

EMB-5602 – Controle Digital

Módulo I – Teoria de Controle Digital

Prof. Dr. Alexandre Garro Brito



Sumário I

- 1 Revisão de sistemas lineares contínuos
- 2 Introdução ao controle digital
- 3 Transformada Z
 - Definição
 - Propriedades
- 4 Transformada Z Inversa
 - Definição
 - Método de série de potências
 - Método de expansão em frações parciais
 - Solução usando o Teorema de Resíduos de Cauchy
 - Análise de sistemas discretos
- 5 O amostrador ideal
- 6 Cálculo de $R^*(s)$
- 7 Análise espectral da amostragem
- 8 Reconstrução
- 9 Função de transferência de malha aberta

Sumário II

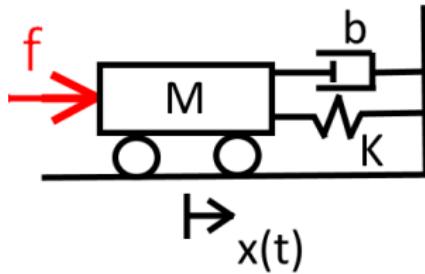
- 10 Sistemas com atraso de tempo
- 11 Sistema em malha fechada
- 12 Equação característica
- 13 Mapeamento do plano s no plano z
- 14 Transformação bilinear
- 15 Solução dos Exercícios

Modelagem de sistemas dinâmicos

- Um sistema dinâmico é definido como aquele em que seu estado atual depende, não só dos sinais de entrada que sobre ele atuam no instante atual, mas também do estado deste sistema no tempo passado;
- Dada esta dependência com o seu “passado”, um sistema dinâmico precisa ser modelado matematicamente através de equações diferenciais;
- A forma mais natural de se obter uma descrição matemática para a dinâmica do sistema é compreender e interrelacionar suas leis internas.

Modelagem de sistemas dinâmicos

- Considerando o sistema massa-mola-amortecedor a seguir. A variável de entrada deste sistema é a força f aplicada, enquanto a variável de saída é o deslocamento x .



- Desprezando-se o atrito e aplicando as leis de Newton em seus elementos, é fácil chegar a

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = f, \quad (1)$$

onde M é a massa, b é o coeficiente de amortecimento e K é a constante elástica da mola.

Alguns sinais de interesse

- Seja $a \in \mathbb{R}$. O sinal *degrau unitário contínuo* $u(t - a)$ é definido como

$$u(t - a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}; \quad (2)$$

- O sinal *delta de Dirac* é definido como

$$\delta(t - a) = \begin{cases} 0, & t \neq a \\ \infty, & t = a \end{cases}, \quad (3)$$

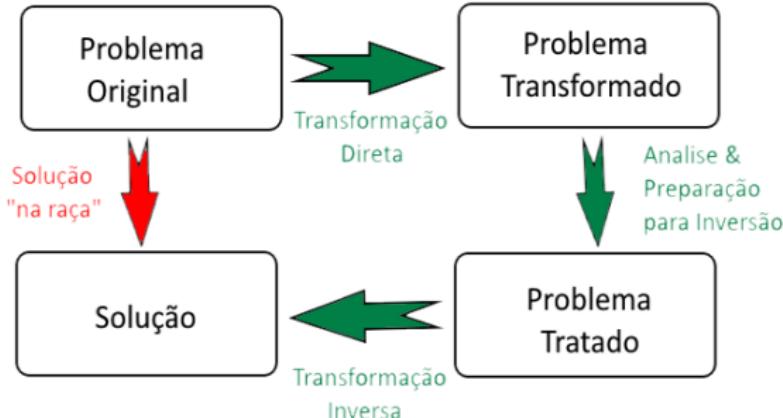
com $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) dt = 1$;

- Uma propriedade muito importante da função delta de Dirac é a seguinte. Seja $f(t)$ uma função real. Então:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) f(t) dt = f(a).$$

Transformadas integrais

- Para se conhecer o comportamento da saída (x) em função da entrada aplicada (f), seria necessário resolver a equação diferencial associada. Infelizmente, isso não é sempre fácil (ou mesmo possível);
- Um procedimento alternativo é aplicar a uma transformação que leve o problema de um domínio de difícil solução e análise para outro em que isso seja um pouco mais simples (ou conveniente).



Pierre Simon Laplace



Pierre Laplace
Matemático Francês
★ 23/03/1749
† 05/03/1827

- Organizou a Astronomia Matemática, trabalhando no estudo geométrica da mecânica clássica na forma de Cálculo. Trabalhou também em teoria da probabilidade e de campo potencial;
- Foi conde e marquês do império francês;
- Sua obra-prima: *Méchanique Céleste*. Esteve também próximo de definir os buracos negros (100 anos antes!);
- Desenvolveu a ferramenta base de nosso curso!

A Transformada de Laplace

- A *Transformada de Laplace* para uma variável temporal $y(t)$ é definida como

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st}dt. \quad (5)$$

- A *Transformada Inversa de Laplace* para uma variável complexa $Y(s)$ é definida como

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \int_0^{\infty} Y(s)e^{st}ds. \quad (6)$$

- A Transformada de Laplace é um operador linear (respeita o teorema da superposição) e goza de propriedades que a torna extremamente útil.

Transf. de Laplace – teorema da derivação real

- Seja $y(t)$ uma função real e n vezes diferenciável. Sejam $y(0)$, $\dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ suas condições iniciais. Então:

$$\mathcal{L}\{d^n y(t)/dt^n\} = s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}\dot{y}(0) - \dots - y^{(n-1)}(0) \quad (7)$$

- Exemplo 1: $\mathcal{L}\{dy(t)/dt\} = sY(s) - y(0);$
- Exemplo 2: $\mathcal{L}\{d^2y(t)/dt^2\} = s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0).$

Transf. de Laplace – teorema do valor final

- Seja $y(t)$ uma função real para a qual o limite $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ seja finito. Então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s). \quad (8)$$

- Exemplo: Seja a função degrau unitário $u(t)$. Pode-se mostrar que a sua transformada de Laplace é dada por $U(s) = 1/s$. Então:

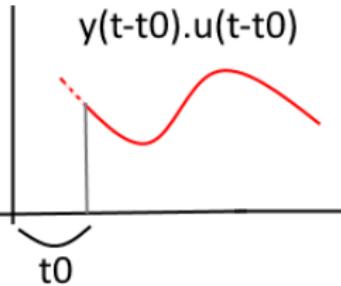
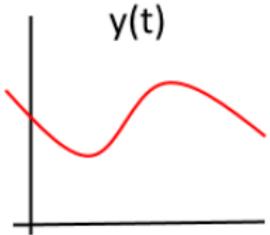
$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sU(s) = s \cdot \frac{1}{s} = 1.$$

Transf. de Laplace – teorema da translação real

- Seja $y(t)$ uma função real. Seja y transladado no tempo por um intervalo $t_0 > 0$, resultando em $y(t - t_0) \cdot u(t - t_0)$. Então:

$$\mathcal{L}\{y(t - t_0) \cdot u(t - t_0)\} = Y(s) \cdot e^{-t_0 s} \quad (9)$$

- Exemplo 4:



$Y(s)$

$Y(s) \cdot \exp(-s \cdot t_0)$

Transf. de Laplace – teorema da convolução

- Da teoria de sistemas lineares, é sabido que um sinal $x(t)$ aplicado a um sistema com resposta ao impulso $g(t)$ produz uma saída $y(t)$ dada pela integral de convolução

$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_0^t x(t-\tau)g(\tau) d\tau. \quad (10)$$

- O teorema da convolução estabelece que

$$Y(s) = \mathcal{L}\{x(t) * g(t)\} = X(s) \cdot G(s). \quad (11)$$

- Note que a relação entrada-saída de um sistema linear, escrita como uma integral no tempo, é convertida para um produto no domínio s . Isto é muito vantajoso!!

Função de transferência

- Seja uma equação diferencial linear com todas as condições iniciais nulas. Aplicando-se o teorema da derivação real, os termos em $y(0)$, $\dot{y}(0)$, ..., $y^{(n-1)}(0)$ são desprezados;
- Isso permite obter uma relação racional algébrica (em s) para a relação entrada-saída do sistema. Esta relação é chamada de *função de transferência*;
- Para o sistema massa-mola-amortecedor, temos que

$$\mathcal{L}\{M\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + Kx(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (12)$$

- Aplicando a transformada de Laplace e suas propriedades, temos:

$$X(s) \cdot [Ms^2 + bs + K] = F(s)$$

Função de transferência

$$X(s) \cdot [Ms^2 + bs + K] = F(s)$$

- Após fatoração, chega-se a

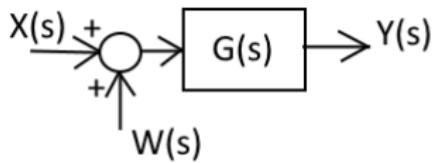
$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + K}, \quad (14)$$

que é a função de transferência entrada-saída para o sistema massa-mola-amortecedor.

- Note que esta é uma relação algébrica (em s). Além disso, ela permite o estudo das características básicas do sistema sem a solução explícita da equação diferencial ordinária;
- Se a solução no tempo for necessária, ela pode ser obtida da transformada inversa de Laplace.

Diagrama de blocos

- Baseado na função de transferência do sistema e do teorema da convolução, as relações entre os sinais de sistemas interconectados se reduzem a relações algébricas (em s);
- Exemplos:



$$Y(s) = G(s) \cdot [X(s) + W(s)]$$



$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

Exercícios

E1 Baseado na definição da transformada de Laplace, mostre que $\mathcal{L}\{u(t)\} = 1/s$.



E2 Seja $x(t) = 5(1 - e^{-t})$, $t \geq 0$. Encontre a transformada de Laplace $X(s)$ (use a tabela). Use o teorema do valor final para encontrar $x(t \rightarrow \infty)$.



E3 Considere a equação diferencial

$$\ddot{y}(t) = -2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 1,2y(t) - 0,3\dot{u}(t) + 3u(t),$$

supondo condições iniciais nulas, encontre a função de transferência de $U(s)$ para $Y(s)$.

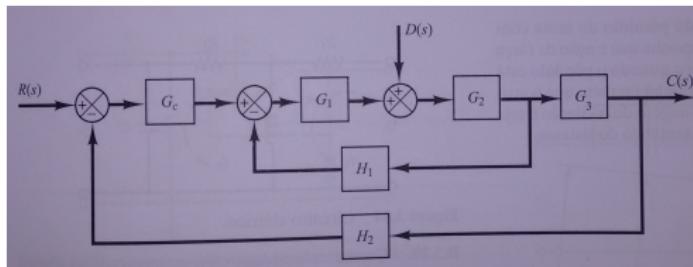


E4 Mostre que $\mathcal{L}\{\delta(t - a)\} = e^{-as}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Exercícios

E5

(Ogata, 4a. Ed., B.3.7) Encontre as funções de transferência $C(s)/R(s)$ e $C(s)/D(s)$ no diagrama de blocos abaixo



E6

Seja o sinal rampa unitária definido como

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$$

Note que $u(t) = \dot{r}(t)$. Encontre analiticamente a transformada de Laplace de $r(t)$ (resolva a integral!) e, com isso, mostre a validade do teorema da derivação real.

Controlando um sistema dinâmico

- Como visto anteriormente, um sistema entrada-saída tem comportamento definido por suas características dinâmicas, essas expressas por suas equações diferenciais;
- Entretanto, quase sempre estamos interessados que o sistema tenha um determinado comportamento. Tal comportamento está diretamente relacionado com a utilização que será dada ao sistema;
- Dessa forma, precisamos criar uma estratégia de atuação sistemática sobre o sistema, de forma que seu comportamento seja compatível com o desejado;
- A esta estratégia, damos o nome de *controle* do sistema.

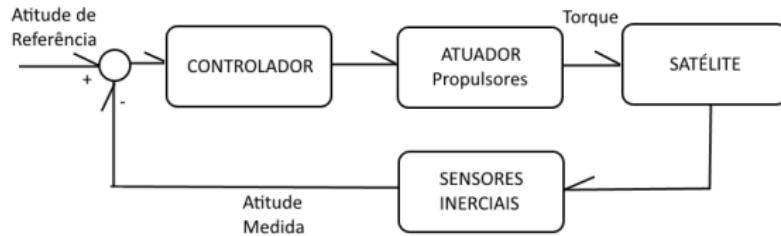
Controle em malha fechada

- A forma mais natural de realizar tal controle é através de um sistema em malha fechada;
- A ideia é – baseado em um perfil de referência – medir os possíveis desvios entre a saída real do sistema e tal perfil e prover uma ação sobre a entrada do sistema de forma que tais desvios sejam minorados;
- Para tal tarefa, o sistema de controle deve possuir alguns elementos específicos, tais como sensores, atuadores, o próprio controlador, etc.

Elementos de um sistema de controle

- Sistema ou planta: que é o elemento ou fenômeno físico que se deseja controlar;
- Sensores: elementos capazes de medir o estado do sistema. Provêem as saídas sobre as quais imprime-se o comportamento desejado;
- Referência: que é o perfil físico desejado para uma determinada saída;
- Atuadores: elementos físicos que geram a ação de controle sobre o sistema. São eles que transformam as ordens matemáticas do controlador em ações efetivas sobre o sistema;
- Controlador: elemento que – baseado em leis e critérios específicos – calcula a ação de controle necessária para que a saída do sistema se aproxime do perfil desejado.

Um exemplo: controle de satélite



O problema de controle

O projeto do controlador passa pela avaliação de vários critérios de desempenho, entre eles:

- estabilidade;
- resposta transitória;
- erro em estado estacionário;
- rejeição a perturbações externas;
- robustez a variações dos parâmetros e erros de modelagem.

O controle digital

- Dado alto poder de processamento disponível atualmente, praticamente todas as aplicações de controle são implementadas em sistemas microprocessados;
- Além das vantagens de custo e peso, os sistemas microprocessados permitem fácil modificação das leis de controle implementadas – pela simples mudança do software embarcado;
- O projeto de controle digital se baseia na maioria dos conceitos elaborados para o caso contínuo. Entretanto, há importantes peculiaridades que precisam ser observadas;
- Neste curso, discutiremos boa parte dessa peculiaridades e formaremos os subsídios teóricos e práticos para a elaboração de uma boa lei de controle.

Características do controle digital – quantização

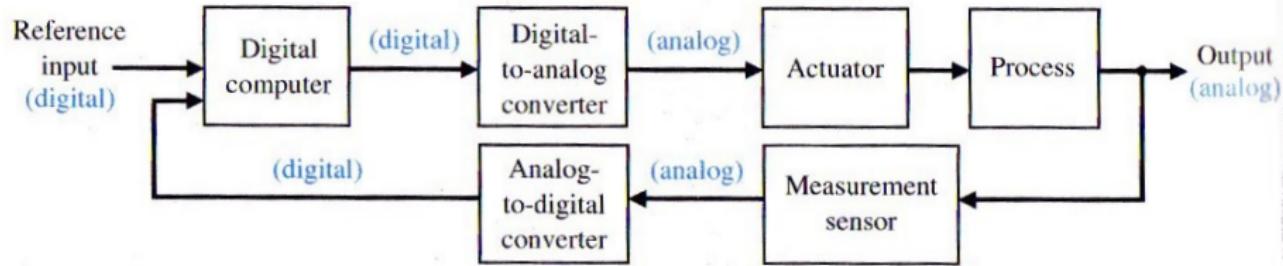
- Os sistemas microprocessados operam com lógica binária com um número específico de bits para representação de um número real;
- Assim, diferentemente do caso contínuo, todas as variáveis que circulam no controlador são discretas;
- Isso implica que há uma precisão máxima específica na representação de um número real. A essa característica dá-se o nome de *quantização*;
- Por exemplo, considere uma variável física contínua no intervalo de $\pm 10V$. Considerando que representaremos essa variável por um número binário de 16 bits, teríamos $2^{16} = 65536$ níveis no intervalo $\pm 10V$. Assim, a maior precisão possível na representação desta variável através do sistema discreto seria de
 $3,5 \times 10^{-4}V$.

Características do controle digital – amostragem

- As instruções dos sistemas microprocessados trabalham com uma taxa cíclica, definida pelo *clock* do sistema. Note, em sistema digital, fazer conta leva tempo!
- O mesmo vale para leitura e escrita de variáveis. Cada uma dessas operações é feita de forma cíclica em um intervalo de tempo específico conhecido como *taxa de amostragem*;
- Dessa forma, a variável física é coletada por um sistema digital conhecido como *conversor analógico-digital – A/D*, sempre em intervalos de tempo fixos;
- Similarmente, a variável discreta é convertida para analógica (resguardada a quantização do sistema) e disponibilizada na saída do sistema digital através de um *conversor digital-analógico – D/A*, sempre em intervalos de tempo fixos;

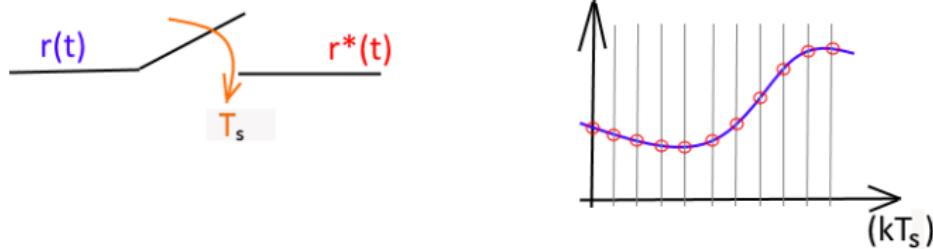
Visão geral de um sistema de controle digital

Assim, o sistema de controle digital tem sempre uma estrutura similar à mostrada a seguir (Dorf & Bishop, 9a. Ed., Fig. 13.1):



O amostrador ideal

- O processo de amostragem de um sinal contínuo (via conversor A/D) pode ser representado por uma chave de ação instantânea. A cada intervalo de amostragem, a chave pulsa, colelando uma amostra do sinal de entrada



- Assim, a variável amostrada pode ser escrita como

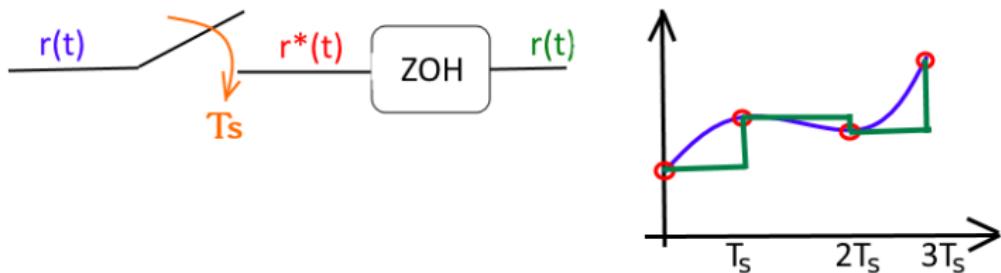
$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT_s) \delta(t - kT_s).$$

O Retentor de Ordem Zero (ZOH)

- Os sinais amostrados são utilizados para processamento digital. Após calculadas as ações de controle necessárias, essas precisam ser aplicadas ao sistema;
- Entretanto, os sinais amostrados são impulsivos, em momentos específicos do tempo (dados pela taxa de amostragem). Como sinais impulsivos não transferem energia útil ao sistema, os sinais amostrados não podem ser diretamente aplicados;
- Então, o conversor D/A precisa prover uma forma de reter o valor de saída para um tempo de amostragem, até o próximo instante de amostragem;
- Há várias formas de se fazer isso, mas a mais difundida é o *retentor de ordem zero* – (*zero order hold* – ZOH do inglês).

