, \quad (7.10)$$

e assim

$$K = |s_1| |s_1 + 2|, \quad (7.11)$$

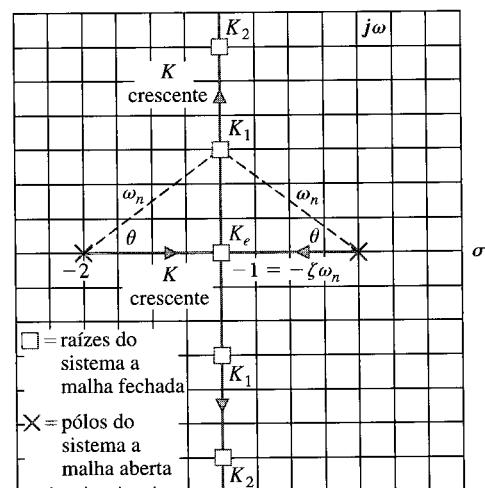
onde  $|s_1|$  é a magnitude do vetor que vai da origem até  $s_1$ , e  $|s_1 + 2|$  é a magnitude do vetor que vai de  $-2$  a  $s_1$ .

Para um sistema multimalhas a malha fechada, encontrou-se na Seção 2.7 que, usando a fórmula de Mason do ganho do diagrama de fluxo de sinal, resulta

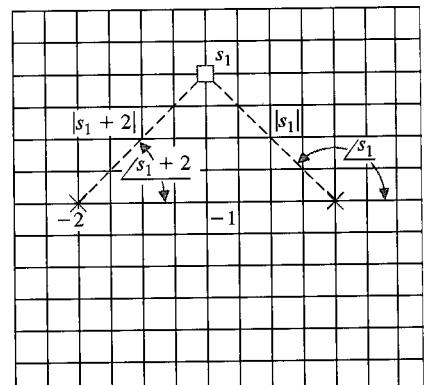
$$\Delta(s) = 1 - \sum_{n=1}^N L_n + \sum_{m,q}^{M,N} L_m L_q - \sum L_r L_s L_t + \dots, \quad (7.12)$$

onde  $L_q$  é igual ao valor de  $q$ -ésima transmitância de malha própria. Portanto, tem-se a equação característica, que pode ser escrita como

$$q(s) = \Delta(s) = 1 + F(s). \quad (7.13)$$



**Fig. 7.3** Lugar das raízes para um sistema de segunda ordem quando  $K_e < K_1 < K_2$ . O lugar é mostrado em linha cheia com setas.



**Fig. 7.4** Cálculo do ângulo e do ganho em  $s_1$  para o ganho  $K = K_1$ .

Para encontrar as raízes da equação característica, faz-se a Eq. (7.13) igual a zero e se obtém

$$1 + F(s) = 0. \quad (7.14)$$

A Eq. (7.14) pode ser escrita como

$$F(s) = -1 + j0, \quad (7.15)$$

e as raízes da equação característica devem também satisfazer esta relação.

Em geral, a função  $F(s)$  pode ser escrita como

$$F(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)(s + z_3) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3) \cdots (s + p_n)}.$$

Então, os requisitos de magnitude e de ângulo exigidos para o lugar das raízes são

$$|F(s)| = \frac{|K| |s + z_1| |s + z_2| \cdots}{|s + p_1| |s + p_2| \cdots} = 1, \quad (7.16)$$

e

$$\begin{aligned} \angle F(s) &= \angle s + z_1 + \angle s + z_2 + \cdots \\ &\quad - (\angle s + p_1 + \angle s + p_2 + \cdots) = 180^\circ \pm q360^\circ \end{aligned} \quad (7.17)$$

onde  $q$  é um número inteiro. O requisito de magnitude, Eq. (7.16) permite determinar o valor de  $K$  para uma dada localização de raiz  $s_1$ . Um ponto de teste no plano  $s$ ,  $s_1$ , é verificado como um local da raiz quando a Eq. (7.17) for satisfeita. Os ângulos são todos medidos no sentido anti-horário, a partir de uma linha horizontal.

Para ilustrar mais um pouco o procedimento do lugar das raízes, seja reconsiderar o sistema de segunda ordem da Fig. 7.5(a). O efeito da variação do parâmetro,  $a$ , pode ser efetivamente retratado reescrevendo a equação característica na forma do lugar das raízes tendo  $a$  como fator multiplicador do numerador. Então, a equação característica é

$$1 + KG(s) = 1 + \frac{K}{s(s + a)} = 0,$$

ou, alternativamente,

$$s^2 + as + K = 0.$$

Dividindo pelo fator  $(s^2 + K)$ , obtém-se

$$1 + \frac{as}{s^2 + K} = 0. \quad (7.18)$$

Então, o critério de magnitude é satisfeito na raiz  $s_1$  quando

$$\frac{a|s_1|}{|s_1^2 + K|} = 1 \quad (7.19)$$

O critério do ângulo é

$$\angle s_1 - (\angle s_1 + j\sqrt{K} + \angle s_1 - j\sqrt{K}) = \pm 180^\circ, \pm 540^\circ, \dots$$

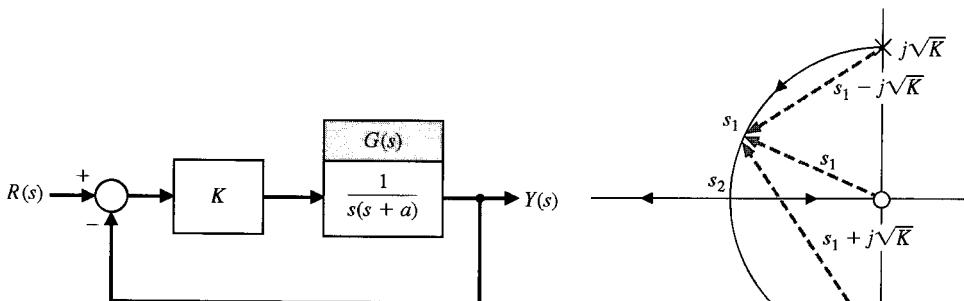


Fig. 7.5 (a) Sistema de malha única. (b) Lugar das raízes como uma função do parâmetro  $a$ .

Em princípio, seria possível construir o lugar das raízes determinando os pontos no plano  $s$  que satisfazem o critério de ângulo. Na próxima seção será desenvolvido um procedimento de doze passos para esboçar o lugar das raízes. O lugar das raízes para a equação característica na Eq. (7.18) é mostrado na Fig. 7.5(b). Especificamente na raiz  $s_1$ , a magnitude do parâmetro,  $a$ , é encontrada a partir da Eq. (7.19) como

$$a = \frac{|s_1 - j\sqrt{K}| |s_1 + j\sqrt{K}|}{|s_1|}. \quad (7.20)$$

As raízes do sistema se juntam no eixo real no ponto  $s_2$  e fornecem uma resposta criticamente amortecida a uma entrada em degrau. O parâmetro,  $a$ , nas raízes criticamente amortecidas  $s_2 = \sigma_2$  tem uma magnitude igual a

$$a = \frac{|\sigma_2 - j\sqrt{K}| |\sigma_2 + j\sqrt{K}|}{\sigma_2} = \frac{1}{\sigma_2} (\sigma_2^2 + K), \quad (7.21)$$

onde  $\sigma_2$  é calculado a partir dos comprimentos dos vetores no plano  $s$  como  $\sigma_2 = \sqrt{K}$ . À medida que o valor de  $a$  aumenta além do valor crítico, as raízes são ambas reais e bem definidas; uma raiz é maior do que  $\sigma_2$ , e a outra é menor.

Usualmente, é desejável contar com um procedimento sistematizado para localização do lugar das raízes à medida que um parâmetro varia. Na seção seguinte, será desenvolvida uma abordagem sistematizada para esboçar um diagrama do lugar das raízes.

### 7.3 O PROCEDIMENTO DO LUGAR DAS RAÍZES

As raízes da equação característica de um sistema fornecem uma visão de conjunto valiosa com referência à resposta do sistema. Para localizar as raízes da equação característica de um modo gráfico no plano  $s$ , será desenvolvido um procedimento ordenado de doze passos que facilitam o esboço rápido do lugar das raízes.

**Passo 1:** Escrever a equação característica como

$$1 + F(s) = 0 \quad (7.22)$$

e reorganizar a equação, se necessário, de modo que o parâmetro de interesse,  $K$ , apareça como fator multiplicativo sob a forma,

$$1 + KP(s) = 0. \quad (7.23)$$

**Passo 2:** Fatorar  $P(s)$ , se necessário, e escrever o polinômio na forma de pólos e zeros como se segue:

$$1 + K \frac{\prod_{i=1}^M (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = 0. \quad (7.24)$$

**Passo 3:** Localizar os pólos e zeros no plano  $s$  com símbolos selecionados. Geralmente, há interesse em determinar o lugar das raízes à medida que  $K$  varia no intervalo

$$0 \leq K \leq \infty.$$

Reescrevendo a Eq. (7.24), tem-se

$$\prod_{j=1}^n (s + p_j) + K \prod_{i=1}^M (s + z_i) = 0. \quad (7.25)$$

Quando  $K = 0$ , as raízes da equação característica são simplesmente os pólos de  $P(s)$ . Além disso, quando  $K$  tende a infinito, as raízes da equação característica são simplesmente os zeros de  $P(s)$ . Por conseguinte, nota-se que o lugar das raízes da equação característica  $1 + KP(s) = 0$  inicia-se nos pólos de  $P(s)$  e termina nos zeros de  $P(s)$  à medida que  $K$  aumenta a partir de zero até infinito. Para a maioria das funções,  $P(s)$ , que serão encontradas, alguns dos zeros de  $P(s)$  no plano  $s$  encontram-se no infinito. Isto porque a maioria das funções tem mais pólos do que zeros. Com  $n$  pólos e  $M$  zeros e  $n > M$ , têm-se  $n - M$  ramos do lugar das raízes tendendo aos  $n - M$  zeros no infinito.

**Passo 4:** Localizar os segmentos do eixo real que são lugares das raízes. O lugar das raízes no eixo real está sempre em uma seção do eixo real à esquerda de um número ímpar de pólos e zeros. Este fato é confirmado examinando-se o critério de ângulo da Eq. (7.17). Estes quatro passos úteis para o traçado do lugar das raízes serão ilustrados através de um exemplo apropriado.

**EXEMPLO 7.1****Sistema de segunda ordem**

Um sistema de controle de malha única com retroação possui a seguinte equação característica (passo 1):

$$1 + GH(s) = 1 + \frac{K(\frac{1}{2}s + 1)}{s(\frac{1}{4}s + 1)} = 0. \quad (7.26)$$

Passo 2: A função de transferência  $GH(s)$  é reescrita em termos de pólos e zeros como se segue:

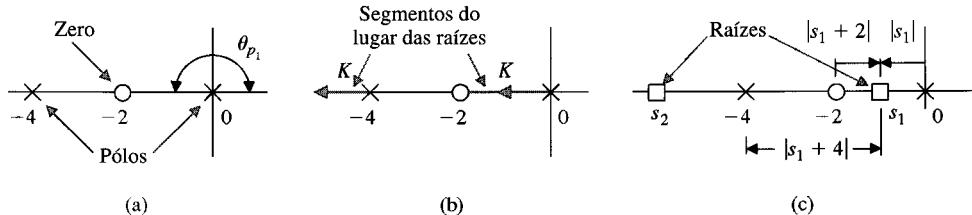
$$1 + \frac{2K(s + 2)}{s(s + 4)} = 0, \quad (7.27)$$

e o parâmetro de ganho multiplicativo é  $2K$ . Para determinar o lugar das raízes para o ganho  $0 \leq K \leq \infty$  (passo 3), localizam-se os pólos e zeros no eixo real, como está mostrado na Fig. 7.6(a). Finalmente (passo 4), o critério de ângulo é satisfeito no eixo real entre os pontos 0 e  $-2$ , porque o ângulo do segmento a partir do pólo  $p_1$  na origem é  $180^\circ$ , e os ângulos a partir do zero e do pólo  $p_2$  em  $s = -4$  são ambos iguais a zero grau. O lugar se inicia no pólo e termina nos zeros, e, por conseguinte, o lugar das raízes aparece como mostra a Fig. 7.6(b), onde o sentido de crescimento do valor de  $K$  sobre o lugar ( $K\uparrow$ ) é mostrado por meio de uma seta. Nota-se que devido ao sistema ter dois pólos reais e um zero real, o segundo lugar termina em um zero situado em menos infinito. Para calcular o ganho  $K$  em uma localização específica de raiz, utiliza-se o critério de magnitude, Eq. (7.16). Por exemplo, o ganho  $K$  na raiz  $s = s_1 = -1$  é encontrado a partir de (7.16) como sendo

$$\frac{(2K) |s_1 + 2|}{|s_1| |s_1 + 4|} = 1,$$

ou

$$K = \frac{|-1| |-1 + 4|}{2|-1 + 2|} = \frac{3}{2}. \quad (7.28)$$



**Fig. 7.6** (a) O zero e os pólos de um sistema de segunda ordem, (b) os segmentos do lugar das raízes e (c) a magnitude de cada vetor em  $s_i$ .

Esta magnitude também pode ser calculada graficamente como mostrado na Fig. 7.6(c). Para o ganho de  $K = 3/2$ , existe uma outra raiz, localizada no lugar à esquerda do pólo em  $-4$ . A localização da segunda raiz é encontrada graficamente e está posicionada em  $s = -6$ , como mostrado na Fig. 7.6(c). ■

Retornar-se-á agora ao desenvolvimento de uma lista geral de passos para obtenção do lugar das raízes.

**Passo 5:** Determinar o número de lugares separados,  $LS$ . Como os lugares se iniciam nos pólos e terminam nos zeros, o **número de lugares separados é igual ao número de pólos**, uma vez que o número de pólos é maior que ou igual ao número de zeros. Em consequência, como foi encontrado na Fig. 7.6, o número de lugares separados é igual a 2 porque há dois pólos e um zero.

**Passo 6:** O lugar das raízes deve ser simétrico em relação ao eixo real porque as raízes complexas devem aparecer aos pares de raízes complexas conjugadas.

**Passo 7:** Os lugares avançam em direção aos zeros no infinito segundo assintotas centradas em  $\sigma_A$  com ângulos  $\phi_A$ . Quando o número de zeros finitos de  $P(s)$ ,  $n_z$ , é menor do que o número de pólos,  $n_p$ , de um número  $N = n_p - n_z$ , então  $N$  seções de lugares devem finalizar em zeros no infinito. Estas seções de lugar avançam em direção aos zeros no infinito ao longo de **assintotas** à medida que  $K$  tende ao infinito. Estas **retas assintotas estão centradas** em um ponto no eixo real dado por

$$\sigma_A = \frac{\sum \text{pólos de } P(s) - \sum \text{zeros de } P(s)}{n_p - n_z} = \frac{\sum_{j=1}^n (-p_j) - \sum_{i=1}^M (-z_i)}{n_p - n_z}. \quad (7.29)$$

O ângulo das assíntotas com relação ao eixo real é

$$\boxed{\phi_A = \frac{(2q + 1)}{n_p - n_z} 180^\circ, \quad q = 0, 1, 2, \dots, (n_p - n_z - 1), \quad (7.30)}$$

onde  $q$  é um índice inteiro [3]. A utilidade desta regra é óbvia para se esboçar a forma aproximada de um lugar das raízes. A Eq. (7.30) pode ser deduzida facilmente considerando um ponto sobre um segmento do lugar das raízes a uma distância remota dos pólos e zeros finitos no plano  $s$ . O ângulo de fase resultante neste ponto remoto é  $180^\circ$ , porque é um ponto sobre um segmento do lugar das raízes. Os pólos e zeros finitos de  $P(s)$  estão a uma grande distância do ponto remoto, e então, os ângulos de cada pólo e zero,  $\phi$ , são essencialmente iguais, e por conseguinte o ângulo líquido resultante é simplesmente  $\phi(n_p - n_z)$ , onde  $n_p$  e  $n_z$  são os números de pólos e zeros finitos, respectivamente. Em consequência, tem-se

$$\phi(n_p - n_z) = 180^\circ,$$

ou, alternativamente,

$$\phi = \frac{180^\circ}{n_p - n_z}.$$

Levando em conta todos os possíveis segmentos do lugar das raízes em localizações remotas no plano  $s$ , obtém-se a Eq. (7.30).

O centro das assíntotas, muitas vezes chamado de **centróide das assíntotas**, é determinado considerando-se a equação característica  $1 + GH(s) = 0$  (Eq. 7.24). Para um grande valor de  $s$ , somente os termos de ordem mais alta precisam ser considerados, de modo que a equação característica se reduza a

$$1 + \frac{Ks^M}{s^n} = 0.$$

Contudo, esta relação, que é uma aproximação, indica que o centroide das  $(n - M)$  assíntotas está na origem,  $s = 0$ . Uma melhor aproximação é obtida se for considerada uma equação característica na forma

$$1 + \frac{K}{(s - \sigma_A)^{n-M}} = 0$$

com um centroide em  $\sigma_A$ .

O centroide é determinado considerando-se os dois primeiros termos da Eq. (7.24), que podem ser encontrados a partir da relação

$$1 + \frac{K \prod_{i=1}^M (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = 1 + K \frac{(s^M + b_{M-1}s^{M-1} + \dots + b_0)}{(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0)}.$$

Com base no Cap. 6, especialmente Eq. (6.5), observa-se que

$$b_{M-1} = \sum_{i=1}^M z_i, \quad \text{e} \quad a_{n-1} = \sum_{j=1}^n p_j.$$

Considerando somente os dois primeiros termos deste desenvolvimento, tem-se

$$1 + \frac{K}{s^{n-M} + (a_{n-1} - b_{M-1})s^{n-M-1}} = 0.$$

Os dois primeiros termos de

$$1 + \frac{K}{(s - \sigma_A)^{n-M}} = 0$$

são

$$1 + \frac{K}{s^{n-M} - (n - M)\sigma_A s^{n-M-1}} = 0.$$

Igualando o termo para  $s^{n-M-1}$ , obtém-se

$$(a_{n-1} - b_{M-1}) = -(n - M)\sigma_A,$$

que é equivalente à Eq. (7.29).

Por exemplo, reexaminar o sistema mostrado na Fig. 7.2 e discutido na Seção 7.2. A equação característica é escrita como

$$1 + \frac{K}{s(s + 2)} = 0.$$

Como  $n_p - n_z = 2$ , esperam-se dois lugares terminando nos zeros no infinito. As assíntotas dos lugares são localizados em um centro

$$\sigma_A = \frac{-2}{2} = -1,$$

e com ângulos de

$$\phi_A = 90^\circ, \quad q = 0, \quad \text{e} \quad \phi_A = 270^\circ, \quad q = 1.$$

Por conseguinte, o lugar das raízes é prontamente esboçado e é obtido o lugar mostrado na Fig. 7.3. Um exemplo ilustrará mais adiante o processo de utilização das assíntotas.

### EXEMPLO 7.2

#### Sistema de quarta ordem

Um sistema de controle com retroação, de malha única, tem uma equação característica como a seguir

$$1 + GH(s) = 1 + \frac{K(s + 1)}{s(s + 2)(s + 4)^2}. \quad (7.31)$$

Deseja-se esboçar o lugar das raízes a fim de determinar o efeito do ganho  $K$ . Os pólos e zeros estão localizados no plano  $s$  como mostrado na Fig. 7.7(a). Os lugares das raízes no eixo real devem estar situados à esquerda de um número ímpar de pólos e zeros e são, por conseguinte, localizados como mostra a Fig. 7.7(a) em linhas cheias. A interseção das assíntotas é

$$\sigma_A = \frac{(-2) + 2(-4) - (-1)}{4 - 1} = \frac{-9}{3} = -3. \quad (7.32)$$

Os ângulos das assíntotas são

$$\begin{aligned} \phi_A &= +60^\circ, & q &= 0, \\ \phi_A &= 180^\circ, & q &= 1, \\ \phi_A &= 300^\circ, & q &= 2, \end{aligned}$$

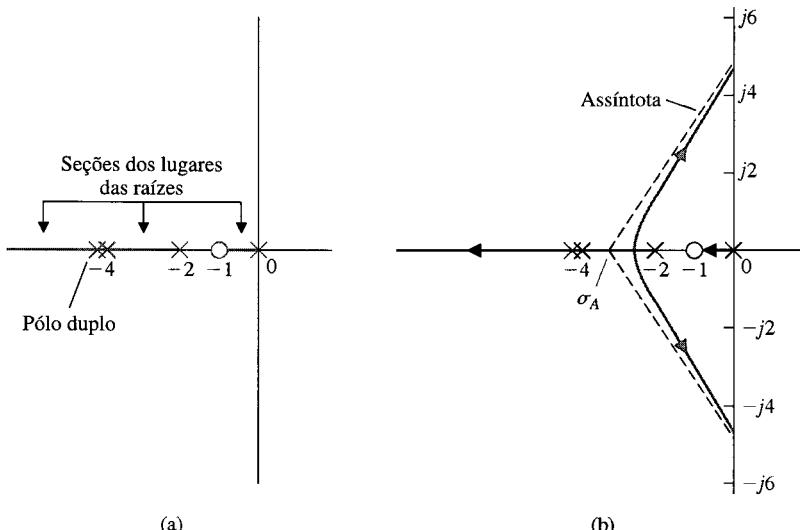


Fig. 7.7 Um sistema de quarta ordem com (a) um zero e (b) lugar das raízes.

onde existem três assíntotas, uma vez que  $n_p - n_z = 3$ . Observa-se também que os lugares das raízes devem começar nos pólos, e por conseguinte dois lugares devem começar no polo duplo em  $s = -4$ . Então, com as assíntotas esboçadas na Fig. 7.7(b) pode-se esboçar a forma do lugar das raízes como mostrado na Fig. 7.7(b). A forma real do lugar na região próxima de  $\sigma_A$  será calculada graficamente, se necessário. ■

Continua-se agora o desenvolvimento de mais passos para o procedimento de determinação dos lugares das raízes.

**Passo 8:** Determinar o ponto no qual o lugar cruza o eixo imaginário (se isto ocorrer), usando o critério de Routh-Hurwitz. **O ponto real no qual o lugar das raízes intercepta o eixo imaginário é prontamente calculado utilizando-se o critério de Routh-Hurwitz.**

**Passo 9:** Determinar o ponto de saída do eixo real (se existir). O lugar das raízes no Exemplo 7.2 deixa o eixo real no **ponto de saída**. A saída do lugar das raízes do eixo real ocorre onde a variação líquida no ângulo causada por um pequeno deslocamento é zero. O lugar deixa o eixo real onde existem raízes múltiplas, tipicamente duas. O ponto de saída para um sistema de segunda ordem simples é mostrado na Fig. 7.8(a) e, para um caso especial de um sistema de quarta ordem, na Fig. 7.8(b). Em geral, devido ao critério de fase, **as tangentes aos lugares no ponto de saída são igualmente espaçadas sobre 360°**. Por conseguinte, na Fig. 7.8(a) constata-se que os dois lugares no ponto de saída estão espaçados de 180°, enquanto que na Fig. 7.8(b) os quatro lugares estão espaçados de 90°.

O ponto de saída sobre o eixo real pode ser calculado graficamente ou analiticamente. O método mais direto de cálculo do ponto de saída envolve a reorganização da equação característica para isolar o fator de multiplicação  $K$ . Então, a equação característica é escrita como

$$p(s) = K. \quad (7.33)$$

Por exemplo, considere-se um sistema a malha fechada com retroação com uma função de transferência de malha aberta

$$G(s) = \frac{K}{(s + 2)(s + 4)},$$

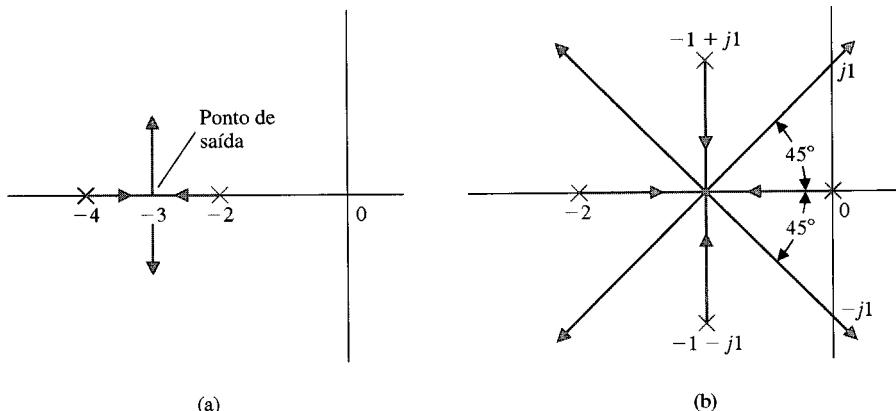
que tem uma equação característica como se segue:

$$1 + G(s) = 1 + \frac{K}{(s + 2)(s + 4)} = 0. \quad (7.34)$$

Alternativamente, a equação pode ser escrita como

$$K = p(s) = -(s + 2)(s + 4). \quad (7.35)$$

Os lugares das raízes para este sistema estão mostrados na Fig. 7.8(a). Espera-se que o ponto de saída seja próximo a  $s = \sigma = -3$  e se trace  $p(s)|_{s=\sigma}$  próximo àquele ponto, como mostrado na Fig. 7.9. Neste caso,  $p(s)$  é igual a zero nos pólos  $s = -2$  e  $s = -4$ . O gráfico de  $p(s)$  versus  $\sigma$  é simétrico, e o ponto máximo ocorre em  $s = \sigma = -3$ , o ponto de saída.

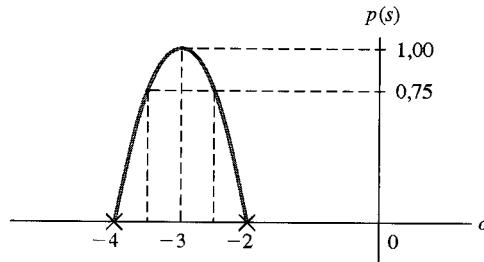


**Fig. 7.8** Ilustração do ponto de saída (a) para um sistema de segunda ordem simples e (b) para um sistema de quarta ordem.

Analiticamente, os mesmos resultados podem ser obtidos determinando-se o máximo de  $K = p(s)$ . Para encontrar analiticamente o máximo, deriva-se o polinômio, iguala-se o polinômio resultante a zero e determinam-se as raízes deste polinômio. Então é possível calcular

$$\frac{dK}{ds} = \frac{dp(s)}{ds} = 0 \quad (7.36)$$

para encontrar o ponto de saída. A Eq. (7.36) é uma expressão analítica do procedimento gráfico retratado na Fig. 7.9 e resultará em uma equação de somente uma ordem abaixo do número total de pólos e zeros ( $n_p + n_z - 1$ ).



**Fig. 7.9** Um cálculo gráfico do ponto de saída.

A prova da Eq. (7.36) é obtida considerando-se a equação característica

$$1 + F(s) = 1 + \frac{KY(s)}{X(s)} = 0,$$

que pode ser escrita como

$$X(s) + KY(s) = 0. \quad (7.37)$$

Para um pequeno incremento em  $K$ , tem-se

$$X(s) + (K + \Delta K)Y(s) = 0.$$

Dividindo-se por  $X(s) + KY(s)$ , vem

$$1 + \frac{\Delta KY(s)}{X(s) + KY(s)} = 0. \quad (7.38)$$

Como o denominador é igual à equação característica original, num ponto de saída existem raízes múltiplas, e

$$\frac{Y(s)}{X(s) + KY(s)} = \frac{C_i}{(s - s_i)^n} = \frac{C_i}{(\Delta s_i)^n}. \quad (7.39)$$

Então é possível escrever a Eq. (7.38) como

$$1 + \frac{\Delta KC_i}{(\Delta s_i)^n} = 0, \quad (7.40)$$

ou, alternativamente,

$$\frac{\Delta K}{\Delta s} = \frac{-(\Delta s)^{n-1}}{C_i}. \quad (7.41)$$

Portanto, à medida que se faz  $\Delta s$  tender a zero, obtém-se

$$\frac{dK}{ds} = 0 \quad (7.42)$$

nos pontos de saída.

Agora, reconsiderando o caso específico onde

$$G(s) = \frac{K}{(s + 2)(s + 4)},$$

obtém-se  $p(s)$  como

$$K = p(s) = -(s + 2)(s + 4) = -(s^2 + 6s + 8). \quad (7.43)$$

Então, derivando, tem-se

$$\frac{dp(s)}{ds} = -(2s + 6) = 0, \quad (7.44)$$

ou seja, o ponto de saída ocorre em  $s = -3$ . Um exemplo mais complicado ilustrará a abordagem e demonstrará o uso da técnica gráfica para determinar o ponto de saída.

### EXEMPLO 7.3

#### Sistema de terceira ordem

Um sistema de controle com retroação é mostrado na Fig. 7.10. A equação característica é

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s + 1)}{s(s + 2)(s + 3)} = 0. \quad (7.45)$$

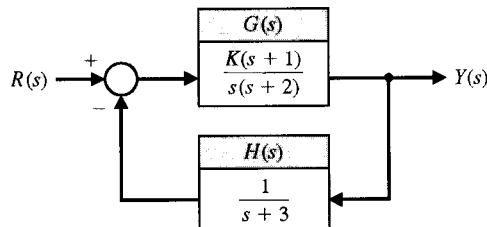


Fig. 7.10 Sistema a malha fechada.

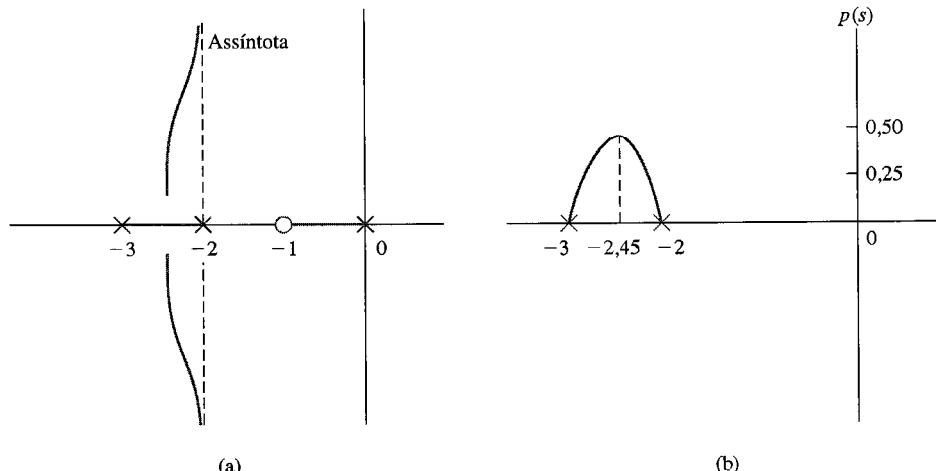


Fig. 7.11 Cálculo (a) das assíntotas e (b) do ponto de saída.

O número de pólos,  $n_p$ , menos o número de zeros,  $n_z$ , é igual a 2, e têm-se duas assíntotas de  $\pm 90^\circ$  com um centro em  $\sigma_A = -2$ . As assíntotas e as seções dos lugares sobre o eixo real estão mostrados na Fig. 7.11(a). Um ponto de saída ocorre entre  $s = -2$  e  $s = -3$ . Para calcular o ponto de saída, reescreve-se a equação característica de modo que  $K$  seja separado:

$$s(s + 2)(s + 3) + K(s + 1) = 0,$$

ou

$$p(s) = \frac{-s(s + 2)(s + 3)}{(s + 1)} = K. \quad (7.46)$$

Calculando-se então  $p(s)$  para diversos valores de  $s$  entre  $s = -2$  e  $s = -3$ , obtém-se os resultados da Tabela 7.1, como mostrado na Fig. 7.11(b). Alternativamente, deriva-se a Eq. (7.46) e iguala-se a zero o resultado para obter

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( \frac{-s(s + 2)(s + 3)}{(s + 1)} \right) &= \frac{(s^3 + 5s^2 + 6s) - (s + 1)(3s^2 + 10s + 6)}{(s + 1)^2} = 0 \\ &= 2s^3 + 8s^2 + 10s + 6 = 0. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Agora, para localizar o máximo de  $p(s)$ , acham-se as raízes da Eq. (7.47) para obter  $s = -2,45$ . Torna-se evidente a partir deste exemplo que o cálculo numérico de  $p(s)$  nas proximidades do ponto de saída esperado fornece um método efetivo de se calcular o ponto de saída. ■

**Passo 10:** Determinar o ângulo de saída do lugar a partir de um pólo e o ângulo de chegada do lugar em um zero, usando o critério de ângulo de fase. O **ângulo de saída do lugar a partir de um pólo é a diferença entre o ângulo líquido devido a todos os outros pólos e zeros e o ângulo do critério de  $\pm 180^\circ$  ( $2q + 1$ )**, e de modo semelhante para o ângulo com que o lugar chega no zero. O ângulo de saída (ou de chegada) é particularmente de interesse para pólos complexos (e zeros) por-

TABELA 7.1

$p(s)$	0	+0,412	+0,420	+0,417	+0,390	0
$s$	-2,00	-2,40	-2,45	-2,50	-2,60	-3,0

que a informação é útil para se completar o lugar das raízes. Por exemplo, considere-se a função de transferência a malha aberta de terceira ordem

$$F(s) = G(s)H(s) = \frac{K}{(s + p_3)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}. \quad (7.48)$$

As localizações do pólo e os ângulos dos vetores no pólo complexo  $p_1$  são mostrados na Fig. 7.12(a). Os ângulos num ponto teste  $s_1$ , a uma distância infinitesimal de  $p_1$ , deve satisfazer o critério de ângulo. Portanto, como  $\theta_2 = 90^\circ$ , tem-se

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \theta_1 + 90^\circ + \theta_3 = +180^\circ,$$

ou seja, o ângulo de saída no pólo  $p_1$  é

$$\theta_1 = 90^\circ - \theta_3,$$

como mostrado na Fig. 7.12(b). A saída no pólo  $p_2$  é o negativo da saída de  $p_1$  porque  $p_1$  e  $p_2$  são conjugados complexos. Um outro exemplo de ângulo de saída é mostrado na Fig. 7.13. Neste caso, o ângulo de saída é achado a partir de

$$\theta_2 - (\theta_1 + \theta_3 + 90^\circ) = 180^\circ.$$

Como  $(\theta_2 - \theta_3) = \gamma$ , acha-se que o ângulo de saída é  $\theta_1 = 90^\circ + \gamma$ .

Os dois passos finais do procedimento para o lugar das raízes são usados para determinar a localização de uma raiz,  $s_x$ , e o valor do parâmetro  $K_x$  para essa raiz.

**Passo 11:** Determinar as localizações de raiz que satisfazem o critério de fase na raiz  $s_x$ ,  $x = 1, 2, \dots, n_p$ . O critério de fase (Eq. 7.17) é

$$\underline{|P(s)|} = 180^\circ \pm q360^\circ, \quad q = 1, 2, \dots$$

**Passo 12:** Determinar o valor do parâmetro  $K_x$  em uma raiz específica  $s_x$  usando o requisito de magnitude (Eq. 7.16). O requisito de magnitude em  $s_x$  é

$$K_x = \left. \frac{\prod_{j=1}^n |(s + p_j)|}{\prod_{i=1}^m |(s + z_i)|} \right|_{s=s_x}$$

Vale a pena neste ponto resumir os doze passos utilizados no método do lugar das raízes (Tabela 7.2) e depois ilustrar seu uso num exemplo completo.

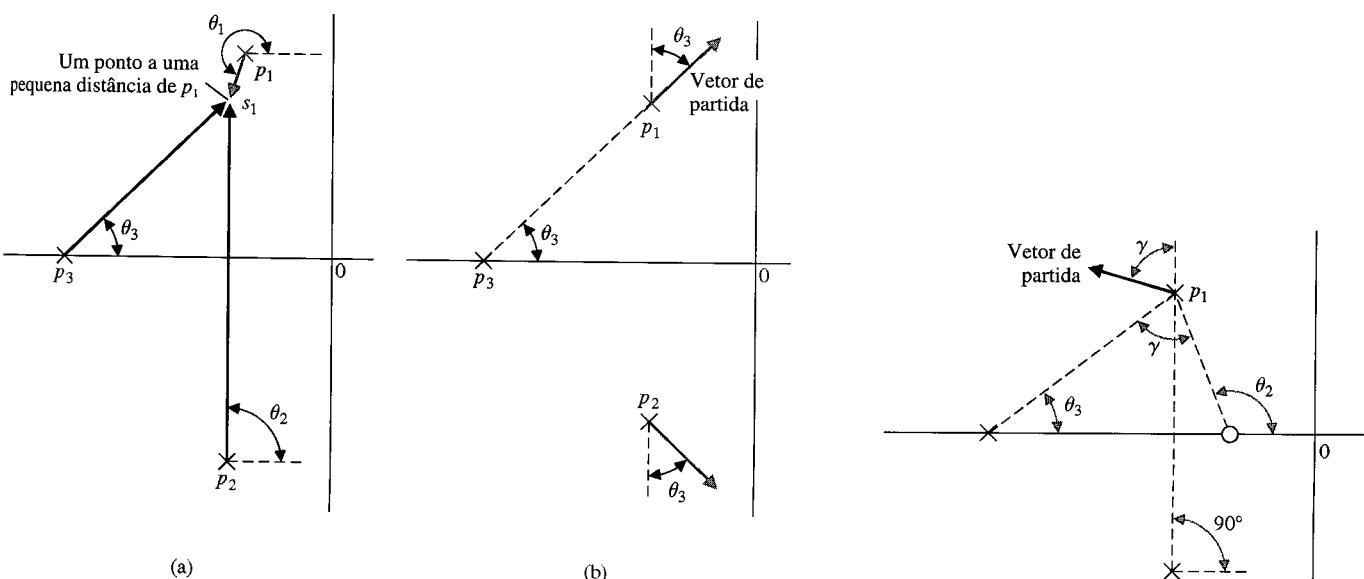


Fig. 7.12 Ilustração do ângulo de partida: (a) ponto de teste a uma distância infinitesimal de  $p_1$ ; (b) vetor de partida real em  $p_1$ .

Fig. 7.13 Cálculo do ângulo de partida.

**TABELA 7.2 Os Doze Passos do Procedimento do Lugar das Raízes**

Passo	Equação Relacionada ou Regra
1. Escrever a equação característica de modo que o parâmetro de interesse $K$ apareça como um multiplicador.	$1 + KP(s) = 0$ .
2. Fatorar $P(s)$ em termos dos $n_p$ pólos e $n_z$ zeros.	$1 + K \frac{\prod_{i=1}^{n_z} (s + z_i)}{\prod_{j=1}^{n_p} (s + p_j)} = 0.$
3. Assinalar os pólos e zeros a malha aberta de $F(s)$ no plano $s$ com símbolo selecionado.	$\times$ = pólos, $\circ$ = zeros, $\square$ ou $\triangle$ = raízes da equação característica. O lugar começa no pólo e termina no zero.
4. Assinalar os segmentos do eixo real que são lugares das raízes.	O lugar se situa à esquerda de um número ímpar de pólos e zeros.
5. Determinar o número de lugares separados, $LS$ .	$LS = n_p$ quando $n_p \geq n_z$ ; $n_p$ = Número de pólos finitos, $n_z$ = número de zeros finitos.
6. Os lugares das raízes são simétricos com relação ao eixo real horizontal.	
7. Os lugares prosseguem em direção aos zeros no infinito ao longo de assíntotas centralizadas em $\sigma_A$ e com ângulos $\phi_A$ .	$\sigma_A = \frac{\sum(-p_j) - \sum(-z_i)}{n_p - n_z}$ $\phi_A = \frac{(2q + 1)}{n_p - n_z} 180^\circ, q = 0, 1, 2, \dots (n_p - n_z - 1).$
8. Utilizando o critério de Routh-Hurwitz, determinar o ponto no qual o lugar cruza o eixo imaginário (se isto ocorrer).	Ver Seção 6.2.
9. Determinar o ponto de saída (se existir) sobre o eixo real.	a) Fazer $K = p(s)$ . b) Obter $\frac{dp(s)}{ds} = 0$ . c) Determinar as raízes de (b) ou usar método gráfico para encontrar o máximo de $p(s)$ .
10. Determinar o ângulo de partida do lugar a partir dos pólos complexos e o ângulo de chegada do lugar nos zeros complexos, usando o critério do ângulo de fase.	$ P(s)  = 180^\circ \pm q360^\circ$ em $s = p_j$ ou $z_i$ .
11. Determinar as localizações das raízes que satisfazem o critério do ângulo de fase.	$ P(s)  = 180^\circ \pm q360^\circ$ na localização da raiz $s_x$ .
12. Determinar o valor do parâmetro $K_x$ na raiz específica $s_x$ .	$K_x = \left. \frac{\prod_{j=1}^{n_p}  (s + p_j) }{\prod_{i=1}^{n_z}  (s + z_i) } \right _{s=s_x}$

**EXEMPLO 7.4****Sistema de quarta ordem**

1. Deseja-se traçar o lugar das raízes para a equação característica de um sistema à medida que  $K$  varia para  $K > 0$ , no caso em que

$$1 + \frac{K}{s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s} = 0.$$

2. Determinando os pólos, tem-se

$$1 + \frac{K}{s(s + 4)(s + 4 + j4)(s + 4 - j4)} = 0 \quad (7.49)$$

à medida que  $K$  varia de zero a infinito. O sistema não possui zeros finitos.

3. Os pólos são localizados sobre o plano  $s$ , como mostrado na Fig. 7.14(a).
4. Existe um segmento do lugar das raízes sobre o eixo real entre  $s = 0$  e  $s = -4$ .
5. Como o número de pólos  $n_p$  é igual a 4, têm-se quatro lugares separados.
6. Os lugares das raízes são simétricos com respeito ao eixo real.
7. Os ângulos de assíntotas são

$$\phi_A = \frac{(2q + 1)}{4} 180^\circ, \quad q = 0, 1, 2, 3;$$

$$\phi_A = +45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ.$$

O centro das assíntotas é

$$\sigma_A = \frac{-4 - 4 - 4}{4} = -3.$$

Então, as assíntotas são desenhadas como mostrado na Fig. 7.14(a).

8. A equação característica é reescrita como

$$s(s + 4)(s^2 + 8s + 32) + K = s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s + K = 0. \quad (7.50)$$

Portanto, o arranjo tabular de Routh é

$s^4$	1	64	$K$
$s^3$	12	128	
$s^2$	$b_1$	$K$	
$s$	$c_1$		
$s^0$	$K$ ,		

onde

$$b_1 = \frac{12(64) - 128}{12} = 53,33, \quad \text{e} \quad c_1 = \frac{53,33(128) - 12K}{53,33}.$$

Então, o valor limite de ganho para estabilidade é  $K = 568,89$ , e as raízes da equação auxiliar são

$$53,33s^2 + 568,89 = 53,33(s^2 + 10,67) = 53,33(s + j3,266)(s - j3,266). \quad (7.51)$$

Os pontos onde o lugar cruza o eixo imaginário são mostrados na Fig. 7.14(a).

9. O ponto de saída é estimado pelo cálculo

$$K = p(s) = -s(s + 4)(s + 4 + j4)(s + 4 - j4)$$

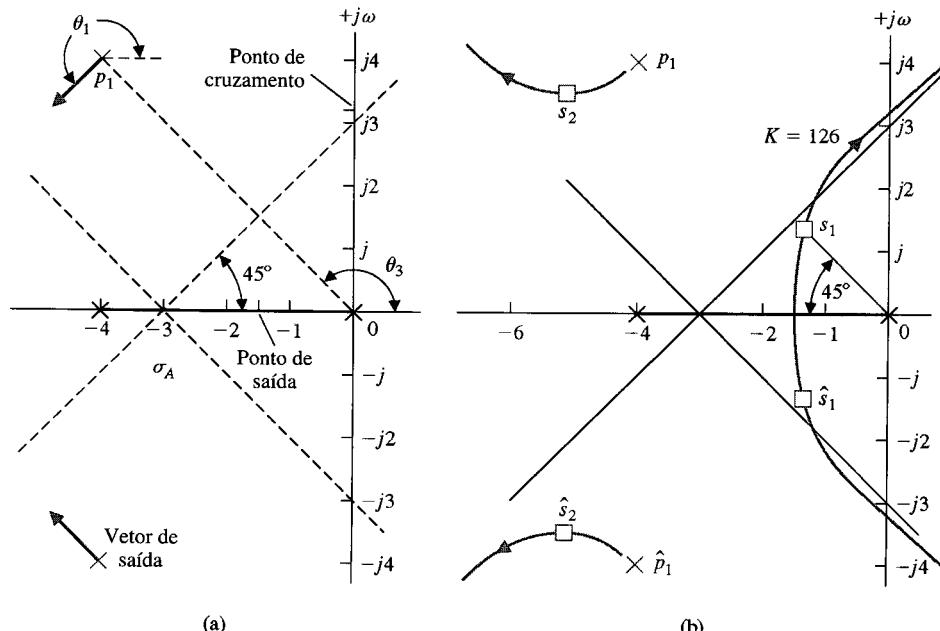


Fig. 7.14 O lugar das raízes para o Exemplo 7.4: localizando (a) os pólos e (b) as assíntotas.

TABELA 7.3

$p(s)$	0	51	68,5	80	85	75	0
$s$	-4,0	-3,0	-2,5	-2,0	-1,5	-1,0	0

entre  $s = -4$  e  $s = 0$ . Espera-se que o ponto de saída esteja situado entre  $s = -3$  e  $s = -1$ , e assim procura-se um valor máximo de  $p(s)$  nessa região. Os valores resultantes de  $p(s)$  para alguns valores de  $s$  são dados na Tabela 7.3. O máximo de  $p(s)$  é encontrado na posição aproximada  $s = -1,5$ , como indicado na tabela. Uma avaliação mais precisa do ponto de saída não é normalmente necessária. O ponto de saída é então indicado na Fig. 7.14(a).

10. O ângulo de saída no pólo complexo  $p_1$  pode ser estimado utilizando-se o critério de ângulo, como se segue:

$$\theta_1 + 90^\circ + 90^\circ + \theta_3 = 180^\circ,$$

onde  $\theta_3$  é ângulo subtendido por um vetor que sai do pólo  $p_3$ . Os ângulos do pólo em  $s = -4$  e  $s = -4 - j4$  são ambos iguais a  $90^\circ$ . Como  $\theta_3 = 135^\circ$ , constata-se que

$$\theta_1 = -135^\circ = +225^\circ,$$

como mostrado na Fig. 7.14(a).

11. Determinar as localizações das raízes que satisfaçam o critério de fase, como mostrado na Fig. 7.14(b).  
 12. Determine o valor de  $K$  em  $s = s_1$ .

Usando as informações deduzidas a partir dos doze passos do método do lugar das raízes, é obtido o esboço completo do lugar das raízes completando o esboço tanto quanto possível por inspeção visual. O lugar das raízes para este sistema está mostrado na Fig. 7.14(b). Para se ter as raízes complexas nas proximidades da origem com uma relação de amortecimento  $\zeta = 0,707$ , o ganho  $K$  pode ser determinado graficamente como mostrado na Fig. 7.14(b). Os comprimentos dos vetores que ligam os pólos a malha aberta ao lugar de raízes em  $s_1$  são calculados e resulta um ganho em  $s_1$  de

$$K = |s_1| |s_1 + 4| |s_1 - p_1| |s_1 - \hat{p}_1| = (1,9)(2,9)(3,8)(6,0) = 126. \quad (7.52)$$

O par de pólos complexos restante ocorre em  $s_2$  e  $\hat{s}_2$  para  $K = 126$ . O efeito das raízes complexas em  $s_2$  e  $\hat{s}_2$  sobre a resposta transitória será desprezível comparado ao efeito devido às raízes  $s_1$  e  $\hat{s}_1$ . Este fato pode ser comprovado considerando-se o amortecimento da resposta devido a cada um dos pares de raízes. O amortecimento devido a  $s_1$  e  $\hat{s}_1$  é

$$e^{-\zeta_1 \omega_{n_1} t} = e^{-\sigma_1 t},$$

e o fator de amortecimento devido a  $s_2$  e  $\hat{s}_2$  é

$$e^{-\zeta_2 \omega_{n_2} t} = e^{-\sigma_2 t},$$

onde  $\sigma_2$  é aproximadamente cinco vezes maior que  $\sigma_1$ . Então, o termo de resposta transitória devido a  $s_2$  decairá muito mais rapidamente que o termo de resposta transitória devido a  $s_1$ . Assim, a resposta a uma entrada em degrau unitário pode ser escrita como

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 + c_1 e^{-\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t + \theta_1) + c_2 e^{-\sigma_2 t} \sin(\omega_2 t + \theta_2) \\ &\cong 1 + c_1 e^{-\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t + \theta_1). \end{aligned} \quad (7.53)$$

As raízes conjugadas complexas próximas da origem do plano  $s$  com relação às outras raízes de sistema a malha fechada são designadas como **raízes dominantes** do sistema porque elas representam ou dominam a resposta transitória. A dominância relativa das raízes complexas, num sistema de terceira ordem com um par de raízes conjugadas complexas, é determinada pela relação existente entre a raiz real e a parte real das raízes complexas e resultará em uma dominância aproximada para relações acima de 5.

A dominância do segundo termo da Eq. (7.53) também depende da relação de magnitude entre os coeficientes  $c_1$  e  $c_2$ . Estes coeficientes, que são resíduos calculados nas raízes complexas, dependem, por sua vez, da localização dos zeros no plano  $s$ . Portanto, o conceito de raízes dominantes é útil para se estimar a resposta de um sistema mas deve ser usado com cautela e com uma compreensão das hipóteses subjacentes. ■

Usando o MATLAB ou um programa similar, é possível determinar prontamente um ponto de saída. Por exemplo, seja considerar outra vez o Exemplo 7.2. Quando  $K = 1,925$ , a saída ocorre no

eixo real com duas raízes reais em  $s = -2,6$ . De modo semelhante, quando  $K = 200$  as duas raízes estão sobre o eixo imaginário em  $s = \pm j4,82$ .

Para o Exemplo 7.4, (usando o MATLAB), pode-se determinar que a saída do eixo real ocorre para  $K = 84$  em  $s = -1,57$ . Do mesmo modo, para  $K = 600$  constata-se que as duas raízes estão sobre o eixo imaginário em  $s = \pm j3,33$ .

## 7.4 UM EXEMPLO DE ANÁLISE E PROJETO DE SISTEMAS DE CONTROLE UTILIZANDO O MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES

A análise e o projeto de um sistema de controle podem ser executados utilizando-se a transformada de Laplace, um diagrama de fluxo de sinal, o plano  $s$ , e o método do lugar das raízes. Vale a pena neste ponto examinar um sistema de controle e selecionar valores de parâmetro adequados baseados no método do lugar das raízes.

Uma balança com escala automática na qual a operação de pesagem é controlada por uma função do equilíbrio físico através de uma malha de retroação elétrica é mostrada na Fig. 7.15 [5]. A balança está na condição de equilíbrio e  $x$  é o deslocamento do contrapeso  $W_c$  a partir de uma condição de equilíbrio sem carga. O peso a ser medido,  $W$ , é aplicado a 5 cm do pivô, e o comprimento da barra até o amortecedor viscoso,  $l_i$ , é 20 cm. Deseja-se realizar o seguinte:

1. Selecionar os parâmetros e as especificações do sistema de retroação.
2. Obter um modelo em diagrama de fluxo de sinal que represente o sistema.
3. Selecionar o ganho  $K$  baseado em um diagrama do lugar das raízes.
4. Determinar o modo dominante da resposta.

Será escolhido um momento de inércia da viga igual a  $0,05 \text{ kg-m}^2$ . Deve-se selecionar uma tensão de bateria cujo valor seja suficientemente grande para fornecer um ganho do sensor de posição razoável. Assim, será escolhido  $E_{bb} = 24$  volts. Será utilizado um parafuso sem fim de 20 voltas/cm e um potenciômetro linear para  $x$  com 6 cm de comprimento. Há necessidade de se ter um equilíbrio preciso, e se escolhe, em consequência, um potenciômetro para a entrada  $y$  com 0,5 cm de comprimento. Um amortecedor viscoso razoável será escolhido com uma constante de amortecimento  $b = 10\sqrt{3}$  kgf/m.s. Finalmente, um contrapeso  $W_c$  é escolhido para que faixa de pesos esperada de pesos  $W$  possa ser equilibrada. Os parâmetros do sistema são selecionados como listados na Tabela 7.4.

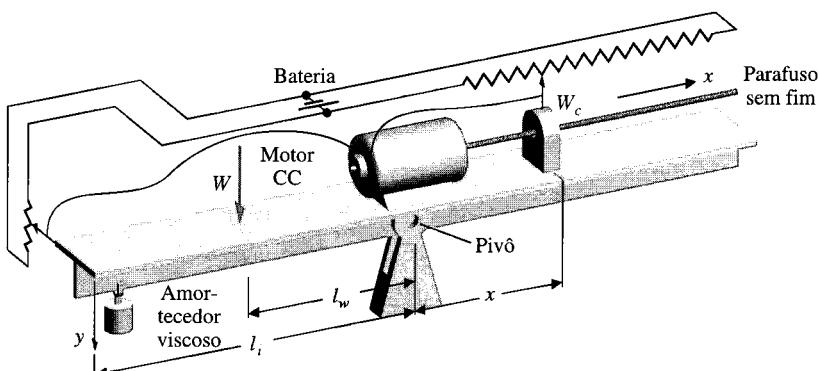


Fig. 7.15 Uma balança com escala automática (De J. H. Goldberg, *Automatic Controls*, Allyn e Bacon, Boston, 1964, com autorização.)

TABELA 7.4

$W_c = 2 \text{ N}$	Ganho do parafuso sem fim $K_s = \frac{1}{4000 \pi} \text{ m/rad.}$
$I = 0,05 \text{ kg-m}^2$	
$l_w = 5 \text{ cm}$	Ganho do potenciômetro de entrada $K_i = 4800 \text{ V/m.}$
$l_i = 20 \text{ cm}$	
$b = 10\sqrt{3} \text{ kgf/m.s}$	Ganho do potenciômetro de retroação $K_f = 400 \text{ V/m.}$

**Especificações.** Deseja-se uma resposta rápida e precisa com um pequeno erro estacionário na medida de peso. Portanto vai ser necessário que o sistema seja no mínimo do tipo um, para que o erro de medida obtido seja igual a zero. Uma resposta subamortecida a uma variação em degrau no peso medido  $W$  é satisfatória, e então será especificada uma resposta dominante com  $\zeta = 0,5$ . O tempo de assentamento no interior de uma faixa de 2% do valor final do equilíbrio que se segue à introdução de um peso a ser medido deve ser inferior a 2 segundos a fim de se ter um instrumento rápido para medir peso. As especificações estão resumidas na Tabela 7.5.

A dedução de um modelo do sistema eletromecânico pode ser realizada obtendo-se as equações de movimento da balança. Para pequenos desvios da balança, o ângulo de desvio  $\theta$  é

$$\theta \cong \frac{y}{l_i}. \quad (7.54)$$

O movimento da barra em torno do pivô é representado pela equação de torques:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \Sigma \text{ torques.}$$

Então, em termos de ângulo de desvio, o movimento é representado por

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = l_w W - x W_c - l_i^2 b \frac{d\theta}{dt}. \quad (7.55)$$

A tensão elétrica de entrada para o motor é

$$v_m(t) = K_i y - K_f x. \quad (7.56)$$

A função de transferência do motor é

$$\frac{\theta_m(s)}{V_m(s)} = \frac{K_m}{s(\tau s + 1)}, \quad (7.57)$$

onde  $\tau$  será considerada desprezível em comparação com as constantes de tempo do sistema completo, e  $\theta_m$  é a rotação do eixo de saída. Um diagrama de fluxo de sinal representando as Eqs. (7.55) até (7.57) é mostrado na Fig. 7.16. Examinando o percurso direto de  $W$  para  $X(s)$ , constata-se que o sistema é do tipo um em virtude da integração que precede  $Y(s)$ . Em consequência, o erro de estado estacionário do sistema é zero.

A função de transferência a malha fechada do sistema é obtida utilizando-se a fórmula de Mason para o ganho do diagrama de fluxo de sinal e resulta

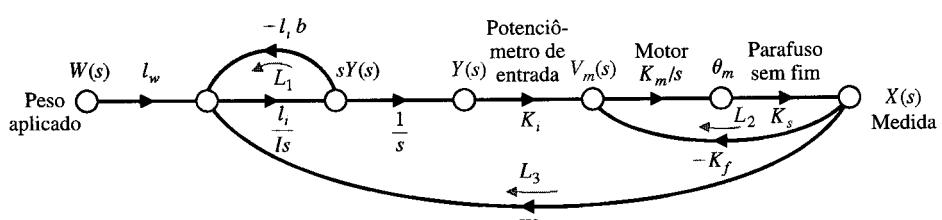
$$\frac{X(s)}{W(s)} = \frac{(l_w l_i K_i K_m K_s / Is^3)}{1 + (l_i^2 b / Is) + (K_m K_s K_f / s) + (l_i K_i K_m K_s W_c / Is^3) + (l_i^2 b K_m K_s K_f / Is^2)}, \quad (7.58)$$

onde o numerador é o ganho do percurso de  $W$  para  $X$ , o segundo termo no denominador é a malha  $L_1$ , o terceiro termo é o ganho de malha  $L_2$ , o quarto termo é a malha  $L_3$ , e o quinto termo é o produto das duas disjuntas  $L_1 L_2$ . Então, a função de transferência a malha fechada é

$$\frac{X(s)}{W(s)} = \frac{l_w l_i K_i K_m K_s}{s(Is + l_i^2 b)(s + K_m K_s K_f) + W_c K_m K_s K_i l_i}. \quad (7.59)$$

**TABELA 7.5 Especificações**

Erro de estado estacionário	$K_p = \infty, e_{ss} = 0$ para uma entrada em degrau
Resposta subamortecida	$\zeta = 0,5$
Tempo de assentamento (critério dos 2%)	Menos de 2 segundos



**Fig. 7.16** Modelo em diagrama de fluxo de sinal da balança automática.

O ganho do estado estacionário do sistema é então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{x(t)}{|W|} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{X(s)}{W(s)} \right) = \frac{l_w}{W_c} = 2,5 \text{ cm/kg} \quad (7.60)$$

quando  $W(s) = |W|/s$ . Para obter o lugar de raízes como uma função da constante do motor  $K_m$ , substituem-se os parâmetros selecionados dentro da equação característica, que é o denominador da Eq. (7.59). Obtém-se então a seguinte equação característica:

$$s(s + 8\sqrt{3}) \left( s + \frac{K_m}{10\pi} \right) + \frac{96K_m}{10\pi} = 0. \quad (7.61)$$

Reescrevendo a equação característica na forma do lugar de raízes, isola-se primeiro  $K_m$  como a seguir:

$$s^2(s + 8\sqrt{3}) + s(s + 8\sqrt{3}) \frac{K_m}{10\pi} + \frac{96K_m}{10\pi} = 0. \quad (7.62)$$

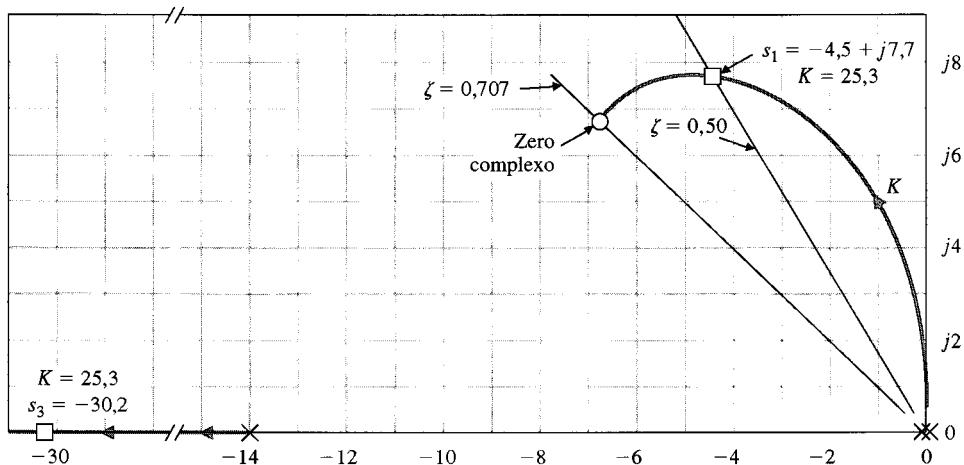
Então, reescrevendo a Eq. (7.62) na forma do lugar das raízes, tem-se

$$\begin{aligned} 1 + KP(s) &= 1 + \frac{(K_m/10\pi)[s(s + 8\sqrt{3}) + 96]}{s^2(s + 8\sqrt{3})} = 0 \\ &= 1 + \frac{(K_m/10\pi)(s + 6,93 + j6,93)(s + 6,93 - j6,93)}{s^2(s + 8\sqrt{3})}. \end{aligned} \quad (7.63)$$

O lugar das raízes à medida que  $K_m$  varia é mostrado na Fig. 7.17. As raízes dominantes podem ser posicionadas com  $\zeta = 0,5$  quando  $K = 25,3 = K_m/10\pi$ . Para alcançar este ganho,

$$K_m = 795 \frac{\text{rad/s}}{\text{volt}} = 7600 \frac{\text{rpm}}{\text{volt}}, \quad (7.64)$$

seria necessário um amplificador para fornecer uma parte do ganho requerido. A parte real das raízes dominantes é maior que 4, e então o tempo de assentamento,  $4/\sigma$ , é menor que 1 segundo, e o requisito de tempo de assentamento é satisfeito. A terceira raiz da equação característica é uma raiz real em  $s = -30,2$ , e as raízes subamortecidas dominam a resposta de forma evidente. Portanto, o sistema foi analisado pelo método do lugar das raízes e se obteve um projeto adequado para o parâmetro  $K_m$ . A eficiência dos métodos no plano  $s$  e do lugar das raízes ficou claramente demonstrada neste exemplo.



**Fig. 7.17** Lugar das raízes à medida que  $K_m$  varia. Um lugar deixa dois pólos na origem e vai para dois zeros complexos à medida que  $K$  aumenta. O outro lugar está à esquerda do polo em  $s = -14$ .

## 7.5 PROJETO DE PARÂMETRO PELO MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES

O desenvolvimento original do método do lugar das raízes dizia respeito à determinação do posicionamento das raízes da equação característica à medida que o ganho de sistema,  $K$ , era variado de zero a infinito. Contudo, como foi visto, o efeito de outros parâmetros de sistema pode ser很容易地 investigado usando-se o método do lugar das raízes. Fundamentalmente, o método do lugar das raízes trata de uma equação característica (Eq. 7.22), que pode ser escrita como

$$1 + F(s) = 0. \quad (7.65)$$

Então, o método padrão do lugar das raízes que foi estudado pode ser aplicado. A questão que se levanta é: como investigar o efeito de dois parâmetros,  $\alpha$  e  $\beta$ ? Parece que o método do lugar das raízes é um método de parâmetro único; felizmente, contudo, ele pode ser prontamente estendido à investigação de dois ou mais parâmetros. Este método de **projeto de parâmetro** usa a abordagem do lugar das raízes para selecionar os valores dos parâmetros.

A equação característica de um sistema dinâmico pode ser escrita como

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0. \quad (7.66)$$

Portanto, o efeito do coeficiente  $a_1$  pode ser verificado a partir da equação de lugar das raízes

$$1 + \frac{a_1 s}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_0} = 0. \quad (7.67)$$

Se o parâmetro de interesse,  $\alpha$ , não aparecer sozinho como um coeficiente, é isolado como em

$$\begin{aligned} a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + (a_{n-q} - \alpha) s^{n-q} \\ + \alpha s^{n-q} + \dots + a_1 s + a_0 = 0. \end{aligned} \quad (7.68)$$

Então, por exemplo, uma equação de terceira ordem de interesse poderia ser

$$s^3 + (3 + \alpha) s^2 + 3s + 6 = 0. \quad (7.69)$$

Para verificar o efeito do parâmetro  $\alpha$ , isola-se o parâmetro e reescreve-se a equação na forma de lugar das raízes como mostrado nos passos seguintes:

$$s^3 + 3s^2 + \alpha s^2 + 3s + 6 = 0; \quad (7.70)$$

$$1 + \frac{\alpha s^2}{s^3 + 3s^2 + 3s + 6} = 0. \quad (7.71)$$

Então, para determinar o efeito de dois parâmetros, deve-se repetir a abordagem do lugar das raízes duas vezes. Assim, para uma equação característica com dois parâmetros variáveis,  $\alpha$  e  $\beta$ , tem-se

$$\begin{aligned} a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + (a_{n-q} - \alpha) s^{n-q} + \alpha s^{n-q} + \dots \\ + (a_{n-r} - \beta) s^{n-r} + \beta s^{n-r} + \dots + a_1 s + a_0 = 0. \end{aligned} \quad (7.72)$$

Os dois parâmetros variáveis foram isolados, e o efeito de  $\alpha$  será determinado, seguido da determinação do efeito de  $\beta$ . Por exemplo, para uma certa equação característica de terceira ordem com  $\alpha$  e  $\beta$  como parâmetros, obtém-se

$$s^3 + s^2 + \beta s + \alpha = 0. \quad (7.73)$$

Neste caso particular, os parâmetros aparecem como coeficientes da equação característica. O efeito da variável  $\beta$  de zero a infinito é determinado a partir da equação de lugar das raízes

$$1 + \frac{\beta s}{s^3 + s^2 + \alpha} = 0. \quad (7.74)$$

Percebe-se que o denominador da Eq. (7.74) é a equação característica do sistema com  $\beta = 0$ . Portanto, calcula-se primeiro o efeito da variação  $\alpha$  de zero a infinito utilizando-se a equação

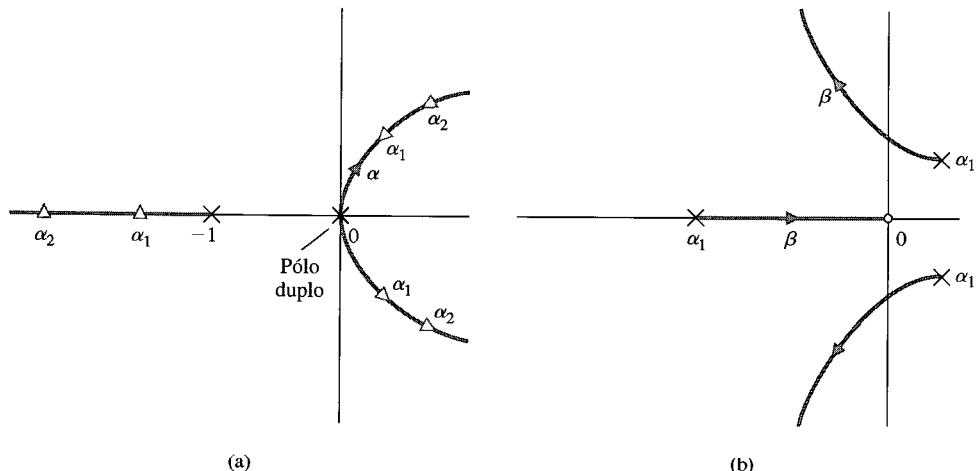
$$s^3 + s^2 + \alpha = 0,$$

reescrita como

$$1 + \frac{\alpha}{s^2(s + 1)} = 0, \quad (7.75)$$

onde se fez  $\beta$  igual a zero na Eq. (7.73). Então, tendo calculado o efeito de  $\alpha$ , um valor de  $\alpha$  é selecionado e usado com a Eq. (7.74) para calcular o efeito de  $\beta$ . Este método de dois passos para calcular o efeito de  $\alpha$  e em seguida o de  $\beta$  pode ser realizado como um procedimento de lugar de duas raízes. Primeiro se obtém um lugar das raízes à medida que  $\alpha$  varia, e se escolhe um valor adequado para  $\alpha$ ; o resultado são localizações satisfatórias da raiz. Em seguida, obtém-se o lugar das raízes para  $\beta$  notando que os pólos de Eq. (7.74) são as raízes calculadas pelo lugar das raízes da Eq. (7.75). Uma limitação desta abordagem é que nem sempre será possível obter uma equação característica que seja linear no parâmetro sobre a consideração, por exemplo,  $\alpha$ .

Para ilustrar esta abordagem efetivamente, seja obter o lugar das raízes para  $\alpha$  e depois para  $\beta$  para a Eq. (7.73). Um esboço do lugar das raízes à medida que  $\alpha$  varia para a Eq. (7.75) é mostrado na Fig. 7.18(a), onde são mostradas as raízes para dois valores do ganho  $\alpha$ . Se o ganho  $\alpha$  é selecionado como  $\alpha_1$ , então as raízes resultantes da Eq. (7.75) se tornam pólos da Eq. (7.74). O lugar das raízes da Eq. (7.74) à medida que  $\beta$  varia é mostrado na Fig. 7.18(b), e um valor adequado de  $\beta$  pode ser selecionado com base na localização desejada das raízes.



**Fig. 7.18** Lugares das raízes como uma função de  $\alpha$  e de  $\beta$ : (a) lugares à medida que  $\alpha$  varia; (b) lugares à medida que  $\beta$  varia para um valor de  $\alpha = \alpha_1$ .

Usando o método do lugar das raízes, esta abordagem de projeto de parâmetro será ilustrada um pouco mais através de um exemplo de projeto específico.

#### EXEMPLO 7.5

##### Controle de maçarico de solda

Um maçarico de solda para a carroceria de um automóvel requer um sistema de controle preciso para posicioná-lo [4]. O sistema de controle com retroação deve ser projetado para satisfazer as seguintes especificações:

1. Erro de estado estacionário para uma entrada em rampa  $\leq 35\%$  da inclinação de entrada.
2. Coeficiente de amortecimento das raízes dominantes  $\geq 0,707$ .
3. Tempo de assentamento no interior da faixa de 2% do valor final  $\leq 3$  segundos.

A estrutura do sistema de controle com retroação está mostrada na Fig. 7.19, onde o ganho do amplificador  $K_1$  e o ganho da retroação com derivada  $K_2$  devem ser selecionados. A especificação de erro do estado estacionário pode ser escrita como a seguir:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(|R|/s^2)}{1 + G_2(s)}, \quad (7.76)$$

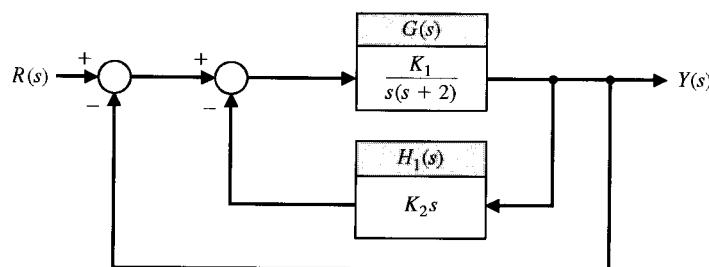
onde  $G_2(s) = G(s)/(1 + G(s)H_1(s))$ . Portanto, o requisito de erro de estado estacionário é

$$\frac{|e_{ss}|}{|R|} = \frac{2 + K_1 K_2}{K_1} \leq 0,35. \quad (7.77)$$

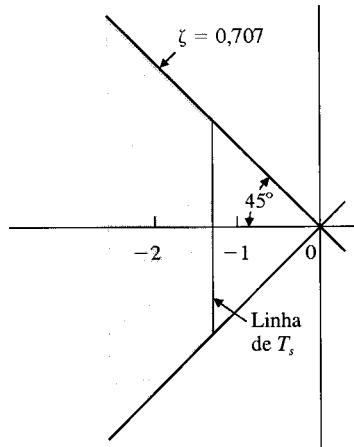
Assim, será escolhido um pequeno valor de  $K_2$  para se obter um valor baixo de erro de estado estacionário. A especificação do coeficiente de amortecimento requer que as raízes do sistema a malha fechada estejam abaixo da linha de  $45^\circ$  no semiplano  $s$  da esquerda. A especificação do tempo de assentamento pode ser reescrita em termos da parte real das raízes dominantes como

$$T_s = \frac{4}{\sigma} \leq 3 \text{ segundos.} \quad (7.78)$$

É necessário, portanto, que  $\sigma \geq 4/3$ ; esta área no semiplano  $s$  da esquerda está indicada juntamente com o requisito de  $\zeta$  na Fig. 7.20. Para satisfazer as especificações, todas as raízes devem ficar dentro da área sombreada do semiplano  $s$  da esquerda.



**Fig. 7.19** Diagrama de blocos do sistema de controle do maçarico de solda.



**Fig. 7.20** Uma região no plano  $s$  para localização de raiz desejada.

Os parâmetros a serem selecionados são  $\alpha = K_1$  e  $\beta = K_2 K_1$ . A equação característica é

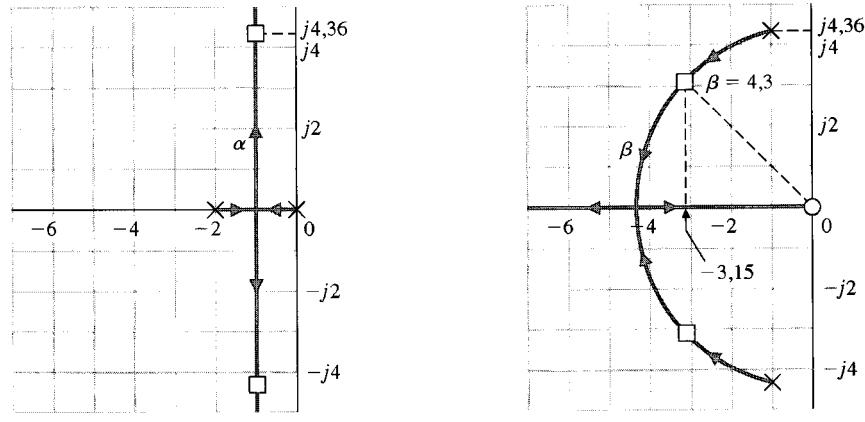
$$1 + GH(s) = s^2 + 2s + \beta s + \alpha = 0. \quad (7.79)$$

O lugar das raízes à medida que  $\alpha = K_1$  varia (fazer  $\beta = 0$ ) é determinado a partir da seguinte equação:

$$1 + \frac{\alpha}{s(s + 2)} = 0. \quad (7.80)$$

(Ver Fig. 7.21a.) Para um ganho  $K_1 = \alpha = 20$ , as raízes são indicadas sobre o lugar. Então o efeito de variação de  $\beta = 20K_2$  é determinado a partir da equação de lugar

$$1 + \frac{\beta s}{s^2 + 2s + \alpha} = 0, \quad (7.81)$$



**Fig. 7.21** Lugares das raízes como uma função de (a)  $\alpha$  e (b)  $\beta$ .

onde os pólos deste lugar das raízes são as raízes do lugar da Fig. 7.21(a). O lugar das raízes para a Eq. (7.81) é mostrado na Fig. 7.21(b), e as raízes com  $\zeta = 0,707$  são obtidas quando  $\beta = 4,3 = 20K_2$  ou quando  $K_2 = 0,215$ . A parte real destas raízes é  $\sigma = 3,15$ , e, por conseguinte, o tempo para assentar dentro de 2% do valor final é igual a 1,27 segundo, que é consideravelmente menor que a especificação de 3 segundos. ■

O método de lugar das raízes pode ser estendido a mais de dois parâmetros estendendo-se o número de passos no método esboçado nesta seção. Além disto, pode ser gerada uma família de lugares das raízes para dois parâmetros a fim de se determinar o efeito total da variação de dois parâmetros. Por exemplo, determinar o efeito da variação de  $\alpha$  e  $\beta$  da seguinte equação característica:

$$s^3 + 3s^2 + 2s + \beta s + \alpha = 0. \quad (7.82)$$

A equação do lugar das raízes como uma função de  $\alpha$  é (fazer  $\beta = 0$ )

$$1 + \frac{\alpha}{s(s + 1)(s + 2)} = 0. \quad (7.83)$$

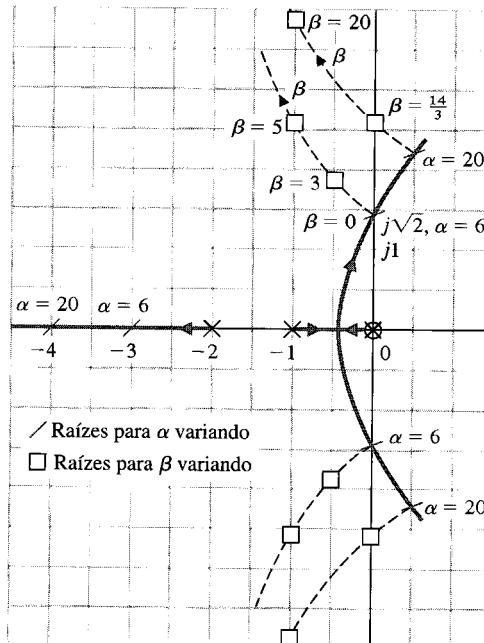


Fig. 7.22 Lugar das raízes de dois parâmetros. Os lugares para variação de  $\alpha$  estão em traço reforçado, com setas.

O lugar das raízes como uma função de  $\beta$  é

$$1 + \frac{\beta s}{s^3 + 3s^2 + 2s + \alpha} = 0. \quad (7.84)$$

O lugar das raízes para a Eq. (7.83) como uma função de  $\alpha$  é mostrada na Fig. 7.22 (linhas contínuas). As raízes deste lugar, indicadas por uma cruz, tornam-se os pólos para o lugar da Eq. (7.84). Em seguida, o lugar da Eq. (7.84) é continuado na Fig. 7.22 (linhas pontilhadas), onde o lugar para  $\beta$  é mostrado para diversos valores selecionados de  $\alpha$ . Esta família de lugares, às vezes chamada de **contorno das raízes**, ilustra o efeito de  $\alpha$  e de  $\beta$  sobre as raízes da equação característica de um sistema [3].

## 7.6 SENSIBILIDADE E LUGAR DAS RAÍZES

Uma das principais razões para a utilização da retroação negativa nos sistemas de controle é reduzir o efeito das variações de parâmetros. O efeito das variações de parâmetro, como foi visto na Seção 4.2, pode ser descrita por uma medida de **sensibilidade** do desempenho do sistema a mudanças de um parâmetro específico. Na Seção 4.2 foi definida a **sensibilidade logarítmica** originalmente sugerida por Bode como

$$S_K^T = \frac{d \ln T}{d \ln K} = \frac{\partial T/T}{\partial K/K}, \quad (7.85)$$

onde a função de transferência do sistema é  $T(s)$  e o parâmetro de interesse é  $K$ .

Recentemente, com a utilização crescente da abordagem de pólos e zeros (plano  $s$ ), tornou-se útil definir uma medida de sensibilidade em termos do posicionamento das raízes da equação característica [7-9]. Como as raízes da equação característica representam os modos dominantes da resposta transitória, o efeito das variações de parâmetros sobre a posição das raízes é uma medida importante e útil da sensibilidade. A **sensibilidade de raiz** de um sistema  $T(s)$  pode ser definida como

$$S_K^{r_i} = \frac{\partial r_i}{\partial \ln K} = \frac{\partial r_i}{\partial K/K}, \quad (7.86)$$

onde  $r_i$  é igual à  $i$ -ésima raiz do sistema de modo que

$$T(s) = \frac{K_1 \prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + r_i)}, \quad (7.87)$$

e  $K$  é o parâmetro. A sensibilidade de raiz relaciona as mudanças na localização das raízes no plano  $s$  com as mudanças no parâmetro. A sensibilidade de raiz se relaciona com a sensibilidade logarítmica por meio da expressão

$$S_K^T = \frac{\partial \ln K}{\partial \ln K} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial \ln K} \cdot \frac{1}{(s + r_i)} \quad (7.88)$$

quando os zeros de  $T(s)$  são independentes do parâmetro  $K$  de modo que

$$\frac{\partial z_j}{\partial \ln K} = 0.$$

Esta sensibilidade logarítmica pode ser prontamente obtida determinando-se a derivada de  $T(s)$ , Eq. (7.87), com relação a  $K$ . Para o caso particular, quando o ganho do sistema é independente do parâmetro  $K$ , tem-se

$$S_K^T = - \sum_{i=1}^n S_K^{r_i} \cdot \frac{1}{(s + r_i)}, \quad (7.89)$$

e as duas medidas de sensibilidade são diretamente relacionadas.

O cálculo da sensibilidade de raiz para um sistema de controle pode ser prontamente efetuado utilizando-se os métodos do lugar das raízes da seção precedente. A sensibilidade de raiz  $S_K^{r_i}$  pode ser calculada na raiz  $r_i$  examinando-se contornos da raiz para o parâmetro  $K$ . É possível variar  $K$  de uma pequena quantidade  $\Delta K$ , finita e calcular a nova raiz modificada  $(r_i + \Delta r_i)$  em  $K + \Delta K$ . Então, usando Eq. (7.86) tem-se

$$S_K^{r_i} \cong \frac{\Delta r_i}{\Delta K/K}. \quad (7.90)$$

A Eq. (7.90) é uma aproximação que tende ao valor real da sensibilidade à medida que  $\Delta K \rightarrow 0$ . Um exemplo ilustrará o procedimento de cálculo da sensibilidade de raiz.

### EXEMPLO 7.6

#### Sensibilidade de raiz de um sistema de controle

A equação característica do sistema de controle com retroação mostrado na Fig. 7.23 é

$$1 + \frac{K}{s(s + \beta)} = 0,$$

ou, alternativamente,

$$s^2 + \beta s + K = 0. \quad (7.91)$$

O ganho  $K$  será considerado o parâmetro  $\alpha$ . Então, o efeito de uma mudança em cada parâmetro pode ser determinado utilizando-se as relações

$$\alpha = \alpha_0 \pm \Delta\alpha, \quad \beta = \beta_0 \pm \Delta\beta,$$

onde  $\alpha_0$  e  $\beta_0$  são os valores nominais ou desejados para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente. Será considerado o caso em que o valor nominal do pólo é  $\beta_0 = 1$  e o ganho desejado é  $\alpha_0 = K = 0,5$ . Então, o lugar das raízes como uma função de  $\alpha = K$  pode ser obtido utilizando-se a equação de lugar das raízes

$$1 + \frac{K}{s(s + \beta_0)} = 1 + \frac{K}{s(s + 1)} = 0 \quad (7.92)$$

como mostrado na Fig. 7.24. O valor nominal do ganho  $K = \alpha_0 = 0,5$  resulta em duas raízes complexas,  $r_1 = -0,5 + j0,5$  e  $r_2 = \hat{r}_1$ , como mostrado na Fig. 7.24. Para calcular o efeito de mudanças inevitáveis no ganho, a equação característica com  $\alpha = \alpha_0 \pm \Delta\alpha$  se torna

$$s^2 + s + \alpha_0 \pm \Delta\alpha = s^2 + s + 0,5 \pm \Delta\alpha,$$

ou

$$1 + \frac{\pm \Delta\alpha}{s^2 + s + 0,5} = 1 + \frac{\pm \Delta\alpha}{(s + r_1)(s + \hat{r}_1)} = 0. \quad (7.93)$$

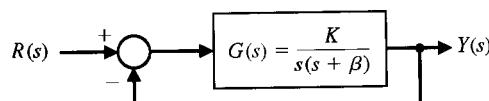


Fig. 7.23 Um sistema de controle com retroação.

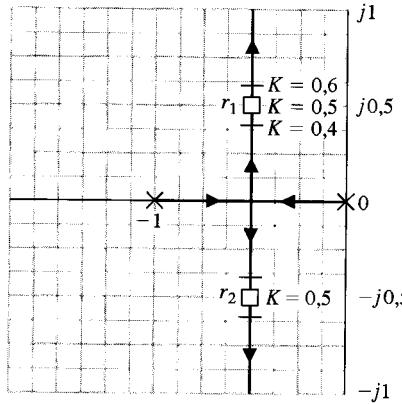


Fig. 7.24 O lugar das raízes para  $K$ .

Por conseguinte, o efeito de mudança no ganho pode ser calculado a partir do lugar das raízes da Fig. 7.24. Para uma mudança de 20% em  $\alpha$ , tem-se  $\pm\Delta\alpha = \pm0,1$ . As localizações da raiz para um ganho  $\alpha = 0,4$  e  $\alpha = 0,6$  são prontamente determinadas pelo método do lugar das raízes, e as localizações da raiz para  $\pm\Delta\alpha = \pm0,1$  são mostradas na Fig. 7.24. Quando  $\alpha = K = 0,6$ , a raiz no segundo quadrante do plano  $s$  é

$$r_1 + \Delta r_1 = -0,5 + j0,59,$$

e a mudança na raiz é  $\Delta r_1 = +j0,09$ . Quando  $\alpha = K = 0,4$ , a raiz no segundo quadrante é

$$r_1 + \Delta r_1 = -0,5 + j0,387,$$

e a mudança na raiz é  $\Delta r = -j0,11$ . Assim, a sensibilidade de raiz para  $r_1$  é

$$S_{+\Delta K}^{r_1} = S_{K+}^{r_1} = \frac{\Delta r_1}{\Delta K/K} = \frac{+j0,09}{+0,2} = j0,45 = 0,45 \angle +90^\circ \quad (7.94)$$

para mudanças positivas de ganho. Para incrementos negativos de ganho, a sensibilidade é

$$S_{-\Delta K}^{r_1} = S_{K-}^{r_1} = \frac{\Delta r_1}{\Delta K/K} = \frac{-j0,11}{+0,2} = -j0,55 = 0,55 \angle -90^\circ.$$

Para mudanças infinitesimais no parâmetro  $\partial K$ , a sensibilidade será igual para incrementos negativos ou positivos em  $K$ . O ângulo da sensibilidade de raiz indica a direção segundo a qual a raiz seria deslocada à medida que varia o parâmetro. O ângulo de movimento para  $+\Delta\alpha$  é sempre  $180^\circ$  menos o ângulo de movimento para  $-\Delta\alpha$  no ponto  $\alpha = \alpha_0$ .

O pólo  $\beta$  varia devido a mudanças no ambiente, e pode ser representado por  $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$ , onde  $\beta_0 = 1$ . Então o efeito de variação dos pólos é representado pela equação característica

$$s^2 + s + \Delta\beta s + K = 0,$$

ou, na forma de lugar das raízes, tem-se

$$1 + \frac{\Delta\beta s}{s^2 + s + K} = 0. \quad (7.95)$$

O denominador do segundo termo é a equação característica não alterada quando  $\Delta\beta = 0$ . O lugar das raízes para o sistema sem alterações ( $\Delta\beta = 0$ ) é mostrado na Fig. 7.24 como uma função de  $K$ . Para uma especificação de projeto requerendo  $\zeta = 0,707$ , as raízes complexas ficam situadas em

$$r_1 = -0,5 + j0,5 \quad \text{e} \quad r_2 = \hat{r}_1 = -0,5 - j0,5.$$

Então, como as raízes são conjugadas, a sensibilidade de raiz para  $r_1$  é o conjugado da sensibilidade de raiz para  $\hat{r}_1 = r_2$ . Usando as técnicas de parâmetro do lugar das raízes discutidas na seção precedente, obtém-se o lugar das raízes para  $\Delta\beta$ , como mostrado na Fig. 7.25. Normalmente se está interessado no efeito de uma variação de um parâmetro de modo que  $\beta = \beta_0 \pm \Delta\beta$ , para o qual se obtém o lugar à medida que  $\Delta\beta$  decresce a partir da equação do lugar das raízes

$$1 + \frac{-(\Delta\beta)s}{s^2 + s + K} = 0. \quad (7.96)$$

Examinando a Eq. (7.96), nota-se que a equação é da forma

$$1 - \Delta\beta P(s) = 0.$$

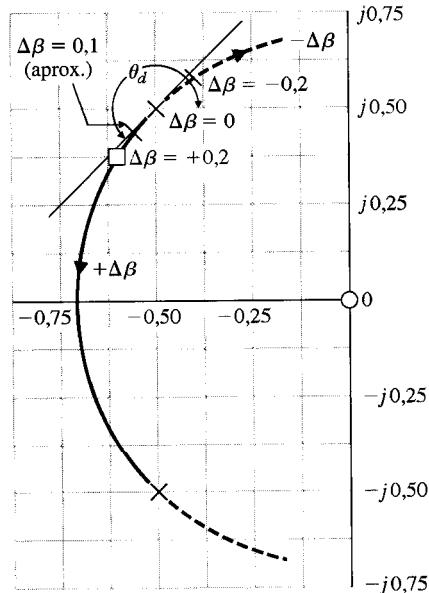


Fig. 7.25 O lugar das raízes para o parâmetro  $\beta$ .

Comparando esta equação com a Eq. (7.23) (Seção 7.3), constata-se que sinal que precede o ganho  $\Delta\beta$  é negativo neste caso. De modo semelhante ao desenvolvimento do método de lugar das raízes na Seção 7.3, exige-se que o lugar das raízes satisfaça as equações

$$|\Delta\beta P(s)| = 1, \quad \underline{P(s)} = 0^\circ \pm q360^\circ, \quad (7.97)$$

onde  $q = 0, 1, 2, \dots$ . O lugar das raízes segue um lugar de grau zero (Eq. 7.97) em contraste com o lugar  $180^\circ$  considerado anteriormente. Contudo, a regra do lugar das raízes da Seção 7.3 pode ser alterada para levar em conta o requisito de ângulo da fase de grau zero, e então o lugar das raízes pode ser obtido como nas seções anteriores. Por conseguinte, para obter o efeito de redução de  $\beta$ , determina-se o lugar de grau zero em contraste com o lugar de  $180^\circ$ , como mostrado pelo lugar pontilhado na Fig. 7.25. Para achar o efeito de uma mudança de 20% do parâmetro  $\beta$ , calculam-se as novas raízes para  $\pm\Delta\beta = \pm0,20$ , como mostrado na Fig. 7.25. A sensibilidade de raiz é calculada prontamente de forma gráfica e, para uma mudança positiva em  $\beta$ , é

$$S_{\beta+}^{r_1} = \frac{\Delta r_1}{(\Delta\beta/\beta)} = \frac{0,16 / -131^\circ}{0,20} = 0,80 / -131^\circ. \quad (7.98)$$

A sensibilidade da raiz a uma variação negativa em  $\beta$  é

$$S_{\beta-}^{r_1} = \frac{\Delta r_1}{(\Delta\beta/\beta)} = \frac{0,125 / 38^\circ}{0,20} = 0,625 / +38^\circ. \quad (7.99)$$

À medida que diminui a variação percentual ( $\Delta\beta/\beta$ ), as medidas de sensibilidade,  $S_{\beta+}^{r_1}$  e  $S_{\beta-}^{r_1}$  tendem a se igualar em magnitude com uma diferença angular de  $180^\circ$ . Assim, para pequenas variações em que  $\Delta\beta/\beta \leq 0,10$  as medidas de sensibilidade se relacionam, como se segue

$$|S_{\beta+}^{r_1}| = |S_{\beta-}^{r_1}|, \quad (7.100)$$

e

$$\underline{|S_{\beta+}^{r_1}|} = 180^\circ + \underline{|S_{\beta-}^{r_1}|}. \quad (7.101)$$

Muitas vezes a medida de sensibilidade é para pequenas variações no parâmetro. Quando a mudança relativa no parâmetro é tal que  $\Delta\beta/\beta = 0,10$ , uma representação aproximada do lugar das raízes é satisfatória. O lugar das raízes para a Eq. (7.97) quando  $\Delta\beta$  estiver variando deixa o polo em  $\Delta\beta = 0$  com um ângulo de partida  $\theta_d$ . Como  $\theta_d$  é calculado facilmente, pode-se estimar o incremento na variação da raiz aproximando-se o lugar das raízes com a reta em  $\theta_d$ . Esta aproximação está mostrada na Fig. 7.25 e é exata somente para variações  $\Delta\beta$  relativamente pequenas. Contudo, o uso desta aproximação permite ao analista evitar de esboçar o diagrama completo do lugar das raízes. Em consequência, para a Fig. 7.25, o lugar das raízes pode ser calculado para  $\Delta\beta/\beta = 0,10$  sobre a reta de partida e se obtém

$$S_{\beta+}^{r_1} = \frac{0,74 / -135^\circ}{0,10} = 0,74 / -135^\circ. \quad (7.102)$$

A medida de sensibilidade da raiz a uma variação de parâmetro é útil para se comparar a sensibilidade com relação a diversos parâmetros de projeto e com relação a diferentes localizações das raízes. Comparando a Eq. (7.102) relativa a  $\beta$  com a Eq. (7.94) relativa a  $\alpha$ , percebe-se que a sensibilidade em relação a  $\beta$  é superior em magnitude cerca de 50% e que o ângulo para  $S_\beta^r$  indica que a aproximação da raiz em direção ao eixo  $j\omega$  é mais sensível a variações em  $\beta$ . Deste modo, os requisitos de tolerância para  $\beta$  deveriam ser mais rigorosos que os para  $\alpha$ . Esta informação dá ao projetista uma medida de comparação para as tolerâncias requeridas de cada parâmetro. ■

### EXEMPLO 7.7

#### Sensibilidade de raiz a um parâmetro

Um sistema de controle com retroação unitária possui a função de transferência de canal direto

$$G(s) = \frac{20,7(s + 3)}{s(s + 2)(s + \beta)}, \quad (7.103)$$

onde  $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$  e  $\beta_0 = 8$ . A equação característica em função de  $\Delta\beta$  é

$$s(s + 2)(s + 8 + \Delta\beta) + 20,7(s + 3) = 0,$$

ou

$$s(s + 2)(s + 8) + \Delta\beta s(s + 2) + 20,7(s + 3) = 0. \quad (7.104)$$

Quando  $\Delta\beta = 0$ , as raízes são

$$r_1 = -2,36 + j2,48, \quad r_2 = \hat{r}_1, \quad r_3 = -5,27.$$

O lugar das raízes para  $\Delta\beta$  é determinado usando-se a equação do lugar das raízes

$$1 + \frac{\Delta\beta s(s + 2)}{(s + r_1)(s + \hat{r}_1)(s + r_3)} = 0. \quad (7.105)$$

Os pólos e zeros da Eq. (7.105) estão mostrados na Fig. 7.26. O ângulo de partida em  $r_1$  é calculado a partir dos ângulos do seguinte modo:

$$\begin{aligned} 180^\circ &= -(\theta_d + 90^\circ + \theta_{p_3}) + (\theta_{z_1} + \theta_{z_2}) \\ &= -(\theta_d + 90^\circ + 40^\circ) + (133^\circ + 98^\circ). \end{aligned} \quad (7.106)$$

Em consequência,  $\theta_d = -80^\circ$  e o lugar é aproximado perto de  $r_1$  pela reta com o ângulo  $\theta_d$ . Para uma variação de  $\Delta r_1 = 0,2$   $/-80^\circ$  ao longo da reta de partida, calcula-se o valor de  $+\Delta\beta$  determinando-se os comprimentos dos vetores a partir dos pólos e zeros. Resulta então

$$+\Delta\beta = \frac{4,8(3,75)(0,2)}{(3,25)(2,3)} = 0,48. \quad (7.107)$$

Assim, a sensibilidade em  $r_1$  é

$$S_\beta^{r_1} = \frac{\Delta r_1}{\Delta\beta/\beta} = \frac{0,2 / -80^\circ}{0,48/8} = 3,34 / -80^\circ, \quad (7.108)$$

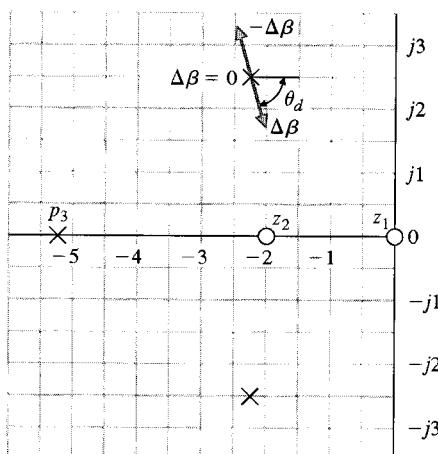


Fig. 7.26 Diagrama de pólos e zeros para o parâmetro  $\beta$ .

que indica que a raiz é bastante sensível a estes 6% de variação do parâmetro  $\beta$ . Para comparação, vale a pena determinar a sensibilidade da raiz  $r_1$  a uma mudança no zero,  $s = -3$ . Então, a equação característica é

$$s(s + 2)(s + 8) + 20,7(s + 3 + \Delta\gamma) = 0,$$

ou

$$1 + \frac{20,7 \Delta\gamma}{(s + r_1)(s + \hat{r}_1)(s + r_3)} = 0. \quad (7.109)$$

O diagrama de pólos e zeros para a Eq. (7.109) está mostrado na Fig. 7.27. O ângulo de partida na raiz  $r_1$  é  $180^\circ = -(\theta_d + 90^\circ + 40^\circ)$ , ou

$$\theta_d = +50^\circ. \quad (7.110)$$

Para uma mudança de  $r_1 = 0,2 / +50^\circ$ , o  $\Delta\gamma$  é positivo, e, obtendo-se os comprimentos dos vetores, encontra-se

$$|\Delta\gamma| = \frac{5,22(4,18)(0,2)}{20,7} = 0,21. \quad (7.111)$$

Por conseguinte, a sensibilidade em  $r_1$  a uma variação  $+\Delta\gamma$  é

$$S_{\gamma}^{r_1} = \frac{\Delta r_1}{\Delta\gamma/\gamma} = \frac{0,2 / +50^\circ}{0,21/3} = 2,84 / +50^\circ. \quad (7.112)$$

Portanto, constata-se que a magnitude da sensibilidade da raiz ao pólo  $\beta$  e ao zero  $\gamma$  é aproximadamente igual. Contudo, a sensibilidade do sistema ao pólo pode ser considerada menor que a sensibilidade ao zero porque o ângulo da sensibilidade  $S_{\gamma}^{r_1}$  é igual a  $+50^\circ$  e a direção da mudança de raiz é em direção ao eixo  $j\omega$ .

Calculando-se a sensibilidade da raiz na forma dos parágrafos precedentes, acha-se que para o pólo  $s = -\delta_0 = -2$  a sensibilidade é

$$S_{\delta}^{r_1} = 2,1 / +27^\circ. \quad (7.113)$$

Assim, para o parâmetro  $\delta$ , a magnitude da sensibilidade é inferior à dos outros parâmetros, mas a direção de mudança da raiz é mais importante que para  $\beta$  e  $\gamma$ . ■

Para utilizar a medida da sensibilidade a raiz na análise e no projeto de sistemas de controle, deve ser executada uma série de cálculos para diversas escolhas de possíveis configurações de pólos e zeros da função de transferência a malha aberta. Portanto, o uso da medida de sensibilidade às raízes como técnica de projeto é de certo modo limitado pelo número relativamente grande de cálculos requeridos e pela inexistência de uma direção óbvia de ajuste dos parâmetros para que se tenha uma sensibilidade minimizada ou reduzida. Contudo, a medida de sensibilidade de raiz pode ser utilizada como uma medida de análise que permite ao projetista comparar a sensibilidade de diversos projetos de sistema baseados em um método adequado de projeto. A medida de sensibilidade a raiz é um índice útil de sensibilidade de um sistema a variações de parâmetros expressas no plano  $s$ . A fraqueza da medida de sensibilidade é que ela depende da capacidade de localização das raízes para representar o desempenho do sistema. Como foi visto nos capítulos anteriores, a localização das raízes representa o desempenho de forma bastante adequada para muitos sistemas, mas deve ser levada na devida

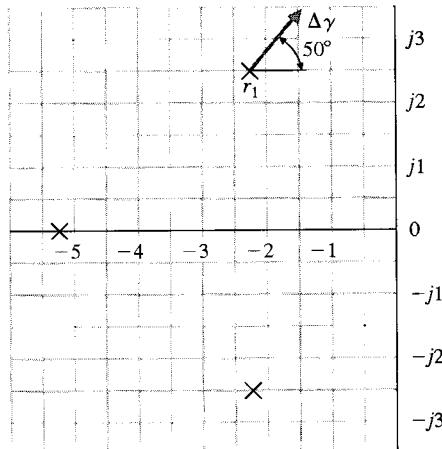


Fig. 7.27 Diagrama de pólos e zeros para o parâmetro  $\gamma$ .

consideração a localização dos zeros da função de transferência a malha fechada e a dominância de raízes pertinentes. A medida de sensibilidade a raiz constitui uma medida adequada da sensibilidade de desempenho do sistema e pode ser usada confiavelmente para análise e projeto.

## 7.7 CONTROLADORES DE TRÊS TERMOS (PID)

Uma forma de controlador usado amplamente no controle de processos industriais é chamado de **controlador de três termos** ou **controlador PID**. Este controlador tem uma função de transferência

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s. \quad (7.114)$$

O controlador oferece um termo proporcional, um termo de integração e um termo derivativo [4, 10]. A equação para a saída no domínio do tempo é

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt}. \quad (7.115)$$

O controlador de três modos é também chamado de controlador PID porque contém um termo proporcional, um termo integral e um termo derivativo. A função de transferência do termo derivativo é, na realidade,

$$G_d(s) = \frac{K_D s}{\tau_d s + 1}, \quad (7.116)$$

mas, usualmente,  $\tau_d$  é muito menor que as constantes de tempo do próprio processo e, em consequência, pode ser desprezada.

Se se fizer  $K_D = 0$ , tem-se então o **controlador proporcional e integral (PI)**

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s}. \quad (7.117)$$

Quando  $K_I = 0$ , resulta

$$G_c(s) = K_p + K_D s,$$

que é chamado um **controlador proporcional derivativo (PD)**.

Muitos processos industriais são controlados usando controladores do tipo proporcional integral derivativo (PID). A popularidade dos controladores PID pode ser atribuída parcialmente ao seu bom desempenho em uma ampla faixa de condições de operação e parcialmente à sua simplicidade funcional que permite aos engenheiros operá-los de um modo simples e direto. Para implementar um tal controlador, há necessidade de serem determinados, para um dado processo: o ganho proporcional, o ganho integral e o ganho derivativo [10].

Considere-se o controlador PID

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3 s = \frac{K_3 s^2 + K_1 s + K_2}{s} \\ &= \frac{K_3(s^2 + \alpha s + b)}{s} = \frac{K_3(s + z_1)(s + z_2)}{s}, \end{aligned} \quad (7.118)$$

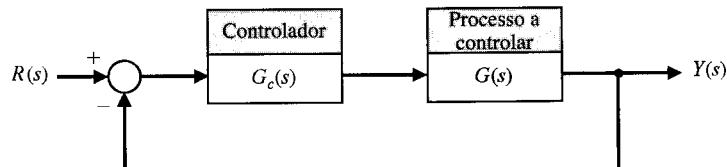
onde  $\alpha = K_1/K_3$  e  $b = K_2/K_3$ . Por conseguinte, um controlador PID introduz uma função de transferência com um pólo na origem e dois zeros que podem ser posicionados em qualquer lugar do semiplano  $s$  da esquerda.

Convém lembrar que um lugar das raízes começa nos pólos e termina nos zeros. Tendo-se um sistema como o mostrado na Fig. 7.28 com

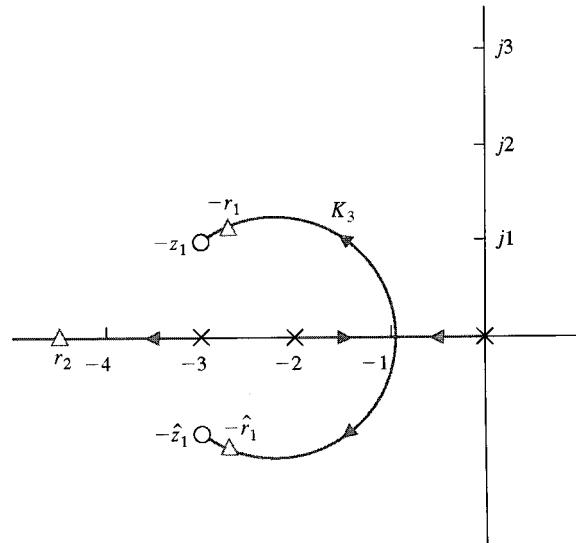
$$G(s) = \frac{1}{(s + 2)(s + 3)}$$

e utilizando-se um PID com zeros complexos,  $z_1$  e  $z_2$ , onde  $z_1 = -3 + j1$  e  $z_2 = \hat{z}_1$ , pode-se traçar o gráfico do lugar das raízes como está mostrado na Fig. 7.29. À medida que o ganho do controlador,  $K_3$ , for aumentado, as raízes complexas tendem para os zeros. A função de transferência a malha fechada é

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{G(s)G_c(s)}{1 + G(s)G_c(s)} \\ &= \frac{K_3(s + z_1)(s + \hat{z}_1)}{(s + r_2)(s + r_1)(s + \hat{r}_1)}. \end{aligned}$$



**Fig. 7.28** Sistema de controle a malha fechada com um controlador.



**Fig. 7.29** Lugar das raízes para um processo com um controlador PID com zeros complexos.

A resposta deste sistema será atraente. A ultrapassagem percentual a um degrau será inferior a 2% e o erro estacionário a uma entrada em degrau será zero. O tempo de assentamento será de aproximadamente 1 segundo. Se for desejado um tempo de assentamento menor, serão escolhidos então  $z_1$  e  $z_2$  mais à esquerda no semiplano  $s$  e o valor de  $K_3$  será ajustado para fazer com que as raízes fiquem próximas dos zeros complexos.

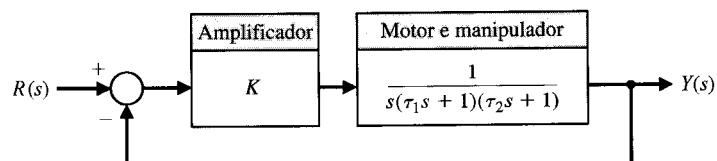
Será usado o controlador PID mais tarde neste capítulo para controlar o acionador de disco rígido do problema de projeto seqüencial (ver Seção 7.11).

## 7.8 EXEMPLO DE PROJETO: SISTEMA DE CONTROLE DE UM MANIPULADOR DE LASER

Os lasers podem ser usados para perfurar o colo do fêmur na bacia visando à inserção apropriada de uma prótese. O uso de lasers na cirurgia requer alta precisão na resposta de posição e de velocidade. Considere-se o sistema mostrado na Fig. 7.30, que usa um manipulador com motor CC para o laser. O ganho  $K$  do amplificador deve ser ajustado de modo que o erro estacionário a uma entrada em rampa,  $r(t) = At$  (onde  $A = 1 \text{ mm/s}$ ), seja menor ou igual a 0,1 mm, ao mesmo tempo em que é mantida uma resposta estável.

Para obter o erro estacionário requerido e uma boa resposta, seleciona-se um motor com constante de tempo no circuito de campo  $\tau_1 = 0,1 \text{ s}$  e uma constante de tempo do motor mais carga  $\tau_2 = 0,2 \text{ s}$ . Tem-se então

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{K}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) + K} \\ &= \frac{K}{0,02s^3 + 0,3s^2 + s + K} = \frac{50K}{s^3 + 15s^2 + 50s + 50K}. \end{aligned} \quad (7.119)$$



**Fig. 7.30** Sistema de controle de um manipulador de laser.

O erro estacionário a uma rampa,  $R(s) = A/s^2$ , é, com base na Eq. (5.29),

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v} = \frac{A}{K}.$$

Como se deseja  $e_{ss} = 0,1$  mm (ou menos) e  $A = 1$  mm, é necessário um ganho  $K = 10$  (ou superior).

Para assegurar um sistema estável, obtém-se a equação característica a partir da Eq. (7.119) como

$$s^3 + 15s^2 + 50s + 50K = 0.$$

Construindo a tabela de Routh, tem-se

$s^3$	1	50
$s^2$	15	$50K$
$s^1$	$b_1$	0
$s_0$	50K	

onde

$$b_1 = \frac{750 - 50K}{15}.$$

Portanto, o sistema é estável para

$$0 \leq K \leq 15.$$

Assim, usando-se  $K = 10$ , para cujo valor o sistema é estável, examina-se o lugar das raízes para  $K > 0$ . Como há três ramos e o centróide  $\sigma = -5$ , obtém-se o lugar das raízes mostrado na Fig. 7.31. O ponto de partida é  $s = -2,11$  e as raízes para  $K = 10$  são  $r_2 = -13,98$ ,  $r_1 = -0,51 + j5,96$  e  $\hat{r}_1$ . O coeficiente  $\zeta$  das raízes complexas é 0,085 e  $\zeta\omega_n = 0,51$ . Assim, supondo que as raízes complexas sejam dominantes, para uma entrada em degrau se espera (usando as Eqs. 5.16 e 5.13) uma ultrapassagem de 76% e um tempo de assentamento no interior da faixa de 2% do valor final de

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0,51} = 7,8s.$$

Traçando-se a resposta do sistema real, obtém-se uma ultrapassagem de 72% e um tempo de assentamento de 7,9 segundos. Portanto, as raízes complexas são essencialmente dominantes. A resposta do sistema a uma entrada em degrau é altamente oscilatória e não pode ser tolerada para uma cirurgia

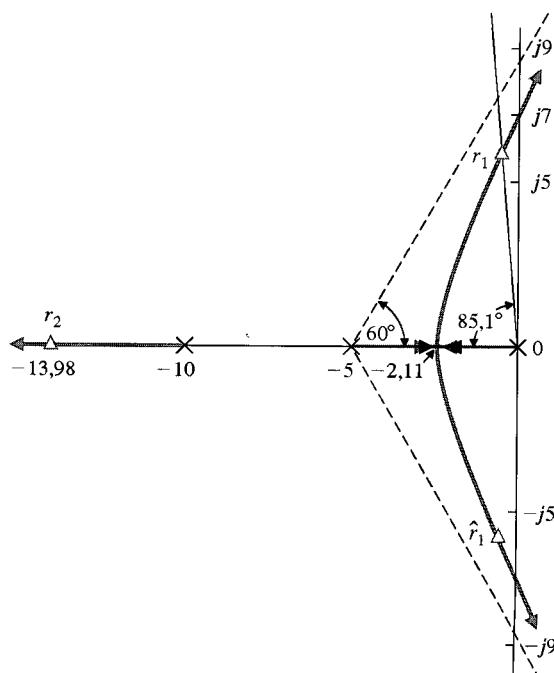
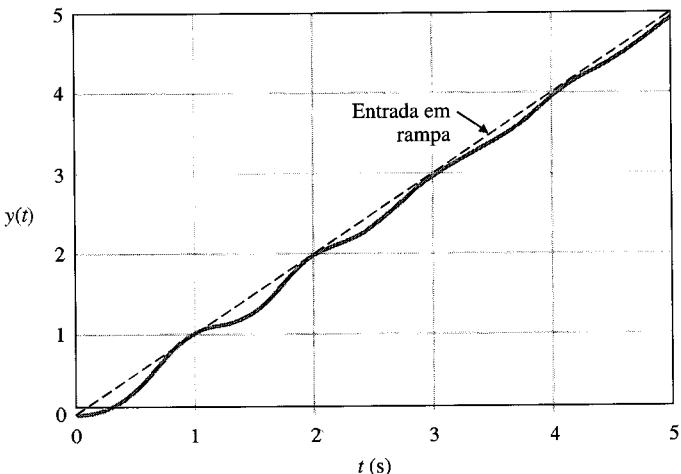


Fig. 7.31 Lugar das raízes para um sistema de controle de um laser.



**Fig. 7.32** Resposta a uma rampa de entrada para um sistema de controle de um laser.

a laser. O sinal de comando deve ser limitado a um sinal em rampa de baixa velocidade. A resposta a um sinal em rampa está mostrada na Fig. 7.32.

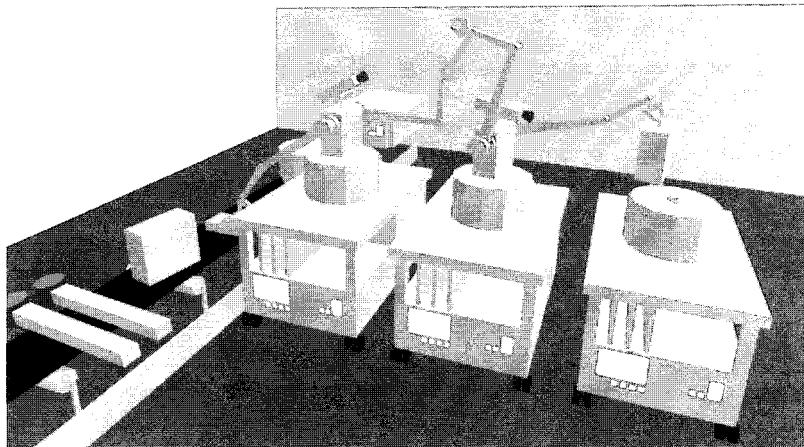
## 7.9 PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE DE UM ROBÔ

O conceito de replicar robôs é relativamente fácil de entender. A idéia central é que os robôs se repliquem e desenvolvam uma fábrica que produz robôs automaticamente. Um exemplo de instalação para replicação de um robô está mostrado na Fig. 7.33. Para obter o controle rápido e preciso de um robô, é importante conservar o braço rígido porém leve [6].

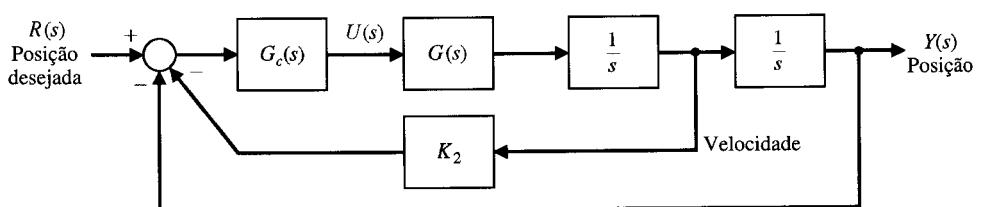
As especificações para controlar o movimento de um braço leve e flexível são (1) um tempo de assentamento no interior da faixa de 2% do valor final inferior a 2 segundos, (2) uma ultrapassagem percentual inferior a 10% para uma entrada em degrau e (3) um erro estacionário nulo a uma entrada em degrau.

O diagrama de blocos do sistema proposto com um controlador está mostrado na Fig. 7.34. A configuração propõe o uso de retroação de velocidade bem como o uso de um controlador  $G_c(s)$ . Como o robô é bastante leve e flexível, a função de transferência do braço é

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \left( \frac{1}{s^2} \right) G(s),$$



**Fig. 7.33** Instalação para replicar robôs.



**Fig. 7.34** Configuração proposta para o controle de um braço robótico leve.

e

$$G(s) = \frac{(s^2 + 4s + 10004)(s^2 + 12s + 90036)}{(s + 10)(s^2 + 2s + 2501)(s^2 + 6s + 22509)}. \quad (7.120)$$

Em consequência, os zeros complexos estão situados em

$$s = -2 \pm j100 \quad \text{e} \quad s = -6 \pm j300.$$

Os pólos complexos estão situados em

$$s = -1 \pm j50 \quad \text{e} \quad s = -3 \pm j150.$$

Um esboço do lugar das raízes quando  $K_2 = 0$  e o controlador é um ganho ajustável,  $G_c(s) = K_1$ , está mostrado na Fig. 7.35. O sistema é instável, uma vez que duas raízes da equação característica aparecem no plano  $s$  da direita para  $K_1 > 0$ .

É claro que há necessidade de se introduzir o uso da retroação de velocidade ajustando-se  $K_2$  com um valor positivo. Tem-se então  $H(s) = (1 + K_2 s)$ , por conseguinte, a função de transferência de malha é

$$\left(\frac{1}{s^2}\right) G(s)H(s) = \frac{K_1 K_2 \left(s + \frac{1}{K_2}\right) (s^2 + 4s + 10.004)(s^2 + 12s + 90.036)}{s^2(s + 10)(s^2 + 2s + 2501)(s^2 + 6s + 22.509)},$$

onde  $K_1$  é o ganho de  $G_c(s)$ . Dispõe-se agora de dois parâmetros,  $K_1$  e  $K_2$ , que podem ser ajustados. Escolhe-se  $5 < K_2 < 10$  a fim de colocar um zero ajustável próximo da origem.

Quando  $K_2 = 5$  e se variar  $K_1$ , obtém-se o lugar das raízes esboçado na Fig. 7.36. Com  $K_1 = 0,8$  e  $K_2 = 5$ , obtém-se uma resposta ao degrau com ultrapassagem percentual de 12% e tempo de assen-

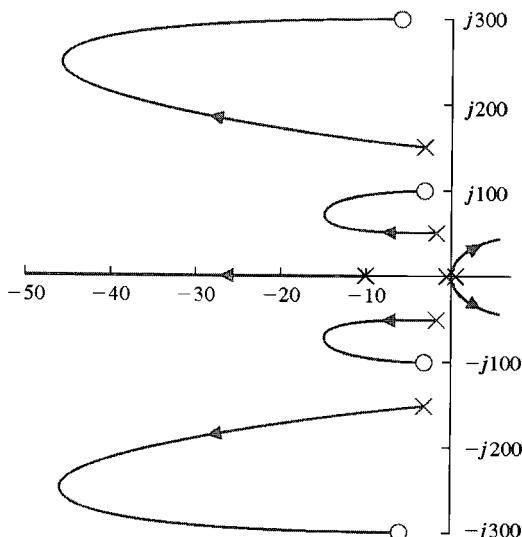


Fig. 7.35 Lugar das raízes do sistema se  $K_2 = 0$  e  $K_1$  for variado de  $K_1 = 0$  a  $K_1 = \infty$ , e  $G_c(s) = K_1$ .

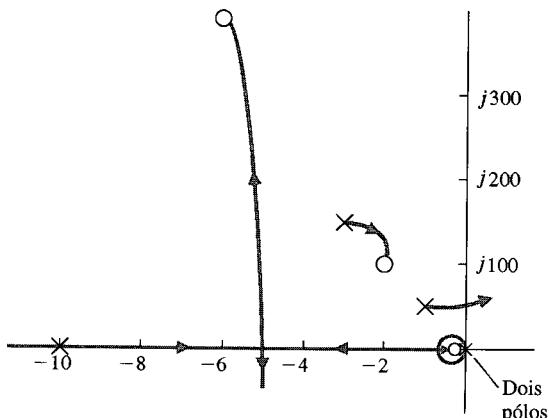


Fig. 7.36 Lugar das raízes para o controlador do robô com um zero inserido em  $s = -0,2$  com  $G_c(s) = K_1$ .

tamento de 1,8 segundo. Esta é a resposta ótima que se pode obter. Se fosse tentado  $K_2 = 7$  ou  $K_2 = 4$ , o valor de ultrapassagem seria maior que o desejado. Obteve-se assim o melhor desempenho com este sistema. Se for desejado continuar o procedimento de projeto, poderia ser usado um controlador  $G_c(s)$  com um pólo e um zero juntamente com a retroação de velocidade com  $K_2 = 5$ .

Uma escolha possível de controlador seria

$$G_c(s) = \frac{K_1(s + z)}{(s + p)}. \quad (7.121)$$

Selecionando-se  $z = 1$  e  $p = 5$ , então, quando  $K_1 = 5$  obtém-se uma resposta ao degrau com uma ultrapassagem de 8% e um tempo de assentamento de 1,6 segundo.

## 7.10 LUGAR DAS RAÍZES USANDO O MATLAB

Um esboço aproximado do lugar das raízes pode ser obtido aplicando-se o procedimento ordenado resumido na Tabela 7.2. Alternativamente se pode usar o MATLAB para obter um traçado preciso do lugar das raízes. Contudo, não se deve ser tentado a contar unicamente com o MATLAB para obter gráficos do lugar das raízes e desprezar os passos manuais para elaborar lugares das raízes aproximados. Os conceitos fundamentais por trás do método do lugar das raízes estão embutidos nos passos manuais e é essencial entender plenamente sua aplicação.

A seção começa com uma discussão sobre como obter um gráfico do lugar das raízes com o MATLAB. Isto será seguido de uma discussão sobre a conexão entre a expansão em frações parciais, pólos dominantes e resposta do sistema a malha fechada. A sensibilidade a raiz será coberta nos parágrafos finais.

As funções cobertas nesta seção são rlocus, rlocfind e residue. As funções rlocus e rlocfind são utilizadas para obter o lugar das raízes, e a função residue é utilizada na expansão em frações parciais de funções racionais.

**Obtendo um Gráfico do Lugar das Raízes.** Considere-se o sistema de controle a malha fechada da Fig. 7.10. A função de transferência a malha fechada é

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s + 1)(s + 3)}{s(s + 2)(s + 3) + K(s + 1)}.$$

A equação característica pode ser escrita como

$$1 + K \frac{(s + 1)}{s(s + 2)(s + 3)} = 0. \quad (7.122)$$

A forma da equação característica na Eq. (7.122) é necessária para se usar a função rlocus na geração de gráficos do lugar das raízes. A forma geral da equação característica necessária para aplicação da função rlocus é

$$1 + K \frac{p(s)}{q(s)} = 0, \quad (7.123)$$

onde  $K$  é o parâmetro de interesse a ser variado de  $0 < K < \infty$ . A função rlocus está mostrada na Fig. 7.37. Os passos para se obter o gráfico do lugar das raízes associado à Eq. (7.122), juntamente com o gráfico do lugar das raízes associado, estão mostrados na Fig. 7.38. Chamando-se a função rlocus sem argumentos no lado esquerdo resulta como saída a geração automática do gráfico do lugar das raízes. Quando chamada com argumentos, a função rlocus retorna como saída uma matriz com as localizações das raízes e o vetor com os valores de ganho associados.

Os passos para se obter um gráfico do lugar das raízes com o MATLAB são os seguintes:

1. Obter a equação característica na forma dada pela Eq. (7.123), onde  $K$  é o parâmetro de interesse.
2. Usar a função rlocus para gerar os gráficos.

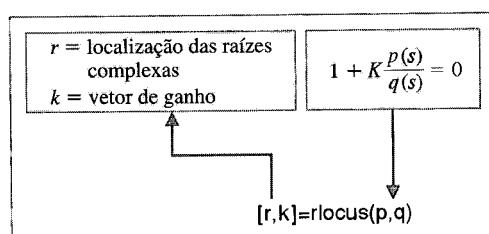


Fig. 7.37 A função rlocus.

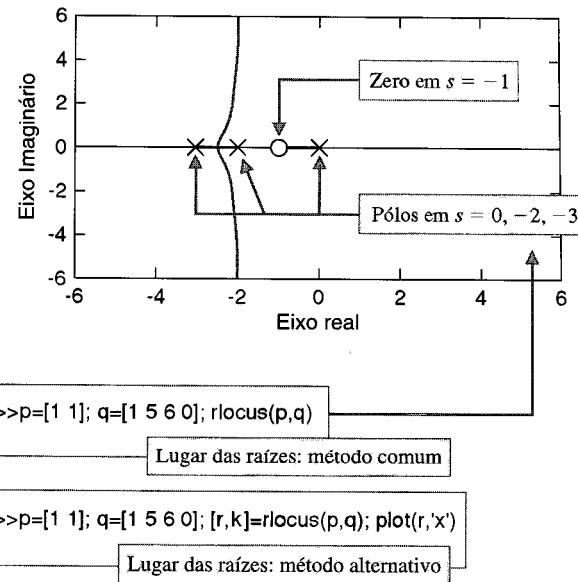
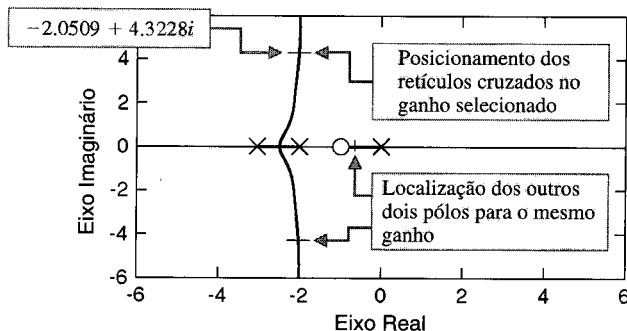


Fig. 7.38 O lugar das raízes para a equação característica (7.122).

Referindo-se à Fig. 7.38, pode-se ver que à medida que  $K$  aumenta, dois ramos do lugar das raízes deixam o eixo real. Isto significa que para alguns valores de  $K$  a equação característica do sistema a malha fechada possuirá duas raízes complexas. Supor que se deseja achar o valor de  $K$  correspondente a um par de raízes complexas. Pode-se usar a função rlocfind para fazer isto, mas somente depois de ter obtido o lugar das raízes com a função rlocus. Executando-se a função rlocfind resultará um cursor com aparência de retículos cruzados sobre o gráfico do lugar das raízes. Desloca-se o cursor em forma de retículos cruzados para a posição de interesse sobre o lugar das raízes e pressiona-se a tecla Enter. O valor do parâmetro  $K$  e o valor do ponto selecionado serão então mostrados na janela de comando. O uso da função rlocfind está ilustrado na Fig. 7.39.

Dando continuidade ao lugar das raízes do sistema de terceira ordem, encontra-se que, para  $K = 20,5775$ , a função de transferência a malha fechada possui três pólos e dois zeros em

$$\text{pólos: } s = \begin{pmatrix} -2,0505 + j4,3227 \\ -2,0505 - j4,3227 \\ -0,8989 \end{pmatrix}, \quad \text{zeros: } s = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$



```

Selecionar um ponto na janela gráfica
ponto selecionado =
-2.0509 + 4.3228i
ans =
20.5775
Valor de K no ponto selecionado
    
```

Fig. 7.39 Usando a função rlocfind.

Considerando apenas a localização dos pólos a malha fechada, deve-se esperar que o pôlo real em  $s = -0,8989$  seja o pôlo **dominante**. Para verificar isto, pode-se estudar a resposta do sistema a malha fechada a uma entrada em degrau,  $R(s) = 1/s$ . Para uma entrada em degrau tem-se

$$Y(s) = \frac{20,5775(s + 1)(s + 3)}{s(s + 2)(s + 3) + 20,5775(s + 1)} \cdot \frac{1}{s}. \quad (7.124)$$

Geralmente o primeiro passo para se calcular  $y(t)$  é expandir a Eq. (7.124) em frações parciais. A função residue pode ser usada para expandir a Eq. (7.124), como está mostrado na Fig. 7.40.

A expansão da Eq. (7.124) em frações parciais é

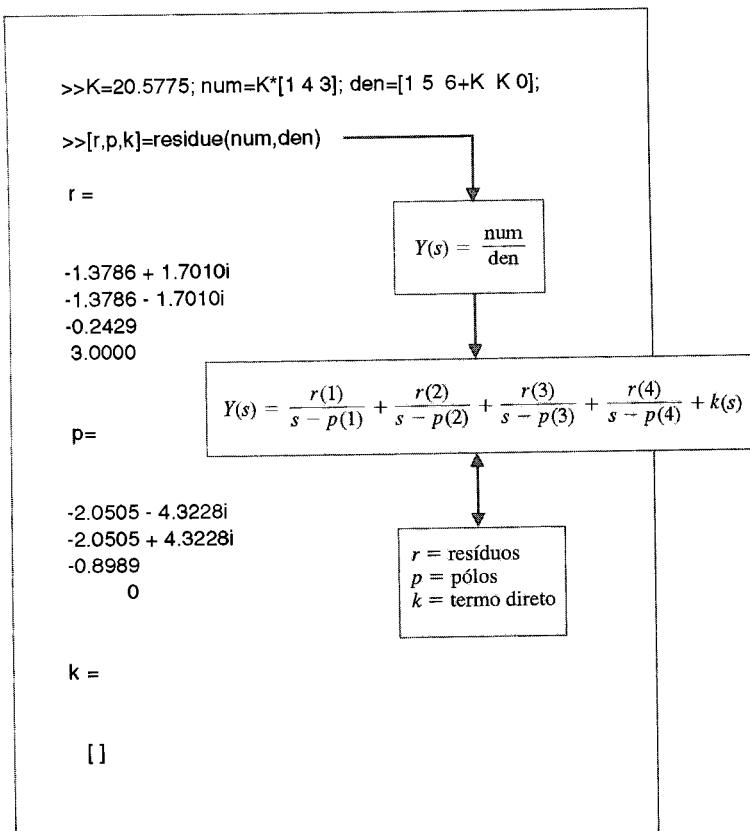
$$Y(s) = \frac{-1,3786 + j1,7010}{s + 2,0505 + 4,3228i} + \frac{-1,3786 - j1,7010}{s + 2,0505 - 4,3228i} + \frac{-0,2429}{s + 0,8989} + \frac{3}{s}.$$

Comparando os resíduos, vê-se que o coeficiente do termo correspondente ao pôlo em  $s = -0,8989$  é consideravelmente menor que os coeficientes dos termos correspondentes aos pôlos complexos conjugados em  $s = -2,0505 \pm j4,3227$ . A partir disto espera-se que a influência do pôlo em  $s = -0,8989$  na resposta de saída  $y(t)$  não seja dominante. O tempo de assentamento no interior de 2% do valor final é então determinado previamente considerando-se os pôlos complexos conjugados. Os pôlos em  $s = -2,0505 \pm j4,3227$  correspondem a um coeficiente de amortecimento  $\zeta = 0,4286$  e a uma freqüência natural  $\omega_n = 4,7844$ . Assim, o tempo de assentamento é previsto com o valor de

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} = 1,95 \text{ segundo.}$$

Usando a função step, como mostrado na Fig. 4.72, encontra-se  $T_s \approx 1,6$  segundo. Assim a aproximação do tempo de assentamento por  $T_s \approx 1,95$  é uma aproximação razoavelmente boa. A ultrapassagem percentual pode ser estimada previamente usando a Fig. 5.12, uma vez que o zero de  $T(s)$  em  $s = -3$  afetará a resposta do sistema. Usando a Fig. 5.12, há uma previsão de ultrapassagem percentual de 60%. Como pode ser vista na Fig. 7.42, a ultrapassagem real é de 50%.

Neste exemplo foi ilustrado o papel dos zeros do sistema na resposta transitória. A proximidade do zero em  $s = -1$  com o pôlo em  $s = -0,8989$  reduz o impacto desse pôlo na resposta transitória. Os principais contribuintes para a resposta transitória são os pôlos complexos em  $s = -2,0505 \pm j4,3228$  e o zero em  $s = -3$ .



**Fig. 7.40** Expansão em frações parciais da Eq. (7.124).

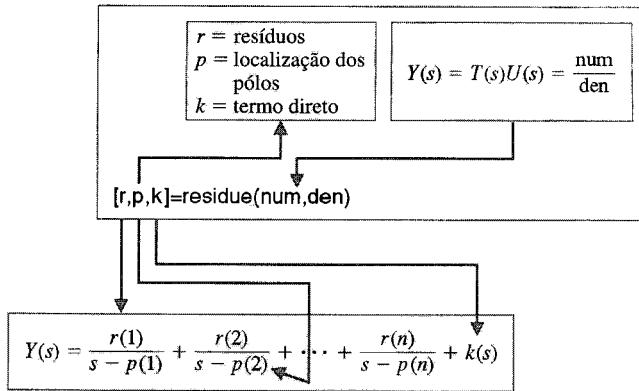
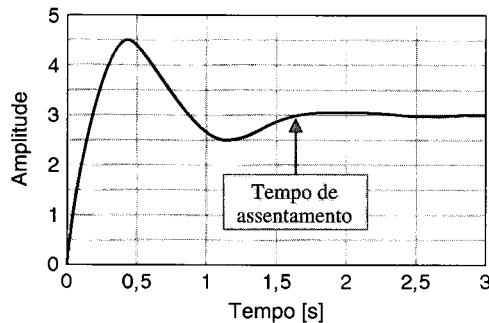


Fig. 7.41 A função residue.

Fig. 7.42 Resposta ao degrau para o sistema a malha fechada da Fig. 7.10 com  $K = 20,5775$ .

```

>>K=20.5775;num=K*[1 4 3]; den=[1 5 6+K K];
>>step(num,den), grid
  
```

Um comentário final relativo à função `residue`: Pode-se converter a expansão em frações parciais de volta aos polinômios  $\text{num}/\text{den}$ , dados os resíduos ( $r$ ), a localização dos pólos ( $p$ ) e o termo direto ( $d$ ), com o comando mostrado na Fig. 7.43.

**Sensibilidade e Lugar das Raízes.** As raízes da equação característica desempenham um papel importante na definição da resposta transitória do sistema a malha fechada. O efeito de variação de parâmetros sobre as raízes da equação característica é uma medida útil de sensibilidade. A sensibilidade a raiz pode ser definida como

$$\frac{\partial r_i}{\partial K/K}. \quad (7.125)$$

Pode-se utilizar a Eq. (7.125) para investigar a sensibilidade das raízes da equação característica a variações no parâmetro  $K$ . Se houver uma pequena mudança  $\Delta K$  no valor do parâmetro  $K$  e se for calculada a raiz modificada  $r_i + \Delta r_i$ , segue-se que

$$S_K^{r_i} = \frac{\Delta r_i}{\Delta K/K}. \quad (7.126)$$

A grandeza  $S_K^{r_i}$  é um número complexo. Retornando ao exemplo de terceira ordem da Fig. 7.10 (Eq. 7.122), se o valor de  $K$  for modificado por um fator de 5%, acha-se que o pólo dominante em  $s = -2,0505 + j4,3228$  muda de

$$\Delta r_i = -0,0025 - j0,1168$$

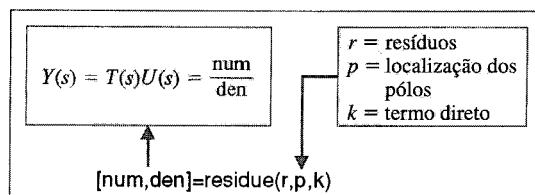


Fig. 7.43 Convertendo uma expansão em frações parciais de volta a uma função racional.

ptsensitivity.m

```
% Calcula a sensibilidade do sistema a uma
% variação de parâmetro
%
K=20.5775; den=[1 5 6+K K]; r1=roots(den);
%
dk=1.0289; % 5% de variação em K
%
Km=K+dk; denm=[1 5 6+Km Km]; r2=roots(denm);
dr=r1-r2; % Δr
%
S=dr/(dk/K); % Fórmula de sensibilidade
```

**Fig. 7.44** Cálculos de sensibilidade para o lugar das raízes para uma variação de 5% em  $K = 20,5775$ .

quando  $K$  varia de  $K = 20,5775$  para  $K = 21,6064$ . A partir da Eq. (7.126), resulta

$$S_K^{r_i} = \frac{-0,0025 - j0,1168}{1,0289/20,5775} = -0,0494 - j2,3355.$$

A sensibilidade  $S_K^{r_i}$  também pode ser escrita sob a forma

$$S_K^{r_i} = 2,34 / 268,79^\circ.$$

A magnitude e a direção de  $S_K^{r_i}$  fornecem uma medida da sensibilidade a raiz. O script usado para executar estes cálculos de sensibilidade está mostrado na Fig. 7.44.

A medida de sensibilidade a raiz pode ser útil ao se comparar a sensibilidade a vários parâmetros do sistema em diferentes localizações da raiz.

## 7.11 EXEMPLO DE PROJETO SEQÜENCIAL: SISTEMA DE LEITURA DE ACIONADOR DE DISCO



No Cap. 6 foi introduzida uma nova configuração para o sistema de controle usando retroação de velocidade (ver Seção 6.7). Neste capítulo será usado o controlador PID para obter uma resposta desejável. Novamente se está no passo 4 do procedimento de projeto da Fig. 5.43. A continuação será feita com o modelo (passo 5) e, em seguida será selecionado um controlador (passo 6). Finalmente os parâmetros serão otimizados e será analisado o desempenho (passo 7). Neste capítulo será usado o método do lugar das raízes na escolha dos parâmetros do controlador.

Usa-se o lugar das raízes para selecionar os ganhos do controlador. O controlador PID introduzido neste capítulo é

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3 s. \quad (7.127)$$

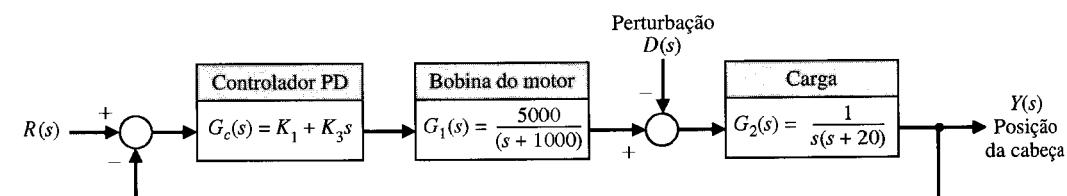
Como o modelo do processo a controlar,  $G_1(s)$ , já possui uma integração, faz-se  $K_2 = 0$ . Tem-se assim o controlador PD

$$G_c(s) = K_1 + K_3 s, \quad (7.128)$$

e o objetivo é selecionar  $K_1$  e  $K_3$  a fim de atender as especificações. O sistema está mostrado na Fig. 7.45. A função de transferência a malha fechada do sistema é

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{G_c(s)G_1(s)G_2(s)}{1 + G_c(s)G_1(s)G_2(s)H(s)},$$

onde  $H(s) = 1$ .



**Fig. 7.45** Sistema de controle do acionador de disco com um controlador PID.

A fim de obter o lugar das raízes como função de um parâmetro, escreve-se  $G_c(s)G_1(s)G_2(s)H(s)$  como

$$G_c G_1 G_2 H(s) = \frac{5000(K_1 + K_3 s)}{s(s+20)(s+1000)} = \frac{5000K_3(s+z)}{s(s+20)(s+1000)},$$

onde  $z = K_1/K_3$ . Usa-se  $K_1$  para selecionar a localização do zero  $z$  e então esboçar o lugar das raízes como uma função de  $K_3$ . Baseado na percepção desenvolvida na Seção 6.7, seleciona-se  $z = 1$  de modo que

$$G_c G_1 G_2 H(s) = \frac{5000K_3(s+1)}{s(s+20)(s+1000)}. \quad (7.129)$$

O número de pólos menos o número de zeros é 2, e devem ser esperadas assíntotas de  $\phi_A = \pm 90^\circ$  com um centróide.

$$\sigma_A = \frac{-1020 + 1}{2} = -509,5,$$

como mostrado na Fig. 7.46. Pode-se esboçar rapidamente o lugar das raízes como está mostrado na Fig. 7.46. Utiliza-se o MATLAB para determinar os valores das raízes para diversos valores de  $K_3$ . Quando  $K_3 = 100$  obtém-se as raízes mostradas na Fig. 7.46. Obtendo-se, em seguida, a resposta do sistema com o uso do MATLAB, são conseguidas as medidas reais da resposta listadas na Tabela 7.6. O sistema como está projetado atende a todas as especificações. O tempo de assentamento de 20 ms é o tempo que o sistema leva para alcançar “praticamente” o valor final. Na realidade, o sistema deriva lentamente em direção ao valor final após ter alcançado rapidamente 97% do valor final.

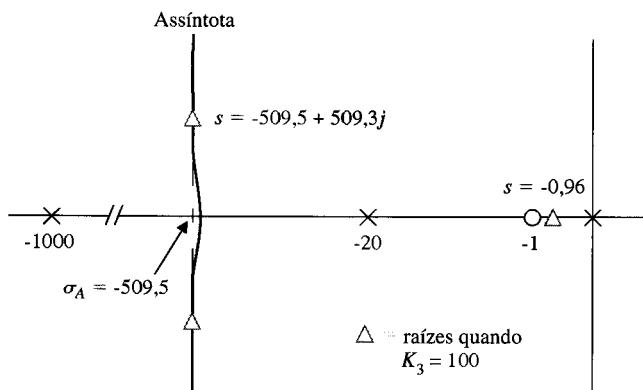


Fig. 7.46 Esboço de lugar das raízes.

**TABELA 7.6 Especificações do Sistema de Controle do Acionador de Disco e Desempenho do Sistema Real**

Medida de Desempenho	Valor Desejado	Resposta Real
Ultrapassagem percentual	Menor que 5%	0%
Tempo de assentamento	Menor que 250 ms	20 ms
Valor máximo da resposta a uma perturbação unitária	Menor que $5 \times 10^{-3}$	$2 \times 10^{-3}$

## 7.12 SUMÁRIO

A estabilidade relativa e o desempenho da resposta transitória de um sistema de controle a malha fechada estão diretamente relacionados com a localização das raízes da equação característica. Por conseguinte, deve-se investigar o deslocamento das raízes da equação característica no plano  $s$  à medida que parâmetros do sistema possam ser variados, utilizando o método do lugar das raízes. O método do lugar das raízes, uma técnica gráfica, pode ser usada para se obter um esboço aproximado a fim de se analisar o projeto inicial de um sistema e de determinar alterações adequadas na estrutura do sistema e os valores de parâmetros. Um computador é comumente utilizado para calcular diversas raízes precisas em pontos importantes do lugar das raízes. Um resumo de quinze diagramas típicos de lugares das raízes está mostrado na Tabela 7.7.

TABELA 7.7 Gráficos de Lugares das Raízes para Funções de Transferência Típicos

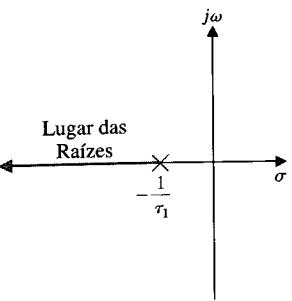
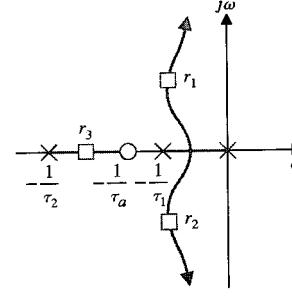
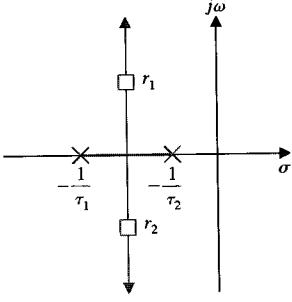
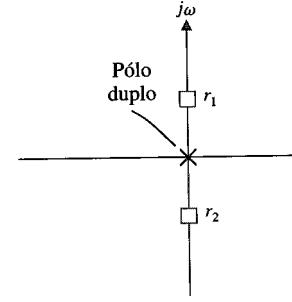
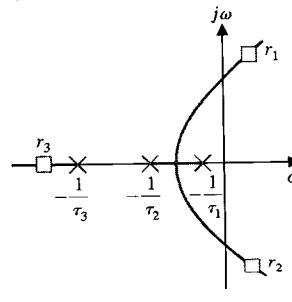
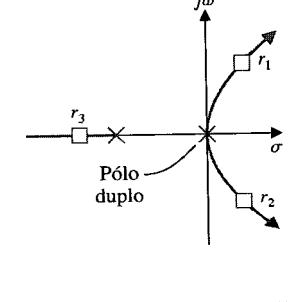
$G(s)$	Lugar das Raízes	$G(s)$	Lugar das Raízes
1. $\frac{K}{s\tau_1 + 1}$		7. $\frac{K(s\tau_a + 1)}{s(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$	
2. $\frac{K}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$		8. $\frac{K}{s^2}$	
3. $\frac{K}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)(s\tau_3 + 1)}$		9. $\frac{K}{s^2(s\tau_1 + 1)}$	

TABELA 7.7 Continuação

$G(s)$	Lugar das Raízes	$G(s)$	Lugar das Raízes
4. $\frac{K}{s}$		10. $\frac{K(s\tau_a + 1)}{s^2(s\tau_1 + 1)}$ $\tau_a > \tau_1$	
5. $\frac{K}{s(s\tau_1 + 1)}$		11. $\frac{K}{s^3}$	
6. $\frac{K}{s(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$		12. $\frac{K(s\tau_a + 1)}{s^3}$	

TABELA 7.7 Continuação

$G(s)$	Lugar das Raízes	$G(s)$	Lugar das Raízes
13. $\frac{K(s\tau_a + 1)(s\tau_b + 1)}{s^3}$		15. $\frac{K(s\tau_a + 1)}{s^2(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$	
14. $\frac{K(s\tau_a + 1)(s\tau_b + 1)}{s(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)(s\tau_3 + 1)(s\tau_4 + 1)}$			

Além disto, o método do lugar das raízes foi estendido para o projeto de diversos parâmetros de um sistema de controle a malha fechada. Investigou-se em seguida a sensibilidade das raízes da equação característica com relação a variações não desejadas de parâmetros definido-se uma medida de sensibilidade a raiz. É claro que o método do lugar das raízes se constitui uma abordagem poderosa e útil para a análise e para o projeto de sistemas de controle modernos e continuará a ser um dos procedimentos mais importantes da engenharia de controle.

## EXERCÍCIOS

- E7.1** Seja considerar um dispositivo que consiste de uma esfera rolando na superfície interna de um anel [11]. Este modelo é semelhante ao problema de um combustível líquido sendo sacudido em um foguete. O anel é livre para girar em torno do seu eixo principal, como está mostrado na Fig. E7.1. A posição angular do anel pode ser controlada por meio de um torque  $T$  aplicado ao anel por meio de um motor de torque fixado ao eixo de acionamento do anel. Se for usada retroação negativa, a equação característica do sistema é

$$1 + \frac{Ks(s + 4)}{s^2 + 2s + 2} = 0.$$

- (a) Esboçar o lugar das raízes. (b) Achar o ganho quando ambas as raízes forem iguais. (c) Achar estas duas raízes iguais. (d) Achar o tempo de assentamento do sistema quando as raízes forem iguais.

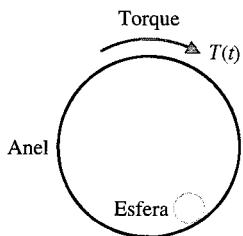


Fig. E7.1 Anel acionado por motor.

- E7.2** Um registrador de fita possui um sistema de controle de velocidade com retroação negativa tal que  $H(s) = 1$  e

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 2)(s^2 + 4s + 5)}.$$

- (a) Esboçar um lugar das raízes para  $K$  e mostrar que as raízes dominantes são  $s = -0,35 \pm j0,80$  quando  $K = 6,5$ . (b) Para as raízes dominantes da parte (a), calcular o tempo de assentamento e a ultrapassagem para uma entrada em degrau.

- E7.3** Um sistema de controle de um testador de suspensão automotiva possui retroação unitária negativa e um processo [12]

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 4s + 8)}{s^2(s + 4)}.$$

Deseja-se que os pólos dominantes tenham um coeficiente  $\zeta$  igual a 0,5. Usando o lugar das raízes, mostrar que é requerido o valor de  $K = 7,35$  e que as raízes dominantes são  $s = -1,3 \pm j2,2$ .

- E7.4** Considere-se um sistema com retroação unitária com

$$G(s) = \frac{K(s + 1)}{s^2 + 4s + 5}.$$

- (a) Determinar o ângulo de partida das raízes complexas no lugar das raízes. (b) Determinar o ponto em que o lugar das raízes entra no eixo real (ponto de entrada).

**Respostas:**  $\pm 225^\circ$ ; - 2,4

- E7.5** Considere-se o sistema com retroação com uma função de transferência de malha

$$GH(s) = \frac{K}{(s + 1)(s + 3)(s + 6)}.$$

- (a) Determinar o ponto de saída do eixo real. (b) Determinar o centroíde das assíntotas. (c) Determinar o valor de  $K$  no ponto de saída.

- E7.6** Os Estados Unidos planejam dispor de uma estação espacial operacional em órbita no final dos anos 1990. Uma versão de estação espacial está mostrada na Fig. E7.6. É crítico o problema de manter esta estação com uma orientação apropriada na direção do sol e da terra para gerar energia e comunicações. O controlador de orientação pode ser representado por um sistema com retroação unitária com um controlador e um atuador

$$G(s) = \frac{K(s + 20)}{s(s^2 + 24s + 144)}.$$

Esboçar o lugar das raízes do sistema à medida que  $K$  aumenta. Achar o valor de  $K$  que resulta em uma resposta oscilatória.

**Resposta:**  $K > 16,37$

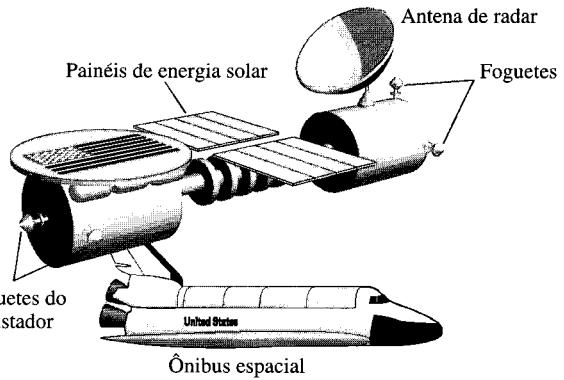


Fig. E7.6 Estação espacial.

- E7.7** O elevador de um moderno edifício de escritórios trafega a uma velocidade máxima de 25 pés por segundo e ainda é capaz de parar em cada andar com um erro de nivelamento de um oitavo de polegada. A função de transferência do controle de posição com retroação unitária do elevador é

$$G(s) = \frac{K(s + 10)}{s(s + 1)(s + 20)(s + 50)}.$$

Determinar o ganho  $K$  quando as raízes complexas têm um valor de  $\zeta$  igual a 0,8.

- E7.8** Esboçar o lugar das raízes para um sistema com retroação unitária com

$$G(s) = \frac{K(s + 1)}{s^2(s + 9)}.$$

- (a) Achar o ganho para o qual todas as três raízes são reais e iguais.  
 (b) Achar as raízes quando todas elas são iguais, como na parte (a).

**Respostas:**  $K = 27$ ;  $s = -3$

- E7.9** O maior telescópio do mundo está localizado no Havaí. O espelho primário possui um diâmetro de 10 m e consiste de um mosaico de 36 segmentos hexagonais com a orientação de cada segmento controladaativamente. Este sistema com retroação unitária para os segmentos do espelho possui

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2s + 5)}.$$

- (a) Determinar as assíntotas e desenhá-las no plano  $s$ . (b) Achar o ângulo de partida dos pólos complexos. (c) Determinar o ganho quando duas raízes estiverem situadas sobre o eixo imaginário.  
 (d) Esboçar o lugar das raízes.

- E7.10** Um sistema com retroação unitária possui

$$KG(s) = \frac{K(s + 2)}{s(s + 1)}.$$

- (a) Determinar os pontos de saída e de entrada no eixo real. (b) Determinar o ganho e as raízes quando a parte real das raízes complexas estiver localizada em  $-2$ . (c) Esboçar o lugar das raízes.

**Respostas:** (a)  $-0,59, -3,41$ ; (b)  $K = 3$ ,  $s = -2 \pm j\sqrt{2}$

- E7.11** O sistema de controle de força de um robô com retroação unitária possui o processo a controlar [6]

$$KG(s) = \frac{K(s + 2,5)}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 4s + 5)}.$$

- (a) Achar o ganho  $K$  que resulta em raízes dominantes com um coeficiente de amortecimento de 0,707. Esboçar o lugar das raízes. (b) Achar a ultrapassagem percentual e o tempo de pico reais para o ganho  $K$  da parte (a).

- E7.12** Um sistema com retroação unitária possui um processo a controlar

$$KG(s) = \frac{K(s + 1)}{s(s^2 + 4s + 8)}.$$

- (a) Esboçar o lugar das raízes para  $K > 0$ ; (b) achar as raízes quando  $K = 10$  e  $20$ ; (c) calcular o tempo de subida de 0-100%, a ultrapassagem percentual e o tempo de assentamento (usar o critério de 2%) do sistema a uma entrada em degrau unitário quando  $K = 10$  e  $20$ .

- E7.13** Um sistema com retroação unitária possui um processo a controlar

$$G(s) = \frac{4(s + z)}{s(s + 1)(s + 3)}.$$

- (a) Desenhar o lugar das raízes à medida que  $z$  varia de 0 a 100.  
 (b) Usando o lugar das raízes, estimar a ultrapassagem percentual e o tempo de assentamento (critério de 2%) do sistema em  $z = 0,6, 2$  e  $4$  para uma entrada em degrau. (c) Determinar os valores reais de ultrapassagem e de tempo de assentamento em  $z = 0,6, 2$  e  $4$ .

- E7.14** Um sistema com retroação unitária possui um processo a controlar

$$G(s) = \frac{K(s + 10)}{s(s + 5)}.$$

- (a) Determinar os pontos de saída e de entrada do lugar das raízes e esboçar o lugar das raízes para  $K > 0$ . (b) Determinar o ganho  $K$  quando as duas raízes características possuírem um  $\zeta$  de  $1/\sqrt{2}$ . (c) Calcular as raízes.

- E7.15** (a) Traçar o gráfico do lugar das raízes para

$$GH(s) = \frac{K(s + 1)(s + 3)}{s^3}.$$

- (b) Calcular a faixa de valores de  $K$  para a qual o sistema é estável. (c) Prever o erro de estado estacionário do sistema a uma entrada em rampa.

**Respostas:** (a)  $K > 3/4$ ; (b)  $e_{ss} = 0$ .

- E7.16** Um sistema com retroação unitária negativa possui uma função de transferência do processo a controlar

$$G(s) = \frac{Ke^{-sT}}{s + 1},$$

onde  $T = 0,1$  segundo. Mostrar que uma aproximação para o tempo de retardo é

$$e^{-sT} \cong \frac{\left(\frac{2}{T} - s\right)}{\left(\frac{2}{T} + s\right)}.$$

Usando

$$e^{-0,1s} = \frac{20 - s}{20 + s},$$

obter o lugar das raízes do sistema para  $K > 0$ . Determinar a faixa de valores de  $K$  para a qual o sistema é estável.

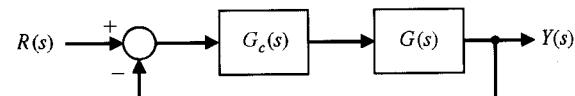
- E7.17** Um sistema de controle como está mostrado na Fig. E7.17 possui um processo a controlar

$$G(s) = \frac{1}{s(s - 1)}.$$

- (a) Quando  $G_c(s) = K$ , mostrar por meio do esboço do lugar das raízes que o sistema é sempre instável. (b) Quando

$$G_c(s) = \frac{K(s + 2)}{(s + 20)},$$

esboçar o lugar das raízes e determinar a faixa de valores de  $K$  para a qual o sistema é estável. Determinar o valor de  $K$  e as raízes complexas quando as duas raízes estiverem sobre o eixo  $j\omega$ .



**Fig. E7.17** Sistema com retroação.

- E7.18** Um sistema com retroação negativa a malha fechada é usado para controlar o movimento de arfagem do jato de ataque A-6 Intruder, usado largamente na guerra do Golfo Pérsico. Quando  $H(s) = 1$  e

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 3)(s^2 + 2s + 2)},$$

determinar (a) o ponto de partida do lugar das raízes, (b) o valor das raízes sobre o eixo  $j\omega$  e o ganho requerido para essas raízes. Esboçar o lugar das raízes.

**Resposta:** ponto de partida:  $s = -2,29$   
 eixo  $j\omega$ :  $s = \pm j1,09$   $K = 8$

- E7.19** Um sistema com retroação unitária possui um processo a controlar

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 3)(s^2 + 6s + 64)}.$$

- (a) Determinar o ângulo de partida do lugar das raízes nos pólos complexos. (b) Esboçar o lugar das raízes. (c) Determinar o ganho  $K$  quando as raízes estiverem sobre o eixo  $j\omega$  e determinar a localização dessas raízes.

**E7.20** Um sistema com retroação unitária possui um processo a controlar

$$G(s) = \frac{K(s + 1)}{s(s - 1)(s + 4)}.$$

- (a) Determinar a faixa de valores de  $K$  estabilidade. (b) Esboçar o lugar das raízes. (c) Determinar o valor máximo de  $\zeta$  das raízes complexas estáveis.

**Respostas:** (a)  $K > 6$ ; (b)  $\zeta = 0,2$ .

**E7.21** Um sistema com retroação unitária possui um processo a controlar

$$G(s) = \frac{Ks}{s^3 + 5s^2 + 10}.$$

Esboçar o lugar das raízes. Determinar o ganho  $K$  quando as raízes complexas da equação característica tiverem um valor de  $\zeta$  aproximadamente igual a 0,66.

**E7.22** Um míssil de alto desempenho para o lançamento de um satélite possui um sistema com retroação unitária com a função de transferência do processo

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 10)(s + 2)}{(s^2 - 2)(s + 10)}.$$

Esboçar o lugar das raízes à medida que  $K$  varia.

**E7.23** Um sistema com retroação unitária possui um processo a controlar

$$G(s) = \frac{4(s^2 + 1)}{s(s + a)}.$$

Esboçar o lugar das raízes para  $0 \leq a < \infty$ .

## PROBLEMAS

**P7.1** Esboçar o lugar das raízes para as seguintes funções de transferência a malha aberta do sistema mostrado na Fig. P7.1 quando  $0 < k < \infty$ :

$$(a) GH(s) = \frac{K}{s(s + 1)^2}$$

$$(b) GH(s) = \frac{K}{(s^2 + 2s + 2)(s + 2)}$$

$$(c) GH(s) = \frac{K(s + 5)}{s(s + 1)(s + 4)}$$

$$(d) GH(s) = \frac{K(s^2 + 4s + 8)}{s^2(s + 4)}$$

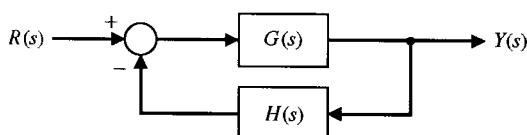


Fig. P7.1

**P7.2** O modelo linear de um detetor de fase foi apresentado no Problema 6.7. Esboçar o lugar das raízes em função do ganho  $K_v = K_a K$ . Determinar o valor de  $K_v$  para o qual as raízes complexas têm uma relação de amortecimento igual a 0,60 [13].

**P7.3** Um sistema com retroação unitária possui

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 2)(s + 5)}.$$

Achar (a) o ponto de partida no eixo real e o ganho  $K$  correspondente a este ponto, (b) o ganho e as raízes quando duas delas se localizam sobre o eixo imaginário e (c) as raízes quando  $K = 6$ . (d) Esboçar o lugar das raízes.

**P7.4** A análise de uma antena de grande porte foi apresentada no Problema 4.5. Esboçar o lugar das raízes à medida que  $0 < k_a < \infty$ . Determinar o valor máximo admissível para o ganho do amplificador tal que o sistema seja estável.

**P7.5** O controle automático de helicópteros é necessário porque, diferentemente das aeronaves de asa fixa que possuem um grau razoável de estabilidade inerente, o helicóptero é bastante instável. Um sistema de controle de helicóptero que utiliza uma malha de controle automático e mais uma alavanca de pilotagem está mostrado na Fig. P7.5. Quando o piloto não está usando a alavanca de controle, a chave pode ser considerada aberta. A dinâmica do helicóptero é representada pela função de transferência

$$G_2(s) = \frac{25(s + 0,03)}{(s + 0,4)(s^2 - 0,36s + 0,16)}.$$

- (a) Com a malha de controle do piloto aberta (controle não manual), esboçar o lugar das raízes para a malha de estabilização automática. Determinar o valor de  $K_2$  que resulta em um coeficiente de amortecimento das raízes complexas igual a  $\zeta = 0,707$ . (b) Para o ganho  $K_2$  obtido na parte (a), determinar o erro estacionário devido a uma rajada de vento  $T_d(s) = 1/s$ . (c) Com a malha do piloto incluída, desenhar o lugar das raízes à medida que  $K_1$  varia de zero a  $\infty$  com  $K_2$  fixado no valor calculado na parte (a). (d) Recalcular o erro de estado estacionário da parte (b) quando  $K_1$  for igual a um valor adequado baseado no lugar das raízes.

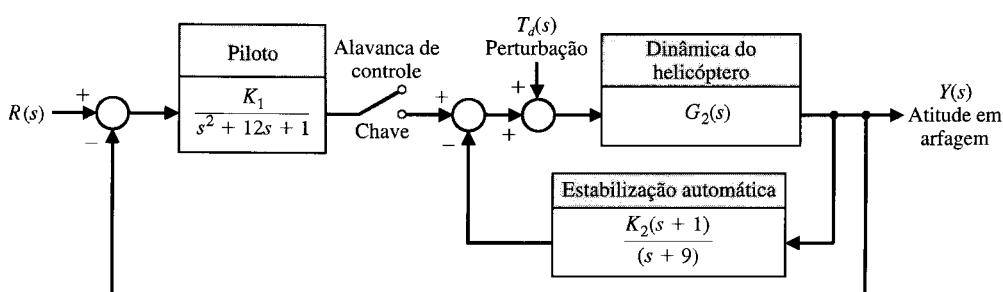


Fig. P7.5 Controle de helicóptero.

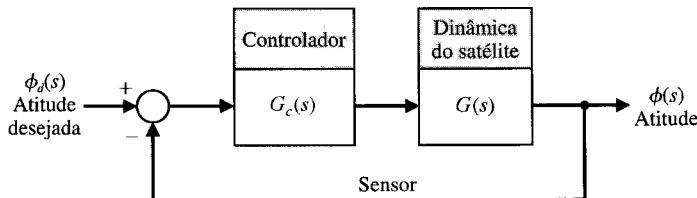


Fig. P7.6 Controle de atitude de satélite.

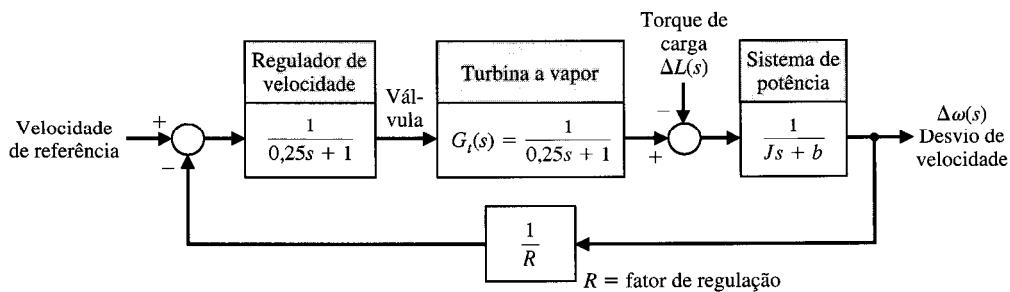


Fig. P7.7 Controle de sistema de potência.

**P7.6** Um sistema de controle de atitude para um veículo satélite no interior da atmosfera da terra está mostrado na Fig. P7.6. As funções de transferência do sistema são

$$G(s) = \frac{K(s + 0,20)}{(s + 0,90)(s - 0,60)(s - 0,10)},$$

$$G_c(s) = \frac{(s + 2 + j1,5)(s + 2 - j1,5)}{(s + 4,0)}.$$

(a) Desenhar o lugar das raízes do sistema à medida que  $K$  varia de 0 a  $\infty$ . (b) Determinar o ganho  $K$  que resulta em um sistema com tempo de assentamento (critério dos 2%) inferior a 12 segundos e um coeficiente de amortecimento das raízes complexas superior a 0,50.

**P7.7** O sistema de controle de velocidade de um sistema de potência isolado está mostrado na Fig. P7.7. A válvula controla a vazão de vapor de entrada na turbina de modo a levar em conta as mudanças de carga,  $\Delta L(s)$ , no interior da rede de distribuição. A velocidade de equilíbrio desejada resulta em uma freqüência do gerador igual a 60 Hz. A inércia efetiva em rotação,  $J$ , é igual a 4000 e a constante de atrito viscoso,  $b$ , é igual a 0,75. O fator de regulação de velocidade em estado estacionário,  $R$ , é representado pela equação  $R \equiv (\omega_0 - \omega)/\Delta L$ , onde  $\omega_0$  é igual à velocidade com carga nominal e  $\omega$  é igual à velocidade em vazio (sem carga). Deseja-se obter um valor para  $R$  muito pequeno, usualmente menor que 0,10. (a) Usando técnicas do lugar das raízes, determinar a regulação,  $R$ , alcançável quando a relação de amor-

tecimento das raízes do sistema tiver que ser maior que 0,60. (b) Verificar que o valor de estado estacionário do desvio de velocidade para uma mudança no torque de carga,  $\Delta L(s) = \Delta L/s$ , é, de fato, aproximadamente igual a  $R\Delta L$  quando  $R \leq 0,1$ .

**P7.8** Reconsiderar o sistema de controle de potência do Problema 7.7 quando se substitui a turbina a vapor por uma turbina hidráulica. Para turbinas hidráulicas, a grande inércia da água usada como fonte de energia produz uma constante de tempo consideravelmente maior. A função de transferência de uma turbina hidráulica pode ser aproximada por

$$G_t(s) = \frac{-\tau s + 1}{(\tau/2)s + 1},$$

onde  $\tau = 1$  segundo. Com o resto do sistema permanecendo como foi dado no Problema 7.7, repita as partes (a) e (b) deste mesmo Problema.

**P7.9** A obtenção de um sistema de controle seguro e eficiente do espaçamento entre veículos guiados controlados automaticamente é uma parte importante do uso futuro de veículos nas instalações industriais [14, 15]. É importante que o sistema elimine os efeitos de perturbações tais como óleo no piso e também mantenha o espaçamento preciso entre veículos nas vias. O sistema pode ser representado pelo diagrama de blocos da Fig. P7.9. A dinâmica do veículo pode ser representada por

$$G(s) = \frac{(s + 0,1)(s^2 + 2s + 289)}{s(s - 0,4)(s + 0,8)(s^2 + 1,45s + 361)}.$$

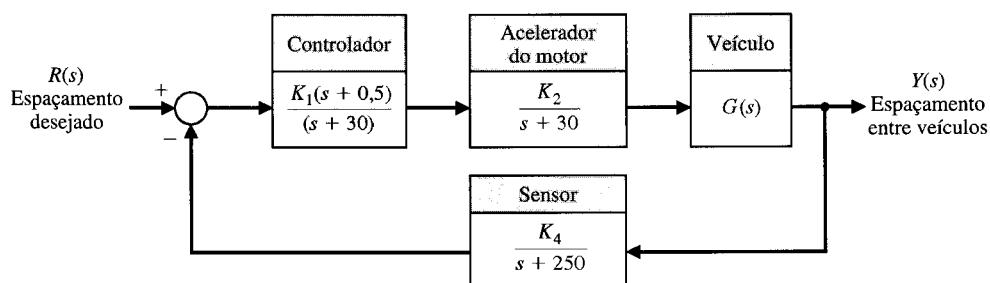
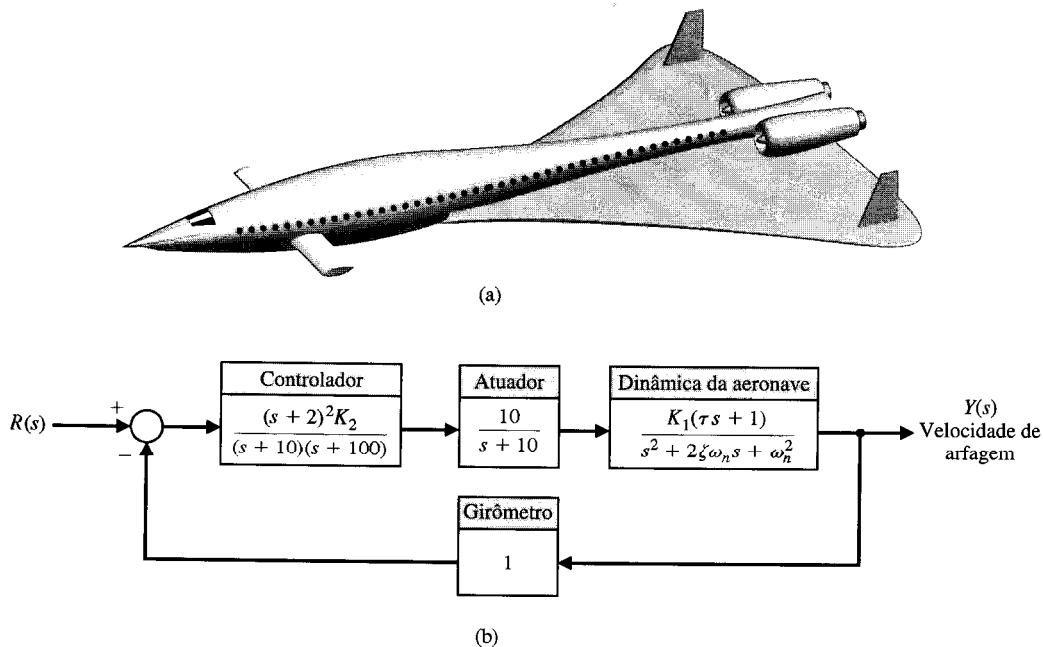


Fig. P7.9 Controle de veículo guiado.



**Fig. P7.10** (a) Um avião a jato supersônico do futuro. (b) Sistema de controle.

(a) Desprezar o polo do sensor de retroação e esboçar o lugar das raízes do sistema. (b) Determinar todas as raízes quando o ganho de malha  $K = K_1 K_2 K_4 / 250$  for igual a 4000.

- P7.10** Diferentemente do *Concorde* dos dias de hoje, um jato supersônico de passageiros da virada do século deverá ter uma autonomia para cruzar o Pacífico sem escalas e a eficiência para torná-lo econômico [16]. Este novo avião mostrado na Fig. P7.10(a) irá requerer o uso de materiais leves e resistentes a temperatura e sistemas de controle com computador avançados.

A aeronave deverá transportar 300 passageiros a uma velocidade três vezes a do som, por até 7500 milhas. O sistema de controle de vôo requer o estabelecimento de condições de vôo confortáveis e de boa qualidade. Um sistema de controle automático de vôo pode ser projetado para veículos SST. As características desejadas das raízes dominantes do sistema de controle mostrado na Fig. P7.10(b) têm um  $\zeta = 0,707$ . As características da aeronave são  $\omega_n = 2,5$ ,  $\zeta = 0,30$  e  $\tau = 0,1$ . O fator de ganho  $K_1$ , contudo, poderá variar sobre a faixa de 0,02 em condições de cruzeiro com carga média a 0,20 em condições de descida com carga leve. (a) Esboçar o lugar das raízes como uma função do ganho de malha  $K_1 K_2$ . (b) Determinar o ganho  $K_2$  necessário para se ter raízes com  $\zeta = 0,707$  quando a aeronave estiver em condição média de cruzeiro. (c) Com o ganho  $K_2$  encontrado na parte (b), determinar o  $\zeta$  das raízes quando resulta o ganho  $K_1$  a partir da condição de descida leve.

- P7.11** Um sistema de computadores requer um sistema de transporte de fita magnética de alto desempenho [17]. As condições ambientais impostas ao sistema resultam em um teste severo do projeto de engenharia de controle. Um sistema de acionamento direto com motor CC para o rolo de fita está mostrado na Fig. P7.11, onde  $r$  é igual ao raio do carretel e  $J$  é igual à inércia do carretel e do rotor. É necessário que uma reversão completa no sentido de rotação se dê em 6 ms e que o rolo de fita deva responder a um comando em degrau em 3 ms ou menos. A fita está operando normalmente a uma velocidade de 100 polegadas por segundo. O motor e os componentes selecionados para este sistema possuem as seguintes características:

$$\begin{aligned} K_b &= 0,40 & r &= 0,2 \\ K_p &= 1 & K_1 &= 2,0 \\ \tau_1 = \tau_a &= 1 \text{ ms} & K_2 & \text{é ajustável.} \\ K_T/LJ &= 2,0 \end{aligned}$$

A inércia do carretel e do rotor do motor é de  $2,5 \times 10^{-3}$  com o carretel vazio e  $5 \times 10^{-3}$  com o carretel cheio. Uma série de fotocélulas é usada como um dispositivo sensor de erro. A constante de tempo do motor é  $L/R = 0,5$  ms. (a) Esboçar o lugar das raízes do sistema quando  $K_2 = 10$  e  $J = 5,0 \times 10^{-3}$ ,  $0 < K_2 < \infty$ . (b) Determinar o ganho  $K_2$  que resulta em um sistema bem amortecido de modo que o  $\zeta$  de todas as raízes seja maior ou igual a 0,60. (c) Com o valor de  $K_2$  determinado na parte (b), esboçar o lugar das raízes para  $0 < K_2 < \infty$ .

- P7.12** Um sistema de controle de velocidade preciso (Fig. P7.12) é requerido em uma plataforma usada para testes de giroscópios e de sistemas inerciais onde é necessário uma variedade de velocidades controladas com exatidão. Foi utilizado um sistema de motor de torque CC com acionamento direto para fornecer (1) uma faixa de velocidade de 0,01/s a 600/s e (2) um erro estacionário máximo a uma entrada em degrau de 0,1%. O acionamento direto do motor de torque CC evita o uso de trem de engrenagens com os atritos e as folgas inerentes. Além disto, o motor com acionamento direto possui alta capacidade de torque, alta eficiência e pequenas constantes de tempo do motor. A constante de ganho do motor é nominalmente de  $K_m = 1,8$  mas é sujeita a variações de até 50%. O ganho do amplificador  $K_a$  é normalmente superior a 10 e sujeito a variações de 10%. (a) Determinar o valor mínimo do ganho de malha necessário para satisfazer o requisito de erro estacionário. (b) Determinar o valor limite de ganho para estabilidade. (c) Esboçar o lugar das raízes à medida que  $K_a$  varia de 0 a  $\infty$ . (d) Determinar as raízes quando  $K_a = 40$  e estimar a resposta a uma entrada em degrau.

- P7.13** Um sistema com retroação unitária possui

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)(s^2 + 4s + 7,84)}.$$

(a) Achar o ponto de saída sobre o eixo real e o ganho para este ponto. (b) Achar o ganho para fornecer duas raízes complexas mais próximas do eixo  $j\omega$  com uma relação de amortecimento de 0,707. (c) As raízes da parte (b) são dominantes? (d) Determinar o tempo de assentamento do sistema (critério dos 2%) quando se usar o ganho da parte (b).

- P7.14** A função de transferência a malha aberta de um sistema com retroação negativa monomialha é

$$GH(s) = \frac{K(s+2)(s+3)}{s^2(s+1)(s+10)(s+50)}.$$

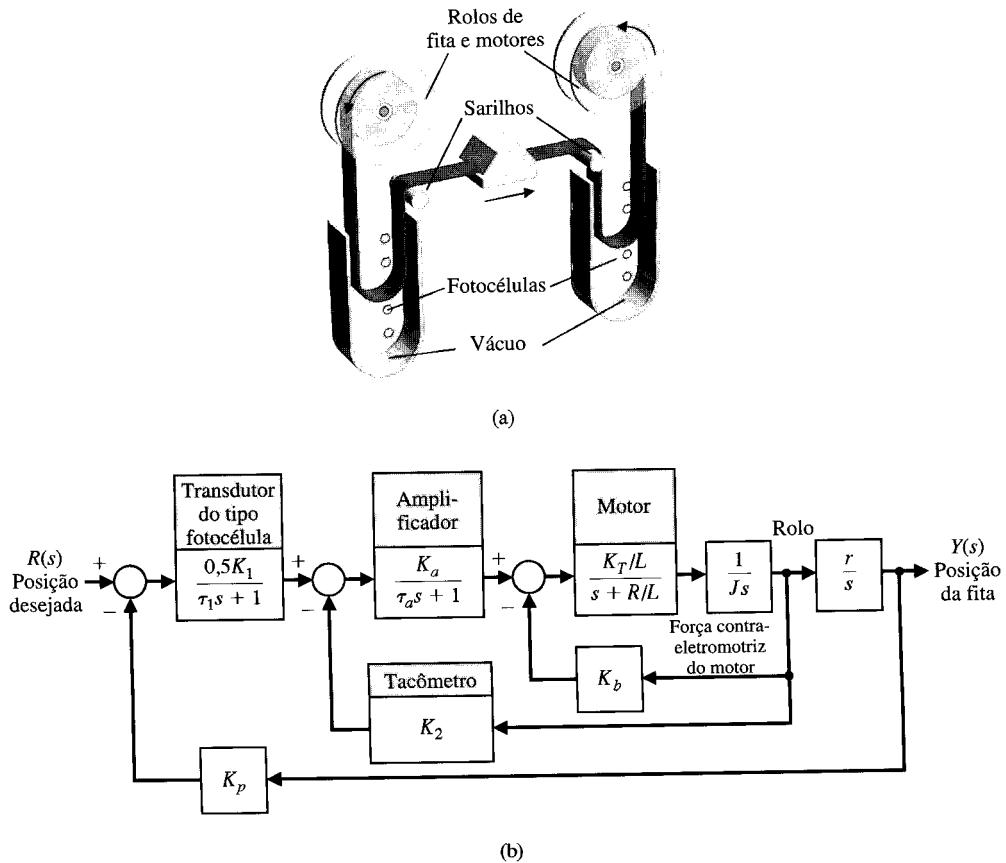


Fig. P7.11 (a) Sistema de controle de fita. (b) Diagrama de blocos.

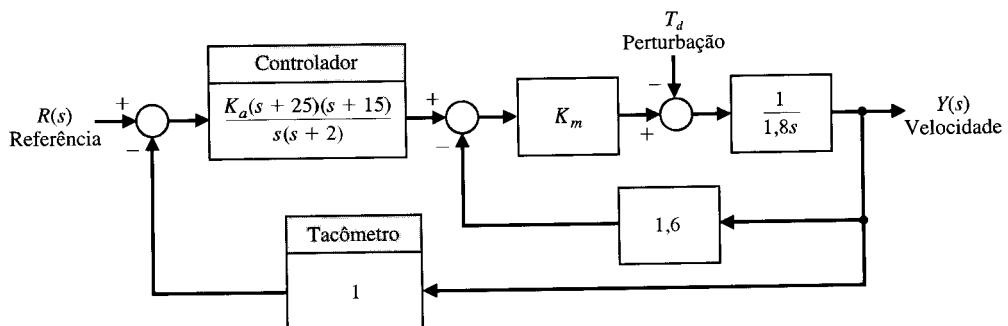


Fig. P7.12 Controle de velocidade.

Este sistema é chamado **condicionalmente estável** porque é estável somente para a seguinte faixa de valores do ganho  $K$ :  $k_1 < K < k_2$ . Usando os critérios de Routh-Hurwitz e o método do lugar das raízes, determinar a faixa de valores de ganho para a qual o sistema é estável. Esboçar o lugar das raízes para  $0 < K < \infty$ .

**P7.15** Considerar novamente a estabilidade e o deslocamento de um corredor em uma motocicleta de alto desempenho como assinalado no Problema 6.13. A dinâmica da motocicleta e do corredor pode ser representada pela função de transferência a malha aberta

$$GH(s) = \frac{K(s^2 + 30s + 625)}{s(s + 20)(s^2 + 20s + 200)(s^2 + 60s + 3400)}$$

Esboçar o lugar das raízes para o sistema; determinar o  $\zeta$  das raízes dominantes quando  $K = 3 \times 10^4$ .

**P7.16** Os sistemas de controle destinados a manter constante a tensão mecânica sobre uma chapa de aço em uma laminadora a quente são chamados de controle de alça ("loopers"). Um sistema típico está mostrado na Fig. P7.16. O controle de alça é um braço com 2 a 3 pés de comprimento com um rolo em uma das extremidades, erguido por um motor e sendo pressionado de encontro à chapa que está sendo laminada [18]. A velocidade típica de passagem da lâmina pelo controle de alça é de 2000 pés/min. Uma tensão elétrica proporcional à posição do controle de alça é comparada com uma tensão de referência e integrada onde se supõe que uma mudança na posição do controle de alça seja proporcional à tensão na chapa de aço. A constante de tempo do filtro,  $\tau$ , é desprezível em relação às outras constantes de tempo do sistema.

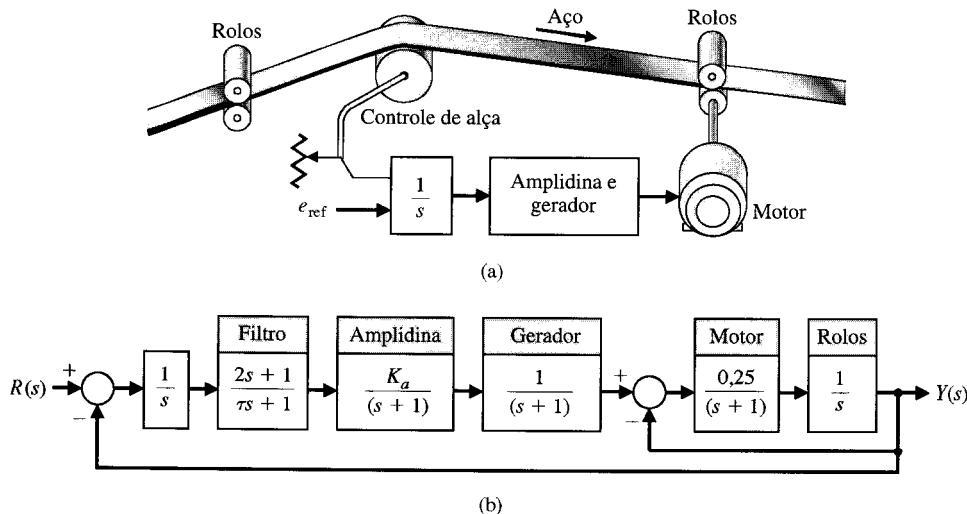


Fig. P7.16 Sistema de controle de laminador de aço.

ma. (a) Esboçar o lugar das raízes do sistema de controle para  $0 < K_a < \infty$ . (b) Determinar o ganho  $K_a$  que resulta em um sistema cujas raízes possuem uma relação de amortecimento  $\zeta = 0,707$  ou maior. (c) Determinar o efeito de  $\tau$  à medida que este aumenta deixando de ser desprezível.

**P7.17** Reconsiderar o amortecedor de vibrações discutido nos Problemas 2.2 e 2.10 como problema de projeto. Usando o método do lugar das raízes, determinar o efeito dos parâmetros  $M_2$  e  $k_{12}$ . Determinar os valores específicos dos parâmetros  $M_2$  e  $k_{12}$  de modo que a massa  $M_1$  não vibre quando  $F(t) = a \operatorname{sen} \omega_0 t$ . Admitir que  $M_1 = 1$ ,  $k_1 = 1$  e  $b = 1$ . Admitir também que  $k_{12} < 1$  e que o termo  $K_{12}^2$  possa ser desprezado.

**P7.18** Um sistema de controle com retroação está mostrado na Fig. P7.18. O filtro  $G_c(s)$  é freqüentemente chamado de compensador e o problema de projeto é o de selecionar os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . Usando o método do lugar das raízes, determinar o efeito de variar os parâmetros. Selecionar um filtro adequado de modo que o tempo de assentamento na faixa de 2% do valor final seja inferior a 4 segundos e que a relação de amortecimento das raízes dominantes seja superior a 0,60.

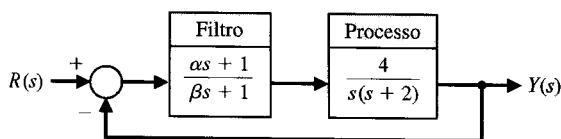


Fig. P7.18 Projeto de filtro.

**P7.19** Nos últimos anos vêm sendo utilizados nas fábricas muitos sistemas de controle automático para veículos guiados. Um desses sistemas usa um cabo guia embutido no piso para guiar o veículo ao longo da faixa de rolamento desejada [10, 15]. Um detetor de erro, constituído por duas bobinas montadas na parte da frente do carro, sente o campo magnético produzido pela corrente no cabo guia. Um exemplo de veículo guiado em uma fábrica está mostrado na Fig. P7.19(a). Tem-se

$$G(s) = \frac{K_a(s^2 + 3,6s + 81)}{s(s + 1)(s + 5)}$$

onde  $K_a$  é igual ao ganho do amplificador. (a) Esboçar um lugar das raízes e determinar um valor adequado para o ganho  $K_a$  de modo que a relação de amortecimento das raízes complexas seja 0,707. (b) Determinar a sensibilidade de raiz do sistema para a raiz complexa  $r_1$  em função de (1)  $K_a$  e (2) do polo de  $G(s)$  em  $s = -1$ .

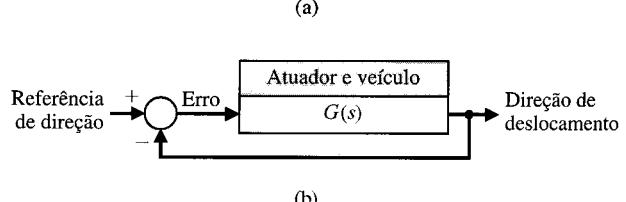
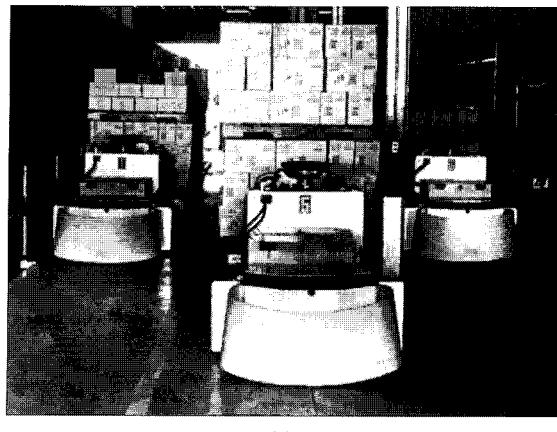


Fig. P7.19 (a) Um veículo guiado automaticamente. (Foto por cortesia de Control Engineering Corp.) (b) Diagrama de blocos.

**P7.20** Determinar a sensibilidade de raiz para as raízes dominantes do projeto relativo ao Problema 7.18 para o ganho  $K = 4\alpha/\beta$  e o polo  $s = -2$ .

**P7.21** Determinar a sensibilidade de raiz para as raízes dominantes do sistema de potência do Problema 7.7. Calcular a sensibilidade a variações (a) dos pólos em  $s = -4$  e (b) do ganho de retroação, 1/R.

**P7.22** Determinar a sensibilidade de raiz para as raízes dominantes do Problema 7.1(a) quando se faz  $K$  tal que a relação de amortecimento das raízes não perturbadas é 0,707. Calcular e comparar a sensibilidade como uma função dos pólos e zeros de  $GH(s)$ .

**P7.23** Repetir o Problema 7.22 para a função de transferência a malha aberta  $GH(s)$  do Problema 7.1(c).

**P7.24** Para sistemas de ordem relativamente elevada, a forma do lugar das raízes pode muitas vezes apresentar uma configuração inesperada. Os lugares das raízes de quatro diferentes sistemas com retroação de terceira ordem ou de ordem mais elevada estão

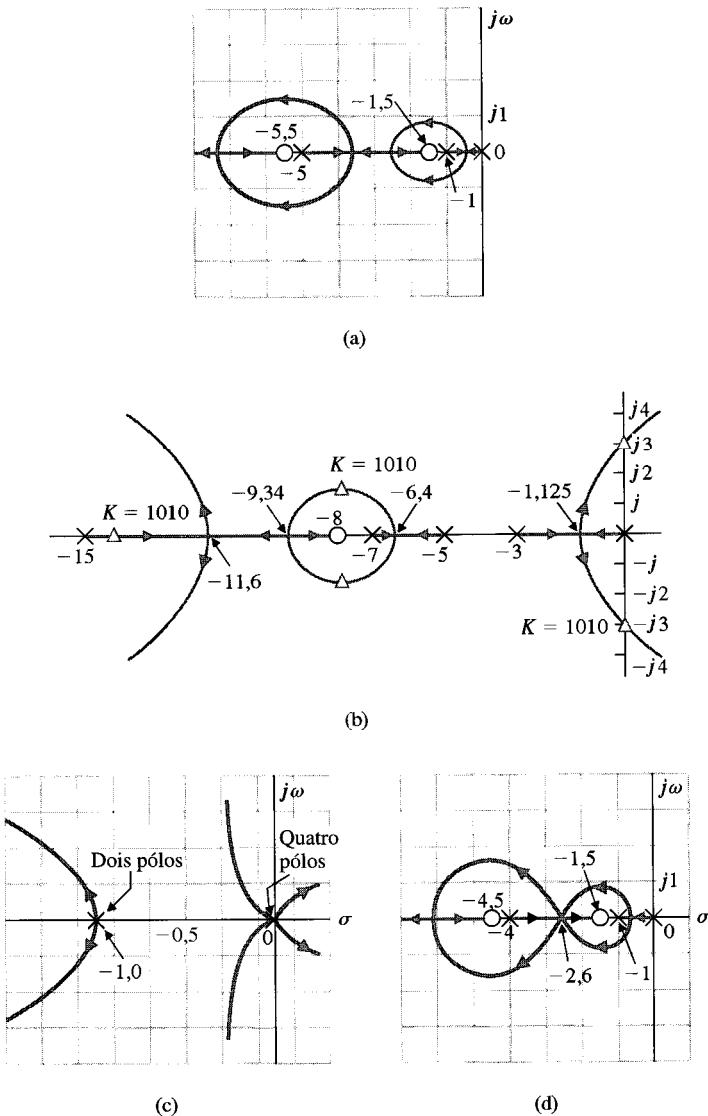


Fig. P7.24 Lugares das raízes de quatro sistemas.

mostrados na Fig. P7.24. Os pólos e zeros a malha aberta de  $KF(s)$  são mostrados e é apresentada a forma dos lugares das raízes à medida que  $K$  varia de zero a infinito. Verificar os diagramas da Fig. P7.24 construindo os lugares das raízes.

**P7.25** Circuitos eletrônicos integrados em estado sólido são compostos de elementos  $R$  e  $C$  distribuídos. Em consequência, os circuitos eletrônicos com retroação sob a forma de circuitos integrados devem ser investigados no sentido de obter a função de transferência de redes  $RC$  distribuídas. Mostrou-se que a inclinação da curva de atenuação de uma rede  $RC$  distribuída é de  $n$  3 dB/oitava, onde  $n$  é a ordem do filtro  $RC$  [13]. Esta atenuação está em contraste com a atenuação normal de  $n$  6 dB/oitava dos circuitos a parâmetros concentrados. (O conceito de inclinação de uma curva de atenuação é considerado no Cap. 8. Se o leitor não estiver familiarizado com este conceito, este problema poderá ser reexaminado após o estudo do Cap. 8.) Um caso interessante acontece quando o circuito  $RC$  distribuído ocorre em um percurso de retroação série com derivação de um amplificador a transistor. Então, a função de transferência de malha pode ser escrita como

$$GH(s) = \frac{K(s - 1)(s + 3)^{1/2}}{(s + 1)(s + 2)^{1/2}}.$$

(a) Usando o método do lugar das raízes, determinar o lugar das raízes à medida que  $K$  varia de zero a infinito. (b) Calcular o ganho no limitar da estabilidade e a frequência de oscilação para este ganho.

**P7.26** Um sistema com retroação negativa monomialha tem uma função de transferência

$$GH(s) = \frac{K(s + 2)^2}{s(s^2 + 1)(s + 8)}.$$

(a) Esboçar o lugar das raízes para  $0 \leq K \leq \infty$  para indicar os aspectos significantes do lugar. (b) Determinar a faixa de valores de ganho  $K$  para a qual o sistema é estável. (c) Para que valor de  $K$  na faixa  $K \geq 0$  existem raízes imaginárias puras? Quais os valores destas raízes? Seria justificável neste caso o uso da aproximação de raízes dominantes para estimar o tempo de assentamento para um grande valor de ganho ( $K > 50$ )?

**P7.27** Um sistema com retroação unitária negativa tem uma função de transferência

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 0,105625)}{s(s^2 + 1)} \\ = \frac{K(s + j0,325)(s - j0,325)}{s(s^2 + 1)}.$$

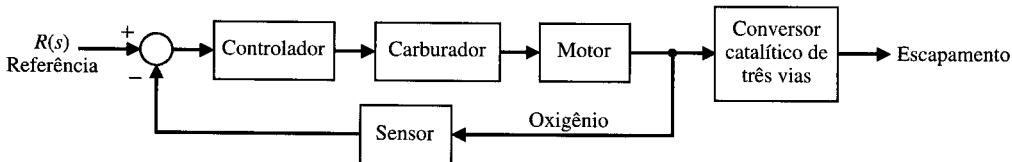


Fig. P7.28 Controle de motor de automóvel.

Esboçar o lugar das raízes como uma função de  $K$ . Calcular cuidadosamente onde os segmentos do lugar entram e saem do eixo real.

- P7.28** A fim de atender as normas que regulam nos Estados Unidos a emissão produzida pelos automóveis, as emissões de hidrocarbonetos (HC) e de monóxido de carbono (CO) são usualmente controladas por um conversor catalítico instalado no escapamento dos automóveis. Os padrões federais para emissão de óxidos de nitrogênio ( $\text{NO}_x$ ) são usualmente atendidos por meio de técnicas de recirculação dos gases de exaustão (RGE). Contudo, como os padrões de emissão de  $\text{NO}_x$  foram reduzidos dos atuais limites de 2,0 gramas por milha para 1,0 grama por milha, estas técnicas sozinhas não são mais suficientes.

Embora estejam sendo investigados muitos esquemas destinados a atender os padrões de emissão para os três tipos de emissão, um dos mais promissores emprega um conversor catalítico de três vias — para as emissões de HC, CO e  $\text{NO}_x$  — em conjunto com um sistema de controle a malha fechada do motor. A abordagem consiste em usar um sistema de controle a malha fechada para o motor, como está mostrado na Fig. P7.28 [19, 23]. O sensor do escapamento de gases dá uma indicação de uma exaustão rica ou pobre e a compara com uma referência. O sinal de diferença é processado pelo controlador e a saída do controlador modula o nível de vácuo do carburador para obter a melhor relação ar-combustível para operação adequada do conversor catalítico. A função de transferência a malha aberta é representada por

$$GH(s) = \frac{K(s + 2)(s + 7)}{s(s + 5)(s + 3)}.$$

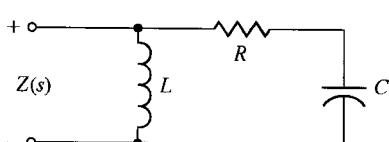
Calcular o lugar das raízes como uma função de  $K$ . Calcular cuidadosamente onde segmentos do lugar das raízes entram e saem do eixo real. Determinar as raízes quando  $K = 4$ . Prever a resposta do sistema ao degrau quando  $K = 4$ .

- P7.29** Um sistema de controle com retroação unitária possui uma função de transferência

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 6s + 12)}{s^2(s + 6)}.$$

Deseja-se que as raízes dominantes possuam uma relação de amortecimento igual a 0,707. Achar o ganho  $K$  quando esta condição é satisfeita. Mostrar que com este ganho as raízes complexas são  $s = -2,3 \pm j2,3$ .

- P7.30** Um circuito  $RLC$  está mostrado na Fig. P7.30. Os valores nominais (normalizados) dos elementos de circuito são  $L = C = 1$  e  $R = 2,5$ . Mostrar que a sensibilidade de raiz das duas raízes da impedância de entrada  $Z(s)$  a uma variação em  $R$  é diferente de um fator 4.

Fig. P7.30 Circuito  $RLC$ .

- P7.31** O desenvolvimento de aeronaves de alta velocidade e de mísseis requer informação a respeito de parâmetros aerodinâmicos que prevalecem em velocidades muito altas. Utilizam-se túneis de vento para testar estes parâmetros. Estes túneis de vento são construídos comprimindo-se o ar a pressões muito altas e liberando-o através de uma válvula para criar o vento. Como a pressão do ar cai à medida que o ar escapa, é necessário abrir mais a válvula para manter constante a velocidade do vento. É necessário, assim, um sistema de controle para ajustar a válvula a fim de manter constante a velocidade do vento. A função de transferência a malha aberta para um sistema com retroação unitária é

$$GH(s) = \frac{K(s + 4)}{s(s + 0,16)(s + p)(s + p^*)},$$

onde  $p = -7,3 + 9,7831j$ . Esboçar o lugar das raízes e mostrar a localização das raízes para  $K = 326$  e  $K = 1350$ .

- P7.32** Dispõe-se de um robô móvel para a tarefa de guarda noturno. Este guarda nunca dorme e pode patrulhar incansavelmente grandes armazéns e áreas externas. O sistema de controle de manobra para o robô móvel possui uma retroação unitária com

$$G(s) = \frac{K(s + 1)(s + 5)}{s(s + 1,5)(s + 2)}.$$

(a) Achar o valor de  $K$  para todos os pontos de entrada e de saída sobre o eixo real. (b) Achar o valor de  $K$  quando a relação de amortecimento das raízes complexas for 0,707. (c) Achar o valor mínimo da relação de amortecimento das raízes complexas e o ganho  $K$  associado. (d) Achar a ultrapassagem e o tempo de assentamento no interior de 2% do valor final para uma entrada em degrau unitário para os valores de ganho  $K$  determinados nas partes (b) e (c).

- P7.33** O Rotor Basculante Osprey V-22 da Bell-Boeing é, ao mesmo tempo, um avião e um helicóptero. Sua vantagem é a capacidade de poder girar seus motores de 90° a partir da posição vertical, como está mostrado na Fig. P7.33(a), para decolagens e poucos, e em seguida comutar os motores para uma posição horizontal de cruzeiro como um avião [20]. O sistema de controle de altitude no modo helicóptero está mostrado na Fig. P7.33(b). (a) Determinar o lugar das raízes à medida que  $K$  varia e determinar a faixa de valores de  $K$  para a qual o sistema é estável. (b) Para  $K = 280$ , encontrar a resposta real  $y(t)$  a uma entrada em degrau unitário  $r(t)$ , a ultrapassagem percentual e o tempo de assentamento (critério dos 2%). (c) Quando  $K = 280$  e  $r(t) = 0$ , encontrar  $y(t)$  para uma perturbação em degrau unitário,  $D(s) = 1/s$ . (d) Adicionar um filtro prévio entre  $R(s)$  e o nó somador de modo que

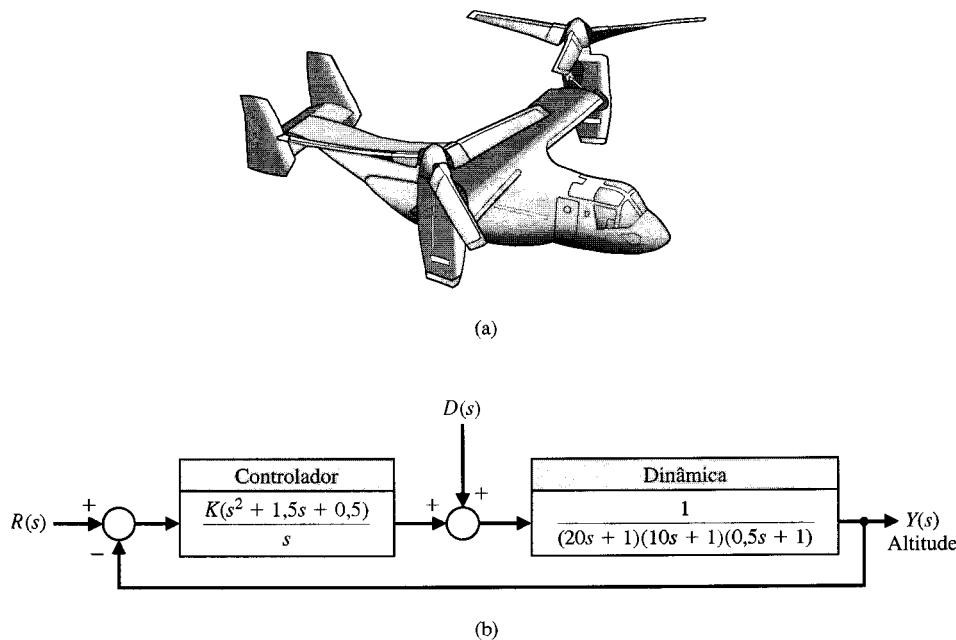
$$G_p(s) = \frac{0,5}{s^2 + 1,5s + 0,5},$$

e repetir a parte (b).

- P7.34** O controle de combustível de um automóvel usa uma bomba diesel que é sujeita a variação de parâmetros. Um sistema com retroação unitária negativa possui um processo a controlar

$$G(s) = \frac{K(s + 1,5)}{(s + 1)(s + 2)(s + 4)(s + 10)}.$$

(a) Esboçar o lugar das raízes quando  $K$  varia de 0 a 2000. (b) Encontrar as raízes para  $K$  igual a 400, 500 e 600. (c) Prever como



**Fig. P7.33** (a) Aeronave Osprey com Rotor Basculante e (b) seu sistema de controle.

a ultrapassagem percentual a um degrau irá variar com o ganho  $K$ , supondo raízes dominantes. (d) Achar a resposta real no domínio do tempo para uma entrada em degrau para todos os três valores de ganho e comparar a ultrapassagem real com a ultrapassagem prevista.

**P7.35** Uma empiladeira eletro-hidráulica potente pode ser usada para erguer material paletizado pesando várias toneladas no topo de plataformas de 35 pés em um canteiro de obras. O sistema com retroação unitária negativa possui uma função de transferência do processo a controlar

$$G(s) = \frac{K(s + 1)^2}{s(s^2 + 1)}.$$

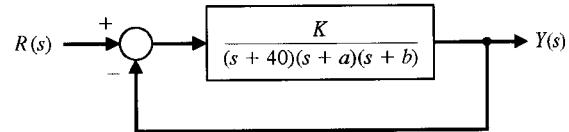
(a) Esboçar o lugar das raízes para  $K > 0$ . (b) Achar o ganho  $K$  quando duas raízes complexas têm um  $\zeta$  de 0,707 e calcular as três raízes. (c) Achar o ponto de entrada do lugar das raízes sobre o eixo real. (d) Estimar a ultrapassagem esperada para uma entrada em degrau e compará-la com a ultrapassagem real determinada a partir de um programa de computador.

**P7.36** Um microrrobô dotado de um manipulador de alto desempenho foi projetado para testar partículas muito pequenas, tais como células vivas simples [6]. O sistema com retroação negativa monomalha possui uma função de transferência de processo a controlar

$$G(s) = \frac{K(s + 1)(s + 2)(s + 3)}{s^3(s - 1)}.$$

(a) Esboçar o lugar das raízes para  $K > 0$ . (b) Achar o ganho e as raízes quando a equação característica possui duas raízes imaginárias. (c) Determinar as raízes características quando  $K = 20$  e  $K = 100$ . (d) Para  $K = 20$ , estimar a ultrapassagem percentual a uma entrada em degrau e comparar a estimativa com a ultrapassagem real determinada por meio de um programa de computador.

**P7.37** Identificar os parâmetros  $K$ ,  $a$  e  $b$  do sistema mostrado na Fig. P7.37. O sistema é submetido a uma entrada em degrau unitário e a resposta na saída possui uma ultrapassagem, mas finalmente atinge o valor final de 1. Quando o sistema a malha fechada é submetido a uma entrada em rampa, a resposta na saída segue a entrada em rampa com um erro de estado estacionário finito. Quando o ganho é duplicado para  $2K$ , a resposta na saída a uma



**Fig. P7.37** Sistema com retroação.

entrada em impulso é uma senóide pura com um período de 0,314 segundo. Determinar  $K$ ,  $a$  e  $b$ .

**P7.38** Um sistema com retroação unitária possui

$$G(s) = \frac{K(s + 1)}{s(s - 3)}.$$

Este sistema é instável a malha aberta. (a) Determinar a faixa de valores de  $K$  para a qual o sistema é estável. (b) Esboçar o lugar das raízes. (c) Determinar as raízes para  $K = 10$ . (d) Para  $K = 10$ , prever a ultrapassagem percentual para uma entrada em degrau usando a Fig. 5.13. (e) Determinar a ultrapassagem real traçando a curva da resposta.

**P7.39** Os trens de alta velocidade para as estradas de ferro dos Estados Unidos devem percorrer curvas planas e elevadas. Nos trens convencionais, os eixos são fixados em molduras de aço chamadas truques. Os truques pivotam à medida que o trem entra em uma curva, mas os eixos fixos permanecem paralelos entre si, mesmo quando o eixo dianteiro deseja seguir uma direção diferente da do eixo traseiro [24]. Se o trem estiver indo rápido, pode saltar dos trilhos. Uma solução utiliza eixos que pivotam independentemente. Para contrabalançar as grandes forças centrífugas nas curvas, o trem dispõe também de um sistema hidráulico que inclina cada um dos vagões à medida que ele entra em curva. Sensores embarcados calculam a velocidade do trem e o fechamento da curva e alimentam com esta informação bombas hidráulicas sob o piso de cada um dos vagões. As bombas inclinam o vagão cerca de até oito graus, fazendo com que entre na curva como um carro de corrida em uma pista inclinada.

O sistema de controle de inclinação está mostrado na Fig. P7.39. Esboçar o lugar das raízes e determinar o valor de  $K$  para o qual há duas raízes reais iguais e uma terceira raiz real com magnitude menor. Prever a resposta deste sistema a um degrau de entrada  $R(s)$ .

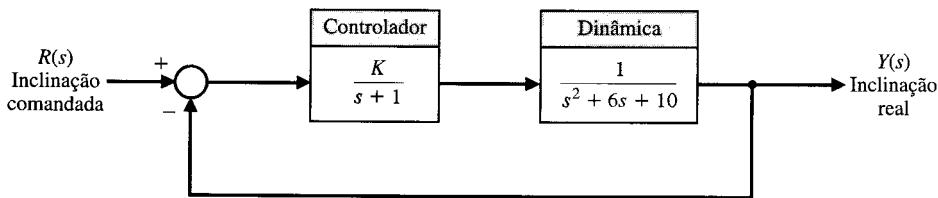
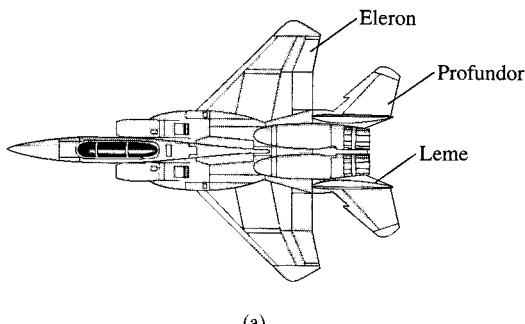


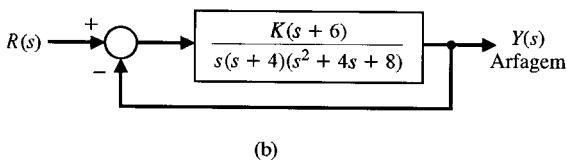
Fig. P7.39 Controle de inclinação para um trem de alta velocidade.

## PROBLEMAS AVANÇADOS

**PA7.1** A vista superior de um avião a jato de elevado desempenho está mostrada na Fig. PA7.1 [20]. Esboçar o lugar das raízes e determinar o ganho  $K$  de modo que o  $\zeta$  dos pólos complexos próximos ao eixo  $j\omega$  seja o maior possível. Calcular as raízes para este valor de  $K$  e prever a resposta a uma entrada em degrau. Determinar a resposta real e compará-la com a que foi prevista.



(a)



(b)

Fig. PA7.1 (a) Avião de alto desempenho. (b) Sistema de controle de arfagem.

**PA7.2** Um trem de alta velocidade levitando magneticamente “voa” sobre um colchão de ar acima do seu sistema de trilhos [24]. O sistema de controle do colchão de ar possui retroação unitária com um processo a controlar

$$G(s) = \frac{K(s+1)(s+3)}{s(s-1)(s+4)(s+8)}.$$

O objetivo é selecionar  $K$  de modo que a resposta a uma entrada em degrau unitário seja razoavelmente amortecida e que o tempo de assentamento seja inferior a 3 segundos. Esboçar o lugar das raízes e selecionar  $K$  de modo que todas as raízes complexas possuam um  $\zeta$  superior a 0,6. Determinar a resposta real para o valor selecionado de  $K$  e a ultrapassagem percentual.

**PA7.3** Um tocador de disco compacto para uso portátil requer boa rejeição de perturbações e uma posição exata do sensor óptico de leitura. O sistema de posição utiliza retroação unitária e uma função de transferência de processo a controlar

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+p)}.$$

O parâmetro  $p$  pode ser escolhido selecionando-se o motor CC apropriado. Esboçar o lugar das raízes em função de  $p$ . Selecione

nar  $p$  de modo que o  $\zeta$  das raízes complexas da equação característica seja aproximadamente  $1/\sqrt{2}$ .

