

EMB-5602 – Controle Digital

Módulo II – Técnicas de Controle Digital

Prof. Dr. Alexandro Garro Brito

Sumário I

- 1 Requisitos de Controle Digital
- 2 Estabilidade de sistemas digitais
- 3 Análise do Lugar das Raízes
- 4 Resposta em Frequência
- 5 Projeto de controle digital
- 6 Controlador PID Digital
- 7 Controlador DeadBeat
- 8 Projeto de Controladores no Domínio da Frequência
- 9 Solução dos Exercícios

Análise de Sistemas de Controle Digital

Análise da resposta temporal

- Analisar a resposta temporal de um sistema de controle é de fundamental importância, pois todos os requisitos de controle serão obviamente baseados nesta resposta;
- Primeiramente, vamos estudar duas classes de sistemas muito importantes: os sistemas de 1^a e 2^a ordem;
- Vamos a seguir especificar alguns critérios de requisitos sobre a resposta temporal que balizarão o projeto do controlador.

Sistema de 1ª ordem

- Considere o sistema contínuo

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K \cdot a}{s + a}; \quad (1)$$

- Amostrando o sistema com tempo de amostragem T_s e aplicando o ZOH, temos

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z - 1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{K \cdot a}{s(s + a)} \right\}; \quad (2)$$

- Aplicando a transformada Z, chegamos a

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z - 1}{z} \times \frac{z}{z - 1} \times \frac{K(1 - e^{-aT_s})}{z - e^{-aT_s}} = \frac{K(1 - e^{-aT_s})}{z - e^{-aT_s}}; \quad (3)$$

Sistema de 1ª ordem

- Se a entrada for um degrau unitário,

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} \times \frac{K(1 - e^{-aT_s})}{z - e^{-aT_s}}; \quad (4)$$

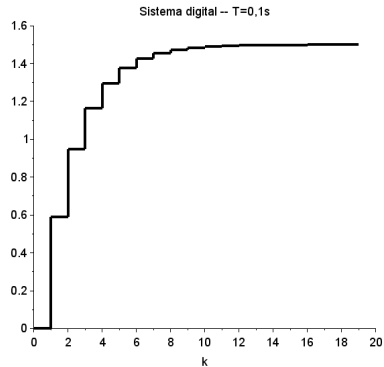
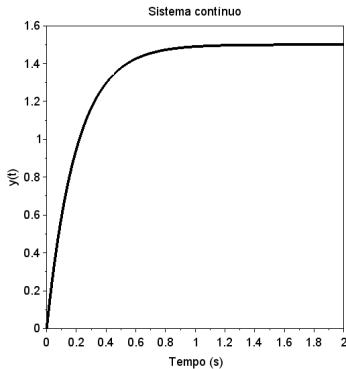
- Tomando a transformada Z inversa, chegamos a

$$y(kT_s) = K (1 - e^{-akT_s}); \quad (5)$$

- Portanto, a resposta temporal de um sistema de 1ª ordem a um degrau unitário caracteriza-se por uma exponencial que converge para o valor final K com o passar do tempo.

Sistema de 1ª ordem – exemplo

Considere $a = 5$, $K = 1,5$ e $T_s = 0,1$ s. Simulando a resposta do sistema contínuo e digital, chegamos a



Sistema de 2ª ordem

- Considere agora o sistema contínuo

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}; \quad (6)$$

- Amostrando o sistema com tempo de amostragem T_s e aplicando o ZOH, temos

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{K \cdot \omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \right\}; \quad (7)$$

- Aplicando a transformada Z, chegamos a

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z-1}{z} \times \frac{z}{z-1} \times \frac{K(Az + B)}{z^2 - 2ze^{-aT_s} \cos(bT_s) + e^{-2aT_s}}, \quad (8)$$

onde $\omega_n^2 = a^2 + b^2$ e $\zeta\omega_n = a$.