O Retentor de Ordem Zero (ZOH)

- Em resumo, o ZOH age conforme a seguir:



- Note que, para cada intervalo de amostragem, a saída do ZOH é dada pelo sinal amostrado no tempo kT_s ($r(kT_s)$), multiplicado pelo sinal pulso unitário de duração T_s :

$$p(t, T_s) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 \leq t \leq T_s \\ 0, & t > T_s \end{cases}$$

O Retentor de Ordem Zero (ZOH)

- Note também que

$$p(t, T_s) = u(t) - u(t - T_s), \quad (16)$$

ou seja, a subtração de um degrau unitário em $t = 0$, com um degrau unitário em $t = T_s$;

- Tomando a transformada de Laplace, temos:

$$ZOH(s) = \mathcal{L}\{p(t, T_s)\} = \mathcal{L}\{u(t) - u(t - T_s)\}; \quad (17)$$

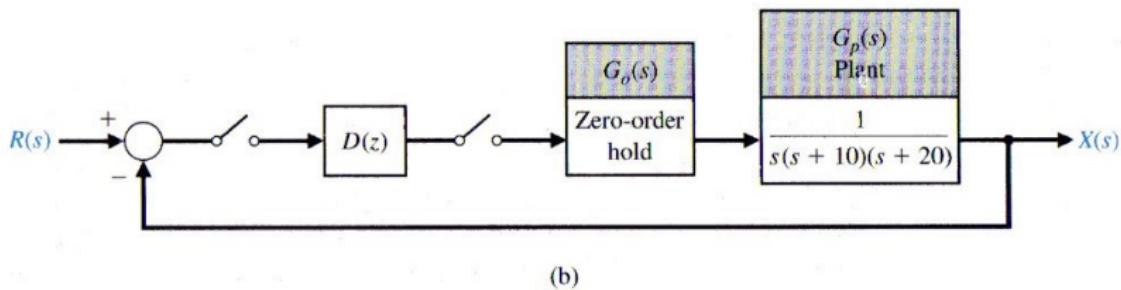
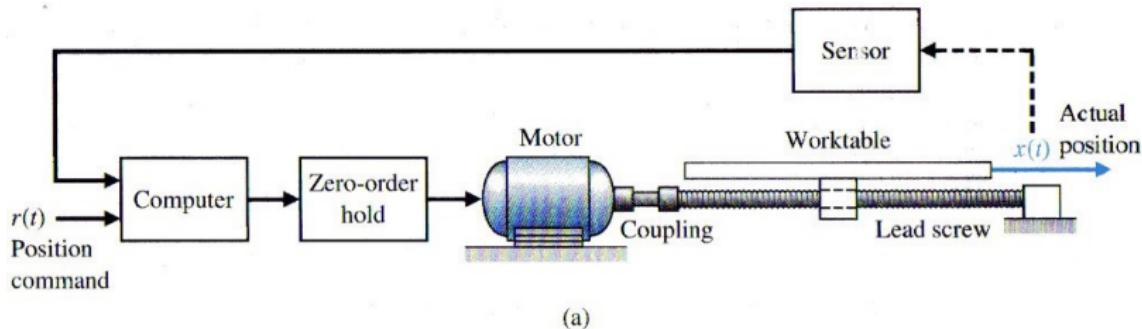
- Então, a função de transferência do retentor de ordem zero é dada por

$$ZOH(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-T_ss}}{s} = \frac{1 - e^{-T_ss}}{s}.$$

(18)



Diagrama de blocos de um sistema de controle digital



Dorf, 9a. Ed., Fig 13-24

Exercícios

- E7** Pense em um carro como o sistema a ser controlado e você como o controlador deste sistema. Enumere os elementos deste sistema de controle, detalhando as tarefas e “sinais” manipulados por cada elemento.
- ◆
- E8** Um bom sistema de aquisição de dados moderno (conversor A/D) trabalha com 24 bits e entrada limitada a $\pm 10V$. Calcule a precisão máxima deste sistema na representação discreta da variável física de tensão.
- ◆
- E9** Seja o sinal $f(t) = t^2$, $t \geq 0$. Calcule os dez primeiros termos do somatório do sinal $f^*(t)$ para taxas de amostragem de 1, 10 e 100Hz.
- ◆

Exercícios

- E10** Considere que o sinal f^* anterior passe por um retentor de ordem zero. Calcule o erro entre a saída do ZOH e a variável física real $f(t)$ para $t = 0,75$, considerando cada uma das taxas de amostragem anteriores.
- ◊
- E11** Quase nunca a taxa de amostragem de um sistema de controle digital (no máximo de algumas centenas de Hz) será da mesma ordem do clock do respectivo sistema microprocessado (de milhões a bilhões de Hz). Por que?
- ◊
- E12** Considere o problema de se fazer um sistema de controle digital de uma mesa de trabalho, como apresentado na pág. 31. Cite as diferenças entre o diagrama de blocos proposto e aquele apresentado na pág. 26. Comente, então, qual estratégia você preferiria para implementar na prática seu sistema de controle e por que?

Transformada Z

Mestres da Seção



Witold Hurewicz (1904–1956)

Importante matemático russo-polonês. Desenvolveu muitos estudos em topologia, álgebra e teoria de funções. Falante fluente de cinco línguas e apreciador de música e arqueologia, faleceu de forma precoce ao cair de uma pirâmide maia em uma viagem ao México.

[Ele sedimentou a teoria da Transformada Z e sua aplicação a sinais e sistemas discretos.](#) O nome da transformada baseia-se na variável z utilizada nos seus textos.

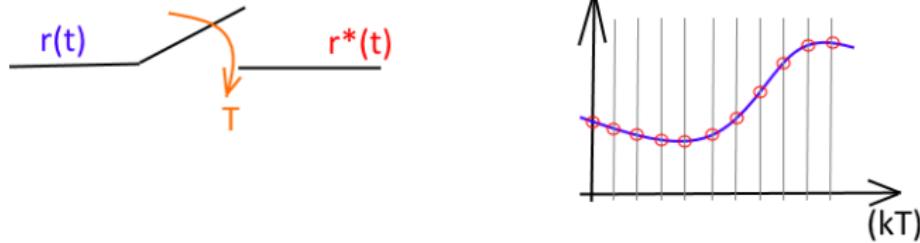
Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)

Grande matemático francês, promoveu profundas contribuições e influenciou imensamente seus contemporâneos e sucessores. De uma genialidade incomum, propôs avanços nas áreas de teoria ondulatória, teoria dos números e análise. [Praticamente criou a base teórica da análise de funções de variável complexa.](#) Uma curiosidade é que Cauchy, juntamente com outros 71 cientistas franceses (do calibre de Fresnel, Coulomb, Lagrange, Laplace, etc.), tem seu nome gravado na Torre Eiffel, como uma homenagem de seu construtor, Gustave Eiffel.



Transformada Z: definição

- Já vimos que a amostragem é o recurso para obtermos variáveis discretas no tempo, necessárias para o controle digital;
- Resgatemos essa questão analisando a figura



- A variável amostrada com tempo T_S pode ser escrita como

$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT_S)\delta(t - kT_S).$$

Transformada Z: definição

- Note que $\mathcal{L}\{f(t)\delta(t)\} = f(0)$;
- Então, aplicando a transformada de Laplace a $r^*(t)$ anterior, temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{r^*(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} r(kT_S)\delta(t - kT_S)\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} r(kT_S)e^{-k \cdot s \cdot T_S};\end{aligned}\tag{20}$$

- Tomando a seguinte mudança de variável

$$z = e^{sT}\tag{21}$$

definimos o mapeamento do plano-s para um outro plano-z.
Isso dá origem à *transformada Z*.

Transformada Z: definição

- Então,

$$\mathcal{Z}\{r(t)\} = \mathcal{Z}\{r^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT_S)z^{-k}; \quad (22)$$

- Dessa forma, a transformada Z de uma função $f(t)$ é definida como:

$$\mathcal{Z}\{f(t)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_S)z^{-k}. \quad (23)$$

Seguindo nossa notação, $f[k] = f(t)|_{t=kT_S}$.

Transformada Z: exemplo

- Seja o sinal degrau unitário $u(t)$. Sua transformada Z, para um tempo de amostragem T , é dada por

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}; \quad (24)$$

- Do estudo de séries geométricas infinitas, temos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (ax)^k = \frac{1}{1-ax}, \quad (25)$$

se $|ax| < 1$;

- Então:

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}.$$

Sinais discretos de interesse

- Seja $a \in \mathbb{Z}$. O sinal *degrau unitário discreto* $u[k - a]$ é definido como

$$u[k - a] = \begin{cases} 0, & k < a \\ 1, & k \geq a \end{cases}; \quad (27)$$

- O sinal *pulso unitário* (Também chamado de delta de Kronecker) $\delta[k - a]$ é definido como

$$\delta[k - a] = \begin{cases} 0, & k \neq a \\ 1, & k = a \end{cases}; \quad (28)$$

- Uma propriedade muito importante da função pulso unitário é a seguinte. Seja $f[k]$ uma sequência discreta. Então:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k - a]f[k] = f[a].$$

Propriedades da Transf. Z – linearidade

- Da mesma forma que a transformada de Laplace, a transformada Z é um operador linear;
- Seja $f[k] = ae_1[k] \pm be_2[k]$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Então:

$$F(z) = aE_1(z) \pm bE_2(z). \quad (30)$$

Propriedades da Transf. Z – translação

- Sejam $n \in \mathbb{N}^*$, e a sequência discreta $e[k]$.

- I) A transformada Z da translação real em atraso $e[k - n]u[k - n]$ é

$$\mathcal{Z}\{e[k - n]u[k - n]\} = z^{-n}E(z). \quad (31)$$

- II) A transformada Z da translação real em avanço $e[k + n]u[k]$ é

$$\mathcal{Z}\{e[k + n]u[k]\} = z^n \left[E(z) - \sum_{k=0}^{n-1} e[k]z^{-k} \right]. \quad (32)$$

- Sejam a sequência discreta $f[k]$ e $a \in \mathbb{Z}$. Então, a transformada Z da translação complexa $e^{ak}f[k]$ vale

$$\mathcal{Z}\{e^{ak}f[k]\} = F(z)|_{z=ze^{-a}} = F(ze^{-a}).$$

Propriedades da Transf. Z – teoremas do valor inicial e final

Seja a sequência discreta $f[k]$ e sua transformada $F(z)$:

- O valor inicial de $f[k]$ é dado por

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z); \quad (34)$$

- O valor final de $f[k]$ é dado por

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)F(z), \quad (35)$$

dado que os limites existam.

Propriedades da Transf. Z – outras

Sejam as sequências discretas $f[k]$ e $g[k]$ e suas transformadas $F(z)$ e $G(z)$:

- i) Reversão no tempo: $\mathcal{Z}\{f[-k]\} = F(z^{-1})$;
- ii) Multiplicação por exponencial: $\mathcal{Z}\{\alpha^{-k}f[k]\} = F(\alpha z)$;
- iii) Diferenciação complexa: $\mathcal{Z}\{kf[k]\} = dF(z)/dz$;
- iv) Conjugação complexa: $\mathcal{Z}\{f^*[k]\} = F^*(z^*)$;
- v) Convolução: $f[k] * g[k] = F(z)G(z)$.

Tabela de transformadas - parte I

$f(t); f[k] = f(t = kT_s)$	$F(s)$	$F(z)$
$\delta(t - nT_s)$	e^{-nsT_s}	z^{-n}
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{(z-1)}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{zT_s}{(z-1)^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{(s+a)}$	$\frac{z}{(z-e^{-aT_s})}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{z(e^{-aT_s}-e^{-bT_s})}{(z-e^{-aT_s})(z-e^{-bT_s})}$
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{z \cdot \text{sen}(aT_s)}{z^2-2z\cos(aT_s)+1}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{z(z-\cos(aT_s))}{z^2-2z\cos(aT_s)+1}$
$\frac{1}{b}e^{-at}\text{sen}(bt)$	$\frac{1}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{(1/b)ze^{-aT_s}\text{sen}(bT_s)}{z^2-2ze^{-aT_s}\cos(bT_s)+e^{-2aT_s}}$
$e^{-at}\cos(bt)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT_s}\cos(bT_s)}{z^2-2ze^{-aT_s}\cos(bT_s)+e^{-2aT_s}}$



Tabela de transformadas - parte II

$f(t); f[k] = f(t = kT_s)$	$F(s)$	$F(z)$
$t^{\gamma-1}, \gamma \in \mathbb{N}$	$\frac{(\gamma-1)!}{s^\gamma}$	$\lim_{a \rightarrow 0} (-1)^{\gamma-1} \frac{\partial^{\gamma-1}}{\partial a^{\gamma-1}} \left[\frac{z}{z-e^{-aT_s}} \right]$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{z(1-e^{-aT_s})}{(z-1)(z-e^{-aT_s})}$
$1 - (1+at)e^{-at}$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT_s}} - \frac{zaT_s e^{-aT_s}}{(z-e^{-aT_s})^2}$
$\frac{1}{ab} + \frac{e^{-at}}{a(a-b)} + \frac{e^{-bt}}{b(b-a)}$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{z(A_1 z + B_1)}{(z-1)(z-e^{-aT_s})(z-e^{-bT_s})}$
$1 - e^{-at} (\cos(bt) + \frac{a}{b} \sin(bt))$	$\frac{a^2 + b^2}{s[(s+a)^2 + b^2]}$	$\frac{z(A_2 z + B_2)}{(z-1)(z^2 - 2ze^{-aT_s} \cos(bT_s) + e^{-2aT_s})}$

$$A_1 = \frac{b(1-e^{-aT_s}) - a(1-e^{-bT_s})}{ab(b-a)}$$

$$B_1 = \frac{-be^{-bT_s}(1-e^{-aT_s}) + ae^{-aT_s}(1-e^{-bT_s})}{ab(b-a)}$$

$$A_2 = 1 - e^{-aT_s} \left(\cos(bT_s) + \frac{a}{b} \sin(bT_s) \right)$$

$$B_2 = e^{-2aT_s} + e^{-aT_s} \left(\frac{a}{b} \sin(bT_s) - \cos(bT_s) \right)$$

Exercícios

E13 Seja $f[k] = e^{-akT_s}$. Usando a definição de transformada Z e séries geométricas infinitas, mostre que

$$F(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT_s}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT_s}}, \quad (36)$$

se $|e^{-aT_s}z^{-1}| < 1$.



E14 Prove as relações para a propriedade de translação real da transformada Z (de avanço e atraso).



E15 Sejam $f[k] = k$ e $a \in \mathbb{Z}$. Pode-se mostrar que $F(z) = z/(z-1)^2$. Usando a propriedade de translação complexa, mostre que:

$$\mathcal{Z}\{ke^{ak}\} = \frac{e^az}{(z-e^a)^2}.$$

Exercícios

E16 Prove do teorema do valor final da transformada Z.



E17 Seja uma sequência $f[k]$ para a qual $F(z) = z/(z-1)^2$:

- Encontre $f[k \rightarrow \infty]$;
- Encontre $\mathcal{Z}\{f[k-2]u[k-2]\}$;
- Encontre $\mathcal{Z}\{f[k+2]u[k]\}$.



E18 Considere uma função $f(t)$ para a qual $F(s) = 1/(s^2 + 3s)$. Usando a tabela de transformadas, encontre $F(z)$ se $T_s = 0,1$.

Exercícios

E19 Seja a função de transferência contínua

$$G(s) = \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)}. \quad (38)$$

Sabendo que $T_s = 0,1$, ache $G(z)$.



E20 Aplicando as propriedades e a tabela da Transformada Z, encontre $F(z)$ se

$$f[k] = 3e^{-2T_s(k-3)}u[k-3] + 2\sin(-3kT_s). \quad (39)$$



Transformada Z inversa: definição

- A transformada Z inversa é definida como:

$$e[k] = \frac{1}{2j\pi} \oint_{\Gamma} E(z)z^{k-1} dz, \quad (40)$$

ou seja, a integral de linha complexa no plano-z, ao longo de um caminho fechado Γ que enlaça todos os polos finitos de $E(z)z^{k-1}$ (ou seja, os pontos que fazem com esta expressão vá para $\pm\infty$);

- Além da definição, vamos ver algumas formas de se obter a inversa.

Método de série de potências

- Quando $F(z)$ é expressa na forma racional, podemos obter $f[k]$ através da divisão numerador/denominador. Esse método é chamado de série de potências (e também é conhecido como *divisão longa*);
- Vamos ilustrá-lo através de um exemplo. Seja:

$$E(z) = \frac{1}{z-2}. \quad (41)$$

Dividindo o numerador pelo denominador, obtemos...

Método de série de potências

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 \underline{1 - 2z^{-1}} \\
 \frac{|z - 2}{z^{-1} + 2z^{-2} + 4z^{-3} + 8z^{-4} + 16z^{-5} + \dots} \\
 \underline{2z^{-1}} \\
 \underline{2z^{-1} - 4z^{-2}} \\
 \underline{4z^{-2}} \\
 \underline{4z^{-2} - 8z^{-3}} \\
 \underline{8z^{-3}} \\
 \underline{8z^{-3} - 16z^{-4}} \\
 \underline{16z^{-4}} \\
 \underline{16z^{-4} - 32z^{-5}} \\
 \dots
 \end{array}$$

- Então, $E(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + 4z^{-3} + 8z^{-4} + 16z^{-5} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} z^{-k}$

Método de série de potências

$$E(z) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} z^{-k}$$

- Mas a transformada Z para um $e[k]$ genérico é

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e[k] z^{-k} = e(0) + \sum_{k=1}^{\infty} e[k] z^{-k};$$

- Comparando ambas as equações, vemos que elas se igualam se $e(0) = 0$. Então,

$$e[k] = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ 2^{k-1}, & k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Expansão em frações parciais

- Observando a tabela de transformadas, vemos que todas as expressões de $F(z)$ apresentam-se na forma racional;
- Um outro método de encontrar a inversa de $F(z)$ é trabalhar esta expressão até que ela apresente um formato igual ao presente na tabela. Assim, $f[k]$ é coletada diretamente da mesma;
- Mas antes de apresentarmos a técnica, vamos discutir a expansão em frações parciais.

Expansão em frações parciais - polos distintos

- Considere uma função racional $G(z)$ do tipo

$$G(z) = \frac{f(z)}{(z + a_1)(z + a_2)(z + a_3) \cdots (z + a_n)}; \quad (42)$$

- Desejamos escrever $G(z)$ na forma de uma soma de frações do tipo:

$$G(z) = \frac{l_1}{(z + a_1)} + \frac{l_2}{(z + a_2)} + \cdots + \frac{l_n}{(z + a_n)}; \quad (43)$$

Expansão em frações parciais - polos distintos

- A solução mais elegante para este problema vem da teoria de funções de variável complexa, que estabelece que se todos a_1, \dots, a_n são distintos, então:

$$I_k = G(z)(z + a_k) \Big|_{z=-a_k}, \quad (44)$$

onde I_k são chamados **resíduos** de $G(z)$;

- Por exemplo, para

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{I_1}{z-1} + \frac{I_2}{z-2}, \quad (45)$$

(i) $I_1 = \frac{1}{(z-1)(z-2)}(z-1) \Big|_{z=1} = \frac{1}{(z-2)} \Big|_{z=1} = -1;$

(ii) $I_2 = \frac{1}{(z-1)(z-2)}(z-2) \Big|_{z=2} = \frac{1}{(z-1)} \Big|_{z=2} = 1;$

Expansão em frações parciais - polos repetidos

- Considere agora uma função $G(z)$ do tipo:

$$G(z) = \frac{f(z)}{(z + a_1)^m(z + a_2)(z + a_3) \cdots (z + a_n)}, \quad (46)$$

com $m > 1$, $m \in \mathbb{N}$. Note que o termo $(z + a_1)$ possui multiplicidade m ;

- A expansão em frações parciais para este caso fica:

$$G(z) = \frac{I_1}{(z + a_1)} + \frac{I_2}{(z + a_1)^2} + \cdots + \frac{I_m}{(z + a_1)^m} + G'(z); \quad (47)$$

- Os coeficientes dos termos com multiplicidade são calculados pela fórmula:

$$I_k = \frac{1}{(m-k)!} \left. \frac{d^{m-k}(z-a_1)^m G(z)}{dz^{m-k}} \right|_{z=-a_1}.$$

Expansão em frações parciais - polos repetidos

- Por exemplo, seja

$$G(z) = \frac{1}{z(z+2)^2} = \frac{l_0}{z} + \frac{l_1}{z+2} + \frac{l_2}{(z+2)^2}; \quad (49)$$

Então:

i) $l_0 = zG(z)|_{z=0} = \frac{1}{(z+2)^2}|_{z=0} = \frac{1}{4};$

ii) $l_2 = (z+2)^2 G(z)|_{z=-2} = \frac{1}{z}|_{z=-2} = -\frac{1}{2};$

iii) $l_1 = \frac{1}{1!} \frac{d(z+2)^2 G(z)}{dz}|_{z=-2} = \frac{d1/z}{dz}|_{z=-2} = -\frac{1}{z^2}|_{z=-2} = -\frac{1}{4}.$

Obtendo a inversa por frações parciais

- O procedimento para obtenção da transformada Z inversa para uma função racional $G(z)$ é, portanto, escrever esta função na forma de frações parciais e associar a cada um dos termos um par na tabela de transformadas;
- Vejamos isso através de um exemplo. Seja

$$G(z) = \frac{z}{(z-a)(z-1)}; \quad (50)$$

- A função acima é racional. Observando a tabela de transformadas, vemos que todas as formas $F(z)$ possuem z no numerador. Então, vamos criar uma função auxiliar $\tilde{G}(z)$ tal que

$$\tilde{G}(z) = \frac{G(z)}{z} = \frac{1}{(z-a)(z-1)};$$

Obtendo a inversa por frações parciais

- Aplicando a expansão em frações parciais a $\tilde{G}(z)$, chegamos a:

$$\tilde{G}(z) = \frac{1}{(z-a)(z-1)} = \frac{1/a-1}{z-a} + \frac{1/1-a}{z-1}; \quad (52)$$

- Distribuindo z entre os termos e fatorando $1/1-a$, temos:

$$G(z) = \frac{1}{1-a} \cdot \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-a} \right); \quad (53)$$

- Analisando-se a tabela de transformadas, vemos que dois pares se assemelham muito a cada um dos termos de $G(z)$ acima, quais sejam

$$u[k] \Leftrightarrow \frac{z}{z-1}, \quad e^{-\alpha k T_s} \Leftrightarrow \frac{z}{z - e^{-\alpha T_s}};$$

Transformada Z inversa por frações parciais

- Mas note que $a = e^{-\alpha T_s}$. Então, $\ln(a) = -\alpha T_s$. Isso implica que:

$$f[k] = e^{-k\alpha T_s} = e^{k \ln(a)} = (e^{\ln(a)})^k = a^k; \quad (55)$$

- Sabendo que $u[k] = 1$, $\forall k \geq 0$, e usando o resultado acima, temos:

$$g[k] = \frac{1}{1-a} \cdot (1-a^k), \quad (56)$$

que é a transformada Z inversa da expressão original

$$G(z) = \frac{z}{(z-a)(z-1)}.$$

Cálculo pela definição

- O cálculo da transformada Z pode ser feito também diretamente pela sua definição, ou seja, resolvendo a integral

$$e[k] = \frac{1}{2j\pi} \oint_{\Gamma} E(z)z^{k-1} dz.$$

Mas como fazer isso?

- A solução vem do estudo de funções de variável complexa, cujo grande nome foi Cauchy;
- Antes de mostrar a solução, devemos então estabelecer como se resolvem integrais de variável complexa!