**PA7.4** O sistema de controle de um manipulador remoto possui retroação unitária e um processo a controlar

$$G(s) = \frac{(s+\alpha)}{s^3 + (1+\alpha)s^2 + (\alpha-1)s + 1 - \alpha}.$$

Deseja-se que o erro estacionário de posição a uma entrada em degrau seja menor ou igual a 10% da magnitude da entrada. Esboçar o lugar das raízes em função do parâmetro  $\alpha$ . Determinar a faixa de valores de  $\alpha$  requerida para o erro de estado estacionário desejado. Localizar as raízes para o valor admissível de  $\alpha$  para atender o erro de estado estacionário requerido e estimar a resposta do sistema ao degrau.

**PA7.5** Um sistema com retroação unitária possui um processo a controlar

$$G(s) = \frac{K}{s^3 + 10s^2 + 7s - 18}.$$

(a) Esboçar o lugar das raízes e determinar  $K$  para se ter um sistema estável de raízes complexas com um  $\zeta$  igual a  $1/\sqrt{2}$ . (b) Determinar a sensibilidade de raiz das raízes complexas da parte (a). (c) Determinar a variação percentual em  $K$  (aumento ou redução) de modo que as raízes fiquem situadas sobre o eixo  $j\omega$ .

**PA7.6** Um sistema com retroação unitária possui um processo a controlar

$$G(s) = \frac{K(s^2 + 3s + 3,25)}{s^2(s+1)(s+10)(s+20)}.$$

Esboçar o lugar das raízes para  $K > 0$  e escolher um valor de  $K$  para o qual o sistema forneça uma resposta ao degrau aceitável.

**PA7.7** Um sistema com retroação positiva é mostrado na Fig. PA7.7. O lugar das raízes para  $K > 0$  deve atender a condição

$$KG(s) = 1 / \pm k360^\circ$$

para  $k = 0, 1, 2, \dots$

Esboçar o lugar das raízes para  $0 < K < \infty$ .

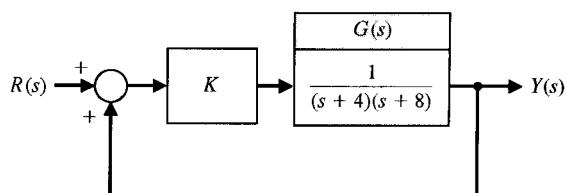


Fig. PA7.7 Sistema a malha fechada com retroação positiva.

**PA7.8** Um sistema de controle de posição para um motor CC está mostrado na Fig. PA7.8. Obter o lugar das raízes para a constante  $K$  de retroação de velocidade e selecionar o ganho  $K$  de modo que todas as raízes da equação característica sejam reais (duas

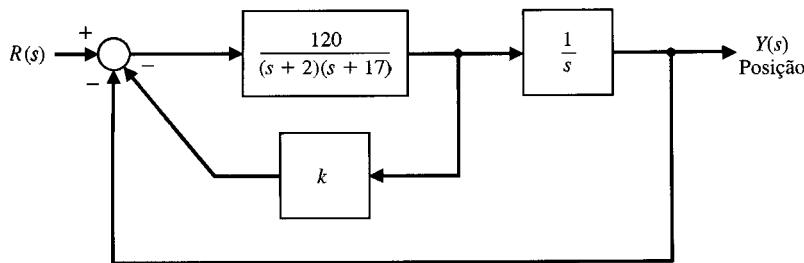


Fig. PA7.8 Sistema de controle de posição com retroação de velocidade.

são reais e iguais). Estimar a resposta do sistema ao degrau para o valor de  $K$  escolhido. Comparar a resposta estimada com a real.

**PA7.9** Um sistema de controle está mostrado na Fig. PA7.9. Esboçar os lugares das raízes para as seguintes funções de transferência  $G_c(s)$ :

- $G_c(s) = K$
- $G_c(s) = K(s + 1)$
- $G_c(s) = \frac{K(s + 1)}{(s + 10)}$
- $G_c(s) = \frac{K(s + 1)(s + 3)}{(s + 10)}$

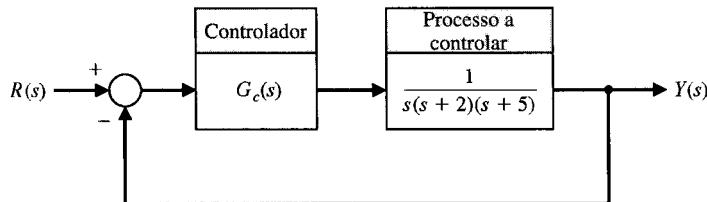


Fig. PA7.9

**PA7.10** Um sistema com retroação está mostrado na Fig. PA7.10. Esboçar o lugar das raízes à medida que  $K$  varia quando  $K \geq 0$ . Determinar um valor de  $K$  para o qual a resposta ao degrau apresente uma ultrapassagem inferior a 5% e um tempo de assentamento (critério dos 2%) inferior a 2,5 segundos.

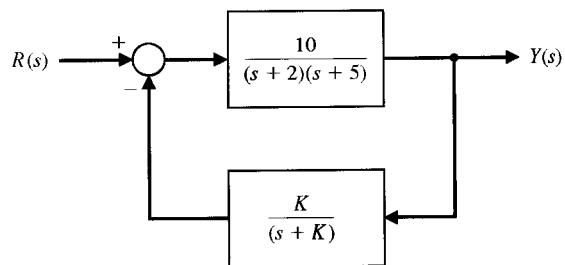


Fig. PA7.10

**PA7.11** Reconsiderar o projeto da motocicleta com robô descrito no Projeto 6.6. Traçar o gráfico do lugar das raízes para  $K > 0$  e selecionar um valor de  $K$  que resulte em desempenho estacionário em presença de perturbações.

**PA7.12** Um sistema de controle está mostrado na Fig. PA7.12. Esboçar o lugar das raízes e selecionar um ganho  $K$  para o qual a resposta ao degrau apresente uma ultrapassagem inferior a 20% e o tempo de assentamento (critério dos 2%) inferior a 5 segundos.

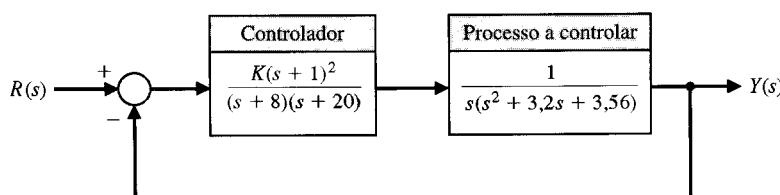


Fig. PA7.12

## PROBLEMAS DE PROJETO

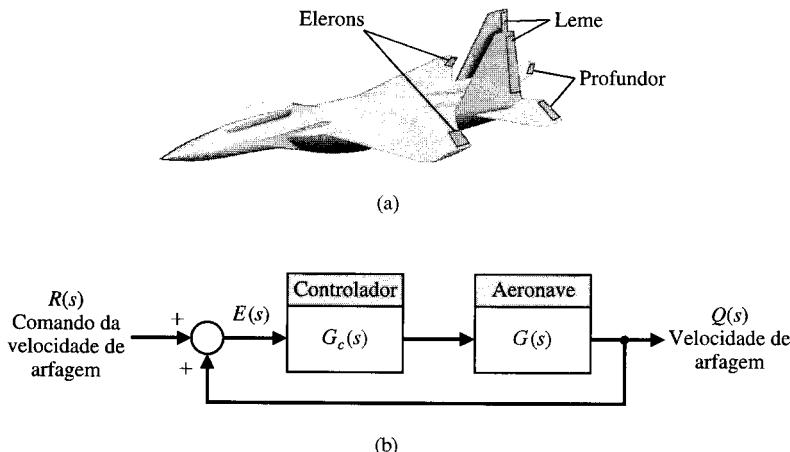
**PPC7.1** O motor de acionamento e o sistema deslizante usam a saída de um tacômetro montado no eixo do motor como está mostrado na Fig. PPC4.1 (opção com a chave fechada). A tensão elétrica de saída do tacômetro é  $v_T = K_1\theta$ . Usar a retroação de velocidade com o ganho  $K_1$  ajustável. Selecionar os melhores valores de ganho  $K_1$  e de ganho  $K_a$  do amplificador de modo que a resposta transitória a uma entrada em degrau apresente uma ultrapassagem inferior a 5% e um tempo de assentamento no interior da faixa de 2% do valor final inferior a 300 ms.

**PP7.1** Um avião de alto desempenho, mostrado na Fig. PP7.1(a), usa eleron, leme e profundores para manobrar ao longo de uma trajetória de vôo tridimensional [20]. O sistema de controle de ve-

locidade de arfagem para um avião de combate a 10.000 m e Mach 0,9 pode ser representado pelo sistema da Fig. PP7.1(b), onde

$$G(s) = \frac{-18(s + 0,015)(s + 0,45)}{(s^2 + 1,2s + 12)(s^2 + 0,01s + 0,0025)}$$

(a) Esboçar o lugar das raízes quando o controlador é um ganho, tal que  $G_c(s) = K$  e determinar  $K$  quando o  $\zeta$  para as raízes com  $\omega_n > 2$  for maior que 0,15 (procurar um valor máximo para  $\zeta$ ). (b) Traçar a curva da resposta,  $q(t)$ , a uma entrada em degrau  $r(t)$  com



**Fig. PP7.1** (a) Aeronave de alto desempenho. (b) Sistema de controle de velocidade de arfagem.

o valor de  $K$  da parte (a). (c) Um projetista sugere um controlador antecipativo de modo que  $G_c(s) = K_1 + K_2 s = K(s + 2)$ . Esboçar o lugar das raízes para este sistema à medida que  $K$  varia e determinar um valor de  $K$  de modo que o  $\zeta$  de todas as raízes a malha fechada seja  $> 0,8$ . (d) Traçar o gráfico da resposta,  $q(t)$ , para uma entrada em degrau  $r(t)$  com o valor de  $K$  do item (c).

**PP7.2** Um helicóptero de grande porte usa dois rotores conjugados girando em sentidos opostos, como está mostrado na Fig. P7.33(a). O controlador ajusta o ângulo de inclinação do rotor principal e, em decorrência, o movimento para frente, como está mostrado na Fig. PP7.2. A dinâmica do helicóptero é representada por

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 4,5s + 9},$$

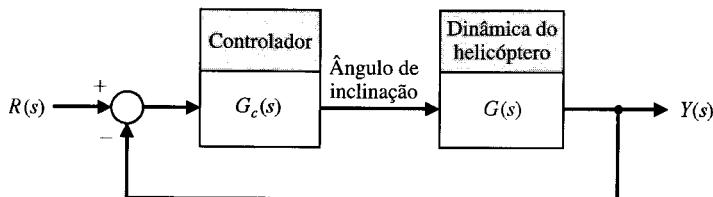
e o controlador é selecionado como

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} = \frac{K(s + 1)}{s}.$$

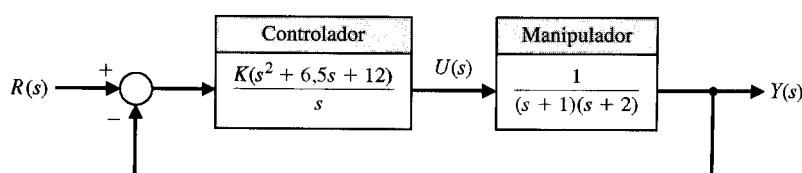
(a) Esboçar o lugar das raízes e determinar  $K$  quando  $\zeta$  das raízes complexas é igual a 0,6. (b) Traçar o gráfico da resposta do sistema a uma entrada em degrau  $r(t)$  e achar o tempo de assentamento (critério dos 2%) e a ultrapassagem para o sistema da parte (a). Qual é o erro de estado estacionário para uma entrada em degrau? (c) Repetir as partes (a) e (b) quando o  $\zeta$  das raízes complexas for 0,41. Comparar os resultados com os obtidos nas partes (a) e (b).

**PP7.3** O veículo Explorador foi projetado para manobrar a 0,25 mph sobre o solo marciano. Como Marte fica a 189 milhões de milhas da Terra e levaria até cerca de 40 minutos para se comunicar com a Terra [22, 27], o Explorador deverá agir de forma independente e confiável. Lembrando uma mistura de pequeno caminhão achataido com um jipe dotado de macacos mecânicos, o Explorador será construído com três seções articuladas, cada uma das quais com suas próprias rodas cônicas de um metro, com dois eixos independentes. Um par de braços para colher amostras — um para cortar e perfurar e outro para manipular objetos delicados — se projetam à frente da extremidade dianteira como pinças. O controle dos braços pode ser representado pelo sistema mostrado na Fig. PP7.3. (a) Esboçar o lugar das raízes para  $K$  e identificar as raízes para  $K = 4,1$  e 41. (b) Determinar o ganho  $K$  que resulta em uma ultrapassagem a um degrau de aproximadamente 1%. (c) Determinar o ganho que minimiza o tempo de assentamento (critério dos 2%) mantendo uma ultrapassagem inferior a 1%.

**PP7.4** Um maçarico de solda é controlado remotamente para obter alta precisão enquanto opera em ambientes variáveis e perigosos [21]. Um modelo do sistema de controle de posição do braço de soldagem está mostrado na Fig. PP7.4 com a perturbação representando as mudanças ambientais. (a) Com  $D(s) = 0$ , selecionar  $K_1$  e  $K$  para fornecer um sistema de controle de posição com desempenho de alta qualidade. Selecionar um conjunto de critérios de desempenho e examinar os resultados do projeto. (b) Para o sistema da parte (a), fazer  $R(s) = 0$  e determinar o efeito de um degrau unitário  $D(s) = 1/s$  através da obtenção de  $y(t)$ .



**Fig. PP7.2** Controle de velocidade de helicóptero com dois rotores.



**Fig. PP7.3** Sistema de controle de veículo robô para Marte.

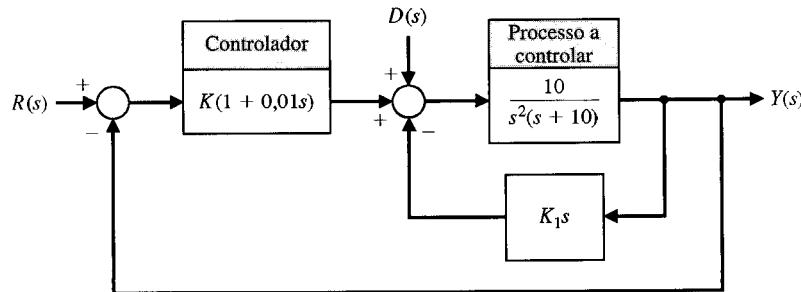


Fig. PP7.4 Soldador controlado remotamente.

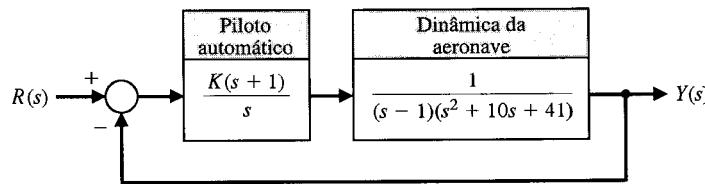


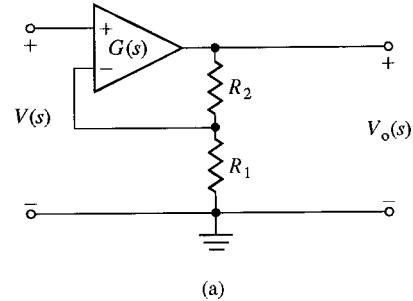
Fig. PP7.5

**PP7.5** Um avião a jato de alto desempenho com piloto automático possui um sistema de controle com retroação unitária como está mostrado na Fig. PP7.5. Esboçar o lugar das raízes e prever a resposta do sistema a uma entrada em degrau. Determinar a resposta real do sistema e compará-la com a previsão.

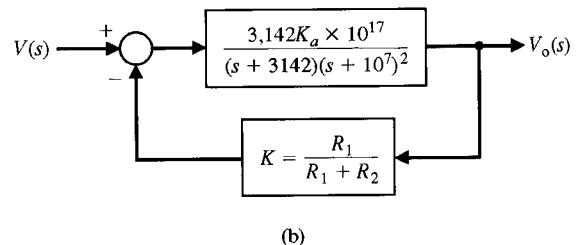
**PP7.6** Um sistema para auxiliar e controlar a caminhada de uma pessoa parcialmente deficiente poderia usar o controle automático do movimento de andar [25]. Um modelo de um sistema em que a malha aberta é instável está mostrado na Fig. PP7.6. Usando o lugar das raízes, escolha  $K$  para obter o maior valor possível de  $\zeta$  para as raízes complexas. Prever a resposta do sistema a uma entrada em degrau e compará-la com a resposta real do sistema a uma entrada em degrau.

**PP7.7** A maioria dos amplificadores operacionais comerciais são projetados para ser estáveis com ganho unitário [26]. Isto é, são estáveis quando usados em uma configuração de ganho unitário. Para obter uma banda passante elevada, alguns amplificadores operacionais abandonam o requisito de ser estável com ganho unitário. Um tal amplificador possui um ganho CC de  $10^5$  e uma banda passante de 10 kHz. O amplificador,  $G(s)$ , é conectado no circuito de retroação mostrado na Fig. PP7.7(a). O amplificador é representado pelo modelo mostrado na Fig. PP7.7(b), onde  $K_a = 10^5$ . Esboçar o lugar das raízes do sistema em função de  $K$ . Determinar o valor mínimo do ganho CC do amplificador a malha fechada para se ter estabilidade. Selecionar um ganho CC e os resistores  $R_1$  e  $R_2$ .

**PP7.8** Um braço robótico acionado através da junta do cotovelo está mostrado na Fig. PP7.8(a) e o sistema de controle para o atuador está mostrado na Fig. PP7.8(b). Traçar o lugar das raízes para  $K \geq 0$ . Escolher  $G_p(s)$  tal que o erro estacionário a uma entrada em degrau seja zero. Usando o  $G_p(s)$  escolhido, traçar o gráfico de  $y(t)$  para  $K$  igual a 1, a 1,5 e 2,85. Registrar o tempo de subida, o tempo de



(a)



(b)

Fig. PP7.7 (a) Circuito com amplificador operacional e (b) sistema de controle.

assentamento (critério dos 2%) e a ultrapassagem percentual para os três valores de ganho. Deseja-se limitar a ultrapassagem a menos de 6% ao mesmo tempo em que se deseja o menor tempo de subida possível. Selecionar o melhor sistema para  $1 \leq K \leq 2,85$ .

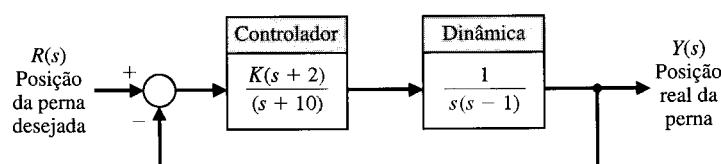
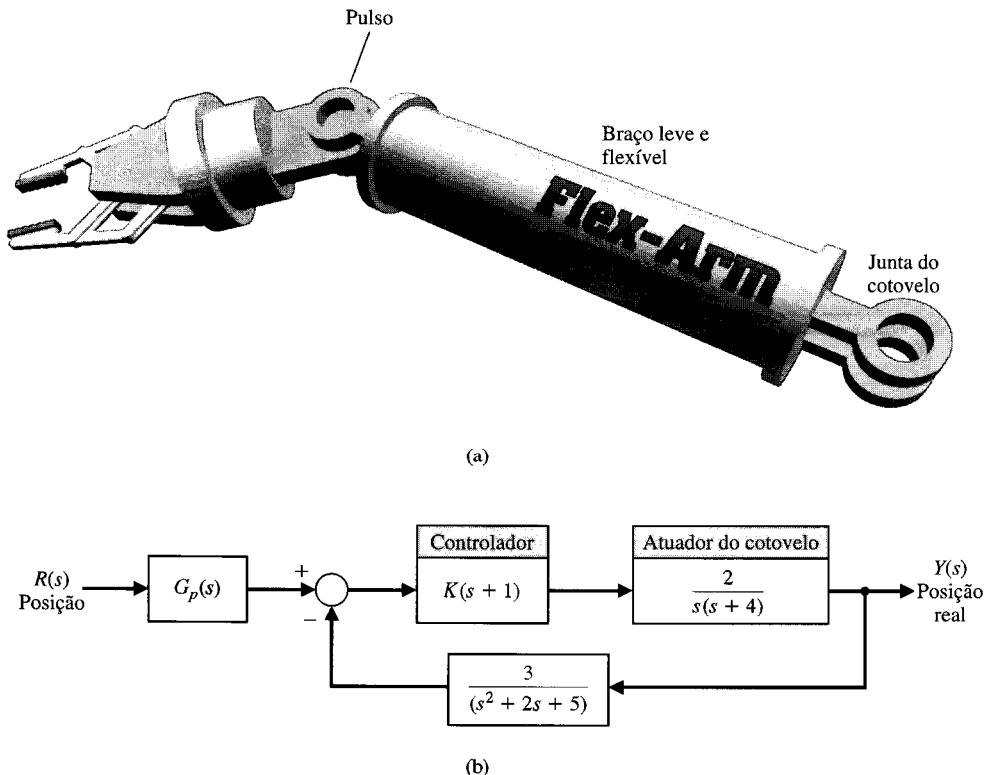


Fig. PP7.6



**Fig. PP7.8** (a) Um braço robótico com atuador na junta do cotovelo e (b) seu sistema de controle.

**PP7.9** O automóvel com direção nas quatro rodas apresenta várias vantagens. O sistema dá ao motorista um maior grau de controle sobre o veículo. O motorista obtém um veículo com maior capacidade de adaptação a uma ampla variedade de condições. O sistema capacita o motorista a fazer mudanças de faixa mais rápidas e suaves. O sistema também evita derrapagens, que é a saída da traseira do veículo para os lados durante movimentos bruscos. Além disto, o sistema com direção nas quatro rodas dá ao carro uma maior manobrabilidade. Isto permite ao motorista estacionar o carro em vagas extremamente exíguas. Com sistemas operacionais computadorizados a malha fechada adicionais, o carro pode evitar sair de controle em condições anormais de tráfego em estradas molhadas ou com gelo.

O sistema funciona movimentando as rodas traseiras com relação ao ângulo de direção das rodas dianteiras. O sistema de controle capta informação a respeito do ângulo de direção das rodas dianteiras e passa esta informação ao atuador na traseira. Este atuador move as rodas traseiras de forma adequada.

Quando se dá às rodas traseiras um ângulo de direção em relação à da frente, o veículo pode variar sua resposta em aceleração lateral segundo a função de transferência

$$G(s) = K \frac{1 + (1 + \lambda)T_1 s + (1 + \lambda)T_2 s^2}{s[1 + (2\zeta/\omega_n)s + (1/\omega_n^2)s^2]},$$

onde  $\lambda = 2q/(1 - q)$ , e  $q$  é a relação entre a orientação angular da roda traseira e a orientação angular da roda dianteira [14]. Será suposto que  $T_1 = T_2 = 1$  segundo e  $\omega_n = 4$ . Projetar um sistema com retroação unitária para  $G(s)$ , selecionando um conjunto apropriado de parâmetros ( $\lambda, K, \zeta$ ) de modo que a resposta do controle de direção seja rápida e contudo apresente características modestas de ultrapassagem. Além disto,  $q$  deve ser entre 0 e 1.

**PP7.10** O controle de pilotagem de um guindaste está mostrado na Fig. PP7.10(a). O trole é movimentado por meio de uma entrada  $F(t)$  a fim de controlar  $x(t)$  e  $\phi(t)$  [13]. O modelo do controle de

pilotagem do guindaste está mostrado na Fig. PP7.10(b). Projetar um controlador que consiga controlar as variáveis desejadas quando  $G_c(s) = K$ .

**PP7.11** Um veículo explorador projetado para uso em outros planetas e luas está mostrado na Fig. PP7.11(a) [21]. O diagrama de blocos do controle de direção está mostrado na Fig. PP7.11(b), onde

$$G(s) = \frac{(s + 1,5)}{(s + 1)(s + 2)(s + 4)(s + 10)}.$$

(a) Quando  $G_c(s) = K$ , esboçar o lugar das raízes à medida que  $K$  varia de 0 a 1000. Achar as raízes para  $K$  igual a 100, 300 e 600. (b) Prever a ultrapassagem, o tempo de assentamento (critério dos 2%) e o erro de estado estacionário a uma entrada em degrau, supondo raízes dominantes. (c) Determinar a resposta real no domínio do tempo a uma entrada em degrau para os três valores do ganho  $K$  e comparar os resultados reais com os resultantes da previsão.

**PP7.12** Os sistemas eletrônicos constituem atualmente cerca de 6% do valor de um carro. Este número subirá para 20% por volta do ano 2000, uma vez que os freios antibloqueio, as suspensões ativas e outras tecnologias dependentes de computadores estão entrando em plena produção. Muito da potência computacional agregada será usada em novas tecnologias para carros e estradas inteligentes, ou seja, nos sistemas IVHS (*intelligent vehicle/highway systems*) [14]. O termo se refere a uma coleção variada de dispositivos eletrônicos que fornecem informação em tempo real sobre acidentes, engarrafamentos, roteiros e serviços de estrada a motoristas e controladores de tráfego. O IVHS também engloba dispositivos que tornariam os veículos mais autônomos: sistemas de prevenção de colisão e tecnologia de rastreamento de pista de rolamento que alertam os motoristas para impedir desastres ou que permitem aos carros se guiarem autonomamente.

Um exemplo de sistema de automatização de auto-estrada está mostrado na Fig. PP7.12(a). Um sistema de controle de

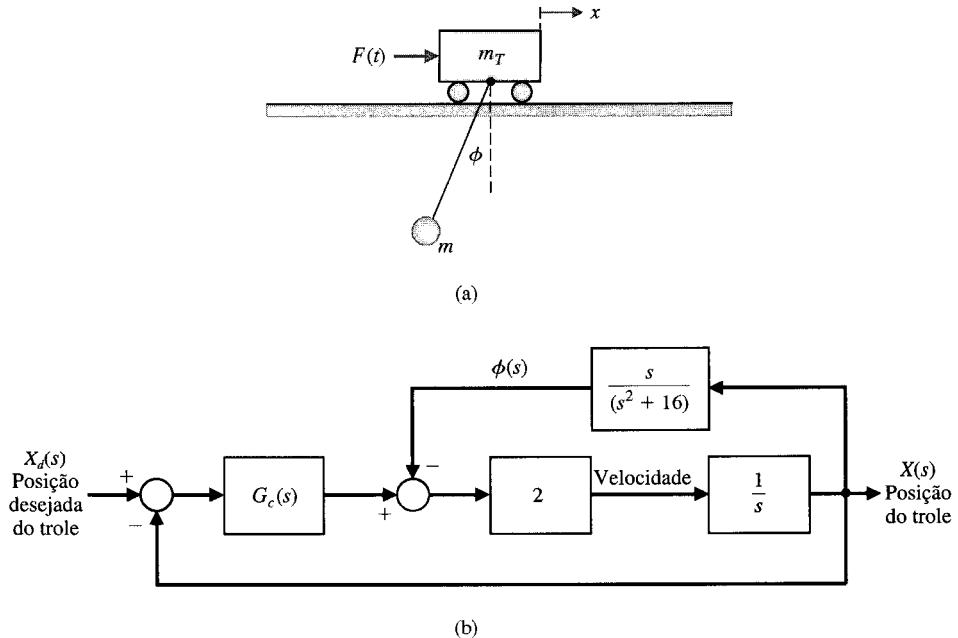


Fig. PP7.10 (a) Sistema de controle de um guindaste piloto; (b) diagrama de blocos.

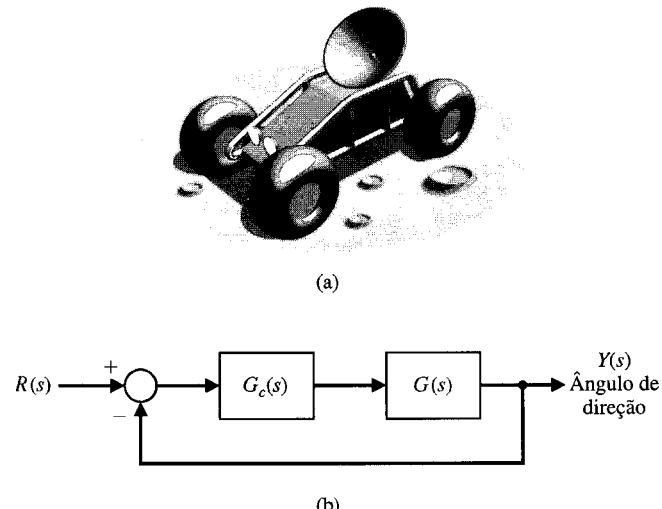


Fig. PP7.11 (a) Veículo explorador planetário. (b) Sistema de controle de direção.

posição para manter a distância entre veículos está mostrado na Fig. PP7.12(b). Selecionar  $K_a$  e  $K_1$  de modo que o erro estacionário a uma entrada em rampa seja menor que 25% da magnitude entrada,  $A$ , da rampa  $R(s) = A/s^2$ . A resposta a um comando em degrau deve ter uma ultrapassagem menor que 3% e um tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 1,5 segundo.

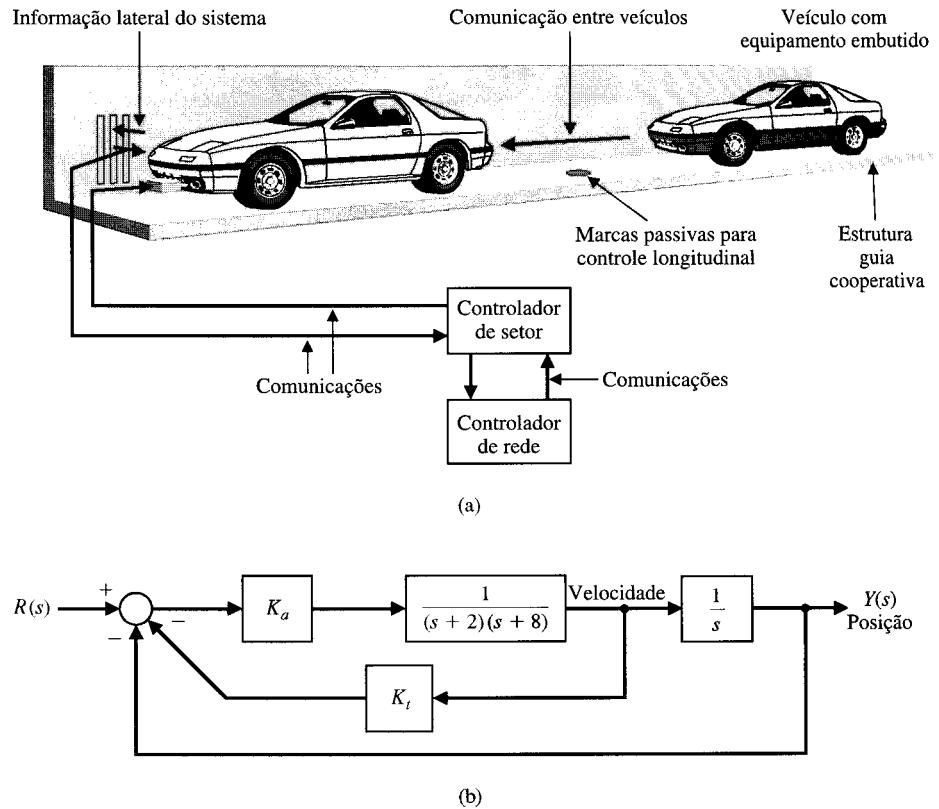
**PP7.13** O sistema de controle automático de um aeroplano é um exemplo que requer métodos de retroação multivariáveis. Neste sistema, a atitude de uma aeronave é controlada por meio de três conjuntos de superfícies: profundores, leme e elerons, como está mostrado na Fig. PP7.13(a). Manipulando estas superfícies, um piloto pode colocar o avião em uma trajetória de vôo desejada [20].

Um piloto automático, que será considerado aqui, é um sistema de controle automático que controla o ângulo de rolagem  $\phi$  ajustando as superfícies dos elerons. A deflexão das

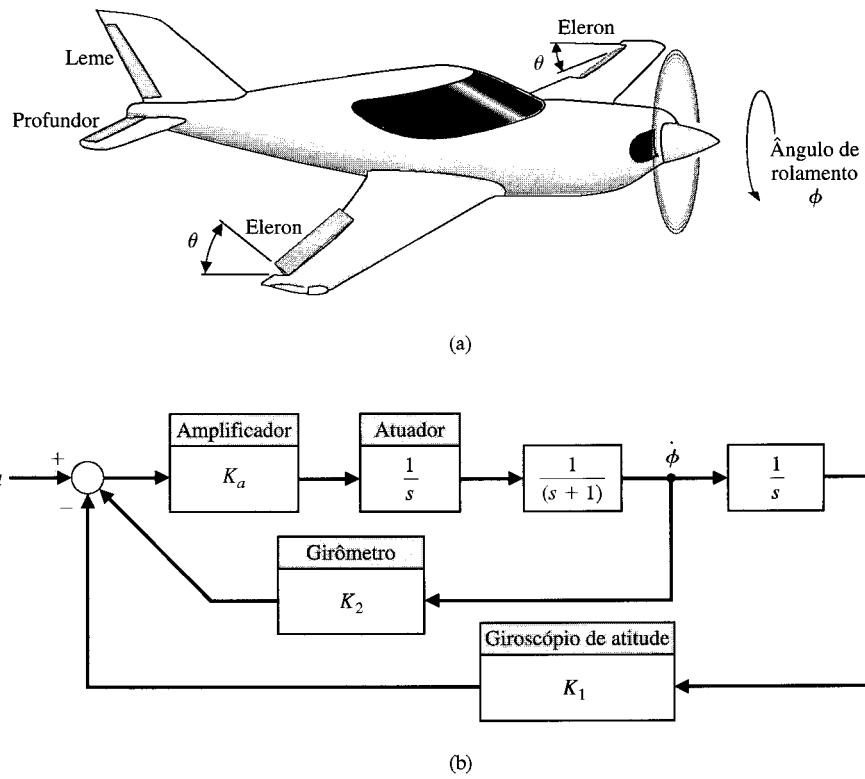
superfícies dos elerons de um ângulo  $\theta$  gera um torque devindo à pressão do ar sobre estas superfícies. Isto ocasiona um movimento de rolagem da aeronave. As superfícies dos elerons são controladas por um atuador hidráulico com função de transferência  $1/s$ .

O ângulo real  $\phi$  de rolagem é medido e comparado com a entrada. A diferença entre o ângulo de rolagem desejado  $\phi_d$  e o ângulo real  $\phi$  acionará o atuador hidráulico, que por sua vez ajusta a deflexão da superfície do eleron.

Adota-se um modelo simplificado no qual o movimento de rolagem pode ser considerado independente dos outros movimentos, e seu diagrama de blocos está mostrado na Fig. PP7.13(b). Admitir que  $K_1 = 1$  e que a velocidade de rolagem  $\dot{\phi}$  é enviada como retroação usando-se um girômetro. A resposta a um degrau desejada possui uma ultrapassagem inferior a 10% e um tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 9 segundos. Selecionar os parâmetros  $K_a$  e  $K_2$ .



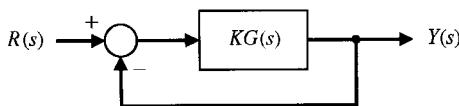
**Fig. PP7.12** (a) Sistema de auto-estrada automatizada. (b) Sistema de controle de distância entre veículos.



**Fig. PP7.13** (a) Um aeroplano com um conjunto de elerons. (b) O diagrama de blocos para o controle da velocidade de rolamento do aeroplano.

## PROBLEMAS COM MATLAB

**PM7.1** Usando a função `rlocus`, obter o lugar das raízes para as seguintes funções de transferência do sistema mostrado na Fig. PM7.1, quando  $0 < K < \infty$ .



**Fig. PM7.1** Um sistema de malha única com retroação com o parâmetro  $K$ .

$$(a) G(s) = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 6s + 1}$$

$$(b) G(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 1}$$

$$(c) G(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s(s^2 + 4s + 6)}$$

$$(d) G(s) = \frac{s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 8s^2 + 6s + 4}{s^6 + 2s^5 + 2s^4 + s^3 + s^2 + 10s + 1}$$

**PM7.2** Um sistema com retroação unitária negativa possui a função de transferência a malha aberta

$$KG(s) = K \frac{(s^2 - 2s + 2)}{s(s^2 + 3s + 2)}$$

Usando o MATLAB traçar o gráfico do lugar das raízes e mostrar com a função `rlocfind` que o máximo valor de  $K$  para um sistema estável é  $K = 0,79$ .

**PM7.3** Calcular a expansão em frações parciais de

$$Y(s) = \frac{s + 2}{s(s^2 + 4s + 3)}$$

e verificar o resultado com o MATLAB usando a função `residue`.

**PM7.4** Um sistema com retroação unitária negativa possui a função de transferência a malha aberta

$$G(s) = \frac{(1 + p)s - p}{s^2 + 3s + 6}$$

Usando o MATLAB traçar o gráfico do lugar das raízes à medida que  $p$  varia;  $0 < p < \infty$ . Para que valores de  $p$ , o sistema a malha fechada é estável?

**PM7.5** Considerar o sistema com retroação mostrado na Fig. PM7.1, onde

$$G(s) = \frac{s + 1}{s^2}$$

Para que valores de  $K$ , os pólos dominantes possuem um  $\zeta = 0,707$ ?

**PM7.6** Considerar o sistema com retroação na Fig. PM7.6. Há três controladores potenciais para o sistema:

(1)  $G_c(s) = K$  <controlador proporcional>

(2)  $G_c(s) = K/s$  <controlador integral>

(3)  $G_c(s) = K(1 + 1/s)$  <controlador proporcional, integral controlador (PI)>

As especificações de projeto são  $T_s \leq 10$  segundos e  $M_p \leq 10\%$  para uma entrada em degrau unitário.

(a) Para o controlador proporcional, esboçar o lugar das raízes usando o MATLAB para  $0 < K < \infty$  e determinar o valor de  $K$  tal que as especificações sejam satisfeitas.

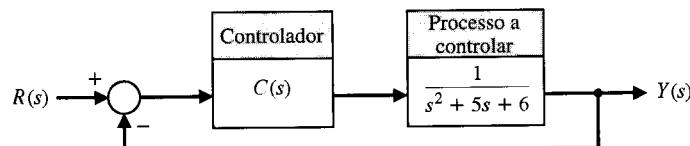
(b) Repetir a parte (a) para o controlador integral.

(c) Repetir a parte (a) para o controlador PI.

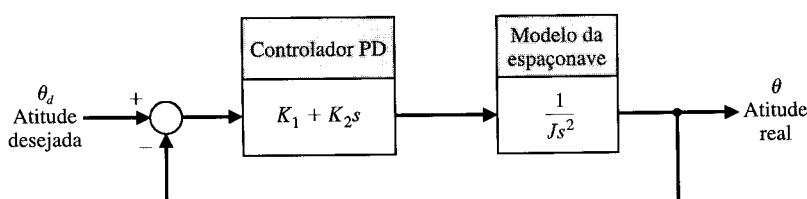
(d) Traçar, em um mesmo diagrama, os gráficos das respostas ao degrau unitário dos sistemas a malha fechada com cada um dos controladores projetados nas partes (a) a (c).

(e) Comparar e contrastar os três controladores obtidos nas partes (a) a (c), concentrando a discussão nos erros de estado estacionário e no desempenho transitório.

**PM7.7** Considerar o sistema de controle de atitude de um único eixo da aeronave mostrado na Fig. PM7.7. O controlador é conhecido como um controlador proporcional-derivativo (PD). Supor que se requer uma relação  $K_1/K_2 = 5$ . Então, usando os métodos do lugar das raízes no MATLAB, achar os valores de  $K_1/J$  e  $K_2/J$  tais que o tempo de assentamento,  $T_s$ , seja menor ou igual a 4 segundos e que o pico de ultrapassagem,  $M_p$ , seja menor ou igual a 10% para uma entrada em degrau unitário. Usar o critério dos 2% na determinação do tempo de assentamento.



**Fig. PM7.6** Sistema de controle com retroação com uma única malha e com controlador  $G_c(s)$ .



**Fig. PM7.7** Sistema de controle de atitude de uma espaçonave com um controlador proporcional derivativo.

## TERMOS E CONCEITOS

---

**Ângulo de partida** O ângulo segundo o qual o lugar das raízes deixa um pôlo complexo no plano  $s$ .

**Assíntota** O percurso que o lugar das raízes segue quando o valor do parâmetro se torna muito grande e tende a infinito. O número de assíntotas é igual ao número de pôlos menos o número de zeros.

**Centróide das assíntotas** O centro das retas assíntotas,  $\sigma_A$ .

**Lugar** Um percurso ou trajetória que é traçado à medida que um parâmetro varia.

**Lugar das raízes** O lugar ou o percurso das raízes traçado no plano  $s$  à medida que um parâmetro tem seu valor alterado.

**Método do lugar das raízes** O método para determinar o lugar das raízes da equação característica  $1 + KP(s) = 0$  à medida que  $K$  varia de zero a infinito.

**Número de ramos distintos** Igual ao número de pôlos da função de transferência, supondo que o número de pôlos seja maior ou igual ao número de zeros da função de transferência.

**Ponto de saída** O ponto sobre o eixo real onde o lugar das raízes deixa o eixo real do plano  $s$ .

**Projeto de parâmetro** Um método para selecionar um ou dois parâmetros usando a técnica do lugar das raízes.

**Segmentos do lugar das raízes sobre o eixo real** O lugar das raízes que está em uma seção do eixo real à esquerda de um número ímpar de pôlos e zeros.

**Sensibilidade a raiz** A sensibilidade às raízes à medida que um parâmetro muda de valor a partir do seu valor nominal. A sensibilidade a raiz é a variação incremental na raiz dividida pela variação proporcional no valor do parâmetro.

## CAPÍTULO 8

# Métodos de Resposta de Freqüência

- 8.1 Introdução
- 8.2 Gráficos de Resposta de Freqüência
- 8.3 Um Exemplo de Desenho do Diagrama de Bode
- 8.4 Medidas de Resposta de Freqüência
- 8.5 Especificações de Desempenho no Domínio de Freqüência
- 8.6 Diagramas Logarítmicos e de Magnitude Fase
- 8.7 Exemplo de Projeto: Sistema de Controle para Máquina de Gravação
- 8.8 Métodos de Resposta de Freqüência Usando MATLAB
- 8.9 Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco
- 8.10 Sumário

## APRESENTAÇÃO

Em capítulos anteriores examinou-se o uso dos sinais de teste como o degrau e a rampa. Neste capítulo considera-se a resposta em estado estacionário de um sistema a um sinal de teste senoidal. Será visto que a resposta de um sistema linear com coeficientes constantes a um sinal de entrada senoidal é um sinal de saída senoidal de mesma freqüência que a do sinal de entrada. Contudo, a magnitude e a fase do sinal de saída diferem da magnitude e da fase do sinal senoidal de entrada; o quanto de diferença é uma função da freqüência do sinal de entrada. Assim, será investigada a resposta em regime permanente do sistema a uma entrada senoidal cuja freqüência estará variando.

Será examinada a função de transferência  $G(s)$  quando  $s = j\omega$  e serão desenvolvidos métodos para representar graficamente o número complexo  $G(j\omega)$  à medida que  $\omega$  varia. Os diagramas de Bode constituem uma das ferramentas gráficas mais potentes para analisar e projetar sistemas de controle, e este assunto será abordado neste capítulo. Serão considerados também os diagramas polares e os diagramas de magnitude e fase em escala logarítmica. Serão desenvolvidas diversas medidas de desempenho no domínio do tempo em termos da resposta de freqüência do sistema, bem como será apresentado o conceito de banda passante do sistema. O capítulo conclui com uma análise da resposta de freqüência aplicada ao Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura do Acionador de Disco.

### 8.1 INTRODUÇÃO

Nos capítulos precedentes, a resposta e o desempenho de um sistema foram descritos em termos da variável complexa  $s$  e da localização dos pólos e zeros no plano  $s$ . O método de **resposta de freqüência** se constitui uma abordagem alternativa prática e muito importante para análise e projeto de sistemas.

---

A resposta de freqüência de um sistema é definida como a resposta de estado estacionário do sistema a um sinal senoidal de entrada. A senóide é um sinal de entrada peculiar, e o sinal de saída resultante em um sistema linear, bem como os sinais ao longo deste, é senoidal em regime permanente; difere da forma de onda do sinal de entrada somente no que diz respeito a amplitude e ângulo de fase.

---

Por exemplo, seja o sistema  $Y(s) = T(s)R(s)$  com  $r(t) = A \operatorname{sen} \omega t$ . Tem-se

$$R(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2},$$

e

$$T(s) = \frac{m(s)}{q(s)} = \frac{m(s)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)},$$

onde  $p_i$  são considerados pólos distintos. Então, na forma da fração parcial, tem-se

$$Y(s) = \frac{k_1}{s + p_1} + \dots + \frac{k_n}{s + p_n} + \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2}.$$

Tomando-se a transformada de Laplace inversa, resulta

$$y(t) = k_1 e^{-p_1 t} + \dots + k_n e^{-p_n t} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2} \right\},$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes dependentes do problema. Se o sistema for estável, então todos os  $p_i$  têm parte real negativa diferente de zero, e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2} \right\},$$

uma vez que os termos exponenciais  $k_i e^{-p_i t}$  decaem a zero quando  $t \rightarrow \infty$ .

Calculando o limite para  $y(t)$ , obtém-se para  $t \rightarrow \infty$  (estado estacionário)

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2} \right] \\ &= \frac{1}{\omega} \left| A\omega T(j\omega) \right| \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \\ &= A |T(j\omega)| \operatorname{sen}(\omega t + \phi), \end{aligned} \tag{8.1}$$

onde  $\phi = \underline{T(j\omega)}$ .

Assim, o sinal de saída em regime permanente depende somente da magnitude e da fase de  $T(j\omega)$  na freqüência específica  $\omega$ . Convém observar que a resposta em regime permanente descrita na Eq. (8.1) só é verdadeira para sistemas  $T(s)$  estáveis.

Uma vantagem do método de resposta de freqüência é a facilidade de se dispor de sinais de teste senoidais para várias faixas de freqüência e de amplitude. Assim a determinação experimental da resposta de freqüência de um sistema é facilmente realizada e constitui o método mais confiável e simples para a análise experimental de um sistema. Freqüentemente, como será tratado na Seção 8.4, pode-se deduzir a função de transferência desconhecida de um sistema a partir da resposta de freqüência determinada experimentalmente [1, 2]. Além disto, o projeto de um sistema no domínio de freqüência fornece ao projetista o controle da banda passante do sistema e de algumas medidas da resposta do sistema a ruídos e perturbações indesejáveis.

Uma segunda vantagem do método de resposta de freqüência é que a função de transferência que descreve o comportamento senoidal de um sistema em regime estacionário pode ser obtida substituindo-se  $s$  por  $j\omega$  na função de transferência do sistema  $T(s)$ . A função de transferência que representa o comportamento de um sistema em regime senoidal permanente é então uma função da variável complexa  $j\omega$  e ela própria é uma função complexa  $T(j\omega)$  que possui uma magnitude e um ângulo de fase. A magnitude e o ângulo de fase de  $T(j\omega)$  são facilmente representados por gráficos que proporcionam uma percepção global importante para análise e projeto de sistemas de controle.

A desvantagem básica do método de resposta de freqüência para análise e projeto é o elo indireto entre a freqüência e o domínio de tempo. Correlações diretas entre a resposta de freqüência e as correspondentes características das respostas transitórias são de certa forma ténues e, na prática, a característica da resposta de freqüência é ajustada usando vários critérios de projeto que normalmente resultarão numa resposta transitória satisfatória.

O par da transformação de Laplace foi dado na Seção 2.4 e é escrito como

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt,$$

(8.2)

e

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds, \quad (8.3)$$

onde a variável complexa  $s = \sigma + j\omega$ . De igual modo, o **par da transformação de Fourier** é escrito como

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (8.4)$$

e

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (8.5)$$

A transformada de Fourier existe para  $f(t)$  quando

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

As transformadas de Fourier e de Laplace estão estreitamente relacionadas, como se pode ver examinando as Eqs. (8.2) e (8.4). Quando a função  $f(t)$  é definida somente para  $t \geq 0$ , como é quase sempre o caso, os limites inferiores de integração são os mesmos. Observa-se então que as duas equações diferem somente quanto à variável complexa. Assim, se a transformada de Laplace de uma função  $f_1(t)$  é conhecida como  $F_1(s)$ , pode-se obter a transformada de Fourier da mesma função do tempo  $F_1(j\omega)$  fazendo  $s = j\omega$  em  $F_1(s)$  [3].

Deve-se perguntar novamente: já que as transformadas de Fourier e de Laplace estão estreitamente relacionadas, por que não usar sempre a transformada de Laplace? Por que, afinal de contas, usar a transformada de Fourier? A transformada de Laplace permite investigar a localização no plano  $s$  dos pólos e zeros de uma função de transferência  $T(s)$ , como no Cap. 7. Por outro lado, o método de resposta de freqüência permite considerar a função de transferência  $T(j\omega)$  e levar em consideração as características de amplitude e fase do sistema. Esta capacidade para investigar e representar a característica de um sistema pelas equações e curvas de amplitude e fase é vantajosa na análise e no projeto de sistemas de controle.

Se for considerada a resposta de freqüência do sistema a malha fechada, deve-se ter uma entrada  $r(t)$  que possua transformada de Fourier, no domínio de freqüência, como a seguir:

$$R(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Então a resposta de freqüência na saída do sistema de controle de malha única pode ser obtida substituindo  $s = j\omega$  na relação do sistema a malha fechada,  $Y(s) = T(s)R(s)$ , de modo que

$$Y(j\omega) = T(j\omega)R(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} R(j\omega). \quad (8.6)$$

Utilizando a transformada de Fourier inversa, a resposta transitória na saída seria

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (8.7)$$

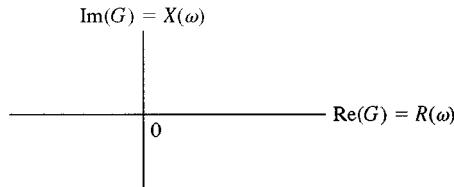
Contudo, é usualmente muito difícil calcular esta integral da transformada inversa a não ser para os sistemas mais simples e onde pode ser usada uma integração gráfica. Alternativamente, como se perceberá nas seções seguintes, algumas medidas de resposta transitória podem ser relacionadas às características de freqüências e utilizadas para fins de projeto.

## 8.2 GRÁFICOS DE RESPOSTA DE FREQUÊNCIA

A função de transferência de um sistema  $G(s)$  pode ser descrita no domínio de freqüência pela relação\*

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = R(\omega) + jX(\omega), \quad (8.8)$$

\*Ver o Apêndice E para uma revisão sobre números complexos.



**Fig. 8.1** O plano polar.

onde

$$R(\omega) = \operatorname{Re}[G(j\omega)], \quad \text{e} \quad X(\omega) = \operatorname{Im}[G(j\omega)].$$

Alternativamente, a função de transferência pode ser representada por uma magnitude  $|G(j\omega)|$  e por uma fase  $\phi(\omega)$  como

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi(j\omega)} = |G(\omega)|/\phi(\omega), \quad (8.9)$$

onde

$$\phi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{X(\omega)}{R(\omega)}, \quad \text{e} \quad |G(\omega)|^2 = [R(\omega)]^2 + [X(\omega)]^2.$$

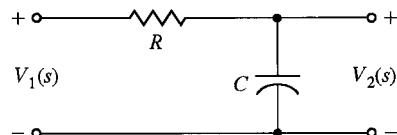
A representação gráfica da resposta de freqüência  $G(j\omega)$  do sistema pode utilizar a Eq. (8.8) ou a Eq. (8.9). A representação em **diagrama polar** da resposta de freqüência é obtida usando a Eq. (8.8). As coordenadas do diagrama polar são as partes real e imaginária de  $G(j\omega)$ , como está mostrado na Fig. 8.1. Um exemplo de um diagrama polar ilustrará esta abordagem.

### EXEMPLO 8.1

#### Resposta de freqüência de um filtro $RC$

Um filtro  $RC$  simples é mostrado na Fig. 8.2. A função de transferência deste filtro é

$$G(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{RCs + 1}, \quad (8.10)$$



**Fig. 8.2** Um filtro  $RC$ .

e a função de transferência senoidal em regime permanente é

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(RC) + 1} = \frac{1}{j(\omega/\omega_1) + 1}, \quad (8.11)$$

onde

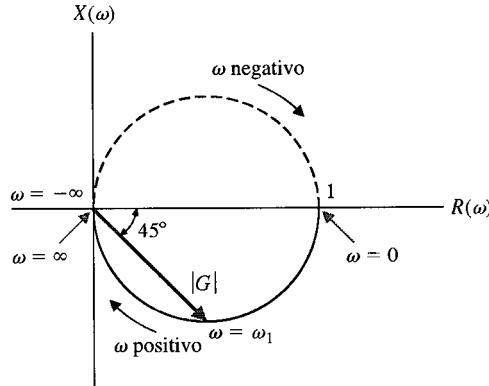
$$\omega_1 = \frac{1}{RC}.$$

Então o diagrama polar é obtido a partir da relação

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= R(\omega) + jX(\omega) \\ &= \frac{1 - j(\omega/\omega_1)}{(\omega/\omega_1)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{1 + (\omega/\omega_1)^2} - \frac{j(\omega/\omega_1)}{1 + (\omega/\omega_1)^2}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

O primeiro passo é determinar  $R(\omega)$  e  $X(\omega)$  nas duas freqüências,  $\omega = 0$  e  $\omega = \infty$ . Em  $\omega = 0$ , tem-se  $R(\omega) = 1$  e  $X(\omega) = 0$ . Em  $\omega = \infty$ , tem-se  $R(\omega) = 0$  e  $X(\omega) = 0$ . Estes dois pontos são mostrados na Fig. 8.3. O lugar geométrico das partes real e imaginária é também mostrado na Fig. 8.3 e é fácil demonstrar que se trata de um círculo com o centro em  $(1/2, 0)$ . Quando  $\omega = \omega_1$ , as partes real e imaginária são iguais, e o ângulo  $\phi(\omega) = 45^\circ$ . O diagrama polar também pode ser obtido a partir da Eq. (8.9) como

$$G(j\omega) = |G(\omega)|/\phi(\omega), \quad (8.13)$$



**Fig. 8.3** Gráfico polar de um filtro  $RC$ .

onde

$$|G(\omega)| = \frac{1}{[1 + (\omega/\omega_1)^2]^{1/2}}, \quad \text{e} \quad \phi(\omega) = -\tan^{-1}(\omega/\omega_1).$$

Portanto, quando  $\omega = \omega_1$ , a magnitude é  $|G(\omega_1)| = 1/\sqrt{2}$ , e a fase  $\phi(\omega_1) = -45^\circ$ . Também, quando  $\omega$  tende a  $+\infty$ , tem-se  $|G(\omega)| \rightarrow 0$  e  $\phi(\omega) = -90^\circ$ . De forma semelhante, quando  $\omega = 0$ , tem-se  $|G(\omega)| = 1$  e  $\phi(\omega) = 0$ . ■

### EXEMPLO 8.2

#### Diagrama polar de uma função de transferência

O diagrama polar de uma função de transferência é útil para investigar a estabilidade do sistema e será utilizado no Cap. 9. Por conseguinte, vale a pena, neste ponto, completar um outro exemplo. Seja a função de transferência

$$|G(s)|_{s=j\omega} = G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega\tau + 1)} = \frac{K}{j\omega - \omega^2\tau}. \quad (8.14)$$

Então, a magnitude e o ângulo de fase são escritos como

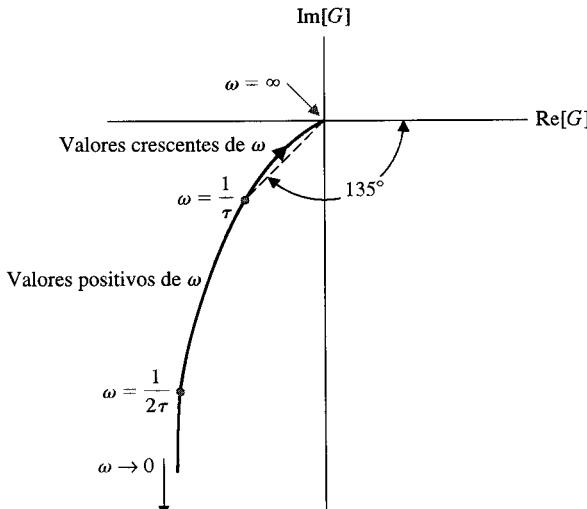
$$|G(\omega)| = \frac{K}{(\omega^2 + \omega^4\tau^2)^{1/2}}, \quad \text{e} \quad \phi(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{-\omega\tau}\right).$$

O ângulo de fase e a magnitude são calculados nas freqüências  $\omega = 0$ ,  $\omega = 1/\tau$ , e  $\omega = +\infty$ . Os valores de  $|G(\omega)|$  e  $\phi(\omega)$  são dados na Tabela 8.1, e o diagrama polar de  $G(j\omega)$  é mostrado na Fig. 8.4.

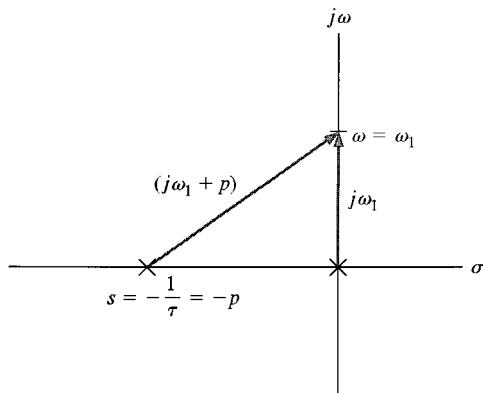
Uma solução alternativa usa as partes real e imaginária de  $G(j\omega)$  como

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega - \omega^2\tau} = \frac{K(-j\omega - \omega^2\tau)}{\omega^2 + \omega^4\tau^2} = R(\omega) + jX(\omega), \quad (8.15)$$

em que  $R(\omega) = -K\omega^2\tau/M(\omega)$ , e  $X(\omega) = -j\omega K/M(\omega)$ , e onde  $M(\omega) = \omega^2 + \omega^4\tau^2$ . Então quando  $\omega = \infty$ , tem-se  $R(\omega) = 0$  e  $X(\omega) = 0$ . Quando  $\omega = 0$ , tem-se  $R(\omega) = -K\tau$  e  $X(\omega) = -\infty$ . Quando  $\omega = 1/\tau$ , tem-se  $R(\omega) = -K\tau/2$  e  $X(\omega) = -jK\tau/2$ , como mostrado na Fig. 8.4.



**Fig. 8.4** Diagrama polar para  $G(j\omega) = K/j\omega(j\omega\tau + 1)$ . Observar que  $\omega = \infty$  na origem.



**Fig. 8.5** Dois vetores no plano  $s$  para calcular  $G(j\omega_1)$ .

Um outro método para obter o diagrama polar é calcular graficamente o vetor  $G(j\omega)$  nas freqüências específicas,  $\omega$ , ao longo do eixo  $s = j\omega$  no plano  $s$ . Considera-se

$$G(s) = \frac{K/\tau}{s(s + 1/\tau)}$$

com os dois pólos mostrados no plano  $s$  na Fig. 8.5.

Quando  $s = j\omega$ , tem-se

$$G(j\omega) = \frac{K/\tau}{j\omega(j\omega + p)},$$

onde  $p = 1/\tau$ . A magnitude e a fase de  $G(j\omega)$  podem ser calculadas em uma freqüência específica,  $\omega_1$ , sobre o eixo  $j\omega$ , como mostrado na Fig. 8.5. A magnitude e a fase  $\phi(\omega)$  são

$$|G(\omega_1)| = \frac{K/\tau}{|j\omega_1| |j\omega_1 + p|},$$

e

$$\phi(\omega) = -\angle(j\omega_1) - \angle(j\omega_1 + p) = -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1}(\omega_1/p). \blacksquare$$

Há diversas possibilidades para coordenadas de um gráfico que retrata a resposta de freqüência de um sistema. Como foi visto, pode-se escolher a utilização de um diagrama polar para representar a resposta de freqüência de um sistema (Eq. 8.8). Contudo, as limitações dos diagramas polares são nitidamente visíveis. A inclusão de pólos ou zeros em um sistema existente requer o novo cálculo da resposta de freqüência, como esboçado nos Exemplos 8.1 e 8.2. (Ver Tabela 8.1.) Além disto, o cálculo da resposta de freqüência desta maneira é maçante e não indica o efeito dos pólos e zeros individuais.

A introdução de **gráficos logarítmicos**, muitas vezes chamados **diagramas de Bode**, simplificam a determinação da representação gráfica da resposta de freqüência. Os gráficos logarítmicos são chamados diagramas de Bode em honra de H. W. Bode, que os utilizou muito em seus estudos de amplificadores com retroação [4, 5]. A função de transferência no domínio de freqüência é

$$G(j\omega) = |G(\omega)|e^{j\phi(\omega)}. \quad (8.16)$$

O logaritmo da magnitude é normalmente expresso em termos do logaritmo na base 10, de modo que se usa

$\text{Ganho logarítmico} = 20 \log_{10}|G(\omega)|,$

(8.17)

onde a unidade é o decibel (dB). Um tabela de conversão em decibéis é dada no Apêndice D. O ganho logarítmico em dB e o ângulo  $\phi(\omega)$  podem ser traçados em função da freqüência  $\omega$  utilizando diferentes arranjos. Nos diagramas de Bode, o gráfico do ganho logarítmico em dB versus  $\omega$  é traçado usando um conjunto de eixos, e a fase  $\phi(\omega)$  versus  $\omega$  usando um outro conjunto de eixos, como mostrado na Fig. 8.6. Por exemplo, os diagramas de Bode da função de transferência do Exemplo 8.1 podem ser obtidos, prontamente, como será visto no exemplo a seguir.

**TABELA 8.1**

$\omega$	0	$1/2\tau$	$1/\tau$	$\infty$
$ G(\omega) $	$\infty$	$4K\tau\sqrt{5}$	$K\tau\sqrt{2}$	0
$\phi(\omega)$	$-90^\circ$	$-117^\circ$	$-135^\circ$	$-180^\circ$

**EXEMPLO 8.3****Diagrama de Bode de um filtro RC**

A função de transferência do Exemplo 8.1 é

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(RC) + 1} = \frac{1}{j\omega\tau + 1}, \quad (8.18)$$

onde

$$\tau = RC,$$

a constante de tempo do circuito. O ganho logarítmico é

$$20 \log |G| = 20 \log \left( \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2} \right)^{1/2} = -10 \log(1 + (\omega\tau)^2). \quad (8.19)$$

Para valores pequenos de freqüência — isto é,  $\omega \ll 1/\tau$  — o ganho logarítmico é

$$20 \log |G| = -10 \log(1) = 0 \text{ dB}, \quad \omega \ll 1/\tau. \quad (8.20)$$

Para valores elevados de freqüência — isto é,  $\omega \gg 1/\tau$  — o ganho logarítmico é

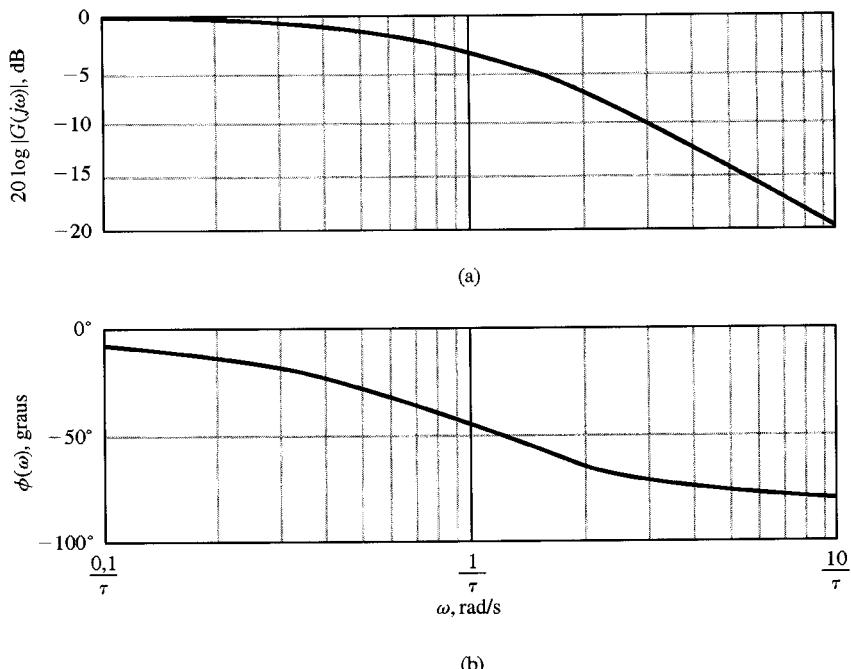
$$20 \log |G| = -20 \log \omega\tau \quad \omega \gg 1/\tau, \quad (8.21)$$

e em  $\omega = 1/\tau$ , tem-se

$$20 \log |G| = -10 \log 2 = -3,01 \text{ dB}.$$

O gráfico de magnitude para este circuito é mostrado na Fig. 8.6(a). O ângulo de fase deste circuito é

$$\phi(j\omega) = -\tan^{-1} \omega\tau. \quad (8.22)$$



**Fig. 8.6** Diagramas de Bode para  $G(j\omega) = 1/(j\omega\tau + 1)$ : (a) diagrama de magnitude e (b) diagrama de fase.

O gráfico do ângulo de fase é mostrado na Fig. 8.6(b). A freqüência  $\omega = 1/\tau$  é muitas vezes chamada de **freqüência de quebra** ou **freqüência de corte**. ■

Uma escala linear de freqüência não é a escolha mais conveniente ou inteligente, e se considera o uso de uma escala logarítmica de freqüência. A conveniência de uma escala logarítmica de freqüência pode ser vista examinando-se a Eq. (8.21) para valores grandes de freqüência,  $\omega \gg 1/\tau$ , como se segue:

$$20 \log |G| = -20 \log \omega\tau = -20 \log \tau - 20 \log \omega. \quad (8.23)$$

Assim, com relação a um conjunto de eixos em que o eixo horizontal é  $\log \omega$ , a curva assintótica para  $\omega \gg 1/\tau$  é uma linha reta, como mostrado na Fig. 8.7. A inclinação da reta pode ser obtida a partir da Eq. (8.21). O intervalo entre duas freqüências com uma relação igual a 10 é chamado de **década**.

Assim, a faixa de freqüências de  $\omega_1$  a  $\omega_2$ , onde  $\omega_2 = 10\omega_1$ , é chamada de uma década. A diferença entre os ganhos logarítmicos, para  $\omega >> 1/\tau$ , sobre uma década de freqüências é

$$\begin{aligned} 20 \log |G(\omega_1)| - 20 \log |G(\omega_2)| &= -20 \log \omega_1 \tau - (-20 \log \omega_2 \tau) \\ &= -20 \log \frac{\omega_1 \tau}{\omega_2 \tau} \\ &= -20 \log (1/10) = +20 \text{ dB}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Isto é, a inclinação da reta assintótica a esta função de transferência de primeira ordem é  $-20 \text{ dB/década}$ , e a inclinação é mostrada na Fig. 8.7. Em vez de usar um eixo horizontal para  $\log \omega$  e coordenadas retangulares lineares, é mais simples usar papel semilog com uma coordenada retangular linear para dB e uma coordenada logarítmica para  $\omega$ . Alternativamente, se poderia usar uma coordenada logarítmica para a magnitude bem como para a freqüência e evitar a necessidade de calcular o logaritmo da magnitude.

O intervalo de freqüência em que  $\omega_2 = 2\omega_1$  é muitas vezes usado e é chamado uma oitava de freqüências. A diferença entre os ganhos logarítmicos para  $\omega >> 1/\tau$ , para uma oitava, é

$$\begin{aligned} 20 \log |G(\omega_1)| - 20 \log |G(\omega_2)| &= -20 \log \frac{\omega_1 \tau}{\omega_2 \tau} \\ &= -20 \log (1/2) = 6,02 \text{ dB}. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Por conseguinte, a inclinação da reta assintótica é  $-6 \text{ dB/oitava}$  ou  $-20 \text{ dB/década}$ .

A principal vantagem do gráfico logarítmico é a conversão de fatores multiplicativos como  $(j\omega + 1)$  em fatores aditivos  $20 \log (j\omega + 1)$  em virtude da definição do ganho logarítmico. Isto pode ser comprovado facilmente considerando-se uma função de transferência generalizada

$$G(j\omega) = \frac{K_b \prod_{i=1}^Q (1 + j\omega \tau_i)}{(j\omega)^N \prod_{m=1}^M (1 + j\omega \tau_m) \prod_{k=1}^R [(1 + (2\zeta_k / \omega_{n_k}) j\omega + (j\omega / \omega_{n_k})^2)]}. \quad (8.26)$$

Esta função de transferência inclui  $Q$  zeros,  $N$  pólos na origem,  $M$  pólos sobre o eixo real e  $R$  pares de pólos conjugados complexos. A obtenção do gráfico polar relativo a uma função como esta seria na verdade uma tarefa considerável. No entanto, a magnitude logarítmica de  $G(j\omega)$  é

$$\begin{aligned} 20 \log |G(\omega)| &= 20 \log K_b + 20 \sum_{i=1}^Q \log |1 + j\omega \tau_i| \\ &\quad - 20 \log |(j\omega)^N| - 20 \sum_{m=1}^M \log |1 + j\omega \tau_m| \\ &\quad - 20 \sum_{k=1}^R \log \left| 1 + \left( \frac{2\zeta_k}{\omega_{n_k}} \right) j\omega + \left( \frac{j\omega}{\omega_{n_k}} \right)^2 \right|, \end{aligned} \quad (8.27)$$

e os diagramas de Bode podem ser obtidos adicionando-se os gráficos relativos a cada um dos fatores individuais. Além disto, o gráfico do ângulo de fase é obtido como

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= + \sum_{i=1}^Q \operatorname{tg}^{-1} \omega \tau_i - N(90^\circ) - \sum_{m=1}^M \operatorname{tg}^{-1} \omega \tau_m \\ &\quad - \sum_{k=1}^R \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{2\zeta_k \omega_{n_k} \omega}{\omega_{n_k}^2 - \omega^2} \right), \end{aligned} \quad (8.28)$$

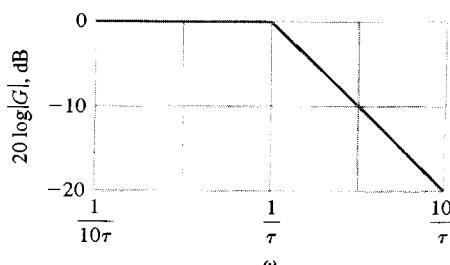


Fig. 8.7 Curva assintótica para  $(j\omega \tau + 1)^{-1}$ .

que é simplesmente a soma algébrica dos ângulos de fase de cada fator individual da função de transferência.

Por conseguinte, os quatro tipos de fatores diferentes que podem ocorrer em uma função de transferência são:

1. Ganho constante  $K_b$
2. Pólos (ou zeros) na origem ( $j\omega$ )
3. Pólos (ou zeros) sobre o eixo real ( $j\omega\tau + 1$ )
4. Pólos (ou zeros) conjugados complexos  $[1 + (2\zeta/\omega_n)j\omega + (j\omega/\omega_n)^2]$

Pode-se determinar o gráfico de magnitude logarítmica e de ângulo de fase para estes quatro fatores e então utilizá-los para obter diagramas de Bode para qualquer forma geral de função de transferência. Tipicamente as curvas para cada fator são obtidas e em seguida adicionadas graficamente para obter as curvas relativas à função de transferência completa. Além disto, este procedimento pode ser simplificado usando aproximações assintóticas para estas curvas e obtendo as curvas reais somente em freqüências específicas importantes.

**Ganho Constante  $K_b$ .** O ganho logarítmico para a constante  $K_b$  é

$$20 \log K_b = \text{constante em dB},$$

e o ângulo de fase é

$$\phi(\omega) = 0.$$

A curva de ganho é simplesmente uma reta horizontal no diagrama de Bode de magnitude.

Se o ganho for um valor negativo,  $-K_b$ , o ganho logarítmico continua sendo  $20 \log K_b$ . O sinal negativo é levado em conta no ângulo de fase,  $-180^\circ$ .

**Pólos (ou Zeros) na Origem ( $j\omega$ ).** Um pôlo na origem possui uma magnitude logarítmica

$$20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega \text{ dB} \quad (8.29)$$

e um ângulo de fase

$$\phi(\omega) = -90^\circ.$$

A inclinação da curva de magnitude para um pôlo é  $-20 \text{ dB/década}$ . De igual modo, para um pôlo múltiplo na origem, tem-se

$$20 \log \left| \frac{1}{(j\omega)^N} \right| = -20 N \log \omega, \quad (8.30)$$

e a fase é

$$\phi(\omega) = -90^\circ N.$$

Neste caso, a inclinação devida ao pôlo múltiplo é  $-20N \text{ dB/década}$ . Para um zero na origem, tem-se uma magnitude logarítmica

$$20 \log |j\omega| = +20 \log \omega, \quad (8.31)$$

onde a inclinação é  $+20 \text{ dB/década}$ , e o ângulo de fase é

$$\phi(\omega) = +90^\circ.$$

Os diagramas de Bode de magnitude e de ângulo de fase de  $(j\omega)^{\pm N}$  é mostrado na Fig. 8.8 para  $N = 1$  e  $N = 2$ .

**Pólos ou Zeros sobre o Eixo Real.** O fator pôlo  $(1 + j\omega\tau)^{-1}$  foi considerado anteriormente e achou-se que para um pôlo sobre o eixo real

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau} \right| = -10 \log (1 + \omega^2\tau^2). \quad (8.32)$$

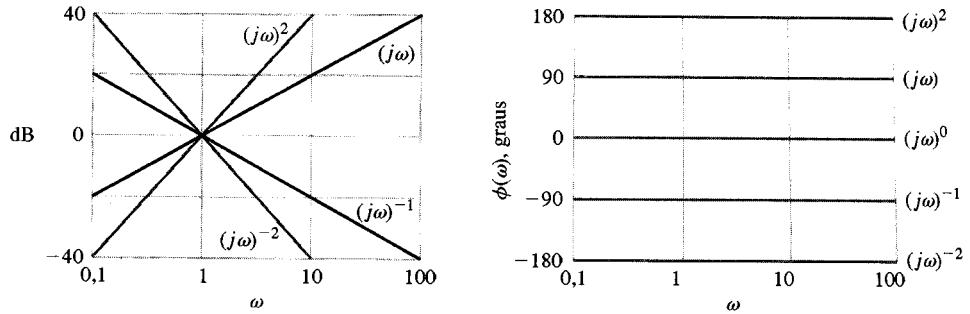


Fig. 8.8 Diagramas de Bode para  $(j\omega)^{\pm N}$ .

A curva assintótica para  $\omega << 1/\tau$  é  $20 \log 1 = 0$  dB, e a curva assintótica para  $\omega >> 1/\tau$  é  $-20 \log \omega\tau$ , que tem uma inclinação de  $-20$  dB/década. A interseção das duas assintotas ocorre quando

$$20 \log 1 = 0 \text{ dB} = -20 \log \omega\tau,$$

ou quando  $\omega = 1/\tau$ , a **frequência de quebra**. O ganho logarítmico real quando  $\omega = 1/\tau$  é  $-3$  dB para este fator. O ângulo de fase é  $\phi(\omega) = -\tan^{-1} \omega\tau$  para o fator em denominador. Os diagramas de Bode de um fator pôlo  $(1 + j\omega\tau)^{-1}$  estão mostrados na Fig. 8.9.

Os diagramas de Bode de um fator zero  $(1 + j\omega\tau)$  são obtidos do mesmo jeito que os do pôlo. Contudo, a inclinação é positiva em  $+20$  dB/década, e o ângulo de fase é  $\phi(\omega) = +\tan^{-1} \omega\tau$ .

Uma aproximação linear da curva do ângulo de fase pode ser obtida como está mostrado na Fig. 8.9. Esta aproximação linear, que cruza a curva de fase correta na frequência de quebra, permanece no interior de uma faixa de valores que difere, no máximo, em  $6^\circ$  dos valores da curva de fase real em todas as freqüências. Esta aproximação propicia um modo útil de determinar rapidamente a forma das curvas do ângulo de fase de uma função de transferência  $G(s)$ . No entanto, muitas vezes as curvas de ângulo de fase exatas são necessárias, e a curva da fase real para o fator de primeira ordem deve ser obtida através de um programa de computador como o MATLAB. Os valores exatos da resposta de freqüência para o pôlo  $(1 + j\omega\tau)^{-1}$ , bem como os valores obtidos usando a aproximação, são dados na Tabela 8.2 para fins de comparação.

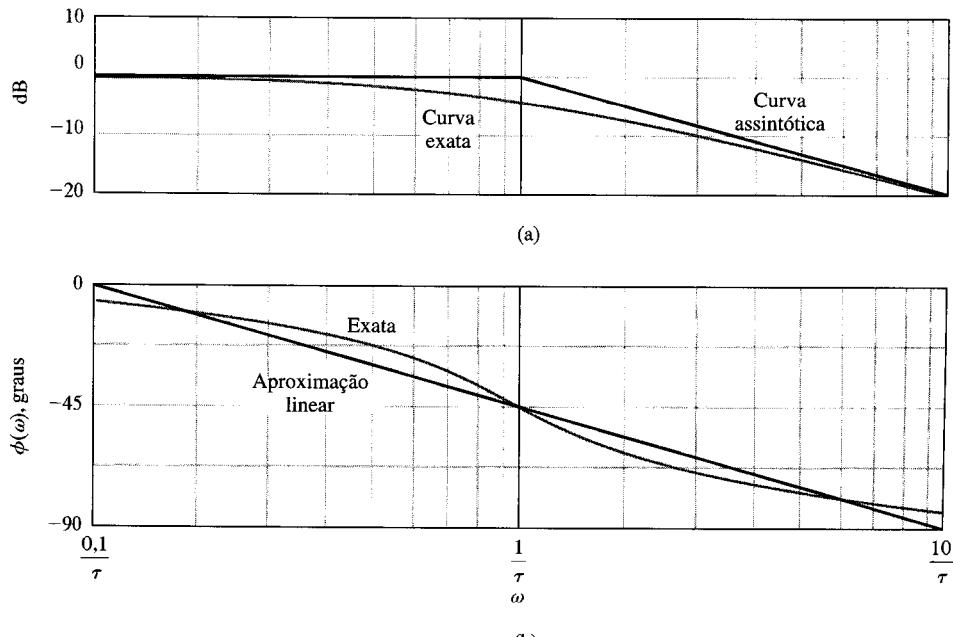


Fig. 8.9 Diagramas de Bode para  $(1 + j\omega\tau)^{-1}$ .

TABELA 8.2

$\omega\tau$	0,10	0,50	0,76	1	1,31	2	5	10
$20 \log  (1 + j\omega\tau)^{-1} $ , dB	-0,04	-1,0	-2,0	-3,0	-4,3	-7,0	-14,2	-20,04
Aproximação assintótica, dB	0	0	0	0	-2,3	-6,0	-14,0	-20,0
$\phi(\omega)$ , graus ( $^\circ$ )	-5,7	-26,6	-37,4	-45,0	-52,7	-63,4	-78,7	-84,3
Aproximação linear, graus ( $^\circ$ )	0	-31,5	-39,5	-45,0	-50,3	-58,5	-76,5	-90,0

**Pólos ou Zeros Conjugados Complexos.**  $[1 + (2\zeta/\omega_n)j\omega + (j\omega/\omega_n)^2]$ . O fator quadrático devido a um par de pólos conjugados complexos pode ser escrito na forma normalizada como

$$[1 + j2\zeta u - u^2]^{-1}, \quad (8.33)$$

onde  $u = \omega/\omega_n$ . Em consequência, a magnitude logarítmica para um par de **pólos conjugados complexos** é

$$20 \log |G(\omega)| = -10 \log ((1 - u^2)^2 + 4\zeta^2 u^2), \quad (8.34)$$

e o ângulo de fase é

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \left( \frac{2\zeta u}{1 - u^2} \right). \quad (8.35)$$

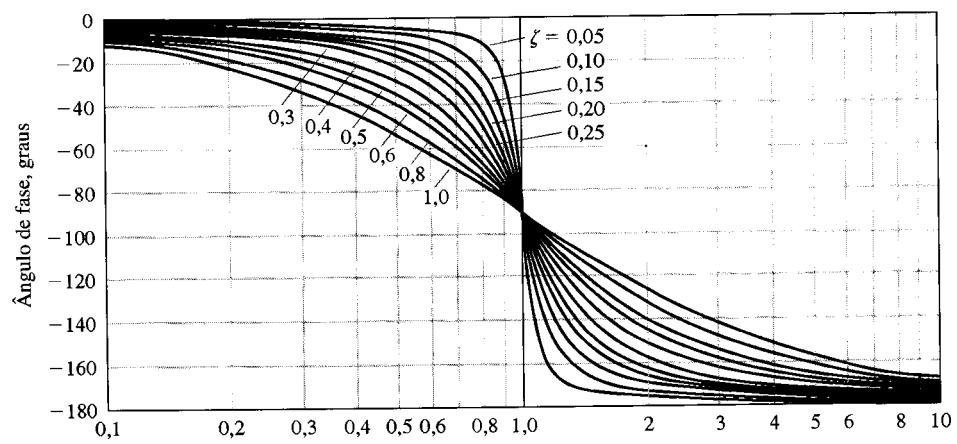
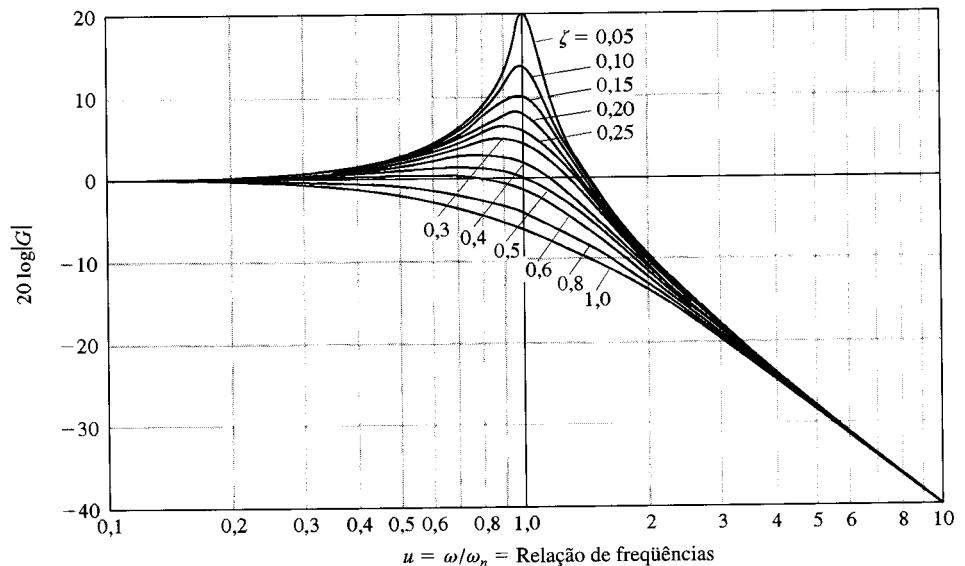
Quando  $u \ll 1$ , a magnitude é

$$20 \log |G| = -10 \log 1 = 0 \text{ dB},$$

e o ângulo de fase tende a  $0^\circ$ . Quando  $u \gg 1$ , a magnitude logarítmica tende a

$$20 \log |G| = -10 \log u^4 = -40 \log u,$$

que resulta em uma curva com inclinação de  $-40 \text{ dB/década}$ . O ângulo de fase, quando  $u \gg 1$ , tende a  $-180^\circ$ . As assintotas de magnitude se cruzam na reta de 0-dB quando  $u = \omega/\omega_n = 1$ . Contudo, a diferença entre a curva de magnitude real e a aproximação assintótica é uma função da relação de amortecimento e deve ser levada em conta quando  $\zeta < 0,707$ . Os diagramas de Bode de um fator quadrático devido a um par de pólos conjugados complexos é mostrado na Fig. 8.10. O valor máxi-



**Fig. 8.10** Diagramas de Bode para  $G(j\omega) = [1 + (2\zeta/\omega_n)j\omega + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$ .

mo da resposta de freqüência,  $M_{p_\omega}$ , ocorre na **freqüência de ressonância**  $\omega_r$ . Quando a relação de amortecimento tende a zero, então  $\omega_r$  tende a  $\omega_n$ , a freqüência natural. A freqüência de ressonância é determinada fazendo-se a derivada da magnitudo da Eq. (8.33) com relação à freqüência normalizada,  $u$ , e igualando o resultado a zero. A freqüência de ressonância é representada pela relação

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}, \quad \zeta < 0,707, \quad (8.36)$$

e o valor máximo da magnitude  $|G(\omega)|$  é

$$M_{p_\omega} = |G(\omega_r)| = (2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2})^{-1}, \quad \zeta < 0,707, \quad (8.37)$$

para um par de pólos complexos. O valor máximo da resposta de freqüência  $M_{p_\omega}$  e a freqüência de ressonância  $\omega_r$  devidos a um par de pólos complexos são mostrados, na Fig. 8.11, como uma função da relação de amortecimento  $\zeta$ . Supondo a dominância de um par de pólos a malha fechada complexos conjugados, descobre-se que estas curvas são úteis para estimar a relação de amortecimento de um sistema a partir da resposta da freqüência determinada experimentalmente.

As curvas de resposta de freqüência podem ser calculadas no plano  $s$  determinando os comprimentos do vetor e os ângulos em várias freqüências  $\omega$  ao longo dos eixos ( $s = +j\omega$ ). Por exemplo, considerando o fator de segunda ordem com pólos complexos conjugados, tem-se:

$$G(s) = \frac{1}{(s/\omega_n)^2 + 2\zeta s/\omega_n + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (8.38)$$

Os pólos estão situados sobre um círculo de raio  $\omega_n$  e são mostrados para um valor particular de  $\zeta$  na Fig. 8.12(a). A função de transferência calculada para freqüência real  $s = j\omega$  é escrita como

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(s - s_1)(s - s_1^*)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{\omega_n^2}{(j\omega - s_1)(j\omega - s_1^*)}. \quad (8.39)$$

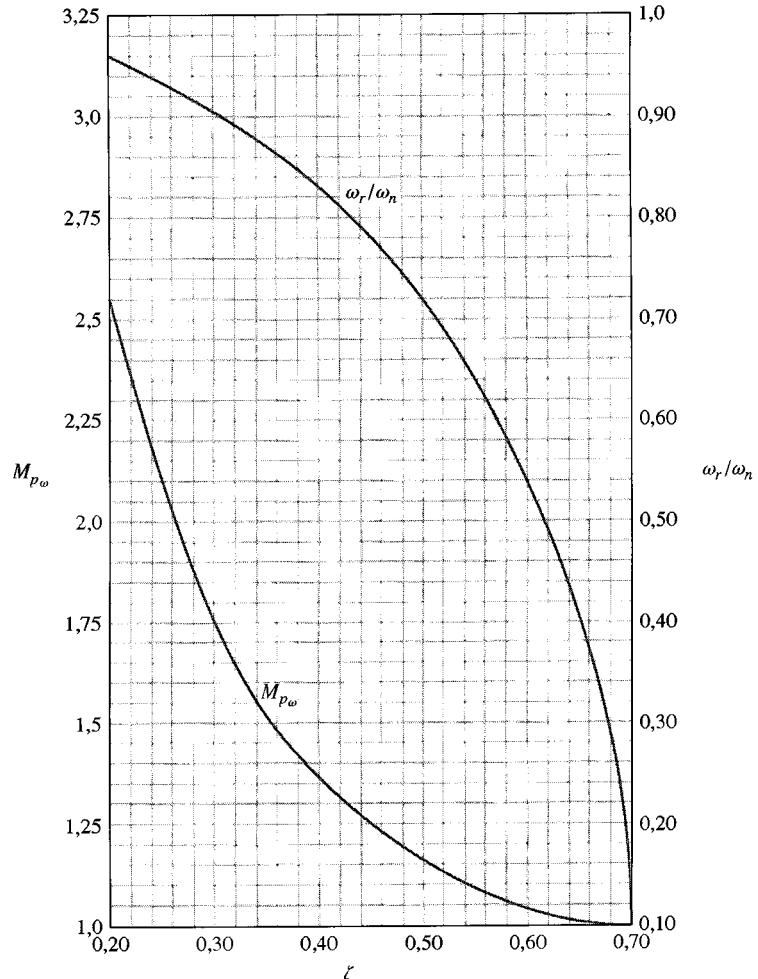
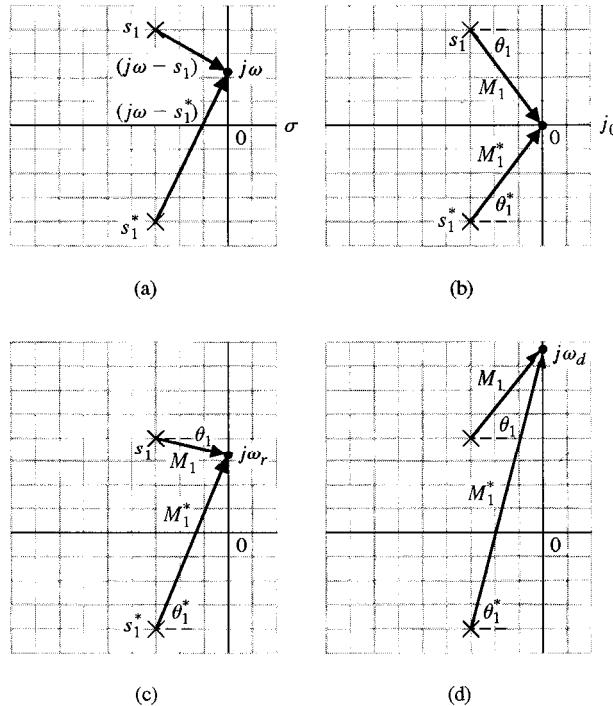


Fig. 8.11 O valor máximo da resposta de freqüência,  $M_{p_\omega}$ , e a freqüência de ressonância,  $\omega_r$ , versus  $\zeta$  para um par de pólos conjugados complexos.



**Fig. 8.12** Cálculo do vetor da resposta de freqüência para valores selecionados de  $\omega$ .

onde  $s_1$  e  $s_1^*$  são os pólos complexos conjugados. Os vetores  $(j\omega - s_1)$  e  $(j\omega - s_1^*)$  são os vetores com origem nos pólos e extremidade na freqüência  $j\omega$ , como mostra a Fig. 8.12(a). Assim, a magnitude e a fase podem ser calculadas para várias freqüências específicas. A magnitude é

$$|G(\omega)| = \frac{\omega_n^2}{|j\omega - s_1| |j\omega - s_1^*|}, \quad (8.40)$$

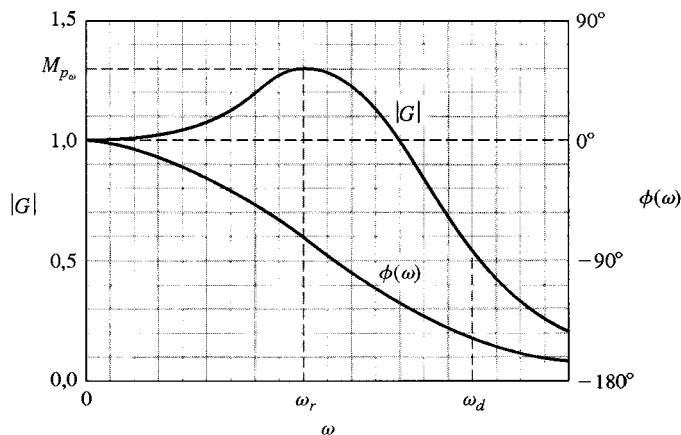
e a fase é

$$\phi(\omega) = -\angle(j\omega - s_1) - \angle(j\omega - s_1^*).$$

A magnitude e a fase podem ser calculadas em três freqüências específicas:

$$\omega = 0, \quad \omega = \omega_r, \quad \omega = \omega_d,$$

como mostrado na Fig. 8.12 nas partes (b), (c) e (d), respectivamente. A magnitude e a fase que correspondem a estas freqüências são mostradas na Fig. 8.13.



**Fig. 8.13** Diagramas de Bode para pólos conjugados complexos.

#### EXEMPLO 8.4

#### Diagrama de Bode de um Circuito T Geminado

Como exemplo de determinação da resposta da freqüência usando o diagrama de pólos e zeros e os vetores com extremidade em  $j\omega$ , considere-se o circuito T geminado mostrado na Fig. 8.14 [6]. A função de transferência deste circuito é

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = \frac{(s\tau)^2 + 1}{(s\tau)^2 + 4s\tau + 1}, \quad (8.41)$$

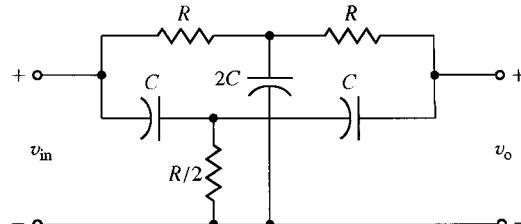


Fig. 8.14 Circuito T geminado.

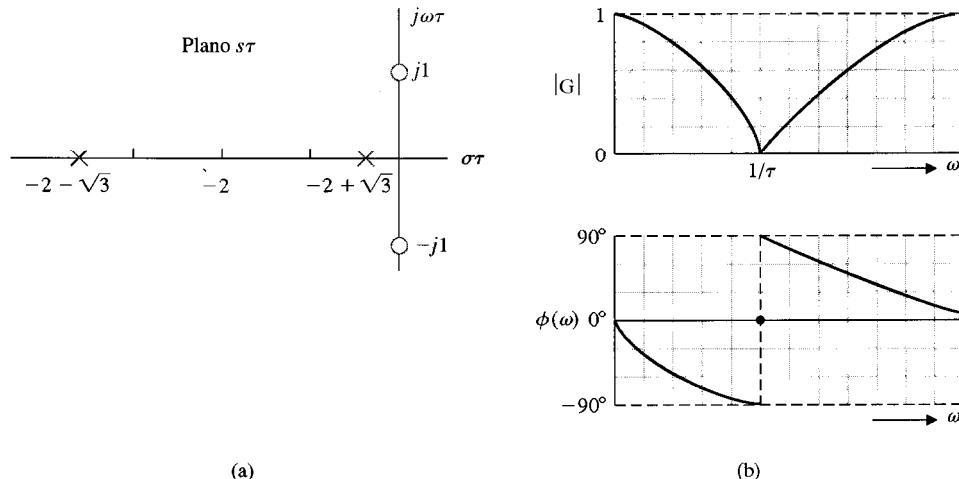


Fig. 8.15 Circuito T geminado. (a) Configuração de pólos e zeros. (b) Resposta de freqüência.

onde  $\tau = RC$ . Os zeros estão em  $\pm j1$ , e os pólos estão em  $-2 \pm \sqrt{3}$  no plano  $s\tau$ , como mostrado na Fig. 8.15(a). Em  $\omega = 0$ , tem-se  $|G| = 1$  e  $\phi(\omega) = 0^\circ$ . Em  $\omega = 1/\tau$ ,  $|G| = 0$ , e o ângulo de fase do vetor a partir do zero em  $s\tau = j1$  passa por uma transição de  $180^\circ$ . Quando  $v$  tende a  $\infty$ ,  $|G| = 1$  e  $\phi(\omega) = 0$  novamente. Calculando algumas freqüências intermediárias, pode-se obter a resposta de freqüência, como mostrado na Fig. 8.15(b). ■

Um resumo de curvas assintóticas referentes aos termos básicos de uma função de transferência é fornecido na Tabela 8.3.

Nos exemplos anteriores os pólos e zeros de  $G(s)$  ficaram restritos ao semiplano  $s$  da esquerda. Contudo, um sistema pode ter zeros localizados no semiplano  $s$  da direita e ainda assim ser estável. Funções de transferência com zeros no semiplano  $s$  da direita são classificadas como funções de transferência **de fase não-mínima**. Se os zeros de uma função de transferência forem simétricos em relação ao eixo  $j\omega$ , não existe mudança na magnitude da função de transferência, e a única diferença ocorre nas características de fase. Se as características de fase de duas funções de sistema forem comparadas, pode-se mostrar que o deslocamento de fase ao longo da faixa de freqüência de zero a infinito é menor para o sistema com todos os zeros no semiplano  $s$  da esquerda. Assim, a função de transferência  $G_1(s)$ , com todos os zeros no semiplano  $s$  da esquerda, é chamada de uma **função de transferência de fase mínima**. A função de transferência  $G_2(s)$ , com  $|G_2(j\omega)| = |G_1(j\omega)|$  e todos os zeros de  $G_1(s)$  espelhados em relação ao eixo  $j\omega$  no semiplano  $s$  da direita, é chamada de uma **função de transferência de fase não-mínima**. O espelhamento de qualquer zero ou par de zeros no semiplano  $s$  da direita resulta em uma função de transferência de fase **não-mínima**.

---

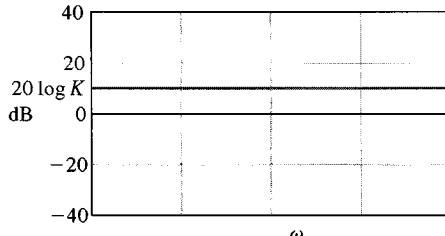
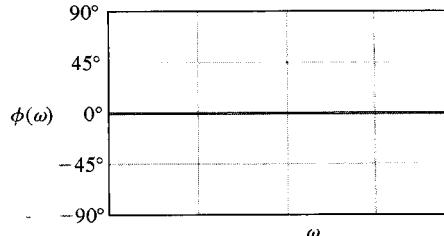
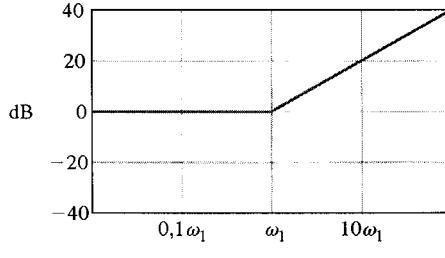
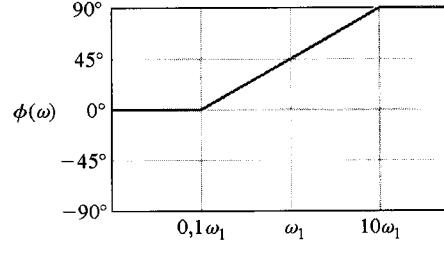
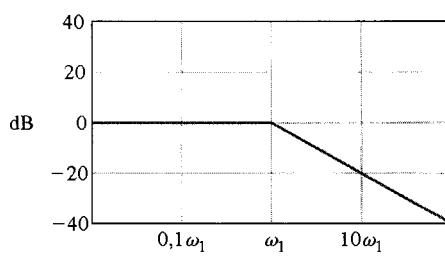
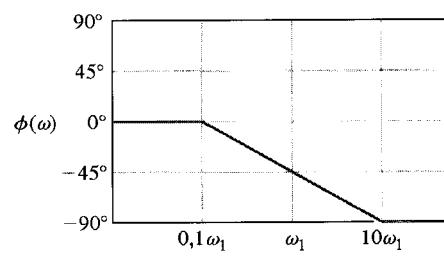
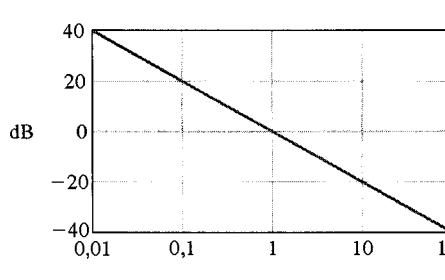
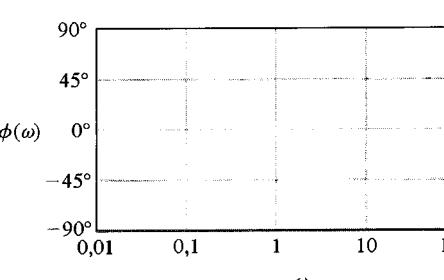
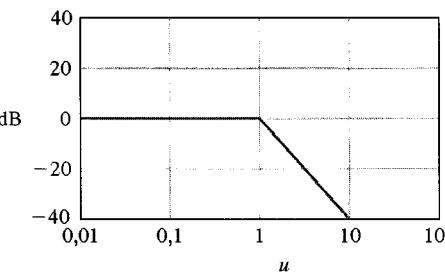
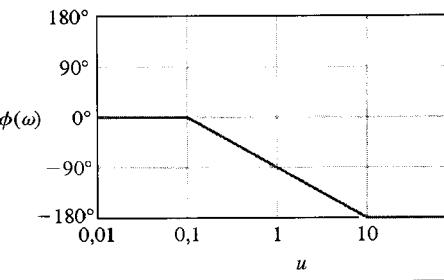
**Uma função de transferência é chamada de uma função de transferência de fase mínima se todos os seus zeros estiverem no semiplano  $s$  da esquerda. É chamada de função de transferência de fase não-mínima se tiver zeros no semiplano  $s$  da direita.**

---

As duas configurações de pólos e zeros mostradas nas Figs. 8.16(a) e (b) têm as mesmas características de amplitude, como pode ser deduzido a partir dos comprimentos dos vetores. Contudo, as características de fase são diferentes para as Figs. 8.16(a) e (b). A característica de fase mínima da Fig. 8.16(a) e a característica de fase não-mínima da Fig. 8.16(b) são mostradas na Fig. 8.17. Fica evidente que o deslocamento de fase de

$$G_1(s) = \frac{s + z}{s + p}$$

**TABELA 8.3 Curvas Assintóticas dos Termos Básicos de uma Função de Transferência**

Termo	Magnitude $20 \log  G $	Fase, $\phi(\omega)$
1. Ganho, $G(j\omega) = K$		
2. Zero, $G(j\omega) = (1 + j\omega/\omega_1)$		
3. Pólo, $G(j\omega) = (1 + j\omega/\omega_1)^{-1}$		
4. Pólo na origem, $G(j\omega) = 1/j\omega$		
5. Dois pólos complexos, $0,1 < \zeta < 1, G(j\omega) = (1 + j2\zeta u - u^2)^{-1}, u = \omega/\omega_n$		

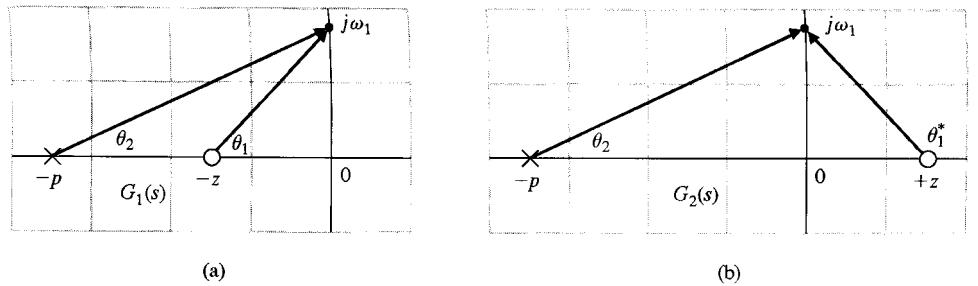


Fig. 8.16 Configurações de pólos e zeros com idênticas amplitudes de resposta e de características de fase diferentes.

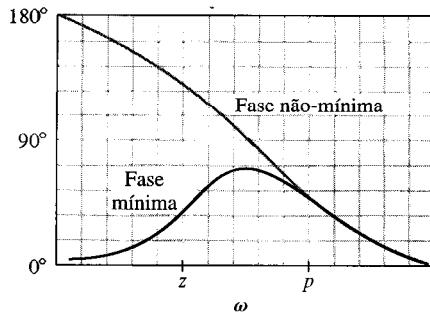


Fig. 8.17 Características de fase para função transferência de fase mínima e de fase não-mínima.

excursionia menos de  $80^\circ$ , enquanto o deslocamento de fase de

$$G_2(s) = \frac{s - z}{s + p}$$

excursionia até  $180^\circ$ . O significado do termo **fase mínima** é ilustrado na Fig. 8.17. A excursão da defasagem de uma função de transferência de fase mínima é a menor possível ou mínima com respeito a uma determinada curva de amplitude, enquanto que a excursão da curva de fase não-mínima é maior que o mínimo possível para a curva de amplitude dada.

Um circuito de fase não-mínima particularmente interessante é o circuito **passa-todas**, que pode ser implementado com um circuito simétrico [8]. Uma configuração simétrica de pólos e zeros é obtida como está mostrado na Fig. 8.18(a). Novamente a magnitude  $|G|$  permanece constante; neste caso, é igual à unidade. O ângulo de fase, contudo, varia de  $0^\circ$  a  $-360^\circ$ . Como  $\theta_2 = 180^\circ - \theta_1$  e  $\theta_2^* = 180^\circ - \theta_1^*$ , a fase é dada por  $\phi(\omega) = -2(\theta_1 + \theta_1^*)$ . A característica de magnitude e de fase do circuito passa-todas é mostrada na Fig. 8.18(b). Um circuito simétrico de fase não-mínima é mostrado na Fig. 8.18(c).

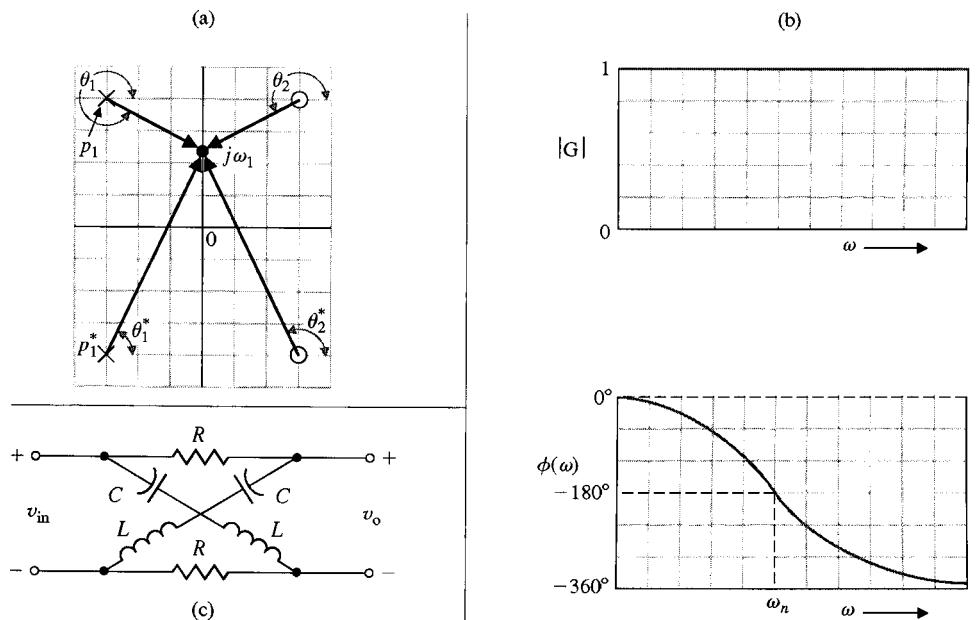


Fig. 8.18 (a) Configuração de pólos e zeros, (b) resposta de freqüência e (c) circuito simétrico de uma estrutura passa-todas.

### 8.3 UM EXEMPLO DE DESENHO DO DIAGRAMA DE BODE

O diagrama de Bode de uma função de transferência  $G(s)$ , com diversos zeros e pólos, é obtido adicionando o gráfico devido a cada um dos pólos e zeros individuais. A simplicidade deste método será ilustrado levando-se em conta uma função de transferência que possua todos os fatores considerados na seção anterior. A função de transferência sob interesse é

$$G(j\omega) = \frac{5(1 + j0,1\omega)}{j\omega(1 + j0,5\omega)(1 + j0,6(\omega/50) + (j\omega/50)^2)}. \quad (8.42)$$

Os fatores, na ordem em que ocorrem à medida que a freqüência cresce são os seguintes:

1. Um ganho constante  $K = 5$
2. Um polo na origem
3. Um polo em  $\omega = 2$
4. Um zero em  $\omega = 10$
5. Um par de pólos complexos em  $\omega = \omega_n = 50$

Primeiramente será traçada a característica de magnitude para cada um dos fatores individuais dos pólos e zeros e o ganho constante.

1. O ganho constante é  $20 \log 5 = 14$  dB, como está mostrado na Fig. 8.19.
2. A magnitude do polo na origem aumenta desde a freqüência zero até as freqüências no infinito e tem uma inclinação de  $-20$  dB/década cruzando a linha de 0 dB em  $\omega = 1$ , como mostrado na Fig. 8.19.
3. A aproximação assintótica do polo em  $\omega = 2$  tem uma inclinação de  $-20$  dB/década além da freqüência de corte em  $\omega = 2$ . A magnitude assintótica abaixo da freqüência de corte é 0 dB, como mostrado na Fig. 8.19.
4. A magnitude assintótica para o zero em  $\omega = 10$  tem uma inclinação de  $+20$  dB/década além da freqüência de corte em  $\omega = 10$ , como mostrado na Fig. 8.19.

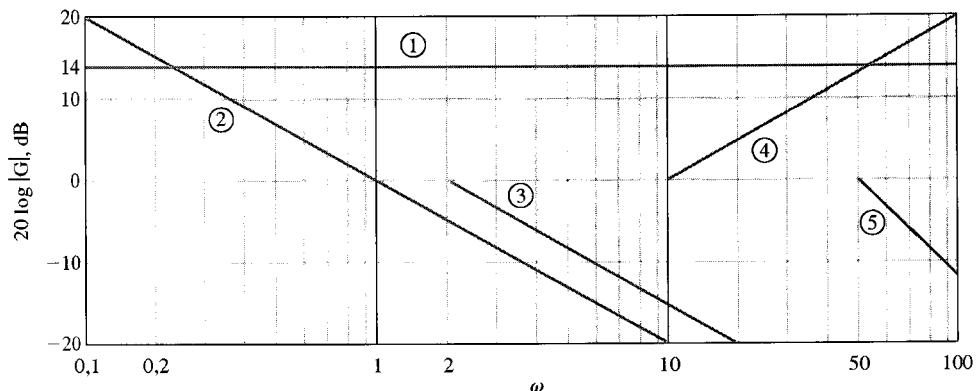


Fig. 8.19 Assintotas de magnitude de pólos e zeros usados no exemplo.

5. A aproximação assintótica para o par de pólos complexos em  $\omega = \omega_n = 50$  tem uma inclinação de  $-40$  dB/década devida às formas quadráticas. A freqüência de corte é  $\omega = \omega_n = 50$ , como mostrado na Fig. 8.19. Esta aproximação deve ser corrigida para a magnitude real tendo em vista que a relação de amortecimento é  $\zeta = 0,3$ , e que a magnitude difere apreciavelmente da aproximação, como mostrado na Fig. 8.20.

Por conseguinte, a magnitude assintótica total pode ser traçada adicionando as assintotas relativas a cada fator, como mostrado pela linha cheia na Fig. 8.20. Examinando a curva assintótica da Fig. 8.20, constata-se que a curva pode ser obtida diretamente traçando cada assintota à medida que a freqüência cresce. Assim, a inclinação é  $-20$  dB/década para  $(j\omega)^{-1}$  cruzando 14 dB em  $\omega = 1$ . Então, em  $\omega = 2$ , a inclinação se torna  $-40$  dB/década devido ao polo em  $\omega = 2$ . A inclinação muda para  $-20$  dB/década devido ao zero em  $\omega = 10$ . Finalmente, a inclinação se torna  $-60$  dB/década em  $\omega = 50$  para o par de pólos complexos em  $\omega_n = 50$ .

A curva de magnitude exata é então obtida utilizando-se a Tabela 8.2, que fornece a diferença entre a curva real e a curva assintótica para um único polo ou zero. A curva de magnitude exata para o par de pólos complexos é obtida utilizando-se a Fig. 8.10(a) para o fator quadrático. A curva de magnitude exata para  $G(j\omega)$  é mostrada pela linha tracejada na Fig. 8.20.

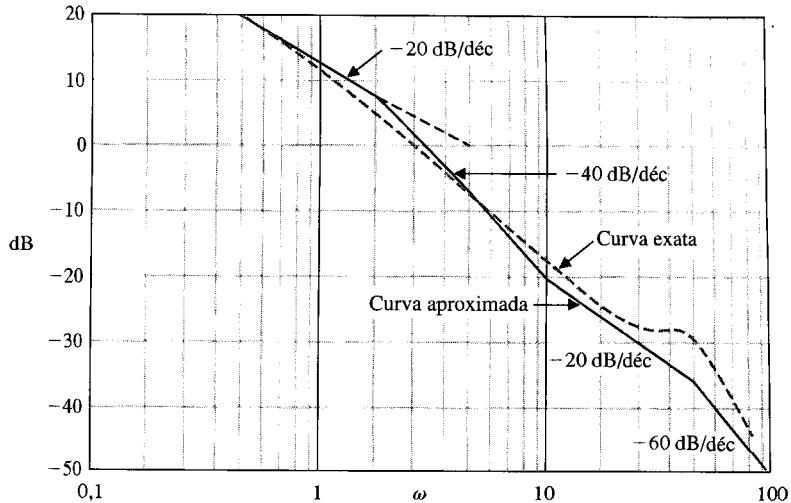


Fig. 8.20 Característica de magnitude.

A característica de fase pode ser obtida adicionando-se a fase para cada fator individual. Usualmente a aproximação linear da característica de fase para um único pólo ou zero é adequada para uma análise inicial ou tentativa de projeto. Assim as características de fase individuais para os pólos e zeros são mostradas na Fig. 8.21.

1. A fase do ganho constante é  $0^\circ$ .
2. A fase do pólo na origem é uma constante  $-90^\circ$ .
3. A aproximação linear da característica de fase para o pólo em  $\omega = 2$  é mostrada na Fig. 8.21, onde o deslocamento de fase é  $-45^\circ$  em  $\omega = 2$ .
4. A aproximação linear da característica de fase para o zero em  $\omega = 10$  também é mostrada na Fig. 8.21, onde o deslocamento de fase é  $+45^\circ$  em  $\omega = 10$ .
5. A característica de fase real para o par de pólos complexos é obtida da Fig. 8.10 e é mostrada na Fig. 8.21.

Por conseguinte, a característica de fase total,  $\phi(\omega)$ , é obtida adicionando a fase devida a cada fator, como mostrado na Fig. 8.21. Embora esta curva seja uma aproximação, sua utilidade merece consideração como uma primeira tentativa para determinar a característica de fase. Assim, por exemplo, uma freqüência de interesse, como será assinalado na seção seguinte, é a freqüência para a qual  $\phi(\omega) = -180^\circ$ . A curva aproximada indica que um deslocamento de fase de  $-180^\circ$  ocorre em  $\omega = 46$ . O deslocamento de fase real em  $\omega = 46$  pode ser calculado rapidamente como

$$\phi(\omega) = -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} \omega\tau_1 + \operatorname{tg}^{-1} \omega\tau_2 - \operatorname{tg}^{-1} \frac{2\zeta u}{1-u^2}, \quad (8.43)$$

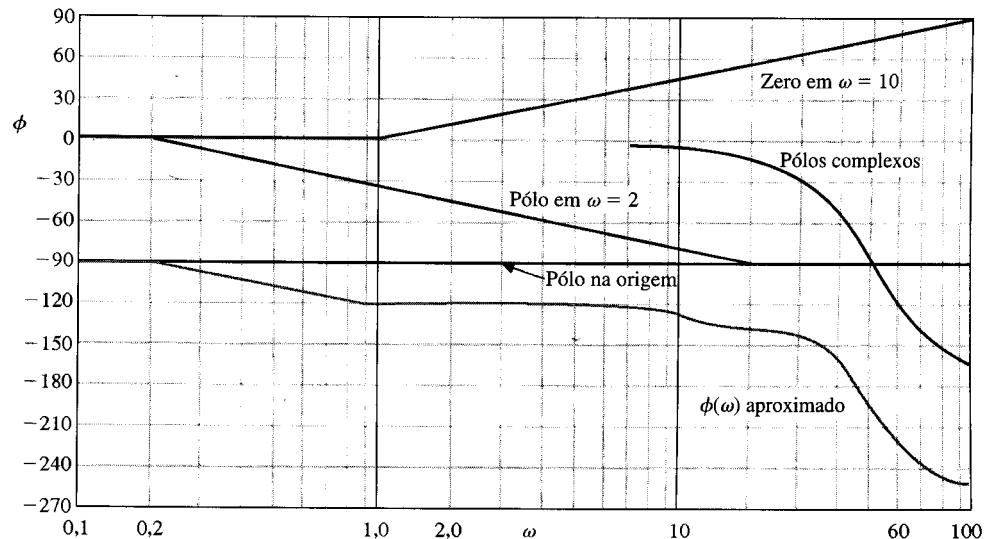


Fig. 8.21 Característica de fase.

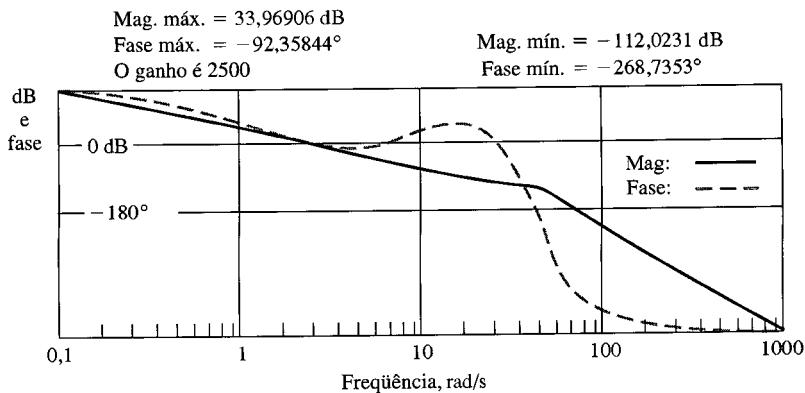


Fig. 8.22 Gráfico de Bode de  $G(j\omega)$  da Eq. (8.42).

onde

$$\tau_1 = 0,5, \quad \tau_2 = 0,1, \quad u = \omega/\omega_n = \omega/50.$$

Em seguida encontra-se

$$\phi(46) = -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} 23 + \operatorname{tg}^{-1} 4,6 - \operatorname{tg}^{-1} 3,55 = -175^\circ, \quad (8.44)$$

e a curva aproximada apresenta um erro de  $5^\circ$  em  $\omega = 46$ . Assim, uma vez que a freqüência de interesse aproximada seja determinada a partir da curva de fase aproximada, o valor exato do deslocamento de fase é determinado prontamente usando-se a relação de fase exata (Eq. 8.43). Esta abordagem é usualmente a preferida no cálculo exato do deslocamento de fase para todas as freqüências ao longo de várias décadas. Em resumo, pode-se obter curvas aproximadas para a magnitude e para o deslocamento de fase de uma função de transferência  $G(j\omega)$  a fim de se determinarem as faixas de freqüência importantes. Pode-se então, calcular os valores exatos de magnitude e de defasagem no interior de faixas de freqüência importantes relativamente pequenas usando as equações exatas, como a Eq. (8.43).

A resposta de freqüência de  $G(j\omega)$  pode ser calculada e traçada usando programas de computador como o MATLAB. Os diagramas de Bode relativos ao exemplo desta seção (Eq. 8.42) podem ser obtidos, como está mostrado na Fig. 8.22. Os diagramas são gerados para quatro décadas e a linha 0 dB é indicada bem como a linha de  $-180^\circ$ . Os dados dos gráficos indicam que a magnitude é de 34 dB e que a fase é de  $-92,36^\circ$  em  $\omega = 0,1$ . De modo semelhante, os dados indicam que a magnitude é  $-43$  dB e a fase é  $-243^\circ$  em  $\omega = 100$ . Usando os dados fornecidos, encontra-se que a magnitude é 0 dB em  $\omega = 3,0$ , e a fase é  $-180^\circ$  em  $\omega = 50$ .

## 8.4 MEDIDAS DE RESPOSTA DE FREQÜÊNCIA

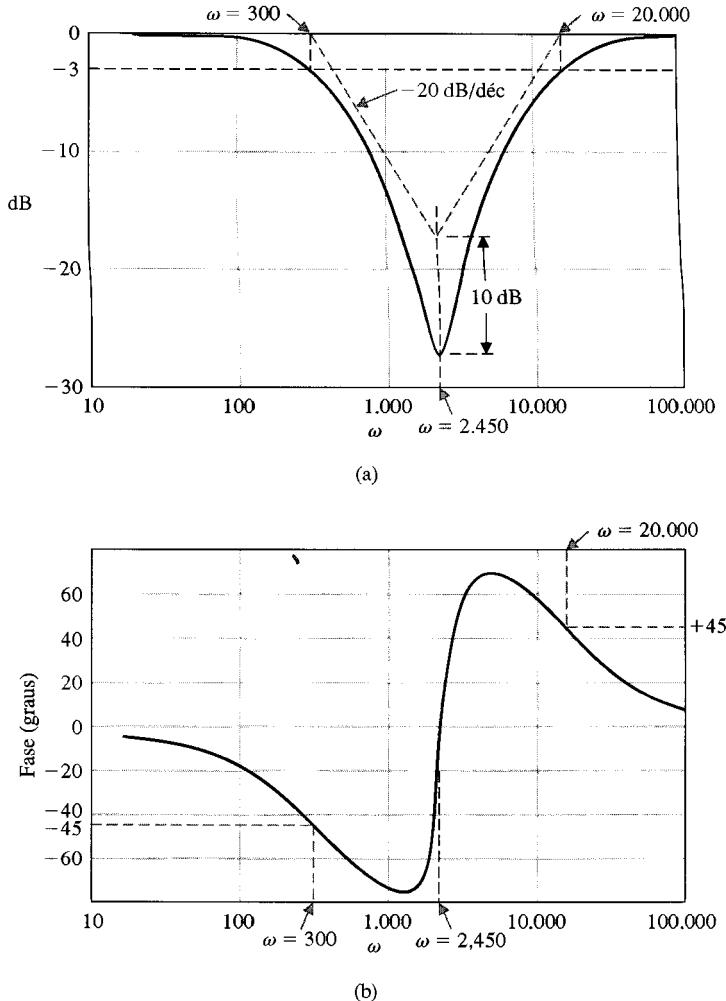
A onda senoidal pode ser usada para medir a resposta de freqüência a malha aberta de um sistema de controle. Na prática, são obtidos um gráfico de amplitude versus freqüência e um gráfico de fase versus freqüência [1, 3, 6]. A partir destes dois gráficos, é possível deduzir a função de transferência a malha aberta  $GH(j\omega)$ . De modo semelhante, é possível obter a resposta de freqüência a malha fechada de um sistema de controle,  $T(j\omega)$ , e deduzir a função de transferência real.

Um instrumento chamado de analisador de onda pode ser usado para medir as variações de amplitude e de fase à medida que se altera a freqüência da onda senoidal de entrada. Além disto, um instrumento chamado de analisador de função de transferência pode ser usado para medir as funções de transferência de malha aberta e malha fechada [6].

Um instrumento analisador de sinal, o Analisador de Sinal Dinâmico Hewlett-Packard 3562A, executa as medidas da resposta de freqüência de CC a 100 kHz. Recursos embutidos para análise e modelagem permitem deduzir pólos e zeros a partir das respostas de freqüência medidas ou construir respostas de magnitude e de fase a partir de modelos do usuário. Este instrumento pode também sintetizar a resposta de freqüência de um modelo de um sistema, permitindo a comparação com a resposta real (ver Fig. E8.10).

Como exemplo de determinação de função de transferência a partir dos diagramas de Bode, considere-se o gráfico mostrado na Fig. 8.23. O sistema é um circuito estável consistindo de resistores e capacitores.

Como a magnitude diminui cerca de  $-20$  dB por década à medida que  $\omega$  cresce entre 100 e 1000 e como a fase é  $-45^\circ$  e a magnitude é  $-3$  dB em 300 rad/s, deduz-se que o fator é um pôlo em  $p_1 = 300$ . Deduz-se, a seguir, que existe um par quadrático de zeros em  $\omega_n = 2450$  com  $\zeta = 0,16$ . Infere-se isto a partir da observação de que a fase muda abruptamente cerca de  $+180^\circ$ , passando por  $0^\circ$  em



**Fig. 8.23** Diagramas de Bode de um sistema com função de transferência não identificada.

$\omega_n = 2450$ . São esboçadas as assíntotas para o pólo,  $p_1$ , e para o numerador da função de transferência proposta  $T(s)$  da Eq. (8.45), como está mostrado na Fig. 8.23(a).

$$T(s) = \frac{(s/\omega_n)^2 + (2\xi/\omega_n)s + 1}{(s/p_1 + 1)(s/p_2 + 1)}. \quad (8.45)$$

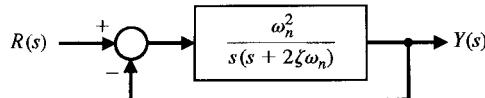
A diferença de magnitude a partir da freqüência de corte ( $\omega_n = 2450$ ) das assíntotas para o valor mínimo da resposta é de 10 dB, o que indica, com base na Eq. (8.37), que  $\zeta = 0,16$ . (Comparar o gráfico dos zeros quadráticos com o gráfico dos pólos quadráticos na Fig. 8.10. Observar que os gráficos dos zeros quadráticos precisam ser virados de “cabeça para baixo” e que a fase vai de  $0^\circ$  a  $+180^\circ$  ao invés de  $-180^\circ$ .) Como a inclinação da magnitude retorna a 0 dB/década à medida que  $\omega$  ultrapassa 50.000, conclui-se que há um segundo pólo bem como dois zeros. Este segundo pólo está em  $p_2 = 20.000$  porque, neste ponto, a magnitude a partir das assíntotas é de  $-3$  dB e a fase é de  $+45^\circ$  ( $-90^\circ$  para o primeiro pólo,  $+180^\circ$  para o par quadrático de zeros e  $-45^\circ$  para o segundo pólo). Por conseguinte, a função de transferência é

$$T(s) = \frac{(s/2450)^2 + (0,32/2450)s + 1}{(s/300 + 1)(s/20000 + 1)}.$$

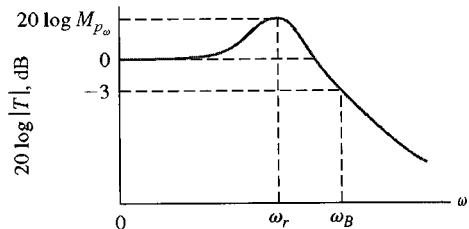
Esta resposta de freqüência é obtida realmente a partir de um circuito T (ver Problemas 2.8 e 8.3 e a Fig. 8.14).

## 8.5 ESPECIFICAÇÕES DE DESEMPENHO NO DOMÍNIO DE FREQÜÊNCIA

Deve-se continuamente formular a pergunta: como a resposta de freqüência de um sistema se relaciona com a resposta transitória esperada do sistema? Em outras palavras, dado um conjunto de especificações no domínio do tempo (desempenho transitório), como especificar a resposta de freqüência? Para um sistema de segunda ordem simples, esta pergunta já foi respondida considerando-se o desempenho no domínio do tempo em termos de ultrapassagem, tempo de assentamento e outros cri-



**Fig. 8.24** Sistema de segunda ordem a malha fechada.



**Fig. 8.25** Característica de magnitude do sistema de segunda ordem.

térios, como a integral do erro ao quadrado. Para o sistema de segunda ordem mostrado na Fig. 8.24, a função de transferência a malha fechada é

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (8.46)$$

A resposta de freqüência deste sistema com retroação se parece com a mostrada na Fig. 8.25. Como este é um sistema de segunda ordem, a razão de amortecimento do sistema está relacionada com o valor máximo de magnitude  $M_{p_\omega}$ , que ocorre na freqüência  $\omega_r$ , como mostrado na Fig. 8.25.

**O valor máximo da resposta de freqüência,  $M_{p_\omega}$ , é alcançado na freqüência de ressonância  $\omega_r$ .**

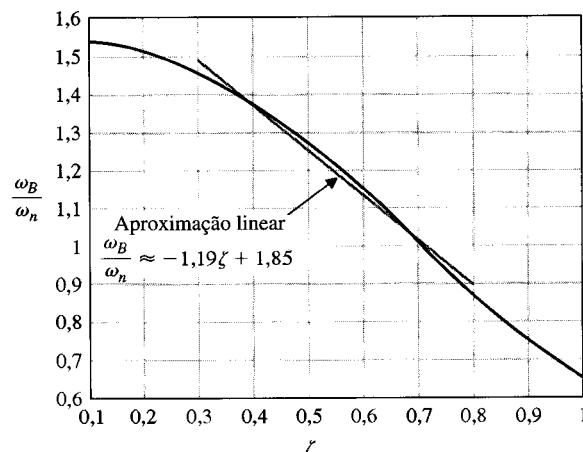
A banda passante,  $\omega_B$ , é uma medida da capacidade do sistema para reproduzir fielmente um sinal de entrada.

**A banda passante é dada pela freqüência,  $\omega_B$ , na qual a resposta de freqüência foi reduzida de 3 dB em relação ao valor desta em freqüências baixas.**

A freqüência de ressonância  $\omega_r$  e a banda passante de  $-3$  dB podem ser relacionadas com a velocidade da resposta transitória. Assim, à medida que a banda passante  $\omega_B$  aumenta, o tempo de subida da resposta ao degrau do sistema diminui. Além disto, a ultrapassagem da resposta a uma entrada em degrau se relaciona com  $M_{p_\omega}$  através da razão de amortecimento  $\zeta$ . As curvas da Fig. 8.11 relacionam a magnitude e a freqüência de ressonância com a razão de amortecimento do sistema de segunda ordem. A ultrapassagem da resposta a um degrau pode então ser estimada com base na Fig. 5.8 ou calculada utilizando-se a Eq. (5.15). Constatata-se, assim, que a ultrapassagem devida a uma entrada em degrau cresce à medida que o valor do pico de ressonância  $M_{p_\omega}$  aumenta. Em geral, a magnitude  $M_{p_\omega}$  indica a estabilidade relativa do sistema.

A banda passante de um sistema,  $\omega_B$ , como indicada na resposta de freqüência, pode ser relacionada aproximadamente com a freqüência natural do sistema. A Fig. 8.26 mostra a banda passante normalizada,  $\omega_B/\omega_n$ , em função de  $\zeta$  para o sistema de segunda ordem da Eq. (8.46). A resposta do sistema de segunda ordem a uma entrada em degrau unitário é

$$y(t) = 1 + Be^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_1 t + \theta). \quad (8.47)$$



**Fig. 8.26** Banda passante normalizada,  $\omega_B/\omega_n$ , versus  $\zeta$  para um sistema de segunda ordem (Eq. 8.46). A aproximação  $\omega_B/\omega_n = -1,19\zeta + 1,85$  é precisa para  $0,3 \leq \zeta \leq 0,8$ .

Para  $\zeta$  constante, quanto maior for o valor de  $\omega_n$ , mais rapidamente a resposta tenderá para o valor desejado de estado estacionário. As especificações desejadas no domínio de freqüência são:

1. Magnitudes de ressonância relativamente pequenas: por exemplo,  $M_{p_o} < 1,5$ .
2. Larguras de banda passante relativamente grandes de modo que a constante de tempo  $\tau = 1/\zeta\omega_n$  seja suficientemente pequena.

A utilidade destas especificações da resposta de freqüência e sua relação com o desempenho transitório real depende da aproximação do sistema por um par de pólos complexos de segunda ordem. Esta aproximação foi discutida na Seção 7.3, e os pólos de segunda ordem de  $T(s)$  são chamados de **pólos dominantes**. Se a resposta de freqüência for dominada por um par de pólos complexos, serão válidas as relações entre a resposta de freqüência e a resposta no tempo discutidas nesta seção. Felizmente, uma grande parte dos sistemas de controle satisfaz, na prática, esta aproximação de dominância de segunda ordem.

As especificações de erro de estado estacionário também podem ser relacionadas com a resposta a malha fechada do sistema. Como se viu na Seção 5.4, o erro de estado estacionário para um sinal de entrada de teste específico pode ser relacionado ao ganho e ao número de integradores (pólos na origem) da função de transferência a malha aberta. Por conseguinte, para o sistema mostrado na Fig. 8.24, o erro de estado estacionário para um sinal de entrada em rampa é especificado em termos de  $K_v$ , a constante de velocidade. O erro de estado estacionário para o sistema é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{A}{K_v},$$

onde  $A$  = magnitude da entrada em rampa. A constante de velocidade para o sistema a malha fechada da Fig. 8.24 é

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \right) = \frac{\omega_n}{2\zeta}. \quad (8.48)$$

A função de transferência  $G(s)$  pode ser escrita sob a forma de diagrama de Bode (em termos das constantes de tempo) como

$$G(s) = \frac{(\omega_n/2\zeta)}{s(s/(2\zeta\omega_n) + 1)} = \frac{K_v}{s(\tau s + 1)}, \quad (8.49)$$

e a constante de ganho é  $K_v$  para este sistema do tipo um. Assim, reexaminando-se o exemplo da Seção 8.3, tem-se um sistema do tipo um com uma função de transferência a malha aberta

$$G(j\omega) = \frac{5(1 + j\omega\tau_2)}{j\omega(1 + j\omega\tau_1)(1 + j0,6u - u^2)}, \quad (8.50)$$

onde  $u = \omega/\omega_n$ . Em consequência, neste caso tem-se  $K_v = 5$ . Em geral, se a função de transferência a malha aberta de um sistema com retroação for escrita como

$$G(j\omega) = \frac{K \prod_{i=1}^M (1 + j\omega\tau_i)}{(j\omega)^N \prod_{k=1}^Q (1 + j\omega\tau_k)}, \quad (8.51)$$

então o sistema será do tipo  $N$  e o ganho  $K$  é a constante de ganho para o erro de estado estacionário. Assim, para um sistema do tipo zero que possui uma função de transferência a malha aberta, tem-se

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)}. \quad (8.52)$$

$K = K_p$  (constante de erro de posição) que aparece, no diagrama de Bode, como ganho nas freqüências baixas.

Além disto, a constante de ganho  $K = K_v$  dos sistemas tipo um aparece como ganho da seção de freqüências baixas na característica de magnitude. Considerando-se somente o pólo e o ganho do sistema tipo um da Eq. (8.50), tem-se

$$G(j\omega) = \left( \frac{5}{j\omega} \right) = \left( \frac{K_v}{j\omega} \right), \quad \omega < 1/\tau_1, \quad (8.53)$$

e o valor de  $K_v$  é igual ao valor da freqüência em que esta parte da característica de magnitude intercepta a linha de 0 dB. Por exemplo, na Fig. 8.20, a interseção de  $(K_v/j\omega)$  nas freqüências baixas é igual a  $\omega = 5$ , como se espera.

Por conseguinte, as características da resposta de freqüência representam o desempenho de um sistema de forma bastante adequada e, com alguma experiência, são bastante úteis na análise e no projeto de sistemas de controle com retroação.

## 8.6 DIAGRAMAS LOGARÍTMICOS DE MAGNITUDE E DE FASE

Há diversos métodos alternativos de apresentação da resposta de freqüência de uma função  $GH(j\omega)$ . Constatou-se que (1) o gráfico polar e (2) os diagramas de Bode são formas adequadas de apresentação gráfica da resposta de freqüência. Uma abordagem alternativa de retratar graficamente a resposta de freqüência consiste em traçar o logaritmo da magnitude em dB em função do ângulo de fase, para uma faixa de freqüências. Como estas informações são equivalentes às retratadas por intermédio dos diagramas de Bode, é normalmente mais fácil obter os diagramas de Bode e transferir as informações para as coordenadas do diagrama de magnitude logarítmica em função do ângulo de fase.

Uma ilustração retratará melhor o uso do diagrama magnitude logarítmica-ângulo de fase. Este diagrama aplicado à função de transferência

$$GH_1(j\omega) = \frac{5}{j\omega(0,5j\omega + 1)(j\omega/6 + 1)} \quad (8.54)$$

está mostrado na Fig. 8.27. Os números indicados sobre a curva são os valores de freqüência,  $\omega$ .

A curva magnitude logarítmica-ângulo de fase para a função de transferência

$$GH_2(j\omega) = \frac{5(0,1j\omega + 1)}{j\omega(0,5j\omega + 1)(1 + j0,6(\omega/50) + (\omega/50)^2)} \quad (8.55)$$

considerada na Seção 8.3 está mostrada na Fig. 8.28. Esta curva é obtida de forma mais direta utilizando-se os diagramas de Bode das Figs. 8.20 e 8.21 para transferir as informações da resposta de freqüência para o gráfico com coordenadas logarítmicas da magnitude e do ângulo de fase. A forma da curva da resposta de freqüência em um diagrama de coordenadas logarítmicas da magnitude e do ângulo de fase é particularmente importante à medida que a fase tende para  $-180^\circ$  e a magnitude tende a 0 dB. A curva da Eq. (8.54), mostrada na Fig. 8.27, difere substancialmente da curva da Eq. (8.55), mostrada na Fig. 8.28. Portanto, ao se estabelecer a correlação entre a forma da curva e a resposta transitória do sistema, estará sendo obtida uma outra representação útil da resposta de freqüência.

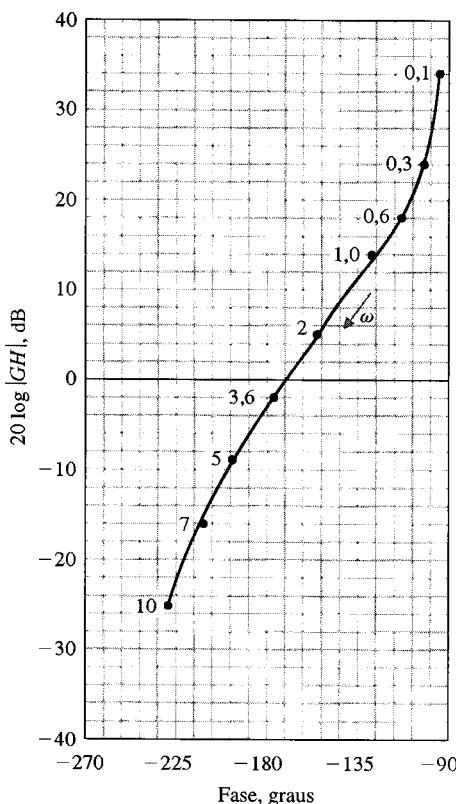


Fig. 8.27 Curva magnitude logarítmica-ângulo de fase de  $GH_1(j\omega)$ .

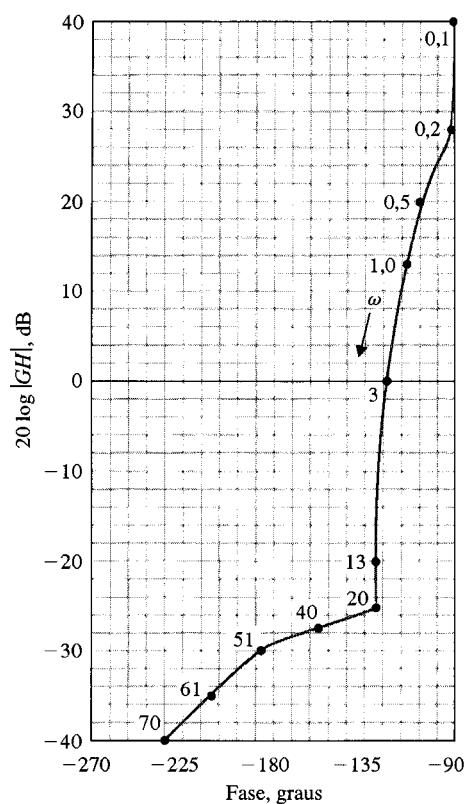


Fig. 8.28 Curva magnitude logarítmica-ângulo de fase de  $GH_2(j\omega)$ .

cia do sistema. No Cap. 9 será estabelecido um critério de estabilidade no domínio de freqüência, para o qual será útil empregar o diagrama de magnitude logarítmica-ângulo de fase na investigação da estabilidade relativa de sistemas de controle com retroação a malha fechada.

## 8.7 EXEMPLO DE PROJETO: SISTEMA DE CONTROLE PARA MÁQUINA DE GRAVAÇÃO

A máquina de gravação mostrada na Fig. 8.29(a) utiliza dois motores de acionamento e os fusos associados para posicionar o estilete de gravação segundo a direção  $x$  [7]. É utilizado um motor individual em cada um dos eixos  $y$  e  $z$ , como está mostrado. O modelo em diagrama de blocos para o sistema de controle de posição do eixo  $x$  está mostrado na Fig. 8.29(b). O objetivo é selecionar um ganho apropriado  $K$ , utilizando os métodos de resposta de freqüência, de modo que a resposta a comandos em degrau seja aceitável.

Para representar a resposta de freqüência do sistema, serão obtidos primeiro os diagramas de Bode a malha aberta e a malha fechada. Depois serão utilizados os diagramas de Bode a malha fechada para prever a resposta do sistema no domínio do tempo e cotejar os resultados previstos com os reais.

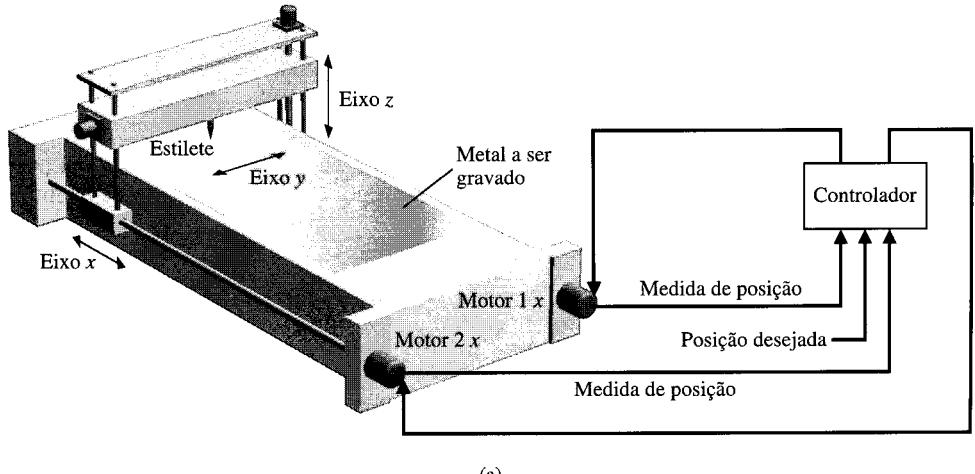
Para traçar a resposta de freqüência, escolheu-se arbitrariamente  $K = 2$  e se prosseguiu na obtenção dos diagramas de Bode. Se o resultado não for aceitável, o ganho será ajustado mais adiante.

A resposta de freqüência de  $G(j\omega)$  está listada parcialmente na Tabela 8.4 e está traçada na Fig. 8.30. Necessita-se da resposta de freqüência da função de transferência a malha fechada

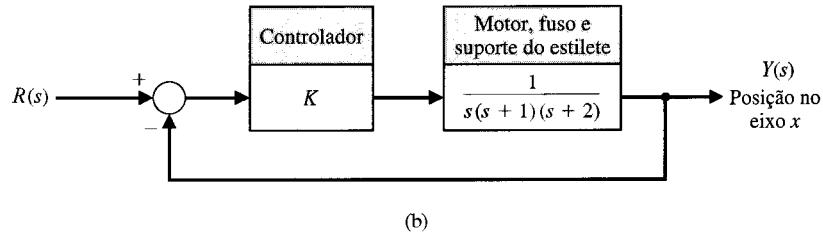
$$T(s) = \frac{2}{s^3 + 3s^2 + 2s + 2}. \quad (8.56)$$

Em consequência faz-se  $s = j\omega$ , obtendo

$$T(j\omega) = \frac{2}{(2 - 3\omega^2) + j\omega(2 - \omega^2)}. \quad (8.57)$$



(a)

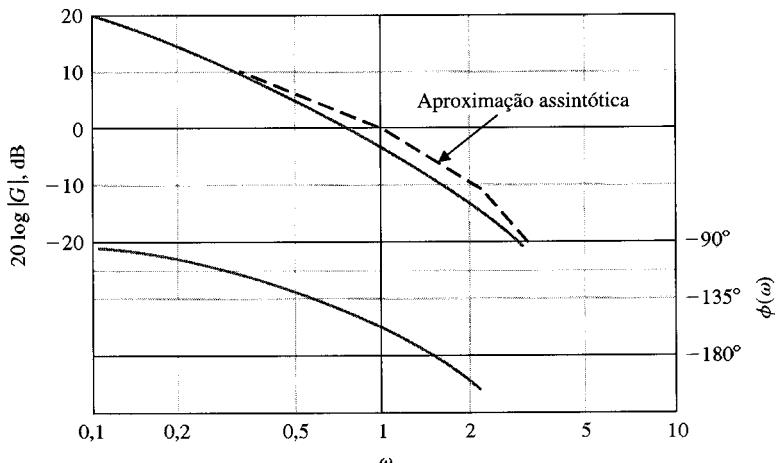


(b)

Fig. 8.29 (a) Sistema de controle de máquina gravadora. (b) Modelo em diagrama de blocos.

TABELA 8.4 Resposta de Freqüência para  $G(j\omega)$

$\omega$	0,2	0,4	0,8	1,0	1,4	1,8
$20 \log  G $	14	7	-1	-4	-9	-13
$\phi$	-107°	-123°	-150,5°	-162°	-179,5°	-193°



**Fig. 8.30** Diagramas de Bode para  $G(j\omega)$ .

Os diagramas de Bode do sistema a malha fechada estão mostrados na Fig. 8.31, onde  $20 \log |T| = 5$  dB em  $\omega_r = 0,8$ . Por conseguinte,

$$20 \log M_{p_\omega} = 5 \quad \text{ou} \quad M_{p_\omega} = 1,78.$$

Admitindo-se que o sistema possua raízes dominantes de segunda ordem, pode-se aproximar o sistema por meio da resposta de frequência com a forma mostrada na Fig. 8.10. Como  $M_{p_\omega} = 1,78$ , utiliza-se a Fig. 8.11 para estimar que  $\zeta = 0,29$ . Usando este valor de  $\zeta$  e de  $\omega_r = 0,8$ , pode-se empregar a Fig. 8.11 para estimar  $\omega/\omega_n = 0,91$ . Em consequência

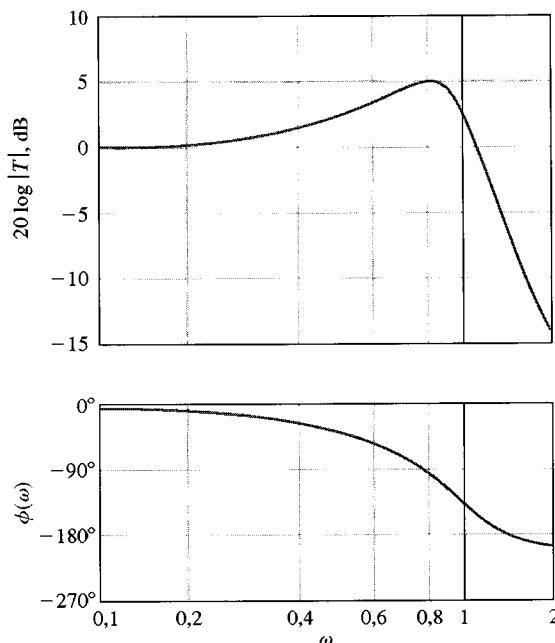
$$\omega_n = \frac{0,8}{0,91} = 0,88.$$

Como  $T(s)$  está sendo agora aproximada como um sistema de segunda ordem, tem-se

$$T(s) \cong \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{0,774}{s^2 + 0,51s + 0,774}. \quad (8.58)$$

Usa-se a Fig. 5.8 para prever uma ultrapassagem de 37% a uma entrada em degrau, com  $\zeta = 0,29$ . O tempo de assentamento no interior da faixa de 2% do valor final é estimado em

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{(0,29)0,88} = 15,7 \text{ segundos.}$$



**Fig. 8.31** Diagramas de Bode para sistema a malha fechada.

A ultrapassagem real para uma entrada em degrau é de 34% e o tempo de assentamento real é de 17 segundos. Consta-se, neste caso, que a aproximação de segunda ordem é razoável e pode ser usada na determinação de parâmetros adequados para o sistema. Se for desejado um sistema com um valor menor de ultrapassagem, será possível reduzir  $K$  para 1 e repetir o procedimento.

## 8.8 MÉTODOS DE RESPOSTA DE FREQÜÊNCIA USANDO MATLAB

Esta seção começa com uma apresentação dos diagramas de Bode e em seguida discute a conexão entre a resposta de freqüência às especificações no domínio do tempo. A seção termina com um exemplo ilustrativo de projeto de um sistema de controle no domínio de freqüência.

As funções MATLAB envolvidas são `bode` e `logspace`. A função `bode` é usada para gerar os diagramas de Bode e a função `logspace` produz um vetor com valores de freqüência espaçados em escala logarítmica utilizado pela função `bode`.

**Diagramas de Bode.** Seja a função de transferência

$$G(s) = \frac{5(1 + 0,1s)}{s(1 + 0,5s)(1 + (0,6/50)s + (1/50^2)s^2)}. \quad (8.59)$$

Os diagramas de Bode correspondentes à Eq. (8.59) estão mostrados na Fig. 8.32. Os diagramas consistem no ganho logarítmico em dB versus  $\omega$  em um gráfico e na fase  $\phi(\omega)$  versus  $\omega$  em um segundo gráfico. Como nos gráficos do lugar das raízes, será tentador contar exclusivamente com o MATLAB para obter diagramas de Bode. O MATLAB deve ser tratado como uma das ferramentas de um conjunto que pode ser usada para projetar e analisar sistemas de controle. É essencial desenvolver a capacidade de obter manualmente diagramas de Bode aproximados. Não existe substituto para uma compreensão clara da teoria subjacente.

Na Fig. 8.33 estão mostrados os diagramas de Bode obtidos com a função `bode`. Os diagramas de Bode são gerados automaticamente ao se chamar a função `bode` sem argumentos na esquerda. Em caso contrário, as características de magnitude e de fase são colocadas na área de trabalho por meio das variáveis `mag` e `fase`. Os diagramas de Bode são obtidos com a função `plot` usando `mag`, `fase` e `omega`. O vetor `omega` contém os valores de freqüência em rad/s para os quais os diagramas de Bode serão calculados. Se `omega` não for especificado, o MATLAB escolherá automaticamente os valores de freqüência colocando mais pontos nas regiões onde a resposta de freqüência estiver mudando rapidamente. Se for desejado especificar explicitamente as freqüências, é conveniente gerar o vetor `omega` usando a função `logspace`. A função `logspace` está mostrada na Fig. 8.34.

Os diagramas de Bode da Fig. 8.32 foram gerados usando o script mostrado na Fig. 8.35. A função `bode` selecionou automaticamente a faixa de freqüências de  $\omega = 0,1$  a 1000 rad/s. Esta faixa é possível de ser selecionada pelo usuário utilizando a função `logspace`. A função `bode` pode ser utilizada com modelos em variáveis de estado, como está mostrado na Fig. 8.36.

Tendo em mente o objetivo de projetar sistemas de controle que satisfaçam certas especificações de desempenho dadas no domínio do tempo, deve-se estabelecer uma conexão entre a respon-

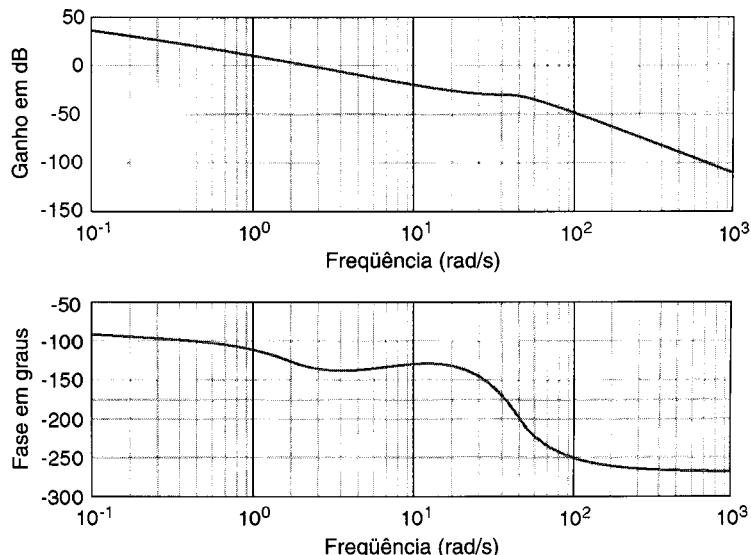


Fig. 8.32 Diagramas de Bode associados à Eq. (8.59).

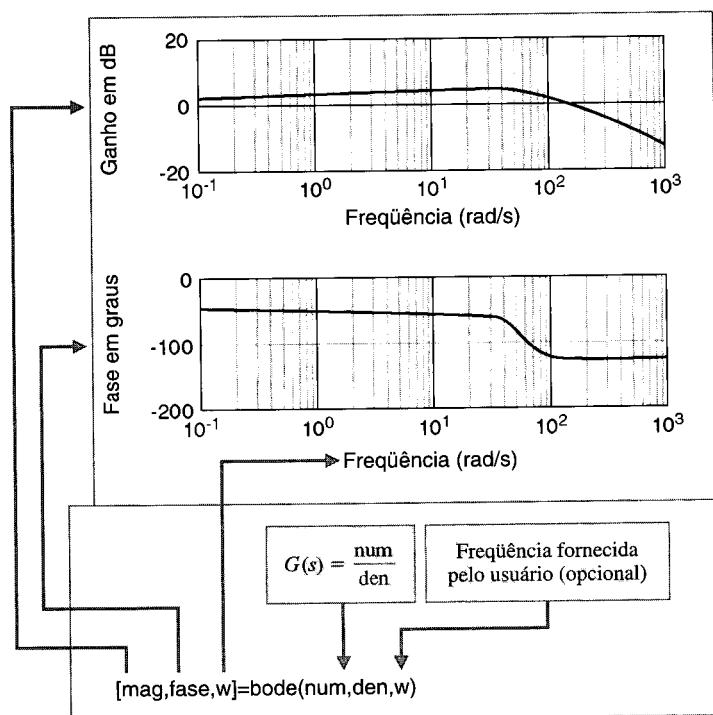


Fig. 8.33 Uso da função **bode**, dada  $G(s)$ .

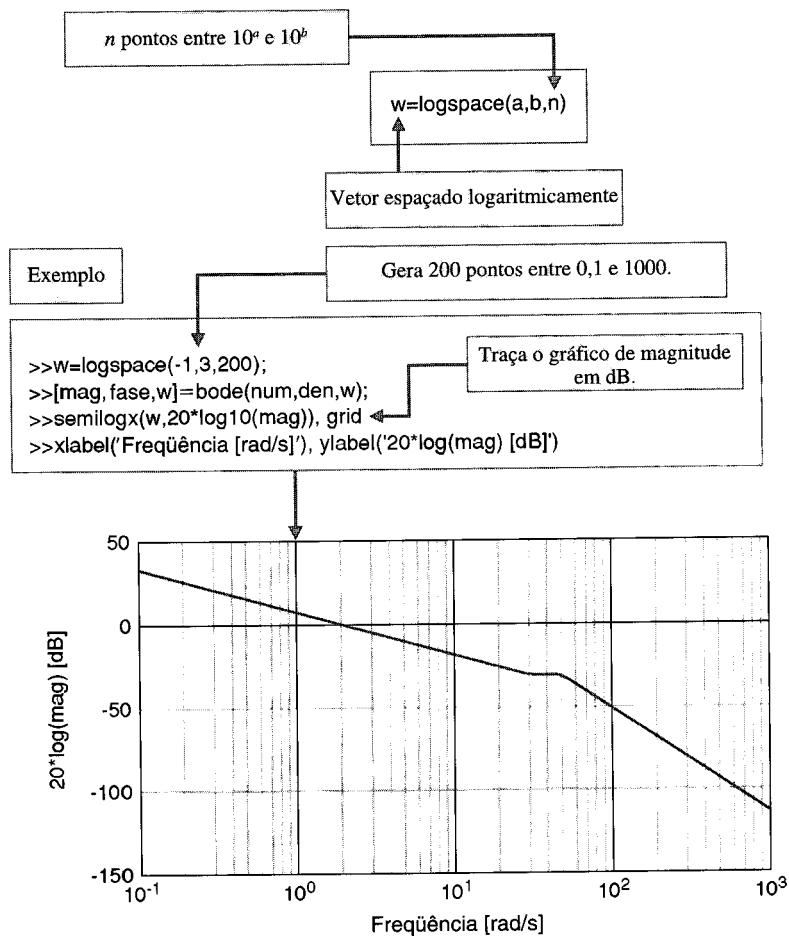


Fig. 8.34 A função **logspace**.

**Fig. 8.35** Script para os diagramas de Bode da Fig. 8.32.

bodescrp.m

% Script dos gráficos de Bode relativos à Fig. 8.22

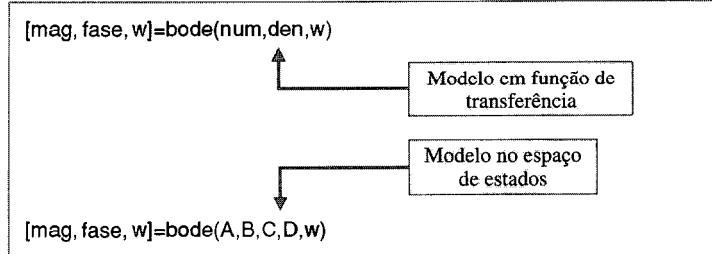
%

```
num=5*[0.1 1];
f1=[1 0]; f2=[0.5 1]; f3=[1/2500 .6/50 1];
den=conv(f1,conv(f2,f3));
```

Calcula  
 $s(1 + 0,5s)(1 + \frac{0,6}{50}s + \frac{1}{50^2}s^2)$

bode(num,den)

**Fig. 8.36** A função **bode** com um modelo em variáveis de estado.

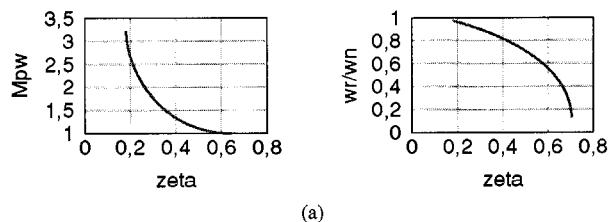


ta de freqüência e a resposta transitória de um sistema em função do tempo. A relação entre as especificações dadas no domínio do tempo e as dadas no domínio de freqüência depende da aproximação do sistema por um sistema de segunda ordem cujos pólos sejam as **raízes dominantes** do sistema.

Seja o sistema de segunda ordem mostrado na Fig. 8.24. A função de transferência a malha fechada é

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (8.60)$$

A característica de magnitude dos diagramas de Bode associada com a função de transferência a malha fechada da Eq. (8.60) está mostrada na Fig. 8.25. A relação entre a freqüência de ressonância,  $\omega_r$ , o valor máximo da resposta de freqüência,  $M_{p_0}$ , o coeficiente de amortecimento,  $\zeta$ , e a freqüência natural,  $\omega_n$ , é mostrada na Fig. 8.37 (e na Fig. 8.11). A informação na Fig. 8.37 será bastante útil ao se projetar sistemas de controle no domínio de freqüência que satisfäcam especificações no domínio do tempo.



(a)

relation.m

zeta=[0.15:0.01:0.7]; zeta excursiona entre 0,15 e 0,70

wr\_over\_wn=sqrt(ones(1,length(zeta))-2\*zeta.^2);

Mp=(2\*zeta .\* sqrt(ones(1,length(zeta))-zeta.^2)).^-1;

%

subplot(211),plot(zeta,Mp),grid

xlabel('zeta'), ylabel('Mp')

subplot(212),plot(zeta,wr\_over\_wn),grid

xlabel('zeta'), ylabel('wr/wn')

Gera gráficos

**Fig. 8.37** (a) Relação entre ( $M_{p_0}, \omega_r$ ) e ( $\zeta, \omega_n$ ) para um sistema de segunda ordem.  
(b) Script em MATLAB.

(b)

**EXEMPLO 8.5****Sistema de máquina de gravação**

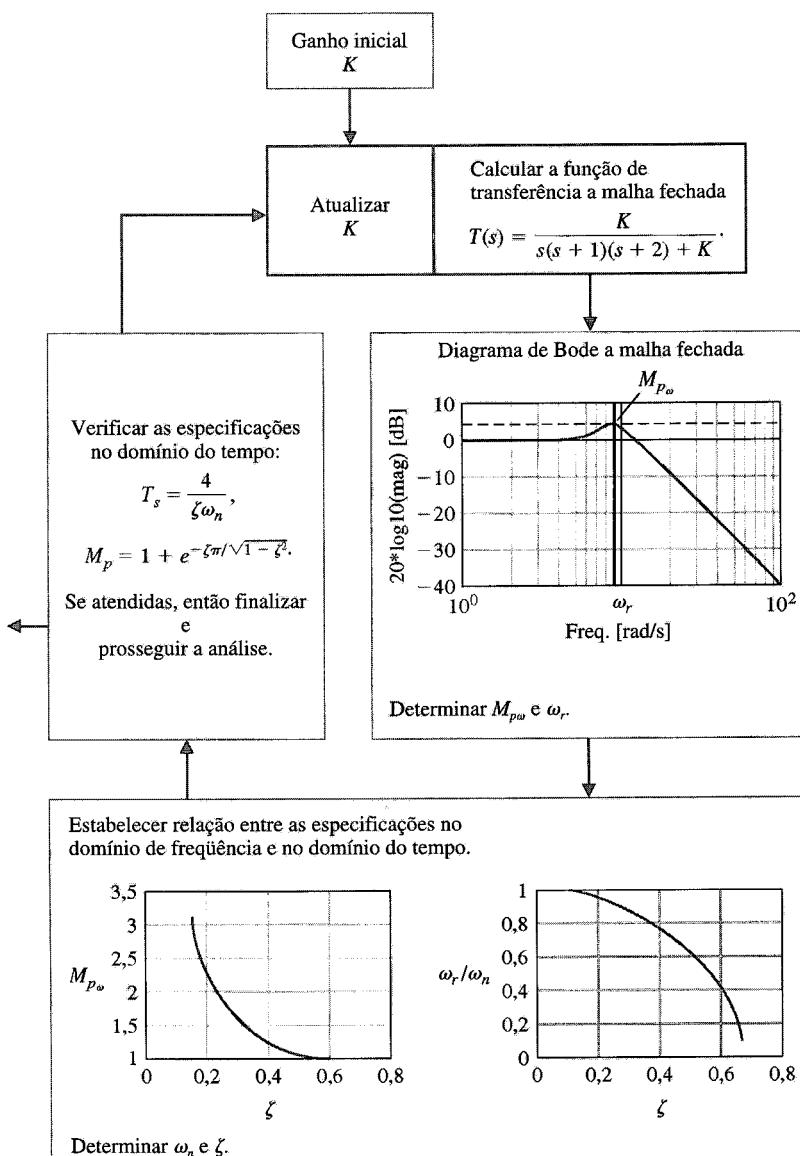
Considere-se o modelo em diagrama de blocos da Fig. 8.29. O objetivo é selecionar um valor de  $K$  de modo que o sistema de controle a malha fechada apresente uma resposta aceitável no domínio do tempo a um comando em degrau. Um diagrama de blocos funcional descrevendo o processo no domínio de freqüência está mostrado na Fig. 8.38. Escolhe-se inicialmente  $K = 2$  e faz-se variar o valor de  $K$  interativamente se o desempenho for inaceitável. O valor de  $K$  é definido em nível de comando. O script é então executado e se produzem os diagramas de Bode do sistema a malha fechada. Os valores de  $M_{p\omega}$  e de  $\omega_n$  são determinados por inspeção a partir dos diagramas de Bode. Esses valores são usados em conjunto com a Fig. 8.37 para se determinar os valores correspondentes de  $\zeta$  e de  $\omega_r$ .

Dadas a razão de amortecimento,  $\zeta$ , e a freqüência natural,  $\omega_n$ , o tempo de assentamento e a ultrapassagem percentual são estimados usando as fórmulas

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n}, \quad U.P. \approx 100 \exp \frac{-\zeta \pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}.$$

Se as especificações no domínio do tempo não forem satisfeitas, ajusta-se então o valor de  $K$  e se repete o procedimento.

Os valores de  $\zeta$  e de  $\omega_n$  correspondentes a  $K = 2$  são  $\zeta = 0,29$  e  $\omega_n = 0,88$ . Isto conduz a uma previsão de  $U.P. = 37\%$  e  $T_s = 15,7$  segundos. A resposta ao degrau, mostrada na Fig. 8.40, é uma verificação de que as previsões de desempenho são bastante precisas e que o sistema a malha fechada funciona adequadamente.



**Fig. 8.38** Diagrama de blocos funcional para o projeto da máquina de gravar, no domínio de freqüência.

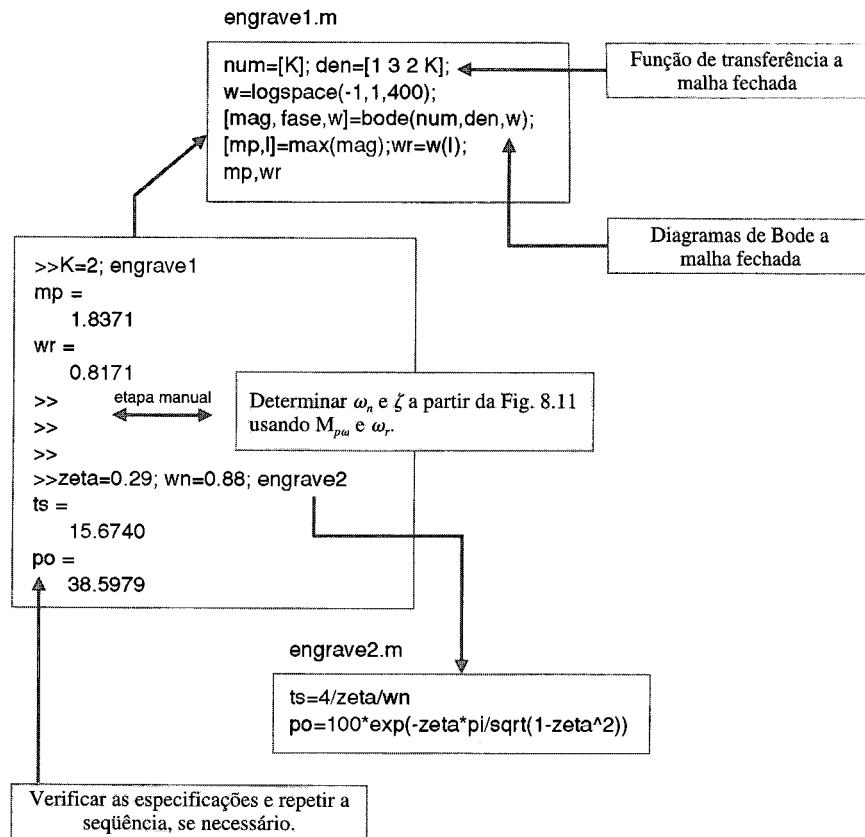
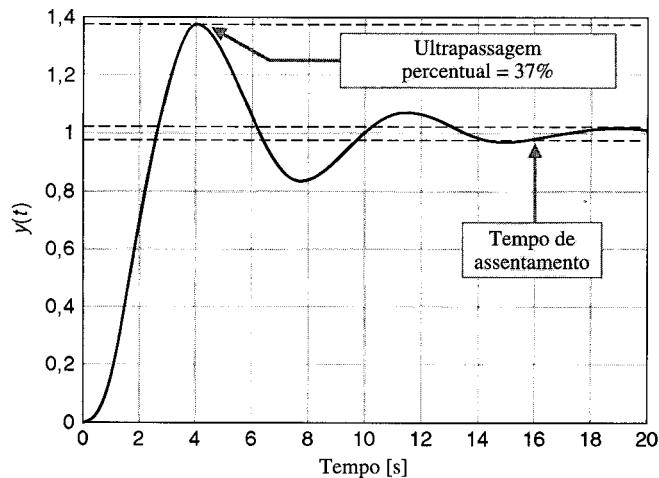


Fig. 8.39 Script para o projeto de uma máquina de gravar.



(a)

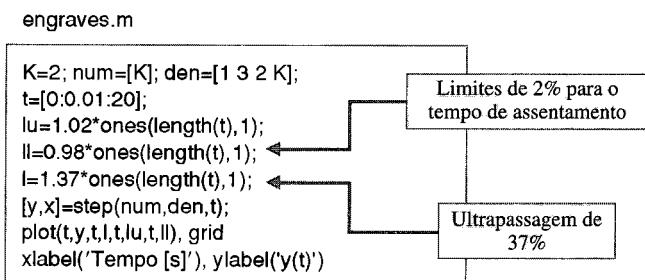


Fig. 8.40 (a) Resposta ao degrau da máquina de gravar para  $K = 2$ . (b) Script em MATLAB.

(b)

Neste exemplo, a aproximação por meio de um sistema de segunda ordem é razoável e conduz a um projeto aceitável. Contudo, nem sempre a aproximação de segunda ordem conduz diretamente a um bom projeto. Felizmente, com o MATLAB se pode construir um recurso de projeto interativo para auxiliar o procedimento de projeto reduzindo a carga computacional manual ao mesmo tempo em que fornece fácil acesso a um grande número de ferramentas de controle clássicas e modernas. ■

## 8.9 EXEMPLO DE PROJETO SEQÜENCIAL: SISTEMA DE LEITURA DE ACIONADOR DE DISCO



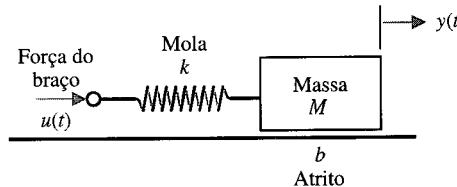
O acionador de disco usa uma suspensão em forma de lâmina para sustentar a montagem da cabeça leitora, como está mostrado na Fig. 2.61. Como assinalado na Seção 3.12, esta lâmina pode ser modelada por meio de uma mola e de uma massa, como está mostrado na Fig. 3.36. Neste capítulo será incluído o efeito elástico da lâmina no modelo do sistema motor-carga [22].

Modela-se a lâmina com a cabeça montada como uma massa  $M$ , uma mola  $k$  e um atrito de deslizamento  $b$ , como mostrado na Fig. 8.41. Admite-se aqui que a força  $u(t)$  é aplicada sobre a lâmina por meio do braço (ver Fig. 2.61). A função de transferência de um sistema mola-massa-amortecedor foi desenvolvida no Cap. 2, onde

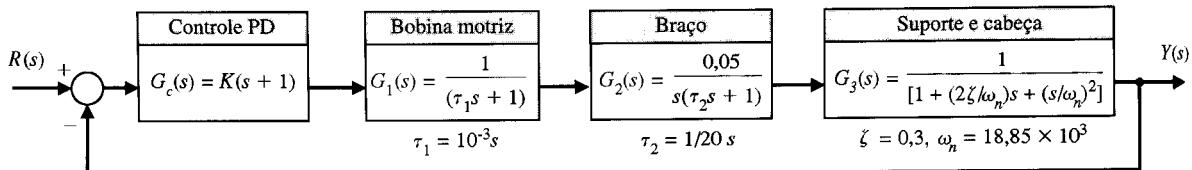
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_3(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + (2\zeta s/\omega_n) + (s/\omega_n)^2}$$

Um conjunto típico de lâmina e cabeça leitora apresenta  $\zeta = 0,3$  e uma frequência de ressonância em  $f_n = 3000$  Hz. Portanto,  $\omega_n = 18,85 \times 10^3$ , como está mostrado no modelo do sistema (ver a Fig. 8.42).

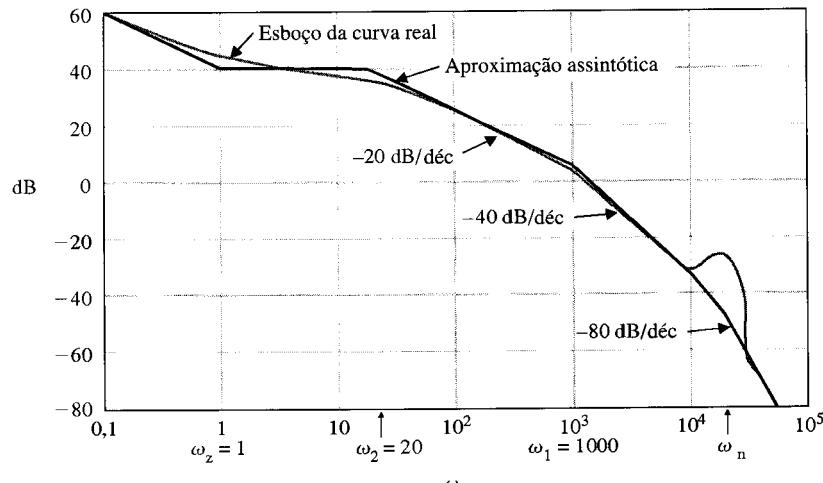
Esboçam-se primeiramente as características de magnitude para os diagramas de Bode a malha aberta. O esboço do diagrama de Bode está mostrado na Fig. 8.43. Observar que a curva real possui



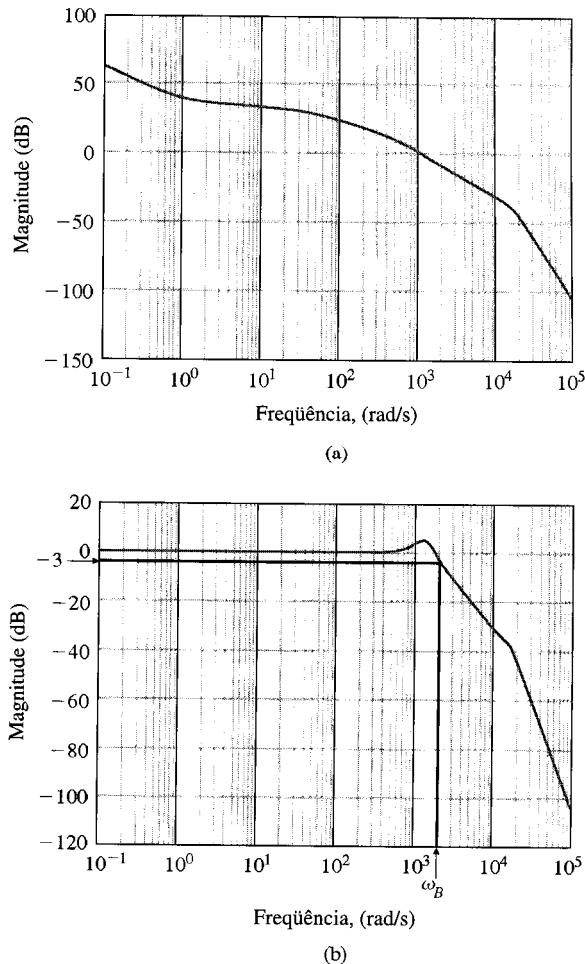
**Fig. 8.41** Modelo mola, massa, atrito do conjunto suporte-cabeça.



**Fig. 8.42** Controle de posição da cabeça de um acionador de disco, incluindo o efeito da montagem flexível.



**Fig. 8.43** Esboço do diagrama de Bode (magnitude) para o sistema da Fig. 8.42.



**Fig. 8.44** Gráfico de Bode (magnitude) para (a) função de transferência a malha aberta e (b) sistema a malha fechada.

um ganho de 10 dB (acima da curva assintótica) na ressonância ( $\omega = \omega_n$ ), como está mostrado no esboço. O esboço é uma representação gráfica de

$$20 \log |K(j\omega + 1)G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_3(j\omega)|,$$

para o sistema da Fig. 8.42 quando  $K = 400$ . Observe-se a ressonância na freqüência  $\omega_n$ . Deseja-se, como é óbvio, evitar que o sistema seja excitado nesta ressonância.

Os gráficos de magnitude e de fase dos diagramas de Bode a malha aberta e dos diagramas de Bode a malha fechada estão mostrados na Fig. 8.44. A banda passante do sistema a malha fechada é  $\omega_B = 2000$  rad/s. Pode-se estimar o tempo de assentamento (critério dos 2%) deste sistema usando

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n},$$

onde  $\zeta \approx 0,8$  e  $\omega_n \approx \omega_B = 2000$  rad/s. Portanto, espera-se  $T_s = 2,5$  ms para o sistema da Fig. 8.42. Enquanto  $K \leq 400$ , a ressonância estará fora da banda passante do sistema.

## 8.10 SUMÁRIO

Neste capítulo considerou-se a representação de um sistema de controle com retroação através de suas características de resposta de freqüência. A resposta de freqüência de um sistema foi definida como a resposta do sistema em regime permanente a um sinal de entrada senoidal. Foram consideradas diversas formas alternativas de gráficos da resposta de freqüência, incluindo o diagrama polar da resposta de freqüência  $G(j\omega)$  de um sistema e os gráficos logarítmicos, usualmente chamados de gráficos de Bode, e foi ilustrado o valor da medida logarítmica. Foi assinalada a facilidade para se obter os gráficos de Bode para diversos fatores de  $G(j\omega)$  e um exemplo foi considerado detalhadamente. A aproximação assintótica para o esboço dos diagramas de Bode simplifica os cálculos de forma considerável. Um resumo de quinze gráficos de Bode típicos está mostrado na Tabela 8.5. Foram discutidas várias especificações de desempenho no domínio de freqüência; entre elas a do valor máximo

TABELA 8.5 Diagramas de Bode para Funções de Transferência Típicas

$G(s)$	Diagramas de Bode	$G(s)$	Diagramas de Bode
1. $\frac{K}{s\tau_1 + 1}$		9. $\frac{K}{s^2(s\tau_1 + 1)}$	
2. $\frac{K}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$		10. $\frac{K(s\tau_a + 1)}{s^2(s\tau_1 + 1)}$ $\tau_a > \tau_1$	
3. $\frac{K}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)(s\tau_3 + 1)}$		11. $\frac{K}{s^3}$	
4. $\frac{K}{s}$		12. $\frac{K(s\tau_a + 1)}{s^3}$	

TABELA 8.5 Continuação

G(s)	Diagramas de Bode	G(s)	Diagramas de Bode
5. $\frac{K}{s(s\tau_1 + 1)}$		13. $\frac{K(s\tau_a + 1)(s\tau_b + 1)}{s^3}$	
6. $\frac{K}{s(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$		14. $\frac{K(s\tau_a + 1)(s\tau_b + 1)}{s(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)(s\tau_3 + 1)(s\tau_4 + 1)}$	
7. $\frac{K(s\tau_a + 1)}{s(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$		15. $\frac{K(s\tau_a + 1)}{s^2(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$	
8. $\frac{K}{s^2}$			

de magnitude,  $M_{p_0}$  e a freqüência de ressonância  $\omega_r$ . Foi observada a relação entre os gráficos dos diagramas de Bode e as constantes de erro do sistema ( $K_p$  e  $K_v$ ). Finalmente, foi considerado o diagrama de magnitude logarítmica versus ângulo de fase para representar a resposta de freqüência de um sistema.

## EXERCÍCIOS

- E8.1** O aumento da densidade de trilhas em acionadores de disco de computador requer o projeto cuidadoso dos sistemas de controle de posicionamento das cabeças [1]. A função de transferência é

$$G(s) = \frac{K}{(s + 1)^2}.$$

Traçar o gráfico polar para este sistema com  $K = 4$ . Calcular a fase e a magnitude em  $\omega = 0,5; 1, 2$  e assim por diante.

**Resposta:**  $|G(j0,5)| = 3,2$  e  $\angle G(j0,5) = -53^\circ$ .

- E8.2** A mão robótica operada por tendões mostrada na Fig. 1.13 usa um atuador pneumático [8]. O atuador pode ser representado por

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{2572}{s^2 + 386s + 15.434} \\ &= \frac{2572}{(s + 45,3)(s + 341)}. \end{aligned}$$

Traçar o gráfico de  $G(j\omega)$ . Mostrar que a magnitude de  $G(j\omega)$  é  $-15,6$  dB em  $\omega = 10$  e  $-30$  dB em  $\omega = 200$ . Mostrar também que a fase é  $-150^\circ$  em  $\omega = 700$ .

- E8.3** Um braço robótico possui uma função de transferência a malha aberta do controle de uma junta

$$G(s) = \frac{300(s + 100)}{s(s + 10)(s + 40)}.$$

Provar que a freqüência é igual a  $28,3$  rad/s quando o ângulo de fase de  $G(j\omega)$  for  $-180^\circ$ . Determinar a magnitude de  $G(j\omega)$  nessa freqüência.

**Resposta:**  $|G(j28,3)| = -2,5$  dB.

- E8.4** A resposta de freqüência de um processo da forma

$$G(s) = \frac{Ks}{(s + a)(s^2 + 20s + 100)}$$

está mostrada na Fig. E8.4. Determinar  $K$  e  $a$  a partir do exame das curvas de resposta de freqüência.

- E8.5** O gráfico de magnitude de uma função de transferência

$$G(s) = \frac{K(1 + 0,5s)(1 + as)}{s(1 + s/8)(1 + bs)(1 + s/36)}$$

está mostrada na Fig. E8.5. Determinar  $K$ ,  $a$ , e  $b$  a partir do gráfico.

**Resposta:**  $K = 8$ ,  $a = 1/4$ ,  $b = 1/24$ .

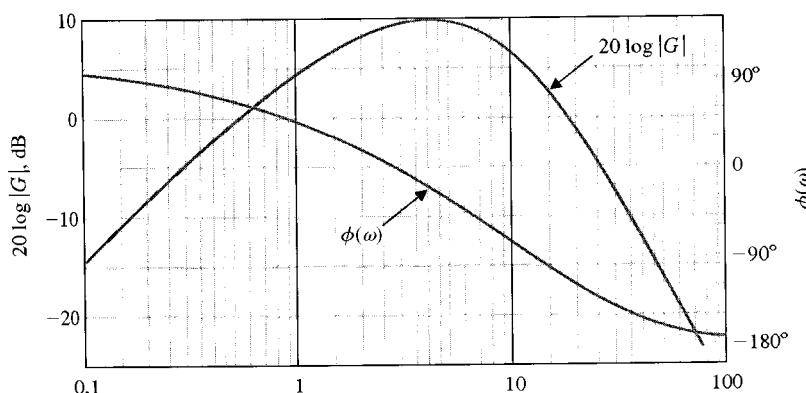


Fig. E8.4 Diagrama de Bode.

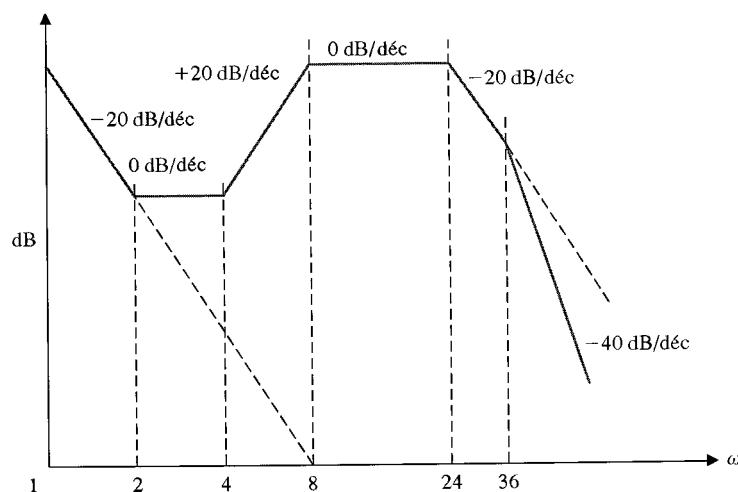


Fig. E8.5 Diagrama de Bode.

- E8.6** Foram propostos diversos estudos com um robô extraveicular que poderia se mover nas proximidades de uma estação espacial da NASA e executar tarefas físicas em diversos locais de trabalho [9]. O braço é controlado por um sistema de controle com retroação unitária com

$$G(s) = \frac{K}{s(s/10 + 1)(s/100 + 1)}.$$

Desenhar os diagramas de Bode para  $K = 100$  e determinar a freqüência na qual  $20 \log |G|$  é igual a 0 dB.

- E8.7** Considerar o sistema com uma função de transferência a malha fechada

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{4}{(s^2 + s + 1)(s^2 + 0,4s + 4)}.$$

Este sistema não terá erro estacionário para uma entrada em degrau. (a) Traçar a resposta de freqüência, observando os dois picos na resposta de magnitude. (b) Prever a resposta no domínio do tempo para uma entrada em degrau, observando que o sistema possui quatro pólos e não pode ser representado como um sistema dominante de segunda ordem. (c) Traçar a resposta ao degrau.

- E8.8** Um sistema com retroação possui a função de transferência

$$G(s)H(s) = \frac{50}{s^2 + 11s + 10}.$$

(a) Determinar as freqüências de corte (freqüências de quebra) para o gráfico de Bode. (b) Determinar a inclinação do gráfico assintótico nas freqüências muito baixas e muito altas. (c) Esboçar o gráfico de magnitude de Bode.

- E8.9** O diagrama de Bode de um sistema está mostrado na Fig. E8.9. Determinar a função de transferência  $G(s)$ .

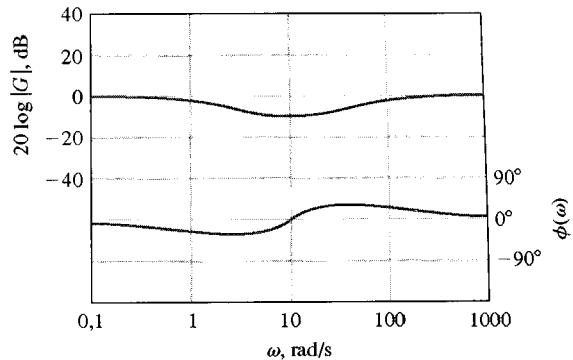
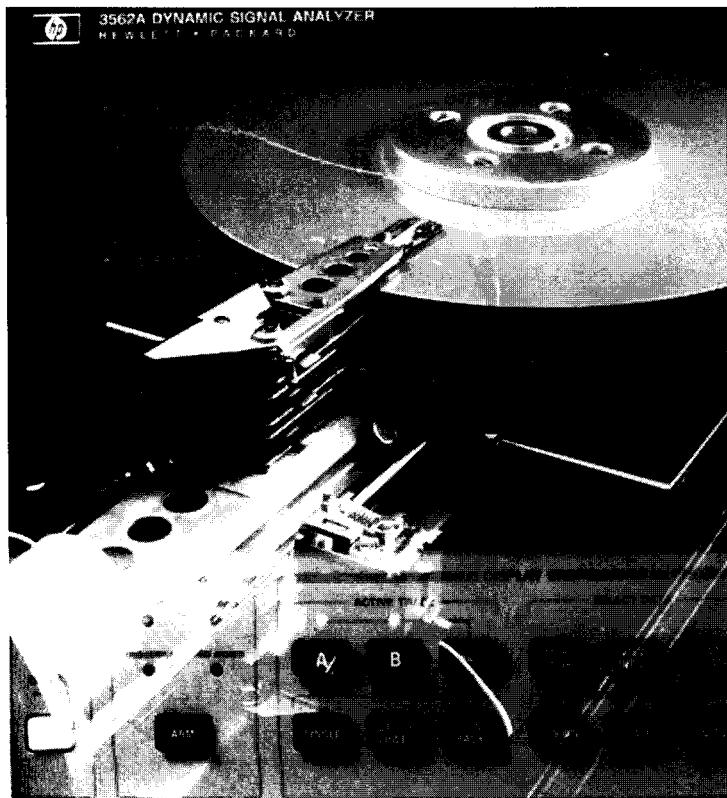
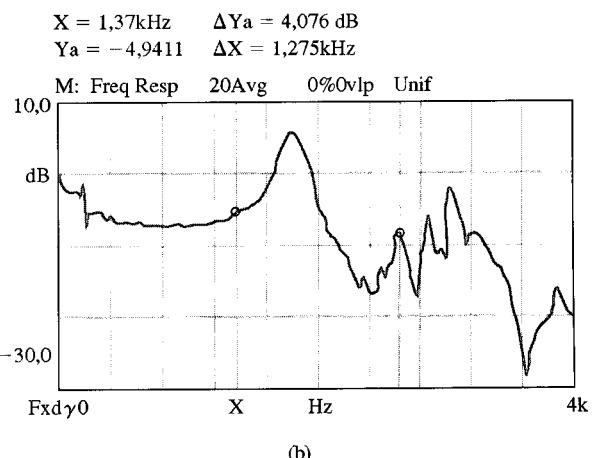


Fig. E8.9

- E8.10** O analisador dinâmico mostrado na Fig. E8.10(a) pode ser usado para mostrar a resposta de freqüência de um modelo  $G(j\omega)$  escollhido. Também está mostrado um mecanismo para o posicionamento da cabeça de um acionador de disco que usa um motor linear para posicionar a cabeça. A Fig. E8.10(b) apresenta a resposta de freqüência real do mecanismo de posicionamento da cabeça. Estimar os pólos e zeros do dispositivo. Observar que  $X = 1,37$  kHz no primeiro cursor e  $\Delta X = 1,257$  kHz no segundo cursor.



(a)



(b)

Fig. E8.10 (a) Fotografia com dupla exposição mostrando o posicionador da cabeça e o Analisador de Sinal 3562A. (b) Resposta de freqüência. (Cortesia da Hewlett-Packard Co.)

**PROBLEMAS**

**P8.1** Esboçar o diagrama polar da resposta de freqüência relativo às seguintes funções:

$$(a) GH(s) = \frac{1}{(1 + 0,5s)(1 + 2s)}$$

$$(b) GH(s) = \frac{(1 + 0,5s)}{s^2}$$

$$(c) GH(s) = \frac{s + 10}{s^2 + 6s + 10}$$

$$(d) GH(s) = \frac{30(s + 8)}{s(s + 2)(s + 4)}$$

**P8.2** Esboçar a representação em diagramas de Bode da resposta de freqüência relativa às funções de transferência dadas no Problema 8.1.

**P8.3** Um circuito de rejeição que pode ser usado no lugar do circuito T geminado do Exemplo 8.4 é o circuito T em ponte mostrado na Fig. P8.3. A função de transferência deste circuito é

$$G(s) = \frac{s^2 + \omega_n^2}{s^2 + 2(\omega_n s/Q) + \omega_n^2}$$

(pode-se demonstrar isto?), onde  $\omega_n^2 = 2/LC$  e  $Q = \omega_n L/R_1$ , e  $R_2$  é ajustado de modo que  $R_2 = (\omega_n L)^2/4R_1$  [3]. (a) Determinar a configuração de pólos e zeros e, utilizando a abordagem dos vetores, calcular a resposta de freqüência aproximada. (b) Comparar a resposta de freqüência dos circuitos T geminado e T em ponte para  $Q = 10$ .

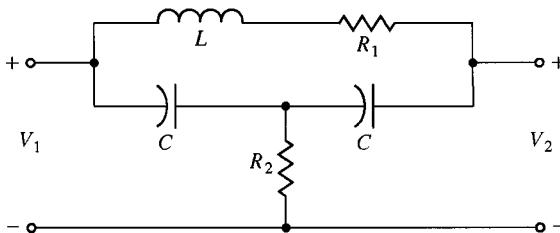


Fig. P8.3 Circuito T em ponte.

**P8.4** O sistema de controle para controlar a pressão no interior de uma câmara fechada está mostrado na Fig. P8.4. A função de transferência relativa ao elemento de medição é

$$H(s) = \frac{100}{s^2 + 15s + 100}$$

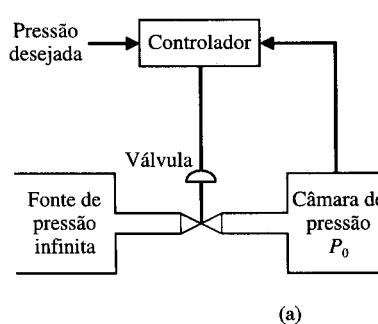


Fig. P8.4 (a) Controlador de pressão. (b) Modelo em diagrama de fluxo.

e a função de transferência da válvula é

$$G_1(s) = \frac{1}{(0,1s + 1)(s/15 + 1)}.$$

A função de transferência do controlador é

$$G_c(s) = s + 1.$$

Obter as características da resposta de freqüência para a função de transferência a malha aberta

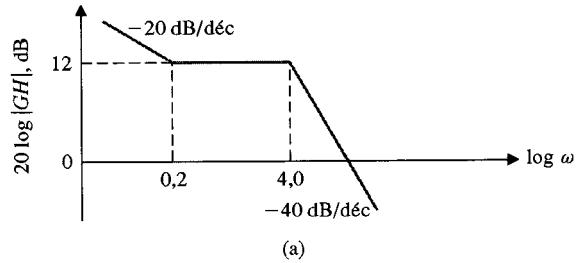
$$G_c(s)G_1(s)H(s) \cdot [1/s].$$

**P8.5** A indústria de robôs nos Estados Unidos está crescendo a uma taxa de 30% ao ano [8]. Um robô industrial típico possui seis eixos ou graus de liberdade. Um sistema de controle de posição de uma junta sensível a força apresenta a função de transferência

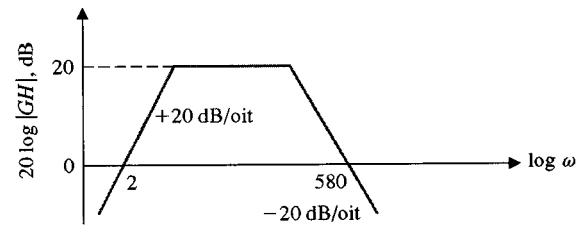
$$G(s) = \frac{K}{(1 + s/5)(1 + s)(1 + s/10)(1 + s/50)},$$

onde  $H(s) = 1$  e  $K = 10$ . Esboçar os diagramas de Bode deste sistema.

**P8.6** As curvas assintóticas do logaritmo da magnitude para duas funções de transferência são dadas na Fig. P8.6. Esboçar as curvas assintóticas de defasagem correspondentes para cada um dos sistemas. Determinar a função de transferência de cada sistema. Admitir que os sistemas possuem funções de transferência de fase mínima.

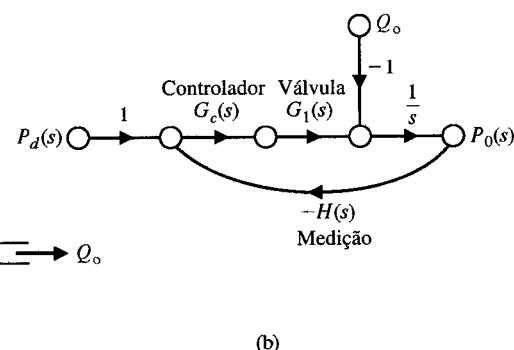


(a)



(b)

Fig. P8.6 Curvas do logaritmo da magnitude.



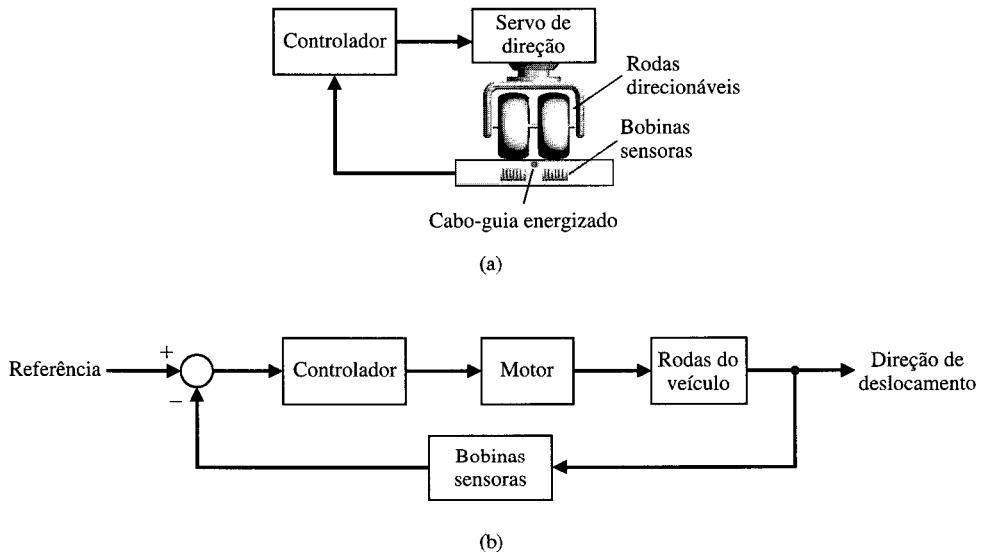


Fig. P8.7 Controle de rodas de direção.

**P8.7** Veículos sem motorista podem ser usados em armazéns, aeroportos e em muitas outras aplicações. Estes veículos seguem um fio embutido no piso e ajustam a direção das rodas dianteiras a fim de manter o rumo adequado, como está mostrado na Fig. P8.7(a) [10]. As bobinas sensoras, montadas no conjunto das rodas dianteiras, detectam um erro na direção de deslocamento e ajustam o rumo. O sistema de controle total está mostrado na Fig. P8.7(b). A função de transferência a malha aberta é

$$GH(s) = \frac{K}{s(s + \pi)^2} = \frac{K_v}{s(s/\pi + 1)^2}.$$

Deseja-se que a banda passante do sistema a malha fechada exceda  $2\pi$  rad/s. (a) Fazer  $K_v = 2\pi$  e esboçar os diagramas de Bode. (b) Usando os diagramas de Bode, obter a curva do logaritmo da magnitude versus ângulo de fase.

**P8.8** Um sistema de controle com retroação está mostrado na Fig. P8.8. A especificação relativa ao sistema a malha fechada requer uma ultrapassagem para uma entrada em degrau inferior a 10%. (a) Determinar a especificação correspondente no domínio de freqüência  $M_{p_\omega}$  para a função de transferência a malha fechada.

$$\frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = T(j\omega).$$

(b) Determinar a freqüência de ressonância,  $\omega_r$ . (c) Determinar a banda passante do sistema a malha fechada.

**P8.9** Esboçar as curvas do logaritmo da magnitude versus ângulo de fase para as funções de transferência  $a$  e  $b$  do Problema 8.1.

**P8.10** Um atuador linear é utilizado no sistema mostrado na Fig. P8.10 para posicionar uma massa  $M$ . A posição real da massa é medida por meio de um resistor de fio deslizante, portanto  $H(s) = 1$ . O ganho do amplificador é escolhido de modo que o erro de estado estacionário do sistema seja inferior a 1% da magnitude da posição de referência  $R(s)$ . O atuador possui uma bobina com uma resistência  $R_f = 0,1$  ohm e uma indutância  $L_f = 0,2$  henry. A massa da carga é 0,1 kg e o atrito viscoso é 0,2 N · s/m. A constante de mola é igual a 0,4 N/m. (a) Determinar o ganho  $K$  necessário a manter um erro estacionário para uma entrada em degrau inferior a 1%. Isto é,  $K_p$  deve ser maior que 99. (b) Esboçar os diagramas de Bode para a função de transferência de malha  $GH(s)$ . (c) Esboçar a curva do logaritmo da magnitude versus ângulo de fase para  $GH(j\omega)$ . (d) Esboçar os diagramas de Bode para a função de transferência a malha fechada  $Y(j\omega)/R(j\omega)$ . Determinar  $M_{p_\omega}$ ,  $\omega_r$  e a banda passante.

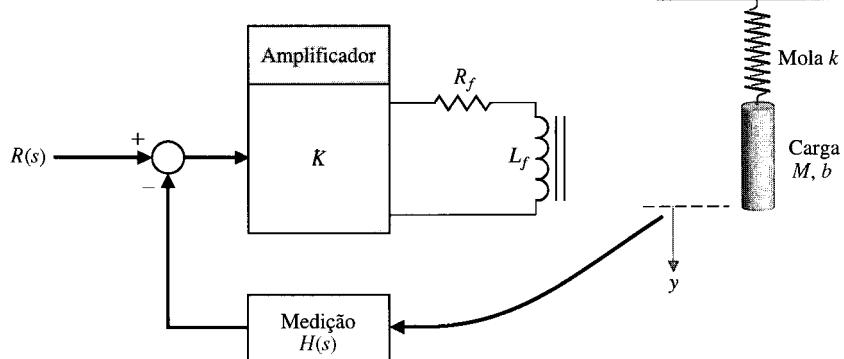
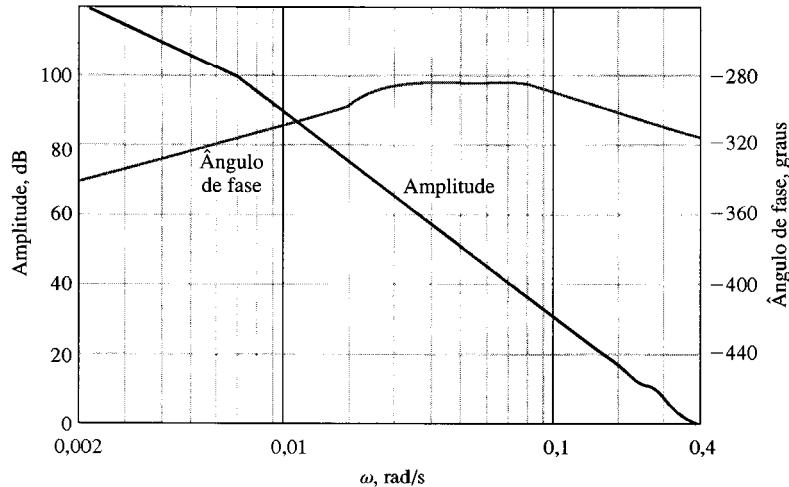


Fig. P8.10 Controle de atuador linear.

**P8.11** A pilotagem automática de navios constitui uma aplicação particularmente útil da teoria de controle com retroação [20]. No caso de rotas oceânicas com tráfego intenso é importante manter o movimento do navio segundo um curso preciso. Um sistema automático é capaz de manter um erro em relação ao rumo desejado muito menor que o de um piloto que efetua correções de rumo a intervalos irregulares. Um modelo matemático do sistema de pilotagem foi desenvolvido para um navio em movimento com velocidade constante e para pequenos desvios do curso desejado. Para um navio-tanque de grande porte, a função de transferência é

$$G(s) = \frac{E(s)}{\delta(s)} = \frac{0,164(s + 0,2)(-s + 0,32)}{s^2(s + 0,25)(s - 0,009)},$$

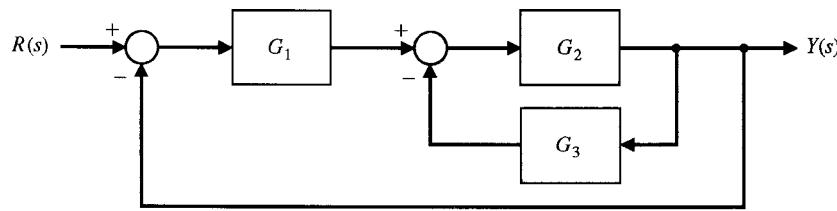


**Fig. P8.11** Resposta de freqüência de sistema de controle de navio.

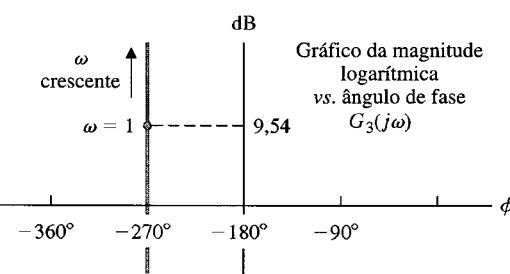
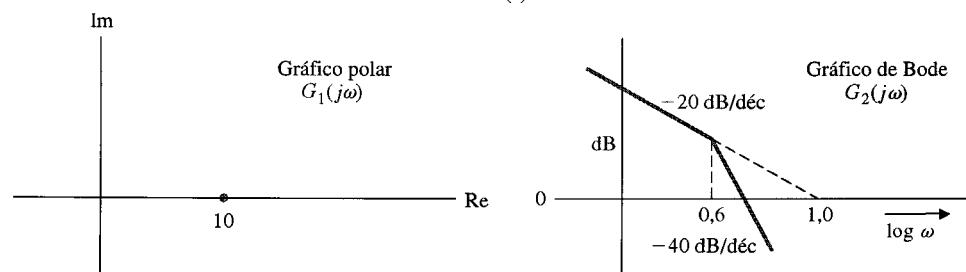
onde  $E(s)$  é a transformada de Laplace do desvio de rumo do navio em relação ao rumo desejado e  $\delta(s)$  é a transformada de Laplace do ângulo de deflexão do leme.

Constatar que a resposta de freqüência do navio,  $E(j\omega)/\delta(j\omega)$ , é a mostrada na Fig. P8.11.

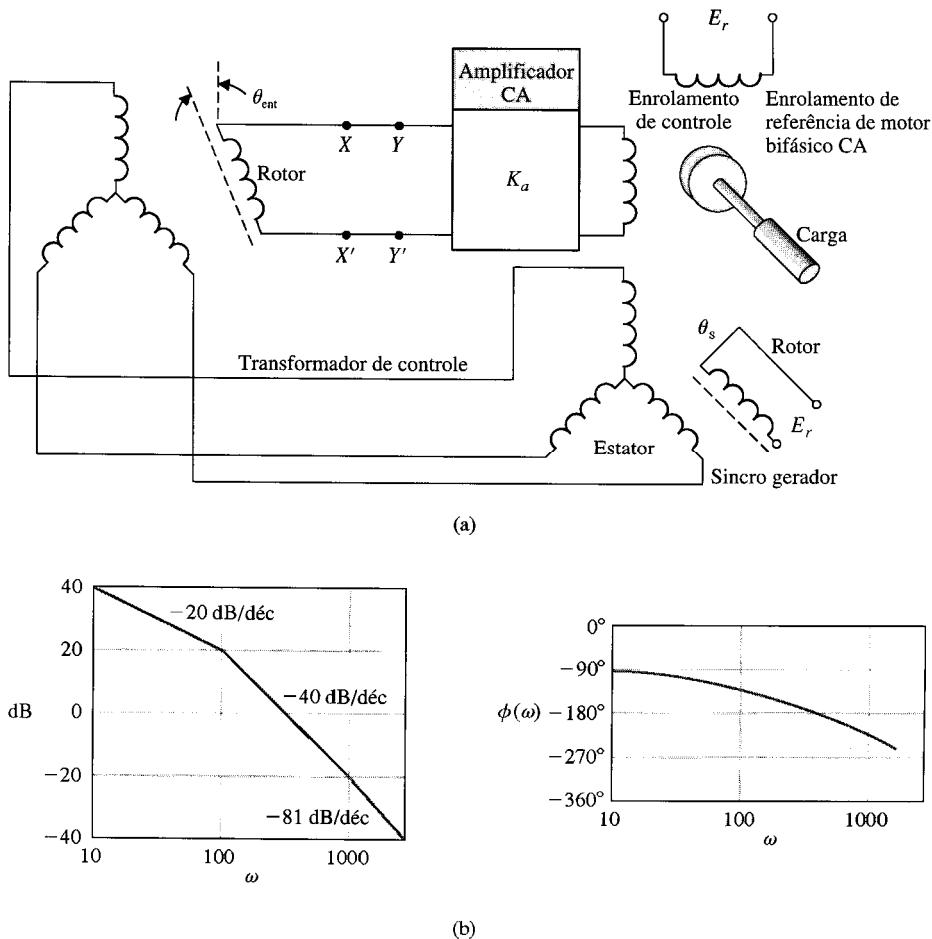
**P8.12** O diagrama de blocos de um sistema de controle com retroação está mostrado na Fig. P8.12(a). A função de transferência dos blocos está representada pelas curvas de resposta de freqüência mostradas na Fig. P8.12(b). (a) Determinar a relação de amortecimento  $\zeta$ , quando  $G_3$  for desconectado do sistema. (b) Conectar  $G_3$  e determinar a relação de amortecimento  $\zeta$ . Admitir que os sistemas possuem funções de transferência de fase mínima.