Sistema de 2ª ordem

- Se a entrada for um degrau unitário,

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} \times \frac{K(Az + B)}{z^2 - 2ze^{-aT_s} \cos(bT_s) + e^{-2aT_s}}; \quad (9)$$

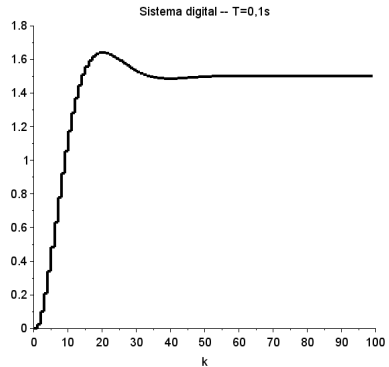
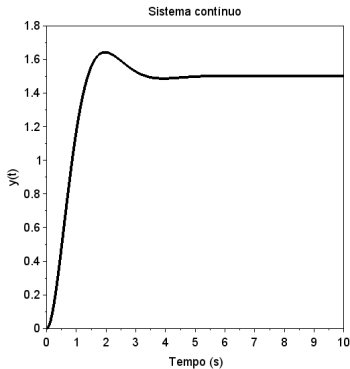
- Tomando a transformada Z inversa, chegamos a

$$y(kT_s) = K \left[1 - e^{-akT_s} \left(\cos(bkT_s) + \frac{a}{b} \sin(bkT_s) \right) \right]; \quad (10)$$

- Portanto, a resposta temporal de um sistema de 2ª ordem a um degrau unitário caracteriza-se por um sinal oscilatório, assintoticamente amortecido até o valor final K .

Sistema de 2ª ordem – exemplo

Considere $\zeta = 0,6$, $\omega_n = 2$, $K = 1,5$ e $T_s = 0,1$ s. Simulando a resposta do sistema contínuo e digital, chegamos a



Sistema de 2ª ordem

- No sistema contínuo de 2ª ordem, há três invariantes (só dependem do sistema e não do sinal aplicado): o ganho K , a frequência natural ω_n e o coeficiente de amortecimento ζ ;
- Vamos tentar obter expressões para a relação entre esses parâmetros e seus pares no caso digital;
- Primeiro, observe que:

$$G(z) = \frac{K(Az + B)}{z^2 - 2ze^{-aT_s} \cos(bT_s) + e^{-2aT_s}} = \frac{K(Az + B)}{z^2 - 2\zeta_z \omega_z z + \omega_z^2}; \quad (11)$$

- Note que ζ_z e ω_z são apenas duas definições de variáveis e elas não têm **nada** a ver com um coeficiente de amortecimento e com uma frequência natural.

Sistema de 2ª ordem

- Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}\zeta\omega_z &= e^{-aT_s} \cos(bT_s) \\ \omega_z^2 &= e^{-2aT_s};\end{aligned}\tag{12}$$

- Mas já vimos que para o sistema contínuo $\omega_n^2 = a^2 + b^2$ e $\zeta\omega_n = a$.
Dessa forma,

$$\begin{aligned}b &= \sqrt{\omega_n^2 - a^2} \\ &= \sqrt{\omega_n^2 - \zeta^2\omega_n^2} \\ &= \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2};\end{aligned}\tag{13}$$

Sistema de 2ª ordem

- Substituindo as relações de a e b , chegamos a:

$$\begin{aligned}\zeta_z \omega_z &= e^{-\zeta \omega_n T_s} \cos(\omega_n T_s \sqrt{1 - \zeta^2}) \\ \omega_z^2 &= e^{-2\zeta \omega_n T_s};\end{aligned}\tag{14}$$

- Da segunda das expressões acima, chegamos a

$$\omega_n = -\frac{\ln(\omega_z)}{T_s \cdot \zeta};\tag{15}$$

- Da outra expressão, vemos que:

$$\begin{aligned}\zeta_z \omega_z &= e^{-\zeta \omega_n T_s} \cos(\omega_n T_s \sqrt{1 - \zeta^2}) \\ &= \omega_z \cos(\omega_n T_s \sqrt{1 - \zeta^2})\end{aligned}\tag{16}$$