Teorema dos Resíduos de Cauchy



Teorema (dos Resíduos de Cauchy)

Seja uma função de variável complexa $f(z)$ holomorfa (derivável no sentido complexo) no interior de uma região delimitada por um caminho fechado γ . Suponha que γ enlace N singularidades (polos) de $f(z)$, z_1, z_2, \dots, z_N . Então,

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi j \sum_{l=1}^N \text{Res}\{f(z), z_l\} \quad (57)$$

onde $\text{Res}\{f(z), z_l\}$ denota o resíduo de $f(z)$ com relação à singularidade z_l .

Prova: omitida. A demonstração passa pela aplicação do Teorema de Green (lembra?) a funções de variável complexa. Fica aos interessados.

Solução de integrais complexas ☹☹

- Ok! Vamos tentar resolver umas integrais complexas usando este teorema para você ver que o “bixo” não é tão feio assim...
- Comecemos pelo caso mais bobo. Resolva a integral

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} z^{k-1} dz \quad (58)$$

com $k \in \mathbb{N}$ e γ enlaçando todas as singularidades (polos) de z^{k-1} nestas condições.

- Olha: se $k > 0$, z^{k-1} não possui singularidade (pontos que fazem $z^{k-1} \rightarrow \pm\infty$), certo? Então não há resíduos e o somatório do Teorema dá ZERO.

Solução de integrais complexas ☹☹

- Se $k = 0$, estamos resolvendo a integral

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} z^{-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \left[2\pi j \sum_{l=1}^N \text{Res}\{\frac{1}{z}, z_l\} \right]$$

- Mas $\frac{1}{z}$ possui uma única singularidade em $z = 0$. E supondo que γ esteja enlaçando essa singularidade, temos,

$$2\pi j \cdot \text{Res}\{\frac{1}{z}, z = 0\} = 2\pi j \cdot \frac{1}{z} \Big|_{z=0} = 2\pi j;$$

- Então

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} z^{k-1} dz = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

Cálculo da transformada Z inversa 😊😊

- Aí você vai me perguntar: “o que diabos eu vou fazer com isso?”
Uai?? Resolver transformada Z inversa, só!?
- Exemplo: considere $F(z)$ como:

$$F(z) = \frac{z \operatorname{sen}(aT_s)}{z^2 - 2 \cos(aT_s)z + 1}. \quad (59)$$

Encontre o sinal discreto $f[k]$ que dá origem a esta transformada Z.

- Pela definição de transformada Z inversa, temos que resolver

$$f[k] = \frac{1}{2j\pi} \oint_{\Gamma} \frac{z \operatorname{sen}(aT_s)}{z^2 - 2 \cos(aT_s)z + 1} \cdot z^{k-1} dz.$$

Cálculo da transformada Z inversa 😊😊

- Mas isso é igual a

$$\begin{aligned}
 f[k] &= \frac{1}{2j\pi} \oint_{\Gamma} \frac{z^k \operatorname{sen}(aT_s)}{z^2 - 2 \cos(aT_s)z + 1} dz \\
 &= \sum_{l=1}^N \operatorname{Res} \left\{ \frac{z^k \operatorname{sen}(aT_s)}{z^2 - 2 \cos(aT_s)z + 1}, z_l \right\};
 \end{aligned}$$

- A função $F(z)z^{k-1}$ tem duas singularidades finitas em $z_{1,2} = \cos(aT_s) \pm j\operatorname{sen}(aT_s) = e^{\pm jaT_s}$ (mostre);
- Então, calculemos os dois resíduos.

Cálculo da transformada Z inversa ☺ ☺

$$\begin{aligned}
 Res_{z_1} &= \frac{z^k \operatorname{sen}(aT_s)}{(z - e^{jaT_s})(z - e^{-jaT_s})} \cdot (z - e^{jaT_s}) \Big|_{z=e^{jaT_s}} \\
 &= \frac{(e^{jaT_s})^k \operatorname{sen}(aT_s)}{(e^{jaT_s} - e^{-jaT_s})} \\
 &= \frac{e^{jkaT_s} \cdot \operatorname{sen}(aT_s)}{2j \cdot \operatorname{sen}(aT_s)} \\
 &= \frac{e^{jkaT_s}}{2j}.
 \end{aligned} \tag{60}$$

Cálculo da transformada Z inversa ☺ ☺

$$\begin{aligned}
 Res_{z_2} &= \frac{z^k \operatorname{sen}(aT_s)}{(z - e^{jaT_s})(z - e^{-jaT_s})} \cdot (z - e^{-jaT_s}) \Big|_{z=e^{-jaT_s}} \\
 &= \frac{(e^{-jaT_s})^k \operatorname{sen}(aT_s)}{(e^{-jaT_s} - e^{jaT_s})} \\
 &= \frac{e^{-jkaT_s} \cdot \operatorname{sen}(aT_s)}{-2j \cdot \operatorname{sen}(aT_s)} \\
 &= -\frac{e^{-jkaT_s}}{2j}.
 \end{aligned} \tag{61}$$

Cálculo da transformada Z inversa





- Somando-se os resíduos anteriores, temos:

$$\begin{aligned}
 f[k] &= \frac{1}{2j\pi} \oint_{\Gamma} \frac{z^k \sin(aT_s)}{z^2 - 2 \cos(aT_s)z + 1} dz \\
 &= \frac{1}{2j\pi} [2\pi j (\text{Res}_{z_1} + \text{Res}_{z_2})] \\
 &= \frac{e^{jkaT_s} - e^{-jkaT_s}}{2j} \\
 &= \sin(kaT_s)!!!
 \end{aligned} \tag{62}$$

- Agora, vai lá na tabela de Transformada Z e confere!

Equações de diferenças

- No caso discreto, a dinâmica de um sistema entrada-saída é escrita na forma de uma *equação de diferenças*:

$$y[k] = \sum_{l=1}^n a_l y[k-l] + \sum_{l=0}^m b_l u[k-l], \quad (63)$$

sendo u e y a entrada e saída do sistema respectivamente;

- Aplicando-se a transformada Z e, após algumas manipulações, a transformada Z inversa, podemos obter a sequência $y[k]$ que representa a solução da equação de diferenças dada uma entrada $u[k]$.

Equações de diferenças

- Considerando um sistema discreto expresso pela seguinte equação de diferenças

$$y[k] = 0,8187y[k-1] + 0,1813e[k-1], \quad (64)$$

proveniente de um sistema contínuo amostrado com $T_s = 0,1\text{s}$. Supondo que $e[k]$ é um degrau unitário discreto, encontre $y[k]$.

- Aplicando a transformada Z e suas propriedades, temos que:

$$Y(z) = 0,8187z^{-1}Y(z) + 0,1813z^{-1}E(z), \quad (65)$$

ou

$$Y(z) = \frac{0,1813z^{-1}}{1 - 0,8187z^{-1}}E(z) = \frac{0,1813}{z - 0,8187}E(z). \quad (66)$$

Equações de diferenças

- Se $e[k]$ é um degrau unitário discreto, $E(z) = z/z-1$, e

$$Y(z) = \frac{0,1813z}{(z-1)(z-0,8187)}; \quad (67)$$

- Mas já resolvemos uma inversa deste mesmo tipo quando estudamos a expansão em frações parciais;
- Se vc seguir os mesmos passos, chegará a

$$y[k] = 1 - e^{-0,2k}, \quad (68)$$

que é a resposta da equação de diferenças a um degrau unitário de entrada.

Função de transferência discreta

- Considere a dinâmica do sistema discreto escrita na forma de uma *equação de diferenças*:

$$y[k] = \sum_{l=1}^n a_l y[k-l] + \sum_{l=0}^m b_l u[k-l], \quad (69)$$

sendo u e y a entrada e saída do sistema respectivamente;
 Considere também que as condições iniciais são nulas ($y[k], u[k] = 0 \forall k < 0$);

- Aplicando-se a transformada Z, obtém-se

$$Y(z) = Y(z) \sum_{l=1}^n a_l z^{-l} + U(z) \sum_{l=0}^m b_l z^{-l}; \quad (70)$$

Função de transferência discreta

- Fatorando-se $Y(z)$ e $U(z)$, chegamos à forma racional

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{l=0}^m b_l z^{-l}}{1 - \sum_{l=1}^n a_l z^{-l}} \quad (71)$$

com $m \leq n$ para causalidade (a saída é consequência da entrada, e não o contrário);

- A esta forma racional dá-se o nome de *função de transferência discreta entrada-saída*;
- As raízes do polinômio numerador são chamadas *zeros* do sistema, enquanto as raízes do polinômio denominador são chamadas *polos* do sistema.

Exercícios

E21 Usando o método de série de potências, encontre $f[k]$ se

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}. \quad (72)$$



E22 Seja

$$F(z) = \frac{z^3 - 2z}{z^4 - 0,9z^2 + 0,8}. \quad (73)$$

Encontre o coeficiente do termo $f[k = 2]$.



E23 Seja

$$F(z) = \frac{z(z - 0,7)}{(z - 1)(z - 0,6)}. \quad (74)$$

Encontre a transformada Z inversa pelo método de frações parciais.

Exercícios

E24 Seja

$$F(z) = \frac{0,098z}{z^2 - 1,96z + 0,961}. \quad (75)$$

Encontre a transformada Z inversa sabendo que $T_s = 0,1\text{s}$.



E25 Seja

$$F(z) = \frac{0,0622z^2 + 0,0544z}{z^3 - 2,437z^2 + 2,1073z - 0,6703}. \quad (76)$$

Sabendo que $T_s = 0,1\text{s}$, encontre $f[k]$.



E26 Considere a equação de diferenças

$$x[k] - 1,729x[k-1] + 0,8187x[k-2] = 0,093e[k-1] + 0,087e[k-2] \quad (77)$$

para $e[k]$ um degrau unitário discreto. Encontre a solução desta equação, sabendo que $T_s = 0,1\text{s}$.

Exercícios

E27 Considere a equação de diferenças, com condições iniciais nulas:

$$x[k+3] - 2x[k+2] + x[k+1] - 0,3x[k] = f[k+1]. \quad (78)$$

- Aplique uma translação real de atraso $x[k-3]u[k-3]$ e $f[k-3]u[k-3]$ em ambos os lados da equação. Qual o objetivo disso?
- Encontre a função de transferência $X(z)/F(z)$.
- Encontre os polos e zeros da função de transferência acima.



Exercícios

E28 Seja a equação de diferenças

$$y[k] = 0,8187y[k-1] + 0,1813e[k-1]. \quad (79)$$

Considerando $e[k]$ um degrau unitário discreto, encontre os valores inicial e final da solução $y[k]$ desta equação de diferenças.



E29 Usando o Teorema dos Resíduos de Cauchy, mostre que:

a)

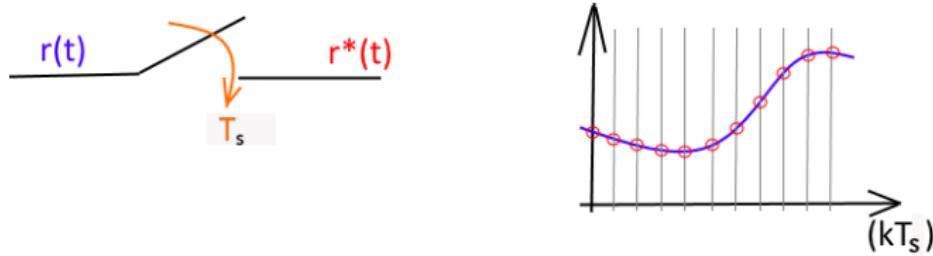
$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z(z - \cos(aT_s))}{z^2 - 2\cos(aT_s)z + 1} \right\} = \cos(kaT_s);$$

b)

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z - e^{-aT_s}} \right\} = e^{-kaT_s}.$$

Amostrador ideal: definição

- Já vimos que o amostrador ideal pode ser modelado como uma chave que pulsa instantaneamente em intervalos regulares T_s (denominado *tempo de amostragem*);



- Então, a expressão para $r^*(t)$ fica:

$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT_s) \delta(t - kT_s);$$

Amostrador ideal: definição

- Aplicando a transformada de Laplace obtemos:

$$R^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT_s) e^{-kT_ss}; \quad (81)$$

- Note que $r^*(t)$ não é um sinal físico, pois foi construído a partir de um somatório de impulsos. Daí a denominação *amostrador ideal*;
- Além disso, tal definição para o amostrador ideal apresenta problemas se o sinal $r(t)$ for descontínuo em $t = kT_s$;
- Por isso, precisamos de uma definição mais robusta e aplicável a nossos problemas práticos. É isso que estudaremos a seguir.

Amostrador ideal: definição

Definição

O sinal de saída de um amostrador ideal é definido como o sinal cuja transformada de Laplace é

$$R^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT_s) e^{-kT_ss}, \quad (82)$$

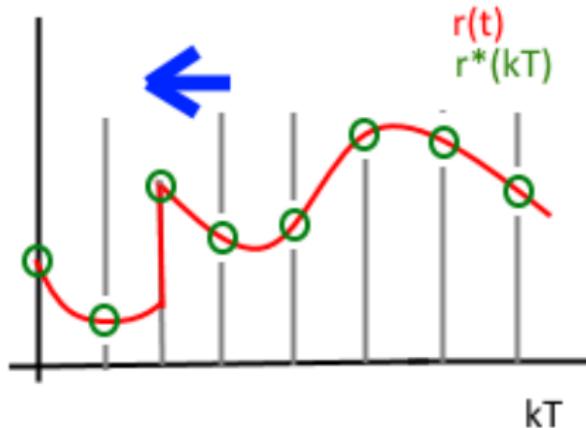
onde $r(t)$ é o sinal de entrada do amostrador. Se $r(t)$ é des-contínuo em $t = kT_s$, $k \in \mathbb{Z}$, então $r(kT_s)$ é $r(kT_s^+)$, onde

$$r(kT_s^+) = \lim_{t \rightarrow kT_s^+} r(t). \quad (83)$$

No caso de $r(t = kT_s)$ ser impulsivo, consider-se-á $r(kT_s)$ não definido neste ponto.

Amostrador ideal: exemplos

- Exemplo 1: sinais descontínuos em $t = kT_s$:



- Exemplo 2: $r^*(kT_s)$ não está definido se ocorre um impulso em $t = kT_s$, $k \in \mathbb{Z}$. Mas note que este não é um caso de interesse prático.

Amostrador ideal: exemplos

- Exemplo 3: $r(t) = u(t)$ (sinal degrau unitário). Neste caso

$$\begin{aligned}
 R^*(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} r(kT_s)e^{-kT_ss} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT_ss} \\
 &= 1 + e^{-T_ss} + e^{-2T_ss} + \dots
 \end{aligned} \tag{84}$$

Usando série geométrica infinita,

$$R^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-T_ss}}, \tag{85}$$

se $|e^{-T_ss}| < 1$.

Amostrador ideal: exemplos

- Exemplo 4: $f(t) = e^{-t}$ (sinal exponencial decrescente). Neste caso:

$$\begin{aligned}
 F^*(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_s)e^{-kT_ss} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT_s}e^{-kT_ss} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT_s(1+s)} \\
 &= 1 + e^{-T_s(1+s)} + e^{-2T_s(1+s)} + \dots
 \end{aligned} \tag{86}$$

Usando série geométrica infinita,

$$F^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-T_s(1+s)}}, \tag{87}$$

se $|e^{-T_s(1+s)}| < 1$.

Exercícios

E30 Seja a função temporal:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1; \\ t^2 - 1, & 1 \leq t < 2; \\ \delta(t-2), & t = 2; \\ 1, & 2 < t \leq 3; \\ t, & t > 3 \end{cases} \quad (88)$$

Desenhe o gráfico desta função. Sabendo que este sinal será amostrado com $T_s = 0.1\text{s}$, obtenha $f^*(kT_s)$ para $k = 10, 20, 30$.



E31 Seja $m(t) = 2^{-t}e^{-2t}$. Usando a definição de amostragem e série geométrica infinita, encontre $M^*(s)$.

Cálculo de $R^*(s)$ – conceitos

- O uso da definição para encontrar a transformada de Laplace do sinal amostrado apresenta um inconveniente: $R^*(s)$ é expresso como uma série infinita;
- Seria mais interessante obter uma forma fechada para $R^*(s)$. Isso é útil na construção de tabelas de transformada que facilitam muito o trabalho de análise de sistemas;
- Para isso, apresentaremos a seguir o método dos resíduos para cálculo de $R^*(s)$.

Cálculo de $R^*(s)$ – método dos resíduos

Definição

$$R^*(s) = \sum_{\text{nos polos de } R(\lambda)} \text{Res} \left\{ R(\lambda) \frac{1}{1 - e^{-T_s(s-\lambda)}} \right\}, \quad (89)$$

onde $\text{Res}\{R(\lambda)/1-e^{-T_s(s-\lambda)}\}$ denota os resíduos de $R(\lambda)/1-e^{-T_s(s-\lambda)}$ em λ . Isso é calculado via a expansão em frações parciais de $R(\lambda)/1-e^{-T_s(s-\lambda)}$.

Este método é baseado no teorema dos resíduos de funções de variável complexa. A prova não será apresentada aqui, mas pode ser encontrada em qualquer livro de controle digital (Apêndice III de Phillips & Nagle, por exemplo).

Cálculo de $R^*(s)$ – método dos resíduos –

Exemplo 1

Exemplo

Seja

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad (90)$$

encontre $F^*(s)$.

- Primeiramente, escrevemos

$$S(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{1 - e^{-T_s(s-\lambda)}} = \frac{1}{(\lambda+1)(\lambda+2)(1 - e^{-T_s(s-\lambda)})}. \quad (91)$$

Cálculo de $R^*(s)$ – método dos resíduos –

Exemplo 1

$$S(\lambda) = \frac{1}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)(1 - e^{-T_s(s-\lambda)})}.$$

- $F(s)$ possui polos em $s = -1, -2$. Os resíduos de $S(\lambda)$ nestes polos são dados por

$$\text{Res}\{S(\lambda)\}_1 = S(\lambda)(\lambda + 1) \Big|_{\lambda=-1} \quad (92)$$

$$\text{Res}\{S(\lambda)\}_2 = S(\lambda)(\lambda + 2) \Big|_{\lambda=-2} \quad (93)$$

- Então,

$$\text{Res}\{S(\lambda)\}_1 = \frac{1}{1 - e^{-T_s(s+1)}} \quad (94)$$

$$\text{Res}\{S(\lambda)\}_2 = -\frac{1}{1 - e^{-T_s(s+2)}}$$

Cálculo de $R^*(s)$ – método dos resíduos –

Exemplo 1

$$\begin{aligned} \text{Res}\{S(\lambda)\}_1 &= \frac{1}{1 - e^{-T_s(s+1)}} \\ \text{Res}\{S(\lambda)\}_2 &= -\frac{1}{1 - e^{-T_s(s+2)}} \end{aligned}$$

- Finalmente, $F^*(s)$ é dado pela soma dos resíduos anteriores.
- Assim,

$$F^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-T_s(s+1)}} - \frac{1}{1 - e^{-T_s(s+2)}}.$$



Cálculo de $R^*(s)$ – método dos resíduos –

Exemplo 2

Exemplo

Seja $r(t) = \sin(\beta t)$. A transformada de Laplace desta função é

$$R(s) = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2} = \frac{\beta}{(s - j\beta)(s + j\beta)}. \quad (97)$$

Encontre $R^*(s)$.

- Neste caso,

$$S(\lambda) = \frac{\beta}{(\lambda - j\beta)(\lambda + j\beta)(1 - e^{-T_s(s-\lambda)})}. \quad (98)$$

Cálculo de $R^*(s)$ – método dos resíduos –

Exemplo 2

- Os resíduos de $S(\lambda)$ nos polos $s = \pm j\beta$ são dados por

$$\text{Res}\{S(\lambda)\}_1 = \left(\frac{1}{2j} \right) \left(\frac{1}{1 - e^{-T_s s} e^{j\beta T_s}} \right) \quad (99)$$

$$\text{Res}\{S(\lambda)\}_2 = -\left(\frac{1}{2j} \right) \left(\frac{1}{1 - e^{-T_s s} e^{-j\beta T_s}} \right) \quad (100)$$

- $R^*(s)$ é dado pela soma dos resíduos anteriores. Assim,

$$R^*(s) = \left(\frac{1}{2j} \right) \left[\frac{1}{1 - e^{-T_s s} e^{j\beta T_s}} - \frac{1}{1 - e^{-T_s s} e^{-j\beta T_s}} \right]. \quad (101)$$

Cálculo de $R^*(s)$ – método dos resíduos –

Exemplo 2

$$R^*(s) = \left(\frac{1}{2j} \right) \left[\frac{1}{1 - e^{-T_s s} e^{j\beta T_s}} - \frac{1}{1 - e^{-T_s s} e^{-j\beta T_s}} \right].$$

- Sabendo que

$$\cos(\beta T_s) = \frac{e^{j\beta T_s} + e^{-j\beta T_s}}{2}, \quad \sin(\beta T_s) = \frac{e^{j\beta T_s} - e^{-j\beta T_s}}{2j}, \quad (102)$$

chegamos a

$$F^*(s) = \frac{e^{-T_s s} \sin(\beta T_s)}{1 - 2e^{-T_s s} \cos(\beta T_s) + e^{-2T_s s}}. \quad (103)$$

- Note a semelhança desta expressão com a obtida na Tabela de Transformada Z ([Tabela 46](#)), quando $z = e^{sT_s}$.