(a)



**Fig. P8.12** Sistema com retroação.



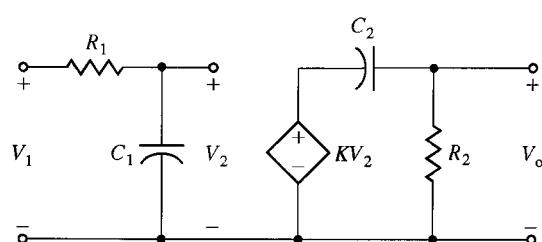
**Fig. P8.13 (a) Controle de motor CA. (b) Resposta de freqüência.**

**P8.13** Um sistema de controle de posição pode ser construído usando-se um motor de corrente alternada (CA) e componentes CA, como está mostrado na Fig. P8.13. O sincrogerador<sup>2\*</sup> e sincrotransformador podem ser considerados um transformador com enrolamento rotativo. O rotor do sincrodetector de posição (neste caso o sincrogerador) gira com a carga de um ângulo  $\theta_0$ . O sincrogerador é energizado com uma tensão elétrica CA, por exemplo, de 115 volts e 60 Hz. O sinal de entrada ou comando  $R(s) = \theta_{ent}(s)$  é aplicado girando-se o rotor do transformador de controle. O motor CA bifásico funciona a partir do sinal de erro amplificado. As vantagens de um sistema de controle em corrente alternada são (1) eliminação dos efeitos de deriva CC e (2) simplicidade e precisão dos componentes CA. Para medir a resposta de freqüência a malha aberta desconectam-se simplesmente  $X$  de  $Y$  e  $X'$  de  $Y'$  e se aplica em seguida aos terminais  $Y-Y'$  um gerador de sinal com modulação senoidal e se mede a resposta em  $X-X'$ . [O erro ( $\theta_s - \theta_{ent}$ ) será ajustado em zero antes de se aplicar o gerador CA.] A resposta de freqüência de malha resultante,  $GH(j\omega)$ , está mostrada na Fig. P8.13(b). Determinar a função de transferência  $GH(j\omega)$ . Admitir que o sistema possui uma função de transferência de fase mínima.

**P8.14** Um amplificador passa-faixa pode ser representado por um modelo de circuito mostrado na Fig. P8.14 [3]. Para  $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 100 \text{ pF}$ ,  $C_2 = 1 \mu\text{F}$  e  $K = 100$ , mostrar que

$$G(s) = \frac{10^9 s}{(s + 1000)(s + 10^7)}.$$

(a) Esboçar os diagramas de Bode de  $G(j\omega)$ . (b) Achar o ganho de meia faixa (em dB). (c) Determinar os pontos de  $-3 \text{ dB}$  nas freqüências baixas e altas.



**Fig. P8.14** Amplificador passa-faixa.

\* O par sincrogerador e sincrotransformador (ou transformador de controle) constitui um sistema detector de erro usado freqüentemente em malhas analógicas de servomecanismos. (N. T.)

**P8.15** Para determinar a função de transferência de um processo a controlar  $G(s)$ , pode-se medir a resposta de freqüência usando um sinal senoidal de entrada. Um sistema conduz aos dados apresentados a seguir. Determinar a função de transferência  $G(s)$ .

$\omega$ , rad/s	$ G(j\omega) $	Fase, graus
0,1	50	-90
1	5,02	-92,4
2	2,57	-96,2
4	1,36	-100
5	1,17	-104
6,3	1,03	-110
8	0,97	-120
10	0,97	-143
12,5	0,74	-169
20	0,13	-245
31	0,026	-258

**P8.16** O ônibus espacial foi usado para reparar satélites e o telescópio Hubble. A Fig. P8.16 ilustra como um membro da tripulação, com os pés atados a uma plataforma na extremidade do braço robótico do ônibus espacial, usa os braços para parar o movimento de rotação do satélite e dar partida na chave do motor. O sistema de controle possui a forma mostrada na Fig. 4.14, onde  $G_1 = K = 10$  e  $H(s) = 1$ . O sistema de controle do braço robótico possui uma função de transferência a malha fechada

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^2 + 5s + 10}.$$

- (a) Determinar a resposta  $y(t)$  a uma perturbação em degrau unitário. (b) Determinar a banda passante do sistema.

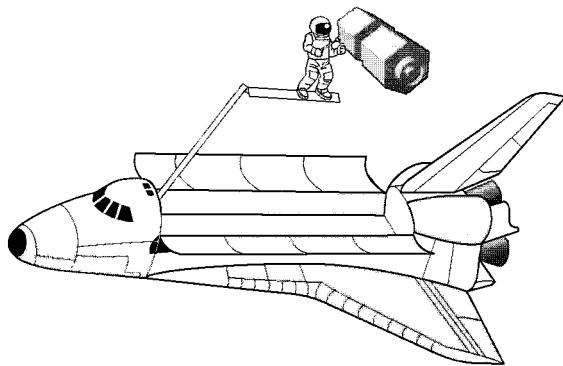


Fig. P8.16 Conserto de satélite.

**P8.17** A Aeronave de Asa Oblíqua (OWA — *Oblique Wing Aircraft*) experimental possui uma asa que pivota em torno de um eixo como está mostrado na Fig. P8.17. A asa permanece em posição normal não oblíqua nas velocidades baixas e pode se deslocar para

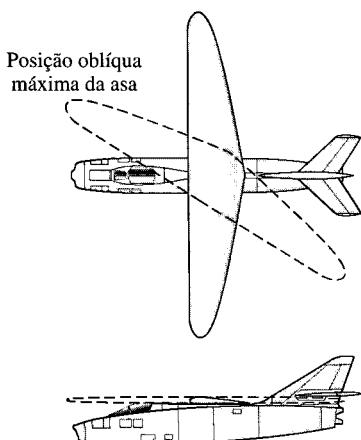


Fig. P8.17 Vistas superior e lateral da Aeronave de Asa Oblíqua.

a posição oblíqua em voo supersônico com melhores condições de desempenho [11]. O sistema de controle possui  $H(s) = 1$  e

$$G(s) = \frac{4(0,5s + 1)}{s(2s + 1)\left[\left(\frac{s}{8}\right)^2 + \left(\frac{s}{20}\right) + 1\right]}.$$

(a) Esboçar os diagramas de Bode. (b) Achar a freqüência  $\omega_1$  na qual a magnitude é 0 dB e a freqüência  $\omega_2$  na qual a fase é  $-180^\circ$ .

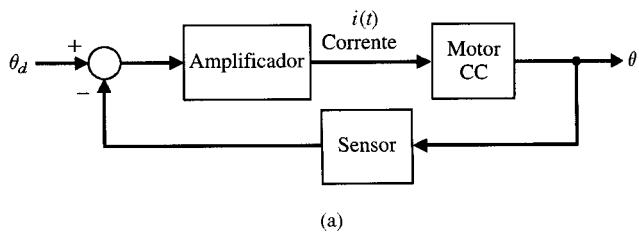
**P8.18** A operação remota desempenha um papel importante em ambientes agressivos, como os ambientes nucleares ou de temperaturas elevadas, e no espaço além do sistema solar. A despeito dos esforços de inúmeros pesquisadores, ainda não foi desenvolvido um sistema para operação remota que seja comparável à operação direta dos seres humanos. Engenheiros de pesquisa têm tentado melhorar as operações remotas fazendo a retroação de um conjunto rico de informações sensoriais adquiridas pelo robô para o operador com uma sensação de presença. Este conceito é chamado tele-existência ou telepresença [9].

Um sistema mestre-escravo de tele-existência consiste de um sistema mestre com uma sensação visual e auditiva de presença, de um sistema de controle por computador e de um mecanismo robótico escravo antropomórfico com um braço dotado de sete graus de liberdade e de um mecanismo de locomoção. Os movimentos da cabeça, do braço direito, da mão direita e outros movimentos auxiliares do operador são medidos pelo sistema mestre. Um sistema estéreo de entrada auditiva e visual, especialmente projetado, montado no mecanismo do pescoço do robô escravo capta informações visuais e auditivas a partir do ambiente remoto. Estas informações são enviadas de volta para o sistema mestre e aplicadas a um sistema de exibição estéreo especialmente projetado para evocar a sensação de presença do operador. O sistema de controle de locomoção possui a função de transferência de malha

$$GH(s) = \frac{12(s + 0,5)}{s^2 + 13s + 30}.$$

Obter os diagramas de Bode para  $GH(j\omega)$  e determinar a freqüência para a qual  $20 \log |GH(j\omega)|$  é aproximadamente igual a 0 dB.

**P8.19** Um controlador com motor CC usado largamente em automóveis está mostrado na Fig. P8.19(a). O gráfico da medição de  $\Theta(s)/I(s)$  está mostrado na Fig. P8.19(b). Determinar a função de transferência de  $\Theta(s)/I(s)$ .



(a)

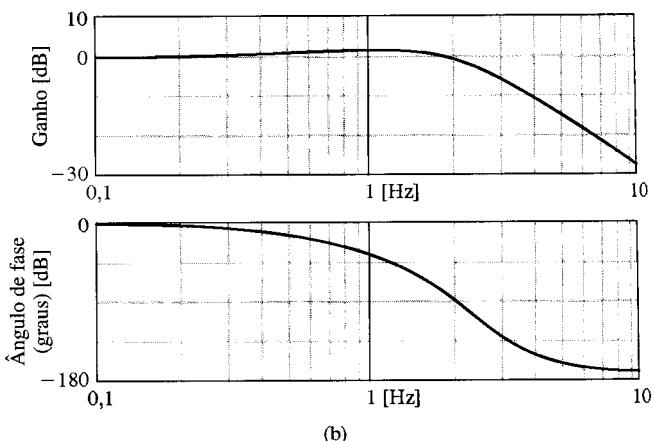


Fig. P8.19 (a) Controlador do motor. (b) Gráfico medido.

**P8.20** A robótica espacial constitui um campo emergente. Para o desenvolvimento de projetos espaciais de sucesso, a robótica e a automação constituem a tecnologia chave. Robôs espaciais autônomos e habilidosos podem reduzir a carga de trabalho dos astronautas e ampliar a eficiência operacional em muitas missões. A Fig. P8.20 mostra um conceito chamado robô de vôo livre [9, 13]. Uma característica importante dos robôs espaciais, que os distingue claramente dos robôs operados na terra, é a ausência de uma base fixa. Todo movimento do braço manipulador induzirá forças e momentos de reação na base que perturbarão sua posição e sua atitude.

O controle de uma das juntas do robô pode ser representado pela função de transferência de malha

$$GH(s) = \frac{781(s + 8)}{s^2 + 25s + 625}.$$

(a) Esboçar os diagramas de Bode de  $GH(j\omega)$ . (b) Determinar o valor máximo de  $20 \log |GH(j\omega)|$ , a freqüência em que isto ocorre e a fase nessa freqüência.



Fig. P8.20 Robô espacial com três braços, capturando um satélite.

**P8.21** Rajadas de vento cisalhante de baixa altitude constituem a maior causa de acidentes com aviões comerciais nos Estados Unidos. A maioria destes acidentes foi causada por microrrajadas (correntes de ar descendentes intensas, em baixa altitude, que incidem sobre a superfície ocasionando um escoamento divergente e intenso do ar) ou por frentes de rajadas bruscas de vento em tempestades. Enfrentar uma microrajada constitui um sério problema para aviões que estejam **pousando** ou **decolando**, uma vez que os aviões estarão a baixa altitude e se deslocando com uma velocidade apenas 25% acima de sua velocidade de *stall*\* [12].

O projeto do controle de uma aeronave que encontra um vento cisalhante após a decolagem pode ser tratado como um problema de estabilizar a velocidade de subida em torno do valor desejado para esta velocidade. O controlador resultante utiliza somente a informação da velocidade de subida.

O sistema de controle com retroação unitária padrão da Fig. 8.24 possui uma função de transferência de malha

$$G(s) = \frac{-200s^2}{s^3 + 14s^2 + 44s + 40}.$$

Observar o ganho negativo em  $G(s)$ . Este sistema representa o sistema de controle da velocidade de subida. Esboçar os diagramas de Bode e determinar o ganho (em dB) para o qual a fase é  $-180^\circ$ .

**P8.22** A resposta de freqüência de um processo  $G(j\omega)$  é mostrada na Fig. P8.22. Determinar  $G(s)$ .

**P8.23** A resposta de freqüência de um processo  $G(j\omega)$  é mostrada na Fig. P8.23. Deduzir o tipo do sistema (número de integradores).

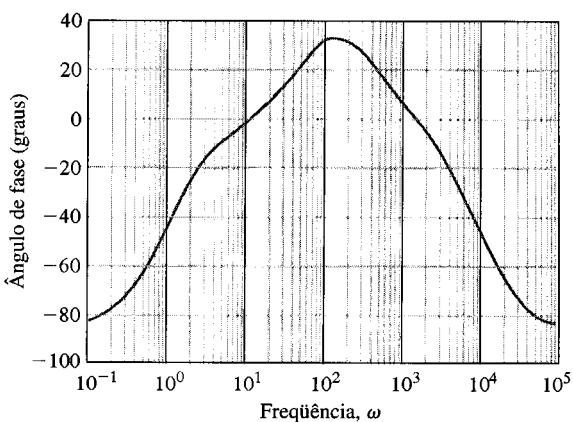
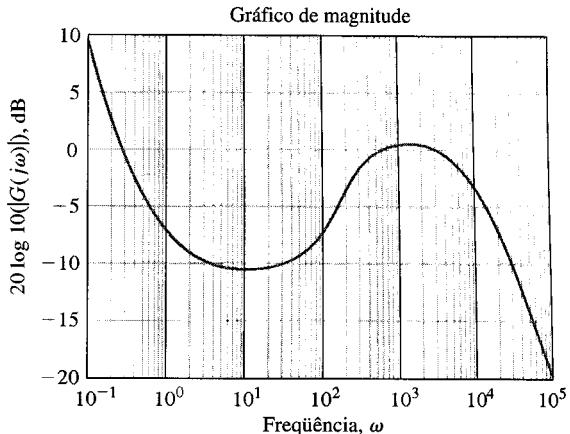


Fig. P8.22

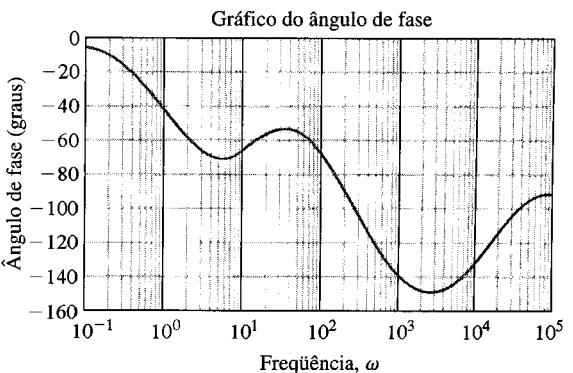
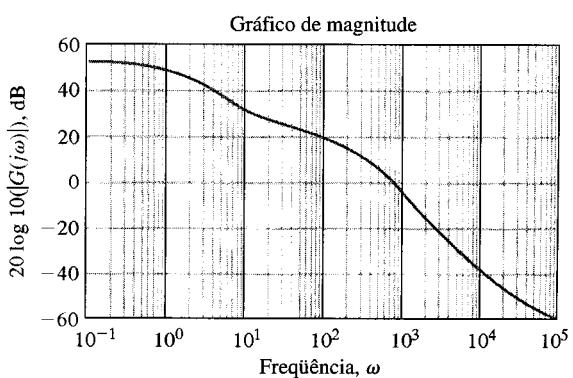


Fig. P8.23

\*A velocidade de *stall* é a velocidade abaixo da qual, para um dado ângulo de incidência, uma aeronave perde a sustentação. (N. T.)

Determinar a função de transferência  $G(s)$  do sistema. Calcular o erro a uma entrada em degrau unitário.

- P8.24** Os diagramas de Bode de um sistema transportador de filme a malha fechada,  $T(s)$ , estão mostrados na Fig. P8.24 [17]. Admitir que a função de transferência,  $T(s)$ , possui dois pólos conjugados complexos dominantes. (a) Determinar o melhor modelo de segunda ordem para o sistema. (b) Determinar a banda passante

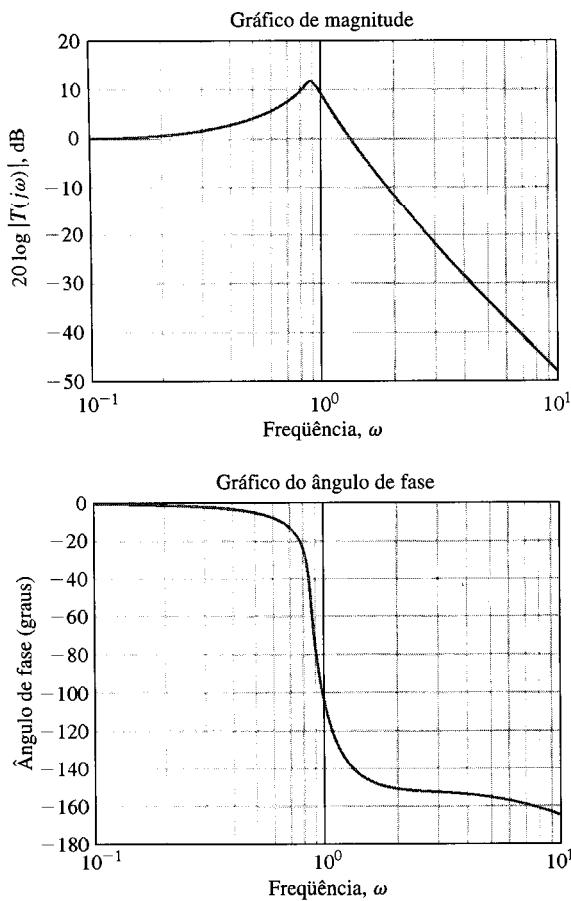


Fig. P8.24

do sistema. (c) Prever a ultrapassagem percentual e o tempo de assentamento (critério dos 2%) para uma entrada em degrau.

- P8.25** Um sistema de controle a malha fechada com retroação unitária possui um erro estacionário igual a  $A/10$  quando a entrada é  $r(t) = A t^2/2$ . Os gráficos de Bode de magnitude e ângulo de fase versus  $\omega$  estão mostrados na Fig. P8.25 para  $G(j\omega)$ . Determinar a função de transferência  $G(s)$ .

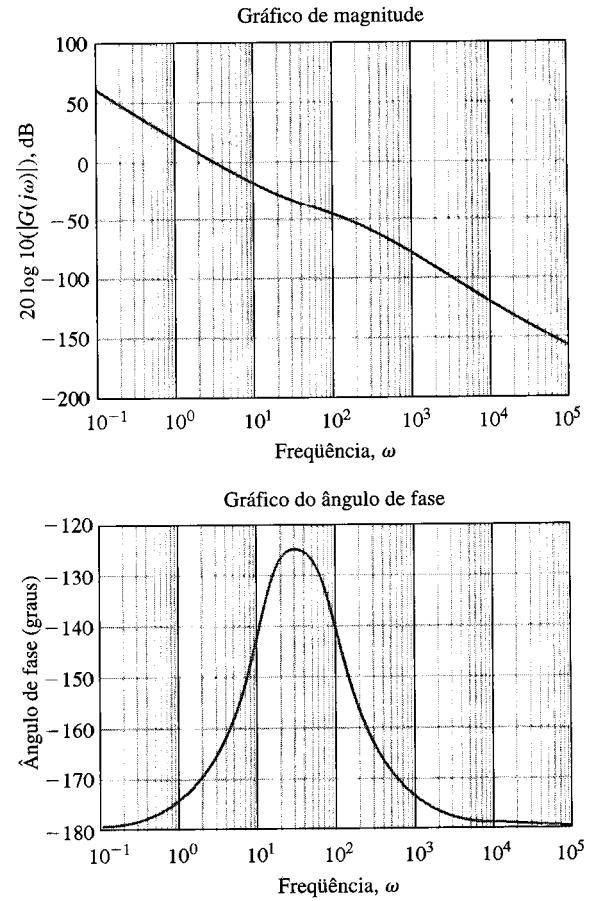
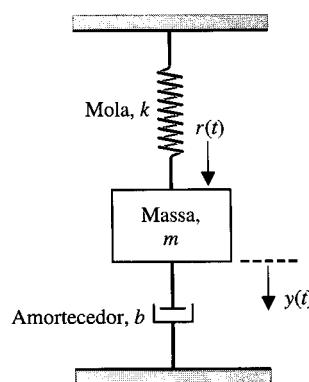


Fig. P8.25

## PROBLEMAS AVANÇADOS

- PA8.1** Um sistema mola-massa-amortecedor está mostrado na Fig. PA8.1(a). Os diagramas de Bode obtidos experimentalmente

usando uma função senoidal forçante estão mostrados na Fig. PA8.1(b). Determinar os valores numéricos de  $m$ ,  $b$  e  $k$ .



(a)

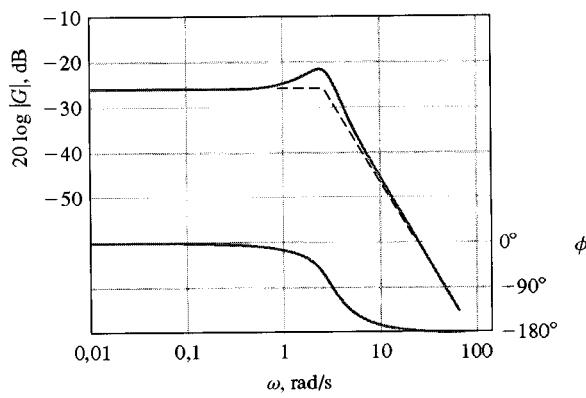


Fig. PA8.1

(b)

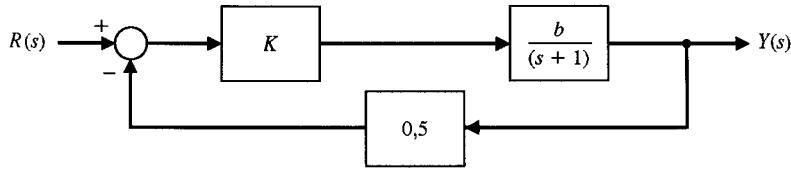


Fig. PA8.2

**PA8.2** Um sistema está mostrado na Fig. PA8.2. O valor nominal do parâmetro  $b$  é 4,0. Determinar a sensibilidade  $S_b^T$  e traçar o gráfico de  $20 \log |S_b^T|$ , o diagrama de Bode para a magnitude com  $K = 2$ .

**PA8.3** À medida que um automóvel se desloca ao longo da estrada, o deslocamento vertical dos pneus age como o movimento de excitação do sistema de suspensão do veículo [16]. A Fig. PA8.3 é um diagrama esquemático de um sistema de suspensão de automóvel simplificado, para o qual se admite que a entrada é senoidal. Determinar a função de transferência  $X(s)/R(s)$  e esboçar os diagramas de Bode para  $M = 1\text{ kg}$ ,  $b = 4\text{ N} \cdot \text{s/m}$  e  $k = 18\text{ N/m}$ .

**PA8.4** Um helicóptero com uma carga na extremidade de um cabo está mostrado na Fig. PA8.4(a). O sistema de controle de posição do sistema está mostrado na Fig. PA8.4(b), onde a retroação visual está representada por  $H(s)$ . Esboçar os diagramas de Bode para  $GH(j\omega)$ .

**PA8.5** Um sistema de controle a malha fechada com retroação unitária possui uma função de transferência

$$T(s) = \frac{10(s + 1)}{s^2 + 9s + 10}.$$

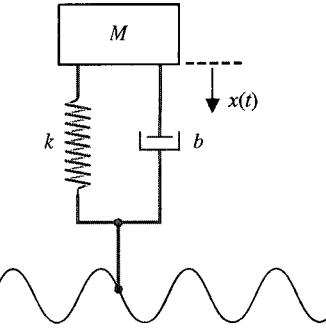


Fig. PA8.3 Modelo de sistema de suspensão de automóvel.

(a) Determinar a função de transferência a malha aberta  $G(s)$ . (b) Traçar a curva do logaritmo da magnitude versus fase (semelhante à da Fig. 8.27) e identificar os pontos das freqüências  $\omega$  igual 1, 10, 50, 110 e 500. (c) O sistema a malha aberta é estável? O sistema a malha fechada é estável?

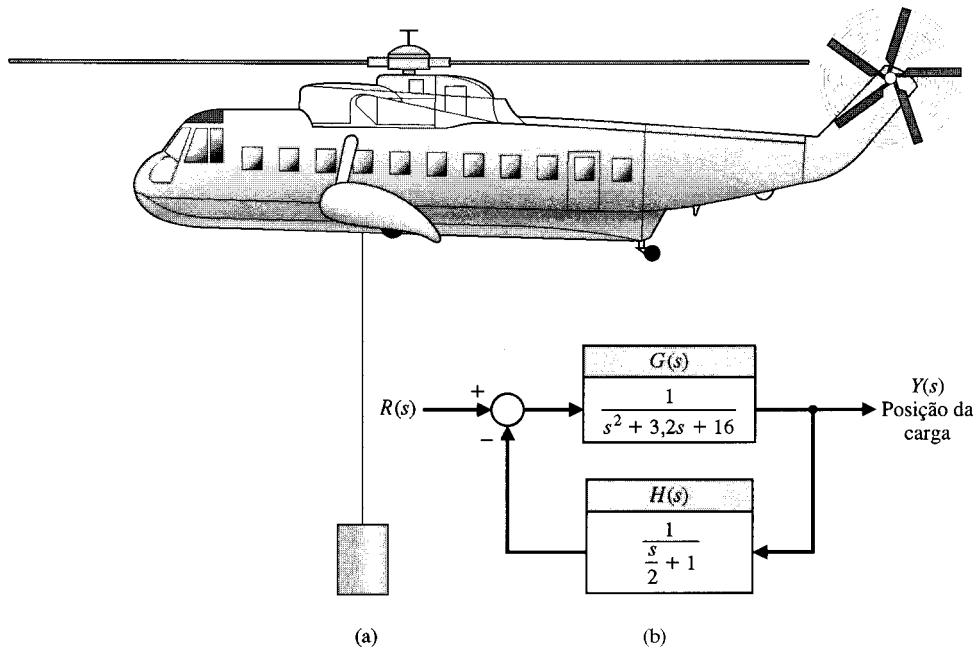


Fig. PA8.4

## PROBLEMAS DE PROJETO

**PPC8.1** Neste capítulo deseja-se usar um controlador PD onde

$$G_c(s) = K(s + 2)$$

O tacômetro não é usado (ver Fig. PPC4.1). Traçar os diagramas de Bode para o sistema quando  $K = 40$ . Determinar a resposta

ao degrau deste sistema e estimar a ultrapassagem e o tempo de assentamento (critério dos 2%).

**PP8.1** O comportamento de seres humanos ao dirigir automóveis continua sendo objeto de interesse [14, 15, 16, 21]. O projeto e o desenvolvimento de sistemas com direção nas quatro rodas, de sus-

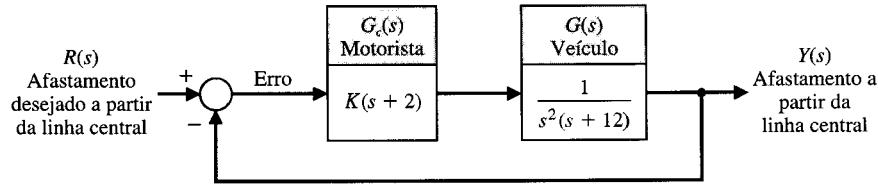


Fig. PP8.1

pensão ativa, de sistema de frenagem ativo independente e de direção automática (“drive-by-wire”) dão ao engenheiro uma liberdade consideravelmente maior para alterar a qualidade de manobra do veículo que existia no passado.

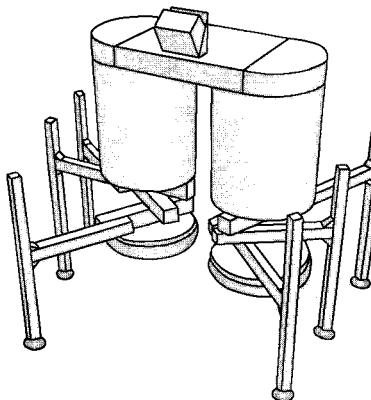
O veículo e o motorista estão representados pelo modelo da Fig. PP8.1, onde o motorista desenvolve uma previsão do desvio do veículo em relação à linha central. Para  $K = 1$ , traçar os diagramas de Bode (a) da função de transferência  $G_c(s)G(s)$  e (b) da função de transferência a malha fechada  $T(s)$ . (c) Repetir as partes (a) e (b) para  $K = 50$ . (d) O motorista pode escolher o ganho  $K$ . Determinar o ganho apropriado de modo que  $M_{p_\omega} \leq 2$  e a banda passante seja a máxima que se pode alcançar para o sistema a malha fechada. (e) Determinar o erro de estado estacionário do sistema para uma entrada em rampa,  $r(t) = t$ .

**PP8.2** A exploração não tripulada de planetas como Marte requer um elevado grau de autonomia devido aos retardos de comunicação entre os robôs no espaço e suas estações baseadas na Terra. Isto afeta todos os componentes do sistema: planejamento, sensores e mecanismos. Em particular, tal nível de autonomia só pode ser alcançado se cada robô possuir um sistema de percepção que possa elaborar e manter de forma confiável modelos do ambiente. O Instituto de Robótica da Universidade Carnegie-Mellon (CMU: Carnegie-Mellon University) propôs um sistema de percepção projetado para aplicações em exploração planetária autônoma. O sistema de percepção é a parte principal de um sistema completo que inclui o projeto do planejamento e do meca-

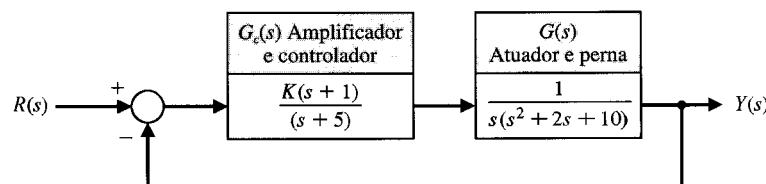
nismo. O veículo alvo é o Ambulante, uma máquina de andar com seis pernas em desenvolvimento na CMU, mostrada na Fig. PP8.2(a) [18]. O sistema de controle de uma das pernas está mostrado na Fig. PP8.2(b).

(a) Esboçar os diagramas de Bode para  $G_c(s)G(s)$  com  $K = 20$ . Determinar (1) a frequência em que a fase é  $-180^\circ$  e (2) a frequência em que  $20 \log |GG_c| = 0$  dB. (b) Traçar os diagramas de Bode para a função de transferência a malha fechada  $T(s)$  com  $K = 20$ . (c) Determinar  $M_{p_\omega}$ ,  $\omega$ , e  $\omega_b$  para o sistema a malha fechada com  $K = 20$  e  $K = 40$ . (d) Selecionar o melhor ganho dentre os dois especificados na parte (c) quando se desejar que a ultrapassagem do sistema a um degrau de entrada,  $r(t)$ , seja inferior a 35% e o tempo de assentamento seja o menor possível.

**PP8.3** Utiliza-se uma mesa para posicionar frascos debaixo de um bico dosador, como está mostrado na Fig. PP8.3(a). O objetivo é um movimento rápido, preciso e suave a fim de eliminar o desperdício. O sistema de controle de posição está mostrado na Fig. PP8.3(b). Como se deseja uma ultrapassagem pequena a uma entrada em degrau e simultaneamente um tempo de assentamento pequeno, o valor de  $20 \log |M_{p_\omega}|$  para  $T(j\omega)$  será limitado a 3 dB. Traçar os diagramas de Bode com um ganho  $K$  para o qual resultará um sistema estável. Em seguida, ajustar  $K$  até que  $20 \log |M_{p_\omega}| = 3$  dB e determinar a banda passante do sistema a malha fechada. Determinar o erro de estado estacionário do sistema para o ganho selecionado a fim de atender o requisito de  $M_{p_\omega}$ .



(a)



(b)

Fig. PP8.2 (a) O Ambulante de seis pernas. (b) Diagrama de blocos do sistema de controle de uma perna.

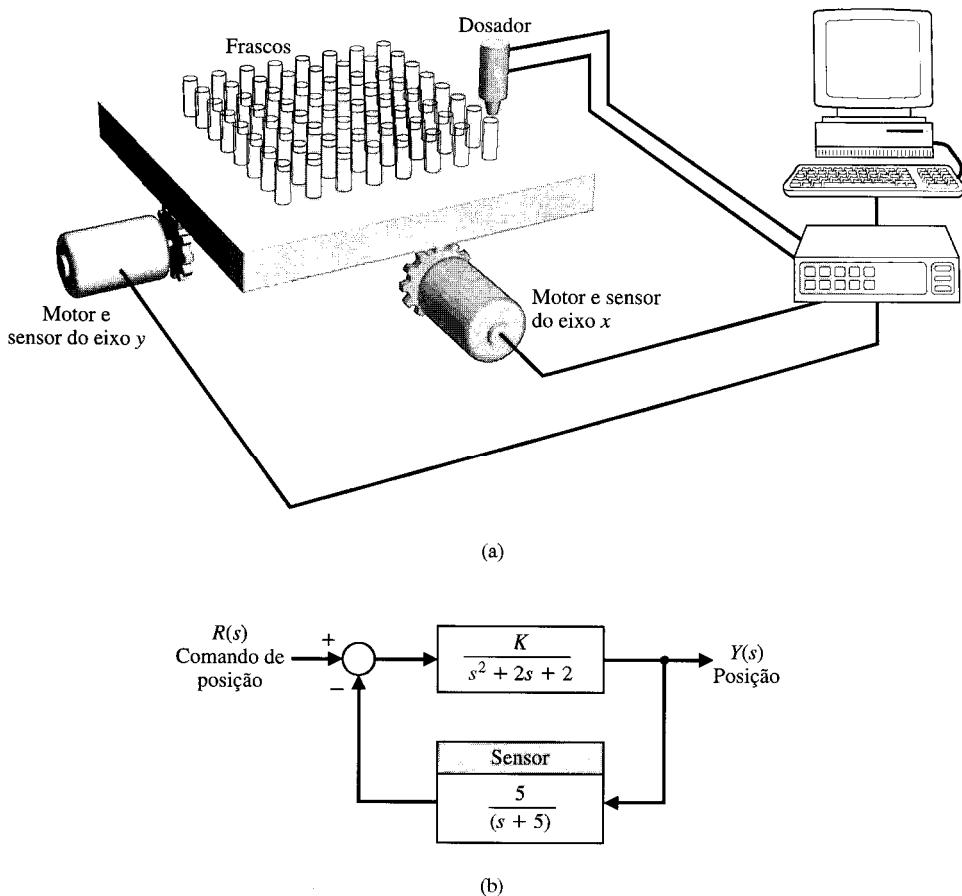


Fig. PP8.3 Mesa automática e dosador.

**PP8.4** Pode-se ministrar automaticamente a aplicação de anestesia por meio de um sistema de controle. Para determinadas operações, como as cirurgias no cérebro e nos olhos, movimentos involuntários de músculos podem ser desastrosos. Para assegurar ao cirurgião condições adequadas de operação, são ministradas drogas relaxantes musculares, que bloqueiam os movimentos musculares involuntários.

Um método convencional utilizado pelos anestesistas para ministrar o relaxante muscular é injetar uma dose concentrada cujo tamanho é determinado pela experiência e injetar suplementos à medida que for necessário. Contudo, um anestesista pode falhar

algumas vezes ao tentar manter um nível estacionário de relaxamento, resultando em um consumo grande de droga pelo paciente. Através da introdução do conceito de controle automático podem ser obtidos aperfeiçoamentos importantes que resultam em redução considerável do total de droga relaxante consumida [19].

Um modelo de processo de anestesia está mostrado na Fig. PP8.4. Escolher um ganho  $K$  e uma constante  $\tau$  do controlador de modo que a banda passante do sistema a malha fechada seja maximizada mantendo  $M_{p_\omega} \leq 1,5$ . Determinar a banda passante alcançada no seu projeto.

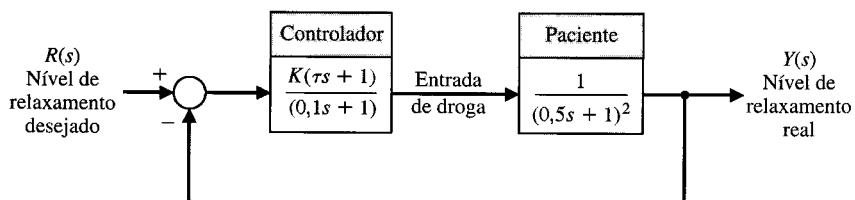


Fig. PP8.4 Modelo de um sistema de controle de anestesia.



### PROBLEMAS COM MATLAB

**PM8.1** Seja a função de transferência a malha fechada

$$T(s) = \frac{25}{s^2 + s + 25}.$$

Usando o MATLAB, obter os diagramas de Bode e verificar que a freqüência de ressonância é 5 rad/s e que o pico de magnitude  $M_{p_\omega}$  é de 14 dB.

**PM8.2** Esboce os diagramas de Bode para as funções de transferência a seguir e depois verifique os resultados com o MATLAB:

$$(a) G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+10)}$$

$$(b) G(s) = \frac{s+10}{(s+1)(s+20)}$$

$$(c) G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 50}$$

$$(d) G(s) = \frac{s+5}{(s+1)(s^2 + 12s + 50)}$$

**PM8.3** Um sistema com retroação unitária possui a função de transferência a malha aberta

$$G(s) = \frac{25}{s(s+2)}.$$

Determinar a banda passante do sistema a malha fechada usando o MATLAB para obter os diagramas de Bode e estimar a banda passante a partir dos gráficos. Rotular o gráfico com a banda passante (aproximada).

**PM8.4** O diagrama de blocos de um sistema de segunda ordem está mostrado na Fig. PM8.4.

(a) Determinar o pico de ressonância,  $M_{p_r}$ , a freqüência de ressonância  $\omega_r$  e a banda passante do sistema  $\omega_b$ , a partir dos diagramas de Bode da malha fechada. Gerar os diagramas de Bode com  $\omega = 0,1$  a  $\omega = 1000$  rad/s usando a função logspace. (b) Estimar a relação de amortecimento,  $\zeta$ , e a freqüência natural,  $\omega_n$ , utilizando a Fig. 8.11 na Seção 8.2. (c) A partir da função de transferência a malha fechada, calcular o valor real de  $\zeta$  e de  $\omega_n$  e comparar com os resultados da parte (b).

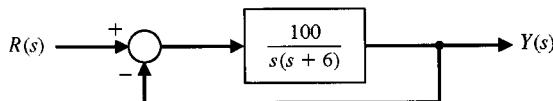


Fig. PM8.4 Sistema de controle de segunda ordem com retroação.

**PM8.5** Considerar o sistema com retroação da Fig. PM8.5. Obter os diagramas de Bode das funções de transferência a malha aberta e a malha fechada usando o MATLAB.

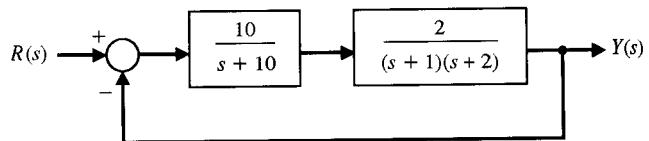


Fig. PM8.5 Sistema com retroação a malha fechada.

**PM8.6** Um sistema com retroação unitária possui a função de transferência a malha aberta

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2p)}.$$

Gerar um gráfico da banda passante versus o parâmetro  $p$  com  $0 < p < 1$ .

**PM8.7** Considerar o problema de controlar um pêndulo invertido sobre uma base móvel, como está mostrado na Fig. PM8.7(a). A função de transferência do sistema a malha aberta é

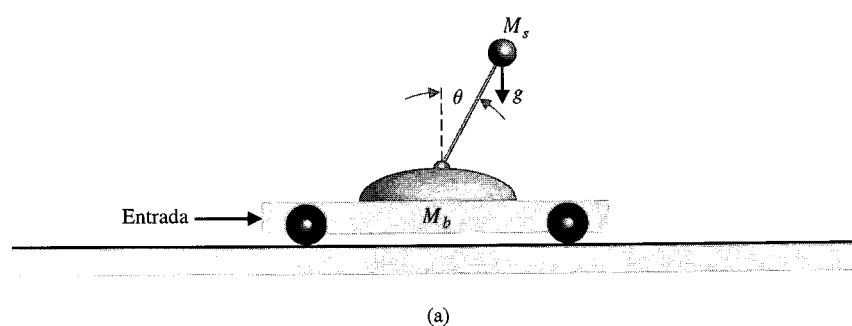
$$G(s) = \frac{-1/M_b L}{s^2 - (M_b + M_s)g/(M_b L)}.$$

O objetivo do projeto é equilibrar o pêndulo (isto é,  $\theta(t) \approx 0$ ) em presença de perturbações de entrada. Uma representação do sistema em diagrama de blocos está esquematizada na Fig. PM8.7(b). Sejam  $M_s = 10$  kg,  $M_b = 100$  kg,  $L = 1$  m,  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>,  $a = 5$  e  $b = 10$ . As especificações de projeto, com base em uma perturbação em degrau unitário, são:

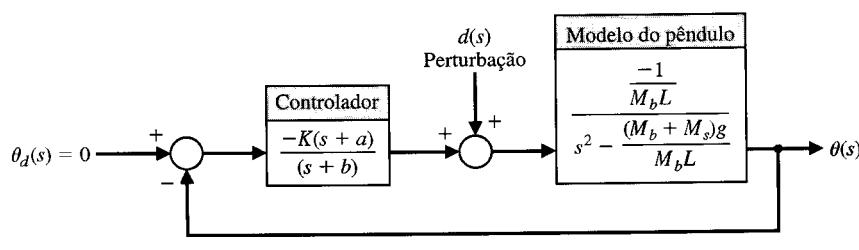
1. tempo de assentamento (critério dos 2%) inferior a 10 segundos,
2. ultrapassagem percentual inferior a 40% e
3. erro de rastreamento inferior a 0,1° em presença de perturbação.

Desenvolver um conjunto de scripts interativos em MATLAB para auxiliar o projeto do sistema de controle. O primeiro script deve efetuar pelo menos o seguinte:

1. Calcular a função de transferência a malha fechada relacionando a perturbação e a saída tendo  $K$  como um parâmetro ajustável.



(a)



(b)

Fig. PM8.7 (a) Pêndulo invertido sobre uma base móvel. (b) Representação em diagrama de blocos.

2. Desenhar um gráfico de Bode para o sistema a malha fechada.
3. Calcular automaticamente e dar saída nos valores de  $M_{p_\omega}$  e de  $\omega_r$ .

Como passo intermediário manual, usar  $M_{p_\omega}$  e  $\omega_r$ , e a Fig. 8.11 na Seção 8.2 para estimar  $\zeta$  e  $\omega_n$ . O segundo script deve realizar pelo menos a seguinte função: Estimar o tempo de assentamento e a ultrapassagem percentual usando  $\zeta$  e  $\omega_n$  como variáveis de entrada.

Se as especificações não forem alcançadas, mudar o valor de  $K$  e interagir no projeto usando os dois primeiros scripts. De-

pois de completar os dois primeiros passos, a etapa final consiste em testar o projeto via simulação. A função do terceiro script é

1. traçar o gráfico da resposta,  $\theta(t)$ , a uma perturbação em degrau unitário com  $K$  como parâmetro variável e
2. rotular o gráfico de forma apropriada.

Utilizando os scripts interativos, projetar o controlador para atender às especificações usando os métodos de Bode de resposta de freqüência. Para iniciar o procedimento de projeto, utilizar métodos analíticos para calcular o valor mínimo de  $K$  para atender à especificação de erro estacionário de rastreamento. Use o mínimo de  $K$  como primeira tentativa na interação de projeto.

## TERMOS E CONCEITOS

---

**Banda passante** A freqüência para a qual a resposta de freqüência é atenuada em 3 dB a partir do valor de freqüências baixas.

**Decibel (dB)** A unidade de ganho logarítmico.

**Fase mínima** Todos os zeros de uma função de transferência permanecem no semiplano  $s$  da esquerda.

**Fase não-mínima** Funções de transferência com zeros no semiplano  $s$  da direita.

**Freqüência de corte** Ver Freqüência de quebra.

**Freqüência de quebra** A freqüência na qual a aproximação assintótica da resposta de freqüência de um pôlo (ou de um zero) muda de inclinação.

**Freqüência natural** A freqüência de oscilação natural que ocorreria para dois pólos complexos se o amortecimento fosse igual a zero.

**Freqüência ressonante** A freqüência,  $\omega_r$ , na qual é alcançado o valor máximo da resposta de freqüência de um par de pólos complexos.

**Função de transferência no domínio de freqüência** A relação entre o sinal de saída e o sinal de entrada quando a entrada é senoidal. É expressado por  $G(j\omega)$ .

**Gráfico logarítmico** Ver Gráficos de Bode.

**Gráfico polar** Um gráfico da parte real de  $G(j\omega)$  versus a parte imaginária de  $G(j\omega)$ .

**Gráficos de Bode** O logaritmo da magnitude da função de transferência é representado graficamente versus o logaritmo de  $\omega$ , a freqüência. O ângulo de fase,  $\phi$ , da função de transferência é representado separadamente versus o logaritmo da freqüência.

**Magnitude logarítmica** O logaritmo da magnitude da função de transferência,  $20 \log_{10} |G|$ .

**Resposta de freqüência** A resposta em estado estacionário de um sistema a um sinal senoidal de entrada.

**Transformada de Fourier** A transformação de uma função do tempo,  $f(t)$ , para o domínio de freqüência.

**Valor máximo da resposta de freqüência** Um par de pólos complexos resultará em um valor máximo de resposta de freqüência que ocorre na freqüência ressonante.

## CAPÍTULO 9

# *Estabilidade no Domínio de Freqüência*

- 9.1 Introdução
- 9.2 Mapeamento de Contornos no Plano  $s$
- 9.3 Critério de Nyquist
- 9.4 Estabilidade Relativa e Critério de Nyquist
- 9.5 Critérios de Desempenho no Domínio do Tempo Especificados no Domínio de Freqüência
- 9.6 Banda Passante de Sistema
- 9.7 Estabilidade de Sistemas de Controle com Retardos
- 9.8 Exemplo de Projeto: Veículo de Reconhecimento Controlado Remotamente
- 9.9 Controladores PID no Domínio de Freqüência
- 9.10 Estabilidade no Domínio de Freqüência Usando MATLAB
- 9.11 Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco
- 9.12 Sumário

## APRESENTAÇÃO

Em capítulos anteriores discutiu-se a estabilidade e foram desenvolvidas ferramentas para determinar estabilidade e avaliar estabilidade relativa. Essa discussão continua neste capítulo mostrando como os métodos de resposta de freqüência podem ser usados para investigar estabilidade. Os conceitos importantes de margem de ganho, margem de fase e de banda passante são desenvolvidos no contexto dos gráficos de Bode e dos diagramas de Nyquist. É apresentado um resultado de estabilidade no domínio de resposta de freqüência — conhecido como critério de estabilidade de Nyquist — e seu uso é ilustrado através de alguns exemplos interessantes. São discutidas as consequências de retardos no sistema sobre a estabilidade e sobre o desempenho. Será visto que o atraso de fase introduzido pelo retardo pode desestabilizar um sistema que sem ele seria estável. O capítulo conclui com uma análise da resposta de freqüência aplicada ao Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco.

## 9.1 INTRODUÇÃO

Em um sistema de controle é necessário determinar se o sistema é estável. Além disto, quando o sistema for estável será necessário quase sempre investigar a estabilidade relativa. No Cap. 6 foram discutidos o conceito de estabilidade e diversos métodos para se determinar a estabilidade absoluta e a estabilidade relativa de um sistema. O método de Routh-Hurwitz, tratado no Cap. 6, é útil para investigar a equação característica expressa em termos da variável complexa  $s = \sigma + j\omega$ . Investigou-se, em seguida, no Cap. 7, a estabilidade relativa de um sistema utilizando o método do lugar das raízes, que também foi expresso em termos da variável complexa  $s$ . Este capítulo trata de investigar a estabilidade de um sistema no domínio da freqüência real, isto é, em termos da resposta de freqüência discutida no Cap. 8.

A resposta de freqüência representa a resposta de estado estacionário senoidal do sistema e fornece informação suficiente para se determinar a estabilidade relativa do sistema. A resposta de freqüência de um sistema pode ser obtida experimentalmente de forma rápida, excitando-se o sistema com si-

nais senoidais. Em consequência, ela pode ser utilizada para investigar a estabilidade relativa de um sistema quando valores de parâmetros ainda não tenham sido determinados. Além disto, um critério de estabilidade no domínio de freqüência é útil para se determinar abordagens adequadas no ajuste de parâmetros visando a um aumento da estabilidade relativa.

Um critério de estabilidade no domínio de freqüência foi desenvolvido por H. Nyquist em 1932 e permanece como uma abordagem fundamental para se investigar a estabilidade de sistemas lineares de controle [1, 2]. O **critério de estabilidade de Nyquist** é baseado em um teorema da teoria de funções de variável complexa devido a Cauchy. O teorema de Cauchy trata do **mapeamento de contornos** no plano complexo  $s$ , e felizmente o teorema pode ser compreendido sem uma prova formal que utilize a teoria de variáveis complexas.

Para determinar a estabilidade relativa de um sistema a malha fechada, deve-se investigar a equação característica do sistema:

$$F(s) = 1 + L(s) = 0. \quad (9.1)$$

Para o sistema de controle de malha única da Fig. 9.1,  $L(s) = G(s)H(s)$ . Para um sistema de malhas múltiplas (multimalhas), aprendeu-se na Seção 2.7 que a equação característica, em termos de diagramas de fluxo de sinal, é dada por

$$F(s) = \Delta(s) = 1 - \sum L_n + \sum L_m L_q \cdots = 0,$$

onde  $\Delta(s)$  é o determinante do diagrama de fluxo. Portanto, pode-se representar a equação característica de sistemas de malha única ou de multimalhas pela Eq. (9.1), em que  $L(s)$  é uma função racional em  $s$ . Para assegurar a estabilidade deve-se ter certeza de que todos os zeros de  $F(s)$  estejam no semiplano  $s$  da esquerda. Nyquist propôs, em consequência, mapear o semiplano  $s$  da direita no plano  $F(s)$ . Assim, para se utilizar e compreender o critério de Nyquist, deve-se primeiro considerar sucintamente o mapeamento de contornos no plano complexo.

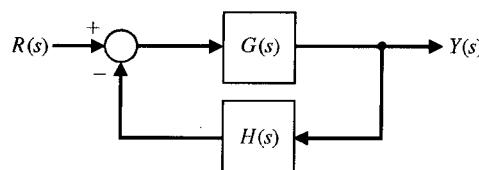


Fig. 9.1 Sistema de controle com retroação monomalha.

## 9.2 MAPEAMENTO DE CONTORNOS NO PLANO $s$

Trata-se de mapear contornos no plano  $s$  por meio de uma função  $F(s)$ . Um **mapeamento de contorno** é um contorno ou trajetória de um plano mapeado ou transportado para outro plano através de uma relação  $F(s)$ . Como  $s$  é uma variável complexa,  $s = \sigma + j\omega$ , a própria função  $F(s)$  é complexa; pode ser definida como  $F(s) = u + jv$  e ser representada em um plano complexo  $F(s)$  de coordenadas  $u$  e  $v$ . Como exemplo, seja considerar a função  $F(s) = 2s + 1$  e um contorno no plano  $s$ , como está mostrado na Fig. 9.2(a). O mapeamento de um contorno do plano  $s$ , em forma de quadrado de lado unitário, no plano  $F(s)$  é realizado por meio da relação  $F(s)$ ; assim,

$$u + jv = F(s) = 2s + 1 = 2(\sigma + j\omega) + 1. \quad (9.2)$$

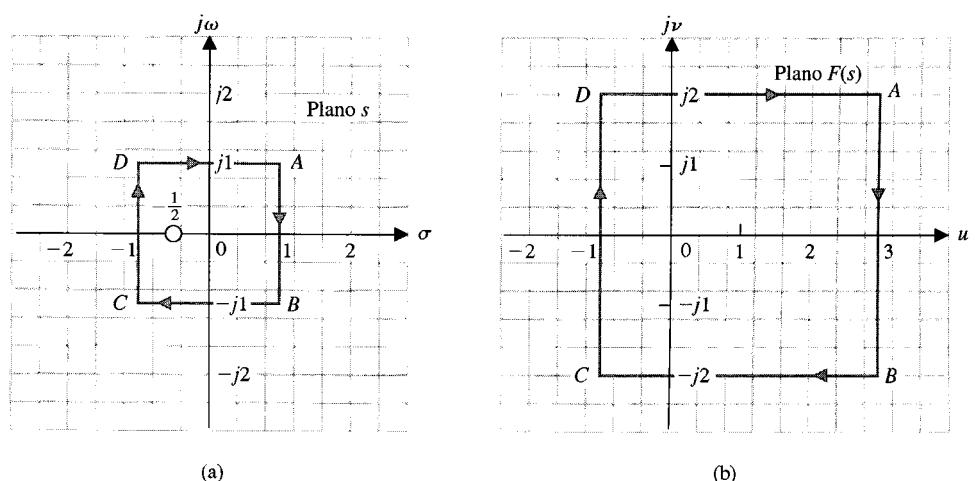


Fig. 9.2 Mapeamento de um contorno quadrado por  $F(s) = 2s + 1 = 2(s + 1/2)$ .

Em consequência, tem-se, neste caso

$$u = 2\sigma + 1 \quad (9.3)$$

e

$$v = 2\omega. \quad (9.4)$$

Assim o contorno foi mapeado através de  $F(s)$  em um contorno de mesma forma, um quadrado, com o centro deslocado de uma unidade e com a grandeza do lado multiplicada por 2. Este tipo de mapeamento que conserva, no plano  $F(s)$ , os ângulos do contorno no plano  $s$  é chamado **mapeamento conforme**. Observa-se também que um contorno fechado no plano  $s$  resulta em um contorno fechado no plano  $F(s)$ .

Os pontos  $A, B, C$  e  $D$  mostrados no contorno do plano  $s$  são mapeados nos pontos  $A, B, C$  e  $D$  mostrados no plano  $F(s)$ . Além disto, um sentido de percurso do contorno no plano  $s$  pode ser indicado pelo sentido  $ABCD$  e pelas setas mostradas no contorno. Assim, ocorre um percurso semelhante no contorno do plano  $F(s)$  ao se percorrer os pontos na ordem  $ABCD$ , como está sendo mostrado por meio das setas. Por convenção, a área no interior do contorno à direita do sentido de percurso é considerada a **área envolvida** pelo contorno. Em consequência, será admitido que o **sentido horário** de um contorno será positivo e que a área envolvida pelo contorno estará à direita. Esta convenção é oposta àquela usualmente usada na teoria de variáveis complexas, mas se aplica da mesma forma e é usada geralmente na teoria de sistemas de controle. O leitor deve considerar a área à direita como se estivesse caminhando sobre o contorno no sentido horário e designar esta regra por “sentido horário e olhar à direita”.

Comumente estará sendo considerada uma função  $F(s)$  racional em  $s$ . Assim, vale a pena considerar um outro exemplo de mapeamento de um contorno. Seja considerar novamente o mapeamento do contorno de um quadrado unitário através da função

$$F(s) = \frac{s}{s + 2}. \quad (9.5)$$

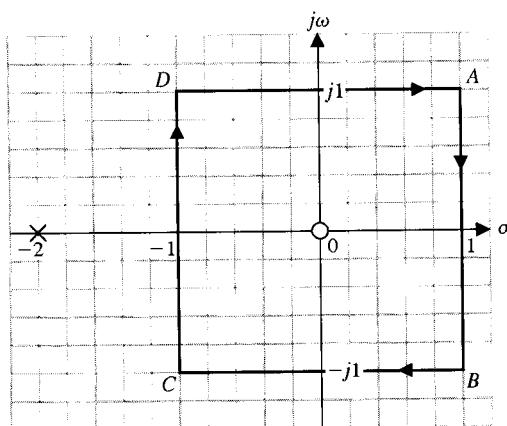
Na Tabela 9.1 são dados diversos valores de  $F(s)$  à medida que  $s$  se desloca sobre o contorno quadrado, e o contorno resultante no plano  $F(s)$  está mostrado na Fig. 9.3(b). O contorno no plano  $F(s)$  envolve a origem porque a origem do plano  $F(s)$  fica situada dentro da área envolvida por este contorno.

O teorema de Cauchy diz respeito ao mapeamento de uma função  $F(s)$  que possua um número finito de pólos e zeros no interior do contorno, de modo que se possa expressar  $F(s)$  como

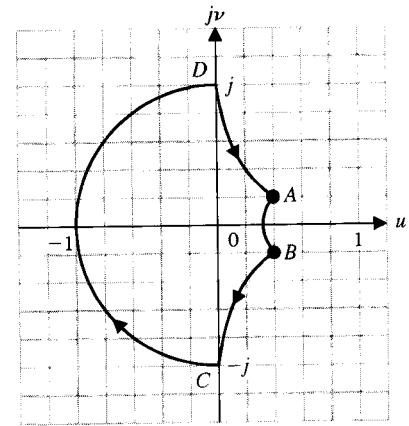
$$F(s) = \frac{K \prod_{i=1}^n (s + s_i)}{\prod_{k=1}^M (s + s_k)}, \quad (9.6)$$

**TABELA 9.1 Valores de  $F(s)$**

	Ponto A	Ponto B	Ponto C	Ponto D
$s = \sigma + j\omega$	$1 + j1$	$1$	$1 - j1$	$-j1$
$F(s) = u + jv$	$\frac{4 + 2j}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4 - 2j}{10}$	$\frac{1 - 2j}{5}$



(a)



(b)

**Fig. 9.3 Mapeamento através de  $F(s) = s/(s + 2)$ .**

onde  $s_i$  são os zeros da função  $F(s)$  e  $s_k$  são os pólos de  $F(s)$ . A função  $F(s)$  é a equação característica e, assim,

$$F(s) = 1 + L(s), \quad (9.7)$$

em que

$$L(s) = \frac{N(s)}{D(s)}.$$

Tem-se, por conseguinte,

$$F(s) = 1 + L(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{D(s) + N(s)}{D(s)} = \frac{K \prod_{i=1}^n (s + s_i)}{\prod_{k=1}^M (s + s_k)}, \quad (9.8)$$

e os pólos de  $L(s)$  são os pólos de  $F(s)$ . Contudo, as raízes características do sistema e que indicam sua resposta são os zeros de  $F(s)$ . Isto se torna evidente ao lembrar que a saída do sistema é

$$Y(s) = T(s)R(s) = \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta(s)} R(s) = \frac{\sum P_k \Delta_k}{F(s)} R(s), \quad (9.9)$$

onde  $P_k$  e  $\Delta_k$  são os fatores e cofatores de percurso, como definido na Seção 2.7.

Reexaminando-se o exemplo no qual  $F(s) = 2(s + 1/2)$ , tem-se um zero de  $F(s)$  em  $s = -1/2$ , como mostrado na Fig. 9.2. O contorno escolhido (isto é, o quadrado unitário) envolve e circunscreve o zero uma vez no interior da área do contorno. De modo semelhante, para a função  $F(s) = s/(s + 2)$ , o quadrado unitário circunscreve o zero na origem mas não circunscreve o pôlo em  $s = -2$ . A circunscrisão de pólos e zeros de  $F(s)$  pode ser relacionada com a circunscrisão da origem do plano  $F(s)$  por meio do **teorema de Cauchy**, comumente conhecido como **princípio do argumento**, enunciado como [3, 4]:

Se um contorno  $\Gamma_s$  no plano  $s$  circunscrever  $Z$  zeros e  $P$  pólos de  $F(s)$  e não passar por nenhum dos pólos e zeros de  $F(s)$  ao ser feito um percurso no sentido horário ao longo do contorno, o contorno  $\Gamma_F$  correspondente no plano  $F(s)$  circunscreverá a origem do plano  $F(s)$   $N = Z - P$  vezes no sentido horário.

Assim, nos exemplos mostrados nas Figs. 9.2 e 9.3, o contorno no plano  $F(s)$  circunscreve a origem uma vez, porque  $N = Z - P = 1$ , como esperado. Como um outro exemplo, considere-se a função  $F(s) = s/(s + 1/2)$ . Para o contorno em forma de quadrado unitário mostrado na Fig. 9.4(a), o contorno resultante no plano  $F(s)$  está mostrado na Fig. 9.4(b). Neste caso,  $N = Z - P = 0$ , como no caso da Fig. 9.4(b), uma vez que o contorno  $\Gamma_F$  não circunscreve a origem.

O teorema de Cauchy pode ser mais bem compreendido considerando-se  $F(s)$  em termos do ângulo devido a cada pôlo e a cada zero à medida que o contorno  $\Gamma_s$  é percorrido no sentido horário. Assim, considere-se a função

$$F(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{(s + p_1)(s + p_2)}, \quad (9.10)$$

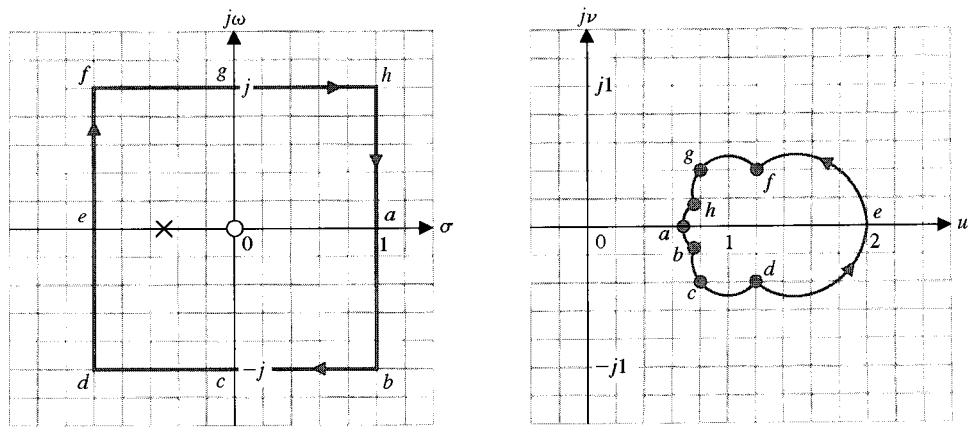


Fig. 9.4 Mapeamento através de  $F(s) = s/(s + 1/2)$ .

onde  $z_i$  é um zero de  $F(s)$  e  $p_k$  é um pôlo de  $F(s)$ . A Eq. 9.10 pode ser escrita como

$$\begin{aligned} F(s) &= |F(s)|/\underline{|F(s)|} \\ &= \frac{|s + z_1|}{|s + p_1|} \frac{|s + z_2|}{|s + p_2|} (\underline{|s + z_1|} + \underline{|s + z_2|} - \underline{|s + p_1|} - \underline{|s + p_2|}) \quad (9.11) \\ &= |F(s)|(\phi_{z_1} + \phi_{z_2} - \phi_{p_1} - \phi_{p_2}). \end{aligned}$$

Considerando-se agora os vetores mostrados para um contorno específico  $\Gamma_s$  (Fig. 9.5a), é possível determinar os ângulos à medida que  $s$  descreve o contorno. Obviamente, a variação angular total de  $\phi_{p_1}$ ,  $\phi_{p_2}$  e  $\phi_{z_1}$ , quando  $s$  descreve uma rotação completa de  $360^\circ$  sobre  $\Gamma_s$ , é igual a zero grau. Contudo, para  $\phi_{z_2}$ , quando  $s$  descreve uma volta de  $360^\circ$  ao longo de  $\Gamma_s$ , o ângulo  $\phi_{z_2}$  experimenta uma rotação completa de  $360^\circ$  no sentido horário. Assim, ao se percorrer completamente o contorno  $\Gamma_s$ , o ângulo total de  $F(s)$  é igual a  $360^\circ$ , uma vez que somente um zero está circundado. Se forem circundados  $Z$  zeros no interior de  $\Gamma_s$ , então o ângulo total será igual a  $\phi_z = 2\pi(Z)$  rad. Prosseguindo com este raciocínio, se  $Z$  zeros e  $P$  pôlos estiverem circundados à medida que  $\Gamma_s$  for percorrido, então o ângulo total resultante para  $F(s)$  é  $2\pi(Z) - 2\pi(P)$ . Assim, o ângulo total de  $\Gamma_F$  do contorno no plano  $F(s)$ ,  $\phi_F$  é, simplesmente

$$\phi_F = \phi_Z - \phi_P.$$

ou

$$2\pi N = 2\pi Z - 2\pi P, \quad (9.12)$$

e o número de circunscrições da origem do plano  $F(s)$  é  $N = Z - P$ . Portanto, para o contorno mostrado na Fig. 9.5(a), que circunscreve um zero, o contorno  $\Gamma_F$  mostrado na Fig. 9.5(b) circunscreve a origem uma vez no sentido horário.

Como exemplo do uso do teorema de Cauchy, considere-se a configuração de pôlos e zeros mostrada na Fig. 9.6(a) com o contorno  $\Gamma_s$  a ser levado em conta. O contorno encerra e circunscreve três zeros e um pôlo. Obtém-se, portanto,

$$N = 3 - 1 = +2$$

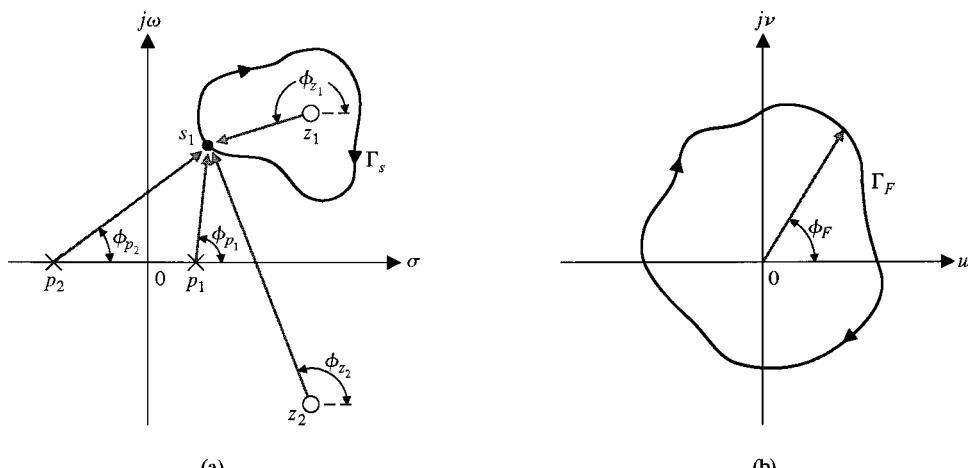
e  $\Gamma_F$ , como está mostrado na Fig. 9.6(b), completa, no sentido horário, dois envolvimentos da origem do plano  $F(s)$ .

Para a configuração de pôlos e zeros e o contorno  $\Gamma_s$  mostrados na Fig. 9.7(a), um pôlo é circundado e não há zeros circundados. Tem-se, portanto,

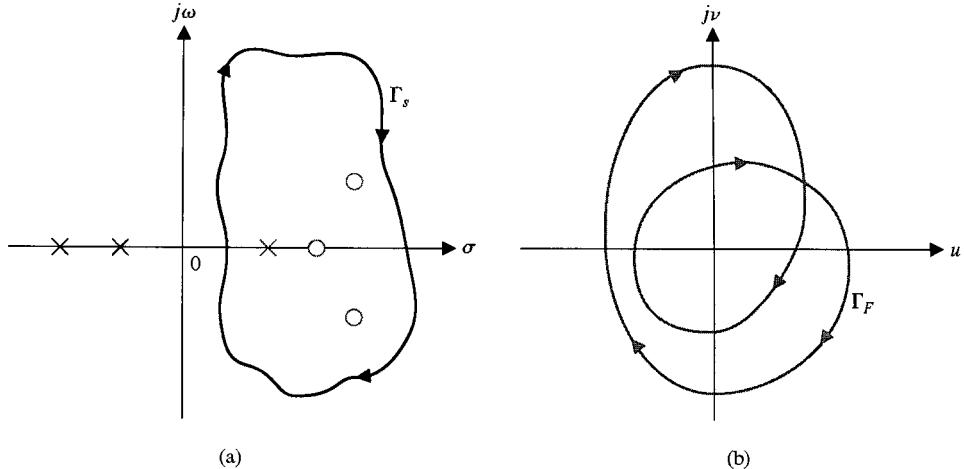
$$N = Z - P = -1$$

e se espera uma circunscrição da origem do plano  $F(s)$  pelo contorno  $\Gamma_F$ . Contudo, como o sinal de  $N$  é negativo, descobre-se que a circunscrição se move no sentido anti-horário, como está mostrado na Fig. 9.7(b).

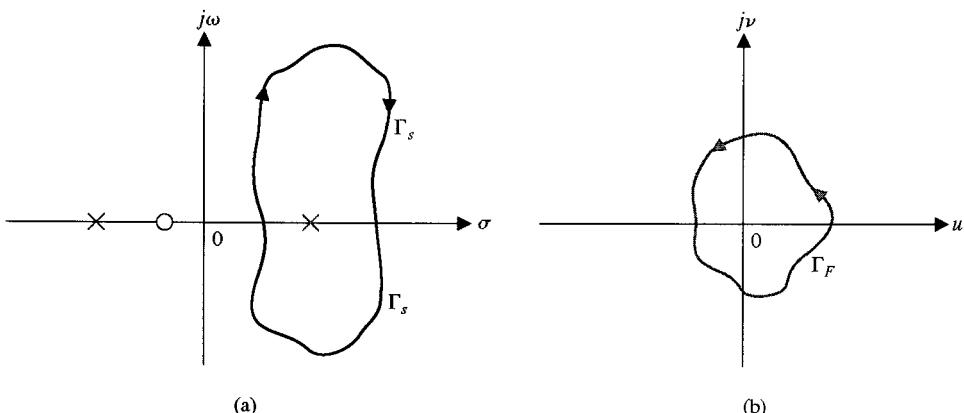
Agora que se desenvolveu e ilustrou o conceito de mapeamento de contornos por meio de uma função  $F(s)$ , tudo está pronto para se considerar o critério de estabilidade proposto por Nyquist.



**Fig. 9.5** Cálculo do ângulo líquido de  $\Gamma_F$ .



**Fig. 9.6** Exemplo de aplicação do teorema de Cauchy com três zeros e um pôlo no interior de  $\Gamma_s$ .



**Fig. 9.7** Exemplo de aplicação do teorema de Cauchy com um pôlo no interior de  $\Gamma_s$ .

### 9.3 CRITÉRIO DE NYQUIST

Para investigar a estabilidade de um sistema de controle, considera-se a equação característica, que é  $F(s) = 0$ , ou seja

$$F(s) = 1 + L(s) = \frac{K \prod_{i=1}^n (s + s_i)}{\prod_{k=1}^M (s + s_k)} = 0. \quad (9.13)$$

Para que um sistema seja estável, todos os zeros de  $F(s)$  devem estar situados no semiplano  $s$  da esquerda. Assim, descobre-se que as raízes de um sistema estável [os zeros de  $F(s)$ ] devem estar à esquerda do eixo  $j\omega$  no plano  $s$ . Escolhe-se, portanto, um contorno  $\Gamma_s$  que envolva inteiramente o semiplano  $s$  da direita e se determina se há zeros de  $F(s)$  no interior de  $\Gamma_s$  utilizando-se o teorema de Cauchy. Isto é, traça-se  $\Gamma_F$  no plano  $F(s)$  e se determina o número de circunscrições  $N$  da origem. Então, o número de zeros de  $F(s)$  no interior do contorno  $\Gamma_s$  [e portanto o de zeros instáveis de  $F(s)$ ] é

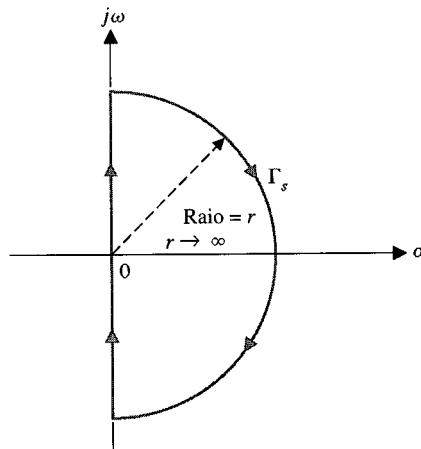
$$Z = N + P. \quad (9.14)$$

Assim, se  $P = 0$ , como é usualmente o caso, descobre-se que o número de raízes instáveis do sistema é igual a  $N$ , o número de circunscrições da origem do plano  $F(s)$ .

O contorno de Nyquist que envolve todo o semiplano  $s$  da direita está mostrado na Fig. 9.8. O contorno  $\Gamma_s$  passa ao longo do eixo  $j\omega$  de  $-j\infty$  a  $+j\infty$  e esta parte do contorno fornece a familiar  $F(j\omega)$ . O contorno é completado por um percurso semicircular de raio  $r$ , em que  $r$  tende para infinito.

Agora o critério de Nyquist diz respeito ao mapeamento da equação característica

$$F(s) = 1 + L(s), \quad (9.15)$$



**Fig. 9.8** Contorno de Nyquist mostrado em traço cheio.

e ao número de circunscrições da origem do plano  $F(s)$ . Alternativamente, é possível definir a função  $F'(s)$  tal que

$$F'(s) = F(s) - 1 = L(s). \quad (9.16)$$

A troca de funções representada pela Eq. (9.16) é muito conveniente porque  $L(s)$  está comumente disponível sob forma fatorada, o que não ocorre com  $[1 + L(s)]$ . Então o mapeamento de  $\Gamma_s$  no plano  $s$  se faz através da função  $F'(s) = L(s)$  no plano  $L(s)$ . Neste caso, o número de circunscrições da origem do plano  $F(s)$ , no sentido horário, se torna o número de circunscrições, no sentido horário, do ponto  $-1$  do plano  $F'(s) = L(s)$  porque  $F'(s) = F(s) - 1$ . Em consequência, o **critério de estabilidade de Nyquist** pode ser enunciado da seguinte forma:

**Um sistema com retroação é estável se e somente se o contorno  $\Gamma_L$ , no plano  $L(s)$  não circunscrever o ponto  $(-1, 0)$  quando o número de pólos de  $L(s)$  no semiplano  $s$  da direita for zero ( $P = 0$ ).**

Quando o número de pólos de  $L(s)$  no semiplano  $s$  da direita for diferente de zero, o critério de Nyquist é enunciado do seguinte modo:

**Um sistema de controle com retroação é estável se e somente se, para o contorno  $\Gamma_L$ , o número de circunscrições no sentido anti-horário do ponto  $(-1, 0)$  for igual ao número de pólos de  $L(s)$  com parte real positiva.**

A base para os dois enunciados é o fato de que, para o mapeamento de  $F'(s) = L(s)$ , o número de raízes (ou zeros) de  $1 + L(s)$  no semiplano  $s$  da direita é representado pela expressão

$$Z = N + P$$

Obviamente se o número de pólos de  $L(s)$  no semiplano da direita for zero ( $P = 0$ ), para o sistema ser estável é necessário que  $N = 0$  e o contorno  $\Gamma_L$  não deve circunscrever o ponto  $-1$ . Além disto, se  $P$  for diferente de zero e se desejar que o sistema seja estável, é necessário que  $Z = 0$ , e então se deve ter  $N = -P$ , ou seja  $P$  circunscrições no sentido anti-horário.

É melhor ilustrar o uso do critério de Nyquist através da finalização de diversos exemplos.

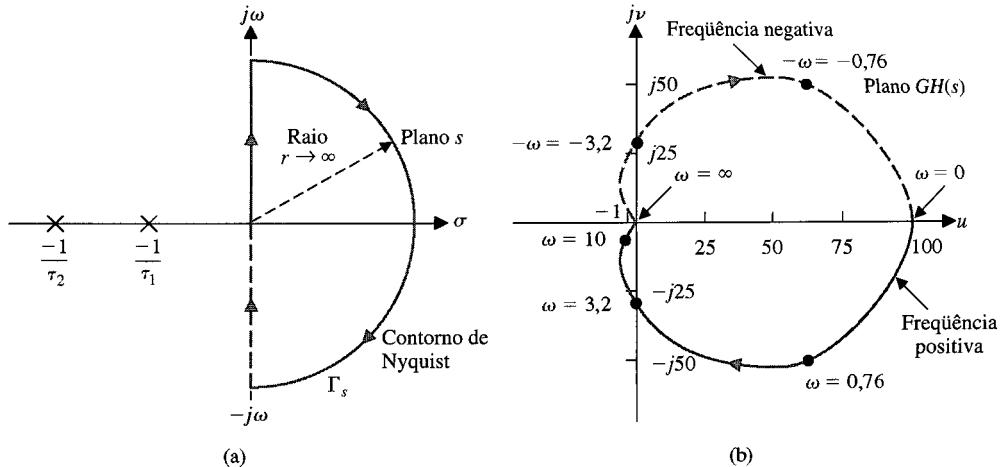
### EXEMPLO 9.1

#### Sistema com dois pólos reais

Um sistema de controle monomialha está mostrado na Fig. 9.1, onde

$$GH(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}. \quad (9.17)$$

Neste caso,  $L(s) = GH(s)$  e se utiliza o contorno  $\Gamma_L = \Gamma_{GH}$  no plano  $GH(s)$ . O contorno  $\Gamma_s$  no plano  $s$  está mostrado na Fig. 9.9(a) e o contorno  $\Gamma_{GH}$  está mostrado na Fig. 9.9(b), para  $\tau_1 = 1$ ,  $\tau_2 = 1/10$  e  $K = 100$ . A magnitude e a fase de  $GH(j\omega)$  são dadas na Tabela 9.2, para valores selecionados de  $\omega$ . Estes valores são usados para se obter o gráfico polar da Fig. 9.9(b).



**Fig. 9.9** Contorno de Nyquist e mapeamento por meio de  $GH(s) = 100/(s + 1)(s/10 + 1)$ .

**TABELA 9.2 Magnitude e Fase de  $GH(j\omega)$**

$\omega$	0	0,1	0,76	1	2	10	20	100	$\infty$
$ GH(j\omega) $	100	96	79,6	70,7	50,2	6,8	2,24	0,10	0
$\angle GH(j\omega)$ (graus)	0	-5,7	-41,5	-50,7	-74,7	-129,3	-150,5	-173,7	-180

O eixo  $+j\omega$  é mapeado através de uma linha cheia, como está mostrado na Fig. 9.9. O eixo  $-j\omega$  é mapeado através de uma linha tracejada, como está mostrado na Fig. 9.9. O semicírculo com  $r \rightarrow \infty$  no plano  $s$  é mapeado na origem do plano  $GH(s)$ .

Constata-se que o número de pólos de  $GH(s)$  no semiplano  $s$  da direita é zero, e assim,  $P = 0$ . Em consequência, para que este sistema seja estável, é necessário que  $N = Z = 0$ , e o contorno no plano  $GH(s)$  não deve circunscrever o ponto  $-1$ . Examinando-se a Fig. 9.9(b) e a Eq. (9.17), constata-se que, para qualquer valor de  $K$ , o contorno não circunscreve o ponto  $-1$ , e o sistema é sempre estável para todos os valores de  $K$  maiores que zero. ■

### EXEMPLO 9.2

#### Sistema com um pôlo na origem

Um sistema de controle monomialha está mostrado na Fig. 9.1, onde

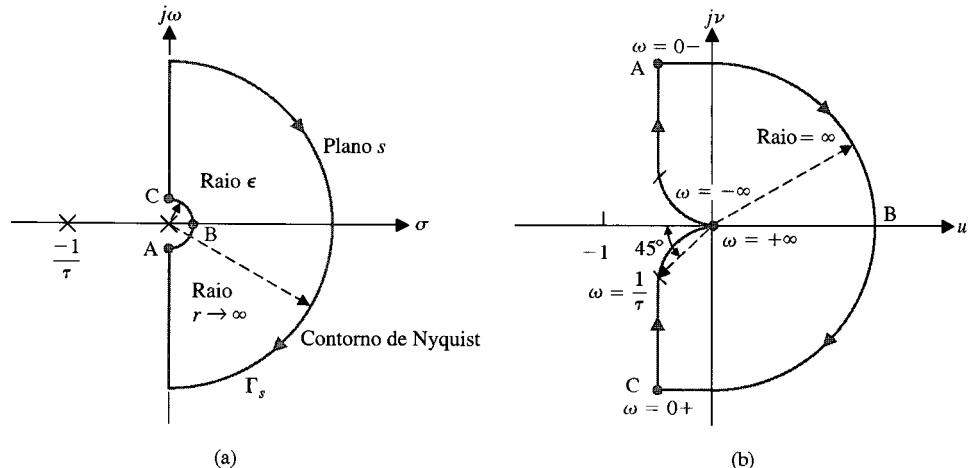
$$GH(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)}$$

Neste caso monomialha,  $L(s) = GH(s)$ , e se determina o contorno  $\Gamma_L = \Gamma_{GH}$  no plano  $GH(s)$ . O contorno  $\Gamma$ , no plano  $s$  está mostrado na Fig. 9.10(a), onde é efetuado um desvio infinitesimal em torno do pôlo na origem por meio de um pequeno semicírculo de raio  $\epsilon$ , em que  $\epsilon \rightarrow 0$ . Este desvio é consequência da condição do teorema de Cauchy, que requer que o contorno não passe pelo pôlo na origem. Um esboço do contorno  $\Gamma_{GH}$  está mostrado na Fig. 9.10(b). Obviamente, a parte do contorno  $\Gamma_{GH}$  de  $\omega = 0^+$  a  $\omega = +\infty$  é simplesmente  $GH(j\omega)$  o gráfico polar de freqüência real. Considere-se, em detalhe, cada uma das partes do contorno de Nyquist  $\Gamma_s$  e determinem-se as partes correspondentes do contorno  $\Gamma_{GH}$  no plano  $GH(s)$ .

**(a) Origem do Plano  $s$ .** O pequeno desvio em torno do pôlo na origem pode ser representado fazendo-se  $s = \epsilon e^{j\phi}$  e permitindo que  $\phi$  varie de  $-90^\circ$  em  $\omega = 0^-$  a  $+90^\circ$  em  $\omega = 0^+$ . Como  $\epsilon$  tende a zero, o mapeamento de  $GH(s)$  é

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} GH(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{K}{\epsilon e^{j\phi}} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{K}{\epsilon} \right) e^{-j\phi}. \quad (9.18)$$

Em consequência o ângulo do contorno no plano  $GH(s)$  varia de  $90^\circ$  em  $\omega = 0^-$  a  $-90^\circ$  em  $\omega = 0^+$ , passando por  $0^\circ$  em  $\omega = 0$ . O raio do contorno no plano  $GH(s)$  para esta parte do contorno no plano  $s$  é infinito, e esta parte do contorno está mostrada na Fig. 9.10(b). Os pontos designados por  $A$ ,  $B$  e  $C$  na Fig. 9.10(a) são mapeados respectivamente nos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  da Fig. 9.10(b).



**Fig. 9.10** Contorno de Nyquist e mapeamento por meio de  $GH(s) = K/s(rs + 1)$ .

(b) **Trecho de  $\omega = 0^+$  a  $\omega = +\infty$** . Este trecho do contorno  $\Gamma_s$  de  $\omega = 0^+$  a  $\omega = +\infty$  é mapeado pela função  $GH(s)$  como o gráfico polar de freqüência real porque  $s = j\omega$ , e

$$GH(s)|_{s=j\omega} = GH(j\omega) \quad (9.19)$$

para este trecho do contorno. Isto resulta no gráfico polar de freqüência real mostrado na Fig. 9.10(b). Quando  $\omega$  tende a  $+\infty$ , tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} GH(j\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{K}{+j\omega(j\omega\tau + 1)} \\ &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left| \frac{K}{\tau\omega^2} \right| e^{-(\pi/2) - \operatorname{tg}^{-1} \omega\tau}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Portanto, a magnitude tende a zero com um ângulo de  $-180^\circ$ .

(c) **Trecho de  $\omega = +\infty$  a  $\omega = -\infty$** . O trecho de  $\Gamma_s$  de  $\omega = +\infty$  a  $\omega = -\infty$  é mapeado no ponto zero na origem do plano  $GH(s)$  pela função  $GH(s)$ . O mapeamento é representado por

$$\lim_{r \rightarrow \infty} GH(s)|_{s=re^{j\phi}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{K}{r^2} \right| e^{-2j\phi} \quad (9.21)$$

para  $\phi$  variando de  $\phi = +90^\circ$  em  $\omega = +\infty$  a  $\phi = -90^\circ$  em  $\omega = -\infty$ . Por conseguinte o contorno se desloca a partir de um ângulo de  $-180^\circ$  em  $\omega = +\infty$  até um ângulo de  $+180^\circ$  em  $\omega = -\infty$ . A magnitude do contorno  $GH(s)$  quando  $r$  for infinito é sempre zero ou uma constante.

(d) **Trecho de  $\omega = -\infty$  a  $\omega = 0^-$** . Este trecho do contorno  $\Gamma_s$  de  $\omega = -\infty$  a  $\omega = 0^-$  é mapeado pela função  $GH(s)$  como

$$GH(s)|_{s=-j\omega} = GH(-j\omega). \quad (9.22)$$

Assim se obtém o conjugado complexo de  $GH(j\omega)$ , e o gráfico para o trecho do diagrama polar de  $\omega = -\infty$  a  $\omega = 0^-$  é simétrico ao gráfico polar de  $\omega = +\infty$  a  $\omega = 0^+$ . Este gráfico polar simétrico está mostrado no plano  $GH(s)$  da Fig. 9.10(b).

Para investigar a estabilidade deste sistema de segunda ordem, constata-se primeiro que o número  $P$  de pólos no interior do semiplano  $s$  da direita é zero. Em consequência, para que este sistema seja estável, é necessário que se tenha  $N = Z = 0$ , e o contorno  $\Gamma_{GH}$  não pode circunscrever o ponto  $-1$  do plano  $GH(s)$ . Examinando-se a Fig. 9.10(b), constata-se que, independentemente do valor do ganho  $K$  e da constante de tempo  $\tau$ , o contorno não circunscreve o ponto  $-1$ , e o sistema é sempre estável. Como no Cap. 7, estão sendo considerados valores positivos do ganho  $K$ . Se for necessário considerar valores negativos de ganho, deve-se usar  $-K$ , sendo  $K \geq 0$ .

Duas conclusões gerais podem ser extraídas deste exemplo:

- O gráfico do contorno  $\Gamma_{GH}$  para a faixa de valores  $-\infty < \omega < 0^-$  será o conjugado complexo do gráfico para a faixa de valores  $0^+ < \omega < +\infty$  e o gráfico polar de  $GH(s)$  será simétrico no plano  $GH(s)$ , em relação ao eixo dos  $u$ . Em consequência, **para se investigar a estabilidade é suficiente construir o contorno  $\Gamma_{GH}$  para a faixa de freqüências  $0^+ < \omega < +\infty$**  (levando em conta o desvio em torno da origem).

2. A magnitude de  $GH(s)$  para  $s = re^{j\phi}$  e  $r \rightarrow \infty$  normalmente tende a zero ou para um valor constante. ■

### EXEMPLO 9.3

#### Sistema de três pólos

Considere-se novamente o sistema monomialha mostrado na Fig. 9.1 quando

$$GH(s) = \frac{K}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}. \quad (9.23)$$

O contorno de Nyquist  $\Gamma_s$  está mostrado na Fig. 9.10(a). Novamente o mapeamento para  $GH(j\omega)$  e  $GH(-j\omega)$  apresenta simetria de modo que é suficiente investigar o lugar  $GH(j\omega)$ . A origem do plano  $s$  é mapeada em um semicírculo de raio infinito, como no Exemplo 9.2. Além disto, o semicírculo  $re^{j\phi}$  no plano  $s$  é mapeado no ponto  $GH(s) = 0$ , como esperado. Em consequência, para investigar a estabilidade do sistema é suficiente traçar o gráfico da parte do contorno  $\Gamma_{GH}$  que representa o diagrama polar de freqüência real  $GH(j\omega)$  no intervalo  $0^+ < \omega < +\infty$ . Assim, para  $s = +j\omega$ , tem-se

$$\begin{aligned} GH(j\omega) &= \frac{K}{j\omega(j\omega\tau_1 + 1)(j\omega\tau_2 + 1)} \\ &= \frac{-K(\tau_1 + \tau_2) - jK(1/\omega)(1 - \omega^2\tau_1\tau_2)}{1 + \omega^2(\tau_1^2 + \tau_2^2) + \omega^4\tau_1^2\tau_2^2} \\ &= \frac{K}{[\omega^4(\tau_1 + \tau_2)^2 + \omega^2(1 - \omega^2\tau_1\tau_2)^2]^{1/2}} \\ &\quad \times \underline{\left[ -\operatorname{tg}^{-1} \omega\tau_1 - \operatorname{tg}^{-1} \omega\tau_2 - (\pi/2) \right]}. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Quando  $\omega = 0^+$  a magnitude de  $GH(j\omega)$  no plano  $GH(s)$  é infinita com um ângulo de  $-90^\circ$ . Quando  $\omega$  tende a  $+\infty$ , tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} GH(j\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\omega^3\tau_1\tau_2} \right| \underline{\left[ -(\pi/2) - \operatorname{tg}^{-1} \omega\tau_1 - \operatorname{tg}^{-1} \omega\tau_2 \right]} \\ &= \left( \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\omega^3\tau_1\tau_2} \right| \right) \underline{\left[ -(3\pi/2) \right]}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Portanto, a magnitude de  $GH(j\omega)$  tende a zero segundo um ângulo de  $-270^\circ$ . Para tender a um ângulo de  $-270^\circ$ , o lugar  $GH(j\omega)$  deve cruzar o eixo dos  $u$  no plano  $GH(s)$ , como está mostrado na Fig. 9.11. Assim é possível circunscrever o ponto  $-1$ , como está mostrado na Fig. 9.11. O número de circunscrições quando o ponto  $-1$  estiver no interior do contorno, como mostrado na Fig. 9.11, é igual a dois e o sistema é instável, apresentando duas raízes no semiplano  $s$  da direita. O ponto onde o lugar  $GH(s)$  intercepta o eixo real pode ser achado fazendo-se a parte imaginária de  $GH(j\omega) = u + jv$  igual a zero. Tem-se, então, a partir da Eq. (9.24)

$$v = \frac{-K(1/\omega)(1 - \omega^2\tau_1\tau_2)}{1 + \omega^2(\tau_1^2 + \tau_2^2) + \omega^4\tau_1^2\tau_2^2} = 0. \quad (9.26)$$

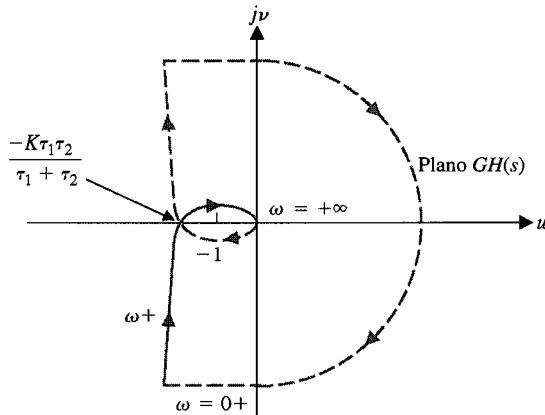


Fig. 9.11 Diagrama de Nyquist para  $GH(s) = K/s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)$ . A marca mostrada à esquerda da origem é o ponto  $-1$ .

Portanto,  $v = 0$  quando  $1 - \omega^2\tau_1\tau_2 = 0$  ou  $\omega = 1/\sqrt{\tau_1\tau_2}$ . O valor da parte real,  $u$ , de  $GH(j\omega)$  nesta freqüência é

$$\begin{aligned} u &= \frac{-K(\tau_1 + \tau_2)}{1 + \omega^2(\tau_1^2 + \tau_2^2) + \omega^4\tau_1^2\tau_2^2} \Big|_{\omega^2=1/\tau_1\tau_2} \\ &= \frac{-K(\tau_1 + \tau_2)\tau_1\tau_2}{\tau_1\tau_2 + (\tau_1^2 + \tau_2^2) + \tau_1\tau_2} = \frac{-K\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Portanto, o sistema será instável quando

$$\frac{-K\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \geq -1$$

ou

$$K \leq \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1\tau_2}. \quad (9.28)$$

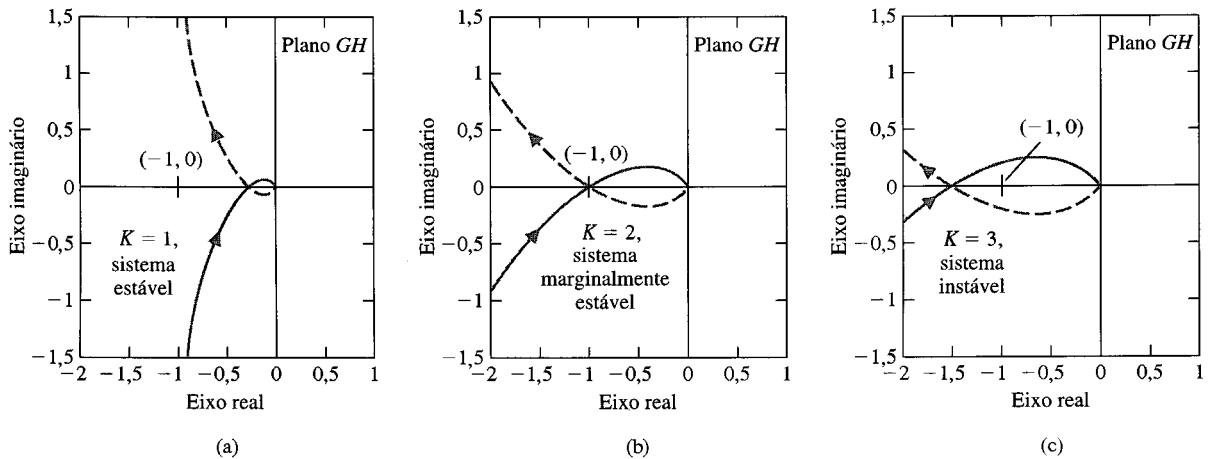
Considere-se o caso em que  $\tau_1 = \tau_2 = 1$ , de modo a

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s + 1)^2}$$

Usando a Eq. (9.28), há expectativa de estabilidade quando

$$K \leq 2$$

Na Fig. 9.12 são mostrados os diagramas de Nyquist para três valores de  $K$ . ■



**Fig. 9.12** Gráfico de Nyquist para  $G(s)H(s) = K/(s(s + 1)^2)$  quando (a)  $K = 1$ , (b)  $K = 2$  e (c)  $K = 3$ .

#### EXEMPLO 9.4

#### Sistema com dois pólos na origem

Seja determinar de novo a estabilidade do sistema monomialha da Fig. 9.1 quando

$$GH(s) = \frac{K}{s^2(\tau s + 1)}. \quad (9.29)$$

O gráfico polar de freqüência real é obtido para  $s = j\omega$  e se tem

$$GH(j\omega) = \frac{K}{-\omega^2(j\omega\tau + 1)} = \frac{K}{[\omega^4 + \tau^2\omega^6]^{1/2}} / \underline{-\pi} - \underline{\operatorname{tg}^{-1}\omega\tau}. \quad (9.30)$$

Nota-se que o ângulo de  $GH(j\omega)$  é sempre de  $-180^\circ$  ou maior, e o lugar de  $GH(j\omega)$  fica acima do eixo dos  $u$  para todos os valores de  $\omega$ . À medida que  $\omega$  tende a  $0^+$ , tem-se

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} GH(j\omega) = \left( \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \left| \frac{K}{\omega^2} \right| \right) \underline{-\pi}. \quad (9.31)$$

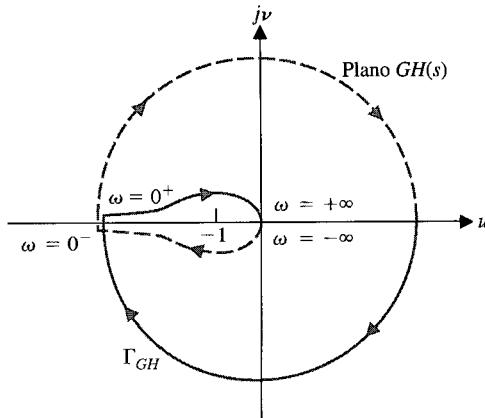


Fig. 9.13 Gráfico do contorno de Nyquist para  $GH(s) = K/s^2(\tau s + 1)$ .

À medida que  $\omega$  tende a  $+\infty$ , tem-se

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} GH(j\omega) = \left( \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{K}{\omega^3} \right) / -3\pi/2. \quad (9.32)$$

No pequeno desvio semicircular em torno da origem do plano  $s$  onde  $s = \epsilon e^{j\phi}$ , tem-se

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} GH(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\epsilon^2} e^{-2j\phi}, \quad (9.33)$$

em que  $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$ . Portanto, o contorno  $\Gamma_{GH}$  excursiona entre um ângulo de  $+\pi$  em  $\omega = 0^+$  e um ângulo de  $-\pi$  para  $\omega = 0^-$  e percorre um círculo completo de  $2\pi$  rad quando  $\omega$  varia de  $\omega = 0^-$  para  $\omega = 0^+$ . O gráfico completo de  $\Gamma_{GH}$  está mostrado na Fig. 9.13. Como o contorno circunscreve o ponto  $-1$  duas vezes, há duas raízes do sistema a malha fechada no semiplano  $s$  da direita, e o sistema é instável, independentemente do valor do ganho  $K$ . ■

#### EXEMPLO 9.5

#### Sistema com um pólo no semiplano $s$ da direita

Seja considerar o sistema de controle da Fig. 9.14 e determinar a estabilidade do sistema. Considere-se primeiramente o sistema sem retroação derivativa, de modo que  $K_2 = 0$ . Tem-se então a função de transferência a malha aberta (sem retroação)

$$GH(s) = \frac{K_1}{s(s - 1)}. \quad (9.34)$$

Assim, a função de transferência a malha aberta possui um pólo no semiplano  $s$  da direita e, por conseguinte,  $P = 1$ . Para que este sistema seja estável, é necessário ter  $N = -P = -1$ , uma circunscção do ponto  $-1$  no sentido anti-horário. No desvio semicircular em torno da origem do plano  $s$ , faz-se  $s = \epsilon e^{j\phi}$  quando  $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$ . Tem-se então, quando  $s = \epsilon e^{j\phi}$ ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} GH(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K_1}{-\epsilon e^{j\phi}} = \left( \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{K_1}{\epsilon} \right| \right) / -180^\circ - \phi. \quad (9.35)$$

Em consequência, este trecho do contorno  $\Gamma_{GH}$  é um semicírculo de tamanho infinito no semiplano  $GH$  da esquerda, como está mostrado na Fig. 9.15. Quando  $s = j\omega$ , tem-se

$$\begin{aligned} GH(j\omega) &= \frac{K_1}{j\omega(j\omega - 1)} = \frac{K_1}{(\omega^2 + \omega^4)^{1/2}} / (-\pi/2) - \operatorname{tg}^{-1}(-\omega) \\ &= \frac{K_1}{(\omega^2 + \omega^4)^{1/2}} / (+\pi/2) + \operatorname{tg}^{-1}\omega. \end{aligned} \quad (9.36)$$

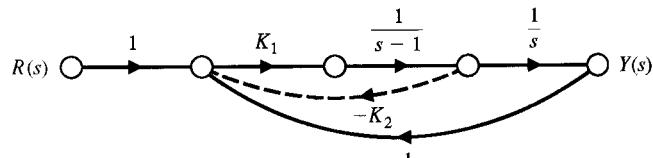
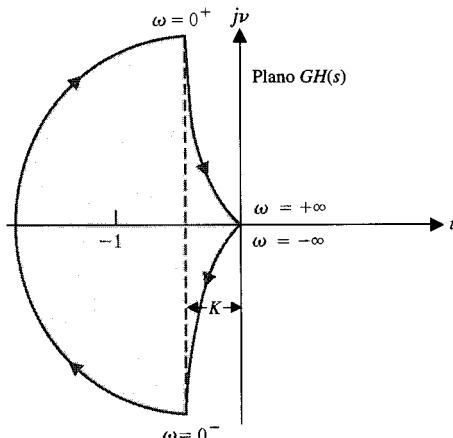


Fig. 9.14 Sistema de controle de segunda ordem com retroação.



**Fig. 9.15** Diagrama de Nyquist para  $GH(s) = K_1/s(s - 1)$ .

Finalmente, para o semicírculo de raio  $r$  quando  $r$  tende ao infinito, tem-se

$$\lim_{r \rightarrow \infty} GH(s)|_{s=re^{j\phi}} = \left( \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{K_1}{r^2} \right| \right) e^{-2j\phi}, \quad (9.37)$$

em que  $\phi$  varia de  $\pi/2$  a  $-\pi/2$  em sentido horário. Portanto, o contorno  $\Gamma_{GH}$ , na origem do plano  $GH$ , varia de  $2\pi$  rad no sentido anti-horário, como está mostrado na Fig. 9.15. Diversos valores importantes do lugar  $GH(s)$  são dados na Tabela 9.3. O contorno  $\Gamma_{GH}$  no plano  $GH(s)$  circunscreve o ponto  $-1$  uma vez no sentido horário, e  $N = +1$ . Portanto,

$$Z = N + P = 2, \quad (9.38)$$

e o sistema é instável porque há dois zeros da equação característica no semiplano  $s$  da direita, independentemente do valor do ganho  $K_1$ .

Seja agora reconsiderar o sistema quando a retroação derivativa é incluída no sistema mostrado na Fig. 9.14 ( $K_2 > 0$ ). Então, a função de transferência a malha aberta é

$$GH(s) = \frac{K_1(1 + K_2 s)}{s(s - 1)}. \quad (9.39)$$

O trecho do contorno  $\Gamma_{GH}$  para  $s = \epsilon e^{j\phi}$  é o mesmo que o do sistema sem retroação derivativa, como está mostrado na Fig. 9.16. Contudo, quando  $s = re^{j\phi}$  com  $r$  tendendo ao infinito, tem-se

$$\lim_{r \rightarrow \infty} GH(s)|_{s=re^{j\phi}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{K_1 K_2}{r} \right| e^{-j\phi}, \quad (9.40)$$

e o contorno  $\Gamma_{GH}$ , na origem do plano  $GH$ , varia de  $\pi$  rad no sentido horário, como está mostrado na Fig. 9.16. O lugar de freqüência  $GH(j\omega)$  corta o eixo dos  $u$  e é determinado considerando-se a função de transferência de freqüência real

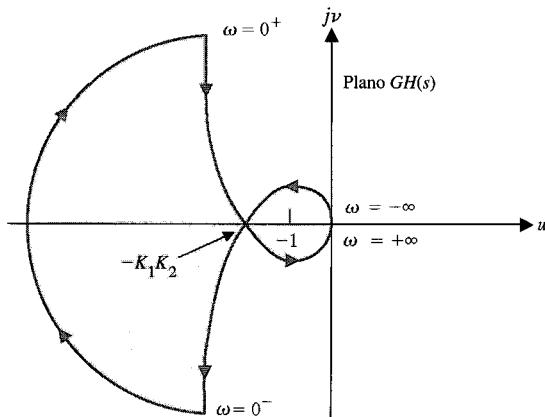
$$\begin{aligned} GH(j\omega) &= \frac{K_1(1 + K_2 j\omega)}{-\omega^2 - j\omega} \\ &= \frac{-K_1(\omega^2 + \omega^2 K_2) + j(\omega - K_2 \omega^3)K_1}{\omega^2 + \omega^4}. \end{aligned} \quad (9.41)$$

O lugar  $GH(j\omega)$  corta o eixo dos  $u$  em um ponto onde o valor da parte imaginária de  $GH(j\omega)$  é igual a zero. Por conseguinte,

$$\omega - K_2 \omega^3 = 0$$

**TABELA 9.3 Valores de  $GH(s)$**

$s$	$j0^-$	$j0^+$	$j1$	$+j\infty$	$-j\infty$
$ GH /K_1$	$\infty$	$\infty$	$1/\sqrt{2}$	0	0
$\angle GH$	$-90^\circ$	$+90^\circ$	$+135^\circ$	$+180^\circ$	$-180^\circ$



**Fig. 9.16** Diagrama de Nyquist para  $GH(s) = K_1(1 + K_2 s)/s(s - 1)$ .

neste ponto, ou  $\omega^2 = 1/K_2$ . O valor da parte real de  $GH(j\omega)$  na interseção é então

$$u|_{\omega^2=1/K_2} = \frac{-\omega^2 K_1 (1 + K_2)}{\omega^2 + \omega^4} \Bigg|_{\omega^2=1/K_2} = -K_1 K_2. \quad (9.42)$$

Portanto, quando  $-K_1 K_2 < -1$  ou  $K_1 K_2 > 1$ , o contorno  $\Gamma_{GH}$  circunscreve o ponto  $-1$  uma vez no sentido anti-horário e, por conseguinte,  $N = -1$ . Então,  $Z$ , o número de zeros do sistema no semiplano  $s$  da direita, é

$$Z = N + P = -1 + 1 = 0.$$

Assim, o sistema é estável quando  $K_1 K_2 > 1$ . Freqüentemente é útil utilizar o computador para traçar o diagrama de Nyquist [5]. ■

#### EXEMPLO 9.6

#### Sistema com um zero no semiplano $s$ da direita

Considere-se o sistema de controle com retroação mostrado na Fig. 9.1 quando

$$GH(s) = \frac{K(s - 2)}{(s + 1)^2}$$

Observe-se que este sistema é estável na configuração a malha aberta (sem retroação). Tem-se

$$GH(j\omega) = \frac{K(j\omega - 2)}{(j\omega + 1)^2} = \frac{K(j\omega - 2)}{(1 - \omega^2) + j2\omega}. \quad (9.43)$$

À medida que  $\omega$  tende a  $+\infty$  no eixo  $+j\omega$ , tem-se

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} GH(j\omega) = \left( \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{K}{\omega} \right) \underline{-\pi/2}$$

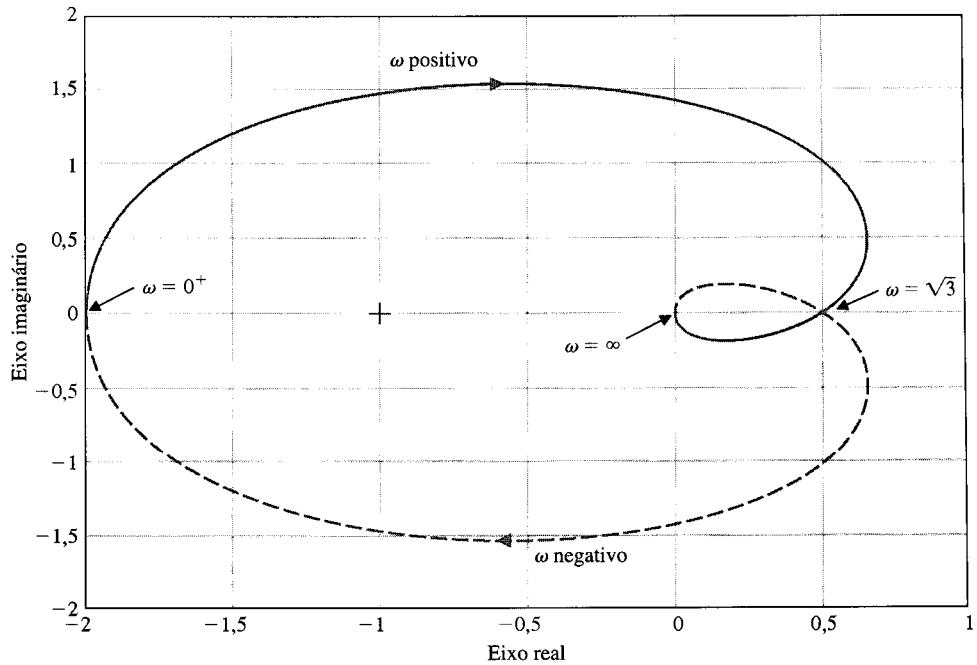
Quando  $\omega = \sqrt{3}$ , tem-se  $GH(j\omega) = K/2$ . Em  $\omega = 0^+$ , tem-se  $GH(j\omega) = -2K$ . O diagrama de Nyquist para  $GH(j\omega)/K$  está mostrado na Fig. 9.17.  $GH(j\omega)$  intercepta o ponto  $(-1 + j0)$  quando  $K = 1/2$ . Assim, o sistema é estável para a faixa limitada de ganho  $0 < K \leq 1/2$ . Quando  $K > 1/2$ , o número de circunscrições do ponto  $-1$  é  $N = 1$ . O número de pólos de  $GH(s)$  no semiplano  $s$  da direita é  $P = 0$ . Em consequência, resulta

$$Z = N + P = 1,$$

e o sistema é instável. Examinando-se o diagrama de Nyquist da Fig. 9.17, que é traçado para  $GH(j\omega)/K$ , conclui-se que o sistema é instável para todos os valores de  $K > 1/2$ . ■

## 9.4 ESTABILIDADE RELATIVA E CRITÉRIO DE NYQUIST

A estabilidade relativa de um sistema foi discutida na Seção 6.3, em termos do plano  $s$ . No plano  $s$ , definiu-se a estabilidade relativa de um sistema como a propriedade medida pelo tempo de assentamento de cada raiz ou par de raízes. Portanto, um sistema com menor tempo de assentamento é considerado relativamente mais estável. Seria desejável determinar uma medida útil semelhante de estabilidade relativa para o método de resposta de freqüência. O critério de Nyquist fornece informação



**Fig. 9.17** Diagrama de Nyquist do Exemplo 9.6 para  $GH(j\omega)/K$ .

adequada a respeito da estabilidade relativa e, além disto, pode ser utilizado para definir e determinar a estabilidade relativa de um sistema.

O critério de estabilidade de Nyquist é definido em termos do ponto  $(-1, 0)$  no diagrama polar, ou do ponto  $0 \text{ dB}, -180^\circ$  nos diagramas de Bode ou nos diagramas de magnitude logarítmica–ângulo de fase. Obviamente, a proximidade do lugar  $GH(j\omega)$  em relação a este ponto de estabilidade é uma medida da estabilidade relativa do sistema. O gráfico polar de  $GH(j\omega)$  para diversos valores de  $K$  e

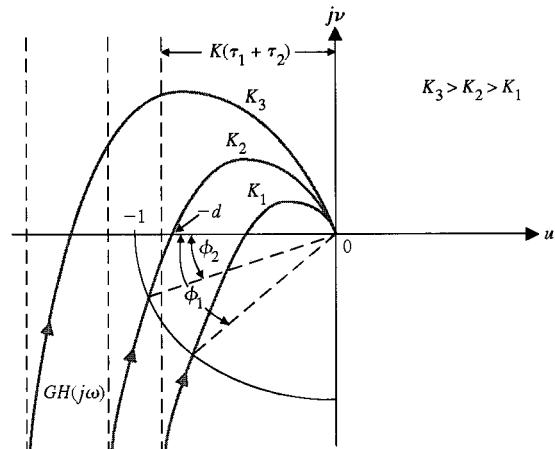
$$GH(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega\tau_1 + 1)(j\omega\tau_2 + 1)} \quad (9.44)$$

está mostrado na Fig. 9.18. À medida que  $K$  aumenta, o gráfico polar se aproxima do ponto  $-1$  e finalmente circunscreve o ponto  $-1$  para um ganho  $K = K_3$ . Determinou-se na Seção 9.3 que o lugar intercepta o eixo dos  $u$  no ponto

$$u = \frac{-K\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}. \quad (9.45)$$

Portanto, o sistema possui raízes no eixo  $j\omega$  quando

$$u = -1 \quad \text{ou} \quad K = \left( \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1\tau_2} \right)$$



**Fig. 9.18** Gráfico polar de  $GH(j\omega)$  para três valores de ganho.

À medida que  $K$  diminui abaixo deste valor marginal, a estabilidade é aumentada, e a margem entre o ganho  $K = (\tau_1 + \tau_2)/\tau_1\tau_2$  e um ganho  $K = K_2$  é uma medida da estabilidade relativa. Esta medida de estabilidade relativa é chamada de **margem de ganho** e é definida pelo **inverso do ganho**  $|GH(j\omega)|$  na freqüência para a qual o ângulo de fase atinge o valor de  $-180^\circ$  (isto é,  $v = 0$ ). A margem de ganho é uma medida do fator pelo qual o ganho do sistema poderá ser aumentado para que o lugar  $GH(j\omega)$  passe pelo ponto  $u = -1$ . Assim, para um ganho  $K = K_2$  na Fig. 9.18, a margem de ganho é igual ao inverso de  $GH(j\omega)$  quando  $v = 0$ . Como  $\omega = 1/\sqrt{\tau_1\tau_2}$  quando o deslocamento de fase é  $-180^\circ$ , tem-se uma margem de ganho igual a

$$\frac{1}{|GH(j\omega)|} = \left[ \frac{K_2\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \right]^{-1} = \frac{1}{d}. \quad (9.46)$$

A margem de ganho pode ser definida em termos de uma **medida logarítmica (decibel)** como

$$20 \log \left( \frac{1}{d} \right) = -20 \log d \text{ dB.} \quad (9.47)$$

Por exemplo, quando  $\tau_1 = \tau_2 = 1$ , o sistema é estável para  $K \leq 2$ . Assim, para  $K = K_2 = 0,5$ , a margem de ganho é igual a

$$\frac{1}{d} = \left[ \frac{K_2\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \right]^{-1} = 4, \quad (9.48)$$

ou, em medida logarítmica,

$$20 \log 4 = 12 \text{ dB.} \quad (9.49)$$

Por conseguinte, a margem de ganho indica que o ganho do sistema pode ser aumentado por meio de um fator 4 (12 dB) antes de se atingir o limiar de estabilidade.

---

**A margem de ganho é o acréscimo no ganho do sistema, quando a fase for igual a  $-180^\circ$ , e que resultará em um sistema marginalmente estável, com a interseção do ponto  $-1 + j0$  pelo diagrama de Nyquist.**

---

Uma medida alternativa da estabilidade relativa pode ser definida em termos do ângulo de margem de fase entre um sistema específico e um sistema marginalmente estável. Quando o lugar  $GH(j\omega)$  intercepta o ponto  $u = -1, v = 0$  no plano  $GH$ , há diversas raízes da equação característica sobre o eixo  $j\omega$ . Em consequência, uma medida da estabilidade relativa, a **margem de fase**, é definida como o **ângulo de fase segundo o qual o lugar  $GH(j\omega)$  deve ser girado de modo que a magnitude unitária  $|GH(j\omega)| = 1$  passe pelo ponto  $(-1, 0)$  no plano  $GH(j\omega)$** . Esta medida de estabilidade relativa é igual ao atraso de fase adicional requerido para que o sistema se torne instável. Esta informação pode ser obtida a partir do diagrama de Nyquist mostrado na Fig. 9.18. Para um ganho  $K = K_2$ , é possível adicionar um ângulo de fase,  $\phi_2$ , antes de o sistema se tornar instável. Além disso, para o ganho  $K_1$ , a margem de fase é igual a  $\phi_1$ , como está mostrado na Fig. 9.18.

---

**A margem de fase é o quanto de defasagem de  $GH(j\omega)$  com magnitude unitária que resultará em um sistema marginalmente estável com interseção do ponto  $-1 + j0$  pelo diagrama de Nyquist.**

---

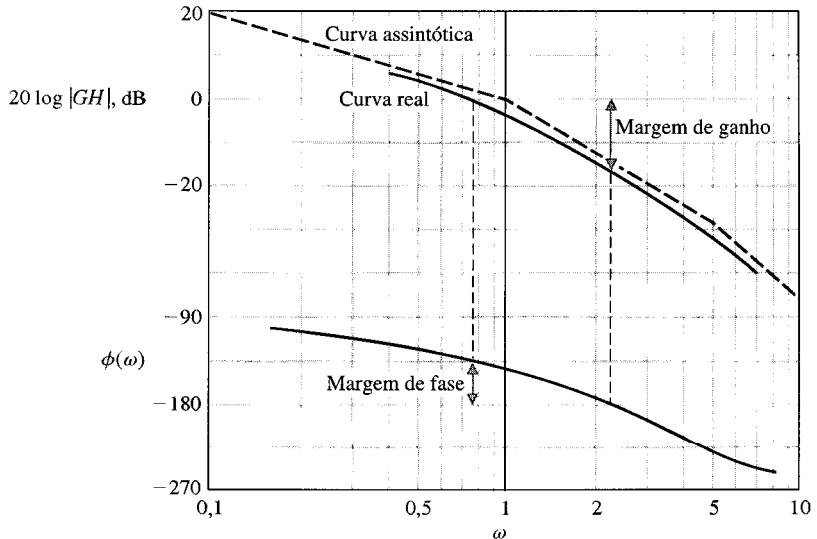
As margens de ganho e de fase são calculadas facilmente a partir dos diagramas de Bode, e como é preferível construir esses diagramas no lugar do gráfico polar, vale a pena ilustrar neles as medidas de estabilidade relativa. O ponto crítico para estabilidade é  $u = -1, v = 0$  no plano  $GH(j\omega)$ , que é equivalente a uma magnitude logarítmica de 0 dB e a um ângulo de fase de  $180^\circ$  (ou  $-180^\circ$ ) nos diagramas de Bode.

O exame do diagrama de Nyquist de um sistema de fase mínima é relativamente imediato. Para sistemas de fase não-mínima, contudo, torna-se necessário um cuidado especial, e o diagrama de Nyquist completo deve ser estudado para se determinar a estabilidade.

A margem de ganho e a margem de fase podem ser calculadas prontamente utilizando-se um programa de computador, admitindo-se que o sistema seja de fase mínima. Ao contrário, para sistemas de fase não-mínima, deve ser construído um diagrama de Nyquist completo.

Os diagramas de Bode de

$$GH(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)(0,2j\omega + 1)} \quad (9.50)$$



**Fig. 9.19** Diagramas de Bode para  $GH_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)(0.2j\omega + 1)}$ .

estão mostrados na Fig. 9.19. O ângulo de fase correspondente à magnitude logarítmica de 0 dB é igual a  $137^\circ$ . Assim, a margem de fase é  $180^\circ - 137^\circ = 43^\circ$ , como está mostrado na Fig. 9.19. A magnitude logarítmica quando o ângulo de fase é  $-180^\circ$  é de  $-15$  dB, portanto, a margem de ganho é de 15 dB, como está mostrado na Fig. 9.19.

A resposta de freqüência de um sistema pode ser retratada graficamente em um diagrama cujos eixos são a magnitude logarítmica e o ângulo de fase.<sup>1</sup> Neste diagrama, o ponto crítico de estabilidade é o ponto 0 dB,  $-180^\circ$ , e a margem de ganho e a margem de fase podem ser facilmente determinadas e indicadas no diagrama. O lugar magnitude logarítmica-ângulo de fase referente a

$$GH_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)(0.2j\omega + 1)} \quad (9.51)$$

está mostrado na Fig. 9.20. A margem de fase indicada é de  $43^\circ$  e a margem de ganho é de 15 dB. Para fins de comparação, a curva referente a

$$GH_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)^2} \quad (9.52)$$

é também mostrada na Fig. 9.20. A margem de ganho para  $GH_2$  é igual a 5,7 dB e a margem de fase de  $GH_2$  é igual a  $20^\circ$ . Obviamente, o sistema com retroação  $GH_2(j\omega)$  é relativamente menos estável que o sistema  $GH_1(j\omega)$ . Contudo, permanece aberta a pergunta: Quanto o sistema  $GH_2(j\omega)$  é menos estável que o sistema  $GH_1(j\omega)$ ? No parágrafo seguinte esta pergunta será respondida com relação a um sistema de segunda ordem, e a utilidade da relação que será desenvolvida vai depender da presença de raízes dominantes.

Seja agora determinar a margem de fase de um sistema de segunda ordem e relacionar a margem de fase à relação de amortecimento  $\zeta$  de um sistema subamortecido. Considere-se a função de transferência a malha fechada do sistema mostrado na Fig. 9.1, em que

$$GH(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}. \quad (9.53)$$

A equação característica deste sistema de segunda ordem é

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0.$$

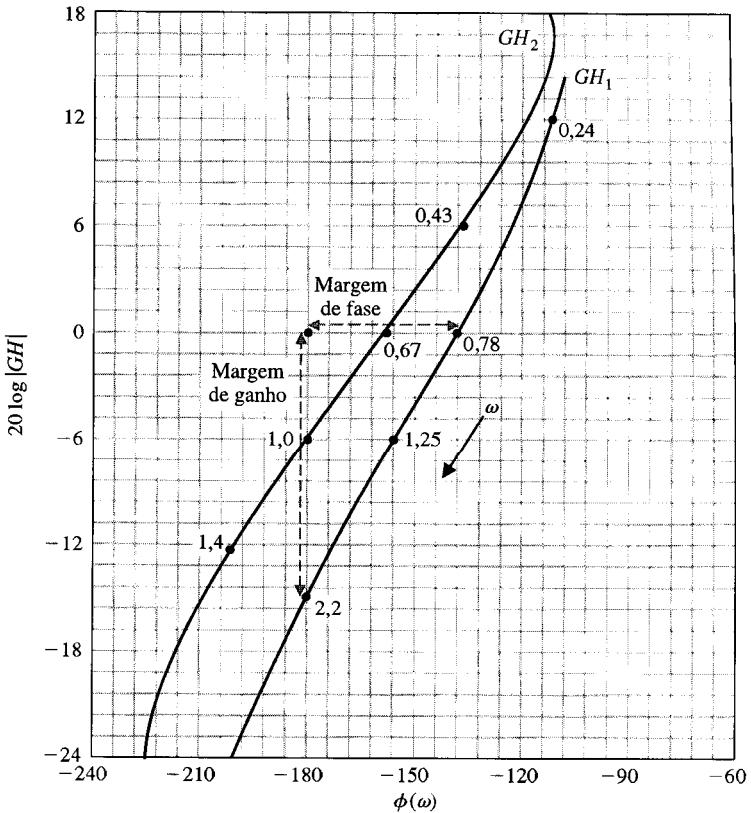
Portanto, as raízes a malha fechada são

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}.$$

A forma da Eq. (9.53), no domínio de freqüência, é

$$GH(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\zeta\omega_n)}. \quad (9.54)$$

<sup>1</sup> Este diagrama é conhecido na literatura como diagrama de Nichols e corresponde à forma logarítmica do gráfico polar. (N. do T.)



**Fig. 9.20** Curva magnitude logarítmica-ângulo de fase para  $GH_1$  e  $GH_2$ .

A magnitude da resposta de freqüência é igual a 1 em uma freqüência  $\omega_c$ , e assim

$$\frac{\omega_n^2}{\omega_c(\omega_c^2 + 4\zeta^2\omega_n^2)^{1/2}} = 1. \quad (9.55)$$

Rearrumando a Eq. (9.55), obtém-se

$$(\omega_c^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2(\omega_c^2) - \omega_n^4 = 0. \quad (9.56)$$

Resolvendo a equação para  $\omega_c$ , obtém-se

$$\frac{\omega_c^2}{\omega_n^2} = (4\zeta^4 + 1)^{1/2} - 2\zeta^2.$$

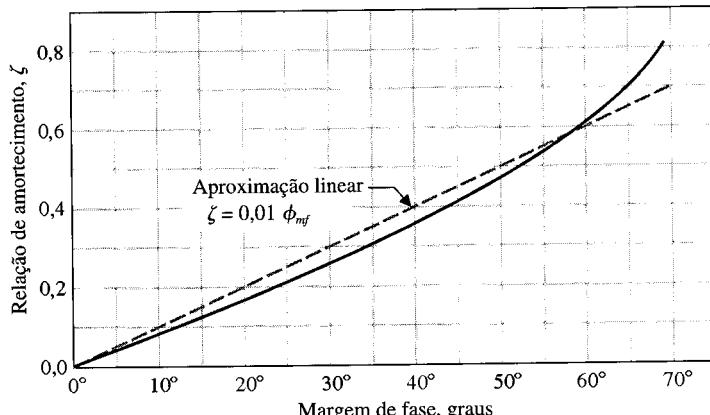
A margem de fase para este sistema é

$$\begin{aligned} \phi_{mf} &= 180^\circ - 90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\omega_c}{2\zeta\omega_n} \right) \\ &= 90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{1}{2\zeta} [(4\zeta^4 + 1)^{1/2} - 2\zeta^2]^{1/2} \right) \\ &= \operatorname{tg}^{-1} \left( 2\zeta \left[ \frac{1}{(4\zeta^4 + 1)^{1/2} - 2\zeta^2} \right]^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (9.57)$$

A Eq. (9.57) é a relação entre o coeficiente de amortecimento  $\zeta$  e a margem de fase  $\phi_{mf}$ , que propicia uma correlação entre a resposta de freqüência e a resposta no domínio do tempo. A Fig. 9.21 mostra um gráfico de  $\zeta$  versus  $\phi_{mf}$ . A curva real de  $\zeta$  versus  $\phi_{mf}$  pode ser aproximada pela reta tracejada mostrada na Fig. 9.21. A inclinação da aproximação linear é igual a 0,01 e, em consequência, uma relação linear aproximada entre o coeficiente de amortecimento e a margem de fase é dada por

$$\boxed{\zeta = 0,01\phi_{mf}}, \quad (9.58)$$

onde a margem de fase é medida em graus. Esta aproximação é razoavelmente exata para  $\zeta \leq 0,7$  e constitui um índice útil para fazer a correlação da resposta de freqüência com o desempenho tran-



**Fig. 9.21** Relação de amortecimento versus margem de fase para um sistema de segunda ordem.

sitório de um sistema. A Eq. (9.58) é uma aproximação adequada para um sistema de segunda ordem e pode ser usada em sistemas de ordem mais elevada se for possível supor que a resposta transitória do sistema é devida principalmente a um par de raízes dominantes subamortecidas. A aproximação de sistemas de ordem mais elevada por um sistema de segunda ordem dominante é útil de verdade! Embora deva ser usada com cautela, os engenheiros de controle consideram que esta abordagem é uma técnica simples porém razoavelmente precisa de ajustar as especificações de um sistema de controle.

Portanto, para o sistema com uma função de transferência a malha aberta

$$GH(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)(0,2j\omega + 1)}, \quad (9.59)$$

descobriu-se que a margem de fase era de  $43^\circ$ , como mostrado na Fig. 9.19. Assim, a relação de amortecimento é aproximadamente

$$\zeta \approx 0,01\phi_{mf} = 0,43. \quad (9.60)$$

Então a ultrapassagem percentual para uma entrada em degrau aplicada a este sistema é aproximadamente

$$U.P. = 22\%, \quad (9.61)$$

como obtido a partir da Fig. 5.8 para  $\zeta = 0,43$ .

É factível o desenvolvimento de um programa de computador para se calcular e traçar gráficos das margens de fase e de ganho em função de  $K$  para uma dada  $GH(j\omega)$ . Seja o sistema da Fig. 9.1 com

$$GH(s) = \frac{K}{s(s + 4)^2}.$$

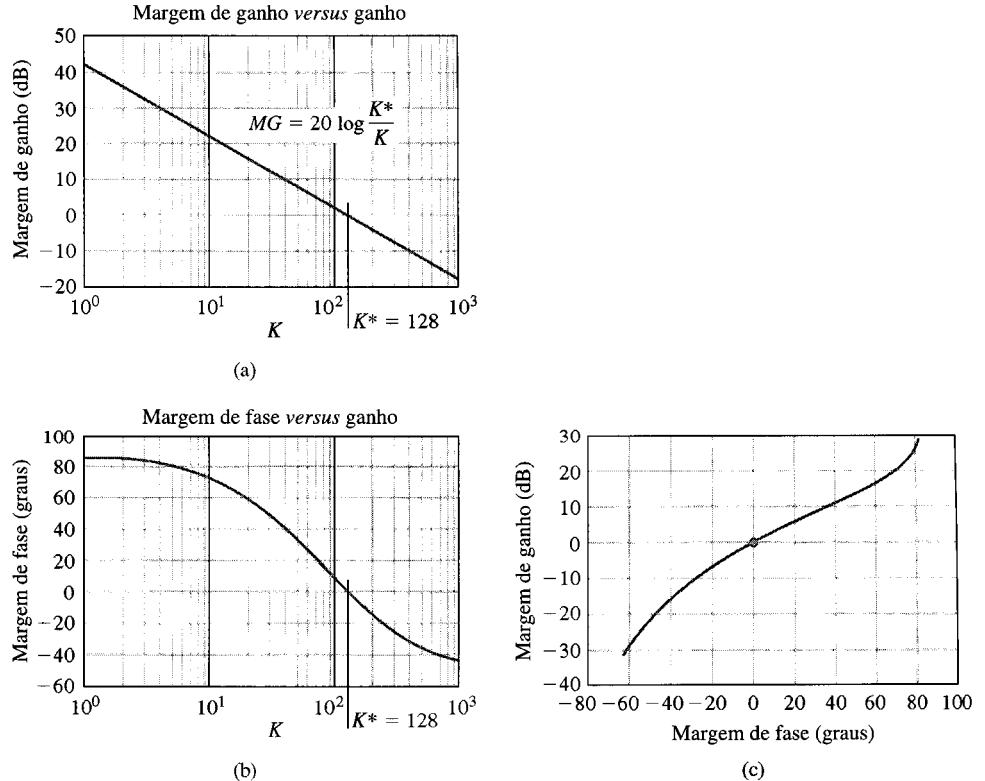
O ganho para o qual o sistema se torna marginalmente estável é  $K = K^* = 128$ . A margem de ganho e a margem de fase traçadas em função de  $K$  estão mostradas nas Figs. 9.22(a) e (b), respectivamente. É traçado o gráfico da margem de ganho versus a margem de fase, como está mostrado na Fig. 9.22(c). Convém notar que a margem de fase ou a margem de ganho constituem uma medida adequada do desempenho do sistema. Será enfatizada normalmente a margem de fase como uma especificação no domínio de freqüência.

A margem de fase constitui uma medida adequada da resposta de freqüência como indicação do desempenho transitório de um sistema. Um outro índice útil de desempenho no domínio de freqüência é  $M_{p_w}$ , o valor máximo da magnitude da resposta de freqüência a malha fechada. Este índice prático será considerado agora.

## 9.5 CRITÉRIOS DE DESEMPENHOS NO DOMÍNIO DO TEMPO ESPECIFICADOS NO DOMÍNIO DE FREQUÊNCIA

A resposta transitória de um sistema com retroação pode ser estimada a partir da resposta de freqüência a malha fechada. A **resposta de freqüência a malha fechada** é a resposta de freqüência dada pela função de transferência a malha fechada  $T(j\omega)$ . As respostas de freqüência a malha aberta e a malha fechada se relacionam através da expressão

$$\frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = T(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + GH(j\omega)}. \quad (9.62)$$



**Fig. 9.22** (a) Margem de ganho versus ganho  $K$ , (b) margem de fase versus ganho  $K$ , (c) margem de ganho versus margem de fase.

O critério de Nyquist e o índice da margem de fase são definidos para a função de transferência a malha aberta  $GH(j\omega)$ . Contudo, como foi visto na Seção 8.2, o valor máximo da magnitude da resposta de freqüência pode ser relacionado com o coeficiente de amortecimento de um sistema de segunda ordem

$$M_{p_\omega} = |T(\omega_r)| = (2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2})^{-1}, \quad \zeta < 0,707. \quad (9.63)$$

Esta relação é retratada graficamente na Fig. 8.11. Como esta relação entre a resposta de freqüência a malha fechada e a resposta transitória é útil, seria desejável poder determinar  $M_{p_\omega}$  a partir dos gráficos que foram completados para a investigação do critério de Nyquist. Isto é, torna-se desejável obter a resposta de freqüência a malha fechada (Eq. 9.62) a partir da resposta de freqüência a malha aberta. Naturalmente seria possível determinar as raízes a malha fechada de  $1 + GH(s)$  e traçar a resposta de freqüência a malha fechada. Contudo, uma vez que se tenha investido todo o esforço necessário para achar as raízes a malha fechada da equação característica, então se torna desnecessária a função de transferência a malha fechada.

A relação entre as respostas de freqüência a malha aberta e a malha fechada pode ser obtida facilmente considerando-se a Eq. (9.62) quando  $H(j\omega) = 1$ . Se o sistema não for de fato um sistema com retroação unitária em que  $H(j\omega) = 1$ , sua saída será simplesmente redefinida como sendo igual à saída de  $H(j\omega)$ . Então, a Eq. (9.62) se torna

$$T(j\omega) = M(\omega)e^{j\phi(\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}. \quad (9.64)$$

A relação entre  $T(j\omega)$  e  $G(j\omega)$  é obtida diretamente em termos de variáveis complexas, utilizando-se o plano  $G(j\omega)$ . As coordenadas do plano  $G(j\omega)$  são  $u$  e  $v$ , e se tem

$$G(j\omega) = u + jv. \quad (9.65)$$

Por conseguinte, a magnitude da resposta a malha fechada  $M(\omega)$  é

$$M = \left| \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \right| = \left| \frac{u + jv}{1 + u + jv} \right| = \frac{(u^2 + v^2)^{1/2}}{[(1 + u)^2 + v^2]^{1/2}}. \quad (9.66)$$

Elevando-se a Eq.(9.66) ao quadrado e rearrumando, obtém-se

$$(1 - M^2)u^2 + (1 - M^2)v^2 - 2M^2u = M^2. \quad (9.67)$$

Dividindo-se a Eq. (9.67) por  $(1 - M^2)$  e adicionando-se o termo  $[M^2/(1 - M^2)]^2$  a ambos os membros da Eq. (9.67), tem-se

$$u^2 + v^2 - \frac{2M^2 u}{1 - M^2} + \left( \frac{M^2}{1 - M^2} \right)^2 = \left( \frac{M^2}{1 - M^2} \right) + \left( \frac{M^2}{1 - M^2} \right)^2. \quad (9.68)$$

Rearrumando, obtém-se

$$\left( u - \frac{M^2}{1 - M^2} \right)^2 + v^2 = \left( \frac{M}{1 - M^2} \right)^2, \quad (9.69)$$

que é a equação de um círculo no plano  $(u, v)$  com centro no ponto

$$u = \frac{M^2}{1 - M^2}, \quad v = 0.$$

O raio do círculo é igual a  $|M/(1 - M^2)|$ . Em consequência, pode-se traçar o gráfico de diversos círculos de magnitude constante  $M$  no plano  $[G(j\omega) = u + jv]$ . Na Fig. 9.23 estão mostrados círculos com  $M$  constante. Os círculos à esquerda de  $u = -1/2$  são para  $M > 1$  e os círculos à direita de  $u = -1/2$  são para  $M < 1$ . Quando  $M = 1$  o círculo se transforma na reta  $u = -1/2$ , evidente por inspeção da Eq. (9.67).

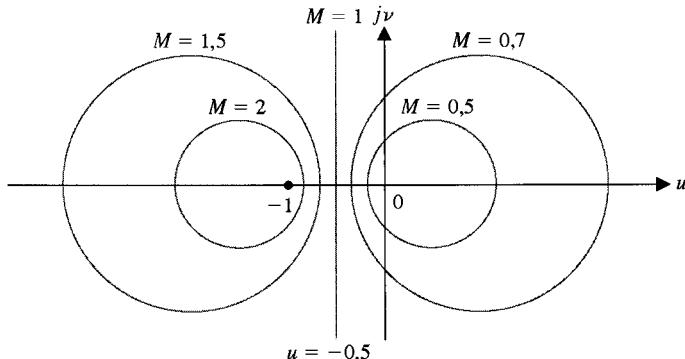


Fig. 9.23 Círculos de  $M$  constante.

A resposta de freqüência a malha aberta de um sistema é mostrada na Fig. 9.24 para dois valores de ganho onde  $K_2 > K_1$ . A curva de resposta de freqüência do sistema com o ganho  $K_1$  é tangente ao círculo de magnitude  $M_1$  na freqüência  $\omega_{r_1}$ . De modo semelhante, a curva da resposta de freqüência com o ganho  $K_2$  é tangente ao círculo de magnitude  $M_2$  na freqüência  $\omega_{r_2}$ . Portanto, as curvas de magnitude da resposta de freqüência a malha fechada são estimadas como está mostrado na Fig. 9.25. Assim, é possível obter a resposta de freqüência a malha fechada de um sistema a partir do plano  $(u + jv)$ . Se a única informação desejada for o valor máximo de magnitude,  $M_{p_a}$ , então é suficiente ler este valor diretamente no gráfico polar. O valor máximo de magnitude da resposta de freqüência do sistema a malha fechada,  $M_{p_a}$ , é o valor do círculo  $M$  que é tangente ao lugar  $G(j\omega)$ . O ponto de tangência ocorre na freqüência  $\omega_r$ , a freqüência de ressonância. A resposta de freqüência a malha

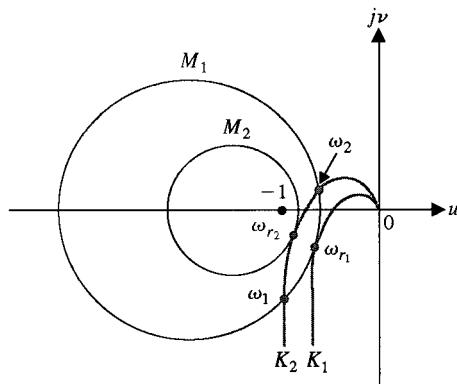
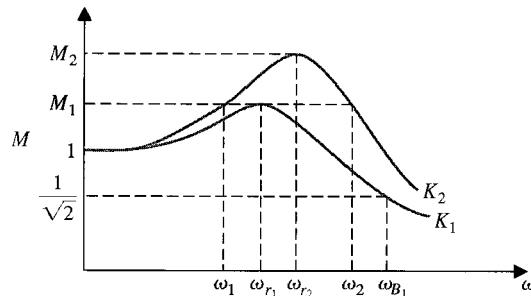


Fig. 9.24 Gráfico polar de  $G(j\omega)$  para dois valores de ganho ( $K_2 > K_1$ ).



**Fig. 9.25** Resposta de freqüência a malha fechada de  $T(j\omega) = G(j\omega)/(1 + G(j\omega))$ . Observar que  $K_2 > K_1$ .

fechada completa de um sistema pode ser obtida lendo-se a magnitude  $M$  dos círculos que interceptam o lugar  $G(j\omega)$  em diversas freqüências. Portanto, o sistema com um ganho  $K = K_2$  possui uma magnitude a malha fechada  $M_1$  nas freqüências  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Esta magnitude é lida na Fig. 9.24 e é mostrada na resposta de freqüência a malha fechada na Fig. 9.25. A **banda passante** para  $K_1$  é mostrada como  $\omega_{B_1}$ .

Pode-se mostrar empiricamente que a freqüência de cruzamento,  $\omega_c$ , nos diagramas de Bode a malha aberta, é relacionada com a banda passante,  $\omega_B$ , pela aproximação  $\omega_B = 1,6\omega_c$  para o valor de  $\zeta$  na faixa de 0,2 a 0,8.

De modo semelhante, podem ser obtidos círculos com ângulos de fase a malha fechada constante. Assim, para a Eq. (9.64), a relação de ângulo de fase é

$$\begin{aligned}\phi &= \angle T(j\omega) = \angle(u + jv)/(1 + u + jv) \\ &= \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{v}{u} \right) - \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{v}{1 + u} \right).\end{aligned}\quad (9.70)$$

Tomando-se a tangente de ambos os membros e rearrumando os termos, tem-se

$$u^2 + v^2 + u - \frac{v}{N} = 0,\quad (9.71)$$

onde  $N = \operatorname{tg} \phi = \text{constante}$ . Adicionando-se o termo  $1/4[1 + (1/N^2)]$  a ambos os membros da equação e simplificando, obtém-se

$$(u + 0,5)^2 + \left( v - \frac{1}{2N} \right)^2 = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{N^2} \right),\quad (9.72)$$

que é a equação de um círculo com centro em  $u = -0,5$  e  $v = +(1/2N)$ . O raio do círculo é igual  $1/2[1 + (1/N^2)]^{1/2}$ . Portanto, as curvas de ângulo de fase constante podem ser obtidas para diversos valores de  $N$ , de modo semelhante ao dos círculos  $M$ .

Os círculos  $M$  e  $N$  podem ser usados para análise e projeto no plano polar. Contudo, é mais fácil obter os diagramas de Bode de um sistema, e seria preferível que os círculos  $M$  e  $N$  de valores constantes fossem convertidos para valores logarítmicos de ganho e fase. N. B. Nichols transformou os círculos de  $M$  e  $N$  constantes em um diagrama com o logaritmo da magnitude e com o ângulo de fase, e o gráfico resultante é chamado de **carta de Nichols** [3, 7]. Os círculos  $M$  e  $N$  aparecem como contornos na carta de Nichols, mostrada na Fig. 9.26. As coordenadas do diagrama magnitude logarítmica-ângulo de fase são as mesmas usadas na Seção 8.6. Contudo, superpostas ao plano magnitude logarítmica-ângulo de fase, encontram-se as linhas de  $M$  e  $N$  constantes. As linhas de  $M$  constante são dadas em decibéis e as linhas de  $N$  constante em graus. Um exemplo ilustrará o uso da carta de Nichols para determinar a resposta de freqüência a malha fechada.

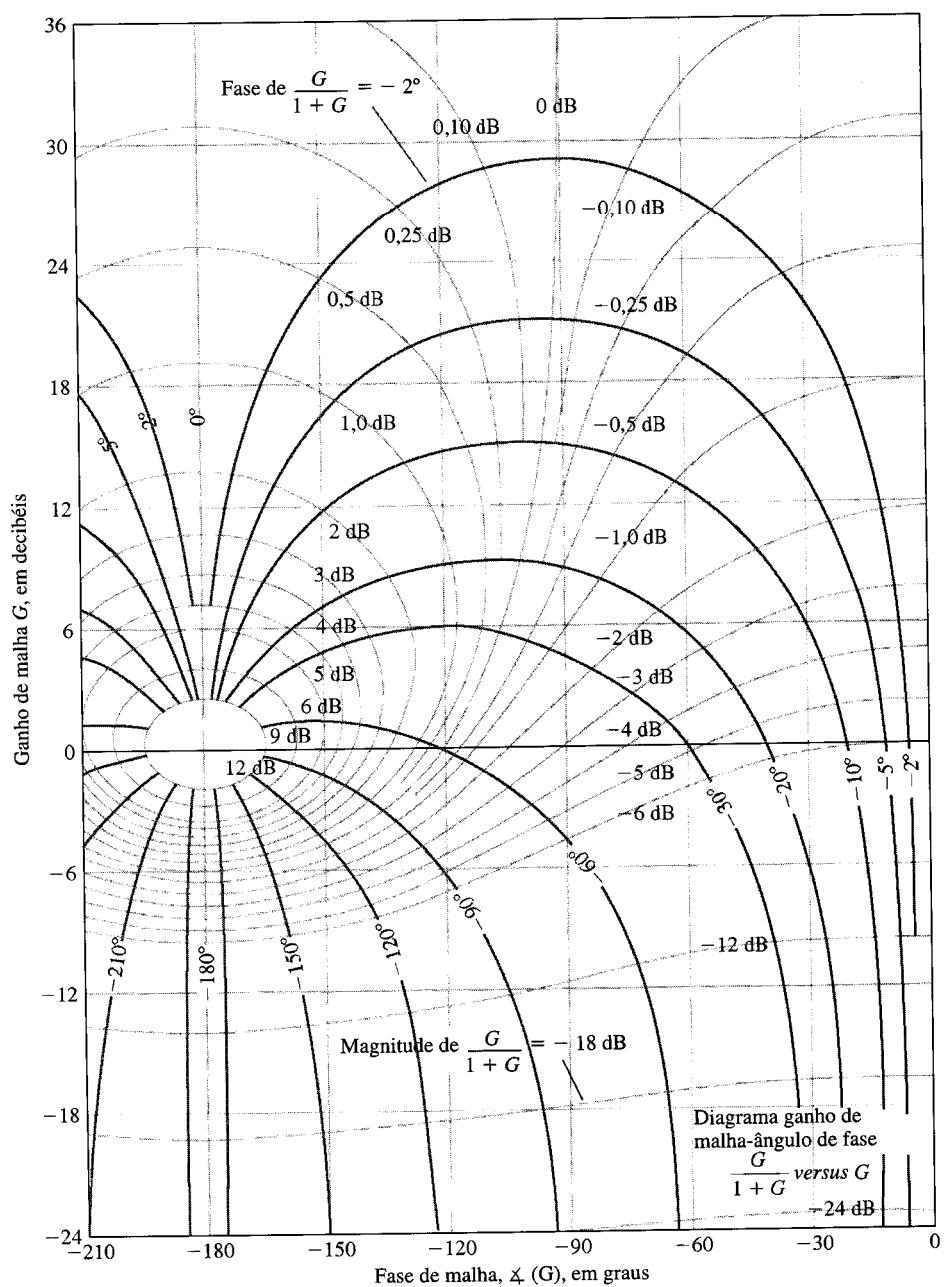
#### EXEMPLO 9.7

#### Estabilidade usando a carta de Nichols

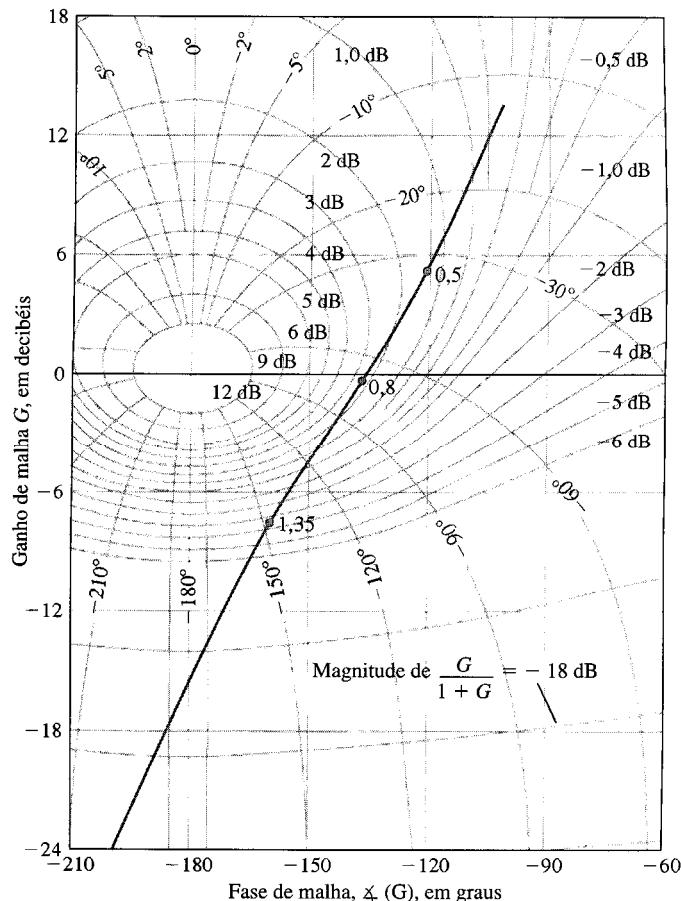
Considere-se o sistema com retroação com a função de transferência de malha

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)(0,2j\omega + 1)}.\quad (9.73)$$

O lugar  $G(j\omega)$  é traçado na carta de Nichols e está mostrado na Fig. 9.27. O valor máximo da magnitude,  $M_{p_0}$ , é igual a +2,5 dB e ocorre na freqüência  $\omega_r = 0,8$ . O ângulo de fase a malha fechada em  $\omega_r$  é igual a  $-72^\circ$ . A banda passante a malha fechada de 3 dB para a qual a magnitude vale -3 dB é igual a  $\omega_B = 1,33$ , como mostra a Fig. 9.27. O ângulo de fase a malha fechada em  $\omega_B$  é igual a  $-142^\circ$ . ■



**Fig. 9.26** Carta de Nichols. As curvas de fase para o sistema a malha fechada estão assinaladas com traço cheio.



**Fig. 9.27** Diagrama de Nichols para  $G(j\omega) = 1/j\omega(j\omega + 1)$ . São mostrados três pontos sobre a curva para  $\omega = 0,5; 0,8$  e  $1,35$ , respectivamente.

### EXEMPLO 9.8

### Sistema de terceira ordem

Considere-se um sistema com função de transferência a malha aberta

$$G(j\omega) = \frac{0,64}{j\omega[(j\omega)^2 + j\omega + 1]}, \quad (9.74)$$

na qual  $\zeta = 0,5$  para os pólos complexos e  $H(j\omega) = 1$ . O diagrama de Nichols deste sistema está mostrado na Fig. 9.28. A margem de fase para este sistema é de  $30^\circ$ , de acordo com o que se determina no diagrama de Nichols. Com base no ângulo de fase, estima-se que a relação de amortecimento seja  $\zeta = 0,30$ . O valor máximo da magnitude é  $+9$  dB, que ocorre na freqüência  $\omega_r = 0,88$ . Portanto

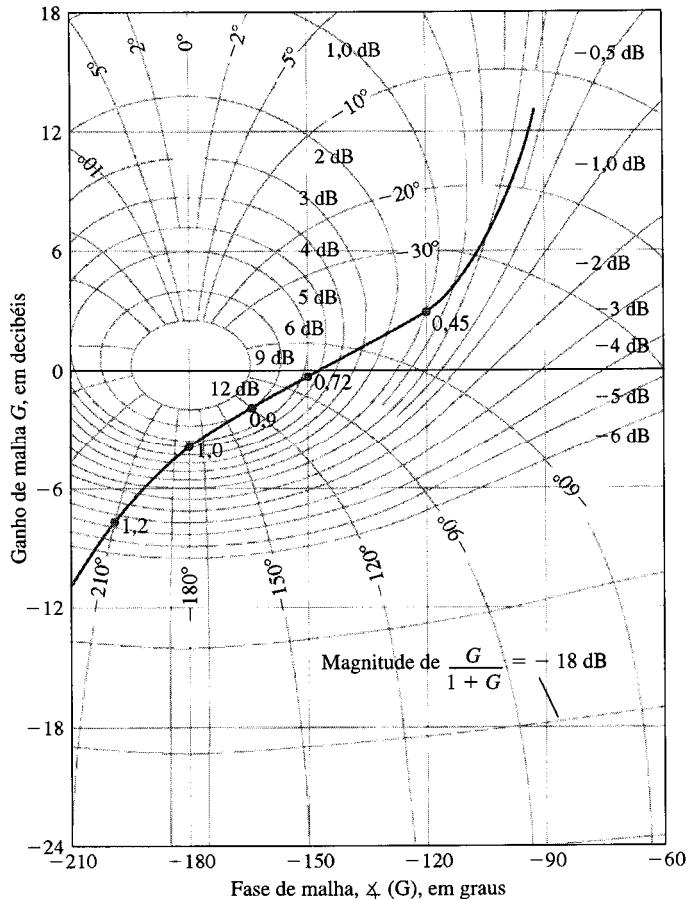
$$20 \log M_{p_\omega} = 9 \text{ dB}, \quad \text{ou} \quad M_{p_\omega} = 2,8$$

Utilizando a Eq. (9.63), encontra-se  $\zeta = 0,18$ .

Há aqui o confronto de dois valores para a relação de amortecimento em que um foi obtido a partir da medida de margem de fase e o outro, a partir da medida do valor de pico da resposta de freqüência. Neste caso descobriu-se um exemplo no qual a correlação entre o domínio de freqüência e o domínio do tempo é obscura e ambígua. Este conflito aparente é ocasionado pela natureza do lugar  $G(j\omega)$ , que se inclina rapidamente em direção à reta de  $180^\circ$  a partir do eixo de  $0$  dB. Se forem determinadas as raízes da equação característica para  $1 + GH(s)$ , obtém-se

$$q(s) = (s + 0,77)(s^2 + 0,225s + 0,826) = 0. \quad (9.75)$$

A relação de amortecimento das raízes complexas conjugadas é igual a  $0,124$ , e neste caso as raízes complexas não dominam a resposta do sistema. Portanto, a raiz real adiciona algum amortecimento ao sistema, e se deve estimar a relação de amortecimento como tendo aproximadamente o valor determinado a partir do índice  $M_{p_\omega}$ ; isto é,  $\zeta = 0,175$ . O projetista deve usar com cautela as correlações entre o domínio de freqüência e o domínio do tempo. Contudo, para fins de análise e de projeto, se estará normalmente seguro ao utilizar o menor dos valores da relação de amortecimento obtidos a partir da margem de fase e da relação  $M_{p_\omega}$ . ■



**Fig. 9.28** Diagrama de Nichols para  $G(j\omega) = 0,64 / j\omega[(j\omega)^2 + j\omega + 1]$ .

A carta de Nichols pode ser usada para fins de projeto alterando-se o lugar  $G(j\omega)$  de modo a obter valores desejados de margem de fase e de  $M_{p_\omega}$ . O ganho  $K$  do sistema pode ser ajustado diretamente de modo a se obterem valores adequados de margem de fase e de  $M_{p_\omega}$  por simples inspeção da carta de Nichols. Por exemplo, seja reconsiderar o Exemplo 9.8, no qual

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega[(j\omega)^2 + j\omega + 1]} \quad (9.76)$$

A Fig. 9.28 mostra o lugar  $G(j\omega)$  traçado na carta de Nichols para  $K = 0,64$ . Seja determinar um valor adequado para  $K$  de modo que a relação de amortecimento seja superior a 0,30. Examinando-se a Fig. 8.11, descobre-se que é necessário ter  $M_{p_\omega}$  menor que 1,75 (4,9 dB). Descobre-se, com base na Fig. 9.28, que o lugar  $G(j\omega)$  será tangente à curva de 4,9 dB se o lugar  $G(j\omega)$  for reduzido de um fator igual a 2,2 dB. Portanto,  $K$  deve ser reduzido em 2,2 dB, ou seja, dividido por um fator igual a 1,28 ( $\text{antilog}(2,2/20) = 1,28$ ). Assim, o ganho  $K$  deve ser menor que  $0,64/1,28 = 0,50$  para que a relação de amortecimento seja maior que 0,30.

## 9.6 BANDA PASSANTE DE SISTEMA

A banda passante de um sistema de controle a malha fechada constitui uma excelente medida da faixa de fidelidade da resposta do sistema. Nos sistemas em que a magnitude nas freqüências baixas é de 0 dB na representação em diagramas de Bode, a banda passante é medida na freqüência de -3 dB. A velocidade da resposta a uma excitação em degrau será aproximadamente proporcional a  $\omega_B$  e o tempo de assentamento é inversamente proporcional a  $\omega_B$ . Busca-se, assim, uma banda passante grande consistente com componentes de sistema razoáveis [12].

Considerem-se as duas funções de transferência a malha fechada a seguir:

$$T_1(s) = \frac{1}{s + 1}$$

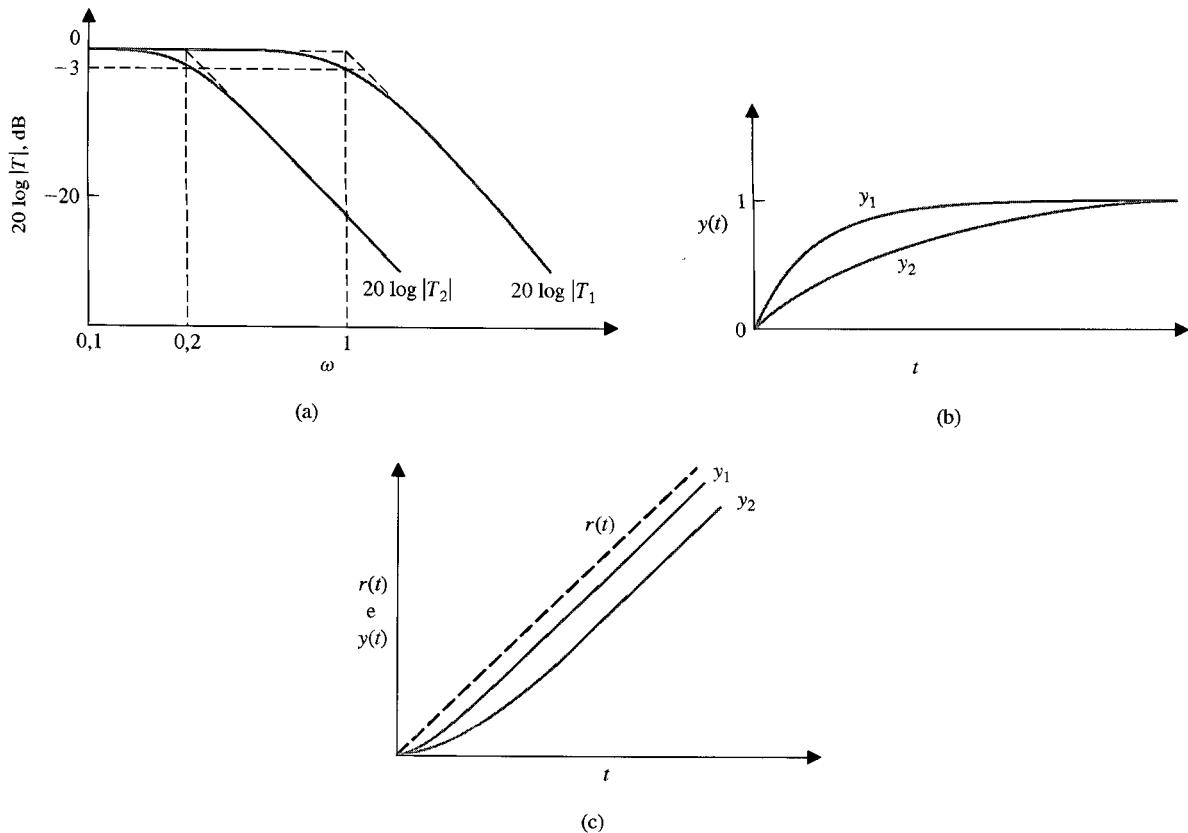


Fig. 9.29 Resposta de dois sistemas de primeira ordem.

e

$$T_2(s) = \frac{1}{5s + 1}. \quad (9.77)$$

A resposta de freqüência dos dois sistemas é comparada na parte (a) da Fig. 9.29, e a resposta ao degrau dos sistemas está mostrada na parte (b). Além disso, a resposta a uma rampa está mostrada na parte (c) dessa figura. O sistema com maior banda passante fornece a resposta mais rápida ao degrau unitário e a maior fidelidade na resposta à rampa.

Considerem-se os seguintes dois sistemas de segunda ordem com funções de transferência:

$$T_3(s) = \frac{100}{s^2 + 10s + 100}$$

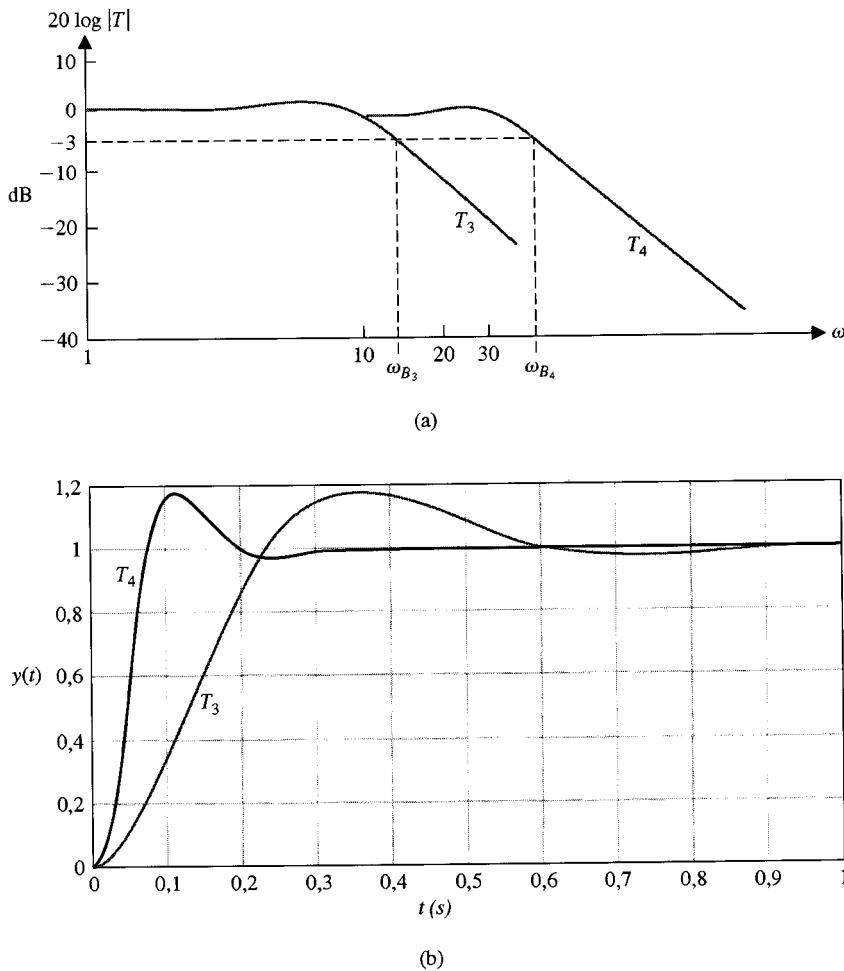
e

$$T_4(s) = \frac{900}{s^2 + 30s + 900}. \quad (9.78)$$

Ambos os sistemas possuem um  $\zeta$  de 0,5. A resposta de freqüência de ambos os sistemas a malha fechada está mostrada na Fig. 9.30(a). A freqüência natural é 10 e 30, respectivamente, para os sistemas  $T_3$  e  $T_4$ . A banda passante é 15 e 40 para os sistemas  $T_3$  e  $T_4$ , respectivamente. Ambos os sistemas apresentam uma ultrapassagem de 15%, mas  $T_4$  tem um tempo de pico de 0,12 segundo em comparação com 0,36 de  $T_3$ , como mostrado na Fig. 9.30(b). Observe-se também que o tempo de assentamento de  $T_4$  é 0,37 segundo, enquanto o de  $T_3$  é de 0,9 segundo. O sistema com maior banda passante fornece uma resposta mais rápida.

## 9.7 ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE CONTROLE COM RETARDOS

O critério de estabilidade de Nyquist foi discutido e ilustrado nas seções anteriores para sistemas de controle cujas funções de transferência são polinômios racionais de  $j\omega$ . Muitos sistemas de controle possuem um retardo no interior da malha fechada que afeta a estabilidade do sistema. Um retardo é



**Fig. 9.30** Resposta de dois sistemas de segunda ordem.

o intervalo de tempo entre o início de um evento em um ponto do sistema e sua ação resultante em um outro ponto do sistema. Felizmente, o critério de Nyquist pode ser utilizado para se determinar o efeito do retardo na estabilidade relativa do sistema com retroação. Um retardo puro, sem atenuação, é representado pela função de transferência

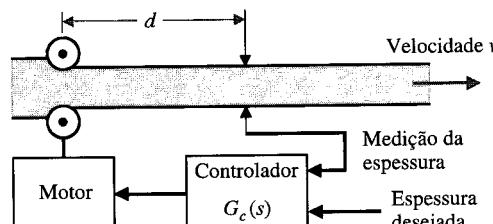
$$G_d(s) = e^{-sT}, \quad (9.79)$$

onde  $T$  é o retardo. O critério de Nyquist permanece válido para sistemas com retardo porque o fator  $e^{-sT}$  não introduz quaisquer pólos ou zeros adicionais no interior do contorno. O fator introduz um deslocamento de fase na resposta de freqüência sem alterar a curva de magnitude.

Este tipo de retardo ocorre em sistemas que apresentam movimentação de material que requer um tempo finito para passar de um ponto de entrada ou de controle para um ponto de saída ou de medição [8, 9].

Por exemplo, um sistema de controle de um laminador de aço está mostrado na Fig. 9.31. O motor ajusta a separação dos rolos de modo que o erro de espessura seja minimizado. Se o aço estiver se deslocando com uma velocidade  $v$ , então o retardo entre o ajuste dos rolos e a medida é

$$T = \frac{d}{v}.$$



**Fig. 9.31** Sistema de controle de laminadora de aço.

Portanto, para ter um retardo que possa ser desprezado, deve-se diminuir a distância ao ponto de medição e aumentar a velocidade de escoamento do aço. Usualmente não se pode eliminar o efeito do retardo, e, assim, a função de transferência de malha é [10].

$$G(s)G_c(s)e^{-sT}. \quad (9.80)$$

Contudo, nota-se que a resposta deste sistema é obtida a partir da função de transferência de malha

$$GH(j\omega) = GG_c(j\omega)e^{-j\omega T}. \quad (9.81)$$

A função de transferência de malha usual é traçada no plano  $GH(j\omega)$  e a estabilidade relativa determinada em relação ao ponto  $-1$ . Alternativamente, podem ser traçados os diagramas de Bode que incluem o fator de retardo e investigada a estabilidade relativa ao ponto  $0 \text{ dB}, -180^\circ$ . O fator do retardo  $e^{-j\omega T}$  resulta em um deslocamento de fase

$$\phi(\omega) = -\omega T \quad (9.82)$$

e é adicionado diretamente ao deslocamento de fase de  $GG_c(j\omega)$ . Observe-se que este ângulo está expresso em radianos na Eq. (9.82). Um exemplo mostrará a simplicidade desta abordagem nos diagramas de Bode.

#### EXEMPLO 9.9

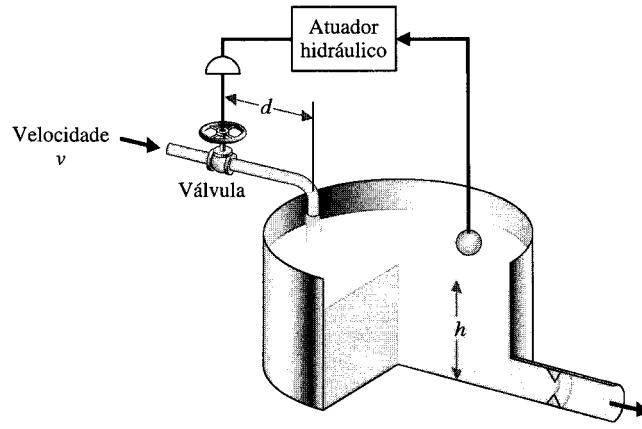
#### Sistema de controle de nível de líquido

Um sistema de controle de nível está mostrado na Fig. 9.32(a) e o diagrama de blocos na Fig. 9.32(b) [11]. O retardo entre o ajuste da válvula e a saída de fluido é  $T = d/v$ . Portanto, se a vazão for de  $5 \text{ m}^3/\text{s}$ , a área da seção reta da tubulação for  $1 \text{ m}^2$  e a distância igual a  $5 \text{ m}$ , então o retardo será  $T = 1$  segundo. A função de transferência de malha será então

$$GH(s) = G_A(s)G(s)G_f(s)e^{-sT} \quad (9.83)$$

$$= \frac{31,5}{(s+1)(30s+1)[(s^2/9)+(s/3)+1]} e^{-sT}.$$

Os diagramas de Bode deste sistema estão mostrados na Fig. 9.33. O ângulo de fase está mostrado para os fatores em denominador sem e com o atraso de fase adicional devido ao retardo. A curva de ganho logarítmico cruza a linha de  $0 \text{ dB}$  em  $\omega = 0,8$ . Portanto, a margem de fase do sistema sem retardo puro seria de  $40^\circ$ . Contudo, com o retardo adicionado, encontra-se uma margem de fase de



(a)

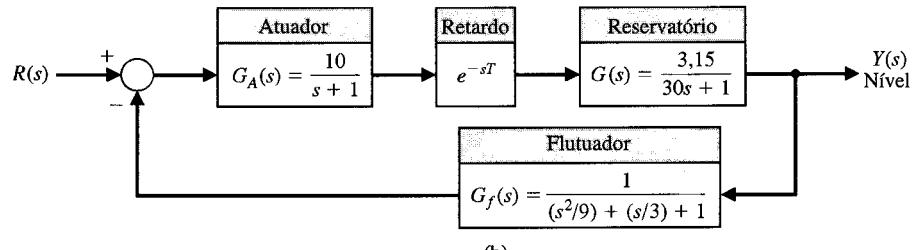
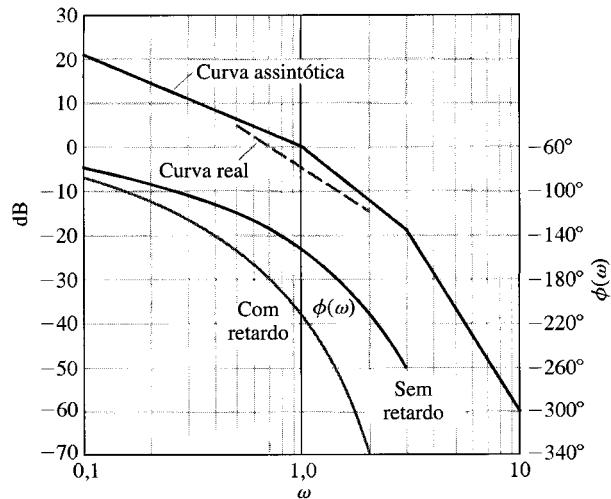


Fig. 9.32 (a) Sistema de controle de nível de líquido.  
(b) Diagrama de blocos.



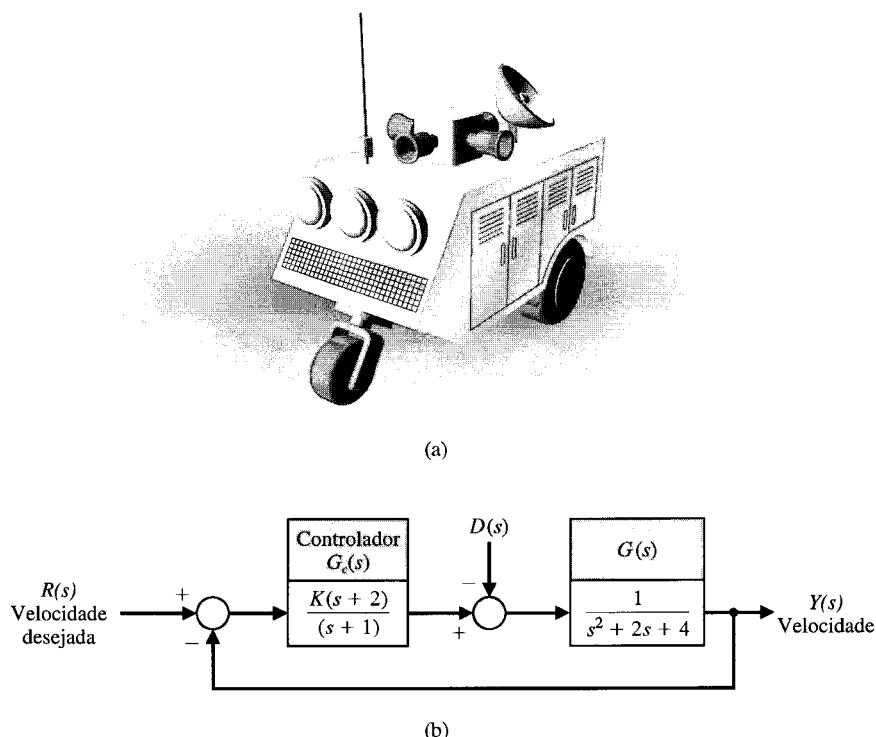
**Fig. 9.33** Diagramas de Bode para o sistema de controle de nível.

$-3^\circ$ , e o sistema é instável. Em consequência, o ganho do sistema deve ser reduzido a fim de proporcionar uma margem de fase razoável. Para dotar o sistema de uma margem de fase de  $30^\circ$ , o ganho deveria ser reduzido por meio de um fator de 5 dB, com  $K = 31,5/1,78 = 17,7$ .

Um retardo,  $e^{-sT}$ , em um sistema com retroação introduz um atraso de fase adicional e resulta em um sistema menos estável. Contudo, como os retardos puros são inevitáveis em muitos sistemas, freqüentemente se torna necessário reduzir o ganho de malha a fim de se obter uma resposta estável. Contudo, o custo da estabilidade é um aumento resultante no erro estacionário do sistema à medida que o ganho de malha diminui. ■

## 9.8 EXEMPLO DE PROJETO: VEÍCULO DE RECONHECIMENTO CONTROLADO REMOTAMENTE

O uso de veículos de reconhecimento controlados remotamente pelas Nações Unidas em missões de paz pode constituir uma idéia cujo tempo chegou. Um conceito de veículo explorador está mostrado na Fig. 9.34(a), e um sistema de controle de velocidade está proposto na Fig. 9.34(b). A velocidade desejada  $R(s)$  é transmitida pelo rádio ao veículo; a perturbação  $D(s)$  representa colinas e rochedos.



**Fig. 9.34** (a) Veículo de reconhecimento controlado remotamente. (b) Sistema de controle de velocidade. Este veículo poderia ser usado pelas Nações Unidas em missões de manutenção da paz.

O objetivo é conseguir um bom controle geral com resposta a comandos em degrau,  $R(s)$ , apresentando erro estacionário pequeno e valores pequenos de ultrapassagem [13].

Primeiramente, para se obter erro estacionário pequeno para um comando em degrau unitário, calcula-se  $e_{ss}$

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{R(s)}{1 + G_c G(s)} \right] \\ &= \frac{1}{1 + G_c G(s)} = \frac{1}{1 + K/2}. \end{aligned} \quad (9.84)$$

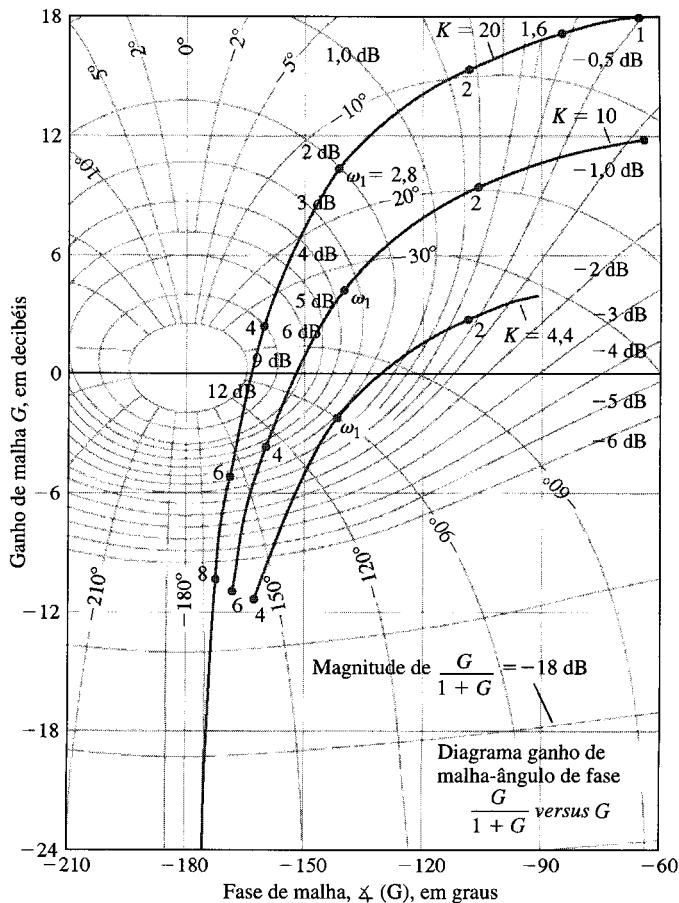
Escolhendo-se  $K = 20$ , será obtido um erro estacionário de 9% da magnitude do comando de entrada. Usando-se  $K = 20$ , reformula-se  $G(s)$  para os cálculos dos diagramas de Bode, obtendo-se

$$G(s) = \frac{10(1 + s/2)}{(1 + s)(1 + s/2 + s^2/4)}. \quad (9.85)$$

Os cálculos para  $0 \leq \omega \leq 6$  fornecem os dados resumidos na Tabela 9.4. O diagrama de Nichols para  $K = 20$  está mostrado na Fig. 9.35. Examinando-se a carta de Nichols, descobre-se que  $M_{p_w}$  é igual a 12 dB e que a margem de fase é de 15°. A resposta deste sistema a um degrau é subamortecida e foi prevista uma ultrapassagem excessiva de aproximadamente 61%.

**TABELA 9.4 Dados da Resposta de Freqüência para o Exemplo de Projeto**

$\omega$	0	1,2	1,6	2,0	2,8	4	6
dB	20	18,4	17,8	16,0	10,5	2,7	-5,2
Graus	0	-65	-86	-108	-142	-161	-170°



**Fig. 9.35** Diagrama de Nichols para o exemplo de projeto quando  $K = 20$  e para dois valores reduzidos de ganho.

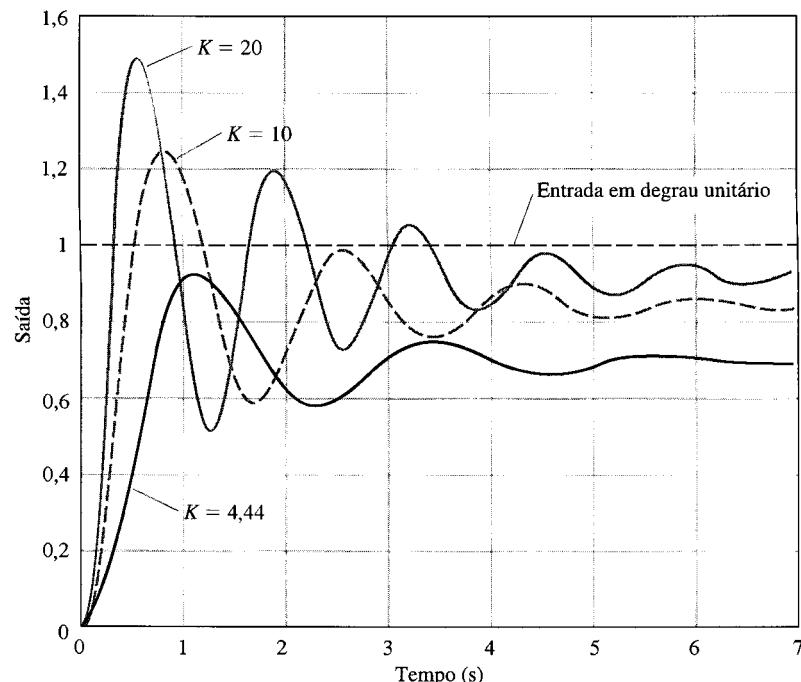
Para reduzir a ultrapassagem da resposta pode-se reduzir o ganho de modo a obter a ultrapassagem prevista. Para limitar a ultrapassagem a 25%, escolhe-se um  $\zeta$  desejado de 0,4 para as raízes dominantes (a partir da Fig. 5.8) e assim requerer  $M_{p_0} = 1,35$  (a partir da Fig. 8.11) ou  $20 \log M_{p_0} = 2,6$  dB. Para reduzir o ganho, desloca-se a resposta de frequência verticalmente para baixo, na carta de Nichols, como está mostrado na Fig. 9.35. Em  $\omega_1 = 2,8$  intercepta-se precisamente a curva de ganho a malha fechada de 2,6 dB. A redução (queda vertical) no ganho é igual a 13 dB, ou seja, uma divisão por um fator de 4,5. Assim,  $K = 20/4,5 = 4,44$ . Para este ganho reduzido, o erro estacionário é

$$e_{ss} = \frac{1}{(1 + 4,44/2)} = 0,31,$$

de modo que se tem um erro estacionário de 31%.

A resposta real ao degrau quando  $K = 4,44$ , como está mostrada na Fig. 9.36, apresenta uma ultrapassagem de 32%. Se for usado um ganho de 10, tem-se uma ultrapassagem de 48% com um erro estacionário de 17%. O desempenho do sistema está resumido na Tabela 9.5. Como solução de compromisso aceitável escolhe-se  $K = 10$  e se desenha a resposta de frequência na carta de Nichols deslocando para baixo, de  $20 \log 2 = 6$  dB, a resposta referente a  $K = 20$ , como está mostrado na Fig. 9.35.

Examinando-se a carta de Nichols para  $K = 10$ , tem-se  $M_{p_0} = 7$  dB e uma margem de fase de 26°. Estima-se, assim, um  $\zeta$  de 0,34 para as raízes dominantes, para o qual resultaria uma ultrapassagem de 30% na resposta a uma entrada em degrau. A resposta real está registrada na Tabela 9.5. A



**Fig. 9.36** Resposta do sistema para uma entrada em degrau unitário  $r(t)$ , para três valores de  $K$ .

**TABELA 9.5 Resposta Real para Valores de Ganho Selecionados**

<b><math>K</math></b>	4,44	10	20
<b>Ultrapassagem percentual</b>	32,4	48,4	61,4
<b>Tempo de assentamento (segundos)</b>	4,94	5,46	6,58
<b>Tempo de pico (segundos)</b>	1,19	0,88	0,67
<b><math>e_{ss}</math></b>	31%	16,7%	9,1%

*Nota:* A ultrapassagem percentual é definida pela Eq. (5.12).

banda passante do sistema é  $\omega_B \approx 5$ . Assim é previsto um tempo de assentamento (critério dos 2%) de

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = \frac{4}{(0,34)(\omega_B/1,4)} = 3,3 \text{ segundos.}$$

uma vez que  $\omega_B \approx 1,4 \omega_n$  para  $\zeta = 0,34$ . O tempo de assentamento real é de aproximadamente 5,4 segundos, como está mostrado na Fig. 9.36.

O efeito, em regime permanente, de uma perturbação em degrau unitário pode ser determinado usando-se o teorema do valor final com  $R(s) = 0$ , como a seguir:

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{G(s)}{1 + GG_c(s)} \right] \left( \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{4 + 2K}. \quad (9.86)$$

Assim a perturbação unitária é reduzida pelo fator  $(4 + 2K)$ . Para  $K = 10$ , tem-se  $y(\infty) = 1/24$ , ou seja, o erro estacionário é reduzido a 4% da magnitude da perturbação. Assim se conseguiu um resultado razoável com  $K = 10$ .

O melhor compromisso de projeto seria  $K = 10$ , uma vez que se alcança um erro de estado estacionário de 16,7%. Se a ultrapassagem e o tempo de assentamento forem excessivos, então haverá necessidade de dar nova forma ao lugar  $G(j\omega)$  na carta de Nichols por meio dos métodos que serão descritos no Cap. 10.

## 9.9 CONTROLADORES PID NO DOMÍNIO DE FREQÜÊNCIA

O controlador PID fornece um termo proporcional, um termo integral e um termo derivativo (ver Seção 7.7). Tem-se então a função de transferência do controlador PID como

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3 s. \quad (9.87)$$

Fazendo-se  $K_3 = 0$ , tem-se o controlador PI

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s}. \quad (9.88)$$

Fazendo-se  $K_2 = 0$ , tem-se o controlador PD com

$$G_c(s) = K_1 + K_3 s. \quad (9.89)$$

Em geral, se observa que os controladores PID são úteis particularmente para reduzir o erro de estado estacionário e melhorar o desempenho da resposta transitória quando  $G(s)$  possui um ou dois pólos (ou pode ser aproximado por um processo de segunda ordem).

Os métodos de resposta de freqüência podem ser usados para representar o acréscimo de um controlador PID. O controlador PID, Eq. (9.87), pode ser reescrito como

$$G_c(s) = \frac{K_2 \left( \frac{K_3}{K_2} s^2 + \frac{K_1}{K_2} s + 1 \right)}{s} = \frac{K_2 (\tau s + 1) \left( \frac{\tau}{\alpha} s + 1 \right)}{s}. \quad (9.90)$$

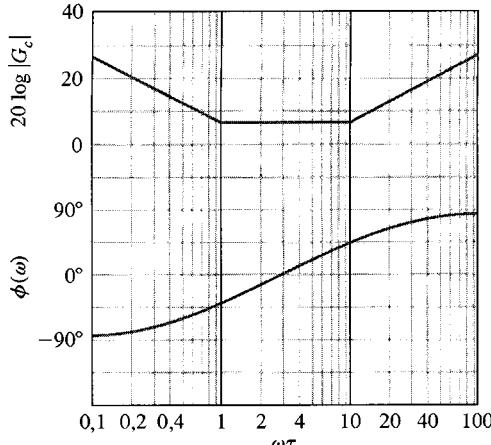


Fig. 9.37 Diagramas de Bode de um controlador PID usando a aproximação assintótica para a curva de magnitude.

Os diagramas de Bode da Eq. (9.90) estão mostrados na Fig. 9.37 para  $\omega\tau, K_2 = 2$  e  $\alpha = 10$ . O controlador PID é uma forma de compensador eliminador de faixa (ou supressor de faixa) com um ganho variável,  $K_2$ . Naturalmente, é possível que o controlador tenha zeros complexos e diagramas de Bode que sejam dependentes do  $\zeta$  dos zeros complexos. A contribuição dos zeros nos diagramas de Bode pode ser visualizada revendo-se a Fig. 8.10 para pólos complexos e observando que a fase e a magnitude mudam à medida que  $\zeta$  varia. O controlador PID com zeros complexos é

$$G_c(\omega) = \frac{K_2[1 + (2\zeta/\omega_n)j\omega - (\omega/\omega_n)^2]}{j\omega} \quad (9.91)$$

Normalmente se escolhe  $0,9 > \zeta > 0,7$ .

## 9.10 ESTABILIDADE NO DOMÍNIO DE FREQÜÊNCIA USANDO MATLAB

Aborda-se agora o tema da estabilidade usando-se o MATLAB como ferramenta. Esta seção revê o diagrama de Nyquist, a carta de Nichols e os diagramas de Bode nas discussões relativas a estabilidade. Dois exemplos irão ilustrar a abordagem de projeto no domínio de freqüência. Será utilizada a resposta de freqüência da função de transferência a malha fechada,  $T(j\omega)$ , bem como da função de transferência a malha aberta  $GH(j\omega)$ . Também será apresentado um exemplo ilustrativo que mostra como lidar com retardo em um sistema utilizando a aproximação de Padé [6].

As funções MATLAB cobertas nesta seção são nyquist, nichols, margin, pade e ngrid.

Geralmente é mais difícil produzir manualmente o gráfico de Nyquist que os diagramas de Bode. Contudo, pode-se usar o MATLAB para elaborar facilmente o diagrama de Nyquist. O diagrama de Nyquist é produzido com a função nyquist, como está mostrado na Fig. 9.38. Quando se usa a função nyquist sem argumentos no primeiro membro, o diagrama de Nyquist é produzido automaticamente; em caso contrário, deve-se usar a função plot para produzir o gráfico a partir dos vetores re e im.

Uma observação de advertência: Algumas vezes, ao longo do uso da função nyquist, pode-se achar que o gráfico de Nyquist está com um aspecto anormal ou que parece faltar alguma informação. Pode ser necessário nestes casos usar a função axes para se sobrepor à escolha automática de escala e usar a função nyquist com argumentos no primeiro membro em conjunto com a função plot. Desta forma, na análise de estabilidade, é possível focalizar a atenção na região próxima ao ponto  $-1$ , como está ilustrado na Fig. 9.39.

Como foi discutido na Seção 9.4, as medidas de estabilidade relativa de **margem de ganho** e de **margem de fase** podem ser determinadas a partir do gráfico de Nyquist ou dos diagramas de Bode. A margem de ganho é uma medida de quanto o ganho do sistema deveria ser aumentado para que o lugar  $GH(j\omega)$  passe pelo ponto  $(-1, 0)$ , resultando assim em um sistema instável. A margem de fase é uma medida do atraso de fase adicional requerido antes que o sistema se torne instável. As margens de ganho e de fase podem ser determinadas no gráfico de Nyquist e nos diagramas de Bode.

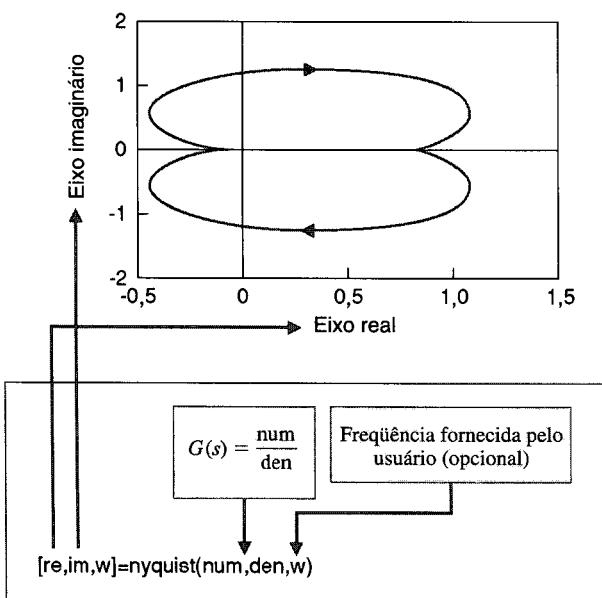


Fig. 9.38 A função nyquist.

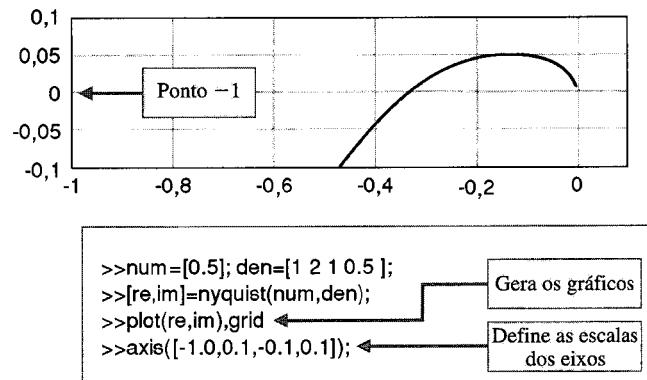
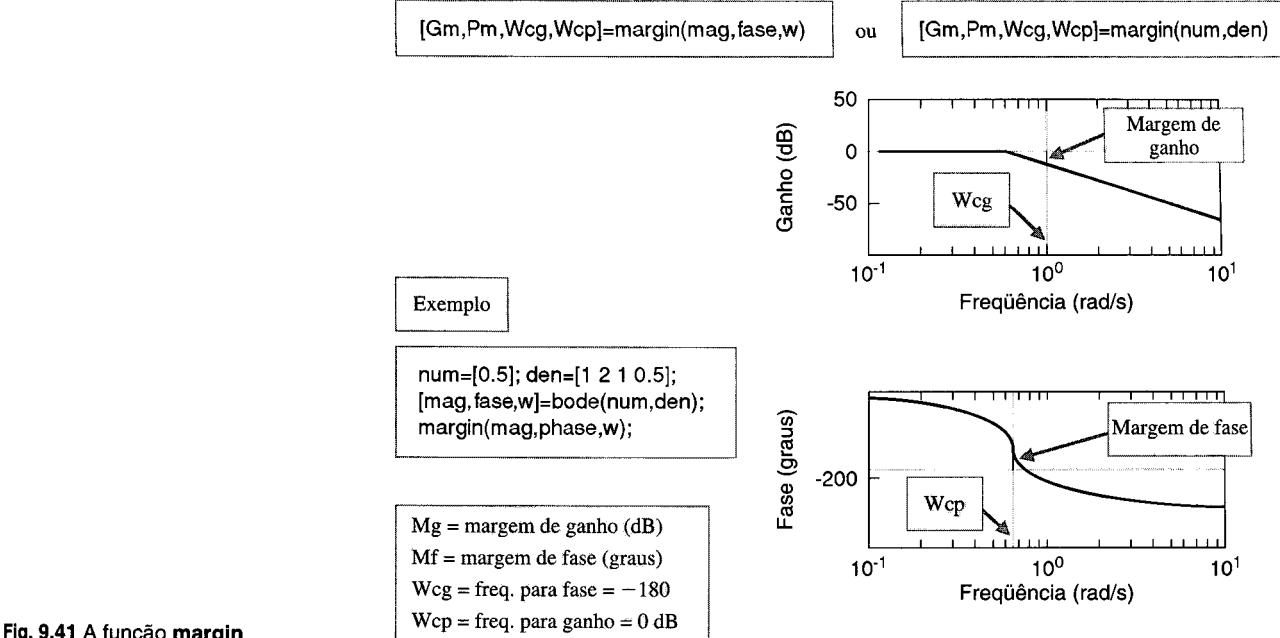
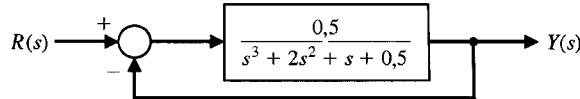


Fig. 9.39 A função nyquist com escala manual.

**Fig. 9.40** Um exemplo de sistema de controle a malha fechada para Nyquist e Bode com estabilidade relativa.



**Fig. 9.41** A função **margin**.

Considere-se o sistema mostrado na Fig. 9.40. A estabilidade relativa pode ser determinada a partir dos diagramas de Bode usando a função `margin`, que é mostrada na Fig. 9.41. A função `margin` é chamada usualmente em conjunto com a função `bode` para calcular as margens de ganho e de fase. Se a função `margin` for chamada sem argumentos no primeiro membro, os diagramas de Bode são produzidos automaticamente com as margens de ganho e de fase rotuladas nos diagramas. Isto é ilustrado na Fig. 9.42 para o sistema mostrado na Fig. 9.40.

O script para produzir o gráfico de Nyquist relativo ao sistema da Fig. 9.40 está mostrado na Fig. 9.43. Neste caso, o número de pólos de  $GH(s)$  com parte real positiva é zero, e o número de circunvoluções do ponto  $-1$  no sentido anti-horário é zero; portanto, o sistema a malha fechada é estável. Pode-se determinar também a margem de ganho e a margem de fase, como indicado na Fig. 9.43.

**Carta de Nichols.** Cartas de Nichols podem ser geradas usando-se a função `nichols`, mostrada na Fig. 9.44. Se a função `nichols` for chamada sem argumentos no primeiro membro, a carta de Nichols é produzida automaticamente; em caso contrário, deve-se usar a função `nichols` em conjunto com a função `plot`. Uma grade de carta de Nichols é desenhada sobre de um gráfico existente com a função `ngrid`.

A função `margin` funciona melhor em conjunto com a função `bode`. É possível usar a função `margin` depois de executar a função `nichols`. A menos que se deseje um gráfico de Bode com as margens de ganho e de fase rotuladas, deve-se chamar `margin` com argumentos no membro da esquerda e colocar os valores de margem de ganho e de margem de fase na área de trabalho. A carta de Nichols, mostrada na Fig. 9.45, é relativa ao sistema

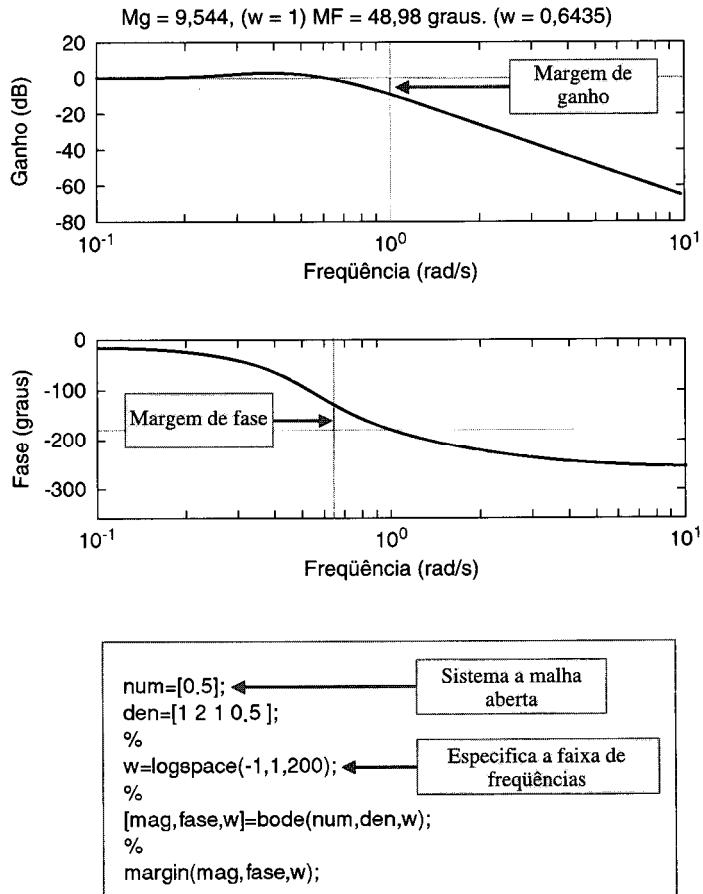
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)(0,2j\omega + 1)}. \quad (9.92)$$

#### EXEMPLO 9.10

#### Sistema de controle de nível de líquido

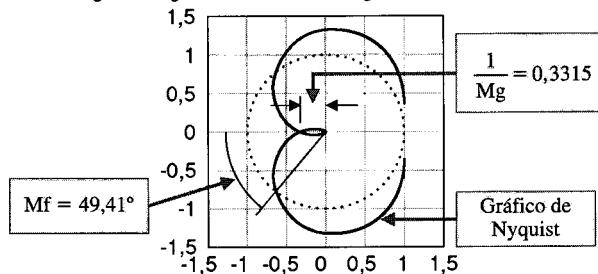
Considere-se um sistema de controle de nível de líquido descrito pelo diagrama de blocos mostrado na Fig. 9.32 (ver Exemplo 9.9). Observe-se que este sistema possui um retardo. A função de transferência de malha é dada por

$$GH(s) = \frac{31,5e^{-sT}}{(s + 1)(30s + 1)(s^2/9 + s/3 + 1)}. \quad (9.93)$$

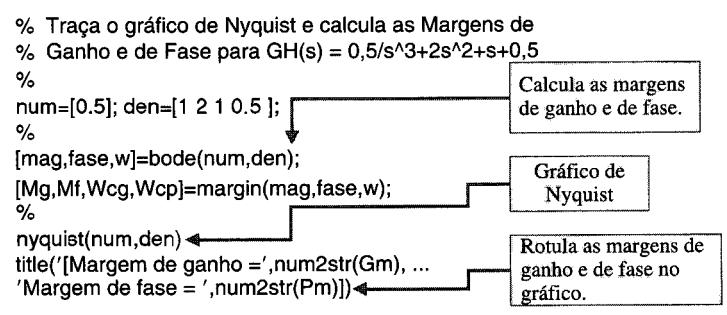


**Fig. 9.42** Diagramas de Bode para o sistema da Fig. 9.40 com margem de ganho e margem de fase indicadas nos gráficos.

Margem de ganho = 3,017 Margem de fase = 49,41



(a)



(b)

**Fig. 9.43** (a) Gráfico de Nyquist para o sistema da Fig. 9.40 com margens de ganho e de fase. (b) Script MATLAB.

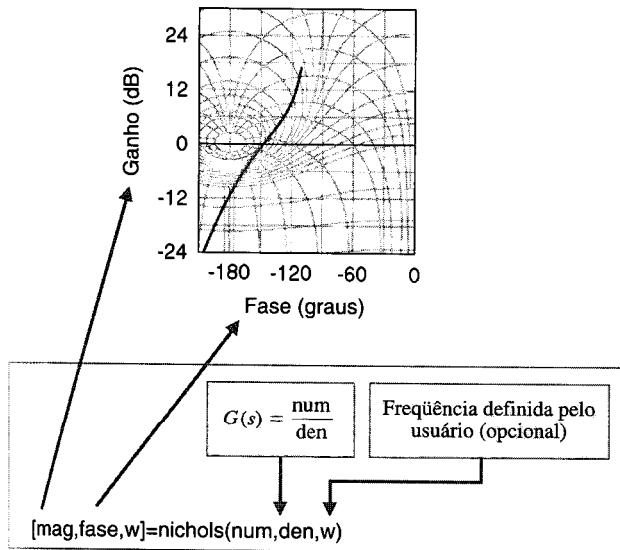


Fig. 9.44 A função nichols.

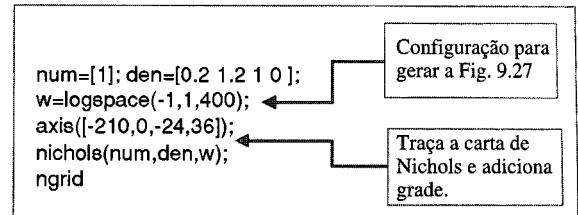
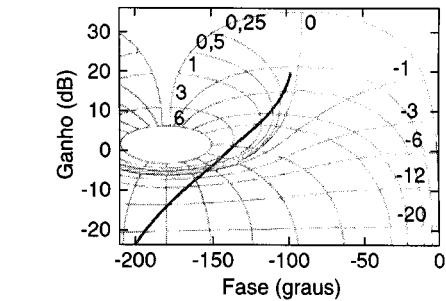


Fig. 9.45 Carta de Nichols para o sistema da Eq. (9.92).

Altera-se inicialmente a Eq. (9.93) de modo que  $GH(s)$  possua uma forma de função de transferência com polinômios em numerador e em denominador. Para isto, deve-se fazer uma aproximação de  $e^{-sT}$  com a função pade, como está mostrado na Fig. 9.46. Por exemplo, considere-se que o retardo é  $T = 1$  segundo, e que se deseja uma aproximação de segunda ordem,  $n = 2$ . Utilizando-se a função pade, obtém-se

$$e^{-s} \approx \frac{0,0743s^2 - 0,4460s + 0,8920}{0,0743s^2 + 0,4460s + 0,8920}. \quad (9.94)$$

Substituindo-se a Eq. (9.94) na Eq. (9.93), tem-se

$$GH(s) \approx \frac{31,5(0,0743s^2 - 0,4460s + 0,8920)}{(s + 1)(30s + 1)(s^2/9 + s/3 + 1)(0,0743s^2 + 0,4460s + 0,8920)}.$$

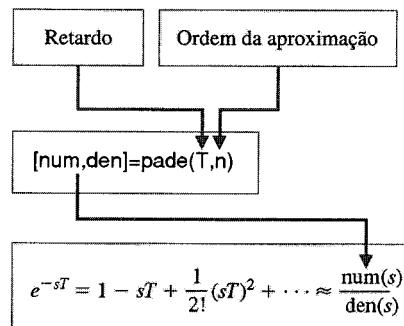
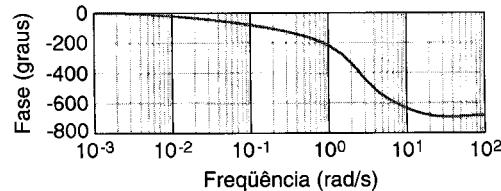
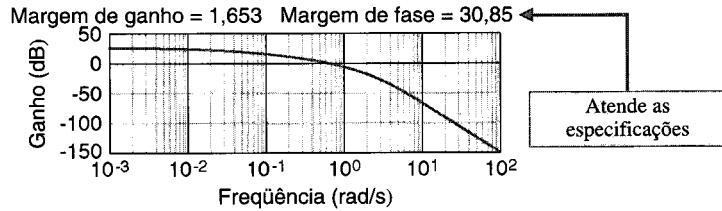
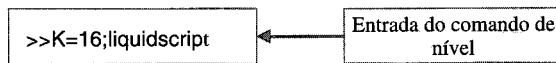


Fig. 9.46 A função pade.

É possível elaborar agora um script para investigar a estabilidade relativa do sistema usando os diagramas de Bode. O objetivo é ter uma margem de fase de  $30^\circ$ . O script associado está mostrado na Fig. 9.47. A fim de tornar o script interativo, faz-se o ganho  $K$  ajustável (ajustado agora com o valor  $K = 31,5$ ) e definido fora do script, no nível de comando. Em seguida define-se  $K$  e executa-se o script para verificar a margem de fase e repetir, se necessário. O ganho final selecionado é  $K = 16$ . É bom lembrar que se utilizou, nesta análise, uma aproximação de Padé de segunda ordem para o retardo. ■



(a)



liquid.m

```
% Análise do Sistema de Controle de Nível
%
num=K*[0.0743 -0.4460 0.8920]; d1=[1 1]; d2=[30 1];
d3=[1/9 1/3 1]; d4=[0.0743 0.4460 0.8920];
den=conv(d1,conv(d2,conv(d3,d4)));
%
w=logspace(-2,1,400);
[mag,fase,w]=bode(num,den,w);
[Mg,Mf,Wcg,Wcp]=margin(mag,fase,w);
%
bode(num,den)
title([' Margem de ganho = ',num2str(Gm), ...
'Margem de fase = ',num2str(Pm)])
```

Calcula  $GH(s)$ .

Calcula margens de ganho e de fase.

Traça os diagramas de Bode e rotula com Mg e Mf.

Rotula o gráfico com os valores reais de Mg e Mf.

(b)

**Fig. 9.47** (a) Diagramas de Bode para o sistema de controle de nível de líquido.  
(b) Script MATLAB.

### EXEMPLO 9.11

### Veículo de reconhecimento controlado remotamente

Considere-se o sistema de controle de velocidade para um veículo de reconhecimento controlado remotamente, mostrado na Fig. 9.34. O objetivo de projeto é obter um bom controle com erro estacionário reduzido e com pequena ultrapassagem para um comando em degrau. A elaboração de um script permitirá efetuar muitas interações de projeto de forma rápida e eficiente. Inicialmente será investigada a especificação de erro de estado estacionário. O erro de estado estacionário,  $e_{ss}$ , para um comando em degrau é

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K/2}. \quad (9.95)$$

O efeito do ganho  $K$  sobre o erro estacionário é evidente a partir da Eq. (9.95): Se  $K = 20$ , o erro será 9% da magnitude de entrada; se  $K = 10$ , o erro será 17% da magnitude de entrada.

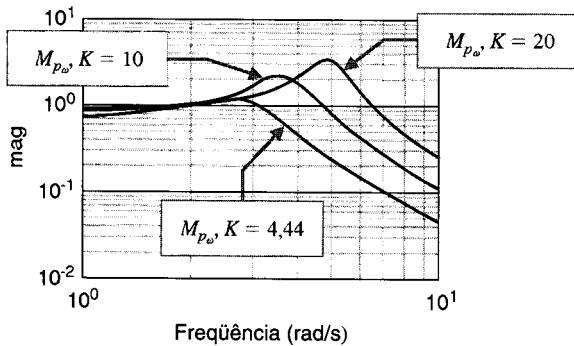
Pode-se investigar agora a especificação de ultrapassagem no domínio de freqüência. Admita-se que seja necessária uma ultrapassagem percentual inferior a 50%. Resolvendo

$$U.P. \approx 100 \exp^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \leq 50$$

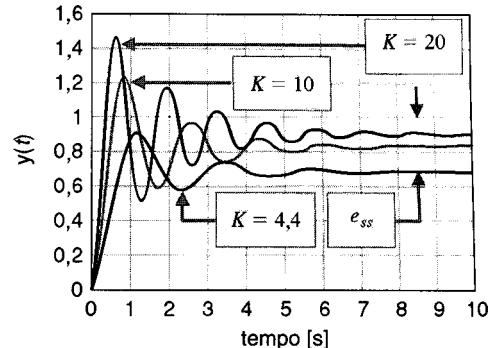
em função de  $\zeta$  resulta

$$\zeta \geq 0,215$$

Com base na Fig. 8.11, encontra-se  $M_{p_u} \leq 2,45$ . Deve-se ter em mente que a informação da Fig. 8.11 refere-se somente a sistemas de segunda ordem e pode ser utilizada apenas como orientação. Serão calculados agora os diagramas de Bode a malha fechada e verificados os valores de  $M_{p_u}$ . Qualquer valor de  $K$  para o qual  $M_{p_u} \leq 2,45$  pode ser um ganho válido para o projeto, mas será



(a)



(a)

```
w=logspace(0,1,200); K=20; % Começa com K = 20.
for i=1:3 % Laço para três
    numgc=K*[1 2]; dengc=[1 1];
    numg=[1]; deng=[1 2 4];
    [nums,dens]=series(numgc,dengc,numg,deng);
    [num,den]=cloop(nums,dens);
    [mag,phase,w]=bode(num,den,w);
    if i==1, mag1=mag; fase1=phase; K=10; end
    if i==2, mag2=mag; fase2=phase; K=4.44; end
    if i==3, mag3=mag; fase3=phase; end
end
% loglog(w,mag1,'-',w,mag2,'-',w,mag3,'-'),grid
xlabel('Freqüência (rad/s)'), ylabel('mag')
```

(b)

```
t=[0:0.1:10]; K=20; % Laço para três valores
for i=1:3 % de ganho K = 20, 10, 4.44.
    numgc=K*[1 2]; dengc=[1 1];
    numg=[1]; deng=[1 2 4];
    [nums,dens]=series(numgc,dengc,numg,deng);
    [num,den]=cloop(nums,dens);
    [y,x]=step(num,den,t); % Calcula a
    if i==1, y1=y; K=10; end % resposta ao
    if i==2, y2=y; K=4.44; end % degrau.
    if i==3, y3=y; end
end
% plot(t,y1,'-',t,y2,'-',t,y3,'-'),grid
xlabel('tempo [s]'), ylabel('y(t)')
```

(b)

**Fig. 9.48** Veículo controlado remotamente: (a) diagramas de Bode para o sistema a malha fechada, (b) script MATLAB.

**Fig. 9.49** Veículo controlado remotamente: (a) resposta ao degrau, (b) script MATLAB.

necessário investigar mais de modo a incluir respostas ao degrau e verificar a ultrapassagem real. O script na Fig. 9.48 constitui um auxílio nesta tarefa. Conservando o procedimento dos passos de projeto da Seção 9.8, serão investigados ainda os ganhos  $K = 20$ ,  $10$  e  $4.44$  (embora  $M_{p_\omega} > 2.45$ , para  $K = 20$ ). É possível traçar o gráfico das respostas ao degrau para quantificar a ultrapassagem, como está mostrado na Fig. 9.49.