Sistema de 2ª ordem

- Elaborando a expressão...

$$\zeta_z = \cos \left[\left(\frac{-\ln(\omega_z)}{\zeta} \right) \sqrt{1 - \zeta^2} \right]; \quad (17)$$

- Então,

$$\arccos(\zeta_z) = -\ln(\omega_z) \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}; \quad (18)$$

- Finalmente equacionando ζ , chegamos a

$$\zeta = \sqrt{\frac{1}{1 + \left[\frac{\arccos(\zeta_z)}{\ln(\omega_z)} \right]^2}}. \quad (19)$$

Sistema de 2ª ordem – conclusão

- Considere um sistema contínuo de 2ª ordem e seu equivalente digital

$$G(s) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad G(z) = \frac{K(Az + B)}{z^2 - 2\zeta_z\omega_z z + \omega_z^2}; \quad (20)$$

- Então

$$\omega_z = e^{-\zeta\omega_n T_s}, \quad \zeta_z = \cos(\omega_n T_s \sqrt{1 - \zeta^2}); \quad (21)$$

$$\omega_n = -\frac{\ln(\omega_z)}{T_s \cdot \zeta}, \quad \zeta = \sqrt{\frac{1}{1 + \left[\frac{\arccos(\zeta_z)}{\ln(\omega_z)} \right]^2}}. \quad (22)$$

Exercícios

- 1 Sejam os seguintes sistemas digitais de primeira ordem com $T_s = 0,1$ s. Obtenha seu ganho e sua constante de tempo:

$$H_1(z) = \frac{0,3625}{z - 0,8187} \quad H_2(z) = \frac{0,3625}{z - 0,4562}.$$

- 2 Sejam os seguintes sistemas digitais de segunda ordem com $T_s = 0,1$ s. Obtenha ζ , ω_n e K do sistema contínuo equivalente em cada caso.

$$H_3(z) = \frac{0,341z + 0,291}{z^2 - z + 0,632} \quad H_4(z) = \frac{0,028z + 0,026}{z^2 - 1,7511z + 0,7866}.$$

- 3 Considere uma planta contínua $G(s)$ de segunda ordem sem zeros e com ganho estático unitário. Suponha duas situações a saber: i) Um sistema de controle contínuo para $G(s)$ com controlador proporcional K_{pc} , e; ii) Um sistema de controle digital para a planta discretizada $G(z)$ com controlador proporcional K_{pd} . Considere $G_{mf}(s)$ e $G_{mf}(z)$ a função de transferência de malha fechada do sistema contínuo e discreto respectivamente. Mostre, então, que se $K_{pc} = K_{pd}$ isso implicará que os ganhos estáticos de $G_{mf}(s)$ e $G_{mf}(z)$ serão iguais independentemente do tempo de amostragem T_s .

Sistema de 2ª ordem – requisitos de desempenho

- Da mesma forma que no caso contínuo, desejamos estabelecer certos requisitos de desempenho sobre a resposta transitória do sistema digital;
- Entre os principais requisitos estão o *percentual de sobressinal*, o *tempo de acomodação* e o *tempo de pico*;
- Podemos derivar expressões para os requisitos especificamente para o caso digital. Mas isso resultaria em trabalho grande, sem utilidade real que o justifique;
- Dado que o sistema digital sempre será derivado de um sistema físico (e, portanto, contínuo), podemos usar as expressões contínuas e adequá-las para o caso digital;
- Para isso, precisaremos lançar mão das expressões (21) e (22).