Exercícios

E32 (Phillips & Nagle) Usando o método dos resíduos, calcule $F^*(s)$ para as seguintes funções:

a) $F(s) = \frac{20}{(s+2)(s+5)};$

b) $F(s) = \frac{5}{s(s+1)};$

c) $F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)};$

d) $F(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)};$

e) $F(s) = \frac{s^2+5s+6}{s(s+4)(s+5)};$

f) $F(s) = \frac{2}{s^2+2s+5}.$

Transformada de Fourier

- A transformada de Fourier de uma função real $f(t)$ é definida como:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt; \quad (104)$$

- Se $f(t) = 0$, $t < 0$, então

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt; \quad (105)$$

- A transformada de Laplace unilateral para $f(t)$ é

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt; \quad (106)$$

- Então,

$$F(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega}.$$

Transformada de Fourier

- Note que $F(j\omega)$ é um número complexo. Portanto ele pode ser escrito na forma polar, ressaltando o seu módulo e fase:

$$F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\angle F(j\omega)} = |F(j\omega)|/\underline{F(j\omega)}; \quad (108)$$

- O gráfico de $|F(j\omega)|$ e $\angle F(j\omega)$ versus a frequência ω é chamado de espectro de frequência de $f(t)$. É, portanto, uma excelente ferramenta, para realizar análise do comportamento do sinal no domínio da frequência;
- Vamos agora usar esta ferramenta para analisar os aspectos da amostragem no domínio da frequência.

Periodicidade de $R^*(s)$

Propriedade: $R^*(s)$ é periódico em s com período $j\omega_s$.

- **Prova:** o teorema da translação complexa para a transformada de Laplace afirma que $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$. Mas,

$$R^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT_s)e^{-kT_ss}. \quad (109)$$

- Então, a translação complexa de $R^*(s)$ por $m\omega_s$ (ω_s é a freq. de amostragem em rad/s) fica

$$R^*(s + jm\omega_s) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT_s)e^{-kT_s(s+jm\omega_s)}. \quad (110)$$

- Mas $\omega_s T_s = 2\pi$ e $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$. Assim, $e^{-jkT_sm\omega_s} = e^{-2\pi jkm} = 1$, $\forall m \in \mathbb{Z}$. Então,

$$R^*(s + jm\omega_s) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT_s)e^{-kT_ss} = R^*(s).$$

Periodicidade espectral da amostragem

- Exploraremos nesse curso muitos aspectos importantes e particulares dos sinais contínuos e dos sinais discretos;
- Mas antes, precisamos compreender, ainda que de forma introdutória, a relação *entre eles*. Para isso, recorreremos a um exemplo;
- Tomemos dois sinais senoidais contínuos $y_1(t) = \sin(t)$ e $y_2(t) = \sin(\omega t)$. A frequência ω será progressivamente variada;
- Ambos os sinais serão amostrados com a mesma frequência $\omega_s = 10\text{rad/s}$. Vejamos o que ocorre com os sinais contínuos e discretos à medida que ω é variado.

Periodicidade espectral da amostragem

Comparação da amostragem de dois senos contínuos com a mesma taxa de amostragem $\omega_s = 10\text{rad/s}$ (Caso 1: $\omega_2 = \omega_1 + \omega_s$).

Note que apesar dos sinais originais serem distintos, as amostras discretas são iguais! Você conseguiria indicar a frequência do seno de origem olhando apenas para as amostras?

Periodicidade espectral da amostragem

Comparação da amostragem de dois senos contínuos com a mesma taxa de amostragem $\omega_s = 10 \text{ rad/s}$ (Caso 2: $\omega_1 + \omega_2 = \omega_s$).

Note que apesar dos sinais originais serem distintos, as amostras discretas são iguais, salvo por uma defasagem de 180° ! Você conseguaria indicar a frequência do seno de origem olhando apenas para as amostras?



Periodicidade espectral da amostragem

Conclusões

- Quando a diferença de frequência de dois sinais senoidais é exatamente igual à frequência de amostragem, as amostras discretas obtidas são iguais. Neste caso, não é possível identificar o sinal de origem apenas observando suas amostras discretas;
- Quando a soma das frequências de dois sinais senoidais é exatamente igual à frequência de amostragem, as amostras discretas obtidas são iguais. Neste caso também não é possível identificar o sinal de origem apenas observando suas amostras discretas;
- Ou seja, **só é possível** identificar o sinal senoidal de origem pela análise de suas amostras discretas **se** a frequência do sinal contínuo é menor que metade da frequência de amostragem!

Sinais periódicos contínuos

Sinais distintos entre si para qualquer frequência!

Sinais periódicos discretos

Sinais se repetem a cada intervalo de frequência de $1/(T_s)$ Hz

Claude Shannon & Harry Nyquist



Claude Shannon
Matemático e engenheiro
americano

* 30/04/1916
† 24/02/2001

- É conhecido como o pai da teoria da informação;
- Tem importantes trabalhos nas áreas de circuitos digitais (alg. booleana), criptografia e teoria da comunicação.



Harry Nyquist
Engenheiro sueco

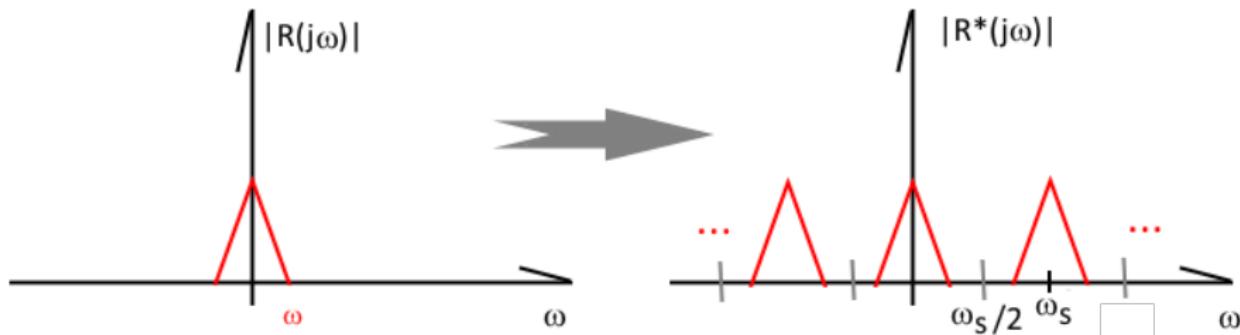
* 07/02/1889
† 04/04/1976

- Nyquist foi um precursores da teoria de estabilidade de sistemas de controle;
- Trabalhou na Bell Laboratories, uma gigante tecnológica de sua época. Colaborou também em áreas como telecomunicações.

Teorema da amostragem de Shannon

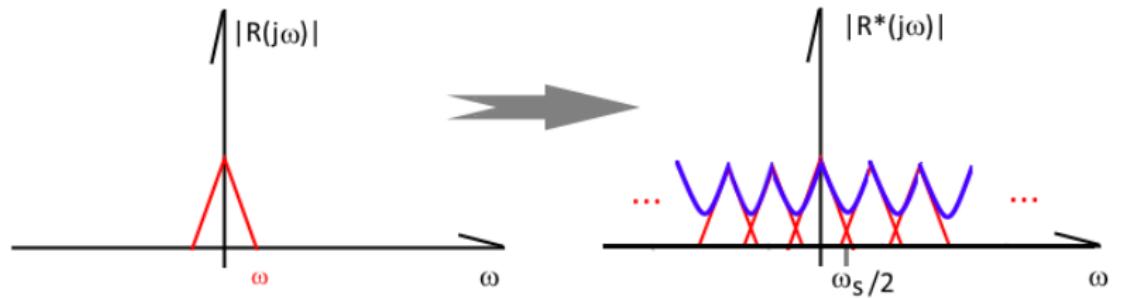
Teorema

Seja um sinal discreto $r^*(kT_s)$ com largura de banda máxima ω . Esse sinal é unicamente determinado por suas amostras se $\omega < \omega_s/2$. Esta frequência limite é conhecida como frequência de Nyquist.



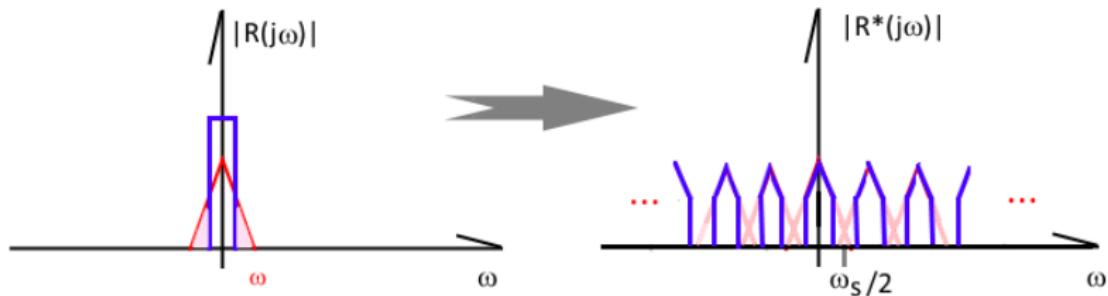
Aliasing (falseamento)

- No teorema de amostragem anterior, é fácil ver que se $\omega > \omega_s/2$ haverá sobreposição de bandas de frequência contíguas. Isso causará distorção do espectro naquela região;
- Esta distorção é conhecida como *aliasing* ou *falseamento*.



Aliasing – solução

- Para se evitar o problema de aliasing no sinal, deve-se aplicar o mesmo em um filtro (chamado de *anti-aliasing* com frequência de corte menor que $\omega_s/2$;
- Isso evita que haja a sobreposição de espectro nas imediações de $\omega_s/2$. Assim, não haverá distorção do sinal – pelo menos até a frequência de corte do filtro anti-aliasing.



Exercícios

E33 Considere o sinal contínuo:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{50} 2^{-k} \sin(2\pi kt). \quad (112)$$

- a) De acordo com o teorema de Shannon, encontre a menor frequência de amostragem tal que o sinal possa ser posteriormente reconstruído.
- b) Obtenha a frequência de amostragem tal que o sinal discreto resultante possua apenas os 10 primeiros termos da série acima como contribuições distintas;
- c) Suponha que o sistema de amostragem utilizado opere com frequência de 30Hz. Haverá aliasing na amostragem de $y(t)$? Se sim, qual seria a frequência de corte máxima de um filtro ideal, tal que não haja distorção? Quantos termos de $y(t)$ seriam mantidos neste caso?

Efeitos da amostragem–reconstrução

- Como vimos, um sinal amostrado a uma taxa ω_s precisa ser filtrado em uma frequência menor que $\omega_s/2$;
- A razão disso é o *aliasing*. Se não limitarmos a banda do sinal antes da amostragem, esse pode se distorcer e dificultar sua reconstrução;
- O principal problema aqui é que não conseguimos prover uma filtragem perfeita (lembre-se, nossos filtros são reais!!);
- Então, parte da informação outrora contida no sinal contínuo será inevitavelmente perdida durante o processo amostragem–reconstrução;
- A seguir, vamos discutir esta questão com um pouco mais de detalhes.

Expansão por série de Taylor

- Considerando inicialmente um sinal contínuo $e(t)$. Uma aproximação de $e(t)$ em torno de $t = nT_s$ pode ser obtida através da expansão por uma série de Taylor:

$$\begin{aligned} e(t) &= e(nT_s) + \frac{de}{dt}\Big|_{nT_s} (t - nT_s) + \frac{1}{2!} \frac{d^2e}{dt^2}\Big|_{nT_s} (t - nT_s)^2 + \\ &+ \dots + \frac{1}{m!} \frac{d^m e}{dt^m}\Big|_{nT_s} (t - nT_s)^m + \dots \end{aligned} \quad (113)$$

- Definimos o sinal reconstruído $e_n(t)$ como a aproximação de $e(t)$ no n -ésimo período de amostragem, ou,

$$e_n(t) \approx e(t), \quad nT_s \leq t < (n+1)T_s; \quad (114)$$

- Vejamos os variados tipos de reconstruções de $e(t)$ com base em sua expansão por série de Taylor.

Retentor de ordem zero (ZOH)

- Se tomarmos como aproximação apenas o primeiro termo da série de Taylor (desprezando-se os demais termos), temos que

$$e_n(t) = e(nT_s), \quad nT_s \leq t < (n+1)T_s; \quad (115)$$

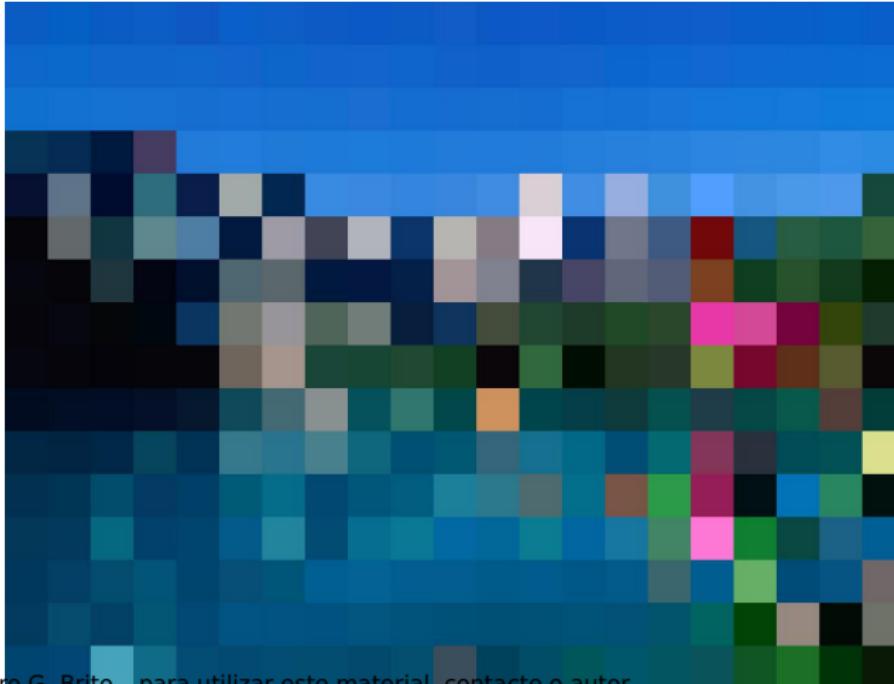
- Mas essa é exatamente a forma do retentor de ordem zero (zero order hold) já discutido! Ele retém o último valor da amostra coletada e faz dessa uma aproximação de $e(t)$ durante o intervalo inter-amostras;
- Note que este reconstrutor não necessita guardar valores anteriores de $e(t)$ e, portanto, sua implementação prática é simples.

Retentor de ordem zero – análise de imagem

- Um jeito para adquirirmos um “feeling” a respeito do que ocorre quando amostramos um sinal e o reconstruímos através do ZOH é através do tratamento de uma imagem;
- Tomemos uma imagem de 768 x 1024 pixels;
- Vamos amostrá-la a uma taxa estabelecida e aplicar o ZOH;
- Vejamos o que ocorre.

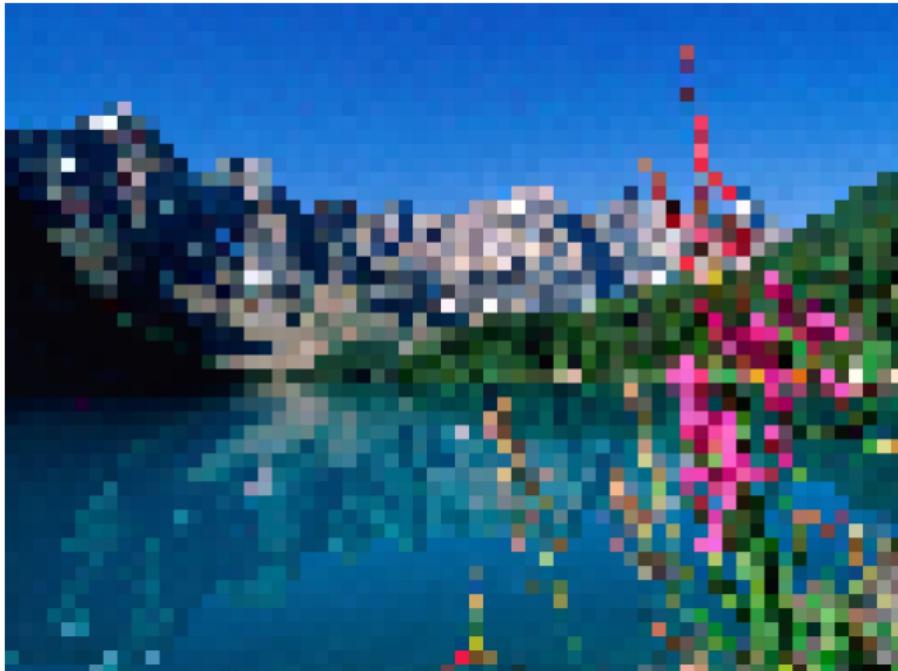
Retentor de ordem zero – análise de imagem

Imagen: 768 x 1024 pixels. Amostragem de 50 em 50 pixels.
ZOH retém cada pixel amostrado como um quadrado 50 x 50 pixels.



Retentor de ordem zero – análise de imagem

Imagen: 768 x 1024 pixels. Amostragem de 16 em 16 pixels.
ZOH retém cada pixel amostrado como um quadrado 16 x 16 pixels.



Retentor de ordem zero – análise de imagem

Imagen: 768 x 1024 pixels. Amostragem de 8 em 8 pixels.



Retentor de ordem zero – análise de imagem

Imagen original



Resposta em frequência do ZOH

- Já derivamos a função de transferência do ZOH, chegando a:

$$ZOH(s) = \frac{1 - e^{-T_s s}}{s}; \quad (116)$$

- Sabendo que a relação entre as transformadas de Laplace e Fourier se faz tal que $s = j\omega$, então:

$$ZOH(j\omega) = \frac{1 - e^{-jT_s \omega}}{j\omega}; \quad (117)$$

- Façamos o seguinte desenvolvimento:

$$ZOH(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T_s}}{j\omega} e^{j\omega T_s/2} e^{-j\omega T_s/2}$$

Resposta em frequência do ZOH

- Então:

$$\begin{aligned}
 ZOH(j\omega) &= \frac{1 - e^{-j\omega T_s}}{j\omega} e^{j\omega T_s/2} e^{-j\omega T_s/2} \\
 &= \frac{2e^{-j\omega T_s/2}}{\omega} \left[\frac{e^{j\omega T_s/2} - e^{-j\omega T_s/2}}{2j} \right] \\
 &= T_s \frac{\sin(\omega T_s/2)}{\omega T_s/2} e^{-j\omega T_s/2}; \tag{119}
 \end{aligned}$$

- Mas,

$$\frac{\omega T_s}{2} = \frac{\omega}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega_s} \right) = \frac{\pi\omega}{\omega_s}; \tag{120}$$

- Logo,

$$ZOH(j\omega) = T_s \frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{\pi\omega/\omega_s} e^{-j\pi\omega/\omega_s}; \tag{121}$$

Resposta em frequência do ZOH

$$ZOH(j\omega) = T_s \frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{\pi\omega/\omega_s} e^{-j\pi\omega/\omega_s};$$

- Analisemos a resposta em frequência dada pela expressão acima. Seu módulo é:

$$|ZOH(j\omega)| = T_s \left| \frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{\pi\omega/\omega_s} \right|, \quad (122)$$

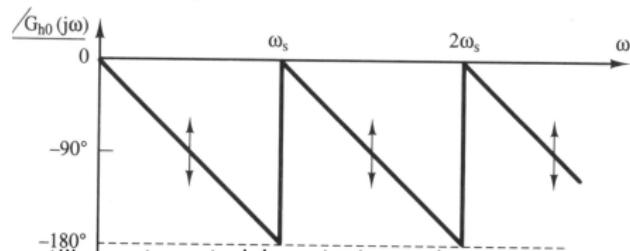
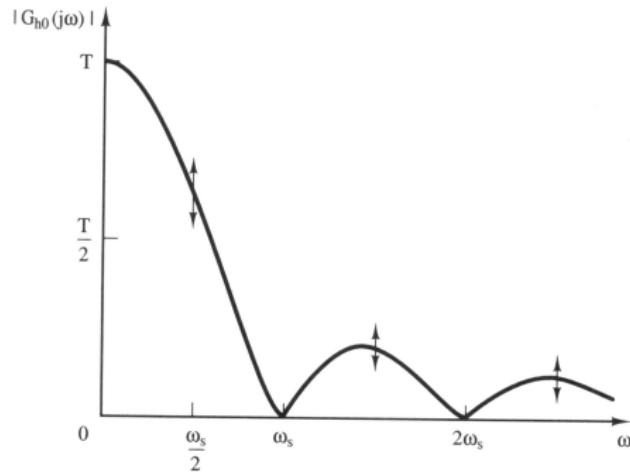
- E sua fase é:

$$\angle ZOH(j\omega) = -\frac{\pi\omega}{\omega_s} + \theta, \quad (123)$$

com $\theta = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, quando $k \leq \omega/\omega_s < k + 1$.