Além disso, seria possível usar uma carta de Nichols para auxiliar o procedimento de projeto, como está mostrado na Fig. 9.50.

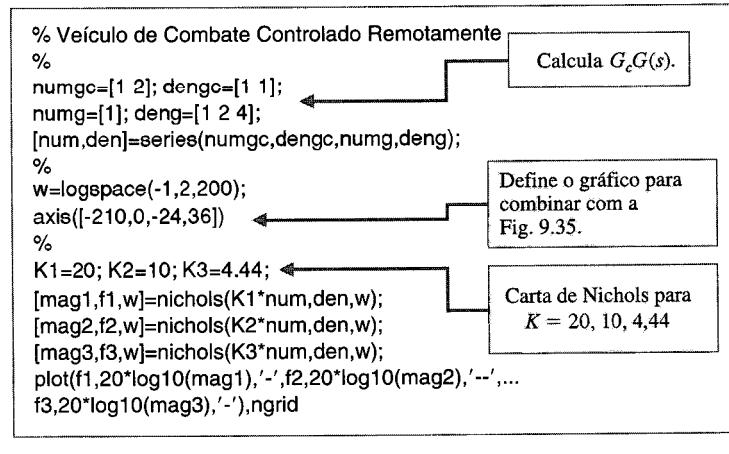
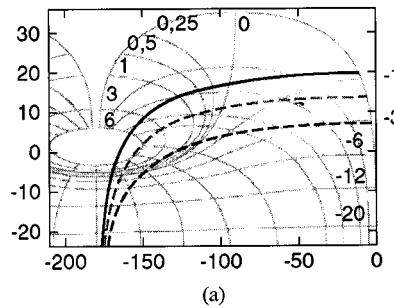
Os resultados da análise estão resumidos na Tabela 9.5 para  $K = 20$ ,  $10$  e  $4.44$ . Escolhe-se  $K = 10$  como ganho de projeto. Obtém-se, em seguida o gráfico de Nyquist e se verifica a estabilidade relativa, como está mostrado na Fig. 9.51. A margem de ganho é  $MG = 49,56$  dB e a margem de fase é  $MF = 26,11^\circ$ . ■

## 9.11 EXEMPLO DE PROJETO SEQUENCIAL: SISTEMA DE LEITURA DE ACIONADOR DE DISCO



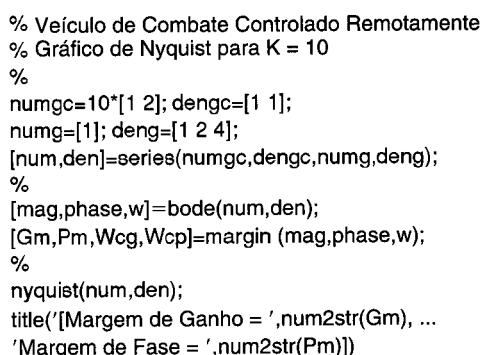
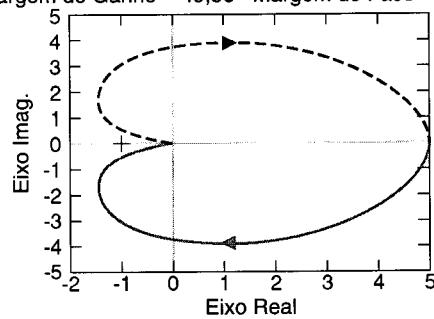
Neste capítulo será examinado o sistema descrito no Cap. 8, utilizando o sistema representado na Fig. 8.42. Este sistema inclui o efeito da ressonância da montagem flexível e incorpora um controlador PD com um zero em  $s = -1$ . Serão determinadas a margem de ganho e a margem de fase com o uso do MATLAB, para  $K = 400$ .

Os diagramas de Bode para o sistema da Fig. 8.42 para  $K = 400$  estão mostrados na Fig. 9.52. A margem de ganho é 22,9 dB e a margem de fase é 37,2°. O gráfico da resposta deste sistema ao degrau está mostrada na Fig. 9.53. O tempo de assentamento deste projeto é  $T_s = 9,6$  ms.

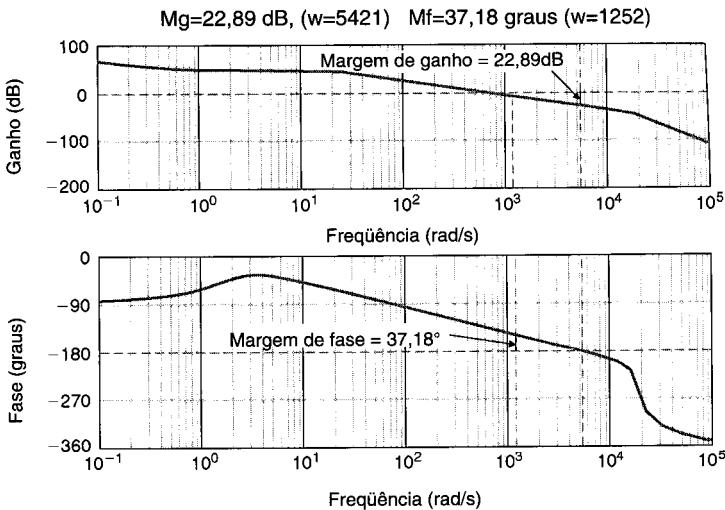


**Fig. 9.50** Veículo controlado remotamente: (a) carta de Nichols, (b) script MATLAB.

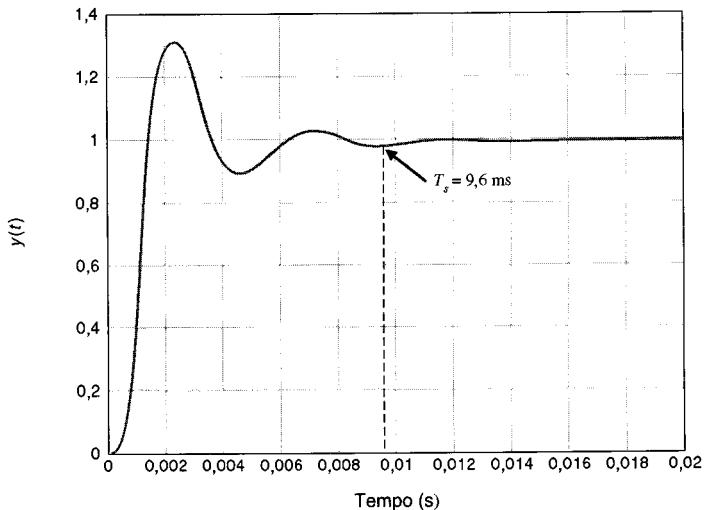
Margem de Ganho = 49,56 Margem de Fase = 26,11



**Fig. 9.51** Carta de Nyquist para o veículo controlado remotamente com  $K = 10$ . (b) Script MATLAB.



**Fig. 9.52** Diagramas de Bode do sistema mostrado na Fig. 8.42.



## 9.12 SUMÁRIO

A estabilidade de um sistema de controle com retroação pode ser determinada no domínio de freqüência utilizando-se o critério de Nyquist. Além disso, o critério de Nyquist fornece duas medidas de estabilidade relativa: (1) margem de ganho e (2) margem de fase. Estas medidas de estabilidade relativa podem ser usadas como índices do desempenho transitório com base nas correlações estabelecidas entre o domínio de freqüência e a resposta transitória. A magnitude e a fase do sistema a malha aberta podem ser determinadas a partir da resposta de freqüência do sistema a malha aberta utilizando-se os círculos de ganho constante e de fase constante no gráfico polar. Alternativamente, pode-se usar o diagrama magnitude logarítmica–ângulo de fase com as curvas de magnitude e fase superpostas (chamado carta de Nichols) para obter a resposta de freqüência a malha fechada. Uma medida da estabilidade relativa, o valor máximo de magnitude da resposta de freqüência,  $M_{p_w}$ , está disponível na carta de Nichols. A resposta de freqüência,  $M_{p_w}$ , pode ser correlacionada com a relação de amortecimento da resposta no domínio do tempo e constitui um índice útil de desempenho. Finalmente, um sistema de controle com retardo puro pode ser investigado de modo semelhante ao dos sistemas sem retardo. Um resumo do critério de Nyquist, das medidas de estabilidade relativa e do diagrama de Nichols são dados na Tabela 9.6 para diversas funções de transferência.

A Tabela 9.6 é muito útil e muito importante para o projetista e para o analista de sistemas de controle. Dados o modelo de um processo  $G(s)$  e um controlador  $G_c(s)$ , pode-se determinar  $G_c(s)G(s)$ . Com esta função de transferência, é possível examinar a coluna 1 da tabela de funções de transferência. Esta tabela contém quinze funções de transferência típicas. Para uma função de transferência escolhida, a tabela fornece os diagramas de Bode, o diagrama de Nichols e o lugar das raízes. Com estas informações o projetista pode determinar ou estimar o desempenho do sistema e considerar a inclusão ou a alteração do controlador  $G_c(s)$ .

TABELA 9.6 Gráficos de Função de Transferência para Funções de Transferência Típicas

$G(s)$	Gráfico Polar	Diagramas de Bode
1. $\frac{K}{s\tau_1 + 1}$		
2. $\frac{K}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$		
3. $\frac{K}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)(s\tau_3 + 1)}$		
4. $\frac{K}{s}$		

(continuação)

**TABELA 9.6 Continuação**

Diagrama de Nichols	Lugar das Raízes	Comentários
<p>Nichols chart showing magnitude <math>M</math> (dB) vs. phase <math>\phi</math> (degrees). The curve starts at <math>\omega = \infty</math> with <math>M = -\infty</math> and ends at <math>\omega = 0</math> with <math>M = M_{\text{max}}</math>. The phase margin is indicated as <math>M_{\text{fase}}</math> between <math>-180^\circ</math> and <math>0^\circ</math>. The gain margin is indicated as <math>M_{\text{ganho}}</math> between <math>0</math> dB and <math>M_{\text{max}}</math>.</p>	<p>Root locus plot in the complex plane (<math>\sigma</math> vs <math>j\omega</math>). A single pole is located at <math>-\frac{1}{\tau_1}</math> on the negative real axis.</p>	Estável: margem de ganho = $\infty$
<p>Nichols chart showing magnitude <math>M</math> (dB) vs. phase <math>\phi</math> (degrees). The curve starts at <math>\omega = \infty</math> with <math>M = -\infty</math> and ends at <math>\omega = 0</math> with <math>M = M_{\text{max}}</math>. The phase margin is indicated as <math>M_{\text{fase}}</math> between <math>-180^\circ</math> and <math>0^\circ</math>.</p>	<p>Root locus plot in the complex plane (<math>\sigma</math> vs <math>j\omega</math>). Two poles are located at <math>-\frac{1}{\tau_1}</math> and <math>-\frac{1}{\tau_2}</math> on the negative real axis. Two zeros are located at <math>r_1</math> and <math>r_2</math> on the positive real axis.</p>	Regulador elementar; estável; margem de ganho = $\infty$
<p>Nichols chart showing magnitude <math>M</math> (dB) vs. phase <math>\phi</math> (degrees). The curve starts at <math>\omega = \infty</math> with <math>M = -\infty</math> and ends at <math>\omega = 0</math> with <math>M = M_{\text{max}}</math>. The phase margin is indicated as <math>M_{\text{fase}}</math> between <math>-180^\circ</math> and <math>0^\circ</math>. The gain margin is indicated as <math>M_{\text{ganho}}</math> between <math>0</math> dB and <math>M_{\text{max}}</math>.</p>	<p>Root locus plot in the complex plane (<math>\sigma</math> vs <math>j\omega</math>). Three poles are located at <math>-\frac{1}{\tau_1}</math>, <math>-\frac{1}{\tau_2}</math>, and <math>-\frac{1}{\tau_3}</math> on the negative real axis. One zero is located at <math>r_1</math> on the positive real axis. Another zero is located at <math>r_2</math> on the negative real axis.</p>	Regulador com elemento adicional armazenador de energia; instável, mas pode ser tornado estável através de redução do ganho
<p>Nichols chart showing magnitude <math>M</math> (dB) vs. phase <math>\phi</math> (degrees). The curve starts at <math>\omega = \infty</math> with <math>M = -\infty</math> and ends at <math>\omega = 0</math> with <math>M = M_{\text{max}}</math>. The phase margin is indicated as <math>M_{\text{fase}}</math> between <math>-180^\circ</math> and <math>0^\circ</math>.</p>	<p>Root locus plot in the complex plane (<math>\sigma</math> vs <math>j\omega</math>). A single pole is located at <math>0</math> on the negative real axis.</p>	Integrador ideal; estável

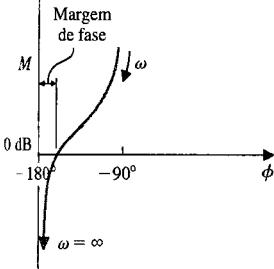
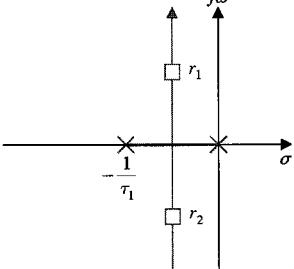
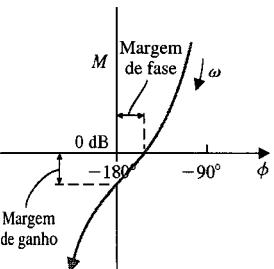
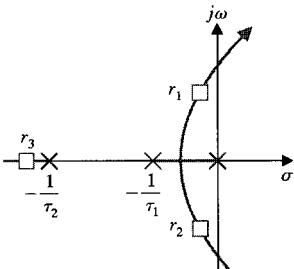
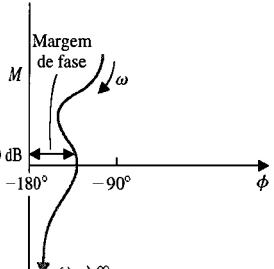
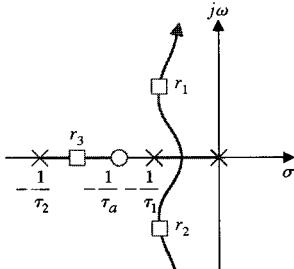
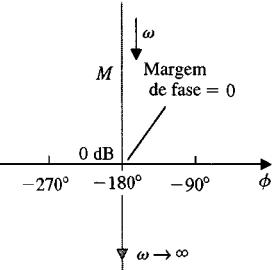
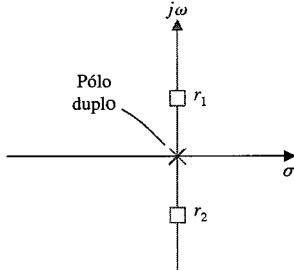
(continuação)

TABELA 9.6 Continuação

$G(s)$	Gráfico Polar	Diagramas de Bode
5. $\frac{K}{s(s\tau_1 + 1)}$		
6. $\frac{K}{s(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$		
7. $\frac{K(s\tau_a + 1)}{s(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$		
8. $\frac{K}{s^2}$		

(continuação)

TABELA 9.6 Continuação

Diagrama de Nichols	Lugar das Raízes	Comentários
		Instrumento para servomecanismo elementar; inherentemente estável; margem de ganho = $\infty$
		Instrumento para servomecanismo com motor controlado pelo campo ou servomecanismo de potência com acionador elementar Ward-Leonard; estável como mostrado, mas que pode se tornar instável com aumento do ganho
		Instrumento para servomecanismo elementar com compensador de avanço de fase (derivativo); estável
		Inherentemente marginalmente estável; deve ser compensado

(continuação)

TABELA 9.6 Continuação

$G(s)$	Gráfico Polar	Diagramas de Bode
9. $\frac{K}{s^2(s\tau_1 + 1)}$		
10. $\frac{K(s\tau_a + 1)}{s^2(s\tau_1 + 1)}$ $\tau_a > \tau_1$		
11. $\frac{K}{s^3}$		
12. $\frac{K(s\tau_a + 1)}{s^3}$		

(continuação)

TABELA 9.6 Continuação

Diagrama de Nichols	Lugar das Raízes	Comentários
		Inerentemente instável; deve ser compensado
		Estável para todos os valores de ganho
		Inerentemente instável
		Inerentemente instável

(continuação)

TABELA 9.6 Continuação

$G(s)$	Gráfico Polar	Diagramas de Bode
13. $\frac{K(s\tau_a + 1)(s\tau_b + 1)}{s^3}$		
14. $\frac{K(s\tau_a + 1)(s\tau_b + 1)}{s(\tau_1 + 1)(\tau_2 + 1)(\tau_3 + 1)(\tau_4 + 1)}$		
15. $\frac{K(s\tau_a + 1)}{s^2(\tau_1 + 1)(\tau_2 + 1)}$		

(continuação)

**EXERCÍCIOS****E9.1** Um sistema possui a função de transferência

$$G(s) = \frac{4(1 + s/3)}{s(1 + 2s)(1 + s/7 + s^2/49)}$$

Traçar os diagramas de Bode para a faixa de freqüência de 0,1 a 10. Mostrar que a margem de fase é aproximadamente  $30^\circ$  e que a margem de ganho é aproximadamente 16 dB.

**E9.2** Um sistema possui a função de transferência

$$G(s) = \frac{K(1 + s/5)}{s(1 + s/2)(1 + s/10)},$$

onde  $K = 6,14$ . Com o auxílio de um programa de computador (ou de uma calculadora), mostrar que a freqüência de cruzamento (0 dB) do sistema é 3,5 rad/s e que a margem de fase é  $45^\circ$ .

**E9.3** Dispõe-se de um circuito integrado para servir como sistema com retroação com o objetivo de regular a tensão de saída de uma fonte de alimentação. Os diagramas de Bode da função de transferência de malha necessária,  $GH(j\omega)$ , estão mostra-

dos na Fig. E9.3. Estimar as margens de ganho e de fase do regulador.

**Resposta:** MG = 25 dB, MF = 75°

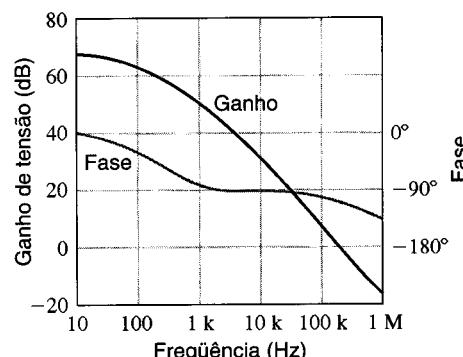
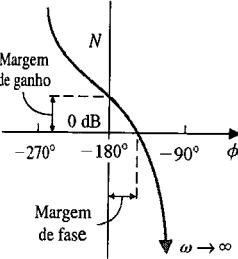
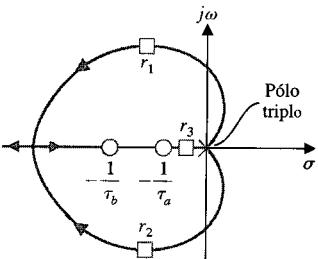
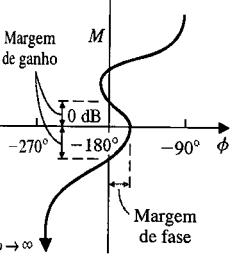
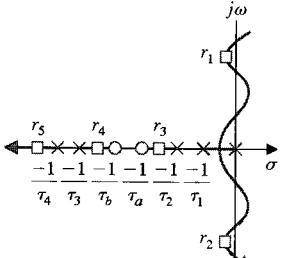
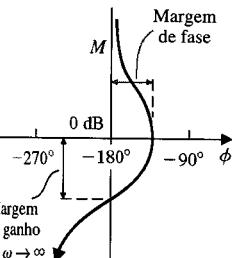
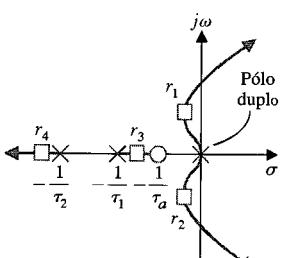
**Fig. E9.3** Regulador para fonte de alimentação.

TABELA 9.6 Continuação

Diagrama de Nichols	Lugar das Raízes	Comentários
		Condicionalmente estável; torna-se instável se o valor do ganho for muito pequeno
		Condicionalmente estável; estável para valores pequenos de ganho, torna-se instável à medida que o ganho aumenta, torna-se novamente estável para valores ainda maiores de ganho e torna-se instável para valores muito altos de ganho
		Condicionalmente estável; torna-se instável para valores elevados de ganho

E9.4 Considere-se o sistema com uma função de transferência de malha

$$G(s) = \frac{100}{s(s + 10)}$$

onde  $H(s) = 1$ . Deseja-se obter, no sistema a malha fechada, um pico de ressonância  $M_{p_w} = 3,0$  dB. O pico ocorre entre 6 e 9 rad/s e é somente de 1,25 dB. Traçar a carta de Nichols para a faixa de freqüência de 6 a 15 rad/s. Mostrar que o ganho do sistema precisa ser elevado de 4,6 para 171 dB. Determinar a freqüência ressonante do sistema ajustado.

**Resposta:**  $\omega_r = 11$  rad/s, como está mostrado no modelo do sistema.

E9.5 Um circuito digital CMOS pode ser representado pelos diagramas de Bode mostrados na Fig. E9.5. (a) Obter as margens de ganho e de fase do circuito. (b) Estimar de quanto seria necessário reduzir o ganho do sistema (em dB) para obter uma margem de fase de 60°.

E9.6 Um sistema possui a função de transferência

$$G(s) = \frac{K(s + 100)}{s(s + 10)(s + 40)}.$$

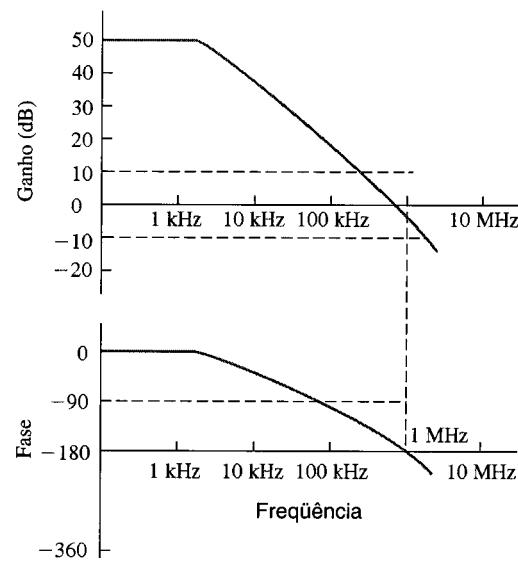


Fig. E9.5 Circuito CMOS.

Quando  $K = 500$ , o sistema é instável. Mostrar que se o ganho for reduzido para 50, o pico de ressonância será de 3,5 dB. Obter a margem de fase do sistema com  $K = 50$ .

**E9.7** Um sistema com retroação unitária possui um processo

$$G(s) = \frac{K}{(s - 1)}$$

Determinar, por meio do gráfico polar, a faixa de valores de  $K$  para a qual o sistema é estável.

**E9.8** Considerar um sistema com retroação unitária com

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 2)}$$

- (a) Mostrar que a margem de ganho é 3,5 dB para  $K = 4$ .
- (b) Determinar o valor do ganho  $K$ , caso se deseje que a margem de ganho seja de 16 dB.

**Resposta:** (b)  $K = 0,98$

**E9.9** Determinar a margem de fase do sistema do exercício E9.8, quando  $K = 3$ .

**E9.10** Considerar o sistema de controle do túnel de vento do Problema 7.31. Obter os diagramas de Bode e mostrar que a margem de fase é  $25^\circ$  e que a margem de ganho é 10 dB. Mostrar também que a banda passante a malha fechada é 6 rad/s.

**E9.11** Considerar um sistema com retroação unitária com

$$G(s) = \frac{40(1 + 0,4s)}{s(1 + 2s)(1 + 0,24s + 0,04s^2)}.$$

- (a) Traçar os diagramas de Bode utilizando o programa MATLAB ou equivalente. (b) Determinar a margem de ganho e a margem de fase.

**E9.12** Um sistema a malha fechada, como está mostrado na Fig. 9.1, possui  $H(s) = 1$  e

$$G(s) = \frac{K}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

onde  $\tau_1 = 0,02$  s e  $\tau_2 = 0,2$  s. (a) Escolher um ganho  $K$  tal que o erro de estado estacionário para uma entrada em rampa seja 10% da magnitude,  $A$ , da função rampa, quando  $r(t) = At$ ,  $t \geq 0$ . (b) Traçar os diagramas de Bode para  $G(s)$  e determinar as margens de fase e de ganho. (c) Usando a carta de Nichols, determinar a banda passante  $\omega_B$ , o pico de ressonância  $M_{p_w}$  e a freqüência de ressonância  $\omega_r$  do sistema a malha fechada.

**Respostas:** (a)  $K = 10$

(b)  $MF = 32^\circ$ ,  $MG = 15$  dB

(c)  $\omega_B = 10,3$ ;  $M_{p_w} = 1,84$ ;  $\omega_r = 6,5$

**E9.13** Um sistema com retroação unitária possui um processo

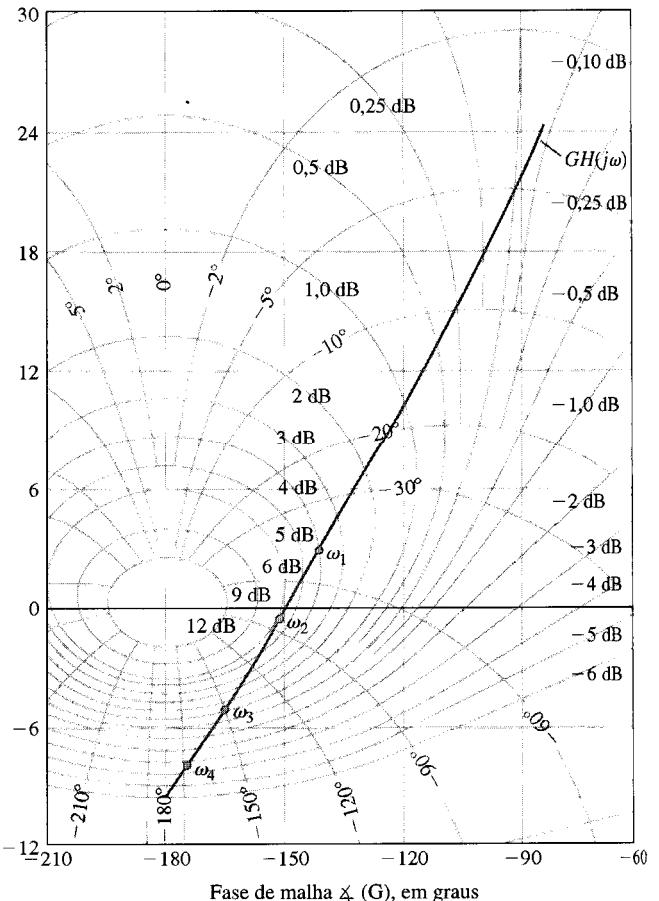
$$G(s) = \frac{150}{s(s + 5)}.$$

(a) Determinar o valor máximo da magnitude da resposta de freqüência a malha fechada usando a carta de Nichols. (b) Determinar a banda passante e a freqüência de ressonância deste sistema. (c) Utilizar estas medidas de freqüência para estimar o valor da ultrapassagem para a resposta do sistema a uma entrada em degrau.

**Respostas:** (a) 7,5 dB, (b)  $\omega_B = 19$ ,  $\omega_r = 12,6$

**E9.14** A Fig. E9.14 fornece uma carta de Nichols na qual está traçado o gráfico  $G(j\omega)$  de um sistema. Usando a tabela que se segue, determinar: (a) o pico de ressonância  $M_{p_w}$  em dB; (b) a freqüência de ressonância  $\omega_r$ ; (c) a banda passante de 3 dB; (d) a margem de fase do sistema.

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$
rad/s	1	3	6	10



**Fig. E9.14** Carta de Nichols para  $G(j\omega)$ .

**E9.15** Considere-se um sistema com retroação unitária no qual

$$G(s) = \frac{1000}{(s + 100)}.$$

Determinar a banda passante do sistema a malha aberta e a banda passante do sistema a malha fechada e comparar os resultados.

**Resposta:** banda passante a malha aberta  $\omega_B = 100$ , banda passante a malha fechada  $\omega_B = 1100$

**E9.16** Um retardo puro  $e^{-sT}$  pode ser aproximado por uma função de transferência do tipo

$$e^{-sT} \approx \frac{(1 - Ts/2)}{(1 + Ts/2)}$$

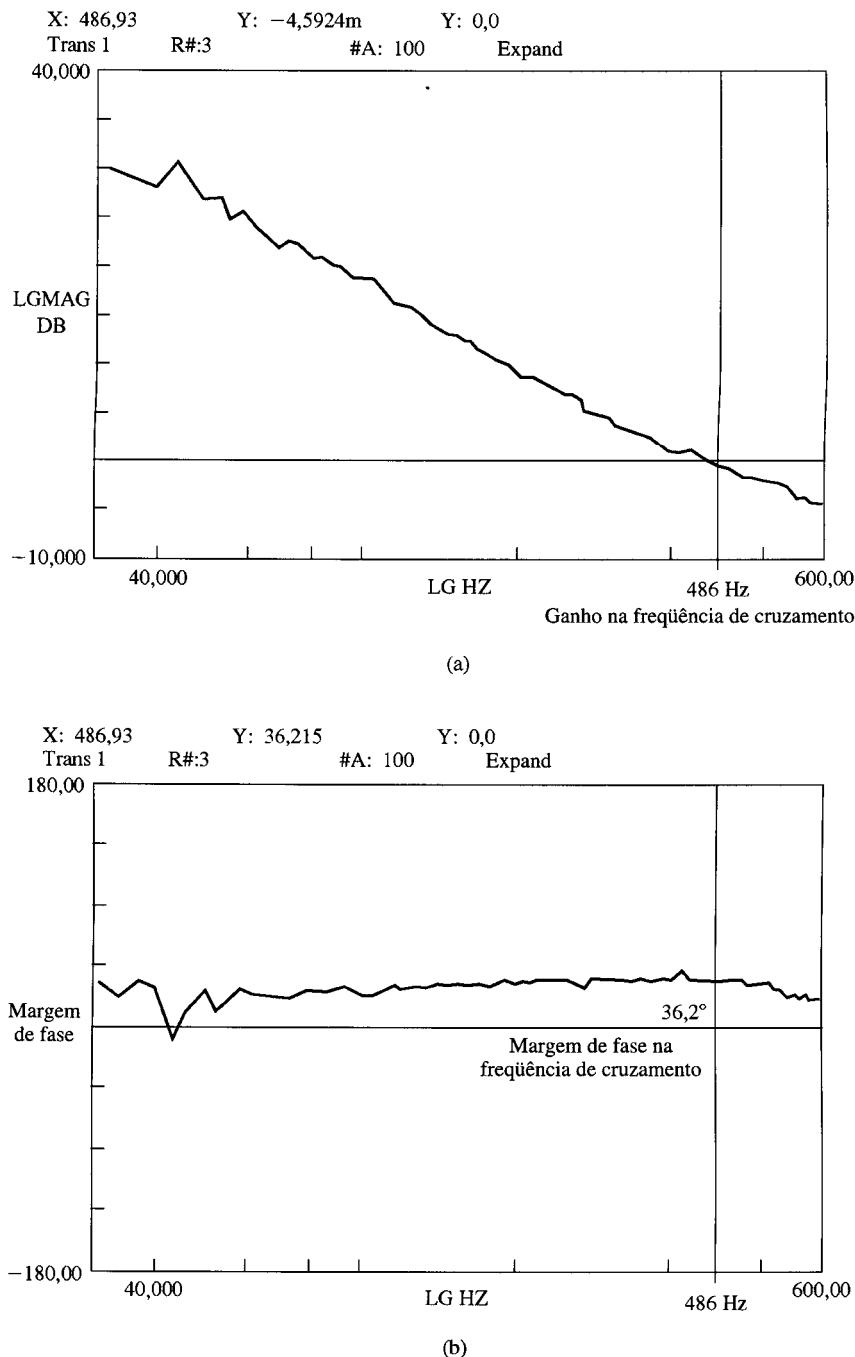
para  $0 < \omega < 2/T$ . Obter os diagramas de Bode para a função de transferência real e para a aproximação, com  $T = 2$ , para  $0 < \omega < 1$ .

**E9.17** Um sistema com retroação unitária possui um processo

$$G(s) = \frac{K(s + 3)}{s(s + 1)(s + 5)}.$$

(a) Traçar os diagramas de Bode e (b) determinar o ganho  $K$  necessário para se obter uma margem de fase de  $40^\circ$ . Qual é o erro de estado estacionário para uma entrada em rampa, com o ganho da parte (b)?

**E9.18** Um atuador de acionador de disco usa um amortecedor para absorver energia vibratória de aproximadamente 60 Hz [14]. Os diagramas de Bode de  $G(s)$  do sistema de controle estão mostrados na Fig. E9.18. (a) Determinar a ultrapassagem percentual



**Fig. E9.18** Diagramas de Bode do acionador de disco  $G(s)$ .

esperada na resposta do sistema a malha fechada, para uma entrada em degrau, (b) estimar a banda passante do sistema a malha fechada e estimar o tempo de assentamento do sistema (critério dos 2%).

**E9.19** Um sistema com retroação unitária com  $G_c(s) = K$  possui

$$G(s) = \frac{e^{-0.1s}}{(s + 4)}$$

Escolher um ganho  $K$  de modo que a margem de fase do sistema seja de  $40^\circ$ . Determinar a margem de ganho para o ganho  $K$  escolhido.

**E9.20** Considere-se um modelo simples que descreve um motorista de automóvel seguindo um outro carro em uma auto-estrada, a alta

velocidade. O modelo mostrado na Fig. E9.20 incorpora o tempo de reação do motorista,  $T$ . Um motorista possui  $T = 1$  segundo e um outro motorista,  $T = 1,5$  segundo. Determinar a resposta do sistema no domínio do tempo,  $y(t)$ , para ambos os motoristas, para uma variação em degrau no sinal de comando,  $R(s) = -A/s$ , devido a uma freada do carro da frente.

**E9.21** Um sistema com retroação unitária possui um processo a controlar

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 2)(s + 50)}$$

Determinar a margem de fase, a freqüência de cruzamento (*crossover*) e a margem de ganho quando  $K = 1300$ .

**Resposta:**  $MF = 16,6^\circ$ ;  $\omega_c = 4,9$ ;  $MG = 4$  ou  $12$  dB

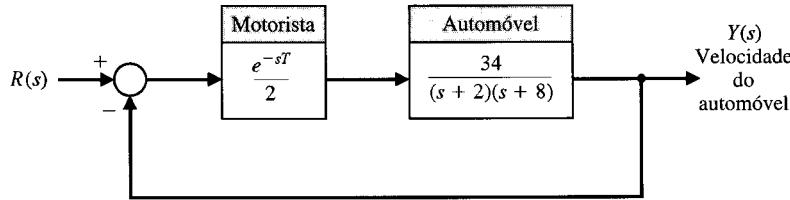


Fig. E9.20

**E9.22** Um sistema com retroação unitária possui um processo a controlar

$$G(s) = \frac{K(s + 1)}{(s - 2)(s - 4)}$$

- (a) Usando diagramas de Bode para  $K = 6$ , determinar a margem de fase do sistema. (b) Escolher um ganho  $K$  tal que a margem de fase seja, pelo menos,  $30^\circ$ .

**E9.23** Reconsiderar o sistema do exercício E9.21 para  $K = 438$ . Determinar a banda passante do sistema a malha fechada, a freqüência ressonante e  $M_{p_u}$ , usando a carta de Nichols.

**Respostas:**  $\omega_B = 4,25 \text{ rad/s}$ ;  $\omega_r = 2,7$ ;  $M_{p_u} = 1,7$ .

**E9.24** Um sistema com retroação unitária possui um processo a controlar

$$G(s) = \frac{K}{(-1 + \tau s)},$$

onde  $K = 1/2$  e  $\tau = 1$ . O gráfico polar para  $G(j\omega)$  está mostrado na Fig. E9.24. Determinar, através do critério de Nyquist, se o sistema é estável.

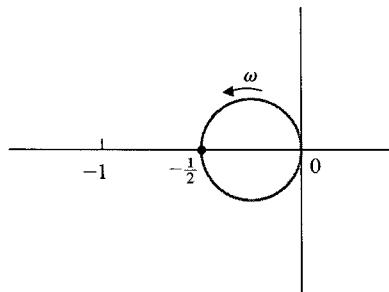


Fig. E9.24

**E9.25** Um sistema com retroação unitária possui um processo a controlar

$$G(s) = \frac{11,7}{s(1 + 0,05s)(1 + 0,1s)}.$$

Determinar a margem de ganho e a freqüência de cruzamento.

**Resposta:**  $MF = 27,7^\circ$ ;  $\omega_c = 8,31 \text{ rad/s}$

## PROBLEMAS

**P9.1** Utilizar o critério de Nyquist para determinar a estabilidade de diversos sistemas relativos aos gráficos polares do Problema P8.1. Em cada um dos casos, especificar os valores de  $N$ ,  $P$  e  $Z$ .

**P9.2** Esboçar os gráficos polares das seguintes funções de transferência de malha  $GH(s)$  e determinar se o sistema é estável utilizando o critério de Nyquist.

**E9.26** Com o uso da carta de Nichols, determinar  $M_{p_u}$ ,  $\omega_r$  e  $\omega_B$  para a resposta de freqüência a malha fechada do sistema do exercício E9.25.

**E9.27** Um sistema com retroação unitária possui

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 5)^2}$$

Determinar o valor máximo de ganho  $K$  para o qual a margem de fase seja, no mínimo, igual a  $45^\circ$  e a margem de ganho seja, no mínimo, igual a 6 dB. Quais são as margens de ganho e de fase para este valor de  $K$ ?

**E9.28** Um sistema com retroação unitária possui

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 0,2)}$$

(a) Determinar a margem de fase do sistema quando  $K = 0,16$ .

(b) Usar a margem de fase para estimar  $\zeta$  e prever a ultrapassagem. (c) Calcular a resposta real deste sistema de segunda ordem e comparar com a estimativa da parte (b).

**E9.29** Uma função de transferência é

$$GH(s) = \frac{1}{s + 2}$$

Usando o contorno no plano  $s$  mostrado na Fig. E9.29, determinar o percurso correspondente no plano  $F(s)$  ( $B = -1 + j$ ).

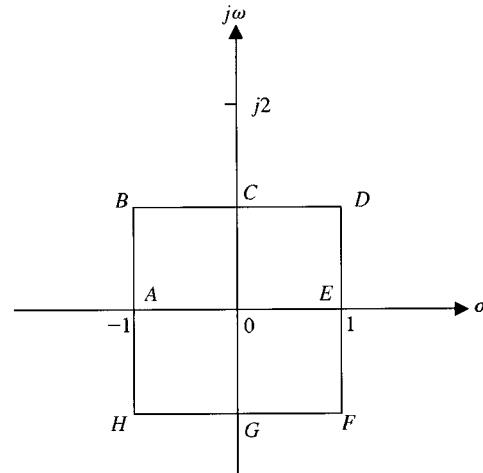
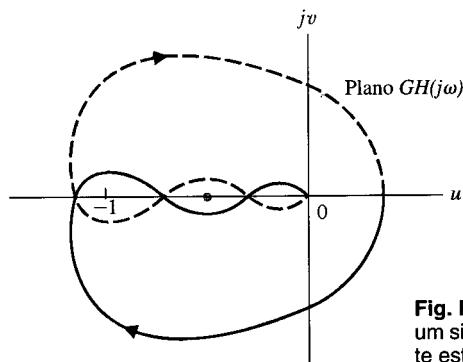


Fig. E9.29

$$(a) GH(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 4)}.$$

$$(b) GH(s) = \frac{K(s + 2)}{s^2(s + 4)}.$$

- Se o sistema for estável, determinar o valor máximo para  $K$  obtendo o ponto onde o diagrama polar cruza o eixo dos  $u$ .
- P9.3** (a) Determinar um contorno adequado no plano  $s$ ,  $\Gamma_s$ , que possa ser usado para determinar se todas as raízes da equação característica possuem relação de amortecimento maior do que  $\zeta_1$ . (b) Determinar um contorno adequado no plano  $s$ ,  $\Gamma_s$ , que possa ser usado para determinar se todas as raízes da equação característica possuem parte real menor que  $s = -\sigma_1$ . (c) Usando o contorno da parte (b) e o teorema de Cauchy, determinar se a seguinte equação característica possui raízes com parte real menor que  $s = -1$ :
- $$q(s) = s^3 + 11s^2 + 56s + 96.$$
- P9.4** O gráfico polar de um sistema condicionalmente estável está mostrado na Fig. P9.4 para um ganho específico  $K$ . Determinar se o sistema é estável e obter o número de raízes (caso existam) no semiplano  $s$  da direita. O sistema não possui pólos de  $GH(s)$  no semiplano  $s$  da direita. (b) Determinar se o sistema é estável quando o ponto  $-1$  fica situado no local assinalado por um ponto no eixo, mostrado na Fig. P9.4.
- P9.5** O controle de velocidade de um motor a gasolina está mostrado na Fig. P9.5. Devido à restrição na tomada de entrada do carburador e da capacidade do coletor, ocorre um atraso  $\tau_i$  igual a 1 segundo. A constante de tempo do motor  $\tau_e$  é igual a  $J/b = 3$  s. A constante de tempo do sistema de medição de velocidade é  $\tau_m = 0,4$  s. (a) Determinar o ganho  $K$  necessário para atender o requisito de que o erro estacionário seja menor que 10% do valor ajustado para a velocidade de referência. (b) Com o ganho determinado a partir do item (a) anterior, utilizar o critério de Nyquist para investigar a estabilidade do sistema. (c) Determinar as margens de ganho e de fase do sistema.
- P9.6** Um braço mecânico com acionamento direto é um braço mecânico inovador no qual não se utilizam redutores entre os motores e suas

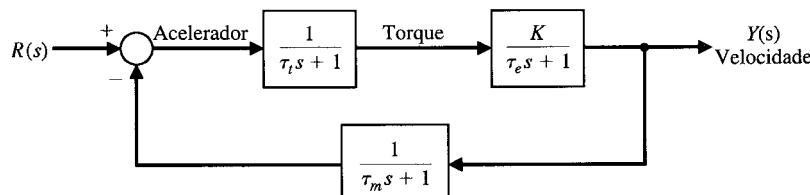


**Fig. P9.4** Diagrama polar de um sistema condicionalmente estável.

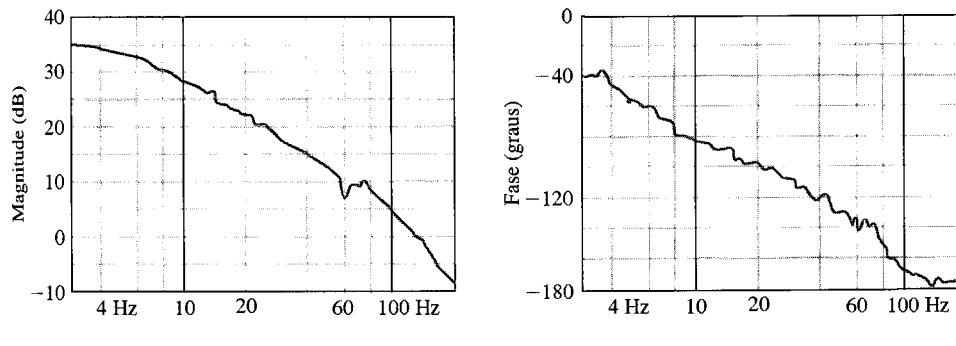
respectivas cargas. Como os rotores dos motores estão acoplados diretamente às cargas, os sistemas de acionamento são livres de folgas mecânicas, possuem baixo atrito e alta rigidez mecânica — características importantes para o posicionamento exato e para a manipulação precisa ao se usar controle de torque sofisticado.

O objetivo do projeto do braço com acionamento direto, do MIT,<sup>2</sup> é obter velocidades do braço de 10 m/s [15]. O braço possui torques de até 660 N·m (475 ft·lb). Em cada um dos motores se utilizam a retroação e um conjunto de sensores de posição e de velocidade. A resposta de freqüência de uma junta do braço está mostrada na Fig. P9.6(a). Os dois pólos aparecem em 3,7 Hz e 68 Hz. A Fig. P9.6(b) mostra a resposta ao degrau quando se utiliza

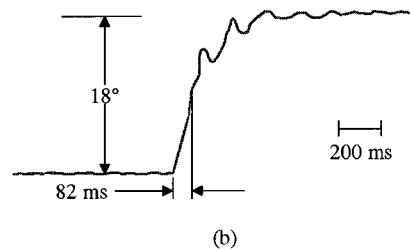
<sup>2</sup> Massachusetts Institute of Technology. (N. do T.)



**Fig. P9.5** Controle de velocidade de motor.

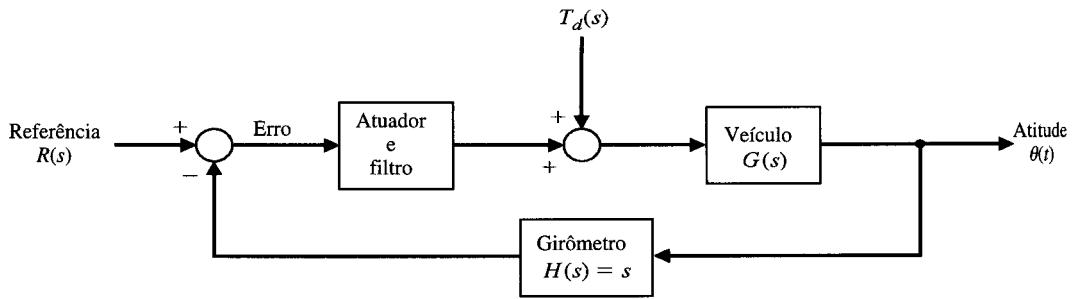


(a)



(b)

**Fig. P9.6** O braço do MIT: (a) resposta de freqüência, (b) resposta da posição.



**Fig. P9.7** Sistema de estabilização de uma aeronave VTOL.

retroação de posição e de velocidade. A constante de tempo do sistema a malha fechada é de 82 ms. Desenvolver o diagrama de blocos do sistema de acionamento e comprovar que 82 ms é um resultado razoável.

- P9.7** Uma aeronave de pouso e decolagem verticais (VTOL)<sup>3</sup> é um veículo inherentemente instável e requer um sistema automático de estabilização. Projeteu-se um sistema de estabilização de atitude para a aeronave VTOL K-16B do Exército dos Estados Unidos, mostrado sob forma de diagrama de blocos na Fig. P9.7 [16]. Na velocidade de 40 nós (cerca de 74 km/h), a dinâmica do veículo pode ser representada aproximadamente pela função de transferência

$$G(s) = \frac{10}{(s^2 + 0,36)}$$

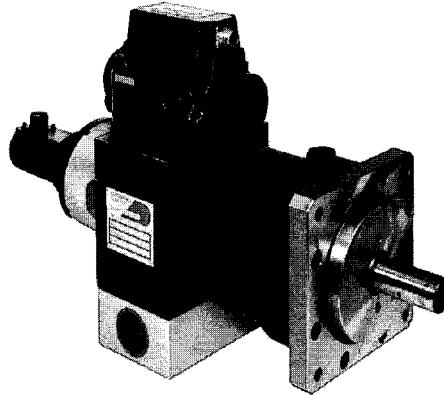
O atuador e o filtro podem ser representados pela função de transferência

<sup>3</sup> Do inglês Vertical TakeOff and Landing. (N. do T.)

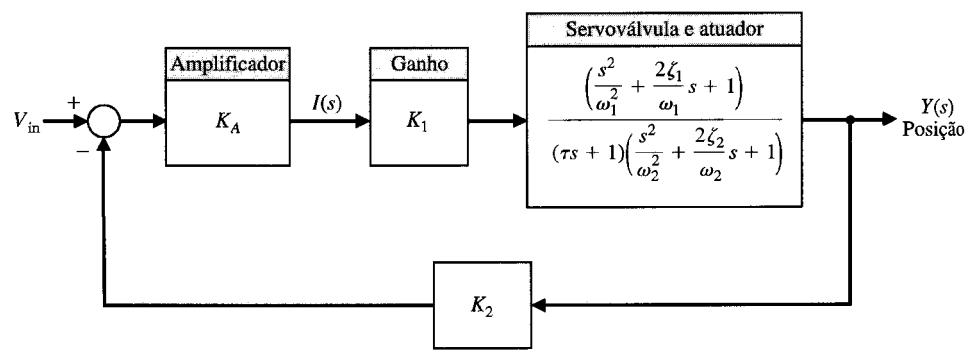
$$G_1(s) = \frac{K_1(s + 7)}{(s + 3)}.$$

(a) Obter os diagramas de Bode da função de transferência de malha  $G_1(s)G(s)H(s)$  quando o ganho for  $K_1 = 2$ . (b) Determinar as margens de ganho e de fase deste sistema. (c) Determinar o erro de estado estacionário devido a uma perturbação de vento  $T_d(s) = 1/s$ . (d) Determinar a amplitude máxima do pico de ressonância da resposta de freqüência a malha fechada e a freqüência de ressonância. (e) Estimar a relação de amortecimento do sistema a partir de  $M_{p_e}$  e da margem de fase.

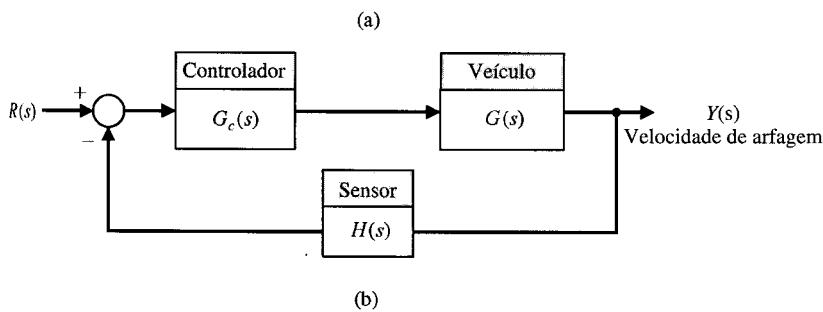
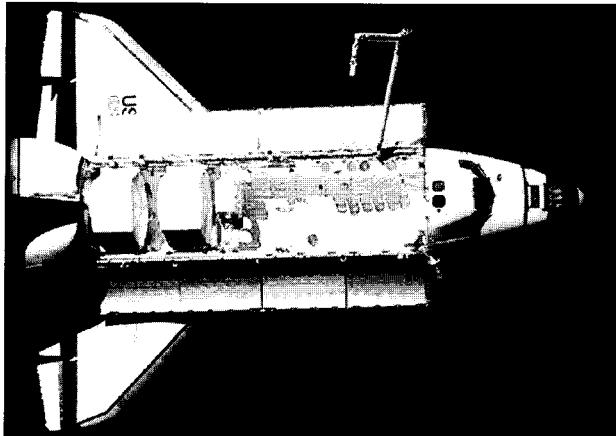
- P9.8** Os servomecanismos eletro-hidráulicos são utilizados nos sistemas de controle que necessitam de resposta rápida para grandes massas. Um servomecanismo eletro-hidráulico pode fornecer saídas de 100 kW ou mais [17]. A fotografia na Fig. P9.8(a). O sensor de saída fornece uma medida da posição do atuador, que é comparada com  $V_{out}$ . O erro é amplificado e controla a posição da válvula hidráulica, controlando assim a vazão hidráulica do atuador. O diagrama de blocos de um servomecanismo eletro-hidráulico a malha fechada que utiliza uma



(a)



**Fig. P9.8** (a) Servoválvula e atuador. (Cortesia de Moog, Inc. Industrial Division). (b) Diagrama de blocos.



retroação de pressão para obter amortecimento está mostrado na Fig. P9.8(b) [17, 18]. Valores típicos para este sistema são  $\tau = 0,02$  s; para o sistema hidráulico,  $\omega_2 = 7(2\pi)$  e  $\zeta_2 = 0,05$ . A ressonância estrutural  $\omega_1$  é igual a  $10(2\pi)$  e o amortecimento é  $\zeta_1 = 0,05$ . O ganho de malha é  $K_A K_1 K_2 = 1,0$ . (a) Esboçar os diagramas de Bode e determinar a margem de fase do sistema. (b) O amortecimento do sistema pode ser aumentado perfurando-se um pequeno orifício no êmbolo de modo que  $\zeta_2 = 0,25$ . Esboçar os diagramas de Bode e determinar a margem de fase deste sistema.

- P9.9** A chave para exploração e uso do espaço, no futuro, é o sistema de transporte terra-órbita, conhecido popularmente como ônibus espacial. O ônibus, mostrado na Fig. 9.9(a), transporta grandes cargas para o espaço e as traz de volta para serem reutilizadas [19]. O ônibus, aproximadamente do tamanho de um DC-9 com um peso vazio de 75.000 kg, utiliza superfícies de controle (elevons) na borda da asa e um freio na cauda para controlar o vôo. O diagrama de blocos de um sistema de controle da velocidade de arfagem está mostrado na Fig. P9.9(b). O sensor é representado por um ganho,  $H(s) = 0,5$ , e a velocidade, pela função de transferência

**Fig. P9.9** (a) O ônibus espacial Columbia em órbita da Terra contra o fundo escuro do espaço, em 22 de junho de 1983. O robô manipulador remoto está mostrado com as portas do compartimento de carga abertas na parte superior desta foto, tirada de um satélite. (b) Sistema de controle da velocidade de arfagem. (Cortesia da NASA.)

$$G(s) = \frac{0,30(s + 0,05)(s^2 + 1600)}{(s^2 + 0,05s + 16)(s + 70)}$$

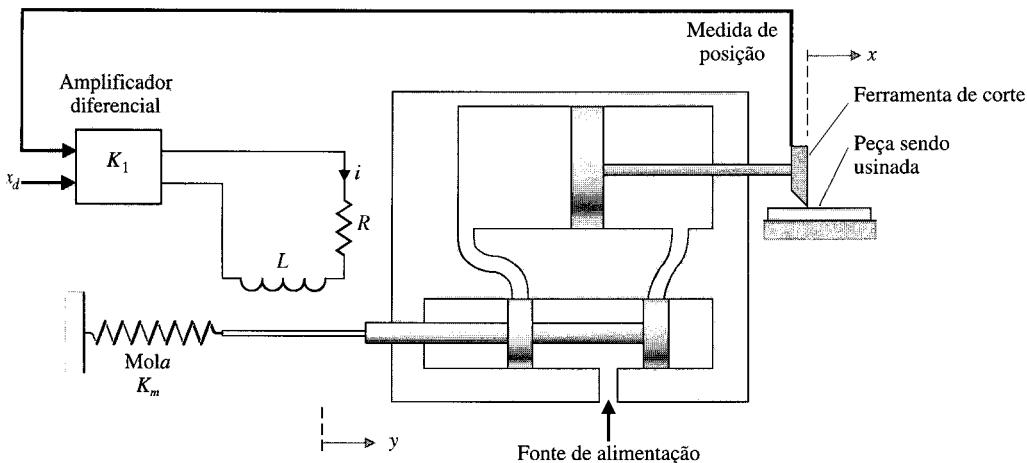
O controlador  $G_c(s)$  pode ser um ganho ou qualquer função de transferência desejada. (a) Esboçar os diagramas de Bode do sistema quando  $G_c(s) = 2$  e determinar a margem de estabilidade. (b) Esboçar os diagramas de Bode do sistema quando

$$G_c(s) = K_1 + K_2/s \text{ e } K_2/K_1 = 0,5$$

O ganho  $K_1$  deve ser escolhido de modo que a margem de ganho seja de 10 dB.

- P9.10** As máquinas-ferramenta são, freqüentemente, controladas automaticamente, como está mostrado na Fig. P9.10. Estes sistemas automáticos são muitas vezes chamados de controle numérico de máquinas (ou máquinas CNC)<sup>4</sup> [9]. Considerando-se apenas um

<sup>4</sup> Do inglês Computer Numerical Control, literalmente Controle Numérico por Computador, em oposição ao controle clássico, analógico. (N. do T.)



**Fig. P9.10** Controle de máquina-ferramenta.

eixo, a posição desejada da máquina-ferramenta é comparada com a posição real e esta comparação é usada para acionar a bobina de um solenóide e o eixo de um atuador hidráulico. A função de transferência do atuador (ver Tabela 2.7) é

$$G_a(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{K_a}{s(\tau_a s + 1)}$$

onde  $K_a = 1$  e  $\tau_a = 0,4$  s. A tensão de saída do amplificador diferencial é

$$E_0(s) = K_1(X(s) - X_d(s))$$

onde  $X_d(t)$  é a entrada da posição desejada. A força no eixo é proporcional à corrente  $i$  de modo que  $F = K_2 i(t)$ , onde  $K_2 = 3,0$ . A constante de mola  $K_m$  é igual a 1,5,  $R = 0,1$  e  $L = 0,2$ .

(a) Determinar o ganho  $K$ , que resulta em um sistema com margem de fase de 30°. (b) Para o ganho  $K_1$  da parte (a), determinar  $M_{p_m}$ ,  $\omega_r$  e a banda passante do sistema a malha fechada. (c) Estimar a ultrapassagem percentual da resposta transitória do sistema para uma entrada em degrau  $X_d(s) = 1/s$  e o tempo de assentamento no interior de uma faixa de 2% em torno do valor final.

**P9.11** Um sistema de controle de uma concentração química está mostrado na Fig. P9.11. O sistema recebe uma carga granulada cuja composição varia, e se deseja manter uma composição constante na mistura de saída ajustando-se a válvula de vazão de alimentação. A função de transferência do reservatório e da válvula de saída é

$$G(s) = \frac{5}{5s + 1},$$

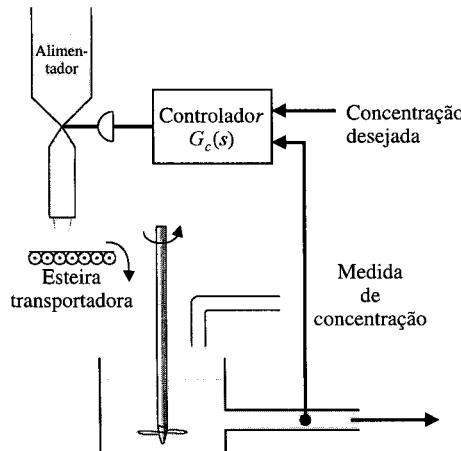


Fig. P9.11 Controle de concentração química.

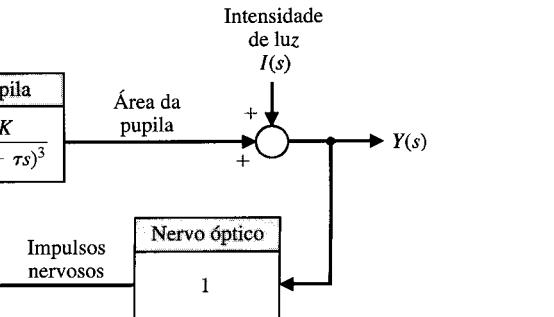


Fig. P9.12 Controle da abertura da pupila humana.

e o controlador é

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s}.$$

O transporte da carga ao longo da esteira transportadora requer um tempo de transporte (ou retardo),  $T = 1,5$  s. (a) Esboçar os diagramas de Bode quando  $K_1 = K_2 = 1$  e investigar a estabilidade do sistema. (b) Esboçar os diagramas de Bode quando  $K_1 = 0,1$  e  $K_2 = 0,04$  e investigar a estabilidade do sistema. (c) Quando  $K_1 = 0$ , usar o critério de Nyquist para calcular o maior valor admissível para o ganho  $K_2$ , de modo que o sistema permaneça estável.

**P9.12** Um modelo simplificado do sistema de controle para regular a abertura da pupila do olho humano está mostrado na Fig. P9.12 [20]. O ganho  $K$  representa o ganho da pupila e  $\tau$  é a constante de tempo da pupila, que é de 0,5 s. O retardo  $T$  é igual a 0,1 s. O ganho da pupila é igual a 4,0.

(a) Supondo que o retardo seja insignificante, esboçar os diagramas de Bode do sistema. Determinar a margem de fase do sistema. (b) Incluir o efeito do retardo adicionando o deslocamento de fase devido ao retardo. Determinar a margem de fase com o retardo incluído.

**P9.13** Um controlador é usado para regular a temperatura de um molde para a fabricação de peças de plástico, conforme está mostrado na Fig. P9.13. O valor do retardo é estimado em 1,2 s. Utilizando o critério de Nyquist, determinar a estabilidade do sistema para  $K_a = K = 1$ . (b) Determinar um valor adequado de  $K_a$  para que se tenha um sistema estável quando  $K = 1$ , com uma margem de fase superior a 50°.

**P9.14** A eletrônica e os computadores estão sendo usados para controlar automóveis. A Fig. P9.14 é um exemplo de sistema de con-

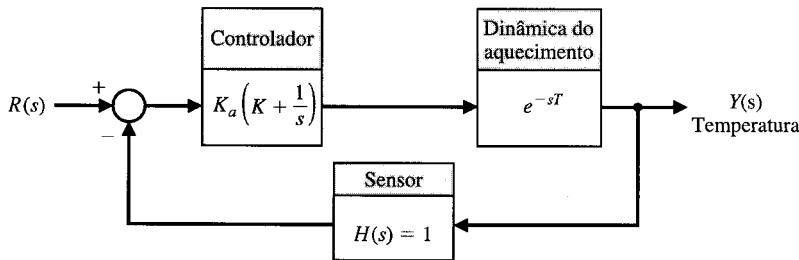


Fig. P9.13 Controlador de temperatura.

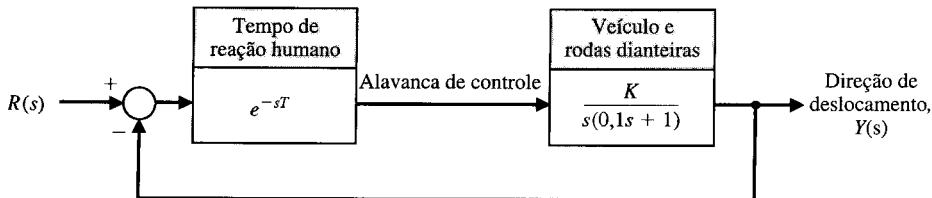


Fig. P9.14 Controlador de direção de automóvel.

trole para automóveis, o controle de direção de um automóvel de pesquisa. A haste de controle é usada para dirigir. Um motorista típico possui um tempo de reação de  $T = 0,2$  s.

(a) Usando a carta de Nichols, determinar o valor do ganho  $K$  que resultará em um sistema cuja resposta de freqüência a malha fechada apresentará um pico de magnitude,  $M_{p_u}$ , menor ou igual a 2 dB.

(b) Estimar a relação de amortecimento do sistema com base nos valores de (1)  $M_{p_u}$  e (2) da margem de fase. Comparar os resultados e explicar a diferença, caso exista.

(c) Determinar a banda passante de 3 dB do sistema a malha fechada.

**P9.15** Considere-se o sistema de pilotagem automática de navio discutido no Problema P8.11. A resposta de freqüência da parte a malha aberta do sistema de controle de rumo do navio está mostrada na Fig. P8.11. O desvio do rumo do navio-tanque em relação à rota é medido pelo radar e é usado para gerar o sinal de erro, como está mostrado na Fig. P9.15. Este erro é usado para controlar o ângulo do leme  $\delta(s)$ .

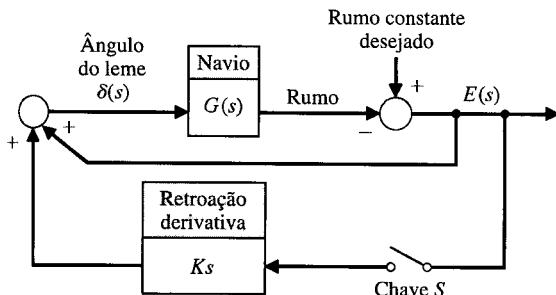


Fig. P9.15 Pilotagem automática de navio.

(a) Este sistema é estável? Discutir o que um sistema instável de pilotagem de navio indica em termos da resposta transitória do sistema. Convém lembrar que o sistema sob consideração é um navio que tenta seguir uma trajetória retilínea.

(b) É possível estabilizar este sistema reduzindo o ganho da função de transferência  $G(s)$ ?

(c) É possível estabilizar este sistema? Pede-se sugerir um compensador com retroação adequado.

(d) Repetir as partes (a), (b) e (c) com a chave  $S$  fechada.

**P9.16** A Fig. P9.16(a) mostra um carregador elétrico que segue automaticamente uma trilha em forma de fita disposta no piso da fábrica [15]. Sistemas com retroação a malha fechada são usados para controlar a direção e a velocidade do veículo. O carrinho detecta o percurso da fita por meio de 16 fototransistores. O diagrama de blocos do sistema de direção está mostrado na Fig. P9.16(b). Selecionar o ganho  $K$  de modo que a margem de fase seja de aproximadamente 30°.

**P9.17** O objetivo principal de muitos sistemas de controle é manter a variável de saída em uma condição desejada ou de referência, quando o sistema for submetido a uma perturbação [23]. Um esquema de controle de um reator químico típico está mostrado na Fig. P9.17. A perturbação é representada por  $U(s)$  e o processo químico por  $G_3$  e  $G_4$ . O controlador é representado por  $G_1$  e a válvula por  $G_2$ . O sensor de retroação é  $H(s)$  e será considerado igual a 1. Será admitido que  $G_2$ ,  $G_3$  e  $G_4$  são todos da forma

$$G_i(s) = \frac{K_i}{1 + \tau_i s},$$

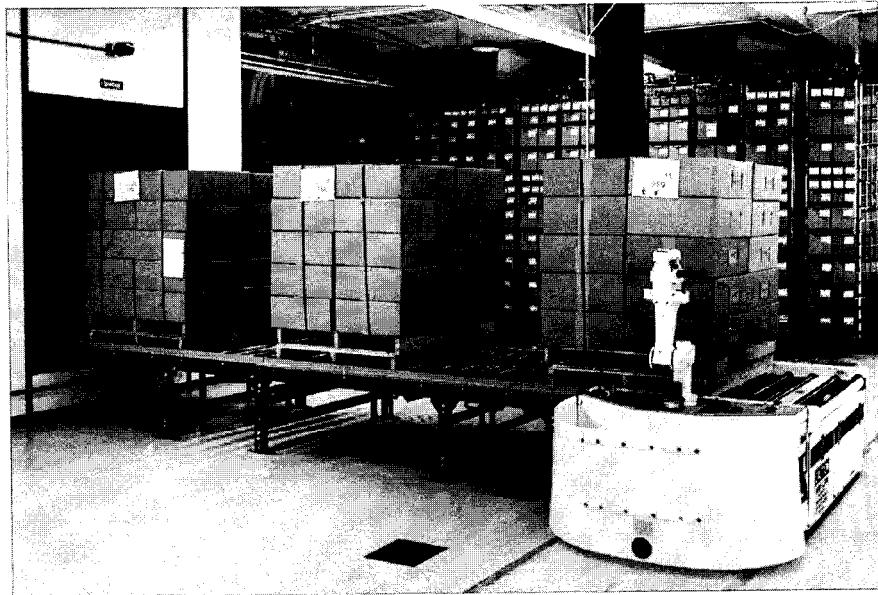
onde  $\tau_3 = \tau_4 = 4$  s e  $K_3 = K_4 = 0,1$ . As constantes da válvula são  $K_2 = 20$  e  $\tau_2 = 0,5$  s. Deseja-se manter um erro de estado estacionário inferior a 5% do valor da posição desejada.

(a) Quando  $G_1(s) = K_1$ , determinar o ganho necessário para satisfazer o requisito de erro estacionário. Para esta condição, determinar a ultrapassagem esperada no sinal de saída para uma mudança em degrau no sinal de referência  $r(t)$ .

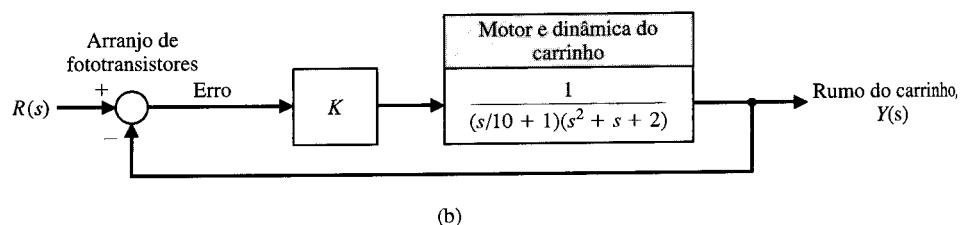
(b) Se o controlador possuir um termo proporcional e mais um termo integral de modo que  $G_1(s) = K_1(1 + 1/s)$ , determinar um valor adequado de ganho que resulte em um sistema com uma ultrapassagem menor que 30% porém superior a 5%. Nas partes (a) e (b), utilizar a aproximação da relação de amortecimento em função da margem de fase que assinala  $\zeta = 0,01 \phi_{mr}$ . Nestes cálculos, supor  $U(s) = 0$ .

(c) Estimar o tempo de assentamento (critério dos 2%) da resposta do sistema ao degrau com o controlador das partes (a) e (b).

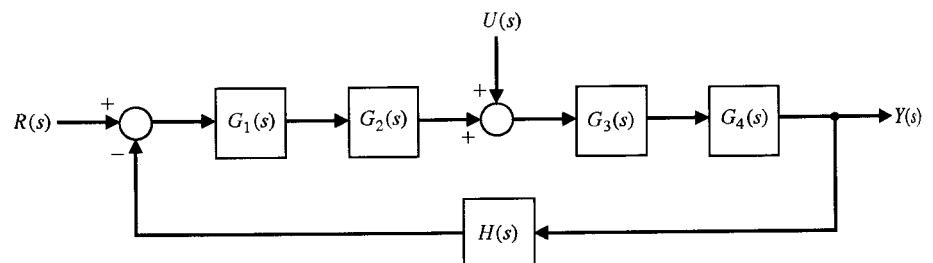
(d) Espera-se que o sistema seja submetido a uma perturbação em degrau  $U(s) = A/s$ . Para facilidade, supor que a referência



(a)



**Fig. P9.16** (a) Veículo transportador de carga elétrico (foto por cortesia de Control Engineering Corporation). (b) Diagrama de blocos.



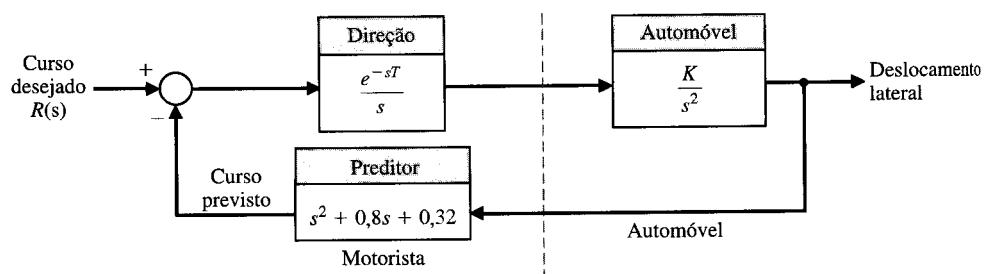
**Fig. P9.17** Controle de reator químico.

desejada seja  $r(t) = 0$  quando o sistema for ajustado. Determinar a resposta do sistema da parte (b) à perturbação.

- P9.18** Um modelo de um motorista de automóvel tentando manter um rumo está mostrado na Fig. P9.18, em que  $K = 5,3$ . (a) Determinar a resposta de freqüência e as margens de ganho e de fase quando o tempo de reação  $T$  for zero. (b) Obter a margem de fase quando o tempo de reação for 0,1 s. (c) Determinar o tempo de reação que fará com que o sistema atinja o limiar da estabilidade (margem de fase = 0°).

- P9.19** Nos Estados Unidos, mais de 4,3 bilhões de dólares são gastos anualmente na coleta e no tratamento de lixo sólido. Um sistema que utiliza um braço coletor remoto para apanhar sacos de lixo está mostrado na Fig. P9.19. A função de transferência do braço coletor remoto é

$$GH(s) = \frac{0,5}{s(5s + 1)(s + 2)}$$



**Fig. P9.18** Controle de automóvel e motorista.

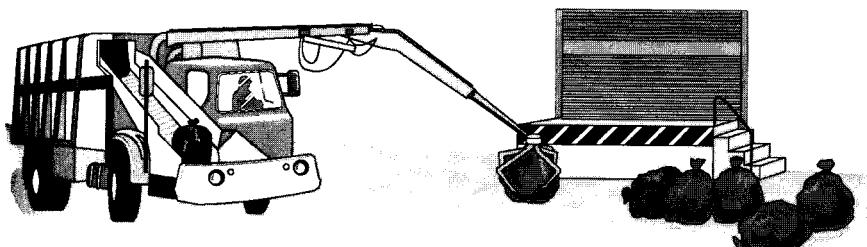


Fig. P9.19 Sistema de coleta de lixo.

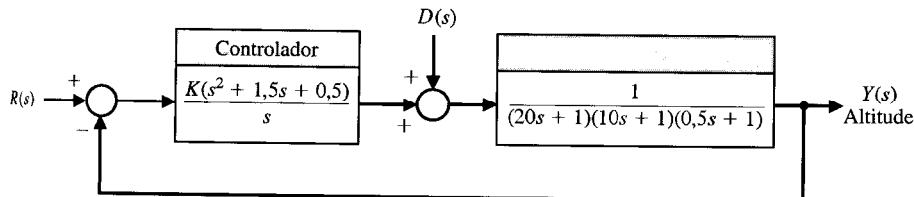


Fig. P9.20 Controle de aeronave de rotor basculante.

- (a) Traçar a carta de Nichols e mostrar que a margem de ganho é de aproximadamente 19 dB. (b) Determinar a margem de fase e o valor de  $M_{p_0}$  para a malha fechada. Determinar também a banda passante a malha fechada.

P9.20 O Rotor Basculante Osprey V-22 da Bell-Boeing é, ao mesmo tempo, um avião e um helicóptero. Sua vantagem é a capacidade de poder girar seus motores de 90° a partir da posição vertical, como está mostrado na Fig. P7.33(a), para decolagens e poucos, e em seguida comutar os motores para uma posição horizontal de cruzeiro como um avião. O sistema de controle de altitude no modo helicóptero está mostrado na Fig. P9.20. (a) Obter a resposta de freqüência do sistema para  $K = 100$ . (b) Obter a margem de ganho e a margem de fase deste sistema. (c) Escolher um ganho adequado  $K$  de modo que a margem de fase seja 40°. (Aumentar o ganho acima de  $K = 100$ .) (d) Obter a resposta  $y(t)$  do sistema com o valor de ganho escolhido na parte (c).

P9.21 Considere-se um sistema com retroação unitária com

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 4)}.$$

- (a) Esboçar, com precisão, os diagramas de Bode para  $K = 4$ . Determinar: (b) a margem de ganho, (c) o valor de  $K$  necessário para fornecer uma margem de ganho de 12 dB e (d) o valor de  $K$  que conduz a um erro estacionário de 25% da magnitude  $A$  para uma entrada em rampa  $r(t) = At$ ,  $t > 0$ . Este ganho pode ser utilizado para se alcançar um desempenho aceitável?

P9.22 O diagrama de Nichols relativo ao  $GH(j\omega)$  de um sistema a malha fechada está mostrado na Fig. P9.22. A freqüência de cada um dos pontos no gráfico é dada na seguinte tabela:

Ponto	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\omega$	1	2,0	2,6	3,4	4,2	5,2	6,0	7,0	8,0

- Determinar: (a) a freqüência de ressonância, (b) a banda passante, (c) a margem de fase e (d) a margem de ganho. (e) Estimar a ultrapassagem e o tempo de assentamento (critério dos 2%) da resposta para uma entrada em degrau.

P9.23 Um sistema de controle a malha fechada possui a função de transferência de malha

$$GH(s) = \frac{K}{s(s + 2)(s + 3)}.$$

- (a) Determinar o ganho  $K$  para o qual a margem de fase seja 60°. (b) Determinar a margem de ganho do sistema para o valor de ganho  $K$  escolhido na parte (a).

- P9.24 Um sistema a malha fechada, com retroação unitária, possui a função de transferência de malha

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + 4)}{s^2}.$$

- (a) Determinar o ganho  $K$  para o qual a margem de fase seja 60°. (b) Determinar a margem de ganho do sistema para o valor de

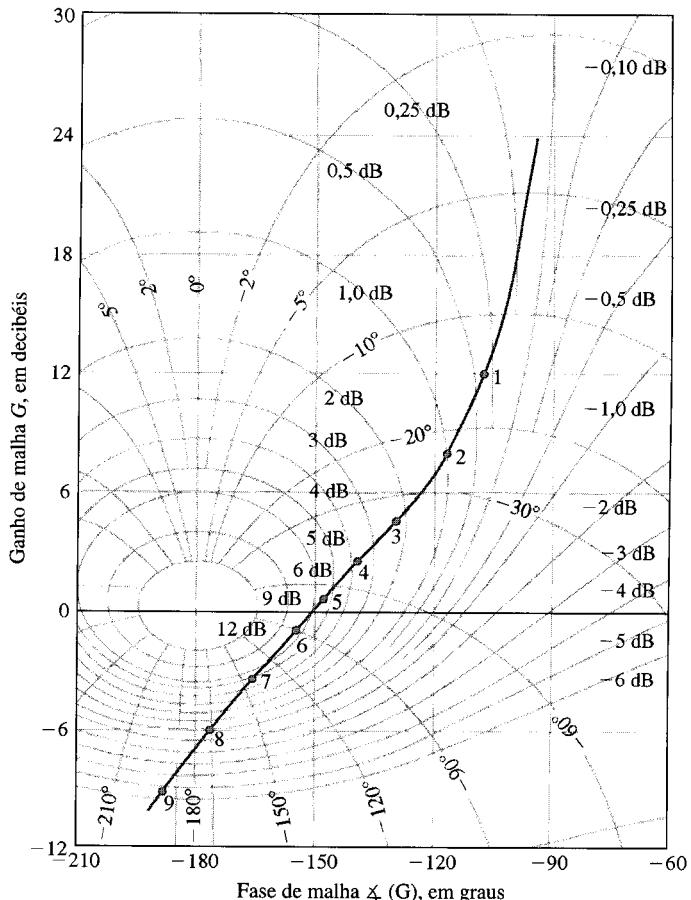
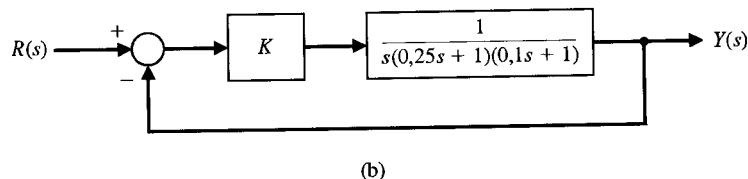
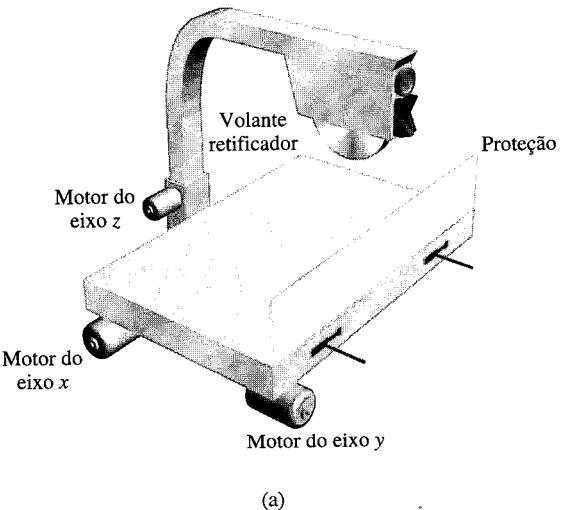


Fig. P9.22 Carta de Nichols.



**Fig. P9.26** Sistema de controle do volante de retífica de superfície.

ganho  $K$  escolhido na parte (a). (c) Prever a banda passante do sistema a malha fechada.

**P9.25** Um sistema a malha fechada possui a função de transferência de malha

$$GH(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{s}$$

(a) Determinar o ganho  $K$  para o qual a margem de fase seja  $60^\circ$  quando  $T = 0,2$ . (b) Traçar a margem de fase em função do re-tardo  $T$  para o valor de  $K$  da parte (a).

**P9.26** Uma seção de usinagem está melhorando a eficiência do seu processo de retífica de superfícies [22]. As máquinas existentes são predominantemente mecânicas e operadas apenas de for-

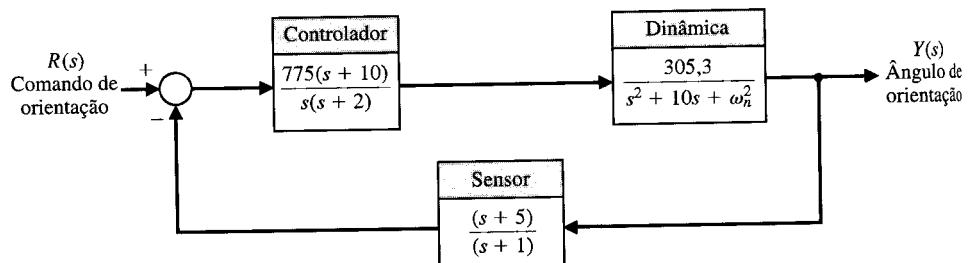
ma manual. A automação das máquinas irá liberar o operador para outras tarefas e assim aumentar a produtividade global da seção de usinagem. A máquina de retífica superficial está mostrada na Fig. P9.26(a), com todos os três eixos automatizados com motores e sistemas com retroação. O sistema de controle do eixo  $y$  está mostrado na Fig. P9.26(b). Com a finalidade de obter um erro estacionário pequeno para um comando em rampa, escolhe-se  $K = 10$ . Esboçar os diagramas de Bode do sistema a malha aberta e obter o gráfico da carta de Nichols. Determinar o ganho e a margem de ganho do sistema e a banda passante do sistema a malha fechada. Estimar o valor de  $\zeta$  do sistema e a ultrapassagem prevista e o tempo de assentamento (critério dos 2%).

## PROBLEMAS AVANÇADOS

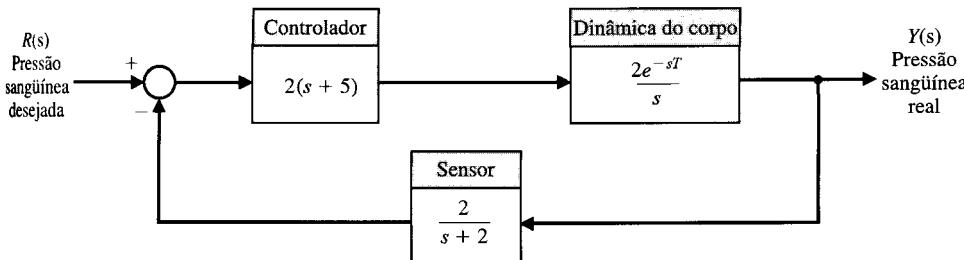
**PA9.1** As espaçonaves em uso na atualidade estão sujeitas a variações substanciais de suas propriedades de massa e de configuração durante a vida útil operacional [26]. Por exemplo, os momentos de inércia mudam consideravelmente durante a operação. Considere-se o sistema de controle de orientação mostrado na Fig. PA9.1.

(a) Traçar os diagramas de Bode e determinar as margens de ganho e de fase quando  $\omega_n^2 = 15.267$ . (b) Repetir a parte (a) quando  $\omega_n^2 = 9500$ . Observar o efeito de uma variação de 38% em  $\omega_n^2$ .

**PA9.2** A anestesia é usada em cirurgias para levar o paciente à inconsciência. Um dos problemas com a inconsciência induzida por



**Fig. PA9.1** Controle de orientação de espaçonave.



**Fig. PA9.2** Controle da pressão de sangue com anestesia.

drogas é a grande diferença de sensibilidade de um paciente a outro. Além disto, a sensibilidade do paciente varia durante uma operação. Um modelo do controle de anestesia induzida por drogas está mostrado na Fig. PA9.2. O indicador de inconsciência é a pressão do sangue arterial.

(a) Traçar os diagramas de Bode e determinar a margem de ganho e a margem de fase quando  $T = 0,05$  s. (b) Repetir a parte (a) quando  $T = 0,1$  s. Descrever o efeito de um aumento de 100% no retardador  $T$ . (c) Usando a margem de fase, prever a ultrapassagem da resposta para uma entrada em degrau para as partes (a) e (b).

**PA9.3** O processo de solda vem sendo automatizado ao longo das últimas décadas. As características de qualidade da solda, como a metalurgia final e a mecânica da junta, normalmente não são mensuráveis em linha pelo controle. Contudo, é necessária alguma forma de controlar a qualidade da solda. Uma abordagem do controle em processo da solda inclui características geométricas do cordão (como características de largura, profundidade e altura da seção reta) e características térmicas (como largura da zona afetada pelo calor e taxa de resfriamento). A profundidade do cordão de solda, que é o atributo geométrico principal, é muito difícil de medir diretamente, mas foi desenvolvido um método para se estimar a profundidade usando a medição de temperatura [27]. Um modelo de sistema de controle de solda está mostrado na Fig. PA9.3.

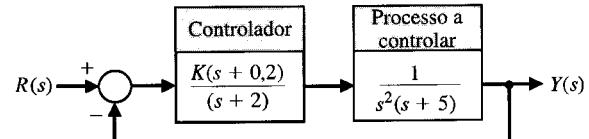
(a) Determinar a margem de fase e a margem de ganho do sistema para  $K = 1$ . (b) Repetir a parte (a) para  $K = 1,5$ . (c) Determinar a banda passante do sistema para  $K = 1$  e  $K = 1,5$ , usando a carta de Nichols. (d) Prever o tempo de assentamento (critério dos 2%) da resposta ao degrau para  $K = 1$  e  $K = 1,5$ .

**PA9.4** O controle de uma máquina de fabricar papel é bastante complexo [28]. O objetivo é depositar a quantidade adequada de fibra

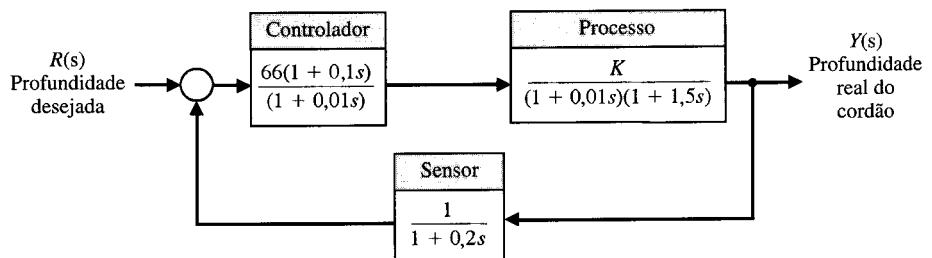
em suspensão (polpa) na velocidade correta e de modo uniforme. Desidratação, deposição da fibra, prensagem e secagem ocorrem então em seqüência. O controle do peso do papel por unidade de área é muito importante. Escolher  $K$  de modo que no sistema de controle mostrado na Fig. PA9.4 a margem de fase seja  $\geq 40^\circ$  e a margem de ganho  $\geq 10$  dB. Traçar a resposta ao degrau para o valor de ganho escolhido. Determinar a banda passante do sistema a malha fechada.

**PA9.5A** NASA (Agência Espacial Norte-Americana) está planejando diversas missões a Marte com veículo de exploração. Um explorador típico é um veículo com seis rodas, pesando 22 libras (cerca de 10 kg), alimentado por energia solar, que verá o que está ocorrendo à sua volta por meio de duas pequenas câmaras de TV e medirá a distância a objetos com o auxílio de cinco telêmetros a laser. Será capaz de escalar rampas com inclinação de  $30^\circ$  em areia seca e portará um espectrômetro que possa determinar a composição química das rochas da superfície. Será controlado remotamente a partir da Terra.

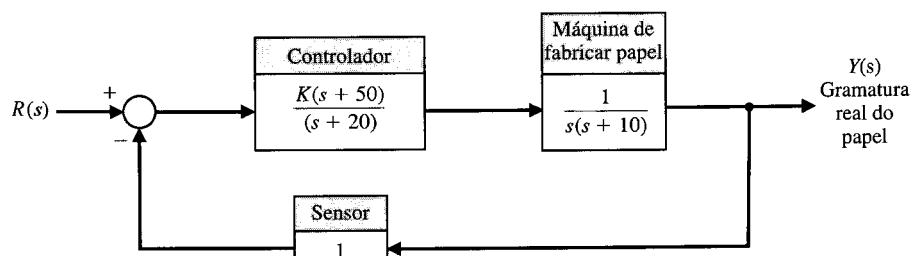
Para o modelo do sistema de controle de posição mostrado na Fig. PA9.5, determinar o ganho  $K$  que maximiza a margem



**Fig. PA9.5**



**Fig. PA9.3** Controle da profundidade de um cordão de solda.



**Fig. PA9.4** Controle de máquina para fabricar papel.

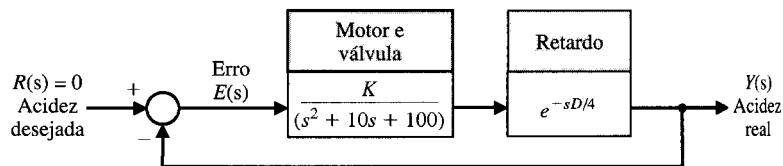


Fig. PA9.6 Controle de acidez de água de mina.

de fase. Determinar a ultrapassagem da resposta a uma entrada em degrau para o valor de ganho escolhido.

**PA9.6** A acidez da água de drenagem de uma mina de carvão é controlada, freqüentemente, através da adição de óxido de cálcio (cal) à água. Uma válvula controla a adição de cal e um sensor é instalado a jusante. Para o modelo mostrado na Fig. PA9.6, determinar  $K$  e a distância  $D$  para manter estabilidade. É necessário  $D > 2$  metros para permitir uma mistura completa antes do ponto de medição com o sensor.

**PA9.7** Os elevadores de edifícios estão limitados a cerca de 800 metros. Acima desta altura, os cabos do elevador se tornam excessivamente grossos e pesados para uso prático. Uma solução consiste em eliminar o cabo. A chave para o elevador sem cabo é a tecnologia do motor linear que está sendo aplicada no desenvolvimento de sistemas de transporte de trilho com suspensão magnética. Está sob consideração um motor linear síncrono

que impulsiona o carro de passageiros ao longo de uma guia que se desenvolve com o comprimento do poço do elevador. O motor funciona através da interação de um campo eletromagnético de bobinas elétricas ao longo da guia com ímãs instalados no carro [29].

Admitindo-se que o motor possua atrito insignificante, o sistema pode ser representado pelo modelo mostrado na Fig. PA9.7.

Determinar  $K$  de modo que a margem de fase do sistema seja 45°. Determinar a banda passante do sistema para o ganho  $K$  escolhido. Calcular também o valor máximo do sinal de saída para uma perturbação em degrau para o ganho escolhido.

**PA9.8** Um sistema de controle está mostrado na Fig. PA9.8. O ganho  $K$  é maior que 500 e inferior a 3000. Escolher um ganho que fará com que a resposta do sistema a um degrau apresente uma ultrapassagem menor que 18%. Traçar o diagrama de Nichols e calcular a margem de fase.

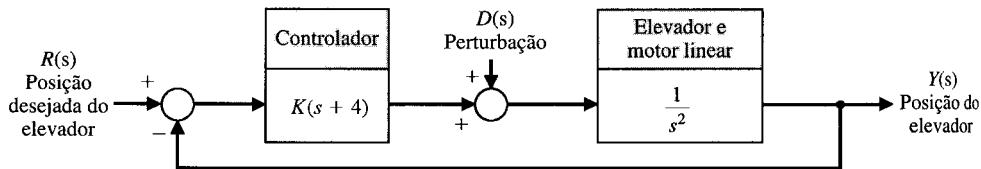


Fig. PA9.7 Controle de posição de elevadores.

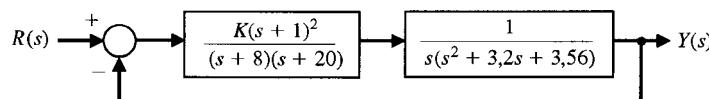


Fig. PA9.8 Seleção de ganho.

## PROBLEMAS DE PROJETO

**PPC9.1** O sistema da Fig. PPC4.1 usa um controlador  $G_c(s) = K_a$ . Determinar o valor de  $K_a$  de modo que a margem de fase seja 70°. Traçar a resposta deste sistema para uma entrada em degrau.

**PP9.1** Um robô móvel para a limpeza de lixo tóxico está mostrado na Fig. PP9.1(a) [24]. O controle de velocidade a malha fechada está representado pela Fig. 9.1 com  $H(s) = 1$ . A carta de Nichols na Fig. PP9.1(b) mostra o gráfico de  $G(j\omega)/K$  versus  $\omega$ . O valor da frequência nos pontos indicados está mostrado na seguinte tabela:

Ponto	1	2	3	4	5
$\omega$	2	5	10	20	50

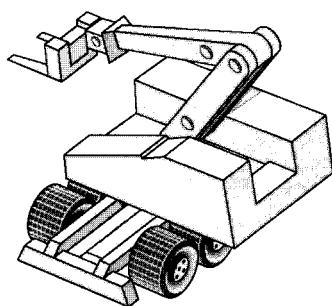
(a) Determinar as margens de ganho e de fase do sistema a malha fechada quando  $K = 1$ . (b) Determinar o pico de ressonância em dB e a frequência de ressonância para  $K = 1$ . (c) Determinar a banda passante do sistema e estimar o tempo de assentamento (critério dos 2%) e a ultrapassagem percentual deste sistema para uma entrada em degrau. (d) Determinar o valor apropriado do ganho  $K$  de modo que a ultrapassagem da resposta a uma entrada em degrau seja de 30% e estimar o tempo de assentamento do sistema.

**PP9.2** Braços robóticos de juntas flexíveis são construídos de materiais leves e apresentam dinâmica a malha aberta com valores bai-

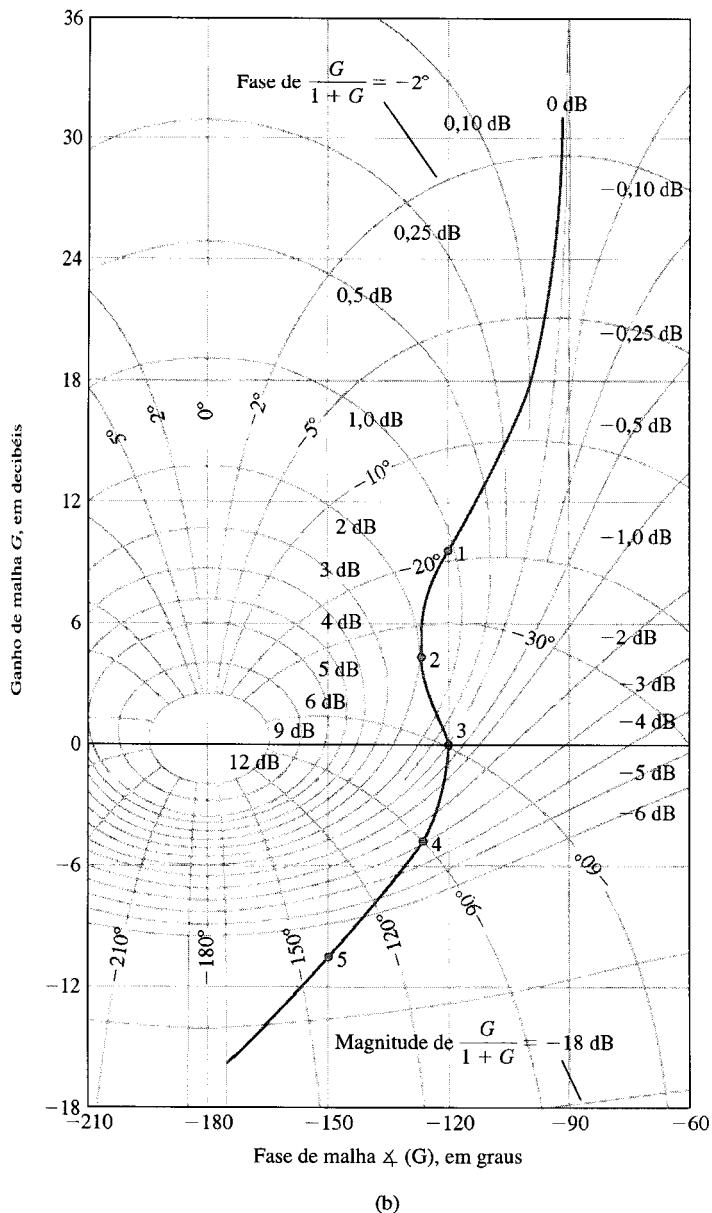
xos de amortecimento [15]. Um sistema de controle com retroação para um braço flexível está mostrado na Fig. PP9.2. Selecionar  $K$  de modo que o sistema possua margem de fase máxima. Prever a ultrapassagem para uma entrada em degrau com base na margem de fase alcançada e compará-la com a ultrapassagem real para uma entrada em degrau. Determinar a banda passante do sistema a malha fechada. Prever o tempo de assentamento do sistema (critério dos 2%) para uma entrada em degrau e compará-lo com o tempo de assentamento real. Discutir a adequabilidade deste sistema de controle.

**PP9.3** Um sistema automático para ministrar a aplicação de medicamentos é usado na regulação de pacientes portadores de deficiência cardíaca, em tratamento crítico [25]. O objetivo é manter estável a condição do paciente dentro de limites estreitos. Considere-se o uso de um sistema de aplicação de remédio para a regulação da pressão sanguínea pela infusão de um remédio. O sistema de controle com retroação está mostrado na Fig. PP9.3. Escolher um valor apropriado para o ganho  $K$  que mantenha um pequeno desvio da pressão sanguínea paralelamente a uma boa resposta dinâmica.

**PP9.4** Um robô jogador de tênis está mostrado na Fig. PP9.4(a) e um sistema de controle simplificado para  $\theta_2(t)$  está mostrado na Fig. PP9.4(b). O objetivo do sistema de controle é obter a melhor

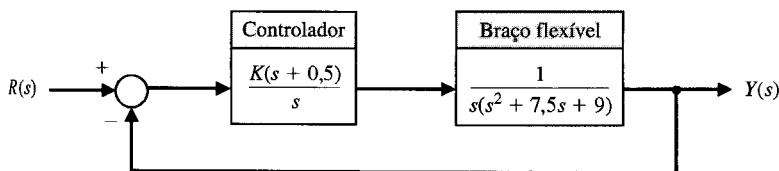


(a)



(b)

**Fig. PP9.1** (a) Robô móvel para limpeza de lixo tóxico. (b) Carta de Nichols.



**Fig. PP9.2** Controle do braço flexível de um robô.

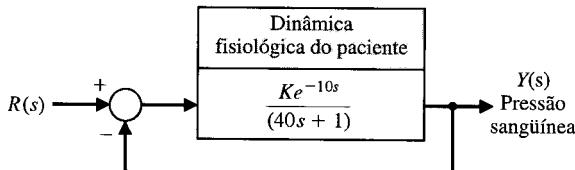
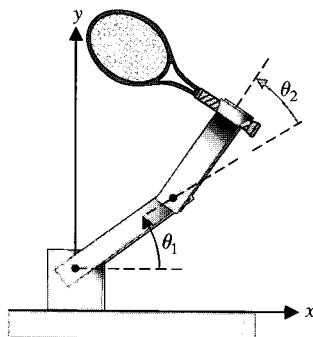


Fig. PP9.3 Aplicação automática de medicamento.

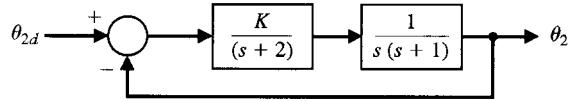
resposta ao degrau e ao mesmo tempo alcançar um valor elevado de  $K_v$  para o sistema. Escolher  $K_{v_1} = 0,325$  e  $K_{v_2} = 0,45$  e determinar a margem de fase, a margem de ganho e a banda passante a malha fechada para cada caso. Estimar a resposta ao degrau para cada caso e selecionar o melhor valor de  $K$ .

**PP9.5** Um atuador eletro-hidráulico é utilizado para acionar grandes cargas em um manipulador robótico, como está mostrado na Fig. PP9.5 [17]. O sistema é submetido a uma entrada em degrau e se deseja que o erro estacionário seja minimizado. Contudo, deseja-se manter uma ultrapassagem menor que 10%. Fazer  $T = 0,8$  s.

(a) Selecionar o ganho  $K$  quando  $G_c(s) = K$  e determinar os valores resultantes de ultrapassagem, tempo de assentamento (critério dos 2%) e erro estacionário. (b) Repetir a parte (a) quando  $G_c(s) = K_1 + K_2/s$ , escolhendo  $K_1$  e  $K_2$ . Esboçar a carta de Nichols para os valores selecionados de ganho  $K_1$  e  $K_2$ .



(a)



(b)

Fig. PP9.4 (a) Robô jogador de tênis com dois elos articulados. (b) Sistema de controle simplificado.

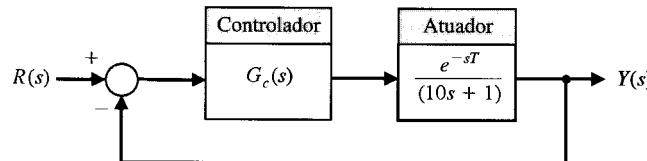


Fig. PP9.5 Atuador eletro-hidráulico.

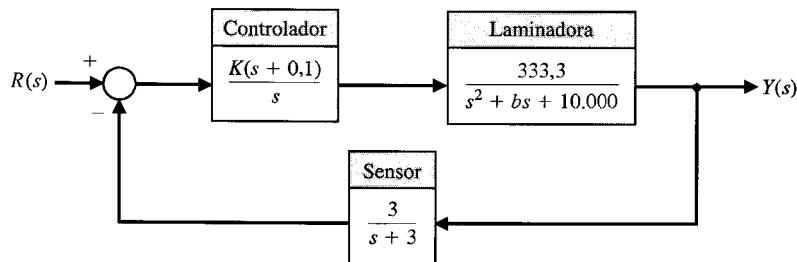


Fig. PP9.6 Laminadora de chapas de aço.

**PP9.6** A representação física de um laminador de chapa de aço é um sistema amortecedor-mola [8]. O sensor de espessura de saída está posicionado a uma distância insignificante do laminador e o objetivo é manter a espessura o mais próximo possível do valor de referência. Qualquer mudança na espessura da chapa de entrada é vista como uma perturbação. O sistema é de retroação não-unitária, como está mostrado na Fig. PP9.6. Dependendo da manutenção do laminador, o parâmetro varia de  $80 \leq b < 300$ .

Determinar a margem de fase e a margem de ganho para os dois valores extremos de  $b$  quando o valor normal do ganho for  $K = 170$ . Recomenda-se um valor reduzido para  $K$  de modo que a margem de fase seja superior a  $40^\circ$  e a margem de ganho seja maior que 8 dB para a faixa de valores de  $b$ .

**PP9.7** Os veículos para os trabalhos de construção e exploração lunares enfrentarão condições diferentes de quaisquer outras encontradas na Terra. Além do mais, serão controlados remotamente. Um diagrama de blocos de um desses veículos e o sistema de controle estão mostrados na Fig. PP9.7. Escolher um ganho  $K$  adequado quando  $T = 0,5$  s. O objetivo é obter uma resposta rápida ao degrau com uma ultrapassagem menor que 20%.

**PP9.8** O controle de uma laminadora de chapa de aço de alta velocidade constitui um problema desafiador. O objetivo é manter a espessura da chapa com um valor exato e facilmente ajustável. O modelo do sistema de controle está mostrado na Fig. PP9.8. Projetar um sistema de controle selecionando  $K$  de modo que a res-

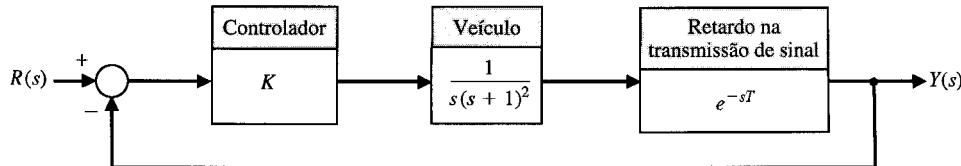


Fig. PP9.7 Controle de veículo lunar.

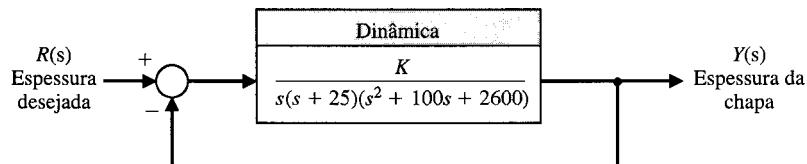


Fig. PP9.8 Controle de laminadora de chapas de aço.

posta do sistema a uma solicitação em degrau seja a mais rápida possível com uma ultrapassagem menor que 0,5% e um tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 4 s. Usar o lugar das raízes para selecionar  $K$  e calcular as raízes para o valor selecionado. Descrever a(s) raiz(es) dominante(s) do sistema.

**PP9.9** Um sistema de dois reservatórios contendo líquido aquecido é descrito pelo modelo mostrado na Fig. PP9.9(a), onde  $T_0$  é a temperatura do fluido que entra no primeiro reservatório e  $T_2$  é a temperatura do líquido que sai do segundo reservatório. O modelo em diagrama de blocos está mostrado na Fig. PP9.9(b). O sistema de dois reservatórios possui um aquecedor no reservatório 1 com uma entrada de calor controlado,  $Q$ . As constantes de tempo são  $\tau_1 = 10$  s e  $\tau_2 = 50$  s.

(a) Determinar  $T_2(s)$  em termos de  $T_0(s)$  e de  $T_{2d}(s)$ .

(b) Se  $T_{2d}(s)$ , a temperatura de saída desejada, for modificada instantaneamente de  $T_{2d}(s) = A/s$  para  $T_{2d}(s) = 2A/s$ , determinar a resposta transitória  $T_2(t)$  quando  $G_c(s) = K = 500$ . Admitir que

antes da mudança brusca de temperatura o sistema se encontra em estado estacionário.

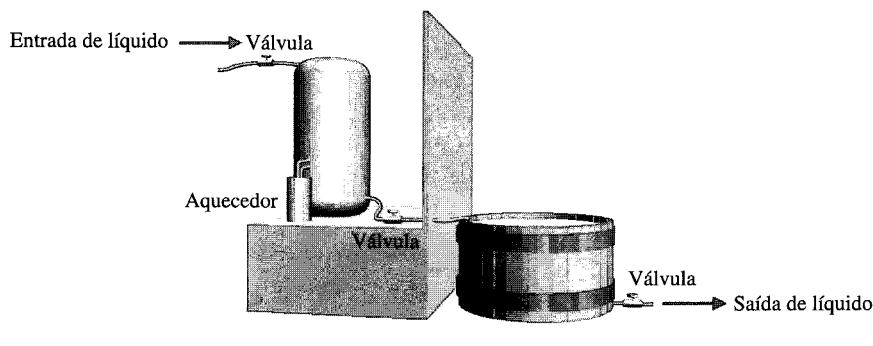
(c) Determinar o erro estacionário,  $e_{ss}$ , para o sistema da parte (b), onde  $E(s) = T_{2d}(s) - T_2(s)$ .

(d) Fazer  $G_c(s) = K/s$  e repetir as partes (b) e (c). Usar um valor de ganho  $K$  para o qual a ultrapassagem percentual seja inferior a 10%.

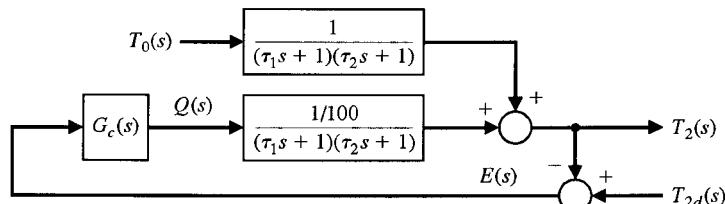
(e) Projetar um controlador que resultará em um sistema com tempo de assentamento (critério dos 2%)  $T_s < 150$  s e uma ultrapassagem percentual menor que 10% ao mesmo tempo em que se mantém um erro estacionário nulo quando

$$G_c(s) = \left( K_1 + \frac{K_2}{s} \right).$$

(f) Preparar uma tabela comparando ultrapassagem percentual, tempo de assentamento e erro estacionário dos projetos das partes de (a) a (e).



(a)



(b)

Fig. PP9.9 Controle de temperatura de dois reservatórios.

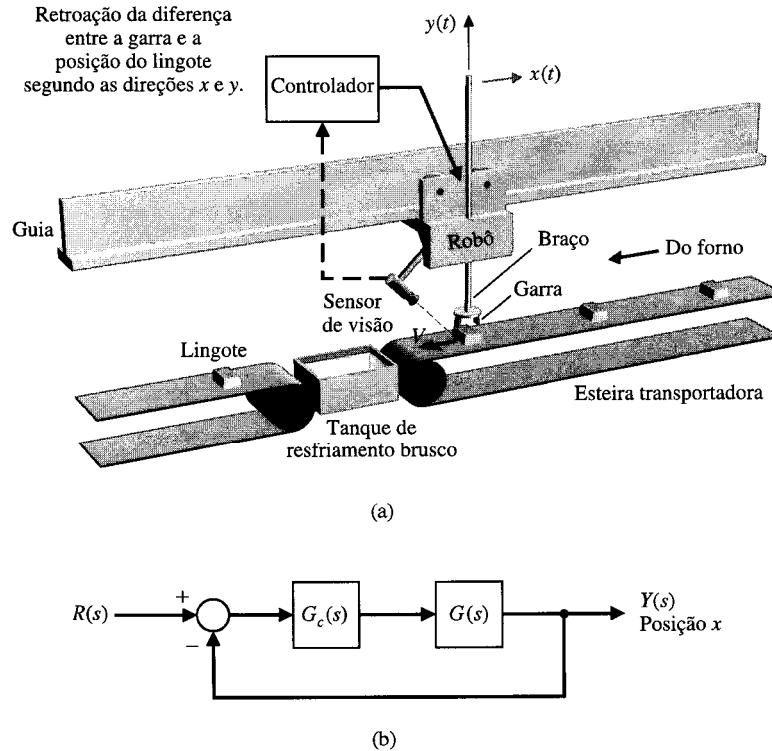


Fig. PP9.10 Controle de robô para lingote quente.

**PP9.10** Um controlador computadorizado de um robô que apanha lingotes quentes e os coloca em um tanque de resfriamento brusco está mostrado na Fig. PP9.10(a). O robô se posiciona sobre o lingote e então se move para baixo segundo o eixo  $y$ . O sistema de controle está mostrado na Fig. PP9.10(b), onde

$$G(s) = \frac{e^{-sT}}{(s + 1)^2},$$

e  $T = \pi/4$  s. Projetar um controlador que reduz o erro estacionário para uma entrada em degrau a 10% da magnitude do sinal de entrada e ao mesmo tempo mantém uma ultrapassagem inferior a 10% quando

$$G_c(s) = \left( K_1 + \frac{K_2}{s} \right)$$

### PROBLEMAS COM MATLAB

**PM9.1** Considere-se um sistema de controle com retroação unitária negativa com

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 4s + 10}$$

Usando o MATLAB, verificar que a margem de ganho é  $\infty$  e que a margem de fase é  $24^\circ$ .

**PM9.2** Usando a função nyquist, obter o gráfico polar das seguintes funções de transferência:

$$(a) G(s) = \frac{1}{s + 1};$$

$$(b) G(s) = \frac{15}{s^2 + 8s + 5};$$

$$(c) G(s) = \frac{10}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

**PM9.3** Usando as funções nichols, ngrid('new') e logspace, obter a carta de Nichols com uma grade para as seguintes funções de transferência, onde  $0,1 \leq \omega \leq 10$ :

$$(a) G(s) = \frac{1}{s + 0,1};$$

$$(b) G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1};$$

$$(c) G(s) = \frac{24}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

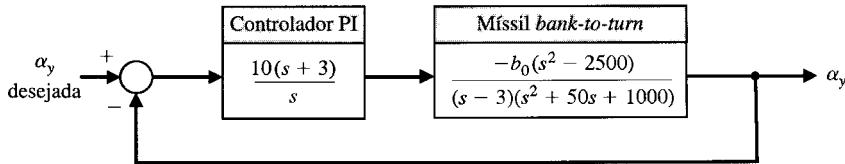
Determinar os valores aproximados de margem de ganho e margem de fase a partir das cartas de Nichols e rotular as cartas de acordo com estes valores.

**PM9.4** Um sistema de controle com retroação negativa possui

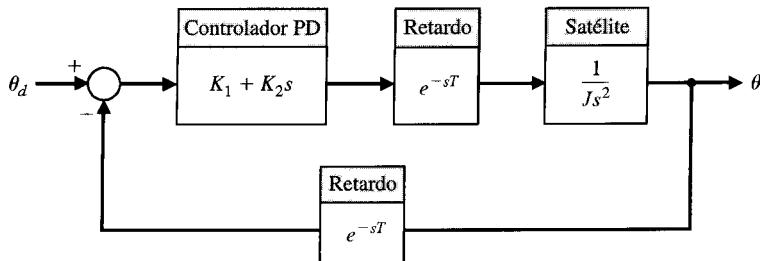
$$G(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{s + 1}.$$

(a) Determinar, usando a função margin, o valor de  $K$  de modo que a margem de fase seja  $45^\circ$ , quando  $T = 0,1s$ . (b) Obter um gráfico da margem de fase em função de  $T$ , para o valor de  $K$  da parte (a), com  $0 \leq T \leq 0,2s$ .

**PM9.5** Considere-se o controle da máquina de papel da Fig. PA9.4. Usando o MATLAB, obter um gráfico da banda passante a malha fechada à medida que  $K$  varia no intervalo  $1 \leq K \leq 50$ .



**Fig. PM9.6** Sistema de controle com retroação para o controle da aceleração de guinada de um míssil *bank-to-turn*.



**Fig. PM9.7** Diagrama de blocos de um satélite controlado a partir de uma estação terrena.

**PM9.6** O diagrama de blocos do sistema de controle da aceleração de guinada de um míssil do tipo *bank-to-turn*<sup>5</sup> está mostrado na Fig. PM9.6. A entrada é o comando de aceleração em guinada (em g) e a saída é a aceleração do míssil segundo o eixo de guinada (em g). O controlador é especificado para ser um controlador do tipo proporcional-integral (PI). O valor nominal de  $b_0$  é 0,5.

(a) Usando a função **margin**, calcular a margem de fase, a margem de ganho e a freqüência de cruzamento do sistema (0 dB), supondo constante o valor nominal de  $b_0$ . (b) Usando a margem de ganho da parte (a), determinar o valor máximo de  $b_0$  para que se tenha um sistema estável. Verificar a resposta com uma análise de Routh-Hurwitz da equação característica.

**PM9.7** Um laboratório de Engenharia apresentou um plano para operar um satélite em órbita da Terra que deve ser controlado a partir de uma estação terrena. O diagrama de blocos do sistema pro-

posto está mostrado na Fig. PM9.7. São consumidos  $T$  segundos para que um sinal emitido a partir da estação terrena alcance a espaçonave e há um retardo idêntico para o sinal de retorno. O controlador proposto baseado em terra é do tipo proporcional-derivativo (PD), em que

$$G_c(s) = K_1 + K_2s.$$

(a) Admitir que não haja retardo de transmissão (isto é,  $T = 0$ ) e projetar um controlador com as seguintes especificações: (1) ultrapassagem do sinal de saída menor que 20% para uma entrada em degrau e (2) tempo de pico menor que 30 segundos.

(b) Calcular a margem de fase com o controlador na malha considerando, porém, retardo de transmissão igual a zero. Estimar, a partir do cálculo de margem de fase, qual o retardo admissível para que o sistema seja estável.

(c) Usando uma aproximação de Padé de segunda ordem para o retardo, determinar o valor máximo de retardo,  $T_{\max}$  para estabilidade do sistema através de um script em MATLAB. Este script, deve empregar a função **pade** e calcular os pólos do sistema a malha fechada como uma função do retardo  $T$ . Comparar a resposta com a obtida na parte (b).

<sup>5</sup>A expressão *bank-to-turn* diz respeito ao movimento de inclinar lateralmente o míssil em torno do seu eixo longitudinal ao descrever uma curva. (N. do T.)

## TERMOS E CONCEITOS

**Carta de Nichols** Uma carta exibindo as curvas da relação entre a resposta de freqüência a malha aberta e a resposta de freqüência a malha fechada.

**Critério de estabilidade de Nyquist** Um sistema com retroação é estável se e somente se o contorno no plano  $G(s)$  não circunscrever o ponto  $(-1, 0)$  quando o número de pólos de  $G(s)$  no semiplano  $s$  da direita for igual a zero. Se  $G(s)$  possuir  $P$  pólos no semiplano  $s$  da direita, então o número de circunscrições do ponto  $(-1, 0)$ , no sentido anti-horário, deve ser igual a  $P$  para que o sistema seja estável.

**Mapeamento conforme** Um mapeamento de contorno que preserva os ângulos do plano  $s$  no plano  $F(s)$ .

**Mapeamento de contorno** Um contorno ou trajetória em um plano é mapeado(a) em outro plano pela relação  $F(s)$ .

**Margem de fase** O quanto de deslocamento de fase de  $GH(j\omega)$  com magnitude unitária resultará em um sistema marginalmente es-

tável com interseção do ponto  $-1 + j0$  pelo diagrama de Nyquist.

**Margem de ganho** O aumento no ganho do sistema quando a fase é  $-180^\circ$  que resultará em um sistema marginalmente estável com a interseção do ponto  $-1 + j0$  pelo diagrama de Nyquist.

**Princípio do argumento** Ver Teorema de Cauchy.

**Resposta de freqüência a malha fechada** A resposta de freqüência da função de transferência a malha fechada  $T(j\omega)$ .

**Retardo** Um retardo puro de tempo,  $T$ , de modo que os eventos que ocorrem em um ponto do sistema no instante  $t$  ocorrem em um outro ponto do sistema em um instante posterior  $t + T$ .

**Teorema de Cauchy** Se um contorno no plano  $s$ , percorrido no sentido horário, circunscrever  $Z$  zeros e  $P$  pólos de  $F(s)$ , o contorno correspondente no plano  $F(s)$  circunscreverá a origem do plano  $F(s)$   $N = Z - P$  vezes no sentido horário.

# *O Projeto de Sistemas de Controle com Retroação*

- 10.1 Introdução
- 10.2 Abordagens ao Projeto de Sistemas
- 10.3 Estruturas de Compensação em Cascata
- 10.4 Projeto de Avanço de Fase Usando Diagramas de Bode
- 10.5 Projeto de Avanço de Fase Usando o Lugar das Raízes
- 10.6 Projeto de Sistemas Usando Estruturas de Integração
- 10.7 Projeto de Atraso de Fase Usando o Lugar das Raízes
- 10.8 Projeto de Atraso de Fase Usando Diagramas de Bode
- 10.9 Projeto de Sistemas com Diagramas de Bode Usando Métodos Analíticos e Computacionais
- 10.10 Sistemas com Filtragem Prévia
- 10.11 Projeto para Resposta Rápida sem Oscilação
- 10.12 Exemplo de Projeto: Sistema de Controle de Enrolamento de Rotores
- 10.13 Exemplo de Projeto: Plotadora X-Y
- 10.14 Projeto de Sistemas Usando MATLAB
- 10.15 Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco
- 10.16 Sumário

## **APRESENTAÇÃO**

Neste capítulo é tratada a questão central do projeto de compensadores. Usando os métodos dos capítulos anteriores, são desenvolvidas diversas técnicas de projeto no domínio de freqüência que permitem alcançar o desempenho desejado do sistema. Os potentes controladores de avanço e atraso de fase são apresentados e utilizados em diversos exemplos de projeto. São apresentadas as abordagens de projetar controle de avanço de fase e de atraso de fase com o gráfico do lugar das raízes e com os diagramas de Bode. O controlador proporcional e integral (PI) é revisitado no contexto de se obter exatidão elevada de acompanhamento. O projeto de sistemas de controle usando o método de variáveis de estado é considerado no Cap. 11. O capítulo se encerra com o projeto de um controlador proporcional e derivativo (PD) com filtragem prévia para o Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco.

### **10.1 INTRODUÇÃO**

O desempenho de um sistema de controle é de fundamental importância. Este assunto foi discutido detalhadamente no Cap. 5 e foram desenvolvidas medidas quantitativas de desempenho. Aprendeu-se que um sistema de controle adequado deve ser estável, capaz de produzir respostas aceitáveis aos comandos de entrada, ser pouco sensível a variações de parâmetros do sistema, apresentar erros estacionários mínimos para os comandos de entrada e, finalmente, ser capaz de reduzir o efeito de perturbações indesejáveis. Um sistema de controle com retroação que propicie um desempenho ótimo sem necessidade de quaisquer ajustes é, na realidade, um caso raro. Comumente, quando não é possível obter todas as especificações desejadas, torna-se necessário estabelecer um compromisso

entre as diversas especificações requeridas e conflitantes e proceder ao ajuste dos parâmetros do sistema de modo a alcançar um desempenho aceitável.

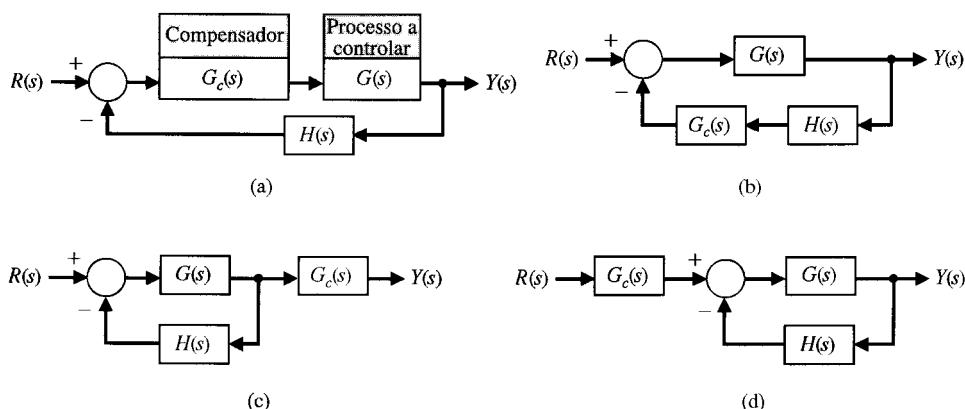
Em diversos pontos dos capítulos anteriores, foi considerada a questão de projeto e ajuste de parâmetros no sentido de se obter uma resposta e um desempenho desejados. No Cap. 5, foram definidas e determinadas diversas medidas de desempenho adequadas. Em seguida, no Cap. 6, estabeleceu-se um método para investigar a estabilidade de um sistema de controle, uma vez admitido como inaceitável um sistema que não seja estável. No Cap. 7, foi utilizado o método do lugar das raízes para projetar uma balança com ajuste automático de escala (Seção 7.4), e, em seguida, exemplificou-se o projeto de parâmetros utilizando o método do lugar das raízes (Seção 7.5). Adicionalmente, nos Caps. 8 e 9, foram desenvolvidas medidas de desempenho adequadas em termos da variável freqüencial  $\omega$ , que foram utilizadas para projetar diversos sistemas de controle. Foram considerados, assim, os problemas de projetar sistemas de controle com retroação como uma parte integrante dos assuntos dos capítulos anteriores. O objetivo agora é estudar um pouco mais a matéria e dar atenção a diversos métodos significativos de projeto e de compensação.

Os capítulos anteriores mostraram que é quase sempre possível ajustar os parâmetros do sistema no sentido de se obter uma resposta desejada. Contudo, muitas vezes se percebe que não é suficiente ajustar um parâmetro do sistema e assim obter o desempenho desejado. Em vez disto, torna-se necessário reconsiderar a estrutura do sistema e reprojetá-lo a fim de que seja obtido o sistema adequado. Isto é, deve-se examinar o arranjo ou a implementação do sistema e obter um novo projeto ou uma nova realização que sejam adequados. Assim, o projeto de um sistema de controle trata da concepção e da realização da estrutura do sistema e da seleção de componentes e de parâmetros adequados. Por exemplo, ao se desejar que um conjunto de medidas de desempenho possua valores inferiores aos especificados, ocorrem muitas vezes requisitos conflitantes. Assim, ao se desejar que um sistema tenha uma ultrapassagem percentual menor que 20% e apresente  $\omega_n T_p = 3,3$ , ocorre um requisito conflitante com a relação de amortecimento do sistema,  $\zeta$ , como pode ser visto examinando-se de novo a Fig. 5.8. Assim, se não for possível abrandar estes dois requisitos de desempenho, deve-se alterar, de algum modo, a estrutura do sistema. A alteração ou o ajuste de um sistema de controle com a finalidade de obter um desempenho adequado é chamada de **compensação**; isto é, a compensação é o ajuste de um sistema com a finalidade de corrigir deficiências ou inadequações.

Ao se reprojetar um sistema de controle de modo a alterar a resposta, insere-se um componente adicional na estrutura do sistema com retroação. É este componente ou dispositivo adicional que equaliza ou compensa a deficiência de desempenho. O dispositivo de compensação pode ser elétrico, mecânico, hidráulico, pneumático ou algum outro tipo de dispositivo ou estrutura e é freqüentemente chamado de **compensador**. Os circuitos elétricos servem comumente como compensadores em muitos sistemas de controle.

**Um compensador é um componente ou circuito adicional que é inserido em um sistema de controle para compensar uma deficiência de desempenho.**

A função de transferência de um compensador é designada por  $G_c(s) = E_s(s)/E_{ent}(s)$  e o compensador pode ser posicionado em um local adequado na estrutura do sistema. Na Fig. 10.1 estão mostrados diversos tipos de compensação para um sistema de controle com retroação simples, monomalha. O compensador colocado no percurso direto de ação à frente é chamado de compensador em **cascata** ou compensador série (Fig. 10.1a). De modo semelhante, os outros esquemas de compensação são chamados de compensação na retroação, na saída (ou na carga) e na entrada, como mostram, respectivamente, as Figs. 10.1(b), (c) e (d). A escolha do esquema de compensação depende de uma consi-



**Fig. 10.1** Tipos de compensação. (a) Compensação em cascata. (b) Compensação em retroação. (c) Compensação na saída, ou carga. (d) Compensação na entrada.

deração das especificações, dos níveis de potência nos diversos nós de sinal do sistema e das estruturas disponíveis para uso. Usualmente, a saída  $Y(s)$  é uma saída direta do processo  $G(s)$  e a compensação de saída da Fig. 10.1(c) não é fisicamente realizável. Não podem ser consideradas, neste capítulo, todas as possibilidades; o leitor deve ir aos Caps. 11 e 12 em seguida ao material introdutório deste capítulo.

## 10.2 ABORDAGENS AO PROJETO DE SISTEMAS

O desempenho de um sistema de controle pode ser descrito em termos de medidas de desempenho no domínio do tempo ou de medidas de desempenho no domínio de freqüência. O desempenho de um sistema pode ser especificado requerendo-se um certo tempo de pico,  $T_p$ , um valor máximo de ultrapassagem e um tempo de assentamento para uma entrada em degrau. Além disto, é necessário, usualmente, especificar o valor máximo admissível do erro estacionário para diversas entradas de sinais de teste e entradas de perturbações. Estas especificações de desempenho podem ser definidas em termos da localização desejada para os pólos e zeros da função de transferência a malha fechada,  $T(s)$ . Assim, pode ser especificada a localização, no plano  $s$ , dos pólos e zeros de  $T(s)$ . Como foi tratado no Cap. 7, o lugar das raízes do sistema a malha fechada pode ser obtido diretamente em função da variação de um dos parâmetros do sistema. Contudo, quando o lugar das raízes não resulta em uma configuração adequada, deve-se adicionar uma estrutura de compensação (Fig. 10.1) para alterar o lugar das raízes em função da variação de um parâmetro. Por conseguinte, pode-se usar o método do lugar das raízes e determinar a função de transferência da estrutura adequada de modo que o lugar das raízes resultante conduza à configuração desejada de raízes a malha fechada.

Alternativamente, pode-se descrever o desempenho de um sistema de controle com retroação em termos de medidas de desempenho no domínio de freqüência. Assim, um sistema pode ser descrito em termos do valor de pico da resposta de freqüência a malha fechada,  $M_{p_0}$ , da freqüência de ressonância,  $\omega_r$ , da banda passante e da margem de fase do sistema. Pode-se acrescentar uma estrutura de compensação adequada, se necessário, a fim de satisfazer as especificações do sistema. O projeto da estrutura  $\tilde{G}_c(s)$  é desenvolvido em termos da resposta de freqüência retratada no plano polar, nos diagramas de Bode ou na carta de Nichols. Como uma função de transferência em cascata é facilmente levada em conta em um gráfico de Bode através da adição da resposta de freqüência da estrutura, prefere-se abordar os métodos de resposta de freqüência utilizando os diagramas de Bode.

Assim, o projeto de um sistema diz respeito à alteração da resposta de freqüência ou do lugar das raízes do sistema a fim de obter um desempenho adequado. Os métodos de resposta de freqüência tratam de alterar o sistema de modo que a resposta de freqüência do sistema compensado satisfaça as especificações. Deste modo, na abordagem da resposta de freqüência, as estruturas de compensação são usadas para modificar e reconfigurar a forma das características de sistema representadas nos diagramas de Bode e na carta de Nichols.

De outro modo, o projeto de um sistema de controle pode ser realizado no plano  $s$  através de métodos do lugar das raízes. No caso do plano  $s$ , o projetista deseja mudar e reconfigurar o lugar das raízes de modo que as raízes do sistema estejam localizadas na posição desejada do plano  $s$ .

Nos capítulos precedentes foram ilustradas algumas destas abordagens mencionadas anteriormente. No Exemplo 7.5, utilizou-se o método do lugar das raízes ao se considerar o projeto de uma estrutura de retroação a fim de obter um desempenho satisfatório. No Cap. 9, considerou-se a escolha de um valor de ganho de modo a obter uma margem de fase satisfatória e, em consequência, uma estabilidade relativa satisfatória.

Freqüentemente, na prática, o modo mais simples e melhor de aumentar o desempenho de um sistema de controle é alterar, se possível, o próprio processo a controlar. Isto é, se o projetista do sistema for capaz de especificar e alterar o projeto do processo que está representado pela função de transferência  $G(s)$ , então o desempenho do sistema pode ser melhorado imediatamente. Por exemplo, para melhorar o comportamento transitório de um controlador de um servomecanismo de posição é possível quase sempre escolher um motor melhor para o sistema. No caso de um sistema de controle de uma aeronave, o projetista deve ser capaz de alterar o projeto aerodinâmico da aeronave e em consequência melhorar as características transitórias de vôo. Desse modo o projetista de sistemas de controle deve ser capaz de reconhecer que uma alteração no processo pode resultar em um sistema melhorado. No entanto, freqüentemente o processo é inalterável ou foi modificado o máximo possível e ainda assim apresenta desempenho insatisfatório. Então a inclusão de estruturas de compensação se torna útil para melhorar o desempenho do sistema.

Nas seções seguintes, admite-se que o processo foi melhorado o máximo possível e que  $G(s)$  representando o processo é inalterável. Primeiramente será considerada a inclusão da chamada estrutura de avanço de fase e a descrição do projeto desta estrutura através das técnicas do lugar das raízes e da resposta de freqüência. Em seguida, usando as técnicas de lugar das raízes e da resposta de freqüência, será descrito o projeto de estruturas de compensação por integração a fim de obter um desempenho adequado para o sistema.

### 10.3 ESTRUTURAS DE COMPENSAÇÃO EM CASCATA

Nesta seção, será considerado o projeto de uma estrutura em cascata ou em retroação, conforme mostrado nas Figs. 10.1(a) e (b), respectivamente. A estrutura de compensação,  $G_c(s)$ , é inserida em cascata com o processo inalterável  $G(s)$  a fim de se obter uma função de transferência de malha  $G_c(s)G(s)H(s)$  apropriada. O compensador  $G_c(s)$  pode ser escolhido seja para alterar a forma do lugar das raízes, seja para modificar a resposta de freqüência. Em ambos os casos, pode-se escolher a estrutura como tendo a função de transferência

$$G_c(s) = \frac{K \prod_{i=1}^M (s + z_i)}{\prod_{j=1}^N (s + p_j)}. \quad (10.1)$$

O problema se reduz então à escolha acertada dos pólos e zeros do compensador. Para ilustrar as propriedades da estrutura de compensação, será considerado um compensador de primeira ordem. A abordagem de compensação desenvolvida com base em um compensador de primeira ordem pode ser estendida a compensadores de ordem elevada, por exemplo, inserindo vários compensadores de primeira ordem em cascata.

Um compensador,  $G_c(s)$ , é usado com um processo a controlar  $G(s)$  de modo que o ganho de malha total possa ser ajustado para satisfazer os requisitos de erro estacionário, e em seguida  $G_c(s)$  é usado para ajustar favoravelmente a dinâmica do sistema sem afetar o erro de estado estacionário.

Considere-se o compensador de primeira ordem com a função de transferência

$$G_c(s) = \frac{K(s + z)}{(s + p)}. \quad (10.2)$$

O problema de projeto se converte, então, em escolher  $z$ ,  $p$  e  $K$  a fim de se obter um desempenho apropriado. Quando  $|z| < |p|$ , a estrutura é chamada de **estrutura de avanço de fase** e possui a configuração de pólos e zeros no plano  $s$  mostrada na Fig. 10.2. Se o polo for insignificante, isto é,  $|p| \gg |z|$  e o zero ocorrer na origem do plano  $s$ , ter-se-á um derivador tal que

$$G_c(s) \approx \left(\frac{K}{p}\right)s. \quad (10.3)$$

Assim, uma estrutura de compensação com a forma da Eq. (10.2) é uma estrutura do tipo derivador. A estrutura derivadora da Eq. (10.3) possui a seguinte característica de freqüência:

$$G_c(j\omega) = j\left(\frac{K}{p}\right)\omega = \left(\frac{K}{p}\omega\right)e^{+j90^\circ} \quad (10.4)$$

e um ângulo de fase de  $+90^\circ$ . De modo semelhante, a resposta de freqüência da estrutura de derivação da Eq. (10.2) é

$$G_c(j\omega) = \frac{K(j\omega + z)}{(j\omega + p)} = \frac{(Kz/p)[j(\omega/z) + 1]}{[j(\omega/p) + 1]} = \frac{K_1(1 + j\omega\alpha\tau)}{(1 + j\omega\tau)}, \quad (10.5)$$

onde  $\tau = 1/p$ ,  $p = \alpha z$  e  $K_1 = K/\alpha$ . A resposta de freqüência desta estrutura de avanço de fase está mostrada na Fig. 10.3. O ângulo de fase da característica de freqüência é

$$\phi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \alpha\omega\tau - \operatorname{tg}^{-1} \omega\tau. \quad (10.6)$$

Como no eixo de freqüências o zero ocorre primeiro, obtém-se a característica de avanço de fase mostrada na Fig. 10.3. A inclinação da curva assintótica de magnitude é  $+20$  dB/década.

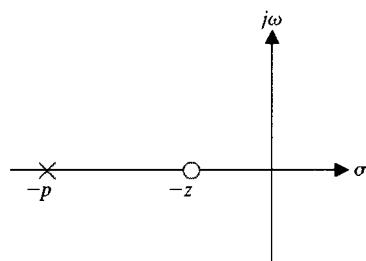
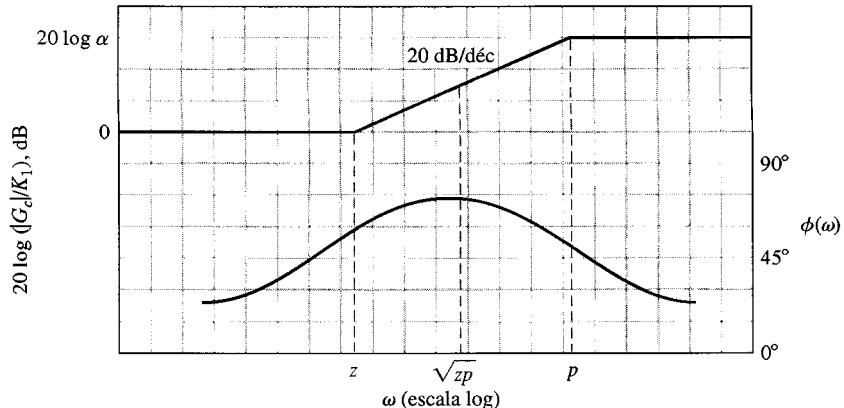


Fig. 10.2 Diagrama de polo e zero da estrutura de avanço de fase.



**Fig. 10.3** Diagramas de Bode da estrutura de avanço de fase.

A função de transferência da compensação por avanço de fase pode ser obtida com o circuito mostrado na Fig. 10.4. A função de transferência desta estrutura é

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R_2}{R_2 + \{R_1(1/Cs)/[R_1 + (1/Cs)]\}} \\ &= \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \frac{(R_1 Cs + 1)}{[(R_1 R_2 / (R_1 + R_2)) Cs + 1]}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Faz-se, então

$$\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2},$$

e se obtém a função de transferência da **compensação por avanço de fase**

$$G_c(s) = \frac{(1 + \alpha \tau s)}{\alpha(1 + \tau s)}, \quad (10.8)$$

que é igual à Eq. (10.5) quando é inserido um ganho  $K$  em cascata.

O valor máximo de avanço de fase ocorre na freqüência  $\omega_m$ , onde  $\omega_m$  é a média geométrica de  $p = 1/\tau$  e  $z = 1/\alpha\tau$ ; isto é, o valor máximo do avanço de fase ocorre a meio caminho entre as freqüências do pólo e do zero na escala logarítmica de freqüências. Portanto

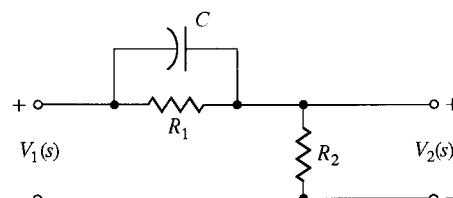
$$\omega_m = \sqrt{zp} = \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}}.$$

Para obter uma equação para o valor máximo do ângulo de avanço de fase, reescreve-se o ângulo de fase da Eq. (10.5) como

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\alpha \omega \tau - \omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2 \alpha}. \quad (10.9)$$

Substituindo-se então a freqüência para o valor máximo do ângulo de fase,  $\omega_m = 1/\tau \sqrt{\alpha}$ , tem-se

$$\operatorname{tg} \phi_m = \frac{(\alpha/\sqrt{\alpha}) - (1/\sqrt{\alpha})}{1 + 1} = \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}}. \quad (10.10)$$



**Fig. 10.4** Estrutura de avanço de fase.

Como  $\operatorname{tg} \phi_m$  é igual a  $(\alpha - 1)/2\sqrt{\alpha}$ , utiliza-se a relação de triângulos e se observa que

$$\operatorname{sen} \phi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}. \quad (10.11)$$

A Eq. (10.11) é muito útil para se calcular a relação  $\alpha$  necessária entre o pólo e o zero de um compensador a fim de se obter o valor máximo de avanço de fase que se deseja. Um gráfico de  $\phi_m$  versus  $\alpha$  está mostrado na Fig. 10.5. O ângulo de fase obtido diretamente desta estrutura não é muito superior a  $70^\circ$ . Além disso, como  $\alpha = (R_1 + R_2)/R_2$ , há limitações práticas sobre o valor máximo de  $\alpha$  que se deseja obter. Portanto, se for necessário um ângulo máximo maior que  $70^\circ$ , deverão ser utilizadas duas estruturas em cascata. A função de transferência da compensação equivalente seria  $G_{c_1}(s)G_{c_2}(s)$  se o efeito de carga de  $G_{c_2}(s)$  sobre  $G_{c_1}(s)$  puder ser desprezado.

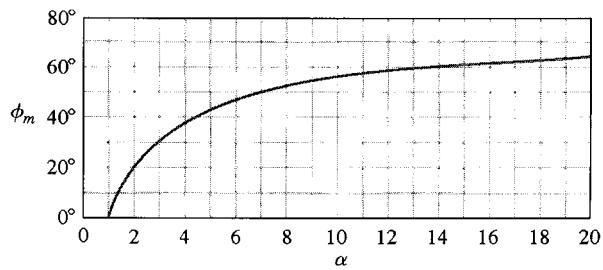


Fig. 10.5 Ângulo de fase máximo  $\phi_m$  versus  $\alpha$  para uma estrutura de avanço de fase.

Freqüentemente é útil adicionar uma estrutura de compensação em cascata para fornecer uma característica de atraso de fase. A estrutura de atraso de fase está mostrada na Fig. 10.6. A função de transferência da estrutura de atraso de fase é

$$G_c(s) = \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = \frac{R_2 + (1/Cs)}{R_1 + R_2 + (1/Cs)} = \frac{R_2 Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1}. \quad (10.12)$$

Quando  $\tau = R_2 C$  e  $\alpha = (R_1 + R_2)/R_2$ , tem-se a função de transferência da compensação por atraso de fase,

$$G_c(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} = \frac{1}{\alpha} \frac{(s + z)}{(s + p)}, \quad (10.13)$$

onde  $z = 1/\tau$  e  $p = 1/\alpha\tau$ . Neste caso, como  $\alpha > 1$ , o pólo se situa mais perto da origem do plano  $s$ , como está mostrado na Fig. 10.7. Este tipo de estrutura de compensação é freqüentemente chamado de estrutura integradora porque possui uma resposta de freqüência semelhante à de um integrador sobre uma faixa finita de freqüências. Os diagramas de Bode da estrutura de atraso de fase são obtidos a partir da função de transferência

$$G_c(j\omega) = \frac{1 + j\omega\tau}{1 + j\omega\alpha\tau} \quad (10.14)$$

e estão mostrados na Fig. 10.8. A forma dos diagramas de Bode da estrutura de atraso de fase é semelhante à da estrutura de avanço de fase; a diferença consiste na atenuação e no ângulo de atraso de fase em vez da amplificação e do ângulo de avanço de fase. Observe-se, no entanto, que as formas

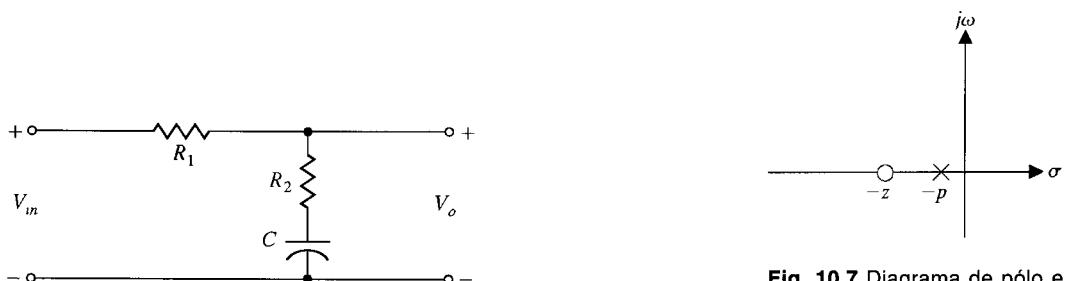
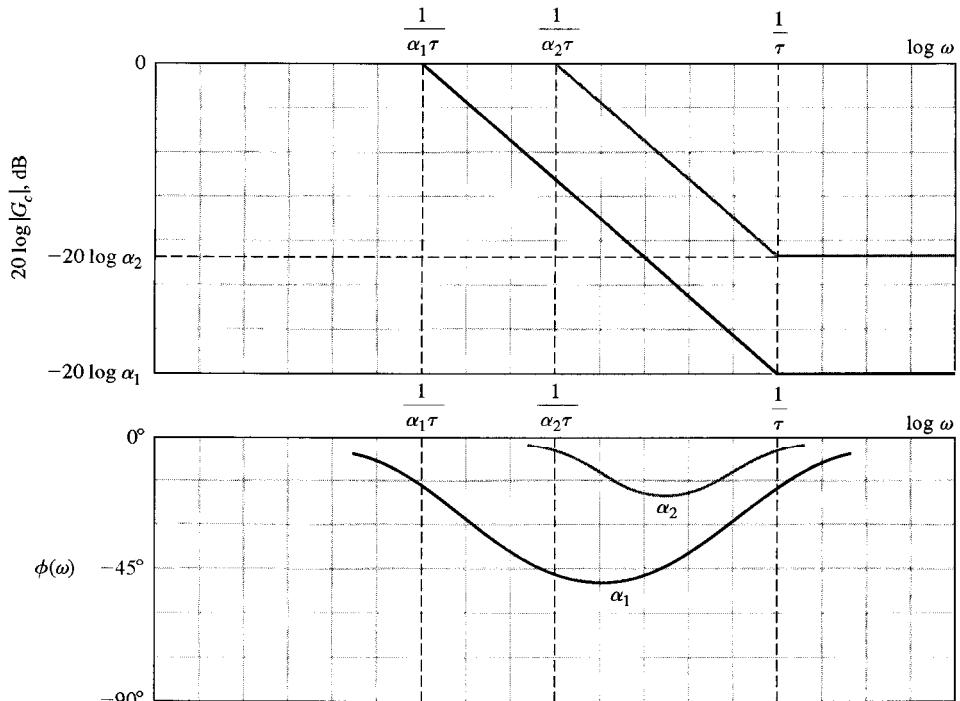


Fig. 10.6 Estrutura de atraso de fase.

Fig. 10.7 Diagrama de pólo e zero da estrutura de atraso de fase.



**Fig. 10.8** Diagramas de Bode da estrutura de atraso de fase.

dos diagramas da Fig. 10.3 e da Fig. 10.8 são semelhantes. Em consequência, pode ser mostrado que o valor máximo do atraso de fase ocorre na freqüência  $\omega_m = \sqrt{zp}$ .

Nas seções seguintes, deseja-se utilizar estas estruturas de compensação para obter uma resposta de freqüência ou uma configuração de raízes no plano  $s$  que se queira. A estrutura de avanço de fase é utilizada para fornecer um ângulo de avanço de fase e, em consequência, uma margem de fase satisfatória para o sistema. Alternativamente, o uso da estrutura de avanço de fase pode ser visualizada no plano  $s$  como um recurso capaz de reconfigurar o lugar das raízes e fornecer assim as localizações desejadas para as raízes. A estrutura de atraso de fase é utilizada não para fornecer um ângulo de atraso de fase, normalmente uma influência desestabilizadora, mas para fornecer uma atenuação e aumentar a constante de erro estacionário [3]. Estas abordagens de projeto utilizando as estruturas de avanço de fase e de atraso de fase serão discutidas nas seis seções a seguir.

## 10.4 PROJETO DE AVANÇO DE FASE USANDO DIAGRAMAS DE BODE

Os diagramas de Bode são usados preferencialmente, em relação a outros gráficos de resposta de freqüência, para projetar uma estrutura de avanço de fase. A resposta de freqüência da estrutura de compensação em cascata é adicionada à resposta de freqüência do sistema não compensado. Isto é, como a função de transferência de malha da Fig. 10.1(a) é  $G_c(j\omega)G(j\omega)H(j\omega)$ , primeiramente serão traçados os diagramas de Bode de  $G(j\omega)H(j\omega)$ . Em seguida é possível examinar o gráfico de  $G(j\omega)H(j\omega)$  e determinar uma localização adequada para  $p$  e  $z$  de  $G_c(j\omega)$  a fim de modificar satisfatoriamente a forma da resposta de freqüência. O lugar não compensado  $G(j\omega)$  é traçado com o valor desejado de ganho que permite alcançar um erro estacionário aceitável. Em seguida são examinados os valores da margem de fase e de  $M_{ph}$  para verificar se satisfazem as especificações. Se a margem de fase não for suficiente, pode-se adicionar um avanço de fase à curva do ângulo de fase do sistema colocando-se  $G_c(j\omega)$  em posição adequada. Para se obter um avanço de fase adicional máximo, deve-se colocar a estrutura de modo que a freqüência  $\omega_m$  fique situada na freqüência onde a magnitude da curva compensada cruzar o eixo de 0 dB. (Lembrar a definição de margem de fase.) O valor do avanço de fase necessário permite determinar o valor necessário de  $\alpha$  na Eq. (10.11) ou na Fig. 10.5. O zero relativo a  $\omega = 1/\alpha\tau$  é posicionado com base na observação de que o valor máximo de avanço de fase deve ocorrer na freqüência  $\omega_m = \sqrt{zp}$ , a meio caminho entre o pólo e o zero. Como a magnitude total do ganho da estrutura é  $20 \log \alpha$ , deseja-se um ganho de  $10 \log \alpha$  em  $\omega_m$ . Assim, a estrutura de compensação é determinada adotando-se os seguintes passos:

1. Calcular a margem de fase do sistema sem compensação para a qual as constantes de erro sejam satisfatórias.
2. Determinar o avanço de fase adicional necessário,  $\phi_m$ , acrescentando uma pequena folga por medida de segurança.

3. Calcular o valor de  $\alpha$  a partir da Eq. (10.11).
4. Calcular  $10 \log \alpha$  e determinar a freqüência em que a magnitude da curva sem compensação é igual a  $-10 \log \alpha$  dB. Como a estrutura de compensação oferece um ganho de  $10 \log \alpha$  em  $\omega_m$ , esta freqüência passa a ser, simultaneamente, a nova freqüência de cruzamento de 0 dB e  $\omega_m$ .
5. Calcular o pólo  $p = \omega_m \sqrt{\alpha}$  e o zero  $z = p/\alpha$ .
6. Desenhar a resposta de freqüência compensada, verificar a margem de fase resultante e repetir os passos anteriores, se necessário. Finalmente, para um projeto aceitável, aumentar o ganho do amplificador a fim de levar em conta a atenuação ( $1/\alpha$ ).

**EXEMPLO 10.1****Compensador por avanço de fase para um sistema do tipo dois**

Considere-se um sistema de controle com retroação monomalha como está mostrado na Fig. 10.1(a), em que

$$G(s) = \frac{K_1}{s^2} \quad (10.15)$$

e  $H(s) = 1$ . O sistema sem compensação é do tipo dois e de imediato parece possuir um erro estacionário satisfatório para os sinais de entrada em degrau e em rampa. No entanto, a resposta do sistema sem compensação é oscilatória sem amortecimento, uma vez que

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_1}{s^2 + K_1}. \quad (10.16)$$

Portanto, a estrutura de compensação será adicionada de modo que a função de transferência de malha seja  $G_c(s)G(s)H(s)$ . As especificações para o sistema são:

Tempo de assentamento,  $T_s \leq 4$  segundos;

Constante de amortecimento do sistema  $\zeta \geq 0,45$ .

O requisito de tempo de assentamento (critério dos 2%) é

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = 4,$$

e por conseguinte

$$\omega_n = \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{0,45} = 2,22.$$

Talvez o modo mais simples de verificar o valor de  $\omega_n$  na resposta de freqüência seja relacioná-lo à banda passante,  $\omega_B$ , e calcular a banda passante de  $-3$  dB do sistema a malha fechada. Para um sistema a malha fechada com  $\zeta = 0,45$ , estima-se, com base na Fig. 8.26, que  $\omega_B = 1,33\omega_n$ . Por conseguinte, é necessária uma banda passante a malha fechada de  $\omega_B = 1,33(2,22) = 3,00$ . A banda passante após a compensação pode ser verificada utilizando-se a carta de Nichols. No sistema sem compensação, a banda passante é  $\omega_B = 1,33\omega_n$  e  $\omega_n = \sqrt{k}$ . Por conseguinte, um ganho de malha igual a  $K = \omega_n^2 \approx 5$  deverá ser satisfatório. Com o objetivo de ter uma margem adequada para o tempo de assentamento, será escolhido  $K = 10$  para se desenhar os diagramas de Bode de

$$GH(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2}.$$

Os diagramas de Bode do sistema sem compensação estão mostrados em linha cheia na Fig. 10.9.

Usando-se a Eq. (9.58), a margem de fase do sistema deve ser de aproximadamente

$$\phi_{mf} = \frac{\zeta}{0,01} = \frac{0,45}{0,01} = 45^\circ. \quad (10.17)$$

A margem de fase do sistema sem compensação é de  $0^\circ$  porque a integração dupla resulta em um atraso de fase constante de  $180^\circ$ . Por conseguinte, deve ser adicionado um ângulo de avanço de fase de  $45^\circ$  na freqüência de cruzamento de (0 dB) da curva de magnitude compensada. Calculando-se o valor de  $\alpha$ , tem-se

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = \sin \phi_m = \sin 45^\circ, \quad (10.18)$$

e por conseguinte  $\alpha = 5,8$ . A fim de assegurar uma margem de segurança, será usado um valor de  $\alpha = 6$ . O valor de  $10 \log \alpha$  é então igual a 7,78 dB. Em consequência, a estrutura de avanço de fase acrescentará um ganho de 7,78 dB na freqüência  $\omega_m$ . Deseja-se ter  $\omega_m$  igual à inclinação compensada próxima do eixo de 0 dB (linha tracejada) de modo que a nova freqüência de cruzamento seja  $\omega_m$  e que, na freqüência de cruzamento, a curva de magnitude tracejada esteja 7,78 dB acima da curva sem compen-

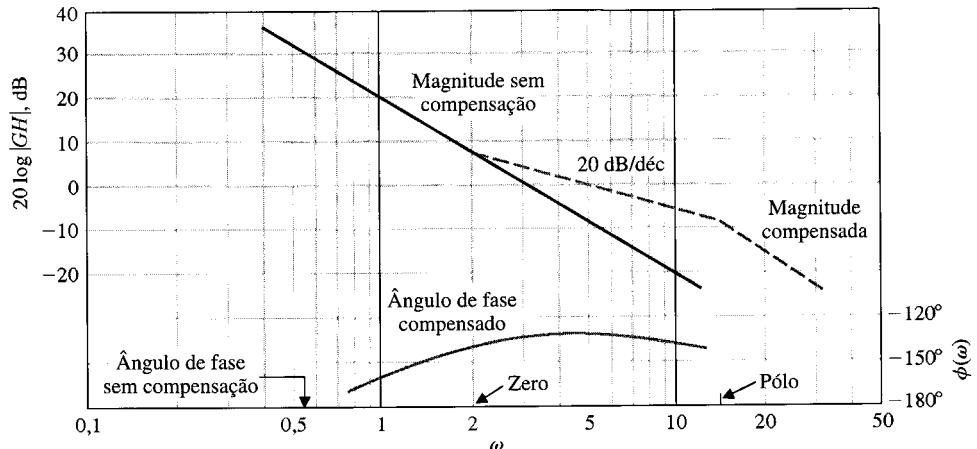


Fig. 10.9 Diagramas de Bode para o Exemplo 10.1.

sação. Deste modo, a freqüência de cruzamento compensada é localizada calculando-se a freqüência na qual a curva de magnitude sem compensação seja igual a  $-7,78$  dB, que, neste caso, é  $\omega = 4,95$ . Acrescenta-se, então, o ângulo máximo de avanço de fase em  $\omega = \omega_m = 4,95$ , como está mostrado na Fig. 10.9. Usando o passo 5, determinam-se o pólo  $p = \omega_m \sqrt{\alpha} = 12,0$  e o zero  $z = p/\alpha = 2,0$ .

A banda passante do sistema compensado pode ser obtida da carta de Nichols. Para se estimar a banda passante, pode-se simplesmente examinar a Fig. 9.26 e observar que a linha de  $-3$  dB para o sistema a malha fechada ocorre quando a magnitude de  $GH(j\omega)$  for igual a  $-6$  dB e o deslocamento de fase for de aproximadamente  $-140^\circ$ . Portanto, para estimar a banda passante a partir dos diagramas a malha aberta, o valor da banda passante será aproximado pelo valor da freqüência para a qual  $20 \times \log |GH|$  é igual a  $-6$  dB. Assim, a banda passante do sistema sem compensação é aproximadamente igual a  $\omega_B = 4,4$ , enquanto a banda passante do sistema compensado é igual a  $\omega_B = 8,4$ . A compensação por avanço de fase, neste caso, multiplica por dois a banda passante e a especificação de  $\omega_B > 3,00$  é atendida. Portanto, a compensação do sistema foi concluída e as especificações foram atendidas. A função de transferência global de malha compensada é

$$G_c(j\omega)G(j\omega)H(j\omega) = \frac{10[(j\omega/2,0) + 1]}{(j\omega)^2[(j\omega/12,0) + 1]}. \quad (10.19)$$

A função de transferência do compensador está

$$G_c(s) = \frac{(1 + \alpha\tau s)}{\alpha(1 + \tau s)} = \frac{1}{6} \frac{[1 + (s/2,0)]}{[1 + (s/12,0)]} \quad (10.20)$$

na forma da Eq. (10.8). Como resulta uma atenuação de  $1/6$  devida ao circuito passivo  $RC$ , o ganho do amplificador na malha deve ser aumentado para 6 de modo que o ganho estacionário total da malha permaneça igual a 10, como assinalado na Eq. (10.19). Ao se acrescentarem os diagramas de Bode da estrutura de compensação aos diagramas de Bode sem compensação, admite-se ser possível aumentar o ganho do amplificador de modo a levar em conta esta atenuação de  $1/\alpha$ . Os valores do pólo e do zero podem ser lidos na Fig. 10.9, observando-se que  $p = \alpha z$ .

A função de transferência de malha global é [lembre que  $H(s) = 1$ ]

$$GG_c(s) = \frac{10(1 + s/2)}{s^2(1 + s/12)} = \frac{60(s + 2)}{s^2(s + 12)}.$$

A função de transferência a malha fechada é

$$T(s) = \frac{60(s + 2)}{s^3 + 12s^2 + 60s + 120} = \frac{60(s + 2)}{(s^2 + 6s + 20)(s + 6)},$$

e os efeitos do zero em  $s = -2$  e do terceiro pólo em  $s = -6$  afetarão a resposta transitória. Traçando-se a resposta ao degrau, determina-se uma ultrapassagem de 34% e um tempo de assentamento de 1,4 segundo. ■

## EXEMPLO 10.2

### Compensador de avanço de fase para um sistema de segunda ordem

Um sistema de controle com retroação possui uma função de transferência de malha

$$GH(s) = \frac{K}{s(s + 2)}. \quad (10.21)$$

Deseja-se ter, para uma entrada em rampa, um erro estacionário de 5% da magnitude da rampa. É necessário, portanto, que

$$K_v = \frac{A}{e_{ss}} = \frac{A}{0.05A} = 20. \quad (10.22)$$

Além disto, deseja-se que a margem de fase do sistema seja no mínimo igual a  $45^\circ$ . O primeiro passo é traçar os diagramas de Bode da função de transferência sem compensação

$$GH(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega(0,5j\omega + 1)} = \frac{20}{j\omega(0,5j\omega + 1)} \quad (10.23)$$

como está mostrado na Fig. 10.10(a). A freqüência na qual a curva de magnitude cruza a linha de 0 dB é 6,2 rad/s, e a margem de fase nesta freqüência é determinada diretamente da equação da fase de  $GH(j\omega)$ , que é

$$\angle GH(j\omega) = \phi(\omega) = -90^\circ - \tan^{-1}(0,5\omega). \quad (10.24)$$

Na freqüência de cruzamento,  $\omega = \omega_c = 6,2$  rad/s, tem-se

$$\phi(\omega) = -162^\circ, \quad (10.25)$$

e, por conseguinte, a margem de fase é  $18^\circ$ . Usando a Eq. (10.24) para calcular a margem de fase é quase sempre mais fácil que desenhar a curva completa de ângulo de fase, que é mostrada na Fig. 10.10(a). Necessita-se, assim, adicionar uma estrutura de avanço de fase de modo que a margem de fase seja aumentada para  $45^\circ$  na nova freqüência de cruzamento de (0 dB). Como a freqüência de cruzamento da compensação é maior que a freqüência de cruzamento sem compensação, o atraso de fase do sistema sem compensação também é maior. Deve-se levar em conta, ao tentar obter o valor máximo de avanço de fase de  $45^\circ - 18^\circ = 27^\circ$ , mais um pequeno acréscimo (10%) de avanço de fase para considerar o atraso de fase adicional. Será projetada, assim, uma estrutura de compensação com um valor máximo de avanço de fase igual a  $27^\circ + 3^\circ = 30^\circ$ . Então, calculando-se o valor de  $\alpha$ , resulta

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = \sin 30^\circ = 0,5, \quad (10.26)$$

e portanto,  $\alpha = 3$ .

O valor máximo do avanço de fase ocorre em  $\omega_m$ , e esta freqüência será escolhida de modo que a nova freqüência de cruzamento e  $\omega_m$  coincidam. A magnitude da estrutura de avanço de fase em  $\omega_m$  é  $10 \log \alpha = 10 \log 3 = 4,8$  dB. A freqüência de cruzamento compensada é então calculada para a magnitude de  $GH(j\omega)$  de  $-4,8$  dB, e assim  $\omega_m = \omega_c = 8,4$ . Desenhando a reta de magnitude compensada de modo que seja interceptada a linha de 0 dB em  $\omega = \omega_c = 8,4$ , determinam-se  $z = 4,8$  e  $p = \alpha z = 14,4$ . Portanto, a estrutura de compensação é

$$G_c(s) = \frac{1}{3} \frac{(1 + s/4,8)}{(1 + s/14,4)}. \quad (10.27)$$

O ganho estacionário de malha global deve ser aumentado por um fator 3 a fim de levar em conta o fator  $1/\alpha = 1/3$ . Então, a função de transferência de malha compensada é

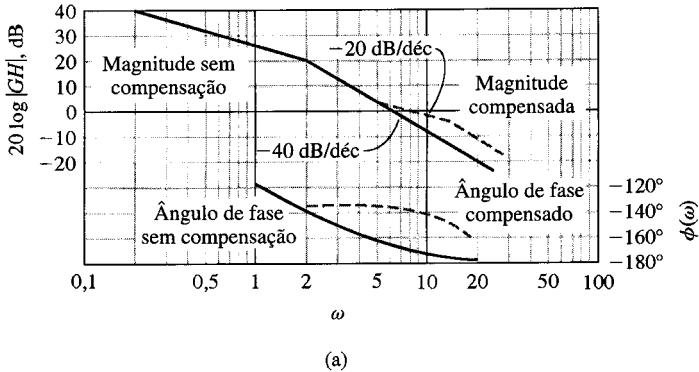
$$G_c(s)GH(s) = \frac{20[(s/4,8) + 1]}{s(0,5s + 1)[(s/14,4) + 1]}. \quad (10.28)$$

Para verificar a margem de fase final, pode-se calcular a fase de  $G_c(j\omega)GH(j\omega)$  em  $\omega = \omega_c = 8,4$  e assim obter a margem de fase. O ângulo de fase é, então,

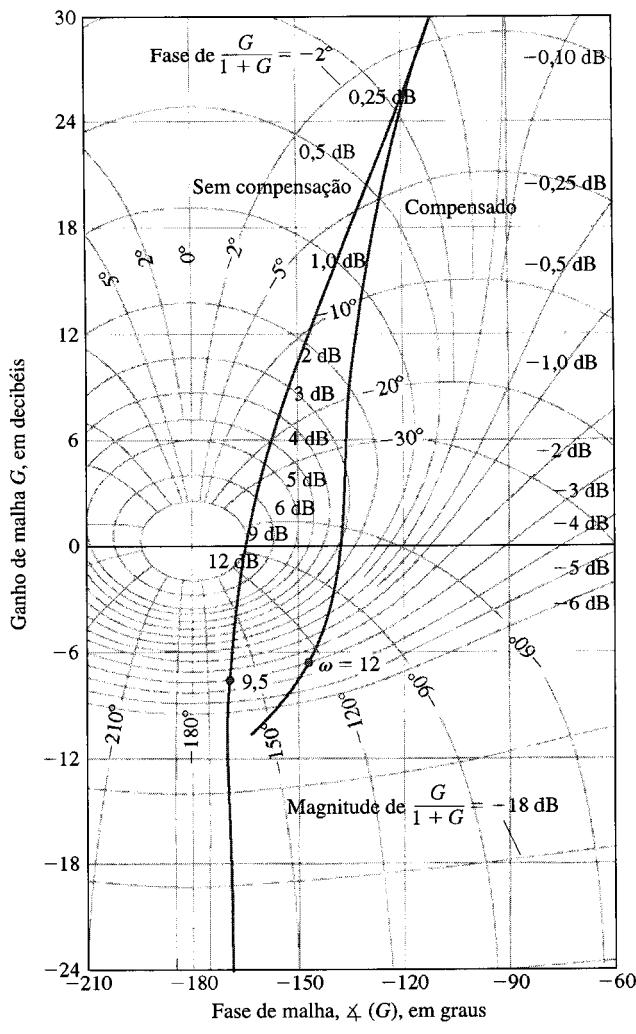
$$\begin{aligned} \phi(\omega_c) &= -90^\circ - \tan^{-1} 0,5\omega_c - \tan^{-1} \frac{\omega_c}{14,4} + \tan^{-1} \frac{\omega_c}{4,8} \\ &= -90^\circ - 76,5^\circ - 30,0^\circ + 60,2^\circ \\ &= -136,3^\circ. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Em consequência, a margem de fase do sistema compensado é  $43,7^\circ$ . Se for desejado ter exatamente uma margem de fase de  $45^\circ$ , deve-se repetir os passos com um valor maior de  $\alpha$  — por exemplo, com  $\alpha = 3,5$ . Neste caso, o atraso de fase aumentado de  $7^\circ$  entre  $\omega = 6,2$  e  $\omega = 8,4$ , e assim a tolerância de  $3^\circ$  no cálculo de  $\alpha$  não foi suficiente. A resposta ao degrau deste sistema levaria a uma ultrapassagem de 28% com um tempo de assentamento de 0,75 segundo.

Os diagramas de Nichols para o sistema com e sem compensação estão mostrados na Fig. 10.10(b). A mudança de forma da curva de resposta de freqüência fica evidente nestes diagramas. Percebe-se o aumento da margem de fase no sistema compensado bem como a redução de  $M_{p_\omega}$ , valor



(a)



**Fig. 10.10** (a) Diagramas de Bode para o Exemplo 10.2.  
(b) Diagrama de Nichols para o Exemplo 10.2.

máximo da magnitude da resposta de freqüência a malha fechada. Neste caso,  $M_{p_u}$  foi reduzido do valor de +12 dB no sistema sem compensação para o valor de aproximadamente +3,2 dB no sistema compensado. Além disso, observa-se que a banda passante de 3 dB a malha fechada do sistema compensado é de 12 rad/s em comparação com a banda passante de 9,5 rad/s do sistema sem compensação. ■

Considerando novamente os Exemplos 10.1 e 10.2, percebe-se que o projeto é satisfatório quando a curva assintótica de magnitude  $20 \log |GG_c|$  cruza a linha de 0 dB com uma inclinação de  $-20$  dB/década.

## 10.5 PROJETO DE AVANÇO DE FASE USANDO O LUGAR DAS RAÍZES

O projeto de uma estrutura de compensação por avanço de fase também pode ser realizado rapidamente usando-se o lugar das raízes. A estrutura de avanço de fase possui uma função de transferência

$$G_c(s) = \frac{[s + (1/\alpha\tau)]}{[s + (1/\tau)]} = \frac{(s + z)}{(s + p)}, \quad (10.30)$$

onde  $\alpha$  e  $\tau$  são definidos no caso da estrutura *RC* através da Eq. (10.7). As localizações do pólo e do zero são escolhidas de modo que o lugar das raízes do sistema compensado seja satisfatório. As especificações do sistema são utilizadas para especificar a localização desejada para as raízes dominantes do sistema. O método do lugar das raízes no plano  $s$  é o seguinte:

1. Listar as especificações do sistema e traduzi-las em localização de um conjunto de raízes dominantes.
2. Esboçar o lugar das raízes sem compensação e determinar se o posicionamento desejado das raízes pode ser efetuado com o sistema sem compensação.
3. Se for necessário o uso de um compensador, posicionar o zero da estrutura de avanço de fase diretamente abaixo da localização desejada das raízes (ou à esquerda dos dois primeiros pólos reais).
4. Determinar a localização do pólo de modo que o ângulo total na posição desejada seja  $180^\circ$  e, portanto, esteja sobre o lugar das raízes do sistema compensado.
5. Calcular o ganho global do sistema na localização desejada para a raiz e, em seguida, calcular a constante de erro.
6. Repetir os passos se a constante de erro não for satisfatória.

Portanto, primeiro se escolhe a posição das raízes que se deseja sejam dominantes de modo que satisfaçam as especificações em termos de  $\zeta$  e  $\omega_n$ , como mostrado na Fig. 10.11(a). O lugar das raízes do sistema sem compensação é esboçado como ilustra a Fig. 10.11(b). Em seguida, é acrescentado o zero para fornecer um avanço de fase colocando-o à esquerda dos dois primeiros pólos reais. É necessária uma certa cautela, porque o zero não deve alterar a dominância das raízes desejadas; isto é, o zero não deve ser colocado mais perto da origem que o segundo pólo sobre o eixo real, o que daria uma raiz real próxima da origem e dominaria a resposta do sistema. Assim, na Fig. 10.11(c), constata-se que a raiz desejada está diretamente acima do segundo pólo e que se coloca o zero  $z$  um pouco à esquerda do segundo pólo real.

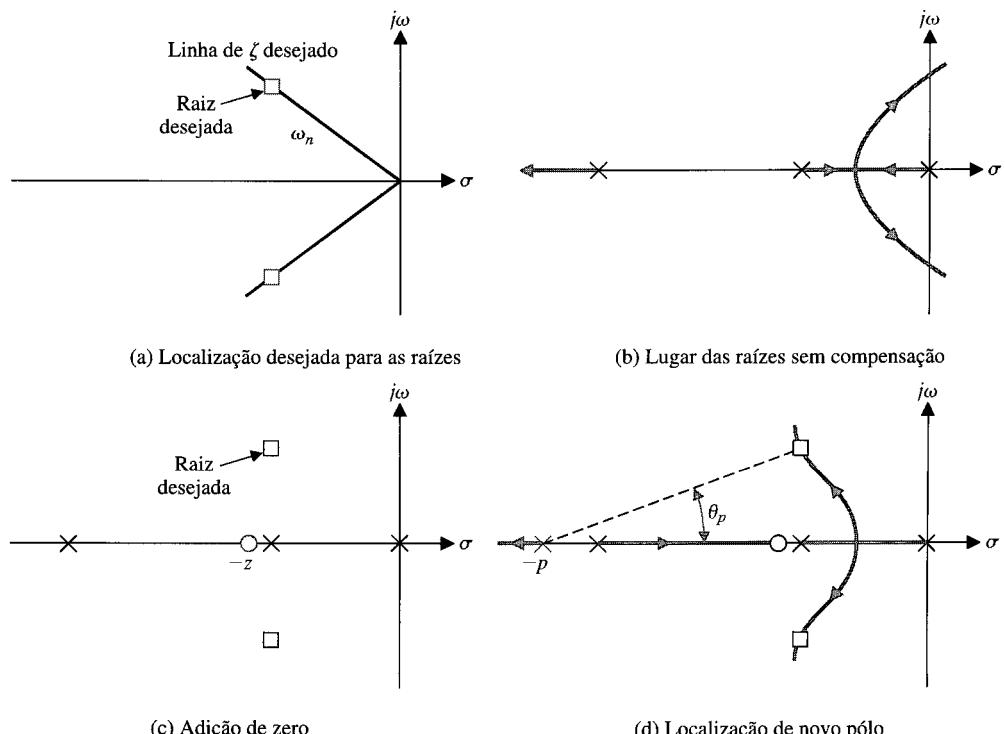


Fig. 10.11 Compensação no plano  $s$  usando uma estrutura de avanço de fase.

Conseqüentemente, a raiz real pode estar perto do zero real e o coeficiente deste termo na expansão em frações parciais pode ser relativamente pequeno. Assim, a resposta devida a esta raiz real poderá ter um efeito muito pequeno sobre a resposta total do sistema. Contudo, o projetista deve estar continuamente atento para o fato de que a resposta do sistema compensado será influenciada pelas raízes e zeros do sistema e de que as raízes dominantes não ditarão sozinhas a resposta do sistema. Usualmente convém tolerar uma certa margem de erro no projeto e testar o sistema compensado usando uma simulação em computador.

Como a raiz desejada é um ponto sobre o lugar das raízes quando for realizada a compensação final, espera-se que a soma algébrica dos ângulos dos vetores nesse ponto seja  $180^\circ$ . Em consequência, calcula-se o ângulo a partir do pólo do compensador,  $\theta_p$ , a fim de resultar um ângulo total de  $180^\circ$ . Assim, traçando uma reta que intercepte a raiz desejada e que faça com o eixo real um ângulo  $\theta_p$ , é possível calcular o pólo,  $p$ , do compensador, como está mostrado na Fig. 10.11(d).

A vantagem de se usar o método do lugar das raízes é a possibilidade de o projetista especificar a localização das raízes dominantes e, por conseguinte, a resposta transitória dominante. A desvantagem do método é que não se pode especificar diretamente as constantes de erro (por exemplo,  $K_v$ ), como na abordagem dos diagramas de Bode. Depois que o projeto estiver concluído, calcula-se o ganho do sistema correspondente à localização das raízes, o qual depende de  $p$  e de  $z$ , e em seguida calcula-se a constante de erro do sistema compensado. Se a constante de erro não for satisfatória, repetem-se os passos de projeto e se altera a localização das raízes desejadas bem como a localização do pólo e do zero do compensador. Serão reconsiderados os Exemplos 10.1 e 10.2 e o projeto de uma estrutura de compensação usando a abordagem do lugar das raízes (plano  $s$ ).

### EXEMPLO 10.3

#### Compensador por avanço de fase usando o lugar das raízes

Seja reconsiderar o sistema do Exemplo 10.1 em que a função de transferência a malha aberta do sistema sem compensação é

$$GH(s) = \frac{K_1}{s^2}. \quad (10.31)$$

A equação característica do sistema sem compensação é

$$1 + GH(s) = 1 + \frac{K_1}{s^2} = 0, \quad (10.32)$$

e o lugar das raízes é o eixo  $j\omega$ . Deseja-se, portanto, compensar este sistema com uma estrutura  $G_c(s)$  onde

$$G_c(s) = \frac{s + z}{s + p}, \quad (10.33)$$

e  $|z| < |p|$ . As especificações para este sistema são

Tempo de assentamento (critério dos 2%),  $T_s \leq 4$  segundos;

Ultrapassagem percentual para uma entrada em degrau  $\leq 35\%$ .

Por conseguinte, a relação de amortecimento deve ser  $\zeta \geq 0,32$ . O requisito de tempo de assentamento é

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = 4,$$

e, portanto,  $\zeta \omega_n = 1$ . Escolhem-se, assim, como raízes dominantes, as situadas em

$$r_1, \hat{r}_1 = -1 \pm j2, \quad (10.34)$$

como mostrado na Fig. 10.12 (assim,  $\zeta = 0,45$ ).

Agora o zero do compensador será posicionado diretamente abaixo de uma das raízes dominantes, em  $s = -z = -1$ , conforme mostrado na Fig. 10.12. Medindo-se o ângulo na raiz desejada, tem-se

$$\phi = -2(116^\circ) + 90^\circ = -142^\circ.$$

Portanto, para se obter um ângulo de  $180^\circ$  na raiz desejada, calcula-se o ângulo a partir do pólo indeterminado,  $\theta_p$ , como

$$-180^\circ = -142^\circ - \theta_p, \quad (10.35)$$

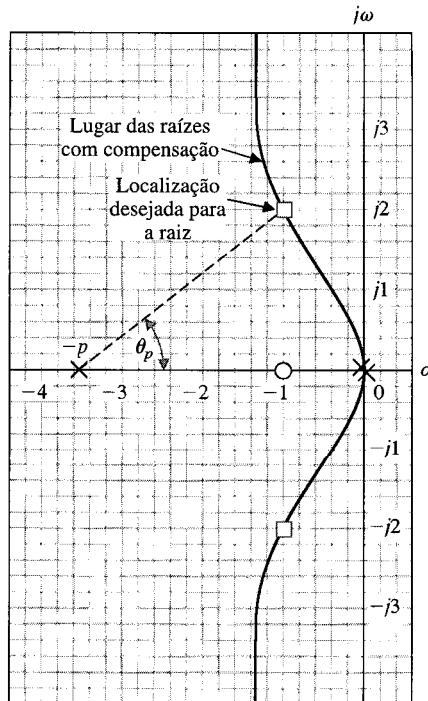


Fig. 10.12 Projeto de avanço de fase para o Exemplo 10.3.

ou  $\theta_p = 38^\circ$ . É traçada então uma linha com um ângulo  $\theta_p = 38^\circ$  que intercepta o eixo real, como mostrado na Fig. 10.12. O ponto de interseção com o eixo real é, então,  $s = -p = -3,6$ . Em consequência, o compensador é

$$G_c(s) = \frac{s + 1}{s + 3,6}, \quad (10.36)$$

e a função de transferência compensada para o sistema é

$$GH(s)G_c(s) = \frac{K_1(s + 1)}{s^2(s + 3,6)}. \quad (10.37)$$

O ganho  $K_1$  é calculado medindo-se os comprimentos dos vetores que unem os pólos e zeros ao ponto desejado. Assim,

$$K_1 = \frac{(2,23)^2(3,25)}{2} = 8,1. \quad (10.38)$$

Calculam-se, finalmente, as constantes de erro deste sistema. Percebe-se que este sistema com duas integrações a malha aberta resultará em erro estacionário nulo para sinais de entrada em degrau e em rampa. A constante de aceleração é

$$K_a = \frac{8,1}{3,6} = 2,25. \quad (10.39)$$

O desempenho deste sistema em estado estacionário é bastante satisfatório; portanto, a compensação está completa. Ao se comparar a estrutura de compensação calculada no plano  $s$  com a estrutura obtida usando-se a abordagem dos diagramas de Bode, constata-se que as magnitudes dos pólos e zeros são diferentes. Contudo, o sistema resultante terá o mesmo desempenho e não se deve dar atenção à diferença. Com efeito, a diferença surge do passo arbitrário de projeto (número 3), que posiciona o zero diretamente abaixo do local desejado para a raiz. Se o zero tivesse sido colocado em  $s = -2,0$ , seria constatado que o polo calculado pelo método do plano  $s$  seria aproximadamente igual ao polo calculado a partir da abordagem dos diagramas de Bode.

As especificações para a resposta transitória deste sistema foram originalmente expressas em termos de ultrapassagem e de tempo de assentamento do sistema. Estas especificações foram traduzidas, com base na aproximação por um sistema de segunda ordem, em valores equivalentes de  $\zeta$  e de  $\omega_n$  e, por conseguinte, em localização desejada de raízes. Contudo, as especificações originais serão satisfeitas somente se as raízes selecionadas forem dominantes. O zero do compensador e a raiz resultante da adição do polo do compensador produzirão um sistema de terceira ordem com um zero. A validade da aproximação deste sistema por um de segunda or-

dem sem zeros depende da validade da dominância presumida. Freqüentemente o projetista simulará o projeto final usando um computador digital e obterá a resposta transitória real do sistema. Neste caso, uma simulação em computador digital apresentou, para uma entrada em degrau, uma ultrapassagem de 46% e um tempo de assentamento, no interior de uma faixa de 2% em torno do valor final, de 3,8 segundos. Estes valores se comparam razoavelmente bem com os valores especificados de 35% e 4 segundos e justificam a utilização das especificações das raízes dominantes. A diferença na ultrapassagem em relação ao valor especificado corre por conta do zero, que não é insignificante. Assim, percebe-se novamente que a especificação de raízes dominantes é uma abordagem útil mas deve ser utilizada com cautela e compreensão. Uma segunda tentativa de obter um sistema compensado com uma ultrapassagem de 30% utilizaria um filtro prévio para eliminar o efeito do zero na função de transferência a malha fechada, como está descrito na Seção 10.10. ■

#### EXEMPLO 10.4

#### Compensador por avanço de fase para um sistema do tipo um

Seja agora reconsiderar o sistema do Exemplo 10.2 e projetar um compensador com base na abordagem do lugar das raízes. A função de transferência a malha aberta do sistema é

$$GH(s) = \frac{K}{s(s + 2)}. \quad (10.40)$$

Deseja-se que a relação de amortecimento das raízes dominantes do sistema seja  $\zeta = 0,45$  e que a constante de erro de velocidade seja igual a 20. Para satisfazer o requisito de constante de erro, o ganho do sistema sem compensação deve ser  $K = 40$ . Com  $K = 40$ , as raízes do sistema sem compensação são

$$s^2 + 2s + 40 = (s + 1 + j6,25)(s + 1 - j6,25). \quad (10.41)$$

A relação de amortecimento das raízes sem compensação é aproximadamente igual a 0,16; portanto, deve ser acrescentada uma estrutura de compensação. Para se obter um tempo de assentamento rápido, escolhe-se a parte real das raízes desejadas como  $\zeta\omega_n = 4$ , e, portanto  $T_s = 1$  segundo. Além disto, a freqüência natural destas raízes,  $\omega_n = 9$ , é razoavelmente grande; assim, a constante de velocidade deve ser razoavelmente grande. A localização das raízes desejadas está mostrada na Fig. 10.13(a) para  $\zeta\omega_n = 4$ ,  $\zeta = 0,45$  e  $\omega_n = 9$ .

O zero do compensador é posicionado em  $s = -z = -4$ , diretamente abaixo da localização da raiz desejada. Então, o ângulo na posição desejada para a raiz é

$$\phi = -116^\circ - 104^\circ + 90^\circ = -130^\circ. \quad (10.42)$$

Portanto, o ângulo a partir do polo indeterminado é obtido de

$$-180^\circ = -130^\circ - \theta_p,$$

e assim  $\theta_p = 50^\circ$ . Este ângulo é desenhado para interceptar a posição desejada para a raiz, e  $p$  é calculado como  $s = -p = -10,6$ , como mostrado na Fig. 10.13(a). O ganho do sistema compensado é, então,

$$K = \frac{9(8,25)(10,4)}{8} = 96,5. \quad (10.43)$$

O sistema compensado é

$$G_c(s)GH(s) = \frac{96,5(s + 4)}{s(s + 2)(s + 10,6)}. \quad (10.44)$$

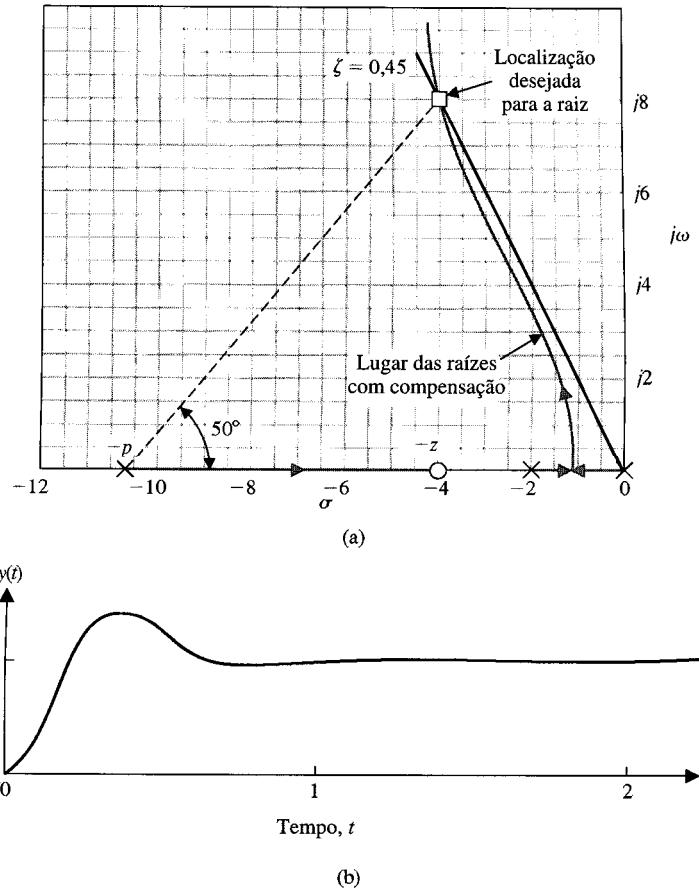
Por conseguinte, a constante de velocidade do sistema compensado é

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s[G(s)H(s)G_c(s)] = \frac{96,5(4)}{2(10,6)} = 18,2. \quad (10.45)$$

A constante de velocidade do sistema compensado é menor que o valor desejado de 20. Deve-se repetir, portanto, o procedimento de projeto para uma segunda escolha de raízes desejadas. Escolhendo-se  $\omega_n = 10$ , o processo pode ser repetido e o ganho  $K$  será aumentado. A localização do polo e do zero do compensador será também alterada. Em seguida, a constante de velocidade pode ser novamente calculada. É deixado ao leitor, como exercício, mostrar que para  $\omega_n = 10$ , a constante de velocidade é  $K_v = 22,7$  quando  $z = 4,5$  e  $p = 11,6$ .

Finalmente, para a estrutura de compensação da Eq. (10.44) tem-se

$$G_c(s) = \frac{s + 4}{s + 10,6} = \frac{(s + 1/\alpha\tau)}{(s + 1/\tau)}. \quad (10.46)$$



**Fig. 10.13** (a) Projeto de uma estrutura de avanço de fase no plano  $s$  para o Exemplo 10.4. (b) Resposta ao degrau do sistema compensado do Exemplo 10.4.

O projeto do circuito  $RC$  de avanço de fase para implementar  $G_c(s)$ , como mostrado na Fig. 10.4, resulta diretamente das Eqs. (10.46) e (10.7):

$$G_c(s) = \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \frac{(R_1 Cs + 1)}{(R_1 R_2 / (R_1 + R_2)) Cs + 1}. \quad (10.47)$$

Tem-se, assim, neste caso

$$\frac{1}{R_1 C} = 4 \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = \frac{10,6}{4}.$$

Escolhendo-se  $C = 1 \mu\text{F}$ , obtém-se  $R_1 = 250.000$  ohms e  $R_2 = 152.000$  ohms. A resposta ao degrau do sistema compensado conduz a uma ultrapassagem de 32% com um tempo de assentamento de 0,8 segundo, como mostrado na Fig. 10.13(b). Como foi dito aqui, pode-se usar um computador para verificar a resposta transitória real. ■

A estrutura de compensação por avanço de fase constitui um compensador útil para se alterar o desempenho de um sistema de controle. A estrutura de avanço de fase adiciona um ângulo de avanço de fase para dotar os sistemas com retroação de uma margem de fase adequada. Usando a abordagem de projeto no plano  $s$ , é possível escolher a estrutura de avanço de fase para alterar o lugar das raízes do sistema e colocar as raízes em uma posição desejada no plano  $s$ . Quando as especificações de projeto incluírem requisitos de constante de erro, o método dos diagramas de Bode é mais adequado, porque a constante de erro de um sistema projetado no plano  $s$  deve ser verificada após a escolha do polo e do zero do compensador. Em consequência, o método do lugar das raízes resulta, quase sempre, em um procedimento de projeto interativo quando a constante de erro é especificada. Por outro lado, o lugar das raízes se constitui uma abordagem muito satisfatória quando as especificações são dadas em termos de ultrapassagem e de tempo de assentamento, especificando assim os valores de  $\zeta$  e de  $\omega_n$  das raízes dominantes desejadas no plano  $s$ . O uso de um compensador com estrutura de avanço de fase sempre amplia a banda passante de um sistema com retroação, o que pode ser questionável para sistemas submetidos a grande quantidade de ruído. Além disto, as estruturas de avanço de fase não são adequadas para fornecer exatidão elevada em estado estacionário de sistemas que requerem

constantes de erro muito grandes. Para fornecer constantes de erro com valor elevado, tipicamente  $K_p$  e  $K_v$ , deve-se considerar o uso de estruturas de compensação do tipo integrador; este é o assunto da seção seguinte.

## 10.6 PROJETO DE SISTEMAS USANDO ESTRUTURAS DE INTEGRAÇÃO

Em uma grande percentagem dos sistemas de controle, o objetivo principal é obter uma elevada exatidão em estado estacionário. Um outro objetivo é manter o desempenho transitório destes sistemas dentro de limites razoáveis. Como foi discutido nos Caps. 4 e 5, a exatidão em estado estacionário de muitos dos sistemas de retroação pode ser aumentada elevando-se o ganho do amplificador no canal direto. Contudo, a resposta transitória resultante pode ser totalmente inaceitável, senão até mesmo instável. Portanto, é quase sempre necessário introduzir uma estrutura de compensação no percurso direto de um sistema de controle com o objetivo de dotá-lo de exatidão suficiente em estado estacionário.

Considere-se o sistema de controle mostrado na Fig. 10.14. A estrutura de compensação deve ser escolhida de modo a propiciar uma constante de erro com valor elevado. O erro de estado estacionário deste sistema é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{R(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)} \right]. \quad (10.48)$$

Determinou-se na Seção 5.7 que o erro de estado estacionário de um sistema depende do número de pólos na origem existentes em  $G_c(s)G(s)H(s)$ . Um polo na origem pode ser considerado como uma integração; por conseguinte, a exatidão em estado estacionário de um sistema depende, em essência, do número de integrações na função de transferência  $G_c(s)G(s)H(s)$ . Se a exatidão em estado estacionário não for suficiente, será introduzida uma **estrutura do tipo integração**  $G_c(s)$  com o objetivo de compensar a falta de integração da função de transferência original  $G(s)H(s)$ .

O **controlador proporcional e integral (PI)**, uma das formas largamente utilizadas, possui uma função de transferência

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s}. \quad (10.49)$$

Como exemplo, considere-se um sistema de controle de temperatura no qual a função de transferência  $H(s) = 1$  e a função de transferência do processo térmico seja

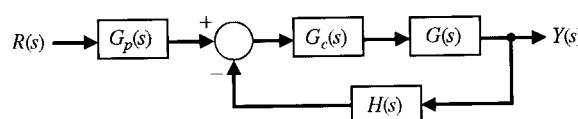
$$G(s) = \frac{K_1}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}.$$

O erro de estado estacionário do sistema sem compensação é, então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{A/s}{1 + G(s)H(s)} \right] = \frac{A}{1 + K_1}, \quad (10.50)$$

onde  $R(s) = A/s$ , um sinal de entrada em degrau. Para se obter um erro de estado estacionário pequeno (inferior a 0,05 A, por exemplo), a magnitude do ganho  $K_1$  deve ser bastante elevado. Contudo, quando  $K_1$  for muito grande, o desempenho transitório do sistema será certamente inaceitável. Portanto, deve ser considerada a inclusão de uma função de transferência  $G_c(s)$ , como mostrado na Fig. 10.14. Para eliminar o erro de estado estacionário deste sistema, deve-se escolher a compensação

$$G_c(s) = K_2 + \frac{K_3}{s} = \frac{K_2 s + K_3}{s}. \quad (10.51)$$



**Fig. 10.14** Sistema de controle monomialha com retroação.

Esta compensação PI pode ser construída facilmente usando-se um integrador e um amplificador e somando-se seus respectivos sinais de saída. O erro em estado estacionário para uma entrada em degrau é sempre zero, porque

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A/s}{1 + G_c(s)GH(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{1 + [(K_2s + K_3)/s]\{K_1/[(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)]\}} \\ &= 0.\end{aligned}\quad (10.52)$$

O desempenho transitório pode ser ajustado para satisfazer as especificações do sistema, ajustando-se as constantes  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$ . O ajuste da resposta transitória talvez seja mais bem realizado usando-se os métodos do lugar das raízes apresentados no Cap. 7. Desenha-se um lugar das raízes para o ganho  $K_2 K_1$  depois de posicionar o zero  $s = -K_3/K_2$  no plano  $s$ , de acordo com o método descrito na seção precedente.

O acréscimo de uma integração como  $G_c(s) = K_2 + (K_3/s)$  pode ser usado para reduzir o erro de estado estacionário para uma entrada em rampa,  $r(t) = t$ ,  $t \geq 0$ . Por exemplo, se o sistema sem compensação  $GH(s)$  possuísse uma integração, a integração adicional devida a  $G_c(s)$  produziria um erro de estado estacionário nulo para uma entrada em rampa. Para ilustrar o projeto deste tipo de compensador com integração, será considerado, mais detalhadamente, um sistema de controle de temperatura.

#### EXEMPLO 10.5

#### Sistema de controle de temperatura

A função de transferência de malha, sem compensação, de um sistema de controle de temperatura é

$$GH(s) = \frac{K_1}{(2s + 1)(0,5s + 1)}, \quad (10.53)$$

onde  $K_1$  pode ser ajustado. Para manter erro de estado estacionário nulo para uma entrada em degrau, será acrescentada a estrutura de compensação PI

$$G_c(s) = K_2 + \frac{K_3}{s} = K_2 \left( \frac{s + K_3/K_2}{s} \right). \quad (10.54)$$

Além disto, é necessário que a resposta transitória do sistema apresente uma ultrapassagem menor ou igual a 10%. Por conseguinte, as raízes complexas dominantes devem estar sobre (ou abaixo) da linha de  $\zeta = 0,6$ , como mostra a Fig. 10.15. O zero do compensador será ajustado de modo que a parte real das raízes complexas seja  $\zeta\omega_n = 0,75$  e assim o tempo de assentamento (critério dos 2%) seja  $T_s = 4/\zeta\omega_n = 16/3$  segundos. Agora, como na seção precedente, será determinada a localização do zero,  $z = -K_3/K_2$ , de modo a assegurar que o ângulo na raiz desejada seja  $-180^\circ$ . Por conseguinte, a soma dos ângulos na posição desejada para a raiz

$$-180^\circ = -127^\circ - 104^\circ - 38^\circ + \theta_z,$$

onde  $\theta_z$  é o ângulo do zero a ser determinado. Em consequência, obtém-se  $\theta_z = +89^\circ$ , e a localização do zero é  $z = -0,75$ . Finalmente, para se determinar o ganho na raiz desejada calculam-se os comprimentos dos vetores dos pólos e zeros e se obtém

$$K = K_1 K_2 = \frac{1,25(1,03)1,6}{1,0} = 2,08.$$

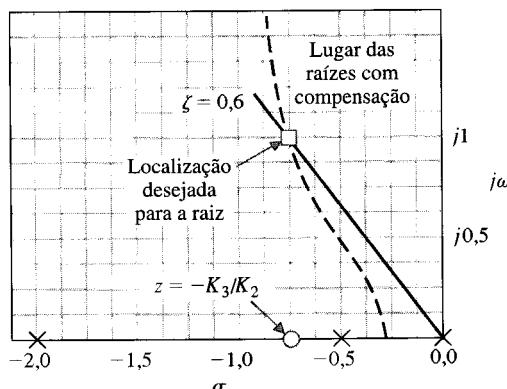


Fig. 10.15 Projeto de um compensador por integração, no plano  $s$ .

O lugar das raízes compensado e a localização do zero estão mostrados na Fig. 10.15. Deve-se observar que o zero,  $z = -K_3/K_2$ , deve ser colocado à esquerda do pólo em  $s = -0,5$  de modo a assegurar que as raízes complexas dominem a resposta transitória. Com efeito, a terceira raiz do sistema compensado da Fig. 10.15 pode ser determinada como  $s = -1,0$ ; por conseguinte, o valor desta raiz real é somente  $4/3$  do valor da parte real das raízes complexas. Embora as raízes complexas dominem a resposta do sistema, o amortecimento equivalente do sistema é um pouco inferior a  $\zeta = 0,60$  devido à raiz real e ao zero.

A função de transferência a malha fechada do sistema da Fig. 10.14 é

$$T(s) = \frac{G_p G_c G(s)}{1 + G_c G(s)} = \frac{2,08(s + 0,75)G_p(s)}{(s + 1)(s + r_1)(s + \hat{r}_1)}, \quad (10.55)$$

onde  $r_1 = -0,75 + j1$ . O efeito do zero é um aumento na ultrapassagem para uma entrada em degrau (ver Fig. 5.13). Se for necessário obter uma ultrapassagem de 5%, pode-se utilizar um pré-filtro  $G_p(s)$ , de modo a eliminar o zero de  $T(s)$ , fazendo

$$G_p(s) = \frac{0,75}{(s + 0,75)}. \quad (10.56)$$

Note-se que o ganho estático (fazer  $s = 0$ ) é  $T(0) = 1,0$  quando  $G_p(s) = 1$  ou quando se utiliza o pré-filtro da Eq. (10.56). A ultrapassagem sem o pré-filtro é 17,6% e com ele é de 2%. Uma discussão mais detalhada sobre o uso do pré-filtro é apresentada na Seção 10.10. ■

## 10.7 PROJETO DE ATRASO DE FASE USANDO O LUGAR DAS RAÍZES

O circuito  $RC$  de atraso de fase da Fig. 10.6 é uma estrutura do tipo integração e pode ser usado para aumentar a constante de erro de um sistema de controle com retroação. Constatou-se na Seção 10.3 que a função de transferência de um circuito  $RC$  de atraso de fase é da forma

$$G_c(s) = \frac{1}{\alpha} \frac{(s + z)}{(s + p)}, \quad (10.57)$$

como na Eq. (10.13), onde

$$z = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{R_2 C}, \quad \alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2}, \quad p = \frac{1}{\alpha \tau}.$$

O erro de estado estacionário de um sistema sem compensação é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left\{ \frac{R(s)}{1 + GH(s)} \right\}. \quad (10.58)$$

Assim, por exemplo, a constante de erro de velocidade para um sistema do tipo um é

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \{GH(s)\}, \quad (10.59)$$

como está mostrado na Seção 5.7. Em consequência, se  $GH(s)$  for escrita sob a forma

$$GH(s) = \frac{K \prod_{i=1}^M (s + z_i)}{s \prod_{j=1}^Q (s + p_j)}, \quad (10.60)$$

obtém-se a constante de velocidade

$$K_v = \frac{K \prod_{i=1}^M z_i}{\prod_{j=1}^Q p_j}. \quad (10.61)$$

Será acrescentada agora, como compensador, uma estrutura de atraso de fase do tipo integração e determinada a constante de velocidade do sistema compensado. Designando-se a constante de velocidade do sistema sem compensação (Eq. 10.61) por  $K_{vsc}$ , tem-se

$$\begin{aligned} K_{vc} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \{G_c(s)GH(s)\} = \lim_{s \rightarrow 0} \{G_c(s)\} K_{vsc} \\ &= \left(\frac{z}{p}\right) \left(\frac{1}{\alpha}\right) K_{vsc} = \left(\frac{z}{p}\right) \left(\frac{K}{\alpha}\right) \left(\frac{\prod z_i}{\prod p_j}\right). \end{aligned} \quad (10.62)$$

O ganho do lugar das raízes com compensação na posição desejada da raiz será ( $K/\alpha$ ). Agora, se o pólo e o zero do compensador forem escolhidos de modo que  $|z| = \alpha|p| < 1$ , o valor de  $K_v$  resultante será aumentado na posição desejada para a raiz de um fator  $z/p = \alpha$ . Então, por exemplo, se  $z = 0,1$  e  $p = 0,01$ , a constante de velocidade correspondente à localização desejada para a raiz será multiplicada por um fator igual a 10. Se o pólo e o zero do compensador aparecerem relativamente próximos um do outro, no plano  $s$ , seu efeito na localização da raiz desejada será insignificante. Portanto, a combinação do pólo e do zero do compensador próximo da origem do plano  $s$  em comparação com  $\omega_n$  pode ser usada para aumentar a constante de erro de um sistema com retroação de um fator  $\alpha$ , alterando muito pouco a localização da raiz. O fator  $\alpha$  possui, na realidade, um valor limite superior, em torno de 100, uma vez que para valores de  $\alpha$  mais elevados seriam necessários resistores e capacitores do circuito com valores muito grandes. Por exemplo, quando  $z = 0,1$  e  $\alpha = 100$ , obtém-se da Eq. (10.57)

$$z = 0,1 = \frac{1}{R_2 C}, \quad \text{e} \quad \alpha = 100 = \frac{R_1 + R_2}{R_2}.$$

Fazendo-se  $C = 10 \mu\text{F}$ , então  $R_1 = 1$  megohm e  $R_2 = 99$  megohms. À medida que se aumenta o valor de  $\alpha$ , cresce o valor necessário para  $R_1$ . Deve ser observado, contudo, que uma atenuação,  $\alpha$ , de 1000 ou mais pode ser obtida utilizando-se controladores de processo pneumáticos que aproximam uma característica de atraso de fase (Fig. 10.8).

Os passos necessários para se projetar, no plano  $s$ , uma estrutura de atraso de fase são os seguintes:

1. Obter o lugar das raízes do sistema sem compensação.
2. Determinar as especificações da resposta transitória do sistema e determinar o posicionamento adequado das raízes dominantes sobre o lugar das raízes sem compensação que permitam atender as especificações.
3. Calcular o ganho de malha na localização desejada para a raiz e assim a constante de erro do sistema.
4. Comparar a constante de erro do sistema sem compensação com a constante de erro desejada e calcular o acréscimo necessário que deve resultar da relação,  $\alpha$ , entre o pólo e o zero do compensador.
5. Com a relação conhecida da combinação pólo-zero do compensador, determinar uma localização adequada para o pólo e o zero do compensador de modo que o lugar das raízes do sistema compensado continue passando pelo local da raiz desejada. Posicionar o pólo e o zero do compensador próximos da origem do plano  $s$  em comparação com  $\omega_n$ .

O quinto requisito pode ser satisfeito se as magnitudes do pólo e do zero forem significativamente menores que o valor  $\omega_n$  das raízes dominantes e que pareçam se fundir em um único ponto a partir da posição das raízes desejadas. O pólo e o zero parecerão fundir-se em um único ponto na localização das raízes se os ângulos, com base no pólo e no zero do compensador, medidos na localização desejada, forem essencialmente iguais. Um método para se localizar o pólo e o zero do compensador se baseia no requisito de que a diferença entre o ângulo devido ao pólo e o ângulo devido ao zero, medidos na posição desejada para a raiz, seja menor que  $2^\circ$ . Um exemplo ilustrará esta abordagem para o projeto de um compensador de atraso de fase.

#### EXEMPLO 10.6

#### Projeto de um compensador de atraso de fase

Considere-se o sistema sem compensação do Exemplo 10.2, em que a função de transferência a malha aberta sem compensação é

$$GH(s) = \frac{K}{s(s + 2)}. \quad (10.63)$$

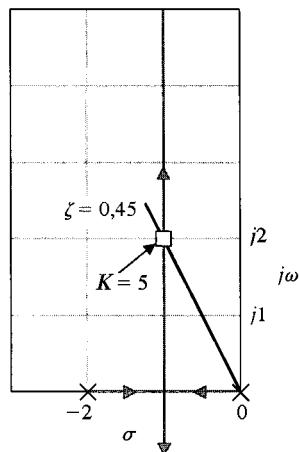
É necessário que a relação de amortecimento das raízes complexas dominantes seja 0,45 e que se obtenha ao mesmo tempo uma constante de velocidade igual a 20. O lugar das raízes do sistema não compensado é uma reta vertical em  $s = -1$  e resulta em raízes sobre a reta  $\zeta = 0,45$  em  $s = -1 \pm j2$ , como está mostrado na Fig. 10.16. Medindo-se o ganho nestas raízes, tem-se  $K = (2,24)^2 = 5$ . Portanto, a constante de velocidade do sistema sem compensação é

$$K_v = \frac{K}{2} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

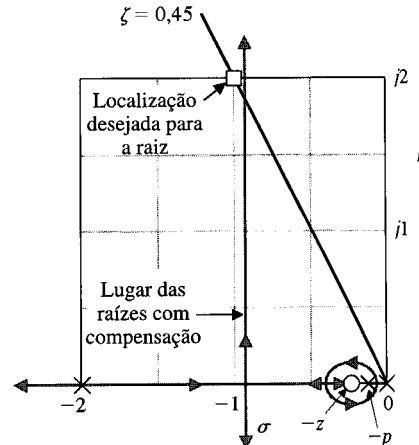
Assim a relação necessária entre o valor do zero e o valor do pólo do compensador é

$$\left| \frac{z}{p} \right| = \alpha = \frac{K_{vc}}{K_{vsc}} = \frac{20}{2,5} = 8. \quad (10.64)$$

Examinando-se a Fig. 10.17, constata-se que se deve fazer  $z = -0,1$  e, então,  $p = -0,1/8$ . A diferença entre os ângulos de  $p$  e de  $z$  na posição desejada da raiz é aproximadamente de  $1^\circ$ , por conseguinte



**Fig. 10.16** Lugar das raízes do sistema sem compensação do Exemplo 10.6.



**Fig. 10.17** Lugar das raízes do sistema compensado do Exemplo 10.6. Observe-se que a raiz efetiva difere um pouco da raiz desejada. O ramo vertical deixa o eixo dos  $\sigma$  em  $\sigma = -0,95$ .