Tempo de acomodação

- O tempo de acomodação mede o intervalo de tempo necessário para que a resposta transitória fique confinada em uma faixa de $\pm 2\%$ de seu valor final;
- Do curso de controle contínuo, temos que uma expressão para este requisito é

$$T_{aco} = \frac{4}{\zeta \omega_n}; \quad (23)$$

- No caso de projeto de um controlador digital em que se deseja um tempo de acomodação (discreto) específico, podemos obter a relação $\zeta \omega_n$ equivalente da expressão acima e aplicar (21) e (22) para obter $\zeta_z \omega_z$;
- Isso ajuda na escolha dos polos em z que atendem um determinado requisito para o tempo de acomodação.

Tempo de pico

- O tempo de pico mede o intervalo de tempo necessário para que a resposta transitória alcance seu valor máximo. É portanto uma medida de rapidez deste sistema
- Do curso de controle contínuo, temos que uma expressão para este requisito é

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}; \quad (24)$$

- No projeto de um controlador digital, o mesmo dito anteriormente vale aqui: obter ζ e ω_n para o tempo desejado e calcular os respectivos ζ_z e ω_z (ou vice-versa);

Percentual de sobressinal

- Alguns sistemas de controle precisam que o pico da resposta transitória não ultrapasse um determinado valor;
- O percentual de sobressinal é a relação percentual entre o pico da resposta transitória e seu valor final;
- Do curso de controle contínuo, temos que uma expressão para este requisito é

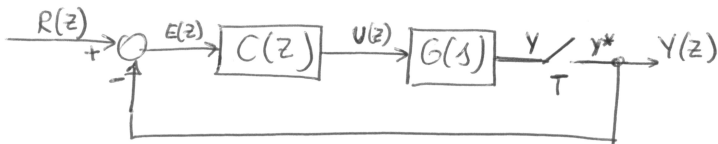
$$PSS = 100e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \%. \quad (25)$$

Note que este requisito só depende do coeficiente de amortecimento;

- Mais uma vez, no projeto de um controlador digital utilizam-se as relações (21) e (22) para encontrar os parâmetros do respectivo sistema digital para uma especificação de PSS.

Erro em estado estacionário

- Considere o sistema de controle digital a seguir:



- A função de transferência de malha fechada é

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)}; \quad (26)$$

- A função de transferência da entrada para o sinal de erro é

$$\frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + C(z)G(z)}; \quad (27)$$

- Aplicando um sinal degrau unitário na entrada, temos:

$$E(z) = \frac{z}{z-1} \times \frac{1}{1 + C(z)G(z)}. \quad (28)$$

Erro em estado estacionário

- Do teorema do valor final da transformada Z, temos que o erro em estado estacionário é

$$e_{ss} = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT_s) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)E(z); \quad (29)$$

- Então,

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT_s) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \times \frac{z}{z - 1} \times \frac{1}{1 + C(z)G(z)} \\ &= \frac{1}{1 + C(1)G(1)}; \end{aligned} \quad (30)$$

- Este requisito será muito usado para verificar a precisão do sistema digital em malha fechada.

Erro em estado estacionário

- Note que se $C(z)G(z)$ possuir um polo em $z = 1$ (adicional ao já introduzido pelo ZOH), então

$$\begin{aligned}e_{ss} &= \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \times \frac{z}{z - 1} \times \frac{1}{1 + (\tilde{C}(z)\tilde{G}(z)/z - 1)} \\ &= 0,\end{aligned}\tag{31}$$

onde $C(z)G(z) = \tilde{C}(z)\tilde{G}(z)/z - 1$.

- Isso equivale dizer que a presença de polos em $z = 1$ (efeito integrador em z) tem o efeito de zerar o erro em estado estacionário.