Resposta em frequência do ZOH

- O gráfico da resposta em frequência fica, então:



Análise espectral do ZOH

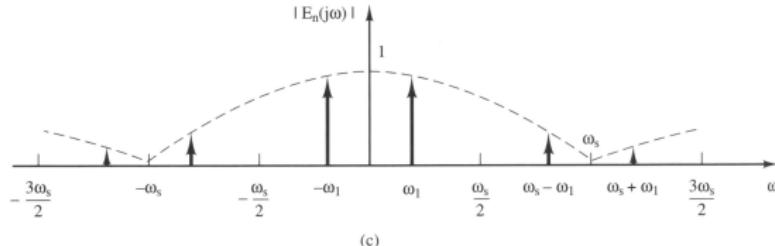
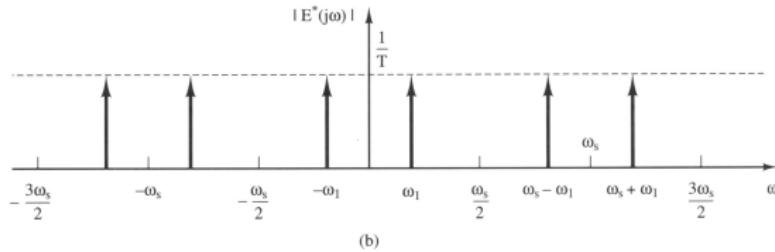
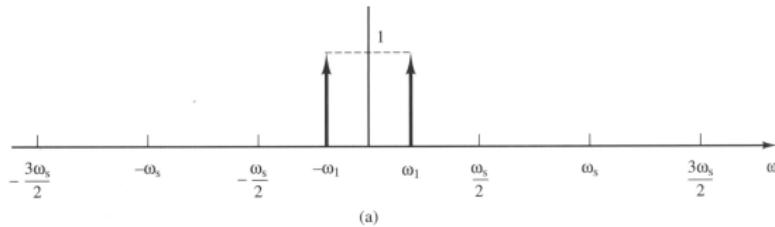
- Vamos analisar o efeito do ZOH sobre um sinal cossenoide amostrado. Considere $e(t) = 2 \cos(\omega_1 t)$ com $\omega_1 < \omega_s/2$;
- Pode ser mostrado que a transformada de Fourier deste sinal é

$$E(j\omega) = \mathcal{F}[2 \cos(\omega_1 t)] = \delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1), \quad (124)$$

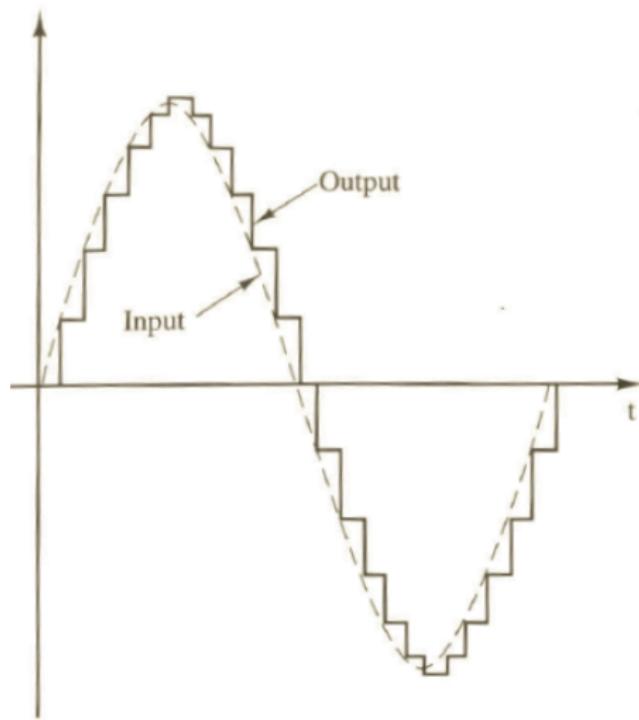
ou seja, dois impulsos unitários simétricos à frequência $\omega = 0$;

- Como já demonstrado, o sinal amostrado é periódico. Assim, os impulsos anteriores se refletem em torno de $k\omega_s$, $k \in \mathbb{Z}$;
- O espectro de frequência do sinal reconstruído pelo ZOH será dado pelo trem de pulsos provenientes da amostragem, modulado pela expressão de módulo (122).

Análise espectral do ZOH



Análise espectral do ZOH



Análise espectral do ZOH – comentários

- Note que, durante o processo de reconstrução, as raias acima de $\omega_s/2$ são substancialmente atenuadas. Entretanto, ainda há alguma contribuição em frequências distintas daquelas do sinal original;
- Além disso, qualquer sinal cossenoide com frequência $\omega = k\omega_s \pm \omega_1$ terá o mesmo espectro que o anterior, significando que qualquer frequência $\omega > \omega_s/2$ será refletida na faixa $0 < \omega < \omega_s/2$. Isso significa que sinais de frequência muito alta se-rão reconstruídos apenas como componentes de baixa frequên-
cia;
- Isso reforça a necessidade do uso do filtro anti-aliasing para evitar distorção no processo de reconstrução;
- Além disso, se $\omega_1 \ll \omega_s/2$ as componentes de $\omega = k\omega_s \pm \omega_1$ terão amplitudes muito pequenas, distorcendo muito pouco o sinal. Assim, o par amostrador-reconstrutor afeta pouco o sinal original.

Retentor de primeira ordem (FOH)

- Tomemos agora os dois primeiros termos da série de Taylor (desprezando-se os demais termos). Teremos:

$$e_n(t) = e(nT_s) + \frac{de(t)}{dt} \Big|_{t=nT_s} (t - nT_s), \quad nT_s \leq t < (n+1)T_s; \quad (125)$$

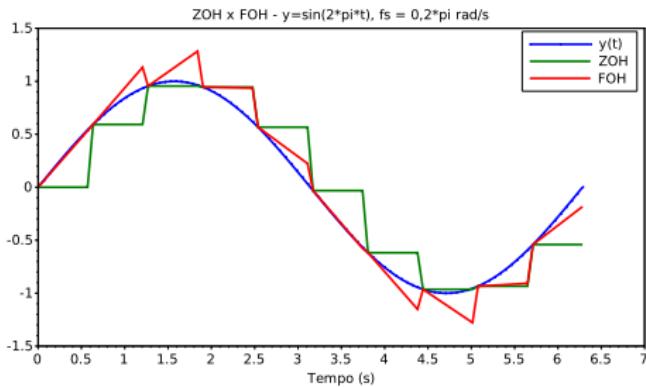
- Precisamos de uma aproximação para a derivada baseada apenas em pontos amostrados. Faremos isso através da *diferença reversa*:

$$\frac{de(t)}{dt} \Big|_{t=nT_s} = \frac{e(nT_s) - e((n-1)T_s)}{T_s}; \quad (126)$$

- Ou seja, o retentor de primeira ordem usa do valor atual ($e(nT_s)$) e da estimativa da derivada no intervalo anterior (entre $e((n-1)T_s)$ e $e(nT_s)$) para extrapolar os pontos até a chegada do novo ponto amostrado (em $e((n+1)T_s)$);
- Note que agora é necessário armazenar o último ponto coletado e a implementação é mais complexa!!

Retentor de primeira ordem (FOH)

- Isso dá origem ao *retentor de primeira ordem* ou *first order hold* (FOH) do inglês.



- Pode ser mostrado que a função de transferência do retentor de primeira ordem é dada por:

$$FOH(s) = \frac{1 + T_s s}{T_s} \left[\frac{1 - e^{-T_s s}}{s} \right]^2$$

Resposta em frequência do FOH

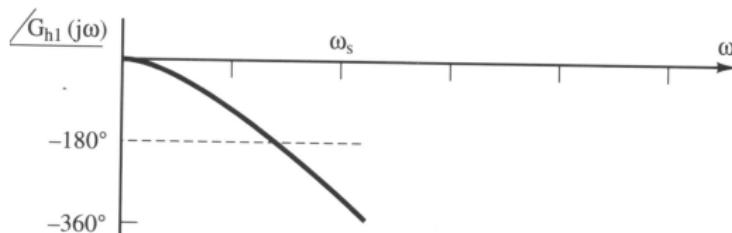
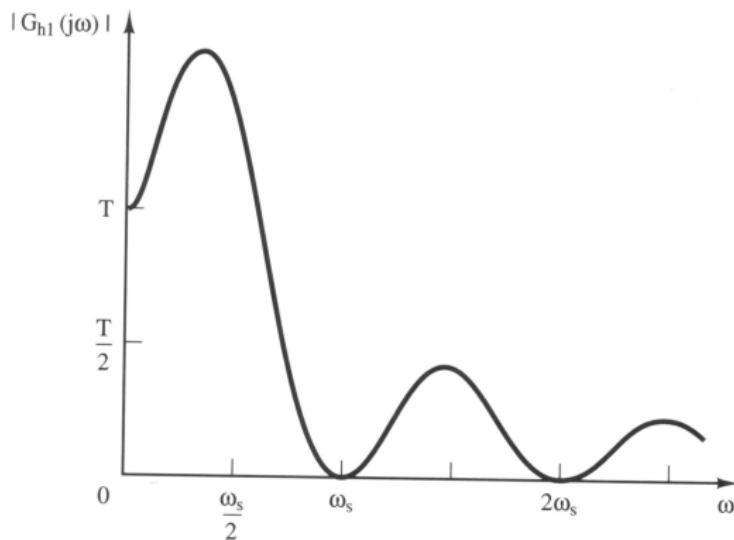
- A transformada de Fourier fica:

$$FOH(j\omega) = \frac{1 + j\omega T_s}{T_s} \left[\frac{1 - e^{-j\omega T_s}}{j\omega} \right]^2; \quad (128)$$

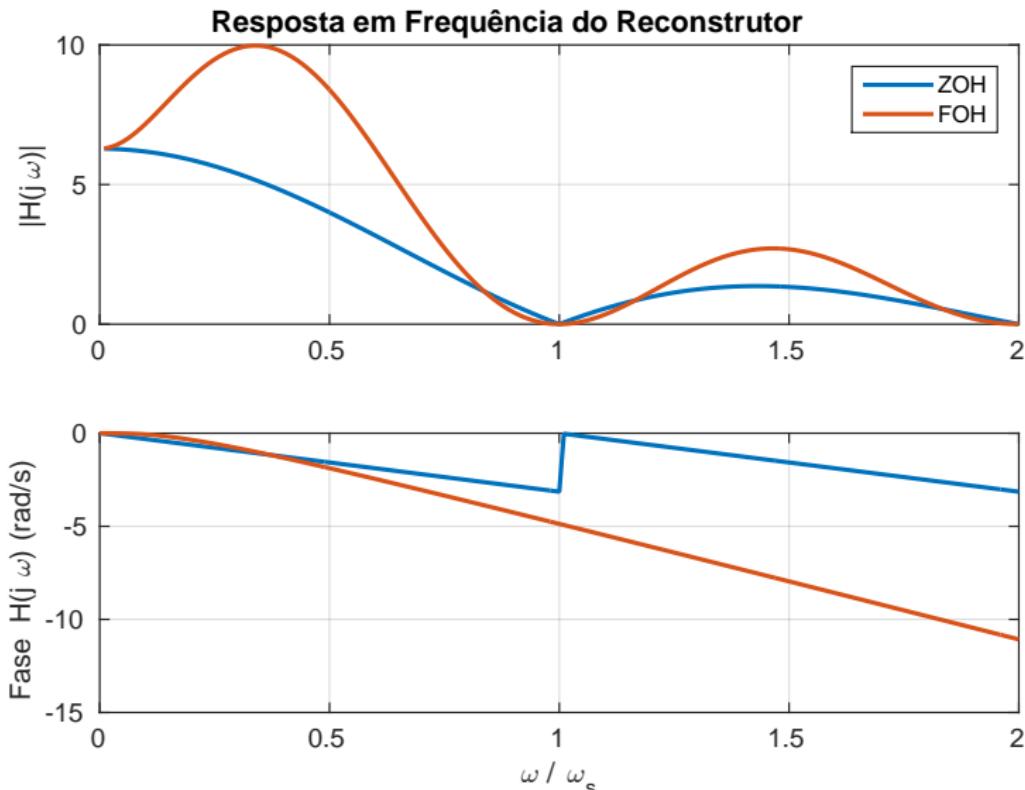
$$|FOH(j\omega)| = T_s \sqrt{1 + \frac{4\pi^2\omega^2}{\omega_s^2} \left[\frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{\pi\omega/\omega_s} \right]^2}; \quad (129)$$

$$\angle FOH(j\omega) = \arctg \left(\frac{2\pi\omega}{\omega_s} \right) - \frac{2\pi\omega}{\omega_s}. \quad (130)$$

Resposta em frequência do FOH



Resposta em frequência do ZOH x FOH



Resposta em frequência do FOH – comentários

- Dado o pequeno defasamento para ω próximo de zero, o FOH provê uma melhor aproximação de reconstrução que o ZOH se $\omega \ll \omega_s/2$;
- Esta vantagem começa a não ser tão pronunciada se $\omega \approx 0,4\omega_s$;
- Como a implementação do FOH é substancialmente mais complexa, o ZOH é muito mais utilizado na prática. A melhoria marginal provida pelo FOH não é suficiente para justificar sua implementação prática.

Exercícios

E34 Considere o sinal contínuo:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ -t + 2, & 1 \leq t < 3 \\ t - 4, & 3 \leq t < 4 \end{cases} \quad (131)$$

- a) Considere uma taxa de amostragem de 10Hz. Desenhe o gráfico do sinal reconstruído f_1^* por um retentor de ordem zero. Calcule o erro de reconstrução definido como:

$$e_{ZOH} = \int_0^4 |f(t) - f_1^*(t)| dt. \quad (132)$$

- b) Para a mesma taxa de amostragem acima, desenhe o gráfico do sinal reconstruído f_2^* por um retentor de primeira ordem. Calcule o erro de reconstrução e_{FOH} neste caso.

Relação entre $R^*(s)$ e $R(z)$

- Estamos a um passo de iniciar a análise de sistemas discretos em malha aberta;
- Antes disso, precisamos estabelecer a relação entre R^* e $R(z)$;
- A transformada Z de uma série discreta $r[k]$ foi definida como:

$$\mathcal{Z}\{r[k]\} = R(z) = r[0] + r[1]z^{-1} + r[2]z^{-2} + \dots ; \quad (133)$$

- Já a transformada de Laplace do sinal amostrado $r(t)$ é:

$$R^*(s) = r(0) + r(T_s)e^{-T_ss} + r(2T_s)e^{-2T_ss} + \dots , \quad (134)$$

onde T_s é o tempo de amostragem.

Relação entre $R^*(s)$ e $R(z)$

- A relação entre a transformada Z e a transformada de Laplace de um sinal amostrado é óbvia;
- Tendo em mente que a série discreta $r[k]$ é resultante da amostragem do sinal $r(t)$ com tempo de amostragem T_s , é natural que $R(z)$ e $R^*(s)$ tenham uma similaridade muito grande;
- De fato, é facilmente observável que:

$$R(z) = R^*(s)|_{e^{sT_s}=z}; \quad (135)$$

- Assim, há absoluta coerência em todo o desenvolvimento matemático adotado até aqui!

Relação entre $R^*(s)$ e $R(z)$

- Além de uma mera substituição de variáveis, a relação entre $R^*(s)$ e $R(z)$ traz um grande impacto prático;
- Para ver isso, vamos apresentar outra propriedade de $R^*(s)$.
- Juntamente com sua propriedade de periodicidade, ela complementa o conhecimento a respeito do efeito da discretização de um sinal contínuo.

Multiplicidade de polos de $R^*(s)$

Propriedade: Se $R(s)$ tem um polo em $s = s_1$, $R^*(s)$ terá polos em $s = s_1 + jm\omega_s$, $m \in \mathbb{Z}$.

- **Prova:** $R^*(s)$ pode ser alternativamente calculada por

$$R^*(s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(s + jk\omega_s) + \frac{r(0)}{2}, \quad (136)$$

onde ω_s é a frequência de amostragem em radianos ($\omega_s = 2\pi/T_s$). Assim,

$$R^*(s) = \frac{1}{T_s} [R(s) + R(s + j\omega_s) + R(s + 2j\omega_s) + \dots]. \quad (137)$$

Assim, se $R(s)$ tem um polo em $s = s_1$ então cada termo acima contribuirá com um polo para $R^*(s)$;

- Isso não vale para os zeros de $R^*(s)$. Eles são periódicos (propriedade 1), mas não podem ser unicamente determinados dos zeros de $R(s)$!

Multiplicidade de polos de $R^*(s)$

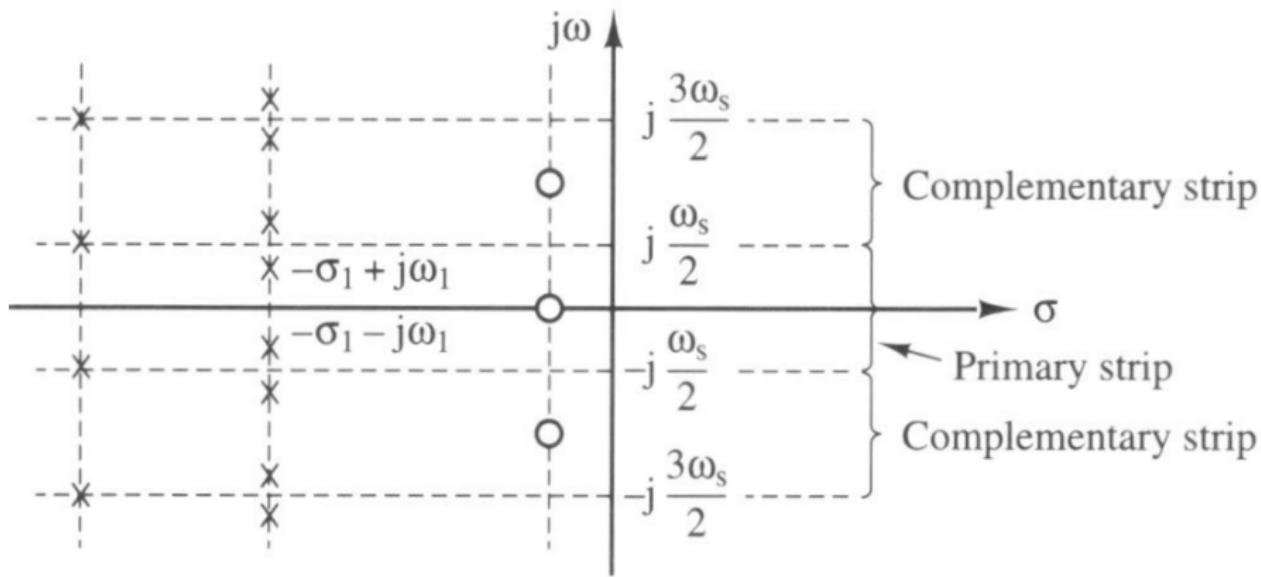


Fig 3-8 Phillips & Nagle

Vantagem de $R(z)$ sobre $R^*(s)$

- Apesar de suas similaridades, a propriedade anterior é definitiva na escolha de $R(z)$ sobre $R^*(s)$. Para ver isso, recorramos a um exemplo;
- Seja

$$R(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}. \quad (138)$$

Calculando $R^*(s)$, temos

$$R^*(s) = \frac{e^{T_s s} (e^{-T_s} - e^{-2T_s})}{(e^{T_s s} - e^{-T_s})(e^{2T_s s} - e^{-2T_s})}; \quad (139)$$

- Note que apesar de possuir apenas dois polos, $R(s)$ é reproduzido com infinitos polos em $R^*(s)$.

Vantagem de $R(z)$ sobre $R^*(s)$

- Usando a definição $R(z) = R^*(s)|_{e^{sT_s}=z}$, temos:

$$R(z) = \frac{z(e^{-T_s} - e^{-2T_s})}{(z - e^{-T_s})(z - e^{-2T_s})}; \quad (140)$$

- Em outras palavras, os infinitos polos de $R^*(s)$ no plano s são convertidos em apenas dois polos para $R(z)$ no plano z ;
- Note que se há m polos em $R(s)$, haverá m polos em $R(z)$. Essa similaridade torna o uso de $R(z)$ muito mais vantajosa;
- Entretanto, não há nenhuma relação (únivoca ou não) entre os zeros de $R(s)$ e $R(z)$!!

Função de transferência de malha aberta

- Considere o sistema em malha aberta a seguir:

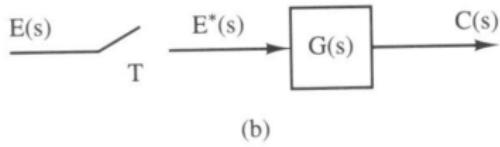
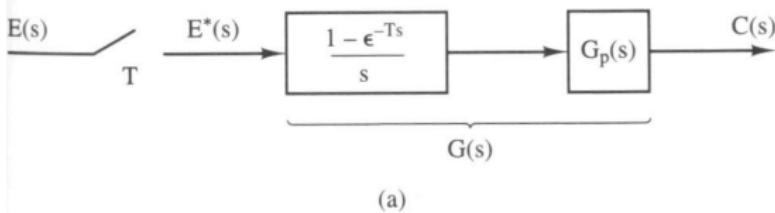


Fig 4-1 Phillips & Nagle

- O primeiro bloco é o retentor de ordem zero, antecedendo a planta contínua. Como no caso discreto estes dois blocos são indissociáveis, eles são comumente aglutinados em um único bloco $G(s)$;
- Mas não se esqueçam que nunca podemos ligar uma planta diretamente a uma saída discreta!! O sistema a ser controlado precisará ser sempre precedido de um ZOH.

Função de transferência de malha aberta

- Na figura anterior:

$$C(s) = G(s)E^*(s); \quad (141)$$

- Do cálculo de $C^*(s)$, obtemos

$$C^*(s) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(s + jn\omega_s) = [G(s)E^*(s)]^*; \quad (142)$$

- Então,

$$C^*(s) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s)E^*(s + jn\omega_s); \quad (143)$$

- Mas do teorema da periodicidade, temos

$$E^*(s) = E^*(s + jn\omega_s).$$

Função de transferência de malha aberta

- Assim,

$$C^*(s) = E^*(s) \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) = E^*(s)G^*(s); \quad (145)$$

- Finalmente, chegamos à relação:

$$C(z) = E(z)G(z) \quad (146)$$

- Essa é a função de transferência discreta de malha aberta.
Note a similaridade com a relação do domínio do tempo contínuo.