$s = -1 \pm j2$  continua sendo a localização das raízes dominantes. Um esboço do lugar das raízes do sistema compensado está mostrado em linhas cheias dotadas de setas na Fig. 10.17. Assim, a função de transferência do sistema compensado é

$$G_c(s)GH(s) = \frac{5(s + 0,1)}{s(s + 2)(s + 0,0125)}, \quad (10.65)$$

onde  $(K/\alpha) = 5$ , ou  $K = 40$  a fim de se levar em conta a atenuação da estrutura de atraso de fase. ■

### EXEMPLO 10.7

#### Projeto de um compensador por atraso de fase

Considere-se agora um sistema que seja difícil projetar usando uma estrutura de avanço de fase. A função de transferência a malha aberta do sistema sem compensação é

$$GH(s) = \frac{K}{s(s + 10)^2}. \quad (10.66)$$

Especificou-se que a constante de erro de velocidade deste sistema deve ser igual a 20 e que, ao mesmo tempo, a relação de amortecimento das raízes dominantes seja igual a 0,707. O ganho necessário para um  $K_v$  de 20 é

$$K_v = 20 = \frac{K}{(10)^2}$$

ou  $K = 2000$ . Por outro lado, usando-se o critério de Routh, constata-se que as raízes da equação característica se situam no eixo  $j\omega$  em  $\pm j10$  quando  $K = 2000$ . As raízes do sistema que satisfazem o requisito de  $K_v$  estão longe de satisfazer a especificação de relação de amortecimento, e seria difícil trazer as raízes de sobre o eixo  $j\omega$  para a reta  $\zeta = 0,707$  usando um compensador de avanço de fase. Em consequência, será feita uma tentativa de satisfazer os valores de  $K_v$  e de  $\zeta$  utilizando uma estrutura de atraso de fase. O lugar das raízes do sistema sem compensação está mostrado na Fig. 10.18 e as raízes estão mostradas para  $\zeta = 0,707$  e  $s = -2,9 \pm j2,9$ . Medindo-se o ganho nestas raízes, verifica-se que  $K = 236$ . Portanto, a relação entre o zero e o pólo do compensador (usar a Eq. 10.64) é

$$\alpha = \left| \frac{z}{p} \right| = \frac{2000}{236} = 8,5.$$

Assim será escolhido  $z = 0,1$  e  $p = 0,1/9$  a fim de permitir uma pequena margem de segurança. Examinando-se a Fig. 10.18, constata-se que a diferença entre os ângulos do pólo e do zero de  $G_c(s)$  é insignificante. Em consequência, o sistema compensado é

$$G_c(s)GH(s) = \frac{236(s + 0,1)}{s(s + 10)^2(s + 0,0111)}. \quad (10.67)$$

onde  $(K/\alpha) = 236$  e  $\alpha = 9$ . ■

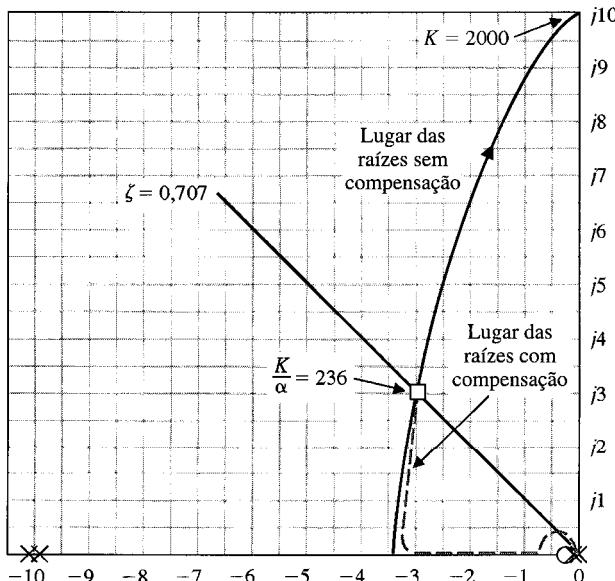


Fig. 10.18 (a) Projeto de uma estrutura por atraso de fase, no plano s.

O projeto de um compensador por integração para aumentar a constante de erro de um sistema de controle sem compensação é particularmente ilustrativo usando os métodos do plano s e do lugar das raízes. Deve-se retornar agora a métodos igualmente úteis de se projetar compensação por integração usando diagramas de Bode.

## 10.8 PROJETO DE ATRASO DE FASE USANDO DIAGRAMAS DE BODE

O projeto de um circuito  $RC$  adequado para a compensação de um sistema de controle com retroação pode ser realizado rapidamente em diagramas de Bode. A vantagem dos diagramas de Bode é de novo evidente, pois será simplesmente adicionada a resposta de freqüência do compensador aos diagramas de Bode do sistema sem compensação com o objetivo de obter uma resposta de freqüência satisfatória para o sistema. A função de transferência da estrutura de atraso de fase escrita sob a forma adequada aos diagramas de Bode é

$$G_c(j\omega) = \frac{1 + j\omega\tau}{1 + j\omega\alpha\tau}, \quad (10.68)$$

como foi visto na Eq. (10.14). Os diagramas de Bode da estrutura de atraso de fase estão mostrados na Fig. 10.8 para dois valores de  $\alpha$ . Nos diagramas de Bode, o pólo e o zero do compensador possuem uma magnitude muito menor que o menor dos pólos do sistema não compensado. Portanto, o atraso de fase não é o efeito útil do compensador; é a atenuação  $-20 \log \alpha$  que é o efeito útil da compensação. A estrutura de atraso de fase é utilizada para fornecer uma atenuação e, por conseguinte, abaixar a freqüência de 0 dB (freqüência de cruzamento) do sistema. Por outro lado, com freqüências de cruzamento mais baixas, constata-se que usualmente a margem de fase é aumentada e as especificações podem ser satisfeitas. O procedimento de projeto de uma estrutura de atraso de fase em diagramas de Bode é o seguinte:

1. Obter os diagramas de Bode do sistema sem compensação com o ganho ajustado para as constantes de erro desejadas.
2. Determinar a margem de fase do sistema sem compensação e, se for insuficiente, prosseguir com os passos a seguir.
3. Determinar a freqüência em que o requisito de margem de fase deve ser satisfeita se a curva de magnitude cruza a linha de 0 dB nesta freqüência,  $\omega_c'$ . (Adicionar uma tolerância de  $5^\circ$  no atraso de fase da estrutura de atraso de fase ao determinar a nova freqüência de cruzamento.)
4. Posicionar o zero do compensador uma década abaixo da nova freqüência de cruzamento  $\omega_c'$  e assim assegurar somente  $5^\circ$  de atraso de fase em  $\omega_c'$  (ver Fig. 10.8) devido à estrutura de atraso de fase.
5. Medir a atenuação necessária em  $\omega_c'$  de modo a assegurar que a curva de magnitude cruze a linha de 0 dB nesta freqüência.
6. Calcular o valor de  $\alpha$  levando em conta que a atenuação introduzida em  $\omega_c'$  pela estrutura de atraso de fase é  $-20 \log \alpha$ .
7. Calcular o pólo como  $\omega_p = 1/\alpha\tau = \omega_c'/\alpha$ , e o projeto estará concluído.

Um exemplo deste procedimento de projeto ilustrará que o método é simples de ser aplicado na prática.

**EXEMPLO 10.8****Projeto de uma estrutura de atraso de fase**

Reconsiderar o sistema do Exemplo 10.6 e projetar uma estrutura de atraso de fase de modo a obter a margem de fase desejada. A função de transferência sem compensação é

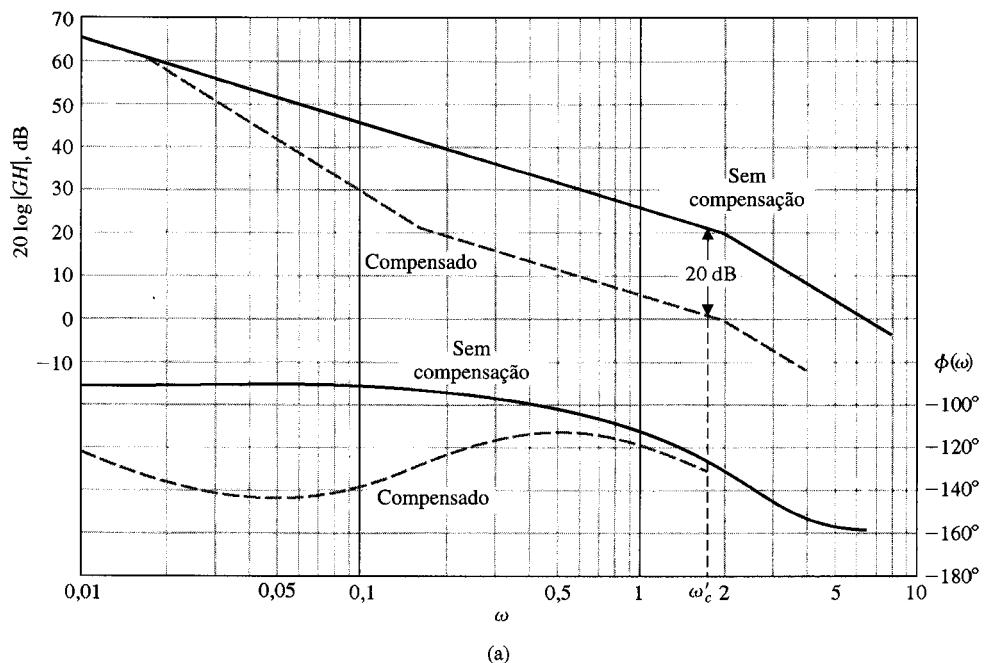
$$GH(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega + 2)} = \frac{K_v}{j\omega(0,5j\omega + 1)}, \quad (10.69)$$

onde  $K_v = K/2$ . Deseja-se  $K_v = 20$  e uma margem de fase de  $45^\circ$ . Os diagramas de Bode do sistema sem compensação estão mostrados em linha cheia na Fig. 10.19. O sistema sem compensação possui uma margem de fase de  $20^\circ$ , e a margem de fase deve ser aumentada. Tolerando  $5^\circ$  para o compensador de atraso de fase, localiza-se a freqüência  $\omega$  onde  $\phi(\omega) = -130^\circ$ , que deve ser a nova freqüência de cruzamento  $\omega'_c$ . Neste caso, constata-se que  $\omega'_c = 1,5$ , que tolera uma pequena margem de segurança. A atenuação necessária para tornar  $\omega'_c$  a nova freqüência de cruzamento é igual a  $20$  dB. As curvas de magnitude do sistema compensado e do sistema sem compensação são aproximações assintóticas. Ambas as curvas reais são inferiores em  $2$  dB às curvas mostradas. Assim,  $\omega'_c = 1,5$  e a atenuação necessária é de  $20$  dB.

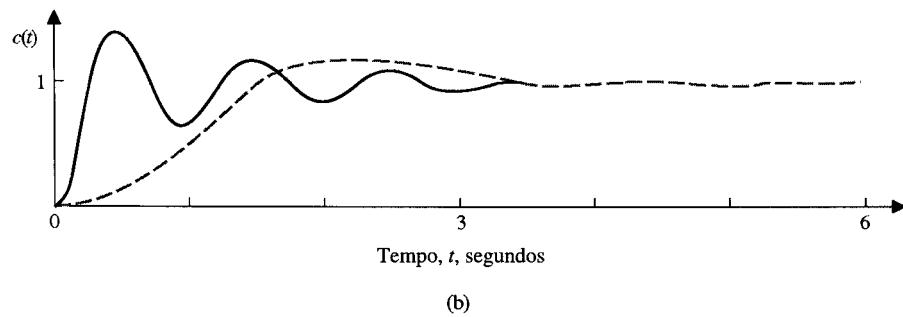
Determina-se, então,  $20$  dB =  $20 \log \alpha$ , ou  $\alpha = 10$ . Portanto, o zero está uma década abaixo da freqüência de cruzamento, ou seja,  $\omega_z = \omega'_c/10 = 0,15$ , e o pólo está em  $\omega_p = \omega_z/10 = 0,015$ . O sistema compensado é, então,

$$G_c(j\omega)GH(j\omega) = \frac{20(6,66j\omega + 1)}{j\omega(0,5j\omega + 1)(66,6j\omega + 1)}. \quad (10.70)$$

A resposta de freqüência do sistema compensado está mostrada na Fig. 10.19(a) com linhas tracejadas. Fica evidente que o atraso de fase introduz uma atenuação que baixa o valor da freqüência de cruzamento e, portanto, aumenta a margem de fase. Observe-se que o ângulo de fase da estrutura de atraso de fase desapareceu quase totalmente na freqüência de cruzamento  $\omega'_c$ . Como verificação final, calcula-se numericamente a margem de fase em  $\omega'_c = 1,5$  e se obtém  $\phi_{mf} = 45^\circ$ , que é o resultado



(a)



(b)

**Fig. 10.19** (a) Projeto de um compensador por atraso de fase em diagramas de Bode para o Exemplo 10.8. (b) Resposta no domínio do tempo para uma entrada em degrau aplicado no sistema sem compensação (linha cheia) e no sistema com compensação (linha tracejada) do Exemplo 10.8.

do desejado. Usando a carta de Nichols, observa-se que a banda passante do sistema a malha fechada foi reduzida de  $\omega = 10$  rad/s no sistema sem compensação para  $\omega = 2,5$  rad/s no sistema compensado. Devido à redução de banda passante, espera-se que a resposta no domínio do tempo a um degrau seja mais lenta.

A resposta no domínio do tempo está mostrada na Fig. 10.19(b). Convém observar que a ultrapassagem é de 25% e o tempo de pico é de 2 segundos. Assim a resposta está dentro das especificações. ■

### EXEMPLO 10.9

#### Projeto de um compensador por atraso de fase

Reconsidere-se o sistema do Exemplo 10.7, que é

$$GH(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega + 10)^2} = \frac{K_v}{j\omega(0,1j\omega + 1)^2}, \quad (10.71)$$

onde  $K_v = K/100$ . É especificada uma constante de velocidade  $K_v$  igual a 20. Além disto, é necessário que as raízes dominantes possuam uma relação de amortecimento de 0,707. Com base na Fig. 9.21 estima-se ser necessária uma margem de fase de  $65^\circ$ . A resposta de freqüência do sistema sem compensação está mostrada na Fig. 10.20. A margem de fase do sistema sem compensação é de zero graus. Atribuindo  $5^\circ$  para a estrutura de atraso de fase, escolhe-se a freqüência onde a fase é  $-110^\circ$ . Esta freqüência é igual a 1,74, e se tentará posicionar a nova freqüência de cruzamento em  $\omega'_c = 1,5$ . Medindo-se a atenuação necessária em  $\omega = \omega'_c$ , determina-se o valor de 23 dB;  $23 = 20 \log \alpha$ , ou  $\alpha = 14,2$ . O zero do compensador é posicionado uma década abaixo da freqüência de cruzamento, e assim

$$\omega_z = \frac{\omega'_c}{10} = 0,15.$$

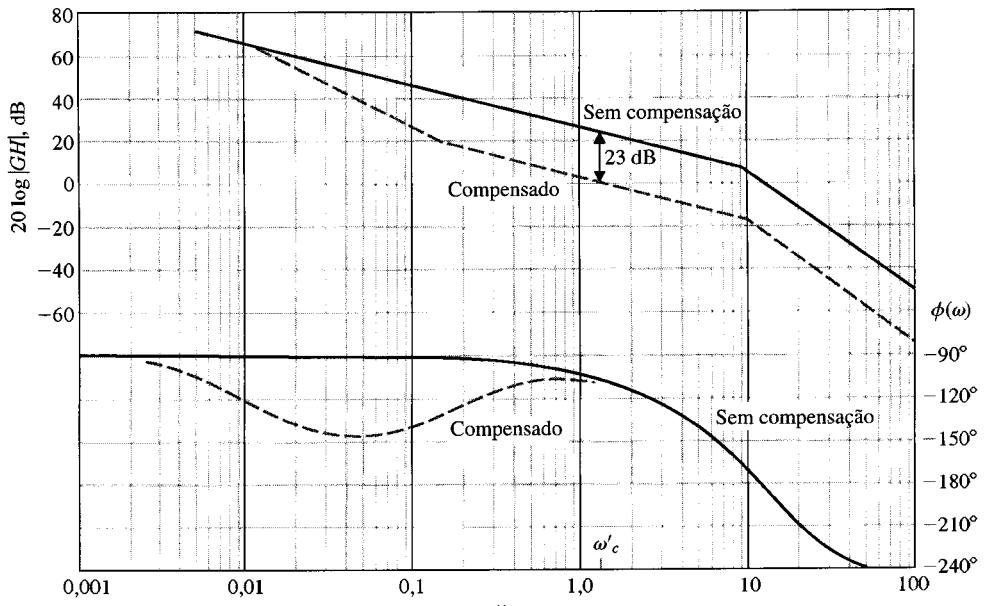


Fig. 10.20 Projeto de um compensador por atraso de fase em diagramas de Bode para o Exemplo 10.9.

O pólo é, então

$$\omega_p = \frac{\omega_z}{\alpha} = \frac{0,15}{14,2}.$$

Por conseguinte o sistema compensado é

$$G_c(j\omega)GH(j\omega) = \frac{20(6,66j\omega + 1)}{j\omega(0,1j\omega + 1)^2(94,6j\omega + 1)}. \quad (10.72)$$

A resposta de freqüência do sistema compensado está mostrada na Fig. 10.20. Como verificação final, calcula-se numericamente a margem de fase em  $\omega'_c = 1,5$  e se obtém  $\phi_{mf} = 67^\circ$ , que está dentro das especificações. ■

Portanto, é possível utilizar uma estrutura de compensação por atraso de fase para alterar a resposta de freqüência de um sistema de controle com retroação a fim de se alcançar um desempenho

satisfatório para o sistema. Examinando-se os Exemplos 10.8 e 10.9, constata-se novamente que o projeto do sistema é satisfatório quando a curva assintótica de magnitude do sistema compensado cruza a linha de 0 dB com uma inclinação de  $-20 \text{ dB/década}$ . A atenuação da estrutura de atraso de fase reduz a magnitude da freqüência de cruzamento (0 dB) para um ponto onde a margem de fase do sistema é satisfatória. Assim, em contraste com a estrutura de avanço de fase, a estrutura de atraso de fase reduz a banda passante do sistema a malha fechada e também mantém uma constante de erro adequada.

Alguém poderia perguntar: Por que não colocar o zero do compensador mais que uma década abaixo da nova freqüência de cruzamento  $\omega_c$  - (ver item 4 do procedimento de projeto) e assim assegurar um atraso de fase menor que  $5^\circ$  em  $\omega_c$  devido ao compensador? Esta pergunta pode ser respondida considerando-se os requisitos colocados sobre os resistores e capacitores do circuito de atraso de fase pelos valores de pólos e zeros (ver a Eq. 10.12). À medida que as magnitudes do pólo e do zero diminuem, crescem proporcionalmente os valores dos resistores e do capacitor. O zero do compensador por atraso de fase em termos de componentes de circuito é  $z = 1/R_2C$  e o  $\alpha$  do circuito é  $\alpha = (R_1 + R_2)/R_2$ . Assim, considerando o Exemplo 10.9, torna-se necessário um zero em  $z = 0,15$ , que pode ser obtido com  $C = 1\mu\text{F}$  e  $R_2 = 6,66$  megohms. Contudo, para  $\alpha = 14$  é necessário se ter uma resistência  $R_1$  de  $R_1 = R_2(\alpha - 1) = 88$  megohms. O projetista não deseja colocar o zero  $z$  mais distante que uma década abaixo de  $\omega_c$  e ter necessidade de valores maiores para  $R_1$ ,  $R_2$  e  $C$ .

A estrutura de compensação por avanço de fase altera a resposta de freqüência de uma rede adicionando um ângulo de fase positivo (avanço) e, portanto, aumentando a margem de fase na freqüência de cruzamento (0 dB). É evidente que o projetista pode considerar o uso de uma estrutura de compensação que produza a atenuação de uma estrutura de atraso de fase e o ângulo de avanço de fase de uma estrutura de avanço de fase. Tal estrutura existe. Ela é chamada de **estrutura de avanço e atraso de fase** e está mostrada na Fig. 10.21. A função de transferência desta estrutura é

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)s + 1}. \quad (10.73)$$

Quando  $\alpha\tau_1 = R_1 C_1$ ,  $\beta\tau_2 = R_2 C_2$  e  $\tau_1\tau_2 = R_1 R_2 C_1 C_2$ , observa-se que  $\alpha\beta = 1$ , e então a Eq. (10.73) é

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{(1 + \alpha\tau_1 s)(1 + \beta\tau_2 s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}, \quad (10.74)$$

onde  $\alpha > 1$  e  $\beta < 1$ . Os primeiros termos no numerador e no denominador, que são função de  $\tau_1$ , fornecem a parte de avanço de fase da estrutura. Os segundos termos, que são função de  $\tau_2$ , fornecem a parte de atraso de fase da estrutura de compensação. O parâmetro  $\beta$  é ajustado para fornecer um avanço de fase adicional na freqüência de cruzamento (0 dB) nova. Alternativamente, a compensação pode ser projetada no plano  $s$  colocando-se o pólo e o zero da compensação por avanço de fase a fim de posicionar as raízes dominantes na localização desejada. Em seguida se usa a compensação por atraso de fase para elevar o valor da constante de erro referente às raízes dominantes de uma relação adequada,  $1/\beta$ . O projeto de um compensador por avanço e atraso de fase segue os procedimentos já discutidos, e o leitor é encaminhado à literatura adicional que ilustra a utilidade da compensação por avanço e atraso de fase [2, 3, 29].

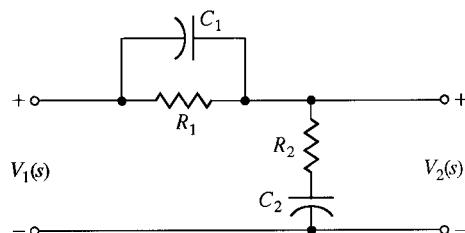


Fig. 10.21 Uma estrutura  $RC$  de avanço e atraso de fase.

## 10.9 PROJETO DE SISTEMAS COM DIAGRAMAS DE BODE USANDO MÉTODOS ANALÍTICOS E COMPUTACIONAIS

O uso de computadores é desejável, quando apropriado, para auxiliar o projetista na seleção dos parâmetros de um controlador. O desenvolvimento de algoritmos para o projeto assistido por computador constitui uma abordagem alternativa importante aos métodos de tentativa e erro considerados nas seções anteriores. Foram desenvolvidos programas de computador para a seleção de valores adequados de parâmetros para compensadores baseados no atendimento de critérios de resposta de freqüência, como a margem de fase [3, 4].

Foi desenvolvida uma técnica analítica para selecionar os parâmetros de uma estrutura de avanço ou de atraso de fase para os diagramas de Bode [4, 5]. Para um compensador de um único estágio

$$G_c(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s}, \quad (10.75)$$

onde  $\alpha < 1$  conduz a um compensador por atraso de fase e  $\alpha > 1$  conduz a um compensador por avanço de fase. A contribuição de fase do compensador na freqüência de cruzamento  $\omega_c$  é (ver Eq. 10.9)

$$p = \operatorname{tg} \phi = \frac{\alpha\omega_c\tau - \omega_c\tau}{1 + (\omega_c\tau)^2\alpha}. \quad (10.76)$$

A magnitude  $M$  (em dB) do compensador em  $\omega_c$  é

$$c = 10^{M/10} = \frac{1 + (\omega_c\alpha\tau)^2}{1 + (\omega_c\tau)^2}. \quad (10.77)$$

Eliminando-se  $\omega_c\tau$  nas Eqs. (10.76) e (10.77), obtém-se a equação de solução não-trivial para  $\alpha$

$$(p^2 - c + 1)\alpha^2 + 2p^2c\alpha + p^2c^2 + c^2 - c = 0. \quad (10.78)$$

Para um compensador de um único estágio, é necessário que  $c > p^2 + 1$ . Resolvendo a Eq. (10.78) em função de  $\alpha$ , pode-se obter o valor de  $\tau$  a partir de

$$\tau = \frac{1}{\omega_c} \sqrt{\frac{1 - c}{c - \alpha^2}}. \quad (10.79)$$

São as seguintes as etapas de projeto de um compensador por avanço de fase:

1. Selecionar o valor desejado de  $\omega_c$ .
2. Determinar a margem de fase desejada e, em consequência, a fase necessária  $\phi$  para a Eq. (10.76).
3. Verificar se o avanço de fase é aplicável:  $\phi > 0$  e  $M > 0$ .
4. Determinar se um único estágio é suficiente quando  $c > p^2 + 1$ .
5. Determinar  $\alpha$  a partir da Eq. (10.78).
6. Determinar  $\tau$  a partir da Eq. (10.79).

Se for necessário projetar um compensador por atraso de fase de um único estágio, então  $\phi < 0$  e  $M < 0$  (passo 3). Para o passo 4 será necessário  $c < [1/(1 + p^2)]$ . Quanto ao resto, o método é o mesmo.

#### EXEMPLO 10.10

#### Projeto com o uso de técnica analítica

Seja reconsiderar o sistema do Exemplo 10.1 e projetar uma estrutura de avanço de fase por meio de uma técnica analítica. Examinar as curvas não compensadas da Fig. 10.9. Seleciona-se  $\omega_c = 5$ . Em seguida, como anteriormente, se deseja uma margem de fase de  $45^\circ$ . O compensador deve produzir esta fase, assim

$$p = \operatorname{tg} 45^\circ = 1. \quad (10.80)$$

A contribuição em magnitude necessária é 8 dB, ou seja  $M = 8$ , de modo que

$$c = 10^{8/10} = 6,31. \quad (10.81)$$

Usando  $c$  e  $p$ , obtém-se

$$-4,31\alpha^2 + 12,62\alpha + 73,32 = 0. \quad (10.82)$$

Resolvendo para  $\alpha$ , obtém-se  $\alpha = 5,84$ . Solucionando a Eq. (10.79), obtém-se  $\tau = 0,087$ . Em consequência, o compensador é

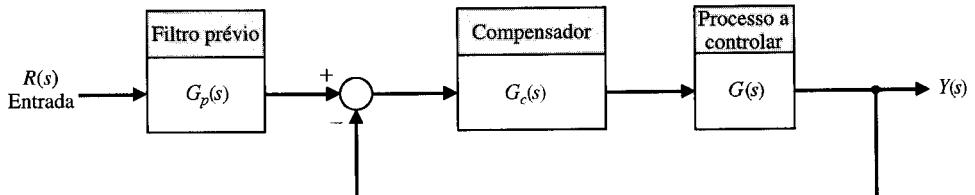
$$G_c(s) = \frac{1 + 0,515s}{1 + 0,087s}. \quad (10.83)$$

O polo é igual a 11,5 e o zero é 1,94. Este projeto é semelhante ao que foi obtido com a técnica da interação da Seção 10.4. ■

## 10.10 SISTEMAS COM FILTRAGEM PRÉVIA

Em seções anteriores deste capítulo, utilizaram-se compensadores da forma

$$G_c(s) = \frac{(s + z)}{(s + p)}$$



**Fig. 10.22** Sistema de controle com um filtro prévio,  $G_p(s)$ .

que alteram as raízes da equação característica do sistema a malha fechada. Contudo, a função de transferência a malha fechada,  $T(s)$ , conterá o zero de  $G_p(s)$  como um zero de  $T(s)$ . Este zero afetará de forma significativa a resposta do sistema  $T(s)$ .

Considere-se o sistema mostrado na Fig. 10.22, onde

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Será introduzido um compensador PI, tal que

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} = \frac{K_1 s + K_2}{s}$$

A função de transferência a malha fechada do sistema com filtragem prévia (Fig. 10.22) é

$$T(s) = \frac{(K_1 s + K_2) G_p(s)}{s^2 + K_1 s + K_2}. \quad (10.84)$$

Para fins de ilustração, as especificações requerem um tempo de assentamento (critério dos 2%) de 0,5 segundo e uma ultrapassagem de aproximadamente 4%. Utiliza-se  $\zeta = 1/\sqrt{2}$  e se observa que

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}$$

Assim, é necessário que  $\zeta \omega_n = 8$ , ou  $\omega_n = 8\sqrt{2}$ . Obtém-se agora

$$K_1 = 2\zeta \omega_n = 16 \quad \text{e} \quad K_2 = \omega_n^2 = 128.$$

A função de transferência a malha fechada quando  $G_p(s) = 1$  é então

$$T(s) = \frac{16(s + 8)}{s^2 + 16s + 128}.$$

O efeito do zero na resposta ao degrau é significativo. Usando a Fig. 5.13(a), tem-se  $a/\zeta \omega_n = 1$  e  $\zeta = 1/\sqrt{2}$ , e a ultrapassagem da resposta a um degrau de entrada é prevista em 21%, com base na Fig. 5.13(a).

Utiliza-se uma filtragem prévia  $G_p(s)$  para eliminar o zero de  $T(s)$  e manter o ganho estático de 1, sendo necessário, assim,

$$G_p(s) = \frac{8}{s + 8}.$$

Tem-se então

$$T(s) = \frac{128}{s^2 + 16s + 128},$$

e a ultrapassagem deste sistema é 4,5%, como esperado.

Revendo-se a Fig. 5.13(a), nota-se que o zero em  $s = -a$  possui um efeito significativo quando  $a/\zeta \omega_n < 5$ , onde  $-a$  é o zero e  $-\zeta \omega_n$  é a parte real das raízes dominantes da equação característica de  $T(s)$ .

Reconsidere-se agora o Exemplo 10.3, que inclui o projeto de um compensador por avanço de fase. Determinou-se, usando a Fig. 10.22, a função de transferência a malha fechada

$$T(s) = \frac{8,1(s + 1)G_p(s)}{(s + 1 + j2)(s + 1 - j2)(s + 1,62)}.$$

Se  $G_p(s) = 1$  (sem filtragem prévia), obtém-se então uma resposta com uma ultrapassagem de 46,6% e um tempo de assentamento de 3,8 segundos. Se for usada uma filtragem prévia

$$G_p(s) = \frac{1}{s + 1},$$

obtém-se uma ultrapassagem de 6,7% e um tempo de assentamento de 3,8 segundos. A raiz real em  $s = -1,62$  ajuda a amortecer a resposta ao degrau. A filtragem prévia é muito útil ao permitir que o projetista introduza um compensador com um zero para ajustar a localização das raízes (pólos) da função de transferência a malha fechada e, ao mesmo tempo, eliminar o efeito do zero incorporado em  $T(s)$ .

Em geral será adicionada uma filtragem prévia em sistemas com estruturas de atraso de fase ou compensadores PI. Não será utilizada filtragem prévia em sistemas com estrutura de atraso de fase, uma vez que se espera que o efeito do zero seja insignificante. Para testar esta afirmativa, reconsidere-se o projeto obtido no Exemplo 10.6. O sistema com um controlador de atraso de fase é

$$G(s)G_c(s) = \frac{5(s + 0,1)}{s(s + 2)(s + 0,0125)}.$$

A função de transferência é, então,

$$T(s) \approx \frac{5(s + 0,1)}{(s^2 + 1,98s + 5,1)(s + 0,095)} \approx \frac{5}{(s^2 + 1,98s + 5,1)},$$

uma vez que o zero em  $s = -0,1$  e o pólo em  $s = -0,095$  aproximadamente se cancelam. Espera-se uma ultrapassagem de 20% e um tempo de assentamento (critério dos 2%) de 4 segundos com os parâmetros de projeto ( $\zeta = 0,45$  e  $\zeta\omega_n = 1$ ). Contudo, a resposta real apresenta uma ultrapassagem de 26% e um tempo de assentamento maior de 5,8 segundos devido ao efeito do pólo real de  $T(s)$  em  $s = -0,095$ . Assim, não se emprega filtragem prévia em sistemas que utilizam compensadores por atraso de fase.

### EXEMPLO 10.11

#### Projeto de um sistema de terceira ordem

Considere-se um sistema com a forma mostrada na Fig. 10.22 com

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 1)(s + 5)}.$$

Seja projetar um sistema que produza uma resposta ao degrau com uma ultrapassagem menor que 2% e um tempo de assentamento menor que 3 segundos, usando simultaneamente  $G_c(s)$  e  $G_p(s)$  de modo a obter a resposta desejada.

Utiliza-se um compensador por avanço de fase

$$G_c(s) = \frac{K(s + 1,2)}{(s + 10)}$$

e se escolhe  $K$  para obter raízes complexas com  $\zeta = 1/\sqrt{2}$ . Então, com  $K = 78,7$ , a função de transferência a malha fechada é

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{78,7(s + 1,2)G_p(s)}{(s + 1,71 + j1,71)(s + 1,71 - j1,71)(s + 1,45)(s + 11,1)} \\ &\approx \frac{7,1(s + 1,2)G_p(s)}{(s^2 + 3,4s + 5,85)(s + 1,45)}, \end{aligned}$$

onde

$$G_p(s) = \frac{p}{(s + p)}. \quad (10.85)$$

A função de transferência a malha fechada será, então,

$$T(s) \approx \frac{7,1p(s + 1,2)}{(s^2 + 3,45s + 5,85)(s + 1,45)(s + p)}.$$

Se  $p = 1,2$ , cancela-se o efeito do zero. A resposta do sistema com filtragem prévia está resumida na Tabela 10.1. Escolhe-se o valor apropriado de  $p$  para se obter a resposta desejada. Observe-se que  $p$

**TABELA 10.1 Efeito de um Filtro Prévio na Resposta ao Degrau**

	$G_p(s) = 1$	$p = 1,20$	$p = 2,4$
Ultrapassagem percentual	9,9%	0%	4,8%
Tempo de subida para 90% (segundos)	1,05	2,30	1,60
Tempo de assentamento (segundos)	2,9	3,0	3,2

$= 2,40$  fornece uma resposta que pode ser desejável, uma vez que produz um tempo de subida mais rápido que o de  $p = 1,20$ . A filtragem prévia fornece um parâmetro adicional a ser escolhido com a finalidade de projeto. ■

## 10.11 PROJETO PARA RESPOSTA RÁPIDA SEM OSCILAÇÃO

Freqüentemente o objetivo de um sistema de controle é obter uma resposta rápida para um comando em degrau, com um mínimo de ultrapassagem. Define-se como **resposta rápida sem oscilação** uma resposta que alcança rapidamente o nível desejado e se mantém nesse nível com um mínimo de oscilações. Utiliza-se a faixa de  $\pm 2\%$  em torno do nível desejado como faixa aceitável de variação da resposta desejada. Então, se a resposta entra na faixa no instante  $T_s$ , ela satisfez o tempo de assentamento  $T_s$  ao entrar na faixa, como ilustrado na Fig. 10.23. Uma resposta rápida sem oscilação possui as seguintes características:

1. Erro de estado estacionário = 0
2. Resposta rápida  $\rightarrow$  tempo de subida e tempo de assentamento mínimos
3.  $0,1\% \leq$  ultrapassagem percentual  $< 2\%$
4. amplitude de oscilação inferior (*undershoot*)  $< 2\%$

As características (3) e (4) necessitam que a resposta permaneça no interior da faixa de  $\pm 2\%$  de modo que a entrada da resposta no interior da faixa ocorra no tempo de assentamento.

Considere-se a função de transferência de um sistema de controle a malha fechada,  $T(s)$ . Para determinar os coeficientes que conduzem à resposta rápida sem oscilações ótima, normaliza-se primeiramente a função de transferência padrão. Um exemplo disto para um sistema de terceira ordem é

$$T(s) = \frac{\omega_n^3}{s^3 + \alpha\omega_n s^2 + \beta\omega_n^2 s + \omega_n^3}. \quad (10.86)$$

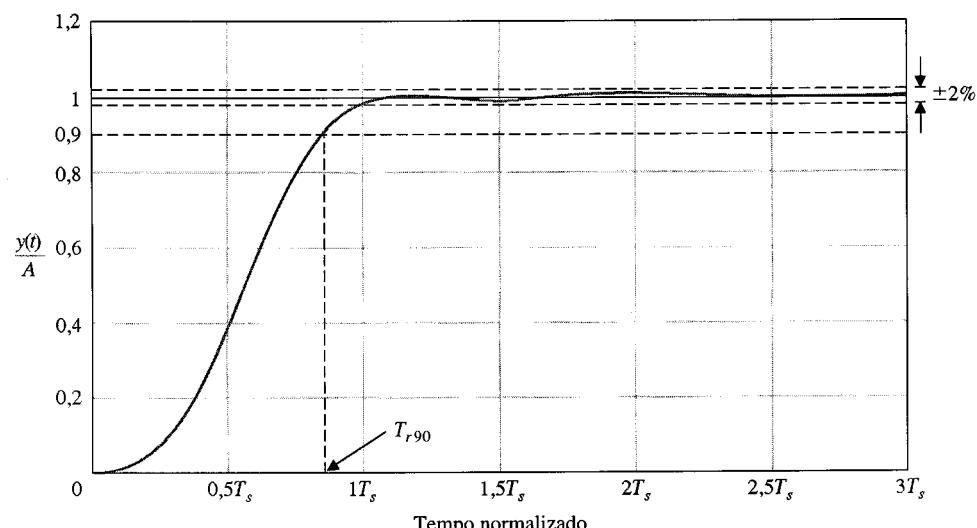
Dividindo-se o numerador e o denominador por  $\omega^3$  resulta

$$T(s) = \frac{1}{\frac{s^3}{\omega_n^3} + \alpha \frac{s^2}{\omega_n^2} + \beta \frac{s}{\omega_n} + 1}. \quad (10.87)$$

Fazer  $\bar{s} = s/\omega_n$  para obter

$$T(s) = \frac{1}{\bar{s}^3 + \alpha \bar{s}^2 + \beta \bar{s} + 1}. \quad (10.88)$$

A Eq. (10.88) é a função de transferência a malha fechada de terceira ordem, sob forma normalizada. Os coeficientes da equação —  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e assim por diante — são então atribuídos aos valores necessários para atender os requisitos de resposta rápida sem oscilações. Os coeficientes registrados na Tabela 10.2 foram escolhidos para obter resposta rápida sem oscilação e minimizar o tempo de assentamento e o



**Fig. 10.23** Resposta rápida, sem oscilações e sem erro estacionário (*deadbeat*).  $A$  é a magnitude da entrada em degrau.

**TABELA 10.2 Coeficientes e Medidas da Resposta de um Sistema Deadbeat**

Ordem do Sistema	Coeficientes					Ultrapassagem Percentual U.P.	Desvio Inferior Máximo Percentual, D.U.	Tempo de Subida a 90%, $T_{r_{90}}$	Tempo de Subida a 100%, $T_{r_{100}}$	Tempo de Assentamento, $T_s$
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\epsilon$					
2a.	1,82					0,10%	0,00%	3,47	6,58	4,82
3a.	1,90	2,20				1,65%	1,36%	3,48	4,32	4,04
4a.	2,20	3,50	2,80			0,89%	0,95%	4,16	5,29	4,04
5a.	2,70	4,90	5,40	3,40		1,29%	0,37%	4,84	5,73	4,81
6a.	3,15	6,50	8,70	7,55	4,05	1,63%	0,94%	5,49	6,31	5,43
										6,04

Nota: Todos os tempos estão normalizados.

tempo de subida para 100% do comando desejado,  $T_r$ . A forma da Eq. (10.88) é normalizada, uma vez que  $\bar{s} = s/\omega_n$ . Escolhe-se então  $\omega_n$  com base no valor desejado para o tempo de acomodação ou o tempo de subida. Portanto, se houver um sistema de terceira ordem que necessite de um tempo de assentamento de 1,2 segundo, observa-se, com base na Tabela 10.2, que o tempo de assentamento normalizado é

$$\omega_n T_s = 4,04.$$

Portanto, é necessário

$$\omega_n = \frac{4,04}{T_s} = \frac{4,04}{1,2} = 3,37.$$

Uma vez escolhido o valor de  $\omega_n$ , a função de transferência a malha fechada completa é conhecida, tendo a forma da Eq. (10.86). Ao se projetar um sistema para resposta rápida sem oscilação, o compensador é escolhido e a função de transferência a malha fechada é determinada. Esta função de transferência do sistema com compensação é então igualada à Eq. (10.86) e é possível determinar o compensador necessário.

#### EXEMPLO 10.12

#### Projeto de um sistema para resposta rápida sem oscilação

Considere-se um sistema com retroação unitária com um compensador  $G_c(s)$  e um filtro prévio  $G_p(s)$ , como mostrado na Fig. 10.22. O processo a controlar é

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)},$$

e o compensador é

$$G_c(s) = \frac{(s + z)}{(s + p)}.$$

Usando uma filtragem prévia necessária,

$$G_p(s) = \frac{z}{(s + z)}.$$

A função de transferência a malha fechada é

$$T(s) = \frac{Kz}{s^3 + (1 + p)s^2 + (K + p)s + Kz}.$$

Utiliza-se a Tabela 10.2 para determinar os coeficientes,  $\alpha = 1,90$  e  $\beta = 2,20$ . Se for selecionado um tempo de assentamento de 2 segundos (critério dos 2%), então  $\omega_n T_s = 4,04$ , e assim  $\omega_n = 2,02$ . O sistema a malha fechada que se deseja ter possui a equação característica

$$q(s) = s^3 + \alpha\omega_n s^2 + \beta\omega_n^2 s + \omega_n^3 = s^3 + 3,84s^2 + 4,44s + 8,24.$$

Determina-se então que  $p = 2,84$ ,  $z = 1,34$  e  $K = 6,14$ . A resposta deste sistema apresentará  $T_s = 2$  segundos,  $T_r = 2,14$  segundos,  $T_{r_{90}} = 1,72$  segundo. ■

#### 10.12 EXEMPLO DE PROJETO: SISTEMA DE CONTROLE DE ENROLAMENTO DE ROTORES

O objetivo é substituir a operação manual usando uma máquina para enrolar fio de cobre em rotores de pequenos motores. Cada motor possui três enrolamentos separados com algumas centenas

de espiras de fio. É importante que os enrolamentos sejam consistentes e que a produtividade do processo seja alta. O operador insere simplesmente um rotor sem enrolamento, aperta o botão de partida e posteriormente remove o rotor completamente bobinado. O motor CC é utilizado para se obter enrolamentos rápidos e precisos. Assim, o objetivo é alcançar elevada exatidão em estado estacionário tanto para posição quanto para velocidade. O sistema de controle está mostrado na Fig. 10.24(a) e o diagrama de blocos na Fig. 10.24(b). Este sistema possui erro de estado estacionário nulo para uma entrada em degrau e o erro de estado estacionário para uma entrada em rampa é

$$e_{ss} = A/K_v,$$

onde

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_c(s)}{50}.$$

Quando  $G_c(s) = K$ , tem-se  $K_v = K/50$ . Se for selecionado  $K = 500$ , resultará  $K_v = 10$ , mas a ultrapassagem a um degrau será de 70% e o tempo de assentamento, de 8 segundos.

Será tentado inicialmente um compensador por avanço de fase de modo que

$$G_c(s) = \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)}. \quad (10.89)$$

Escolhendo-se  $z_1 = 4$  e o pólo  $p_1$  de modo que as raízes complexas possuam um  $\zeta$  de 0,6, tem-se

$$G_c(s) = \frac{191,2(s + 4)}{(s + 7,3)}. \quad (10.90)$$

Em consequência, a resposta para uma entrada em degrau apresenta uma ultrapassagem de 3% e um tempo de assentamento de 1,5 segundo. Contudo, a constante de erro de velocidade é

$$K_v = \frac{191,2(4)}{7,3(50)} = 2,1,$$

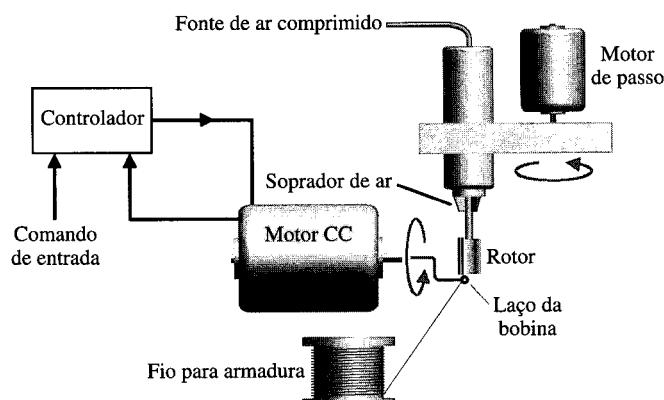
cujo valor é inadequado.

Se for usada uma estrutura de atraso de fase, escolhe-se

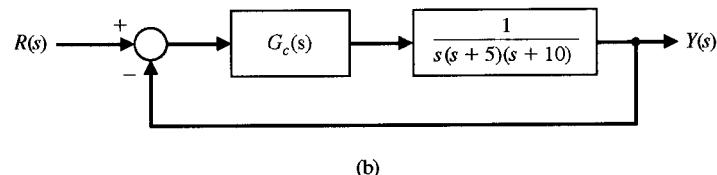
$$G_c(s) = \frac{K(s + z_2)}{(s + p_2)}$$

a fim de se obter uma constante  $K_v = 38$ . Assim, a constante de velocidade do sistema compensado por atraso de fase é

$$K_v = \frac{Kz_2}{50p_2}.$$



(a)



(b)

**Fig. 10.24** (a) Sistema de controle para bobinadeira de rotor. (b) Diagrama de blocos.

TABELA 10.3 Resultados de Exemplo de Projeto

Controlador	Ganho, $K$	Estrutura de Avanço de Fase	Estrutura de Atraso de Fase	Estrutura de Avanço e Atraso de Fase
Ultrapassagem ao degrau	70%	3%	12%	5%
Tempo de assentamento (segundos)	8	1,5	2,5	2,0
Erro de estado estacionário para rampa	10%	48%	2,6%	4,8%
$K_v$	10	2,1	38	21

Usando o lugar das raízes, seleciona-se  $K = 105$  a fim de se obter uma resposta ao degrau razoável do sistema sem compensação com uma ultrapassagem inferior ou igual a 10%. Escolhe-se  $\alpha = z/p$  de modo a atender o valor desejado de  $K_v$ . Tem-se, então,

$$\alpha = \frac{50K_v}{K} = \frac{50(38)}{105} = 18,1.$$

Selecionando-se  $z_2 = 0,1$  para evitar ter um impacto sobre o lugar das raízes do sistema sem compensação, tem-se  $p_2 = 0,0055$ . Obtém-se, então, uma resposta ao degrau com 12% de ultrapassagem e com um tempo de assentamento de 2,5 segundos.

Os resultados correspondentes ao ganho simples, a estrutura de avanço de fase e a estrutura de atraso de fase estão resumidos na Tabela 10.3.

Seja retornar ao sistema com estrutura de avanço de fase e acrescentar em cascata uma estrutura de atraso de fase, de modo que o compensador seja

$$G_c(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)}{(s + p_1)(s + p_2)}. \quad (10.91)$$

O compensador por avanço de fase da Eq. (10.90) requer  $K = 191,2$ ,  $z_1 = 4$  e  $p_1 = 7,3$ . O lugar das raízes para o sistema está mostrado na Fig. 10.25. Convém lembrar que esta estrutura de avanço de fase resultou em um valor de  $K_v = 2,1$  (ver Tabela 10.3). Para se obter  $K_v = 21$ , usa-se  $\alpha = 10$  e se escolhem  $z_2 = 0,1$  e  $p_2 = 0,01$ . Então, o sistema total é

$$G(s)G_c(s) = \frac{191,2(s + 4)(s + 0,1)}{s(s + 5)(s + 10)(s + 7,28)(s + 0,01)}. \quad (10.92)$$

A resposta deste sistema ao degrau e à rampa estão mostradas na Fig. 10.26 nas partes (a) e (b), respectivamente, e estão resumidas na Tabela 10.3. Obviamente, o projeto de avanço e atraso de fase é adequado à satisfação dos objetivos do projeto.

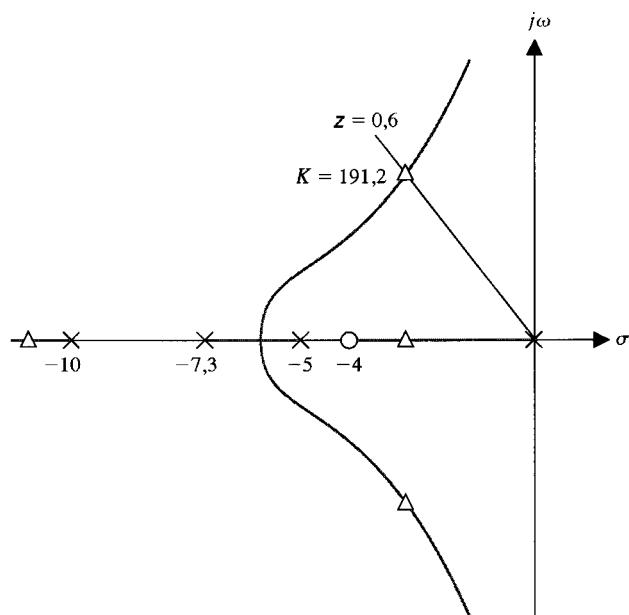
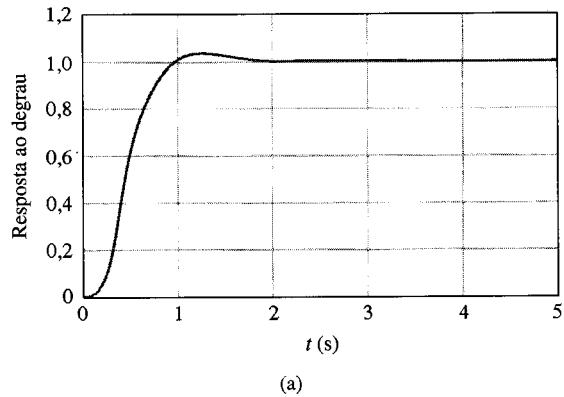
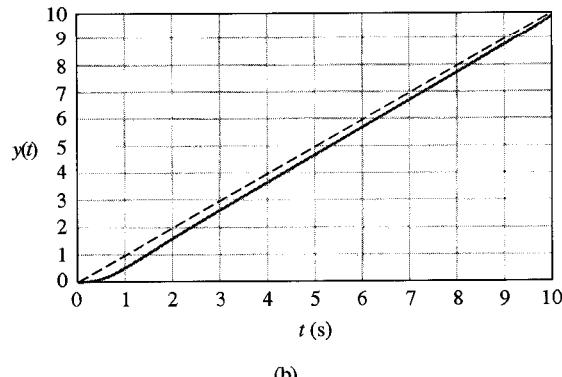


Fig. 10.25 Lugar das raízes para compensador por avanço de fase.



(a)



(b)

Fig. 10.26 (a) Resposta ao degrau e (b) resposta à rampa do sistema de bobina de rotor.

### 10.13 EXEMPLO DE PROJETO: PLOTADORA X-Y

Muitos fenômenos físicos são caracterizados através de parâmetros que são transitórios ou que variam lentamente. Se registradas, estas variações podem ser examinadas com calma e armazenadas como referência ou comparação futura. Para realizar este tipo de registro, foi desenvolvido um certo número de instrumentos eletromecânicos, dentre os quais o registrador X-Y. Neste instrumento, o deslocamento ao longo do eixo dos X representa uma variável de interesse ou o tempo e o deslocamento segundo o eixo dos Y varia em função ainda de uma outra variável [6].

Tais registradores podem ser encontrados em muitos laboratórios registrando dados experimentais como variações de temperatura, variações nos níveis de saída de transdutores e deformações mecânicas *versus* tensões, isto para citar apenas algumas aplicações. O sistema traçador de gráficos HP 7090A está mostrado na Fig. 10.27.

O objetivo de uma plotadora é seguir com exatidão o sinal de entrada à medida que ele varia. Será considerado o projeto do movimento segundo um eixo, uma vez que a dinâmica do movimento de ambos os eixos é idêntica. Assim, serão feitos esforços no sentido de controlar de forma extremamente precisa a posição e o movimento da pena para que ela siga o sinal de entrada.

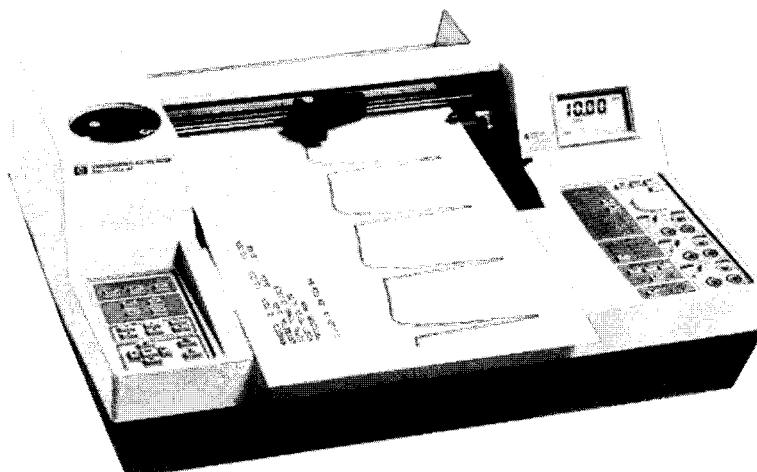


Fig. 10.27 O equipamento HP 7090A Measurement Plotting System ®. Copyright 1986, Hewlett Packard Co. Reproduzido com permissão.

Para se alcançar resultados exatos, o objetivo é obter (1) uma resposta ao degrau com ultrapassagem menor que 5% e um tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 0,5 segundo, e (2) um erro percentual de estado estacionário para um degrau igual a zero. Se estas especificações forem alcançadas, será obtida uma resposta rápida e exata.

Como se deseja movimentar a pena, escolhe-se um motor CC como atuador. O sensor de retroação será um codificador óptico (*encoder*) de 500 linhas. Através da detecção de todas as mudanças de estado das duas saídas em quadratura do codificador, poderão ser identificadas 2000 contagens para cada rotação do eixo do motor. Isto conduz a uma resolução de 0,001 da polegada na extremidade da pena. O codificador é montado no eixo do motor. Como o *encoder* fornece dados digitais, estes são comparados com o sinal de entrada usando-se um microprocessador. Em seguida, propõe-se usar o sinal de diferença calculado pelo microprocessador como o sinal de erro e, em seguida, usar o microprocessador para calcular o algoritmo necessário para se obter o compensador projetado. A saída do compensador é então convertida em um sinal analógico que acionará o motor.

O modelo do sistema de controle de posição com retroação está mostrado na Fig. 10.28. Como a velocidade de cálculo do microprocessador é muito rápida em comparação com a taxa de variação dos sinais do codificador e dos sinais de entrada, admite-se que o modelo para sinais contínuos é suficientemente exato.

O modelo do motor e do porta-pena é

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 10)(s + 1000)}, \quad (10.93)$$

e a tentativa inicial de especificar um compensador recai sobre o uso de um simples ganho

$$G_c(s) = K.$$

Neste caso, há somente um parâmetro para ser ajustado — isto é,  $K$ . Para se obter uma resposta rápida, deve-se ajustar  $K$  de modo que ele forneça duas raízes dominantes no plano  $s$  com uma relação de amortecimento de 0,707, que resultará em uma resposta ao degrau com ultrapassagem de cerca de 4,5%. Na Fig. 10.29 está mostrado um esboço do lugar das raízes (observar o ponto de partida sobre o eixo real).

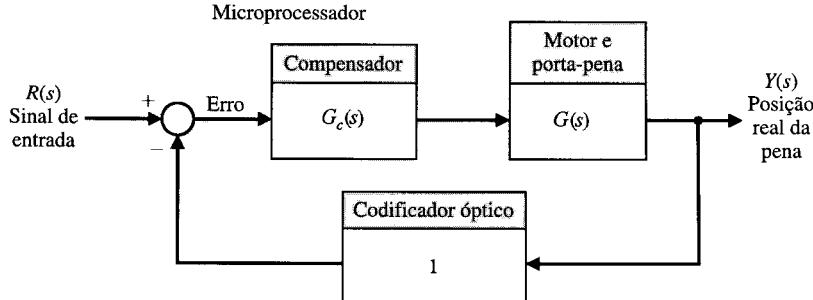


Fig. 10.28 Modelo do controle de uma plotadora de pena.

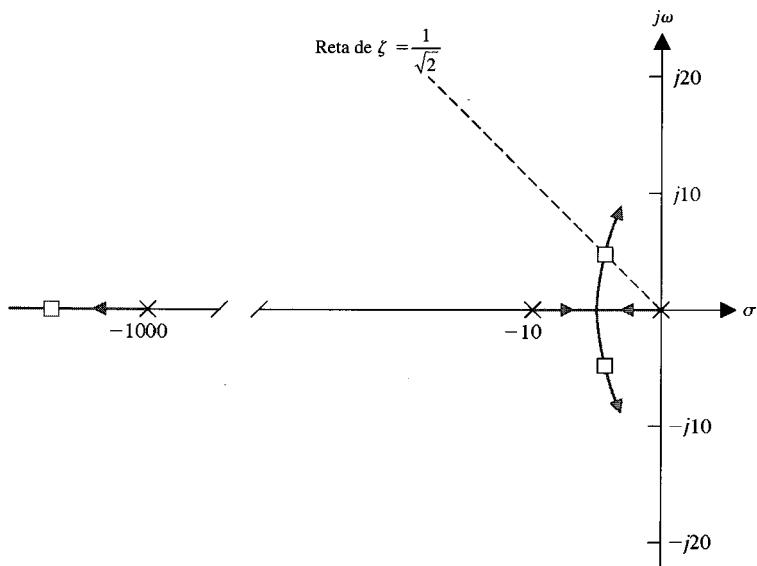


Fig. 10.29 Lugar das raízes para a plotadora de pena, mostrando as raízes com uma relação de amortecimento de  $1/\sqrt{2}$ . As raízes dominantes são  $s = -4,9 \pm j4,9$ .

Ajustando-se o ganho em  $K = 47.200$ , obtém-se um sistema com ultrapassagem de 3,6% para uma entrada em degrau e um tempo de assentamento de 0,8 segundo. Como a função de transferência possui um pôlo na origem, tem-se erro estacionário nulo para uma entrada em degrau.

Este sistema não atende as especificações, assim, será escolhido um compensador que irá reduzir o tempo de assentamento. Escolha-se um compensador por avanço de fase de modo que

$$G_c(s) = \frac{K\alpha(s + z)}{(s + p)}, \quad (10.94)$$

onde  $p = \alpha z$ . Será usado o método da Seção 10.5, que seleciona o compensador de avanço de fase no plano  $s$ . Portanto, posiciona-se o zero em  $s = -20$  e se determina a localização do pôlo,  $p$ , que colocará as raízes dominantes sobre a linha da relação de amortecimento com valor  $1/\sqrt{2}$ . Constatase, assim, que  $p = 60$  e que  $\alpha = 3$ , de modo que

$$G(s)G_c(s) = \frac{142.600(s + 20)}{s(s + 10)(s + 60)(s + 1000)}. \quad (10.95)$$

Obtendo-se a resposta real ao degrau, verifica-se que a ultrapassagem percentual é de 2% e que o tempo de assentamento é de 0,35 segundo, o que atende as especificações. A terceira abordagem de projeto consiste em reconhecer que o codificador pode ser usado para gerar um sinal de velocidade contando-se a taxa segundo a qual as linhas do codificador passam em relação a um ponto fixo. Assim, o microprocessador pode ser usado. Como estão disponíveis os sinais de posição e de velocidade, pode-se descrever o compensador como

$$G_c(s) = K_1 + K_2 s, \quad (10.96)$$

onde  $K_1$  é o ganho do sinal de erro e  $K_2$  é o ganho do sinal de velocidade. Então, pode-se escrever

$$G(s)G_c(s) = \frac{K_2(s + K_1/K_2)}{s(s + 10)(s + 1000)}.$$

Fazendo-se  $K_1/K_2 = 10$ , cancela-se o pôlo em  $s = -10$  e se obtém

$$G(s)G_c(s) = \frac{K_2}{s(s + 1000)}.$$

A equação característica deste sistema é

$$s^2 + 1000s + K_2 = 0, \quad (10.97)$$

e se deseja que  $\zeta = 1/\sqrt{2}$ . Observando-se que  $2\zeta\omega_n = 1000$ , tem-se  $\omega_n = 707$  e  $K_2 = \omega_n^2$ . Portanto, obtém-se  $K_2 = 5 \times 10^5$  e o sistema compensado é

$$G_c G(s) = \frac{5 \times 10^5}{s(s + 1000)}. \quad (10.98)$$

A resposta deste sistema apresentará uma ultrapassagem de 4,3% e um tempo de assentamento de 8 milissegundos.

Os resultados destas três abordagens de projeto de sistema são comparados na Tabela 10.4. O melhor projeto utiliza a retroação de velocidade, e este é o projeto real adotado para a plotadora HP 7090A.

## 10.14 PROJETO DE SISTEMAS USANDO MATLAB

Nesta seção, é ilustrada a compensação de sistemas de controle usando os métodos de resposta de freqüência e do plano  $s$ . Será reconsiderado o exemplo de projeto do bobinador de rotor da Seção 10.12 para ilustrar o uso de scripts em MATLAB para o projeto e o desenvolvimento de sistemas de

**TABELA 10.4 Resultados para Três Projetos**

<b>Sistema</b>	<b>Resposta ao Degrau</b>	
	<b>Ultrapassagem Percentual</b>	<b>Tempo de Assentamento (milissegundos)</b>
Ajuste de ganho	3,6	800
Compensador de ganho e de avanço de fase	2,0	350
Ajuste de ganho mais sinal de velocidade multiplicado pelo ganho $K_2$	4,3	8

controle com boas características de desempenho. Serão examinados os compensadores de avanço e de atraso de fase para este exemplo de projeto e será apresentada a resposta do sistema usando o MATLAB.

#### EXEMPLO 10.13

#### Sistema de controle de enrolamento de rotor

Reconsidere-se o sistema de controle de enrolar rotores mostrado na Fig. 10.24. O objetivo de projeto é alcançar uma exatidão elevada em estado estacionário para uma entrada em rampa. O erro de estado estacionário para uma entrada em rampa unitária,  $R(s) = 1/s^2$ , é

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v},$$

onde

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G_c(s)}{50}.$$

A especificação de desempenho relativa à ultrapassagem e ao tempo de assentamento deve ser considerada, bem como o erro de acompanhamento em estado estacionário. Como é altamente provável que um simples ganho não seja satisfatório, será considerada a compensação utilizando compensadores de avanço e de atraso de fase, usando-se tanto os métodos dos diagramas de Bode como o do traçado do lugar das raízes. A abordagem consiste em desenvolver uma série de scripts em MATLAB como auxílio ao projeto de compensadores.

Considere-se primeiramente um controlador de ganho simples,  $G_c(s)$ , onde

$$G_c(s) = K.$$

O erro de estado estacionário é

$$e_{ss} = \frac{50}{K}.$$

Quanto maior for o valor de  $K$ , menor será o erro de estado estacionário  $e_{ss}$ . Contudo, deve-se levar em conta o efeito que o aumento de  $K$  tem sobre a resposta transitória, como está mostrado na Fig. 10.30. Quando  $K = 500$ , o erro de estado estacionário para uma rampa é de 10%, mas, para uma entrada em degrau a ultrapassagem é de 70% e o tempo de assentamento é de aproximadamente 8 segundos. Considera-se isto um desempenho inaceitável e se muda para a compensação. Os dois tipos de compensadores que serão considerados são os compensadores de avanço e de atraso de fase.

Será tentado inicialmente um compensador por avanço de fase

$$G_c(s) = \frac{K(s + z)}{(s + p)},$$

onde  $|z| < |p|$ . O compensador por avanço de fase fornece a capacidade de melhorar a resposta transitória. Será utilizada uma abordagem no domínio de freqüência para projetar o compensador por avanço de fase.

Deseja-se um erro de estado estacionário menor do que 10% para uma entrada em rampa e  $K_v = 10$ . Juntamente com as especificações de estado estacionário, deseja-se alcançar certas especificações de desempenho: (1) tempo de assentamento (critério dos 2%)  $T_s \leq 3$  segundos e (2) ultrapassagem percentual para uma entrada em degrau  $\leq 10\%$ . Resolvendo-se para  $\zeta$  e  $\omega_n$  usando

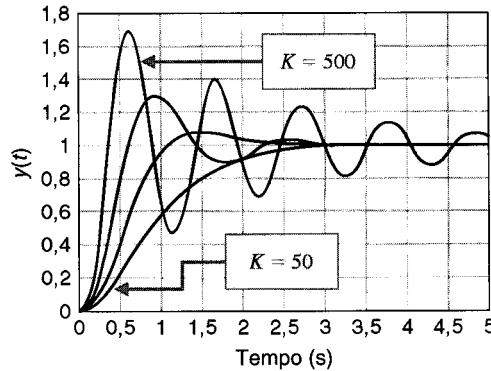
$$U.P. = 100 \exp^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 10 \quad \text{e} \quad T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 3$$

chega-se a  $\zeta = 0,59$  e  $\omega_n = 2,26$ . Obtém-se então o requisito de margem de fase:

$$\phi_{mf} = \frac{\zeta}{0,01} \approx 60^\circ.$$

Os passos que conduzem ao projeto final são os seguintes:

1. Obter os diagramas de Bode do sistema sem compensação com  $K = 500$  e calcular a margem de fase.
2. Determinar o acréscimo necessário de avanço de fase.
3. Calcular  $\alpha$  a partir de  $\sin \phi_m = (\alpha - 1)/(\alpha + 1)$ .
4. Calcular  $10 \log \alpha$  e determinar a freqüência  $\omega_n$  nos diagramas de Bode sem compensação onde a curva de magnitude é igual a  $-10 \log \alpha$ .



(a)

```

K=[50 100 200 500]; % Calcula a resposta para quatro valores de ganho.
numg=[1]; deng=[1 15 50 0];
t=[0:0.1:5];
for i=1:4
    [nums,dens]=series(K(i),1,numg,deng);
    [num,den]=cloop(nums,dens); % Função de transferência a malha fechada
    [y,x]=step(num,den,t);
    Ys(:,i)=y; % Armazena a resposta para o i-ésimo ganho em Ys.
end
plot(t,Ys(:,1),'-',t,Ys(:,2),'-',t,Ys(:,3),'-',t,Ys(:,4),'-')
xlabel('Tempo (s)'), ylabel('y(t)')

```

(b)

**Fig. 10.30** (a) Resposta transitória para o controlador de ganho simples. (b) Script em MATLAB.

5. Na vizinhança de  $\omega_m$  nos diagramas de Bode sem compensação, traçar uma reta cruzando a linha de 0 dB no ponto relativo a  $\omega_m$ , com uma inclinação igual à inclinação corrente mais 20 dB/déca- da. Marcar a interseção da reta com o diagrama de Bode sem compensação para determinar a localização do zero da compensação por avanço de fase. Calcular, em seguida, a posição do pólo do compensador por avanço de fase em  $p = \alpha z$ .
6. Obter os diagramas de Bode compensados e verificar a margem de fase. Repetir quaisquer dos passos, se necessário.
7. Aumentar o ganho para levar em conta a atenuação ( $1/\alpha$ ).
8. Verificar o projeto final por meio de simulação usando funções em degrau e repetir quaisquer passos se necessário.

São utilizados três scripts no projeto. Os scripts de projeto estão mostrados nas Figs. 10.31 a 10.33. O primeiro script é relativo aos diagramas de Bode do sistema sem compensação, como está mostrado na Fig. 10.31. Os diagramas de Bode detalhados do sistema compensado estão mostrados na Fig. 10.32. A Fig. 10.33 mostra um script em MATLAB para a análise da resposta ao degrau. O projeto final do compensador por avanço de fase é

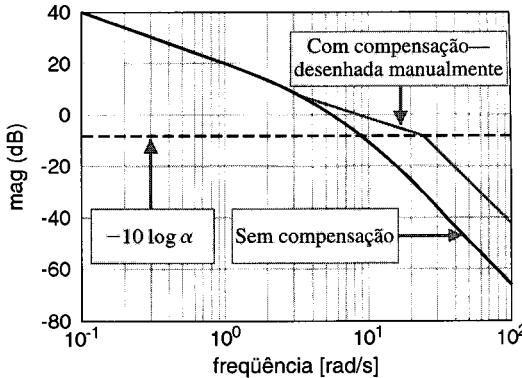
$$G_c(s) = \frac{1800(s + 3,5)}{(s + 25)},$$

onde  $K = 1800$  foi escolhido depois de se utilizar interativamente o script em MATLAB.

As especificações de tempo de assentamento e de ultrapassagem são satisfeitas, mas o valor resultante de  $K_v = 5$  produz um erro estacionário de 20% para uma entrada em rampa. É possível continuar a interação de projeto e refinar um pouco mais o compensador, embora deva ficar claro que o compensador por avanço de fase adicionou uma margem de fase e melhorou a resposta transitória, como fora antecipado.

Para reduzir o erro de estado estacionário, deve-se considerar o compensador por atraso de fase, que possui a forma

$$G_c(s) = \frac{K(s + z)}{(s + p)},$$



(a)

rotorlead.m

```

K=500; numg=[1]; deng=[1 15 50 0];
[num,den]=series(K,1,numg,deng);
w=logspace(-1,2,200);
[mag,phase,w]=bode(num,den,w);
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w);
%
Phi=(60-Pm)*pi/180;
%
alpha=(1+sin(Phi))/(1-sin(Phi));
%
M=-10*log10(alpha)*ones(length(w),1);
%
[mag,phase,w]=bode(num,den,w);
semilogx(w,20*log10(mag),w,M), grid
xlabel('freqüência [rad/s]', ylabel('mag [dB]')

```

Calcula a margem de fase.

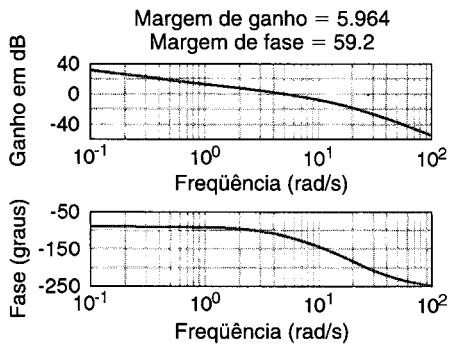
Avanço de fase adicional

Calcula  $\alpha$ .

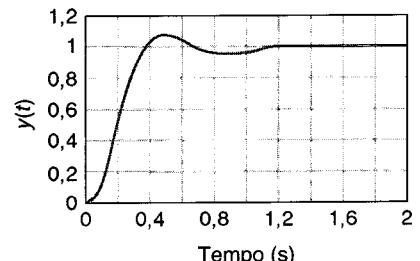
Traça a linha de  $-10 \log(\alpha)$  para auxiliar a localizar  $\omega_m$ .

Fig. 10.31 (a) Diagramas de Bode. (b) Script em MATLAB.

(b)



(a)



(a)

```

K=1800;
numg=[1]; deng=[1 15 50 0];
numgc=K*[1 3.5]; dengc=[1 25];
[num,den]=series(numgc,dengc,numg,deng);
w=logspace(-1,2,200);
[mag,phase,w]=bode(num,den,w);
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w);
%
bode(num,den)
title(['Margem de ganho = ',num2str(Gm), ...
'Margem de fase = ',num2str(Pm)])

```

Aumenta  $K$  para levar em conta a atenuação de  $1/\alpha$ .

Compensador por avanço de fase

(b)

```

K=1800;
%
numg=[1]; deng=[1 15 50 0];
numgc=K*[1 3.5]; dengc=[1 25];
%
[ nums,dens ]=series(numgc,dengc,numg,deng);
[ num,den ]=cloop(nums,dens);
%
t=[0:0.01:2];
step(num,den,t)
ylabel ('y(t)')

```

(b)

Fig. 10.32 Compensador por avanço de fase: (a) diagramas de Bode do sistema compensado, (b) script em MATLAB.

Fig. 10.33 Compensador por avanço de fase: (a) resposta ao degrau, (b) script em MATLAB.

onde  $|p| < |z|$ . Será usada a abordagem do método do lugar das raízes para projetar o compensador por atraso de fase, embora isto possa ser feito, igualmente, usando os diagramas de Bode. A região para posicionar as raízes dominantes desejadas é especificada por

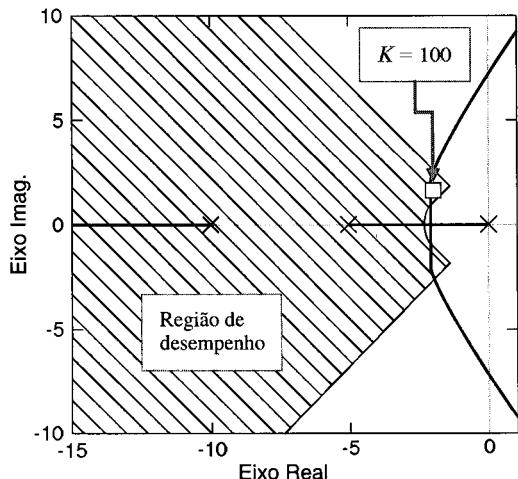
$$\zeta = 0,59 \quad \text{e} \quad \omega_n = 2,26.$$

As etapas de projeto são as seguintes:

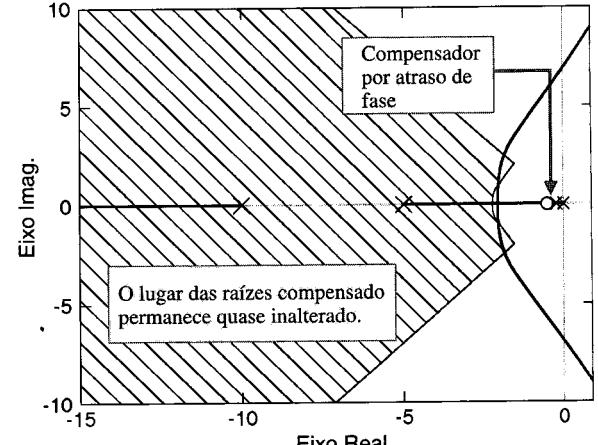
1. Obter o lugar das raízes do sistema sem compensação.
2. Marcar posições adequadas para raízes do sistema sem compensação que estejam na região definida por  $\zeta = 0,59$  e  $\omega_n = 2,26$ .
3. Calcular o ganho de malha no local das raízes desejadas e a constante de erro do sistema,  $K_{vsc}$ .
4. Calcular  $\alpha = K_{vc}/K_{vsc}$ , onde  $K_{vc} = 10$ .
5. Com o valor de  $\alpha$  conhecido, determinar as localizações adequadas para o pólo e o zero do compensador de modo que as raízes do lugar compensado continuem passando nos pontos desejados.
6. Verificar através de simulação e repetir quaisquer dos passos se isto for necessário.

A metodologia de projeto está ilustrada nas Figs. 10.34 a 10.36. Usando a função rlocfind, pode-se calcular o ganho  $K$  associado às raízes escolhidas sobre o lugar das raízes do sistema sem compensação que estão na região de desempenho. Calcula-se então o valor de  $\alpha$  para assegurar que se alcança o valor desejado para  $K_v$ . Colocam-se o pólo e o zero do compensador por atraso de fase para evitar impacto sobre o lugar das raízes do sistema sem compensação. Na Fig. 10.35, o pólo e o zero do compensador estão próximos da origem, em  $z = -0,1$  e  $p = -0,01$ .

As especificações de tempo de assentamento e de ultrapassagem são praticamente atendidas, e  $K_v = 10$ , como desejado. É possível continuar a repetir o procedimento e refinar o compensador um pouco mais, embora deva estar claro que o compensador por atraso de fase melhorou os erros de



(a)



(a)

```

numg=[1]; deng=[1 15 50 0];
axis([-15,1,-10,10]);
clg; rlocus(numg,deng); hold on
%
zeta=0.5912; wn=2.2555;
%
x=[-10:0.1:-zeta*wn]; y=-sqrt(1-zeta^2)/zeta*x;
xc=[-10:0.1:-zeta*wn]; c=sqrt(wn^2-xc.^2);
%
plot(x,y,'.',x,-y,'.',xc,c,'.',xc,-c,'.')

```

(b)

**Fig. 10.34 Compensador por atraso de fase: (a) lugar das raízes sem compensação, (b) script em MATLAB.**

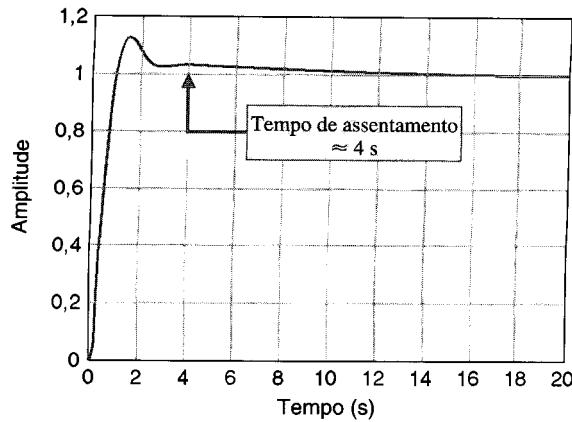
```

numg=[1]; deng=[1 15 50 0];
numgc=[1 0.1]; dengc=[1 0.01];
[num,den]=series(numgc,dengc,numg,deng);
axis([-15,1,-10,10]);
clg; rlocus(num,den); hold on
%
zeta=0.5912; wn=2.2555;
x=[-10:0.1:-zeta*wn]; y=-sqrt(1-zeta^2)/zeta*x;
xc=[-10:0.1:-zeta*wn]; c=sqrt(wn^2-xc.^2);
plot(x,y,'.',x,-y,'.',xc,c,'.',xc,-c,'.')

```

(b)

**Fig. 10.35 Compensador por atraso de fase: (a) lugar das raízes com compensação, (b) script em MATLAB.**



(a)

```

K=100;
%
numg=[1]; deng=[1 15 50 0];
numgc=K*[1 0.1]; dengc=[1 0.01];
%
[nums,dens]=series(numgc,dengc,numg,deng);
[num,den]=cloop(nums,dens);
%
step(num,den)

```

(b)

**Fig. 10.36** Compensador por atraso de fase: (a) resposta ao degrau (b) resposta em MATLAB.

**TABELA 10.5 Resultados de Projeto de Compensador Usando o MATLAB**

Controlador	Ganho, $K$	Avanço de Fase	Atraso de Fase
Ultrapassagem ao degrau	70%	8%	13%
Tempo de assentamento (segundos)	8	1	4
Erro de estado estacionário para rampa	10%	20%	10%
$K_v$	10	5	10

estado estacionário para uma entrada em rampa em relação ao projeto do compensador por avanço de fase. O projeto final do compensador por atraso de fase é

$$G_c(s) = \frac{100(s + 0,1)}{(s + 0,01)}.$$

O desempenho resultante está resumido na Tabela 10.5. ■

## 10.15 EXEMPLO DE PROJETO SEQUENCIAL: SISTEMA DE LEITURA DE ACIONADOR DE DISCO



Neste capítulo será projetado um controlador proporcional e derivativo (PD) para se alcançar a resposta especificada para uma entrada em degrau unitário. As especificações são dadas na Tabela 10.6. O sistema a malha fechada está mostrado na Fig. 10.37. Um filtro prévio é usado para eliminar quaisquer efeitos indesejáveis do termo  $(s + z)$  introduzido na função de transferência a malha fechada. Será utilizado o sistema de resposta rápida sem oscilação da Seção 10.11, onde a função de transferência a malha fechada (Eq. 10.87) é

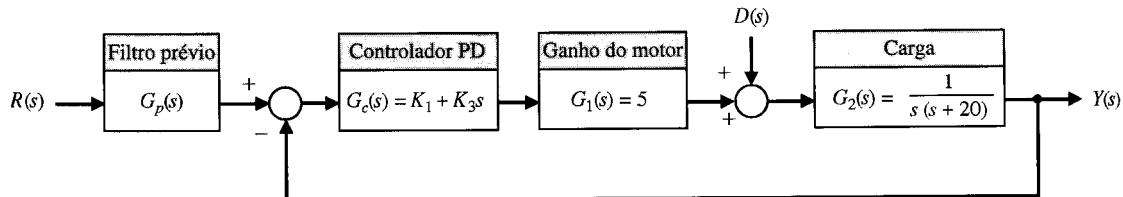
$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \alpha\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (10.99)$$

Para o modelo de segunda ordem mostrado na Fig. 10.37, é necessário que  $\alpha = 1,82$  (ver Tabela 10.2). Então, o tempo de assentamento é

$$\omega_n T_s = 4,82.$$

**TABELA 10.6 Especificações do Sistema de Controle de Acionador de Disco e Desempenho Real**

Medida de Desempenho	Valor Desejado	Resposta Real
Ultrapassagem percentual	Inferior a 5%	0,1%
Tempo de assentamento	Inferior a 150 ms	40 ms
Resposta máxima para uma perturbação unitária	Inferior a $5 \times 10^{-3}$	$6,9 \times 10^{-5}$

**Fig. 10.37 Sistema de controle de ação de disco com controlador PD (modelo de segunda ordem).**

Como se deseja um tempo de assentamento menor que 50 ms, será usado o valor  $\omega_n = 120$ . Espera-se assim  $T_s = 40$  ms. Portanto, o denominador da Eq. (10.99) é

$$s^2 + 218,4s + 14400. \quad (10.100)$$

A equação característica do sistema a malha fechada da Fig. 10.37 é

$$s^2 + (20 + 5K_3)s + 5K_1 = 0. \quad (10.101)$$

Igualando-se as Eqs. (10.100) e (10.101), tem-se

$$218,4 = 20 + 5K_3$$

e

$$14400 = 5K_1.$$

Por conseguinte,  $K_1 = 2880$  e  $K_3 = 39,68$ . Observa-se, então, que

$$G_c(s) = 39,68(s + 72,58).$$

O filtro prévio será, então,

$$G_p(s) = \frac{72,58}{(s + 72,58)}.$$

**TABELA 10.7 Um Resumo das Características das Estruturas de Compensação por Avanço de Fase e Atraso de Fase**

	Compensação	
	Avanço de Fase	Atraso de Fase
Abordagem	Adição de ângulo de avanço de fase próximo da freqüência de cruzamento nos diagramas de Bode. Acrescenta uma estrutura de avanço de fase para obter raízes dominantes desejadas no plano $s$	Adição de ângulo de atraso de fase para se obter uma constante de erro aumentada mantendo-se as raízes dominantes desejadas no plano $s$ ou a margem de fase desejada nos diagramas de Bode
Resultados	1. Aumenta a banda passante do sistema 2. Aumenta o ganho nas freqüências mais altas	1. Diminui a banda passante do sistema
Vantagens	1. Conduz à resposta desejada 2. Aumenta a resposta dinâmica	1. Suprime os ruídos de alta freqüência 2. Reduz o erro de estado estacionário
Desvantagens	1. Requer amplificação adicional do ganho 2. Aumenta a banda passante e, por conseguinte, a susceptibilidade a ruídos 3. Pode requerer grandes valores de componentes para estruturas $RC$	1. Torna mais lenta a resposta transitória 2. Pode requerer grandes valores de componentes para estruturas $RC$
Aplicações	1. Quando se deseja resposta transitória rápida	1. Quando as constantes de erro são especificadas
Não aplicável	1. Quando a fase diminui rapidamente nas proximidades da freqüência de cruzamento	1. Quando não existir faixa de freqüências baixas onde a fase for igual à margem de fase desejada

O modelo despreza o campo do motor. Não obstante, este projeto é muito exato. A resposta real é dada na Tabela 10.6. Todas as especificações são satisfeitas.

## 10.16 SUMÁRIO

Neste capítulo foram consideradas diversas abordagens alternativas para o projeto de sistemas de controle com retroação. Nas primeiras duas seções, foram discutidos os conceitos de projeto e compensação e assinalados diversos casos de projeto que tinham sido concluídos nos capítulos anteriores. Examinou-se então a possibilidade de introduzir estruturas de compensação em cascata nas malhas de retroação dos sistemas de controle. As estruturas de compensação em cascata são úteis para alterar a forma do lugar das raízes ou da resposta de freqüência de um sistema. A estrutura de avanço de fase e a estrutura de atraso de fase foram consideradas em detalhe como candidatas a compensadores de sistemas. Em seguida foi estudada a compensação de sistemas usando uma estrutura de avanço de fase no plano  $s$  através dos diagramas de Bode e do lugar das raízes no plano  $s$ . Observou-se que o compensador de avanço de fase aumenta a margem de fase do sistema e, assim, fornece estabilidade adicional. Quando as especificações de projeto incluem uma constante de erro, o projeto de uma estrutura de avanço de fase é realizado mais facilmente nos diagramas de Bode. Alternativamente, quando não se especifica a constante de erro mas se especificam o tempo de assentamento e a ultrapassagem da resposta para uma entrada em degrau, o projeto é conduzido de forma mais rápida no plano  $s$ . Quando se especificam valores elevados de constantes de erro nos sistemas com retroação, usualmente é mais fácil compensar o sistema usando estruturas de integração (atraso de fase). Observou-se, também, que a compensação por avanço de fase aumenta a banda passante do sistema, enquanto a compensação por atraso de fase diminui a banda passante do sistema. A banda passante pode ser muitas vezes um fator importante quando há ruído no sinal de entrada e ruído gerado no interior do sistema. Observou-se ainda que se obtém um sistema satisfatório quando a curva assintótica de magnitude do sistema compensado cruza a linha de 0 dB com uma inclinação de  $-20 \text{ dB/década}$ . As características das estruturas de avanço de fase e de atraso de fase estão resumidas na Tabela 10.7. Circuitos com amplificador operacional de avanço de fase e de atraso de fase e para compensadores PI e PD estão resumidos na Tabela 10.8 [1]. O uso destes controladores tem sido amplamente demonstrado neste e nos capítulos anteriores. Estes circuitos com amplificador operacional são usados largamente na prática industrial para implementar o compensador  $G_c(s)$ .

**TABELA 10.8 Circuitos com Amplificadores Operacionais para Compensadores**

Tipo de Controlador	$G_c(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$	
PD	$G_c = \frac{R_4 R_2}{R_3 R_1} (R_1 C_1 s + 1)$	
PI	$G_c = \frac{R_4 R_2 (R_2 C_2 s + 1)}{R_3 R_1 (R_2 C_2 s + 1)}$	
Avanço de fase ou atraso de fase	$G_c = \frac{R_4 R_2 (R_1 C_1 s + 1)}{R_3 R_1 (R_2 C_2 s + 1)}$	

**EXERCÍCIOS**

**E10.1** Um sistema de controle com retroação negativa possui uma função de transferência

$$G(s) = \frac{K}{(s + 3)}.$$

Seleciona-se um compensador,

$$G_c(s) = \frac{s + a}{s},$$

a fim de se obter erro estacionário nulo para uma entrada em degrau. Selecionar  $a$  e  $K$  de modo que a ultrapassagem a um degrau seja aproximadamente 5% e o tempo de assentamento (critério dos 2%) seja de aproximadamente 1 segundo.

**Resposta:**  $K = 5$ ,  $a = 6,4$

**E10.2** Um sistema de controle com retroação unitária negativa possui um processo a controlar

$$G(s) = \frac{400}{s(s + 40)},$$

e se deseja usar uma compensação proporcional e integral em que

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s}.$$

Observe-se que o erro de estado estacionário deste sistema para uma entrada em rampa é zero. (a) Fazer  $K_2 = 1$  e obter o valor adequado para  $K_1$  de modo que a resposta ao degrau tenha uma ultrapassagem de aproximadamente 20%. (b) Qual o tempo de assentamento (critério dos 2%) esperado do sistema compensado?

**Resposta:**  $K_1 = 0,5$

**E10.3** Um sistema de controle com retroação negativa unitária possui uma função de transferência do processo a controlar

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{s + 1},$$

e é proposto usar um compensador para se obter uma ultrapassagem de 5% para uma entrada em degrau. O compensador é [4]

$$G_c(s) = K \left( 1 + \frac{1}{\tau s} \right),$$

que fornece um controle proporcional e integral. Mostrar que uma solução é  $K = 0,5$  e  $\tau = 1$ .

**E10.4** Considere-se o sistema com retroação unitária negativa com

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 2)(s + 3)},$$

onde se faz  $K$  igual 20 a fim de se obter um valor especificado  $K_v = 3,33$ . Deseja-se adicionar um compensador de avanço e atraso de fase

$$G_c(s) = \frac{(s + 0,15)(s + 0,7)}{(s + 0,015)(s + 7)}.$$

Mostrar que a margem de ganho do sistema compensado é de 24 dB e que a margem de fase é de  $75^\circ$ .

**E10.5** Considere-se um sistema com retroação unitária com a função de transferência

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 2)(s + 4)}.$$

Deseja-se obter as raízes dominantes com  $\omega_n = 3$  e  $\zeta = 0,5$ . Quer-se obter um valor de  $K_v = 2,7$ . Mostrar que é necessário um compensador

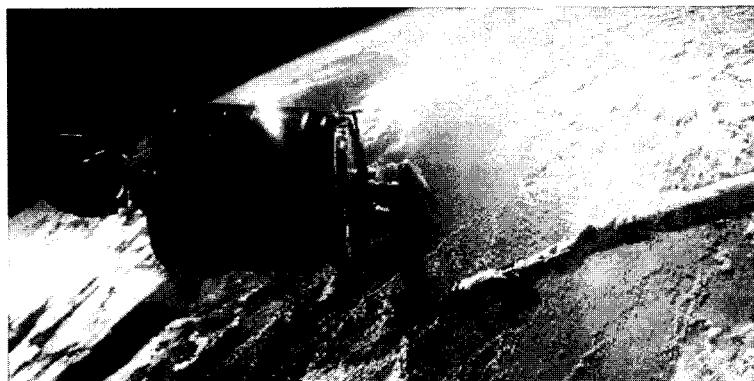
$$G_c(s) = \frac{7,53(s + 2,2)}{(s + 16,4)}.$$

Determinar o valor de  $K$  que deveria ser selecionado.

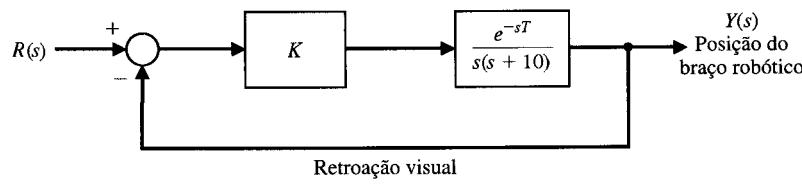
**Resposta:**  $K = 22$

**E10.6** Reconsiderar o sistema de controle do túnel de vento do Problema 7.31. Quando  $K = 326$ , determinar  $T(s)$  e estimar a ultrapassagem e o tempo de assentamento (critério dos 2%) esperados. Comparar os valores estimados com a ultrapassagem real de 60% e o tempo de assentamento de 4 segundos. Explicar as discrepâncias com os valores estimados.

**E10.7** Astronautas da NASA resgatam um satélite e o levam para o interior do compartimento de carga do ônibus espacial, como está mostrado na Fig. E10.7(a). Um astronauta no interior do ônibus controla o braço robótico sobre o qual é visto sentado o astronauta Joseph Allen. Um modelo do sistema de controle com retroação está mostrado na Fig. E10.7(b). Determinar o valor de



(a)



(b)

**Fig. E10.7** Captura de um satélite.

$K$  que resultará em uma margem de fase de  $50^\circ$  quando  $T = 0,1$  segundo.

**Resposta:**  $K = 37$

**E10.8** Um sistema com retroação unitária negativa possui um processo a controlar

$$G(s) = \frac{2257}{s(\tau s + 1)},$$

onde  $\tau = 2,8$  ms. Selecionar um compensador

$$G_c(s) = K_1 + K_2/s,$$

tal que as raízes dominantes da equação característica possuam  $\zeta$  igual a  $1/\sqrt{2}$ . Traçar o gráfico de  $y(t)$  para uma entrada em degrau.

**E10.9** Um sistema de controle com um controlador é mostrado na Fig. E10.9. Selecionar  $K_1$  e  $K_2$  de modo que a ultrapassagem para um degrau de entrada seja igual a 5% e a constante de velocidade,  $K_v$ , seja igual a 5. Verificar os resultados do projeto.

**E10.10** Um sistema de controle com um controlador é mostrado na Fig. E10.10. Será selecionado  $K_2 = 4$  com o objetivo de se ter um erro estacionário razoável para uma entrada em degrau [8]. Determinar  $K_1$  de modo a obter uma margem de fase de  $60^\circ$ . Determinar o tempo de pico e a ultrapassagem percentual deste sistema.

**E10.11** Um sistema com retroação unitária possui

$$G(s) = \frac{1350}{s(s + 2)(s + 30)}.$$

Seleciona-se uma estrutura de avanço de fase tal que

$$G_c(s) = \frac{(1 + 0,25s)}{(1 + 0,025s)}.$$

Determinar o pico de magnitude e a banda passante da resposta de freqüência do sistema a malha fechada usando:

(a) Carta de Nichols, e (b) um gráfico da resposta de freqüência a malha fechada.

**Resposta:**  $M\omega = 2,3$  dB,  $\omega_b = 22$

**E10.12** O controle de um sistema de ignição de um automóvel possui retroação negativa unitária e uma função de transferência de malha  $G_c(s)G(s)$ , onde

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 10)}, \quad \text{e}$$

$$G_c(s) = K_1 + K_2/s.$$

Um projetista seleciona  $K_2/K_1 = 0,5$  e pede que o leitor determine  $KK_1$  de modo que as raízes dominantes tenham um  $\zeta$  de  $1/\sqrt{2}$  e um tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 2 segundos.

**E10.13** O projeto do Exemplo 10.3 determinou uma estrutura de avanço de fase a fim de se obter a localização das raízes dominantes desejadas usando um compensador em cascata  $G_c(s)$  na configuração de sistema mostrada na Fig. 10.1(a). A mesma estrutura de avanço de fase poderia ser obtida se fosse utilizada a configuração de compensação na retroação da Fig. 10.1(b). Determinar a função de transferência a malha fechada,  $T(s) = Y(s)/R(s)$ , de ambas as configurações em cascata e em retroação e mostrar como a função de transferência de cada configuração difere. Explicar como a resposta para uma entrada em degrau,  $R(s)$ , será diferente em cada sistema.

**E10.14** Um robô será operado pela NASA na construção de uma estação lunar permanente. O sistema de controle de posição para a ferramenta da garra está mostrado na Fig. 10.1(a), onde  $H(s) = 1$  e

$$G(s) = \frac{3}{s(s + 1)(0,5s + 1)}.$$

Determinar uma estrutura de compensação por atraso de fase,  $G_c(s)$ , que fornecerá uma margem de fase de  $45^\circ$ .

$$\text{Resposta: } G_c(s) = \frac{1 + 20s}{1 + 106s}$$

**E10.15** Um sistema de controle com retroação unitária possui uma função de transferência do processo a controlar

$$G(s) = \frac{40}{s(s + 2)}.$$

Deseja-se alcançar um erro de estado estacionário para uma rampa,  $r(t) = At$ , de menos de  $0,05A$  e uma margem de fase de  $30^\circ$ . Deseja-se ter uma freqüência de cruzamento,  $\omega_c$ , de  $10$  rad/s. Usar os métodos da Seção 10.9 para determinar se é necessário um compensador de avanço de fase ou de atraso de fase.

**E10.16** Reconsiderem-se o sistema e as especificações do Exercício 10.15 quando a freqüência de cruzamento necessária for 2 rad/s.

**E10.17** Reconsidere-se o sistema do Exercício 10.9. Selecionar  $K_1$  e  $K_2$  de modo que a resposta ao degrau seja do tipo rápido e sem oscilações e o tempo de assentamento (critério dos 2%) seja menor que 2 segundos.

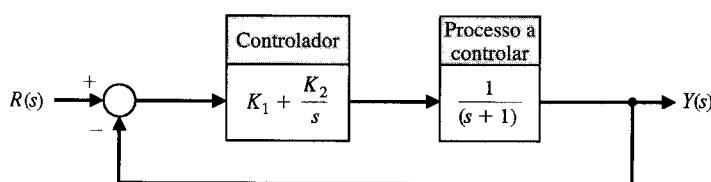


Fig. E10.9 Projeto de um controlador.

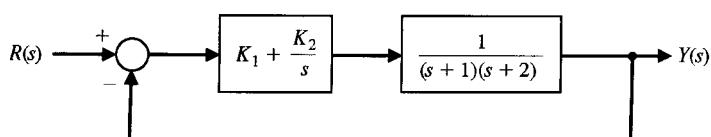


Fig. E10.10 Projeto de um controlador PI.

**PROBLEMAS**

**P10.1** O projeto de um módulo de excursão lunar é um problema de controle interessante. O sistema de controle de atitude do veículo lunar está mostrado na Fig. P10.1. O amortecimento do veículo é insignificante e a atitude é controlada por meio de jatos de gás. O torque, em uma primeira aproximação, será considerado proporcional ao sinal  $V(s)$  de modo que  $T(s) = K_2 V(s)$ . O ganho de malha foi selecionado pelo projetista com o objetivo de fornecer um amortecimento adequado. É necessária uma relação de amortecimento de  $\zeta = 0,6$  com um tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 2,5 segundos. Usando uma estrutura de compensação de avanço de fase, selecionar o compensador necessário  $G_c(s)$  empregando (a) técnicas de resposta de freqüência e (b) métodos do lugar das raízes.

**P10.2** O transporte de um registrador de fita magnética para os computadores modernos requer um sistema de controle de resposta rápida e de alta precisão. Os requisitos para um sistema de transporte específico são os seguintes: (1) A fita deve parar ou partir em 10 ms; (2) deve ser possível ler 45.000 caracteres por segundo. Este sistema foi discutido no Problema P7.11. Deseja-se fazer  $J = 5 \times 10^{-3}$ , e  $K_1$  é ajustado com base no erro máximo admissível para uma entrada em velocidade. Neste caso se deseja manter um erro estacionário de velocidade de menos de 5%. Será usado um tacômetro e definidos  $K_a = 50.000$  e  $K_2 = 1$ . Para se obter um desempenho adequado, insere-se um compensador  $G_c(s)$  imediatamente após a saída da fotocélula. Selecionar um compensador  $G_c(s)$  de modo que a ultrapassagem do sistema para uma entrada em degrau seja inferior a 25%. Será admitido que  $\tau_1 = \tau_a = 0$ .

**P10.3** Uma versão simplificada do controle da velocidade de atitude de um avião do tipo F-94 ou X-15 está mostrada na Fig. P10.3 Quando o veículo estiver voando com uma velocidade quatro vezes a

velocidade do som (Mach 4) a uma altitude de 100.000 pés (cerca de 30.000 m), os parâmetros são [30]

$$\frac{1}{\tau_a} = 1,0, \quad K_1 = 1,0,$$

$$\zeta \omega_a = 1,0, \quad \omega_a = 4.$$

Projetar um compensador,  $G_c(s)$ , de modo que a resposta para uma entrada em degrau apresente uma ultrapassagem inferior a 5% e um tempo de assentamento (critério dos 2%) inferior a 5 segundos.

**P10.4** Embreagens de partículas magnéticas são dispositivos atuadores para grandes requisitos de potência, uma vez que podem oferecer comumente 200 W de potência mecânica de saída. As embreagens de partículas fornecem relação torque-inércia elevada e resposta com constante de tempo rápida. A Fig. P10.4 mostra um sistema de posicionamento para hastes de controle de um reator nuclear, com embreagem de partículas. O motor aciona duas carcaças da embreagem que giram em sentido contrário. As carcaças da embreagem estão engrenadas através de um trem de engrenagens paralelo e a direção da saída do servomecanismo depende de qual embreagem esteja energizada. A constante de tempo de uma embreagem de 200 W é  $\tau = 1/40$  segundo. As constantes são tais que  $K_T n/J = 1$ . Deseja-se que a ultrapassagem máxima para uma entrada em degrau fique situada na faixa entre 10% e 20%. Projetar uma estrutura de compensação de modo que o sistema seja estabilizado adequadamente. O tempo de assentamento (critério dos 2%) deve ser menor ou igual a 2 segundos.

**P10.5** Uma mesa rotativa estabilizada de precisão usa um tacômetro preciso e um motor de torque CC de acionamento direto, como está mostrado na Fig. P10.5. Deseja-se manter uma elevada exatidão

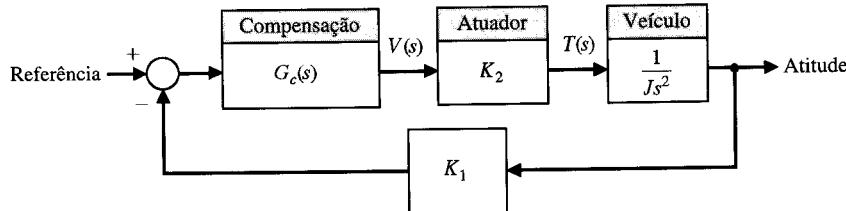


Fig. P10.1 Sistema de controle de atitude para um módulo de excursão lunar.

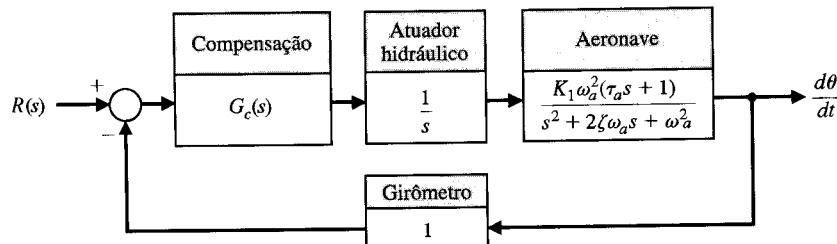


Fig. P10.3 Sistema de controle de atitude de avião.

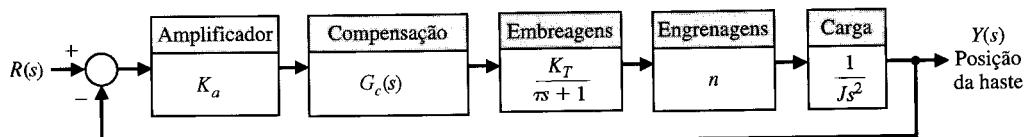


Fig. P10.4 Controle de haste para reator nuclear.

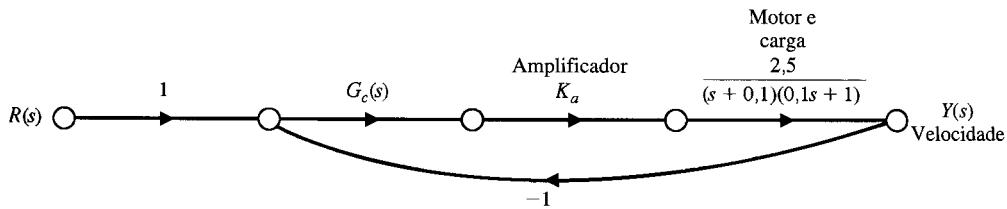


Fig. P10.5 Mesa de velocidade estabilizada.

de estado estacionário para o controle de velocidade. Para se obter um projeto com erro estacionário nulo ao degrau seleciona-se um compensador proporcional e integral, como discutido na Seção 10.6. Selecionar as constantes de ganho apropriadas de modo que o sistema apresente uma ultrapassagem de aproximadamente 10% e um tempo de acomodação (critério dos 2%) na faixa de 0,4 a 0,6 segundo.

**P10.6** Repetir o Problema 10.5 usando uma estrutura de compensação por avanço de fase e comparar os resultados.

**P10.7** A malha de controle principal de uma usina de energia nuclear inclui um retardo devido à necessidade de transportar o fluido do reator para o ponto de medição (ver Fig. P10.7). A função de transferência do controlador é

$$G_1(s) = \left( K_1 + \frac{K_2}{s} \right).$$

A função de transferência do reator e do retardo é

$$G(s) = \frac{e^{-sT}}{\tau s + 1},$$

onde  $T = 0,4$  segundo e  $\tau = 0,2$  segundo. Usando métodos de resposta de frequência, projetar o controlador de modo que a ultrapassagem do sistema seja inferior a 10%. Estimar o tempo de assentamento (critério dos 2%) do sistema projetado. Determinar os valores reais de ultrapassagem e de tempo de assentamento.

**P10.8** Um processo de reator químico cuja produção é função da taxa de adição do catalisador está mostrado no diagrama de blocos da Fig. P10.8 [11]. O tempo de retardo é  $T = 50$  segundos e a constante de tempo,  $\tau$ , vale aproximadamente 40 segundos. O ganho do processo é  $K = 1$ . Projetar uma compensação usando os métodos dos diagramas de Bode no sentido de obter uma resposta adequada do sistema. Deseja-se ter um erro de estado estacionário para uma entrada em degrau,  $R(s) = A/s$ , menor que  $0,10A$ . Estimar o tempo de acomodação para o sistema com compensação.

**P10.9** O movimento do cabeçote de um torno controlado numericamente constitui um interessante problema para se alcançar a exatidão suficiente [2, 26]. Um diagrama de blocos do sistema de controle o cabeçote está mostrado na Fig. P10.9. A relação de engrenagens é  $n = 0,1$ ,  $J = 10^{-3}$  e  $b = 10^{-2}$ . É necessário alcançar uma exatidão de  $5 \times 10^{-4}$  da polegada e, portanto, é especificada uma exatidão de posição em estado estacionário de 2,5% para uma entrada em rampa. Projetar um compensador em cascata a ser inserido antes dos retificadores controlados de silício a fim de se obter uma resposta para um comando em degrau com ultrapassagem inferior a 5%. Uma relação de amortecimento adequada para este sistema é 0,7. O ganho dos retificadores controlados de silício é  $K_R = 5$ . Projetar um compensador de atraso de fase adequado usando: (a) o método dos diagramas de Bode e (b) o método do plano  $s$ .

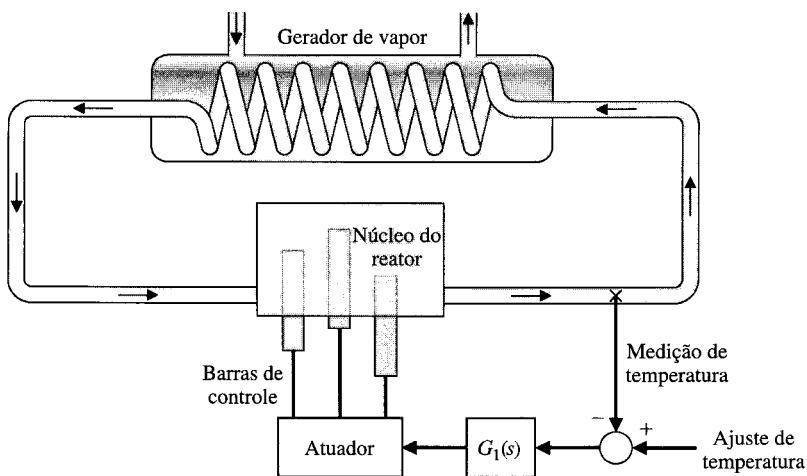


Fig. P10.7 Controle de reator nuclear.

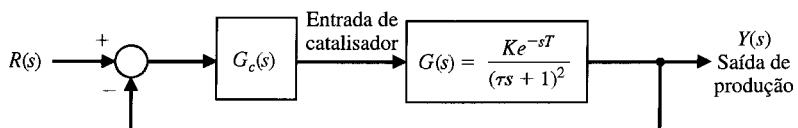


Fig. P10.8 Controle de reator químico.

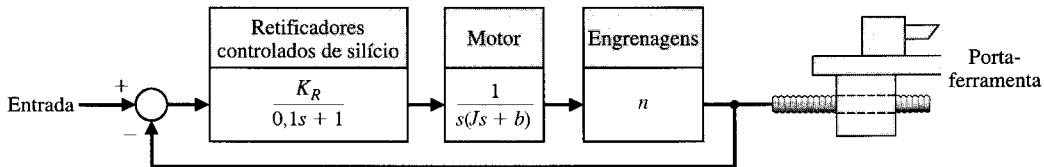


Fig. P10.9 Cabeçote de torno com deslocamento controlado.

**P10.10** O HS *Denison*, mostrado na Fig. P10.10(a), é uma grande embarcação de 80 toneladas, com hidrofólio, construída pela Grumman Corp. para a U.S. Maritime Administration. O *Denison* é capaz de operar em mares com ondas de 9 pés (cerca de 3 metros) a uma velocidade de 60 nós (cerca de 110 km/h) como resultado de um sistema de controle para estabilização automática. A estabilização é obtida por meio de superfícies móveis nos hidrofólios principais e pelo ajuste no hidrofólio da popa. O sistema de controle de estabilização mantém um deslocamento suave nivelado em mares revoltos. Assim, foi projetado um sistema que minimiza os desvios em relação a uma força de sustentação constante ou, de modo equivalente, minimiza o ângulo de arfagem  $\theta$ . Um diagrama de blocos do sistema de controle da sustentação está mostrado na Fig. P10.10(b). A resposta desejada do sistema para uma perturbação de onda é um deslocamento do barco com nível constante. Estabelecer um conjunto razoável de especificações e projetar um compensador  $G_c(s)$  de modo que o desempenho do sistema seja adequado. Admitir que a perturbação é devida às ondas com uma frequência  $\omega = 6$  rad/s.

**P10.11** Um sistema com retroação da forma mostrada na Fig. 10.1(a) possui um processo a controlar

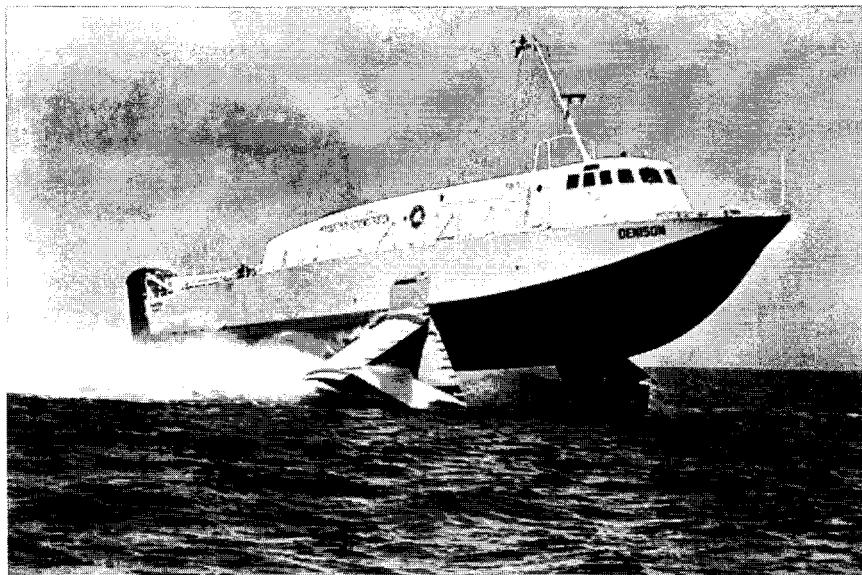
$$G(s) = \frac{4,19}{s(s + 1)(s + 5)}.$$

(a) Determinar a resposta ao degrau quando  $G_c(s) = 1$  e calcular o tempo de assentamento e o estado estacionário para uma entrada em rampa  $r(t) = t$ ,  $t > 0$ . (b) Projetar uma estrutura de atraso de fase usando o método do lugar das raízes de modo que a constante de velocidade seja aumentada para 8,4. Determinar o tempo de assentamento do sistema compensado (usar o critério dos 2%).

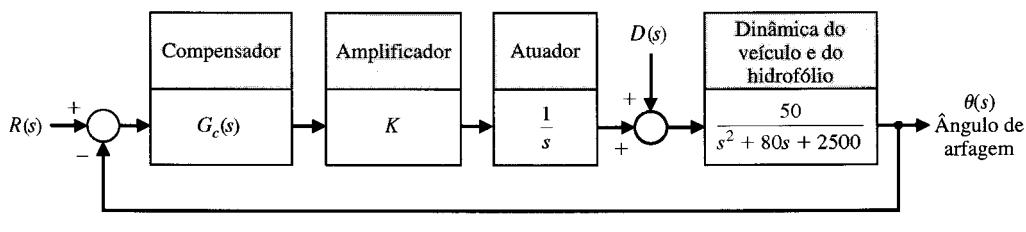
**P10.12** Um sistema com retroação da forma mostrada na Fig. 10.1(a) possui um processo a controlar

$$G(s) = \frac{160}{s^2}.$$

Selecionar um compensador de avanço e atraso de fase de modo que a ultrapassagem percentual para uma entrada em



(a)



(b)

Fig. P10.10 (a) O hidrofólio HS *Denison*. (Foto por cortesia da Grumman Aircraft Engineering Corp.) (b) Um diagrama de blocos do sistema de controle da sustentação.

degrau seja menor que 5% e o tempo de assentamento (critério dos 2%) seja menor que 1 segundo. Também é desejável que a constante de aceleração,  $K_a$ , seja maior que 7500 (ver Tabela 5.5).

**P10.13** Um sistema com retroação unitária possui um processo a controlar

$$G(s) = \frac{20}{s(1 + 0,1s)(1 + 0,05s)}.$$

Selecionar um compensador  $G_c(s)$  de modo que a margem de fase seja pelo menos igual a  $75^\circ$ . Usar um compensador de avanço de fase de dois estágios

$$G_c(s) = \frac{K(1 + s/\omega_1)(1 + s/\omega_3)}{(1 + s/\omega_2)(1 + s/\omega_4)}.$$

É necessário que o erro para uma entrada em rampa seja de 1/2% da magnitude da rampa ( $K_v = 200$ ).

**P10.14** O ensaio de materiais requer o projeto de sistemas de controle que possam reproduzir fielmente os ambientes de operação normais a que serão submetidas as amostras, sobre uma variedade de parâmetros das amostras [26]. Do ponto de vista do projetista de sistemas de controle, uma máquina de ensaio de materiais pode ser considerada um servomecanismo no qual se deseja que a forma de onda do carregamento siga o sinal de referência. O sistema está mostrado na Fig. P10.14.

(a) Determinar a margem de fase do sistema com  $G_c(s) = K$ , escolhendo  $K$  de modo que se obtenha uma margem de fase de  $50^\circ$ . Determinar a banda passante do sistema neste projeto.  
 (b) O requisito adicional introduzido é que a constante de velocidade,  $K_v$ , seja igual a 2,0. Projetar uma estrutura de atraso de fase de modo que a margem de fase seja  $50^\circ$  e  $K_v = 2$ .

**P10.15** Para o sistema descrito no Problema 10.14, o objetivo é alcançar uma margem de fase de  $50^\circ$  com o requisito adicional de que o tempo de assentamento no interior de uma faixa de 2% em torno do valor final seja menor que 4 segundos. Projetar uma estrutura de avanço de fase para atender as especificações. Como antes, é necessário  $K_v = 2$ .

**P10.16** Um robô com um braço estendido é submetido a uma carga pesada, cujo efeito é o de uma perturbação, como está mostrado na Fig. P10.16 [25]. Fazer  $R(s) = 0$  e projetar  $G_c(s)$  de modo que o efeito da perturbação seja inferior a 10% do efeito sobre o sistema a malha aberta.

**P10.17** Um motorista e um carro podem ser representados pelo modelo simplificado mostrado na Fig. P10.17 [18]. O objetivo é conseguir ajustar a velocidade para uma entrada em degrau com menos de 10% de ultrapassagem e um tempo de assentamento (critério dos 2%) de 1 segundo. Selecionar um controlador proporcional e integral (PI) que conduza ao atendimento destas especificações. Para o controlador selecionado, determinar a resposta real (a) com  $G_p(s) = 1$  e (b) com um filtro prévio  $G_p(s)$  que remove o zero da função de transferência a malha fechada  $T(s)$ .

**P10.18** Um sistema de controle com retroação unitária para um robô submarino possui um processo a controlar com uma função de transferência de terceira ordem [22]:

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 10)(s + 50)}.$$

Deseja-se que a ultrapassagem seja aproximadamente 7,5% para uma entrada em degrau e que o tempo de assentamento do sistema (critério dos 2%) seja de 400 ms. Determinar um compensador de avanço de fase adequado usando métodos do lugar das raízes. Fazer com que o zero do compensador esteja localizado em  $s = -15$  e determinar o pôlo do compensador. Determinar o valor de  $K_v$  resultante para o sistema.

**P10.19** A NASA está desenvolvendo manipuladores remotos que podem ser usados para estender a mão e o poder da humanidade através do espaço, por meio do rádio. O conceito de manipulador remoto está mostrado na Fig. P10.19(a) [12, 25]. O sistema de controle a malha fechada está mostrado esquematicamente na Fig. P10.19(b). Admitindo uma distância média de 238.855 milhas (cerca de 384.000 km) da Terra à Lua, o retardo  $T$  na transmissão de um sinal de comunicação é de 1,28 segundo. O operador usa uma haste de controle para controlar remotamente

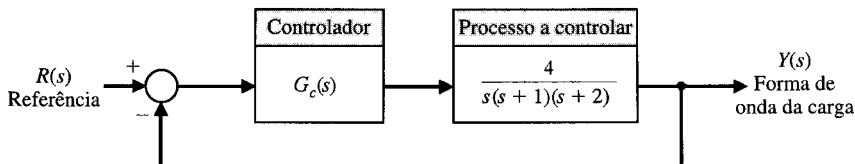


Fig. P10.14

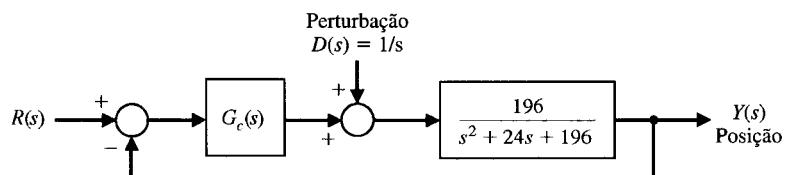


Fig. P10.16 Controle de um robô.

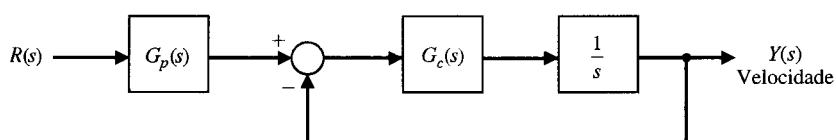
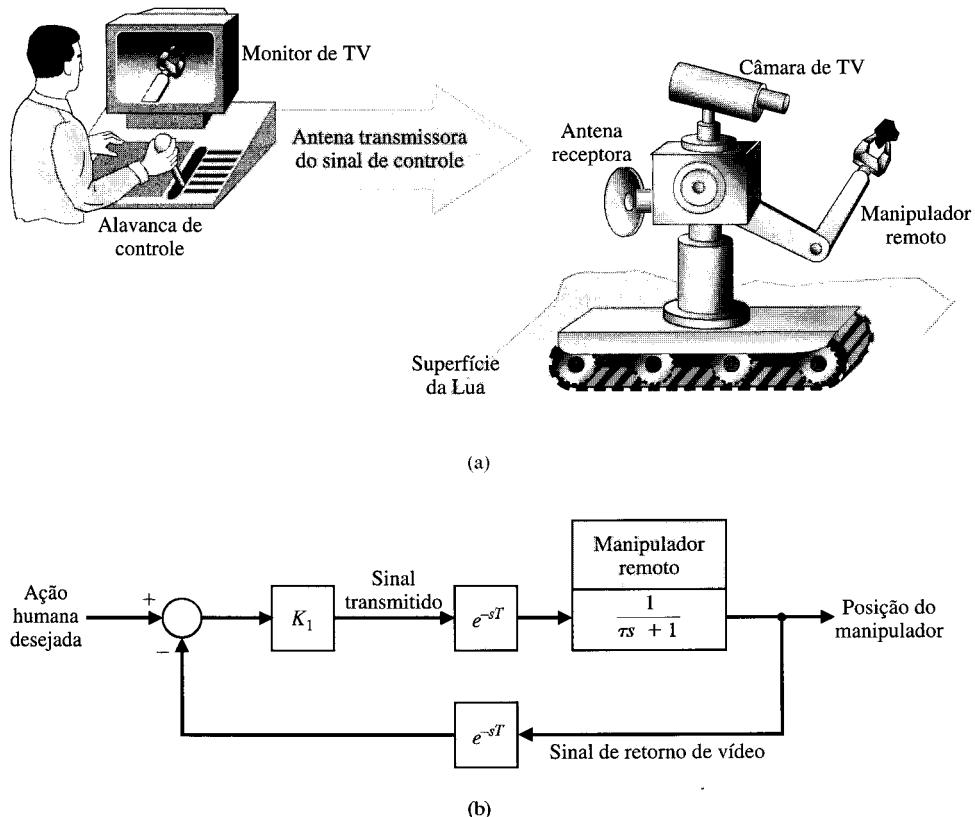
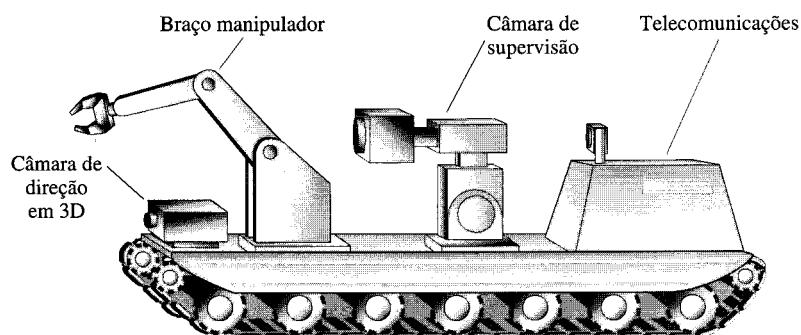


Fig. P10.17 Controle de velocidade de um automóvel.



**Fig. P10.19** (a) Diagrama conceitual de um manipulador remoto na Lua controlado por uma pessoa na Terra. (b) Diagrama de retroação de um sistema de controle de manipulador remoto, com  $\tau$  = retardo de transmissão do sinal de vídeo.



**Fig. P10.20** Robô controlado remotamente para usinas nucleares.

o manipulador colocado na Lua para auxiliar experimentos de geológicos<sup>1</sup> e um monitor de TV para ter acesso à resposta do manipulador. A constante de tempo do manipulador é de 1/4 segundo.

(a) Ajustar o ganho  $K_1$  de modo que o sistema possua uma margem de fase de  $30^\circ$ . Calcular o erro de estado estacionário percentual deste sistema para uma entrada em degrau. (b) Para reduzir a 5% o erro estacionário para um comando de posição, adicionar uma estrutura de compensação por atraso de fase em cascata com  $K_1$ . Traçar a resposta ao degrau.

**P10.20** Tem havido desenvolvimentos significativos na aplicação da tecnologia robótica aos problemas de manutenção em usinas nu-

cleares. Há muito a tecnologia robótica vem sendo usada na indústria nuclear, principalmente no reprocessamento de combustível e na gestão de lixo nuclear. Atualmente a indústria está começando a aplicar a tecnologia em áreas como inspeção de contenção, manutenção de reatores, descontaminação de instalações e atividades de recuperação de acidentes. Estes desenvolvimentos sugerem que a aplicação de dispositivos operados remotamente poderia reduzir significativamente a exposição do pessoal a radiações e melhorar o desempenho de programas de manutenção.

Está em desenvolvimento um sistema operacional robótico para conduzir problemas operacionais particulares no interior de uma usina nuclear. Este dispositivo, IRIS (*Industrial Remote Inspection System* = Sistema Remoto de Inspeção Industrial), é um sistema supervisório de uso geral que conduz tarefas de inspeção e de manipulação particulares com o objetivo de reduzir de modo signifi-

<sup>1</sup>Seria mais adequado referir-se a experimentos selenológicos, por se tratar da Lua e não da Terra. (N. do T.)

ficativo a exposição do pessoal a campos de radiação intensa [13]. O dispositivo está mostrado na Fig. P10.20. A função de transferência a malha aberta é

$$G(s) = \frac{Ke^{-sT}}{(s + 1)(s + 3)}.$$

(a) Determinar um ganho  $K$  adequado para o sistema quando  $T = 0,5$  segundo, de modo que a ultrapassagem a uma entrada em degrau seja menor do que 30%. Determinar o erro de estado estacionário. (b) Projetar um compensador

$$G_c(s) = \frac{s + 2}{s + b}$$

para melhorar a resposta ao degrau do sistema da parte (a) de modo que o erro de estado estacionário seja menor que 12%. Admitir o sistema a malha fechada da Fig. 10.1(a).

**P10.21** Um sistema de controle sem compensação com retroação unitária possui uma função de transferência de processo a controlar

$$G(s) = \frac{K}{s(s/2 + 1)(s/6 + 1)}.$$

Deseja-se ter uma constante de erro de velocidade  $K_v = 20$ . Deseja-se também ter uma margem de fase de aproximadamente  $45^\circ$  e uma banda passante a malha fechada maior que  $\omega = 4$  rad/s. Usar duas estruturas de avanço de fase em cascata para compensar o sistema.

**P10.22** Projetar, para o sistema do Problema 10.21, uma estrutura de atraso de fase que satisfaça as especificações desejadas, com exceção de que será aceitável uma banda passante igual ou maior que 2 rad/s.

**P10.23** Para o sistema do Problema 10.21, deseja-se obter a mesma margem de fase e o mesmo valor de  $K_v$ , mas, além disto, se deseja limitar a banda passante a um valor menor que 10 rad/s, porém maior que 2 rad/s. Utilizar uma estrutura de avanço e atraso de fase para compensar o sistema. A estrutura de avanço e atraso de fase poderia ser da forma

$$G_c(s) = \frac{(1 + s/10a)(1 + s/b)}{(1 + s/a)(1 + s/10b)}.$$

onde  $a$  deve ser escolhido para a parte de atraso de fase do compensador e  $b$  deve ser selecionado para a parte de avanço de fase. A relação  $\alpha$  deve ser escolhida com o valor 10 em ambas as partes de avanço e de atraso de fase.

**P10.24** Um sistema da forma da Fig. 10.1(a) com retroação unitária possui

$$G(s) = \frac{K}{(s + 3)^2}.$$

Deseja-se que o erro de estado estacionário a uma entrada em degrau seja aproximadamente 4% e que a margem de fase do sistema seja de aproximadamente  $45^\circ$ . Projetar uma estrutura de atraso de fase para atender estas especificações.

**P10.25** A estabilidade e a rotação de um robô (semelhante à rotação da cintura) constitui um problema de controle desafiador. O sistema requer valores elevados de ganho a fim de obter alta resolução; contudo, não podem ser tolerados grandes valores de ultrapassagem na resposta transitória. O diagrama de blocos de um sistema eletroidrágico para o controle de rotação está mostrado na Fig. P10.25 [16]. A dinâmica do braço em rotação é representada por

$$G(s) = \frac{100}{s(s^2/6400 + s/50 + 1)}.$$

Deseja-se ter  $K_v = 20$  no sistema sem compensação. Projetar um compensador que resulte em uma ultrapassagem inferior a 10% para uma entrada em degrau.

**P10.26** Vem sendo investigada no mundo inteiro a possibilidade de substituir o atrito, o desgaste e a vibração das rodas por uma suspensão sem contato para veículos de transporte de massa. Um dos projetos utiliza uma suspensão magnética com uma força de atração entre o veículo e uma guia com um entreferro controlado com precisão. Um sistema está mostrado na Fig. P10.26, que incorpora compensação na retroação. Usando os métodos do lugar das raízes, selecionar valores adequados para  $K_1$  e  $b$  de modo que o sistema possua uma relação de amortecimento  $\zeta = 0,50$  para as raízes subamortecidas. Admitir, se apropriado, que o pólo da malha de retroação do entreferro ( $s = -200$ ) pode ser desprezado.

**P10.27** Um computador usa uma impressora como dispositivo de saída rápida. Deseja-se manter a exatidão do controle de posição enquanto o papel se move rapidamente através da impressora. Considere-se um sistema com retroação unitária e uma função de transferência para o motor e o amplificador de

$$G(s) = \frac{0,15}{s(s + 1)(5s + 1)}.$$

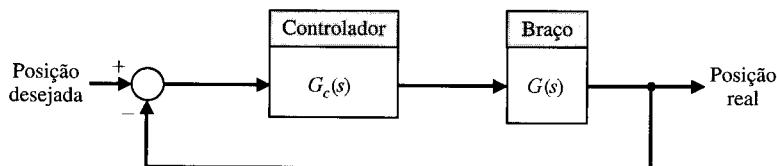


Fig. P10.25 Controle de posição de robô.

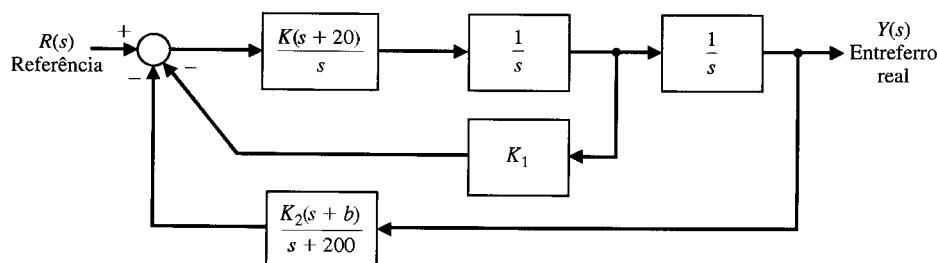


Fig. P10.26 Controle de intervalo de ar (entreferro) para trem.

Projetar uma estrutura de compensação por avanço de fase de modo que a banda passante do sistema seja 0,75 rad/s e que a margem de fase seja de 30°. Usar uma estrutura de avanço de fase com  $\alpha = 10$ .

- P10.28** Uma equipe de projeto de engenharia está tentando controlar um processo mostrado na Fig. P10.28. O sistema possui um controlador  $G_c(s)$ , mas a equipe de projeto é incapaz de selecionar  $G_c(s)$  apropriadamente. Ficou acertado que um sistema com margem de fase de 50° seria aceitável, mas  $G_c(s)$  é desconhecido. Pede-se ao leitor determinar  $G_c(s)$ .

Fazer primeiramente  $G_c(s) = K$  e determinar (a) um valor de  $K$  que produza uma margem de fase de 50° e a resposta ao degrau do sistema com este valor de  $K$ . (b) Determinar o tempo de assentamento, a ultrapassagem percentual e o tempo de pico. (c) Obter a resposta de freqüência do sistema a malha fechada e determinar  $M_{p_u}$  e a banda passante.

A equipe de projeto decidiu fazer

$$G_c(s) = \frac{K(s + 12)}{(s + 20)}$$

e repetir as partes (a), (b) e (c). Determinar o ganho  $K$  que resulta em uma margem de fase de 50° e então prosseguir no cálculo da resposta no domínio do tempo e da resposta de freqüência do sistema a malha fechada. Preparar uma tabela contrastando os resultados dos dois controladores selecionados para  $G_c(s)$  comparando tempo de assentamento (critério dos 2%), ultrapassagem percentual, tempo de pico,  $M_{p_u}$  e banda passante.

- P10.29** Um veículo com suspensão adaptativa utiliza o princípio de locomoção com pernas. O controle da perna pode ser representado por um sistema com retroação unitária com [13]

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 10)(s + 14)}.$$

Deseja-se obter um erro de estado estacionário para uma entrada em rampa de 10% e uma relação de amortecimento das raízes dominantes de 0,707. Determinar um compensador por atraso de fase adequado e determinar a ultrapassagem real e o tempo para que a resposta permaneça no interior de uma faixa de 2% em torno do valor final.

- P10.30** Um sistema de controle de nível de líquido (ver Fig. 9.32) possui uma função de transferência de malha

$$G_c(s)G(s)H(s),$$

onde  $H(s) = 1$ ,  $G_c(s)$  é um compensador e o processo a controlar é

$$G(s) = \frac{10e^{-sT}}{s^2(s + 10)},$$

em que  $T = 50$  ms. Projetar um compensador de modo que  $M_{p_u}$  não exceda 3,5 dB e  $\omega$ , seja aproximadamente 1,4 rad/s. Prever a ultrapassagem e o tempo de assentamento (critério dos 2%) do sistema compensado quando a entrada for um degrau. Traçar a resposta real.

- P10.31** Um veículo guiado automaticamente (*AGV* = *automated guided vehicle*) pode ser considerado como uma esteira transportadora móvel automática para transportar materiais. A maioria dos AGV requerem algum tipo de percurso guia. A estabilidade de manobra do sistema de controle de direção ainda não foi plenamente resolvida. Um leve “serpentejar” do AGV em torno da trilha tem sido geralmente aceito, embora indique instabilidade do sistema de controle de direção [9].

A maioria dos AGV possuem uma especificação de velocidade máxima de cerca de 1 m/s, embora, na prática, sejam operados com metade dessa velocidade. Em um ambiente de manufatura plenamente automatizado, deveria haver pouco pessoal na área de produção; por conseguinte o AGV deveria ser capaz de se deslocar com velocidade plena. À medida que aumenta a velocidade do AGV, o mesmo ocorre com a dificuldade de se projetarem controles de rastreamento estáveis e suaves.

Um sistema de direção para um AGV está mostrado na Fig. P10.31, onde  $\tau_1 = 40$  ms e  $\tau_2 = 1$  ms. É necessário que a constante de velocidade,  $K_v$ , seja igual a 100, de modo que o erro de estado estacionário para uma entrada em rampa seja 1% da inclinação da rampa. Desprezar  $\tau_2$  e projetar um compensador de modo que a margem de fase seja

$$45^\circ \leq MF \leq 65^\circ.$$

Tentar obter os dois casos limites para a margem de fase e comparar os resultados dos dois projetos determinando os valores reais de ultrapassagem percentual e de tempo de assentamento para uma entrada em degrau.

- P10.32** Para o sistema do Problema 10.31, usar um compensador por atraso de fase e tentar obter uma margem de fase de aproximadamente 50°. Determinar os valores reais de ultrapassagem e de tempo de pico para o sistema compensado.

- P10.33** Quando um motor aciona uma estrutura flexível, as freqüências naturais da estrutura, em comparação com a banda passante do servoacionamento, determinam a contribuição da flexibilidade para os erros do movimento resultante. Nos atuais robôs industriais, os acionamentos são, quase sempre, relativamente lentos e as estruturas são relativamente rígidas, de modo que as ultrapassagens e outros erros podem ser ocasionados principalmente pelo servoacionador. Contudo, dependendo da exatidão requerida, as deflexões estruturais dos membros acionados podem se tornar importantes. A flexibilidade estrutural deve ser considerada a maior fonte de erros de movimento com estruturas e ma-

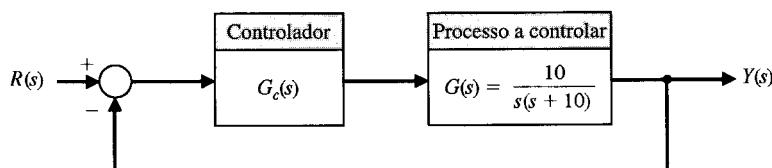


Fig. P10.28 Projeto de controlador.

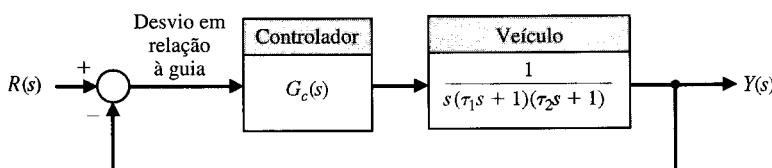


Fig. P10.31 Controle de direção de veículo.

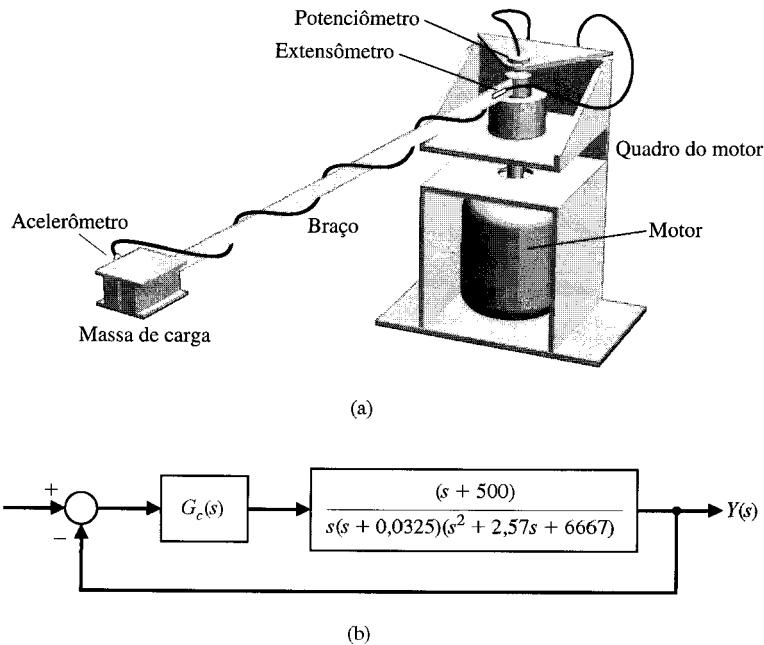


Fig. P10.33 Controle de braço flexível.

nipuladores espaciais. Devido a restrições de peso no espaço, braços de grandes dimensões resultam em estruturas elásticas. Além disto, os robôs industriais do futuro irão requerer manipuladores mais leves e elásticos.

Para investigar os efeitos da flexibilidade estrutural e como os diferentes esquemas de controle podem reduzir oscilações indesejáveis, foi construída uma montagem experimental consistindo em um motor CC acionando uma viga esbelta de alumínio. O objetivo dos experimentos foi identificar estratégias de controle simples e eficazes para lidar com os erros de movimento que ocorrem quando um servomotor estiver acionando uma estrutura muito flexível [14].

A montagem experimental está mostrada na Fig. P10.33(a) e o sistema de controle está mostrado na Fig. P10.33(b). O obje-

vo é que o sistema tenha um valor de  $K_v$  de 100. (a) Quando  $G_c(s) = K$ , determinar  $K$  e traçar os diagramas de Bode. Obter a margem de fase e a margem de ganho. (b) Usando a carta de Nichols, determinar  $\omega_r$ ,  $M_{p_u}$  e  $\omega_B$ . (c) Selecionar um compensador de modo que a margem de fase seja maior que  $35^\circ$  e obter  $\omega_r$ ,  $M_{p_u}$  e  $\omega_B$  para o sistema compensado.

**P10.34** A capacidade humana de executar tarefas físicas é limitada não pelo intelecto, mas pela resistência física. Se, em um ambiente apropriado, a potência mecânica de uma máquina for intimamente integrada com a resistência mecânica de um braço humano sob controle do intelecto humano, o sistema resultante será superior ao de uma combinação fracamente integrada entre um operador humano e um robô plenamente automatizado.

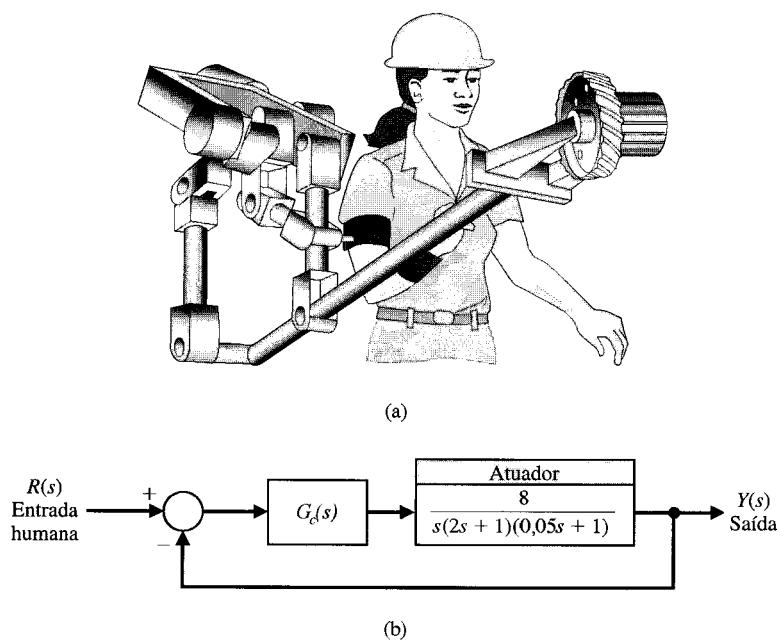


Fig. P10.34 Controle de robô extensor.

Os extensores são definidos como uma classe de manipuladores robóticos que estendem a resistência do braço humano mantendo o controle humano sobre a tarefa [15]. A característica que define um extensor é a transmissão de potência e de sinais de informação. O extensor é usado pelo ser humano; o contato físico entre o extensor e o ser humano permite a transferência direta de potência mecânica e de sinais de informação. Devido a esta interface singular, o controle da trajetória do extensor pode ser realizado sem qualquer tipo de alavanca de comando, teclado ou sistema mestre-escravo. O ser humano fornece um sistema de controle para o extensor, enquanto os atuadores do extensor fornecem a maioria do esforço necessário para a tarefa. O operador humano se torna uma parte do extensor e “sente” uma versão em escala reduzida da carga que o extensor está carregando. O extensor é diferente de um sistema convencional mestre-escravo; nesse tipo de sistema, o operador humano está em uma localização remota ou próximo ao manipulador escravo, mas não está em contato físico direto com o escravo no sentido de transferência de potência. Um extensor está mostrado na Fig. P10.34(a) [15]. O diagrama de blocos do sistema está mostrado na Fig. P10.34(b). O objetivo é que o sistema compensado tenha uma constante de velocidade,  $K_v$ , igual a 80, que o tempo de assentamento (critério dos 2%) seja de 1,6 segundo e que a ultrapassagem seja de 16%, de modo que as raízes dominantes possuam um valor de  $\zeta$  de 0,5. Determinar um compensador de avanço e de atraso de fase usando os métodos do lugar das raízes.

**P10.35** Um trem com levitação magnética está operando em Berlim, Alemanha. A linha de 1600 m M-Bahn representa o estado atual dos sistemas pelo mundo afora. Os trens completamente automatizados podem circular com intervalos de tempo reduzidos e operar com

excelente eficiência energética. O sistema de controle para a levitação do carro está mostrado na Fig. P10.35. Selecionar um compensador de modo que a margem de fase do sistema seja de  $45^\circ \leq MF \leq 55^\circ$ . Prever a resposta do sistema a um comando em degrau e determinar a resposta real a um degrau para comparação.

**P10.36** Os engenheiros estão desenvolvendo novos sensores para usinagem e outros processos de manufatura. Uma nova técnica de sensores capta informação acerca do processo de corte a partir de sinais de emissão acústica (AE = *acoustic emission*). A AE é uma onda de tensão mecânica de alta frequência e baixa amplitude a partir da liberação rápida da energia de deformação de um meio contínuo. A AE é sensível ao material, à geometria da ferramenta, ao desgaste da ferramenta e a parâmetros de corte, como o material e a velocidade. Os sensores AE são comumente cristais piezoelettricos sensíveis na faixa de 100 kHz a 1 MHz. Eles são baratos e podem ser montados na maioria das máquinas-ferramenta.

A pesquisa atual tem sido extrair a informação sobre a profundidade de corte a partir dos sinais AE. Um dos estudos relaciona a sensibilidade do sinal de potência AE a pequenas variações na profundidade de corte em torneamento com diamante [16, 20, 21]. A potência dos sinais AE é sensível a pequenas variações instantâneas da profundidade de corte durante o torneamento com diamante e o fresamento convencional. Uma máquina de fresar com um sensor AE está mostrada na Fig. P10.36(a). O sistema para controlar a profundidade de corte de uma fresaadora está mostrado na Fig. P10.36(b). Projetar um compensador de modo que a ultrapassagem percentual para uma entrada em degrau seja menor ou igual a 20% com a constante de velocidade maior que 8.

**P10.37** A função de transferência a malha aberta de um sistema é um retardador puro de 0,5 segundo, de modo que  $G(s) = e^{-s/2}$ . Selecione

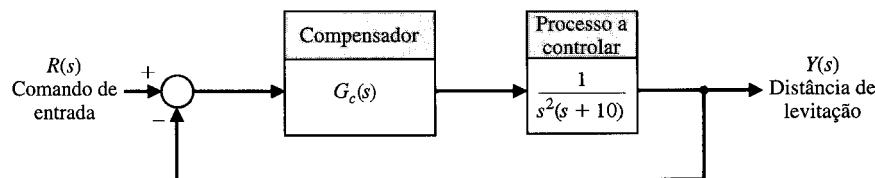
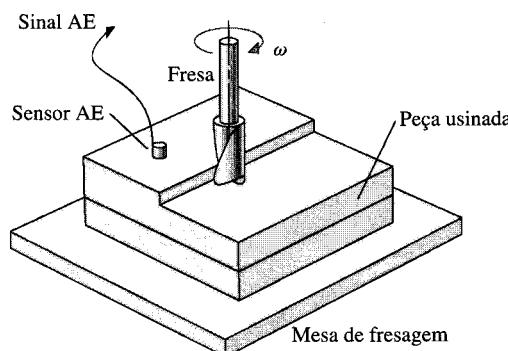
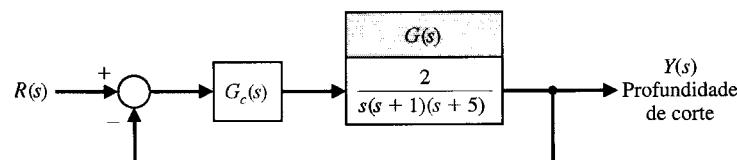


Fig. P10.35 Controle de trem com sistema de levitação magnética.



(a)



(b)

Fig. P10.36 Controle de máquina fresadora.

onar um compensador  $G_c(s)$  de modo que o erro de estado estacionário para uma entrada em degrau seja menor que 2% da amplitude do degrau e a margem de fase seja maior que  $30^\circ$ . Determinar a banda passante do sistema compensado e traçar a resposta ao degrau.

**P10.38** Um sistema com retroação unitária negativa tem

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 10)(s + 20)}.$$

O objetivo é que as raízes dominantes possuam um  $\zeta$  igual a 0,707 juntamente com um erro de estado estacionário nulo para uma entrada em rampa. Selecionar um controlador proporcional e integral (PI) de modo que os requisitos sejam atendidos. Determinar o tempo de pico e o tempo de assentamento (critério dos 2%) resultantes para o sistema.

**P10.39** Um sistema com retroação unitária da forma mostrada na Fig. 10.1(a) tem

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 10)}.$$

Projetar um compensador  $G_c(s)$  de modo que a ultrapassagem para uma entrada  $R(s)$  em degrau seja menor que 10% e o erro de estado estacionário menor que 5%. Determinar a banda passante do sistema.

**P10.40** Um sistema com retroação unitária possui um processo a controlar

$$G(s) = \frac{40}{s(s + 2)}.$$

Deseja-se ter uma margem de fase de  $30^\circ$  e uma banda passante relativamente grande. Selecionar a frequência de cruzamento  $\omega_c = 10$  rad/s e projetar um compensador por avanço de fase usando o método analítico da Seção 10.9. Verificar os resultados traçando os diagramas de Bode do sistema compensado.

**P10.41** Um sistema com retroação unitária possui um processo a controlar

$$G(s) = \frac{40}{s(s + 2)}.$$

Deseja-se que a margem de fase seja  $30^\circ$ . Para uma entrada em rampa unitária,  $r(t) = t$ , deseja-se que o erro de estado estacionário seja igual a 0,05. Projetar um compensador por atraso de fase usando os métodos da Seção 10.9. Verificar os resultados traçando os diagramas de Bode do sistema compensado.

**P10.42** Para o sistema e os requisitos do Problema 10.41, determinar o compensador requerido quando o erro de estado estacionário para uma entrada em rampa deva ser igual a 0,02.

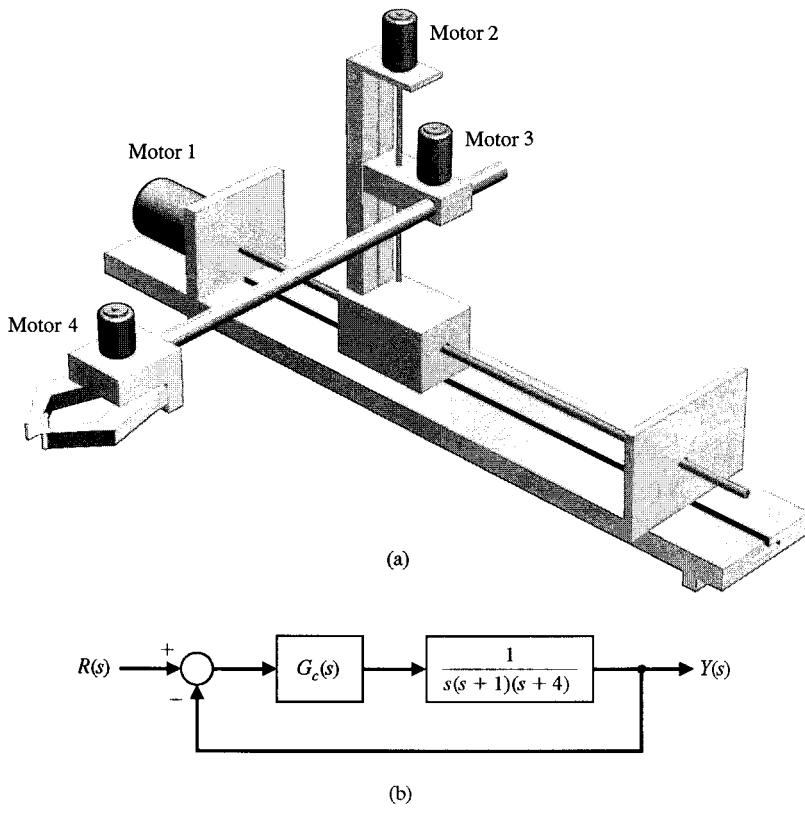
**P10.43** Repetir o Exemplo 10.12 quando se quiser que o tempo de subida de 100%,  $T_r$ , seja de 1 segundo.

**P10.44** Reconsiderar o projeto do Exemplo 10.4. Usando um sistema como o mostrado na Fig. 10.22 e o compensador determinado na Eq. (10.46), selecionar um filtro prévio apropriado. Comparar a resposta do sistema com e sem filtro prévio.

## PROBLEMAS AVANÇADOS

**PA10.1** Uma aplicação *pick-and-place* de três eixos requer o movimento preciso de um braço robótico no espaço tridimensional, como está mostrado na Fig. PA10.1 para a junta 2. O braço apresenta per-

cursos lineares específicos que ele deve seguir para evitar outras peças da maquinaria. A ultrapassagem para uma entrada em degrau deve ser inferior a 13%.



**Fig. PA10.1** Robô *pick-and-place*.

(a) Fazer  $G_c(s) = K$  e determinar o ganho  $K$  que satisfaz o requisito. Determinar o tempo de assentamento resultante (critério dos 2%). (b) Usar uma estrutura de avanço de fase e reduzir o tempo de assentamento a menos de 3 segundos.

**PA10.2** No sistema do Problema Avançado 10.1, deve-se ter uma ultrapassagem percentual menor que 13%. Deseja-se, além disto, que o erro de estado estacionário para uma entrada em rampa seja menor que 0,125 ( $K_r = 8$ ) [28]. Projetar uma estrutura de atraso de fase para atender as especificações. Verificar a ultrapassagem percentual e o tempo de assentamento (critério dos 2%) para o projeto.

**PA10.3** No sistema do Problema Avançado 10.1, deve-se ter uma ultrapassagem percentual menor que 13%. Deseja-se, além disto, que o erro de estado estacionário para uma entrada em rampa seja menor que 0,125 ( $K_r = 8$ ). Projetar um controlador proporcional e integral (PI) para atender as especificações.

**PA10.4** O sistema de controle de um motor CC com retroação unitária possui a forma mostrada na Fig. PA10.4. Selecionar  $K_1$  e  $K_2$  de modo que a resposta do sistema tenha um tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 0,6 segundo e uma ultrapassagem menor que 5% para uma entrada em degrau.

**PA10.5** Um sistema com retroação unitária está mostrado na Fig. PA10.5. Deseja-se que a resposta do sistema a uma entrada em degrau apresente uma ultrapassagem de cerca de 16%, uma resposta rápida e um tempo de assentamento (critério dos 2%) de cerca de 1,8 segundo.

(a) Projetar um compensador por avanço de fase  $G_c(s)$  para obter as raízes dominantes desejadas. (b) Determinar a resposta do sistema ao degrau quando  $G_p(s) = 1$ . (c) Selecionar um filtro prévio  $G_p(s)$  e determinar a resposta ao degrau do sistema com filtro prévio.

**PA10.6** Reconsiderar o Exemplo 10.12 quando se deseja minimizar o tempo de assentamento do sistema requerendo  $K < 52$ . Determinar o compensador apropriado que minimizará o tempo de assentamento. Traçar a resposta do sistema.

**PA10.7** Um sistema possui a forma mostrada na Fig. 10.22 com

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 2)(s + 8)}.$$

Um compensador por avanço de fase é usado, com

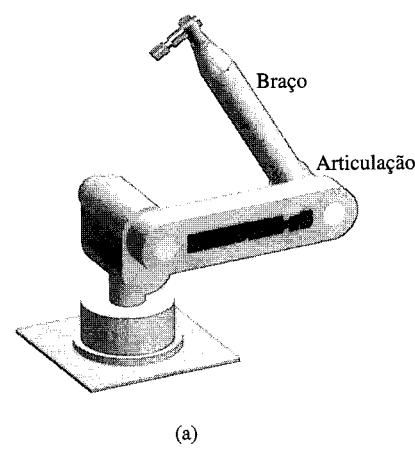
$$G_c(s) = \frac{K(s + 3)}{(s + 28)}.$$

Determinar  $K$  tal que as raízes complexas tenham  $\zeta = 1/\sqrt{2}$ . O filtro prévio é

$$G_p(s) = \frac{p}{(s + p)}.$$

(a) Determinar a ultrapassagem e o tempo de subida para  $G_p(s) = 1$  e para  $p = 3$ . (b) Selecionar um valor apropriado para  $p$  que dará uma ultrapassagem de 1% e comparar os resultados.

**PA10.8** O robô Manutec, como está mostrado na Fig. PA10.8(a), possui uma grande inércia e um braço muito comprido que resulta em um problema de controle desafiador. O diagrama de blocos



(a)

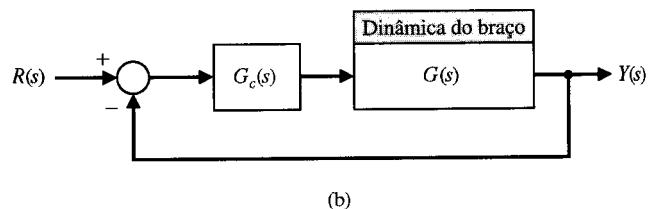


Fig. PA10.8 (a) Robô Manutec. (b) Diagrama de blocos.

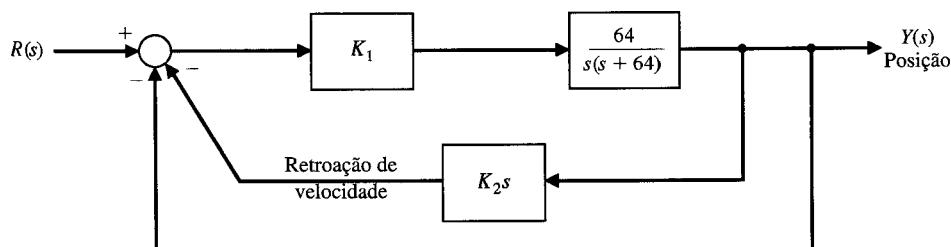


Fig. PA10.4 Sistema de controle de motor.

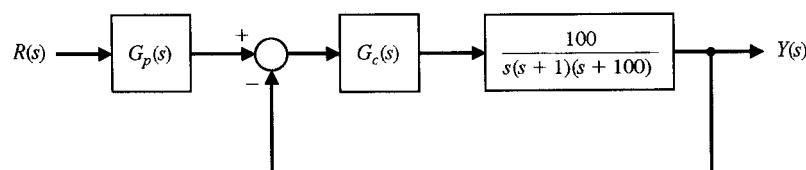


Fig. PA10.5

do modelo está mostrado na Fig. PA10.8(b). A dinâmica do processo é representada por

$$G(s) = \frac{250}{s(s + 2)(s + 40)(s + 45)}.$$

A ultrapassagem percentual para uma entrada em degrau deve ser menor 20%, com um tempo de subida menor que 1/2 segundo e um tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 1,2 segundo. Deseja-se, além disto, que para uma entrada em rampa  $K_v \geq 10$ . Determinar o compensador por avanço de fase adequado.

## PROBLEMAS DE PROJETO

**PPC10.1** O sistema sarilho-mesa deslizante da Fig. PPC4.1 usa um controlador PD. Determinar os valores necessários das constantes de ganho do controlador PD de modo a se obter uma resposta rápida sem oscilações. Deseja-se, também, que o tempo de assentamento (critério dos 2%) seja inferior a 250 ms. Verificar os resultados. Traçar a resposta deste sistema para uma entrada em degrau.

**PP10.1** Na Fig. PP10.1 são mostrados dois robôs cooperando um com o outro na manipulação de um eixo longo antes de inseri-lo no orifício da peça que está em repouso sobre a mesa. A inserção de peças compridas é um bom exemplo de tarefa que pode se beneficiar do controle cooperativo. O sistema de controle com retroação de uma articulação robótica da forma mostrada na Fig. 10.1 possui  $H(s) = 1$  e

$$G(s) = \frac{4}{s(s + 0,5)}.$$

As especificações requerem um erro de estado estacionário para uma entrada em rampa de 0,0125 e a resposta ao degrau com uma ultrapassagem inferior a 25% com um tempo de assentamento (critério dos 2%) inferior a 2 segundos. Determinar um compensador de avanço e atraso de fase que atenda as especificações e traçar a resposta para entradas em degrau e em rampa nos sistemas compensado e sem compensação.

**PP10.2** O controle de rumo do avião biplano tradicional mostrado na Fig. PP10.2(a) está mostrado na Fig. PP10.2(b).

(a) Determinar o valor mínimo do ganho  $K$  quando  $G_c(s) = K$ , de modo que o efeito em regime permanente de uma perturbação em degrau unitário,  $D(s) = 1/s$ , seja menor ou igual a 5% do degrau unitário [ $y(\infty) = 0,05$ ].

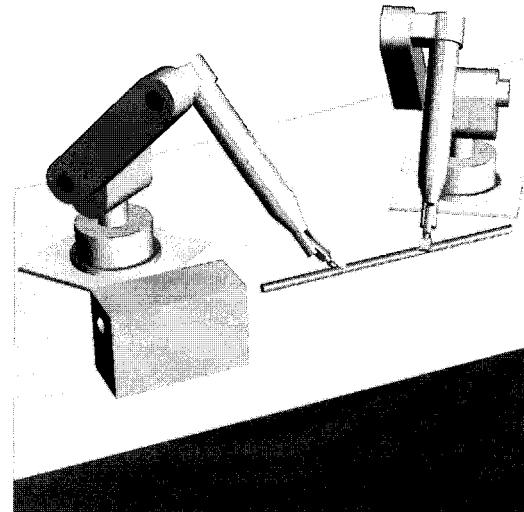
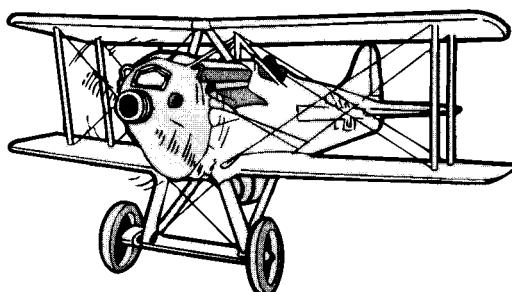
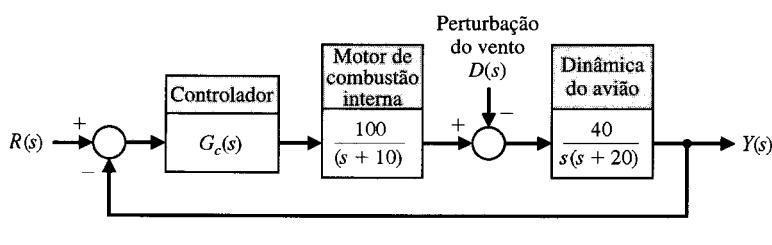


Fig. PP10.1 Dois robôs cooperam na inserção de um eixo.

(b) Determinar se o sistema usando o ganho da parte (a) é estável.  
 (c) Projetar um compensador usando um único estágio de compensação por avanço de fase, de modo que a margem de fase seja de 30°.  
 (d) Projetar um compensador por avanço de fase, de dois estágios, de modo que a margem de fase seja de 55°.



(a)



(b)

Fig. PP10.2 (a) Avião biplano. (Fonte: *The Illustrated London News*, outubro 9, 1920.) (b) Sistema de controle.

- (e) Comparar a banda passante dos sistemas das partes (c) e (d).  
(f) Traçar a resposta ao degrau  $y(t)$  para os sistemas das partes (c) e (d) e comparar os valores de ultrapassagem percentual, de tempo de assentamento (critério dos 2%) e de tempo de pico.

**PP10.3** A NASA identificou a necessidade de grandes estruturas espaciais desdobráveis, construídas de materiais leves e contendo um grande número de juntas ou de conexões estruturais. Esta necessidade é evidente para programas como a estação espacial. Estas estruturas espaciais desdobráveis devem ter requisitos de forma precisos e necessitam de supressão de vibração durante as operações em órbita [17].

Uma destas estruturas é o sistema de mastro flutuante mostrado na Fig. PP10.3(a). A intenção do sistema é propiciar uma bancada experimental de ensaios em controle e dinâmica. O elemento básico no sistema de mastro flutuante é uma estrutura de trelíça com 60,7 m de comprimento que é anexada ao ônibus espacial em órbita. Estão incluídos na extremidade da estrutura em trelíça os atuadores principais e os sensores. É fornecido também um subsistema de desdobramento/retração que assegura ainda a embalagem da estrutura em receptáculo próprio durante o lançamento e a aterrissagem.

O sistema utiliza um grande motor para movimentar a estrutura e possui o diagrama de blocos mostrado na Fig. PP10.3(b). O objetivo é uma ultrapassagem da resposta ao degrau inferior ou igual a 16%; estima-se, assim, um valor de  $\zeta$  para o sistema de 0,5 e uma margem de fase necessária de 50°. Projetar para  $0,1 < K < 1$  e registrar a ultrapassagem, o tempo de subida e a margem de fase para os ganhos selecionados.

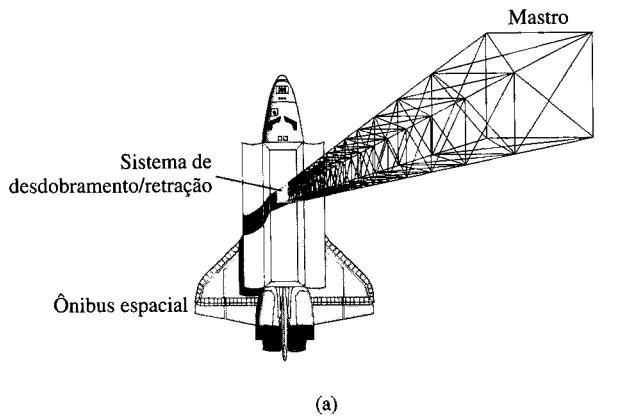


Fig. PP10.3 Sistema de mastro de vôo.

**PP10.4** Um robô móvel que utiliza um sistema de visão como dispositivo de medição está mostrado na Fig. PP10.4 [22]. O sistema de controle é da forma mostrada na Fig. 10.14, onde

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)(0,5s + 1)},$$

e  $G_c(s)$  é escolhido como controlador PI de modo que o erro de estado estacionário a uma entrada em degrau seja igual a zero. Tem-se então

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} = \frac{K_1 s + K_2}{s}.$$

Determinar o compensador  $G_c$  adequado de modo que (a) a ultrapassagem percentual da resposta ao degrau seja 5% ou menos; (b) o tempo de assentamento (critério dos 2%) seja menor que 6 segundos; (c) o valor  $K_c$  do sistema seja maior que 0,9; e (d) o tempo de pico para uma entrada em degrau seja minimizado.

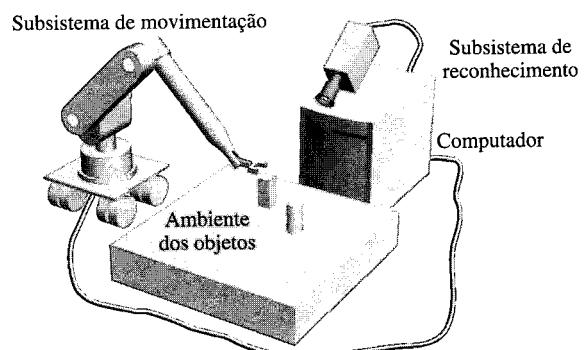


Fig. PP10.4 Robô com sistema de visão.

**PP10.5** Está em desenvolvimento no Texas um trem de alta velocidade cujo projeto se baseia no TGV francês (TGV = *Train à Grand Vitesse*). São previstas velocidades de 186 milhas por hora (cerca de 300 km/h). Para atingir estas velocidades em curvas fechadas, o trem deve usar eixos independentes combinados com a capacidade de inclinar o trem. Cilindros hidráulicos conectando os compartimentos de passageiros aos truques das rodas permitem que o trem se incline nas curvas como uma motocicleta. Um dispositivo semelhante a um pêndulo instalado no truque dianteiro de cada um dos vagões sente quando está entrando em uma curva e alimenta os cilindros hidráulicos com esta informação. A inclinação não torna o trem mais seguro, mas faz com que os passageiros se sintam mais confortáveis.

Considere-se o controle de inclinação como está mostrado na Fig. PP10.5. Projetar o compensador  $G_c(s)$  para um comando de entrada em degrau de modo que a ultrapassagem seja inferior a 5% e o tempo de assentamento (critério dos 2%) seja menor que 0,6 segundo. Deseja-se também que o erro estacionário para uma entrada em velocidade (rampa) seja menor que  $0,15A$ , onde  $r(t) = At$ ,  $t > 0$ . Verificar os resultados do projeto.

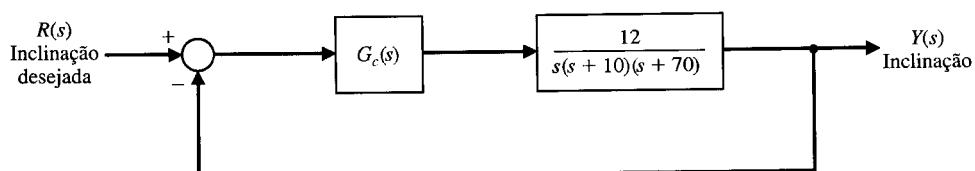
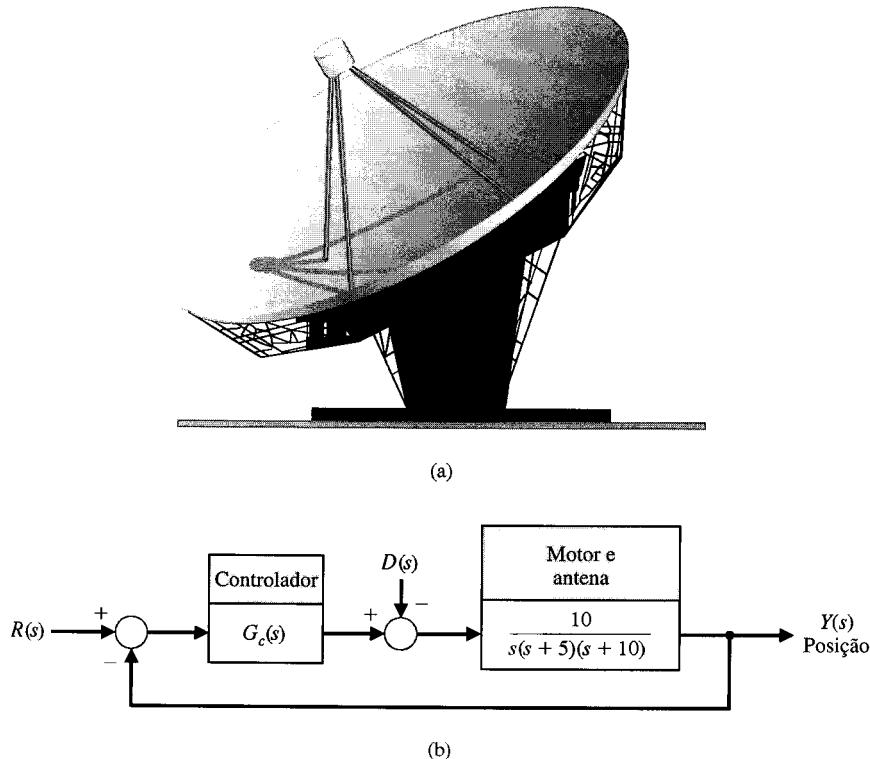


Fig. PP10.5



**Fig. PP10.6 Sistema de controle de antena.**

**PP10.6** Uma antena de grandes dimensões, como a mostrada na Fig. PP10.6(a), é usada para receber sinais de satélites e deve rastrear o satélite à medida que este se move pelo céu. O sistema de controle usa um motor controlado pela armadura e um controlador a ser selecionado, como está mostrado na Fig. PP10.6(b). As especificações do sistema requerem um erro de estado estacionário para uma rampa de entrada,  $r(t) = Bt$ , menor ou igual a  $0,01B$ . Busca-se ainda uma ultrapassagem para uma entrada em degrau inferior a 5% com um tempo de acomodação (critério dos 2%) menor que 2 segundos.

(a) Projetar um controlador  $G_c(s)$  e traçar a resposta resultante no domínio do tempo. (b) Determinar o efeito da perturbação  $D(s) = Q/s$  sobre a saída  $Y(s)$ . (Para facilitar, fazer  $R(s) = 0$ .)

**PP10.7** Sistemas transportadores para fitas, de alto desempenho, são projetados com um pequeno sarilho para puxar a fita fazendo com que ela passe pelas cabeças de leitura/gravação com bobinas acionadas por motores CC. A fita deve ser controlada em velocidades acima de 200 polegadas por segundo (cerca de 5 metros por segundo), com partida tão rápida quanto possível, evitando-se distorção permanente da fita. Como se deseja controlar a velocidade e a tensão de tração sobre a fita, será usado um tacômetro CC como sensor de velocidade e um potenciômetro com sensor de posição. Será usado um motor CC como atuador. Assim, o mo-

delo linear do sistema é o de um sistema com retroação com  $H(s) = 1$  e

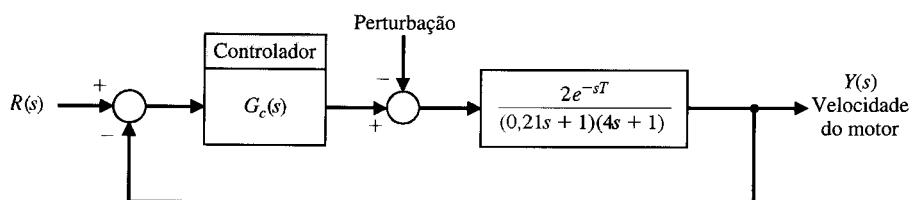
$$\frac{Y(s)}{E(s)} = G(s) = \frac{K(s + 4000)}{s(s + 1000)(s + 3000)(s + p_1)(s + p_1^*)},$$

onde  $p_1 = +2000 + j2000$  e  $Y(s)$  é posição.

As especificações para o sistema são: (1) tempo de assentamento menor que 12 ms, (2) ultrapassagem para um comando em degrau menor que 10% e (3) erro de estado estacionário de velocidade menor que 0,5%. Determinar um esquema de compensador que atenda estas especificações rígidas.

**PP10.8** Os últimos anos têm sido testemunha de uma intensa atividade na elaboração de modelos para motores na indústria automotiva em uma categoria de modelos referidos como “orientados ao controle” ou “projeto de controle”. Estes modelos contêm representações do carburador, dos fenômenos de bombeamento do motor, da dinâmica do processo de indução, do sistema de combustível, da geração de torque e das inércias em rotação.

O controle da relação ar-combustível no carburador do automóvel se tornou de primordial importância nos anos 1980, com os fabricantes de automóveis trabalhando para reduzir as emis-



**Fig. PP10.8 Sistema de controle de motor de combustão interna.**

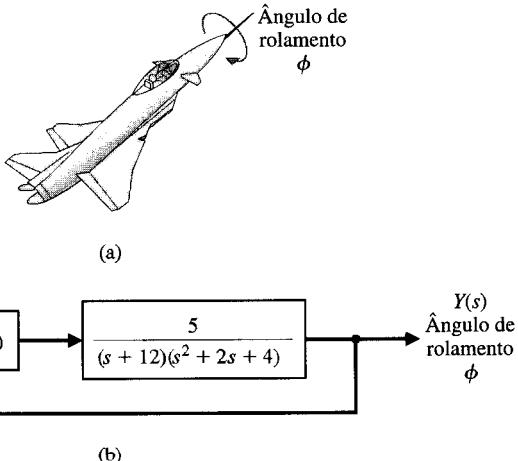


Fig. PP10.9 Controle do ângulo de rolamento de um avião a jato.

sões poluentes da exaustão. Os projetistas de motores se voltaram para o controle com retroação da relação ar-combustível. A operação de um motor de combustão interna em torno de um valor particular da relação ar-combustível requer o gerenciamento do fluxo de ar e de combustível no sistema coletor. O comando de combustível é considerado a entrada e a velocidade do motor, a saída [9, 11].

O diagrama de blocos do sistema está mostrado na Fig. PP10.8, onde  $T = 0,066$  segundo. Torna-se necessário um com-

pensador para produzir erro estacionário nulo para uma entrada em degrau e uma ultrapassagem inferior a 10%. Deseja-se também um tempo de assentamento (critério dos 2%) que não excede 10 segundos.

**PP10.9** Um avião a jato de alto desempenho está mostrado na Fig. PP10.9(a) e o sistema de controle do ângulo de rolamento está mostrado na Fig. PP10.9(b). Projetar um controlador  $G_c(s)$  de modo que a resposta ao degrau seja bem comportada e que o erro de estado estacionário seja nulo.

## PROBLEMAS COM MATLAB

**PM10.1** Considere-se o sistema de controle da Fig. PM10.1, onde

$$G(s) = \frac{10}{s + 1}, \quad \text{e} \quad G_c(s) = \frac{9}{s + 1}.$$

Usando o MATLAB, mostrar que a margem de fase é aproximadamente de  $12^\circ$  e a ultrapassagem percentual para uma entrada em degrau é de 70%.

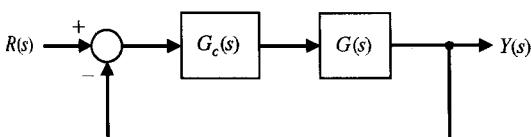


Fig. PM10.1 Sistema de controle com retroação com compensação.

**PM10.2** Um sistema de controle com retroação negativa está mostrado na Fig. PM10.2. Projetar um controlador  $G_c(s) = K$  de modo que o sistema possua uma margem de fase de  $45^\circ$ . Usando o MATLAB, obter gráficos de Bode e verificar que as especificações estão atendidas.

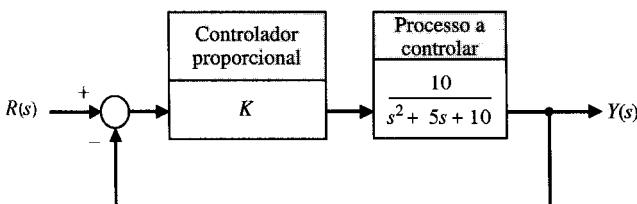


Fig. PM10.2 Sistema de controle monomalha com retroação com controlador proporcional.

**PM10.3** Considere-se o sistema da Fig. PM10.1, onde

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 2)}.$$

Projetar um controlador  $G_c(s)$  de modo que o erro de acompanhamento para uma rampa de entrada seja zero e que o tempo de assentamento (critério dos 2%) seja inferior a 5 segundos. Obter a resposta do sistema a malha fechada para uma entrada em rampa  $R(s) = 1/s^2$  e verificar que os requisitos de tempo de assentamento foram atendidos e que o erro de estado estacionário é nulo.

**PM10.4** Um avião de combate possui a função de transferência

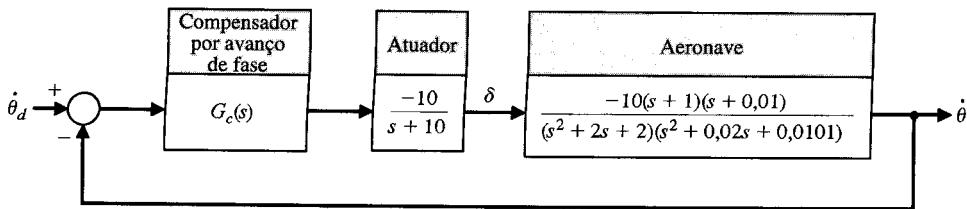
$$\frac{\dot{\theta}}{\delta} = \frac{-10(s + 1)(s + 0,01)}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 0,02s + 0,0101)},$$

onde  $\dot{\theta}$  é a velocidade de arfagem (rad/s) e  $\delta$  é o ângulo de deflexão das superfícies de elevação (rad). Os quatro pólos representam os modos de período curto e de baixa freqüência (fugóide). O modo fugóide possui uma freqüência de 0,1 rad/s e o modo de período curto é 1,4 rad/s. O diagrama de blocos está mostrado na Fig. PM10.4.

(a) Seja  $G_c$  o compensador por avanço de fase

$$G_c = K \frac{s + z}{s + p},$$

onde  $|z| < |p|$ . Usando os métodos dos diagramas de Bode, projetar um compensador por avanço de fase para atender as seguintes especificações: (1) tempo de assentamento (critério dos 2%) para uma entrada em degrau inferior a 2 segundos e (2) ultrapassagem percentual inferior a 10%. (b) Simular o sistema de controle a malha fechada, com uma entrada em degrau de  $10^\circ/\text{s}$  e mostrar o histórico de  $\dot{\theta}$  em função do tempo.



**Fig. PM10.4** Sistema de controle com retroação da velocidade de arfagem de um avião.

**PM10.5** O movimento de atitude segundo o eixo de arfagem de uma espaçonave rígida é descrito por

$$J\ddot{\theta} = u,$$

onde  $J$  é o momento de inércia principal e  $u$  é o torque de entrada aplicado ao veículo [7]. Considerese o controlador PD

$$G_c(s) = K_1 + K_2 s.$$

(a) Obter um diagrama de blocos do sistema de controle. Projetar um sistema de controle que atenda as seguintes especificações: (1) banda passante do sistema a malha fechada cerca de 10 rad/s e (2) ultrapassagem percentual menor que 20% para uma entrada em degrau de  $10^\circ$ . Completar o projeto desenvolvendo e usando um script interativo em MATLAB. (b) Verificar o projeto através da simulação da resposta para um degrau de entrada de  $10^\circ$ . (c) Incluir os gráficos de Bode da função de transferência a malha fechada para verificar se o requisito de banda passante foi atendido.

**PM10.6** Considere-se o sistema de controle mostrado na Fig. PM10.6. O objetivo é projetar um compensador por atraso de fase usando os métodos do lugar das raízes para atender as seguintes especificações: (1) erro de estado estacionário para uma entrada em degrau menor que 10%, (2) margem de fase maior que  $45^\circ$  e (3) tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 5 segundos, para uma entrada em degrau unitário.

(a) Projetar um compensador por atraso de fase utilizando os métodos do lugar das raízes para atender as especificações de projeto. Desenvolver um conjunto de scripts em MATLAB para auxiliar no procedimento de projeto. (b) Testar o controlador desenvolvido na parte (a) por meio de simulação da resposta do sistema a malha fechada para uma entrada em degrau. Fornecer o histórico da saída  $y(t)$  em função do tempo. Calcular a margem de fase usando a função `margin`.

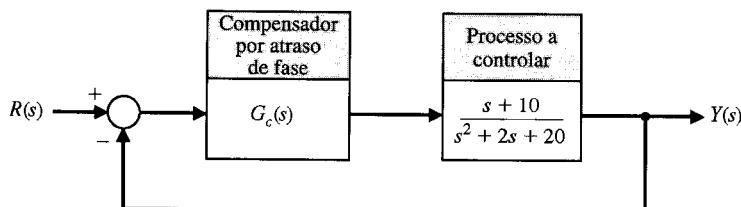
**PM10.7** Um sistema de guiamento lateral por feixe possui uma malha interna como mostrado na Fig. PM10.7, onde a função de transferência para a aeronave coordenada é [30]

$$G(s) = \frac{23}{s + 23}.$$

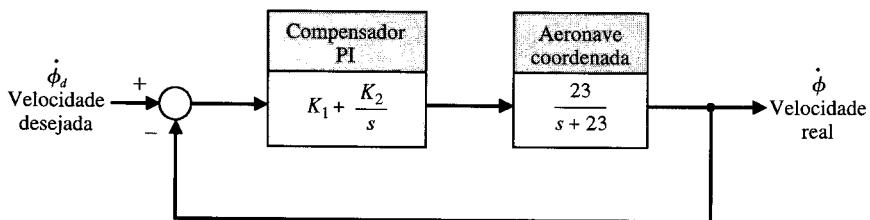
Considere-se o controlador PI

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s}.$$

(a) Projetar um sistema de controle para atender as seguintes especificações: (1) tempo de assentamento (critério dos 2%) para uma entrada em degrau menor 1 segundo e (2) erro de rastreamento em estado estacionário para uma entrada em rampa unitária menor que 0,1. (b) Verificar o projeto por meio de simulação.



**Fig. PM10.6** Sistema de controle com retroação unitária.



**Fig. PM10.7** Malha interna de um sistema de guiamento por feixe lateral.

## TERMOS E CONCEITOS

**Atraso de fase** Ver Estrutura de atraso de fase.

**Avanço de fase** Ver Estrutura de avanço de fase.

**Compensação** A alteração ou ajuste de um sistema de controle a fim de fornecer um desempenho adequado.

**Compensador** Um componente ou um circuito adicional que é introduzido no sistema para compensar deficiências de desempenho.

**Controlador PI** Controlador com um termo proporcional e um termo integrador (Proporcional e Integral).

**Estrutura de atraso de fase** Uma estrutura que fornece um ângulo de fase negativo e uma atenuação significativa sobre a faixa de freqüência de interesse.

**Estrutura de avanço de fase** Uma estrutura que fornece um ângulo de fase positivo sobre a faixa de freqüência de interesse. Assim o avanço de fase pode ser usado para fazer com que um sistema tenha uma margem de fase adequada.

**Estrutura de avanço e atraso** Uma estrutura com características de avanço de fase e de atraso de fase.

**Estrutura de compensação em cascata** Uma estrutura de compensação colocada em cascata ou em série com o processo.

**Estrutura de integração** Uma estrutura que se comporta, em parte, como um integrador.

**Filtro prévio** Uma função de transferência,  $G_p(s)$ , que filtra o sinal de entrada  $R(s)$  antes de calcular o sinal de erro.

**Projeto de um sistema de controle** O arranjo físico ou a concepção da estrutura do sistema e a seleção de componentes e de parâmetros adequados.

**Resposta rápida sem oscilações (*deadbeat*)** Um sistema com resposta rápida, ultrapassagem mínima e erro estacionário nulo para uma entrada em degrau.

## CAPÍTULO 11

# *O Projeto de Sistemas com Retroação com Variáveis de Estado*

- 11.1 Introdução
- 11.2 Controlabilidade
- 11.3 Observabilidade
- 11.4 Sistemas de Controle Ótimo
- 11.5 Alocação de Pólos Usando Variáveis de Estado
- 11.6 Fórmula de Ackermann
- 11.7 Limitações da Retroação com Variáveis de Estado
- 11.8 Projeto com Modelo Interno
- 11.9 Exemplo de Projeto: Sistema Automático de Teste
- 11.10 Projeto com Variáveis de Estado Usando MATLAB
- 11.11 Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco
- 11.12 Sumário

## APRESENTAÇÃO

O assunto deste capítulo é o projeto de controladores utilizando retroação de estado. Primeiramente será apresentado um teste de controlabilidade e de observabilidade e a seguir será feita a descrição de um procedimento para se determinar um sistema de controle ótimo. Será introduzida a técnica da alocação de pólos, usando-se a noção abrangente de retroação de estado. É possível utilizar a fórmula de Ackermann para determinar a matriz de ganho da retroação com variáveis de estado que permite posicionar os pólos do sistema nos locais desejados. A localização dos pólos a malha fechada pode ser escolhida arbitrariamente se, e somente se, o sistema for controlável. Será descrito também o uso do projeto com modelo interno destinado a obter uma resposta em regime estacionário preestabelecida para comandos de entrada escolhidos. O capítulo é concluído retornando-se ao Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco.

### 11.1 INTRODUÇÃO

O método no domínio do tempo, expresso em termos de variáveis de estado, também pode ser utilizado para projetar estruturas de compensação adequadas para sistemas de controle. O interesse recai, fundamentalmente, em controlar o sistema com um sinal de controle,  $u(t)$ , que seja uma função das diversas variáveis de estado medidas. Desenvolve-se então um controlador com variáveis de estado que opera sobre as informações disponíveis sob a forma de medida. Este tipo de compensação é bastante útil para a optimização de sistemas e será considerado neste capítulo.

Determina-se primeiro um controlador ótimo para um sistema descrito em termos de variáveis de estado. Descreve-se então o projeto de sistemas com retroação de estado com localização específica para as raízes características. Considera-se também, de forma sucinta, o método de projeto com modelo interno e se descrevem as limitações dos métodos de retroação com variáveis de estado.

## 11.2 CONTROLABILIDADE

Um sistema descrito pelas matrizes  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  pode ser dito **controlável** se existir um controle  $\mathbf{u}$  sem restrições que possa transferir qualquer estado inicial  $\mathbf{x}(0)$  para qualquer outra localização desejada  $\mathbf{x}(t)$ . Para o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu},$$

é possível determinar se o sistema é controlável examinando-se a condição algébrica

$$\text{posto } [\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \cdots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n. \quad (11.1)$$

Para um sistema com uma única entrada e uma única saída, a **matriz de controlabilidade**  $\mathbf{P}_c$  é descrita em termos de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ ,

$$\mathbf{P}_c = [\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \cdots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}], \quad (11.2)$$

que é uma matriz  $n \times n$ . Portanto, se o determinante de  $\mathbf{P}_c$  for não-nulo, o sistema é controlável [12].

Um outro método para se determinar se o sistema é controlável é desenhar o modelo em diagrama de fluxo de sinal e determinar se existe percurso entre o sinal de controle,  $u$ , e cada uma das variáveis de estado. Se existir o percurso, o sistema pode ser controlável.

Um sistema descrito no formato de variáveis de fase é sempre controlável.

### EXEMPLO 11.1

#### Controlabilidade de um sistema

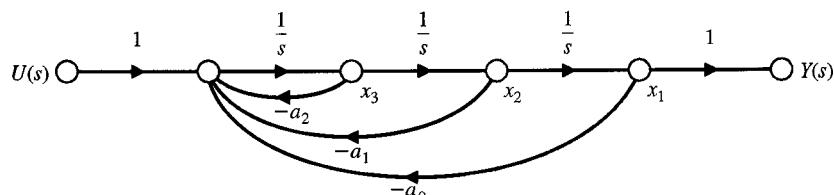
Considere-se o sistema descrito pela função de transferência

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = T(s) = \frac{1}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

O modelo em diagrama de fluxo de sinal para este sistema está mostrado na Fig. 11.1. Constatata-se que existe um percurso de  $u(t)$  para todas as variáveis de estado e que o sistema é controlável.

A equação diferencial matricial é

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$



**Fig. 11.1** Modelo em diagrama de fluxo de sinal de sistema de terceira ordem.

Tem-se, então,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -a_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_2 \\ (a_2^2 - a_1) \end{bmatrix}.$$

Obtém-se, em consequência,

$$\mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 1 & -a_2 & (a_2^2 - a_1) \end{bmatrix}.$$

O determinante de  $\mathbf{P}_c$  é não-nulo, e se mostra, uma vez mais, que este sistema é controlável. ■

### EXEMPLO 11.2

#### Controlabilidade de um sistema com duas variáveis de estado

Considere-se o sistema representado pelas duas equações de estado

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + u, \quad \dot{x}_2 = -3x_2 + dx_1$$

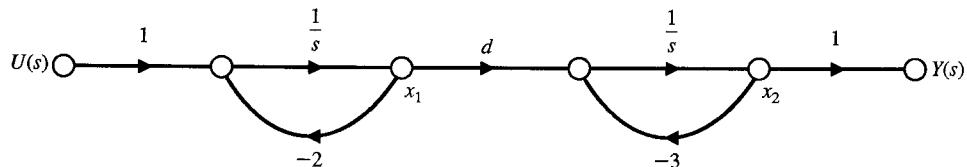


Fig. 11.2 Modelo em diagrama de fluxo do Exemplo 11.2.

e seja determinar a condição de controlabilidade. Além disto, tem-se  $y = x_2$ , como está mostrado no modelo em diagrama de fluxo de sinal da Fig. 11.2. O exame do modelo em diagrama de fluxo mostra que o sistema é controlável para  $d \neq 0$ . Quando  $d = 0$ , a entrada  $u$  não tem percurso para alcançar  $x_2$ .

É possível confirmar este requisito sobre o parâmetro  $d$  construindo-se a matriz  $\mathbf{P}_c$ :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ d \end{bmatrix}.$$

Tem-se, portanto,

$$\mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & d \end{bmatrix},$$

e o determinante de  $\mathbf{P}_c$  é igual a  $d$ , que é não-nulo quando  $d$  for diferente de zero. ■

### 11.3 OBSERVABILIDADE

Todas as raízes da equação característica podem ser posicionadas onde se desejar no plano  $s$  se e somente se o sistema for controlável e **observável**. A observabilidade se refere à capacidade de se estimar uma variável de estado. Deste modo, diz-se que um sistema pode ser observável se a saída possuir uma componente devida a cada uma das variáveis de estado. Uma outra forma de enunciar o requisito é obrigar a existência um percurso entre cada uma das variáveis de estado e a variável de saída no modelo em diagrama de fluxo do sistema [13].

Um sistema é observável se, e somente se, existir um tempo  $T$  finito tal que o estado inicial  $\mathbf{x}(0)$  possa ser determinado a partir do histórico de  $y(t)$ , dado o controle  $u(t)$ .

Considere-se o sistema com uma única entrada e uma única saída

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad \text{e} \quad y = \mathbf{Cx},$$

onde  $\mathbf{C}$  é uma matriz linha e  $\mathbf{x}$  um vetor coluna. Este sistema será observável quando o determinante de  $\mathbf{Q}$  for não-nulo, onde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix},$$

(11.3)

que é uma matriz  $n \times n$ .

Um sistema descrito no formato de variáveis de fase será sempre observável.

#### EXEMPLO 11.3

#### Observabilidade de um sistema

Reconsidere-se o sistema do Exemplo 11.1. O modelo em diagrama de fluxo de sinal está mostrado na Fig. 11.1. Examinando-se o diagrama de fluxo de sinal, constata-se que existe percurso ligando cada uma das variáveis de estado a  $y(t)$  e o sistema pode ser observável.

Para construir  $\mathbf{Q}$ , usam-se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0].$$

Portanto,

$$\mathbf{CA} = [0 \ 1 \ 0] \quad \text{e} \quad \mathbf{CA}^2 = [0 \ 0 \ 1]$$

Obtém-se, assim,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O  $\det \mathbf{Q} = 1$  e o sistema é observável. ■

#### EXEMPLO 11.4

#### Observabilidade de um sistema com duas variáveis de estado

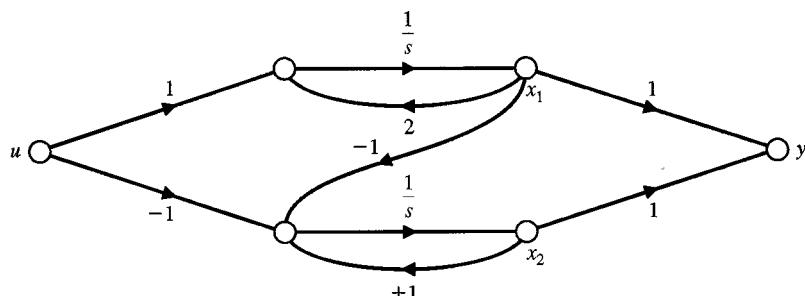
Considere-se o sistema dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u \quad \text{e} \quad y = [1 \ 1] \mathbf{x}.$$

Desenha-se primeiramente o modelo em diagrama de fluxo de sinal com variáveis de estado, como está mostrado na Fig. 11.3. Com base no diagrama de fluxo de sinal, o sistema parece controlável e observável. Verifique-se, pois, o sistema usando as matrizes  $\mathbf{P}_c$  e  $\mathbf{Q}$ .

As matrizes para  $\mathbf{P}_c$  são

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$



**Fig. 11.3** Modelo em diagrama de fluxo do Exemplo 11.4.

Tem-se, em consequência,

$$\mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

e  $\det \mathbf{P}_c = 0$ . Portanto, o sistema é não-controlável.

Para determinar  $\mathbf{Q}$ , obtém-se

$$\mathbf{C} = [1 \ 1] \quad \text{e} \quad \mathbf{CA} = [1 \ 1].$$

Em consequência, resulta

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e  $\det \mathbf{Q} = 0$ . Portanto, o sistema é não-observável.

Olhando-se novamente o modelo de estado, constata-se que

$$y = x_1 + x_2.$$

Contudo,

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 2x_1 + (x_2 - x_1) + u - u = x_1 + x_2.$$

Assim, as variáveis de estado não dependem de  $u$  e o sistema é não-controlável. De modo análogo, a saída  $(x_1 + x_2)$  depende de  $x_1(0)$  mais  $x_2(0)$  e não permite determinar  $x_1(0)$  e  $x_2(0)$  de forma independente. Portanto, o sistema é não-observável. ■

## 11.4 SISTEMAS DE CONTROLE ÓTIMO

O projeto de sistemas de controle automático é uma função importante do engenheiro de controle e automação.<sup>1</sup> A finalidade do projeto é conceber um sistema com componentes práticos que ofereça

<sup>1</sup>No Brasil é esta a designação para o *Control Engineer*, com base na legislação que regulamenta a profissão de engenheiro. (N.T.)

o desempenho operacional desejado. O desempenho desejado pode ser formulado diretamente em termos de índices de desempenho no domínio do tempo. Por exemplo, o valor máximo de ultrapassagem e o tempo de subida da resposta para uma entrada em degrau constituem índices de grande valor no domínio do tempo. No caso de desempenho em estado estacionário e transitório, os índices são normalmente especificados no domínio do tempo.

O desempenho de um sistema de controle pode ser representado por medidas de desempenho integral, como foi determinado na Seção 5.9. Em consequência, o projeto de um sistema deve ser baseado na minimização de um índice de desempenho,<sup>2</sup> como a integral do erro quadrático (ISE — Integral of Squared Error), da Seção 5.9. Os sistemas que são ajustados de modo a fornecer um índice de desempenho mínimo são freqüentemente chamados de **sistemas de controle ótimo**. Nesta seção será considerado o projeto de um sistema de controle ótimo descrito segundo uma formulação em variáveis de estado. Será considerada a medida das variáveis de estado e seu uso no desenvolvimento de um sinal de controle  $u(t)$  tal que o desempenho do sistema seja otimizado.

O desempenho de um sistema de controle, escrito em termos das variáveis de estado do sistema, pode ser expresso em geral como

$$J = \int_0^{t_f} g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt, \quad (11.4)$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vetor de estado,  $\mathbf{u}$  é o vetor de controle e  $t_f$  é igual ao instante final.<sup>3</sup>

O interesse reside em minimizar o erro do sistema; portanto, quando o vetor de estado desejado para o sistema for representado por  $\mathbf{x}_d = \mathbf{0}$ , é possível considerar que o erro é idêntico ao valor do vetor de estado. Isto é, deseja-se que o sistema esteja em equilíbrio,  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_d = \mathbf{0}$ , e qualquer afastamento do equilíbrio é considerado um erro. Portanto, nesta seção será considerado o projeto de um sistema de controle ótimo usando retroação com variáveis de estado e índices de desempenho do erro quadrático [1 – 3].

O sistema de controle considerado está mostrado na Fig. 11.4 e pode ser representado pela equação diferencial vetorial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}. \quad (11.5)$$

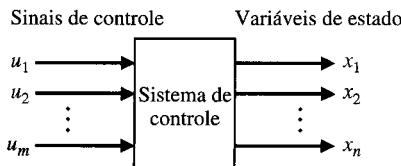


Fig. 11.4 Sistema de controle em termos de  $x$  e de  $u$ .

Será escolhido um controlador com retroação de modo que  $\mathbf{u}$  seja alguma função das variáveis de estado medidas  $\mathbf{x}$ , em consequência,

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x}).$$

Por exemplo, poderia ser usado

$$u_1 = k_1 x_1, \quad u_2 = k_2 x_2, \quad \dots, \quad u_m = k_m x_m. \quad (11.6)$$

Alternativamente seria possível escolher o vetor de controle como

$$u_1 = k_1(x_1 + x_2), \quad u_2 = k_2(x_2 + x_3), \quad \dots \quad (11.7)$$

A escolha dos sinais de controle é um tanto arbitrária e depende parcialmente do desempenho real desejado e da complexidade da estrutura de retroação admissível. Freqüentemente há uma limitação quanto ao número de variáveis de estado disponíveis para retroação, uma vez que só é possível utilizar variáveis de estado mensuráveis.

Neste caso, limita-se a função de retroação a uma função linear de modo que  $\mathbf{u} = \mathbf{Kx}$ , onde  $\mathbf{K}$  é uma matriz  $m \times n$ . Assim, na forma expandida, tem-se

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & \dots & k_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (11.8)$$

<sup>2</sup>O índice de desempenho é também chamado de função de custo. (N. T.)

<sup>3</sup>Observe-se que foi utilizada a notação  $J$  para designar o índice de desempenho, em vez de  $I$ , como no Cap. 5. Isto permitirá ao leitor distinguir facilmente o índice de desempenho da matriz identidade, que é representada pela maiúscula  $I$  em negrito.

Substituindo-se a Eq. (11.8) na Eq. (11.5), obtém-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{BKx} = \mathbf{Hx}, \quad (11.9)$$

onde  $\mathbf{H}$  é a matriz  $n \times n$  resultante da adição dos elementos de  $\mathbf{A}$  e de  $\mathbf{BK}$ .

Agora, retornando ao índice de desempenho do erro quadrático, convém lembrar, com base na Seção 5.9 que o índice para uma única variável de estado,  $x_1$ , pode ser escrito como

$$J = \int_0^{t_f} [x_1(t)]^2 dt. \quad (11.10)$$

Um índice de desempenho escrito em termos de duas variáveis de estado seria, então,

$$J = \int_0^{t_f} (x_1^2 + x_2^2) dt. \quad (11.11)$$

Como se deseja definir o índice de desempenho em termos de uma integral da soma dos quadrados das variáveis de estado, será utilizada a notação

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2), \quad (11.12)$$

onde  $\mathbf{x}^T$  indica a transposta da matriz  $\mathbf{x}$ .<sup>4</sup> Portanto, a forma específica do índice de desempenho, em termos do vetor de estado, é

$$J = \int_0^{t_f} (\mathbf{x}^T \mathbf{x}) dt. \quad (11.13)$$

A forma geral do índice de desempenho (Eq. 11.4) incorpora um termo com  $\mathbf{u}$  que não foi incluído neste ponto mas que o será mais adiante, nesta seção.

Considerando-se novamente a Eq. (11.13), será definido o tempo final de interesse  $t_f = \infty$ . Para obter o valor mínimo de  $J$ , será postulada a existência de uma equação diferencial exata tal que

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{Px}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{x}, \quad (11.14)$$

onde  $\mathbf{P}$  deve ser determinada. Sem perda de generalidade, será usada uma matriz simétrica  $\mathbf{P}$ , para simplificar o tratamento algébrico. Assim, para uma matriz simétrica  $\mathbf{P}$ ,  $p_{ij} = p_{ji}$ . Completando-se a derivada indicada no lado esquerdo da Eq. (11.14), tem-se

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{Px}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{Px} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}.$$

Substituindo-se na Eq. (11.9), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{Px}) &= (\mathbf{Hx})^T \mathbf{Px} + \mathbf{x}^T \mathbf{P}(\mathbf{Hx}) \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{H}^T \mathbf{Px} + \mathbf{x}^T \mathbf{PHx} \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{H}^T \mathbf{P} + \mathbf{PH}) \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (11.15)$$

onde  $(\mathbf{Hx})^T = \mathbf{x}^T \mathbf{H}^T$  pela definição de transposta do produto de matrizes. Fazendo-se  $(\mathbf{H}^T \mathbf{P} + \mathbf{PH}) = -\mathbf{I}$ , então a Eq. (11.15) se torna

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{Px}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{x}, \quad (11.16)$$

que é a equação diferencial exata que está sendo procurada. Substituindo-se a Eq. (11.16) na Eq. (11.13), obtém-se

$$J = \int_0^{\infty} -\frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{Px}) dt = -\mathbf{x}^T \mathbf{Px}|_0^{\infty} = \mathbf{x}^T(0) \mathbf{Px}(0). \quad (11.17)$$

Para o cálculo do limite superior da integral em  $t = \infty$  admitiu-se que o sistema é estável e que, portanto,  $\mathbf{x}(\infty) = \mathbf{0}$ , como desejado. Em consequência, para minimizar o índice de desempenho  $J$ , consideram-se duas equações

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T \mathbf{x} dt = \mathbf{x}^T(0) \mathbf{Px}(0) \quad (11.18)$$

<sup>4</sup>A operação  $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$  é discutida na Seção C.4, do Apêndice C.

e

$$\mathbf{H}^T \mathbf{P} + \mathbf{PH} = -\mathbf{I}. \quad (11.19)$$

As etapas de projeto são as seguintes:

1. Determinar a matriz  $\mathbf{P}$  que satisfaz a Eq. (11.19), onde  $\mathbf{H}$  é conhecida.
2. Minimizar  $J$  determinando o mínimo da Eq. (11.18) por meio do ajuste de um ou mais parâmetros do sistema.

#### EXEMPLO 11.5

#### Retroação com variáveis de estado

Considere-se o sistema de controle mostrado na Fig. 11.5 sob a forma de diagrama de fluxo de sinal. As variáveis de estado são identificadas como  $x_1$  e  $x_2$ . O desempenho deste sistema é amplamente insatisfatório porque resulta em uma resposta não amortecida para um sinal de entrada ou de perturbação em degrau. A equação diferencial vetorial deste sistema é

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (11.20)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Será escolhido um sistema de controle com retroação tal que

$$u(t) = -k_1 x_1 - k_2 x_2, \quad (11.21)$$

portanto, o sinal de controle é uma função linear das duas variáveis de estado. O sinal da retroação é negativo de modo a se ter retroação negativa. Assim, a Eq. (11.20) se torna

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k_1 x_1 - k_2 x_2; \end{aligned} \quad (11.22)$$

na forma matricial, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Hx} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (11.23)$$

Observa-se que  $x_1$  representaria a posição de um sistema de controle de posição, e a função de transferência do sistema seria  $G(s) = 1/Ms^2$ , com  $M = 1$  e atrito insignificante. De qualquer modo, para evitar manipulações algébricas desnecessárias, será feito  $k_1 = 1$  e se determinará o valor adequado para  $k_2$  de modo que o índice de desempenho seja minimizado. Escrevendo-se, então, a Eq. (11.19),

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^T \mathbf{P} + \mathbf{PH} &= -\mathbf{I}, \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11.24)$$

Completando-se a multiplicação e a adição das matrizes, tem-se

$$\begin{aligned} -p_{12} - p_{12} &= -1, \\ p_{11} - k_2 p_{12} - p_{22} &= 0, \\ p_{12} - k_2 p_{22} + p_{12} - k_2 p_{22} &= -1. \end{aligned} \quad (11.25)$$

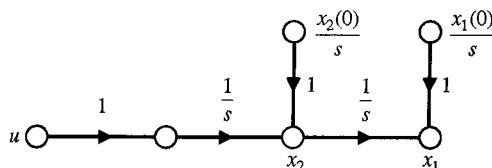


Fig. 11.5 Diagrama de fluxo do sistema de controle do Exemplo 11.5.

Resolvendo este sistema de equações, tem-se

$$p_{12} = \frac{1}{2}, \quad p_{22} = \frac{1}{k_2}, \quad p_{11} = \frac{k_2^2 + 2}{2k_2}.$$

O índice integral de desempenho é, então

$$J = \mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0), \quad (11.26)$$

e será considerado o caso em que o estado é deslocado inicialmente de uma unidade a partir do ponto de equilíbrio de modo que  $\mathbf{x}^T(0) = [1, 1]$ . Por conseguinte, a Eq. (11.26) se torna

$$\begin{aligned} J &= [1 \quad 1] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [1 \quad 1] \begin{bmatrix} (p_{11} + p_{12}) \\ (p_{12} + p_{22}) \end{bmatrix} \\ &= (p_{11} + p_{12}) + (p_{12} + p_{22}) = p_{11} + 2p_{12} + p_{22}. \end{aligned} \quad (11.27)$$

Substituindo-se os elementos de  $\mathbf{P}$ , tem-se

$$J = \frac{k_2^2 + 2}{2k_2} + 1 + \frac{1}{k_2} = \frac{k_2^2 + 2k_2 + 4}{2k_2}. \quad (11.28)$$

Para minimizar em função de  $k_2$ , deriva-se em relação a  $k_2$  e iguala-se a zero:

$$\frac{\partial J}{\partial k_2} = \frac{2k_2(2k_2 + 2) - 2(k_2^2 + 2k_2 + 4)}{(2k_2)^2} = 0. \quad (11.29)$$

Portanto,  $(k_2)^2 = 4$  e  $k_2 = 2$  quando  $J$  é um mínimo. O valor mínimo de  $J$  é obtido substituindo-se  $k_2 = 2$  na Eq. (11.28). Obtém-se, então

$$J_{\min} = 3.$$

A matriz de sistema  $\mathbf{H}$  do sistema compensado é, então,

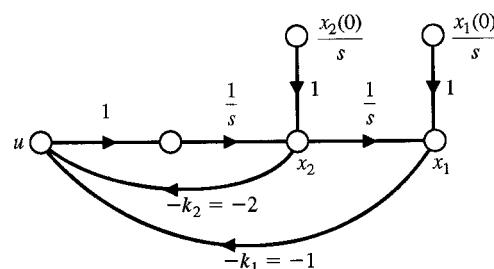
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (11.30)$$

A equação característica do sistema compensado é, então,

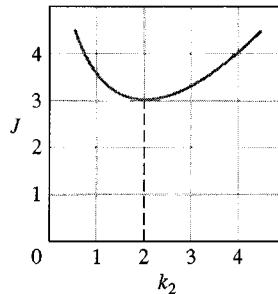
$$\det [\lambda \mathbf{I} - \mathbf{H}] = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1. \quad (11.31)$$

Como este é um sistema de segunda ordem, nota-se que a equação característica é da forma  $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$  e, portanto, a relação de amortecimento do sistema compensado é  $\zeta = 1,0$ . Este sistema compensado é considerado ótimo no sentido de que o sistema compensado resulta em um valor mínimo do índice de desempenho. Reconhece-se naturalmente que este sistema é ótimo somente com relação a um conjunto específico de condições iniciais admitidas. O sistema compensado está na Fig. 11.6. Uma curva do índice de desempenho em função de  $k_2$  está mostrada na Fig. 11.7. É evidente que este sistema não é muito sensível a variações de  $k_2$  e manterá um índice de desempenho próximo do mínimo se a alteração percentual de  $k_2$  for pequena. Define-se a sensibilidade de um sistema ótimo como

$$S_k^{\text{opt}} = \frac{\Delta J/J}{\Delta k/k}, \quad (11.32)$$



**Fig. 11.6** Sistema de controle compensado do Exemplo 11.5.



**Fig. 11.7** Índice de desempenho em função do parâmetro  $k_2$ .

onde  $k$  é o parâmetro de projeto. Tem-se, então, neste exemplo,  $k = k_2$  e, portanto,

$$S_{k_2}^{\text{opt}} \approx \frac{0,08/3}{0,5/2} = 0,107. \blacksquare \quad (11.33)$$

#### EXEMPLO 11.6

#### Determinação de um sistema ótimo

Reconsidere-se agora o sistema do Exemplo 11.5, onde ambos os ganhos de retroação,  $k_1$  e  $k_2$ , não são especificados. Para simplificar o procedimento algébrico sem perder de vista a compreensão global do problema, seja  $k_1 = k_2 = k$ . O leitor poderá provar que se  $k_1$  e  $k_2$  não forem especificados, então  $k_1 = k_2$  será o resultado alcançado quando for obtido o mínimo do índice de desempenho (Eq. 11.18). Então para o sistema do Exemplo 11.5, a Eq. (11.23) se torna

$$\dot{x} = Hx = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -k \end{bmatrix} x. \quad (11.34)$$

Para se determinar a matriz  $P$  é utilizada a Eq. (11.19), que é

$$H^T P + PH = -I. \quad (11.35)$$

Resolvendo-se o sistema de equações resultante da Eq. (11.35), obtém-se

$$p_{12} = \frac{1}{2k}, \quad p_{22} = \frac{(k+1)}{2k^2}, \quad p_{11} = \frac{(1+2k)}{2k}$$

Considere-se o caso em que o sistema esteja inicialmente deslocado de uma unidade do equilíbrio de modo que  $x^T(0) = [1 \ 0]$ . Então o índice de desempenho (Eq. 11.18) se torna

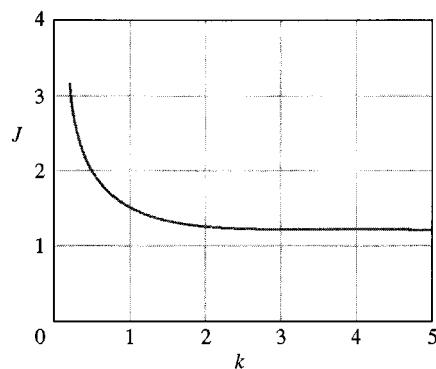
$$J = \int_0^\infty x^T x dt = x^T(0)Px(0) = p_{11}. \quad (11.36)$$

Assim, o índice de desempenho a ser minimizado é

$$J = p_{11} = \frac{(1+2k)}{2k} = 1 + \frac{1}{2k}. \quad (11.37)$$

O valor mínimo de  $J$  é obtido quando  $k$  tende para infinito; o resultado é  $J_{\min} = 1$ . Um gráfico de  $J$  em função de  $k$ , mostrado na Fig. 11.8, ilustra que o índice de desempenho tende ao mínimo assintoticamente à medida que  $k$  tende para um valor infinito. Reconhece-se agora que ao se fornecer um valor muito grande para o ganho  $k$ , é possível tornar o sinal de retroação

$$u(t) = -k[x_1(t) + x_2(t)],$$



**Fig. 11.8** Índice de desempenho em função do ganho de retroação  $k$  relativo ao Exemplo 11.6.

muito grande. Contudo, a magnitude do sinal de controle  $u(t)$  está limitada a valores possíveis de serem realizados. Assim, deve ser introduzida uma **restrição** para  $u(t)$  de modo que o valor do ganho  $k$  não possa ser muito elevado. Então, para o exemplo, se for estabelecida uma restrição para  $u(t)$  de modo que

$$|u(t)| \leq 50, \quad (11.38)$$

é necessário que o maior valor aceitável para  $k$  seja, neste caso,

$$k_{\max} = \frac{|u|_{\max}}{x_1(0)} = 50. \quad (11.39)$$

Então o valor mínimo de  $J$  é

$$J_{\min} = 1 + \frac{1}{2k_{\max}} = 1,01, \quad (11.40)$$

que é suficientemente próximo do valor mínimo de  $J$  para atender os requisitos.