Erro à rampa

- Seja um sinal rampa unitária $r(t) = t$. Sua função de transferência fica:

$$R(z) = \frac{T_s z}{(z - 1)^2}; \quad (32)$$

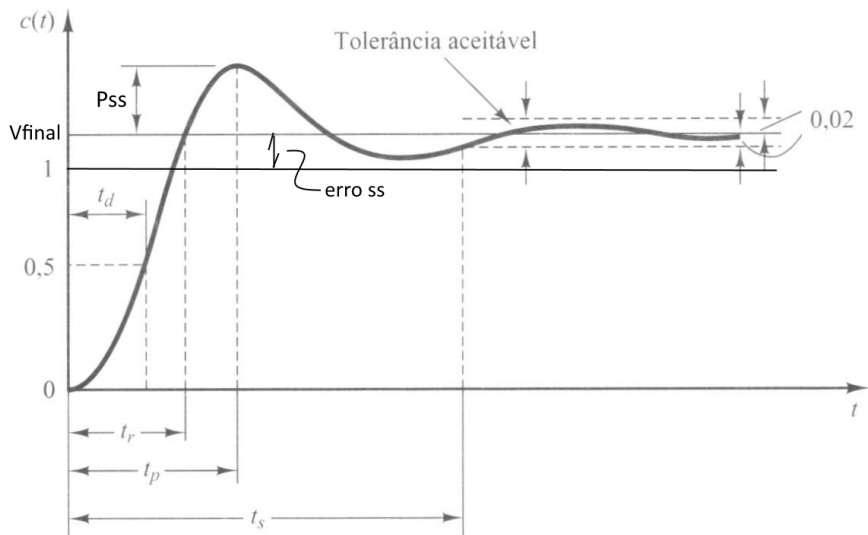
- Então, o erro em estado estacionário fica

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT_s) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \times \frac{T_s z}{(z - 1)^2} \times \frac{1}{1 + C(z)G(z)} \\ &= \infty; \end{aligned} \quad (33)$$

- Entretanto, se $C(z)G(z)$ possuir um polo em $z = 1$ (adicional ao já introduzido pelo ZOH), então

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT_s) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \times \frac{T_s z}{(z - 1)^2} \times \frac{1}{1 + (C(z)G(z)/z - 1)} \\ &= \frac{T_s}{C(1)G(1)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Requisitos de desempenho – resumo




Exercícios

4 Considere um sistema de controle que possa ser aproximado, em malha fechada, por um sistema de 2ª ordem subamortecido, de ganho estático K , coeficiente de amortecimento ζ e frequência natural ω_n . Suponha também que os possíveis zeros do sistema em malha fechada são dominados pelos 2 polos do sistema. Deseja-se que este sistema de controle atenda aos requisitos:

- i) Tempo de amostragem de 0,1s;
- ii) Tempo de acomodação de 2s, e;
- iii) Percentual de sobressinal de, aproximadamente, 10%.

Nestas condições encontre os polos de malha fechada no plano z para que o respectivo sistema de controle em sua versão discreta atenda aos mesmos requisitos.

Exercícios

- 5 Em um sistema de controle digital, a planta discretizada é $G(z) = (0,028z+0,026)/(z^2-1,7511z+0,7866)$ e o controlador proporcional é $C(z) = K_p$.
- a) Encontre K_p tal que o erro em estado estacionário seja menor que 0,01 para um referência em degrau unitário;
 - b) Mostre que o valor de K_p torna o sistema digital em malha fechada instável;
 - c) Explique as razões da inconsistência acima.
 - d)  Encontre o valor máximo de K_p para que o sistema seja estável em malha fechada;
 - e) Use $K_p = 8$ e mostre que para este sistema de malha fechada não se pode esperar um erro ao estado estacionário ao degrau unitário menor que 7%.