Cálculo de $G(z)$

- O último passo é o cálculo da transformada Z do conjunto planta-ZOH;
- Já vimos que a transformada de Laplace do retentor de ordem zero é

$$ZOH(s) = \frac{1 - e^{-T_s s}}{s}; \quad (147)$$

- Considerando o ZOH precedendo a planta $G_p(s)$, temos:

$$G(s) = \frac{1 - e^{-T_s s}}{s} G_p(s) = \frac{G_p(s)}{s} (1 - e^{-T_s s}); \quad (148)$$

- Mas o termo $(1 - e^{-T_s s})$ têm o formato de um sinal discreto, podendo ser escrito como $F^*(s)$. Então, podemos escrever:

$$G(s) = \frac{G_p(s)}{s} F^*(s).$$

Cálculo de $G(z)$

- Do desenvolvimento anterior, temos que:

$$G(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_p(s)}{s} \right\} F(z); \quad (150)$$

- Mas,

$$F(z) = 1 - z^{-1} = \frac{z-1}{z}; \quad (151)$$

- Então:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_p(s)}{s} \right\}; \quad (152)$$

- Esta fórmula será extensivamente usada neste curso para obter a função de transferência em Z do sistema físico que desejarmos controlar digitalmente.

Exercícios

E35 Considere o sistema em malha aberta discreto da Figura 4-1 anterior. Para cada uma das plantas contínuas a seguir, obtenha a função de transferência de malha aberta $G_{ma}(z)$ considerando $T_s = 0,1\text{s}$.

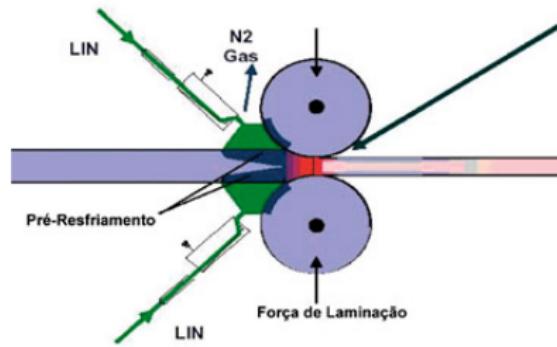
- a) $G_{p1}(s) = \frac{5}{s+2}$
- b) $G_{p2}(s) = \frac{3}{s}$
- c) $G_{p3}(s) = \frac{3}{s^2+2s+2}$ *
- d) $G_{p4}(s) = \frac{7}{s^2+4s+5}$ *
- e) $G_{p5}(s) = \frac{4}{s^2+3s+2}$

* Dica: complete quadrados para ficar no formato da tabela!!!

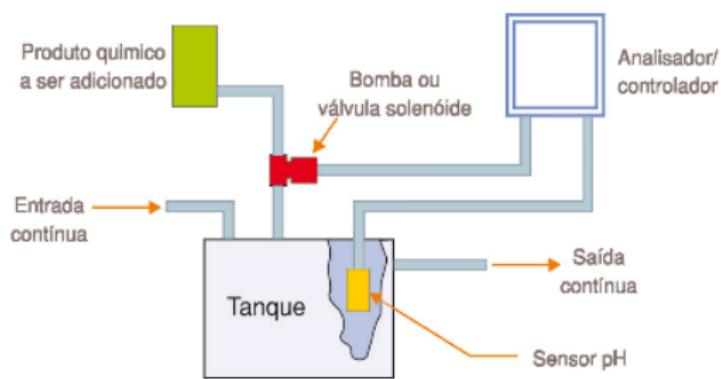
Sistemas com atraso de tempo

- Até este momento, estudamos sistemas dinâmicos nos quais sua resposta se dá imediatamente à aplicação de uma entrada;
- Entretanto, existem inúmeros casos em que a resposta à uma entrada só pode ser observado alguns instantes após sua aplicação;
- Estes são sistemas com *atraso de tempo, atraso de transporte ou tempo morto*;
- É muito importante compreender que o atraso de tempo (tempo para obtenção de alguma resposta após a aplicação de uma entrada) **não tem nada a ver** com a resposta dinâmica do sensor (constante de tempo, banda passante, etc);
- Esse é um erro muito comum!!

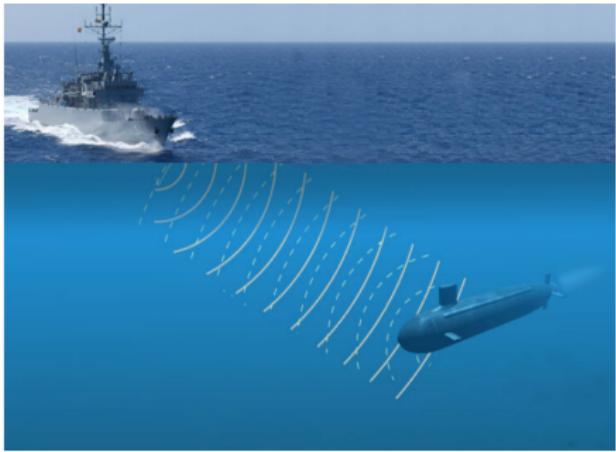
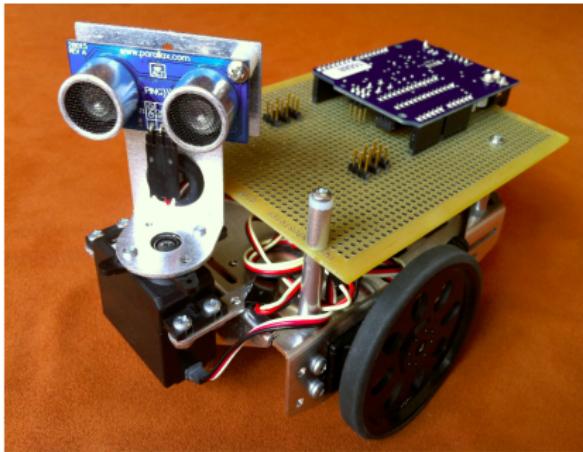
Exemplo 1: Laminador



Exemplo 2: Tratamento de água



Exemplo 3: Sonar



Atraso de tempo nos sistemas contínuos

- Em um sistema contínuo com atraso, a medição obtida no tempo atual t_0 ($y(t = t_0)$) é resultante de uma entrada aplicada em um instante de tempo T_a anterior ($u(t = t_0 - T_a)$);
- Matematicamente, no instante atual t , temos $u(t)$ e $y(t - T_a)$. Aplicando o teorema da translação real de Laplace, temos:

$$\mathcal{L}\{y(t - T_a)u(t - T_a)\} = e^{-T_a s}Y(s); \quad (153)$$

- Então, um sistema contínuo com atraso de tempo é escrito como:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)e^{-T_a s}, \quad (154)$$

onde $G(s)$ é a função de transferência que define a física do processo e T_a é o atraso de transporte do sistema.

Atraso de tempo nos sistemas discretos

- Agora vamos discutir a análise de sistemas contínuos com atraso de tempo quando da sua discretização;
- Na discretização, a coleta de amostras ocorre em instantes de tempo específicos, definidos pela taxa de amostragem do sistema;
- Se o atraso de tempo do sistema contínuo for exatamente múltiplo do tempo de amostragem, podemos simplesmente aplicar o teorema de translação real da transformada Z e prosseguir com análise;
- Mas e se o atraso de tempo não for múltiplo do tempo de amostragem? Neste caso, deveremos utilizar a *Transformada Z modificada*, que não será apresentada neste momento (fica como estudo futuro).

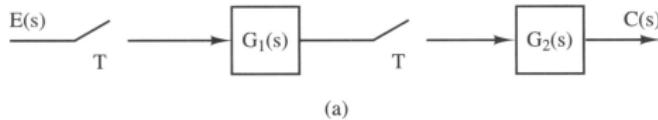
Exercícios

E36

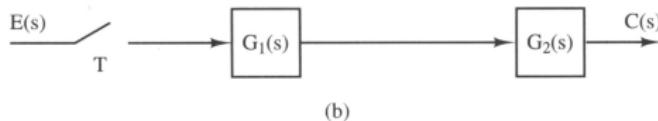
Considere um sistema computacional com tempo de amostragem ajustável, mas maior que 5ms. Deseja-se uma banda passante de malha fechada de 70Hz, mas há um atraso de transporte de $1/103$ s. Como forma de evitar a transformada Z modificada, escolheu-se T tal que ele seja igual ao atraso de transporte. Essa é uma boa estratégia neste caso prático?



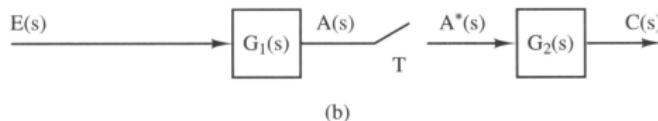
Revisão de malha aberta



$$\bullet \quad C(z) = G_1(z)G_2(z)E(z)$$

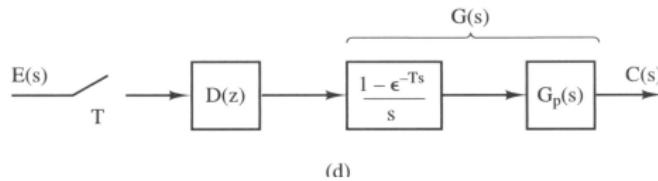


$$\bullet \quad C(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)G_2(s)\}E(z)$$



$$\bullet \quad C(s) = G_2(s)A^*(s)$$

$$C(z) = G_2(z)\mathcal{Z}\{G_1(s)E(s)\}$$



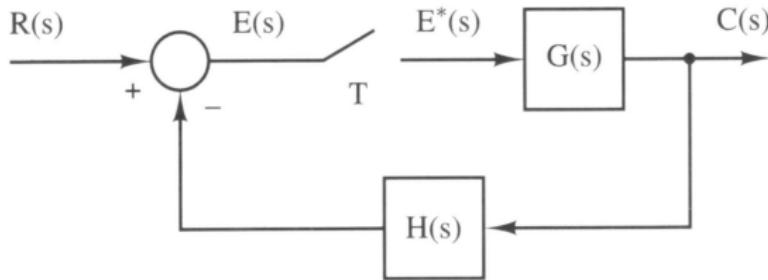
$$\bullet \quad C(z) =$$

$$E(z)D(z)\left(\frac{z-1}{z}\right)\mathcal{Z}\left\{\frac{G_p(s)}{s}\right\}$$

Fig
evel

Cálculo de malha fechada – exemplo 1

- Faremos agora a derivação da função de transferência de malha fechada para sistemas digitais;
- Tomemos o diagrama abaixo:



- Note que,

$$C(s) = G(s)E^*(s); \quad (155)$$

- e,

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s).$$

Cálculo de malha fechada – exemplo 1

- Então,

$$E(s) = R(s) - G(s)H(s)E^*(s); \quad (157)$$

- Tomando a forma discreta (estrela) na expressão acima, temos

$$E^*(s) = R^*(s) - \overline{GH}^*(s)E^*(s); \quad (158)$$

- Equacionando o termo $E^*(s)$, chegamos a

$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + \overline{GH}^*(s)}; \quad (159)$$

- Levando isso na expressão de $C(s)$, obtemos

$$C(s) = G(s) \frac{R^*(s)}{1 + \overline{GH}^*(s)},$$

que é a expressão contínua para saída $C(s)$.

Cálculo de malha fechada – exemplo 1

- Tomando finalmente a saída amostrada, chegamos a

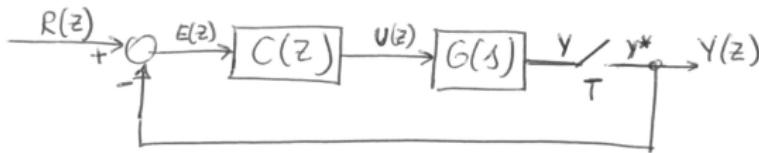
$$C^*(s) = G^*(s)E^*(s) = G^*(s) \frac{R^*(s)}{1 + \overline{GH}^*(s)}; \quad (161)$$

- Então:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + \overline{GH}(z)}. \quad (162)$$

Cálculo de malha fechada – exemplo 2

- Tomemos agora um caso ligeiramente diferente:



- Agora, temos

$$E^*(s) = R^*(s) - Y^*(s)$$

$$Y(s) = G(s)U^*(s)$$

$$U^*(s) = E^*(s)C^*(s)$$

$$Y(s) = G(s)E^*(s)C^*(s)$$

$$Y^*(s) = G^*(s)E^*(s)C^*(s).$$

(163)

Cálculo de malha fechada – exemplo 2

- Então,

$$Y^*(s) = G^*(s)C^*(s)[R^*(s) - Y^*(s)] \quad (164)$$

- E, finalmente:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)C(z)}{1 + G(z)C(z)}. \quad (165)$$

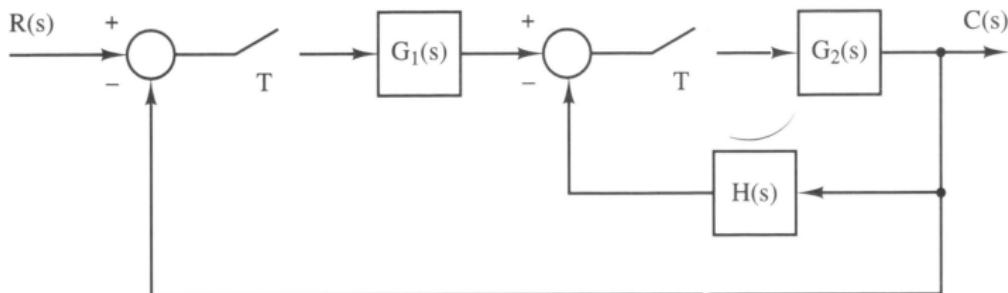
- O sistema acima é bem útil quando representamos todo o sistema (ZOH + Planta + Sensor) como um bloco único e todo o processamento de controle (inclusive comparação) é digital.

Procedimento geral de derivação

- Obter a expressão de malha fechada de um sistema digital pode ser complicado, dependendo da posição e número dos amostradores;
- Neste caso, pode se adotar o seguinte procedimento de derivação:
 - ① Coloque uma variável na entrada e saída de cada amostrador;
 - ② Escreva as entradas dos amostradores em função das saídas de todos amostradores presentes;
 - ③ Tome a versão estrela de todas as expressões acima;
 - ④ Resolva as expressões até obter a saída estrela do sistema por sua entrada estrela, se isso for possível;
 - ⑤ Converta as expressões anteriores para z.

Cálculo de malha fechada – exemplo 3

- Neste caso, há dois amostradores:



- As expressões para as entradas dos amostradores e para a saída são:

$$E_1(s) = R(s) - G_2(s)E_2^*(s)$$

$$E_2(s) = G_1(s)E_1^*(s) - G_2(s)H(s)E_2^*(s)$$

$$C(s) = G_2(s)E_2^*(s).$$

Cálculo de malha fechada – exemplo 3

- Tomando as formas *estrela* das expressões anteriores, chega-se a:

$$\begin{aligned} E_1^*(s) &= R^*(s) - G_2^*(s)E_2^*(s) \\ E_2^*(s) &= G_1^*(s)E_1^*(s) - [G_2(s)H(s)]^*E_2^*(s) \\ C^*(s) &= G_2^*(s)E_2^*(s). \end{aligned} \quad (167)$$

- Substituindo a expressão de E_1^* na expressão de E_2^* , e esta na expressão de C^* , chegamos a :

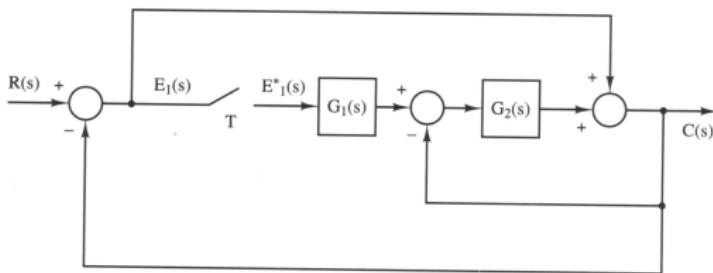
$$C^*(s) = \frac{G_1^*(s)G_2^*(s)R^*(s)}{1 + G_1^*(s)G_2^*(s) + \overline{G_2H}^*(s)}; \quad (168)$$

- Ou,

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z)G_2(z)}{1 + G_1(z)G_2(z) + \overline{G_2H}(z)}.$$

Cálculo de malha fechada – exemplo 4

- Este caso é mais complexo, pois não há, como veremos, uma forma fechada para função de transferência:



- As expressões para a entrada do amostrador e para a saída são:

$$\begin{aligned} E_1(s) &= R(s) - C(s) \\ C(s) &= E_1(s) + G_2(s)[G_1(s)E_1^*(s) - C(s)]; \end{aligned} \quad (170)$$

- Substituindo a primeira na segunda equação e isolando $C(s)$, temos:

$$C(s) = \frac{R(s)}{2 + G_2(s)} + \frac{G_1(s)G_2(s)E_1^*(s)}{2 + G_2(s)}.$$

Cálculo de malha fechada – exemplo 4

- E,

$$E_1(s) = R(s) - \frac{R(s)}{2 + G_2(s)} - \frac{G_1(s)G_2(s)E_1^*(s)}{2 + G_2(s)}; \quad (172)$$

- Tomando as formas *estrela*, chega-se a

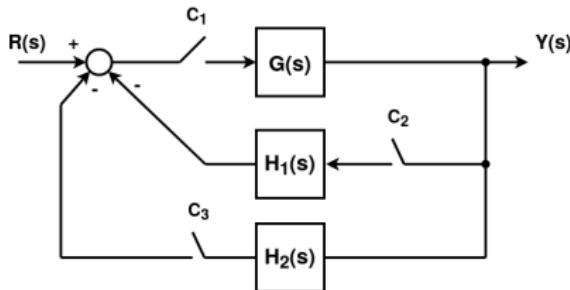
$$\begin{aligned} E_1^*(s) &= \left[\frac{(1 + G_2(s))R(s)}{2 + G_2(s)} \right]^* - \left[\frac{G_1(s)G_2(s)}{2 + G_2(s)} \right]^* E_1^*(s) \\ C^*(s) &= \left[\frac{R(s)}{2 + G_2(s)} \right]^* + \left[\frac{G_1(s)G_2(s)}{2 + G_2(s)} \right]^* E_1^*(s). \end{aligned} \quad (173)$$

- Note que é impossível isolar a entrada R^* . Então, não é possível obter uma função de transferência $C(z)/R(z)$.

Exercícios

E37

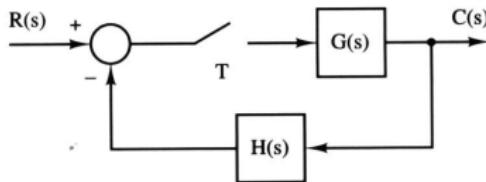
A figura abaixo mostra um diagrama de blocos contendo três chaves C_1, C_2, C_3 que podem operar tanto como chaves abre-fecha fixas, como chaves pulsantes com tempo de amostragem T_S



- a) Encontre, se possível, a função de transferência de malha fechada $Y(z)/R(z)$ quando uma chave é pulsante e as demais estão permanentemente fechadas (todas as combinações possíveis).
- b) Repita o problema anterior quando duas das chaves são pulsantes e a outra está permanentemente fechada (todas as combinações possíveis).

Equação característica

- Seja o sistema de controle digital



Phillips & Nagle , 3 Ed., Fig 7.1

- Já vimos que sua função de transferência de malha fechada é

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + \overline{GH}(z)}; \quad (174)$$

- Os polos são as raízes do polinômio denominador da função de transferência. Portanto, para calcular tais polos, fazemos

$$1 + \overline{GH}(z) = 0;$$

- À equação acima damos o nome de *equação característica do sistema*.

Equação característica – obtenção

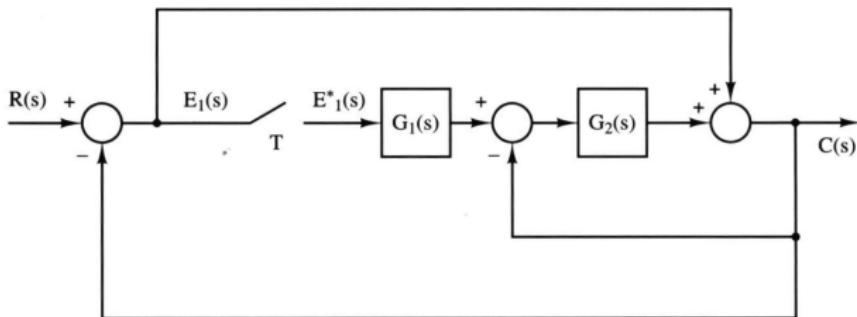
- Mas já vimos que em alguns casos não é possível obter uma forma fechada para a função de transferência;
- Como obter pelo menos sua equação característica tal que seus polos possam ser calculados?
- Para isso, precisamos considerar três fatos:
 - i) A estabilidade de um sistema linear (nossa caso) não depende da entrada aplicada;
 - ii) A equação característica de malha fechada é a mesma entre quaisquer dois pontos da malha fechada;
 - iii) O amostrador é o elemento devido ao qual não podemos obter explicitamente a função de transferência de alguns sistemas.

Equação característica – obtenção

- Usando esses fatos, podemos obter a equação característica de qualquer sistema de controle digital com o seguinte procedimento:
 - i) Use a entrada nula $R(s) = R(z) = 0$;
 - ii) Abra a malha fechada retirando todos amostradores presentes.
 - iii) Escolha um amostrador sobre o qual realizará o cálculo. Nomeie a entrada e saída deste amostrador com nomes inicialmente distintos ($e_i(s)$ e $e_o^*(s)$ por exemplo). Para os demais amostradores, nomeie sua entrada e saída de forma similar ($e_k(s)$ e $e_k(s)^*$ por exemplo);
 - iv) Calcule a relação entre a entrada de cada amostrador em função das saídas dos demais amostradores.
 - v) Tome a versão estrelada da(s) expressão(ões) anterior(es);
 - vi) Equacione a(s) expressão(ões) anterior(es) de forma a obter uma relação explícita entre a entrada e a saída do amostrador escondido ($e_i^*(s) = \dots e_o^*(s)$ por exemplo);
 - vii) Notando que a entrada estrelada do amostrador é igual à sua saída ($e_i^*(s) = e_o^*(s)$), equacione os termos para obter então a equação característica do sistema.