Ao se examinar o índice de desempenho (Eq. 11.13), percebe-se que a razão para que a magnitude do sinal de controle não seja levada em conta é que  $u(t)$  não esteja incluído na expressão do índice de desempenho. Contudo, em muitos casos a situação diz respeito ao gasto de energia do sinal de controle. Por exemplo, em um sistema de controle para um veículo elétrico,  $[u(t)]^2$  representa o consumo da energia da bateria e deve ser restringido para conservar a energia para grandes períodos de deslocamento. Para levar em conta o consumo de energia do sinal de controle, será utilizado o índice de desempenho

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{I} \mathbf{x} + \lambda \mathbf{u}^T \mathbf{u}) dt, \quad (11.41)$$

onde  $\lambda$  é um fator escalar de ponderação e  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. O fator de ponderação  $\lambda$  será escolhido de modo que a importância relativa do desempenho das variáveis de estado seja comparada com a importância do gasto dos recursos de energia do sistema que é representada por  $\mathbf{u}^T \mathbf{u}$ . Como nos parágrafos anteriores, a retroação com variáveis de estado será representada pela equação matricial

$$\mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{x}, \quad (11.42)$$

e o sistema com esta retroação de estado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{H} \mathbf{x}. \quad (11.43)$$

Substituindo-se agora a Eq. (11.42) na Eq. (11.41), tem-se

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{I} \mathbf{x} + \lambda (\mathbf{K} \mathbf{x})^T (\mathbf{K} \mathbf{x})) dt \\ &= \int_0^\infty [\mathbf{x}^T (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{K}^T \mathbf{K}) \mathbf{x}] dt = \int_0^\infty \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} dt, \end{aligned} \quad (11.44)$$

onde  $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{K}^T \mathbf{K})$  é uma matriz  $n \times n$ . Seguindo o desenvolvimento das Eqs. (11.13) a (11.17), postula-se a existência de uma diferencial exata tal que

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}. \quad (11.45)$$

Então, neste caso, é necessário que

$$\mathbf{H}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{H} = -\mathbf{Q}, \quad (11.46)$$

e assim se tem, como antes (Eq. 11.17)

$$J = \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0). \quad (11.47)$$

Agora as etapas de projeto são exatamente as das Eqs. (11.18) e (11.19), com exceção de que o lado esquerdo da Eq. (11.46) se iguala a  $-\mathbf{Q}$  em vez de  $-\mathbf{I}$ . Naturalmente, se  $\lambda = 0$ , a Eq. (11.46) se reduz à Eq. (11.19). Reconsidere-se agora o Exemplo 11.5 com  $\lambda$  diferente de zero para levar em conta o gasto de energia do sinal de controle. ■

### EXEMPLO 11.7

### Sistema ótimo com considerações sobre a energia de controle

Reconsidere-se o sistema do Exemplo 11.5, que está mostrado na Fig. 11.5. Para este sistema se usa uma retroação com variáveis de estado de modo que

$$\mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = k \mathbf{I} \mathbf{x}. \quad (11.48)$$

Por conseguinte, a matriz  $\mathbf{Q}$  é

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{K}^T \mathbf{K}) = (\mathbf{I} + \lambda k^2 \mathbf{I}) = (1 + \lambda k^2) \mathbf{I}. \quad (11.49)$$

Como no Exemplo 11.6, será feito  $\mathbf{x}^T(0) = [1 \ 0]$  de modo que  $J = p_{11}$ . Calcula-se  $p_{11}$  a partir da Eq. (11.46) como

$$\mathbf{H}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{H} = -\mathbf{Q} = -(1 + \lambda k^2) \mathbf{I}. \quad (11.50)$$

Determina-se, assim,

$$J = p_{11} = (1 + \lambda k^2) \left( 1 + \frac{1}{2k} \right), \quad (11.51)$$

e se observa que o lado direito da Eq. (11.51) se reduz ao da Eq. (11.37) quando  $\lambda = 0$ . Agora, o mínimo de  $J$  será encontrado fazendo-se a derivada de  $J$ , que é

$$\frac{dJ}{dk} = 2\lambda k + \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2k^2} = \frac{4\lambda k^3 + \lambda k^2 - 1}{2k^2} = 0. \quad (11.52)$$

Portanto, o mínimo do índice de desempenho ocorre quando  $k = k_{\min}$ , onde  $k_{\min}$  é a solução da Eq. (11.52).

Seja completar este exemplo para o caso em que a energia de controle e as variáveis de estado ao quadrado sejam igualmente importantes, de modo que  $\lambda = 1$ . Então a Eq. (11.52) se torna  $4k^3 + k^2 - 1 = 0$  e se encontra  $k_{\min} = 0,555$ . O valor do índice de desempenho  $J$  obtido com  $k_{\min}$  é consideravelmente maior que o do exemplo anterior porque o gasto de energia é ponderado igualmente como custo. O gráfico de  $J$  em função de  $k$  para este caso está mostrado na Fig. 11.9. O gráfico de  $J$  em função de  $k$  para o Exemplo 11.6 também está mostrado na Fig. 11.9, para comparação. ■

Tornou-se evidente a partir dos exemplos neste capítulo que o mínimo real obtido depende das condições iniciais, da definição do índice de desempenho e do valor do fator escalar  $\lambda$ .

O projeto de diversos parâmetros pode ser realizado de maneira semelhante ao que foi ilustrado nos exemplos. Além disto, o procedimento de projeto pode ser estendido a sistemas de ordem mais elevada. Contudo, deve-se considerar o uso de um computador digital para determinar a solução da Eq. (11.19) e obter a matriz  $\mathbf{P}$ . O computador também pode fornecer uma abordagem conveniente para se calcular o valor mínimo de  $J$  para um ou mais parâmetros. Contudo, a solução da Eq. (11.46) pode ser difícil, especialmente quando a ordem do sistema for bastante alta ( $n > 3$ ). Um método alternativo adequado para os cálculos em computador é enunciado sem demonstração no próximo parágrafo.

Considere-se um sistema não compensado com uma única entrada e uma única saída descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u,$$

e retroação

$$u = -\mathbf{K}^T \mathbf{x} = -[k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n] \mathbf{x}.$$

O índice de desempenho é

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + ru^2) dt,$$

em que  $r$  é o fator escalar de ponderação. O índice é minimizado quando

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} \mathbf{B} r^{-1}.$$

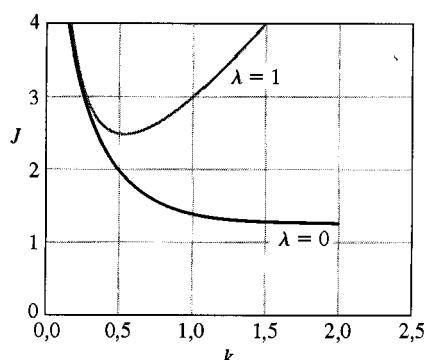


Fig. 11.9 Índice de desempenho em função do ganho de retroação  $k$  relativo ao Exemplo 11.7.

A matriz  $\mathbf{P}$ ,  $n \times n$  é determinada a partir da solução da equação

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P} r^{-1} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad (11.53)$$

onde, em muitos casos,  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ , a matriz identidade. A Eq. (11.53) pode ser programada facilmente em um computador ou resolvida usando o MATLAB. A Eq. (11.53) é usualmente chamada de equação de Riccati. Este controle ótimo é chamado de **regulador linear quadrático** (LQR — *Linear Quadratic Regulator*) [14, 22].

## 11.5 ALOCAÇÃO DE PÓLOS USANDO VARIÁVEIS DE ESTADO

Na Seção 11.4 considerou-se o uso de retroação com variáveis de estado para alcançar a otimização de um índice de desempenho. Nesta seção a retroação com variáveis de estado será usada para obter o posicionamento desejado para os pólos da função de transferência a malha fechada  $T(s)$ . A abordagem é baseada na retroação de todas as variáveis de estado, por conseguinte,

$$\mathbf{u} = \mathbf{Kx}. \quad (11.54)$$

Ao se usar esta retroação com variáveis de estado, as raízes da equação característica são posicionadas onde o desempenho transitório atende a resposta desejada.

### EXEMPLO 11.8

#### Projeto de um sistema de terceira ordem

Considere-se o sistema de terceira ordem com a equação diferencial

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 5\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = u.$$

Pode-se selecionar como variáveis de estado as variáveis de fase (ver Seção 3.4) de modo que  $x_1 = y$ ,  $x_2 = dy/dt$  e  $x_3 = d^2y/dt^2$ , então

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu},$$

onde  $y = x_1$ . Se a matriz de retroação com variáveis de estado  $\mathbf{K}$  for

$$\mathbf{K} = [k_1 \ k_2 \ k_3]$$

e

$$u = -\mathbf{Kx},$$

então

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} - \mathbf{BKx} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}$$

A matriz com retroação de estado é

$$[\mathbf{A} - \mathbf{BK}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ (-2 - k_1) & (-3 - k_2) & (-5 - k_3) \end{bmatrix},$$

e a equação característica é

$$\det[\mathbf{A} - \mathbf{BK}] = s^3 + (5 + k_3)s^2 + (3 + k_2)s + (2 + k_1).$$

Se for desejada uma resposta rápida com um valor baixo de ultrapassagem, escolhe-se como equação característica desejada (ver Eq. 5.18 e Tabela 5.2)

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + \zeta\omega_n).$$

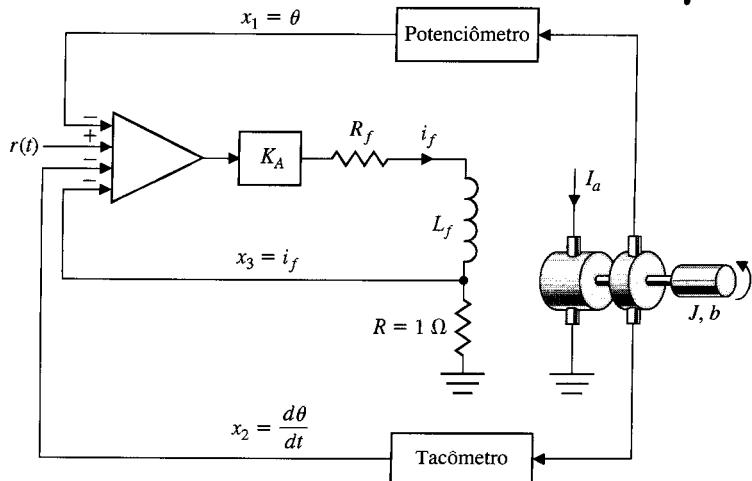
Escolhe-se  $\zeta = 0,8$  para obter ultrapassagem mínima e  $\omega_n$  para atender o requisito de tempo de assentamento. Desejando-se um tempo de assentamento (critério dos 2%) igual a 1 segundo, então

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{(0,8)\omega_n} \cong 1.$$

Se for escolhido  $\omega_n = 6$ , a equação característica desejada é

$$(s^2 + 9,6s + 36)(s + 4,8) = s^3 + 14,4s^2 + 82,1s + 172,8.$$

Portanto é necessário que  $k_3 = 9,4$ ;  $k_2 = 79,1$  e  $k_1 = 170,8$ . A resposta ao degrau não apresenta ultrapassagem e o tempo de assentamento é 1 segundo, como desejado. ■



**Fig. 11.10** Sistema de controle de posição com retroação por variáveis de estado onde  $y = \theta$ .

Como exemplo prático de retroação com variáveis de estado, considere-se o sistema com retroação mostrado na Fig. 11.10. Este controle de posição usa um motor controlado pelo campo, e a função de transferência foi obtida na Seção 2.5 como

$$G(s) = \frac{K}{s(s + b/J)(s + R_f/L_f)},$$

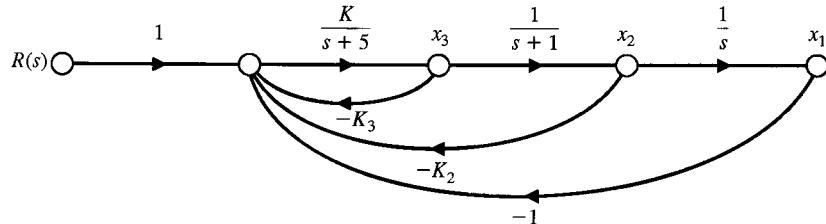
onde  $K = K_a K_m / J L_f$ . Para a finalidade que se deseja, será suposto que  $b/J = 1$  e  $R_f/L_f = 5$ . Como está mostrado na Fig. 11.10, o sistema possui retroação das três variáveis de estado: posição, velocidade e corrente de campo. Será admitido que a constante de retroação para a posição é igual a 1, como está mostrado na Fig. 11.11, a qual fornece uma representação do sistema em diagrama de fluxo de sinal. Sem retroação das variáveis de estado  $x_2$  e  $x_3$ , definem-se  $K_3 = K_2 = 0$  e se tem

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 5)}. \quad (11.55)$$

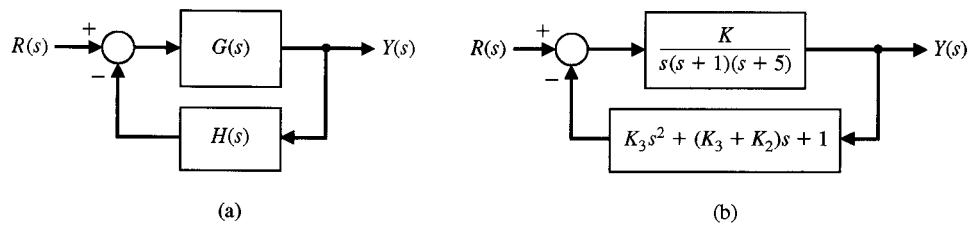
Este sistema se tornará instável quando  $K \geq 30$ . Contudo, com retroação de todas as variáveis de estado é possível assegurar que o sistema será estável e fazer com que o desempenho transitório do sistema seja o desejado.

O diagrama de fluxo de sinal da Fig. 11.11 pode ser convertido na forma do diagrama de blocos mostrado na Fig. 11.12. A função de transferência  $G(s)$  permanece inalterada (como na Eq. 11.55) e  $H(s)$  leva em conta a retroação com as variáveis de estado. Portanto

$$H(s) = K_3 \left[ s^2 + \left( \frac{K_3 + K_2}{K_3} \right) s + \frac{1}{K_3} \right], \quad (11.56)$$



**Fig. 11.11** Diagrama de fluxo de sinal do sistema com retroação por variáveis de estado.



**Fig. 11.12** Representação em diagrama de blocos equivalente do sistema com retroação por variáveis de estado.

e

$$G(s)H(s) = \frac{M[s^2 + Qs + (1/K_3)]}{s(s+1)(s+5)}, \quad (11.57)$$

onde  $M = KK_3$  e  $Q = (K_3 + K_2)/K_3$ . Como  $K_3$  e  $K_2$  podem ser ajustados de forma independente, o projetista pode selecionar a posição dos zeros de  $G(s)H(s)$ .

Como ilustração, seja escolher os zeros de  $GH(s)$  de modo que eles cancelem os pólos reais de  $G(s)$ . Define-se o polinômio do numerador

$$H(s) = K_3 \left( s^2 + Qs + \frac{1}{K_3} \right) = K_3(s+1)(s+5). \quad (11.58)$$

Isto requer  $K_3 = 1/5$  e  $Q = 6$ , o que define  $K_2 = 1$ . Então

$$GH(s) = \frac{M(s+1)(s+5)}{s(s+1)(s+5)}, \quad (11.59)$$

onde  $M = KK_3$ . A função de transferência a malha fechada é, então,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{K}{(s+1)(s+5)(s+M)}. \quad (11.60)$$

Por conseguinte, embora fosse possível escolher  $M = 10$  e assegurar a estabilidade do sistema, a resposta do sistema a malha fechada seria ditada pelos pólos em  $s = -1$  e  $s = -5$ . Assim, os zeros de  $GH(s)$  serão escolhidos com o objetivo de obter raízes a malha fechada em posições desejadas no semiplano da esquerda e garantir a estabilidade do sistema.

#### EXEMPLO 11.9

#### Projeto de retroação com variáveis de estado

Considere-se novamente o sistema da Fig. 11.12(b) e definam-se os zeros de  $GH(s)$  em  $s = -4 + j2$  e  $s = -4 - j2$ . Então o numerador de  $GH(s)$  será

$$\begin{aligned} H(s) &= K_3 \left( s^2 + Qs + \frac{1}{K_3} \right) \\ &= K_3(s+4+j2)(s+4-j2) = K_3(s^2 + 8s + 20). \end{aligned} \quad (11.61)$$

Portanto,  $K_3 = 1/20$  e  $Q = 8$ , resultando  $K_2 = 7/20$ . O lugar das raízes resultante para

$$G(s)H(s) = \frac{M(s^2 + 8s + 20)}{s(s+1)(s+5)}$$

está mostrado na Fig. 11.13. O sistema é estável para todos os valores de ganho  $M = KK_3$ . Para  $M = 10$ , as raízes complexas possuem  $\zeta = 0,73$ , de modo que a ultrapassagem esperada para uma entrada

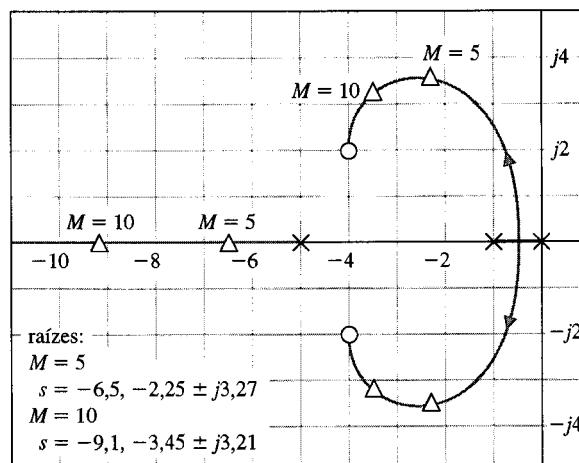


Fig. 11.13 Lugar das raízes do sistema compensado.

em degrau é de aproximadamente 5%. O tempo de assentamento será aproximadamente 1 segundo. A função de transferência a malha fechada é

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{R(s)} &= T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \\ &= \frac{200}{(s + 3,45 + j3,2)(s + 3,45 - j3,2)(s + 9,1)}.\end{aligned}$$

Uma abordagem alternativa consiste em definir as raízes a malha fechada de  $1 + G(s)H(s) = 0$  nas posições desejadas e em seguida resolver em termos dos valores dos ganhos  $K$ ,  $K_3$  e  $K_2$  que são necessários. Por exemplo, se for desejado que as raízes a malha fechada estejam em  $s = -10$ ,  $s = -5 + j$  e  $s = -5 - j$ , deve-se ter a equação característica

$$q(s) = (s + 10)(s^2 + 10s + 26) = s^3 + 20s^2 + 126s + 260 = 0. \quad (11.62)$$

Como

$$1 + G(s)H(s) = s(s + 1)(s + 5) + M\left(s^2 + Qs + \frac{1}{K_3}\right) = 0, \quad (11.63)$$

iguala-se a Eq. (11.62) à Eq. (11.3), obtendo-se  $M = 14$ ,  $Q = 121/14$ ,  $K_3 = 14/260$  e  $K_2 = 0,41$ . ■

Em muitos casos, as variáveis de estado estão disponíveis, e se pode usar retroação com variáveis de estado no sentido de obter um sistema estável, bem compensado.

#### EXEMPLO 11.10

#### Controle do pêndulo invertido

Pode-se projetar um sistema de controle de modo que se  $u(t)$  for uma função das variáveis de estado resultará um sistema estável. O projeto de um sistema de controle com retroação estável se baseia na escolha adequada da estrutura de retroação. Portanto, considerando-se o controle do carrinho e do pêndulo invertido instável mostrado na Fig. 3.19, deve-se medir e utilizar as variáveis de estado do sistema para controlar o carrinho (ver Exemplo 3.5). Assim, se alguém desejar medir a variável  $x_3 = \theta$ , é possível utilizar um potenciômetro conectado ao eixo de articulação do pêndulo. De modo semelhante, poderia ser medida a velocidade angular,  $x_4 = \dot{\theta}$ , utilizando-se um gerador tacométrico. As variáveis de estado,  $x_1$  e  $x_2$ , que são a posição e a velocidade do carrinho, poderiam ser medidas através de sensores adequados. Se as variáveis de estado forem todas mensuráveis, poderão ser utilizadas em um controlador de modo que  $u = \mathbf{Kx}$ , onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de retroação. O vetor de estado  $\mathbf{x}$  representa o estado do sistema; neste modo, o conhecimento de  $\mathbf{x}(t)$  e das equações que descrevem a dinâmica do sistema constitui informação suficiente para o controle e a estabilização de um sistema. Esta abordagem de projeto é chamada de controle com retroação de estado [4, 5, 7].

Para ilustrar a utilização da retroação com variáveis de estado, reconsiderese a parte instável do sistema do pêndulo invertido para projetar um sistema de controle com retroação de estado adequado. Inicia-se por considerar um sistema reduzido. Admitindo-se que o sinal de controle é um sinal de aceleração e que a massa do carrinho seja insignificante, é possível focalizar a atenção sobre a dinâmica instável do pêndulo. Quando  $u(t)$  for um sinal de aceleração, a Eq. (3.61) se torna

$$gx_3 - l\dot{x}_4 = \dot{x}_2 = \ddot{y} = u(t).$$

Para o sistema reduzido, onde o sinal de controle é um sinal de aceleração, a posição e a velocidade do carrinho são funções integrais de  $u(t)$ . A parte do vetor de estado sob consideração é  $[x_3, x_4] = [\theta, \dot{\theta}]$ . Assim a equação diferencial vetorial de estado se reduza a

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -(1/l) \end{bmatrix} u(t). \quad (11.64)$$

A matriz  $\mathbf{A}$  da Eq. (11.64) é simplesmente a parte inferior direita da matriz  $\mathbf{A}$  da Eq. (3.65) e o sistema possui a equação característica  $[\lambda^2 - (g/l)]$  com uma raiz no semiplano  $s$  da direita. Para estabilizar o sistema, gera-se um sinal de controle que seja uma função das duas variáveis de estado  $x_3$  e  $x_4$ . Tem-se, então,

$$u(t) = \mathbf{Kx} = [k_1 \ k_2] \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k_1 x_3 + k_2 x_4.$$

Substituindo-se esta expressão do sinal de controle na Eq. (11.64), tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -(1/l)(k_1 x_3 + k_2 x_4) \end{bmatrix}.$$

Combinando-se as duas parcelas do lado direito da equação, encontra-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (1/l)(g - k_1) & -(k_2/l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Obtendo-se a equação característica, tem-se

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} +\lambda & -1 \\ -(1/l)(g - k_1) & (\lambda + k_2/l) \end{bmatrix} &= \lambda \left( \lambda + \frac{k_2}{l} \right) - \frac{1}{l}(g - k_1) \\ &= \lambda^2 + \left( \frac{k_2}{l} \right) \lambda + \frac{1}{l}(k_1 - g). \end{aligned} \quad (11.65)$$

Assim, para que o sistema seja estável, é necessário que  $(k_2/l) > 0$  e  $k_1 > g$ . Portanto, foi possível estabilizar um sistema estável medindo-se as variáveis de estado  $x_3$  e  $x_4$  e usando a função de controle  $u = k_1 x_3 + k_2 x_4$  para obter um sistema estável. Se for desejado obter uma resposta rápida com ultrapassagem pequena, seleciona-se  $\omega_n = 10$  e  $\zeta = 0,8$ . É necessário, então que

$$\frac{k_2}{l} = 16 \quad \text{e} \quad \frac{(k_1 - g)}{l} = 100.$$

A resposta ao degrau teria uma ultrapassagem de 1,5% e um tempo de assentamento de 0,5 segundo. ■

Nesta seção estabeleceu-se uma abordagem para o projeto de sistemas com retroação usando as variáveis de estado como variáveis de retroação para aumentar a estabilidade e obter a resposta desejada para o sistema.

## 11.6 FÓRMULA DE ACKERMANN

A fórmula de Ackermann é útil para se determinar a matriz de retroação de estados em sistemas com uma única entrada e uma única saída.

$$\mathbf{K} = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n],$$

onde

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}.$$

Dada a equação característica,

$$q(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n.$$

A matriz de ganho de retroação é dada por

$$\boxed{\mathbf{K} = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \mathbf{P}_c^{-1} q(\mathbf{A})}, \quad (11.66)$$

onde

$$q(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_1 \mathbf{A}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{A} + \alpha_n \mathbf{I},$$

e  $\mathbf{P}_c$  é a matriz de controlabilidade da Eq. (11.2).

### EXEMPLO 11.11

#### Sistema de segunda ordem

Considerar o sistema

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

e determinar o ganho de retroação para situar os pólos a malha fechada em  $s = -1 \pm j$ . Em consequência, é necessário que

$$q(s) = s^2 + 2s + 2,$$

e  $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ . A equação matricial para o sistema é

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

A matriz de controlabilidade é

$$\mathbf{P}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obtém-se, portanto,

$$\mathbf{K} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} q(\mathbf{A}),$$

onde

$$\mathbf{P}_c^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$q(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tem-se, então,

$$\mathbf{K} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = [2 \quad 2]. \blacksquare$$

## 11.7 LIMITAÇÕES DA RETROAÇÃO COM VARIÁVEIS DE ESTADO

A retroação de estado usualmente não é prática por duas razões. A primeira é que a retroação de estado conduz a compensadores do tipo PD ou do tipo PID, com banda passante infinita, quando se sabe que componentes reais e compensadores sempre apresentam banda passante finita. A segunda razão é que, simplesmente, não é possível ou prático medir todos os estados e fazer sua retroação. Na realidade, somente certos estados ou combinação deles são mensuráveis como saídas. Conseqüentemente, qualquer compensador prático deve depender somente das saídas do sistema, das entradas e de algumas variáveis de estado para compensação.<sup>5</sup>

## 11.8 PROJETO COM MODELO INTERNO

Nesta seção considera-se o problema de projetar um compensador que forneça rastreamento assintótico para uma entrada de referência com erro de estado estacionário nulo. Os sinais de entrada de referência podem incluir degraus, rampas e outros sinais persistentes, como senóides. Sabe-se que para uma entrada em degrau é possível obter erro estacionário de rastreamento nulo com sistemas do tipo um. Esta idéia é formalizada aqui introduzindo-se um **modelo interno** de entrada de referência no compensador [5, 20].

Considere-se um modelo em variáveis de estado do processo a controlar dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad y = \mathbf{Cx}, \quad (11.67)$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vetor de estado,  $u$ , a entrada e  $y$ , a saída. Serão considerados sinais de referência gerado por sistemas lineares da forma

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r, \quad r = \mathbf{d}_r \mathbf{x}_r, \quad (11.68)$$

com condições iniciais desconhecidas. Um modelo equivalente de entrada de referência,  $r(t)$ , é

$$r^{(n)} = \alpha_{n-1} r^{(n-1)} + \alpha_{n-2} r^{(n-2)} + \dots + \alpha_1 \dot{r} + \alpha_0 r, \quad (11.69)$$

onde  $r^{(n)}$  é a  $n$ -ésima derivada de  $r(t)$ .

Começa-se considerando um problema de projeto conhecido, qual seja, o projeto de um controlador que permita rastrear uma entrada de referência com erro de estado estacionário nulo. Neste caso, a entrada de referência é gerada por

$$\dot{\mathbf{x}}_r = 0, \quad r = \mathbf{x}_r, \quad (11.70)$$

<sup>5</sup>O autor não considera a utilização dos observadores de estado. (N. T.)

ou, de forma equivalente,

$$\dot{r} = 0, \quad (11.71)$$

e o erro de rastreamento,  $e$ , é definido por

$$e = y - r.$$

Fazendo-se a derivada em relação ao tempo resulta

$$\dot{e} = \dot{y} = C\dot{x},$$

onde foram utilizados o modelo de entrada de referência da Eq. (11.71) e o modelo do processo a controlar da Eq. (11.67). Definindo-se duas variáveis intermediárias,  $\mathbf{z}$  e  $w$ , como

$$\mathbf{z} = \dot{\mathbf{x}}, \quad w = \dot{u},$$

tem-se

$$\begin{pmatrix} \dot{e} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} w. \quad (11.72)$$

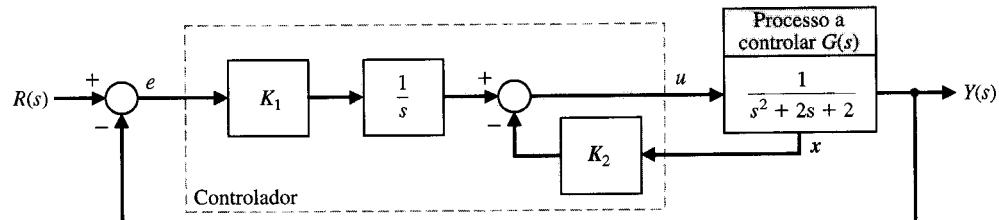
Se o sistema na Eq. (11.72) for controlável, é possível encontrar uma retroação da forma

$$w = -K_1 e - K_2 \mathbf{z} \quad (11.73)$$

tal que a Eq. (11.72) será estável. Isto implica que o erro de rastreamento  $e$  será estável; assim, terá sido alcançado o objetivo de se ter rastreamento assintótico com erro de estado estacionário nulo. A entrada de controle obtida a partir da integração da Eq. (11.73), é

$$u(t) = -K_1 \int_0^t e(\tau) d\tau - \mathbf{K}_2 \mathbf{x}(t)$$

O diagrama de blocos correspondente está mostrado na Fig. 11.14. Percebe-se que o compensador inclui um modelo interno (isto é, um integrador) da entrada de referência em degrau.



**Fig. 11.14** Projeto com modelo interno para uma entrada em degrau.

### EXEMPLO 11.12

#### Projeto de modelo interno para uma entrada em degrau

Considere-se o processo a controlar dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 0] \mathbf{x}. \quad (11.74)$$

Deseja-se projetar um controlador para este sistema com o objetivo de rastrear uma entrada de referência em degrau com erro de estado estacionário nulo. Tem-se, a partir da Eq. (11.72),

$$\begin{pmatrix} \dot{e} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w. \quad (11.75)$$

Uma verificação da controlabilidade mostra que a Eq. (11.75) é completamente controlável. Escrehem-se

$$K_1 = 20, \quad \mathbf{K}_2 = [20 \ 10],$$

para que as raízes da equação característica da Eq. (11.75) fiquem situadas em  $s = -1 \pm j, -10$ . Com  $w$  dado pela Eq. (11.73), tem-se a Eq. (11.75) assintoticamente estável. Assim, qualquer que seja o erro inicial de rastreamento,  $e(0)$ , fica assegurado que  $e(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . A estabilidade assintótica do erro de rastreamento está ilustrada na Fig. 11.15 para uma entrada em degrau. ■

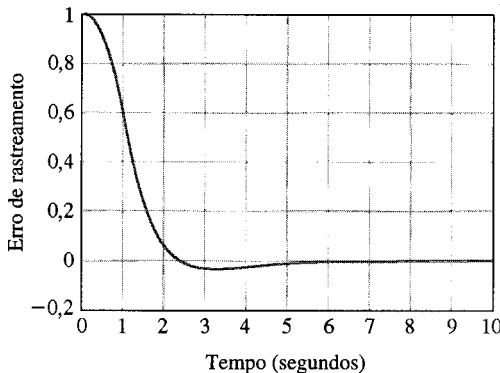


Fig. 11.15 Resposta de um projeto com modelo interno para um erro inicial de rastreamento para uma entrada em degrau unitário.

Considere-se o modelo em diagrama de blocos da Fig. 11.14, onde o processo a controlar está representado por  $G(s)$  e o controlador em cascata é  $G_c(s) = K_1/s$ . O princípio do modelo interno estabelece que se  $G(s)G_c(s)$  contiver  $R(s)$ , então  $y(t)$  rastreará  $r(t)$  assintoticamente. Neste caso  $R(s) = 1/s$ , que está contido em  $G(s)G_c(s)$ , como se esperava.

Considere-se o problema de projetar um controlador que forneça rastreamento assintótico para uma rampa de entrada com erro de estado estacionário,  $r(t) = Mt$ ,  $t \geq 0$ , onde  $M$  é a magnitude da rampa. Neste caso, o modelo de referência de entrada é

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_r &= \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_r, \\ r &= \mathbf{d}_r \mathbf{x}_r = [1 \ 0] \mathbf{x}_r.\end{aligned}\quad (11.76)$$

Na forma de entrada-saída, o modelo de referência da Eq. (11.76) é dado por

$$\ddot{r} = 0.$$

Procedendo-se como anteriormente, define-se o erro de rastreamento como

$$e = y - r,$$

e, tomando-se a derivada em relação ao tempo, **duas vezes**, resulta

$$\ddot{e} = \ddot{y} = \mathbf{C}\ddot{\mathbf{x}}.$$

Com as definições

$$\mathbf{z} = \ddot{\mathbf{x}}, \quad w = \ddot{u},$$

tem-se

$$\begin{pmatrix} \ddot{e} \\ \ddot{e} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C} \\ 0 & 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \dot{e} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} w. \quad (11.77)$$

Assim, se a Eq. (11.77) for controlável, pode-se calcular  $K_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , de modo que com

$$w = -[K_1 \ K_2 \ K_3] \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}, \quad (11.78)$$

o sistema representado pela Eq. (11.77) é assintoticamente estável; portanto, o erro de rastreamento  $e(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , como desejado. A ação de controle,  $u$ , é determinada pela integração da Eq. (11.78) duas vezes. Na Fig. 11.16, constata-se que o controlador resultante possui um duplo integrador, que é o **modelo interno** da entrada de referência em rampa.

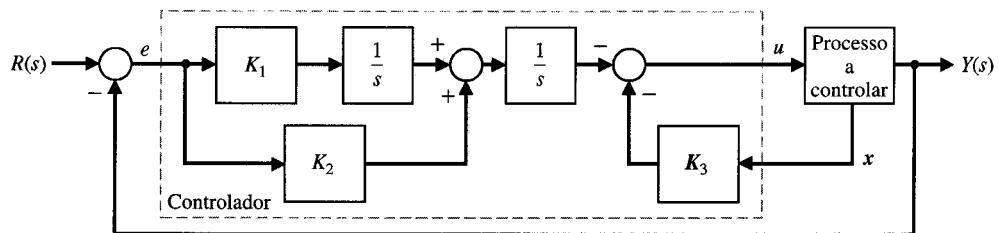


Fig. 11.16 Projeto com modelo interno para uma entrada em rampa. Observe-se que  $G(s)G_c(s)$  contém  $(1/s^2)$ , a entrada de referência  $R(s)$ .

A abordagem do modelo interno pode ser estendida para outras entradas de referência, seguindo o mesmo procedimento geral descrito para as entradas em degrau e em rampa. Além disto, o projeto com modelo interno pode ser usado para rejeitar perturbações persistentes pela inclusão de modelos de perturbação no compensador.

## 11.9 EXEMPLO DE PROJETO: SISTEMA AUTOMÁTICO DE TESTE

Um sistema automático de teste e inspeção utiliza um motor CC para movimentar um conjunto de sondas de teste, como está mostrado na Fig. 11.17. Baixa produtividade e um elevado grau de erro são possíveis ao se testar manualmente diversos painéis de chaves, relés e lâmpadas de sinalização. A automatização do teste por meio de um controlador requer a colocação de um conector nos terminais do componente e o teste da continuidade, da resistência ou da funcionalidade [19]. O sistema usa um motor CC com um disco codificado (*encoder*) para medir posição e velocidade, como está mostrado na Fig. 11.18. Os parâmetros do sistema estão mostrados na Fig. 11.19 com  $K$  representando o amplificador de potência necessário.

Escolhem-se as variáveis de estado  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = d\theta/dt$  e  $x_3 = i_f$ , como está mostrado na Fig. 11.20. Dispõe-se da retroação com variáveis de estado, e se faz

$$u = [-K_1 \quad -K_2 \quad -K_3]x,$$

ou

$$u = -K_1 x_1 - K_2 x_2 - K_3 x_3, \quad (11.79)$$

como mostra a Fig. 11.21. O objetivo é selecionar ganhos de modo que a resposta a um comando em degrau possua um tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 2 segundos e uma超passagem menor que 4,0%.

Para se obter uma posição de saída precisa, faz-se  $K_1 = 1$  e se determinam  $K$ ,  $K_2$  e  $K_3$ . A equação característica do sistema pode ser obtida de diversas formas.

Como  $u = \mathbf{K}x$  já foi dado na Eq. (11.79), usa-se a Fig. 11.20 para obter

$$\dot{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} u. \quad (11.80)$$

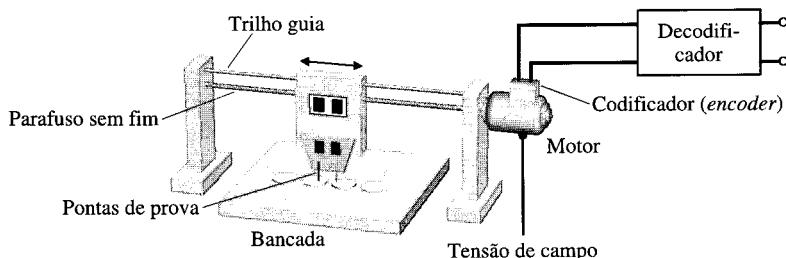


Fig. 11.17 Sistema de teste automático.

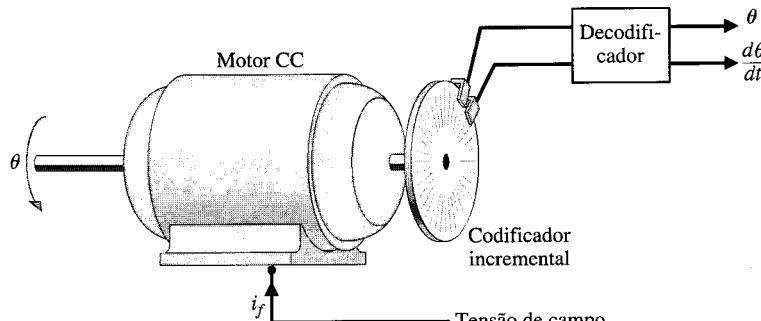


Fig. 11.18 Motor CC com um disco codificador (*encoder*).

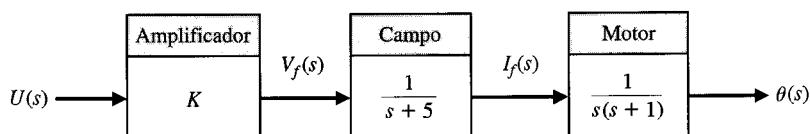
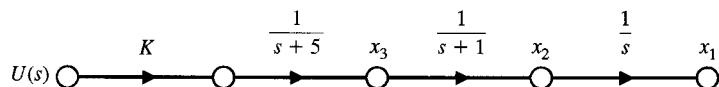


Fig. 11.19 Diagrama de blocos.

**Fig. 11.20** Diagrama de fluxo de sinal.



Incluindo-se  $u$  como definida pela Eq. (11.79), tem-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -K & -KK_2 & -(5 + K_3K) \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (11.81)$$

onde  $K_1 = 1$ . A equação característica também pode ser obtida diretamente da Fig. 11.21 fazendo-se  $G(s)$  a função de transferência do percurso direto e fazendo-se  $H(s)$  a função de transferência equivalente de retroação da Fig. 11.22. Então

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)},$$

e

$$H(s) = K_1 + sK_2 + K_3(s+1)s = K_3 \left[ s^2 + \frac{K_2 + K_3}{K_3} s + \frac{K_1}{K_3} \right]. \quad (11.82)$$

Assim, pode-se traçar o lugar das raízes para  $K_3K$  como

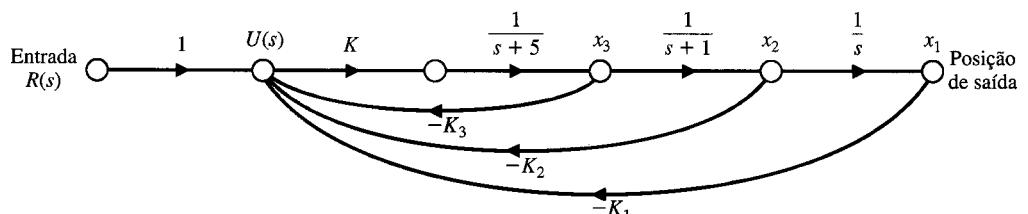
$$1 + \frac{KK_3(s^2 + as + b)}{s(s+1)(s+5)} = 0, \quad (11.83)$$

onde  $a$  e  $b$  são escolhidos selecionando-se  $K_2$  e  $K_3$ . Fazendo-se  $K_1 = 1$  e ajustando  $a = 8$  e  $b = 20$ , posicionam-se os zeros em  $s = -4 \pm j2$  a fim de puxar o lugar das raízes para a esquerda no plano  $s$ . Então

$$\frac{K_2 + K_3}{K_3} = 8, \quad \text{e} \quad \frac{1}{K_3} = 20.$$

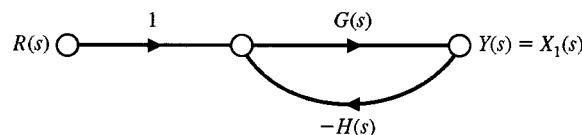
Portanto,  $K_1 = 1$ ,  $K_2 = 0,35$  e  $K_3 = 0,05$ . Um gráfico do lugar das raízes é mostrado na Fig. 11.23. Quando  $KK_3 = 12$ , a posição das raízes na linha  $\zeta = 0,76$ , como mostrado na Fig. 11.23. Uma vez que  $K_3 = 0,05$ , tem-se  $K = 240$ . As raízes em  $K = 240$  são

$$s = -10,62, \quad s = -3,69 \pm j3,00.$$

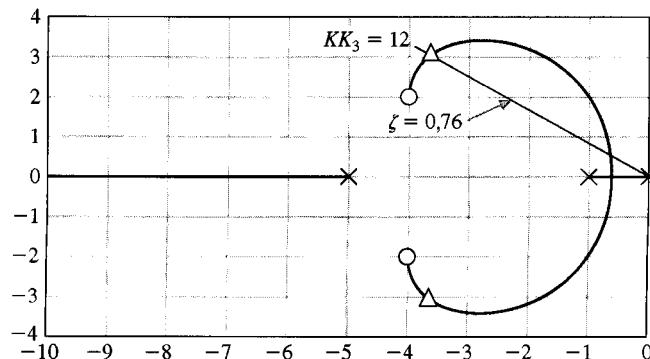


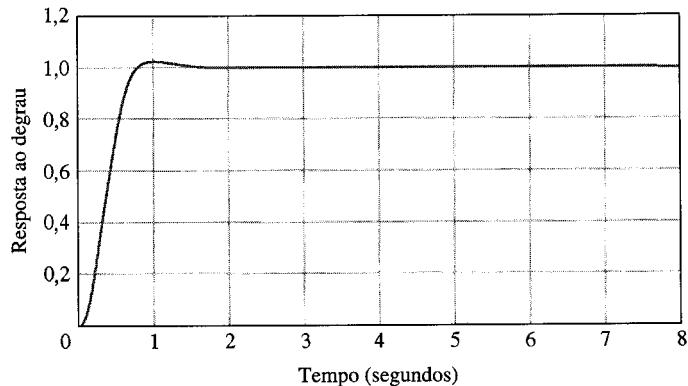
**Fig. 11.21** Sistema com retroação.

**Fig. 11.22** Modelo equivalente do sistema com retroação da Fig. 11.21.



**Fig. 11.23** Lugar das raízes para o sistema de teste automático.





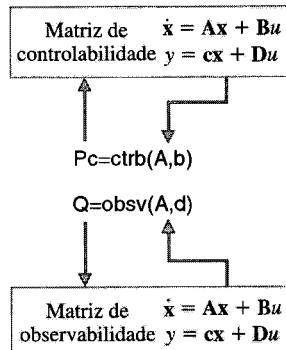
**Fig. 11.24** Resposta ao degrau.

A resposta ao degrau deste sistema é mostrada na Fig. 11.24. A ultrapassagem é de 3% e o tempo de acomodação é 1,8 segundo. Portanto o projeto é bastante aceitável.

## 11.10 PROJETO COM VARIÁVEIS DE ESTADO USANDO MATLAB

A controlabilidade e a observabilidade de um sistema na forma de retroação com variáveis de estado pode ser verificada usando-se, respectivamente, as funções `ctrb` e `obsv`. Os argumentos de entrada da função `ctrb`, mostrada na Fig. 11.25, são a matriz de sistema **A** e a matriz de entrada **B**; o argumento de saída da função `ctrb` é a matriz de controlabilidade **P<sub>c</sub>**. De modo semelhante, os argumentos de entrada da função `obsv`, mostrada na Fig. 11.25, são a matriz de sistema **A** e a matriz de saída **C**; o argumento de saída da função `obsv` é a matriz de observabilidade **Q**.

Observe-se que a matriz de controlabilidade **P<sub>c</sub>** é função somente de **A** e de **B**, enquanto a matriz de observabilidade, **Q**, é função somente de **A** e de **C**.



**Fig. 11.25** As funções `ctrb` e `obsv`.

### EXEMPLO 11.13

### Controle da trajetória de um satélite

Considere-se um satélite em órbita circular, equatorial, a uma altitude de 250 milhas náuticas (aproximadamente 400 km) acima da superfície terrestre, como está ilustrado na Fig. 11.26 [16, 27]. O movimento do satélite (em órbita plana) é descrito pelo modelo em variáveis de estado normalizado.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_t, \quad (11.84)$$

onde o vetor de estado **x** representa perturbações normalizadas a partir da órbita circular equatorial,  $u_r$  é a entrada devida a um propulsor radial,  $u_t$  é a entrada devida a um propulsor tangencial e  $\omega = 0,0011$  rad/s (aproximadamente uma órbita a cada 90 minutos) é a velocidade orbital do satélite na altitude específica. Na ausência de perturbações, o satélite permanece em órbita circular equatorial nominal. Contudo, perturbações como arrasto aerodinâmico podem fazer com que o satélite se desvie de sua trajetória nominal. O problema é projetar um controlador que comande os propulsores do satélite de modo que a órbita real permaneça próxima da órbita circular desejada. Antes de começar

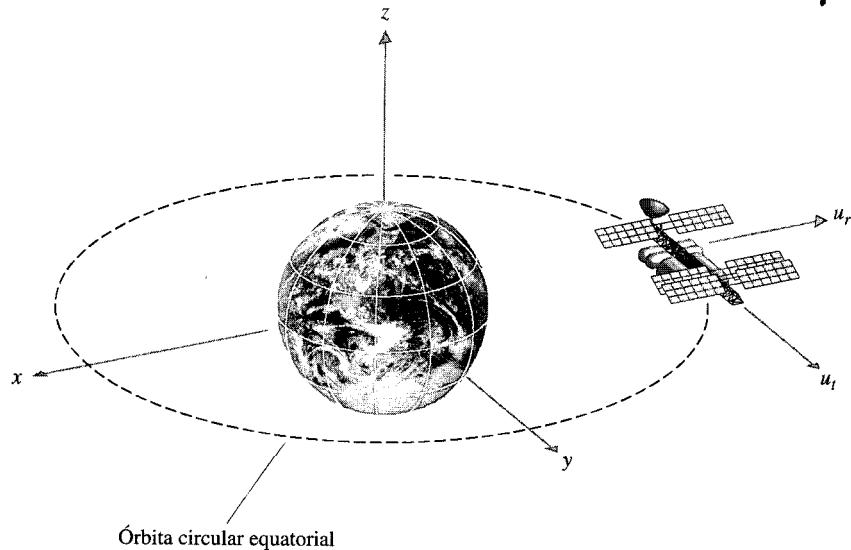


Fig. 11.26 Satélite em uma órbita equatorial circular.

o projeto, sempre se verifica a controlabilidade. Neste caso, a controlabilidade será investigada usando-se os propulsores radial e tangencial de forma independente.

Suponha-se que o propulsor tangencial falhe (isto é,  $u_t = 0$ ) e somente o propulsor radial esteja em operação. O satélite é controlável com  $u_r$ , somente? Esta pergunta será respondida usando o MATLAB para se determinar a controlabilidade. Usando-se o script mostrado na Fig. 11.27, descobre-se que o determinante de  $P_c$  é zero; assim o satélite não será completamente controlável quando o propulsor tangencial falhar.

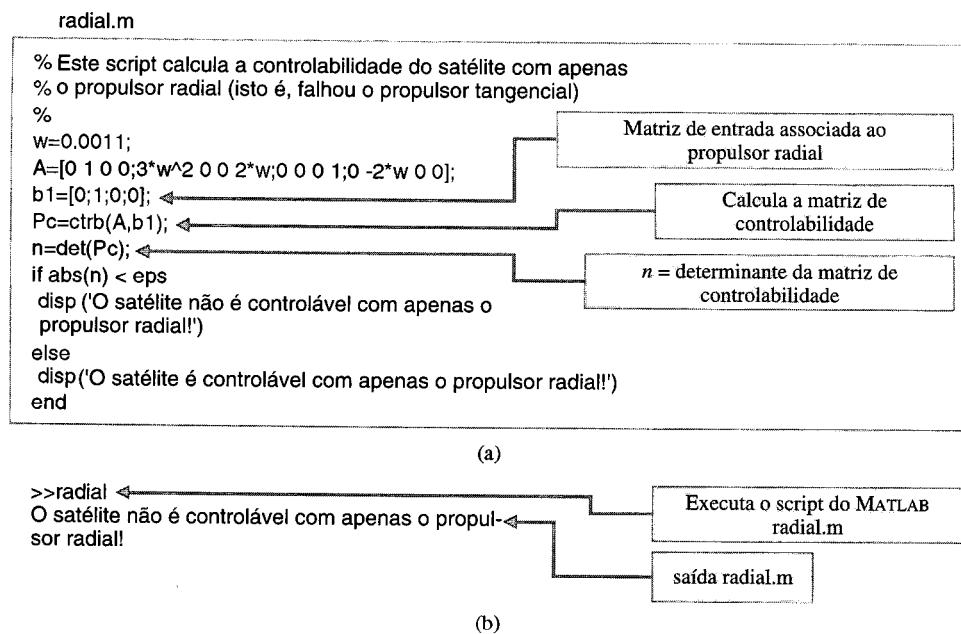
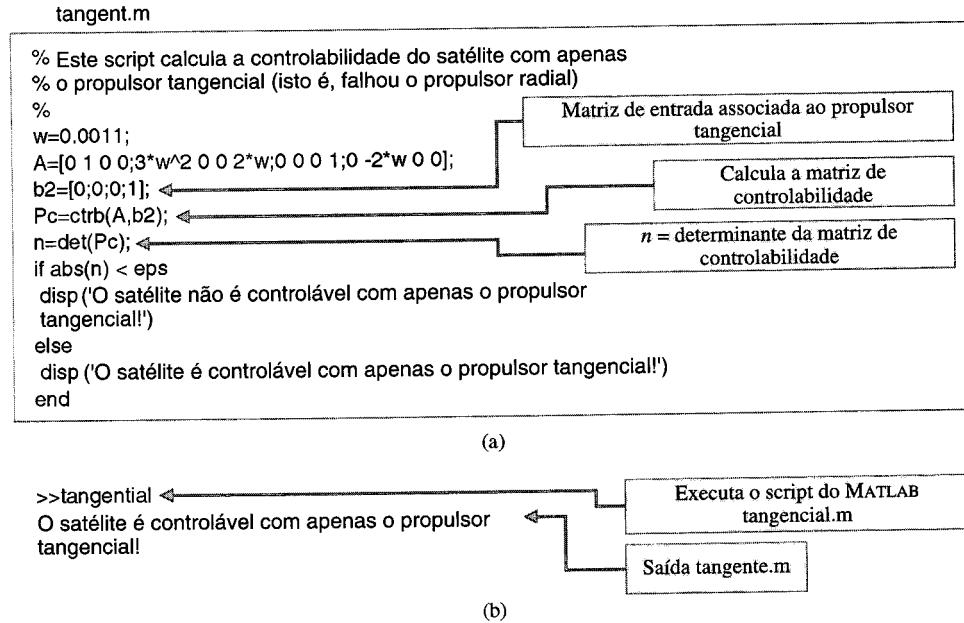


Fig. 11.27 Controlabilidade com propulsores radiais somente: (a) Script em MATLAB, (b) Saída do MATLAB.

Suponha-se, agora, que o propulsor radial falhe (isto é,  $u_r = 0$ ) e que o propulsor tangencial esteja funcionando de forma adequada. O satélite é controlável com  $u_t$ , somente? Esta pergunta será respondida usando o MATLAB para se determinar a controlabilidade. Usando-se o script mostrado na Fig. 11.28, descobre-se que o satélite será completamente controlável apenas com o propulsor tangencial. ■

Conclui-se esta seção com um projeto de controlador para o sistema automático de teste usando modelos em variáveis de estado. A abordagem de projeto utiliza os métodos do lugar das raízes e incorpora scripts em MATLAB para auxiliar o procedimento.



**Fig. 11.28** Controlabilidade com propulsores tangenciais somente: (a) Script em MATLAB, (b) Saída do MATLAB.

#### EXEMPLO 11.14

#### Sistema de teste automático

A representação de um sistema de teste automático no espaço de estados é

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (11.85)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix}.$$

As especificações de projeto são uma resposta ao degrau com (1) tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 2 segundos e (2) ultrapassagem menor que 4%. Admite-se que as variáveis de estado estejam disponíveis para retroação, de modo que a ação de controle é dada por

$$u = (-K_1 \quad -K_2 \quad -K_3)x = Kx. \quad (11.86)$$

Devem ser selecionados os ganhos  $K$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$  para atender as especificações de desempenho. Usando as aproximações de projeto

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} < 2 \quad \text{e} \quad U.P. \approx 100 \exp^{-\zeta \pi / \sqrt{1-\zeta^2}} < 4,$$

descobre-se que

$$\zeta > 0,72 \quad \text{e} \quad \omega_n > 2,8.$$

Isto define, no plano complexo, a região na qual devem estar situadas as raízes dominantes com as quais se espera atender as especificações de projeto, como mostra a Fig. 11.29. Substituindo-se a Eq. (11.86) na Eq. (11.85) resulta

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -KK_1 & -KK_2 & -(5 + KK_3) \end{bmatrix} x = Hx, \quad (11.87)$$

onde  $H = A - BK$ . A equação característica associada com a Eq. (11.87) pode ser obtida calculando-se  $\det(sI - H) = 0$ , resultando em

$$s(s + 1)(s + 5) + KK_3 \left( s^2 + \frac{K_3 + K_2}{K_3} s + \frac{K_1}{K_3} \right) = 0. \quad (11.88)$$

Se  $KK_3$  for visto como um parâmetro e for definido  $K_1 = 1$ , pode-se escrever a Eq. (11.88) como

$$1 + KK_3 \frac{\left( s^2 + \frac{K_3 + K_2}{K_3} s + \frac{1}{K_3} \right)}{s(s + 1)(s + 5)} = 0.$$

Os zeros são situados em  $s = -4 \pm 2j$  a fim de puxar o lugar das raízes para a esquerda no plano  $s$ . Assim, o polinômio de numerador desejado é  $s^2 + 8s + 20$ . Comparando-se os coeficientes correspondentes resulta

$$\frac{K_3 + K_2}{K_3} = 8, \quad \text{e} \quad \frac{1}{K_3} = 20$$

Portanto,  $K_2 = 0,35$  e  $K_3 = 0,05$ . Pode-se agora traçar um lugar das raízes com  $KK_3$  como parâmetro, como está mostrado na Fig. 11.29.

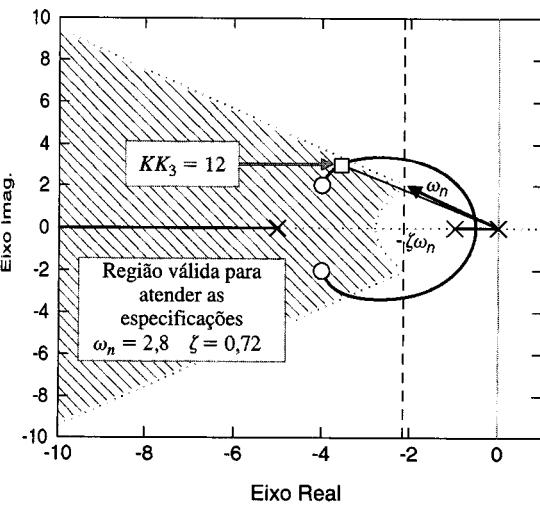
A equação característica, Eq. (11.88), é

$$1 + KK_3 \frac{s^2 + 8s + 20}{s(s+1)(s+5)} = 0.$$

As raízes para o ganho selecionado  $KK_3 = 12$ , se situam na região de desempenho, como está mostrado na Fig. 11.29. A função rlocfind é usada para se terminar o valor de  $KK_3$  no ponto selecionado. Os ganhos finais são

$$\begin{aligned} K &= 240,00, \\ K_1 &= 1,00, \\ K_2 &= 0,35, \\ K_3 &= 0,05. \end{aligned}$$

O projeto do controlador resulta em um tempo de assentamento de cerca de 1,8 segundo e uma ultrapassagem de 3%, como está mostrado na Fig. 11.30. ■



(a)

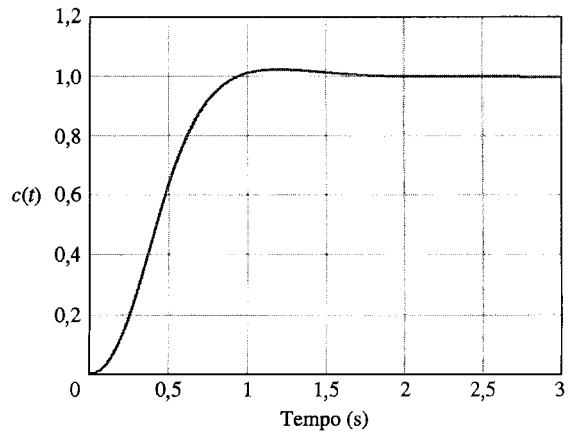


Fig. 11.30 Resposta ao degrau para o sistema de teste automático.

```
% Script do Lugar das Raízes para o Sistema de Teste
% Automático incluindo as regiões das espes de desempenho
num=[1 8 20]; den=[1 6 5 0];
cig; rlocus(num,den); hold on
%
zeta=0.72; wn=2.8;
x=-10:0.1:-zeta*wn; y=-(sqrt(1-zeta^2)/zeta)*x;
xc=-10:0.1:-zeta*wn;c=sqrt(wn^2-xc.^2);
plot(x,y,'x,-y,'x,c,c,'x,xc,-c,')
```

(b)

Fig. 11.29 (a) Lugar das raízes para o sistema de teste automático.  
(b) Script em MATLAB.

## 11.11 EXEMPLO DE PROJETO SEQÜENCIAL: SISTEMA DE LEITURA DE ACIONADOR DE DISCO



Neste capítulo será projetado um sistema de retroação com variáveis de estado para se alcançar a resposta desejada. As especificações são dadas na Tabela 11.1. O modelo a malha aberta de segunda ordem está mostrado na Fig. 11.31. Será projetado o sistema para este modelo de segunda ordem; em seguida, será testada a resposta para ambos os modelos de segunda ordem e de terceira ordem.

Selecionam-se primeiramente as duas variáveis de estado  $x_1(t) = y(t)$  e  $x_2(t) = dy(t)/dt = dx_1(t)/dt$ , como mostra a Fig. 11.32. É prático medir estas variáveis como posição e velocidade da cabeça leitora. Acrescenta-se então a retroação com variáveis de estado como mostra a Fig. 11.32. Escolhe-se  $K_1 = 1$ , uma vez que o objetivo é fazer  $y(t)$  seguir de perto com exatidão o comando  $r(t)$ . A equação diferencial em variáveis de estado do sistema a malha aberta é

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -20 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5K_a \end{bmatrix} r(t).$$

A equação diferencial em variáveis de estado do sistema a malha fechada obtida a partir da Fig. 11.32 é

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5K_1 K_a & -(20 + 5K_2 K_a) \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5K_a \end{bmatrix} r(t).$$

A equação característica do sistema a malha fechada é

$$s^2 + (20 + 5K_2 K_a)s + 5K_a = 0,$$

uma vez que  $K_1 = 1$ . A fim de atender as especificações, selecionam-se os valores  $\zeta = 0,90$  e  $\zeta\omega_n = 125$ . Então a equação característica a malha fechada desejada é

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 250s + 19290 = 0$$

É necessário, portanto, que  $5K_a = 19290$ , ou  $K_a = 3858$ . Além disto, é necessário que

$$20 + 5K_2 K_a = 250,$$

ou  $K_2 = 0,012$ .

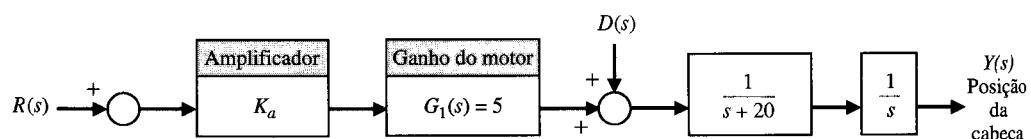
O sistema com o modelo de segunda ordem apresenta a resposta desejada e atende a todas as especificações, como está mostrado na Tabela 11.1. Se for adicionada a indutância  $L = 1$  mH, tem-se o sistema de terceira ordem com

$$G_1(s) = \frac{5000}{(s + 1000)}.$$

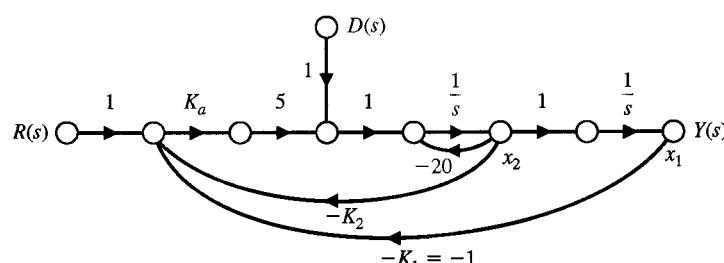
**TABELA 11.1** Especificações e Desempenho Real do Sistema de Controle do Acionador de Disco

Medida de Desempenho	Valor Desejado	Resposta para o Modelo de Segunda Ordem	Resposta para o Modelo de Terceira Ordem
Ultrapassagem percentual	<5%	<1%	0%
Tempo de assentamento	<50 ms	34,3 ms	34,2 ms
Valor máximo da resposta para uma perturbação em degrau unitário	$<5 \times 10^{-3}$	$5,2 \times 10^{-5}$	$5,2 \times 10^{-5}$

**Fig. 11.31** Modelo a malha aberta do sistema de controle da cabeça.



**Fig. 11.32** Sistema a malha fechada com retroação de duas variáveis de estado.



Usando-se este modelo, que incorpora a indutância de campo, testa-se a resposta do sistema com os ganhos selecionados para o modelo de segunda ordem. Os resultados são fornecidos na Tabela 11.1, ilustrando que o modelo de segunda ordem é um modelo muito bom do sistema. Os resultados reais do sistema de terceira ordem atendem as especificações.

## 11.12 SUMÁRIO

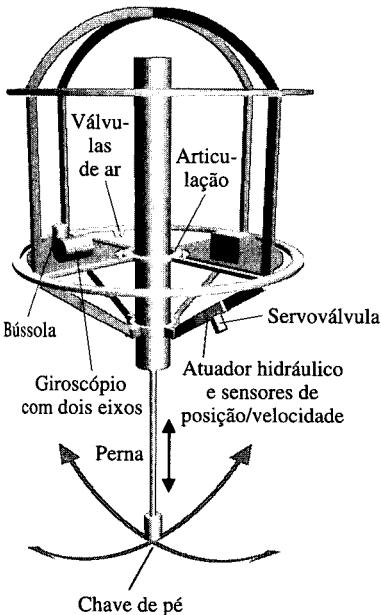
Foi examinado de forma sucinta o projeto de sistemas de controle no domínio do tempo. Foi considerado especificamente o projeto ótimo de um sistema usando retroação com variáveis de estado. Foi tratado ainda o projeto, no plano  $s$ , de sistemas que utilizam retroação das variáveis de estado. Para concluir, foi discutido o projeto com modelo interno.

## EXERCÍCIOS

- E11.1** A capacidade de se conseguir um sistema de equilíbrio de forma ativa constitui um ingrediente fundamental para a mobilidade de um dispositivo que salta e corre sobre uma perna de mola, como mostrado na Fig. E11.1 [9]. O controle da atitude do dispositivo usa um giroscópio e uma retroação tal que  $u = Kx$  onde

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix}, \quad \text{e}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \mathbf{I}$$



**Fig. E11.1** Controle de uma perna.

Determinar o valor de  $k$  de modo que a resposta de cada salto seja criticamente amortecida.

- E11.2** Uma esfera de aço suspensa magneticamente pode ser descrita pela equação linear

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

As variáveis de estado são  $x_1$  = posição e  $x_2$  = velocidade, ambas mensuráveis. Selecionar uma forma de retroação de modo que o sistema seja criticamente amortecido e o tempo de assentamento (critério dos 2%) seja 2 segundos.

- E11.3** Um sistema é descrito pelas equações matriciais

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

e  $y = 2x_2$ . Determinar se o sistema é controlável e observável.  
**Resposta:** controlável, não observável

- E11.4** Um sistema é descrito pelas equações matriciais

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

e  $y = x_1$ . Determinar se o sistema é controlável e observável.

- E11.5** Um sistema é descrito pelas equações matriciais

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

e  $y = x_1(t)$ . Determinar se o sistema é controlável e observável.

- E11.6** Um sistema é descrito pelas equações matriciais

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

e  $y = x_1(t)$ . Determinar se o sistema é controlável e observável.  
**Resposta:** controlável e observável

## PROBLEMAS

- P11.1** Um sistema de primeira ordem é representado pela equação diferencial no domínio do tempo

$$\dot{x} = x + u$$

Deve-se projetar um controlador com retroação em que

$$u(t) = -kx,$$

e se deseja que a condição de equilíbrio seja  $x(t) = 0$  à medida que  $t \rightarrow \infty$ . A integral de desempenho é definida por

$$J = \int_0^{\infty} x^2 dt,$$

e o valor inicial da variável de estado é  $x(0) = \sqrt{2}$ . Obter o valor de  $k$  que minimiza  $J$ . Este valor é fisicamente realizable? Selecionar um valor prático para o ganho  $k$  e calcular o índice de desempenho<sup>6</sup> com esse ganho. O sistema é estável sem a retroação devida a  $u(t)$ ?

- P11.2** Para levar em conta o gasto de energia e de recursos, o sinal de controle é quase sempre incluído na integral de desempenho.

<sup>6</sup>A integral de desempenho é também chamada de índice de desempenho e função de custo. (N. T.)

Assim o sistema não pode utilizar um sinal de controle  $u(t)$  ilimitado. Um índice de desempenho adequado, que inclui o efeito da magnitude do sinal de controle, é

$$J = \int_0^{\infty} (x^2(t) + \lambda u^2(t)) dt$$

(a) Repetir o Problema 11.1 para o novo índice de desempenho. (b) Se  $\lambda = 2$ , obter o valor de  $k$  que minimiza o índice de desempenho. Calcular o valor mínimo resultante para  $J$ .

- P11.3** Um sistema robótico instável é descrito pela equação diferencial vetorial [10]

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

Ambas as variáveis de estado são mensuráveis, e assim o sinal de controle é definido como  $u(t) = -k(x_1 + x_2)$ . Segundo o método da Seção 11.4, projetar o ganho  $k$  de modo que o índice de desempenho seja minimizado. Calcular o valor mínimo do índice de desempenho. Determinar a sensibilidade do desempenho em relação a uma variação em  $k$ . Admitir que as condições iniciais são

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O sistema é estável sem os sinais de retroação devidos a  $u(t)$ ?

- P11.4** Determinar o ganho de retroação  $k$  do Exemplo 11.6 que minimiza o índice de desempenho

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T \mathbf{x} dt$$

quando  $\mathbf{x}^T(0) = [1 1]$ . Traçar a curva do índice de desempenho  $J$  em função de valor do ganho  $k$ .

- P11.5** Determinar o ganho de retroação  $k$  do Exemplo 11.7 que minimiza o índice de desempenho

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{u}) dt$$

quando  $\mathbf{x}^T(0) = [1 1]$ . Traçar a curva do índice de desempenho  $J$  em função de valor do ganho  $k$ .

- P11.6** Determinar as raízes da equação do sistema de controle ótimo a malha fechada para as soluções dos Problemas 11.3, 11.4 e 11.5. Observar que as raízes a malha fechada resultantes dependem do índice de desempenho escolhido.

- P11.7** Um sistema é descrito pela equação diferencial vetorial dada na Eq. (11.20). Deseja-se que ambas as variáveis de estado sejam usadas na retroação de modo que  $u(t) = -k_1 x_1 - k_2 x_2$ .

Deseja-se também, para este sistema, uma freqüência natural,  $\omega_n$ , igual a 2. Determinar um conjunto de ganhos  $k_1$  e  $k_2$  a fim de obter um sistema ótimo quando  $J$  for dado pela Eq. (11.13). Admitir  $\mathbf{x}^T(0) = [1 0]$ .

- P11.8** Para o sistema do Exemplo 11.5, determinar o valor ótimo para  $k_2$  quando  $k_1 = 1$  e  $\mathbf{x}^T(0) = [1 0]$ .

- P11.9** Um sistema mecânico interessante com um problema de controle desafiador é o da esfera e da barra mostrado na Fig. P11.9(a) [11]. Consiste em uma barra rígida com liberdade para girar no plano do papel em torno de um pivô com uma esfera sólida rolando ao longo de uma canaleta na parte superior da viga. O problema de controle é o de posicionar a esfera em um ponto desejado da barra, usando como entrada de controle um torque aplicado à barra segundo o eixo do pivô.

Dispõe-se de um modelo linear do sistema com uma medida do valor do ângulo  $\phi$  e de sua velocidade angular  $d\phi/dt = \dot{\phi}$ . Selecionar um esquema de controle de modo que a resposta do sistema a malha fechada, para uma entrada em degrau, apresente uma ultrapassagem de 4% e um tempo de assentamento (critério dos 2%) de 1 segundo.

- P11.10** A dinâmica de um foguete é representada por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2},$$

e é usada retroação com variáveis de estado, onde  $x_1 = y(t)$  e  $u = -2x_2 - x_1$ . Determinar as raízes da equação característica deste sistema e a resposta quando as condições iniciais forem  $x_1(0) = 0$  e  $x_2(0) = 1$ .

- P11.11** A função de transferência,  $G(s)$ , de um processo a ser controlado é

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4}.$$

Usar a retroação com variáveis de estado e incorporar um comando de entrada  $R(s)$  de modo que o erro de estado estacionário seja nulo para uma entrada em degrau. Selecionar também os ganhos de modo que o sistema apresente uma resposta rápida com uma ultrapassagem de aproximadamente 1% e um tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 1 segundo.

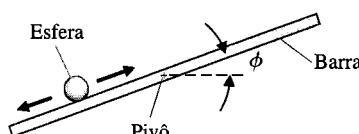
- P11.12** Um motor CC possui uma função de transferência

$$G(s) = \frac{10}{s^2(s+1)(s^2+2s+2)}.$$

Determinar se o sistema é controlável e observável.

- P11.13** Um sistema com retroação unitária possui uma função de transferência do processo a controlar

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{K}{s(s+70)}.$$



(a)

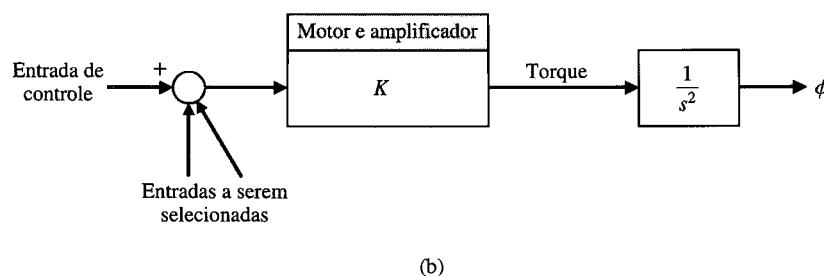


Fig. P11.9 (a) Esfera e barra. (b) Modelo da esfera e da barra.

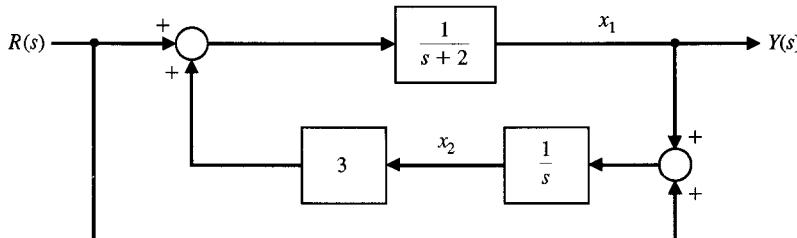


Fig. P11.19.

Deseja-se que a constante de erro de velocidade,  $K_v$ , seja igual a 35 e a ultrapassagem para um degrau de entrada seja aproximadamente 4% de modo que  $\zeta$  seja  $1/\sqrt{2}$ . O tempo de assentamento desejado é 0,11 segundo. Projetar um sistema com retroação de estado apropriada.

**P11.14** Um processo a controlar tem a função de transferência

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s + 10)}.$$

Determinar os ganhos de retroação das variáveis de estado para se obter um tempo de assentamento (critério dos 2%) de 1 segundo e uma ultrapassagem de aproximadamente 10%. Esboçar também o diagrama de fluxo do sistema resultante e selecionar o coeficiente apropriado de ganho entre a entrada  $R(s)$  e a variável  $U(s)$  para se obter erro estacionário nulo para uma entrada em degrau.

**P11.15** Um sistema robótico teledirigido é representado pelas equações matriciais [ 18 ]

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

e

$$y = [1 \ 0 \ 2] \mathbf{x}.$$

(a) Determinar a função de transferência  $G(s) = Y(s)/U(s)$ . (b) Desenhar o diagrama de fluxo de sinal indicando as variáveis de estado. (c) Determinar se o sistema é controlável. (d) Determinar se o sistema é observável.

**P11.16** Foram usados atuadores hidráulicos para acionar os dinossauros do filme *Jurassic Park*<sup>7</sup> [ 23 ]. Os movimentos dos grandes monstros necessitavam atuadores com potência de 1200 watts.

O movimento de uma articulação específica possui uma dinâmica representada por

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 2)}.$$

Deseja-se posicionar os pólos a malha fechada em  $s = -2 \pm j2$ . Determinar a retroação com variáveis de estado necessária usando a fórmula de Ackermann. Admitir que a posição e a velocidade do movimento de saída estão disponíveis para medição.

**P11.17** Um sistema tem a função de transferência

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(s + a)}{s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 10s + 4}.$$

Determinar um valor real para  $a$  de modo que o sistema seja não controlável ou não observável.

**P11.18** Um sistema tem um processo a controlar com função de transferência

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{1}{(s + 1)^2}$$

(a) Determinar uma equação diferencial matricial para representar este sistema. Identificar as variáveis de estado em um diagrama de fluxo de sinal. (b) Selecionar a estrutura de retroação com variáveis de estado usando  $u(t)$  e selecionar os ganhos de retroação de modo que a resposta  $y(t)$  do sistema livre seja criticamente amortecida quando as condições iniciais  $x_1(0) = 1$  e  $x_2(0) = 0$ , em que  $x_1(t) = y(t)$ . As raízes repetidas são  $s = -\sqrt{2}$ .

**P11.19** O diagrama de blocos de um sistema é mostrado na Fig. P11.19. Determinar se o sistema é controlável e observável.

**P11.20** Considere-se o sistema de pilotagem automática de navio discutido nos Problemas 8.11 e 9.15. O sistema de equações diferenciais na forma de variáveis de estado é

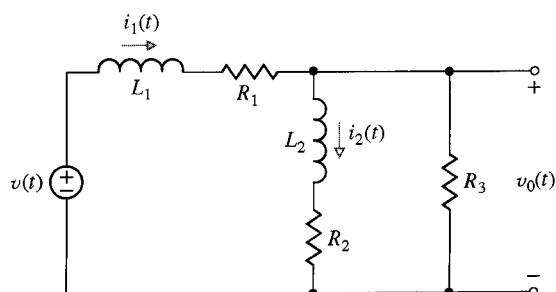
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -0,05 & -6 & 0 & 0 \\ -10^{-3} & -0,15 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -0,2 \\ 0,03 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t),$$

em que  $\mathbf{x}^T(t) = [\dot{v} \ \omega_s \ y \ \theta]$ . As variáveis de estado são  $x_1 = \dot{v}$  = velocidade transversal;  $x_2 = \omega_s$  = velocidade angular do sistema de coordenadas do navio em relação ao sistema de coordenadas da resposta;  $x_3 = y$  = distância do desvio segundo um eixo perpendicular ao eixo da rota;  $x_4 = \theta$  = ângulo de desvio. (a) Determinar se o sistema é estável. (b) Pode-se adicionar retroação de modo que

$$\delta(t) = -k_1 x_1 - k_3 x_3.$$

Determinar se este sistema é estável para valores adequados de  $k_1$  e de  $k_3$ .

**P11.21** Um circuito  $RL$  está mostrado na Fig. P11.21. (a) Selecionar duas variáveis de estado e obter a equação diferencial vetorial em que a saída é  $v_0(t)$ . (b) Determinar se as variáveis de estado são observáveis quando  $R_1/L_1 = R_2/L_2$ . (c) Determinar as condições em que o sistema possui duas raízes iguais.

Fig. P11.21 Circuito  $RL$ .

<sup>7</sup>No Brasil o filme recebeu o título de *Parque dos Dinossauros*. (N. T.)

- P11.22** O sistema de controle de um manipulador possui um processo a controlar com função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 0,4)}$$

e retroação unitária negativa [17, 22]. Representar este sistema por meio de um diagrama de fluxo com variáveis de estado e por uma equação diferencial vetorial. (a) Traçar a resposta do sistema a malha fechada para uma entrada em degrau. (b) Usar a retroação com variáveis de estado de modo que a ultrapassagem seja 5% e o tempo de assentamento (critério dos 2%) seja 1,35 segundo. (c) Traçar a resposta do sistema com retroação com variáveis de estado para uma entrada em degrau.

## PROBLEMAS AVANÇADOS

- PA11.1** O sistema de controle de um motor CC tem a forma mostrada na Fig. PA11.1 [6]. As três variáveis de estado se encontram acessíveis para medição; a posição de saída é  $x_1(t)$ . Escolher os ganhos de retroação de modo que o sistema apresente erro de estado estacionário nulo para uma entrada em degrau e uma resposta com uma ultrapassagem percentual menor que 3%.

- PA11.2** Um sistema possui um processo a controlar

$$G(s) = \frac{3s^2 + 4s - 2}{s^3 + 3s^2 + 7s + 5}.$$

Adicione retroação com variáveis de estado de modo que os pólos a malha fechada fiquem situados em  $s = -4, -4$  e  $-5$ .

- PA11.3** Um sistema é representado por uma equação diferencial matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u.$$

Que valores são necessários atribuir a  $b_1$  e  $b_2$  para que o sistema seja controlável?

- PA11.4** A equação diferencial vetorial que descreve o pêndulo invertido do Exemplo 3.3 é

gem seja 5% e o tempo de assentamento (critério dos 2%) seja 1,35 segundo. (c) Traçar a resposta do sistema com retroação com variáveis de estado para uma entrada em degrau.

- P11.23** Reconsidere-se o sistema do Exemplo 11.11 em que se deseja que o erro de estado estacionário para uma entrada em degrau seja zero e as raízes da equação característica fiquem situadas em  $s = -2 \pm j1$  e  $s = -10$ .

- P11.24** Reconsidere-se o sistema do Exemplo 11.11 em que se deseja que o erro de estado estacionário para uma entrada em rampa seja zero e as raízes da equação característica fiquem situadas em  $s = -2 \pm j2$  e  $s = -20$ .

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 9,8 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

Admitir que todas as variáveis de estado estejam disponíveis para medição e usar retroação com variáveis de estado. Posicionar as raízes da equação característica em  $s = -2 \pm j, -5$  e  $-5$ .

- PA11.5** Um sistema para suspensão de automóvel possui três variáveis de estado físicas, como mostrado na Fig. PA11.5 [15]. A estrutura de retroação de estado está mostrada na figura, com  $K_1 = 1$ . Selecionar  $K_2$  e  $K_3$  de modo que as raízes da equação característica sejam três raízes situadas entre  $s = -3$  e  $s = -6$ . Selecionar ainda  $K_p$  de modo que o erro de estado estacionário para uma entrada em degrau seja igual a zero.

- PA11.6** Um sistema é representado pela equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = \frac{du}{dt} + u,$$

em que  $y$  = saída e  $u$  = entrada.

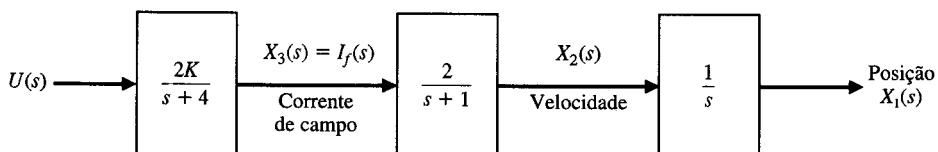


Fig. PA11.1 Motor CC controlado pelo campo.

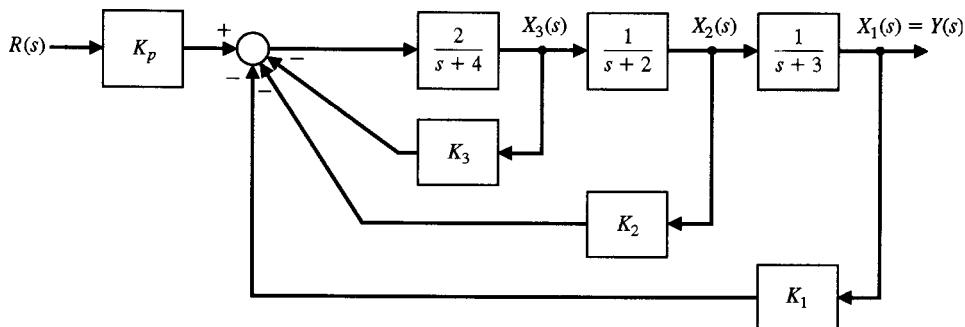
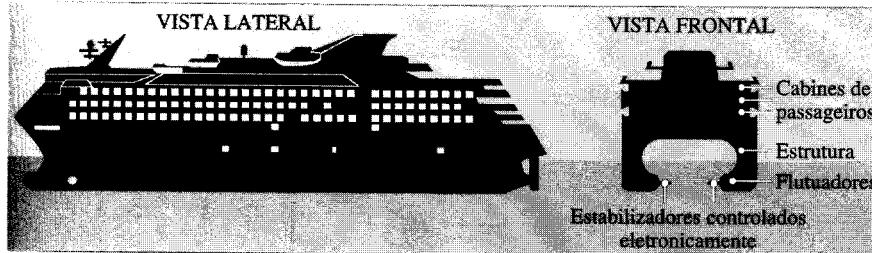
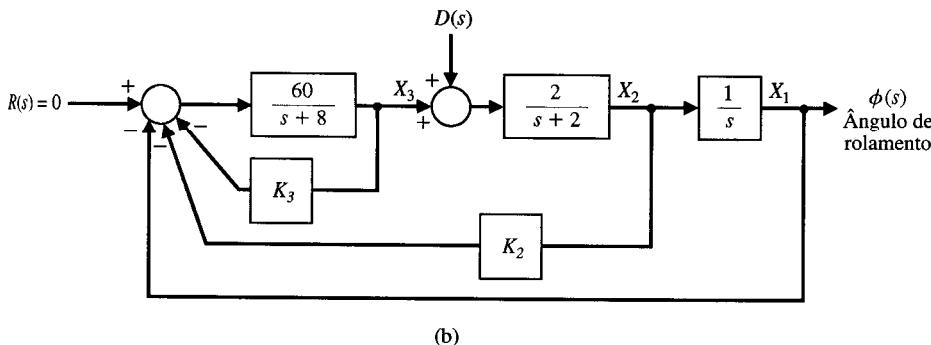


Fig. PA11.5 Sistema de suspensão de automóvel.



(a)



(b)

**Fig. PA11.7** (a) Radisson Diamond (cortesia de Conde-Nast Traveler, July 1993, p. 23). (b) Sistema de controle para reduzir o efeito de perturbações.

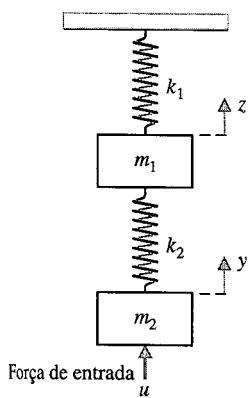
(a) Desenvolver uma representação em variáveis de fase e mostrar que o sistema é controlável. (b) Definir as variáveis de estado como  $x_1 = y$  e  $x_2 = dy/dt - u$  e determinar se o sistema é controlável. Note-se que a controlabilidade do sistema depende das variáveis de estado.

- PA11.7** O novo Radisson Diamond usa flutuadores e estabilizadores para amortecer o efeito das ondas que se chocam contra o navio, como mostrado na Fig. PA11.7(a). O diagrama de blocos do sistema de controle de rolagem do navio está mostrado na Fig. PA11.7(b). Determinar os ganhos  $K_2$  e  $K_3$  de modo que as raízes da equação característica sejam  $s = -15$  e  $s = -2 \pm j2$ . Traçar o gráfico da saída de rolagem,  $\phi(t)$  para uma perturbação em degrau unitário.

- PA11.8** Reconsidere-se o sistema de controle de nível de líquido descrito no Problema 3.36.

(a) Projetar um controlador com variáveis de estado usando somente  $h(t)$  como variável de retroação de modo que a resposta ao degrau apresente uma ultrapassagem inferior a 10% e um tempo de assentamento (critério dos 2%) menor ou igual a 5 segundos. (b) Projetar um controlador com retroação de variáveis de estado usando duas variáveis de estado, o nível  $h(t)$  e a posição do eixo  $\theta(t)$  para satisfazer as especificações da parte (a). (c) Comparar os resultados das partes (a) e (b).

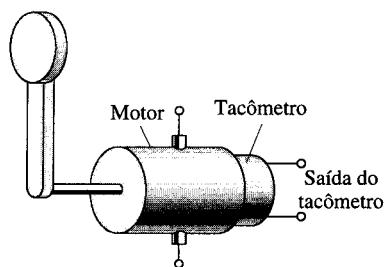
- PA11.9** O controle de movimento de um veículo hospitalar leve pode ser representado por um sistema de duas massas como mostra a Fig. PA11.9, em que  $m_1 = m_2 = 1$  e  $k_1 = k_2 = 1$  [24].



**Fig. PA11.9** Modelo de veículo hospitalar.

(a) Determinar a equação diferencial vetorial de estado. (b) Achar as raízes da equação característica. (c) Deseja-se estabilizar o sistema fazendo  $u = -kx_i$ , onde  $u$  é a força sobre a massa inferior e  $x_i$  é uma das variáveis de estado. Selecionar uma variável de estado adequada  $x_i$ . (d) Escolher um valor para o ganho  $k$  e esboçar o lugar das raízes à medida que  $k$  varia.

- PA11.10** Considere-se o pêndulo invertido montado em um motor, como mostra a Fig. PA11.10. Supõe-se que o motor e a carga estão sem atrito de amortecimento. O pêndulo a ser equilibrado é atrelado ao eixo horizontal de um servomotor. O servomotor aciona um gerador tacômetro, de modo que se dispõe de um sinal de velocidade mas não existe sinal de posição. Quando o motor estiver desenergizado, o pêndulo ficará pendurado verticalmente para baixo e, se perturbado para a parte superior do seu arco, o pêndulo será instável nessa posição. Conceber um compensador por retroação,  $G_c(s)$ , usando somente o sinal de velocidade do tacômetro.



**Fig. PA11.10** Motor e pêndulo invertido.

- PA11.11** Determinar um controlador de modelo interno  $G_c(s)$  para o sistema mostrado na Fig. PA11.11. Deseja-se que o erro de estado estacionário para uma entrada em degrau seja zero. Deseja-se também que o tempo de assentamento (critério dos 2%) seja menor que 5 segundos.

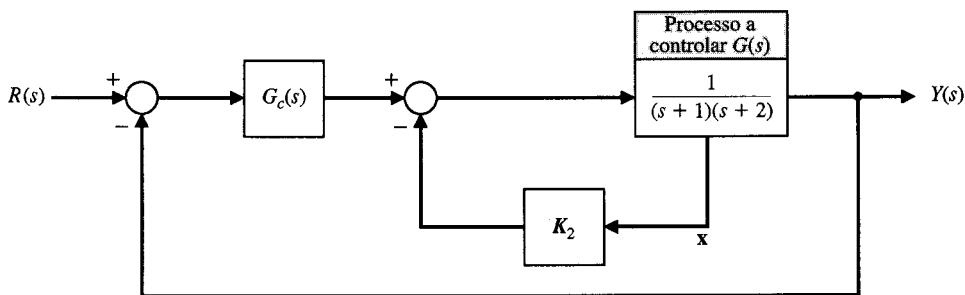


Fig. PA11.11 Controle com modelo interno.

**PA11.12** Repetir o Problema Avançado 11.11 quando se deseja que o erro de estado estacionário para uma entrada cm rampa seja

zero e que o tempo de assentamento (critério dos 2%) da resposta à rampa seja menor que 6 segundos.

### PROBLEMAS DE PROJETO

**PPC11.1** Deseja-se obter um sistema com retroação com variáveis de estado para o sistema sarilho-mesa deslizante. Usar o modelo em variáveis de estado desenvolvido em PPC3.1 e determinar o sistema de retroação. A resposta ao degrau deve ter uma ultrapassagem inferior a 2% e um tempo de assentamento menor que 250 ms.

**PP11.1** Considere-se o dispositivo para levitação magnética de uma esfera de aço, como mostram as Figs. PP11.1(a) e (b). Obter um projeto que forneça uma resposta estável quando a esfera permanece no interior de uma faixa de 10% em torno da posição desejada. Admitir que  $y$  e  $dy/dt$  são mensuráveis.

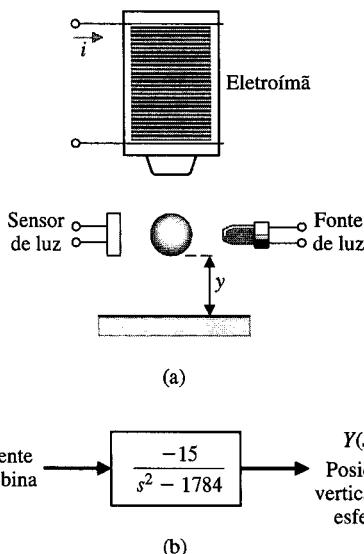


Fig. PP11.1 (a) Levitação de uma esfera usando um eletroímã. (b) O modelo do eletroímã e da esfera.

**PP11.2** O controle da relação ar-combustível no carburador do automóvel se tornou de primordial importância nos anos 1980 com os fabricantes de automóveis trabalhando para reduzir as emissões poluentes da exaustão. Os projetistas de motores se voltaram para o controle com retroação da relação ar-combustível. Um sensor foi colocado no fluxo de exaustão é usado como entrada para o controlador. O controlador, na realidade, ajusta o orifício que controla a vazão de combustível no interior do motor [3].

Selecionar os dispositivos e desenvolver um modelo linear para o sistema completo. Admitir que o sensor mede a relação ar-combustível real com um retardo insignificante. Com este modelo, determinar o controlador ótimo quando se deseja que o sistema apresente erro de estado estacionário para uma entrada em degrau e uma ultrapassagem para uma entrada em degrau inferior a 10%.

**PP11.3** A eficiência de um motor diesel é muito sensível à velocidade de rotação. Deseja-se, assim, controlar a velocidade do motor diesel que aciona grupos geradores para motores elétricos de uma locomotiva diesel-elétrica em trens de ferrovias de porte. A locomotiva é tracionada por meio de motores CC localizados em cada um dos eixos. Considere-se o modelo de acionamento elétrico mostrado na Fig. PP11.3, onde a posição do acelerador é ajustada movimentando-se o potenciômetro de entrada.

A velocidade controlada  $\omega_0$  é detectada por meio de um tacômetro, que fornece uma tensão elétrica de retroação  $v_r$ . O tacômetro pode ser acionado através de uma correia pelo eixo do motor. Um amplificador eletrônico amplifica o erro ( $v_r - v_0$ ) entre os sinais de tensão de referência e de retroação e fornece uma tensão  $v_f$  que é aplicada ao enrolamento de campo de um gerador CC.

O gerador é acionado a uma velocidade constante  $\omega_0$  pelo motor diesel e gera uma tensão  $v_g$  que é aplicada à armadura de um motor CC. O motor é controlado pela armadura com uma corrente constante  $i$  fornecida ao enrolamento de campo. Como resultado, o motor produz um torque  $T$  e aciona a carga conectada ao seu eixo de modo que a velocidade controlada  $\omega_0$  tende a ser igual à velocidade comandada  $\omega_r$ .

Sabe-se que a constante do gerador  $K_g$  é igual a 100 e que a constante do motor é  $K_m = 10$ . A constante de força contrateletrromotriz é  $K_b = 31/50$ . As constantes para o motor são  $J = 1$ ,  $b = 1$ ,  $L_a = 0,2$  e  $R_a = 1$ . O gerador possui uma resistência de campo  $R_f = 1$  e uma indutância de campo  $L_f = 0,1$ . Além disso, o tacômetro tem um ganho  $K_t = 1$  e o gerador possui  $L_g = 0,1$  e  $R_g = 1$ . Todas as três constantes estão em unidades apropriadas do Sistema Internacional (SI).

(a) Desenvolver um modelo linear para o sistema e analisar o desempenho deste à medida que  $K$  é ajustado. Qual é o erro de estado estacionário para uma posição constante do acelerador de modo que  $v_r = A$ ? (b) Incluir o efeito de um torque de carga perturbador,  $T_d$ , no modelo do sistema e determinar o efeito do torque de carga perturbador sobre a velocidade  $\omega(s)$ . Para o projeto da parte (a), qual é o erro de estado estacionário introduzido pela perturbação? (c) Selecionar as três variáveis de estado acessíveis para medição e obter uma equação dife-

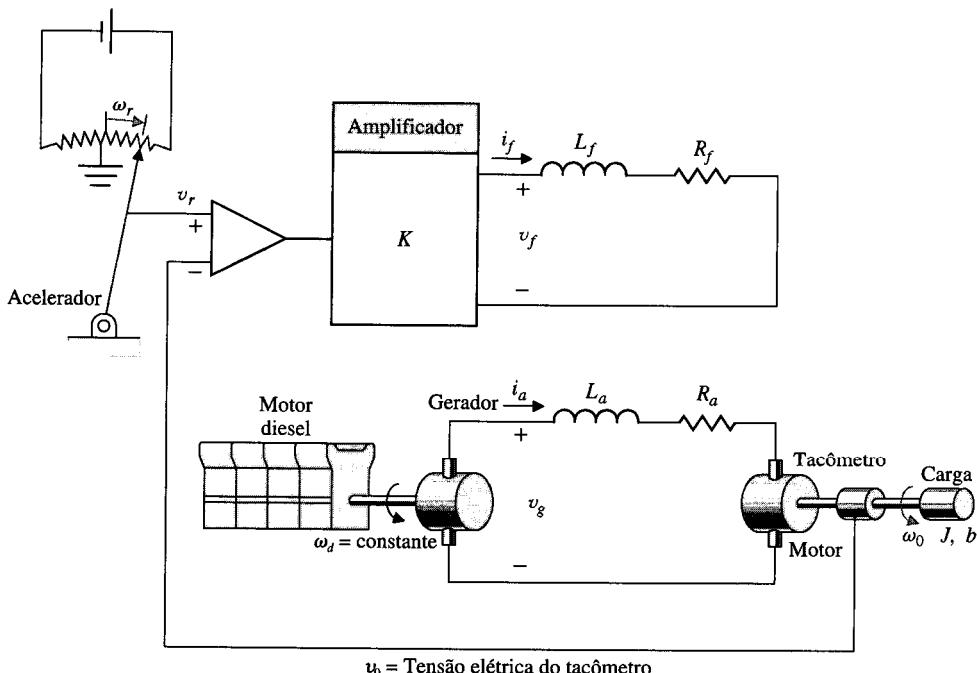


Fig. PP11.3 Locomotiva diesel-elétrica.

rencial vetorial de estado. Projetar, então, um sistema com retroação por meio de variáveis de estado para alcançar um desempenho favorável.

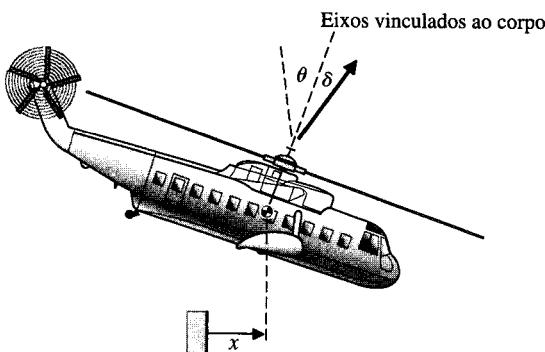
**PP11.4** Um helicóptero de alto desempenho possui o modelo mostrado na Fig. PP11.4. O objetivo é controlar o ângulo de arfagem,  $\theta$ , do helicóptero ajustando-se o ângulo  $\delta$  do rotor. As equações do movimento do helicóptero são

$$\begin{aligned}\frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\sigma_1 \frac{d\theta}{dt} - \alpha_1 \frac{dx}{dt} + n\delta \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= g\theta - \alpha_2 \frac{d\theta}{dt} - \sigma_2 \frac{dx}{dt} + g\delta,\end{aligned}$$

onde  $x$  é a translação na direção horizontal. Em um helicóptero militar de alto desempenho determina-se que

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 0,415 & \alpha_2 &= 1,43 \\ \sigma_2 &= 0,0198 & n &= 6,27 \\ \alpha_1 &= 0,0111 & g &= 9,8\end{aligned}$$

tudo em unidades SI apropriadas.

Fig. PP11.4 Controle do ângulo de arfagem,  $\theta$ , de um helicóptero.

Determinar (a) a representação deste sistema em variáveis de estado e (b) a representação em função de transferência para  $\theta(s)/\delta(s)$ . (c) Usar retroação com variáveis de estado para alcançar desempenhos adequados para o sistema controlado.

As especificações desejadas incluem (1) estado estacionário para um comando de entrada em degrau para  $\theta_d(s)$ , ângulo de arfagem desejado, menor que 20% da magnitude do degrau de entrada; (2) ultrapassagem para um comando em degrau menor que 20%; e (3) tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 1,5 segundo para um comando em degrau.

**PP11.5** O processo de alimentador (*headbox*) é usado na manufatura de papel para transformar o fluxo da pasta em um jato de 2 cm e, em seguida, aspergi-lo sobre uma esteira de malha [25]. Para se obter uma qualidade desejável do papel, a pasta deve ser distribuída o mais uniformemente possível sobre a esteira e a relação entre a velocidade do jato e a da esteira, chamada de **relação jato/esteira**, deve ser mantida. Uma das principais variáveis é a pressão no alimentador, que por sua vez controla a velocidade da pasta no jato. A pressão total no depósito de carga é a soma da pressão do nível de líquido mais a pressão do ar que é bombeado dentro do alimentador. Como o alimentador pressurizado é um sistema extremamente dinâmico e acoplado, o controle manual seria difícil de manter e poderia resultar na degradação das propriedades das folhas de papel.

O modelo em variáveis de estado de um alimentador típico, linearizado em torno de um ponto estacionário particular, é dado por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0,8 & +0,02 \\ -0,02 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0,05 & 1 \\ 0,001 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$\text{e } y = [x_1 \ x_2].$$

As variáveis de estado são  $x_1$  = nível do líquido e  $x_2$  = pressão. As variáveis de controle são  $u_1$  = corrente na bomba e  $u_2$  = abertura da válvula. Projetar um sistema de retroação com variáveis de estado que tenha uma equação característica com raízes reais com magnitude maior que cinco.

**PP11.6** Um dispositivo de acionamento acoplado está mostrado na Fig. PP11.6. Os acionamentos acoplados consistem em duas polias conectadas por meio de uma correia elástica, que é tensionada

por uma terceira polia montada sobre molas para fornecer um modo dinâmico subamortecido. Uma das polias principais, a polia A, é tracionada por um motor elétrico CC. As polias A e B são equipadas com tacômetros que geram tensões elétricas mensuráveis proporcionais à velocidade de rotação da polia. Quando uma tensão for aplicada ao motor CC, a polia A irá acelerar com uma taxa governada pela inércia total experimentalizada pelo sistema. A polia B na outra extremidade da correia elástica irá acelerar também devido à tensão ou ao torque aplicados, mas com um efeito de atraso ocasionado pela elasticidade da correia de transmissão. A integração dos sinais de velocidade medidos em cada polia fornecerá uma estimativa da posição angular da polia [26].

O modelo de segunda ordem do acionador acoplado é

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -36 & -12 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

e  $y = x_1$ .

Projetar um controlador com retroação por meio de variáveis de estado que conduza a uma resposta rápida ao degrau,

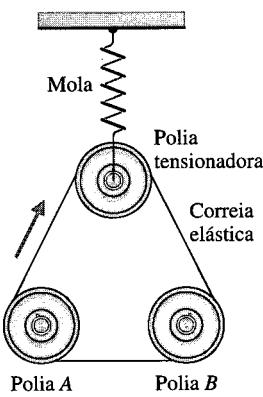


Fig. PP11.6.

sem oscilações e com erro estacionário nulo (resposta *deadbeat*) (Seção 10.11) e um tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 0,5 segundo.

## PROBLEMAS COM MATLAB

**PM11.1** Considere-se o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \\ -6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [1 \ 2 \ 1] \mathbf{x}.$$

Usando as funções *cctrb* e *obsv*, mostrar que o sistema é controlável e observável.

**PM11.2** Considere-se o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4,5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [\frac{1}{2} \ 1] \mathbf{x}.$$

Determinar se o sistema é controlável e observável. Calcular a função de transferência de  $u$  para  $y$ .

**PM11.3** Determinar uma matriz de ganho  $\mathbf{K}$  de modo que os pólos a malha fechada do sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [1 \ -1] \mathbf{x}$$

sejam  $s_1 = -1$  e  $s_2 = -2$ . Usar a retroação de estado  $u = -\mathbf{Kx}$ .

**PM11.4** O seguinte modelo foi proposto para descrever o movimento de um míssil guiado com velocidade constante

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1 & -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \mathbf{x}.$$

(a) Verificar que o sistema é não-controlável através da análise da matriz de controlabilidade usando a função *cctrb*.

(b) Desenvolver um modelo em variáveis de estado controlável calculando primeiramente a função de transferência

de  $u$  para  $y$  e em seguida cancelando fatores comuns dos polinômios em numerador e denominador da função de transferência. Com a função de transferência modificada recém-obtida, usar a função *tf2ss* para determinar um modelo modificado em variáveis de estado para o sistema.

(c) Verificar que o modelo modificado em variáveis de estado da parte (b) é controlável.

(d) O míssil guiado com velocidade constante é estável?

(e) Comentar a relação entre controlabilidade e complexidade do modelo em variáveis de estado (onde a complexidade é medida pelo número de variáveis de estado).

**PM11.5** Um modelo linearizado de uma aeronave de decolagem e pouso verticais (VTOL) é [27]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}_1 u_1 + \mathbf{B}_2 u_2,$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,0366 & 0,0271 & 0,0188 & -0,4555 \\ 0,0482 & -1,0100 & 0,0024 & -4,0208 \\ 0,1002 & 0,3681 & -0,7070 & 1,4200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

e

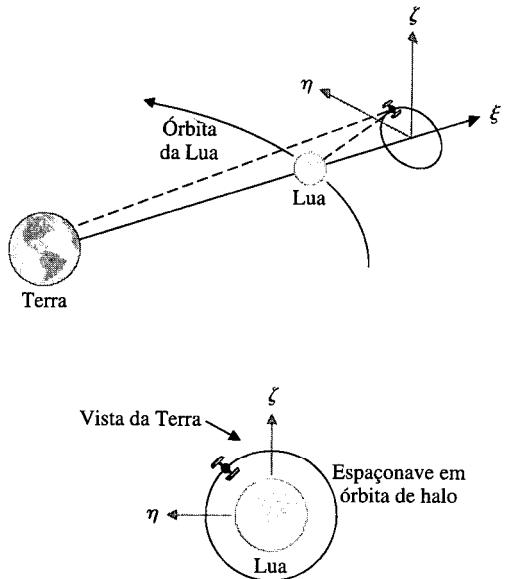
$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0,4422 \\ 3,5446 \\ -5,5200 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0,1761 \\ -7,5922 \\ 4,4900 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

As componentes do vetor de estado são (i)  $x_1$  é a velocidade horizontal (em nós), (ii)  $x_2$  é a velocidade vertical (em nós), (iii)  $x_3$  é a velocidade de arfagem (em graus/s) e (iv)  $x_4$  é o ângulo de arfagem (em graus). A entrada  $u_1$  é usada principalmente para controlar o movimento vertical e a entrada  $u_2$  é para o movimento horizontal.

(a) Calcular os autovalores da matriz  $\mathbf{A}$ . O sistema é estável? (b) Determinar o polinômio característico associado com a matriz  $\mathbf{A}$  usando a função *poly*. Calcular as raízes da equação característica e comparar com os autovalores da parte (a).

(c) O sistema é controlável unicamente com  $u_1$ ? E somente com  $u_2$ ? Comentar os resultados.

**PM11.6** Em um esforço de abrir a face oculta da Lua à exploração, têm sido realizados estudos para se determinar a viabilidade



**Fig. PM11.6** Órbita de halo de satélite translunar.

de se operar um satélite de telecomunicações em torno do ponto de equilíbrio translunar no sistema Terra-Sol-Lua. A órbita desejada para o satélite, conhecida como órbita de halo, está mostrada na Fig. PM11.6. O objetivo do controlador é conservar o satélite sobre a trajetória de uma órbita de halo, podendo ser visto da Terra de modo que as linhas de telecomunicações possam estar acessíveis durante todo o tempo. O enlace de telecomunicações seria da Terra para o satélite e daí para a face oculta da Lua.

As equações linearizadas (e normalizadas) do movimento do satélite em torno do ponto de equilíbrio translunar são [28]

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7,3809 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2,1904 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3,1904 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_3.$$

O vetor de estado,  $\mathbf{x}$ , é a posição e a velocidade do satélite e as entradas  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são as acelerações dos motores de propulsão segundo as direções  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ , respectivamente.

- (a) O ponto de equilíbrio translunar é uma posição de equilíbrio estável? (b) O sistema é controlável com  $u_1$  somente?
- (c) Repetir a parte (b) para  $u_2$ . (d) Repetir a parte (b) para  $u_3$ .

(e) Supor que se pode observar a posição na direção  $\eta$ . Determinar a função de transferência de  $u_2$  para  $\eta$ . (Sugestão: Fazer  $y = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{x}$ .) (f) Calcular a representação no espaço de estados da função de transferência na parte (e) usando a função tf2ss. Verificar que o sistema é controlável. (g) Usando a retroação de estado

$$u_2 = -K\mathbf{x}$$

projetar um controlador (isto é, determinar  $K$ ) para o sistema na parte (f) tal que os pólos a malha fechada estejam em  $s_{1,2} = -1 \pm j$  e  $s_{3,4} = -10$ .

**PM11.7** Considere-se o sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad (1)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t).$$

Supor que se dispõem de três observações,  $y(t_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , como a seguir

$$\begin{aligned} y(t_1) &= 1 && \text{em } t_1 = 0 \\ y(t_2) &= -0,0256 && \text{em } t_2 = 2 \\ y(t_3) &= -0,2522 && \text{em } t_3 = 4. \end{aligned}$$

(a) Usando as três observações, desenvolver um método para determinar o valor inicial do vetor de estado  $\mathbf{x}(t_0)$ , para o sistema da Eq. (1) que reproduzirá as três observações ao se simular o uso da função lsim. (b) Com as observações dadas, calcular  $\mathbf{x}(t_0)$  e discutir a condição sob a qual este problema pode ser resolvido de um modo geral. (c) Verificar o resultado simulando a resposta do sistema com os valores calculados da condição inicial. (Sugestão: Lembrar que para o sistema da Eq. (1)  $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0)$ .)

**PM11.8** Um sistema é descrito por uma equação de estado com uma única entrada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Usando o método da Seção 11.4 (Eq. 11.19) e uma retroação unitária negativa, determinar o sistema ótimo quando  $\mathbf{x}^T(0) = [1 \ 0]$ .

**PM11.9** Um sistema de primeira ordem é dado por

$$\dot{x} = -x + u$$

com a condição inicial  $x(0) = x_0$ . Deseja-se projetar um controlador com retroação

$$u = -kx$$

tal que o índice de desempenho

$$J = \int_0^\infty x^2(t) + \lambda u^2(t) dt$$

seja minimizado.

(a) Fazer  $\lambda = 1$ . Desenvolver uma expressão para  $J$  em função de  $k$ , válida para qualquer  $x_0$ , e usar o MATLAB para traçar o gráfico de  $J/x_0^2$  em função de  $k$ . A partir do gráfico, determinar o valor de  $k = k_{\min}$  que minimiza  $J/x_0^2$ . (b) Verificar o resultado da parte (a) analiticamente. (c) Usando o procedimento desenvolvido na parte (a), obter um gráfico de  $k_{\min}$  em função de  $\lambda$  onde  $k_{\min}$  é o ganho que minimiza o índice de desempenho.

**TERMOS E CONCEITOS**

**Retroação com variáveis de estado** Ocorre quando o sinal de controle,  $u$ , para o processo é uma função direta de todas as variáveis de estado.

**Sistema controlável** Um sistema é controlável no intervalo  $[t_0, t_f]$  se existir uma entrada contínua  $u(t)$  tal que qualquer estado inicial  $x(t_0)$  possa ser levado para qualquer estado arbitrário  $x(t_f)$  em um intervalo de tempo finito  $t_f - t_0 > 0$ .

**Sistema de controle ótimo** Um sistema cujos parâmetros são ajustados de modo que o índice de desempenho atinja um valor extremo.

**Sistema observável** Um sistema é observável no intervalo  $[t_0, t_f]$  se qualquer estado inicial  $x(t_0)$  é determinado univocamente através da observação da saída  $y(t)$  em um intervalo  $[t_0, t_f]$ .

## CAPÍTULO 12

# *Sistemas de Controle Robustos*

- 12.1 Introdução
- 12.2 Sistemas de Controle Robustos e Sensibilidade de Sistema
- 12.3 Análise de Robustez
- 12.4 Sistemas com Parâmetros Imprecisos
- 12.5 O Projeto de Sistemas de Controle Robustos
- 12.6 Controladores PID
- 12.7 O Projeto de Sistemas Robustos Controlados com PID
- 12.8 Exemplo de Projeto: Piloto Automático de Avião
- 12.9 Projeto de um Sistema de Controle para Telescópio Espacial
- 12.10 Projeto de um Acionador de Bobinadeira Robusto
- 12.11 Sistema de Controle com Modelo Interno Robusto
- 12.12 Projeto de um Torno Ultrapreciso com Diamante
- 12.13 Sistema com Retroação Pseudoquantitativa
- 12.14 Sistemas de Controle Robustos Usando MATLAB
- 12.15 Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco
- 12.16 Sumário

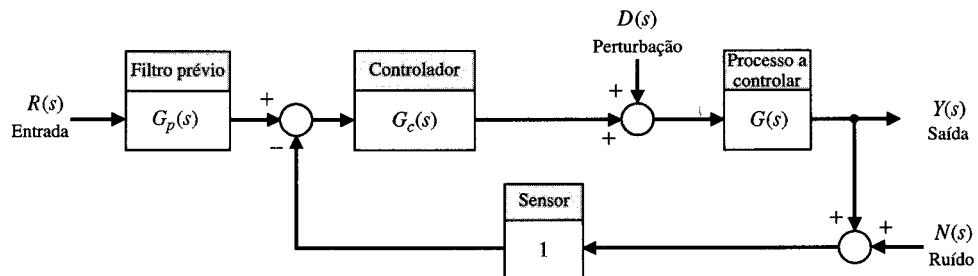
## APRESENTAÇÃO

Nos capítulos anteriores foram descritos os benefícios de se usar um compensador para obter o desempenho desejado de um sistema com retroação. Agora a atenção se volta para a questão da robustez. O projeto de sistemas de controle altamente precisos em presença de consideráveis incertezas requer que o projetista procure um sistema robusto. Neste capítulo utilizam-se cinco métodos para projeto robusto, incluindo lugar das raízes, resposta de freqüência e métodos ITAE para um sistema PID robusto. Muitas das metodologias recentes para projetar sistemas de controle estão centradas em aspectos de robustez na presença de incertezas—robustez de estabilidade e robustez de desempenho. Essas metodologias recentes de projeto se voltam para o fato de que os sistemas físicos e o ambiente externo no qual irão operar não podem ser modelados com exatidão, podem se alterar de modo imprevisível e estar sujeitos a perturbações de vulto. Contudo, é necessário dar-se conta de que as técnicas clássicas de projeto também são capazes de produzir sistemas de controle robustos. Os engenheiros de controle convededores disto podem projetar controladores PID robustos, controladores de avanço e atraso de fase robustos, e assim por diante. Neste capítulo também será discutido o uso dos métodos com retroação com modelo interno e pseudoquantitativo na obtenção de controle robusto. O capítulo é concluído com o projeto de um controlador PID para o Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco.

## 12.1 INTRODUÇÃO

Um sistema de controle que é projetado usando os métodos e conceitos dos capítulos anteriores pressupõe o conhecimento do modelo do processo e do controlador e parâmetros constantes. O modelo do processo a controlar será sempre uma representação inexata de sistema físico real devido a:

- Mudanças de parâmetros
- Dinâmica não modelada
- Retardos não incluídos no modelo



**Fig. 12.1** Diagrama estrutural de sistema a malha fechada.

- Mudanças no ponto de equilíbrio (ponto de operação)
- Ruídos no sensor
- Perturbações imprevisíveis

O objetivo do projeto de sistemas robustos é garantir o desempenho do sistema a despeito das imprecisões e das alterações do modelo. Um sistema é **robusto** quando apresenta mudanças aceitáveis no desempenho devidas a alterações ou inexactidões do modelo.

**Um sistema robusto apresenta o desempenho desejado a despeito da presença de incertezas consideráveis sobre o processo a controlar.**

A estrutura de sistema que incorpora incertezas potenciais de sistema é mostrada na Fig. 12.1. Este modelo inclui os ruídos do sensor  $N(s)$ , a entrada de perturbação imprevisível  $D(s)$ , e o processo  $G(s)$  com dinâmica potencialmente não modelada ou com alterações de parâmetros. A dinâmica não modelada e as mudanças de parâmetro podem ser significativas ou muito grandes, e para estes sistemas o desafio é criar um projeto que preserve o desempenho desejado.

## 12.2 SISTEMAS DE CONTROLE ROBUSTOS E SENSIBILIDADE DE SISTEMA

O projeto de sistemas altamente precisos na presença de incertezas significativas sobre o processo a controlar constitui um problema clássico de projeto com retroação. As bases teóricas para a solução deste problema se originam nos trabalhos de H. S. Black e H. W. Bode nos primórdios da década de 1930, quando este problema foi referido como o problema de projeto das sensibilidades. Um volume considerável de literatura tem sido publicado desde então concernente ao projeto de sistemas sujeitos a grandes imprecisões sobre o processo a controlar. O projetista procura obter um sistema que se comporte de forma adequada sobre uma grande faixa de incerteza de parâmetros. Um sistema é dito robusto quando é durável, capaz de suportar fadiga e resistente ao choque.

Um sistema de controle é robusto quando (1) apresenta baixa sensibilidade, (2) é estável sobre a faixa de variação dos parâmetros e (3) o desempenho continua a atender as especificações em presença de um conjunto de mudanças nos parâmetros do sistema [3, 4]. Robustez é a sensibilidade aos efeitos que não são considerados na fase de análise e de projeto — por exemplo, perturbações, ruído nas medições e dinâmica não modelada. O sistema deve ser capaz de suportar estes efeitos que foram desconsiderados quando da execução das tarefas para as quais foi projetado.

Para perturbações devidas a pequenas alterações de parâmetros pode-se usar, como medida de robustez, as sensibilidades diferenciais discutidas nas Seções 4.2 (sensibilidade de sistema) e 7.6 (sensibilidade das raízes) [6].

A **sensibilidade de sistema** é definida como

$$S_\alpha^T = \frac{\partial T/T}{\partial \alpha/\alpha}, \quad (12.1)$$

onde  $\alpha$  é o parâmetro e  $T$  é a função de transferência do sistema

A **sensibilidade da raiz** é definida como

$$S_\alpha^{r_i} = \frac{\partial r_i}{\partial \alpha/\alpha}. \quad (12.2)$$

Quando os zeros de  $T(s)$  são independentes do parâmetro  $\alpha$ , mostra-se que

$$S_\alpha^T = - \sum_{i=1}^n S_\alpha^{r_i} \cdot \frac{1}{(s + r_i)}, \quad (12.3)$$

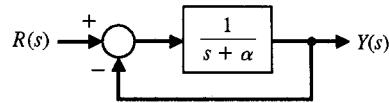


Fig. 12.2 Um sistema de primeira ordem.

para um sistema ordem  $n$ . Por exemplo, tendo-se um sistema a malha fechada, como o mostrado na Fig. 12.2, onde o parâmetro variável é  $\alpha$ , então  $T(s) = 1/[s + (\alpha + 1)]$ , e

$$S_\alpha^T = \frac{-\alpha}{s + \alpha + 1}. \quad (12.4)$$

Além disto, a raiz  $r_1 = +(\alpha + 1)$ , e

$$-S_\alpha^{r_1} = -\alpha. \quad (12.5)$$

Por conseguinte

$$S_\alpha^T = -S_\alpha^{r_1} \frac{1}{(s + \alpha + 1)}. \quad (12.6)$$

Examine-se a sensibilidade do sistema de segunda ordem mostrado na Fig. 12.3. A função de transferência do sistema a malha fechada é

$$T(s) = \frac{K}{s^2 + s + K}. \quad (12.7)$$

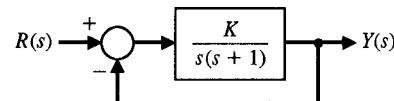


Fig. 12.3 Um sistema de segunda ordem.

Como foi visto na Eq. (4.12), a sensibilidade de sistema com relação a  $K$  é

$$S_K^T = \frac{1}{1 + GH(s)} = \frac{s(s + 1)}{s^2 + s + K}. \quad (12.8)$$

Um diagrama de Bode das assíntotas de  $20 \log|T(j\omega)|$  e  $20 \log|S(j\omega)|$  é mostrado na Fig. 12.4 para  $K = 1/4$  (amortecimento crítico). Observe-se que a sensibilidade é pequena nas baixas freqüências, com a função de transferência deixando passar fundamentalmente as baixas freqüências. Observe-se, também, para este caso,  $T(s) = 1 - S(s)$ .

É claro que a sensibilidade  $S$  somente representa robustez para pequenas mudanças no ganho. Se  $K$  variar 1/4 dentro da faixa  $K = 1/16$  a  $K = 1$ , a faixa resultante da variação da resposta ao degrau é mostrada na Fig. 12.5. Este sistema, com uma grande variação esperada de  $K$ , não pode ser considerado adequadamente robusto. Espera-se que um sistema robusto produza essencialmente a mesma resposta (dentro de uma certa tolerância) para uma entrada selecionada.

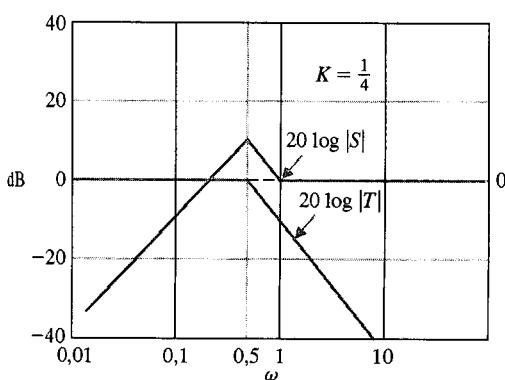


Fig. 12.4 Sensibilidade e  $20 \log|T(j\omega)|$  para o sistema de segunda ordem na Fig. 12.3. As aproximações assintóticas são mostradas para  $K = 1/4$ .

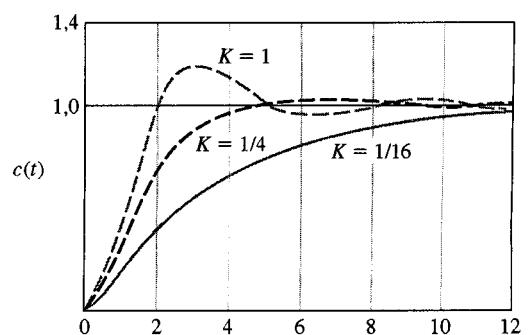


Fig. 12.5 Resposta ao degrau para valores escolhidos do ganho  $K$ .

**EXEMPLO 12.1****Sensibilidade de um sistema controlado**

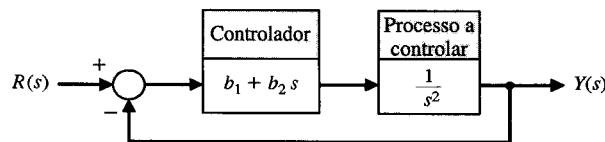
Considere-se o sistema mostrado na Fig. 12.6, onde  $G(s) = 1/s^2$ , e um controlador PD  $G_c(s) = b_1 + b_2 s$ . Então, a sensibilidade com respeito a mudanças em  $G(s)$  é

$$S_G^T = \frac{1}{1 + GG_c(s)} = \frac{s^2}{s^2 + b_2 s + b_1}, \quad (12.9)$$

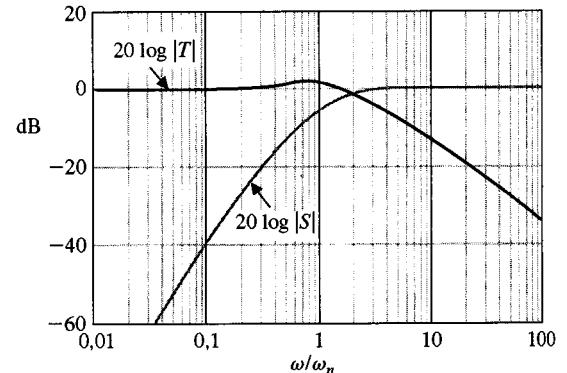
e

$$T(s) = \frac{b_2 s + b_1}{s^2 + b_2 s + b_1}. \quad (12.10)$$

Considere-se a condição normal  $\zeta = 1$  e  $\omega_n = \sqrt{b_1}$ . Então  $b_2 = 2\omega_n$  para se obter  $\zeta = 1$ . Por conseguinte, pode-se traçar os gráficos de  $20 \log|S|$  e  $20 \log|T|$  sobre um diagrama de Bode, como mostrado na Fig. 12.7. Note-se que a freqüência  $\omega_n$  é um indicador do limite entre a região de freqüências na qual a sensibilidade é o critério de projeto importante e a região na qual a margem de estabilidade é importante. Assim, se for especificado o valor de  $\omega_n$  de forma adequada para levar em consideração a amplitude do erro de modelagem e a freqüência da perturbação externa, pode-se esperar que o sistema tenha uma dose aceitável de robustez. Note-se que  $G_c(s)$  é um controlador proporcional e derivativo (PD). ■



**Fig. 12.6** Sistema com controlador PD.



**Fig. 12.7** Sensibilidade e  $T(s)$  para o sistema de segunda ordem da Fig. 12.6.

**EXEMPLO 12.2****Sistema com um zero no semiplano da direita**

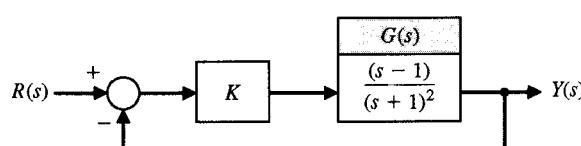
Considere-se o sistema mostrado na Fig. 12.8, onde o processo a controlar tem um zero no semiplano  $s$  da direita. A função de transferência a malha fechada é

$$T(s) = \frac{K(s - 1)}{s^2 + (2 + K)s + (1 - K)}. \quad (12.11)$$

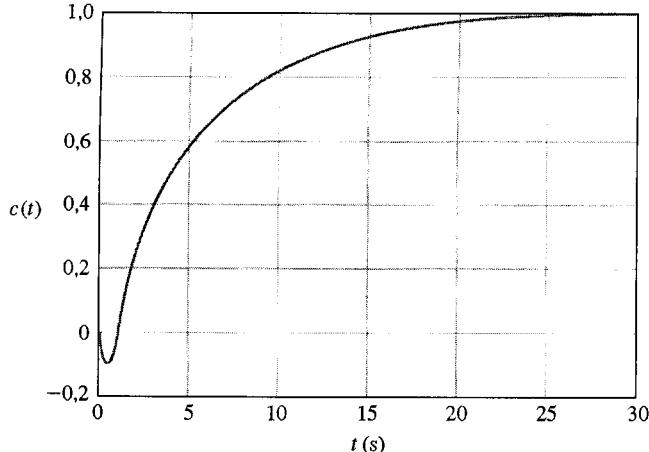
O sistema é estável para um ganho  $-2 < K < 1$ . O erro de estado estacionário é

$$e_{ss} = \frac{1 - 2K}{1 - K}, \quad (12.12)$$

e  $e_{ss} = 0$  quando  $K = 1/2$ . A resposta a um degrau de entrada unitário negativo  $R(s) = -1/s$  é mostrada na Fig. 12.9. Note-se a ultrapassagem negativa inicial em  $t = 1$  segundo. Este sistema é sensível a mudanças em  $K$ , como está registrado na Tabela 12.1. O desempenho deste sistema dificilmente poderia ser considerado aceitável para uma mudança de ganho de apenas  $\pm 10\%$ . Assim, este sistema não seria considerado robusto. O erro de estado estacionário deste sistema varia enormemente quando  $K$  muda. ■



**Fig. 12.8** Um sistema de segunda ordem.



**Fig. 12.9** Resposta ao degrau do sistema da Fig. 12.8 com  $K = 1/2$ .

**TABELA 12.1 Resultados do Exemplo 12.2**

$K$	0,25	0,45	0,50	0,55	0,75
$ e_{ss} $	0,67	0,18	0	0,22	1,0
Ultrapassagem invertida ( <i>undershoot</i> )	5%	9%	10%	11%	15%
Tempo de assentamento (segundos)	15	24	27	30	45

## 12.3 ANÁLISE DE ROBUSTEZ

Considere-se o sistema a malha fechada mostrado na Fig. 12.1. Os objetivos do sistema incluem manter pequeno o valor do erro de rastreamento [ $e(t) = r(t) - y(t)$ ] de uma entrada  $r(t)$  e conservar pequeno o valor da saída  $y(t)$  para uma perturbação  $d(t)$ . O ruído do sensor  $n(t)$  deve ser pequeno com relação a  $r(t)$  para que  $|r| >> |n|$ .

A função de sensibilidade é

$$S(s) = [1 + G_c(s)G(s)]^{-1},$$

e a função de transferência a malha fechada é

$$T(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

onde  $G_p(s) = 1$ . Tem-se, então,

$$S(s) + T(s) = 1. \quad (12.13)$$

Assim, é importante fazer  $S(s)$  pequeno. Para sistemas realizáveis fisicamente, o ganho de malha  $L(s) = G_cG(s)$  deve ser pequeno para altas freqüências. Isto significa que  $S(j\omega)$  tende a 1 nas altas freqüências.

Uma **perturbação aditiva** caracteriza o conjunto de possíveis processos a controlar como se segue (admite-se aqui  $G_c(s) = 1$ ):

$$G_a(s) = G(s) + A(s),$$

onde  $G(s)$  é o processo nominal e  $A(s)$  é a perturbação que é limitada em magnitude. Supõe-se, assim que  $G_a(s)$  e  $G(s)$  têm o mesmo número de pólos no semiplano  $s$  da direita (caso existam) [36]. Então a estabilidade de sistema não será mudada se

$$|A(j\omega)| < |1 + G(j\omega)| \text{ para todos os valores de } \omega. \quad (12.14)$$

Isto assegura a estabilidade mas não o desempenho dinâmico.

Uma **perturbação multiplicativa** fornece o processo a controlar

$$G_m(s) = G(s)[1 + M(s)].$$

A perturbação é limitada em magnitude, e se supõe novamente que  $G_m(s)$  e  $G(s)$  têm o mesmo número de pólos no semiplano  $s$  da direita. Então a estabilidade do sistema não se altera se

$$|M(j\omega)| < \left| 1 + \frac{1}{G(j\omega)} \right| \text{ para todos os valores de } \omega. \quad (12.15)$$

A Eq. (12.15) é chamada o **critério de estabilidade robusta**. Este é um teste para robustez com respeito a uma perturbação multiplicativa. Esta forma de perturbação é usada quase sempre porque satisfaaz as propriedades intuitivas de (1) ser pequena em baixas freqüências, onde o modelo nominal do processo a controlar é usualmente bem conhecido, e (2) de ser grande nas freqüências altas, onde o modelo nominal é sempre inexato.

### EXEMPLO 12.3

#### Sistema com perturbação multiplicativa

Considere-se o sistema da Fig. 12.1 com  $G_p(s) = 1$ ,  $G_c = K$ , e

$$G(s) = \frac{170.000(s + 0,1)}{s(s + 3)(s^2 + 10s + 10.000)}.$$

O sistema é instável com  $K = 1$ , mas uma redução no ganho para  $K = 0,5$  o estabilizará. Considere-se, agora, o efeito de um pôlo não modelado em 50 rad/s. Neste caso, a perturbação multiplicativa é determinada a partir de

$$[1 + M(s)] = \frac{50}{s + 50},$$

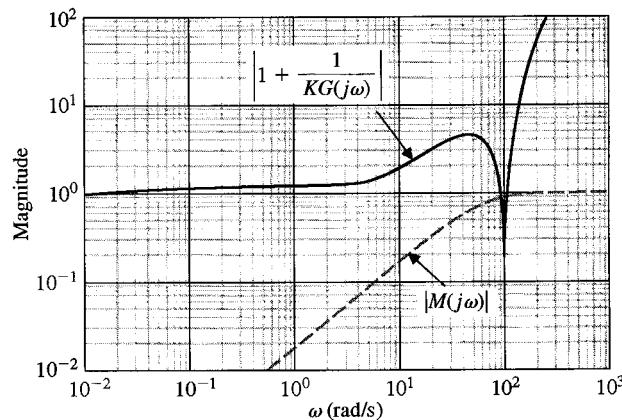
ou  $M(s) = -s/(s + 50)$ . O limite de magnitude é então

$$|M(j\omega)| = \left| \frac{-j\omega}{j\omega + 50} \right|.$$

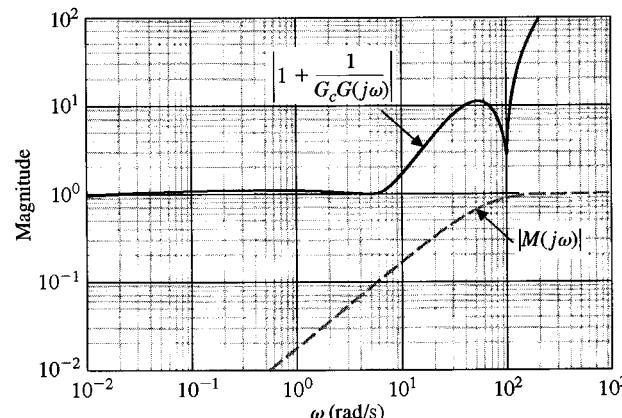
$|M(j\omega)|$  e  $|1 + 1/KG(j\omega)|$  são traçados na Fig. 12.10(a), onde se constata que o critério de Eq. (12.15) não é atendido. Assim, o sistema não pode ser estável.

Se for usado um compensador por atraso de fase  $G_c(s)$ , onde

$$G_c(s) = \frac{0,15(s + 25)}{(s + 2,5)},$$



(a)



(b)

**Fig. 12.10** Critério de estabilidade robusta para o Exemplo 12.3.

a função de transferência de malha é  $1 + G_c(s)G(s)$ , e se reconfigura a forma da função  $G_cG(j\omega)$  na faixa de freqüências  $2 < \omega < 25$ . Tem-se então a magnitude alterada

$$\left| 1 + \frac{1}{G_cG(j\omega)} \right|,$$

como está mostrado no gráfico da Fig. 12.10(b). Aqui a desigualdade da robustez é atendida, e o sistema permanece estável. ■

O objetivo de controle é selecionar um filtro prévio  $G_p(s)$  e um compensador  $G_c(s)$  numa configuração com retroação com dois graus de liberdade (Fig. 12.1) para que as especificações transitória, de estado estacionário e do domínio de freqüência sejam atendidas e que o custo da retroação medida pela banda passante do compensador  $G_c(j\omega)$  seja suficientemente pequeno. Esta restrição sobre a banda passante é necessária principalmente por causa do ruído que é inevitável ao se medir a saída do sistema. Uma grande amplificação do ruído pode saturar os últimos estágios de  $G_c(s)$  ou os estágios iniciais do processo a controlar.

## 12.4 SISTEMAS COM PARÂMETROS IMPRECISOS

Muitos sistemas têm alguns parâmetros que são constantes mas têm valores incertos dentro de uma faixa. Por exemplo, considere-se um sistema com uma equação característica

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_0 = 0 \quad (12.16)$$

com coeficientes conhecidos dentro de limites

$$\alpha_i \leq a_i \leq \beta_i, \quad i = 0, \dots, n,$$

onde  $a_n = 1$ .

Para assegurar a estabilidade do sistema devem ser investigadas todas as possíveis combinações dos parâmetros. Felizmente é possível investigar um número limitado de polinômios de pior caso [22]. A análise de apenas quatro polinômios é suficiente, e eles são facilmente definidos para um sistema de terceira ordem com uma equação característica

$$s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0. \quad (12.17)$$

Por conseguinte, os quatro polinômios são

$$\begin{aligned} q_1(s) &= s^3 + \alpha_2s^2 + \beta_1s + \beta_0, \\ q_2(s) &= s^3 + \beta_2s^2 + \alpha_1s + \alpha_0, \\ q_3(s) &= s^3 + \beta_2s^2 + \beta_1s + \alpha_0, \\ q_4(s) &= s^3 + \alpha_2s^2 + \alpha_1s + \beta_0. \end{aligned}$$

Um dos quatro polinômios representa o **pior caso** e pode indicar desempenho instável ou pelo menos o pior desempenho para o sistema nesse caso.

### EXEMPLO 12.4

#### Sistema de terceira ordem com coeficientes imprecisos

Considere-se o sistema de terceira ordem com coeficientes imprecisos tais que

$$8 \leq a_0 \leq 60 \Rightarrow \alpha_0 = 8, \quad \beta_0 = 60;$$

$$12 \leq a_1 \leq 100 \Rightarrow \alpha_1 = 12, \quad \beta_1 = 100;$$

$$7 \leq a_2 \leq 25 \Rightarrow \alpha_2 = 7, \quad \beta_2 = 25.$$

Os quatro polinômios são

$$q_1(s) = s^3 + 7s^2 + 100s + 60,$$

$$q_2(s) = s^3 + 25s^2 + 12s + 8,$$

$$q_3(s) = s^3 + 25s^2 + 100s + 8,$$

$$q_4(s) = s^3 + 7s^2 + 12s + 60.$$

Prossegue-se então na verificação destes quatro polinômios usando o critério de Routh-Hurwitz e assim determinando que o sistema é estável para todas as faixas de valores dos parâmetros incertos. ■

**EXEMPLO 12.5****Estabilidade de um sistema impreciso**

Considere-se um sistema com retroação unitária com uma função de transferência do processo a controlar (condições nominais)

$$G(s) = \frac{4,5}{s(s + 1)(s + 2)}.$$

A equação característica nominal é então

$$q(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + 4,5 = 0.$$

Usando-se o critério de Routh-Hurwitz, descobre-se que este sistema é nominalmente estável. Contudo, se o sistema possuir coeficientes incertos como

$$4 \leq a_0 \leq 5 \Rightarrow \alpha_0 = 4, \beta_0 = 5;$$

$$1 \leq a_1 \leq 3 \Rightarrow \alpha_1 = 1, \beta_1 = 3; \text{ e}$$

$$2 \leq a_2 \leq 4 \Rightarrow \alpha_2 = 2, \beta_2 = 4,$$

então é necessário examinar os quatro polinômios:

$$q_1(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 5,$$

$$q_2(s) = s^3 + 4s^2 + 1s + 4,$$

$$q_3(s) = s^3 + 4s^2 + 3s + 4,$$

$$q_4(s) = s^3 + 2s^2 + 1s + 5.$$

Usando-se o critério de Routh-Hurwitz,  $q_1(s)$  e  $q_3(s)$  são estáveis e  $q_2(s)$  é marginalmente estável. Para  $q_4(s)$  tem-se

$s^3$	1	1
$s^2$	2	5
$s^1$	-3/2	
$s^0$	5	

Por conseguinte, o sistema é instável para os piores casos, onde  $\alpha_2 = \text{mínimo}$ ,  $\alpha_1 = \text{mínimo}$  e  $\beta_0 = \text{máximo}$ . Isto ocorre quando o processo tiver mudado para

$$G(s) = \frac{5}{s(s + 1)(s + 1)}.$$

Note-se que o terceiro pólo se deslocou em direção ao eixo  $j\omega$  para o limite em  $s = -1$  e que o ganho aumentou para o limite em  $K = 5$ . Muitas vezes pode-se examinar a função de transferência  $G(s)$  e prognosticar as condições do pior caso. ■

## 12.5 O PROJETO DE SISTEMAS DE CONTROLE ROBUSTOS

O projeto de sistemas de controle robustos é baseado em duas tarefas: determinar a estrutura do controlador e ajustar os parâmetros do controlador para fornecer um desempenho “ótimo” do sistema. Este procedimento de projeto é feito normalmente com “total conhecimento presumido” do processo a controlar. Além disso, o processo a controlar é normalmente descrito por um modelo contínuo linear e invariante no tempo. A estrutura do controlador é escolhida de modo que a resposta do sistema possa atender determinado critério de desempenho.

Um possível objetivo no projeto de um sistema de controle é que a saída do sistema controlado deva reproduzir exata e simultaneamente sua entrada. Isto é, a função de transferência do sistema deve ser unitária:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = 1. \quad (12.18)$$

Em outras palavras, o sistema deve ser representável em um diagrama de Bode do ganho em função da freqüência com um ganho de 0 dB, com banda passante infinita e uma margem de fase igual a zero. Na prática isto não é possível, visto que todo sistema irá conter componentes indutivos e capacitivos que armazenam energia de alguma forma. São estes elementos e suas interconexões com componentes dissipadores de energia que produzem as características dinâmicas da resposta do sistema. Tais sistemas reproduzem algumas entradas quase exatamente, enquanto outras entra-

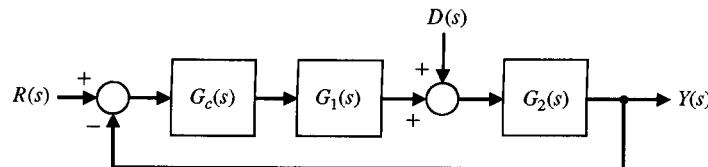


Fig. 12.11 Um sistema com perturbação.

das não são reproduzidas de forma alguma, significando que a banda passante do sistema não é infinita.

Uma vez que se reconhece que a dinâmica do sistema não pode ser ignorada, precisa-se de um novo objetivo de projeto. Um possível objetivo de projeto é manter a curva de magnitude da resposta tão plana e próxima da unidade para uma banda passante tão grande quanto possível para uma dada combinação de processo e controlador [22].

Um outro importante objetivo de um projeto de sistema de controle é que o efeito resultante de perturbações na saída do sistema seja minimizado. Desta maneira, deseja-se minimizar  $Y(s)/D(s)$  sobre uma faixa de freqüências.

Considere o sistema de controle mostrado na Fig. 12.11, onde  $G(s) = G_1(s)G_2(s)$  é o processo a controlar e  $D(s)$  é a perturbação. Por conseguinte, tem-se

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c G_1 G_2(s)}{1 + G_c G_1 G_2(s)}, \quad (12.19)$$

e

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_c G_1 G_2(s)}. \quad (12.20)$$

Note-se que tanto a função de transferência da referência quanto a da perturbação têm o mesmo denominador; em outras palavras, ambas têm a mesma equação característica — isto é,

$$1 + G_c(s)G_1(s)G_2(s) = 1 + L(s) = 0. \quad (12.21)$$

Além disso, lembre-se de que a sensibilidade de  $T(s)$  com respeito a  $G(s)$  é

$$S_G^T = \frac{1}{1 + G_c G_1 G_2(s)}, \quad (12.22)$$

e a equação característica é o fator que influencia a sensibilidade. A Eq. (12.22) mostra que para uma baixa sensibilidade  $S$  é necessário um alto valor do ganho de malha  $L(j\omega)$ , mas se sabe que um ganho elevado poderia causar instabilidade ou baixa capacidade de resposta de  $T(s)$ . Neste caso, o projetista procura o seguinte:

1.  $T(s)$  com grande banda passante e reprodução fiel de  $R(s)$ .
2. Grande ganho de malha  $L(s)$  a fim de minimizar a sensibilidade  $S$ .
3. Grande ganho de laço  $L(s)$  obtido principalmente por  $G_c(s)G_1(s)$ , uma vez que  $Y(s)/D(s) \approx 1/G_c G_1(s)$ .

Definindo-se o projeto de sistemas robustos em termos de domínio de freqüência, é necessário encontrar um compensador adequado,  $G_c(s)$ , tal que a sensibilidade do sistema a malha fechada seja menor que algum valor de tolerância. A redução da sensibilidade ao mínimo implica encontrar um compensador adequado tal que a sensibilidade do sistema a malha fechada seja igual ou arbitrariamente próxima de um valor mínimo alcançável. De modo semelhante, o problema da margem de ganho é encontrar um compensador adequado para atender um valor de margem de ganho determinada previamente. A maximização da margem de ganho implica encontrar um compensador adequado para atingir o valor máximo alcançável de margem de ganho. Para as especificações no domínio de freqüência, é necessário que o diagrama de Bode de  $G_c G(j\omega)$ , atenda o seguinte, como mostra a Fig. 12.12:

1. Para estabilidade relativa,  $G_c G(j\omega)$  precisa ter, para uma faixa adequada de  $\omega$ , não mais que  $-20\text{dB/}\text{década}$  de inclinação na freqüência de cruzamento  $\omega_c$ , ou próximo desta freqüência.
2. A precisão do estado estacionário deve ser atendida pelo ganho de baixas freqüências.
3. Precisão sobre a banda passante  $\omega_B$  não permitindo que  $|G_c G(\omega)|$  caia abaixo de um nível prescritivo.
4. Rejeição a perturbações por meio de um ganho elevado de  $G_c(j\omega)$ , sobre a banda passante do sistema.

Utilizando-se o conceito de sensibilidade das raízes, pode-se enunciar que é necessário minimizar  $S_\alpha^r$  enquanto se mantém  $T(s)$  com as raízes dominantes que irão fornecer a resposta apropriada e mi-

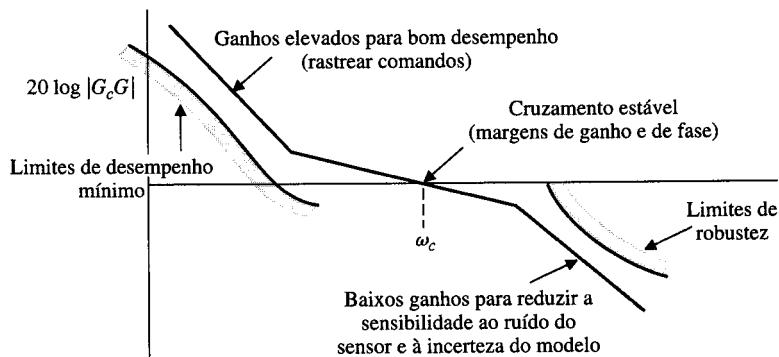


Fig. 12.12 Diagrama de Bode para  $20 \log |G_cG(j\omega)|$ .

nimizar o efeito de  $D(s)$ . Constatase, novamente, que o objetivo é ter o ganho do malha atendido principalmente por  $G_c(s)$ . Como exemplo, sejam  $G_c(s) = K$ ,  $G_1(s) = 1$  e  $G_2(s) = 1/s(s + 1)$  para o sistema na Fig. 12.11. Este sistema tem duas raízes, e selecionase um ganho  $K$  de modo que  $Y(s)/D(s)$  seja reduzido ao mínimo,  $S_K^r$  seja minimizado, e  $T(s)$  possua as raízes dominantes desejáveis. A sensibilidade é

$$S_K^r = \frac{dr}{dK} \cdot \frac{K}{r} = \frac{ds}{dK} \Big|_{s=r} \cdot \frac{K}{r}, \quad (12.23)$$

e a equação característica é

$$s(s + 1) + K = 0. \quad (12.24)$$

Por conseguinte  $dK/ds = -(2s + 1)$ , uma vez que  $K = -s(s + 1)$ . Obtém-se então

$$S_K^r = \frac{-1}{(2s + 1)} \cdot \frac{[-s(s + 1)]}{s} \Big|_{s=r}. \quad (12.25)$$

Quando  $\zeta < 1$ , as raízes são complexas, e  $r = -0,5 + j\omega$ . Então,

$$|S_K^r| = \left( \frac{0,25 + \omega^2}{4\omega^2} \right)^{1/2}. \quad (12.26)$$

O gráfico da magnitude da sensibilidade é traçado na Fig. 12.13 para  $K = 0,2$  até  $K = 5$ . É mostrada também a ultrapassagem percentual a um degrau. É melhor reduzir a sensibilidade mas limitar  $K$  a 1,5 ou menos. Em seguida obtém-se a maioria da redução na sensibilidade preservando bom desempenho para uma resposta ao degrau. Em geral, pode-se usar o procedimento do projeto a seguir:

1. Esboçar o lugar das raízes do sistema compensado com  $G_c(s)$  escolhido para obter a posição desejada para as raízes dominantes.
2. Maximizar o ganho de  $G_c(s)$  para reduzir o efeito da perturbação.
3. Determinar  $S_K^r$  e obter o valor mínimo da sensibilidade consistente com a resposta transitória requerida, como foi descrito no passo 1.

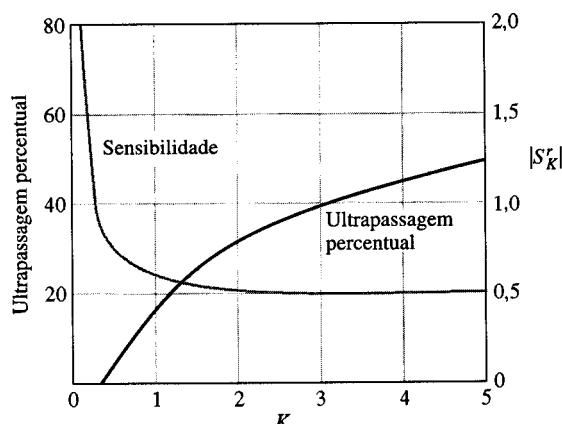


Fig. 12.13 Sensibilidade e ultrapassagem percentual para um sistema de segunda ordem.

**EXEMPLO 12.6****Sensibilidade e compensação**

Reconsidere-se o sistema no Exemplo 10.1 quando  $G(s) = 1/s^2$ ,  $H(s) = 1$ , e  $G_c(s)$  deve ser selecionado pelos métodos de resposta de freqüência. Por conseguinte, o compensador deve ser selecionado para atender uma margem de ganho e uma margem de fase adequadas enquanto se minimiza a sensibilidade e o efeito da perturbação. Escolhe-se, assim,

$$G_c(s) = \frac{K(s/z + 1)}{(s/p + 1)}. \quad (12.27)$$

Como no Exemplo 10.1, escolhe-se  $K = 10$  para reduzir o efeito da perturbação. Para obter uma margem de fase de  $45^\circ$ , seleciona-se  $z = 2,0$  e  $p = 12,0$ . Obtém-se então o diagrama compensado mostrado na Fig. 10.9 e repetido na Fig. 12.14. É bom lembrar que a banda passante do sistema a malha fechada é  $\omega_B = 1,6 \omega_c$ . Desta maneira será aumentada a banda passante usando-se o compensador e será aperfeiçoada a fidelidade de reprodução dos sinais de entrada.

A sensibilidade pode ser determinada em  $\omega_c$  como

$$|S_G^T(\omega_c)| = \left| \frac{1}{1 + G_c G(j\omega)} \right|_{\omega_c}. \quad (12.28)$$

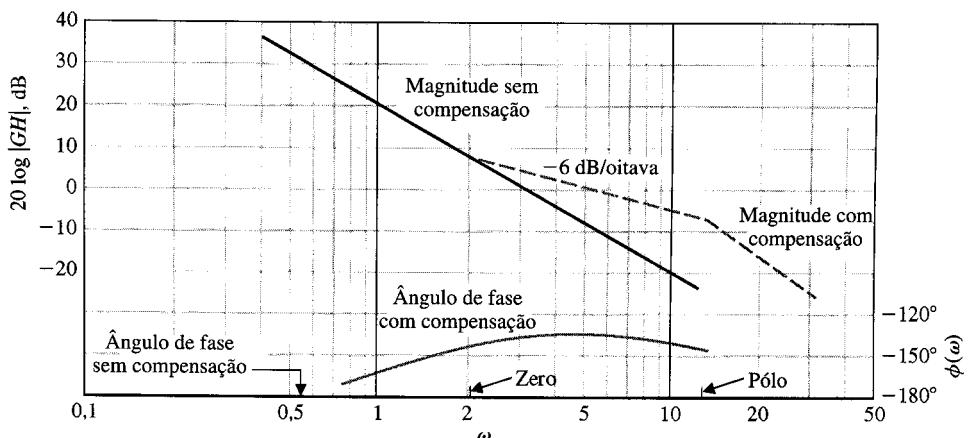


Fig. 12.14 Diagramas de Bode para o Exemplo 12.6.

Para estimar  $|S_G^T|$ , é bom lembrar que a carta de Nichols permite obter

$$|T(\omega)| = \left| \frac{G_c G(\omega)}{1 + G_c G(\omega)} \right|. \quad (12.29)$$

Em seguida pode-se traçar alguns pontos de  $G_c G(j\omega)$  na carta de Nichols e em seguida ler  $T(\omega)$  a partir da carta. Então

$$|S_G^T(\omega_1)| = \frac{|T(\omega_1)|}{|G_c G(\omega_1)|}, \quad (12.30)$$

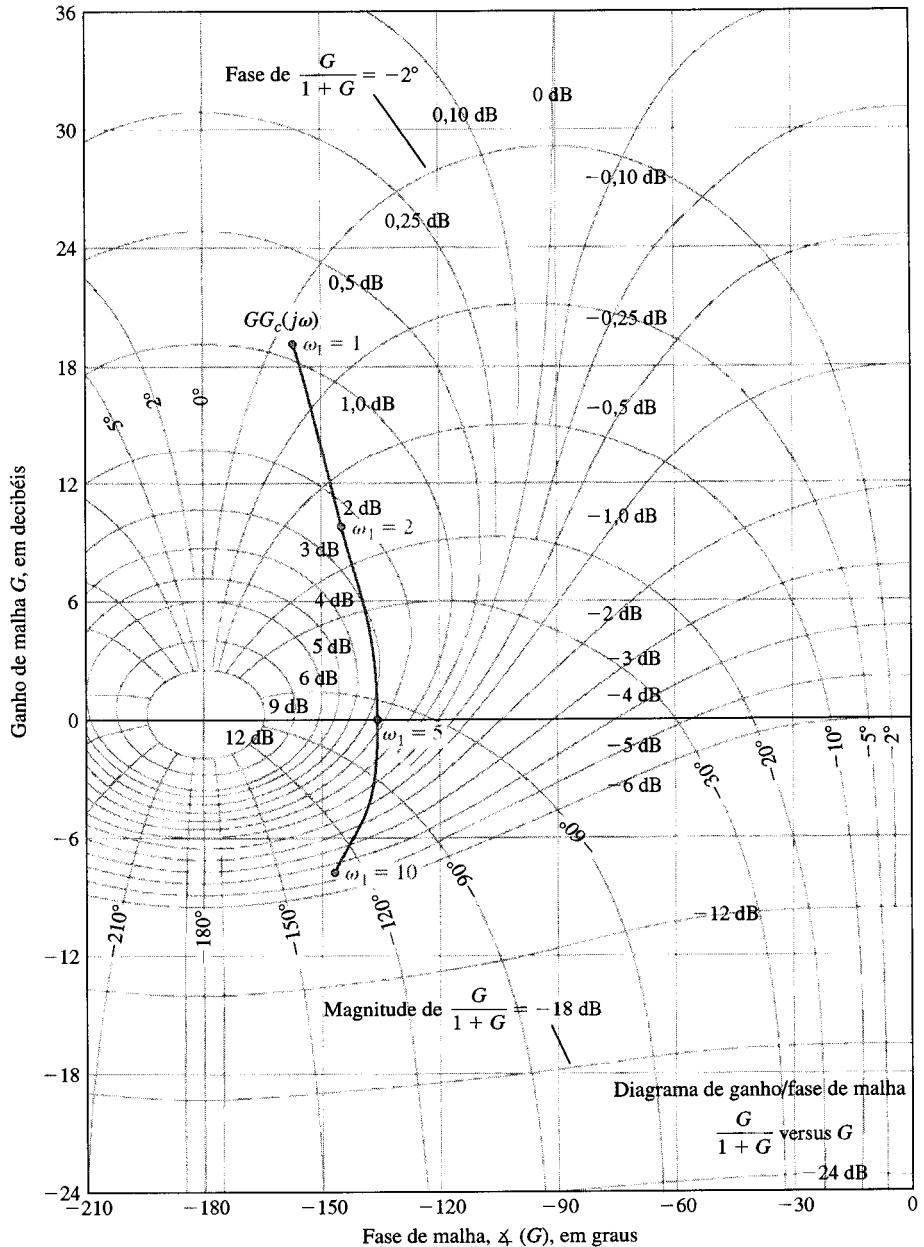
onde  $\omega_1$  é escolhido arbitrariamente como  $\omega/2,5$ . Geralmente escolhe-se uma freqüência abaixo de  $\omega_c$  para determinar o valor de  $|S(\omega_1)|$ . Naturalmente se deseja um baixo valor de sensibilidade. A carta de Nichols para o sistema compensado é mostrada na Fig. 12.15. Para  $\omega_1 = \omega_c/2,5 = 2$ , tem-se  $20 \log T = 2,5$  dB e  $20 \log G_c G = 9$  dB. Por conseguinte

$$|S(\omega_1)| = \frac{|T|}{|G_c G|} = \frac{1,33}{2,8} = 0,47. \blacksquare$$

**EXEMPLO 12.7****Sensibilidade com um compensador por avanço de fase**

Considere-se novamente o sistema do Exemplo 12.6, usando o projeto de lugar das raízes obtido no Exemplo 10.3. O compensador foi escolhido como

$$G_c(s) = \frac{8,1(s + 1)}{(s + 3,6)}, \quad (12.31)$$



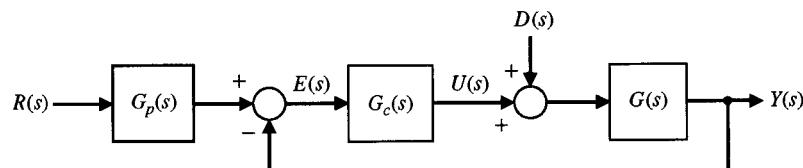
**Fig. 12.15** Carta de Nichols para o Exemplo 12.7.

para o sistema da Fig. 12.16. As raízes dominantes são, portanto,  $s = -1 \pm j2$ . Como o ganho é de 8,1, o efeito da perturbação é reduzido, e a resposta no domínio do tempo atende as especificações. A sensibilidade na raiz  $r$  pode ser obtida admitindo-se que o sistema, com raízes dominantes, possa ser aproximado pelo sistema de segunda ordem

$$T(s) = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + K} = \frac{K}{s^2 + 2s + K},$$

uma vez que  $\zeta\omega_n = 1$ . A equação característica é, portanto,

$$s^2 + 2s + K = 0.$$



**Fig. 12.16** Sistema com retroação com uma entrada desejada  $R(s)$  e uma entrada não desejada  $D(s)$ .

Neste caso,  $dK/ds = -(2s + 2)$ , uma vez que  $K = -(s^2 + 2s)$ . Por conseguinte,

$$S_K^r = \frac{-1}{(2s + 2)} \cdot \frac{-(s^2 + 2s)}{s} \Big|_{s=r} = \frac{(s + 2)}{(2s + 2)} \Big|_{s=r}, \quad (12.32)$$

onde  $r = -1 + j2$ . Em seguida, substituindo  $s = r$ , obtém-se

$$|S_K^r| = 0,56.$$

Aumentando-se o ganho para  $K = 10$ , espera-se que  $r \approx -1,1 \pm j2,2$ . Então a sensibilidade é

$$|S_K^r| = 0,53.$$

Assim, à medida que  $K$  aumenta, a sensibilidade diminui, mas o desempenho transitório se deteriora. ■

## 12.6 CONTROLADORES PID

O controlador PID tem a função de transferência

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3 s.$$

A popularidade dos controladores PID pode ser atribuída parcialmente ao seu desempenho robusto sobre uma grande faixa de condições operacionais e em parte à sua simplicidade funcional, que permite aos engenheiros operá-los de uma maneira simples e correta. Para implementar um controlador destes, três parâmetros devem ser determinados para um dado processo: ganho proporcional, ganho integral e ganho derivativo [35].

Considere-se o controlador PID

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3 s = \frac{K_3 s^2 + K_1 s + K_2}{s} \\ &= \frac{K_3(s^2 + as + b)}{s} = \frac{K_3(s + z_1)(s + z_2)}{s}, \end{aligned} \quad (12.33)$$

onde  $a = K_1/K_3$ , e  $b = K_2/K_3$ . Conseqüentemente, um controlador PID apresenta uma função de transferência com um polo na origem e dois zeros que podem ser posicionados à esquerda do plano  $s$ .

Convém lembrar que um lugar das raízes começa nos pólos e termina nos zeros. Tendo-se um sistema como o mostrado na Fig. 12.16 com

$$G(s) = \frac{1}{(s + 2)(s + 5)},$$

e usando-se um controlador PID com zeros complexos, pode-se traçar o lugar das raízes como mostra a Fig. 12.17. À medida que o ganho,  $K_3$ , do controlador for aumentado, as raízes complexas tendem aos zeros. A função de transferência a malha fechada é

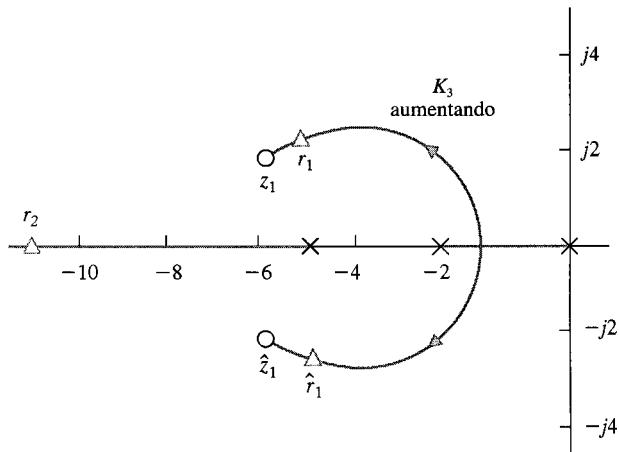
$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{G(s)G_c(s)G_p(s)}{1 + G(s)G_c(s)} \\ &= \frac{K_3(s + z_1)(s + \bar{z}_1)}{(s + r_2)(s + r_1)(s + \bar{r}_1)} G_p(s) \\ &\cong \frac{K_3 G_p(s)}{(s + r_2)}, \end{aligned} \quad (12.34)$$

porque os zeros e as raízes complexas são aproximadamente iguais ( $r_1 \approx z_1$ ). Fazendo-se  $G_p(s) = 1$ , tem-se

$$T(s) = \frac{K_3}{s + r_2} \approx \frac{K_3}{s + K_3} \quad (12.35)$$

quando  $K_3 \gg 1$ . O único fator limitante é a magnitude permitida para  $U(s)$  (Fig. 12.16) quando  $K_3$  for grande. Se  $K_3$  for 100, o sistema tem uma resposta rápida e um erro de estado estacionário nulo. Além disso, o efeito da perturbação é reduzido significativamente.

De um modo geral, se observa que os controladores PID são úteis particularmente para reduzir o erro de estado estacionário e melhorar a resposta transitória quando  $G(s)$  tem um ou dois pólos (ou pode ser aproximado de um sistema de segunda ordem).



**Fig. 12.17** Lugar das raízes com  $z_1 = -6 + j2$ .

## 12.7 O PROJETO DE SISTEMAS ROBUSTOS CONTROLADOS COM PID

A escolha dos três coeficientes dos controladores PID é basicamente um problema de procura em um espaço tridimensional. Pontos no espaço de busca correspondem a diferentes escolhas dos três parâmetros do controlador PID. Através da escolha de pontos diferentes no espaço de parâmetros, podem-se produzir, por exemplo, diferentes respostas para uma entrada em degrau. Um controlador PID pode ser determinado movendo-se neste espaço de busca na base de tentativa e erro.

O principal problema na escolha dos três coeficientes é que estes coeficientes não se traduzem diretamente no desempenho desejado e na característica de robustez que o projetista do sistema de controle tem em mente. Vários métodos e regras têm sido propostos para solucionar este problema. Nesta seção serão considerados alguns métodos de projeto utilizando o lugar das raízes e índices de desempenho.

O primeiro método de projeto usa o índice de desempenho ITAE da Seção 5.9 e os coeficientes ótimos da Tabela 5.6 para uma entrada em degrau ou a Tabela 5.7 para uma entrada em rampa. Portanto, selecionam-se os três coeficientes PID para minimizar o índice de desempenho ITAE, que produz uma excelente resposta transitória para um degrau (Fig. 5.30c) ou uma rampa. O procedimento de projeto consiste nos três passos a seguir:

1. Selecionar  $\omega_n$  do sistema a malha fechada especificando o tempo de assentamento.
2. Determinar os três coeficientes usando a equação ótima apropriada (Tabela 5.6) e o  $\omega_n$  do passo 1 para obter  $G_c(s)$ .
3. Determinar um filtro prévio  $G_p(s)$  de modo que a função de transferência a malha fechada,  $T(s)$ , não tenha zeros, como requerido na Eq. (5.47).

### EXEMPLO 12.8

#### Controle de temperatura robusto

Considere-se um controlador de temperatura com um sistema de controle como é mostrado na Fig. 12.16 e um processo

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)^2}. \quad (12.36)$$

Se  $G_c(s) = 1$ , o erro de estado estacionário é 50%, e o tempo de assentamento (critério dos 2%) é de 3,2 segundos para uma entrada em degrau. Deseja-se obter um desempenho ITAE ótimo para um degrau unitário e um tempo de assentamento menor que 0,5 segundo. Usando um controlador PID tem-se:

$$G_c(s) = \frac{K_3 s^2 + K_1 s + K_2}{s}. \quad (12.37)$$

Por conseguinte, a função de transferência a malha fechada sem um filtro prévio [ $G_p(s) = 1$ ] é

$$\begin{aligned} T_1(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c G(s)}{1 + G_c G(s)} \\ &= \frac{K_3 s^2 + K_1 s + K_2}{s^3 + (2 + K_3)s^2 + (1 + K_1)s + K_2}. \end{aligned} \quad (12.38)$$

**TABELA 12.2 Resultados do Exemplo 12.8**

Controlador	$G_c(s) = 1$	PID e $G_p(s) = 1$	PID com Filtro Prévio $G_p(s)$
Ultrapassagem percentual	0	31,7%	1,9%
Tempo de assentamento (segundos)	3,2	0,20	0,45
Erro de estado estacionário	50,1%	0,0%	0,00%
$ y(t)/d(t) _{\text{máximo}}$	52%	0,4%	0,4%

Os coeficientes ótimos da equação característica para o critério ITAE são dados na Tabela 5.6 como

$$(s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 2,15\omega_n^2 s + \omega_n^3). \quad (12.39)$$

Precisa-se selecionar  $\omega_n$  para obter o tempo de assentamento requerido. Como  $T_s = 4/\zeta\omega_n$  e  $\zeta$  é desconhecido, mas próximo de 0,8, define-se  $\omega_n = 10$ . Então, igualando o denominador da Eq. (12.38) à Eq. (12.39), obtém-se os três coeficientes como  $K_1 = 214$ ,  $K_3 = 15,5$  e  $K_2 = 1000$ .

Então a Eq. (12.38) se torna

$$\begin{aligned} T_1(s) &= \frac{15,5s^2 + 214s + 1000}{s^3 + 17,5s^2 + 215s + 1000} \\ &= \frac{15,5(s + 6,9 + j4,1)(s + 6,9 - j4,1)}{s^3 + 17,5s^2 + 215s + 1000}. \end{aligned} \quad (12.40)$$

A resposta deste sistema a uma entrada em degrau apresenta uma ultrapassagem de 32%, como está registrado na Tabela 12.2.

Seleciona-se um filtro prévio  $G_p(s)$  de modo que se obtenha a resposta ITAE desejada com

$$T(s) = \frac{G_c G G_p(s)}{1 + G_c G(s)} = \frac{1000}{s^3 + 17,5s^2 + 215s + 1000}. \quad (12.41)$$

Portanto, é necessário que

$$G_p(s) = \frac{64,5}{(s^2 + 13,8s + 64,5)} \quad (12.42)$$

a fim de eliminar os zeros na Eq. (12.40) e trazer o numerador global para 1000. A resposta do sistema,  $T(s)$ , para uma entrada em degrau é indicada na Tabela 12.2. O sistema tem uma pequena ultrapassagem, um tempo de assentamento menor que 1/2 s e erro de estado estacionário nulo. Além disso, para uma perturbação  $D(s) = 1/s$ , o valor máximo de  $y(t)$  devido à perturbação é de 0,4% da magnitude da perturbação. Este é um projeto muito favorável.

### EXEMPLO 12.9

#### Projeto de sistema robusto

Reconsidere-se o sistema do Exemplo 12.8 quando o processo a controlar varia significativamente, de modo que

$$G(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2}, \quad (12.43)$$

onde  $0,5 \leq \tau \leq 1$ , e  $1 \leq K \leq 2$ . Deseja-se obter um comportamento robusto usando um sistema ótimo ITAE com um filtro prévio que apresente uma ultrapassagem inferior a 4% e um tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 2 segundos, enquanto  $G(s)$  pode alcançar qualquer valor na faixa indicada. Seleciona-se  $\omega_n = 8$  para atender o tempo de assentamento e determinar os coeficientes ITAE para  $K = 1$  e  $\tau = 1$ . Concluindo o cálculo, obtém-se o sistema sem um filtro prévio [ $G_p(s) = 1$ ] como

$$T_1(s) = \frac{12(s^2 + 11,38s + 42,67)}{s^3 + 14s^2 + 137,6s + 512}, \quad (12.44)$$

e

$$G_c(s) = \frac{12(s^2 + 11,38s + 42,67)}{s} \quad (12.45)$$

Seleciona-se um filtro prévio

$$G_p(s) = \frac{42,67}{(s^2 + 11,38s + 42,67)} \quad (12.46)$$

**TABELA 12.3 Resultados do Exemplo 12.9 com  $\omega_n = 8$** 

Condições do Processo a Controlar	$\tau = 1$ $K = 1$	$\tau = 0,5,$ $K = 1$	$\tau = 1,$ $K = 2$	$\tau = 0,5,$ $K = 2$
Ultrapassagem percentual	2%	0%	0%	1%
Tempo de assentamento (segundos)	1,25	0,8	0,8	0,9

para obter uma função transferência ITAE ótima

$$T(s) = \frac{512}{s^3 + 14s^2 + 137,6s + 512}. \quad (12.47)$$

Obtém-se, então, a resposta ao degrau para as quatro condições:  $\tau = 1, K = 1, \tau = 0,5, K = 1; \tau = 1, K = 2;$  e  $\tau = 0,5, K = 2.$  Os resultados estão resumidos na Tabela 12.3. Este é um sistema muito robusto. ■

O valor de  $\omega_n$  que pode ser escolhido será limitado considerando-se o máximo permitível  $u(t)$ , ou de  $u(t)$  é a saída do controlador, como mostrado na Fig. 12.16. Se o valor máximo de  $e(t)$  fosse 1, então,  $u(t)$  seria normalmente limitado a 100 ou menos. Como exemplo, considere-se o sistema da Fig. 12.16 com um controlador PID,  $G(s) = 1/s(s + 1)$ , e o filtro prévio necessário para alcançar o desempenho ITAE. Selecionando-se  $\omega_n = 10, 20$  e  $40$ , o valor máximo de  $u(t)$  será como mostrado na Tabela 12.4. Desejando-se limitar  $u(t)$  para um máximo de 100, há necessidade de limitar  $\omega_n$  a 16. Portanto, há um limite possível de ser obtido para o tempo de assentamento.

**TABELA 12.4 Valores Máximos na Entrada do Processo a Controlar**

$\omega_n$	10	20	40
$u(t)$ máximo para $R(s) = 1/s$	35	135	550
Tempo de assentamento (segundos)	0,9	0,5	0,3

Considere-se o projeto de um compensador PID usando técnicas de resposta de freqüência para um sistema com retardo de modo que

$$G(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{(\tau s + 1)}. \quad (12.48)$$

Este tipo de processo a controlar representa muitos processos industriais que incorporam um retardo. Utiliza-se um compensador PID para introduzir dois zeros tal que

$$G_c(s) = \frac{K_2(\tau_1 s + 1)^2}{s}. \quad (12.49)$$

O método de projeto é o seguinte:

1. Traçar os diagramas de Bode sem compensação para  $K_2 G(s)/s$  com um ganho  $K_2$  que satisfaça os requisitos de erro estacionário.
2. Posicionar os dois zeros iguais na freqüência de cruzamento,  $\omega_c$ , ou próximo dela.
3. Testar os resultados e ajustar  $K_2$  ou as localizações dos zeros, se necessário.

#### EXEMPLO 12.10

#### Controlador PID de um sistema com retardo

Considere-se o sistema da Fig. 12.16 quando

$$G(s) = \frac{Ke^{-0,1s}}{(0,1s + 1)}, \quad (12.50)$$

onde se seleciona  $K = 20$  para alcançar um erro de estado estacionário pequeno para uma entrada em degrau e onde  $G_p(s) = 1$ . Deseja-se uma ultrapassagem menor que 5% para uma entrada em degrau.

Traçando-se os diagramas de Bode para  $G(j\omega)$ , constata-se que o sistema sem compensação apresenta uma margem de fase negativa e que o sistema é instável.

Será usado um controlador PID com a forma da Eq. (12.49) para se obter uma margem de fase desejada de  $70^\circ$ . Então, a função de transferência de malha é

$$GG_c(s) = \frac{20e^{-0,1s}(\tau_1 s + 1)^2}{s(0,1s + 1)}, \quad (12.51)$$

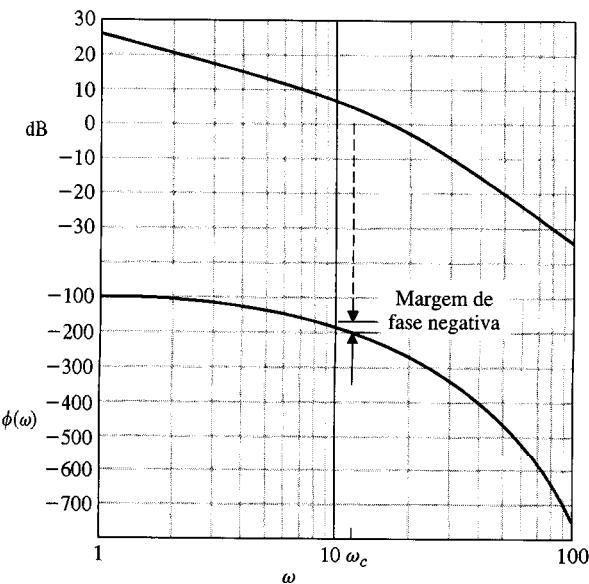


Fig. 12.18 Diagramas de Bode para  $G(s)/s$  para o Exemplo 12.10.

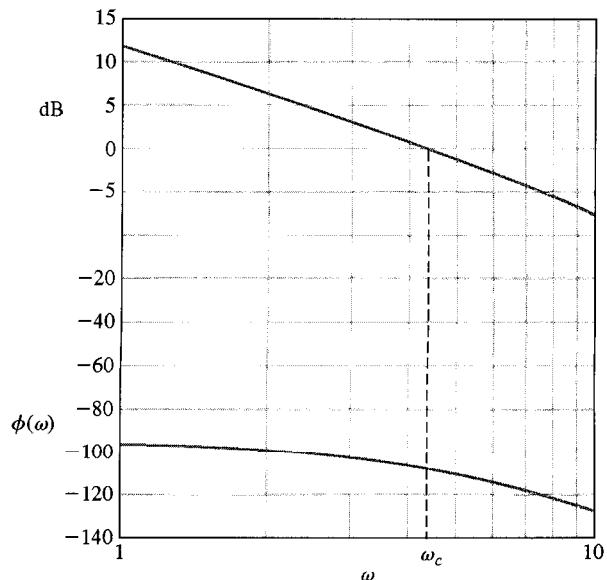


Fig. 12.19 Diagramas de Bode para  $G_cG(s)$  para o Exemplo 12.10.

onde  $K_2K = 20$ . Traçam-se os diagramas de Bode sem os dois zeros, como mostra a Fig. 12.18. A margem de fase é  $-32^\circ$  e o sistema é instável antes da introdução dos zeros.

Como foi introduzido um pólo na origem por causa do termo interno do compensador PID, pode-se reduzir o ganho  $K_2K = 20$  porque  $e_{ss}$  agora é zero. Posicionam-se os dois zeros sobre ou perto da freqüência de cruzamento,  $\omega_c = 11$ . Escolhe-se definir  $\tau_i = 0,06$  de modo que os dois zeros sejam postos em  $\omega = 16,7$ . Além disso, reduz-se o ganho para  $K_2K = 4,5$ . Obtém-se, então, a resposta de freqüência mostrada na Fig. 12.19, onde

$$G_cG(s) = \frac{4,5(0,06s + 1)^2e^{-0,1s}}{s(0,1s + 1)}. \quad (12.52)$$

A nova freqüência de cruzamento é  $\omega'_c = 4,5$  e a margem de fase é  $70^\circ$ . A resposta deste sistema a um degrau não apresenta ultrapassagem e tem um tempo de acomodação (critério dos 2%) de 0,80 segundo. Esta resposta satisfaz os requisitos. Contudo, se fosse o caso de ajustar mais o sistema, seria possível elevar o valor de  $K_2K$  para 10 e obter uma resposta um pouco mais rápida com uma ultrapassagem inferior a 5%. ■

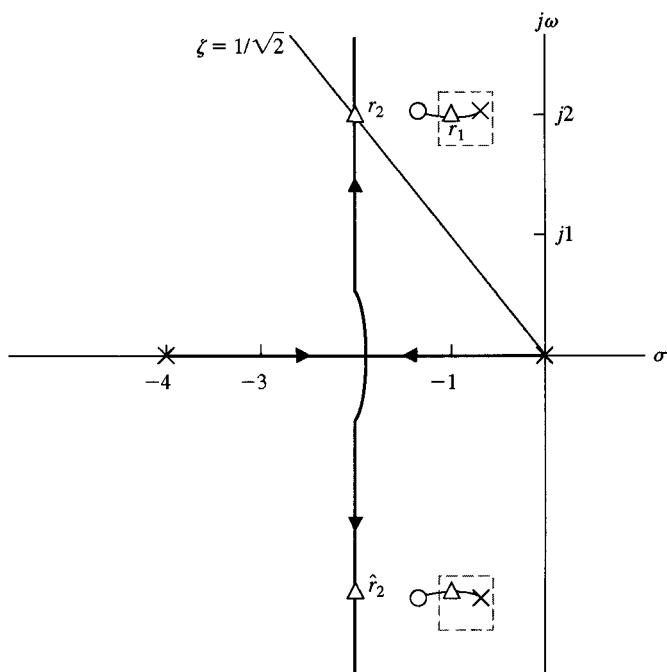
Como consideração final do projeto de sistemas de controle robustos usando controlador PID, retorna-se para um método do lugar das raízes no plano  $s$ . Esta abordagem de projeto pode ser enunciada da seguinte forma:

1. Posicionar os pólos e zeros de  $G(s)/s$  no plano  $s$ .
2. Selecionar uma localização dos zeros de  $G_c(s)$  que resultarão em um lugar das raízes aceitável e em raízes dominantes adequadas.
3. Testar a resposta transitória do sistema compensado e repetir o passo 2, se necessário.

O método de projeto do lugar das raízes está ilustrado no exemplo a seguir relativo ao projeto de um piloto automático de avião.

## 12.8 EXEMPLO DE PROJETO: PILOTO AUTOMÁTICO DE AVIÃO

Um sistema de controle típico para piloto automático de avião consiste em dispositivos elétricos, mecânicos e hidráulicos que movimentam os flaps, os profundores, os controladores de vazão de combustível e outros componentes que fazem com que o avião altere o seu vôo. Sensores fornecem informação sobre velocidade, rumo, velocidade angular e outros dados de vôo. Estas informações são combinadas com as características desejadas de vôo (comandos) e fornecidas eletronicamente ao piloto automático. O piloto automático deve ser capaz de fazer com que o avião voe seguindo um rumo e sob condições definidas pelo piloto. O comando consiste freqüentemente em um rumo predefinido. O projeto, quase sempre, é focalizado em um avião que se desloca para a frente, um pou-



**Fig. 12.20** Lugar das raízes para o piloto automático de avião. Os pólos complexos podem variar no interior dos retângulos com linha tracejada.

co para cima e um pouco para baixo, sem se mover para a direita ou para a esquerda e sem rolamento (rotação em torno do eixo longitudinal do avião). Um estudo deste tipo é chamado de projeto segundo o eixo de arfagem. O avião é representado como um processo definido por [26]

$$G(s) = \frac{K}{(s + 1/\tau)(s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2)}, \quad (12.53)$$

onde  $\tau$  é a constante de tempo do atuador. Seja  $\tau = 1/4$ ,  $\omega_1 = 2$  e  $\zeta = 1/2$ . Então o gráfico no plano  $s$  possui dois pólos complexos, um polo na origem e um polo em  $s = -4$ , como mostra a Fig. 12.20. Os pólos complexos, representando a dinâmica do avião, podem variar no interior da caixa com linhas tracejadas na figura. Escolhem-se, então, os zeros do controlador em  $s = -1,3 \pm j2$ , como mostrado. Seleciona-se o ganho  $K$  de modo que as raízes  $r_2$  e  $\hat{r}_2$  sejam complexas com um  $\zeta$  de  $1/\sqrt{2}$ . As outras raízes  $r_1$  e  $\hat{r}_1$  ficam situadas nas proximidades dos zeros. Portanto, a função de transferência a malha fechada é, aproximadamente,

$$T(s) \cong \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{5}{s^2 + 3,16s + 5}, \quad (12.54)$$

uma vez que  $\omega_n = \sqrt{5}$  e  $\zeta = 1/\sqrt{2}$ . A resposta resultante para uma entrada em degrau apresenta uma ultrapassagem de 4,5% e um tempo de assentamento (critério dos 2%) de 2,5 segundos, como esperado.

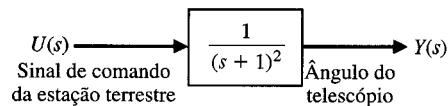
## 12.9 PROJETO DE UM SISTEMA DE CONTROLE PARA TELESCÓPIO ESPACIAL

Os cientistas propuseram a operação de um veículo espacial como laboratório de pesquisa e bancada de testes para equipamentos a serem usados em uma estação espacial tripulada. A plataforma industrial espacial<sup>1</sup> deve permanecer no espaço e os astronautas a utilizarão somente quando o veículo espacial estiver conectado a ela. Esta fábrica espacial será a primeira instalação espacial permanente, para fins comerciais, tripulada que está sendo projetada para pesquisa e desenvolvimento (P&D), testes e, finalmente, para produção no ambiente espacial [16, 21].

Será considerada uma experiência operada no espaço mas controlada da Terra. O objetivo é manipular e posicionar um pequeno telescópio para apontar de forma precisa para o planeta. O objetivo é ter um erro de estado estacionário nulo, mantendo uma resposta rápida para uma entrada em degrau, com uma ultrapassagem inferior a 5%. O atuador escolhido é um atuador de baixa potência, e o modelo do conjunto formado pelo atuador e pelo telescópio está mostrado na Fig. 12.21. O sinal de comando é recebido de uma estação terrestre com um retardo de  $\pi/16$  segundos. Um sensor irá me-

<sup>1</sup> Em inglês, Industrial Space Facility, designada pela sigla ISF. (N.T.)

**Fig. 12.21** Modelo de um atuador de baixa potência com telescópio.



dir com exatidão a direção de apontamento do telescópio. Contudo, está medida será remetida de volta à Terra com um retardo de  $\pi/16$  segundos. Assim, a função de transferência que inclui o telescópio, o atuador, o sensor e o retardo de ida e volta (Fig. 12.22) é

$$G(s) = \frac{e^{-s\pi/8}}{(s + 1)^2}. \quad (12.55)$$

Propõe-se um controlador de três termos descrito na Seção 12.6, onde

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3 s = \frac{K_1 s + K_2 + K_3 s^2}{s}. \quad (12.56)$$

Não será aceitável utilizar somente o termo proporcional, uma vez que é necessário ter erro de estado estacionário nulo para uma entrada em degrau. Assim, deve ser usado um valor finito de  $K_2$ , e a partir daí se pode escolher entre usar um controlador proporcional e integral (PI) ou um controlador proporcional, integral e derivativo (PID).

Será tentado primeiro um controle PI, de modo que

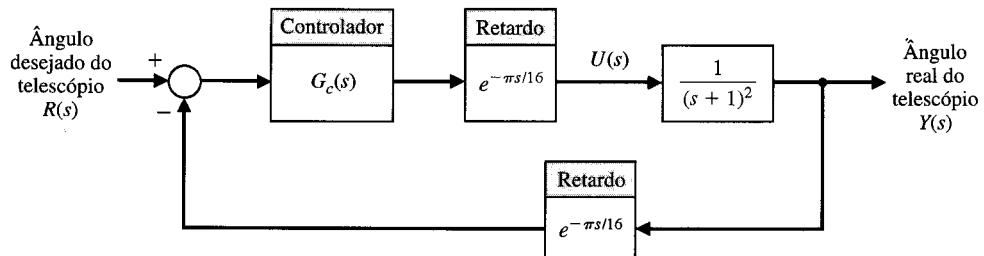
$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} = \frac{K_1 s + K_2}{s}. \quad (12.57)$$

Como há um retardo puro,  $e^{-sT}$ , utilizam-se os métodos de resposta de freqüência no procedimento de projeto. Assim, a especificação de ultrapassagem será convertida para o domínio de freqüência. Se houver duas raízes características dominantes, a ultrapassagem na resposta ao degrau é de 5% quando  $\zeta = 0,7$  ou o requisito de margem de fase for cerca de  $70^\circ$ .

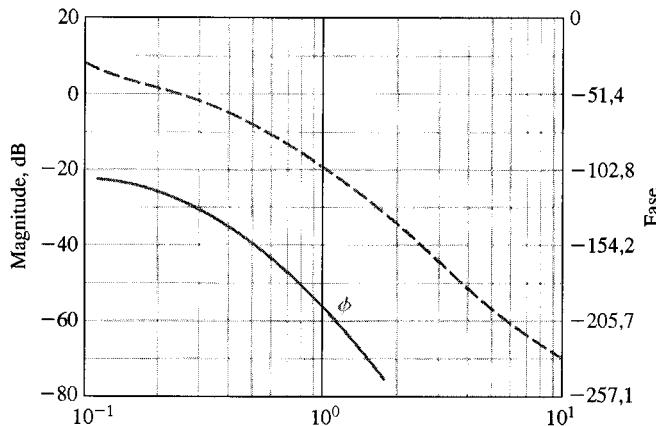
Escolhendo-se  $K_1 = 0,022$  e  $K_2 = 0,22$ , tem-se

$$G_c(s)G(s) = \frac{0,22(0,1s + 1)e^{-s\pi/8}}{s(s + 1)^2}, \quad (12.58)$$

e os diagramas de Bode estão mostrados na Fig. 12.23. A localização do zero em  $s = 10$  foi escolhida para adicionar um ângulo de avanço a fim de obter a margem de fase desejada.



**Fig. 12.22** Sistema de controle com retroação para o experimento com o telescópio.



**Fig. 12.23** Diagramas de Bode para o sistema com controlador PI.

**TABELA 12.5 Resposta ao Degrau do Telescópio Espacial para os Dois Controladores**

	Erro de Estado Estacionário	Ultrapassagem Percentual	Tempo de Assentamento (segundos)
Controlador PI	0	4,7	16,0
Controlador PID	0	3,7	5,8

Um procedimento interativo conduz a uma série de tentativas para os valores de  $K_1$  e  $K_2$  até que seja alcançada a margem de fase desejada. Observe-se que foi conseguida uma margem de fase de  $63^\circ$ . Foi traçada a curva da resposta real ao degrau e se constatou que a ultrapassagem é de 4,7% com um tempo de acomodação (critério dos 2%) de 16 segundos, como está registrado na Tabela 12.5.

O controlador proporcional, integral e derivativo é

$$G_c(s) = \frac{K_1 s + K_2 + K_3 s^2}{s}. \quad (12.59)$$

Têm-se agora três parâmetros para variar de modo a obter a margem de fase desejada. Escolhendo-se, depois de algumas interações,  $K_1 = 0,8$ ;  $K_2 = 0,5$  e  $K_3 = 10^{-3}$ , obtém-se uma margem de fase de  $64^\circ$ . A ultrapassagem percentual é de 3,7% e o tempo de assentamento (critério dos 2%) é de 5,8 segundos. Talvez a forma mais fácil de escolher as constantes de ganho seja atribuir, inicialmente, a  $K_3$  um valor numérico pequeno, porém não-nulo, e fazer  $K_1 = K_2 = 0$ , traçando em seguida a resposta de frequência. Escolhe-se, neste caso,  $K_3 = 10^{-3}$  e se obtém um gráfico de Bode. Usa-se então  $K_1 \approx K_2$  e se efetuam interações até serem obtidos valores adequados para estes ganhos não especificados.

O desempenho dos sistemas compensados com PI e com PID está registrado na Tabela 12.5. O controlador PID é o preferido, uma vez que fornece um tempo de assentamento menor.

## 12.10 PROJETO DE UM ACIONADOR DE BOBINADEIRA ROBUSTO

O fio de náilon é produzido através de um processo de extrusão que produz o filamento a uma velocidade constante. O produto é enrolado em uma bobina que gira a uma velocidade máxima de 2000 rpm. A tensão no filamento deve ser mantida entre 0,2 e 0,6 libra (entre 0,1 e 0,3 kgf, aproximadamente) para assegurar que não seja esgarçado. O diâmetro da bobina varia entre 2 e 4 polegadas (entre 50 e 100 mm, aproximadamente).

O filamento é espalhado ao longo do comprimento da bobina por meio de um braço oscilante acionado por um fuso com esferas recirculantes, como mostra a Fig. 12.24(a). O braço inverte rapidamente o sentido do movimento no fim de cada percurso ao longo da bobina. A velocidade necessária para o fuso é de 60 rpm. O requisito principal para o acionamento da bobina é o de permitir uma

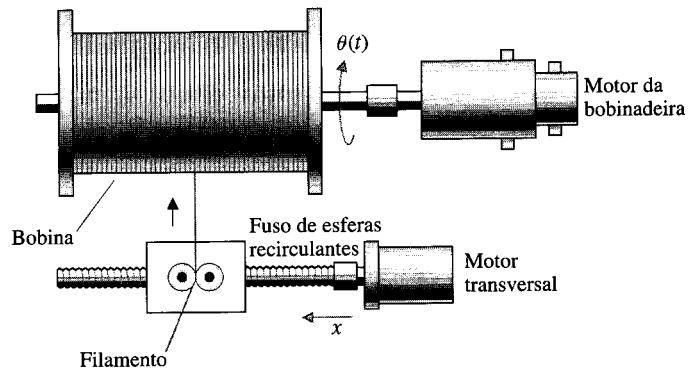
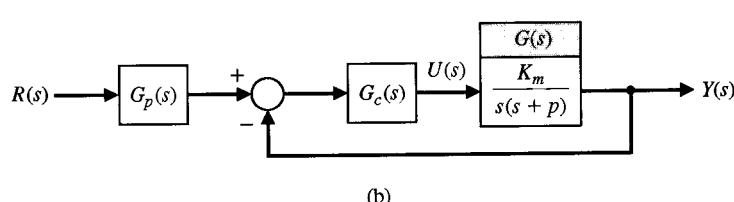


Fig. 12.24 Enroladora de bobina de fio.



tensão controlada. Como o diâmetro do fio enrolado varia segundo uma relação de 2 para 1, a tensão de tração do fio cai de 50% entre os valores inicial e final.

O sistema de controle terá uma estrutura como a que está mostrada na Fig. 12.24(b), para o qual se escolheu um controlador PID. As variações de parâmetro são  $1,5 \leq K_m \leq 2,5$  e  $3 \leq p \leq 5$  com as condições nominais  $K_m = 2$  e  $p = 4$ . Além disto, foi omitido, no modelo, um terceiro pólo em  $s = -50$ . Os requisitos são uma ultrapassagem inferior a 2,5% e um tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 0,4 segundo. A magnitude de  $u(t)$  deve ser menor que 100.

Usando um controlador PID, o projeto ITAE e os parâmetros nominais, determina-se a frequência  $\omega_n$  a partir do requisito de tempo de assentamento. Como se espera um valor de  $\zeta \approx 0,8$ , usa-se

$$T_s = \frac{4}{0,8\omega_n} < 0,4.$$

Seleciona-se  $\omega_n = 23$  como o valor máximo permitido para  $|u| < 100$ . Então, para

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3 s,$$

obtém-se  $K_1 = 568,68$ ;  $K_2 = 6083,5$  e  $K_3 = 18,13$ . Usando-se um filtro prévio apropriado, a resposta será como a registrada na Tabela 12.6. O sistema não oferece desempenho robusto, uma vez que o requisito de ultrapassagem não é satisfeito quando se considera o pior caso para os parâmetros.

Examina-se também o desempenho do sistema com os valores nominais dos parâmetros mas incluindo o pólo que não consta do modelo, de forma que o processo real a controlar é

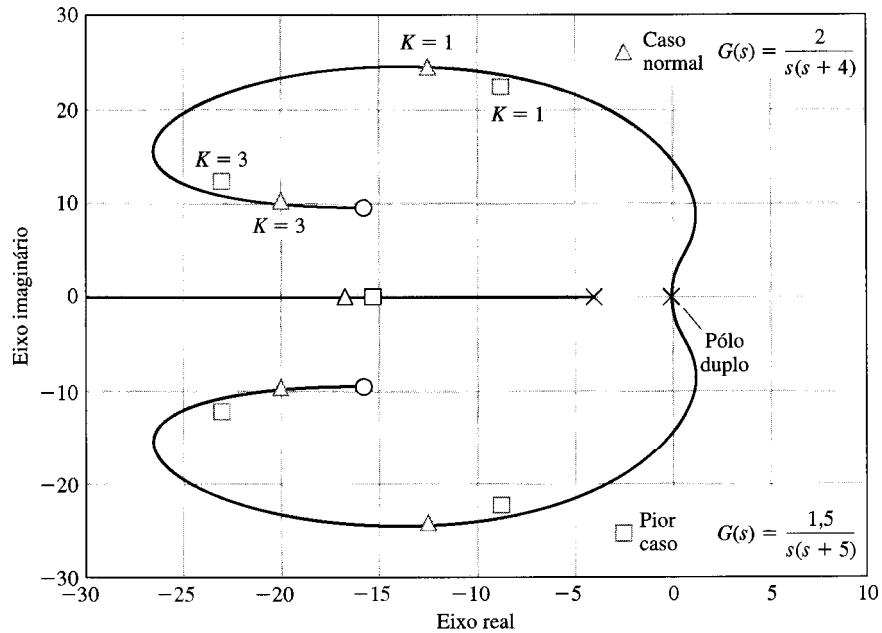
$$G(s) = \frac{2(50)}{s(s + 4)(s + 50)}. \quad (12.60)$$

(Observe-se que o ganho estático,  $\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$ , permanece igual a 0,5.) A resposta do controlador PID com o pólo incluído está registrada na Tabela 12.6. O sistema falha de novo no requisito de desempenho robusto.

**TABELA 12.6 Resposta do Sistema Acionador de Bobinadeira para uma Entrada em Degrau (projeto original)**

Parâmetros	Ultrapassagem Percentual	Tempo de Assentamento	$\left  \frac{u(t)}{r(t)} \right _{\text{máximo}}$
Parâmetros nominais	$K_m = 2$ , $p = 4$	1,96%	0,318
Parâmetros no pior caso	$K_m = 1,5$ , $p = 3$	7,48%	0,375
Parâmetros nominais e adição de um terceiro pólo em $s = -50$		9,82%	0,732
			90

Há necessidade de se ajustar o sistema de modo que o desempenho seja aceitável para o pior caso dos parâmetros. Para isto, examinar o lugar das raízes para os valores nominais dos parâmetros, mostrado na Fig. 12.25. Inserir um ganho  $K$  em cascata antes de  $G_c(s)$  de modo a obter  $KG_c(s)$ . Então, as raízes para  $K = 1$  e  $K = 3$  estão assinaladas no lugar. Como a resposta do pior caso ocorre quando a constante do motor  $K_m$  cai para 1,5, usa-se o ganho  $K = 3$  para deslocar as raízes para a esquerda no plano  $s$ . Assim, quando o ganho  $K_m$  cair para 1,5, as raízes ainda permanecerão na região desejada. A resposta do sistema com  $K = 3$  está registrada na Tabela 12.7 para as condições nominais e de pior caso e com o terceiro pólo incluído. Este sistema atende todas as especificações. Esta abordagem utiliza um ganho em cascata que, ao ser ajustado corretamente, levará as raízes dominantes para perto dos zeros complexos do controlador PID. Assim, quando ocorrer o pior caso da variação de parâmetros, o sistema ainda conservará o desempenho desejado.



**Fig. 12.25** Lugar das raízes para o caso normal e o pior caso com  $K = 1$  e  $K = 3$ .

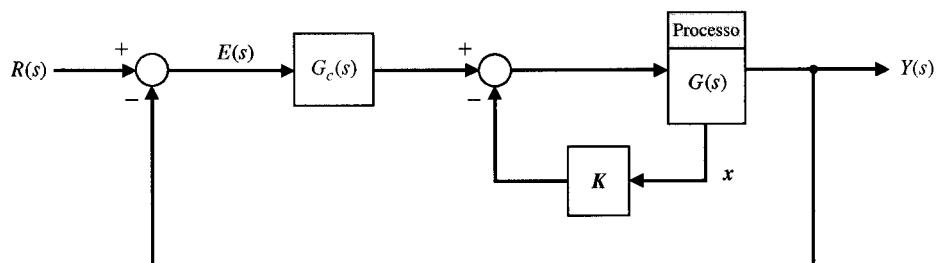
**TABELA 12.7 Resposta do Sistema Acionador de Bobinadeira para uma Entrada em Degrau com um Ganho Adicional em Cascata  $K = 3$**

	Ultrapassagem Percentual	Tempo de Assentamento
Parâmetros nominais	0,12%	0,218
Parâmetros no pior caso	0,47%	0,214
Parâmetros nominais e um terceiro pólo	0,50%	0,242

## 12.11 SISTEMA DE CONTROLE COM MODELO INTERNO ROBUSTO

O sistema de controle com modelo interno está mostrado na Fig. 12.26 e foi considerado anteriormente na Seção 11.8. Considera-se agora o uso do projeto com modelo interno com especial atenção para o desempenho de sistema robusto. O **princípio do modelo interno** estabelece que se  $G_c(s)G(s)$  contiver  $R(s)$ , então  $y(t)$  rastreará  $r(t)$  assintoticamente (em estado estacionário) e o rastreamento será robusto.

Examinando-se o sistema da Fig. 12.26, constata-se que para processos a controlar de ordem baixa não será necessária uma retroação de estado e se poderá obter uma  $G_c(s)$  adequada. Contudo, com sistemas de ordem mais elevada, pode ser necessária a retroação de todas as variáveis de estado.



**Fig. 12.26** Sistema de controle com modelo interno.

Considere-se o sistema simples com  $G(s) = 1/s$ , para o qual se busca uma resposta para uma entrada em rampa com erro estacionário nulo. Um controlador PI é suficiente, e se pode fazer  $K = 0$  (nenhuma retroação de estado). Tem-se, então,

$$G_c G(s) = \left( K_1 + \frac{K_2}{s} \right) \frac{1}{s} = \frac{(K_1 s + K_2)}{s^2}. \quad (12.61)$$

Observe-se que para uma rampa,  $R(s) = 1/s^2$ , que está contida como um fator da Eq. (12.61), e a função de transferência a malha fechada é

$$T(s) = \frac{(K_1 s + K_2)}{s^2 + K_1 s + K_2}. \quad (12.62)$$

Usando-se as especificações ITAE para uma resposta a rampa (Tabela 5.7), é necessário que

$$T(s) = \frac{3,2\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 3,2\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (12.63)$$

Seleciona-se  $\omega_n$  para satisfazer uma especificação de tempo de assentamento. Para um tempo de assentamento (critério dos 2%) de 1 segundo, escolhe-se  $\omega_n = 5$ . É necessário, então, que se tenha  $K_1 = 16$  e  $K_2 = 25$ . A resposta deste sistema se assenta em 1 segundo e, em seguida, acompanha a rampa com erro estacionário nulo. Se este sistema (projeto para uma entrada em rampa) receber uma entrada em degrau, a resposta apresentará uma ultrapassagem de 5% e um tempo de acomodação de 1,5 segundo. Este sistema é muito robusto com respeito a variações internas do processo a controlar. Por exemplo, se  $G(s) = K/s$  alterar o valor do ganho  $K$  de  $K = 1$  para  $\pm 50\%$ , a alteração na resposta à rampa será insignificante.

#### EXEMPLO 12.11

#### Projeto de um sistema de controle com modelo interno

Considere-se o sistema da Fig. 12.27 com retroação de estado e um compensador  $G_c(s)$ . Deseja-se que o sistema rastreie uma entrada em degrau com erro de estado estacionário nulo. Escolheu-se aqui um controlador PID como  $G_c(s)$ . Tem-se, então,

$$G_c(s) = \frac{K_3 s^2 + K_1 s + K_2}{s},$$

$G_c(s)G(s)$  conterá  $R(s) = 1/s$ , o comando de entrada. Observe-se que há retroação das duas variáveis de estado e estes dois sinais são adicionados depois de  $G_c(s)$  a fim de reter o integrador em  $G_c(s)$ .

O objetivo é obter um tempo de assentamento no interior da faixa de 2% em torno do valor final inferior a 1 segundo e uma resposta *deadbeat* (ver Seção 10.11) conservando uma resposta robusta. Admite-se aqui que os dois pólos de  $G(s)$  possam variar  $\pm 50\%$ . Assim, a condição de pior caso é

$$\hat{G}(s) = \frac{1}{(s + 0,5)(s + 1)}.$$

Uma das abordagens consiste em projetar o controle para esta condição de pior caso. Uma outra abordagem, que será utilizada aqui, consiste em projetar para o valor nominal de  $G(s)$  e metade do tempo de assentamento. Espera-se, então, alcançar o requisito de tempo de assentamento e obter um sistema rápido e altamente robusto. Observe-se que é usado o filtro prévio  $G_p(s)$  para se obter a forma desejada de  $T(s)$ .

A resposta desejada é do tipo *deadbeat* (ver Tabela 10.2), e assim se utilizará uma função de terceira ordem como

$$T(s) = \frac{\omega_n^3}{s^3 + 1,9\omega_n s^2 + 2,20\omega_n^2 s + \omega_n^3}, \quad (12.64)$$

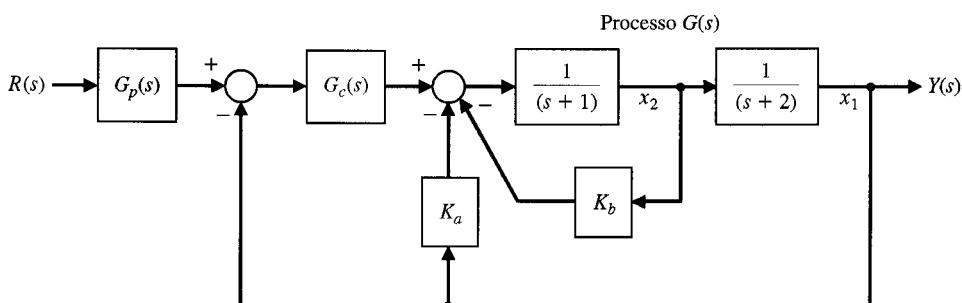


Fig. 12.27 Controle com modelo interno com retroação de estado e  $G_c(s)$ .

e o tempo de assentamento (critério dos 2%) é  $T_s = 4,04/\omega_n$ . Para um tempo de assentamento de 1/2 segundo, utiliza-se  $\omega_n = 8,08$ .

A função de transferência a malha fechada do sistema da Fig. 12.27 com o  $G_p(s)$  apropriado é

$$T(s) = \frac{K_2}{s^3 + (3 + K_3 + K_b)s^2 + (2 + K_1 + K_a + 2K_b)s + K_2}. \quad (12.65)$$

Fazem-se  $K_a = 10$ ,  $K_b = 2$ ,  $K_1 = 127,6$ ;  $K_2 = 527,5$  e  $K_3 = 10,35$ . Observe-se que é possível obter  $T(s)$  com outros valores de ganho, inclusive  $K_b = 0$ .

A resposta deste sistema ao degrau é uma resposta *deadbeat* com uma ultrapassagem de 1,65% e um tempo de assentamento de 0,5 segundo. Quando os pólos do processo a controlar  $G(s)$  variam de  $\pm 50\%$ , a ultrapassagem muda para 1,86% e o tempo de assentamento se torna 0,95 segundo. Este é um projeto excelente de um sistema muito robusto com resposta *deadbeat*. ■

## 12.12 PROJETO DE UM TORNO ULTRAPRECISO COM DIAMANTE

Foi estudado no Lawrence Livermore National Laboratory o projeto de uma máquina de tornear com diamante ultraprecisa. Esta máquina usa dispositivos ópticos como espelhos de ultra-alta precisão usando uma ferramenta de diamante como dispositivo de corte. Nesta discussão será considerado apenas o controle do eixo  $z$ . Utilizando identificação por meio de resposta de frequência com entrada senoidal no atuador, determinou-se

$$G(s) = \frac{4500}{(s + 60)}. \quad (12.66)$$

O sistema pode acomodar ganhos elevados, como 4500, uma vez que o comando de entrada,  $r(t)$ , é uma série de comandos em degrau de amplitude muito pequena (fração de micrôn). O sistema possui uma malha externa para retroação de posição usando um interferômetro a laser com exatidão de 0,1 micrôn ( $10^{-7}$  m). Também é utilizada uma malha interna com retroação de velocidade, como mostra a Fig. 12.28.

Deseja-se selecionar os controladores,  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$ , para obter um sistema superamortecido, altamente robusto e com uma banda passante elevada. O sistema robusto deve acomodar alterações em  $G(s)$ , devidas a requisitos de variação de carga, de materiais e de corte. Buscam-se, assim, valores elevados de margem de fase e de margem de ganho para as malhas interna e externa e uma baixa sensibilidade à posição das raízes no plano complexo. As especificações estão resumidas na Tabela 12.8.

Como se deseja erro estacionário nulo para a malha de velocidade, será usado um controlador da malha de velocidade  $G_2(s) = G_3(s)G_4(s)$ , onde  $G_3(s)$  é um controlador PI e  $G_4(s)$  é um controlador por avanço de fase. Utiliza-se

$$G_2(s) = G_3(s)G_4(s) = \frac{(1 + K_3 s)}{K_3 s} \cdot \frac{(1 + K_4 s)}{\alpha \left(1 + \frac{K_4}{\alpha} s\right)} \cdot K_2$$

e se escolhem os valores  $K_3 = 0,00532$ ;  $K_4 = 0,00272$  e  $\alpha = 2,95$ . Tem-se, agora,

$$G_2(s) = K_2 \frac{(s + 188)}{s} \cdot \frac{(s + 368)}{(s + 1085)}.$$

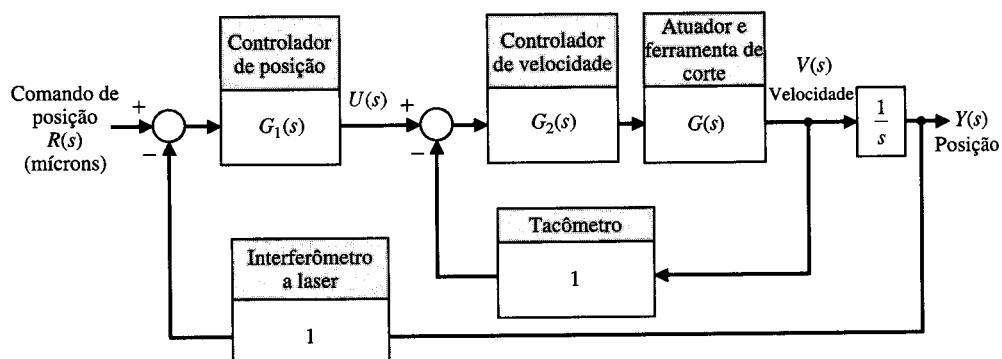


Fig. 12.28 Sistema de controle para máquina de tornear.

**TABELA 12.8 Especificações para o Sistema de Controle da Máquina de Tornear**

<b>Especificação</b>	<b>Função de Transferência</b>	
	<b>Velocidade <math>V(s)/U(s)</math></b>	<b>Posição <math>Y(s)/R(s)</math></b>
Banda passante mínima	950 rad/s	95 rad/s
Erro de estado estacionário ao degrau	0	0
Relação de amortecimento mínimo $\zeta$	0,8	0,9
Máxima sensibilidade de raiz $ S_K^r $	1,0	1,5
Margem de fase mínima	90°	75°
Margem de ganho mínima	40 dB	60 dB

O lugar das raízes para  $G_2(s)G(s)$  está mostrado na Fig. 12.29. Quando  $K_2 = 2$ , tem-se para a função de transferência a malha fechada da velocidade

$$T_2(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{9000(s + 188)(s + 368)}{(s + 205)(s + 305)(s + 10^4)} \approx \frac{10^4}{(s + 10^4)}, \quad (12.67)$$

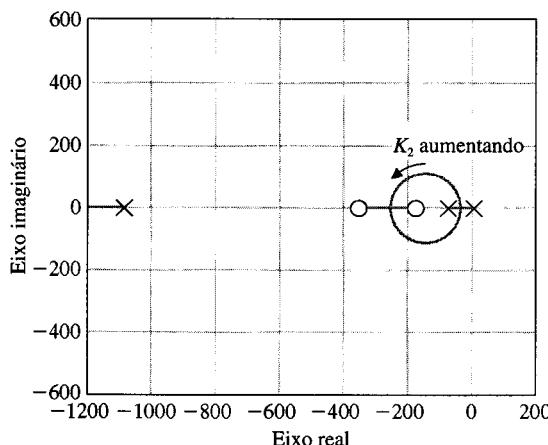
que é um sistema de banda passante elevada. A banda passante real e a sensibilidade à posição das raízes estão resumidas na Tabela 12.9. Observe-se que as especificações para a função de transferência de velocidade foram superadas de muito.

Será usada uma estrutura de avanço de fase para a malha de posição como

$$G_1(s) = K_1 \frac{(1 + K_5 s)}{\alpha \left( 1 + \frac{K_5}{\alpha} s \right)},$$

e se escolhem  $\alpha = 2,0$  e  $K_5 = 0,0185$  de modo que

$$G_1(s) = \frac{K_1(s + 54)}{(s + 108)}.$$



**Fig. 12.29** Lugar das raízes para a malha de velocidade à medida que  $K_2$  varia.

**TABELA 12.9 Resultados de Projeto para o Sistema de Controle do Torno**

Resultado Obtido	Função de Transferência de Velocidade	Função de Transferência de Posição $Y(s)/R(s)$
Banda passante a malha fechada	4000 rad/s	1000 rad/s
Erro de estado estacionário	0	0
Relação de amortecimento, $\zeta$	1,0	1,0
Sensibilidade a raiz, $ S_K $	0,92	1,2
Margem de fase	93°	85°
Margem de ganho	Infinito	76 dB

Traça-se, então, o lugar das raízes para

$$G_1(s) \cdot T_2(s) \cdot \frac{1}{s}.$$

Se for usada a aproximação de  $T_2(s)$  dada pela Eq. (12.73), tem-se o lugar das raízes da Fig. 12.30(a). Usando-se a  $T_2(s)$  real, obtém-se a vista ampliada do lugar das raízes mostrada na Fig. 12.30(b). Seleciona-se  $K_2 = 1000$  e se obtêm os resultados reais para a função de transferência global do sistema como estão registrados na Tabela 12.9. O sistema total possui uma margem de fase elevada, uma baixa sensibilidade e é superamortecido com uma grande banda passante. O sistema é muito robusto.

## 12.13 SISTEMA COM RETROAÇÃO PSEUDOQUANTITATIVA

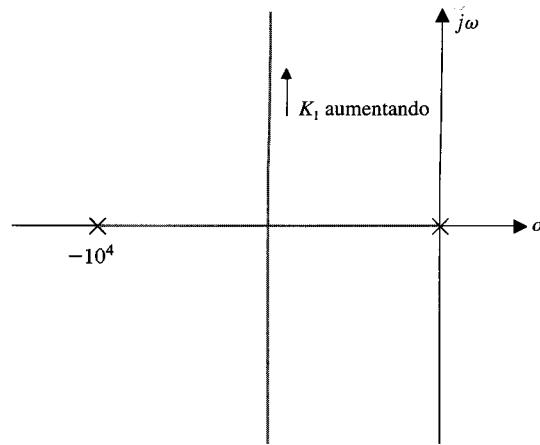
A teoria da retroação quantitativa (QFT)<sup>2</sup> usa um controlador, como mostra a Fig. 12.31, para conseguir desempenho robusto. O objetivo é conseguir uma grande banda passante para a função de transferência a malha fechada, com um valor elevado para o ganho de malha  $K$ . Métodos de projeto QFT típicos utilizam métodos numéricos e gráficos em conjunto com a carta de Nichols. Geralmente o projeto QFT busca ganhos de malha elevados com margem de fase elevada de modo que se obtenha um desempenho robusto [27-29, 32].

Nesta seção será seguido um método simples de alcançar os objetivos da QFT através de uma abordagem do lugar das raízes no plano  $s$  para escolher o ganho  $K$  e o compensador  $G_c(s)$ . Esta abordagem, designada pseudo-QFT, segue os seguintes passos:

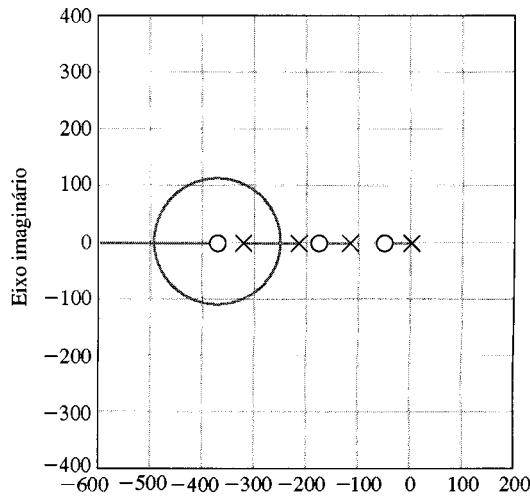
1. Posicionar os  $n$  pólos e  $m$  zeros de  $G(s)$  no plano  $s$  para o sistema de  $n$ -ésima ordem  $G(s)$ . Acrescentar também os pólos de  $G_c(s)$ .
2. Começando perto da origem, posicionar os zeros de  $G_c(s)$  imediatamente à esquerda de cada um dos  $(n - 1)$  pólos no semiplano  $s$  da esquerda. Isto deixa um polo bem à esquerda no semiplano  $s$  da esquerda.
3. Aumentar o ganho  $K$  de modo que as raízes da equação característica (pólos da função de transferência a malha fechada) fiquem próximas dos zeros de  $G_cG(s)$ .

Este método introduz zeros de modo que todos os ramos do lugar das raízes, exceto um, terminem em zeros finitos. Se o ganho  $K$  for suficientemente grande, então os pólos de  $T(s)$  serão aproximadamente iguais aos zeros de  $G_cG(s)$ . Isto deixa um polo de  $T(s)$  com um resíduo importante no desenvolvimento em frações parciais e o sistema com uma margem de fase de aproximadamente 90° (na realidade em torno de 85°).

<sup>2</sup> QFT = Quantitative Feedback Theory. (N.T.)



(a)



(b)

**Fig. 12.30** Lugar das raízes para  $K_1 > 0$ : (a) vista geral e (b) vista ampliada das proximidades da origem do plano  $s$ .

#### EXEMPLO 12.12

#### Projeto usando o método pseudo-QFT

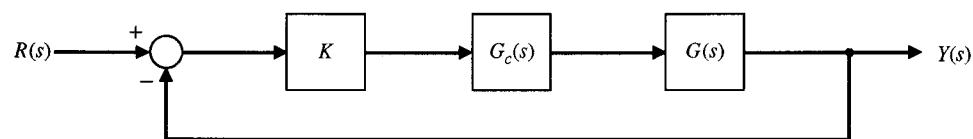
Considere-se o sistema da Fig. 12.31 com

$$G(s) = \frac{1}{(s + p_1)(s + p_2)},$$

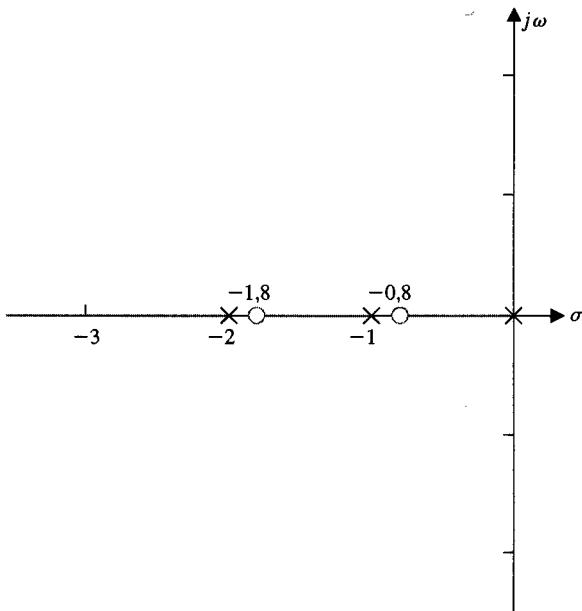
onde os valores nominais são  $p_1 = 1$  e  $p_2 = 2$ , com uma variação de  $\pm 50\%$ . O pior caso é com  $p_1 = 0,5$  e  $p_2 = 1$ . Deseja-se projetar o sistema com erro estacionário nulo para uma entrada em degrau. Assim, será usado o controlador PID

$$G_c(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s}$$

Considerou-se, então, o princípio do modelo interno, com  $R(s) = 1/s$  incorporado em  $G_c G(s)$ . Usando o passo 1, posicionam-se os pólos de  $G_c G(s)$  no plano  $s$ , como mostra a Fig. 12.32. Há três pólos, em  $s = 0, -1$  e  $-2$ , como mostrado. O passo 2 pede que se coloque um zero à esquerda do polo na origem e um zero à esquerda do polo em  $-1$ , como mostra a Fig. 12.32.



**Fig. 12.31** Sistema com retroação.



**Fig. 12.32** Lugar das raízes para  $KG_c G(s)$ .

O compensador é, assim,

$$G_c(s) = \frac{(s + 0,8)(s + 1,8)}{s}. \quad (12.68)$$

Escolhe-se  $K = 100$ , de modo que as raízes da equação característica fiquem próximas dos zeros. A função de transferência a malha fechada é

$$T(s) = \frac{100(s + 0,80)(s + 1,80)}{(s + 0,798)(s + 1,797)(s + 100,4)} \approx \frac{100}{(s + 100)}. \quad (12.69)$$

Este sistema a malha fechada fornece uma resposta rápida e uma margem de fase de aproximadamente 85°. O desempenho está resumido na Tabela 12.10.

Ao se efetuarem as condições de pior caso ( $p_1 = 0,5$  e  $p_2 = 1$ ), o desempenho permanece essencialmente inalterado, como mostra a Tabela 12.10. O projeto com pseudo-QFT resulta em sistemas muito robustos. ■

**TABELA 12.10 Desempenho do Projeto Pseudo-QFT**

	Ultrapassagem Percentual	Tempo de Assentamento
$G(s)$ nominal	0,01%	40 ms
$G(s)$ de pior caso	0,97%	40 ms

## 12.14 SISTEMAS DE CONTROLE ROBUSTOS USANDO MATLAB

Nesta seção serão investigados sistemas de controle robustos usando o MATLAB. Em particular será considerado o controlador PID comumente usado em sistemas de controle com retroação mostrados na Fig. 12.1. Observe-se que o sistema possui um **filtro prévio**  $G_p(s)$ . A contribuição do filtro para o desempenho ótimo foi discutida na Seção 10.10.

O controlador PID tem a forma

$$G_c(s) = \frac{K_3 s^2 + K_1 s + K_2}{s}$$

Observe-se que o controlador PID não é uma função racional (isto é, o grau do polinômio em numerador é maior do que o grau do polinômio em denominador). O leitor terá dificuldade para entrar no MATLAB com o PID na forma padrão de numerador e denominador. O problema poderá ser resolvido utilizando-se a função conv em vez da função series nas manipulações.

O objetivo é escolher os parâmetros  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$  para alcançar as especificações de desempenho e apresentar propriedades desejadas de robustez. Infelizmente, não é imediatamente óbvio como escolher os parâmetros no controlador PID no sentido de se obter determinadas características de robustez. Um exemplo ilustrativo mostrará como é possível escolher os parâmetros de forma interativa e verificar a robustez por meio de simulação. O uso do MATLAB auxilia neste processo, uma vez que todo o projeto e toda a simulação podem ser mecanizados utilizando-se scripts e podem ser facilmente executados repetidamente.

### EXEMPLO 12.13

#### Controle de temperatura robusto

Considere-se o sistema de controle com retroação na Fig. 12.1, onde

$$G(s) = \frac{1}{(s + c_0)^2},$$

o valor nominal é  $c_0 = 1$  e  $G_p(s) = 1$ . Será projetado um compensador baseado em  $c_0 = 1$  e verificada a robustez por meio de simulação. As especificações de projeto são as seguintes:

1. tempo de assentamento (critério dos 2%)  $T_s \leq 0,5$  segundo, e
2. desempenho ITAE ótimo para uma entrada em degrau.

Neste projeto não será utilizado o filtro prévio para se atender as especificações, mas, em vez disso, será mostrado que o desempenho aceitável (isto é, pequena ultrapassagem) pode ser obtido aumentando-se um ganho em cascata.

A função de transferência a malha fechada é

$$T(s) = \frac{K_3 s^2 + K_1 s + K_2}{s^3 + (2 + K_3)s^2 + (1 + K_1)s + K_2}. \quad (12.70)$$

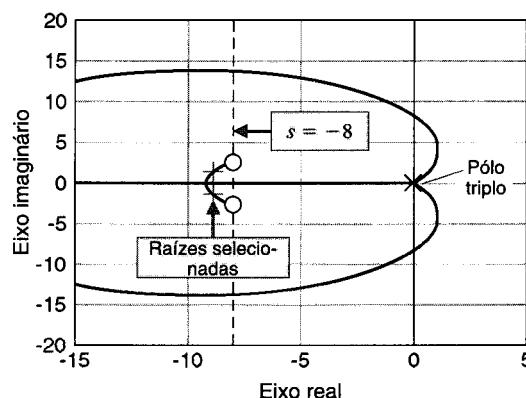
A equação do lugar das raízes associada é

$$1 + \hat{K} \left( \frac{s^2 + as + b}{s^3} \right) = 0,$$

onde

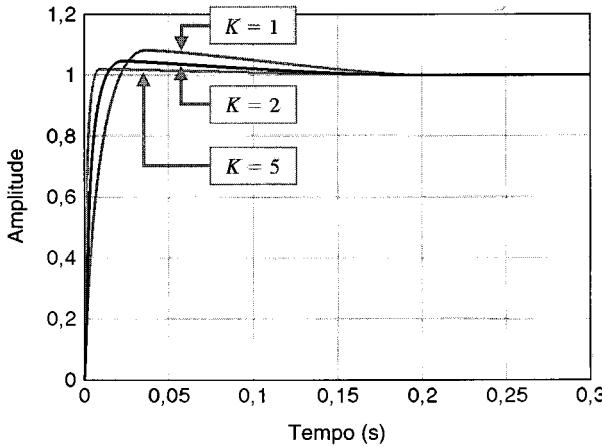
$$\hat{K} = K_3 + 2, \quad a = \frac{1 + K_1}{2 + K_3}, \quad b = \frac{K_2}{2 + K_3}.$$

O requisito de tempo de assentamento  $T_s < 0,5$  leva à escolha das raízes de  $(s^2 + as + b)$  à esquerda da reta  $s = -\zeta\omega_n = -8$ , no plano  $s$ , como mostra a Fig. 12.33, para assegurar que o lugar das raízes se desenvolve no interior da região requerida do plano  $s$ . Escolheu-se  $a = 16$  e  $b = 70$  para garantir

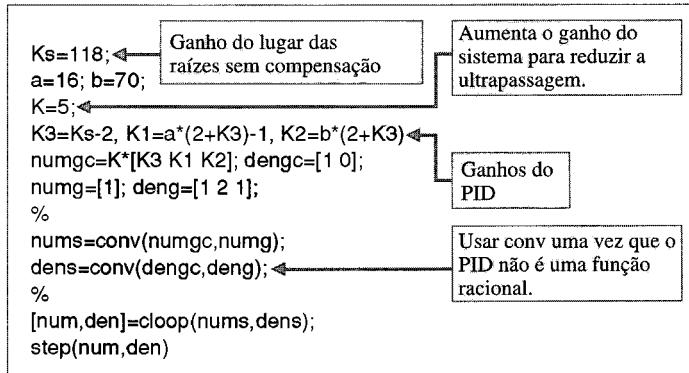


**Fig. 12.33** Lugar das raízes para o controlador de temperatura compensado com um PID à medida que  $\hat{K}$  varia.

```
>>a=16; b=70; num=[1 a b]; den=[1 0 0 0]; rlocus(num,den)
>>rlocfind(num,den)
```



**Fig. 12.34** Resposta ao degrau do controlador PID de temperatura.



que o lugar das raízes se desenvolve depois da reta  $s = -8$ . Seleciona-se um ponto do lugar das raízes situado no interior da região de desempenho e, usando a função `rlocfind`, determina-se o ganho  $K$  associado e o valor de  $\omega_n$  associado. Para o ponto escolhido tem-se

$$\hat{K} = 118.$$

Com os valores de  $\hat{K}$ ,  $a$  e  $b$  podem ser determinados os coeficientes do PID, como a seguir:

$$K_3 = \hat{K} - 2 = 116,$$

$$K_1 = a(2 + K_3) - 1 = 1187,$$

$$K_2 = b(2 + K_3) = 8260.$$

Para atender os requisitos de desempenho relativos à ultrapassagem para uma entrada em degrau, utiliza-se um ganho  $K$  em cascata que será escolhido através de métodos interativos usando a função `step`, como ilustrado na Fig. 12.34. A resposta ao degrau correspondente a  $K = 5$  apresenta uma ultrapassagem aceitável de 2%. Com o acréscimo do ganho  $K = 5$ , o controlador PID final é

$$G_c(s) = K \frac{(K_3 s^2 + K_1 s + K_2)}{s} = 5 \frac{(116s^2 + 1187s + 8260)}{s}. \quad (12.71)$$

Não se usou um filtro prévio, como no Exemplo 12.8. Em vez disto, aumentou-se o ganho  $K$  em cascata no sentido de obter uma resposta transitória satisfatória. Considere-se agora a questão da robustez a variações no parâmetro  $c_0$  do processo a controlar.

A investigação sobre a robustez do projeto consiste na análise da resposta ao degrau usando o controlador PID dado na Eq. (12.71) para uma faixa de variação do parâmetro de  $0,1 \leq c_0 \leq 10$ . Os resultados estão apresentados na Fig. 12.35. O script foi escrito para calcular a resposta ao degrau para um dado valor de  $c_0$ . Seria uma boa idéia colocar a entrada do valor de  $c_0$  no nível do prompt de comandos para tornar o script mais interativo.

Os resultados de simulação indicam que o projeto do PID é robusto com relação a variações em  $c_0$ . As diferenças entre as respostas ao degrau para  $0,1 \leq c_0 \leq 10$  mal podem ser percebidas no gráfico. Se os resultados fossem outros, seria possível interagir no projeto até que fosse obtido um de-

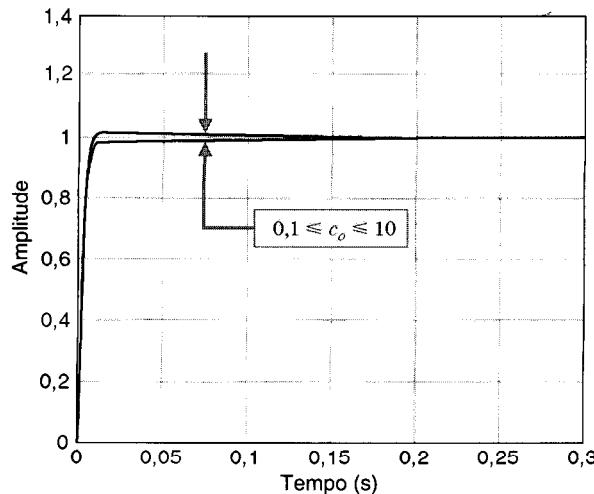


Fig. 12.35 Análise do controlador PID robusto com variação de  $c_o$ .

```

c0=10 ← Especificar o parâmetro
          no processo.
numg=[1]; deng=[1 2*c0 c0^2];
numgc=5*[116 1887 8260]; dengc=[1 0];
%
numa=conv(numg,numgc); dena=conv(deng,dengc);
%
[num,den]=cloop(numa,dena);
%
step(num,den)

```

desempenho aceitável. A capacidade interativa do MATLAB permite verificar a robustez por meio de simulação. ■

## 12.15 EXEMPLO DE PROJETO SEQÜENCIAL: SISTEMA DE LEITURA DE ACIONADOR DE DISCO



Neste capítulo será projetado um controlador PID para atender a resposta desejada do sistema. Muitos dos sistemas de controle da cabeça de acionadores de disco reais utilizam um controlador PID e um sinal de comando  $r(t)$ . Este sinal adota um perfil de velocidade ideal com a máxima velocidade possível até que a cabeça chegue perto da trilha desejada. Quando isto ocorre,  $r(t)$  é comutado para uma entrada do tipo degrau. Assim, deseja-se um erro estacionário para um sinal em rampa (velocidade) e para um sinal em degrau. Examinando-se o sistema mostrado na Fig. 12.36 constata-se que o percurso direto à frente possui dois integradores puros e se espera um erro de estado estacionário nulo para uma entrada em velocidade  $r(t) = At$ ,  $t > 0$ .

O controlador PID é

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3 s = \frac{K_3(s + z_1)(s + \hat{z}_1)}{s}.$$

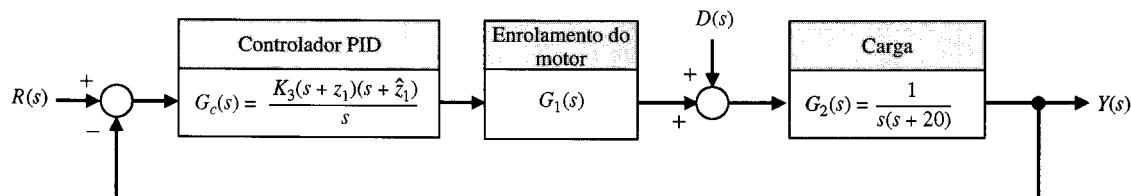


Fig. 12.36 Sistema com retroação para acionador de disco com um controlador PID.

A função de transferência do circuito de campo do motor é

$$G_1(s) = \frac{5000}{(s + 1000)} \approx 5$$

O modelo de segunda ordem usa  $G_1(s) = 5$ , e o projeto é determinado para este modelo.

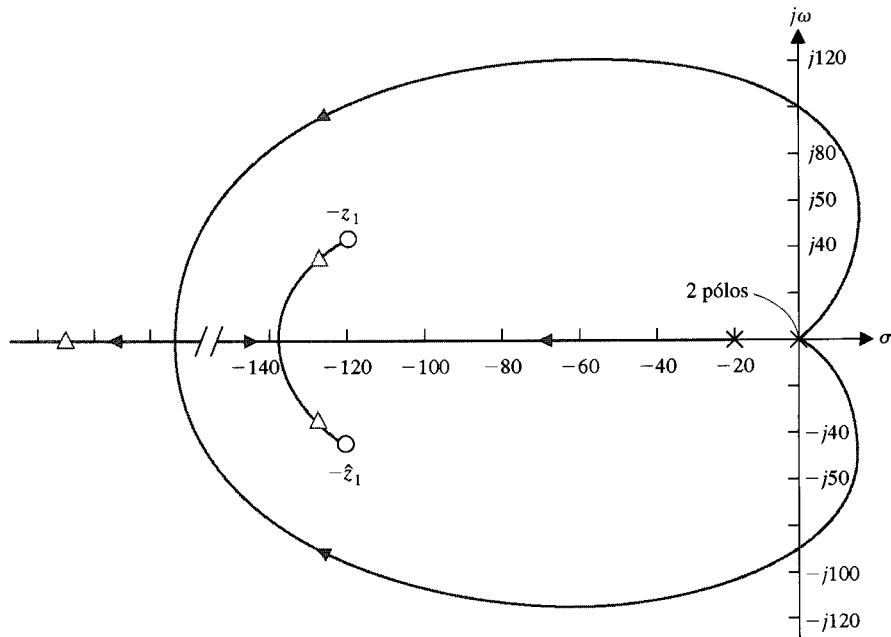
Utiliza-se o modelo de segunda ordem e o controlador PID na técnica de projeto no plano  $s$  ilustrada na Seção 12.6. Os pólos e zeros do sistema no plano  $s$  estão mostrados na Fig. 12.37 para o modelo de segunda ordem e  $G_1(s) = 5$ . Tem-se então

$$G_c G_1 G_2(s) = \frac{5K_3(s + z_1)(s + \hat{z}_1)}{s^2(s + 20)}.$$

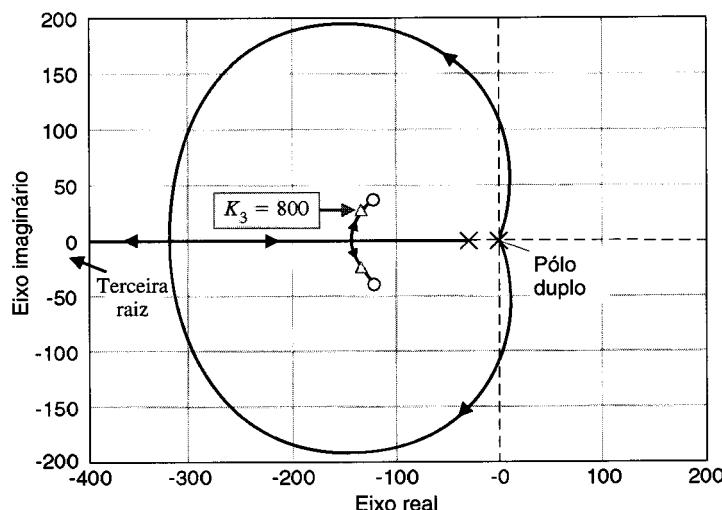
Seleciona-se  $z_1 = -120 + j40$  e se determina  $5K_3$  de modo que as raízes fiquem situadas à esquerda da reta  $s = -100$ . Se estes requisitos forem atendidos, então

$$T_s < \frac{4}{100},$$

e a ultrapassagem para uma entrada em degrau é (idealmente) inferior a 2%, uma vez que o zeta das raízes complexas é aproximadamente igual a 0,8. Naturalmente, este esboço é apenas um primeiro passo. Como segundo passo usa-se o MATLAB de forma interativa para determinar  $K_3$ . Obtém-se, então, o verdadeiro lugar das raízes, como mostra a Fig. 12.38 com  $K_3 = 800$ . A resposta do sistema está registrada na Tabela 12.11. O sistema atende todas as especificações.



**Fig. 12.37** Um esboço de um lugar das raízes à medida que  $K_3$  aumenta para o posicionamento estimado de raízes referentes a uma resposta desejada para o sistema.



**Fig. 12.38** Lugar das raízes real para o modelo de segunda ordem.

**TABELA 12.11 Especificações do Sistema de Controle do Acionador de Disco e Desempenho Real**

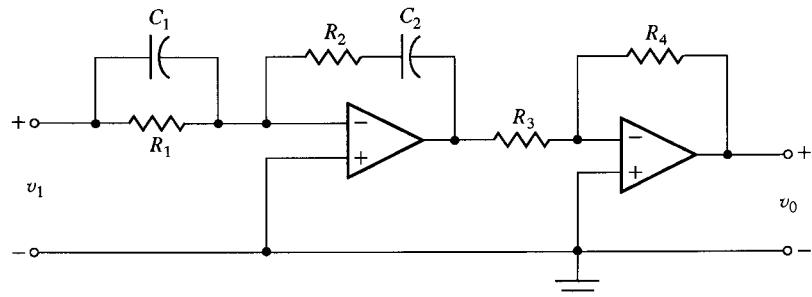
Medida de Desempenho	Valor Desejado	Resposta para o Modelo de Segunda Ordem
Ultrapassagem percentual	<5%	4,5%
Tempo de assentamento para uma entrada em degrau	<50 ms	6 ms
Valor máximo da resposta para uma perturbação em degrau unitário	$<5 \times 10^{-3}$	$7,7 \times 10^{-7}$

## 12.16 SUMÁRIO

O projeto de sistemas de controle de elevada precisão em presença de incertezas importantes sobre o processo a controlar requer que o projetista procure um sistema de controle robusto. Os sistemas de controle robustos apresentam baixa sensibilidade à mudança nos valores de parâmetros e são estáveis para uma vasta gama de variação de parâmetros.

O controlador de três modos, ou PID, foi considerado como um compensador para auxiliar no projeto de sistemas de controle robustos. O resultado do projeto de um controlador PID é a seleção do ganho e dos dois zeros da função de transferência do controlador. Foram utilizados três métodos de projeto na escolha do controlador: o método do lugar das raízes, o método da resposta de freqüência e o método do índice de desempenho ITAE. A Fig. 12.39 mostra um circuito com amplificadores operacionais usado como controlador PID.

$$G_c(s) = \frac{V_0(s)}{V_1(s)} = \frac{R_4 R_2 (R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{R_3 R_1 (R_2 C_2 s)}$$



**Fig. 12.39** Circuito com amplificadores operacionais usado como controlador PID.

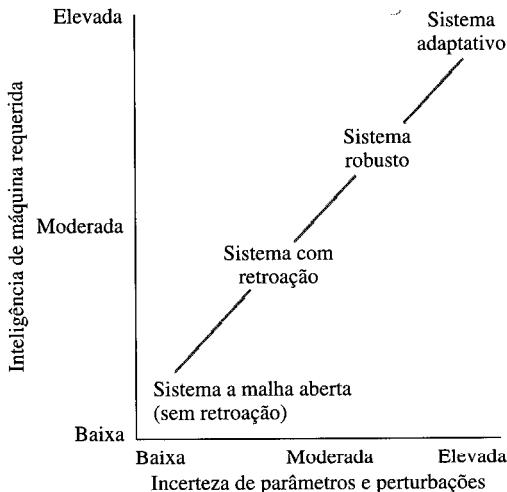
Foram utilizados, na obtenção de um sistema de controle robusto, um sistema de controle com modelo interno com retroação por meio de variáveis de estado e um controlador  $G_c(s)$ . Finalmente, foi demonstrada a natureza robusta de um sistema de controle pseudo-QFT.

---

**Um sistema de controle robusto propicia um desempenho estável, de acordo com o especificado pelo projetista, a despeito de uma ampla variação nos valores dos parâmetros do processo a controlar e de perturbações. Ele também fornece uma resposta altamente robusta para entradas de comando e erro estacionário de rastreamento igual a zero.**

---

Para sistemas com incerteza nos valores de parâmetros, a demanda por controladores robustos irá requerer a incorporação de inteligência de máquina avançada, como mostra a Fig. 12.40.



**Fig. 12.40** Inteligência necessária em função de incerteza para sistemas de controle modernos.

## EXERCÍCIOS

**E12.1** Considere-se um sistema com a forma mostrada na Fig. 12.16 onde

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)}.$$

Usando o método de desempenho ITAE para uma entrada em degrau, determinar a estrutura  $G_c(s)$  necessária. Admitir  $\omega_n = 20$  na Tabela 5.6. Determinar a resposta ao degrau com e sem filtro prévio  $G_p(s)$ .

**E12.2** Para o projeto ITAE obtido no Exercício 12.1, determinar a resposta devida a uma perturbação  $D(s) = 1/s$ .

**E12.3** Um sistema com retroação unitária a malha fechada apresenta

$$G(s) = \frac{9}{s(s + p)},$$

onde  $p$  é normalmente igual a 3. Determinar  $S_p^T$  e traçar os gráficos de  $|T(j\omega)|$  e  $|S(j\omega)|$  em um gráfico de Bode.

$$\text{Resposta: } S_p^T = \frac{-ps}{s^2 + ps + q}$$

**E12.4** Um controlador PID é usado no sistema da Fig. 12.16 onde

$$G(s) = \frac{1}{(s + 2)(s + 8)}.$$

o ganho  $K_3$  do controlador (Eq. 12.33) é limitado em 180. Selecionar um conjunto de zeros do compensador de modo que o par de raízes a malha fechada seja aproximadamente igual aos zeros. Obter a resposta ao degrau para a aproximação dada pela Eq. (12.35) e a resposta real. Compará-las.

**E12.5** Um sistema possui um processo a controlar

$$G(s) = \frac{15.900}{s\left(\frac{s}{100} + 1\right)\left(\frac{s}{200} + 1\right)}$$

e retroação unitária negativa com um compensador PD

$$G_c(s) = K_1 + K_2 s.$$

O objetivo é projetar  $G_c(s)$  de modo que a ultrapassagem a um degrau seja inferior a 20% e o tempo de assentamento (critério dos 2%) seja inferior a 60 ms. Obter um  $G_c(s)$  adequado.

**E12.6** Considerar o sistema de controle mostrado na Fig. E12.6, onde  $G(s) = 1/(s + 4)$ , e selecionar um controlador PI de modo que o tempo de assentamento (critério dos 2%) seja menor que 1 segundo para uma resposta ao degrau ITAE. Traçar  $y(t)$  para uma entrada em degrau  $r(t)$  com e sem um filtro prévio. Determinar e traçar  $y(t)$  para uma perturbação em degrau. Discutir a efetividade do sistema.

**Resposta:** Um possível controlador é

$$G_c(s) = \frac{32 + 4s}{s}.$$

**E12.7** Para o sistema de controle da Fig. E12.6, onde  $G(s) = 1/(s + 4)^2$ , selecionar um controlador PID para obter um tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 1 segundo para uma resposta ao degrau ITAE. Traçar  $y(t)$  para uma entrada em degrau  $r(t)$  com e sem um filtro prévio. Determinar e traçar  $y(t)$  para uma perturbação em degrau. Discutir a efetividade do sistema.

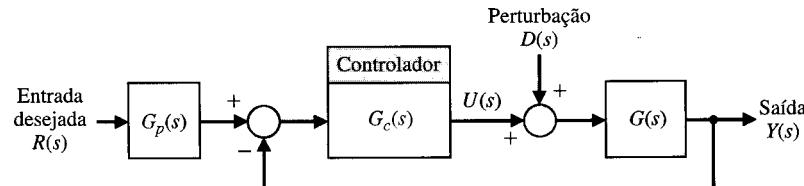
**E12.8** Repetir o Exercício 12.6, tentando obter um tempo de assentamento mínimo, acrescentando-se a restrição  $|u(t)| \leq 80$  para  $t > 0$  para uma entrada em degrau unitário,  $r(t) = 1, t \geq 0$ .

$$\text{Resposta: } G_c(s) = \frac{3600 + 80s}{s}.$$

**E12.9** Um sistema tem a forma mostrada na Fig. E12.6 com

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 4)},$$

onde  $K = 1$ . Projetar um controlador PD para posicionar os polos a malha fechada dominantes em  $s = -1,5 \pm j2$ . Determinar



**Fig. E12.6** Sistema com controlador.

a resposta do sistema a um degrau. Prever o efeito de uma variação de  $K$  em  $\pm 50\%$ . Estimar a resposta ao degrau, no pior caso.

**E12.10** Um sistema tem a forma mostrada na Fig. E12.6 com

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 4)},$$

## PROBLEMAS

**P12.1** O interesse por veículos subaquáticos não tripulados tem crescido ultimamente, sendo considerado um grande número de aplicações possíveis. Estas incluem busca de informações, detecção de minas e vigilância. Independentemente da missão pretendida, existe uma forte necessidade de um controle confiável e robusto do veículo. O veículo proposto está mostrado na Fig. P12.1(a) [13].

Deseja-se controlar o veículo dentro de uma faixa de condições operacionais. O veículo possui um comprimento de 30 pés (cerca 10 m) e tem uma passagem vertical próxima da proa. As entradas de controle são os comandos das superfícies laterais de popa, do leme e da velocidade de propulsão. Neste caso, deseja-se controlar o rolamento do veículo usando as superfícies de popa.

onde  $K = 1$ . Projetar um controlador PI para posicionar os pólos a malha fechada dominantes em  $s = -0,365 \pm j0,514$ . Determinar a resposta do sistema a um degrau. Prever o efeito de uma variação de  $K$  em  $\pm 50\%$ . Estimar a resposta ao degrau, no pior caso.

O sistema de controle está mostrado na Fig. P12.1(b), onde  $R(s) = 0$ , o ângulo de rolamento desejado, e  $D(s) = 1/s$ . Escolhe-se  $G_c(s) = K(s + 2)$ , com  $K = 4$ .

(a) Traçar os gráficos de  $20 \log|T|$  e  $20 \log|S_K^T|$  em um diagrama de Bode. (b) Calcular  $|S_K^T|$  em  $\omega_B$ ,  $\omega_{B/2}$  e  $\omega_{B/4}$ .  $T(s) = Y(s)/R(s)$ .

**P12.2** A Fig. P12.2(a) mostra um novo sistema móvel, suspenso, de câmera de vídeo controlada remotamente para trazer mobilidade tridimensional na transmissão de jogos de futebol profissional [24]. A câmera pode ser movimentada ao longo de todo o campo e também para cima e para baixo. O controle do motor de cada uma das polias está representado pelo sistema da Fig. P12.2(b), onde  $\tau_1 = 20 \text{ ms}$  e  $\tau_2 = 2 \text{ ms}$ .

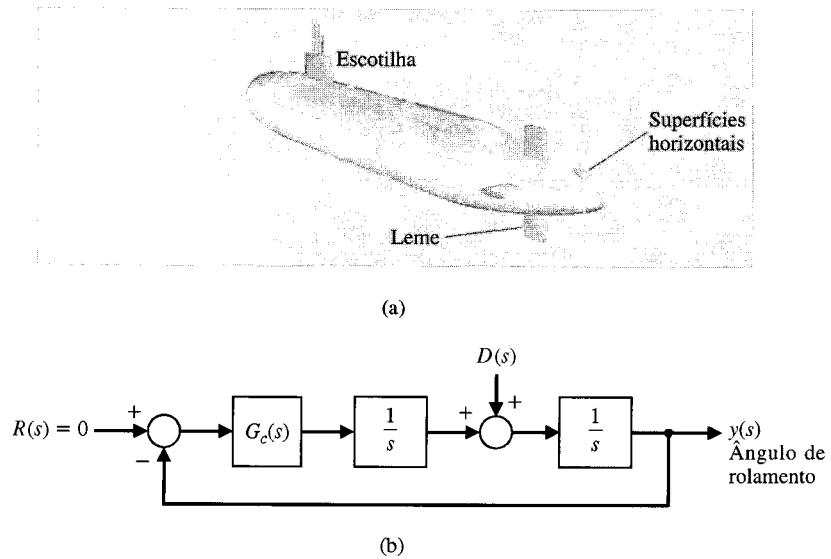
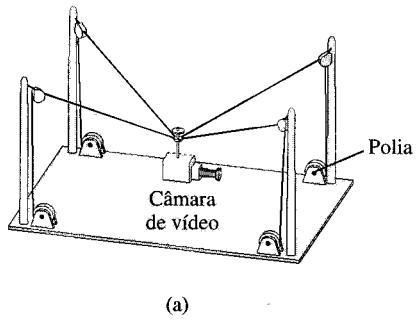
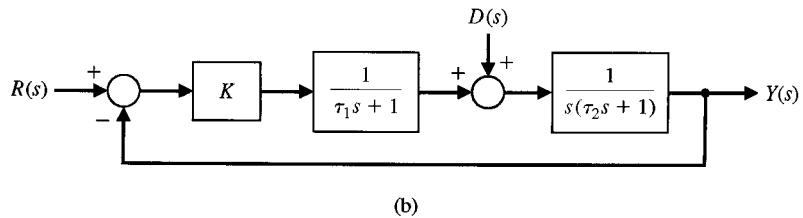


Fig. P12.1 Controle de um veículo subaquático.



(a)



(b)

Fig. P12.2 Câmera de TV controlada remotamente.

- (a) Escolher  $K$  de modo que  $M_{p_u} = 1.84$ . (b) Traçar os gráficos de  $20 \log|T|$  e  $20 \log|S_K^T|$  em um diagrama de Bode. (c) Calcular  $|S_K^T|$  em  $\omega_B$ ,  $\omega_{B/2}$  e  $\omega_{B/4}$ . (d) Fazer  $R(s) = 0$  e determinar o efeito de  $D(s) = 1/s$  com o ganho  $K$  da parte (a) traçando o gráfico de  $y(t)$ .

**P12.3** Os trens dotados de levitação magnética (*maglev*)<sup>3</sup> poderão substituir os aviões em trajetos inferiores a 200 milhas (cerca de 320 km). O *maglev* desenvolvido por uma empresa alemã usa atração eletromagnética para movimentar e levitar veículos pesados, transportando até 400 passageiros a velocidades de 300 mph (cerca de 480 km/h). Mas é difícil manter o afastamento de 1/4 de polegada (da ordem 6 mm) entre o carro e a pista [7, 12, 17].

<sup>3</sup> maglev = magnetic levitation. (N.T.)

O sistema de controle do entreferro está mostrado na Fig. P12.3(a). O diagrama de blocos do sistema de controle do entreferro está mostrado na Fig. P12.3(b). O compensador é

$$G_c(s) = \frac{K(s + 2)}{(s + 12)}.$$

- (a) Determinar a faixa de valores de  $K$  para um sistema estável.  
 (b) Selecionar um ganho de modo que o erro de estado estacionário para um comando em degrau seja zero. (c) Determinar  $y(t)$  para o ganho da parte (b). (d) Determinar  $y(t)$  quando  $K$  variar de  $\pm 10\%$  a partir do ganho da parte (b).

**P12.4** O controle por computador de um robô para pintar automóveis com pistola é realizado por meio do sistema mostrado na Fig. P12.4(a) [1]. Deseja-se investigar o sistema para  $K = 1, 10$  e  $20$ .  
 (a) Para os três valores de  $K$ , determinar  $\zeta$ ,  $\omega_n$ , ultrapassagem

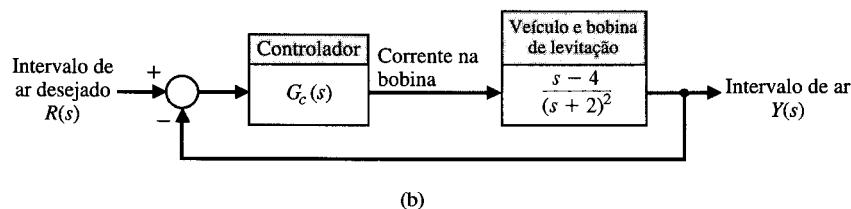
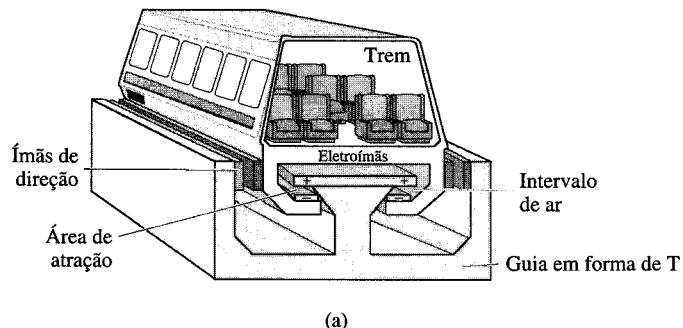


Fig. P12.3 Controle de trem com levitação magnética.

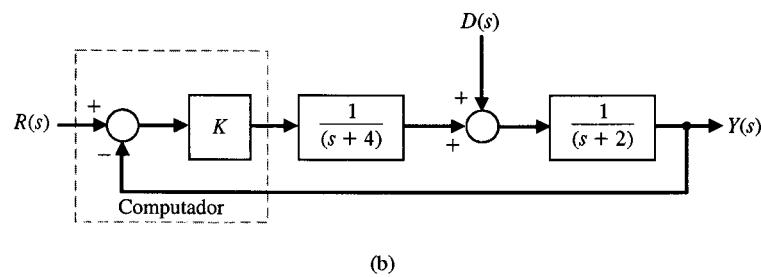
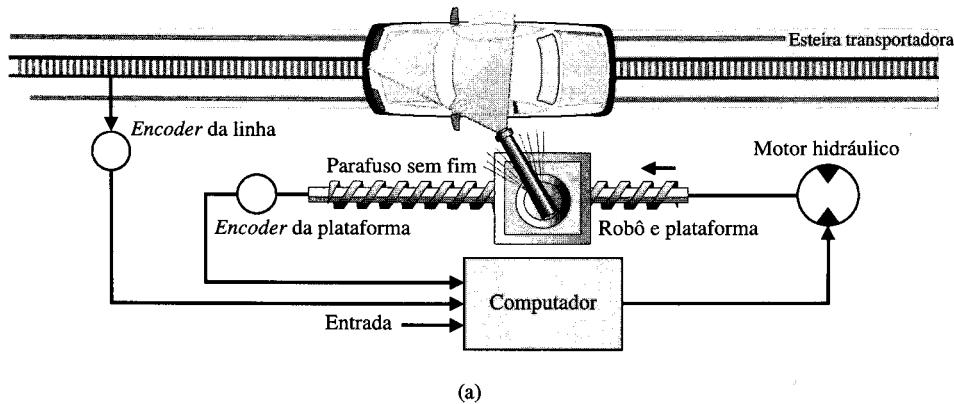


Fig. P12.4 Robô de pintura com pistola.

percentual, tempo de assentamento (critério dos 2%) e erro de estado estacionário para uma entrada em degrau. Registrar os resultados em uma tabela. (b) Determinar a sensibilidade  $|S_{K_1}^T|$  para os três valores de  $K$ . (c) Selecionar o melhor dentre os três valores de  $K$ . (d) Para o valor escolhido na parte (c), determinar  $y(t)$  para uma perturbação  $D(s) = 1/s$  quando  $R(s) = 0$ .

**P12.5** Um veículo guiado automaticamente está mostrado na Fig. 12.5(a) e seu sistema de controle, na Fig. 12.5(b). O objetivo é rastrear o fio guia com exatidão, ser insensível a mudanças no ganho  $K_1$  e reduzir o efeito da perturbação [15, 25]. O ganho  $K_1$  é normalmente igual a 1 e  $\tau_1 = 1/25$  segundo.

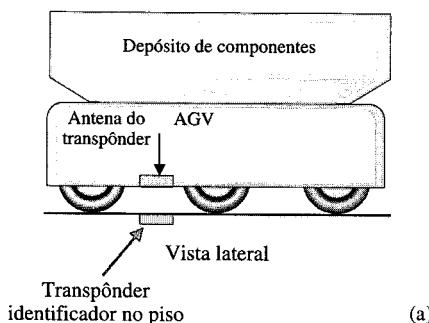
(a) Selecionar um compensador,  $G_c(s)$ , de modo que a ultrapassagem percentual para uma entrada em degrau seja menor ou igual a 10%, o tempo de assentamento (critério dos 2%) seja menor que 100 ms e a constante de velocidade,  $K_v$ , para uma entrada em rampa seja 100.

(b) Para o compensador selecionado na parte (a), determinar a sensibilidade do sistema a pequenas variações em  $K_1$  pela obtenção de  $S_{K_1}^T$  ou  $S_{K_1}^R$ .

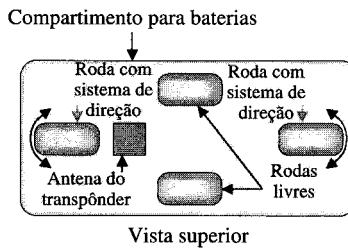
(c) Se o valor de  $K_1$  muda para 2 enquanto  $G_c(s)$  da parte (a) permanece inalterado, determinar a resposta do sistema ao degrau e comparar valores numéricos de desempenho escolhidos com os obtidos na parte (a).

(d) Determinar o efeito de  $D(s) = 1/s$  traçando o gráfico de  $y(t)$  quando  $R(s) = 0$ .

**P12.6** Uma máquina de empacotar bobinas recebe, embala e rotula grandes bobinas de papel produzidas industrialmente [9, 16]. A máquina consiste em diversas estações principais: estação de posicionamento, estação de espera, estação de empacotamento e assim por diante. As atenções estarão voltadas para a estação de posicionamento mostrada na Fig. P12.6(a). A estação de posicionamento é a primeira que recebe as bobinas de papel. Esta

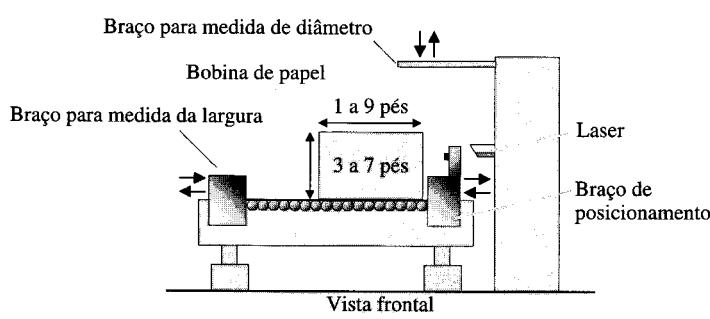


(a)

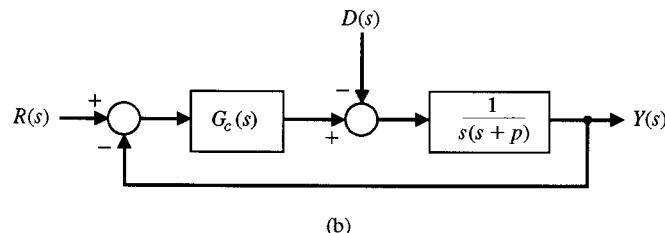


(b)

Fig. P12.5 Veículo guiado automaticamente.



(a)



(b)

Fig. P12.6 Controle de máquina de embrulhar bobina de papel.

estação é responsável pelo recebimento e pela pesagem do rolo, pela medida do diâmetro e do comprimento do rolo, determinando o empacotamento que se deseja para o rolo, posicionando-o para o processamento a jusante e, finalmente, ejetando-o da estação.

Funcionalmente, o empacotamento pode ser categorizado como uma operação complexa porque cada etapa funcional (e.g., a medida do comprimento) envolve um grande número de ações de dispositivos de campo e depende de um certo número de sensores de acompanhamento.

O sistema de controle para posicionar com exatidão o braço de medida de comprimento está mostrado na Fig. P12.6(b). O polo do braço de posicionamento,  $p$ , é normalmente igual a 2, mas é submetido a variações devidas ao carregamento e ao desalinhamento da máquina. (b) Para  $p = 2$ , projetar um compensador de modo que as raízes complexas sejam  $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$ . (b) Traçar o gráfico de  $y(t)$  para uma entrada em degrau  $R(s) = 1/s$ . (c) Traçar o gráfico de  $y(t)$  para uma perturbação  $D(s) = 1/s$  com  $R(s) = 0$ . (d) Repetir as partes (b) e (c) quando  $p$  varia para 1 e  $G_c(s)$  permanece como projetado na parte (a). Comparar os resultados para os dois valores do polo  $p$ .

**P12.7** A função de um laminador de chapas de aço é transformar lingotes preaquecidos em chapas de espessura e de dimensões programadas [5, 10]. Os produtos finais são chapas planas retangulares com largura de até 3300 mm e espessura de 180 mm.

Um esquema do arranjo físico da instalação de laminar está mostrado na Fig. P12.7(a). A laminadora possui dois conjuntos de rolos, designados por N.º 1 e N.º 2. Eles são equipados com rolos grandes (de até 508 mm de diâmetro), acionados por motores elétricos de grande porte (de até 4470 kW). Os intervalos entre os rolos e as forças são mantidos por meio de cilindros hidráulicos de grande porte.

A operação típica de um laminador pode ser descrita como a seguir. Os lingotes provenientes do forno de reaquecimento passam inicialmente através do conjunto N.º 1, cuja função é reduzir os lingotes à largura desejada. Os lingotes prosseguem em direção ao conjunto N.º 2, onde se aplicam passes de acabamento a fim de obter a espessura desejada e, finalmente, através do

nivelador de chapas quentes, que dá a cada uma das placas um acabamento fino.

Um dos sistemas principais controla a espessura das chapas por meio do ajuste dos rolos de laminação. O diagrama de blocos deste sistema de controle está mostrado na Fig. P12.7(b). O processo a controlar é representado por

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 5)}.$$

O controlador é um PID com dois zeros iguais e reais. (a) Escolher os zeros e o ganho do PID de modo que o sistema a malha fechada possua dois pares de raízes iguais. (b) Para o projeto da parte (a), obter a resposta ao degrau sem um filtro prévio [ $G_p(s) = 1$ ]. (c) Repetir a parte (b) com um filtro prévio apropriado. (d) Determinar o efeito de uma perturbação em degrau unitário sobre o sistema por meio do cálculo de  $y(t)$  com  $r(t) = 0$ .

**P12.8** Um motor e uma carga com atrito insignificante e um amplificador tensão-corrente,  $K_a$ , são usados no sistema de controle com retroação mostrado na Fig. P12.8. Um projetista seleciona um controlador PID

$$G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3 s,$$

onde  $K_1 = 5$ ,  $K_2 = 500$  e  $K_3 = 0,0475$ .

(a) Determinar os valores apropriados de  $K_a$  de modo que a margem de fase do sistema seja de  $42^\circ$ . (b) Traçar o lugar das raízes para o ganho  $K_a$  e determinar as raízes do sistema para o valor de  $K_a$  da parte (a). (c) Determinar o valor máximo de  $y(t)$  quando  $D(s) = 1/s$  e  $R(s) = 0$  para o valor de  $K_a$  da parte (a). (d) Determinar a resposta a um degrau de entrada,  $r(t)$ , com e sem filtro prévio.

**P12.9** Um sistema com retroação unitária possui uma equação característica nominal

$$q(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 6 = 0.$$

Os coeficientes variam da seguinte forma

$$2 \leq a_2 \leq 3 \quad 1 \leq a_1 \leq 3$$

$$3 \leq a_0 \leq 5.$$

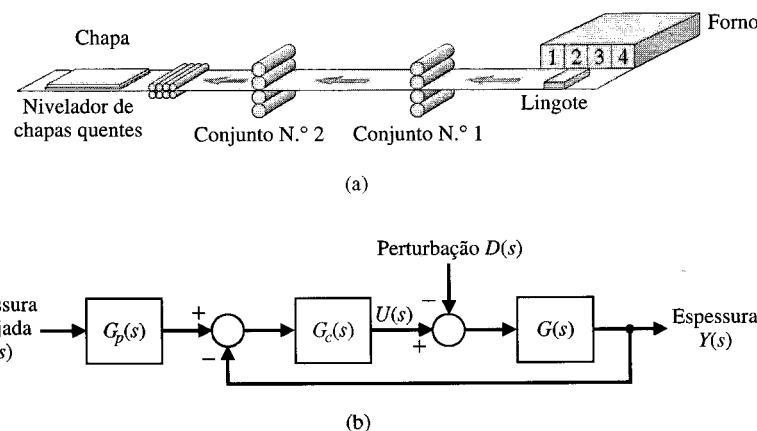


Fig. P12.7 Controle de laminadora de chapa de aço.

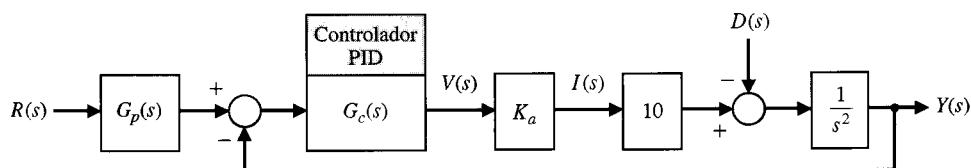
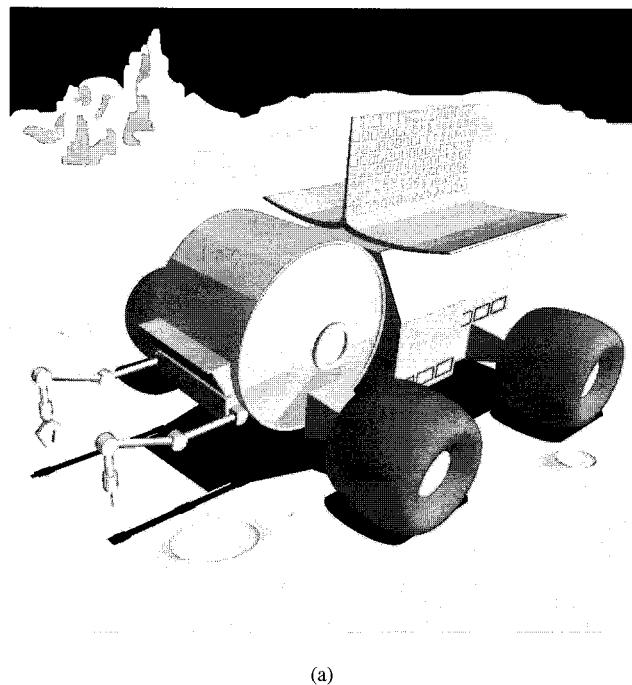


Fig. P12.8

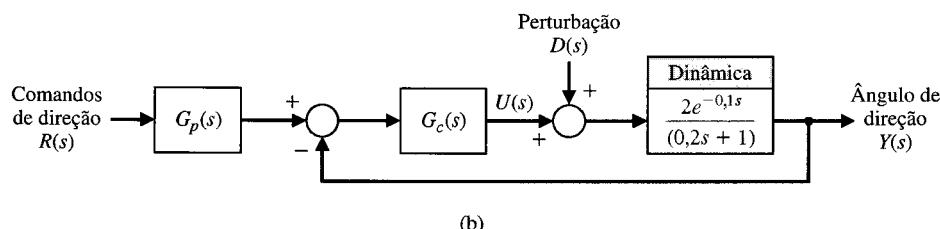
Determinar se o sistema é estável com estes coeficientes incertos.

**P12.10** Os futuros astronautas poderão se deslocar na Lua no interior de um veículo pressurizado, como o mostrado na Fig. P12.10(a), que teria um raio de ação de 620 milhas (cerca de 990 km) e poderia ser usado em missões com duração de até seis meses. Os engenheiros da Boeing analisaram inicialmente o Veículo de Exploração Lunar da era Apollo e projetaram, então, um novo veículo, incorporando aperfeiçoamentos na proteção térmica e contra radiação, no controle de choques e de vibrações e nos lubrificantes e materiais de vedação.

O sistema de controle de direção do carro lunar está mostrado na Fig. P12.10(b). O objetivo do projetista de controle é obter uma resposta a um comando de direção em degrau com erro de estado estacionário nulo, com uma ultrapassagem menor que 20% e um tempo de pico inferior a 0,3 segundo com  $|u(t)| \leq 50$ . Também é necessário determinar o efeito de uma perturbação em degrau  $D(s) = 1/s$  quando  $R(s) = 0$ , para assegurar a redução dos efeitos devidos às irregularidades da superfície da Lua. Usando (a) um controlador PI e (b) um controlador PID, projetar uma estrutura de controle aceitável e registrar em uma tabela os resultados de cada projeto. Comparar o desempenho dos projetos. Usar um filtro prévio,  $G_p(s)$ , se necessário.



(a)



(b)

**Fig. P12.10** (a) Um veículo lunar. (b) Controle de direção para o veículo lunar.

**P12.11** Um processo a ser controlado possui função de transferência

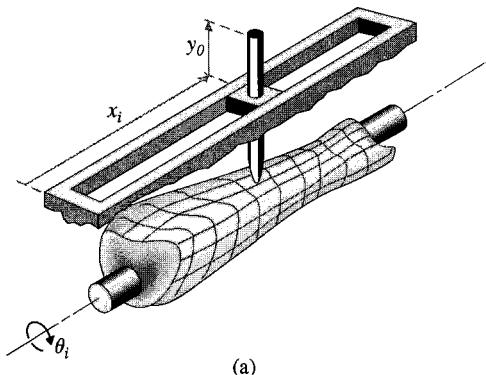
$$G(s) = \frac{10}{s^2}$$

Deseja-se usar retroação unitária negativa com um controlador PID e um filtro prévio. O objetivo é obter um tempo de pico de 0,75 segundo com um desempenho do tipo ITAE. Prever a ultrapassagem do sistema e o tempo de assentamento (critério dos 2%) para uma entrada em degrau.

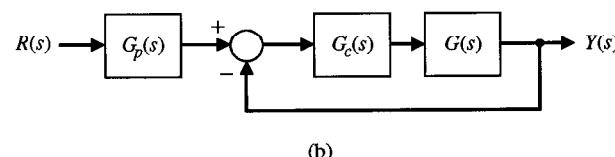
**P12.12** A Fig. P12.12(a) mostra uma espécie de gabarito tridimensional para gerar uma função de duas variáveis. As variáveis  $x$  e  $\theta$  podem ser controladas usando sistemas de controle de posição [19]. O controle de  $x$  pode ser realizado com um motor CC e retroação de posição, como mostra a Fig. P12.12(b), com o motor e a carga representados por

$$G(s) = \frac{K}{s(s + p)(s + 4)},$$

onde  $1 \leq K \leq 3$  e  $1 \leq p \leq 3$ . Normalmente  $K = 2$  e  $p = 2$ . Projetar um sistema do tipo ITAE com um controlador PID de modo que o tempo de pico da resposta para uma entrada em degrau seja inferior a 2,5 segundos para o pior caso de desempenho.



(a)



(b)

Fig. P12.12 (a) Gabarito tridimensional. (b) Sistema de controle do eixo x.

## PROBLEMAS AVANÇADOS

**PA12.1** Para minimizar os efeitos de vibrações, um telescópio é montado sobre um sistema com levitação magnética. Este método elimina também o atrito do sistema de movimentação magnética em azimute. Os fotodetectores do sistema de sensores requerem conexões elétricas, que podem ser representadas por uma mola com constante de  $1 \text{ kgf/m}$ . A massa do telescópio é  $100 \text{ kg}$ . O diagrama de blocos está mostrado na Fig. PA12.1. Projetar um controlador PID tal que a constante de erro de velocidade seja  $K_v = 100$  e o valor máximo de ultrapassagem da resposta para uma entrada em degrau seja inferior a 5%.

**PA12.2** O sistema de levitação magnética (*maglev*) se constitui uma solução promissora para o tráfego confinado. Os veículos são suspensos sobre uma guia acima da via de circulação e acionados por meio de forças magnéticas em vez de depender de rodas ou de forças aerodinâmicas. A propulsão dos veículos é fornecida por meio de eletroímãs [7, 12, 17]. Idealmente o sistema de levitação magnética pode oferecer as vantagens ambientais e de segurança de um trem de alta velocidade, a velocidade e o baixo atrito de uma aeronave e a conveniência de um automóvel. Podendo compartilhar todos estes atributos, sem prejuízo uns dos outros, o sistema de levitação magnética é verdadeiramente uma nova forma de locomoção e revalorizará as outras, reduzindo o congestionamento e fornecendo conexões entre elas. O deslocamento com levitação magnética será rápido, operando com velocidades de 150 a 300 milhas por hora (cerca de 240 a 480 km/h).

O controle de inclinação vertical de um veículo com levitação magnética está ilustrado nas Figs. PA12.2(a) e (b). A dinâmica do processo a controlar  $G(s)$  está sujeita a variações de modo

que os pólos permanecem no interior dos quadrados mostrados na Fig. PA12.2(c), e  $1 \leq K \leq 2$ .

O objetivo é obter um sistema robusto com uma resposta ao degrau que apresente uma ultrapassagem menor que 10% e um tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 2 segundos quando  $|u(t)| \leq 100$ . Obter um projeto com controladores PI, PD e PID e comparar os resultados. Usar um filtro prévio,  $G_p(s)$ , se necessário.

**PA12.3** Os sistemas de frenagem antiderrapantes apresentam um problema de controle desafiador, uma vez que os parâmetros do sistema freio-automóvel podem se alterar significativamente (por exemplo, devido a mudanças no coeficiente de atrito das sapatas de freio ou mudanças no gradiente da estrada) bem como as condições ambientais se modificam bastante (por exemplo, devido a condições adversas da rodovia). O objetivo do sistema antiderrapagem é regular o deslizamento da roda para maximizar o coeficiente de atrito entre o pneu e a estrada para uma dada superfície de rolamento [8]. Como é de se esperar, o coeficiente de atrito de frenagem é máximo em asfalto seco, reduzido no asfalto molhado e grandemente reduzido no gelo.

Um modelo simplificado do sistema de frenagem está representado por uma função de transferência  $G(s)$  com um sistema mostrado na Fig. 12.16 com

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s + a)(s + b)},$$

onde, normalmente,  $a = 1$  e  $b = 4$ .

(a) Usando um controlador PID, projetar um sistema muito robusto para o qual a resposta a uma entrada em degrau apresente

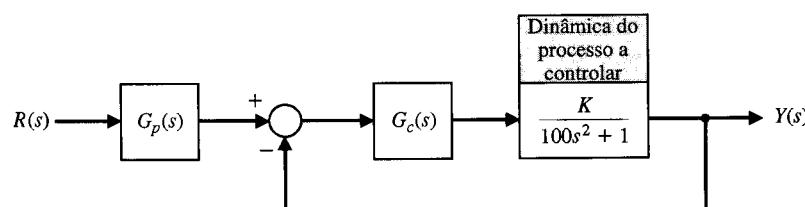
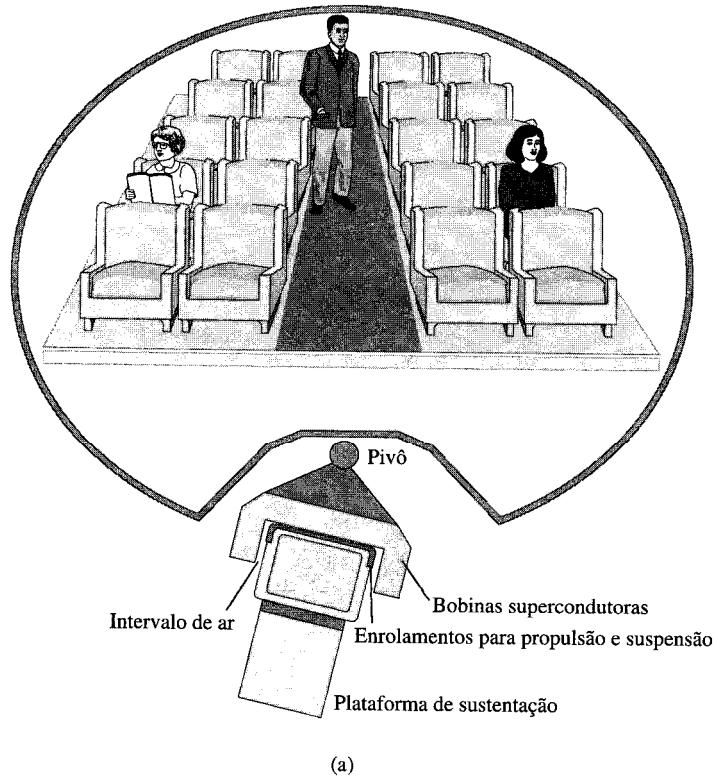
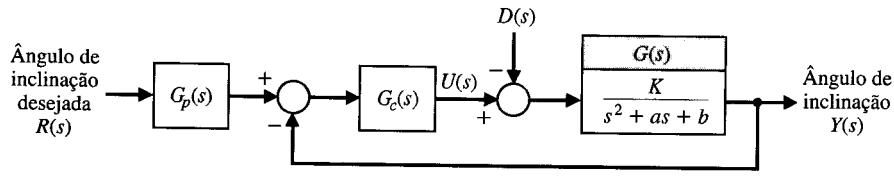


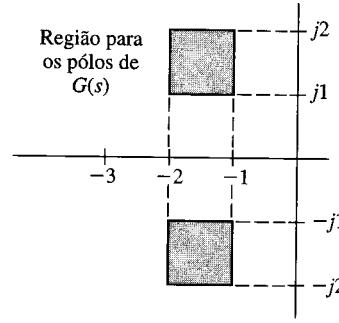
Fig. PA12.1 Sistema de controle de posição para telescópio com levitação magnética.



(a)



(b)



(c)

**Fig. PA12.2** (a) e (b) Controle de inclinação para um veículo com levitação magnética. (b) Dinâmica do processo a controlar.

uma ultrapassagem menor que 4% e um tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 1 segundo. O erro de estado estacionário deve ser menor que 1% para um degrau. Estima-se que os valores de  $a$  e de  $b$  variem  $\pm 50$ .

(b) Projetar um sistema que atenda as especificações da parte (a) usando um índice de desempenho ITAE. Prever a ultrapassagem e o tempo de assentamento do sistema obtido com o projeto.

**PA12.4** Um robô foi projetado para auxiliar cirurgias de substituição de cabeça do fêmur. O dispositivo, chamado RoBoDoc, é usado para orientar e perfurar precisamente a cavidade femural para

aceitar o implante da prótese. Obviamente se deseja um controle muito robusto da ferramenta cirúrgica, uma vez que não há segunda chance de perfurar novamente um osso [23, 30]. O sistema de controle será como o mostrado na Fig. 12.16 com

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b},$$

onde  $2 \leq a \leq 4$  e  $5 \leq b \leq 9$ .

Selecionar um controlador PID de modo que o sistema seja altamente robusto. Usar o método do lugar das raízes no plano  $s$ .

Selecionar o  $G_p(s)$  apropriado e traçar o gráfico da resposta para uma entrada em degrau.

**PA12.5** A Fig. PA12.5 mostra uma espaçonave com uma câmara. A câmara se movimenta cerca de  $16^\circ$  com relação à base. Propulsores a jato estabilizam a base contra os torques de reação devidos aos motores de movimentação da câmara. O controle da velocidade de rotação do movimento da câmara apresenta uma função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)(s + 4)}.$$

Um controlador PID é usado em um sistema como o mostrado na Fig. 12.16 onde

$$G_c(s) = \frac{K(s + \sigma + j1)(s + \sigma - j1)}{s}.$$

Determinar  $K$  e as raízes resultantes de modo que todas possuam um valor de  $\zeta$  menor ou igual a  $1/\sqrt{2}$  quando  $1 < \sigma < 2$  (variar  $\sigma$  em incrementos de 0,25). Determinar a sensibilidade das raízes em relação a mudanças em  $K$ .

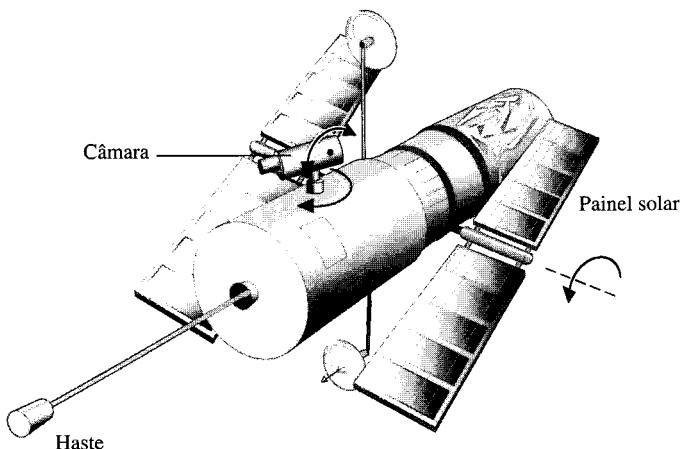


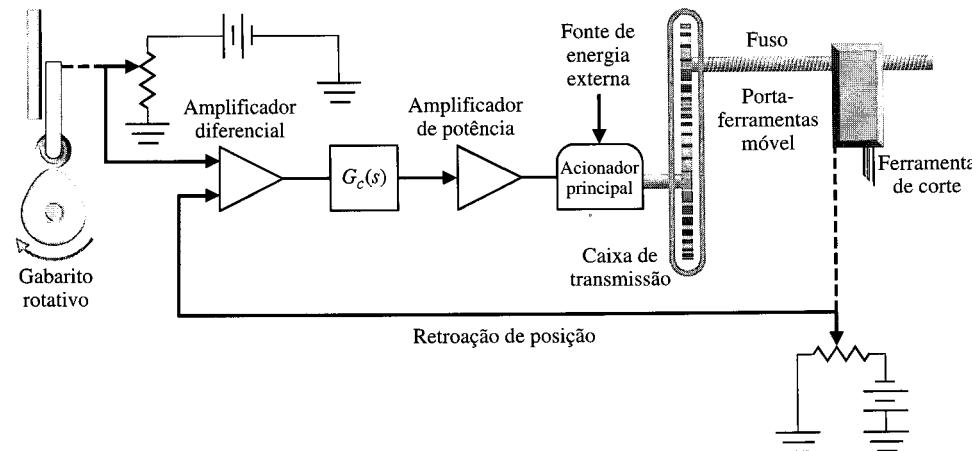
Fig. PA12.5 Espaçonave com uma câmara.

**PA12.6** Considere-se o sistema da Fig. 12.16 com

$$G(s) = \frac{K_1}{s(s + 10)},$$

onde  $K_1 = 1$  sob condições normais. Projetar um controlador PID para obter uma margem de fase de  $50^\circ$ . O controlador é

$$G_c = \frac{K(s^2 + 20s + b)}{s}$$



com zeros complexos. Selecionar um filtro prévio apropriado. Determinar o efeito de uma mudança de  $\pm 25\%$  em  $K_1$  desenvolvendo um registro do desempenho do sistema em forma de tabela.

**PA12.7** Considere-se o sistema da Fig. 12.16 com

$$G(s) = \frac{K_1}{s(\tau s + 1)},$$

onde  $K_1 = 1$  e  $\tau \approx 0,001$  segundo que pode ser desprezado. (Verificar isto mais tarde no procedimento de projeto.) Selecionar um controlador PID de modo que o tempo de assentamento para uma entrada em degrau (critério dos 2%) seja menor que 0,8 segundo e a ultrapassagem seja inferior a 5%. Adicionalmente, o efeito, na saída, de uma perturbação deve ser reduzido a 5% da magnitude da perturbação. Selecionar  $\omega_n$  e usar o método de projeto ITAE.

**PA12.8** Considere-se o sistema da Fig. 12.16 com

$$G(s) = \frac{1}{s}.$$

O objetivo é selecionar um controlador PI usando o critério de projeto ITAE e fazendo com que o sinal de controle para uma entrada em degrau unitário fique restrito a  $|u(t)| \leq 1$ . Determinar o controlador PI apropriado e o tempo de assentamento para uma entrada em degrau (critério dos 2%). Usar um filtro prévio.

**PA12.9** Considere-se o sistema da Fig. 12.16 com

$$G(s) = \frac{3}{s(s^2 + 4s + 5)}.$$

Projetar um controlador PID para obter (a) uma constante de aceleração  $K_a = 2$ , (b) uma margem de fase de igual a  $45^\circ$  e (c) uma banda passante maior que  $2,8$  rad/s. Escolher um filtro prévio apropriado e traçar o gráfico da resposta a uma entrada em degrau.

**PA12.10** Um sistema de controle de uma máquina-ferramenta está mostrado na Fig. PA12.10. A função de transferência do amplificador de potência, do acionador principal, do porta-ferramentas e da ferramenta de corte é

$$G(s) = \frac{50}{s(s + 1)(s + 4)(s + 5)}.$$

O objetivo é obter uma resposta com ultrapassagem menor que 25% e um tempo de pico menor que 3 segundos, para uma entrada em degrau. Determinar um controlador adequado usando uma estratégia de controle (a) PD, (b) PI, (c) PID. (d) Selecionar então o melhor controlador.

**PA12.11** Considere-se o sistema da Fig. 12.16 com

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 2as + a^2},$$

Fig. PA12.10 Sistema de controle de uma máquina-ferramenta.

onde  $1 \leq a \leq 3$  e  $2 \leq K \leq 4$ .

Usar um controlador PID e projetar o controlador para a condição de pior caso. Deseja-se que o tempo de assentamento (critério dos 2%) seja inferior a 0,8 segundo com um desempenho ITAE.

**PA12.12** Um sistema com a forma mostrada na Fig. 12.16 tem

$$G(s) = \frac{s + r}{(s + p)(s + q)},$$

onde  $3 \leq p \leq 5$ ,  $0 \leq q \leq 1$  e  $1 \leq r \leq 2$ . É usado um compensador

$$G_c(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)}{(s + p_1)(s + p_2)}$$

com pólos e zeros reais. Selecionar um compensador apropriado para se obter um comportamento robusto.

**PA12.13** Um sistema com a forma mostrada na Fig. 12.31 tem um processo a controlar

$$G(s) = \frac{1}{(s + 2)(s + 4)(s + 6)}.$$

Deseja-se obter um erro de estado estacionário nulo para uma entrada em degrau. Selecionar um compensador  $G_c(s)$  e um ganho  $K$  usando o método pseudo-QFT e determinar o desempenho do sistema quando todos os pólos de  $G(s)$  mudam em -50%. Descrever a natureza robusta do sistema.

## PROBLEMAS DE PROJETO

**PPC12.1** Projetar um controlador PID para o sistema de sarilho deslizante da Fig. PPC4.1. Para uma entrada  $r(t)$  em degrau, a resposta deve apresentar uma ultrapassagem percentual menor que 3% e um tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 250 ms. Determinar a resposta do sistema projetado a uma perturbação.

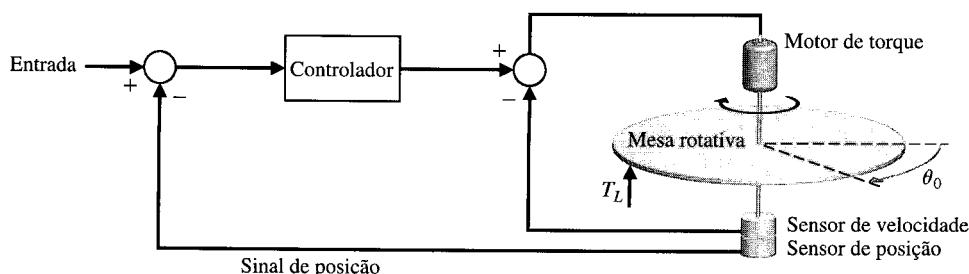
**PP12.1** Um sistema de controle de posição de uma grande mesa rotativa está mostrado na Fig. PP12.1(a) e o diagrama de blocos do sistema está mostrado na Fig. PP12.1(b) [11, 14]. Este sistema utiliza um motor de torque de grandes proporções com  $K_m = 15$ . O objetivo é reduzir o valor estacionário do efeito de uma mudança em degrau na carga a 5% da magnitude da perturbação. Isto deve ser conseguido juntamente com uma resposta rápida a um comando em degrau,  $R(s)$ , com uma ultrapassagem inferior a 5%. Selecionar  $K_1$  e o compensador quando (a)  $G_c(s) = K$  e (b)  $G_c(s) = K_2 + K_3s$  (um compensador PD). Traçar a resposta a um degrau de perturbação e de entrada com ambos os compensadores. Determinar se é necessário utilizar um filtro prévio para atender os requisitos de ultrapassagem.

**PP12.2** A fita digital de áudio (DAT — Digital Audio Tape) armazena 1,3 gigabytes de dados em um dispositivo do tamanho de um car-

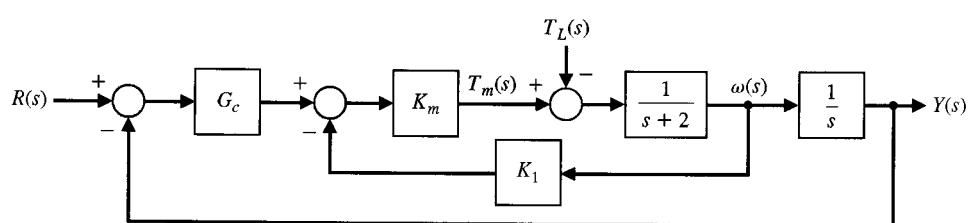
tão de crédito — aproximadamente nove vezes menor que o de uma fita cassete de meia polegada ou de um cartucho de fita de um quarto de polegada. Uma fita digital de áudio é comercializada nos Estados Unidos por alguns dólares — aproximadamente o mesmo que um disco flexível, embora possa armazenar uma quantidade de dados 1000 vezes maior. Um DAT pode gravar durante cerca de duas horas (mais que qualquer cassete ou cartucho), o que significa que pode funcionar mais tempo sem necessidade de assistência e requer, portanto, um menor número de troca de fitas na transferência de dados. A DAT permite acessar um arquivo de dados em 20 segundos, em média, em comparação com o tempo de alguns ou muitos minutos do cartucho ou do rolo de fita [2].

O acionador de fita controla eletronicamente as velocidades relativas do tambor e da fita de modo que as cabeças acompanhem as trilhas da fita, como está mostrado na Fig. PP12.2(a). O sistema de controle é muito mais complexo que o de um CD-ROM porque um número maior de motores deve ser controlado com exatidão: sarilho, rolos de origem e de destino, tambor e controle de tensão da fita.

Considere-se o sistema de controle de velocidade mostrado na Fig. PP12.2(b). A função de transferência do motor e da car-

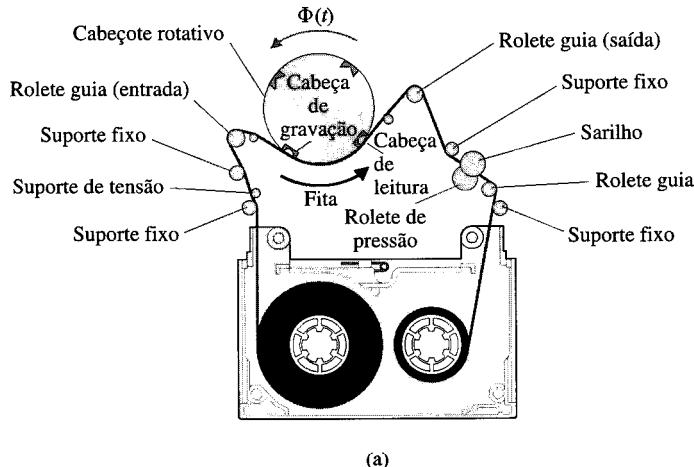


(a)



(b)

Fig. PP12.1 Controle de uma mesa rotativa.



(a)

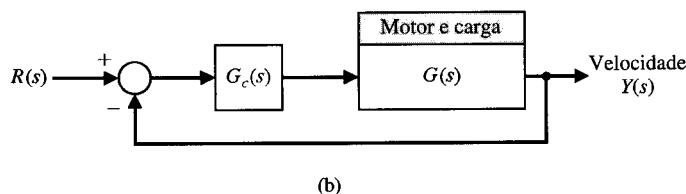


Fig. PP12.2 Controle de um reproduutor de fita DAT.

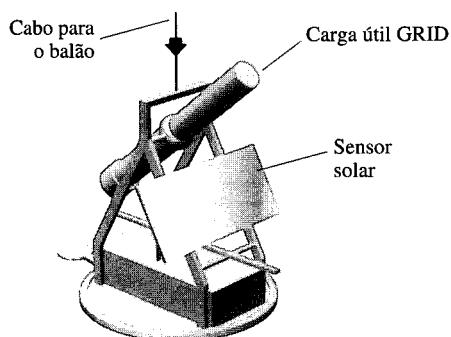
ga varia porque a fita se move de um rolo para outro. A função de transferência é

$$G(s) = \frac{K_m}{(s + p_1)(s + p_2)},$$

onde os valores nominais são  $K_m = 4$ ,  $p_1 = 1$  e  $p_2 = 4$ . Contudo, a faixa de variação é:  $3 \leq K_m \leq 5$ ;  $0,5 \leq p_1 \leq 1,5$ ;  $3,5 \leq p_2 \leq 4,5$ . O sistema deve responder rapidamente a um degrau com ultrapassagem inferior a 13% e com um tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 0,5 segundo. O sistema requer um tempo de pico curto, e assim a condição de superamortecimento

não é admissível. Determinar um controlador PID que resulte em uma resposta aceitável sobre a faixa de variação de valores dos parâmetros. O ganho  $K_m K_3$  não pode exceder o valor 20 com os valores nominais de  $K_m = 4$  e  $K_3$  definido na Eq. (12.33).

**PP12.3** O Dispositivo de Captação de Imagens de Raios Gama (GRID = *Gamma-Ray Imaging Device*) é um experimento da NASA que será feito em um voo de longa duração, em altitudes elevadas, a bordo de um balão, durante um ano de atividade solar máxima. O GRID a bordo de um balão constitui um instrumento que irá melhorar qualitativamente a obtenção de imagens de raios X e realizar a primeira captação de imagens de raios gama para o estudo



(a)

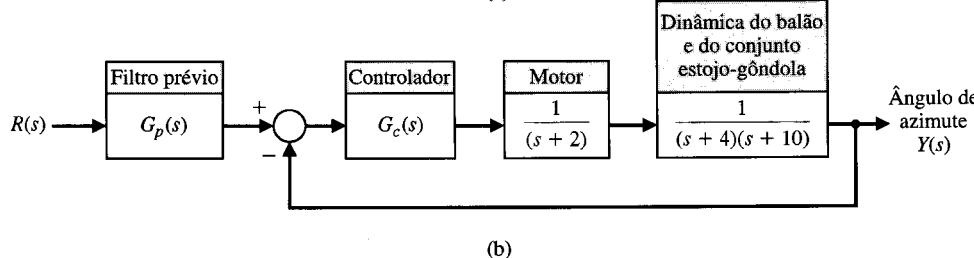


Fig. PP12.3 O dispositivo GRID.

dos fenômenos de altas energias na próxima fase de pico da atividade solar. A partir desta plataforma embarcada em um balão, o GRID irá observar inúmeras rajadas de raios X portadores de grande energia, fontes de efeito coroa com raios X de grande energia, eventos térmicos "superquentes" e microrajadas de vento solar [2]. A Fig. PP12.3(a) mostra o desenho de uma carga útil GRID fixada ao balão. Os principais componentes do experimento GRID consistem em um estojo de 5,2 metros com uma gôndola de montagem, um balão para altitudes elevadas e um cabo conectando o balão à gôndola. Os requisitos de apontamento do instrumento solar requeridos no experimento são 0,1 grau de exatidão no apontamento e 0,2 segundo de arco por 4 ms de estabilidade no apontamento.

Um sensor solar óptico fornece uma medida do ângulo de apontamento do instrumento solar e é modelado como um sistema de primeira ordem com um ganho estático e um pólo em  $s = -500$ . Um motor de torque aciona o conjunto estojo-gôndola. O sistema de controle do ângulo de azimute está mostrado na Fig. PP12.3(b). O controlador PID é selecionado pela equipe de projeto de modo que

$$G_c(s) = \frac{K_3(s^2 + as + b)}{s},$$

onde  $a = 6$  e  $b$  deve ser escolhido. Um filtro prévio é usado como mostra a Fig. PP12.3(b). Determinar o valor de  $K_3$  e de  $b$  de modo que as raízes dominantes tenham um  $\zeta$  de 0,8 e a ultrapassagem para uma entrada em degrau seja menor que 3%. Determinar os valores reais da ultrapassagem percentual, de  $t_p$  e de  $T_s$ , da resposta ao degrau. (b) Projetar um filtro PID usando os critérios de desempenho ITAE quando  $\omega_n = 8$ . Comparar os resultados reais com os obtidos na parte (a).

**PP12.4** Muitos laboratórios de universidades e governamentais têm construído mãos robóticas capazes de segurar e manipular objetos. Contudo, ensinar estes dispositivos a realizar até mesmo tarefas simples requer um esforço enorme de programação computacional. Agora, no entanto, o sistema *Dexterous Hand Master* (DHM) pode ser vestido na mão humana para registrar lado a lado

os movimentos das articulações dos dedos. Cada articulação é dotada de um sensor cujos sinais de saída variam de acordo com a posição. Os sinais de todos os sensores são convertidos em dados de computador e usados para operar mãos robóticas [1].

O DHM está mostrado nas partes (a) e (b) da Fig. PP12.4. O sistema de controle do ângulo da articulação está mostrado na parte (c). O valor normal de  $K_m$  é 1,0. O objetivo é projetar um controlador PID de modo que o erro de estado estacionário para uma entrada em rampa seja igual a zero. Além disto, o tempo de assentamento (critério dos 2%) deve ser menor que 3 segundos para uma entrada em rampa. Deseja-se que o controlador seja

$$G_c(s) = \frac{K_3(s^2 + 6s + 18)}{s}.$$

(a) Selecionar  $K_3$  e obter a resposta à rampa. Traçar o gráfico do lugar das raízes à medida que  $K_3$  varia. (b) Se o valor de  $K_m$  for reduzido à metade do seu valor normal e  $G_c(s)$  permanecer como foi projetado na parte (a), obter a resposta do sistema a uma entrada em rampa. Comparar os resultados das partes (a) e (b) e discutir a robustez do sistema.

**PP12.5** Objetos menores que os comprimentos de onda da luz visível constituem matéria-prima da ciência e da tecnologia contemporâneas. Os biólogos estudam moléculas simples de proteína ou DNA; cientistas de materiais examinam fissuras de cristais em escala atômica; engenheiros de microeletrônica dispõem padrões de circuito com trilhas de alguns décimos de espessura de átomo. Até recentemente, este mundo diminuto só poderia ser visto através de métodos trabalhosos, quase sempre destrutivos, como microscopia eletrônica e difração com raios X. Ele permanece além do alcance de qualquer instrumento tão simples quanto direto como o conhecido microscópio de luz. Novos microscópios, tipificados pelo microscópio de varredura STM,<sup>4</sup> estão disponíveis atualmente [3].

<sup>4</sup> Em inglês são designados pela sigla STM = Scanning Tunneling Microscope. (N.T.)

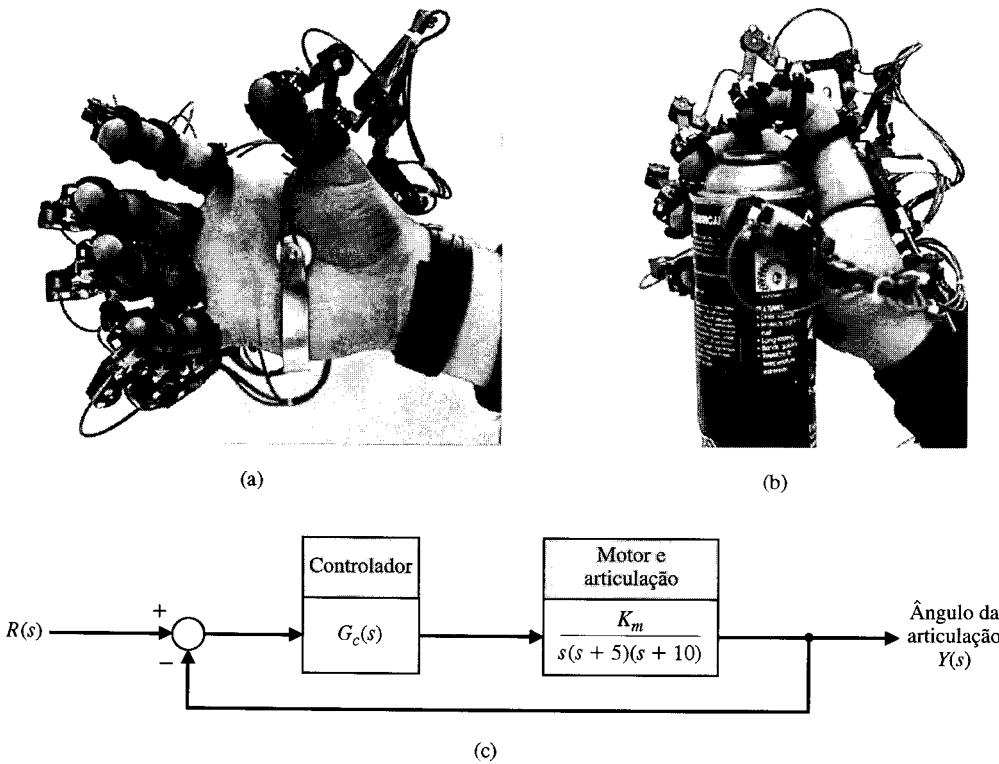


Fig. PP12.4 O sistema Dexterous Hand Master.

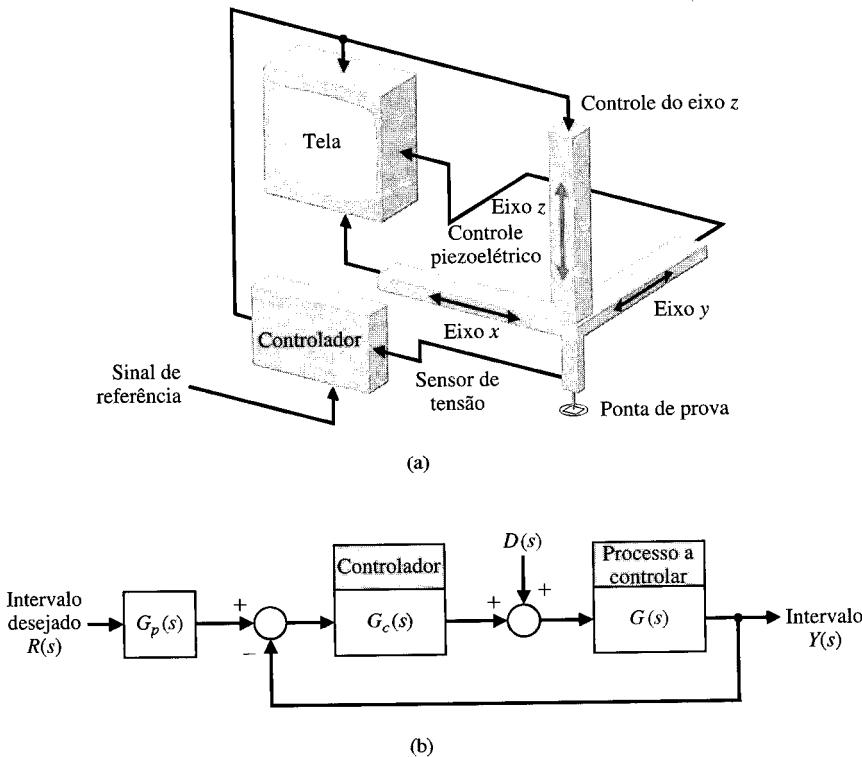


Fig. PP12.5 Controle de microscópio.

A exatidão requerida do sistema de controle de posição é da ordem de  $10^{-9}$  do metro. O STM funciona com sensores piezoelétricos que mudam de tamanho quando varia a tensão elétrica aplicada ao material. O “obturador” no STM é uma sonda fina de tungstênio, cuja extremidade de terra pode consistir em um único átomo e medir até 0,2 nanômetro de espessura. Controles piezoelétricos manobram a extremidade da ponta de prova no interior de uma faixa de um a dois nanômetros da superfície de um exemplar condutor — tão perto que as camadas de elétrons do átomo da sonda e do átomo mais próximo do exemplar se superpõem. Um mecanismo de retroação sente as variações da corrente e modifica a tensão aplicada a um terceiro controle, o do eixo z. O eixo z piezelétrico movimenta a sonda verticalmente para estabilizar a corrente e manter constante o espaço entre a ponta de prova e a superfície. A Fig. PP12.5(a) mostra o sistema de controle e a Fig. PP12.5(b), o diagrama de blocos correspondente. O processo a controlar é

$$G(s) = \frac{17.640}{s(s^2 + 59.4s + 1764)},$$

e o controlador é escolhido com dois zeros reais e iguais de modo que

$$G_c(s) = \frac{K_2(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{s}.$$

(a) Usar o método de projeto ITAE para determinar  $G_c(s)$ . (b) Determinar a resposta do sistema, com e sem filtro prévio,  $G_p(s)$ , a um degrau. (c) Determinar a resposta do sistema a uma perturbação quando  $D(s) = 1/s$ . (d) Usando um filtro prévio e o controlador  $G_c(s)$  das partes (a) e (b), determinar a resposta real do sistema quando o processo a controlar muda para

$$G(s) = \frac{16.000}{s(s^2 + 40s + 1600)}.$$

**PP12.6** O sistema descrito na Fig. PP12.5 deve ser projetado usando as técnicas no domínio de freqüência descritas na Seção 12.6 com

$$G_c(s) = \frac{K_2(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{s}.$$

Selecionar os coeficientes de  $G_c(s)$  de modo que a margem de fase seja aproximadamente  $70^\circ$ . Obter a resposta do sistema, com e sem filtro prévio,  $G_p(s)$ , para uma entrada em degrau.

**PP12.7** A aplicação da teoria de controle na neurofisiologia como curso de compreensão global tem uma longa história. Há muito tempo, desde o início do século, muitos pesquisadores descreveram um fenômeno de controle dos músculos devido à ação de retroação das fibras do músculo e de sensores baseados em uma combinação do comprimento do músculo e na sua taxa de variação do comprimento.

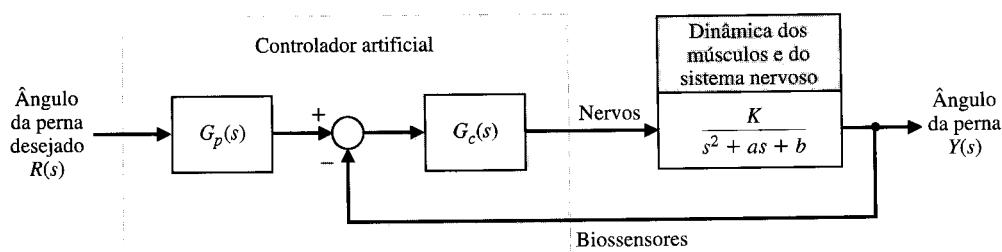


Fig. PP12.7 Controle artificial da posição em pé e da articulação da perna.

Esta análise de regulação do músculo foi baseada na teoria de sistemas de controle com uma única entrada e uma única saída. Um exemplo disto é a proposta de que o reflexo de distensão seja uma observação experimental da estratégia de controle de um motor, nominalmente, o controle do comprimento do músculo por meio das fibras. Outros propuseram mais tarde a regulação individual da rigidez dos músculos (por meio de sensores de comprimento e de força) como uma estratégia de controle de um motor [34].

A Fig. PP12.7 mostra um modelo do mecanismo de equilíbrio na posição ereta dos seres humanos. Considere-se o caso de um paraplégico que perdeu seu mecanismo de equilíbrio na posição ereta. Propõe-se acrescentar um controlador artificial que permita à pessoa permanecer de pé e articular suas pernas. (a) Projetar um controlador quando os valores normais dos parâmetros são  $K = 10$ ,  $a = 12$  e  $b = 100$ , a fim de obter uma resposta ao degrau com ultrapassagem percentual inferior a 10%, erro de estado estacionário menor que 5% e um tempo de assentamento (critério dos 2%) inferior a 2 segundos. Experimentar os seguintes controladores: com ganho proporcional, PI, PD e PID. (b) Quando uma pessoa está fatigada, os parâmetros podem mudar para  $K = 15$ ,  $a = 8$  e  $b = 144$ . Examinar o desempenho deste sistema com os controladores da parte (a). Preparar uma tabela comparando os resultados das partes (a) e (b).

**PP12.8** O objetivo é projetar um sistema de controle de elevador de modo que este se desloque de um andar a outro rapidamente e pare exatamente no andar selecionado (Fig. PP12.8). O elevador conterá de um a três ocupantes. Contudo, o peso do elevador deverá ser maior que o peso dos ocupantes; pode-se admitir que o elevador pese 1000 libras (cerca de 450 kg) e que cada ocupante pese 150 libras (cerca de 70 kg). Projetar um sistema para controlar o elevador de forma precisa com tolerância de centímetro. Admitir que o grande motor CC responsável pelo acionamento é controlado pelo campo. Admitir também que a constante de tempo do motor e da carga é de um segundo, a constante de tempo do amplificador de potência que alimenta o motor é meio segun-

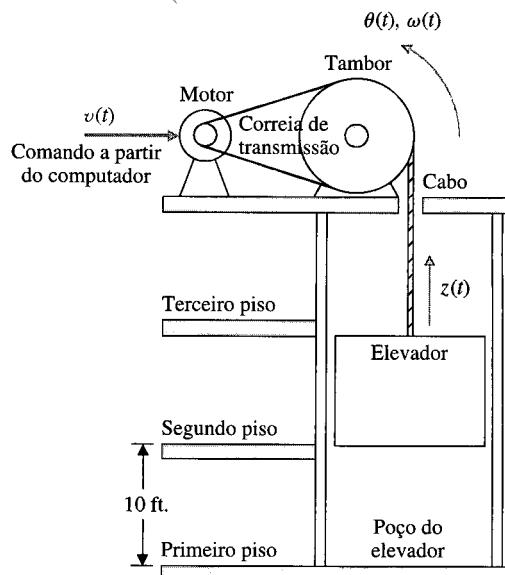
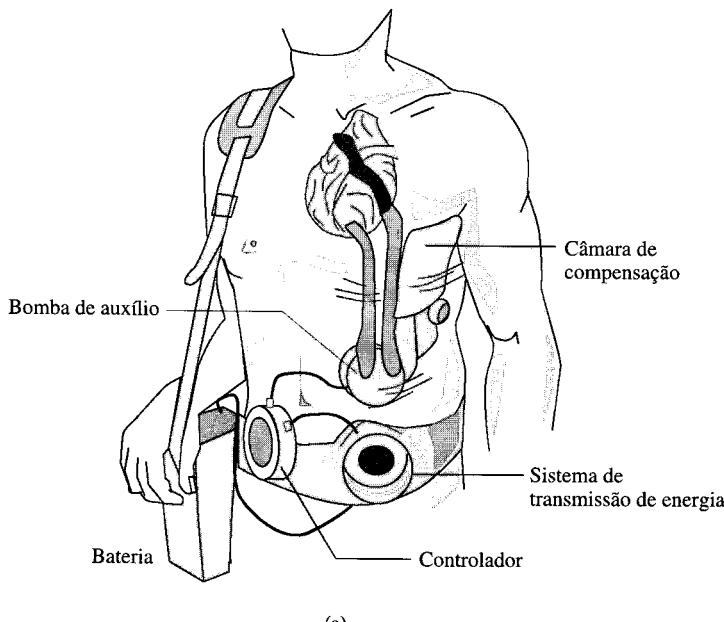


Fig. PP12.8 Controle de posição do elevador.

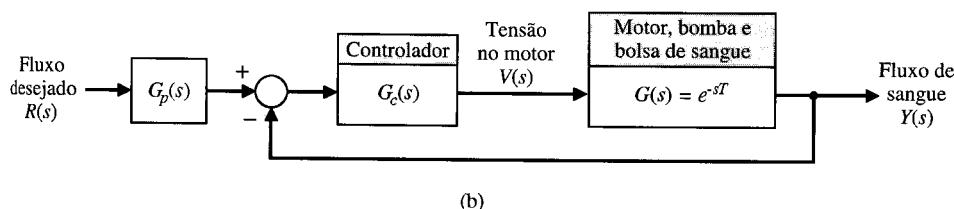
do e que a constante de tempo do circuito de campo é insignificante. Busca-se uma ultrapassagem menor que 6% e um tempo de assentamento (critério dos 2%) inferior a 4 segundos.

**PP12.9** Pacientes portadores de doenças cardiológicas e com resistência do músculo do coração inferior à normal podem se beneficiar de um dispositivo de assistência. Um dispositivo elétrico de assistência ventricular (EVAD)<sup>5</sup> converte energia elétrica em flu-

<sup>5</sup> Do inglês Electric Ventricular Assist Device. (N.T.)



(a)



(b)

Fig. PP12.9 (a) Dispositivo elétrico de assistência ventricular para pacientes de cardiologia. (b) Sistema de controle com retroação.

xo sangüíneo movimentando uma placa de encontro a uma bolsa contendo sangue. A placa oscila num sentido e noutro a fim de ejetar sangue na sístole e permitir que a bolsa se encha de sangue na diástole. O EVAD pode ser implementado em cascata e em paralelo com o coração natural intacto, como mostra a Fig. PP12.9(a). O EVAD é alimentado por meio de baterias recarregáveis e a energia elétrica é transmitida indutivamente através da pele por intermédio de um sistema de transmissão. As baterias e o sistema de transmissão limitam a energia elétrica armazenada e o pico de potência transmitida. Conseqüentemente, é desejável que se acione o EVAD de modo a minimizar o consumo de energia elétrica [29].

O EVAD possui uma única entrada, a tensão aplicada ao motor, e uma única saída, o fluxo sangüíneo. O sistema de controle do EVAD executa duas tarefas principais: ajustar a tensão elétrica aplicada ao motor para acionar a placa de acordo com o curso de deslocamento desejado e variar o fluxo sangüíneo do EVAD para atender a demanda de saída cardíaca do corpo. O controlador do fluxo sangüíneo ajusta a vazão de sangue variando a freqüência da batida do EVAD.

Um modelo do sistema de controle com retroação está mostrado na Fig. PP12.9(b). O motor, a bomba e a bolsa de sangue podem ser modelados como um retardo puro com  $T = 1$  segundo. O objetivo é obter uma resposta ao degrau com menos de 5% de erro estacionário e com menos de 10% de ultrapassagem. Além disto, para prolongar a vida das baterias, a tensão é limitada a 30 V. Projetar um controlador usando (a)  $G_c(s) = K/s$ , (b) um controlador PI e (c) um controlador PID. Comparar os resultados dos três controladores registrando em uma tabela o percentual de ultrapassagem, o tempo de pico, o tempo de assentamento (critério dos 2%) e o valor máximo de  $v(t)$ .

**PP12.10** Um braço de um robô espacial está mostrado na Fig. PP12.10(a). O diagrama de blocos referente ao controle do braço está mostrado na Fig. PP12.10(b). A função de transferência do motor e do braço é

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 10)}.$$

(a) Se  $G_c(s) = K$ , determinar o ganho necessário para uma ultrapassagem de 4,5% e traçar o gráfico da resposta a um degrau. (b) Projetar um controlador proporcional e derivativo (PD) usando o método ITAE e  $\omega_n = 10$ . Determinar o filtro prévio necessário  $G_p(s)$ . (c) Projetar um controlador PI e um filtro prévio usando o

método ITAE. (d) Projetar um controlador PID e um filtro prévio usando o método ITAE com  $\omega_n = 10$ . (e) Determinar o efeito de uma perturbação em degrau unitário para cada um dos projetos. Registrar o valor máximo de  $y(t)$  e o valor final de  $y(t)$  para a perturbação de entrada. (f) Determinar, para cada um dos projetos anteriores, a ultrapassagem, o tempo de pico e o tempo de assentamento (critério dos 2%) para uma entrada em degrau  $R(s)$ . (g) O processo a controlar é sujeito a variações devidas às mudanças na carga. Determinar a magnitude da sensibilidade para  $\omega = 5$ ,  $|S_G^T(j\omega)|$ , onde

$$T = \frac{GG_c(s)}{1 + GG_c(s)}.$$

(h) Com base nos resultados das partes (e), (f) e (g) selecionar o melhor controlador.

**PP12.11** Um sistema fotovoltaico é montado em uma estação espacial a fim de produzir energia elétrica para a estação. Os painéis fotovoltaicos devem seguir o Sol com boa precisão a fim de maximizar a energia produzida. O sistema utiliza um motor CC tal que a função de transferência do conjunto do painel com o motor é

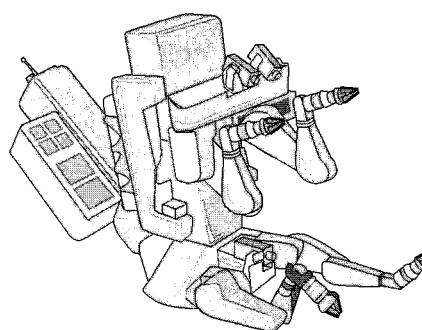
$$G(s) = \frac{1}{s(s + 25)}.$$

Será selecionado um controlador  $G_c(s)$  supondo que se dispõe de um sensor óptico para rastrear com precisão a posição do Sol, e assim,  $H(s) = 1$ .

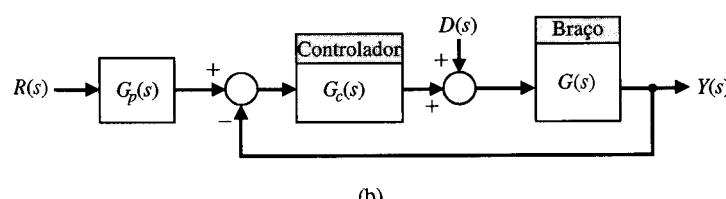
O objetivo é projetar  $G_c(s)$  de modo que (1) a ultrapassagem percentual para uma entrada em degrau seja menor que 7% e (2) o erro de estado estacionário para uma entrada em rampa seja menor ou igual a 1%. Determinar o melhor controlador por avanço de fase. Examinar a robustez do sistema com relação a uma variação de 10% no valor da constante de tempo do motor.

**PP12.12** Os sistemas de suspensão eletromagnética para trens que se deslocam sobre um colchão de ar são conhecidos como trens com levitação magnética (*maglev*). Um trem deste tipo usa um sistema de ímãs supercondutores [17]. Ele utiliza bobinas supercondutoras e a distância de levitação  $x(t)$  é inherentemente instável. O modelo da levitação é

$$G(s) = \frac{X(s)}{V(s)} = \frac{K}{(s\tau_1 + 1)(s^2 - \omega_1^2)},$$



(a)



(b)

**Fig. PP12.10** Controle de robô espacial.

onde  $V(s)$  é a tensão elétrica aplicada à bobina;  $\tau_1$  é a constante de tempo do ímã e  $\omega_1$  é a frequência natural. O sistema utiliza um sensor de posição com uma constante de tempo insignificante. Um trem se deslocando a uma velocidade de 250 km/h teria  $\tau_1 = 0,75$  segundo e  $\omega_1 = 75$  rad/s. Determinar um controlador que possa manter uma levitação precisa e estável quando ocorrerem perturbações ao longo da via férrea. Usar o modelo de sistema da Fig. 12.1.

**PP12.13** Reconsidere-se o problema do veículo explorador de Marte descrito em PP6.2. O sistema usa um controlador PID, e se deseja um sistema robusto. As especificações do sistema são: (1) ultrapassagem máxima igual a 18%, (2) tempo de assentamento (critério dos 2%) inferior a 2 segundos, (3) tempo de subida igual ou maior que 0,20 para limitar os requisitos de potência, (4) margem de fase maior que  $65^\circ$ , (5) margem de ganho superior a 8 dB, (6) máximo valor da sensibilidade em relação a raízes (magnitude das partes real e imaginária) menor que 1. Selecionar o melhor valor do ganho  $K$ .

## PROBLEMAS COM MATLAB

**PM12.1** Um sistema com retroação a malha fechada está mostrado na Fig. PM12.1. Usar o MATLAB para obter um gráfico de  $|S_K^T|$  em função de  $\omega$ . Traçar, no mesmo gráfico,  $|T(s)|$  em função de  $\omega$ , onde  $T(s)$  é a função de transferência a malha fechada. Usando as funções `cctrb` e `obsv`, mostrar que o sistema é controlável e observável.

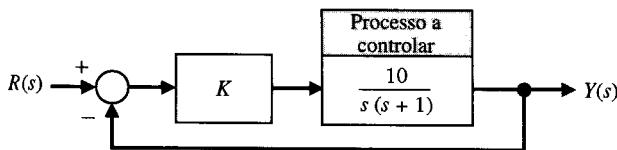


Fig. PM12.1 Sistema com retroação a malha fechada com ganho  $K$ .

**PM12.2** O elerom de um avião pode ser modelado como um sistema de primeira ordem

$$G(s) = \frac{p}{s + p},$$

onde  $p$  varia de um avião para outro. Obter uma família de respostas ao degrau para um sistema de eleron na configuração com retroação mostrada na Fig. PM12.2.

O valor nominal de  $p = 10$ . Calcular um valor razoável para  $K$  de modo que a resposta ao degrau (com  $p = 10$ ) apresente U.P.

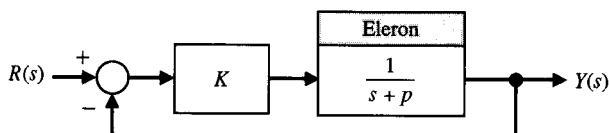


Fig. PM12.2 Sistema de controle para o eleron do avião.

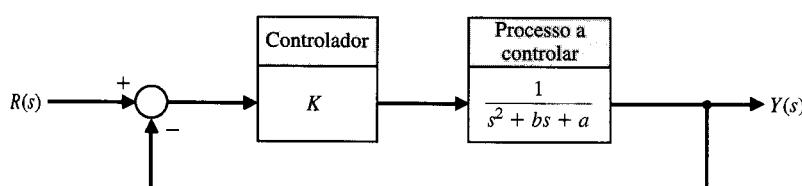


Fig. PM12.4 Sistema de controle com retroação com um parâmetro impreciso  $b$ .

**PP12.14** Um problema de teste consiste no sistema de massa-mola mostrado na Fig. PP12.14, que representa uma estrutura flexível. Sejam  $m_1 = m_2 = 1$  e  $0,5 \leq k \leq 2,0$  [33]. É possível medir  $x_1$  e  $x_2$  e usar um controlador antes de  $u(t)$ . Obter a descrição do sistema, escolher uma estrutura de controle e projetar um sistema robusto. Determinar a resposta do sistema para uma perturbação em degrau unitário. Admitir que a variável de saída  $x_2(t)$  é a variável a ser controlada.

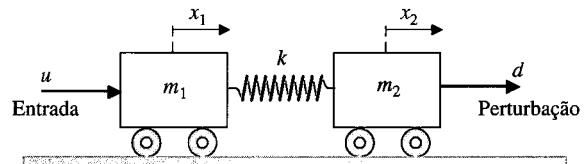


Fig. PP12.14

$< 5\%$  e  $T_s < 0,1$ s. Em seguida, usar o MATLAB para obter as respostas ao degrau referentes a  $0,1 < p < 20$ , com o ganho  $K$  determinado anteriormente.

**PM12.3** Considere-se o sistema de controle da Fig. PM12.3, onde

$$G(s) = \frac{1}{Js^2}.$$

Sabe-se que o valor de  $J$  muda lentamente com o tempo, embora, para fins de projeto, seja escolhido o valor nominal  $J = 10$ .

- (a) Projetar um compensador PID (designado por  $G_c(s)$ ) para obter uma margem de fase superior a  $45^\circ$  e uma banda passante menor que 5 rad/s.
- (b) Usando o controlador PID projetado na parte (a), desenvolver um script em MATLAB para gerar o gráfico da margem de fase à medida que  $J$  varia de  $1 \leq J \leq 30$ .

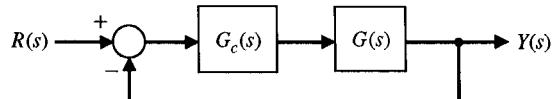
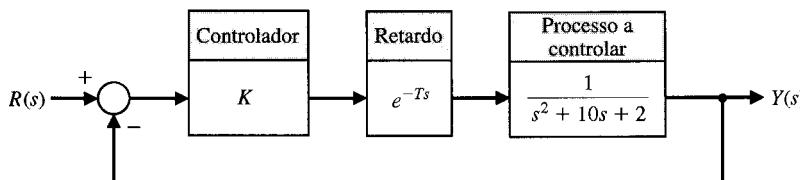


Fig. PM12.3 Sistema de controle com retroação com compensação.

**PM12.4** Considere-se o sistema de controle com retroação da Fig. PM12.4. O valor exato do parâmetro  $b$  é desconhecido; contudo, para fins de projeto, é adotado o valor nominal  $b = 4$ . O valor de  $a = 8$  é conhecido com exatidão.

- (a) Projetar um controlador proporcional  $K$  de modo que a resposta do sistema a malha fechada para uma entrada em degrau apresente um tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 5 segundos e uma ultrapassagem menor que 10%. Usar o valor nominal de  $b$  no projeto.

- (b) Investigar os efeitos das variações no parâmetro  $b$  sobre a resposta ao degrau unitário do sistema a malha fechada. Fazer  $b = 0, 1, 4$  e  $40$  e traçar em um mesmo gráfico a resposta ao degrau associada a cada um dos valores de  $b$ . Em todos os casos, utilizar o controlador proporcional da parte (a). Discutir os resultados.



**Fig. PM12.6** Um processo industrial controlado com um retardo na malha.

**PM12.5** Um modelo de uma estrutura flexível é dado por

$$G(s) = \frac{(1 + k\omega_n^2)s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)},$$

onde  $\omega_n$  é a freqüência natural do modo flexível e  $\zeta$  é a relação de amortecimento correspondente. De um modo geral é difícil conhecer precisamente o amortecimento estrutural, enquanto que a freqüência natural pode ser prevista mais exatamente usando técnicas de modelagem bem conhecidas. Admitir os valores nominais de  $\omega_n = 2$  rad/s,  $\zeta = 0,005$  e  $k = 0,1$ .

(a) Projetar um compensador por avanço de fase para atender as seguintes especificações: (1) resposta do sistema a malha fechada para uma entrada em degrau unitário com um tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 200 segundos e (2) ultrapassagem menor que 50%.

(b) Com o controlador da parte (a), investigar a resposta do sistema a malha fechada para uma entrada em degrau unitário com  $\zeta = 0,005; 0,1$  e 1. Traçar em um mesmo gráfico as várias respostas ao degrau unitário e discutir os resultados.

(c) Do ponto de vista de sistemas de controle, é preferível ter o amortecimento real da estrutura flexível menor ou maior que o valor de projeto? Explicar.

**PM12.6** Sabe-se que o processo industrial mostrado na Fig. PM12.6 possui um retardo na malha. Na prática, quase sempre não se pode determinar com exatidão a magnitude dos retardos do sistema. A magnitude do retardo pode mudar de forma imprevisível em função das condições ambientais do processo. Um sistema de con-

trole robusto deve ser capaz de operar satisfatoriamente em presença de retardos no sistema.

(a) Desenvolver um script em MATLAB para calcular e traçar o gráfico da margem de fase do processo industrial da Fig. PM12.6 quando o retardo,  $T$ , variar entre 0 e 5 segundos. Usar a função `pade` com uma aproximação de segunda ordem para representar o retardo. Traçar o gráfico da margem de fase em função do retardo.

(b) Determinar o retardo máximo permitido para que se tenha um sistema estável. Usar o gráfico produzido na parte (a) para calcular, aproximadamente, o valor máximo do retardo.

**PM12.7** Uma malha com retroação unitária negativa possui a função de transferência de malha

$$GH(s) = \frac{a(s - 1)}{s^2 + 2s + 1}$$

Sabe-se, a partir de conhecimentos básicos sobre a física do problema, que o parâmetro  $a$  pode variar somente entre  $0 < a < 1$ . Desenvolver um script em MATLAB para gerar os seguintes gráficos:

(a) Erro de rastreamento em estado estacionário devido a uma entrada em degrau unitário negativo (isto é,  $R(s) = -1/s$ ) em função do parâmetro  $a$ .

(b) O valor máximo inicial do percentual de ultrapassagem inferior (ou superior) em função do parâmetro  $a$ .

(c) A margem de ganho em função do parâmetro  $a$ .

(d) Com base nos resultados das partes de (a) a (c), comentar a robustez do sistema com respeito a variações no parâmetro  $a$  em termos de erros estacionários, estabilidade e resposta transitória.

## TERMOS E CONCEITOS

**Controlador de processo** Ver controlador PID.

**Controlador de três modos** Ver controlador PID.

**Controlador de três termos** Ver controlador PID.

**Controlador PID** Um controlador com três termos no qual a saída é a soma de um termo proporcional, de um termo integrador e de um termo derivativo, com um ganho ajustável para cada termo.

**Filtro prévio** Uma função de transferência,  $G_p(s)$ , que filtra o sinal de entrada  $R(s)$  antes do cálculo do sinal de erro.

**Sistema de controle robusto** Um sistema que apresenta desempenho desejado em presença de incertezas significativas do processo a controlar.

## CAPÍTULO 13

# *Sistemas de Controle Digital*

- 13.1 Introdução
- 13.2 Aplicações de Sistemas de Controle com Computador Digital
- 13.3 Sistemas com Dados Amostrados
- 13.4 Transformada z
- 13.5 Sistemas com Retroação a Malha Fechada com Dados Amostrados
- 13.6 Análise de Estabilidade no Plano z
- 13.7 Desempenho de um Sistema de Segunda Ordem com Dados Amostrados
- 13.8 Sistemas a Malha Fechada com Compensação Digital por Computador
- 13.9 Projeto de um Sistema de Controle do Movimento de uma Mesa Transportadora
- 13.10 O Lugar das Raízes de Sistemas com Controle Digital
- 13.11 Implementação de Controladores Digitais
- 13.12 Sistemas de Controle Digital Usando MATLAB
- 13.13 Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco
- 13.14 Sumário

## APRESENTAÇÃO

Um computador digital pode servir como compensador ou controlador em um sistema de controle com retroação. Como o computador recebe dados somente a intervalos específicos, é necessário desenvolver um método para descrever e analisar o desempenho de sistemas de controle por computador.

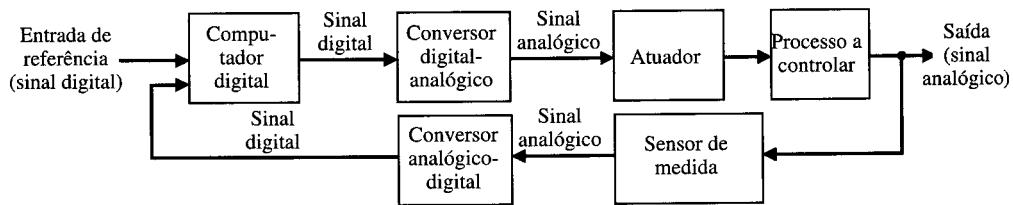
O sistema com computador utiliza dados amostrados em intervalos preestabelecidos, resultando em séries temporais de sinais. Estas séries temporais, chamadas de dados amostrados, podem ser transformadas para o domínio  $s$  e, finalmente, para o domínio  $z$  por meio da relação  $z = e^{st}$ . O domínio de freqüência complexa em termos de  $z$  possui propriedades semelhantes às do domínio  $s$  de Laplace.

Pode-se usar a transformada  $z$  de uma função de transferência para analisar a estabilidade e a resposta transitória de um sistema. Deste modo, pode-se determinar, facilmente, a resposta de um sistema com retroação a malha fechada dotado de um computador digital no papel de um bloco compensador (ou controlador). Pode-se usar também o método do lugar das raízes para determinar a localização das raízes da equação característica. Estes sistemas de controle com computador são amplamente usados na indústria. Eles desempenham também um importante papel no controle de processos industriais, que utilizam uma combinação de um computador e de um atuador operando juntos na realização de uma série de tarefas. Este capítulo é concluído com o projeto de um controlador digital para o Exemplo de Projeto Seqüencial: Sistema de Leitura de Acionador de Disco.

## 13.1 INTRODUÇÃO

A utilização de computadores digitais como dispositivo compensador (controlador) cresceu de forma impressionante durante as duas últimas décadas [1, 2]. A Fig. 13.1 mostra o diagrama de blocos de um sistema de controle digital de uma única malha. Nesta configuração de sistema, o computador digital recebe o erro em forma digital e executa cálculos a fim de fornecer uma saída em forma digital. O computador pode ser programado para fornecer uma saída de modo que o desempenho do processo a controlar seja próximo ou igual ao desempenho desejado. Muitos computadores são capazes

**Fig. 13.1** Diagrama de blocos de um sistema de controle com computador, incluindo os conversores de sinal. Os sinais são indicados como analógicos e digitais.



de receber e manipular diversas entradas. Deste modo um sistema de controle com computador digital pode ser, quase sempre, um sistema multivariável.

O computador digital recebe e trata sinais em forma digital (numérica), em contraste com os sinais contínuos [3]. Um **sistema de controle digital** usa sinais digitais e um computador digital para controlar processos. Os dados de medição são convertidos da forma analógica para a forma digital por meio do conversor analógico-digital mostrado na Fig. 13.1. Depois de processar os sinais de entrada, o computador digital fornece uma saída em forma digital. Esta saída é, então, convertida em forma analógica através do conversor digital-analógico mostrado na Fig. 13.1.

## 13.2 APLICAÇÕES DE SISTEMAS DE CONTROLE COM COMPUTADOR DIGITAL

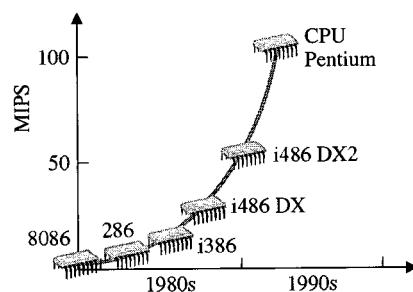
O número total de sistemas de controle por computador instalado na indústria aumentou nas três últimas décadas [2]. Atualmente há cerca de 100 milhões de sistemas de controle usando computadores, embora o tamanho e a capacidade dos computadores em utilização possam variar de forma significativa. Considerando-se somente os sistemas de controle por computador de natureza relativamente complexa, como o controle de processos químicos ou de aviões, o número de sistemas de controle por computador é de aproximadamente 20 milhões.

Um computador digital consiste em uma unidade central de processamento (CPU),<sup>1</sup> de unidades de entrada e de saída e de uma unidade de memória. O porte e a potência de um computador irá variar de acordo com o tamanho, com a velocidade e com a potência computacional da CPU, bem como com o porte, com a velocidade e com a organização da CPU. Pequenos computadores, chamados de **minicomputadores**, se tornaram muito comuns a partir de 1980. Computadores poderosos, mas no entanto baratos, chamados de **microcomputadores**, que utilizam palavras de 16 bits ou de 32 bits, se tornaram corriqueiros. Estes sistemas usam um microprocessador como CPU. Em consequência, a natureza da tarefa de controle, o volume de dados necessários na memória e a velocidade de cálculo requerida irão ditar a escolha dentre os computadores disponíveis.

O tamanho dos computadores e o custo dos dispositivos lógicos ativos usados na construção dos computadores diminuíram, ambos, de forma exponencial. O número de componentes ativos por centímetro cúbico aumentou, de modo que o computador real teve seu tamanho reduzido. Além disto, a velocidade dos computadores aumentou exponencialmente. Estima-se que a venda de minicomputadores e de microcomputadores em 1994 atingiu, nos Estados Unidos, uma cifra superior a 50 bilhões de dólares. Com a disponibilidade de microprocessadores de pequenas dimensões, baratos e rápidos, muitos dos controles de processos industriais e comerciais tendem a usar computadores nos sistemas de controle. O desempenho dos microprocessadores da INTEL, mostrado na Fig. 13.2, ilustra o desenvolvimento de dispositivos de cálculo potentes.

Os sistemas de controle digital são usados em muitas aplicações, dentre as quais: máquinas ferramenta, processos de usinagem de metais, processos químicos, controle de aviões e controle do tráfego de automóveis [4–8]. Um exemplo de sistema de controle com computador usado na indústria aeronáutica está mostrado na Fig. 13.3. Os sistemas de controle automático por computador são usa-

**Fig. 13.2** O desenvolvimento dos microprocessadores da INTEL, medido em milhões de instruções por segundo (Fonte: INTEL).



<sup>1</sup>CPU é a sigla para *Central Processing Unit (N.T.)*.



**Fig. 13.3** A cabine de comando dos Boeing 757 e 767 destaca a eletrônica de controle digital, incluindo os sistemas de monitoração dos motores e de alerta à tripulação. Todos os sistemas de controle estão dentro do alcance de cada um dos pilotos. Inclui-se um sistema de referência inercial com giroscópios e um indicador eletrônico de altitude. Um sistema computadorizado de supervisão e controle do voo integra as funções de navegação, pilotagem e desempenho dos dados. Quando acoplado ao sistema de controle automático do voo (piloto automático), o sistema de supervisão e controle propicia o ajuste do empuxo dos motores e o guiamento da rota de voo durante todas as fases, desde os instantes iniciais imediatamente após a decolagem até a aproximação final e a aterrissagem. O sistema pode prever as velocidades e altitudes que resultarão na melhor economia de combustível e comandar o avião para seguir as trajetórias mais eficientes quanto ao uso do combustível ou de "menor tempo" de viagem. (Cortesia da Boeing Airplane Co.)

dos em uma gama diversificada que abrange desde a medida de refração do cristalino do olho humano até o controle da centelha de ignição ou da relação ar-combustível nos motores de combustão interna dos automóveis. Estas últimas inovações são necessárias para se reduzir as emissões poluentes e aumentar a economia de combustível.

As vantagens de utilizar o controle digital incluem aumento na sensibilidade da medição; o uso de sinais codificados digitalmente; sensores e transdutores digitais e microprocessadores; sensibilidade reduzida ao ruído dos sinais; capacidade de reconfigurar facilmente, via software, o algoritmo de controle. A melhoria na sensibilidade resulta dos sinais de níveis baixos de energia requeridos pelos sensores e dispositivos digitais. O uso de sinais codificados digitalmente permite uma aplicação ampla a dispositivos e sistemas de comunicações digitais. Os sensores e os transdutores digitais podem, de maneira eficaz, medir, transmitir e acoplar sinais e dispositivos. Além disto, muitos sistemas são inherentemente digitais por emitirem sinais sob a forma de pulsos. Radares de rastreamento e satélites espaciais constituem exemplos de sistemas digitais.

### 13.3 SISTEMAS COM DADOS AMOSTRADOS

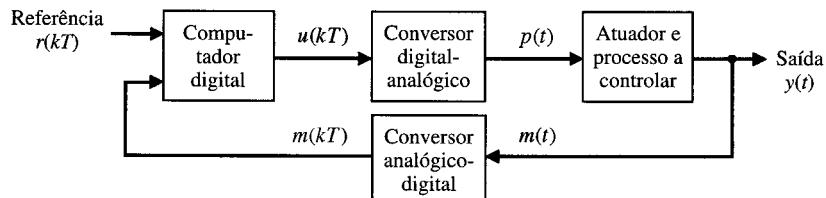
Os computadores usados em sistemas de controle são interligados ao atuador e ao processo por meio de conversores de sinal. A saída do computador é processada por um conversor digital-analógico.<sup>2</sup> Será admitido que todos os números que entram no computador ou deixam o computador o fazem em um mesmo período fixo  $T$ , chamado **período de amostragem**. Assim, por exemplo, a entrada de referência mostrada na Fig. 13.4 é uma sequência de valores  $r(kT)$  das amostras. As variáveis  $r(kT)$ ,  $m(kT)$  e  $u(kT)$  são sinais discretos em oposição a  $r(t)$ ,  $m(t)$  e  $u(t)$ , que são funções contínuas no tempo.

---

**Os dados obtidos para as variáveis de sistema somente a intervalos discretos, e representados por  $x(kT)$ , são chamados dados amostrados ou sinal discreto.**

---

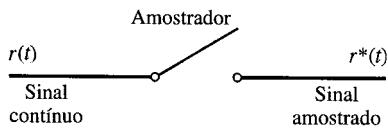
<sup>2</sup>Conhecido usualmente como conversor D/A (N.T.).



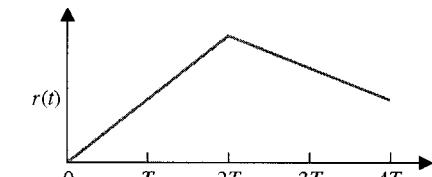
**Fig. 13.4** Um sistema de controle digital.

Um amostrador é basicamente uma chave que se fecha a cada  $T$  segundos por um breve instante de tempo. Considere-se um amostrador ideal como o mostrado na Fig. 13.5. A entrada é  $r(t)$  e a saída é  $r^*(t)$ , onde  $nT$  é o instante corrente de amostragem e o valor corrente de  $r^*(t)$  é  $r(nT)$ . Tem-se, então,  $r^*(t) = r(nT)\delta(t - nT)$ , em que  $\delta$  é a função impulso.

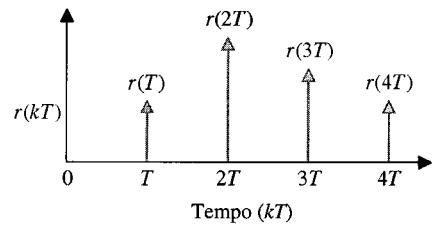
Considere-se a amostragem de um sinal  $r(t)$ , como está mostrado na Fig. 13.5, no sentido de se obter  $r^*(t)$ . Retrata-se, então, a série relativa a  $r^*(t)$  como um trem de impulsos começando em  $t = 0$ , espaçados de  $T$  segundos e com amplitudes de valor  $r(kT)$ . Por exemplo, considere-se o sinal  $r(t)$  mostrado na Fig. 13.6(a). O sinal amostrado está mostrado na Fig. 13.6(b), na qual os impulsos estão representados por setas verticais de magnitude  $r(kT)$ .



**Fig. 13.5** Um amostrador ideal com uma entrada  $r(t)$ .



(a)



(b)

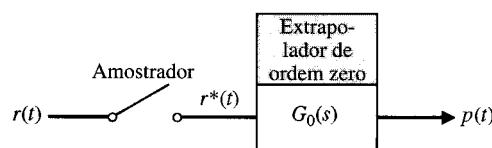
**Fig. 13.6** (a) Um sinal de entrada  $r(t)$  e (b) o sinal amostrado  $r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\delta(t - kT)$ . As setas verticais indicam impulsos.

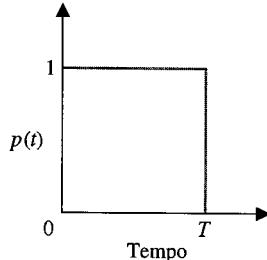
O conversor digital-analógico serve como um dispositivo que converte o sinal amostrado  $r^*(t)$  em um sinal contínuo  $p(t)$ . O conversor digital analógico pode usualmente ser representado por um circuito extrapolar de ordem zero (ZOH), como está mostrado na Fig. 13.7. O extrapolar de ordem zero recebe o valor  $r(kT)$  e o mantém constante para  $kT \leq t < (k + 1)T$ , como está mostrado na Fig. 13.8 para  $k = 0$ . Assim, será usado o valor  $r(kT)$  durante o período de amostragem.

Um amostrador e um extrapolar de ordem zero podem seguir com exatidão o sinal de entrada se  $T$  for pequeno em comparação com as variações transitórias do sinal. A Fig. 13.9 mostra a resposta de um amostrador e de um extrapolar de ordem zero para uma entrada em rampa. Finalmente, a resposta de um amostrador e de um extrapolar de ordem zero para um sinal que decresce exponencialmente é mostrado na Fig. 13.10, usando dois valores de período de amostragem. Obviamente a saída  $p(t)$  tenderá à entrada  $r(t)$  à medida que  $T$  tender a zero (como é frequente ao se fazer a amostragem).

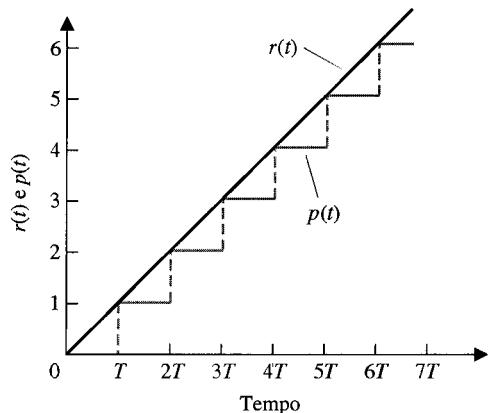
**Fig. 13.7** Um amostrador e um circuito de retenção de ordem zero (Zero-order hold).<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Também designado como extrapolar de ordem zero ou pela sigla ZOH (do inglês Zero-Order Hold). (N.T.).

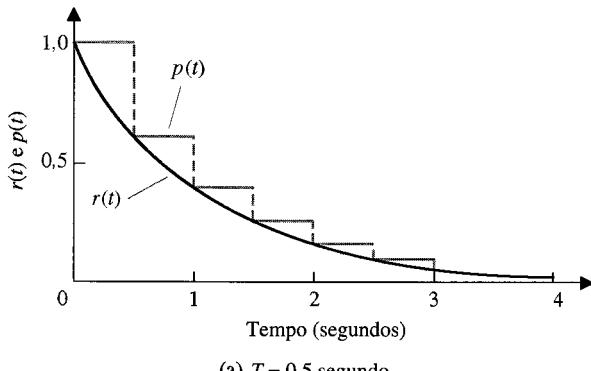




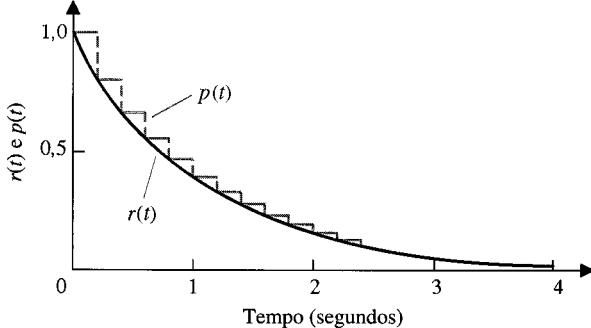
**Fig. 13.8** A resposta de um extrapolador de ordem zero para um impulso de entrada  $r(kT)$ , que é igual a 1 quando  $k = 0$  e é igual a zero quando  $k \neq 0$  de modo que  $r^*(t) = r(0)\delta(t)$ .



**Fig. 13.9** Resposta de um amostrador com extrapolador de ordem zero para uma entrada em rampa  $r(t) = t$ .



(a)  $T = 0,5$  segundo



(b)  $T = 0,2$  segundo

**Fig. 13.10** Resposta de um amostrador com extrapolador de ordem zero para uma entrada  $r(t) = e^{-t}$  para dois valores do período de amostragem  $T$ .

A resposta impulsional de um extrapolador de ordem zero está mostrada na Fig. 13.8. A função de transferência de um **extrapolador de ordem zero** é

$$G_0(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT} = \frac{(1 - e^{-sT})}{s}. \quad (13.1)$$

A precisão do computador digital e dos conversores de sinal associados é limitada (ver Fig. 13.4). A **precisão** é o grau de exatidão ou de discriminação com a qual uma grandeza é estabelecida. A precisão do computador é limitada pelo comprimento de palavra finito. A precisão de um conversor análogo-digital é limitada pela capacidade de armazenar sua saída em lógica digital composta de um número finito de dígitos binários. Diz-se que o sinal convertido,  $m(kT)$ , inclui um **erro de quantização de amplitude**. Quando o erro de quantização e o erro devido ao tamanho finito da palavra do computador forem pequenos em relação à amplitude do sinal [13, 19], o sistema é suficientemente preciso e as limitações de precisão podem ser desprezadas.

### 13.4 TRANSFORMADA z

Como a saída de um amostrador ideal,  $r^*(t)$ , é uma série de impulsos com valores  $r(kT)$ , tem-se

$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\delta(t - kT), \quad (13.2)$$

para um sinal para  $t > 0$ . Usando a transformada de Laplace tem-se

$$\mathcal{L}\{r^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)e^{-ksT}. \quad (13.3)$$

Tem-se agora uma série que envolve o fator  $e^{sT}$  e suas potências. Define-se

$$z = e^{sT}, \quad (13.4)$$

onde esta relação envolve um mapeamento conforme do plano  $s$  no plano  $z$ . Define-se então uma nova transformada, chamada transformada  $z$ , tal que

$$Z\{r(t)\} = Z\{r^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)z^{-k}. \quad (13.5)$$

Como exemplo, seja determinar a transformada  $z$  da função degrau unitário  $u(t)$  [não confundir com o sinal de controle genérico,  $u(t)$ ]. Obtém-se

$$Z\{u(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}, \quad (13.6)$$

uma vez que  $u(kT) = 1$  para  $k \geq 0$ . Esta série pode ser escrita em forma fechada como<sup>4</sup>

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}. \quad (13.7)$$

De um modo geral, define-se a transformada  $z$  de uma função  $f(t)$  como

$$Z\{f(t)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}. \quad (13.8)$$

#### EXEMPLO 13.1

#### Transformada da exponencial

Seja determinar a transformada  $z$  de  $f(t) = e^{-at}$  para  $t \geq 0$ . Então

$$Z\{e^{-at}\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT}z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (ze^{+aT})^{-k}. \quad (13.9)$$

Novamente esta série pode ser escrita em forma fechada como

$$F(z) = \frac{1}{1 - (ze^{+aT})^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}. \quad (13.10)$$

De um modo geral, pode ser mostrado que

$$Z\{e^{-at}f(t)\} = F(e^{+aT}z). \blacksquare$$

#### EXEMPLO 13.2

#### Transformada da senóide

Seja determinar a transformada  $z$  de  $f(t) = \sin \omega t$  para  $t \geq 0$ . Pode-se escrever  $\sin \omega t$  como

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{2j}.$$

Portanto,

$$\sin \omega t = \left\{ \frac{e^{j\omega T}}{2j} - \frac{e^{-j\omega T}}{2j} \right\}. \quad (13.11)$$

<sup>4</sup>Convém lembrar que a série geométrica pode ser escrita  $(1 - bx)^{-1} = 1 + bx + (bx)^2 + (bx)^3 + \dots$ , se  $(bx)^2 < 1$ .

**TABELA 13.1 Transformadas z**

$x(t)$	$X(s)$	$X(z)$
$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0, \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$	1	1
$\delta(t - kT) = \begin{cases} 1 & t = kT, \\ 0 & t \neq kT \end{cases}$	$e^{-kTs}$	$z^{-k}$
$u(t)$ , degrau unitário	$1/s$	$\frac{z}{z - 1}$
$t$	$1/s^2$	$\frac{Tz}{(z - 1)^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s + a}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{1}{s(s + a)}$	$\frac{(1 - e^{-aT})z}{(z - 1)(z - e^{-aT})}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$\frac{(ze^{-aT} \sin \omega T)}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$

Então,

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \frac{1}{2j} \left( \frac{z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} \right) \\
 &= \frac{1}{2j} \left( \frac{z(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})}{z^2 - z(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) + 1} \right) \\
 &= \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}. \blacksquare
 \end{aligned} \tag{13.12}$$

A Tabela 13.1 e o Apêndice G fornecem uma tabela de transformadas z. A Tabela 13.2 apresenta um conjunto de propriedades da transformada z. Como no caso da transformada de Laplace, o interesse principal é obter a saída  $y(t)$  do sistema. Por conseguinte, deve-se usar uma transformada inversa para obter  $y(t)$  a partir de  $Y(z)$ . Pode-se obter a saída (1) expandindo-se  $Y(z)$  em série de potências, (2) em frações parciais e usando a Tabela 13.1 para obter inversa de cada termo ou (3) obtendo a transformada z inversa por meio de uma integral de inversão. Esta discussão ficará limitada aos métodos (1) e (2).

### EXEMPLO 13.3

#### Função de transferência do sistema a malha aberta

Considere-se o sistema mostrado na Fig. 13.11 para  $T = 1$ . A função de transferência do extraplador de ordem zero (Eq. 13.1) é

$$G_0(s) = \frac{(1 - e^{-sT})}{s}$$

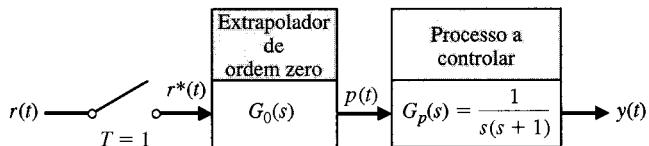
Em consequência, a função de transferência  $Y(s)/R^*(s)$  é

$$\frac{Y(s)}{R^*(s)} = G_0(s)G_p(s) = G(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s^2(s + 1)} \tag{13.13}$$

TABELA 13.2 Propriedades da Transformada z

$x(t)$	$X(z)$
1. $kx(t)$	$kX(z)$
2. $x_1(t) + x_2(t)$	$X_1(z) + X_2(z)$
3. $x(t + T)$	$zX(z) - zx(0)$
4. $tx(t)$	$-Tz \frac{dX(z)}{dz}$
5. $e^{-at}x(t)$	$X(ze^{aT})$
6. $x(0)$ , valor inicial	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ se existir o limite
7. $x(\infty)$ , valor final	$\lim_{z \rightarrow 1^-} (z - 1)X(z)$ se existir o limite e o sistema for estável; isto é, se todos os pólos de $(z - 1)X(z)$ estiverem no interior do círculo unitário $ z  = 1$ no plano z.

**Fig. 13.11** Sistema com dados amostrados, a malha aberta (sem retroação).



Expandindo em frações parciais tem-se

$$G(s) = (1 - e^{-sT}) \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right); \quad (13.14)$$

$$G(z) = Z\{G(s)\} = (1 - z^{-1}) Z\left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right). \quad (13.15)$$

Usando o conteúdo da Tabela 13.1 para obter a transformada z de cada termo, vem

$$\begin{aligned} G(z) &= (1 - z^{-1}) \left[ \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}} \right] \\ &= \left[ \frac{(ze^{-T} - z + Tz) + (1 - e^{-T} - Te^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})} \right]. \end{aligned}$$

Quando  $T = 1$ , obtém-se

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{ze^{-1} + 1 - 2e^{-1}}{(z-1)(z-e^{-1})} \\ &= \frac{0,3678z + 0,2644}{(z-1)(z-0,3678)} = \frac{0,3678z + 0,2644}{z^2 - 1,3678z + 0,3678}. \end{aligned} \quad (13.16)$$

A resposta deste sistema a um impulso unitário é obtida para  $R(z) = 1$  e então  $Y(z) = G(z) \cdot 1$ . Pode-se obter  $Y(z)$  dividindo-se o numerador pelo denominador:

$$\begin{array}{r} 0,3678z^{-1} + 0,7675z^{-2} + 0,9145z^{-3} + \dots = Y(z) \\ z^2 - 1,3678z + 0,3678 \overline{)0,3678z + 0,2644} \\ \hline 0,3678z - 0,5031 + 0,1353z^{-1} \\ \hline + 0,7675 - 0,1353z^{-1} \\ \hline + 0,7675 - 1,0497z^{-1} + 0,2823z^{-2} \\ \hline 0,9145z^{-1} - 0,2823z^{-2} \end{array} \quad (13.17)$$

Este cálculo conduz ao valor da resposta nos instantes de amostragem e pode ser estendido tanto quanto necessário para um dado  $Y(z)$ . Da Eq. (13.5) tem-se

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k}$$

Neste caso, se obtiveram os valores de  $y(kT)$ :  $y(0) = 0$ ,  $y(T) = 0,3678$ ;  $y(2T) = 0,7675$  e  $y(3T) = 0,9145$ . Observe-se que  $y(kT)$  fornece os valores de  $y(t)$  nos instantes  $t = kT$ . ■

Determinou-se  $Y(z)$ , a transformada  $z$  do sinal de saída amostrado. A transformada  $z$  do sinal de entrada amostrado é  $R(z)$ . A função de transferência no domínio  $z$  é

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = G(z). \quad (13.18)$$

Como se determinou a saída amostrada, é possível utilizar um amostrador na saída para descrever esta condição, como se vê na Fig. 13.12, que representa o sistema da Fig. 13.11 com os amostradores adicionais (fictícios). Admite-se que ambos os amostradores possuem o mesmo período de amostragem e operam de forma síncrona. Então,

$$Y(z) = G(z)R(z), \quad (13.19)$$

como requerido. É possível representar a Eq. (13.19), que é uma equação com transformada  $z$ , por meio do diagrama de blocos da Fig. 13.13.

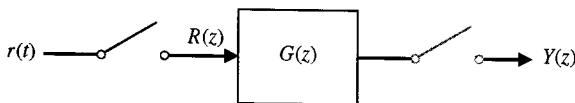


Fig. 13.12 Sistema com saída amostrada.

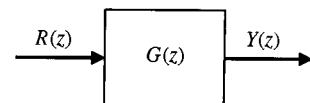


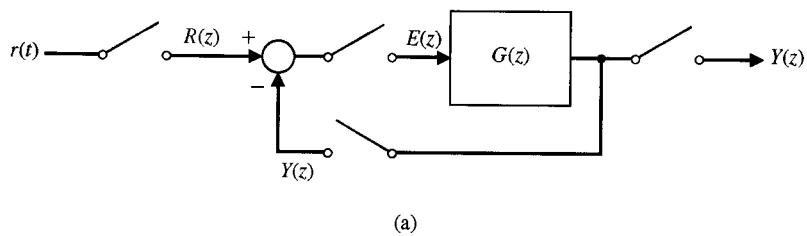
Fig. 13.13 A função de transferência com transformada  $z$  sob a forma de diagrama de blocos.

## 13.5 SISTEMAS COM RETROAÇÃO A MALHA FECHADA COM DADOS AMOSTRADOS

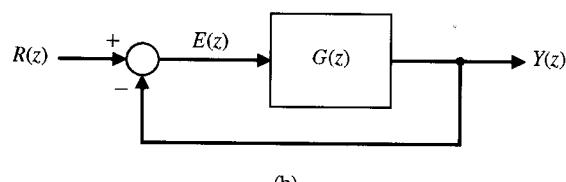
Nesta seção serão considerados os sistemas de controle a malha fechada, com dados amostrados. Considere-se o sistema mostrado na Fig. 13.14(a). A Fig. 13.14(b) mostra o modelo em transformada  $z$  deste sistema com um sinal amostrado de saída  $Y(z)$ . A função de transferência a malha fechada  $T(z)$  (usando a redução de diagrama de blocos) é

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = T(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}. \quad (13.20)$$

Admite-se aqui que  $G(z)$  é a transformada  $z$  de  $G(s) = G_0(s)G_p(s)$ , onde  $G_0(s)$  é o extrapolador de ordem zero e  $G_p(s)$  é a função de transferência do processo a controlar.

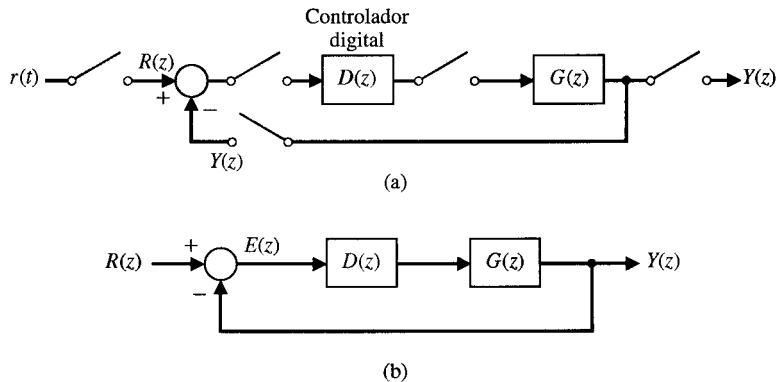


(a)



(b)

Fig. 13.14 Sistema de controle com retroação unitária.  $G(z)$  é a transformada  $z$  de  $G(s)$ , que representa o processo a controlar e o extrapolador de ordem zero.



**Fig. 13.15** (a) Sistema de controle com retroação com controlador digital. (b) Modelo em diagrama de blocos.  
Observe-se que  
 $G(z) = Z[G_0(s)G_p(s)]$ .

Um sistema de controle com retroação com computador digital está mostrado na Fig. 13.15(a). O modelo de transformada  $z$  em diagrama de blocos está mostrado na Fig. 13.15(b). A função de transferência a malha fechada é

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = T(z) = \frac{G(z)D(z)}{1 + G(z)D(z)}. \quad (13.21)$$

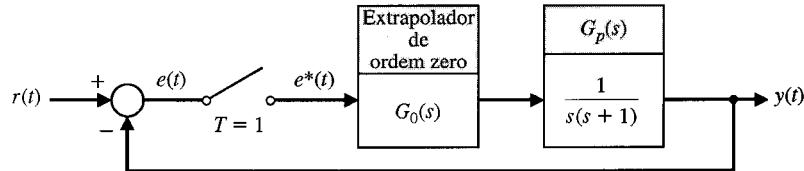
#### EXEMPLO 13.4

#### Resposta do sistema a malha fechada

Considere-se agora o sistema a malha fechada mostrado na Fig. 13.16. Obteve-se o modelo deste sistema em transformada  $z$ , como está mostrado na Fig. 13.14. Tem-se, portanto,

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)}. \quad (13.22)$$

**Fig. 13.16** Sistema a malha fechada com dados amostrados.



No Exemplo 13.3 foi obtida a função de transferência  $G(z)$  da Eq. (13.16) quando  $T = 1$  segundo. Substituindo-se  $G(z)$  na Eq. (13.22) obtém-se

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0,3678z + 0,2644}{z^2 - z + 0,6322}. \quad (13.23)$$

Como a entrada é um degrau unitário,

$$R(z) = \frac{z}{z - 1}, \quad (13.24)$$

$$\text{então} \quad Y(z) = \frac{z(0,3678z + 0,2644)}{(z - 1)(z^2 - z + 0,6322)} = \frac{0,3678z^2 + 0,2644z}{z^3 - 2z^2 + 1,6322z - 0,6322}.$$

Efetuando-se a divisão, resulta

$$Y(z) = 0,3678z^{-1} + z^{-2} + 1,4z^{-3} + 1,4z^{-4} + 1,147z^{-5} \dots \quad (13.25)$$

Os valores de  $y(kT)$  estão mostrados na Fig. 13.17, usando o símbolo de um quadrado. Está mostrada a resposta completa do sistema a malha fechada com dados amostrados (obtida com o MATLAB; ver Seção 13.12) em comparação com a resposta de um sistema contínuo (quando  $T = 0$ ). A ultrapassagem do sistema amostrado é de 45%, em contraste com os 17% do sistema contínuo. Além disto, o tempo de assentamento do sistema amostrado é duas vezes maior que o do sistema contínuo. ■

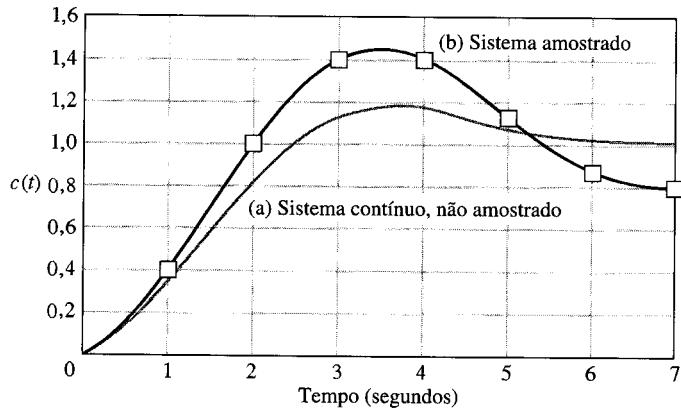


Fig. 13.17 A resposta de um sistema de segunda ordem: (a) contínuo ( $T = 0$ ), não amostrado; (b) sistema amostrado,  $T = 1$  segundo.

### 13.6 ANÁLISE DE ESTABILIDADE NO PLANO $z$

Um sistema de controle com retroação linear e contínuo no tempo é estável se todos os pólos da função de transferência a malha fechada  $T(s)$  estiverem no semiplano  $s$  da esquerda. O plano  $z$  se relaciona com o plano  $s$  através da transformação

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma+j\omega)T}. \quad (13.26)$$

Pode-se escrever esta relação como

$$\begin{aligned} |z| &= e^{\sigma T} \\ e & \\ \underline{z} &= \omega T. \end{aligned} \quad (13.27)$$

No semiplano  $s$  da esquerda,  $\sigma < 0$ , e portanto a magnitude de  $z$  varia entre 0 e 1. Portanto, o eixo imaginário do plano  $s$  corresponde ao círculo unitário no plano  $z$  e o interior do círculo unitário corresponde ao semiplano  $s$  da esquerda [15].

Pode-se enunciar, em consequência, que um **sistema amostrado é estável se todos os pólos da função de transferência a malha fechada  $T(z)$  estiverem situados no interior do círculo unitário do plano  $z$ .**

#### EXEMPLO 13.5

##### Estabilidade de um sistema a malha fechada

Considere-se o sistema mostrado na Fig. 13.18, com  $T = 1$  e

$$G_p(s) = \frac{K}{s(s + 1)}. \quad (13.28)$$

Chamando de novo a Eq. (13.16), constata-se que

$$G(z) = \frac{K(0,3678z + 0,2644)}{z^2 - 1,3678z + 0,3678} = \frac{K(az + b)}{z^2 - (1 + a)z + a}, \quad (13.29)$$

onde  $a = 0,3678$  e  $b = 0,2644$ .

Os pólos da função de transferência a malha fechada  $T(z)$  são as raízes da equação  $[1 + G(z)] = 0$ . A equação  $q(z) = 1 + G(z) = 0$  é chamada de equação característica. Se obtém, portanto,

$$q(z) = 1 + G(z) = z^2 - (1 + a)z + a + Kaz + Kb = 0. \quad (13.30)$$

Quando  $K = 1$ , tem-se

$$\begin{aligned} q(z) &= z^2 - z + 0,6322 \\ &= (z - 0,50 + j0,6182)(z - 0,50 - j0,6182) = 0. \end{aligned} \quad (13.31)$$

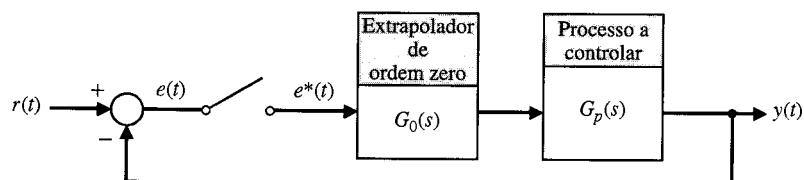


Fig. 13.18 Sistema a malha fechada com dados amostrados.

Em consequência, o sistema é estável porque todas as raízes estão no interior do círculo unitário. Para  $K = 10$ , tem-se

$$\begin{aligned} q(z) &= z^2 + 2,310z + 3,012 \\ &= (z + 1,155 + j1,295)(z + 1,155 - j1,295), \end{aligned} \quad (13.32)$$

e o sistema é instável porque ambas as raízes estão fora do círculo unitário. O sistema é estável para  $0 < K < 2,39$ . O lugar das raízes à medida que  $K$  varia será discutido na Seção 13.10.

Observa-se que um sistema amostrado de segunda ordem pode ser instável com um valor crescente de ganho enquanto um sistema de segunda ordem contínuo é estável para todos os valores de ganho (supondo que ambos os pólos do sistema a malha aberta estejam situados no semiplano  $s$  da esquerda). ■

### 13.7 DESEMPENHO DE UM SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM COM DADOS AMOSTRADOS

Considere-se o desempenho de um sistema de segunda ordem amostrado com um extrapolaror de ordem zero, como mostrado na Fig. 13.18, quando o processo a controlar é

$$G_p(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)}. \quad (13.33)$$

Obtém-se, então,  $G(z)$  para um valor não especificado do período de amostragem  $T$

$$G(z) = \frac{K\{(z - E)[T - \tau(z - 1)] + \tau(z - 1)^2\}}{(z - 1)(z - E)}, \quad (13.34)$$

onde  $E = e^{-T/\tau}$ . A estabilidade do sistema é analisada considerando-se a equação característica

$$q(z) = z^2 + z\{K[T - \tau(1 - E)] - (1 + E)\} + K[\tau(1 - E) - TE] + E = 0. \quad (13.35)$$

Como o polinômio  $q(z)$  é do segundo grau e tem todos os coeficientes reais, as condições necessárias e suficientes para ter todas as raízes no interior do círculo unitário são

$$|q(0)| < 1, \quad q(1) > 0, \quad q(-1) > 0.$$

Estas condições de estabilidade para um sistema de segunda ordem podem ser estabelecidas mapeando-se a equação característica do plano  $z$  no plano  $s$  e verificando se os coeficientes de  $q(s)$  são positivos. Usando-se estas condições, estabelecem-se as condições necessárias a partir da Eq. (13.35) como

$$K\tau < \frac{1 - E}{1 - E - (T/\tau)E}, \quad (13.36)$$

$$K\tau < \frac{2(1 + E)}{(T/\tau)(1 + E) - 2(1 - E)}, \quad (13.37)$$

e  $K > 0$ ,  $T > 0$ . Para este sistema é possível calcular o valor máximo de ganho permitível para se ter um sistema estável. A Tabela 13.3 fornece o valor máximo de ganho admissível em função de diversos valores de  $T/\tau$ . Se o sistema computacional possuir velocidade de cálculo e de manuseio de dados suficiente, é possível fazer  $T/\tau = 0,1$  e obter características do sistema tendendo para as do sistema contínuo (sem amostragem).

O valor de ultrapassagem máxima do sistema de segunda ordem para uma entrada em degrau unitário está mostrado na Fig. 13.19.

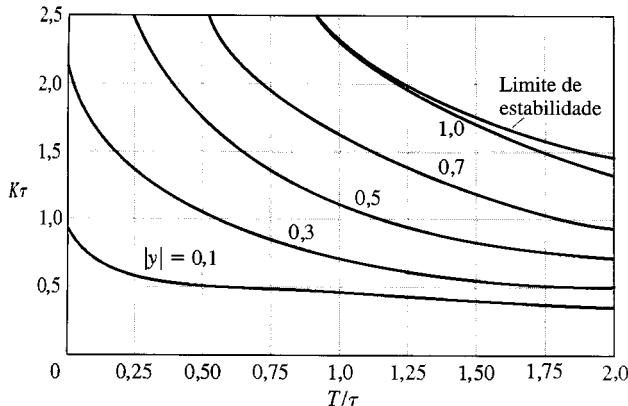
O critério de desempenho, integral do erro ao quadrado, pode ser escrito como

$$I = \frac{1}{\tau} \int_0^\infty e^2(t)dt. \quad (13.38)$$

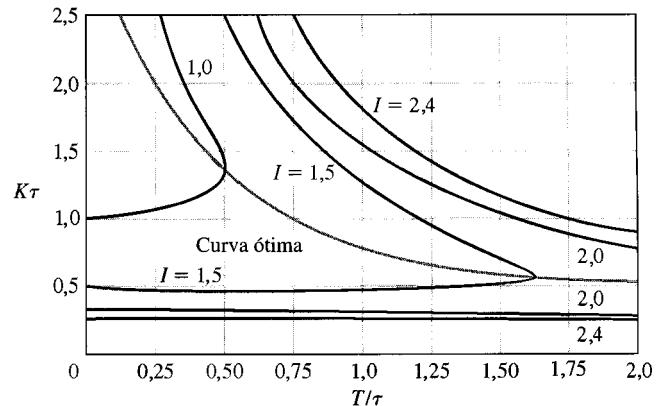
Os lugares deste critério são dados na Fig. 13.20 para valores constantes de  $I$ . Para um dado valor de  $T/\tau$ , é possível determinar o valor mínimo de  $I$  e o valor necessário de  $K\tau$ . A curva ótima mostrada na Fig. 13.20 indica o valor necessário de  $K\tau$  para um dado  $T/\tau$  que minimiza  $I$ . Por exemplo, quando  $T/\tau = 0,75$ , é preciso ter  $K\tau = 1$  a fim de minimizar o índice de desempenho  $I$ .

**TABELA 13.3 Ganho Máximo para um Sistema de Segunda Ordem Amostrado**

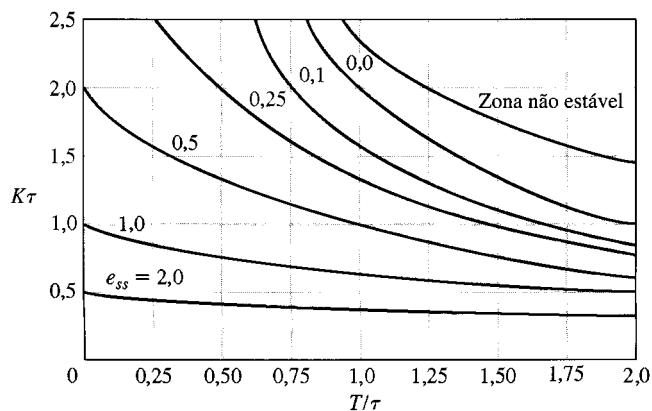
$T/\tau$	0	0,1	0,5	1	2	
Máximo	$K\tau$	$\infty$	20,4	4,0	2,32	1,45



**Fig. 13.19** O valor máximo de ultrapassagem  $|y|$  para um sistema de segunda ordem com dados amostrados para uma entrada em degrau unitário.



**Fig. 13.20** Lugares da integral do erro ao quadrado para um sistema de segunda ordem amostrado para valores constantes de  $I$ .



**Fig. 13.21** Ero de estado estacionário de um sistema de segunda ordem amostrado para uma entrada em rampa unitária  $r(t) = t$ ,  $t > 0$ .

O erro de estado estacionário para uma entrada em rampa unitária  $r(t) = t$  está mostrado na Fig. 13.21. Para um dado valor de  $T/\tau$  pode-se reduzir o erro de estado estacionário, mas o sistema conduz a valores maiores de ultrapassagem e de tempo de assentamento para uma entrada em degrau.

#### EXEMPLO 13.6

#### Projeto de um sistema amostrado

Considere-se o sistema a malha fechada com dados amostrados visto na Fig. 13.18, quando

$$G_p(s) = \frac{K}{s(0.1s + 1)(0.005s + 1)} \quad (13.39)$$

e se necessita selecionar  $T$  e  $K$  para um desempenho adequado. Como aproximação, desprezam-se os efeitos da constante de tempo  $\tau_2 = 0,005$  porque ela é somente 5% da constante de tempo principal  $\tau_1 = 0,1$ . As Figs. 13.19, 13.20 e 13.21 podem ser usadas para selecionar  $K$  e  $T$ . Limitando-se a ultrapassagem a 30% do degrau aplicado na entrada, escolhe-se  $T/\tau = 0,25$ , conduzindo a  $K\tau = 1,4$ . Para estes valores, o erro de estado estacionário para uma entrada em rampa é de aproximadamente 0,6 (ver Fig. 13.21).

Como  $\tau = 0,1$ , faz-se então  $T = 0,025$  segundo e  $K = 14$ . A taxa de amostragem necessária é de 40 amostras por segundo.

A ultrapassagem para uma entrada em degrau e o erro de estado estacionário para uma entrada em rampa podem ser reduzidos fazendo-se  $T/\tau$  igual a 0,1. A ultrapassagem para uma entrada em degrau será 25% para  $K\tau = 1,6$ . Usando a Fig. 13.21, estima-se o erro de estado estacionário de 0,55 para uma entrada em rampa unitária, para um  $K\tau = 1,6$ . ■

### 13.8 SISTEMAS A MALHA FECHADA COM COMPENSAÇÃO DIGITAL POR COMPUTADOR

Um sistema amostrado, a malha fechada, com um computador digital usado para melhorar o desempenho, está mostrado na Fig. 13.15. A função de transferência a malha fechada é

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = T(z) = \frac{G(z)D(z)}{1 + G(z)D(z)}. \quad (13.40)$$

A função de transferência do computador é representada por

$$\frac{U(z)}{E(z)} = D(z). \quad (13.41)$$

Nos cálculos anteriores,  $D(z)$  foi representado simplesmente por um ganho  $K$ . Como ilustração da potência do computador como compensador, será reconsiderado o sistema de segunda ordem com um extrapolaror de ordem zero e um processo a controlar

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s + 1)} \quad \text{quando } T = 1.$$

Então (ver Eq. 13.16)

$$G(z) = \frac{0,3678(z + 0,7189)}{(z - 1)(z - 0,3678)}. \quad (13.42)$$

Se for selecionado

$$D(z) = \frac{K(z - 0,3678)}{(z + r)}, \quad (13.43)$$

cancela-se o pólo de  $G(z)$  em  $z = 0,3678$  e há dois parâmetros,  $r$  e  $K$ , para determinar. Escolhendo-se

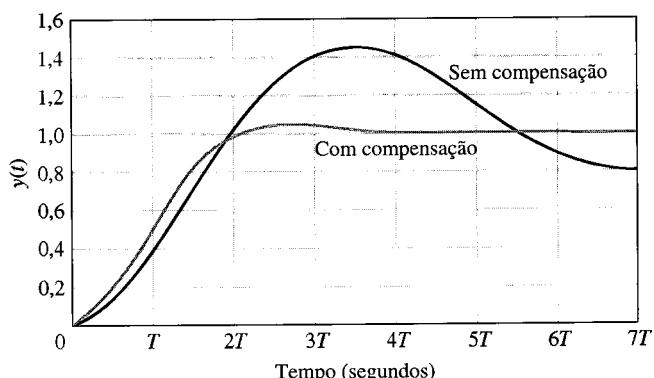
$$D(z) = \frac{1,359(z - 0,3678)}{(z + 0,240)}, \quad (13.44)$$

tem-se

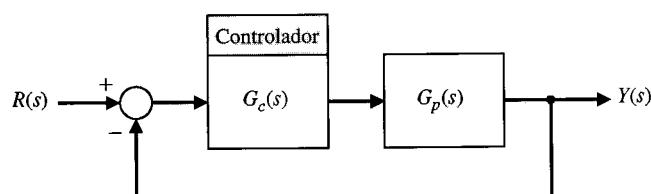
$$G(z)D(z) = \frac{0,50(z + 0,7189)}{(z - 1)(z + 0,240)}. \quad (13.45)$$

Calculando-se a resposta do sistema para uma entrada em degrau, constata-se que a saída é igual à entrada no instante da quarta amostragem e daí em diante. As respostas dos sistemas com compensação e sem compensação estão mostradas na Fig. 13.22. A ultrapassagem do sistema compensado é de 4% e a ultrapassagem do sistema sem compensação é de 45%. Está além do objetivo deste livro discutir todos os métodos gerais para a seleção analítica dos parâmetros de  $D(z)$ , e recomenda-se que o leitor consulte outros textos [2-4]. Contudo, serão considerados dois métodos de projetar compensadores: (1) o método da conversão  $G_c(s)$ - $D(z)$ , nos parágrafos seguintes, e (2) o método do lugar das raízes no plano  $z$ , na Seção 13.10.

Um método para a determinação de  $D(z)$  obtém primeiramente o controlador  $G_c(s)$  relativo ao processo  $G_p(s)$  do sistema mostrado na Fig. 13.23. Em seguida o controlador é convertido em  $D(z)$  para um dado período de amostragem  $T$ . Os métodos descritos no Cap. 10 são usados para se deter-



**Fig. 13.22** Resposta de um sistema de segunda ordem com dados amostrados para uma entrada em degrau unitário.



**Fig. 13.23** Modelo contínuo de um sistema amostrado.

minar  $G_c(s)$ . Este método de projeto é chamado de método da conversão  $G_c(s)$ - $D(z)$ . Ele converte o  $G_c(s)$  da Fig. 13.23 no  $D(z)$  da Fig. 13.15.

Considere-se um compensador de primeira ordem

$$G_c(s) = K \frac{s + a}{s + b} \quad (13.46)$$

e um controlador digital

$$D(z) = C \frac{z - A}{z - B}. \quad (13.47)$$

Determina-se a transformada  $z$  de  $G_c(s)$  e iguala-se esta transformada a  $D(z)$

$$Z\{G_c(s)\} = D(z). \quad (13.48)$$

Então a relação entre as duas funções de transferência é  $A = e^{-aT}$ ,  $B = e^{-bT}$  e, quando  $s = 0$ , é necessário que

$$C \frac{(1 - A)}{(1 - B)} = K \frac{a}{b}. \quad (13.49)$$

### EXEMPLO 13.7

#### Projeto para atender uma especificação de margem de fase

Considere-se um sistema com um processo a controlar

$$G_p(s) = \frac{1740}{s(0,25s + 1)}. \quad (13.50)$$

Será feita a tentativa de projetar  $G_c(s)$  de modo a se alcançar uma margem de fase de  $45^\circ$  com uma freqüência de cruzamento  $\omega_c = 125$  rad/s. Usando-se o diagrama de Bode de  $G_p(s)$ , encontra-se uma margem de fase de  $2^\circ$ . Empregando o método da Seção 10.4, descobre-se que a relação polo-zero necessária é  $\alpha = 6,25$ . Foi especificado que  $\omega_c = 125$ , e se constata que  $\omega_c = (ab)^{1/2}$ . Portanto,  $a = 50$  e  $b = 312$ . O compensador por avanço de fase é, então,

$$G_c(s) = \frac{K(s + 50)}{(s + 312)}. \quad (13.51)$$

Escolhe-se  $K$  de modo a se ter  $|GG_c(j\omega)| = 1$  quando  $\omega = \omega_c = 125$  rad/s. Assim se obtém  $K = 5,6$ . O compensador  $G_c(s)$  deve ser implementado por meio de  $D(z)$ , e em consequência resolvem-se as relações com um período de amostragem escolhido. Fazendo-se  $T = 0,001$  segundo, tem-se

$$A = e^{-0,05} = 0,95, \quad B = e^{-0,312} = 0,73, \quad \text{e} \quad C = 4,85.$$

Tem-se, então,

$$D(z) = \frac{4,85(z - 0,95)}{(z - 0,73)}. \quad (13.52)$$

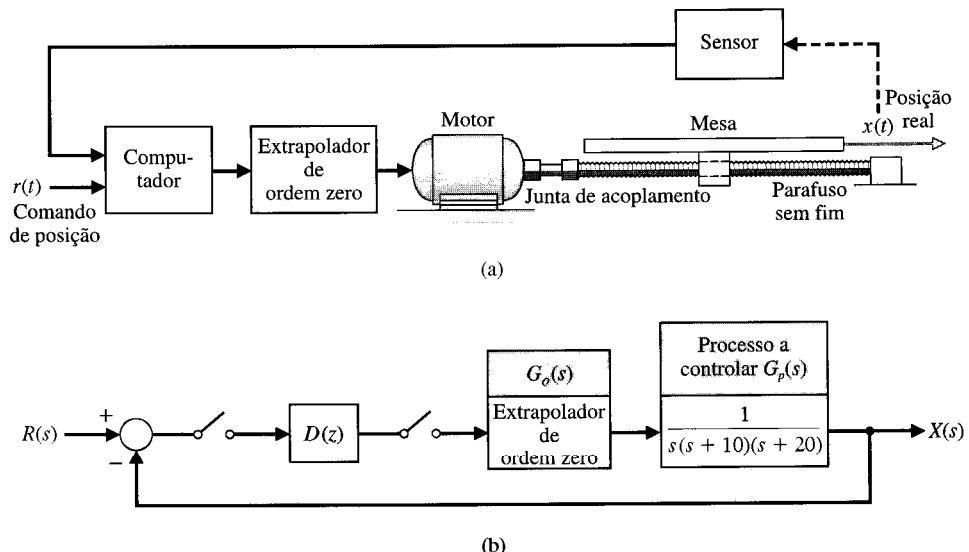
Naturalmente, se for escolhido um outro valor para o período de amostragem serão diferentes os coeficientes de  $D(z)$ . ■

Em geral escolhe-se um período de amostragem pequeno de modo que o projeto baseado no sistema contínuo se conserve válido no plano  $z$ . Contudo, não se deve escolher um valor excessivamente pequeno para  $T$ , ou os requisitos de cálculo poderão ser maiores que o necessário. Em geral, se usa um período de amostragem  $T \cong 1/10f_b$ , onde  $f_b = \omega_b/2\pi$  e  $\omega_b$  é a banda passante do sistema contínuo a malha fechada.

A banda passante do sistema projetado no Exemplo 13.7 é  $\omega_b = 180$  rad/s, ou seja,  $f_b = 28,6$  Hz. Escolhe-se então um período  $T = 0,003$  segundo. Observe-se que, no Exemplo 13.7, foi usado o valor  $T = 0,001$  segundo.

### 13.9 PROJETO DE UM SISTEMA DE CONTROLE DO MOVIMENTO DE UMA MESA TRANSPORTADORA

O sistema de controle do movimento de uma mesa transportadora constitui um sistema de posicionamento importante na manufatura. O sistema controla o movimento de uma mesa para uma determinada posição [21]. Admite-se que a mesa é ativada segundo cada um dos eixos por meio de um motor e de um fuso, como mostra a Fig. 13.24(a). Será considerado o eixo  $x$  e será examinado o controle do



**Fig. 13.24** Sistema de controle de movimento de uma mesa: (a) atuador e mesa; (b) diagrama de blocos.

movimento de um sistema com retroação, como mostra a Fig. 13.24(b). O objetivo é obter uma resposta rápida, para um comando em degrau, com tempos de subida e de assentamento pequenos sem exceder uma ultrapassagem de 5%.

As especificações são, portanto, (1) ultrapassagem percentual igual a 5% e (2) tempo de assentamento (critério dos 2%) e tempo de subida mínimos. O tempo de subida é definido como o tempo necessário para alcançar o valor do comando e é ilustrado na Fig. 5.7 por  $T_R$ .

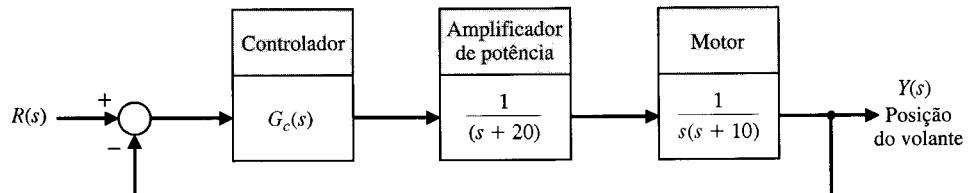
Para configurar o sistema, escolhe-se inicialmente um amplificador de potência e o motor de modo que o sistema seja o descrito pela Fig. 13.25. Obtendo-se a função de transferência do amplificador de potência e do motor, resulta

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s + 10)(s + 20)}. \quad (13.53)$$

Será usado inicialmente um sistema contínuo e projetado  $G_c(s)$ , como descrito na Seção 13.8. Obtém-se em seguida  $D(z)$  a partir de  $G_c(s)$ . Escolhe-se primeiro o controlador como um simples ganho,  $K$ , a fim de determinar a resposta que pode ser obtida sem um compensador. Traçando-se o lugar das raízes, descobre-se que, para  $K = 700$ , as raízes complexas dominantes apresentam uma relação de amortecimento de 0,707 e se espera uma ultrapassagem de 5%. Em seguida, usando simulação, descobre-se que a ultrapassagem é 5%, o tempo de subida é 0,48 segundo e o tempo de acomodação (critério dos 2%) é 1,12 segundo. Estes valores estão registrados na Tabela 13.4.

A próxima etapa é introduzir um compensador de avanço de fase, do tipo

$$G_c(s) = \frac{K(s + a)}{(s + b)}. \quad (13.54)$$



**Fig. 13.25** Modelo do controle de um volante para uma mesa transportadora.

**TABELA 13.4 Desempenho de Dois Controladores**

Compensador $G_c(s)$	$K$	Ultrapassagem Percentual	Tempo de assentamento (segundos)	Tempo de Subida (segundos)
1. $K$	700	5,0	1,12	0,40
2. $K(s + 11)/(s + 62)$	8000	5,0	0,60	0,25

Será escolhido o zero em  $s = -11$  de modo que as raízes complexas próximas da origem sejam dominantes. Usando-se o método da Seção 10.5, descobre-se ser necessário ter o pôlo em  $s = -62$ . Calculando-se o ganho nessas raízes, acha-se  $K = 8000$ . Então a resposta ao degrau apresenta um tempo de subida de 0,25 segundo e um tempo de assentamento (critério dos 2%) de 0,60 segundo. Esta é uma resposta melhorada, e se finaliza este sistema como aceitável.

Resta agora escolher o período de amostragem e usar então o método da Seção 13.8 para obter  $D(z)$ . O tempo de subida do sistema compensado contínuo é de 0,25 segundo. Em consequência, é necessário ter  $T \ll T_R$  a fim de obter a resposta do sistema prevista pelo projeto do sistema contínuo. Seleciona-se  $T = 0,01$  segundo. Tem-se

$$G_c(s) = \frac{8000(s + 11)}{(s + 62)}.$$

Então

$$D(z) = C \frac{z - A}{z - B},$$

onde

$$A = e^{-11T} = 0,8958, \quad \text{e} \quad B = e^{-62T} = 0,5379.$$

Tem-se, agora,

$$C = K \frac{a(1 - B)}{b(1 - A)} = \frac{8000(11)(0,462)}{62(0,1042)} = 6293.$$

Usando-se este  $D(z)$ , espera-se uma resposta muito semelhante à obtida com o modelo do sistema contínuo.

## 13.10 O LUGAR DAS RAÍZES DE SISTEMAS COM CONTROLE DIGITAL

Considere-se a função de transferência do sistema mostrado na Fig. 13.26. Convém lembrar que  $G(s) = G_0(s)G_p(s)$ . A função de transferência a malha fechada é

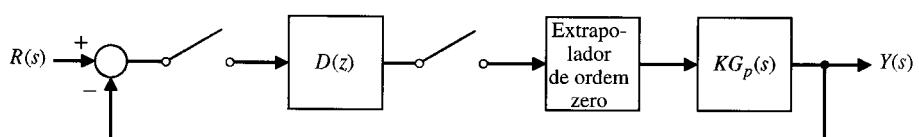
$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{KG(z)D(z)}{1 + KG(z)D(z)}. \quad (13.55)$$

A equação característica é

$$1 + KG(z)D(z) = 0,$$

que é análoga à equação característica para a análise de  $KG(s)$ , no plano  $s$ . Em consequência se pode traçar o lugar das raízes da equação característica do sistema amostrado em função da variação de  $K$ . As regras para obter o lugar das raízes estão resumidas na Tabela 13.5.

### Lugar das raízes de um sistema de segunda ordem



### EXEMPLO 13.8

**Fig. 13.26** Sistema de controle a malha fechada com controlador digital.

**TABELA 13.5 Lugar das Raízes no Plano z**

- O lugar das raízes começa nos pólos e prossegue em direção aos zeros.
- O lugar das raízes existe nos trechos do eixo real à esquerda de um número ímpar de pólos e zeros.
- O lugar das raízes é simétrico com relação ao eixo real horizontal.
- O lugar das raízes pode deixar o eixo real e reentrar no eixo real. Os pontos de saída e de entrada são determinados a partir da equação

$$K = -\frac{N(z)}{D(z)} = F(z),$$

onde  $z = \sigma$ . Obter, então, a solução de  $\frac{dF(\sigma)}{d\sigma} = 0$ .

- Traçar o lugar das raízes que satisfazem

$$1 + KG(z)D(z) = 0$$

ou

$$|KG(z)D(z)| = 1$$

e

$$\angle G(z)D(z) = 180^\circ \pm k360^\circ, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Considere-se o sistema mostrado na Fig. 13.26 com  $D(z) = 1$  e  $G_p(s) = 1/s^2$ . Obtém-se, então,

$$KG(z) = \frac{T^2}{2} \frac{K(z + 1)}{(z - 1)^2}.$$

Seja fazer  $T = \sqrt{2}$  e traçar o lugar das raízes. Tem-se agora

$$KG(z) = \frac{K(z + 1)}{(z - 1)^2},$$

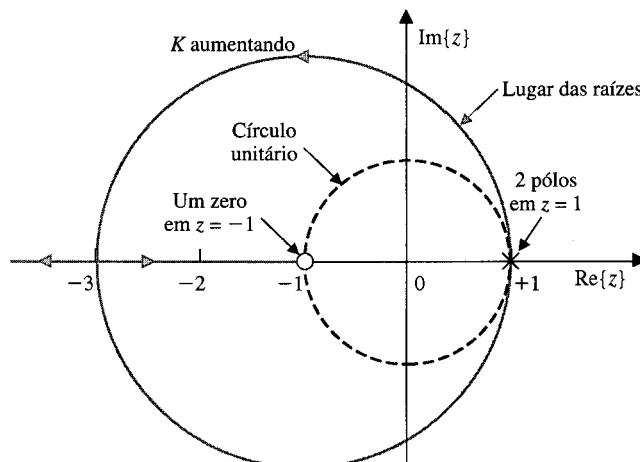
e os pólos e zeros estão mostrados no plano  $z$  na Fig. 13.27. A equação característica é

$$1 + KG(z) = 1 + \frac{K(z + 1)}{(z - 1)^2} = 0.$$

Faça-se  $z = \sigma$  e se obtenha a solução para  $K$

$$K = -\frac{(\sigma - 1)^2}{(\sigma + 1)} = F(\sigma).$$

Resulta então a derivada  $dF(\sigma)/d\sigma = 0$  e se calculam as raízes como  $\sigma_1 = -3$  e  $\sigma_2 = 1$ . O lugar das raízes deixa os dois pólos em  $\sigma_2 = 1$  e reentra em  $\sigma_1 = -3$ , como mostra a Fig. 13.27. O círculo unitário também está mostrado na Fig. 13.27. O sistema possui sempre duas raízes fora do círculo unitário e é sempre instável para  $K > 0$ . ■



**Fig. 13.27** Lugar das raízes para o Exemplo 13.8.

As atenções agora se voltam para o projeto de um controlador digital  $D(z)$  para alcançar uma resposta especificada utilizando-se o método do lugar das raízes. Será escolhido um controlador

$$D(z) = \frac{(z - a)}{(z - b)}.$$

Usa-se  $(z - a)$  para cancelar um pólo de  $G(z)$  situado no eixo real positivo do plano  $z$ . Escolhe-se em seguida  $(z - b)$  de modo que o lugar do sistema compensado apresente um conjunto de raízes complexas em um ponto desejado no interior do círculo unitário no plano  $z$ .

### EXEMPLO 13.9

#### Projeto de um compensador digital

Seja projetar um compensador  $D(z)$  que resultará em um sistema estável quando  $G_p(s)$  é o descrito no Exemplo 13.8. Com  $D(z) = 1$ , tem-se um sistema instável. Selecione-se  $D(z)$  como

$$D(z) = \frac{z - a}{z - b}$$

de modo que

$$KG(z)D(z) = \frac{K(z + 1)(z - a)}{(z - 1)^2(z - b)}.$$

Fazendo-se  $a = 1$  e  $b = 0,2$ , tem-se

$$KG(z)D(z) = \frac{K(z + 1)}{(z - 1)(z - 0,2)}.$$

Usando-se a equação para  $F(\sigma)$ , obtém-se o ponto de entrada como  $z = -2,56$ , como mostra a Fig. 13.28. O lugar das raízes corta o círculo unitário para  $K = 0,8$ . Assim, o sistema é estável para  $K < 0,8$ . Escolhendo-se  $K = 0,25$ , descobre-se que a resposta a um degrau apresenta uma ultrapassagem de 20% e um tempo de assentamento (critério dos 2%) igual a 8,5 segundos.

Se o desempenho do sistema fosse inadequado, seria possível melhorar o lugar das raízes escolhendo-se  $a = 1$  e  $b = -0,98$  de modo que

$$KG(z)D(z) = \frac{K(z + 1)}{(z - 1)(z + 0,98)} \cong \frac{K}{(z - 1)}.$$

Então o lugar das raízes estaria localizado sobre o eixo real do plano  $z$ . Com  $K = 1$ , a raiz da equação característica estaria na origem, e  $T(z) = 1/z = z^{-1}$ . Então a resposta do sistema amostrado (nos instantes de amostragem) é o degrau de entrada atrasado de um período de amostragem. ■

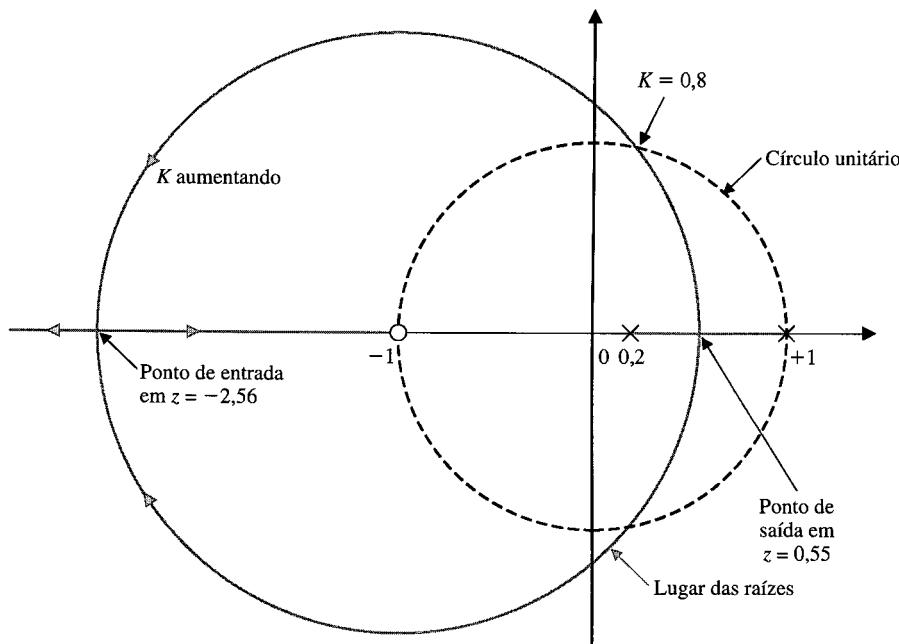


Fig. 13.28 Lugar das raízes para o Exemplo 13.9.

É possível construir linhas de  $\zeta$  constante no plano  $z$ . O mapeamento entre o plano  $s$  e o plano  $z$  é obtido pela relação  $z = e^{\sigma T}$ . As linhas de  $\zeta$  constantes no plano  $s$  são linhas radiais com

$$\frac{\sigma}{\omega} = -\operatorname{tg}\theta = -\operatorname{tg}(\operatorname{sen}^{-1}\zeta) = -\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}.$$

Como  $s = \sigma + j\omega$ , tem-se

$$z = e^{\sigma T}e^{j\omega T},$$

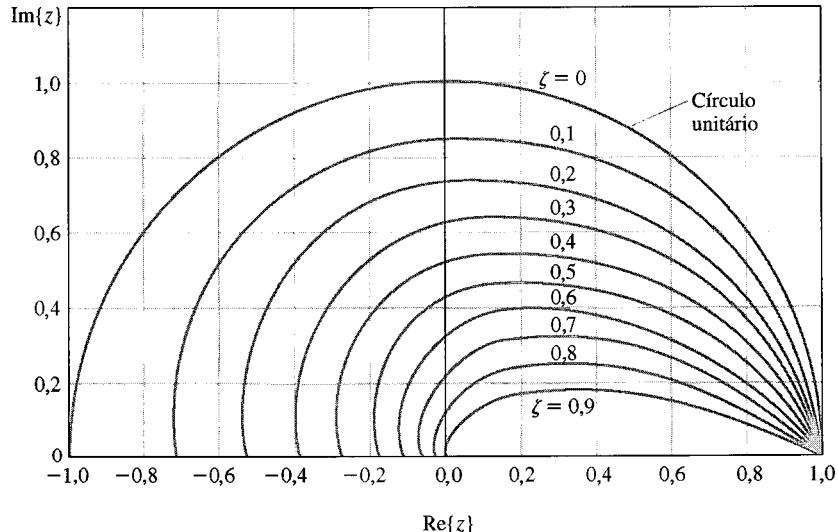
onde

$$\sigma = -\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \omega.$$

O gráfico destas linhas de  $\zeta$  constante está mostrado na Fig. 13.29 para uma faixa de valores de  $T$ . Um valor usual para  $\zeta$  em muitas especificações de projeto é  $\zeta = 1/\sqrt{2}$ . Tem-se então  $\sigma = -\omega$  e

$$z = e^{-\omega T}e^{j\omega T} = e^{-\omega T} / \theta,$$

onde  $\theta = \omega T$ .



**Fig. 13.29** Curvas de  $\zeta$  constante no plano  $z$ .

### 13.11 IMPLEMENTAÇÃO DE CONTROLADORES DIGITAIS

Será considerado o controlador PID com a função de transferência no domínio  $s$

$$\frac{U(s)}{X(s)} = G_c(s) = K_1 + \frac{K_2}{s} + K_3 s. \quad (13.56)$$

Pode-se determinar uma implementação digital deste controlador usando-se uma aproximação discreta para a derivada e para a integração. Para a derivada em relação ao tempo utiliza-se a **regra da diferença atrasada**

$$u(kT) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=kT} = \frac{1}{T} (x(kT) - x[(k-1)T]). \quad (13.57)$$

A transformada  $z$  da Eq. (13.57) é então

$$U(z) = \frac{(1 - z^{-1})}{T} X(z) = \frac{(z - 1)}{Tz} X(z).$$

A integração de  $x(t)$  pode ser representada pela **integração retangular avançada** em  $t = kT$  como

$$u(kT) = u[(k-1)T] + T x(kT), \quad (13.58)$$

onde  $u(kT)$  é a saída do integrador em  $t = kT$ . A transformada  $z$  da Eq. (13.58) é

$$U(z) = z^{-1} U(z) + T X(z),$$

e a função de transferência é, então,

$$\frac{U(z)}{X(z)} = \frac{Tz}{(z - 1)}.$$

Por conseguinte, a função de transferência no domínio  $z$  do **controlador PID** é

$$G_c(z) = K_1 + \frac{K_2 T z}{(z - 1)} + K_3 \frac{(z - 1)}{T z}. \quad (13.59)$$

O algoritmo da equação a diferenças que fornece o controlador PID é obtido somando-se os três termos [usa-se  $x(kT) = x(k)$ ]

$$\begin{aligned} u(k) &= K_1 x(k) + K_2 [u(k-1) + T x(k)] + (K_3/T)[x(k) - x(k-1)] \\ &= [K_1 + K_2 T + (K_3/T)]x(k) + K_3 T x(k-1) + K_2 u(k-1). \end{aligned} \quad (13.60)$$

A Eq. (13.60) pode ser implementada usando-se um computador digital ou um microprocessador. Naturalmente, é possível obter um controlador PI ou um controlador PD fazendo-se o ganho apropriado igual a zero.

### 13.12 SISTEMAS DE CONTROLE DIGITAL USANDO MATLAB

O procedimento de projeto e análise de sistemas com dados amostrados é reforçado com o uso de ferramentas computacionais interativas. Muitas das funções do MATLAB para sistemas contínuos possuem formas equivalentes para sistemas com dados amostrados. A conversão de modelos pode ser realizada por meio das funções `c2dm` e `d2cm`, mostradas na Fig. 13.30. A função `c2dm` converte sistemas contínuos no tempo em sistemas discretos no tempo. A função `d2cm` converte sistemas discretos no tempo em sistemas contínuos no tempo. Por exemplo, considere-se a função de transferência de um processo a controlar

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s + 1)},$$

como está mostrado na Fig. 13.16. Para um período de amostragem de  $T = 1$  segundo, sabe-se, da Eq. (13.16) que

$$G(z) = \frac{0,3678(z + 0,7189)}{(z - 1)(z - 0,3680)} = \frac{0,3679z + 0,2644}{z^2 - 1,368z + 0,3680}. \quad (13.61)$$

Pode-se usar o MATLAB para obter  $G(z)$ , como está mostrado na Fig. 13.31.

As funções `dstep`, `dimpulse` e `dlsim` são usadas para a simulação de sistemas com dados amostrados. A resposta ao degrau unitário é gerada com a função `dstep`. O formato da função `dstep` é mostrado na Fig. 13.32. A resposta ao impulso é gerada pela função `dimpulse` e a resposta a um sinal arbitrário de entrada é obtida por meio da função `dlsim`. As funções `dimpulse` e `dlsim` são mostradas nas Figs. 13.33 e 13.34, respectivamente. Estas funções de simulação de sistemas com dados amostrados operam essencialmente da mesma forma que suas correspondentes para sistemas contínuos (não amostrados). A saída é  $y(kT)$  e está mostrado que o valor  $y(kT)$  é mantido constante durante o período  $T$ .

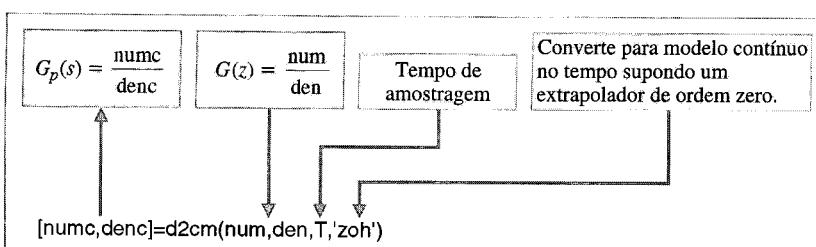
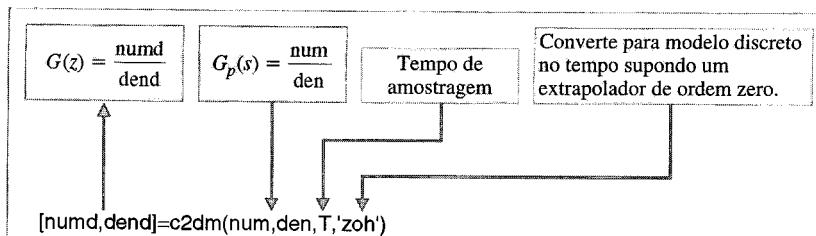


Fig. 13.30 As funções `c2dm` e `d2cm`.

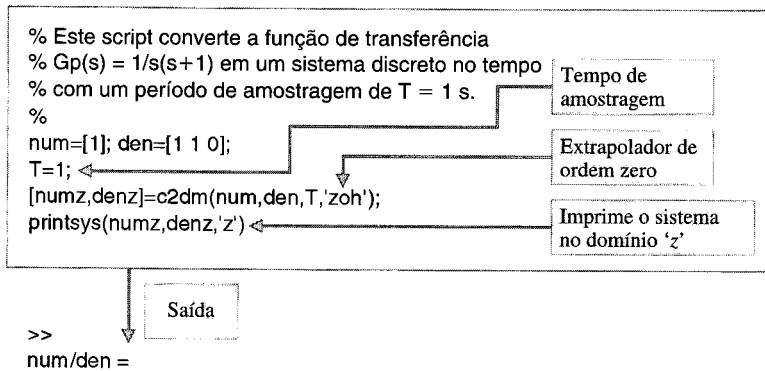
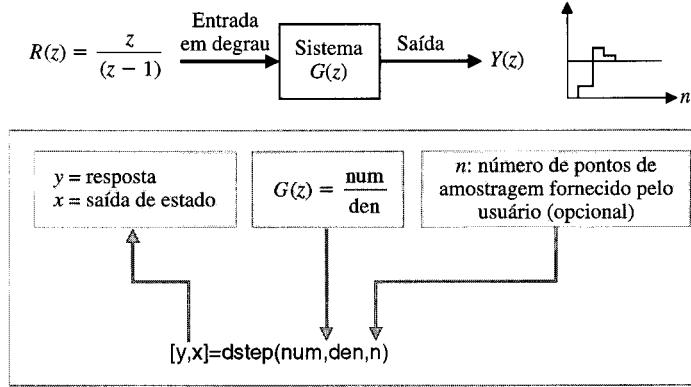
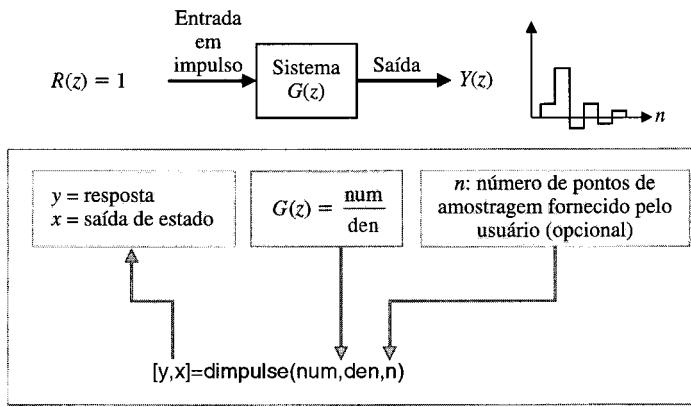


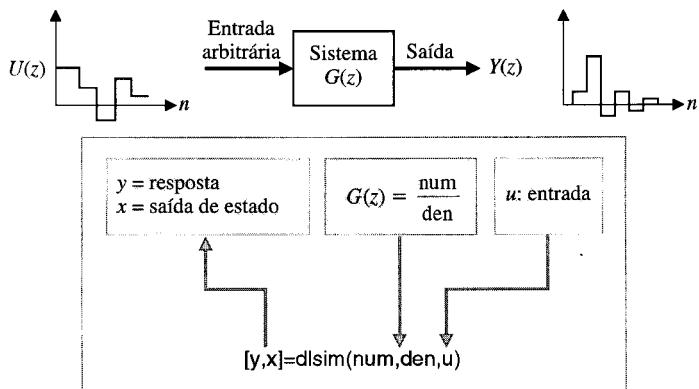
Fig. 13.31 Usando a função `c2dm` para converter  $G(s) = G_0(s)G_p(s)$  em  $G(z)$ .



**Fig. 13.32** A função **dstep** produz a saída  $y(kT)$  para uma entrada em degrau.



**Fig. 13.33** A função **dimpulse** produz a saída  $y(kT)$  para uma entrada em impulso.



**Fig. 13.34** A função **dlsim** produz a saída  $y(kT)$  para uma entrada arbitrária.

Reconsidere-se agora o Exemplo 13.4 e aborde-se o problema de obter a resposta ao degrau sem utilizar o procedimento da divisão contínua.

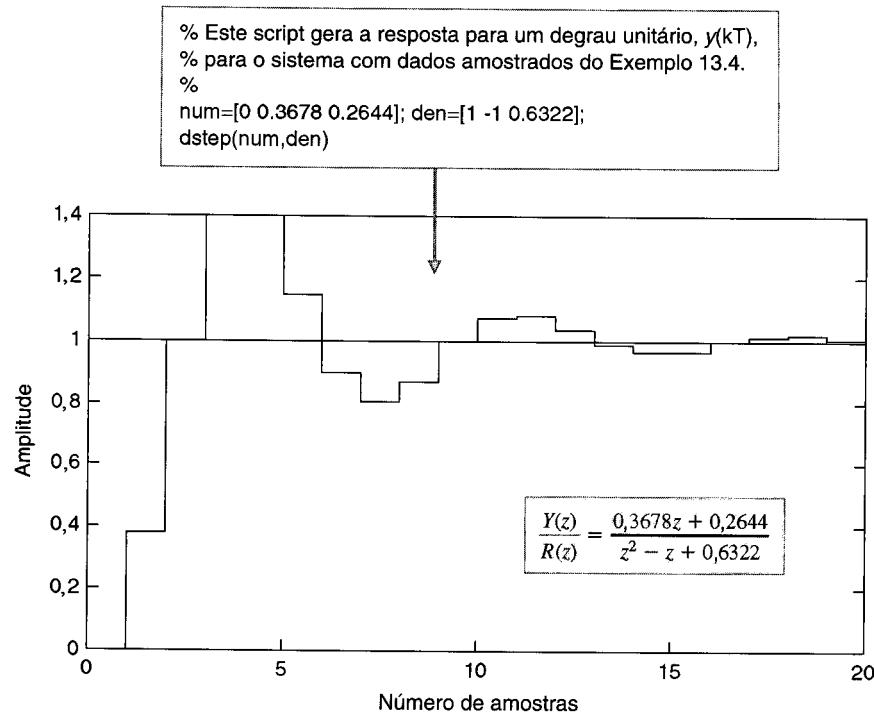
#### EXEMPLO 13.10

#### Resposta ao degrau unitário

No Exemplo 13.4, considerou-se o problema de calcular a resposta ao degrau de um sistema a malha fechada com dados amostrados. Nesse exemplo, a resposta,  $y(kT)$ , foi calculada usando-se divisão contínua. É possível usar o MATLAB para calcular a resposta  $y(kT)$  através da função **dstep**, mostrada na Fig. 13.32. Com a função de transferência a malha fechada dada por

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0,3678z + 0,2644}{z^2 - z + 0,6322},$$

a resposta a malha fechada ao degrau associada está mostrada na Fig. 13.35. A resposta discreta ao degrau mostrada nesta figura é também mostrada na Fig. 13.17. Para se determinar a resposta contí-

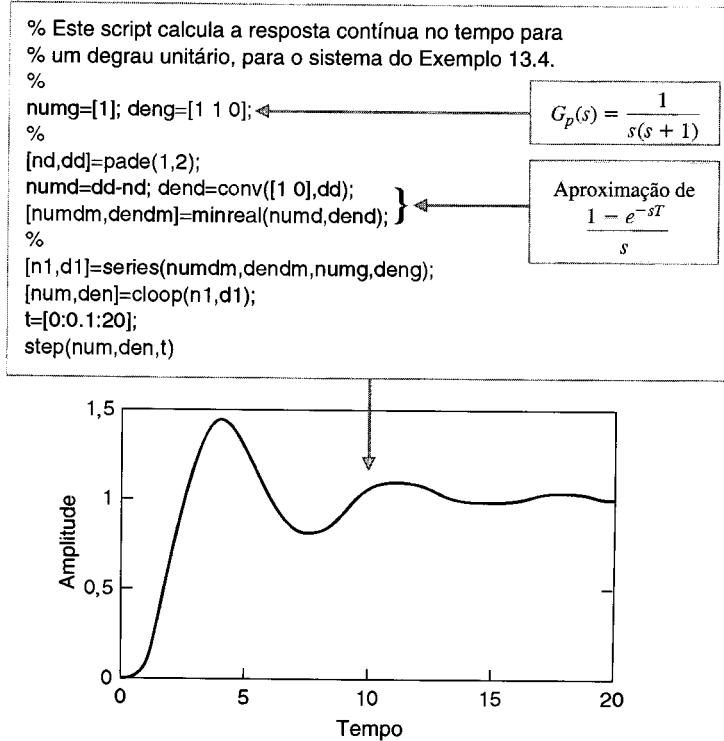


**Fig. 13.35** A resposta discreta,  $y(kT)$ , de um sistema de segunda ordem amostrado para uma entrada em degrau unitário.

nua real,  $y(t)$ , usa-se o script em MATLAB mostrado na Fig. 13.36. O extrapolador de ordem zero é modelado pela função de transferência  $G_0(s)$ , onde

$$G_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

No script MATLAB da Fig. 13.36, aproxima-se o termo  $e^{-sT}$  usando a função pade com uma aproximação de segunda ordem e um período de amostragem de 1 segundo. Calcula-se, então,  $G_0(s)$  com base na aproximação de Padé para  $e^{-sT}$ . ■



**Fig. 13.36** A resposta contínua,  $y(t)$ , do sistema da Fig. 13.16 para uma entrada em degrau unitário.

O assunto de compensação via computador digital foi discutido na Seção 13.8. No próximo exemplo, se reconsidera a utilização do MATLAB.