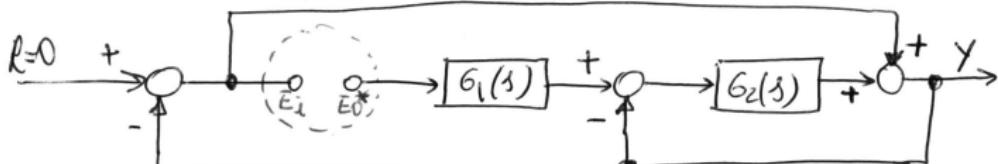
Obtenção da equação característica – Exp. 1

- Seja novamente o sistema digital



Phillips & Nagle , 3 Ed., Fig 7.2

- Retirando o amostrador e fazendo a entrada nula, chegamos ao diagrama a seguir:



Obtenção da equação característica – Exp. 1

- Mas note que

$$E_i(s) = -Y(s) \quad (176)$$

$$Y(s) = E_i(s) + G_2(s) \left[G_1(s)E_o^*(s) - Y(s) \right] \quad (177)$$

- Então,

$$-E_i(s) = E_i(s) + G_2(s) \left[G_1(s)E_o^*(s) + E_i(s) \right]; \quad (178)$$

- Assim,

$$E_i(s) = \left[-\frac{G_1(s)G_2(s)}{2 + G_2(s)} \right] E_o^*(s). \quad (179)$$

Obtenção da equação característica – Exp. 1

- Tomando a transformada Z, temos:

$$E_i(z) = -\mathcal{Z} \left\{ \frac{G_1(s)G_2(s)}{2 + G_2(s)} \right\} E_o(z); \quad (180)$$

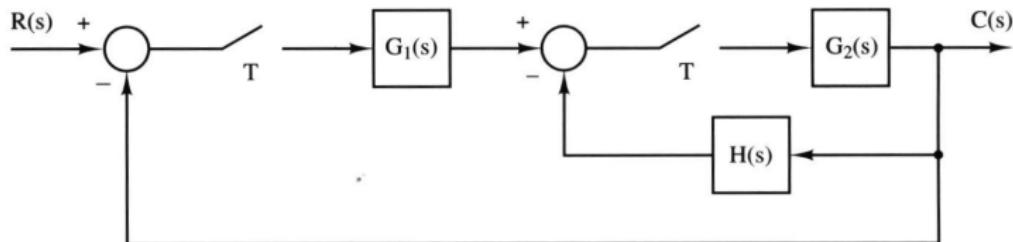
- Fechando a malha sobre o amostrador em questão ($E_i(z) = E_o(z)$) e equacionando, temos:

$$1 + \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_1(s)G_2(s)}{2 + G_2(s)} \right\} = 0; \quad (181)$$

- Esta é a equação característica do sistema em questão.

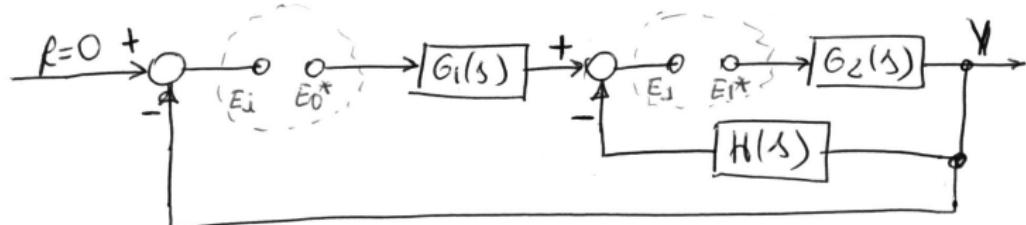
Obtenção da equação característica – Exp. 2

- Seja o sistema digital



Phillips & Nagle , 3 Ed., Fig 7.3

- Retirando o amostrador e fazendo a entrada nula, chegamos ao diagrama a seguir:



Obtenção da equação característica – Exp. 2

- Neste caso, tomaremos o primeiro amostrador para realizar o cálculo em função da entrada e saída do segundo;
- Note que

$$E_1(s) = G_1(s)E_o^* - G_2(s)H(s)E_1^*(s) \quad (182)$$

$$E_i(s) = -G_2(s)E_1^*(s) \quad (183)$$

- Tomando a forma estrela nas duas equações, temos:

$$E_1^*(s) = G_1^*(s)E_o^* - \overline{G_2 H}^*(s)E_1^*(s) \quad (184)$$

$$E_i^*(s) = -G_2^*(s)E_1^*(s) \quad (185)$$

Obtenção da equação característica – Exp. 2

- Equacionando E_1^* na primeira equação, levando na segunda e aplicando a transformada Z, chegamos a:

$$E_i(z) = -\frac{G_1(z)G_2(z)}{1 + \overline{G_2H}(z)}E_o(z); \quad (186)$$

- Fechando a malha sobre o primeiro amostrador ($E_i(z) = E_o(z)$) e equacionando os termos, temos finalmente:

$$1 + \overline{G_2H}(z) + G_1(z)G_2(z) = 0, \quad (187)$$

que é a equação característica do sistema em questão.

Exercícios

E38

Tome o exercício E37 anterior.

- a) Considere a letra a). Tome aqueles diagramas para os quais não foi possível obter a função de transferência de malha fechada e calcule a respectiva equação característica.
- b) Repita o problema anterior nos diagramas para os quais não foi possível obter a função de transferência de malha fechada da letra b).



Mapa de polos e zeros

- Já sabemos de controle contínuo que o posicionamento dos polos do sistema no plano s define a característica de sua resposta transitória;
- Isso inclui a questão de estabilidade do sistema: se houver polos no semiplano direito do plano s , o sistema é instável;
- Assim, no caso digital, seria bastante interessante que pudéssemos associar o comportamento associado a um posicionamento de polos no plano s com o respectivo posicionamento de polos no plano z ;
- É isso que faremos a seguir.

Relembrando alguns fatos

- Já sabemos que a relação entre as variáveis s e z se faz pela fórmula

$$z = e^{sT_s}; \quad (188)$$

- Sabemos também da propriedade de periodicidade da amostragem que basta considerar a região do plano s limitada por $\omega = \pm\omega_s/2$. Os polos que aparecem nesta região são replicados fora desta faixa;
- Por fim, sabemos que a relação unívoca entre os planos s e z só é válida para os polos; Nada pode ser afirmado com relação aos zeros.

Mapeando o eixo imaginário

- Vejamos como se faz o mapeamento do eixo imaginário do plano s nestas condições;
- Primeiro, note que

$$z = e^{sT_s} = e^{(\sigma+j\omega)T_s}; \quad (189)$$

- Mas $\sigma = 0$ sobre o eixo imaginário, então

$$z = e^{j\omega T_s} = \cos(\omega T_s) + j\sin(\omega T_s) = \underline{1/\omega T_s}; \quad (190)$$

- Portanto, o eixo imaginário no plano s (restrito na faixa $-\omega_s/2 \leq \omega \leq \omega_s/2$) é visto como o círculo unitário no plano z .

Mapeando os limites da faixa primária

- Se há um polo exatamente sobre uma das faixas primárias

$$z = e^{\sigma \pm j T_s \omega_s / 2}; \quad (191)$$

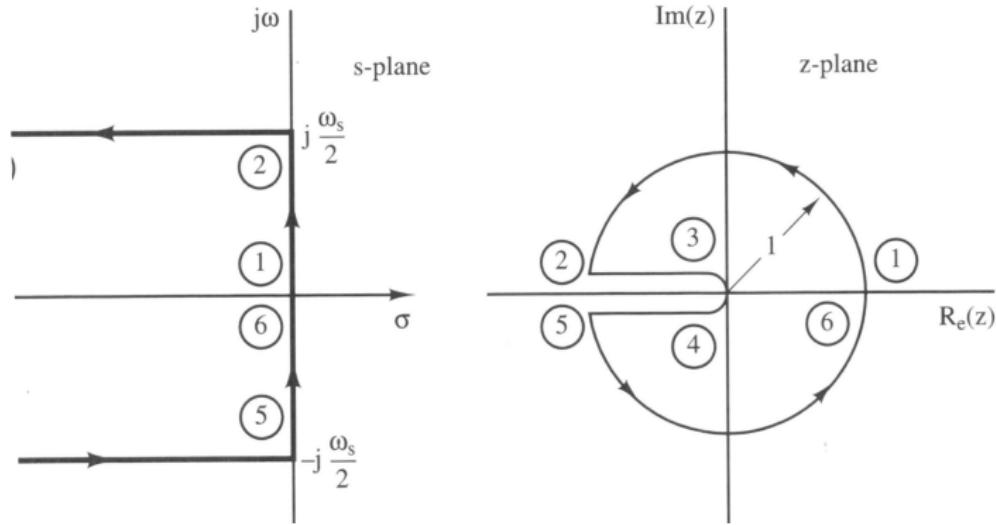
- Mas $\omega_s = 2\pi/T_s$, então $T_s \omega_s / 2 = \pi$;

- Então,

$$z = e^{\sigma T_s} / \underline{\pi}; \quad (192)$$

- Como $\sigma < 0$, um polo sobre um dos limites da faixa primária, será mapeado sobre o eixo real esquerdo do plano z com parte real menor que 1.

Mapeando os limites da faixa primária e o eixo imaginário



Phillips & Nagle, Fig. 6-6

Mapeando um eixo vertical, paralelo ao eixo imaginário

- Tomemos agora um polo sobre um eixo vertical no plano s , paralelo ao eixo imaginário. Neste caso,

$$z = e^{\sigma_1 T_s} e^{j\omega T_s}, \quad (193)$$

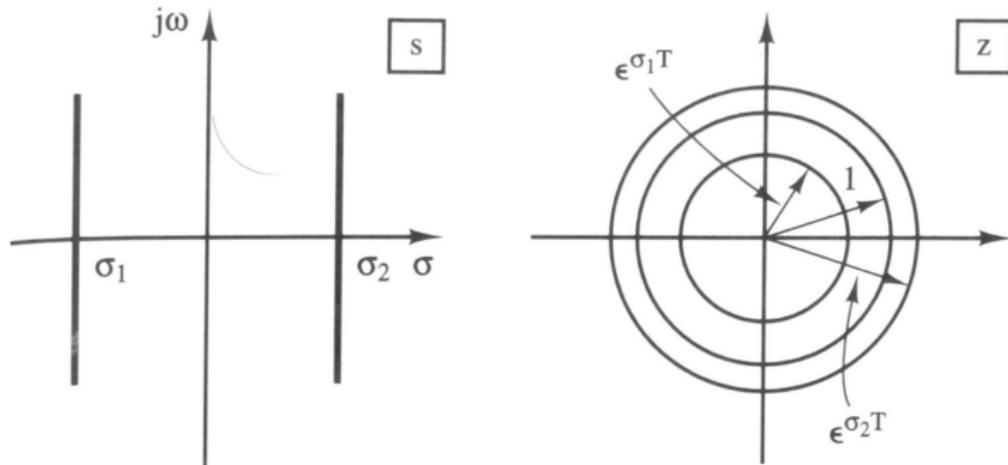
para algum $\sigma_1 \in \mathbb{R}$ com $-\omega_s/2 \leq \omega \leq \omega_s/2$;

- Então

$$z = e^{\sigma_1 T_s} / \underline{\omega T_s}; \quad (194)$$

- Ou seja, um eixo vertical no plano s é mapeado como um círculo no plano z . Se $\sigma_1 < 0$, este círculo tem raio menor que 1. Se $\sigma_1 > 0$, este círculo tem raio maior que 1;

Mapeando um eixo vertical, paralelo ao eixo imaginário



Phillips & Nagle, Fig. 6-7

Estabilidade no plano z

- Note que um polo instável no plano s ($\sigma_1 > 0$) será mapeado fora do círculo unitário no plano z, enquanto um polo estável no plano s ($\sigma_1 < 0$) será mapeado dentro do círculo unitário no plano z;

Propriedade (Estabilidade)

O círculo unitário delimita a região de estabilidade de polos no plano z. Se um polo neste plano estiver no **interior** do círculo unitário, este polo será **estável**. Se um polo neste plano estiver no **exterior** do círculo unitário, este polo será **instável**.

Mapeando um eixo horizontal, paralelo ao eixo real

- Tomemos agora um polo sobre um eixo horizontal no plano s , paralelo ao eixo real. Neste caso,

$$z = e^{\sigma T_s} e^{j\omega_1 T_s}, \quad (195)$$

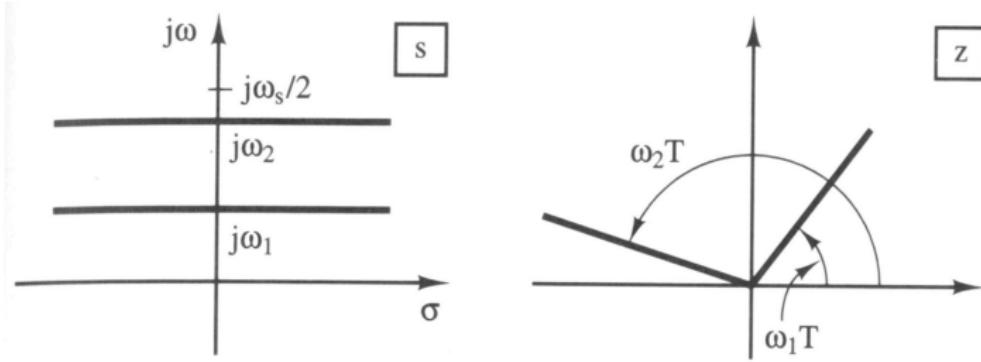
para algum $-\omega_s/2 \leq \omega_1 \leq \omega_s/2$ $\sigma_1 \in \mathbb{R}$ com $-\infty < \sigma < \infty$;

- Então

$$z = e^{\sigma T_s} \underline{e^{j\omega_1 T_s}}; \quad (196)$$

- Isso equivale a um eixo-vetor no plano z , partindo de sua origem, com módulo $e^{\sigma T_s}$ e ângulo $\omega_1 T_s$;
- Obviamente, se $\sigma_1 < 0$ então este vetor estará no interior do círculo unitário no plano z .

Mapeando um eixo horizontal, paralelo ao eixo real



Phillips & Nagle, Fig. 6-8

Mapeando um eixo-vetor

- Por fim, considere um eixo-vetor no plano s , partindo de sua origem, com amplitude σ_1 e ângulo β ;
- Neste caso,

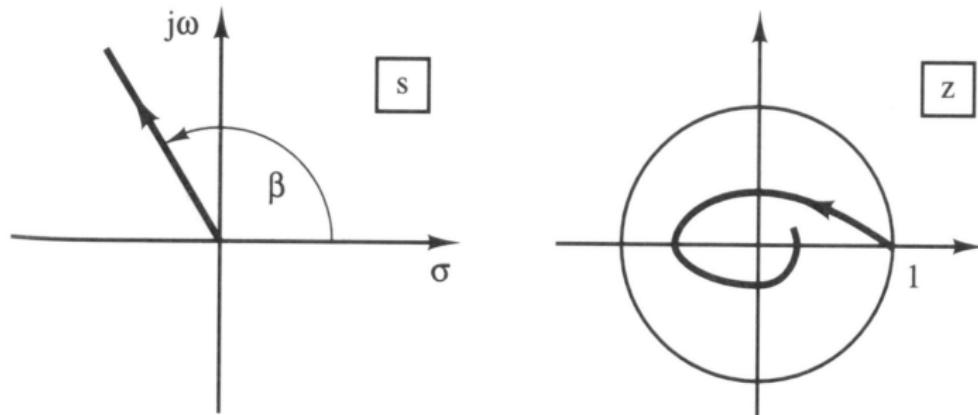
$$\frac{\omega}{\sigma_1} = \operatorname{tg}(\beta); \quad (197)$$

- Então,

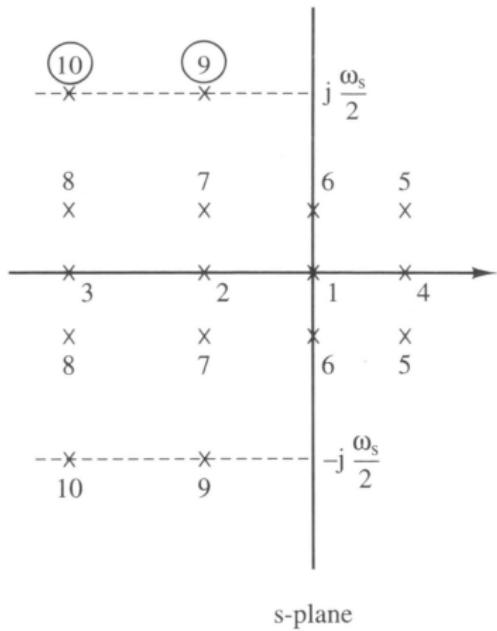
$$z = e^{sT_s} = e^{\sigma_1 T_s} / \underline{\sigma_1 T_s \operatorname{tg}(\beta)}, \quad (198)$$

que é uma espiral logarítmica decrescente com o aumento de σ_1 , $\sigma_1 < 0$.

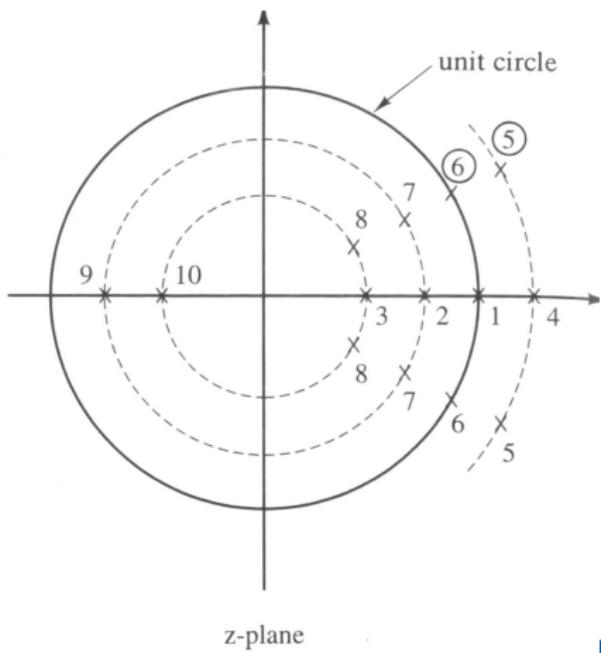
Mapeando um eixo-vetor



Phillips & Nagle, Fig. 6-9

Resumo do mapeamento $s \rightarrow z$ 

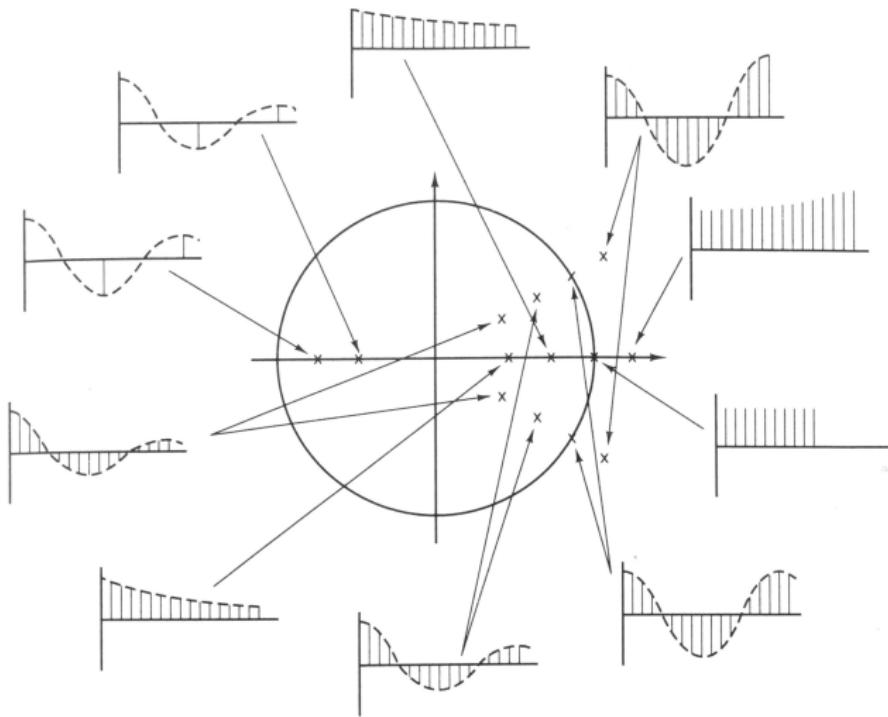
s-plane



z-plane

Phillips & Nagle, Fig. 6-10

Resumo do mapeamento $s \rightarrow z$



Phillips & Nagle, Fig. 6-11

Exercícios

E39

Para as seguintes funções de transferência, com tempo de amostragem $T_s = 0,01s$, pede-se: *i*) seu mapa de polos e zeros no plano s; *ii*) seu mapa de polos no plano z:

a) $G_1(s) = \frac{5(s+1)}{(s+2)}$

b) $G_2(s) = \frac{3(s+4)}{s^2+2s+3}$

c) $G_3(s) = \frac{3(s+1)}{s^2+2s+2}$

d) $G_4(s) = \frac{3(s^2+2s+4)}{s^4+2s^3+3s^2+2s+1}$



Aproximação de e^{sT_s}

- Já vimos que a relação entre os domínios s e z se faz através da relação

$$z = e^{sT_s}; \quad (199)$$

- A fórmula acima, entretanto não é útil quando estamos interessados em obter computacionalmente $H(z)$ via uma expressão em $H(s)$;
- O motivo é que e^{sT_s} não é uma forma computacional fechada, e seu cálculo exige a solução de uma série infinita.