### EXEMPLO 13.11

#### Lugar das raízes de um sistema de controle digital

Recorde-se da Eq. (13.16) que um processo foi dado por

$$G(z) = \frac{0,3678(z + 0,7189)}{(z - 1)(z - 0,3680)}.$$

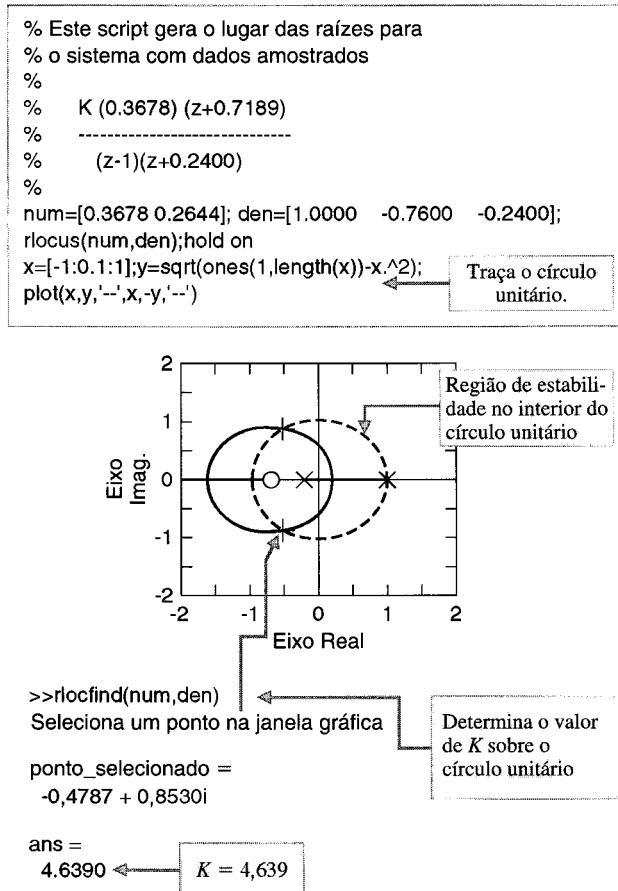
O compensador escolhido deve ser

$$D(z) = \frac{K(z - 0,3678)}{z + 0,2400},$$

com o parâmetro  $K$  como incógnita a ser ainda determinada. Quando

$$G(z)D(z) = K \frac{0,3678(z + 0,7189)}{(z - 1)(z + 0,2400)}, \quad (13.62)$$

tem-se o problema em uma forma para a qual se aplica diretamente o lugar das raízes. A função `rlocus` funciona para sistemas discretos no tempo da mesma forma que para os sistemas contínuos no tempo. Usando o script em MATLAB, gera-se facilmente o lugar das raízes associado à Eq. (13.62), como mostra a Fig. 13.37. Convém lembrar que a região de estabilidade é dada pelo círculo unitário no



**Fig. 13.37** A função `rlocus` para sistemas com dados amostrados.

plano complexo. Pode-se usar a função `rlocfind` com sistemas discretos no tempo do mesmo jeito que com os sistemas contínuos no tempo para determinar o valor do ganho do sistema associado a qualquer um dos pontos do lugar das raízes. Usando-se `rlocfind` descobre-se que  $K = 4,639$  posiciona as raízes sobre o círculo de raio unitário. ■

### 13.13 EXEMPLO DE PROJETO SEQÜENCIAL: SISTEMA DE LEITURA DE ACIONADOR DE DISCO



Neste capítulo será projetado um controlador digital para o sistema de acionador de disco. Como o disco gira, a cabeça do sensor lê o código usado para se dispor da informação de erro de referência. Esta informação de erro codificado é lida intermitentemente à medida que a cabeça leitora armazena os dados, e por sua vez o código. Como o disco está girando com uma velocidade constante, o tempo,  $T$ , entre leituras de erro de posição é constante. Este período de amostragem possui um valor típico entre  $100 \mu\text{s}$  e  $1 \text{ ms}$  [25]. Portanto, a informação do erro foi amostrada. Pode-se utilizar também um controlador digital, como mostra a Fig. 13.38, para obter uma resposta do sistema que seja satisfatória. Neste capítulo será projetado  $D(z)$ .

Determina-se inicialmente  $G(z)$ , onde

$$G(z) = Z[G_0(s)G_p(s)].$$

Como

$$G_p(s) = \frac{5}{s(s + 20)}, \quad (13.63)$$

tem-se

$$G_0(s)G_p(s) = \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s}\right)\frac{5}{s(s + 20)}.$$

Constatata-se que para  $a = 20$  e  $T = 1 \text{ ms}$ ,  $e^{-sT}$  é igual a 0,98. Percebe-se então que o pólo em  $s = -20$  na Eq. (13.63) possui um efeito insignificante. Portanto, é possível aproximar  $G_p(s)$  por:

$$G_p(s) \approx \frac{0,25}{s}.$$

Necessita-se, então,

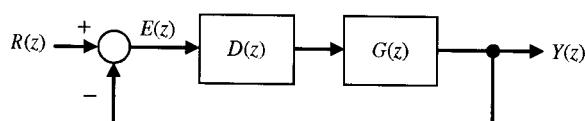
$$\begin{aligned} G(z) &= Z\left[\frac{1 - e^{-sT}\left(\frac{0,25}{s}\right)}{s}\right] \\ &= (1 - z^{-1})(0,25)Z\left[\frac{1}{s^2}\right] \\ &= (1 - z)(0,25)\left(\frac{Tz}{(z - 1)^2}\right) \\ &= \frac{0,25T}{(z - 1)} = \frac{0,25 \times 10^{-3}}{(z - 1)}. \end{aligned}$$

É necessário selecionar o controlador digital  $D(z)$  de modo que seja alcançada a resposta desejada para uma entrada em degrau. Fazendo-se  $D(z) = K$ , tem-se então

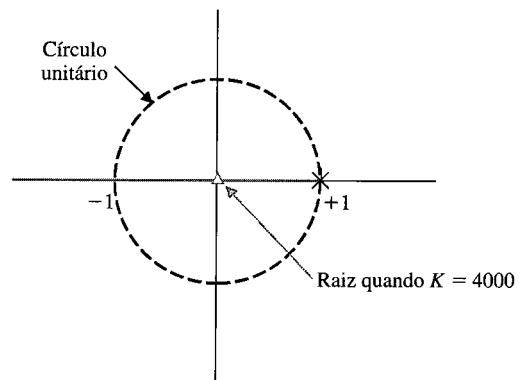
$$D(z)G(z) = \frac{K(0,25 \times 10^{-3})}{(z - 1)}.$$

O lugar das raízes para este sistema está mostrado na Fig. 13.39. Quando  $K = 4000$ , então

$$D(z)G(z) = \frac{1}{(z - 1)}.$$



**Fig. 13.38** Sistema de controle com retroação com controlador digital. Observe-se que  $G(z) = Z[G_0(s)G_p(s)]$ .



**Fig. 13.39** Lugar das raízes.

Portanto, a função de transferência a malha fechada é

$$T(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)} = \frac{1}{z}.$$

Espera-se que o sistema apresente uma resposta rápida. Usando-se o MATLAB demonstra-se que a resposta é estável e rápida. A ultrapassagem percentual para uma entrada em degrau é 0% e o tempo de assentamento é de 2 ms.

### 13.14 SUMÁRIO

O uso de computador digital como dispositivo de compensação para sistemas de controle a malha fechada tem crescido durante as duas últimas décadas à medida que o preço e a confiabilidade dos computadores melhoraram de forma considerável. O computador pode ser usado para efetuar muitos cálculos durante o período de amostragem  $T$  e para fornecer um sinal de saída que é utilizado para acionar um atuador de um processo. O controle por computador é usado hoje em processos químicos, no controle de aeronaves, em máquinas-ferramenta e muitos outros processos comuns.

A transformada  $z$  pode ser usada para analisar a estabilidade e a resposta de um sistema com dados amostrados e para projetar sistemas apropriados que incorporam computador. Sistemas de controle computadorizados se tornaram triviais à medida que ficaram disponíveis computadores de baixo custo.

## EXERCÍCIOS

**E13.1** Indicar se os seguintes sinais são discretos ou contínuos,

- (a) Curvas de nível de um mapa.
- (b) Temperatura em uma sala.
- (c) Mostrador de um relógio digital.
- (d) O escore de um jogo de basquete.
- (e) A saída de um alto-falante.

**E13.2** (a) Obter os valores de  $y(kT)$  quando

$$Y(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

para  $k = 0$  a 4. (b) Obter uma forma fechada de solução para  $y(kT)$  em função de  $k$ .

**Resposta:**  $y(0) = 0$ ,  $y(T) = 1$ ,  $y(2T) = 3$ ,  $y(3T) = 7$ ,  $y(4T) = 15$

**E13.3** Um sistema apresenta uma resposta  $y(kT) = kT$  para  $k \geq 0$ . Obter  $Y(z)$  para esta resposta.

$$\text{Resposta: } Y(z) = \frac{Tz}{(z - 1)^2}$$

**E13.4** Tem-se uma função

$$Y(s) = \frac{5}{s(s + 1)(s + 5)}.$$

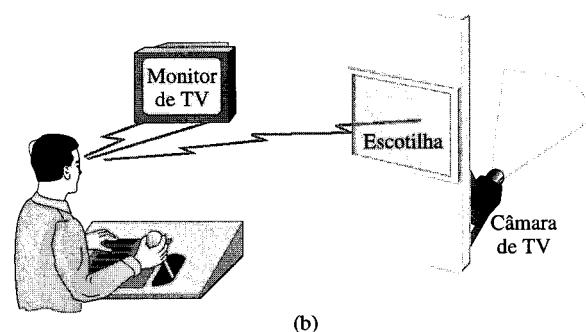
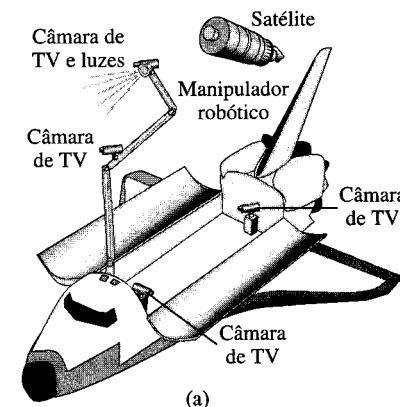
Usando a expansão de  $Y(s)$  em frações parciais e a Tabela 13.1, obter  $Y(z)$ , quando  $T = 0,2$  segundo.

**E13.5** A Fig. E13.5(a) mostra o ônibus espacial com seu braço robótico. Um astronauta controla o braço e a garra através da escotilha e de câmaras de TV [9]. Discutir o uso de controle digital para este sistema e esboçar um diagrama de blocos, incluindo um computador para geração de telas de visualização e controle.

**E13.6** O controle por computador de um robô de pintura com pistola em automóvel está mostrado na Fig. E13.6 [1]. O sistema é do tipo mostrado na Fig. 13.26, onde

$$KG_p(s) = \frac{20}{s(s/2 + 1)},$$

e se deseja uma margem de fase de  $45^\circ$ . Foi obtido, na Seção 10.8, um compensador para este sistema. Obter o  $D(z)$  necessário quando  $T = 0,001$  segundo.



**Fig. E13.5** (a) Ônibus espacial e manipulador robótico; (b) o astronauta controla o manipulador.

**E13.7** Determinar o valor da resposta nos quatro instantes iniciais de amostragem para

$$Y(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{z^3 - 1,5z^2 + 0,5z}.$$

Ou seja, obter  $y(0)$ ,  $y(1)$ ,  $y(2)$  e  $y(3)$ .

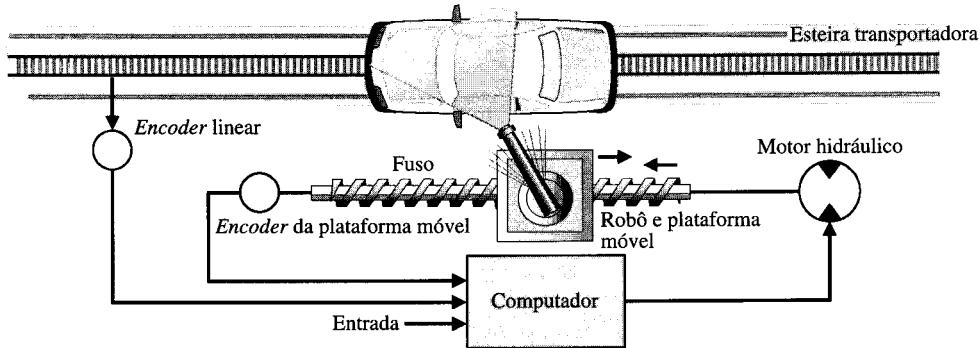


Fig. E13.6 Sistema de pintura automobilística com pistola.

- E13.8** Determinar se o sistema a malha fechada com  $T(z)$  é estável quando

$$T(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 + 0,1z - 0,2}.$$

**Resposta:** estável

- E13.9** (a) Determinar  $y(kT)$  para  $k = 0$  a 3 quando

$$Y(z) = \frac{z + 1}{z^2 - 1}.$$

(b) Determinar a forma fechada da solução para  $y(kT)$  em função de  $k$ .

- E13.10** Um sistema tem um  $G(z)$  descrito pela Eq. (13.34) com  $T = 0,01$  segundo e  $\tau = 0,008$  segundo. (a) Determinar  $K$  tal que a ultrapassagem seja inferior a 40%. (b) Determinar o erro de estado estacionário na resposta a uma rampa unitária de entrada. (c) Determinar  $K$  para minimizar a integral do erro quadrático.

- E13.11** Um sistema possui uma função de transferência do processo a controlar

$$G_p(s) = \frac{100}{s^2 + 100}$$

- (a) Determinar  $G(z)$  para  $G_p(s)$  precedido de um extraplador de ordem com  $T = 0,05$  segundo. (b) Determinar se o sistema digital é estável. (c) Traçar a resposta de  $G(z)$  ao impulso para as 15 primeiras amostras. (d) Traçar a resposta para uma onda de entrada senoidal com a mesma frequência natural do sistema.

- E13.12** Obter a transformada  $z$  de

$$X(s) = \frac{(s + 3)}{s^2 + 3s + 2}$$

quando o período de amostragem for 2 segundos.

- E13.13** A equação característica de um sistema amostrado é

$$z^2 + (K - 1,5)z + 0,5 = 0.$$

Determinar a faixa de valores de  $K$  para a qual o sistema é estável

**Resposta:**  $0 < K < 3$

- E13.14** Um sistema com retroação unitária como o mostrado na Fig. 13.18 apresenta um processo a controlar

$$G_p(s) = \frac{K}{s(s + 3)},$$

Com  $T = 0,5$ . Determinar se o sistema é estável quando  $K = 5$ . Determinar o valor máximo de  $K$  para estabilidade.

## PROBLEMAS

- P13.1** A entrada de um amostrador é  $r(t) = \operatorname{sen} \omega t$ , onde  $\omega = 1/\pi$ . Traçar a entrada do amostrador e a saída  $r^*(t)$  para os primeiros 2 segundos quando  $T = 0,25$  segundo.

- P13.2** A entrada de um amostrador é  $r(t) = \operatorname{sen} \omega t$ , onde  $\omega = 1/\pi$ . A saída do amostrador entra em um extraplador de ordem zero, como mostra a Fig. 13.7. Traçar a saída  $p(t)$  para os primeiros 2 segundos quando  $T = 0,25$  segundo.

- P13.3** Uma rampa unitária  $r(t) = t$ ,  $t > 0$ , é usada como sinal de entrada em um processo onde  $G(s) = 1/(s + 1)$ , como mostra a Fig. P13.3. Determinar a saída  $y(kT)$  para os quatro primeiros instantes de amostragem.

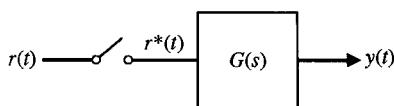


Fig. P13.3 Sistema de amostragem.

- P13.4** Um sistema a malha fechada possui um circuito extraplador e um processo como está mostrado na Fig. 13.18. Determinar  $G(z)$  quando  $T = 1$  e

$$G_p(s) = \frac{2}{s + 2}.$$

- P13.5** Para o sistema do Problema 13.4, seja  $r(t)$  uma entrada em degrau unitário. Calcular a resposta do sistema por divisão sintética.

- P13.6** Para a saída do Problema 13.4, obter os valores inicial e final da saída diretamente de  $Y(z)$ .

- P13.7** Um sistema a malha fechada está mostrado na Fig. 13.18. Este sistema representa o controle de arfagem de um avião. A função de transferência do processo a controlar é  $G_p(s) = K/[s(0,5s + 1)]$ . Escolher um ganho  $K$  e um período de amostragem tais que a ultrapassagem fique limitada a 0,3 do degrau unitário de entrada e que o erro de estado estacionário para uma entrada em rampa unitária seja menor do que 1,0.

- P13.8** Considere-se o sistema compensado por meio de um computador, mostrado na Fig. 13.26, quando  $T = 1$  e

$$KG_p(s) = \frac{K}{s(s + 10)}.$$

Selecionar os parâmetros  $K$  e  $r$  de  $D(z)$  quando

$$D(z) = \frac{(z - 0,3678)}{(z + r)}.$$

Escolher no interior da faixa de valores:  $1 < K < 2$  e  $0 < r < 1$ .

Determinar a resposta do sistema compensado e compará-la com a do sistema sem compensação.

- P13.9** Um novo sistema móvel suspenso, controlado remotamente, mostrado na Fig. P13.9, se destina a dar mobilidade tridimensional às transmissões de jogos de futebol profissional. A câmara pode ser movimentada ao longo de todo o campo, bem como para cima e para baixo. O controle do motor de cada uma das polias é representado pela Fig. 13.18 com

$$G_p(s) = \frac{10}{s(s + 1)(s/10 + 1)}.$$

Deseja-se obter uma margem de fase de  $45^\circ$  usando  $G_c(s)$ . Escolher uma freqüência de cruzamento e um período de amostragem adequados para obter  $D(z)$ . Usar o método de conversão  $G_c(s)$  para  $D(z)$ .

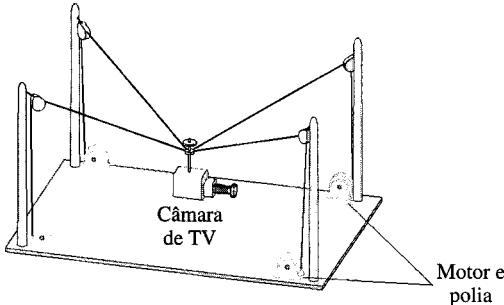


Fig. P13.9 Câmera móvel para campo de futebol.

- P13.10** Considere-se o sistema mostrado na Fig. 13.15 com um extrapolador de ordem zero e um processo a controlar

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s + 10)}$$

e  $T = 0,1$  segundo.

(a) Fazer  $D(z) = K$  e determinar a função de transferência  $G(z)D(z)$ . (b) Determinar a equação característica do sistema a malha fechada. (c) Calcular o valor máximo de  $K$  para que o sistema seja estável. (d) Determinar  $K$  tal que a ultrapassagem seja inferior a 30%. (e) Calcular a função de transferência a malha fechada  $T(z)$  para o valor de  $K$  da parte (d) e traçar o gráfico da resposta ao degrau. (f) Determinar a localização das raízes a malha fechada e a ultrapassagem se o valor de  $K$  for metade do valor determinado na parte (c). (g) Traçar o gráfico da resposta ao degrau com o  $K$  da parte (f).

- P13.11** (a) Para o sistema descrito no Problema 13.10, projetar um compensador por atraso de fase  $G_c(s)$  usando os métodos do Cap. 10 para obter uma ultrapassagem menor que 30% e um erro de estado estacionário para uma entrada em rampa menor que 0,01. Supor um sistema contínuo não amostrado com  $G_p(s)$ . (b) Determinar um  $D(z)$  adequado para satisfazer os requisitos da parte (a) com um período de amostragem  $T = 0,1$  segundo. Supor um extrapolador de ordem zero e amostrador e usar o método de conversão  $G_c(s)$  para  $D(z)$ . (c) Traçar o gráfico da resposta, para uma entrada em degrau, do sistema com o compensador contínuo no tempo  $G_c(s)$  da parte (a) e com o sistema digital  $D(z)$  da parte (b). Comparar os resultados. (d) Repetir a parte (b) para  $T = 0,01$  segundo e depois repetir a parte (c).

(e) Traçar o gráfico da resposta a uma entrada em rampa para  $D(z)$  com  $T = 0,1$  segundo e compará-lo com o da resposta do sistema contínuo.

- P13.12** A função de transferência de um processo a controlar e de um extrapolador de ordem zero (Fig. 13.18) é

$$G(z) = \frac{K(z + 0,5)}{z(z - 1)}.$$

(a) Traçar o lugar das raízes. (b) Determinar a faixa de valores de  $K$  para um sistema estável.

- P13.13** O controlador de orientação da estação espacial descrito no Exercício 7.6 é implementado com um amostrador e um extrapolador de ordem zero e tem a função de transferência (Fig. 13.18)

$$G(z) = \frac{K(z^2 + 1,1206z - 0,0364)}{z^3 - 1,7358z^2 + 0,8711z - 0,1353}.$$

(a) Traçar o lugar das raízes. (b) Determinar o valor de  $K$  de modo que duas raízes da equação característica sejam iguais. (c) Determinar todas as raízes da equação característica para o ganho da parte (b).

- P13.14** Um sistema com dados amostrados com um período de amostragem  $T = 0,05$  s (Fig. 13.18) é

$$G(z) = \frac{K(z^3 + 10,3614z^2 + 9,758z + 0,8353)}{z^4 - 3,7123z^3 + 5,1644z^2 - 3,195z + 0,7408}.$$

(a) Traçar o lugar das raízes. (b) Determinar o valor de  $K$  para o qual dois pólos reais deixam o eixo real. (c) Calcular o valor máximo de  $K$  para estabilidade.

- P13.15** Um sistema a malha fechada com um amostrador e um extrapolador, como mostra a Fig. 13.18, possui uma função de transferência do processo a controlar

$$G_p(s) = \frac{10}{s - 2}.$$

Calcular e traçar o gráfico de  $y(kT)$  para  $0 \leq k \leq 0,6$  quando  $T = 0,1$  segundo. O sinal de entrada é um degrau unitário.

- P13.16** Um sistema a malha fechada como o mostrado na Fig. 13.18 tem

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s + 1)}.$$

Calcular e traçar o gráfico de  $y(kT)$  para  $0 \leq k \leq 8$  quando  $T = 1$  segundo e a entrada for um degrau unitário.

- P13.17** Um sistema a malha fechada como o mostrado na Fig. 13.18 tem

$$G_p(s) = \frac{K}{s(s + 1)}.$$

e  $T = 1$  segundo. Traçar o gráfico do lugar das raízes para  $K \geq 0$  e determinar o ganho  $K$  que resulta em duas raízes da equação característica sobre o círculo  $z$  (no limite de estabilidade).

- P13.18** Um sistema com retroação unitária como o mostrado na Fig. 13.18 tem

$$G_p(s) = \frac{K}{s(s + 1)}.$$

Se o sistema for contínuo ( $T = 0$ ), então  $K = 1$  fornece uma resposta ao degrau com uma ultrapassagem de 16% e um tempo de assentamento (critério dos 2%) de 8 segundos. Traçar o gráfico da resposta para  $0 \leq T \leq 1,2$ , variando o valor de  $T$  com incrementos de 0,2 quando  $K = 1$ . Completar uma tabela com o registro dos valores de ultrapassagem e tempo de assentamento em função de  $T$ .

## PROBLEMAS AVANÇADOS

**PA13.1** Um sistema a malha fechada como o mostrado na Fig. 13.18 tem

$$G_p(s) = \frac{K(1 + as)}{s^2},$$

onde  $a$  é ajustável para se obter uma resposta adequada. Traçar o gráfico do lugar das raízes quando  $a = 10$ . Determinar a faixa de valores de  $K$  para estabilidade quando  $T = 1$  segundo.

**PA13.2** O aumento de restrições quanto a peso, desempenho, consumo de combustível e confiabilidade criou um novo tipo de sistema de controle de vôo conhecido pela expressão em inglês *fly-by-wire*. Esta abordagem implica que determinados componentes do sistema sejam interligados eletricamente em vez de mecanicamente e que irão operar sob a supervisão de um computador responsável pelas tarefas de monitoramento, controle e coordenação. O princípio do *fly-by-wire* permite a implementação de sistemas de controle totalmente digitais e altamente redundantes que alcançam níveis consideráveis de confiabilidade e de desempenho [24].

As características operacionais de um sistema de controle de vôo dependem grandemente da rigidez dinâmica de um atuador, representando sua capacidade de manter a posição das superfícies aerodinâmicas de controle a despeito dos efeitos de perturbações devidas a forças externas aleatórias.

Um sistema atuador de vôo consiste em um tipo especial de motor CC, acionado por um amplificador de potência, que aciona uma bomba hidráulica conectada a ambos os lados de um cilindro hidráulico. A haste do cilindro hidráulico é conectada à superfície de controle da aeronave através de algum sistema mecânico apropriado, como mostrado na Fig. PA13.2(a).

O diagrama de blocos do sistema a malha fechada está mostrado na Fig. PA13.2(b). Deseja-se uma resposta ao degrau com uma ultrapassagem inferior a 5% e um tempo de assentamento

(critério dos 2%) menor que 4 segundos. (a) Projetar  $D(z)$  e traçar o gráfico do lugar das raízes do sistema. (b) Traçar o gráfico da resposta do sistema com o projeto da parte (a).

**PA13.3** Um fabricante usa um adesivo para realizar uma emenda na borda de um material, como mostra a Fig. PA13.3. A aplicação da cola de forma homogênea é crítica para evitar falhas; contudo, a velocidade com a qual o material passa sob o bico dosador de cola não é constante. A cola deve ser fornecida com uma taxa proporcional à velocidade variável do material. O controlador ajusta a válvula que libera a cola [12].

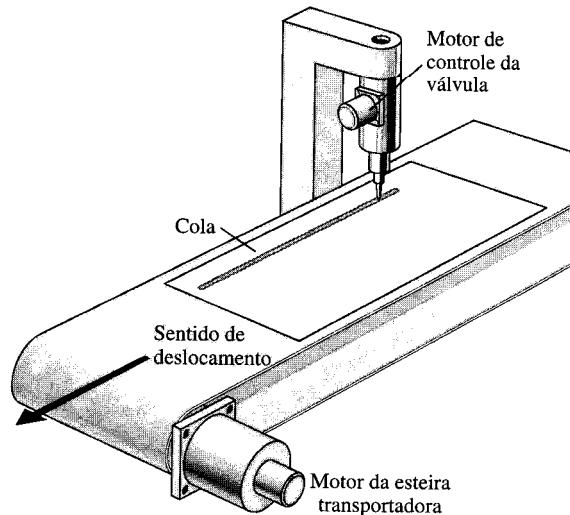
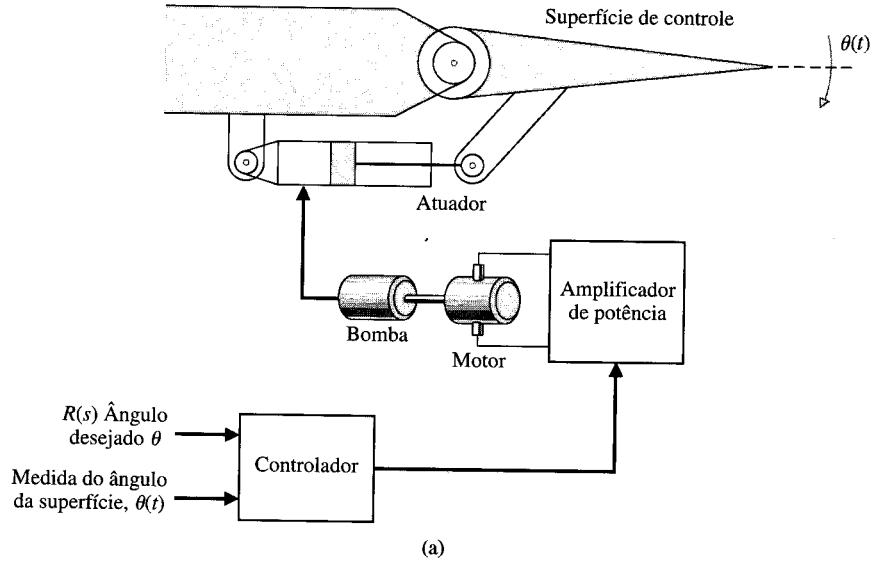
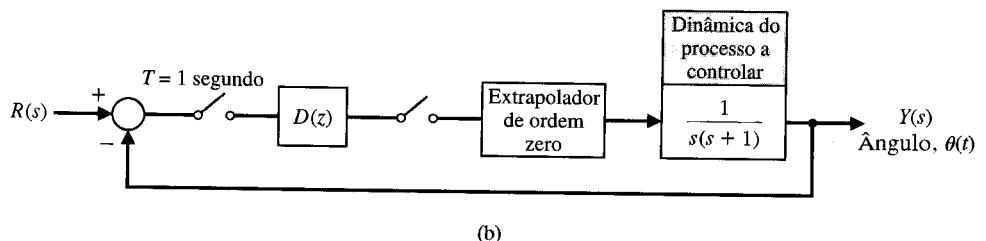


Fig. PA 13.3 Sistema de controle de cola.



(a)



(b)

Fig. PA13.2 (a) Sistema de controle de superfície aerodinâmica de avião (*fly-by-wire*) para telescópio com levitação magnética. (b) Diagrama de blocos. O período de amostragem é 1 segundo.

O sistema pode ser representado pelo diagrama de blocos mostrado na Fig. 13.15, onde  $G_p(s) = 2/(0,03s + 1)$  com um extrapolador de ordem zero  $G_0(s)$ . Usar um controlador

$$D(z) = \frac{KT}{1 - z^{-1}} = \frac{KTz}{z - 1}$$

que represente um controlador integral. Determinar  $G(z)D(z)$  para  $T = 30$  ms e traçar o gráfico do lugar das raízes. Selecionar um valor adequado do ganho  $K$  e traçar o gráfico da resposta a um degrau.

**PA13.4** Um sistema da forma mostrada na Fig. 13.15 tem  $D(z) = K$  e

$$G_p(s) = \frac{27}{s(s + 27)}.$$

Quando  $T = 0,1$ , determinar o valor adequado para  $K$  para uma resposta rápida e uma ultrapassagem menor que 10%.

**PA13.5** Um sistema da forma mostrada na Fig. 13.18 tem

$$G_p(s) = \frac{10}{s + 1}.$$

Determinar a faixa de valores do período de amostragem para a qual o sistema é estável. Selecionar um período de amostragem  $T$  de modo que o sistema seja estável e forneça uma resposta rápida.

## PROBLEMAS DE PROJETO

**PPC13.1** Projetar um controlador digital para o sistema usando o modelo de segunda ordem do conjunto motor-sarilho-mesa deslizante como descrito em PPC2.1 e PPC4.1. Usar um período de amostragem de  $T = 1$  ms e selecionar um  $D(z)$  adequado para o sistema mostrado na Fig. 13.15. Determinar a resposta do sistema projetado para uma entrada em degrau  $r(t)$ .

**PP13.1** Um sistema de temperatura como o mostrado na Fig. 13.15 possui um processo com função de transferência

$$G_p(s) = \frac{0,8}{3s + 1}$$

e um período de amostragem  $T$  de 0,5 segundo.

(a) Usando  $D(z) = K$ , selecionar um ganho  $K$  de modo que o sistema seja estável. (b) O sistema pode ser lento e superamortecido, e se procura projetar uma estrutura de avanço de fase usando o método da Seção 10.8. Determinar um controlador adequado  $G_c(s)$  e em seguida calcular  $D(z)$ . (c) Verificar o projeto obtido na parte (b) traçando o gráfico da resposta ao degrau do sistema com o  $D(z)$  selecionado.

**PP13.2** Um sistema de posicionamento da cabeça de leitura e de gravação de um acionador de disco possui uma estrutura como a mostrada na Fig. 13.15 [11]. A função de transferência do processo a controlar é

$$G_p(s) = \frac{10}{s^2 + 0,8s + 800}.$$

É necessário um controle preciso empregando um compensador digital. Fazer  $T = 10$  ms e projetar um compensador,  $D(z)$ , utilizando (a) o método da conversão  $G_c(s)$  para  $D(z)$  e (b) o método do lugar das raízes.

**PP13.3** O controle da tração de um veículo, que inclui frenagem antiderrapante e aceleração anti-rotação, pode melhorar o desempenho do veículo e da condução deste. O objetivo deste controle é maximizar a tração dos pneus evitando que as rodas fiquem bloqueadas durante a frenagem e que o veículo saia de lado durante a aceleração.

O deslizamento da roda, a diferença entre a velocidade do veículo e a velocidade da roda (normalizada pela velocidade de frenagem do veículo e a velocidade da roda para aceleração),

é escolhido como a variável controlada na maioria dos algoritmos de controle de tração devido à sua forte influência sobre a força de tração entre o pneu e a estrada [20].

O modelo para uma roda está mostrado na Fig. PP13.3, onde  $\lambda$  é o deslizamento da roda. O objetivo é minimizar o deslizamento quando ocorrer uma perturbação devida às condições da estrada. Projetar um controlador  $D(z)$  tal que o  $\zeta$  do sistema seja  $1/\sqrt{2}$  e determinar o  $K$  resultante. Admitir  $T = 0,1$  segundo. Traçar o gráfico da resposta ao degrau resultante e obter a ultrapassagem e o tempo de assentamento (critério dos 2%).

**PP13.4** Um sistema de máquina-ferramenta possui a forma mostrada na Fig. 13.25 com [10]

$$G_p(s) = \frac{0,1}{s(s + 0,1)}.$$

A taxa de amostragem é escolhida como  $T = 1$  segundo. Deixe-se que a resposta ao degrau apresente uma ultrapassagem de 16% ou menos e um tempo de assentamento (critério dos 2%) de 12 segundos ou menos. Além disto, o erro para uma entrada em rampa unitária,  $r(t) = t$ , deve ser menor ou igual a 1. Projetar um  $D(z)$  para atender a estas especificações.

**PP13.5** A extrusão de plástico é um método bem conhecido e amplamente usado na indústria de processamento de polímeros [12]. Tais extrusoras consistem tipicamente em um grande tubo dividido em diversas zonas de temperatura com um alimentador em uma extremidade e uma fieira na outra. O polímero é suprido ao tubo sob a forma de matéria-prima sólida a partir do alimentador e é empurrado para a frente por meio de um parafuso potente. Simultaneamente é aquecido de forma gradual ao passar pelas diversas zonas de temperatura ajustadas em valores crescentes. O calor produzido pelos aquecedores ao longo do tubo, juntamente com o calor liberado pelo atrito entre o polímero bruto e as superfícies do tubo e do parafuso, termina finalmente por fundir o polímero, que é então empurrado pelo parafuso através da fieira, a fim de ser processado depois para diversas finalidades.

As variáveis de saída são o fluxo de saída da fieira e a temperatura do polímero. A variável controlada principal é a velo-

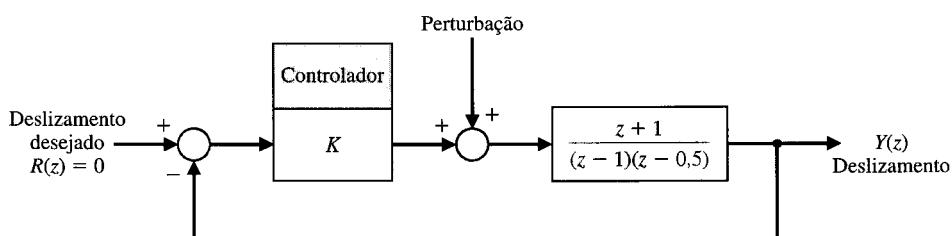


Fig. PP13.3

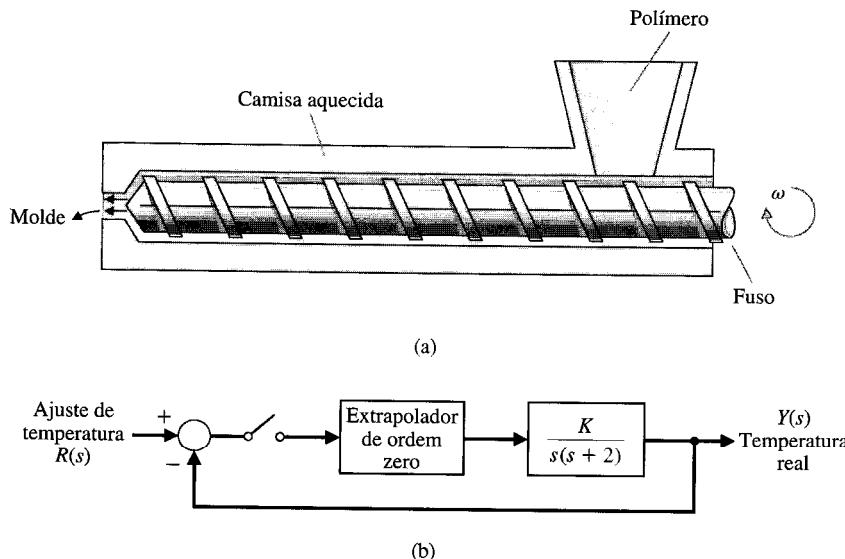


Fig. PP13.5 Sistema de controle de extrusora.

cidade do parafuso, uma vez que a resposta do processo a esta variável é rápida.

O sistema de controle da temperatura de saída do polímero está mostrado na Fig. PP13.5. Selecionar um ganho  $K$  e um pe-

ríodo de amostragem  $T$  para se obter uma resposta ao degrau com uma ultrapassagem de 10% e reduzir o erro estacionário para uma entrada em rampa.



### PROBLEMAS COM MATLAB

**PM13.1** Usando o MATLAB, traçar o gráfico da resposta ao degrau unitário do sistema

$$G(z) = \frac{0,2145z + 0,1609}{z^2 - 0,75z + 0,125}.$$

Verificar graficamente que o valor do erro de estado estacionário da saída é 1.

**PM13.2** Converter as seguintes funções de transferência de sistemas contínuos no tempo em funções de transferência de sistemas com dados amostrados usando a função `c2dm`. Admitir o período de amostragem de 1 segundo e um extraplador de ordem zero,  $G_0(s)$ .

$$(a) G_p(s) = \frac{1}{s}$$

$$(b) G_p(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$(c) G_p(s) = \frac{s + 5}{s + 1}$$

$$(d) G_p(s) = \frac{1}{s(s + 1)}$$

**PM13.3** A função de transferência a malha fechada de um sistema com dados amostrados é dada por

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{1,7(z + 0,46)}{z^2 + z + 0,5}.$$

(a) Calcular a resposta do sistema para uma entrada em degrau usando a função `dstep`. (b) Determinar a função de transferência de um sistema contínuo no tempo equivalente a  $T(z)$  usando a função `d2cm` e admitir um período de amostragem  $T = 0,1$  segundo. (c) Calcular a resposta ao degrau unitário do sistema contínuo (não amostrado) usando a função `step` e comparar o gráfico com o da parte (a).

**PM13.4** Traçar o gráfico do lugar das raízes para o sistema

$$G(z)D(z) = K \frac{z}{z^2 - z + 0,1}.$$

Determinar a faixa de valores de  $K$  para estabilidade.

**PM13.5** Considere-se o sistema com retroação da Fig. PM13.5. Obter o lugar das raízes e determinar a faixa de valores de  $K$  para estabilidade.

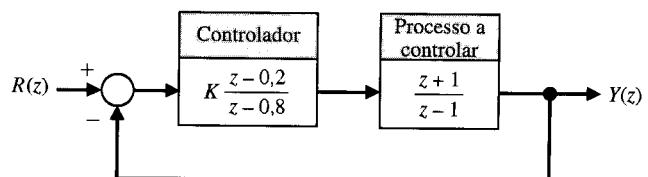


Fig. PM13.5 Sistema de controle com um controlador digital.

**PM13.6** Considere-se o sistema com dados amostrados com a função de transferência de malha

$$G(z)D(z) = K \frac{z^2 + 4z + 4,25}{z^2 - 0,1z - 1,5}.$$

(a) Traçar o gráfico do lugar das raízes usando a função `rllocus`.

(b) A partir do lugar das raízes, determinar a faixa de valores de  $K$  para estabilidade. Usar a função `rlcfind`.

**PM13.7** Um processo industrial de moagem é dado pela função de transferência [17]

$$G_p(s) = \frac{10}{s(s + 5)}.$$

O objetivo é usar um computador digital para melhorar o desempenho, em que a função de transferência do computador é representada por  $D(z)$ . As especificações de projeto são (1) margem de fase maior que  $45^\circ$  e (2) tempo de assentamento (critério dos 2%) menor que 1 segundo.

(a) Projetar um controlador

$$G_c(s) = K \frac{s + a}{s + b}$$

para atender as especificações de projeto. (b) Supondo um período de amostragem  $T = 0,02$  segundo, converter  $G_c(s)$  em  $D(z)$ . (c) Simular o sistema contínuo a malha fechada submetido a uma entrada em degrau unitário. (d) Simular o sistema com dados amostrados submetido a uma entrada em degrau unitário. (e) Comparar os resultados das partes (c) e (d) e comentar.

## TERMOS E CONCEITOS

---

**Compensador com computador digital** Um sistema que usa um computador digital como elemento compensador.

**Dados amostrados** Dados obtidos das variáveis do sistema somente em intervalos discretos. Os dados são obtidos uma vez a cada período de amostragem.

**Erro de quantização de amplitude** O sinal amostrado disponível somente com precisão limitada. O erro entre o sinal real e o sinal amostrado.

**Estabilidade de um sistema com dados amostrados** A condição de estabilidade se verifica quando todos os pólos da função de transferência a malha fechada  $T(z)$  estiverem no interior do círculo unitário no plano  $z$ .

**Período de amostragem** O período em que todos os números saem ou entram no computador. O período para o qual a variável amostrada é mantida constante.

**Plano z** O plano com o eixo vertical igual à parte imaginária de  $z$  e o eixo horizontal igual à parte real de  $z$ .

**Sistema de controle digital** Um sistema de controle que usa sinais digitais e um computador digital para controlar um processo.

**Sistemas com dados amostrados** Um sistema em que parte dele age com dados amostrados (variáveis amostradas).

**Transformada z** Um mapeamento conforme do plano  $s$  no plano  $z$  por meio da relação  $z = e^{sT}$ . Uma transformação do domínio  $s$  no domínio  $z$ .

## **A P É N D I C E S**

- A. Pares de Transformada de Laplace**
- B. Símbolos, Unidades e Fatores de Conversão**
- C. Uma Introdução à Álgebra Matricial**
- D. Conversão em Decibéis**
- E. Números Complexos**
- F. Fundamentos do MATLAB**
- G. Pares de Transformada z**

## APÊNDICE A

# Pares de Transformada de Laplace

TABELA A.1

$F(s)$	$f(t), t \geq 0$
1. 1	$\delta(t_0)$ , impulso unitário no instante $t = t_0$
2. $1/s$	1, degrau unitário
3. $\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n$
4. $\frac{1}{(s + a)}$	$e^{-at}$
5. $\frac{1}{(s + a)^n}$	$\frac{1}{(n - 1)!} t^{n-1} e^{-at}$
6. $\frac{a}{s(s + a)}$	$1 - e^{-at}$
7. $\frac{1}{(s + a)(s + b)}$	$\frac{1}{(b - a)} (e^{-at} - e^{-bt})$
8. $\frac{s + \alpha}{(s + a)(s + b)}$	$\frac{1}{(b - a)} [(\alpha - a)e^{-at} - (\alpha - b)e^{-bt}]$
9. $\frac{ab}{s(s + a)(s + b)}$	$1 - \frac{b}{(b - a)} e^{-at} + \frac{a}{(b - a)} e^{-bt}$
10. $\frac{1}{(s + a)(s + b)(s + c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b - a)(c - a)} + \frac{e^{-bt}}{(c - a)(a - b)} + \frac{e^{-ct}}{(a - c)(b - c)}$
11. $\frac{s + \alpha}{(s + a)(s + b)(s + c)}$	$\frac{(\alpha - a)e^{-at}}{(b - a)(c - a)} + \frac{(\alpha - b)e^{-bt}}{(c - b)(a - b)} + \frac{(\alpha - c)e^{-ct}}{(a - c)(b - c)}$
12. $\frac{ab(s + \alpha)}{s(s + a)(s + b)}$	$\alpha - \frac{b(\alpha - a)}{(b - a)} e^{-at} + \frac{a(\alpha - b)}{(b - a)} e^{-bt}$
13. $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
14. $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
15. $\frac{s + \alpha}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{\omega} \sin(\omega t + \phi), \phi = \tan^{-1} \omega/\alpha$
16. $\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$

TABELA A.1 Continuação

$F(s)$	$f(t), t \geq 0$
17. $\frac{(s + a)}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$
18. $\frac{s + \alpha}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} [(\alpha - a)^2 + \omega^2]^{1/2} e^{-at} \sin (\omega t + \phi),$ $\phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{\alpha - a}$
19. $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t, \quad \zeta < 1$
20. $\frac{1}{s[(s + a)^2 + \omega^2]}$	$\frac{1}{a^2 + \omega^2} + \frac{1}{\omega \sqrt{a^2 + \omega^2}} e^{-at} \sin (\omega t - \phi),$ $\phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{-a}$
21. $\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin (\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi),$ $\phi = \cos^{-1} \zeta, \quad \zeta < 1$
22. $\frac{(s + \alpha)}{s[(s + a)^2 + \omega^2]}$	$\frac{\alpha}{a^2 + \omega^2} + \frac{1}{\omega} \left[ \frac{(\alpha - a)^2 + \omega^2}{a^2 + \omega^2} \right]^{1/2} e^{-at} \sin (\omega t + \phi),$ $\phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{\alpha - a} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{-a}$
23. $\frac{1}{(s + c)[(s + a)^2 + \omega^2]}$	$\frac{e^{-ct}}{(c - a)^2 + \omega^2} + \frac{e^{-at} \sin (\omega t + \phi)}{\omega [(c - a)^2 + \omega^2]^{1/2}}, \quad \phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{c - a}$

## A PÊNDICE B

# Símbolos, Unidades e Fatores de Conversão

**TABELA B.1 Símbolos e Unidades**

Parâmetro ou Nome de Variável	Símbolo	SI	Sistema Inglês
Aceleração angular	$\alpha(t)$	$\text{rad/s}^2$	$\text{rad/s}^2$
Aceleração de translação	$a(t)$	$\text{m/s}^2$	$\text{ft/s}^2$
Atrito de rotação	$b$	$\frac{\text{N.m}}{\text{rad/s}}$	$\frac{\text{Pé-libra}}{\text{rad/s}}$
Atrito de translação	$b$	$\frac{\text{N}}{\text{m/s}}$	$\frac{\text{lb}}{\text{ft/s}}$
Momento de inércia	$J$	$\frac{\text{N.m}}{\text{rad/s}^2}$	$\frac{\text{Pé-libra}}{\text{rad/s}^2}$
Massa	$M$	$\text{kg}$	slugs
Posição angular	$\Theta(t)$	$\text{rad}$	$\text{rad}$
Posição de translação	$x(t)$	$\text{m}$	$\text{ft}$
Velocidade angular	$\omega(t)$	$\text{rad/s}$	$\text{rad/s}$
Velocidade de translação	$v(t)$	$\text{m/s}$	$\text{ft/s}$
Torque	$T(t)$	$\text{N.m}$	$\text{Pé-libra}$

**TABELA B.2 Fatores de Conversão**

Para Converter	Em	Multiplicar por	Para Converter	Em	Multiplicar por
Btu	ft-lb	778,3	kW	hp	1,341
Btu	joule	1054,8			
Btu/h	ft-lb/s	0,2162	milhas	ft	5280
Btu/h	watt	0,2931	mph	ft/min	88
Btu/min	hp	0,02356	mph	ft/s	1,467
Btu/min	kW	0,01757	mph	m/s	0,44704
Btu/min	watt	17,57			
cal	joule	4,182	mil	cm	$2,540 \times 10^{-3}$
cm	ft	$3,281 \times 10^{-2}$	mil	in	0,001
cm	in	0,3937	minuto (ângulo)	grau	0,01667
cm <sup>3</sup>	ft <sup>3</sup>	$3,531 \times 10^{-5}$	minuto (ângulo)	rad	$2,909 \times 10^{-4}$
grau (ângulo)	rad	0,01745			
grau/s	rpm	0,1667	N.m	ft-lb	0,73756
dina	g (força)	$1,020 \times 10^{-3}$	N.m	dina . cm	10 <sup>7</sup>
dina	lb (força)	$2,248 \times 10^{-6}$	N.m/s	watt	1,0
dina	newton	10 <sup>-5</sup>			
ft/s	mph	0,6818	oz	g (força)	28,349527
ft/s	milha/min	0,01136	oz-in	dina . cm	70.615,7
ft-lb	g . cm	$1,383 \times 10^4$	oz-in <sup>2</sup>	g · cm <sup>2</sup>	$1,829 \times 10^2$
ft-lb	oz-in	192	oz-in	ft-lb	$5,208 \times 10^{-3}$
ft-lb/min	Btu/min	$1,286 \times 10^{-3}$	oz-in	g . cm	72,01
ft-lb/s	hp	$1,818 \times 10^{-3}$			
ft-lb/s	kW	$1,356 \times 10^{-3}$	lb (força)	newton	4,4482
ft-lb	oz-in		lb/ft <sup>3</sup>	g/cm <sup>3</sup>	0,01602
rad/s	rpm	20,11	lb-ft-s <sup>2</sup>	oz-in <sup>2</sup>	$7,419 \times 10^4$
g (força)	dina	980,7	rad	grau (ângulo)	57,30
g (força)	lb	$2,205 \times 10^{-3}$	rad	minuto (ângulo)	3438
g . cm <sup>2</sup>	oz-in <sup>2</sup>	$5,468 \times 10^{-3}$	rad	segundo (ângulo)	$2,063 \times 10^5$
g . cm	oz-in	$1,389 \times 10^{-2}$	rad/s	grau/s	57,30
g . cm	ft-lb	$1,235 \times 10^{-5}$	rad/s	rpm	9,549
hp	Btu/min	42,44	rad/s	rps	0,1592
hp	ft-lb/min	33.000	rpm	grau/s	6,0
hp	ft-lb/s	550,0	rpm	rad/s	0,1047
hp	watt	745,7			
in	m	$2,540 \times 10^{-2}$	segundo (ângulo)	grau	$2,778 \times 10^{-4}$
in	cm	2,540	segundo (ângulo)	rad	$4,848 \times 10^{-6}$
joule	Btu	$9,480 \times 10^{-4}$	slug	kg	14,594
joule	erg	10 <sup>7</sup>	slug-ft <sup>2</sup>	kg.m <sup>2</sup>	1,3558
joule	ft-lb	0,7376	watt	Btu/h	3,413
joule	Wh	$2,778 \times 10^{-4}$	watt	Btu/min	0,05688
kg	lb	2,205	watt	ft-lb/min	44,27
kg	slug (massa)	$6,852 \times 10^{-2}$	watt	hp	$1,341 \times 10^{-3}$
kW	Btu/min	56,92	watt	N.m/s	1,0
kW	ft-lb/min	$4,462 \times 10^4$	Wh	Btu	3,413

## APÊNDICE C

# *Uma Introdução à Álgebra Matricial*

## C.1 DEFINIÇÕES

Em muitas situações, há necessidade de se lidar com arranjos retangulares de números e de funções. O arranjo retangular de números (ou de funções)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

é conhecido como uma **matriz**. Os números  $a_{ij}$  são chamados **elementos** da matriz, em que o índice subscrito  $i$  designa a linha e o índice subscrito  $j$  designa a coluna.

Uma matriz com  $m$  linhas e  $n$  colunas é dita uma matriz de **ordem**  $(m, n)$  ou, alternativamente, é chamada uma matriz  $m \times n$  ( $m$  por  $n$ ). Quando o número de colunas é igual ao número de linhas ( $m = n$ ), diz-se que a matriz é uma **matriz quadrada** de ordem  $n$ . É comum utilizar letras maiúsculas em negrito para designar uma matriz  $m \times n$ .

Uma matriz constituída de uma única coluna, isto é, uma matriz  $m \times 1$ , é conhecida como uma matriz coluna, ou, mais comumente, como um **vetor coluna**. Um vetor coluna será representado por letras minúsculas em negrito, como, por exemplo,

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Analogamente, um **vetor linha** é uma coleção ordenada de números escritos em uma linha — isto é, uma matriz  $1 \times n$ . Serão usadas letras minúsculas em negrito para representar vetores. Assim, um vetor linha será escrito como

$$\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n], \quad (\text{C.3})$$

com  $n$  elementos.

A algumas matrizes com determinadas características serão atribuídos nomes especiais. Uma matriz quadrada na qual todos os elementos são obrigatoriamente nulos exceto os da diagonal principal,  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ , é chamada uma **matriz diagonal**. Assim, por exemplo, uma matriz diagonal  $3 \times 3$  seria

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.4})$$

Se todos os elementos de uma matriz diagonal possuírem o valor 1, então a matriz é conhecida como a **matriz identidade I**, que é escrita como

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Quando todos os elementos de uma matriz são iguais a zero, a matriz é chamada **matriz zero**, ou **matriz nula**. Quando os elementos de uma matriz possuem uma relação especial tal que  $a_{ij} = a_{ji}$ , ela é chamada uma matriz **simétrica**. Assim, a matriz

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

é uma matriz simétrica de ordem (3, 3).

## C.2 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

A adição de matrizes é possível somente para matrizes de mesma ordem. A soma de duas matrizes é obtida somando-se os elementos correspondentes. Assim, se os elementos de  $\mathbf{A}$  são  $a_{ij}$  e os elementos de  $\mathbf{B}$  são  $b_{ij}$ , e se

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}, \quad (\text{C.7})$$

Então os elementos de  $\mathbf{C}$  que são  $c_{ij}$  são obtidos como

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \quad (\text{C.8})$$

Por exemplo, a adição de duas matrizes  $3 \times 3$ , se faz como

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.9})$$

A partir da definição usada para efetuar a adição, observa-se que a operação é **comutativa**, isto é,

$$\boxed{\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}}. \quad (\text{C.10})$$

Observa-se, ainda, que a adição é uma operação **associativa**, de modo que

$$\boxed{(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})}. \quad (\text{C.11})$$

Para executar a operação de subtração, observa-se que se uma matriz  $\mathbf{A}$  for multiplicada por uma constante  $\alpha$ , então cada elemento da matriz é multiplicado por esta constante. Em consequência, se escreve

$$\alpha \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.12})$$

Então, para efetuar uma operação de subtração, usa-se  $\alpha = -1$ , e se obtém  $-\mathbf{A}$  multiplicando-se cada um dos elementos de  $\mathbf{A}$  por  $-1$ . Por exemplo,

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.13})$$

## C.3 MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

A multiplicação de duas matrizes  $\mathbf{AB}$  requer que o número de colunas de  $\mathbf{A}$  seja igual ao número de colunas de  $\mathbf{B}$ . Assim, se  $\mathbf{A}$  for de ordem  $m \times n$  e  $\mathbf{B}$  for de ordem  $n \times q$ , então o produto será de ordem  $m \times q$ . Os elementos de um produto

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} \quad (\text{C.14})$$

são obtidos multiplicando-se a  $i$ -ésima linha de  $\mathbf{A}$  pela  $j$ -ésima coluna de  $\mathbf{B}$  e somando-se estes produtos para ter o elemento  $c_{ij}$ . Isto é,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{iq}b_{qj} = \sum_{k=1}^q a_{ik}b_{kj}. \quad (\text{C.15})$$

Assim, obtém-se  $c_{11}$ , o primeiro elemento de  $\mathbf{C}$ , multiplicando a primeira linha de  $\mathbf{A}$  pela primeira coluna de  $\mathbf{B}$  e somando-se os produtos dos elementos. Deve-se observar que, em geral, a multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é,

$$\boxed{\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.} \quad (\text{C.16})$$

Observa-se, ainda, que a multiplicação de uma matriz  $m \times n$  por um vetor coluna (de ordem  $n \times 1$ ) resulta em um vetor coluna de ordem  $m \times 1$ .

Um exemplo específico de multiplicação de uma matriz por um vetor coluna é

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ay} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3) \\ (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.17})$$

Observe-se que  $\mathbf{A}$  é de ordem  $2 \times 3$  e  $\mathbf{y}$  é de ordem  $3 \times 1$ . Em consequência, a matriz  $\mathbf{x}$  resultante é de ordem  $2 \times 1$ , que é um vetor coluna com duas linhas. Há dois elementos de  $\mathbf{x}$ , e

$$x_1 = (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3) \quad (\text{C.18})$$

É o primeiro elemento obtido através da multiplicação da primeira linha de  $\mathbf{A}$  pela primeira (e única) coluna de  $\mathbf{y}$ .

Um outro exemplo, que o leitor poderá verificar, é

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.19})$$

Por exemplo, o elemento  $c_{22}$  é obtido através de  $c_{22} = -1(2) + 2(-2) = -6$ .

É possível agora usar esta definição de multiplicação para representar um sistema de equações algébricas lineares por meio de uma equação matricial. Seja o seguinte sistema de equações algébricas:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= u_1, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 &= u_2, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= u_3. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Podem ser identificados dois vetores coluna como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.21})$$

Pode-se escrever, então, a equação matricial

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{u}, \quad (\text{C.22})$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pode-se constatar imediatamente a utilidade da equação matricial como uma forma compacta do sistema de equações.

A multiplicação de um vetor linha por um vetor coluna pode ser escrita como

$$\mathbf{xy} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n. \quad (\text{C.23})$$

Observa-se, assim, que a multiplicação de um vetor linha por um vetor coluna resulta em número que é a soma dos produtos dos elementos específicos de cada vetor.

Como um item final desta seção, observa-se que a multiplicação de qualquer matriz pela matriz identidade resulta na matriz original, isto é,  $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$ .

## C.4 OUTRAS OPERAÇÕES MATRICIAIS E DEFINIÇÕES ÚTEIS

A **transposta** de uma matriz  $\mathbf{A}$  é designada neste texto por  $\mathbf{A}^T$ . Encontra-se, freqüentemente, na literatura a notação  $\mathbf{A}'$  no lugar de  $\mathbf{A}^T$ . A transposta de uma matriz  $\mathbf{A}$  é obtida intercambiando-se linhas por colunas de  $\mathbf{A}$ . Por exemplo, se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

então

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.24})$$

Em consequência, pode-se designar um vetor linha como a transposta de um vetor coluna e escrever

$$\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]. \quad (\text{C.25})$$

Como  $\mathbf{x}^T$  é um vetor linha, obtém-se a multiplicação de  $\mathbf{x}^T$  por  $\mathbf{x}$  como a seguir

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2. \quad (\text{C.26})$$

Assim a multiplicação  $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$  resulta na soma dos quadrados de cada elemento de  $\mathbf{x}$ .

A transposta do produto de duas matrizes é o produto na ordem inversa de suas transpostas, de modo que

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T. \quad (\text{C.27})$$

A soma dos elementos da diagonal principal de uma matriz quadrada  $\mathbf{A}$  é chamada de **traço** de  $\mathbf{A}$ , escrita como

$$\text{tr } \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}. \quad (\text{C.28})$$

O **determinante** de uma matriz quadrada é representado pelo confinamento dos elementos da matriz  $\mathbf{A}$  entre barras verticais; por exemplo

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (\text{C.29})$$

Se o determinante de  $\mathbf{A}$  for igual a zero, então o determinante é dito **singular**. O valor de um determinante é determinado obtendo-se os menores e os co-fatores dos determinantes. O **menor** de um elemento  $a_{ij}$  de um determinante de ordem  $n$  é um determinante de ordem  $(n - 1)$  obtido removendo-se a linha  $i$  e a coluna  $j$  do determinante original. O co-fator de um dado elemento de um determinante é o menor do elemento ao qual se atribui ora o sinal mais, ora o sinal menos; ou seja

$$\text{co-fator de } a_{ij} = \alpha_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

onde  $M_{ij}$  é o menor de  $a_{ij}$ . Por exemplo, o co-fator do elemento  $a_{23}$  de

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{C.30})$$

é

$$\alpha_{23} = (-1)^5 M_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (\text{C.31})$$

O valor de um determinante de segunda ordem ( $2 \times 2$ ) é

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}). \quad (\text{C.32})$$

O determinante geral de  $n$ -ésima ordem tem um valor dado por

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_{ij} \quad \text{com a escolha de uma linha } i, \quad (\text{C.33})$$

ou

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \alpha_{ij} \quad \text{com a escolha de uma coluna } j. \quad (\text{C.33})$$

Isto é, são escolhidos os elementos  $a_{ij}$  de uma linha (ou coluna) específica e essa linha (ou coluna) inteira é expandida de acordo com a Eq. (C.33). Por exemplo, o valor de um determinante  $3 \times 3$  específico é

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(-1) - (-5) + 2(3) = 9, \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

que foi expandido segundo a primeira coluna.

A **matriz adjunta** de uma matriz quadrada  $\mathbf{A}$  é formada substituindo-se cada um dos elementos  $a_{ij}$  pelo co-fator  $\alpha_{ij}$  e fazendo a transposição. Portanto,

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.35})$$

## C.5 INVERSÃO DE MATRIZES

A inversa de uma matriz quadrada  $\mathbf{A}$  é escrita como  $\mathbf{A}^{-1}$  e é definida como satisfazendo a relação

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}. \quad (\text{C.36})$$

A *inversa* de uma matriz  $\mathbf{A}$  é

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adjunta de } \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}} \quad (\text{C.37})$$

onde o determinante  $\det \mathbf{A}$  não pode ser igual a zero. Para uma matriz  $2 \times 2$  tem-se a matriz adjunta

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.38})$$

E o determinante  $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ . Seja a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.39})$$

O determinante tem um valor de  $\det \mathbf{A} = -7$ . O co-fator  $\alpha_{11}$  é

$$\alpha_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3. \quad (\text{C.40})$$

De um modo semelhante, obtém-se

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}} = \left( -\frac{1}{7} \right) \begin{bmatrix} 3 & -5 & 11 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.41})$$

## C.6 MATRIZES E RAÍZES CARACTERÍSTICAS

Um sistema de equações algébricas lineares pode ser representada pela equação matricial

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax}, \quad (\text{C.42})$$

onde o vetor  $\mathbf{y}$  pode ser considerado como uma transformação do vetor  $\mathbf{x}$ . Poderia ser perguntado o que aconteceria se o vetor  $\mathbf{y}$  fosse um múltiplo escalar de  $\mathbf{x}$ . Tentando usar  $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$ , onde  $\lambda$  é um escalar, tem-se

$$\lambda\mathbf{x} = \mathbf{Ax}. \quad (\text{C.43})$$

Alternativamente a Eq. (C.43) pode ser escrita como

$$\lambda\mathbf{x} - \mathbf{Ax} = (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (\text{C.44})$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. Assim existe solução para  $\mathbf{x}$  se e somente se

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0. \quad (\text{C.45})$$

Este determinante é chamado o determinante característico de  $\mathbf{A}$ . A expansão do determinante dado pela Eq. (C.45) resulta na **equação característica**. A equação característica é um polinômio do  $n$ -ésimo grau em  $\lambda$ . As  $n$  raízes desta equação característica são chamadas de **raízes características**. Para cada um dos valores possíveis de  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) da equação característica de  $n$ -ésima ordem, pode-se escrever

$$(\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_i = \mathbf{0}. \quad (\text{C.46})$$

O vetor  $\mathbf{x}_i$  é o **vetor característico** da  $i$ -ésima raiz. Considere-se a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.47})$$

A equação característica é determinada como a seguir:

$$\det \begin{bmatrix} (\lambda - 2) & -1 & -1 \\ -2 & (\lambda - 3) & -4 \\ 1 & 1 & (\lambda + 2) \end{bmatrix} = (-\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3) = 0. \quad (\text{C.48})$$

As raízes da equação característica são  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_3 = 3$ . Quando  $\lambda = \lambda_1 = 1$  acha-se o primeiro vetor característico a partir da equação

$$\mathbf{Ax}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1, \quad (\text{C.49})$$

E se tem  $\mathbf{x}_1^T = k[1 \ -1 \ 0]$ , onde  $k$  é uma constante arbitrária escolhida usualmente igual a 1. De igual modo, obtém-se

$$\mathbf{x}_2^T = [0 \ 1 \ -1],$$

e

$$\mathbf{x}_3^T = [2 \ 3 \ -1]. \quad (\text{C.50})$$

## C.7 CÁLCULO DE MATRIZES

A derivada de uma matriz  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$  é definida como

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{A}(t)] = \begin{bmatrix} da_{11}(t)/dt & da_{12}(t)/dt & \dots & da_{1n}(t)/dt \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ da_{n1}(t)/dt & da_{n2}(t)/dt & \dots & da_{nn}(t)/dt \end{bmatrix}. \quad (\text{C.51})$$

Isto é, a derivada de uma matriz é obtida, simplesmente, derivando-se cada um dos elementos  $a_{ij}(t)$  da matriz.

A **função exponencial de matriz** é definida como a série de potências

$$\exp[\mathbf{A}] = e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}, \quad (\text{C.52})$$

onde  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$  e, de modo semelhante,  $\mathbf{A}^k$  implica em se ter  $\mathbf{A}$  multiplicada  $k$  vezes. Pode-se demonstrar que esta série converge para todas as matrizes quadradas. Além disto, uma exponencial de matriz que seja função do tempo é definida como

$$\boxed{e^{\mathbf{At}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}.} \quad (\text{C.53})$$

Derivando-se em relação ao tempo, resulta

$$\frac{d}{dt} (e^{\mathbf{At}}) = \mathbf{A}e^{\mathbf{At}}. \quad (\text{C.54})$$

Em consequência, para uma equação diferencial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax}, \quad (\text{C.55})$$

pode-se postular uma solução  $\mathbf{x} = e^{\mathbf{At}}\mathbf{c} = \phi\mathbf{c}$ , onde a matriz  $\phi$  é  $\phi = e^{\mathbf{At}}$ , e  $\mathbf{c}$  é um vetor coluna desconhecido. Tem-se então

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax}, \quad (\text{C.56})$$

ou

$$\mathbf{A}e^{\mathbf{At}} = \mathbf{A}e^{\mathbf{At}}, \quad (\text{C.57})$$

e foi possível, na realidade, satisfazer a relação dada pela Eq. (C.55). Assim, o valor de  $\mathbf{c}$  é simplesmente  $\mathbf{x}(0)$ , o valor inicial de  $\mathbf{x}$ , porque, quando  $t = 0$ , se tem  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}$ . Portanto, a solução da Eq. (C.55) é

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{At}}\mathbf{x}(0).} \quad (\text{C.58})$$

## A PÊNDICE D

# Conversão em Decibéis

<b>M</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
0,0	$m =$	-40,00	-33,98	-30,46	-27,96	-26,02	-24,44	-23,10	-21,94	-20,92
0,1	-20,00	-19,17	-18,42	-17,72	-17,08	-16,48	-15,92	-15,39	-14,89	-14,42
0,2	-13,98	-13,56	-13,15	-12,77	-12,40	-12,04	-11,70	-11,37	-11,06	-10,75
0,3	-10,46	-10,17	-9,90	-9,63	-9,37	-9,12	-8,87	-8,64	-8,40	-8,18
0,4	-7,96	-7,74	-7,54	-7,33	-7,13	-6,94	-6,74	-6,56	-6,38	-6,20
0,5	-6,02	-5,85	-5,68	-5,51	-5,35	-5,19	-5,04	-4,88	-4,73	-4,58
0,6	-4,44	-4,29	-4,15	-4,01	-3,88	-3,74	-3,61	-3,48	-3,35	-3,22
0,7	-3,10	-2,97	-2,85	-2,73	-2,62	-2,50	-2,38	-2,27	-2,16	-2,05
0,8	-1,94	-1,83	-1,72	-1,62	-1,51	-1,41	-1,31	-1,21	-1,11	-1,01
0,9	-0,92	-0,82	-0,72	-0,63	-0,54	-0,45	-0,35	-0,26	-0,18	-0,09
1,0	0,00	0,09	0,17	0,26	0,34	0,42	0,51	0,59	0,67	0,75
1,1	0,83	0,91	0,98	1,06	1,14	1,21	1,29	1,36	1,44	1,51
1,2	1,58	1,66	1,73	1,80	1,87	1,94	2,01	2,08	2,14	2,21
1,3	2,28	2,35	2,41	2,48	2,54	2,61	2,67	2,73	2,80	2,86
1,4	2,92	2,98	3,05	3,11	3,17	3,23	3,29	3,35	3,41	3,46
1,5	3,52	3,58	3,64	3,69	3,75	3,81	3,86	3,92	3,97	4,03
1,6	4,08	4,14	4,19	4,24	4,30	4,35	4,40	4,45	4,51	4,56
1,7	4,61	4,66	4,71	4,76	4,81	4,86	4,91	4,96	5,01	5,06
1,8	5,11	5,15	5,20	5,25	5,30	5,34	5,39	5,44	5,48	5,53
1,9	5,58	5,62	5,67	5,71	5,76	5,80	5,85	5,89	5,93	5,98
2,0	6,02	6,44	6,85	7,23	7,60	7,96	8,30	8,63	8,94	9,25
3,0	9,54	9,83	10,10	10,37	10,63	10,88	11,13	11,36	11,60	11,82
4,0	12,04	12,26	12,46	12,67	12,87	13,06	13,26	13,44	13,62	13,80
5,0	13,98	14,15	14,32	14,49	14,65	14,81	14,96	15,12	15,27	15,42
6,0	15,56	15,71	15,85	15,99	16,12	16,26	16,39	16,52	16,65	16,78
7,0	16,90	17,03	17,15	17,27	17,38	17,50	17,62	17,73	17,84	17,95
8,0	18,06	18,17	18,28	18,38	18,49	18,59	18,69	18,79	18,89	18,99
9,0	19,08	19,18	19,28	19,37	19,46	19,55	19,65	19,74	19,82	19,91
	<b>0,0</b>	<b>1,0</b>	<b>2,0</b>	<b>3,0</b>	<b>4,0</b>	<b>5,0</b>	<b>6,0</b>	<b>7,0</b>	<b>8,0</b>	<b>9,0</b>

Decibéis =  $20 \log_{10} M$ .

# Números Complexos

## E.1 NÚMEROS COMPLEXOS

Todos estão familiarizados com a solução da equação algébrica

$$x^2 - 1 = 0, \quad (\text{E.1})$$

que é  $x = 1$ . Contudo, encontra-se freqüentemente a equação

$$x^2 + 1 = 0. \quad (\text{E.2})$$

Um número que satisfaz a Eq. (E.2) não é um número real. Nota-se que a equação Eq. (E.2) pode ser escrita como

$$x^2 = -1, \quad (\text{E.3})$$

e se designa a solução da Eq. (E.3) pelo uso de um número imaginário  $j1$ , tal que

$$j^2 = -1, \quad (\text{E.4})$$

e

$$j = \sqrt{-1}. \quad (\text{E.5})$$

Um **número imaginário** é definido como sendo o produto do imaginário unitário  $j$  por um número real. Assim, pode-se escrever um número imaginário como  $jb$ . Um **número complexo** é definido como a soma de um número real com um número imaginário, tal que

$$c = a + jb, \quad (\text{E.6})$$

onde  $a$  e  $b$  são números reais. Designa-se  $a$  como a parte real do número complexo e  $b$  como a parte imaginária, e se utiliza a notação

$$\text{Re}\{c\} = a, \quad (\text{E.7})$$

e

$$\text{Im}\{c\} = b. \quad (\text{E.8})$$

## E.2 FORMAS RETANGULAR, EXPONENCIAL E POLAR

O número complexo  $a + jb$  pode ser representado em um local de coordenadas retangulares chamado **plano complexo**. O plano complexo possui um eixo real e um eixo imaginário, como está mostrado na Fig. E.1. O número complexo  $c$  é o segmento orientado identificado como  $c$  com coordenadas  $a, b$ . A **forma retangular** está expressa na Eq. (E.6) e desenhada na Fig. E.1.

Uma forma alternativa de expressar um número complexo  $c$  é usar a distância a partir da origem e o ângulo  $\theta$ , como está mostrado na Fig. E.2. A **forma exponencial** é escrita como

$$c = re^{j\theta}, \quad (\text{E.9})$$

onde

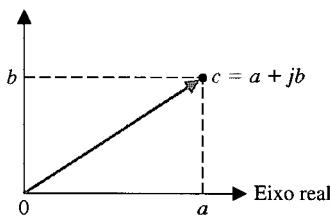
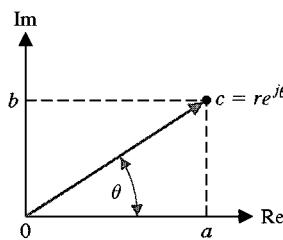
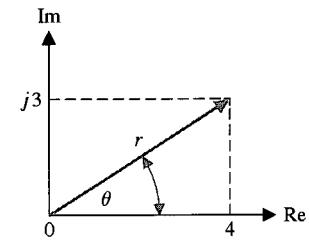
$$r = (a^2 + b^2)^{1/2}, \quad (\text{E.10})$$

e

$$\theta = \text{tg}^{-1}(b/a). \quad (\text{E.11})$$

Observe-se que  $a = r \cos \theta$  e  $b = r \sin \theta$ .

Eixo imaginário

**Fig. E.1** Forma retangular de um número complexo.**Fig. E.2** Forma exponencial de um número complexo.**Fig. E.3** Plano complexo para o Exemplo E.1.

O número  $r$  é também chamado a **magnitude** de  $c$ , assinalada como  $|c|$ . O ângulo  $\theta$  também pode ser assinalado sob a forma  $/\theta$ . Portanto, pode-se representar o número complexo sob a **forma polar** como

$$c = |c|/\theta = r/\theta. \quad (\text{E.12})$$

**EXEMPLO E.1****Formas exponencial e polar**

Expressar  $c = 4 + j3$  nas formas exponencial e polar.

**Solução** Esboçar primeiramente o diagrama no plano complexo como está mostrado na Fig. E.3. Em seguida achar  $r$  como

$$r = (4^2 + 3^2)^{1/2} = 5,$$

e  $\theta$  como

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}(3/4) = 36,9^\circ.$$

A forma exponencial é, então

$$c = 5e^{j36.9^\circ}.$$

A forma polar é

$$c = 5/36.9^\circ. \blacksquare$$

**E.3 OPERAÇÕES MATEMÁTICAS**

O **conjugado** de um número complexo  $c = a + jb$  é chamado de  $c^*$  e é definido por

$$c^* = a - jb. \quad (\text{E.13})$$

Na forma polar resulta

$$c^* = r/-\theta. \quad (\text{E.14})$$

Para somar ou subtrair dois números complexos, adicionam-se (ou subtraem-se) suas partes reais e suas partes imaginárias. Por conseguinte se  $c = a + jb$  e  $d = f + hg$ , então

$$c + d = (a + jb) + (f + hg) = (a + f) + j(b + g). \quad (\text{E.15})$$

A multiplicação de dois números complexos é obtida como a seguir (observe-se que  $j^2 = -1$ ):

$$\begin{aligned} cd &= (a + jb)(f + hg) \\ &= af + jag + jbf + j^2bg \\ &= (af - bg) + j(ag + bf). \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Utiliza-se alternativamente a forma polar para obter

$$cd = (r_1/\theta_1)(r_2/\theta_2) = r_1 r_2 / \theta_1 + \theta_2, \quad (\text{E.17})$$

onde

$$c = r_1/\theta_1, \quad \text{e} \quad d = r_2/\theta_2.$$

A divisão de um número complexo por outro é facilmente obtida usando-se a forma polar, como a seguir:

$$\frac{c}{d} = \frac{r_1/\theta_1}{r_2/\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} / \theta_1 - \theta_2. \quad (\text{E.18})$$

**TABELA E.1 Relações Úteis para Números Complexos**

(1)	$\frac{1}{j} = -j$
(2)	$(-j)(j) = 1$
(3)	$j^2 = -1$
(4)	$1/\underline{\pi/2} = j$
(5)	$c^k = r^k / k\theta$

É mais fácil adicionar e subtrair números complexos na forma retangular e multiplicar e dividir os na forma polar.

Alguns resultados úteis para números complexos estão resumidos na Tabela E.1.

### EXEMPLO E.2

#### Operações com números complexos

Obter  $c + d$ ,  $c - d$ ,  $cd$  e  $c/d$  quando  $c = 4 + j3$  e  $d = 1 - j$ .

**Solução** Primeiramente  $c$  e  $d$  serão expressos na forma polar

$$c = 5/\underline{36,9^\circ}, \quad \text{e} \quad d = \sqrt{2}/\underline{-45^\circ}.$$

Então, para a adição se tem

$$c + d = (4 + j3) + (1 - j) = 5 + j2.$$

Para a subtração se tem

$$c - d = (4 + j3) - (1 - j) = 3 + j4.$$

Para a multiplicação se utiliza a forma polar e se obtém

$$cd = (5/\underline{36,9^\circ})(\sqrt{2}/\underline{-45^\circ}) = 5\sqrt{2}/\underline{-8,1^\circ}.$$

Para a divisão resulta

$$\frac{c}{d} = \frac{5/\underline{36,9^\circ}}{\sqrt{2}/\underline{-45^\circ}} = \frac{5}{\sqrt{2}}/\underline{81,9^\circ}. \blacksquare$$

# Fundamentos do MATLAB

## F.1 INTRODUÇÃO

O MATLAB é um programa interativo para cálculos científicos e de engenharia. A família de programas MATLAB inclui o programa principal (base) e mais uma variedade de **toolboxes**, uma coleção de arquivos especiais chamados *arquivos-M* (*M-files*) que estendem a funcionalidade do programa principal [1-4]. Juntos, o programa principal e o *Control System Toolbox* propiciam a capacidade para projetar e analisar sistemas de controle. Neste livro, sempre que houver referência ao MATLAB, fica subentendido que se trata do programa base mais o *Control System Toolbox*.

A maioria das sentenças, funções e comandos são independentes da plataforma computacional. Qualquer que seja o sistema de computador particular que estiver sendo utilizado, a interação com o MATLAB será basicamente a mesma. Este apêndice se concentra nesta interação independente de plataforma. Uma sessão típica utilizará uma variedade de objetos que permitem interagir com o programa: (1) sentenças e variáveis, (2) matrizes, (3) gráficos e (4) scripts. O MATLAB interpreta e atua sobre a entrada de um ou mais destes objetos. O objetivo neste apêndice é introduzir cada um destes quatro objetos como preparação para o objetivo final de usar o MATLAB para projetar e analisar sistemas de controle.

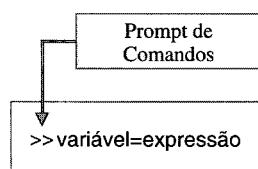
A maneira segundo a qual o MATLAB interage com um sistema de computador específico é dependente da plataforma computacional. Exemplos de funções dependentes do computador incluem a instalação, a estrutura de arquivos, a geração de cópia dos gráficos em papel, a chamada e a saída de uma sessão e a alocação de memória. Questões relacionadas com resultados dependentes da plataforma não serão tratadas aqui. Isto não quer dizer que não sejam importantes, mas em vez disto que há melhores fontes de informação tais como o *Guia do Usuário* do MATLAB (*MATLAB User's Guide*) ou o especialista local da organização.

Antes de prosseguir, certifique-se de poder iniciar uma sessão de MATLAB e em seguida encerrá-la. Para começar uma sessão no Macintosh, provavelmente deverá dar um clique duplo no ícone do programa MATLAB. Em um microcomputador pessoal compatível com o IBM PC, poderá digitar matlab no prompt do DOS.

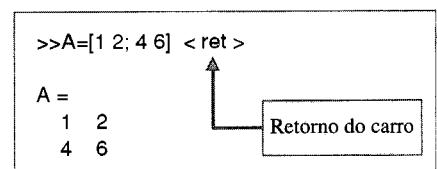
O restante deste apêndice consiste de quatro seções correspondentes aos quatro objetos já listados. Na primeira seção serão apresentados os fundamentos de **sentenças** e **variáveis**. Em seguida a isto será o assunto de **matrizes**. A terceira seção apresenta uma introdução a **gráficos** e a quarta seção é uma discussão sobre os importantes tópicos sobre **scripts** e **M-files** (arquivos tipo M).

## F.2 SENTENÇAS E VARIÁVEIS

As sentenças possuem a forma mostrada na Fig. F.1. O MATLAB usa a atribuição de modo que o sinal de igual (“=”) implica na atribuição da expressão à variável. O prompt de comandos é formado por duas setas para a direita, “>>”. Uma sentença típica está mostrada na Fig. F.2, onde está sendo introduzida uma matriz  $2 \times 2$  à qual está sendo atribuído o nome de variável *A*. A sentença é executada após ser pressionada a tecla de retorno do carro (ou tecla Enter). Nos exemplos restantes deste apêndice e nas seções de MATLAB dos capítulos não será representado explicitamente o retorno de carro.



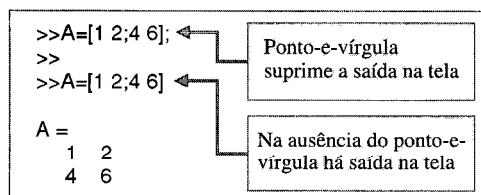
**Fig. F.1** Forma de sentença MATLAB.



**Fig. F.2** Introduzindo e apresentando uma matriz *A*.

A matriz  $A$  é mostrada automaticamente depois que a sentença é executada seguida do retorno de carro. Se a sentença for seguida de um ponto-e-vírgula (;), a saída da matriz  $A$  será suprimida, como está sendo visto na Fig. F.3. A atribuição da variável  $A$  foi efetuada, embora a saída na tela tenha sido suprimida pelo ponto-e-vírgula. Este é quase sempre o caso em que as sessões de MATLAB incluem cálculos intermediários para os quais a saída é de pouco interesse. Utiliza-se o ponto-e-vírgula sempre que houver necessidade de reduzir a quantidade de valores de saída. A gestão da saída possui o benefício adicional de aumentar a velocidade dos cálculos, uma vez que a exibição de saída na tela consome tempo.

Os operadores matemáticos usuais podem ser usados nas expressões. Os operadores comuns estão mostrados na Tabela F.1. A ordem das operações aritméticas pode ser alterada utilizando-se parênteses.



**Fig. F.3** Usando ponto-e-vírgula para suprimir a saída na tela.

#### TABELA F.1 Operadores Matemáticos

+	Adição
-	Subtração
*	Multiplicação
/	Divisão
^	Exponenciação

```

>>12.4/6.9
ans =
1.7971
  
```

**Fig. F.4** Usando o modo calculadora.

O exemplo na Fig. F.4 ilustra que o MATLAB pode ser usado em um modo “calculadora”. Quando o nome da variável e o sinal de igualdade “=” forem omitidos em uma expressão, o resultado será atribuído a uma variável genérica  $ans$ . O MATLAB tem disponível a maioria das funções trigonométricas e das funções matemáticas elementares de uma calculadora científica comum. O Guia do Usuário (*User's Guide*) apresenta uma lista completa das funções trigonométricas e das funções matemáticas elementares; as mais comuns estão na Tabela F.2.

Os nomes de variáveis começam por uma letra seguida de qualquer número de letras e números (incluindo a barra inferior de sublinhar (*underscore*)). Manter o comprimento do nome em 19 caracteres, uma vez que o MATLAB memoriza apenas os primeiros 19 caracteres. Constitui uma boa prática usar nomes de variáveis que descrevem a grandeza que eles representam. Por exemplo, deveria ser usado o nome de variável *vel* para representar a grandeza *velocidade da aeronave*. Geralmente não se usam nomes de variáveis muito longos, embora eles possam ser nomes válidos no MATLAB.

#### TABELA F.2 Funções Matemáticas Comuns

$\sin(X)$	Seno dos elementos de X
$\cos(X)$	Co-seno dos elementos de X
$\text{asin}(X)$	Arco-seno dos elementos de X
$\text{acos}(X)$	Arco co-seno dos elementos de X
$\tan(X)$	Tangente dos elementos de X
$\text{atan}(X)$	Arco tangente dos elementos de X
$\text{atan2}(X,Y)$	Arco tangente nos quatro quadrantes para os elementos reais X e Y
$\text{abs}(X)$	Valor absoluto dos elementos de X
$\text{sqrt}(X)$	Raiz quadrada de X
$\text{imag}(X)$	Parte imaginária de X
$\text{real}(X)$	Parte real de X
$\text{conj}(X)$	Conjugado complexo de X
$\log(X)$	Logaritmo natural dos elementos de X
$\log10(X)$	Logaritmo base 10 dos elementos de X
$\exp(X)$	Exponencial dos elementos de X

Como o MATLAB **diferencia o tipo de caixa** (*case sensitive*), as variáveis *M* e *m* não são a mesma. Por **tipo de caixa** (*case*) entende-se caixa alta (maiúsculas) e caixa baixa (minúsculas), como está ilustrado na Fig. F.5. As variáveis *M* e *m* são reconhecidas como grandezas diferentes.

O MATLAB possui diversas variáveis predefinidas, incluindo *pi*, *Inf*, *Nan*, *i* e *j*. Três exemplos são mostrados na Fig. F.6. *NaN* significa, em inglês, *Not-a-Number* (símbolo de indeterminação) e resulta de operações de valor indeterminado. *Inf* representa  $+\infty$  e *pi* representa  $\pi$ . A variável *i* =  $\sqrt{-1}$  é usada para representar números complexos. A variável *j* =  $\sqrt{-1}$  pode ser usada em vez de *i* nas operações aritméticas com números complexos por aqueles que a preferem. Estas variáveis predefinidas podem ser inadvertidamente redefinidas. É claro que elas podem ser redefinidas intencionalmente a fim de liberar o nome da variável para outros usos. Por exemplo, pode-se querer usar *i* como inteiro e reservar *j* para a aritmética com números complexos. Seja cauteloso e deixe estes nomes de variáveis predefinidas intocados, pois há uma infinidade de nomes alternativos que podem ser usados. As variáveis predefinidas podem ser realocadas aos seus valores default usando o comando *clear nome da variável* (por exemplo, *clear pi*).

A matriz *A* e a variável *ans*, nas Figs. F.3 e F.4, respectivamente, são armazenadas na **área de trabalho** (*workspace*). As variáveis na área de trabalho são armazenadas em memória (salvas) automaticamente para uso posterior em uma mesma sessão. A função *who* fornece uma listagem das variáveis na área de trabalho, como está mostrado na Fig. F.7.

```
>>M=[1 2];
>>m=[3 5 7];
```

**Fig. F.5** As variáveis são sensíveis ao tipo de caixa.

```
>>z=3+4*i
z =
3.0000 + 4.0000i

>>Inf
ans =
∞

>>0/0
Warning: Divide by zero
ans =
NaN
```

**Fig. F.6** Três variáveis predefinidas *i*, *Inf* e *NaN*.

```
>>who
Your variables are:
A    M    ans    m    z

leaving 675516 bytes of memory free.
```

**Fig. F.7** Usando a função *who* para exibir variáveis.

O MATLAB possui um conjunto de funções próprias embutidas. Para obter uma lista completa deve-se consultar o Guia do Usuário (*User's Guide*). Cada uma das funções será descrita à medida que apareça a necessidade.

A função *whos* lista as variáveis na área de trabalho e fornece informações adicionais com respeito à dimensão, tipo e alocação de memória das variáveis. A Fig. F.8 fornece um exemplo da função

>>whos			
Name	Size	Total	Complex
A	2 by 2	4	No
M	1 by 2	2	No
ans	1 by 1	1	No
m	1 by 3	3	No
z	1 by 1	2	Yes

Grand total is (12 \* 8) = 96 bytes,
leaving 664912 bytes of memory free.

**Fig. F.8** Usando a função *whos* para exibir variáveis.

`whos`. A informação sobre alocação de memória dada pela função `whos` pode ser interpretada da seguinte forma. Cada elemento da matriz  $A$   $2 \times 2$  requer 8 bytes de memória para um total de 32 bytes, a variável `ans`  $1 \times 1$  requer 8 bytes e assim por diante. Todas as variáveis na área de trabalho usam um total de 96 bytes. A quantidade de memória livre restante depende do total de memória disponível no sistema. Computadores com memória virtual não exibirão a memória livre restante.

As variáveis podem ser removidas da área de trabalho com a função `clear`. O uso da função `clear`, por ela mesma, remove todos os itens (variáveis e funções) da área de trabalho; o comando `clear variables` remove todas as variáveis da área de trabalho; o comando `clear nome1 nome2 ...` remove as variáveis `nome1, nome2` e assim por diante. O procedimento para remover a matriz  $A$  está mostrado na Fig. F.9.

Um cálculo simples mostra que a remoção da matriz  $A$  liberou mais de 32 bytes. Em alguns casos, a remoção de uma variável pode não mudar o valor mostrado de memória livre. A função `who` exibe a quantidade de memória livre contígua restante. Em consequência, dependendo da “localização” da variável na área de trabalho, a remoção da variável poderá ou não aumentar a quantidade mostrada de memória livre disponível. A memória livre disponível pode ser maior que a mostrada através das funções `who` e `whos`.

```
>>clear A
>>who
Your variables are:
M     ans      m      z
leaving 663780 bytes of memory free.
```

Fig. F.9 Removendo a matriz  $A$  da área de trabalho.

Todos os cálculos no MATLAB são executados em **precisão dupla**. Contudo, a saída na tela pode ser exibida em diversos formatos. O formato de saída default contém quatro dígitos depois do ponto decimal para valores não-inteiros. Isto pode ser alterado usando a função `format` mostrada na Fig. F.10. Uma vez especificado um formato particular, ele permanece efetivo até que seja alterado por uma entrada de formato diferente. Deve ser lembrado que o formato de saída não afeta os cálculos no MATLAB — todos eles são executados em dupla precisão. Por outro lado, o número de dígitos exibidos não reflete necessariamente o número de algarismos significativos do número. Isto é dependente do problema e somente o usuário pode saber a verdadeira exatidão dos números de entrada e exibidos pelo MATLAB.

Como o MATLAB é sensível ao tipo de caixa dos caracteres digitados, as funções `who` e `WHO` não são a mesma função. `who` é uma função interna, e ao se digitar `who` são listadas as variáveis armazenadas na área de trabalho. Por outro lado, digitando-se `WHO` em caixa alta, resulta a mensagem de erro mostrada na Fig. F.11. A sensibilidade ao tipo de caixa se aplica a todas as funções.

```
>>pi
ans =
3.1416 ← 5 dígitos com número fixo de
casas decimais (ponto fixo)

>>format long; pi
ans =
3.14159265358979 ← 15 dígitos com número fixo de
casas decimais (ponto fixo)

>>format short e; pi
ans =
3.1416e+00 ← 5 dígitos com número flutuante de
casas decimais (ponto flutuante)

>>format long e; pi
ans =
3.141592653589793e+00 ← 15 dígitos com número flutuante
de casas decimais (ponto flutuante)
```

```
>>WHO
??? Undefined function or variable
Symbol in question ==> WHO

>>Who
??? Undefined function or variable
Symbol in question ==> Who
```

Fig. F.10 O controle do formato de saída ilustra os quatro formatos de saída.

Fig. F.11 Os nomes de funções são sensíveis ao tipo de caixa.

### F3. MATRIZES

MATLAB é a abreviatura de **matrix laboratory** (laboratório de matrizes). O Guia do Usuário (*User's Guide*) descreve o programa como um pacote de software interativo de alto desempenho projetado para prover fácil acesso aos softwares de matrizes *Linpack* e *Eispack*. Embora não sejam enfatizadas as rotinas de matrizes subjacentes aos cálculos, aprende-se como usar a capacidade interativa para auxiliar o projeto e a análise de sistemas de controle. Para começar são introduzidos os conceitos básicos associados com a manipulação de matrizes e de vetores.

A unidade computacional básica é a matriz. Vetores e escalares podem ser vistos como casos especiais de matrizes. Uma expressão matricial típica é encerrada entre colchetes, [·]. Os elementos das colunas são separados por espaços em branco ou por vírgula, e as linhas são separadas por ponto-e-vírgula ou retorno do carro. Suponha-se que se deseja entrar com a matriz **A**, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4j & \sqrt{2} \\ \log(-1) & \sin(\pi/2) & \cos(\pi/3) \\ \arcsen(0,5) & \arccos(0,8) & \exp(0,8) \end{bmatrix}.$$

Uma forma de entrar a matriz **A** está mostrada na Fig. F.12. O estilo de entrada da Fig. F.12 não é único.

As matrizes podem ser introduzidas através de linhas múltiplas usando o retorno de carro após o ponto-e-vírgula ou em lugar deste. Esta prática é útil para se entrar com matrizes grandes. Diferentes combinações de espaços e vírgulas podem ser usadas para separar as colunas, e diferentes combinações de ponto-e-vírgula e retorno de carro podem ser usadas para separar as linhas, como está ilustrado na Fig. F.12.

Ao se usar matrizes, não há necessidade de escrever instruções sobre dimensão e tipo de variável; a memória é alocada automaticamente. Observe-se no exemplo da Fig. F.12 que o tamanho da matriz **A** é ajustado automaticamente quando a matriz de entrada é redefinida. Observe-se, também que os elementos da matriz podem conter funções matemáticas elementares e trigonométricas, bem como números complexos.

As operações matriciais básicas importantes são adição e subtração, multiplicação, transposição e potenciação e as assim chamadas operações com arranjos, que são operações elemento a elemento. As operações matemáticas dadas na Tabela F.1 se aplicam a matrizes. Não será discutida a divisão de matrizes, mas deve-se estar alerta quanto ao MATLAB possuir recursos de divisão à esquerda e à direita.

As operações com matrizes requerem a compatibilidade entre as dimensões das matrizes envolvidas. Para a adição e a subtração, isto significa que as matrizes devem ter a mesma dimensão. Se **A** for uma matriz  $n \times m$  e **B** uma matriz  $p \times r$ , então  $\mathbf{A} \pm \mathbf{B}$  é permitido somente se  $n = p$  e  $m = r$ . A multiplicação de matrizes, expressa por  $\mathbf{A} * \mathbf{B}$ , é permitida somente se  $m = p$ . A multiplicação de matriz por vetor é um caso especial da multiplicação de matrizes. Suponha-se **b** um vetor de comprimento  $p$ . A multiplicação de uma matriz  $\mathbf{A}$   $n \times m$  pelo vetor **b** é permitida se  $m = p$ . Assim,  $y = \mathbf{A} * \mathbf{b}$  é um vetor  $n \times 1$  solução de  $\mathbf{A} * \mathbf{b}$ . A Fig. F.13 mostra exemplos das três operações básicas com vetores e matrizes.

A matriz transposta é indicada com o apóstrofo (''). Podem-se usar a transposta e a multiplicação de matrizes para criar um **produto interno** de vetores da seguinte maneira. Sejam **w** e **v** vetores  $m \times 1$ . Então, o produto interno (também conhecido como produto escalar) é dado por  $\mathbf{w}' * \mathbf{v}$ . O produto

```

>>A=[1, -4*j, sqrt(2); log(-1) sin(pi/2) cos(pi/3);
   arcsen(0,5), acos(0,8), exp(0,8)]  

A =  

    1.0000      0 - 4.0000i  1.4142  

    0 + 3.1416i  1.0000      0.5000  

    0.5236      0.6435      2.2255  

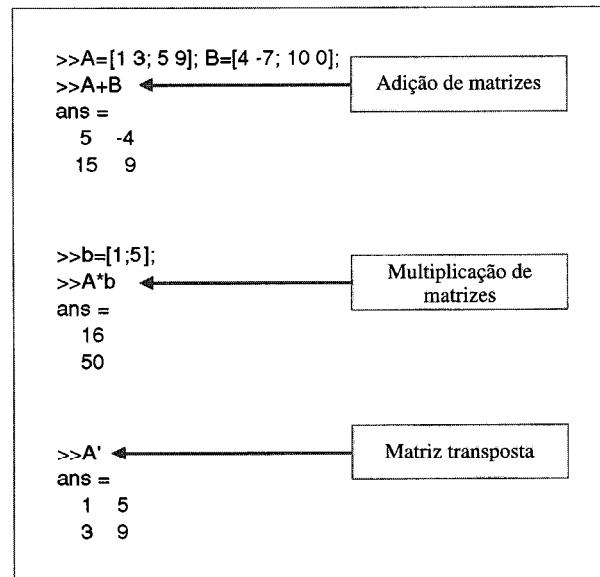
>>A=[1 2;4 5]  

A =  

    1  2  

    4  5
  
```

**Fig. F.12** Entrada de matriz com elementos reais e complexos, com dimensionamento e ajuste de tipo automáticos.



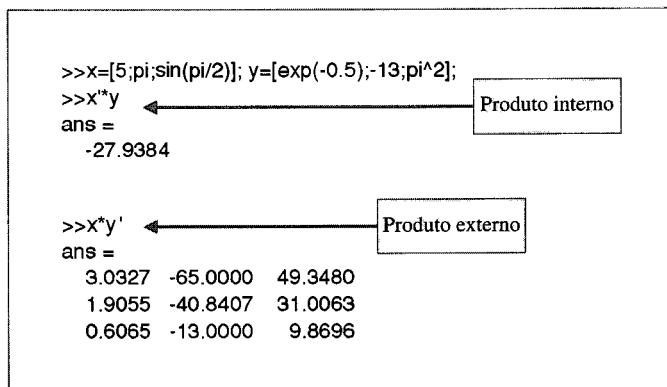
**Fig. F.13** Três operações básicas com matrizes: adição, multiplicação e transposição.

interno de dois vetores é um escalar. De modo semelhante, o **produto externo** de dois vetores pode ser calculado como  $w * v'$ . O produto externo de dois vetores  $m \times 1$  é uma matriz  $m \times m$  de posto igual a 1. Exemplos de produtos interno e externo são mostrados na Fig. F.14.

As operações básicas com matrizes podem ser transformadas em operações elemento a elemento precedendo-se o operador com um ponto. As operações matriciais modificadas são conhecidas como **operações com arranjos** (*arrays*). As operações com arranjos comumente usadas estão na Tabela F.3. As operações de adição e subtração já são operações elemento a elemento e não requerem o ponto adicional antes do operador. Multiplicação, divisão e potenciação de arranjos, contudo, requerem o ponto precedente, como está mostrado na Tabela F.3.

Considerem-se duas matrizes **A** e **B** como matrizes  $2 \times 2$  dadas por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$



**Fig. F.14** Produtos interno e externo de vetores.

### TABELA F.3 Operadores Matemáticos de Arranjos

+	Adição
-	Subtração
.*	Multiplicação
./	Divisão
.^	Potenciação

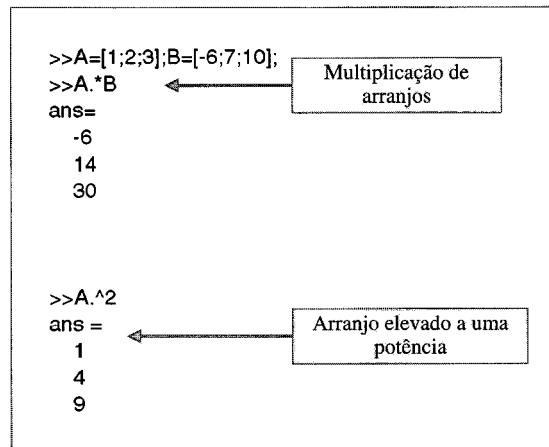
Usando-se, então, o operador de multiplicação de arranjos, resulta

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

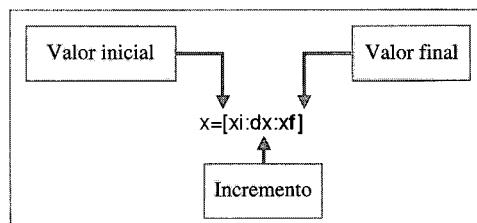
Os elementos de  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  são os produtos dos elementos correspondentes de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . Um exemplo numérico de duas operações de arranjos é dado na Fig. F.15.

Antes de prosseguir para o importante tópico sobre gráficos, torna-se necessário introduzir a noção de **índices subscritos usando a notação de dois pontos**. A notação de dois pontos mostrada na Fig. F.16, permite gerar um vetor linha contendo os números a partir de um valor inicial,  $x_i$ , até um valor final,  $x_f$ , com um incremento especificado,  $dx$ .

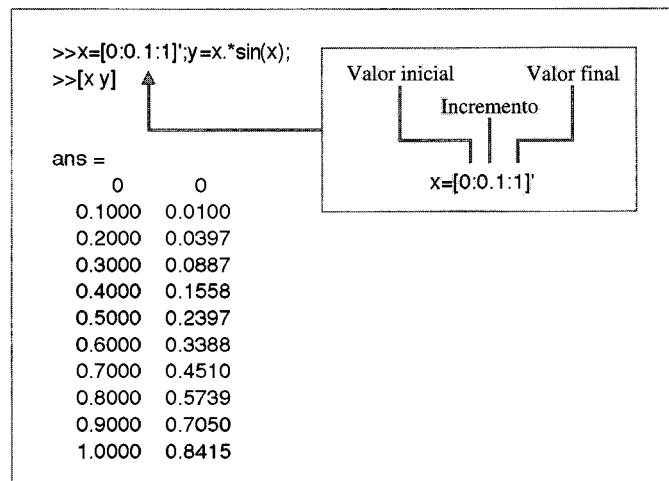
Pode-se facilmente gerar vetores usando a notação dos dois pontos. Como se verá em breve, isto é bastante útil para desenvolver **gráficos x-y**. Suponha-se que o objetivo seja gerar um gráfico de  $y = x \sin(x)$  versus  $x$  para  $x = 0, 0,1, 0,2, \dots, 1,0$ . O primeiro passo será gerar uma tabela de pares x-y. Pode-se gerar um vetor contendo os valores de  $x$  para os quais se deseja obter os valores  $y(x)$  usando a notação dos dois pontos, como ilustrado na Fig. F.17. Dado o vetor desejado  $x$ , o vetor  $y(x)$  é calculado usando-se a operação de multiplicação de arranjos. A criação do gráfico de  $y(x) = x \sin(x)$  se dá em um único passo, uma vez que a tabela de pares x-y já foi gerada.



**Fig. F.15** Operações com arranjos.



**Fig. F.16** A notação dos dois pontos (:).



**Fig. F.17** Gerando vetores usando a notação dos dois pontos (:).

## F.4 GRÁFICOS

Os gráficos desempenham um papel importante tanto no projeto quanto na análise de sistemas de controle. Uma componente importante de uma ferramenta **interativa** de projeto e de análise de sistemas de controle é uma capacidade gráfica efetiva. A solução completa para o projeto e para a análise de um sistema de controle irá requerer uma visão detalhada de um grande número de tipos de dados em muitos formatos. O objetivo desta seção é dotar o leitor dos fundamentos sobre os recursos de gráficos *x-y* do MATLAB. Tópicos mais avançados sobre gráficos são encaminhados nas seções de capítulos sobre o MATLAB.

O MATLAB utiliza uma **janela gráfica** (*graph display*) para apresentar os gráficos. Algumas configurações em computadores permitem a visualização simultânea tanto da janela de comando quanto da janela gráfica. Nas configurações em que apenas uma das janelas pode ser vista, a janela de comando desaparece quando a janela gráfica for ativada. A janela gráfica é ativada automaticamente ao ser gerado um gráfico usando qualquer função capaz de produzir gráficos (por exemplo, a função *plot*). A comutação de volta da janela gráfica para a janela de comando é obtida pressionando-se qualquer uma das teclas do teclado. O gráfico existente na janela gráfica é apagado por meio da função *clf* no prompt de comandos. A função *shg* é usada para comutar para a janela gráfica a partir da janela de comando.

Há dois grupos básicos de funções gráficas. O primeiro grupo, mostrado na Tabela F.4, especifica o tipo de gráfico. A lista de tipos de gráficos disponíveis inclui os gráficos *x-y*, os gráficos semilogarítmicos (*semilog*) e os gráficos logarítmicos (*loglog*). O segundo grupo de funções, mostrado na Fig. F.5, permite personalizar os gráficos adicionando a estes títulos, nomes dos eixos e texto, alterar escalas, bem como exibir gráficos múltiplos em divisões de janelas.

**TABELA F.4 Formatos de Gráficos**

<i>plot(x,y)</i>	Plota os valores do vetor <i>y</i> <i>versus</i> os valores do vetor <i>x</i> .
<i>semilogx(x,y)</i>	Plota os valores do vetor <i>y</i> <i>versus</i> os valores do vetor <i>x</i> . O eixo dos <i>x</i> é $\log_{10}$ dos valores de <i>x</i> ; o eixo dos <i>y</i> é linear.
<i>semilogy(x,y)</i>	Plota os valores do vetor <i>y</i> <i>versus</i> os valores do vetor <i>x</i> . O eixo dos <i>y</i> é $\log_{10}$ dos valores de <i>y</i> ; o eixo dos <i>x</i> é linear.
<i>loglog(x,y)</i>	Plota os valores do vetor <i>y</i> <i>versus</i> os valores do vetor <i>x</i> . Cria um gráfico com as escalas de ambos os eixos em valores de $\log_{10}$ .

**TABELA F.5 Funções para Gráficos Personalizados**

<i>title('texto')</i>	Imprime ‘texto’ na parte superior do gráfico.
<i>xlabel('texto')</i>	Rotula o eixo dos <i>x</i> com ‘texto’.
<i>ylabel('texto')</i>	Rotula o eixo dos <i>y</i> com ‘texto’.
<i>text(p1,p2,'texto','sc')</i>	Insere ‘texto’ na posição de coordenadas ( <i>p1, p2</i> ) sendo a posição (0,0, 0,0) o canto inferior esquerdo e a posição (1,0,1,0) a posição superior direita da tela.
<i>subplot</i>	Subdivide a janela gráfica.
<i>grid</i>	Desenha uma grade reticulada no gráfico atual.

O gráfico *x-y* padrão é criado usando-se a função *plot*. Os pares de dados *x-y* na Fig. F.17 são plotados usando-se a função *plot*, como está mostrado na Fig. F.18. As escalas dos eixos e os tipos de linha são escolhidos automaticamente. Os eixos podem ser rotulados com as funções *xlabel* e *ylabel*; o título é aplicado com a função *title*. Pode-se acrescentar uma grade reticulada por meio da função *grid*. Um gráfico *x-y* básico é gerado com a combinação das funções *plot*, *xlabel*, *ylabel*, *title* e *grid*.

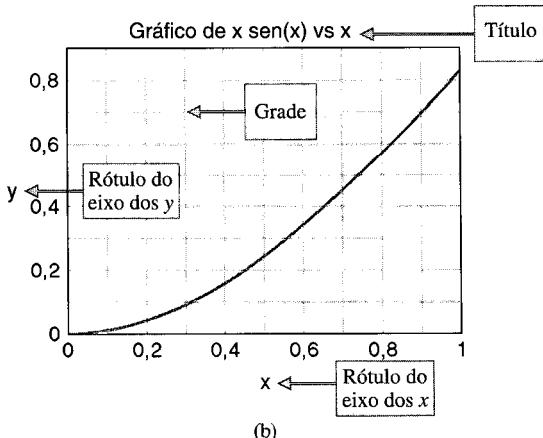
Curvas múltiplas podem ser colocadas em um mesmo gráfico usando-se a função *plot* com argumentos múltiplos, como está mostrado na Fig. F.19. Os tipos de linha default podem ser alterados. Os tipos de linha disponíveis estão mostrados na Tabela F.6. Os tipos de linha serão escolhidos automaticamente a menos que sejam especificados pelo usuário. O uso da função *text* e a troca de tipo de linha são ilustrados na Fig. F.19.

As outras funções gráficas — *loglog*, *semilogx* e *semilogy* — são usadas de modo semelhante ao da função *plot*. Para obter um gráfico *x-y* em que o eixo dos *x* é linear e o eixo dos *y* está em uma escala  $\log_{10}$ , seria usada a função *semilogy* em vez da função *plot*. Os recursos personalizados listados na Tabela F.5 podem também ser utilizados com as funções *loglog*, *semilogx* e *semilogy*.

A janela gráfica pode ser subdividida em partições menores de janela. A função *subplot(mnp)* divide a janela gráfica em uma grade de *m* × *n* janelas menores onde *m* ≤ 2 e *n* ≤ 2. Isto significa

```
>>x=[0:0.1:1];
>>y=x.*sin(x);
>>plot(x,y)
>>title('Gráfico de x sen(x) vs x')
>>xlabel('x')
>>ylabel('y')
>>grid
```

(a)

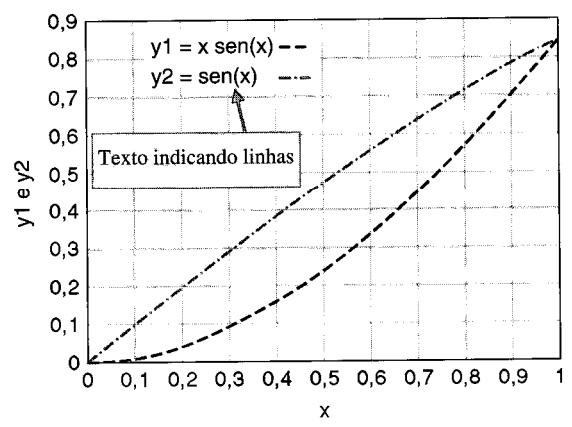


(b)

**Fig. F.18** (a) Comandos MATLAB. (b) Um gráfico básico x-y de  $x \operatorname{sen}(x)$  versus  $x$ .

```
>> x=[0:0.1:1];
>> y1=x.*sin(x); y2=sin(x);
>> plot(x,y1,'--',x,y2,'-.')
>> text(0.1,0.9,'y1 = x sen(x) ---')
>> text(0.1,0.85,'y2 = sen(x) ...')
>> xlabel('x'), ylabel('y1 e y2'), grid
```

(a)

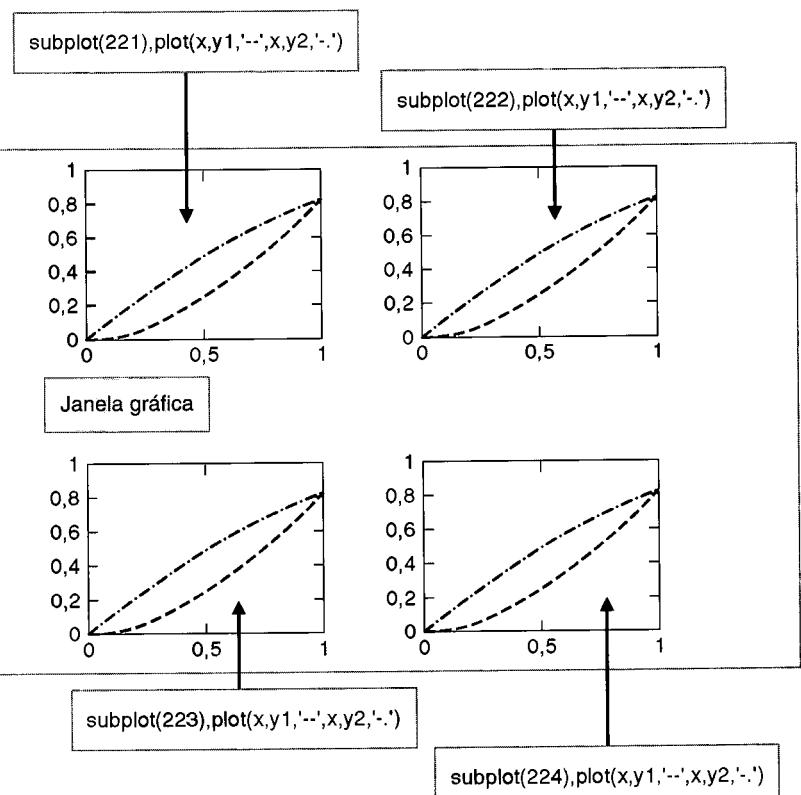


(b)

**Fig. F.19** (a) Comandos MATLAB. (b) Um gráfico básico x-y com linhas múltiplas.

**TABELA F.6 Comandos de Tipos de Linha para Gráficos Personalizados**

-	Linha cheia
--	Linha tracejada
:	Linha pontilhada
-.	Linha traço-ponto



**Fig. F.20** Usando a função **subplot** para criar uma partição  $2 \times 2$  da janela gráfica.

que a janela gráfica pode ser subdividida em duas ou quatro janelas. O inteiro  $p$  especifica a janela, numerando-as da esquerda para a direita e de cima para baixo, como está ilustrado na Fig. F.20, onde a janela gráfica está subdividida em quatro janelas menores.

## F.5 SCRIPTS

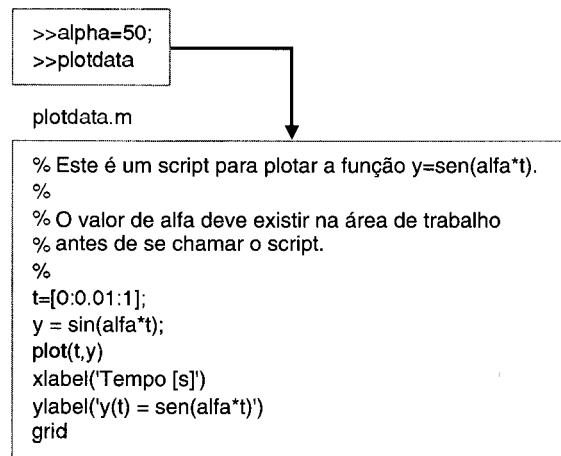
Até este ponto, todas as interações com o MATLAB se deram a partir do prompt de comandos. Eram digitadas instruções e funções no prompt de comandos e o MATLAB interpretava as entradas e executava a ação apropriada. Este é o modo preferencial de operação sempre que as sessões de trabalho forem curtas e não-repetitivas. Contudo, a real potência do MATLAB para projetar e analisar sistemas de controle resulta de sua capacidade em executar uma longa seqüência de comandos armazenados em um arquivo. Estes arquivos são chamados **arquivos.M** (*M-files*), uma vez que o arquivo apresenta a forma *nome do arquivo.m*. Um **script** é tipo de arquivo.M. O *Control System Toolbox* é uma coleção de arquivos.M projetados especificamente para aplicações em controle. Adicionalmente aos arquivos.M preexistentes e fornecidos com o MATLAB e as *toolboxes*, o usuário pode desenvolver seus próprios scripts para as aplicações desejadas.

Os scripts são arquivos de texto em caracteres ASCII comuns e são criados usando-se um editor de textos. A criação e o armazenamento de scripts são tópicos dependentes da plataforma computacional usada. Deste modo, convém consultar o especialista apropriado para obter maiores informações.

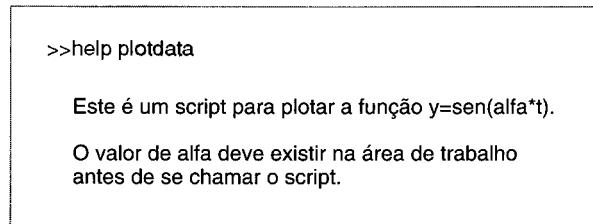
Um script constitui tão-somente uma seqüência de instruções e de funções comuns usadas no nível de prompt de comandos. Um script é chamado para execução, no nível de prompt de comandos, digitando-se simplesmente o nome do arquivo. Os scripts também podem chamar outros scripts. Quando o script é chamado, o MATLAB executa as instruções e as funções do arquivo sem esperar por alguma entrada no prompt de comandos. O script opera sobre variáveis na área de trabalho.

Supor que se deseja plotar a função  $y(t) = \sin \alpha t$ , onde  $\alpha$  é um parâmetro que se deseja variar. Usando um editor de texto, pode-se escrever um script que será chamado de *plotdata.m*, como está mostrado na Fig. F.21, em seguida entrar com um valor de  $\alpha$  no prompt de comandos, colocando  $\alpha$  na área de trabalho. Em seguida, executa-se o script digitando *plotdata* no prompt de comandos; o script *plotdata.m* usará o valor de  $\alpha$  mais recente na área de trabalho. Depois de executar o script, pode-se digitar um novo valor para  $\alpha$  no prompt de comandos e executar o script novamente.

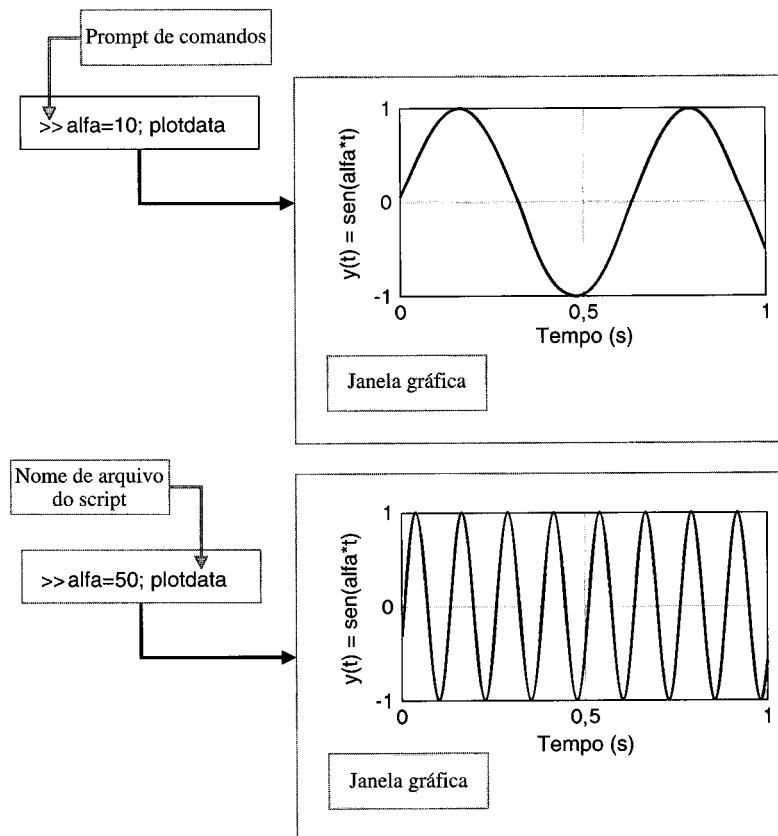
Os scripts devem ser bem documentados com **comentários**, que começam com o símbolo de %. Coloca-se um **cabeçalho** no script contendo vários comentários descritivos a respeito da função script e então se faz uso da função *help* para mostrar os comentários do cabeçalho e descrever o script para o usuário, como está ilustrado na Fig. F.22.



**Fig. F.21** Um script simples para plotar a função  $y(t) = \sin \alpha t$ .



**Fig. F.22** Usando a função *help*.



**Fig. F.23** Uma sessão interativa usando um script para plotar a função  $y(t) = \sin \alpha t$ .

Utiliza-se o arquivo `plotdata.m` para desenvolver uma capacidade interativa com o parâmetro  $\alpha$  variando, como está mostrado na Fig. F.23. No prompt de comandos, entra-se com um valor de  $\alpha = 10$  seguido do nome de arquivo do script, que neste caso é `plotdata`. O gráfico de  $y(t) = \sin \alpha t$  é gerado automaticamente. Pode-se agora retornar ao prompt de comandos, digitar um valor de  $\alpha = 50$  e executar o script novamente para obter o gráfico atualizado.

Os recursos gráficos do MATLAB se estendem para além do material introdutório apresentado aqui. Será investigada a emissão de gráficos nas seções de capítulo sobre o MATLAB. Uma tabela de funções do MATLAB usadas neste livro encontra-se na Tabela F.7.

**TABELA F.7 Funções MATLAB**

Nome da Função	Descrição da Função
<code>abs</code>	Calcula o valor absoluto
<code>acos</code>	Calcula o arco co-seno
<code>ans</code>	Variável criada para expressões
<code>asin</code>	Calcula o arco seno
<code>atan</code>	Calcula o arco tangente (2 quadrantes)
<code>atan2</code>	Calcula o arco tangente (4 quadrantes)
<code>axis</code>	Especifica a escala manual dos eixos nos gráficos
<code>bode</code>	Gera os diagramas de Bode de resposta de freqüência
<code>c2dm</code>	Converte a representação em variáveis de estado de um sistema contínuo em uma representação discreta no tempo
<code>clear</code>	Limpia a área de trabalho
<code>clg</code>	Limpia a janela gráfica
<code>cloop</code>	Calcula a função de transferência a malha fechada de um sistema com retroação unitária
<code>conj</code>	Calcula o conjugado complexo
<code>conv</code>	Multiplica dois polinômios (convolução)
<code>cos</code>	Calcula o co-seno
<code>ctrb</code>	Calcula a matriz de controlabilidade
<code>diary</code>	Salva a sessão em um arquivo de disco
<code>d2cm</code>	Converte a representação em variáveis de estado de um sistema discreto em uma representação contínua no tempo

**TABELA F.7 Continuação**

Nome da Função	Descrição da Função
dstep	Calcula a resposta ao degrau unitário de um sistema discreto no tempo
eig	Calcula os autovalores e os autovetores
end	Finaliza uma estrutura de controle
exp	Calcula a exponencial com base $e$
expm	Calcula a exponencial matricial com base $e$
eye	Gera a matriz identidade
feedback	Calcula a interconexão de dois sistemas com retroação
for	Gera um laço
format	Define o formato da apresentação
grid	Adiciona grade ao gráfico atual
help	Imprime uma lista de tópicos de auxílio (HELP)
hold	Mantém o gráfico atual na janela gráfica
i	$\sqrt{-1}$
imag	Calcula a parte imaginária de um número complexo
impulse	Calcula a resposta de um sistema a um impulso unitário
inf	Representa infinito
j	$\sqrt{-1}$
linspace	Gera vetores com pontos linearmente espaçados
load	Carrega variáveis armazenadas em um arquivo
log	Calcula o logaritmo natural
log10	Calcula o logaritmo base 10
loglog	Gera gráficos loglog
logspace	Gera vetores com pontos separados em escala logarítmica
lsim	Calcula a resposta no domínio do tempo de um sistema a uma entrada e condições iniciais arbitrárias
margin	Calcula a margem de ganho, a margem de fase e as freqüências de cruzamento associadas a partir dos dados da resposta de freqüência
max	Determina o valor máximo
mesh	Cria malhas de superfícies tridimensionais
meshdom	Gera arranjos para uso com a função <i>mesh</i>
min	Determina o valor mínimo
minreal	Cancelamento de pólos e zeros da função de transferência
NaN	Representação para Not-a-Number (símbolo de indeterminação)
ngrid	Desenha o reticulado em uma carta de Nichols
nichols	Calcula o gráfico de resposta de freqüência em coordenadas de Nichols
num2str	Converte números em cadeias de caracteres (strings)
nyquist	Calcula o gráfico de resposta de freqüência em coordenadas de Nyquist
obsv	Calcula a matriz de observabilidade
ones	Gera uma matriz de inteiros em que todos os elementos possuem o valor 1
pade	Calcula uma aproximação de Padé de $n$ -ésima ordem para um retardo no tempo
parallel	Calcula a conexão em paralelo de diagrama de blocos de um sistema
plot	Gera um gráfico linear
poly	Calcula um polinômio a partir das raízes
polyval	Calcula o valor de um polinômio
printsys	Imprime representações em variáveis de estado e em função de transferência em uma forma legível
pzmap	Esboça o diagrama de pólos e zeros de um sistema linear
rank	Calcula o posto de uma matriz
real	Calcula a parte real de um número complexo
residue	Calcula uma expansão em frações parciais
rlocfind	Determina o ganho associado a um dado conjunto de raízes num diagrama de lugar das raízes
rlocus	Calcula o lugar das raízes
roots	Determina as raízes de um polinômio
roots1	O mesmo que a função <i>roots</i> , mas fornece respostas mais exatas quando há raízes repetidas
semilogx	Gera um gráfico $x$ - $y$ usando escalas semilog com o eixo $x$ $\log_{10}$ e o eixo $y$ linear
semilogy	Gera um gráfico $x$ - $y$ usando escalas semilog com o eixo $y$ $\log_{10}$ e o eixo $x$ linear
series	Calcula a redução de diagrama de blocos de sistemas em conexão série
shg	Mostra a janela gráfica
sin	Calcula o seno
sqrt	Calcula a raiz quadrada
ss2tf	Converte a forma de variáveis de estado em função de transferência
step	Calcula resposta de um sistema a um degrau unitário
subplot	Divide a janela gráfica em janelas menores
tan	Calcula a tangente

**TABELA F.7 Continuação**

Nome da Função	Descrição da Função
text	Adiciona texto ao gráfico atual
title	Adiciona um título ao gráfico atual
tf2ss	Converte função de transferência em variáveis de estado
who	Lista as variáveis que estão na memória
whos	Lista as variáveis atuais e seus tamanhos de memória
xlabel	Adiciona um rótulo ao eixo dos $x$
ylabel	Adiciona um rótulo ao eixo dos $y$
zeros	Gera uma matriz de zeros

**FUNDAMENTOS DO MATLAB: PROBLEMAS**

**F.1** Considerem-se as duas matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2\pi \\ 6j & 10 + \sqrt{2}j \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6j & -13\pi \\ \pi & 16 \end{bmatrix}.$$

Usando o MATLAB, calcule o seguinte:

- (a)  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$
- (b)  $\mathbf{AB}$
- (c)  $\mathbf{A}^2$
- (d)  $\mathbf{A}^T$
- (e)  $\mathbf{B}^{-1}$
- (f)  $\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$
- (g)  $\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 - \mathbf{AB}$

**F.2** Considere-se o seguinte sistema de equações algébricas lineares:

$$\begin{aligned} 5x + 6y + 10z &= 4, \\ -3x + 14z &= 10, \\ -7y + 21z &= 0. \end{aligned}$$

Determinar os valores de  $x$ ,  $y$ , e  $z$  tal que o sistema de equações seja satisfeito. (Sugestão: Escrever as equações sob a forma matricial-vetorial.)

**F.3** Gerar um gráfico de

$$y(x) = e^{-0.5x} \sin \omega x,$$

onde  $\omega = 10$  rad/s e  $0 \leq x \leq 10$ . Utilizar a notação dos dois pontos para gerar o vetor  $x$  com incrementos de 0,1.

**F.4** Desenvolver um script MATLAB para plotar a função

$$y(x) = \frac{4}{\pi} \cos \omega x + \frac{4}{9\pi} \cos 3\omega x,$$

onde  $\omega$  é uma variável de entrada no prompt de comandos. Rotele o eixo dos  $x$  com a inscrição  $tempo(s)$  e o eixo dos  $y$  com a inscrição  $y(x) = (4/\pi) * \cos(\omega x) + (4/9\pi) * \cos(3\omega x)$ . Incluir um cabeçalho descritivo no script e verificar que a função `help` exibirá o cabeçalho. Escolher  $\omega = 1, 3, 10$  rad/s e testar o script.

**F.5** Considerar a função

$$y(x) = 10 + 5e^{-x} \cos(\omega x + 0,5).$$

Desenvolver um script para plotar simultaneamente em três gráficos  $y(x)$  para os três valores de  $\omega = 1, 3, 10$  rad/s com  $0 \leq x \leq 5$ . O gráfico final deverá ter os seguintes atributos

Título	$y(x) = 10 + 5 \exp(-x) * \cos(\omega x + 0,5)$
Rótulo do eixo dos $x$	tempo (segundos)
Rótulo do eixo dos $y$	$y(x)$
Tipo de linha	$\omega = 1$ : linha cheia $\omega = 3$ : linha tracejada $\omega = 10$ : linha pontilhada
Grade	

## APÊNDICE G

# Pares de Transformada z

**TABELA G.1**

<b>x(t)</b>	<b>X(s)</b>	<b>X(z)</b>
1. $\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0, \\ 0 & t = kT, k \neq 0 \end{cases}$	1	1
2. $\delta(t - kT) = \begin{cases} 1 & t = kT, \\ 0 & t \neq kT \end{cases}$	$e^{-kTs}$	$z^{-k}$
3. $u(t)$ , degrau unitário	$1/s$	$\frac{z}{z - 1}$
4. $t$	$1/s^2$	$\frac{Tz}{(z - 1)^2}$
5. $t^2$	$2/s^3$	$\frac{T^2z(z + 1)}{(z - 1)^3}$
6. $e^{-at}$	$\frac{1}{s + a}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
7. $1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s + a)}$	$\frac{(1 - e^{-aT})z}{(z - 1)(z - e^{-aT})}$
8. $te^{-at}$	$\frac{1}{(s + a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$
9. $t^2e^{-at}$	$\frac{2}{(s + a)^3}$	$\frac{T^2e^{-aT}z(z + e^{-aT})}{(z - e^{-aT})^3}$
10. $be^{-bt} - ae^{-at}$	$\frac{(b - a)s}{(s + a)(s + b)}$	$\frac{z[z(b - a) - (be^{-aT} - ae^{-bT})]}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$
11. $\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
12. $\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
13. $e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$\frac{(ze^{-aT} \sin \omega T)}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
14. $e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
15. $1 - e^{-at} \left( \cos bt + \frac{a}{b} \sin bt \right)$	$\frac{a^2 + b^2}{s[(s + a)^2 + b^2]}$	$\frac{z(Az + B)}{(z - 1)[z^2 - 2e^{-aT}(\cos bt)z + e^{-2aT}]}$
		$A = 1 - e^{-aT} \cos bt - \frac{a}{b} e^{-aT} \sin bt$
		$B = e^{-2aT} + \frac{a}{b} e^{-aT} \sin bt - e^{-aT} \cos bt$

# Referências Bibliográficas

## Capítulo 1

1. O. Mayr, *The Origins of Feedback Control*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1970.
2. O. Mayr, "The Origins of Feedback Control," *Scientific American*, 223, 4, October 1970, pp. 110–118.
3. O. Mayr, *Feedback Mechanisms in the Historical Collections of the National Museum of History and Technology*, Smithsonian Institution Press, Washington, D.C., 1971.
4. E. P. Popov, *The Dynamics of Automatic Control Systems*, Gostekhizdat, Moscow, 1956; Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962.
5. J. C. Maxwell, "On Governors," *Proc. of the Royal Society of London*, 16, 1868; in *Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory*. Dover, New York, 1964, pp. 270–283.
6. I. A. Vyshnegradskii, "On Controllers of Direct Action," *Izv. SPB Tekhnolog. Inst.*, 1877.
7. H. W. Bode, "Feedback—The History of an Idea," in *Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory*. Dover, New York, 1964, pp. 106–123.
8. H. S. Black, "Inventing the Negative Feedback Amplifier," *IEEE Spectrum*, December 1977, pp. 55–60.
9. J. E. Brittain, *Turning Points in American Electrical History*, IEEE Press, New York, 1977, Sect. II-E.
10. S. Bennett, "A Brief History of Automatic Control," *IEEE Control Systems*, June 1996, pp. 17–25.
11. G. Newton, L. Gould, and J. Kaiser, *Analytical Design of Linear Feedback Controls*, John Wiley & Sons, New York, 1957.
12. M. D. Fagen, *A History of Engineering and Science on the Bell Systems*, Bell Telephone Laboratories, 1978, Ch. 3.
13. G. Zorpette, "Parkinson's Gun Director," *IEEE Spectrum*, April 1989, p. 43.
14. R. C. Dorf and A. Kusiak, *Handbook of Automation and Manufacturing*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
15. W. D. Rasmussen, "The Mechanization of Agriculture," *Scientific American*, September 1982, pp. 26–37.
16. M. M. Gupta, *Intelligent Control*, IEEE Press, Piscataway, N.J., 1995.
17. A. G. Ulsoy, "Control of Machining Processes," *Journal of Dynamic Systems*, ASME, June 1993, pp. 301–307.
18. M. P. Groover, *Fundamentals of Modern Manufacturing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1996.
19. R. T. O'Brien, "Vertical Lateral Control for Automated Highway Systems," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, May 1996, pp. 266–273.
20. J.G. Kassakian, "Automotive Electrical Systems circa 2005," *IEEE Spectrum*, August 1996, pp. 22–27.
21. P. M. Moretti and L. V. Divone, "Modern Windmills," *Scientific American*, June 1986, pp. 110–118.
22. B. Preising and T. C. Hsia, "Robots in Medicine," *IEEE Engineering in Medicine and Biology*, June 1991, pp. 13–22.
23. R. C. Dorf and J. Unmack, "A Time-Domain Model of the Heart Rate Control System," *Proceedings of the San Diego Symposium for Biomedical Engineering*, 1965, pp. 43–47.
24. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
25. R. C. Dorf, *Introduction to Computers and Computer Science*, Boyd and Fraser, San Francisco, 3rd ed., 1982, Chs. 13, 14.
26. K. Sutton, "Productivity," in *Encyclopedia of Engineering*, McGraw-Hill, New York, pp. 947–948.
27. R. C. Dorf, *The Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
28. R. C. Dorf, *Robotics and Automated Manufacturing*, Reston Publishing, Reston, Va., 1983.
29. S. S. Hacisalihzade, "Control Engineering and Therapeutic Drug Delivery," *IEEE Control Systems*, June 1989, pp. 44–46.
30. E. R. Carson and T. Deutsch, "A Spectrum of Approaches for Controlling Diabetes," *IEEE Control Systems*, December 1992, pp. 25–30.
31. J. R. Sankey and H. Kaufman, "Robust Considerations of a Drug Infusion System," *Proceedings of the American Control Conference*, San Francisco, Calif., June 1993, pp. 1689–1695.
32. W. S. Levine, *The Control Handbook*, CRC Press, Boca Raton, Fla., 1996.
33. D. Auslander and C. J. Kempf, *Mecatronics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1996.
34. S. Kahne and I. Frolov, "Air Traffic Management,"

- IEEE Control Systems*, August 1996, pp. 12–21.
35. P. J. Brancazio, "Science and the Game of Baseball," *Science Digest*, July 1984, pp. 66–70.
  36. D. Dooling, "Smoother Sailing," *IEEE Spectrum*, August 1996, pp. 52–59.
  37. C. Klomp et al., "Development of an Autonomous Cow-Milking Robot Control System," *IEEE Control Systems*, October 1990, pp. 11–19.
  38. M. Mittal et al., "Nonlinear Adaptive Control of a Twin Lift Helicopter System," *IEEE Control Systems*, April 1991, pp. 39–44.
  39. M. Bodson, "Emerging Technologies in Control Engineering," *IEEE Control Systems*, December 1995, pp. 6–9.
  40. C. O'Malley, "Rapid Rails," *Popular Science*, June 1992, pp. 74–79.
  41. G. B. Gordon and J. C. Roark, "ORCA: An Optimized Robot for Chemical Analysis," *Hewlett-Packard Journal*, June 1993, pp. 6–19.
  42. K. Hollenback, "Destabilizing Effects of Muscular Contraction in Human-Machine Interaction," *Proceedings of the American Control Conference*, San Francisco, Calif., 1993, pp. 736–740.
  43. L. Scivicco and B. Siciliano, *Modeling and Control of Robot Manipulators*, McGraw-Hill, New York, 1996.
  44. O. Mayr, "Adam Smith and the Concept of the Feedback System," *Technology and Culture*, 12, 1, January 1971, pp. 1–22.
  45. A. Goldsmith, "Autofocus Cameras," *Popular Science*, March 1988, pp. 70–72.
  46. R. Johansson, *System Modeling and Identification*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1993.
  47. C. Bradford, "Correcting Hubble's Vision," *Aerospace America*, July 1993, pp. 32–35.
  48. K. Capek, *Rossum's Universal Robots*, English version by P. Selver and N. Playfair, Doubleday, Page, New York, 1923.
  49. D. Hancock, "Prototyping the Hubble Fix," *IEEE Spectrum*, October 1993, pp. 34–39.
  50. A. K. Naj, "Engineers Want New Buildings to Behave Like Human Beings," *Wall Street Journal*, January 20, 1994, p. B1.
  51. K. Schmidt-Nielsen, "How Are Control Systems Controlled?" *American Scientist*, January 1994, pp. 38–44.
  52. B. Rosewicz, "Hubble Photos Show Telescope in Good Shape," *Wall Street Journal*, January 14, 1994, p. B3.
  53. L. L. Bucciarelli, *Designing Engineers*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1996.
  54. K. G. Ashar, *Magnetic Disk Drive Technology*, IEEE Press, Piscataway, N.J., 1997.
  55. K. D. Fisher and W. L. Abbott, "PRML Detection Boosts Hard Disk Drive Technology," *IEEE Spectrum*, November 1996, pp. 70–76.
  56. R. Stone, "Putting a Human Face on a New Breed of Robot," *Science*, October 11, 1996, p. 182.
  57. P. I. Ro, "Nanometric Motion Control of a Traction Drive," *ASME Dynamic Systems and Control*, vol. 55.2, 1994, pp. 879–883.
  58. M. Allen, "May the Cornering Force Be with You," *Popular Mechanics*, December 1995, pp. 74–77.
  59. D. Dooling, "Smoother Sailing," *IEEE Spectrum*, August 1996, pp. 52–59.
  60. K. C. Cheok, "A Smart Automatic Windshield Wiper," *IEEE Control Systems Magazine*, December 1996, pp. 28–34.
  61. D. Dooling, "Transportation," *IEEE Spectrum*, January 1996, pp. 82–86.
  62. G. Norris, "Boeing's Seventh Wonder," *IEEE Spectrum*, October 1995, pp. 20–23.
  63. D. Hughes, "Fly-by-Wire 777 Keeps Traditional Cockpit," *Aviation Week & Space Technology*, McGraw-Hill Publication, May 1, 1995, pp. 42–48.
  64. R. Reck, "Design Engineering," *Aerospace America*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, December 1994, p. 74.
- ## Capítulo 2
1. R. C. Dorf, *Electric Circuits*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1996.
  2. I. Cochin, *Analysis and Design of Dynamic Systems*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1997.
  3. J. W. Nilsson, *Electric Circuits*, 5th ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1996.
  4. E. W. Kamen and B. S. Heck, *Fundamentals of Signals and Systems Using MATLAB*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1997.
  5. F. Raven, *Automatic Control Engineering*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1994.
  6. R. C. Dorf, *The Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
  7. R. R. Kadiyala, "A Toolbox for Approximate Linearization of Nonlinear Systems," *IEEE Control Systems*, April 1993, pp. 47–56.
  8. R. Smith and R. Dorf, *Circuits, Devices and Systems*, 5th ed., John Wiley & Sons, New York, 1992.
  9. Y. M. Pulyer, *Electromagnetic Devices for Motion Control*, Springer-Verlag, New York, 1992.
  10. B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 5th ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1996.
  11. F. E. Udwadia, *Analytical Dynamics*, Cambridge Univ. Press, New York, 1996.
  12. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
  13. H. Saadat, *Computational Aids in Control Systems Using MATLAB*, McGraw-Hill, New York, 1993.
  14. S. M. Ross, *Simulation*, 2nd ed., Academic Press, Orlando, Fla., 1996.
  15. G. B. Gordon, "ORCA: Optimized Robot for Chemical Analysis," *Hewlett-Packard Journal*, June 1993, pp. 6–19.
  16. P. E. Sarachik, *Principles of Linear Systems*, Cambridge Univ. Press, New York, 1997.
  17. S. Bennett, "Nicholas Minorsky and the Automatic Steering of Ships," *IEEE Control Systems*, November 1984, pp. 10–15.
  18. P. Gathorp, *Metamodelling: Bond Graphs and Dy-*

- namic Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1996.
19. C. M. Close and D. K. Frederick, *Modeling and Analysis of Dynamic Systems*, 2nd ed., Houghton Mifflin, Boston, 1993.
  20. H. S. Black, "Stabilized Feed-Back Amplifiers," *Electrical Engineering*, 53, January 1934, pp. 114–120. Also in *Turning Points in American History*, J. E. Brittain, ed., IEEE Press, New York, 1977, pp. 359–361.
  21. P. L. Corke, *Visual Control of Robots*, John Wiley & Sons, New York, 1997.
  22. W. J. Rugh, *Linear System Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1996.
  23. S. Pannu and H. Kazerooni, "Control for a Walking Robot," *IEEE Control Systems*, February 1996, pp. 20–25.
  24. K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 3rd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1997.
  25. S. P. Parker, *Encyclopedia of Engineering*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1993.
  26. M. Vidyasagar, *Nonlinear System Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1993.
  27. G. T. Pope, "Living-Room Levitation," *Discover*, June 1993, p. 24.
  28. D. J. Bak, "Fast Trains Face Off," *Design News*, September 20, 1993, pp. 78–85.
  29. B. B. Muvdi, *Dynamics for Engineers*, Springer-Verlag, New York, 1997.
  30. G. Rowell and D. Wormley, *System Dynamics*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1997.
  31. Y. Y. Tzou, "AC Induction Servo Drive for Motion Control," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, November 1996, pp. 614–25.

### Capítulo 3

1. R. C. Dorf, *Electric Circuits*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1996.
2. W. J. Rugh, *Linear System Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1996.
3. C. E. Rohrs, J. L. Melsa, and D. Schultz, *Linear Control Systems*, McGraw-Hill, New York, 1993.
4. R. C. Dorf, *Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
5. A. V. Oppenheim et al., *Signals and Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1996.
6. J. L. Stein, "Modeling and State Estimator Design Issues for Model Based Monitoring Systems," *Journal of Dynamic Systems*, ASME, June 1993, pp. 318–326.
7. I. Cochin, *Analysis and Design of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1997.
8. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, CRC Press, Boca Raton, Fla., 1993.
9. Y. M. Pulyer, *Electromagnetic Devices for Motion Control*, Springer-Verlag, New York, 1992.
10. C. M. Close and D. K. Frederick, *Modeling and Analysis of Dynamic Systems*, 2nd ed., Houghton Mifflin, Boston, 1993.
11. R. C. Durbeck, "Computer Output Printer Tech-

- nologies," in *Electrical Engineering Handbook*, R. C. Dorf, Ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998, pp. 1958–1975.
12. B. Wie et al., "New Approach to Attitude/Momentum Control for the Space Station," *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 12, no. 5, 1989, pp. 714–722.
  13. B. Etkin, *Dynamics of Atmospheric Flight*, John Wiley & Sons, New York, 1972.
  14. P. C. Hughes, *Spacecraft Attitude Dynamics*, John Wiley & Sons, New York, 1986.
  15. H. Ramirez, "Feedback Controlled Landing Maneuvers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, April 1992, pp. 518–523.
  16. C. A. Canudas De Wit, *Theory of Robot Control*, Springer-Verlag, New York, 1996.
  17. R. R. Kadiyala, "A Toolbox for Approximate Linearization of Nonlinear Systems," *IEEE Control Systems*, April 1993, pp. 47–56.
  18. B. C. Crandall, *Nanotechnology*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1996.
  19. E. Colle, "Localization of an Autonomous Vehicle with Beacons," *International Journal of Robotics and Automation* 8, no. 1, 1993, pp. 30–38.
  20. W. Leventon, "Mountain Bike Suspension Allows Easy Adjustment," *Design News*, July 19, 1993, pp. 75–77.
  21. A. Cavallo et al., *Using MATLAB, SIMULINK, and Control System Toolbox*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1996.
  22. M. Jamshidi, *Computer Aided Analysis and Design of Linear Control Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1992.
  23. R. Johansson, *System Modeling and Identification*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1993.
  24. M. Fujita, "Synthesis of an Electromagnetic Suspension System," *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, IEEE Press, New York, 1992.
  25. D. Cho, "Magnetic Levitation Systems," *IEEE Control Systems*, February 1993, pp. 42–48.
  26. E. C. Gwo, "Approximate Feedback Linearization," *Proceedings of the American Automatic Control Conference*, San Francisco, 1993, pp. 1495–1499.
  27. H. Kazerooni, "Human Extenders," *Journal of Dynamic Systems*, ASME, June 1993, pp. 281–290.
  28. C. N. Dorni, *Understanding Dynamic Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1993.
  29. Chen, Chi-Tsing, *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1984.
  30. G. E. Forsythe, M. A. Malcolm, and C. B. Moler, *Computer Methods for Mathematical Computations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1977.

### Capítulo 4

1. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
2. R. C. Dorf, *Electric Circuits*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1996.

3. C. E. Rohrs, J. L. Melsa, and D. Schultz, *Linear Control Systems*, McGraw-Hill, New York, 1993.
4. P. E. Sarachik, *Principles of Linear Systems*, Cambridge Univ. Press, New York, 1997.
5. B. K. Bose, *Power Electronics and Variable Frequency Drives*, IEEE Press, Piscataway, N.J., 1997.
6. J. C. Nelson, *Operational Amplifier Circuits*, Butterworth, New York, 1995.
7. *Motomatic Speed Control*, Electro-Craft Corp., Hopkins, Minn., 1993.
8. M. W. Spong et al., *Robot Control Dynamics, Motion Planning and Analysis*, IEEE Press, New York, 1993.
9. R. C. Dorf, *Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
10. D. J. Bak, "Dancer Arm Feedback Regulates Tension Control," *Design News*, April 6, 1987, pp. 132–133.
11. "The Smart Projector Demystified," *Science Digest*, May 1985, p. 76.
12. R. Meier, "Control of Blood Pressure During Anesthesia," *IEEE Control Systems*, December 1992, pp. 12–16.
13. L. Fortuna and G. Muscato, "A Roll Stabilization System for a Monohull Ship," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, January 1996, pp. 18–28.
14. C. N. Dorn, *Understanding Dynamic Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1993.
15. D. W. Clarke, "Sensor, Actuator, and Loop Validation," *IEEE Control Systems*, August 1995, pp. 39–45.
16. S. P. Parker, *Encyclopedia of Engineering*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1993.
17. M. S. Markow, "An Automated Laser System for Eye Surgery," *IEEE Engineering in Medicine and Biology*, December 1989, pp. 24–29.
18. M. Eslami, *Theory of Sensitivity in Dynamic Systems*, Springer-Verlag, New York, 1994.
19. Y. M. Pulyer, *Electromagnetic Devices for Motion Control*, Springer-Verlag, New York, 1992.
20. J. R. Layne, "Control for Cargo Ship Steering," *IEEE Control Systems*, December 1993, pp. 23–33.
21. S. Begley, "Greetings From Mars," *Newsweek*, July 14, 1997, pp. 23–29.
22. M. Carroll, "Assault on the Red Planet," *Popular Science*, January 1997, pp. 44–49.
5. R. N. Clark, *Introduction to Automatic Control Systems*, John Wiley & Sons, New York, 1962, pp. 115–124.
6. D. Graham and R. C. Lathrop, "The Synthesis of Optimum Response: Criteria and Standard Forms, Part 2," *Trans. of the AIEE* 72, November 1953, pp. 273–288.
7. J. C. Nelson, *Operational Amplifier Circuits*, Butterworth, New York, 1995.
8. R. C. Dorf, *Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
9. L. E. Ryan, "Control of an Impact Printer Hammer," *ASME Journal of Dynamic Systems*, March 1990, pp. 69–75.
10. T. C. Hsia, "On the Simplification of Linear Systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, June 1972, pp. 372–374.
11. E. J. Davison, "A Method for Simplifying Linear Dynamic Systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, January 1966, pp. 93–101.
12. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
13. A. G. Ulsoy, "Control of Machining Processes," *ASME Journal of Dynamic Systems*, June 1993, pp. 301–310.
14. I. Cochin, *Analysis and Design of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1997.
15. W. J. Rugh, *Linear System Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1996.
16. W. J. Book, "Controlled Motion in an Elastic World," *Journal of Dynamic Systems*, June 1993, pp. 252–260.
17. C. E. Rohrs, J. L. Melsa, D. Schultz, *Linear Control Systems*, McGraw-Hill, New York, 1993.
18. S. Lee, "Intelligent Sensing and Control for Advanced Teleoperation," *IEEE Control Systems*, June 1993, pp. 19–28.
19. R. Rosen and L. J. Williams, "The Rebirth of the Supersonic Transport," *Technology Review*, March 1993, pp. 22–29.
20. M. Alpert, "A Bullet Train for the U.S.," *Fortune*, May 1993, p. 32.
21. D. Hancock, "Prototyping the Hubble Fix," *IEEE Spectrum*, October 1993, pp. 34–39.
22. M. Hutton and M. Rabins, "Simplification of Higher-Order Mechanical Systems Using the Routh Approximation," *Journal of Dynamic Systems*, ASME, December 1975, pp. 383–392.
23. E. W. Kamen and B. S. Heck, *Fundamentals of Signals and Systems Using MATLAB*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1997.
24. B. Rosewicz, "Hubble Photos Show Telescope in Good Shape," *Wall Street Journal*, January 14, 1994, p. B3.

## Capítulo 5

1. C. M. Close and D. K. Frederick, *Modeling and Analysis of Dynamic Systems*, 2nd ed., Houghton Mifflin, Boston, 1993.
2. R. C. Dorf, *Electric Circuits*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1996.
3. B. K. Bose, *Power Electronics and Variable Frequency Drives*, IEEE Press, Piscataway, N.J., 1997.
4. P. R. Clement, "A Note on Third-Order Linear Systems," *IRE Transactions on Automatic Control*, June 1960, p. 151.

## Capítulo 6

1. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
2. R. C. Dorf, *Electric Circuits*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1996.

3. C. E. Rohrs, J. L. Melsa, and D. Schultz, *Linear Control Systems*, McGraw-Hill, New York, 1993.
4. W. J. Rugh, *Linear System Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1996.
5. F. B. Farquharson, "Aerodynamic Stability of Suspension Bridges, with Special Reference to the Tacoma Narrows Bridge," *Bulletin 116, Part I*, The Engineering Experiment Station, University of Washington, 1950.
6. A. Hurwitz, "On the Conditions Under Which an Equation Has Only Roots with Negative Real Parts," *Mathematische Annalen* 46, 1895, pp. 273–284. Also in *Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory*, Dover, New York, 1964, pp. 70–82.
7. E. J. Routh, *Dynamics of a System of Rigid Bodies*, Macmillan, New York, 1892.
8. G. G. Wang, "Design of Turning Control for a Tracked Vehicle," *IEEE Control Systems*, April 1990, pp. 122–125.
9. N. Mohan, *Power Electronics*, John Wiley & Sons, New York, 1995.
10. R. C. Dorf, *Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
11. R. C. Dorf and A. Kusiak, *Handbook of Manufacturing and Automation*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
12. A. N. Michel, "Stability: The Common Thread in the Evolution of Control," *IEEE Control Systems*, June 1996, pp. 50–60.
13. S. P. Parker, *Encyclopedia of Engineering*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1933.
14. J. Levine et al., "Control of Magnetic Bearings," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, September 1996, pp. 524–544.
15. F. S. Ho, "Traffic Flow Modeling and Control," *IEEE Control Systems*, October 1996, pp. 16–24.
16. G. E. Young and K. N. Reid, "Control of Moving Webs," *Journal of Dynamics*, ASME, June 1993, pp. 309–316.
17. D. W. Freeman, "Jump-Jet Airliner," *Popular Mechanics*, June 1993, pp. 38–40.
18. B. Sweetman, "Venture Star—21st-Century Space Shuttle," *Popular Science*, October 1996, pp. 43–47.
19. S. Lee, "Intelligent Sensing and Control for Advanced Teleoperation," *IEEE Control Systems*, June 1993, pp. 19–28.
20. "Uplifting," *The Economist*, July 10, 1993, p. 79.
21. R. N. Clark, "The Routh–Hurwitz Stability Criterion, Revisited," *IEEE Control Systems*, June 1992, pp. 119–120.
22. S. G. Tzafestas, *Applied Control*, Marcel Dekker, New York, 1993, pp. 274–276.
23. P. Haase, "Breakthrough in Stability Assessment," *EPRI Journal*, August 1996, pp. 25–30.
24. E. I. Jury, "Remembering Force Stability Theory Pioneers of the Nineteenth Century," *IEEE Transactions on Automatic Control*, September 1996, pp. 1242–43.

## Capítulo 7

1. W. R. Evans, "Graphical Analysis of Control Systems," *Transactions of the AIEE*, 67, 1948, pp. 547–551. Also in G. J. Thaler, ed., *Automatic Control*, Dowden, Hutchinson, and Ross, Stroudsburg, Pa., 1974, pp. 417–421.
2. W. R. Evans, "Control System Synthesis by Root Locus Method," *Transactions of the AIEE*, 69, 1950, pp. 1–4. Also in *Automatic Control*, G. J. Thaler, ed., Dowden, Hutchinson, and Ross, Stroudsburg, Pa., 1974, pp. 423–425.
3. W. R. Evans, *Control System Dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1954.
4. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
5. J. G. Goldberg, *Automatic Controls*, Allyn and Bacon, Boston, 1965.
6. R. C. Dorf, *The Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
7. H. Ur, "Root Locus Properties and Sensitivity Relations in Control Systems," *I.R.E. Trans. on Automatic Control*, January 1960, pp. 57–65.
8. T. R. Kurfess and M. L. Nagurka, "Understanding the Root Locus Using Gain Plots," *IEEE Control Systems*, August 1991, pp. 37–40.
9. T. R. Kurfess and M. L. Nagurka, "Foundations of Classical Control Theory," *The Franklin Institute*, 330, no. 2, 1993, pp. 213–227.
10. R. C. Dorf and A. Kusiak, *Handbook of Manufacturing and Automation*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
11. C. N. Dorny, *Understanding Dynamic Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1993.
12. S. Ashley, "Putting a Suspension Through Its Paces," *Mechanical Engineering*, April 1993, pp. 56–57.
13. B. K. Bose, *Modern Power Electronics*, IEEE Press, New York, 1992.
14. P. Varaiya, "Smart Cars on Smart Roads," *IEEE Transactions on Automatic Control*, February 1993, pp. 195–207.
15. J. L. Jones and A. M. Flynn, *Mobile Robots*, A. K. Peters Publishing, New York, 1993.
16. R. Rosen and L. J. Williams, "The Rebirth of the Supersonic Transport," *Technology Review*, March 1993, pp. 22–29.
17. L. V. Merritt, "Tape Transport Head Positioning Servo Using Positive Feedback," *Motion*, April 1993, pp. 19–22.
18. G. E. Young and K. N. Reid, "Control of Moving Webs," *Journal of Dynamic Systems ASME*, June 1993, pp. 309–316.
19. S. P. Parker, *Encyclopedia of Engineering*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1993.
20. M. J. Sidi, *Spacecraft Dynamics and Control*, Cambridge Univ. Press, New York, 1997.
21. T. B. Sheridan, *Telerobotics, Automation and Control*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1992.
22. L. W. Couch, *Digital and Analog Communication Systems*, 5th ed., Macmillan, New York, 1997.

23. D. Hrovat, "Applications of Optimal Control to Automotive Suspension Design," *Journal of Dynamic Systems*, ASME, June 1993, pp. 328–342.
24. M. Alpert, "A Bullet Train for the U.S.," *Fortune*, May 1993, p. 32.
25. M. van de Panne, "A Controller for the Dynamic Walk of a Biped," *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, IEEE, December 1992, pp. 2668–2673.
26. R. C. Dorf, *Electric Circuits*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1996.
27. S. Begley, "Mission to Mars," *Newsweek*, September 23, 1996, pp. 52–58.
28. G. Padfield, *Helicopter Flight Dynamics*, AIAA Press, New York, 1996.
29. H. Tennekes, *The Simple Science of Flight*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1996.

## Capítulo 8

1. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
2. I. Cochin and H. J. Plass, *Analysis and Design of Dynamic Systems*, John Wiley & Sons, New York, 1997.
3. R. C. Dorf, *Electric Circuits*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1996.
4. H. W. Bode, "Relations Between Attenuation and Phase in Feedback Amplifier Design," *Bell System Tech. J.*, July 1940, pp. 421–454. Also in *Automatic Control: Classical Linear Theory*, G. J. Thaler, ed., Dowden, Hutchinson, and Ross, Stroudsburg, Pa., 1974, pp. 145–178.
5. M. D. Fagen, *A History of Engineering and Science in the Bell System*, Bell Telephone Laboratories, Murray Hill, N.J., 1978, Chapter 3.
6. C. N. Dorn, *Understanding Dynamic Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1993.
7. R. C. Dorf and A. Kusiak, *Handbook of Manufacturing and Automation*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
8. R. C. Dorf, *The Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
9. T. B. Sheridan, *Telerobotics, Automation and Control*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1992.
10. J. L. Jones and A. M. Flynn, *Mobile Robots*, A. K. Peters Publishing, New York, 1993.
11. D. McLean, *Automatic Flight Control Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1990.
12. G. Leitman, "Aircraft Control Under Conditions of Windshear," *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, December 1990, pp. 747–749.
13. S. Lee, "Intelligent Sensing and Control for Advanced Teleoperation," *IEEE Control Systems*, June 1993, pp. 19–28.
14. R. A. Hess, "A Control Theoretic Model of Driver Steering Behavior," *IEEE Control Systems*, August 1990, pp. 3–8.
15. P. Varaiya, "Smart Cars on Smart Roads," *IEEE Transactions on Automatic Control*, February

- 1993, pp. 195–207.
16. J. Ackermann and W. Sienel, "Robust Yaw Damping of Cars with Front and Rear Wheel Steering," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, March 1993, pp. 15–20.
17. L. V. Merritt, "Differential Drive Film Transport," *Motion*, June 1993, pp. 12–21.
18. S. Ashley, "Putting a Suspension Through Its Paces," *Mechanical Engineering*, April 1993, pp. 56–57.
19. D. A. Linkens, "Anaesthesia Simulators," *Computing and Control Engineering Journal*, IEEE, April 1993, pp. 55–62.
20. J. R. Layne, "Control for Cargo Ship Steering," *IEEE Control Systems*, December 1993, pp. 58–64.
21. A. Titli, "Three Control Approaches for the Design of Car Semi-active Suspension," *IEEE Proceedings of Conference on Decision and Control*, December 1993, pp. 2962–2963.
22. H. H. Ottesen, "Future Servo Technologies for Hard Disk Drives," *Journal of the Magnetics Society of Japan*, vol. 18, 1994, pp. 31–36.

## Capítulo 9

1. H. Nyquist, "Regeneration Theory," *Bell Systems Tech. J.*, January 1932, pp. 126–147. Also in *Automatic Control: Classical Linear Theory*, G. J. Thaler, ed., Dowden, Hutchinson, and Ross, Stroudsburg, Pa., 1932, pp. 105–126.
2. M. D. Fagen, *A History of Engineering and Science in the Bell System*, Bell Telephone Laboratories, Inc., Murray Hill, N.J., 1978, Chapter 5.
3. H. M. James, N. B. Nichols, and R. S. Phillips, *Theory of Servomechanisms*, McGraw-Hill, New York, 1947.
4. W. J. Rugh, *Linear System Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1996.
5. D. A. Linkens, *CAD for Control Systems*, Marcel Dekker, New York, 1993.
6. A. Cavallo, *Using MATLAB, SIMULINK, and Control System Toolbox*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1996.
7. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
8. D. Sbarbaro-Hofer, "Control of a Steel Rolling Mill," *IEEE Control Systems*, June 1993, pp. 69–75.
9. R. C. Dorf and A. Kusiak, *Handbook of Manufacturing and Automation*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
10. J. J. Gribble, "Systems with Time Delay," *IEEE Control Systems*, February 1993, pp. 54–55.
11. C. N. Dorn, *Understanding Dynamic Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1993.
12. R. C. Dorf, *Electric Circuits*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1996.
13. J. Yan and S. E. Salcudean, "Teleoperation Controller Design," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, May 1996, pp. 244–247.

14. K. K. Chew, "Control of Errors in Disk Drive Systems," *IEEE Control Systems*, January 1990, pp. 16–19.
15. R. C. Dorf, *The Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
16. D. W. Freeman, "Jump-Jet Airliner," *Popular Mechanics*, June 1993, pp. 38–40.
17. L. O'Connor, "Electrohydraulic Valves Take Control," *Mechanical Engineering*, June 1993, pp. 54–57.
18. B. K. Bose, *Power Electronics and Variable Frequency Drives*, IEEE Press, Piscataway, N.J., 1997.
19. C. S. Bonaventura and K. W. Lilly, "A Constrained Motion Algorithm for the Shuttle Remote Manipulator System," *IEEE Control Systems*, October 1995, pp. 6–16.
20. A. T. Bahill and L. Stark, "The Trajectories of Saccadic Eye Movements," *Scientific American*, January 1979, pp. 108–117.
21. J. C. Nelson, *Operational Amplifier Circuits*, Butterworth, New York, 1995.
22. A. G. Ulsoy, "Control of Machining Processes," ASME, *Journal of Dynamic Systems*, June 1993, pp. 301–310.
23. C. E. Rohrs, J. L. Melsa, and D. Schultz, *Linear Control Systems*, McGraw-Hill, New York, 1993.
24. J. L. Jones and A. M. Flynn, *Mobile Robots*, A. K. Peters Publishing, New York, 1993.
25. D. A. Linkens, "Adaptive and Intelligent Control in Anesthesia," *IEEE Control Systems*, December 1992, pp. 6–10.
26. R. H. Bishop, "Adaptive Control of Space Station with Control Moment Gyros," *IEEE Control Systems*, October 1992, pp. 23–27.
27. J. B. Song, "Application of Adaptive Control to Arc Welding Processes," *Proceedings of the American Control Conference*, IEEE, June 1993, pp. 1751–1755.
28. X. G. Wang, "Estimation in Paper Machine Control," *IEEE Control Systems*, August 1993, pp. 34–43.
29. R. Patton, "Mag Lift," *Scientific American*, October 1993, pp. 108–109.
6. S. T. Van Voorhis, "Digital Control of Measurement Graphics," *Hewlett-Packard Journal*, January 1986, pp. 24–26.
7. R. H. Bishop, "Adaptive Control of Space Station with Control Moment Gyros," *IEEE Control Systems*, October 1992, pp. 23–27.
8. C. L. Phillips, "Analytical Bode Design of Controllers," *IEEE Transactions on Education*, February 1985, pp. 43–44.
9. W. Ali and J. H. Burghart, "Effects of Lag Controllers on Transient Response," *IEE Proceedings*, March 1991, pp. 119–122.
10. B. Sridhar, "Kalman Filters for Helicopter Flight," *IEEE Control Systems*, August 1993, pp. 26–33.
11. S. P. Parker, *Encyclopedia of Engineering*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1993.
12. T. B. Sheridan, *Telerobotics, Automation and Control*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1992.
13. R. C. Dorf, *The Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
14. R. L. Wells, "Control of a Flexible Robot Arm," *IEEE Control Systems*, January 1990, pp. 9–15.
15. H. Kazerooni, "Human Extenders," *Journal of Dynamic Systems*, ASME, June 1993, pp. 281–290.
16. R. C. Dorf and A. Kusiak, *Handbook of Manufacturing and Automation*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
17. A. Berry, "On Board the Starship Private Enterprise," *The National Times*, June 1996, pp. 70–72.
18. K. Pfeiffer and R. Isermann, "Driver Simulation in Dynamical Engine Test Stands," *Proceedings of the American Control Conference*, IEEE, 1993, pp. 721–725.
19. H. Raza, "Control Design for Automated Highway Systems," *IEEE Control Systems*, December 1996, pp. 43–60.
20. A. G. Ulsoy, "Control of Machining Processes," ASME, *Journal of Dynamic Systems*, June 1993, pp. 301–310.
21. B. K. Bose, *Modern Power Electronics*, IEEE Press, New York, 1992.
22. J. L. Jones and A. M. Flynn, *Mobile Robots*, A. K. Peters Publishing, New York, 1993.
23. J. M. Weiss, "The TGV Comes to Texas," *Europe*, March 1993, pp. 18–20.
24. P. Schmidt, "A Parameter Optimization Approach to Controller Partitioning for Flight Control," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, March 1993, pp. 21–36.
25. H. Kazerooni, "A Controller Design Framework for Telerobotic Systems," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, March 1993, pp. 50–62.
26. F. N. Bailey, "High Performance Materials Testing," *IEEE Control Systems*, April 1992, pp. 63–70.
27. J. Ackermann, "Robust Yaw Damping of Cars with Front and Rear Wheel Steering," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, March 1993, pp. 15–20.

## Capítulo 10

1. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
2. Z. Gajic and M. Lelic, *Modern Control System Engineering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1996.
3. J. R. Mitchell and W. L. McDaniel, Jr., "A Computerized Compensator Design Algorithm with Launch Vehicle Applications," *IEEE Transactions on Automatic Control*, June 1976, pp. 366–371.
4. W. R. Wakeland, "Bode Compensator Design," *IEEE Transactions on Automatic Control*, October 1976, pp. 771–773.
5. J. R. Mitchell, "Comments on Bode Compensator Design," *IEEE Transactions on Automatic Control*, October 1977, pp. 869–870.

28. E. W. Kamen and B. S. Heck, *Fundamentals of Signals and Systems Using MATLAB*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1997.
29. C. T. Chen, *Analog and Digital Control Systems Design*, Oxford Univ. Press, New York, 1996.
30. M. J. Sidi, *Spacecraft Dynamics and Control*, Cambridge Univ. Press, New York, 1997.

### Capítulo 11

1. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
2. W. J. Grantham and T. L. Vincent, *Modern Control Systems Analysis and Design*, John Wiley & Sons, New York, 1993.
3. A. E. Bryson, "Optimal Control," *IEEE Control Systems*, June 1996, pp. 26–33.
4. J. Farrell, "Using Learning Techniques to Accommodate Unanticipated Faults," *IEEE Control Systems*, June 1993, pp. 40–48.
5. C. T. Chen, *Analog and Digital Control System Design*, Harcourt Brace Jovanovich, Orlando, Fla., 1993.
6. M. Bodson, "High Performance Control of a Permanent Magnet Stepper Motor," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, March 1993, pp. 5–14.
7. G. W. Van der Linden, "Control of an Inverted Pendulum," *IEEE Control Systems*, August 1993, pp. 44–50.
8. Y. Ishii, "Joint Connection Mechanism for Reconfigurable Manipulator," *IEEE Control Systems*, August 1993, pp. 73–78.
9. W. J. Book, "Controlled Motion in an Elastic World," *Journal of Dynamic Systems*, June 1993, pp. 252–260.
10. C. E. Rohrs, J. L. Melsa, and D. Schultz, *Linear Control Systems*, McGraw-Hill, New York, 1993.
11. M. Jamshidi, *Large-Scale Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1997.
12. W. J. Rugh, *Linear System Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1996.
13. C. M. Close and D. K. Frederick, *Modeling and Analysis of Dynamic Systems*, 2nd ed., Houghton Mifflin, Boston, 1993.
14. B. W. Dickinson, *Mathematics of Controls, Signals and Systems*, Springer-Verlag, New York, 1993.
15. D. Hrovat, "Applications of Optimal Control to Automotive Suspension Design," *Journal of Dynamic Systems*, ASME, June 1993, pp. 328–342.
16. R. H. Bishop, "Adaptive Control of Space Station with Control Moment Gyros," *IEEE Control Systems*, October 1992, pp. 23–27.
17. R. C. Dorf, *Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
18. T. B. Sheridan, *Telerobotics, Automation and Control*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1992.
19. R. C. Dorf and A. Kusiak, *Handbook of Manufacturing and Automation*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
20. C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*,

- Holt, Rinehart and Winston, New York, 1984.
- K. E. Drexler, *Nanosystems*, John Wiley & Sons, New York, 1993.
- F. L. Chernousko, *State Estimation for Dynamic Systems*, CRC Press, Boca Raton, Fla., 1993.
- M. A. Gottschalk, "Dino-Adventure Duels Jurassic Park," *Design News*, August 16, 1993, pp. 52–58.
- Y. Z. Tsypkin, "Robust Internal Model Control," *Journal of Dynamic Systems*, ASME, June 1993, pp. 419–425.
- J. D. Irwin, *The Industrial Electronics Handbook*, CRC Press, Boca Raton, Fla., 1997.
- J. K. Pieper, "Control of a Coupled-Drive Apparatus," *IEE Proceedings*, March 1993, pp. 70–79.
- Rama K. Yedavalli, "Robust Control Design for Aerospace Applications," *IEEE Transactions of Aerospace and Electronic Systems*, vol. 25, no. 3, 1989, pp. 314–324.
- Bryan L. Jones and Robert H. Bishop, " $H_2$  Optimal Halo Orbit Guidance," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, AIAA, 16, no. 6, 1993, pp. 1118–1124.

### Capítulo 12

1. R. C. Dorf, *The Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
2. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
3. P. Dorato, *Robust Control*, IEEE Press, New York, 1987; B. Barmish, "The Robust Root Locus," *Automatica*, vol. 26, no. 2, 1990, pp. 283–292; M. Morari, *Robust Process Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1991.
4. G. Zames, "Input-Output Feedback Stability and Robustness," *IEEE Control Systems*, June 1996, pp. 61–66.
5. C. N. Dorni, *Understanding Dynamic Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1993.
6. C. M. Close and D. K. Frederick, *Modeling and Analysis of Dynamic Systems*, 2nd ed., Houghton Mifflin, Boston, 1993.
7. A. Charara, "Nonlinear Control of a Magnetic Levitation System," *IEEE Transactions on Control System Technology*, September 1996, pp. 513–523.
8. P. Varaiya, "Smart Cars on Smart Roads," *IEEE Transactions on Automatic Control*, February 1993, pp. 195–207.
9. X. G. Wang, "Estimation in Paper Machine Control," *IEEE Control Systems*, August 1993, pp. 34–43.
10. D. Sbarbaro-Hofer, "Control of a Steel Rolling Mill," *IEEE Control Systems*, June 1993, pp. 69–75.
11. N. Mohan, *Power Electronics*, John Wiley & Sons, New York, 1995.
12. J. M. Weiss, "The TGV Comes to Texas," *Europe*, March 1993, pp. 18–20.
13. S. Lee, "Intelligent Sensing and Control for Advanced Teleoperation," *IEEE Control Systems*,

- June 1993, pp. 19–28.
14. J. V. Wait and L. P. Huelsman, *Operational Amplifier Theory*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1992.
  15. J. L. Jones and A. M. Flynn, *Mobile Robots*, A. K. Peters Publishing, New York, 1993.
  16. R. Shoureshi, "Intelligent Control Systems," *Journal of Dynamic Systems*, June 1993, pp. 392–400.
  17. M. Alpert, "A Bullet Train for the U.S.," *Fortune*, May 1993, p. 32.
  18. L. W. Couch, *Digital and Analog Communication Systems*, 5th ed., Macmillan, New York, 1997.
  19. H. Paraci and M. Jamshidi, *Design and Implementation of Intelligent Manufacturing Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1997.
  20. C. T. Chen, *Analog and Digital Control System Design*, Harcourt Brace Jovanovich, Orlando, Fla., 1993.
  21. T. B. Sheridan, *Telerobotics, Automation and Control*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1992.
  22. W. J. Grantham and T. L. Vincent, *Modern Control Systems Analysis and Design*, John Wiley & Sons, New York, 1993.
  23. K. Capek, *Rossum's Universal Robots*, English edition by P. Selver and N. Playfair, Doubleday, Page, New York, 1923.
  24. L. L. Cone, "Skycam: An Aerial Robotic Camera System," *Byte*, October 1985, pp. 122–128.
  25. H. Kazerooni, "Human Extenders," *Journal of Dynamic Systems*, ASME, June 1993, pp. 281–290.
  26. C. Lapiska, "Flight Simulation," *Aerospace America*, August 1993, pp. 14–17.
  27. D. E. Bossert, "A Root-Locus Analysis of Quantitative Feedback Theory," *Proceedings of the American Control Conference*, June 1993, pp. 1698–1705.
  28. J. A. Gutierrez and M. Rabins, "A Computer Loop-shaping Algorithm for Controllers," *Proceedings of the American Control Conference*, June 1993, pp. 1711–1715.
  29. J. W. Song, "Synthesis of Compensators in Linear Uncertain Plants," *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, December 1992, pp. 2882–2883.
  30. M. Gottschalk, "Part Surgeon—Part Robot," *Design News*, June 7, 1993, pp. 68–75.
  31. D. E. Whitney, "From Robots to Design," *Journal of Dynamic Systems*, ASME, June 1993, pp. 262–270.
  32. S. Jayasuriya, "Frequency Domain Design for Robust Performance Under Uncertainties," *Journal of Dynamic Systems*, June 1993, pp. 439–450.
  33. L. S. Shieh, "Control of Uncertain Systems," *IEE Proceedings*, March 1993, pp. 99–110.
  34. M. van de Panne, "A Controller for the Dynamic Walk of a Biped," *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, IEEE, December 1992, pp. 2668–2673.
  35. S. Bennett, "The Development of the PID Controller," *IEEE Control Systems*, December 1993, pp. 58–64.
  36. J. C. Doyle, *Feedback Control Theory*, Macmillan, New York, 1992.

### Capítulo 13

1. R. C. Dorf, *The Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
2. C. L. Phillips and H. T. Nagle, *Digital Control Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1995.
3. R. G. Jacquot, *Modern Digital Control Systems*, Marcel Decker, New York, 1995.
4. S. H. Zak, "Ripple-Free Deadbeat Control," *IEEE Control Systems*, August 1993, pp. 51–56.
5. C. Lapiska, "Flight Simulation," *Aerospace America*, August 1993, pp. 14–17.
6. T. B. Sheridan, *Telerobotics, Automation and Control*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1992.
7. W. J. Grantham and T. L. Vincent, *Modern Control Systems Analysis and Design*, John Wiley & Sons, New York, 1993.
8. R. C. Dorf, *Electrical Engineering Handbook*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Fla., 1998.
9. T. M. Foley, "Engineering the Space Station," *Aerospace America*, October 1996, pp. 26–32.
10. A. G. Ulsoy, "Control of Machining Processes," *ASME, Journal of Dynamic Systems*, June 1993, pp. 301–310.
11. K. J. Astrom, *Computer-Controlled Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1997.
12. R. C. Dorf and A. Kusiak, *Handbook of Manufacturing and Automation*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
13. L. W. Couch, *Digital and Analog Communication Systems*, 5th ed., Macmillan, New York, 1995.
14. M. van de Panne, "A Controller for the Dynamic Walk of a Biped," *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, IEEE, December 1992, pp. 2668–2673.
15. K. S. Yeung and H. M. Lai, "A Reformation of the Nyquist Criterion for Discrete Systems," *IEEE Transactions on Education*, February 1988, pp. 32–34.
16. M. Eslami, *Theory of Sensitivity in Dynamic Systems*, Springer-Verlag, New York, 1994.
17. T. R. Kurfess, "Predictive Control of a Robotic Grinding System," *Journal of Engineering for Industry*, ASME, November 1992, pp. 412–420.
18. T. Studt, "Why You Really Need a DSP," *R&D Magazine*, June 1993, pp. 32–34.
19. D. M. Auslander, *Mechatronics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1996.
20. R. Shoureshi, "Intelligent Control Systems," *Journal of Dynamic Systems*, June 1993, pp. 392–400.
21. D. J. Leo, "Control of a Flexible Frame in Slewing," *Proceedings of American Control Conference*, 1992, pp. 2535–2540.
22. M. Alpert, "A Bullet Train for the U.S.," *Fortune*, May 1993, p. 32.
23. J. L. Jones and A. M. Flynn, *Mobile Robots*, A. K. Peters Publishing, New York, 1993.

24. V. Skormin, "On-Line Diagnostics of a Self-Contained Flight Actuator," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, January 1994, pp. 130–141.
25. H. H. Ottesen, "Future Servo Technologies for Hard Disk Drives," *J. of the Magnetics Society of Japan*, vol. 18, 1994, pp. 31–36.

#### Apêndice C

1. R. C. Dorf, *Matrix Algebra—A Programmed Introduction*, John Wiley & Sons, New York, 1969.
2. C. R. Wylie, Jr., *Advanced Engineering Mathematics*, 6th ed., McGraw-Hill, New York, 1995.

#### Apêndice F

1. N. E. Leonard and W. S. Levine, *Using MATLAB to Analyze and Design Control Systems*, 2nd ed., Benjamin/Cummings, Redwood City, Calif., 1995.
2. H. Saadat, *Computational Aids in Control Systems Using MATLAB*, McGraw-Hill, New York, 1993.
3. B. Shahian and M. Hassul, *Computer-Aided Control System Design Using MATLAB*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1993.
4. *The Student Edition of MATLAB*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1995.
5. D. M. Etter, *Engineering Problem Solving with MATLAB*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1997.



# Índice

## A

Acelerômetro, 46, 59  
Acionador de bobinadeira, 552  
Acionador de correia para impressora, 118  
Adição de matrizes, 622  
Adjunta de uma matriz, 625  
Alocação de pólos usando variáveis de estado, 508  
**Amortecimento crítico** O caso em que o amortecimento está na fronteira entre o subamortecido e o superamortecido, 35  
Amplidina, 45, 81  
Amplificador  
com retroação, 143  
operacional, 477, 565  
**Análise**

**custo-benefício** O resultado de um julgamento quanto ao compromisso que deve ser feito entre critérios conflitantes, 14  
de estabilidade no plano z, 593  
de estado usando o MATLAB, 121  
de robustez, 537

**Ângulo de partida** O ângulo segundo o qual o lugar das raízes deixa um polo complexo no plano s, 272  
**Aproximação**  
assintótica para o esboço dos diagramas de Bode, 329  
de Padé de um retardo, 405, 605, 643  
**discreta no tempo** Uma aproximação usada para obter a resposta no tempo de um sistema baseado na divisão do tempo em pequenos incrementos,  $\Delta t$ , 111  
**linear** Um modelo aproximado que resulta em uma relação linear entre a saída e a entrada do dispositivo, 31

**Assíntota** O percurso que o lugar das raízes segue quando o valor do parâmetro se torna muito grande e tende a infinito. O número de assíntotas é igual ao número de pólos menos o número de zeros, 266  
Assíntota de lugar das raízes, 267  
**Atuador** O dispositivo que faz com que o processo produza uma saída. O dispositivo que fornece a potência motriz ao processo, 40  
eletro-hidráulico, 43  
hidráulico, 43, 45, 82, 525  
**Automação** O controle de um processo por meios automáticos, 6  
Avião de transporte supersônico, 307

## B

Balança com escala, 277  
**Banda passante** A frequência para a qual a resposta de frequência é atenuada em 3 dB a partir do valor de frequências baixas, 342, 394  
Black, H. S., 5, 83  
Bode, H. W., 327

**C**

Cálculo de matrizes, 626  
Cálculo gráfico dos resíduos de  $F(s)$ , 34  
Características de sistemas de controle usando o MATLAB, 157  
**Carta de Nichols** Uma carta exibindo as curvas da relação entre a resposta de frequência a malha aberta e a resposta de frequência a malha fechada, 391, 403  
**Centróide das assíntotas** O centro das retas assíntotas,  $\sigma_A$ , 268  
Circuito  
passa-todas, 337  
T geminado, 334

## Círculos

de magnitude constante, 390  
de fase constante, 391-393  
 $M$  constante, 390  
 $N$  constante, 390  
Coeficientes ótimos de  $T(s)$  para o índice ITAE, 200  
**Compensação** A modificação ou ajuste de um sistema de controle a fim de se obter um desempenho adequado, 437  
usando estruturas de atraso de fase no plano s, 454  
usando estruturas de atraso de fase nos diagramas de Bode, 457  
usando estruturas de avanço de fase no plano s, 447  
usando estruturas de avanço de fase nos diagramas de Bode, 442  
usando estruturas de integração, 452  
usando métodos analíticos, 460

**Compensador** Um componente ou circuito adicional que é inserido no sistema para equalizar ou compensar uma deficiência de desempenho, 437

**Compensador digital por computador** Um sistema que usa um computador digital como o elemento compensador, 595

**Complexidade de projeto** O padrão complexo de partes envolvidas e conhecimento necessário, 14

## Constante

de erro  
à rampa, 195  
ao degrau, 194  
de aceleração, 195  
de tempo, 38  
de velocidade,  $K$ , A constante calculada como  $\lim \{sG(s)\}$  para um sistema tipo um. O erro de estado estacionário para uma rampa de entrada (com inclinação A) para um sistema do tipo um é igual a  $A/K_v$ , 195

Contornos, 371  
das raízes, 283  
de Nyquist, 375  
no plano s, 371

## Controlador

com retroação de estado A modificação ou ajuste de um sistema de controle a fim de se obter um desempenho adequado, 497  
**de processo.** Ver Controlador PID  
PI, 602  
**PID** Um controlador com três termos no qual a saída do controlador é igual à soma de um termo proporcional, de um termo integral e de um termo diferencial, com um ganho ajustável para cada termo, 545

## Controle

de aeronave/aeroplano, 176, 315  
de aplicação de insulina, 219  
de automático, história de, 3  
de elevador, 579  
de helicóptero, 305, 311  
de insulina, 17  
de manobra de veículo sobre lagartas, 242, 246  
de motor de mesa transportadora, 597  
de nível de água, 7, 88, 168  
de reator nuclear, 20, 132  
de rumo de avião biplano, 491  
de uma máquina de tornar, 558  
de velocidade de mesa rotativa, 16  
**robusto** Sistema que apresenta o desempenho desejado em presença de incertezas significativas do processo, 534

Conversor analógico-digital, 586  
Conversor digital-analógico, 586  
Cremalheira e pinhão, 47

## Critério

**de estabilidade de Nyquist** Um sistema com retroação é estável se e somente se o contorno no plano  $G(s)$  não circunscrever o ponto  $(-1, 0)$  quando o número de pólos de  $G(s)$  no semiplano s da direita for igual a zero. Se  $G(s)$  possuir  $P$  pólos no semiplano s da direita, então o número de circunscrições do ponto  $(-1, 0)$ , no sentido antihorário, deve ser igual a  $P$  para que o sistema seja estável, 375

de estabilidade robusta, 538

**de Routh-Hurwitz** Um critério para determinar a estabilidade de um sistema examinando-se a equação característica da função de transferência. O critério estabelece que o número de raízes da equação característica com parte real positiva é igual ao número de mudanças de sinal dos coeficientes da primeira coluna do arranjo tabular de Routh, 232

Custo da retroação, 152

## D

**Dados amostrados** Dados obtidos para as variáveis de sistema somente em intervalos discretos; dados obtidos uma vez a cada período de amostragem, 585

Década de freqüências, 328

**Decibel (dB)** A unidade de ganho logarítmico, 327, 628

Desempenho de um sistema de controle, 180

**Desvio** A diferença entre o que se pretende (ou visualiza) como produto ou dispositivo e a forma prática do projeto real, do projeto final, 14

Determinação das raízes de polinômios, 244

## Determinante

de um diagrama de fluxo, 53  
de uma matriz, 624

## Diagrama(s)

**de blocos** Blocos operacionais, unidirecionais, que representam as funções de transferência dos elementos do sistema, 48

**de Bode** O logaritmo da magnitude da função de transferência é representado graficamente versus o logaritmo de  $\omega$ , a freqüência. O ângulo de fase,  $\phi$ , da função de transferência é representado separadamente versus o logaritmo da freqüência, 327 de Bode usando o MATLAB, 347

**de fluxo de sinal** Um diagrama que consiste de nós conectados através de ramos orientados e que constitui uma representação gráfica de um conjunto de relações lineares, 52

determinante de, 53  
laço de, 52  
modelo de estado em, 98  
nós de, 52  
percurso de, 52  
regra da malha de Mason, 53

logarítmicos de magnitude e de fase, 344  
**polar** Um gráfico da parte real de  $G(j\omega)$  versus a parte imaginária de  $G(j\omega)$ , 325

Dinâmica de sistemas físicos, 25  
variáveis para, 26

Distribuidor de fluido automático, 131

Doença epidêmica, modelo de, 105, 241

**Domínio do tempo** O domínio matemático que incorpora a resposta e a descrição do sistema em termos do tempo  $t$ , 94  
projeto no, 497

## E

Engenharia de controle, 2

Entrada em aceleração, 195

- Equação característica** A relação formada igualando-se a zero o denominador de uma função de transferência, 34
- Equação diferencial de estado** A equação diferencial de estado para o vetor de estado:  $\dot{x} = Ax + Bu$ , 28, 96
- Erro de estado estacionário** Erro estacionário ou erro permanente. O erro quando o período de tempo é grande e a resposta transitória desapareceu, deixando uma resposta contínua, 140, 150, 194  
de sistemas com retroação não-unitária, 197
- Espaçanave, 115
- Especificações** Enunciados que estabelecem explicitamente o que o dispositivo ou produto deve ser ou deve fazer. Um conjunto de critérios de desempenho preestabelecidos, 14, 181  
de desempenho no domínio de freqüência, 341, 443
- Estabilidade** Uma medida de desempenho de um sistema. Um sistema é estável se todos os pólos da função de transferência possuírem parte real negativa, 229  
de sistemas com variáveis de estado, 240, 248  
do sistema usando o MATLAB, 244, 248, 402  
no domínio de freqüência, 370  
no domínio de tempo, 240, 248  
relativa A propriedade que é medida pela parte real relativa de cada raiz ou par de raízes da equação característica, 239  
pelo critério de Nyquist, 383  
pelo critério de Routh-Hurwitz, 239  
usando o critério de Nyquist, 375  
usando o critério de Routh, 232
- Estabilização de navio, 168, 482
- E斯塔ção espacial, 115, 303
- Estate de equilíbrio, 106
- Estado de um sistema** Um conjunto de variáveis tal que o conhecimento dos valores destas variáveis e das funções de entrada, com as equações que descrevem a dinâmica, fornecem os estados futuros e a saída do sistema, 94
- Estrutura**
- de atraso de fase Uma estrutura que fornece um ângulo de fase negativo e uma atenuação significativa sobre a faixa de freqüências de interesse, 441
  - de avanço de fase Uma estrutura que fornece um ângulo de fase positivo sobre a faixa de freqüências de interesse. Assim, a de avanço de fase pode ser usada para dotar o sistema de uma margem de fase adequada, 439
  - de avanço e atraso de fase Uma estrutura com ambas as características de avanço e de atraso, 460
  - de compensação em cascata Uma estrutura de compensação colocada em cascata ou série com o processo, 439
  - de integração Uma estrutura que atua, em parte, como um integrador, 452
- Evans, W. R., 263
- Exemplo de projeto seqüencial, 18, 73, 125, 162, 214, 250, 298, 352, 407, 475, 522, 563, 607
- Expansão em frações parciais, 34
- Explorador de Marte, 155, 157, 258, 315, 581
- Extensor, 134, 487
- Extrapolador de ordem zero (ZOH-Zero order hold), 587
- F**
- Fase mínima** Todos os zeros de uma função de transferência permanecem no semiplano  $s$  da esquerda, 335
- Fase não-mínima** Funções de transferência com zeros no semiplano  $s$  da direita, 335
- Fatores de conversão, 27, 620
- Filtro passa-baixas, 61
- Filtro prévio** Uma função de transferência,  $G_p(s)$ , que filtra o sinal de entrada  $R(s)$  antes de calcular o sinal de erro, 461
- Forma canônica de Jordan, 105
- Forma polar de número complexo, 629
- Formato de entrada com ação à frente, 101
- Formato de variáveis de estado desacopladas, 104
- Fórmula de Ackermann, 512
- Freqüência**
- de corte. Ver Freqüência de quebra, 328
  - de quebra A freqüência na qual a aproximação assintótica da resposta de freqüência de um polo (ou de um zero) muda de inclinação, 328
  - natural A freqüência de oscilação natural que ocorreria para dois pólos complexos se a relação de amortecimento fosse igual a zero, 35
  - ressonante A freqüência,  $\omega_n$ , na qual é alcançado o valor máximo da resposta de um par de pólos complexos, 333, 342
- Função**
- de impulso, 181
  - de transformada de Laplace de uma variável de saída e a transformada de Laplace da variável de entrada, 37
  - a malha fechada, 49
  - de um atuador hidráulico, 43
  - de um motor CC, 40
  - tabelas, 44
- no domínio de freqüência** A relação entre o sinal de saída e o sinal de entrada quando a entrada é senoidal. É expressa por  $G(j\omega)$ , 326
- exponencial matricial, 98, 626
- impulso unitário, 181
- lsim, 124
- G**
- Giroscópio, 133
- Gráfico logarítmico** Ver Diagramas de Bode, 327
- H**
- Hidrofólio, 482
- História do controle automático, 3
- Homogeneidade, 30
- I**
- Implementação de controladores digitais, 602
- Índice de desempenho** Uma medida quantitativa do desempenho de um sistema, 198, 502
- Insulina, controle de, 219
- Integração retangular avançada, 602
- Integral
- de convolução, 182
  - do quadrado do erro (ISE), 199
  - do tempo multiplicado pelo valor absoluto do erro (ITAE), 200
  - Coefficientes ótimos de  $T(s)$  para, 205
  - do valor absoluto do erro (IAE), 199
- Inversão de uma matriz, 625
- L**
- Laminador(a) de aço, 11, 309, 570
- Leis de Kirchhoff, 37
- Levantação magnética, 84, 488, 572
- Lugar** Um percurso ou trajetória que é traçado(a) à medida que um parâmetro varia, 263
- das raízes O lugar ou o percurso das raízes traçado no plano  $s$  à medida que um parâmetro tem seu valor alterado, 263
  - ângulo de saída do, 272
  - assíntota do, 267
  - conceito de, 263
  - no plano  $z$ , 599
  - ponto de saída do, 270
  - procedimento do, 265
  - projeto de parâmetro do, 279
  - usando o MATLAB, 294
- M**
- Magnitude logarítmica** O logaritmo da magnitude da função de transferência,  $20 \log_{10}|G|$ , 327
- Manipuladores remotos, 134, 484
- Mão artificial, 11
- Mão, robótica, 11
- Mapeamento conforme** Um mapeamento que preserva os ângulos do plano  $s$  no plano  $F(s)$ , 372
- Mapeamento de contorno** Um contorno ou trajetória em um plano é mapeado(a) em outro plano por uma relação  $F(s)$ , 371
- Mapeamento de contornos no plano  $s$ , 371
- Máquina de gravação, 345, 350
- Máquinas perfuratrizes do Canal da Mancha, 155, 159
- Margem de fase** O ângulo de fase segundo o qual o lugar  $GH(j\omega)$  deve ser girado de modo que a magnitude unitária  $|GH(j\omega)| = 1$  passe pelo ponto  $(-1, 0)$  no plano  $GH(j\omega)$ , 385
- Margem de ganho, 385
- Margem de ganho** inverso do ganho  $|GH|$  na freqüência para a qual o ângulo de fase atinge  $180^\circ$ , 385
- MATLAB, 56, 63, 632
- diagramas de Bode com, 347
  - e variáveis de estado, 121
- funções, 642-644
- gráficos com, 639
- resposta ao degrau com, 72, 121
- scripts, 641
- simulação com, 63
- tabela de funções do, 642-644
- Matriz(es), 621, 636
- adição, 622
  - adjunta, 625
  - álgebra, 621
  - cálculo, 626
  - de controlabilidade, 495
  - de transição,  $\Phi(t)$  A função exponencial matricial que descreve a resposta livre do sistema, 98, 108, 122
  - avaliação da (pelo método do diagrama de fluxo de sinal), 109
  - determinante de, 624
  - diagonal, 621
  - função exponencial de, 98, 626
  - fundamental, 98
  - identidade, 621
  - inversão de, 625
  - multiplicação de, 622
  - para sistemas interconectados, 52
  - quadrada, 621
  - simétrica, 622
  - subtração de, 622
  - transposta, 624
- Maxwell, J. C., 4, 232
- Método de Euler, 112
- Minorsky, N., 77
- Modelos**
- de atuador hidráulico, 43, 45
  - de doença epidêmica, 105, 241
  - de motor CC, 40
  - de pêndulo invertido e carrinho, 106, 511, 527
  - matemáticos Descrições do comportamento de um sistema usando matemática, 25
- Motor CC** Um atuador elétrico que utiliza uma entrada de tensão como variável de controle, 40
- controlado pela armadura, 42, 54
  - controlado pelo campo, 41
- Motor elétrico de tração, 57, 72
- Multiplicação de matrizes, 622
- N**
- Nós de um diagrama de fluxo de sinal, 52
- Número de lugares separados igual ao número de pólos da função de transferência, 267
- Número de ramos distintos igual ao número de pólos da função de transferência, supondo que o número de pólos seja maior ou igual ao número de zeros da função de transferência, 321
- Número imaginário, 629
- Números complexos, 629
- Nyquist, H., 371
- O**
- Oitava (intervalo de freqüências), 329
- Ônibus espacial, 362, 423, 608
- Operador diferencial, 33
- Operador integral, 33
- Optimização** O ajuste dos parâmetros para se obter o projeto mais favorável ou vantajoso, 199
- Oscilação amortecida** Uma oscilação na qual a amplitude decresce com o tempo, 37
- Oscilador tipo pêndulo, 32
- P**
- Parâmetros imprecisos, 539
- Pares de transformada de Laplace, 33, 617-618
- Parkinson, D. B., 6
- Pêndulo invertido, 106, 511, 527
- Período de amostragem** O período em que todos os números deixam ou entram no computador; o período para o qual a variável amostrada é mantida constante, 585
- Piloto automático de avião, 549
- Plano complexo, 629
- Plotadora X-Y, 218, 468
- Polinômio auxiliar** A equação que precede imediatamente a linha nula do arranjo tabular de Routh, 236
- Polinômio característico, 34
- Pólos, 34
- Pólos dominantes** As raízes da equação característica responsáveis pela resposta transitória dominante do sistema, 191, 343

- Ponte sobre o Desfiladeiro de Tacoma, 231  
**Ponto de saída** O ponto sobre o eixo real onde o lugar das raízes deixa o eixo real do plano  $s$ , 270  
**Princípio do argumento** Ver Teorema de Cauchy, 373  
 Problema de projeto continuado, 23, 90, 136, 176, 225, 258, 314, 365, 430, 491, 528, 575, 612  
**Procedimento do lugar das raízes** O método para determinar o lugar das raízes da equação característica  $1 + KP(s) = 0$  à medida que  $K$  varia de zero a infinito, 266  
**Processo** O dispositivo, a transformação, ou sistema sob controle, 2  
**Processo a controlar** Ver Processo, 2  
**Produtividade** A relação entre os recursos de saída e os recursos de entrada em um processo industrial, 6  
 Programas de computador para controle, 56  
**Projeto** O processo de conceber ou inventar formas, partes e detalhes de um sistema para alcançar um propósito específico, 14, 437  
 de engenharia O processo de projetar um sistema técnico, 14  
 de modelo interno, 513, 554  
 de parâmetro Um método para selecionar um ou dois parâmetros usando a técnica do lugar das raízes, 279  
 de sistema com variável de estado usando o MATLAB, 518  
**de um sistema de controle** O de um sistema de controle trata da concepção e da realização da estrutura do sistema e da seleção de componentes e de parâmetros adequados, 15, 437  
 no domínio de tempo, 497  
 usando diagramas de Bode, 457  
 usando estruturas de integração, 452  
 usando retroação de estado, 497  
 usando uma estrutura de atraso de fase no plano  $s$ , 454  
 usando uma estrutura de avanço de fase nos diagramas de Bode, 442
- R**
- Raízes**  
 características de uma matriz, 239, 626  
**dominantes** As raízes da equação característica responsáveis pela resposta transitória dominante do sistema, 276
- Regra**  
 da diferença avançada, 602  
**de Mason** Uma regra que habilita o usuário a obter a função de transferência através do traçado de percursos e malhas no sistema, 53
- Regulador de esferas** Um dispositivo mecânico para controlar a velocidade de uma máquina a vapor, 3  
 Regulador de nível, 4
- Relação de amortecimento** Uma medida do amortecimento. Um número adimensional da equação característica de segunda ordem, 35  
 estimativa da, 192
- Relógio de água, 21  
 Resíduos, 34  
**Resposta**  
 ao degrau usando o MATLAB, 72, 121  
**de frequência** A resposta de estado estacionário do sistema para um sinal senoidal de entrada, 322  
 a malha fechada, 388  
 gráficos de, 324  
 medidas, 340, 357  
 usando o MATLAB, 347  
 de frequência a malha fechada A resposta de frequência da função de transferência a malha fechada  $T(j\omega)$ , 388  
 limitada, 230  
 no domínio do tempo, e a matriz de transição, 108  
 por meio de um cálculo discreto no tempo, 111  
 rápida sem oscilação, 464  
**transitória** A resposta do sistema como uma função do tempo, 34, 144, 181  
 de um sistema de segunda ordem, 184  
 relação com a localização das raízes, 192
- Restrição, 506  
**Retardo** Um retardo puro de tempo,  $T$ , de modo que os eventos que ocorrem em um ponto do sistema no instante  $t$  ocorrem em um outro ponto do sistema em um instante posterior ( $t + T$ ), 395
- Retroação**, 2  
 amplificador com, 143  
 custo da, 157  
**negativa** O sinal de saída é enviado de volta para ser subtraído do sinal de entrada, 7
- por variáveis de estado** Quando o sinal de controle do processo é uma função direta de todas as variáveis de estado, 501  
**positiva** O sinal de saída é enviado de volta para que possa ser adicionado ao sinal de entrada, 20, 51  
 sistema de controle com, 2  
 vantagens da, 155  
**Risco** Incertezas incorporadas nas consequências não desejadas de um projeto, 14
- Robô**  
 Computadores programáveis integrados com um manipulador: um manipulador reprogramável, multifuncional usado para uma variedade de tarefas, 9, 12, 173  
 de laboratório, 12, 60  
 móvel, 196  
 Ruído na medição, 149  
 na saída, 149
- S**
- Segmentos do lugar das raízes** sobre o eixo real O lugar das raízes que está em uma seção do eixo real à esquerda de um número ímpar de pólos e zeros, 266  
**Sensibilidade de raiz** A sensibilidade a raízes à medida que um parâmetro muda de valor a partir do seu valor nominal. A sensibilidade à raiz é a variação incremental na raiz dividida pela variação proporcional no valor do parâmetro, 283  
**Sensibilidade do sistema** A mudança proporcional na função de transferência do sistema pela variação proporcional no parâmetro do sistema, 182, 534  
**Símbolos**, 27, 619-620  
 Simplificação de sistema linear, 206, 213  
**Simulação** Um modelo de um sistema que é usado para investigar o comportamento do sistema quando for submetido a sinais de entrada reais, 56  
 de sistemas usando o MATLAB, 63  
 em computador, 56
- Sinal(is)**  
**de erro** A diferença entre a saída desejada  $R(s)$ , e a saída real,  $Y(s)$ . Portanto  $E(s) = R(s) - Y(s)$ , 140  
**de perturbação** Um sinal de entrada indesejável que afeta o de saída do sistema, 139, 146  
**de retroação** Uma medida da saída do sistema usada na retroação do sistema de controle, 2  
 em degrau, 72, 194  
 em parábola, 181  
 em rampa, 181  
**para teste** Um sinal de entrada usado como teste padrão da capacidade do sistema em responder adequadamente, 181
- Síntese** O processo pelo qual novas configurações físicas são criadas. A combinação de elementos separados ou de dispositivos para formar um todo coerente, 14
- Sistema** Uma interconexão de elementos e dispositivos para um fim desejado, 1  
 a malha fechada com dados amostrados, 591  
 automático de teste, 516  
**com dados amostrados** Um sistema em que parte dele age sobre dados amostrados (variáveis amostradas), 585  
 com parâmetros imprecisos, 539  
 com retroação não-unitária, 197  
 com retroação pseudoquantitativa, 558  
 condicionalmente estável, 308, 417, 421  
**controlável** Um sistema com entrada de controle  $u$  sem restrições que transfere qualquer estado inicial  $x(0)$  para qualquer outro estado  $x(t)$ , 495  
**de controle** Uma interconexão de componentes formando uma configuração de que fornecerá uma resposta desejada, 2  
**a malha aberta** Um sistema que utiliza um dispositivo para controlar o processo sem usar retroação. Assim, a saída não tem efeito sobre o sinal aplicado ao processo, 2, 139  
 biológico, 11  
**com retroação a malha fechada** Um sistema que usa uma medida do sinal de saída e a compara com a saída desejada, 3, 139  
 de direção de um navio, 425  
 de direção do automóvel, 8  
 de enrolamento de rotores, 465, 471  
 de submarino, 130-131  
 de um manipulador de laser, 290  
 de velocidade, 145, 157  
 para automóveis, 169
- para um gerador de potência, 306  
**digital** Um sistema usando sinais digitais e um computador digital para controlar um processo, 583  
 digital usando MATLAB, 603  
 manual, 7  
 multimalhas com retroação, 51  
**muitivariável** Um sistema com mais de uma variável de entrada ou mais de uma variável de saída, 3, 48  
**ótimo** um sistema cujos parâmetros são ajustados de modo que o índice alcance um valor extremo, 199, 501  
 por computador, 10, 584  
 de detecção de fase, 255  
 de leitura de acionador de disco. Ver Exemplo de projeto sequencial  
 de segunda ordem, 183  
 de teste automático, 520  
 direto. Ver A malha aberta, 139  
**estável** Um sistema dinâmico com uma resposta limitada a uma entrada limitada, 230  
 instável, 229  
 Internacional (SI) de unidades, 27, 619-620  
 linear, 30  
**observável** Um sistema com uma saída que possui uma componente devida a cada uma das variáveis de estado, 499  
 subamortecido, 29, 63  
 superamortecido, 36, 63  
**variante no tempo** Um sistema para o qual um ou mais parâmetros podem variar com o tempo, 94  
 Subtração de matrizes, 622  
 Superposição, princípio da, 30
- T**
- Tabelas**  
 de coeficientes ótimos de  $T(s)$ , 205  
 de diagrama do lugar das raízes, 410-417  
 de diagramas de Nichols, 410-417  
 de diagramas de resposta de freqüência, 410-417  
 de fatores de conversão, 620  
 de funções de transferência, 44  
 de pares de transformada de Laplace, 33, 617-618  
 de símbolos, unidades e fatores de conversão, 619-620
- Telescópio**  
 espacial, 550  
 Hubble, 24, 208
- Tempo**  
**de assentamento** O tempo necessário para que a saída do sistema se acomode no interior de uma faixa de valores percentuais da amplitude de entrada, 185  
**de pico** O tempo necessário para que um sistema responda a uma entrada em degrau e alcance o valor máximo da resposta, 183  
**de subida** O tempo para que um sistema responda a uma entrada em degrau e alcance uma resposta igual à magnitude de entrada, 183
- Theorema**  
**de Cauchy** Se um contorno percorrido no sentido horário circunscrever  $Z$  zeros e  $P$  pólos de  $F(s)$ , o percurso correspondente no plano  $F(s)$  circunscreverá a origem do plano  $F(s)$   $N = Z - P$  vezes no sentido horário, 373  
 do valor final, 35
- Tipo de sistema** O número,  $N$ , de pólos da função de transferência,  $G(s)$ , na origem.  $G(s)$  é a função de transferência do percurso direto, 194  
 Traçado de curvas com o MATLAB, 639
- Transformada**  
**de Fourier** A transformação de uma função do tempo,  $f(t)$ , no domínio da freqüência, 324  
**de Laplace** Uma transformação de uma função  $f(t)$  no domínio do tempo em uma função  $F(s)$  no domínio da freqüência complexa, 92  
 de Laplace inversa, 33  
 $z$ , 588  
 Transporte de fita magnética, 307  
 Transposta de uma matriz, 624  
 Trem de engrangens, 45
- U**
- Ultrapassagem** A quantidade alcançada pela resposta real do sistema além da resposta desejada, 185  
 percentual, 185  
 para um sistema de segunda ordem, 186  
 Unidades, 27, 619-620

**V**

**Valor máximo da resposta de freqüência** Um par de pólos complexos resultará em um valor máximo de resposta de freqüência que ocorre na freqüência ressonante, 333

**Variáveis**

- análogas, 29
- de estado** O conjunto de que descrevem o sistema, 94
- de fase, 101
- físicas, 103
- para sistemas físicos, 26

**Veículo**

- de decolagem vertical (VTOL), 257, 422, 530
- de excursão lunar, 480
- de reconhecimento controlado remotamente, 398
- espacial, 91

**Velocidade de entrada**, 181**Vetor**

- característico, 626
- coluna, 621
- de estado** O vetor contendo todas as  $n$  variáveis de estado,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 97

**linha**, 621

Vyshnegradskii, I. A., 4, 232

**W**

Watt, James, 3

**Z**

Zeros, 34

## Variáveis e Parâmetros Padronizados

---

$Y(s)$	saída
$D(s)$	perturbação
$E(s)$	erro
$G(s)$	processo ou processo a controlar
$G_c(s)$	compensador
$G_p(s)$	filtro prévio
$H(s)$	função de transferência do bloco de retroação
$K$	constante de ganho
$q(s)$	polinômio em $s$ , a equação característica
$R(s)$	entrada ou comando
$s$	variável complexa da transformada de Laplace
$S_G^T$	função sensibilidade
$T$	período de amostragem; também, retardo
$T_s$	tempo de assentamento
$T(s)$	função de transferência a malha fechada
$T_d(s)$	torque perturbador
$x(t)$	variável de estado
$\omega_n$	freqüência natural
$z$	variável complexa da transformada $z$
$\zeta$ , zeta	relação de amortecimento

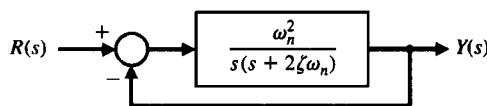
## História Moderna dos Sistemas de Controle

---

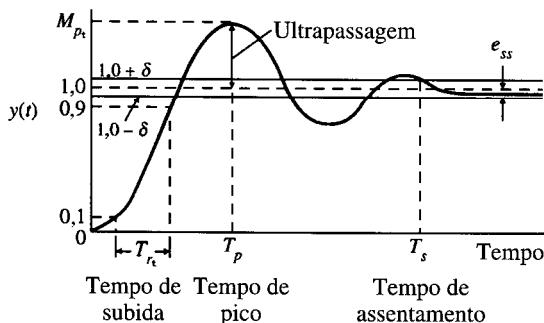
- 1769 Regulador de esferas de James Watt para o controle de velocidade de motores  
1868 Análise do regulador de esferas por James C. Maxwell  
1880 Análise de estabilidade de E.J. Routh  
1910 Elmer A. Sperry desenvolve o giroscópio e o piloto automático  
1927 Amplificador com retroação de H. S. Black  
1932 Critério de estabilidade de H. Nyquist  
1938 H. W. Bode demonstra o diagrama logarítmico de freqüência  
1947 A carta de N. B. Nichols se torna disponível para análise no domínio de freqüência  
1948 Walter R. Evans desenvolve o método do lugar das raízes  
1958 J. Engelberger e G. Devol constroem o primeiro robô industrial moderno  
1969 W. Hoff desenvolve o microprocessador  
1970 Uso amplo do controle com retroação por meio de variáveis de estado  
1980 O projeto de sistemas de controle robusto estudado amplamente  
1990 Companhias de manufatura orientadas para exportação enfatizam a automação  
1994 O controle com retroação usados amplamente nos automóveis

# Tabelas e Fórmulas Selecionadas para Projeto

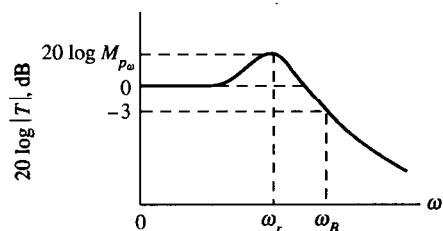
Sistema de segunda ordem a malha fechada



**RESPOSTA AO DEGRAU UNITÁRIO**



**GRÁFICO DE MAGNITUDE A MALHA FECHADA**



- Tempo de assentamento (no interior da faixa de 2% em torno do valor final)

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}$$

$$M_{p_\omega} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

- Ultrapassagem percentual

$$M_{p_t} = 1 + e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

e

$$U.P. = 100e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

- Tempo de pico

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

- Tempo de subida (tempo para ir de 10% a 90% do valor final)

$$T_{r_1} = \frac{2,16\zeta + 0,60}{\omega_n} \quad (0,3 \leq \zeta \leq 0,8)$$

- Banda passante ( $0,3 \leq \zeta \leq 0,8$ )

$$\omega_B = (-1,196\zeta + 1,85)\omega_n$$

Controlador PID:

$$G_c(s) = K_P + K_D s + \frac{K_I}{s} = \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s}$$

## TABELA

## PÁGINA

5.5	Sumário dos Erros de Estado Estacionário	195
5.6	Os Coeficientes Ótimos de $T(s)$ com Base no Critério ITAE para uma Entrada em Degrau	202
5.7	Os Coeficientes Ótimos de $T(s)$ com Base no Critério ITAE para uma Entrada em Rampa	205
10.2	Coeficientes e Medidas da Resposta de um Sistema <i>Deadbeat</i>	465
10.7	Um Resumo das Características das Estruturas de Compensação por Avanço de Fase e Atraso de Fase	476