Aproximação de Padé

- Poderíamos usar a aproximação de Taylor para a exponencial;
- Entretanto, para funções complexas com polos e zeros, a aproximação de Padé fornece melhores resultados;
- Assim, aproximamos

$$e^{-x} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \dots}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{48} + \dots}; \quad (200)$$

- Se truncarmos a série em seu segundo termo, chegamos à *aproximação de Padé de primeira ordem*.

Atraso de tempo em s

- A primeira aplicação da aproximação de Padé é na expressão de um sistema contínuo com atraso de tempo;
- Por exemplo, o sistema

$$G(s) = \frac{2e^{-T_0 s}}{s + 2} \quad (201)$$

pode ser aproximado como

$$G(s) \approx \frac{2}{s + 2} \cdot \frac{1 - (T_0/2)s}{1 + (T_0/2)s} \quad (202)$$

se usamos aproximação de Padé de primeira ordem para e^{-sT_0} ;

- Note que esta aproximação implica em introdução de um polo estável adicional, mais um zero no semiplano direito de s .

Análise da variável z

- Se aplicarmos a aproximação de Padé de primeira ordem à variável z , notamos facilmente que

$$z = e^{sT_s} \approx \frac{2 + T_s s}{2 - T_s s}; \quad (203)$$

- Se isolarmos a variável s , temos

$$s \approx \frac{2(z - 1)}{T_s(z + 1)}; \quad (204)$$

- As equações anteriores estabelecem uma relação algébrica entre as variáveis s e z . Podemos usá-la para converter simbolicamente funções de transferência em s em funções de transferência em z .

Transformação bilinear

- Ao par de relações

$$z \approx \frac{2 + T_s s}{2 - T_s s}, \quad s \approx \frac{2 z - 1}{T_s z + 1}; \quad (205)$$

damos o nome de *transformação bilinear* entre as variáveis s e z ;

- Obviamente, esta transformação estabelece uma relação aproximada entre funções de transferência em s e z ;
- Entretanto, se o tempo de amostragem adotado for suficientemente baixo face às dinâmicas envolvidas, esta aproximação fornece bons resultados numéricos.

Transformação bilinear – exemplo

- Seja

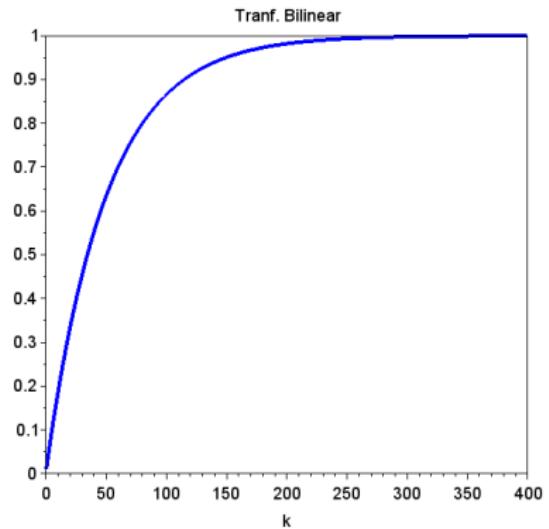
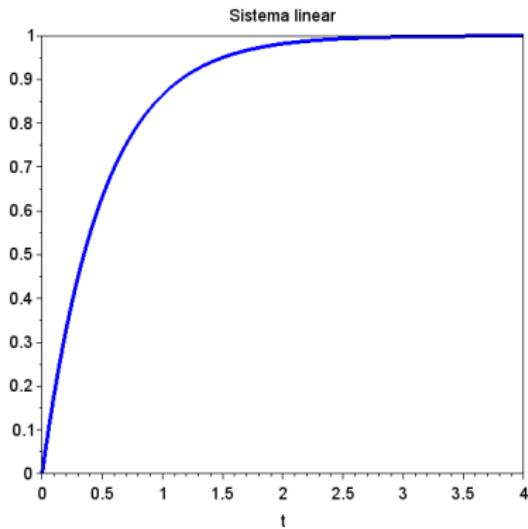
$$G(s) = \frac{2}{s+2}; \quad (206)$$

- Usando a transformação bilinear com $T_s = 0,01s$, temos

$$G(z) = \frac{2(z+1)}{202z-198}; \quad (207)$$

- Note que agora, como estamos aproximando explicitamente o termo e^{sT_s} , não devemos incluir a ação do ZOH ($\mathcal{Z}\{(z-1/z) \cdot (G(s)/s)\}$).

Transformação bilinear – exemplo



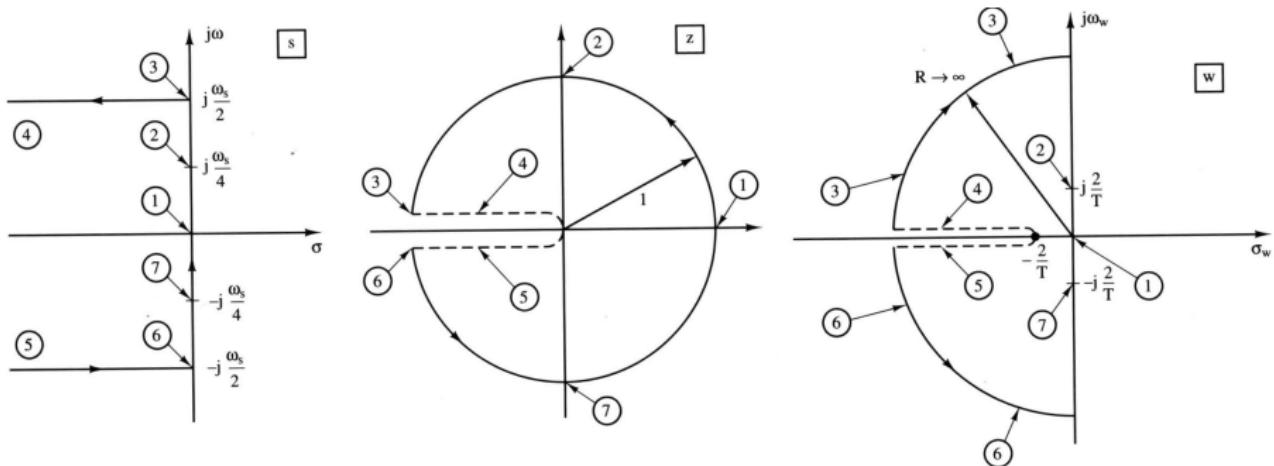
Mapeamento bilinear

- Da mesma forma que no caso do plano z original, podemos estabelecer a relação de mapeamento devida à transformação bilinear;
- Para evitar confusão, vamos definir uma nova variável w , tal que

$$z = \frac{2 + T_s w}{2 - T_s w}, \quad w = \frac{2 z - 1}{T_s z + 1}; \quad (208)$$

- O que faremos é associar os diversos valores de z no seu plano aos possíveis valores de w ;
- Como já fizemos isso quando do mapeamento entre os planos s e z , vamos apenas aos resultados, conforme figura a seguir.

Mapeamento bilinear



Phillips & Nagle Fig. 7-4

Mapeamento bilinear – consequências

- Já concluímos que o mapeamento da faixa primária do plano s se faz como um disco unitário no plano z ;
- Acabamos de ver que a transformação bilinear mapeia o disco unitário no plano z como o semiplano esquerdo no plano w ;
- Isso tem um impacto muito importante no projeto de controladores digitais: se o fizermos no plano w , poderemos utilizar todas as técnicas do controle clássico analógico que já aprendemos em Introdução ao Controle;
- Isso ocorre porque todas aquelas técnicas se baseiam nas características no plano s , características essas “reconstituídas” no plano w , via transformação bilinear.

Exercícios

E40 Considere a função de transferência

$$H(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}.$$

Supondo que este sistema seja amostrado taxas de amostragem de, respectivamente, $\omega_s = 4, 20, 200\pi \text{ rad/s}$, encontre o mapeamento de polos e zeros deste sistema nos planos s , z e w para cada frequência. Comente os resultados.



E41 Seja o polo $z_1 = a + jb$, $a, b \in \mathbb{R}$, no plano z . Este polo será instável se $a^2 + b^2 > 1$ (por que?). Nessas condições, mostre que isto conduzirá a um polo no semiplano direito do plano w , quando da aplicação da transformação bilinear sobre z_1 .

Exercícios

- E42** Comente a seguinte observação: o método do Lugar das Raízes pode ser aplicado, em sua forma original, em qualquer dos planos (s , z e w).
- E43** Sabe-se que o critério de Routh permite averiguar a estabilidade de uma função de transferência contínua através de uma análise algébrica de seu polinômio denominador. Comente sobre a viabilidade de utilização deste critério para análise da estabilidade para uma função de transferência $H(z)$ e uma função de transferência $H(w)$. Isso é possível em ambos os casos? Por que?
- E44** Sabe-se que a função de transferência de um integrador contínuo é dada por $H(s) = 1/s$. Encontre $H(z)$ e $H(w)$. O posicionamento do polo de $H(w)$ está coerente com o esperado? E com relação ao zero? Comente.

Solução dos Exercícios

E1 Basta resolver $\int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt$.

E2 $X(s) = \frac{5}{s(s+1)}$; $x(t \rightarrow \infty) = 5$.

E3 $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-0,3s+3}{s^3+2s^2-s-1,2}$.

E4 Use a propriedade do delta de Dirac na definição da transformada de Laplace.

E5

a) $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_c}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_1 G_2 G_3 G_c H_2}$

b) $\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_1 G_2 G_3 G_c H_2}$

E6 $\mathcal{L}\{\dot{r}(t)\} = s\mathcal{L}\{r(t)\} = s/s^2 = u(t)$

E7 Controlador: seu cérebro. Atuadores: braços e pernas sobre o volante e acelerador, respectivamente. Sinais manipulados: ângulo de esterçamento do volante, força aplicada no acelerador. Sinais controlados: velocidade, direção, etc.

E8 $\frac{+10 - (-10)}{2^{24}} \approx 1,19 \mu V$

E9

- a) $F_s = 1\text{Hz} \Rightarrow f^*(t) = \{0, 1, 4, 9, \dots, 100\}$
- b) $F_s = 10\text{Hz} \Rightarrow f^*(t) = \{0, 0.01, 0.04, 0.09, \dots, 1\}$
- c) $F_s = 100\text{Hz} \Rightarrow f^*(t) = \{0, 0.0001, 0.0004, 0.0009, \dots, 0.01\}$

E10

- a) $F_s = 1\text{Hz} \Rightarrow f_{ZOH}^*(t = 0,75) = 0 \therefore e = 0,5625$
- b) $F_s = 10\text{Hz} \Rightarrow f_{ZOH}^*(t = 0,75) = 0,7 \therefore e = 0,0725$
- c) $F_s = 100\text{Hz} \Rightarrow f_{ZOH}^*(t = 0,75) = 0,75 \therefore e = 0$

E11 Pense no esforço computacional de realizar os cálculo de controle em frequências próximas a do clock do computador, face ao tempo de acomodação de um sistema de controle típico.

E12 A implementação da pag. 26 me parece melhor, pois todos os cálculos (inclusive a seleção de referência) está “dentro” do computador. Do ponto de vista prático, essa solução é melhor – e é de fato mais empregada – que a solução da pag. 31.

E13 Na definição da transformada Z, temos $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT_s} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-aT_s} z^{-1})^k$. Levando este resultado na Eq. (??), chega-se ao resultado.

E14

a) atraso: note que $u[k-n] = 1 \Leftrightarrow k \geq n$. Fazendo então $l = k - n$:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{e[k-n]u[k-n]\} &= \sum_{k=n}^{\infty} e[k-n]z^{-k} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} e[l]z^{-(l+n)} = z^{-n} \sum_{l=0}^{\infty} e[l]z^{-l} \\ &= z^{-n}E(z)\end{aligned}$$

b) avanço: fazendo $l = k + n$, temos $k = l - n$ e $k = 0 \Rightarrow l = n$.
Então:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{e[k+n]u[k]\} &= \sum_{k=0}^{\infty} e[k+n]z^{-k} = \sum_{l=n}^{\infty} e[l]z^{-(l+n)} = z^n \left[\sum_{l=n}^{\infty} e[l]z^{-l} \right] \\ &= z^n \left[\sum_{l=0}^{\infty} e[l]z^{-l} - \sum_{l=0}^{n-1} e[l]z^{-l} \right] \\ &= z^n \left[E(z) - \sum_{l=0}^{n-1} e[l]z^{-l} \right]\end{aligned}$$

E15 Aplicação direta do teorema de translação complexa, multiplicado-se e dividindo-se por e^{2a} .

E16-

Tomemos

$$\mathcal{Z}\{e[k+1] - e[k]\} = L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=0}^n e[k+1]z^{-k} - \sum_{k=0}^n e[k]z^{-k} \right\}$$

Desenvolvendo o somatório da direita temos...

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{e[1] - e[0] + z^{-1}(e[2] - e[1]) + \cdots + z^{-(n-1)}(e[n+1] - e[n])\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{-e[0] + e[1](1 - z^{-1}) + \cdots + e[n](z^{-(n-1)} - z^{-n}) + e[n+1]z^{-n}\} \end{aligned}$$

Mas note que $\lim_{z \rightarrow 1} (z^{-(n-1)} - z^{-n}) = 0$, $\forall n > 0$, sobrando apenas o primeiro e último termos da série acima. Assim:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \mathcal{Z}\{e[k+1] - e[k]\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{e[n+1] - e[0]\}.$$

E16-

Continuação:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \mathcal{Z}\{e[k+1] - e[k]\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{e[n+1] - e[0]\}.$$

Mas pela propriedade da translação real, temos que $\mathcal{Z}\{e[k+1] - e[k]\} = zE(z) - ze[0] + E(z)$, ou $\mathcal{Z}\{e[k+1] - e[k]\} = (z-1)E(z) - ze[0]$. Assim:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \mathcal{Z}\{e[k+1] - e[k]\} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) - e[0] = \lim_{n \rightarrow \infty} e[n+1] - e[0].$$

O que decorre, finalmente:

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} e[n].$$

E17

- a) Se você aplicar o teorema do valor final, $f[k \rightarrow \infty] = \lim_{z \rightarrow 1} F(z) = \infty$! Mas note que a transformada inversa de $F(z)$ pela tabela implica que $f[k] = k$ e de fato $f[k \rightarrow \infty]$ explode. Você deve estar atento(a) que os limites apresentados no teorema do valor final **só valem se** $f[k]$ converge para algum valor finito!
- b) $1/(z(z-1)^2)$
- c) $(z(2z-1))/((z-1)^2)$

E18

$$F(z) = \frac{0,086z}{(z-1)(z-0,741)}$$

E19

$$G(z) = \frac{z(9,35 \times 10^{-3}z + 8,75 \times 10^{-3})}{(z-1)(z^2 - 1,801z + 0,819)}$$

E20

$$F(z) = \frac{3e^{2T_s}}{z^2(ze^{2T_s} - 1)} + \frac{2z\sin(-3T_s)}{z^2 - 2z\cos(-3T_s) + 1}$$

E21 $f[k] = 2^k - 1$

E22 $f[2] = 0$

E23 $f[k] = 0,75 + 0,25 \cdot 0,6^k$

E24 $f[k] = 4 \cdot 0,9803^k \cdot \sin(0,025k)$

E25 $f[k] = 0,5 [1 - 0,81873^k (\cos(0,5k) + 0,4\sin(0,5k))]$

E26 $f[k] = 2 [1 - 0,9048^k (\cos(0,3k) + 0,333\sin(0,3k))]$

E27

- a) Na sua opinião, qual seria a forma mais natural de implementar computacionalmente (código) essa equação de diferenças?
Na forma original ou na forma atrasada?

b) $\frac{X(z)}{F(z)} = \frac{z}{z^3 - 2z^2 + z - 0,3}$

- c) Zeros: $z = 0$. Polos: $z_1 = 1,4542$ e $z_{2,3} = 0,2729 \pm 0,3631j$

E28

- a) $y[0] = 0$
b) $y[k \rightarrow \infty] = 1$

E29 Aplicação da definição.**E30**

- a) $k = 10 \Rightarrow f^*(kT_S) = 0$
b) $k = 20 \Rightarrow f^*(kT_S)$ não definido
c) $k = 30 \Rightarrow f^*(kT_S) = 1$

E31

$$M^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-T_s(s+2+\ln(2))}}$$

E32-

a)

$$F^*(s) = \frac{20}{3} \left[\frac{1}{1 - e^{-T_s(s+2)}} - \frac{1}{1 - e^{-T_s(s+5)}} \right]$$

b)

$$F^*(s) = 5 \left[\frac{1}{1 - e^{-T_s s}} - \frac{1}{1 - e^{-T_s(s+1)}} \right]$$

c)

$$F^*(s) = 2 \left[\frac{1}{1 - e^{-T_s s}} - \frac{0,5}{1 - e^{-T_s(s+1)}} \right]$$

d)

$$F^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-T_s(s+1)}} + \frac{2}{1 - e^{-T_s s}} + \frac{(1 - T_s)e^{-T_s s} - 1}{1 - 2e^{-T_s s} + e^{-2T_s s}}$$

e)

$$F^*(s) = 6 \left[\frac{1}{20(1 - e^{-T_s s})} - \frac{0,5}{1 - e^{-T_s(s+4)}} - \frac{1}{5(1 - e^{-T_s(s+5)})} \right]$$

E32-

f)

$$F^*(s) = \frac{\sin(2T_s)e^{-Ts(s+1)}}{1 - 2\cos(2T_s)e^{-Ts(s+1)} + e^{-2Ts(s+1)}}$$

E33

- a) $\omega_s > 100\pi \text{ rad/s}$
- b) $\omega_s > 40\pi \text{ rad/s}$
- c) Com esta frequência haverá aliasing na amostragem de $y(t)$. Para evitá-lo, deve se projetar um filtro passa-baixa cuja frequência de corte seja menor que $30\pi \text{ rad/s}$. No caso, poderiam ser recuperados, no máximo, os 14 primeiros termos do sinal $y(t)$.

E34

- a) $e_{ZOH} = 0,20.$
- b) $e_{FOH} = 0,025.$

E35

a)

$$G_{p1}(z) = \frac{0,4532}{z - 0,8187}$$

b)

$$G_{p2}(z) = \frac{0,3}{z - 1}.$$

c)

$$G_{p3}(z) = \frac{0,01402z + 0,01312}{z^2 - 1,801z + 0,8187}.$$

d)

$$G_{p4}(z) = \frac{0,03064z + 0,02681}{z^2 - 1,629z + 0,6703}.$$

e)

$$G_{p5}(z) = \frac{0,01811z + 0,01639}{z^2 - 1,724z + 0,7408}.$$

E36 Não. Para este problema, fazer o tempo de amostragem igual ao tempo de atraso evita o uso da transformada Z modificada, mas fere o teorema da amostragem de Shannon.

E37

- a) C_1 pulsante:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_1(z)}{1 + G_2(z)\overline{H_1 + H_2}(z)}.$$

- b) C_2 pulsante: não é possível obter a F.T. de malha fechada.
 c) C_3 pulsante: não é possível obter a F.T. de malha fechada.

E38

- a) C_1 e C_2 pulsantes:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + \overline{G \cdot H_2}(z) + G(z)H_1(z)}.$$

- b) C_1 e C_3 pulsantes:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + \overline{G \cdot H_2}(z) + \overline{G \cdot H_1}(z)}.$$

- c) C_2 e C_3 pulsantes: não é possível obter a F.T. de malha fechada.

E39

- a) C_2 pulsante: $EC(z) = 1 + G_I(z) = 0$, com $G_I(z) = \mathcal{Z}\{GH_1/(1+GH_2)\}$.
- b) C_3 pulsante: $EC(z) = 1 + G_I(z) = 0$, com $G_I(z) = \mathcal{Z}\{GH_2/(1+GH_1)\}$.

E40

- a) C_1 e C_3 pulsantes: $EC(z) = 1 + \overline{GH_1}(z) + \overline{GH_2}(z) = 0$.
- b) C_2 e C_3 pulsantes:

$$EC(z) = 1 + \overline{GH_1}(z) + \overline{GH_2}(z) + \overline{GH_1}(z) \cdot \overline{GH_2}(z) - G(z)\overline{GH_1H_2}(z) = 0.$$

E41 Faça os gráficos, lembrando-se que no plano z só vale a faixa primária do plano s^* .

E42 Idem ao anterior.

E43 Faça $a_0 = \sqrt{1 - b^2} + \epsilon_0$ com $\epsilon_0 > 0$. Disso decorrerá que $a_0^2 + b^2 > 1$. Agora, substitua $z_1 = a_0 + jb$. Usando tal z_1 na transformação bilinear, você obterá um w_1 que tem parte real positiva (após alguma manipulação algébrica). Isso mostra a proposição.

- E44** Como o método de Lugar das Raízes se baseia somente em questões geométricas da equação característica, os passos de obtenção são os mesmos independente do plano escotado, **exceto** pelo cálculo dos pontos de cruzamento com os limites de estabilidade.
- E45** O critério de Routh visa a obter as condições sobre um polinômio para as quais haja raízes de parte real positiva para este polinômio. Assim, este método se aplica a planos onde a caracterização de estabilidade se faça por meio da *parte real* dos polos (planos s e w). Tal método não se aplica para testar estabilidade no plano z .
- E46** As expressões são facilmente obtidas. O polo aparece no lugar esperado nos três planos. Neste caso, os planos s e z não possuem zeros, concordando entre si. Mas há um zero no plano w , que será tão mais desprezível quanto menor T_s . Isso mostra que métodos distintos de discretização mantêm o número de polos, mas não garantem o mesmo para os zeros.