Conceito de estabilidade

Definição (Estabilidade)

*Um sistema é dito ser **estável** se ele possui uma resposta limitada a uma entrada limitada.*

*De uma forma mais formal, suponha que seja aplicada uma entrada a um sistema tal que o limite $\lim_{k \rightarrow \infty} u(kT)$ seja finito. Se a resposta do sistema a esta entrada resultar em um sinal $y(kT)$ tal que o limite $\lim_{k \rightarrow \infty} y(kT)$ também seja finito, dizemos que o sistema é **estável**. Do contrário, o sistema é **instável**.*

Função de transferência e estabilidade

- Já vimos que a região delimitada pelo círculo unitário demarca a localização de polos estáveis no plano \mathcal{Z} ;
- Outra forma de se verificar isso é através de uma função de transferência genérica:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z f(z)}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_2z^2 + a_1z + a_0}; \quad (35)$$

- Para uma entrada limitada $U(z)$ e usando expansão por frações parciais, podemos escrever a saída como:

$$Y(z) = \frac{l_1 z}{z - p_1} + \frac{l_2 z}{z - p_2} + \dots + \frac{l_n z}{z + p_n} + Y_U(z); \quad (36)$$

Função de transferência e estabilidade

$$Y(z) = \frac{l_1 z}{z - p_1} + \frac{l_2 z}{z - p_2} + \cdots + \frac{l_n z}{z - p_n} + Y_U(z);$$

- Mas sabemos que

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{l_i z}{z - p_i} \right\} = l_i \cdot p_i^{kT}; \quad (37)$$

- Se $|p_i| < 1$, $p_i \in \mathbb{C}$, a referida exponencial converge para 0 quando $k \rightarrow \infty$;
- Então na expressão de $y(kT)$, se o módulo de qualquer dos polos de $G(z)$ for maior que a unidade, a respectiva exponencial tende para infinito e $y(kT)$ também tenderá para o infinito.

Função de transferência e estabilidade

- Então, se a função de transferência em questão possuir pelo menos um polo com módulo maior que a unidade, o sistema será **instável**;
- Ao contrário, se todos os polos da função de transferência possuírem módulo menor que a unidade, o sistema será **estável**;
- Se $|p_i| = 1$, aquela exponencial nem cresce e nem decresce. Neste caso, o sistema será **marginalmente estável**. Note que um termo $z/z-1$ equivale a um integrador na malha!

Teste de estabilidade de Jury

- Sendo $G(z)$ uma função de transferência de um sistema digital, precisamos de algum método para saber se os polos estão no interior do disco unitário;
- Note que o critério de estabilidade de Routh **não funciona** no plano \mathcal{Z} , pois ele testa a posição de polos em semiplanos e não em discos!!!
- Uma primeira tentativa é achar uma condição algébrica sobre o polinômio denominador para testar as condições para as quais haverá polos fora do disco;

Teste de estabilidade de Jury

- O teste consiste em se montar uma tabela com os coeficientes do polinômio característico $Q(z)$ e, então efetuar uma série de operações de determinantes sobre os elementos;
- De acordo com o resultado do testes, pode-se afirmar que tal polinômio característico é estável ou não;
- Como não é objetivo deste curso se aprofundar em métodos algébricos de pesquisa de estabilidade, trataremos o teste de estabilidade de Jury através de exemplos.



Eliahu Jury (*Iraque, 1923–*) é um premiado engenheiro e pesquisador na área de sistemas de controle. Desenvolveu a *transformada Z modificada* e o teste de estabilidade descrito a seguir.

Teste de estabilidade de Jury - exemplo 1

- Seja a equação característica de um sistema em malha fechada

$$Q(z) = z^3 - 1,8z^2 + 1,05z - 0,20 = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0, \quad (38)$$

deseja-se pesquisar se este é estável;

- Primeiramente, monta-se o dispositivo

z^0	z^1	z^2	z^3
a_0	a_1	a_2	a_3
a_3	a_2	a_1	a_0

- No exemplo em particular, temos

z^0	z^1	z^2	z^3
-0,2	1,05	-1,8	1
1	-1,8	1,05	-0,2

Teste de estabilidade de Jury - exemplo 1

- A próxima linha do dispositivo é calculada com base no determinante de alguns elementos das duas linhas anteriores;
- Assim,

$$\begin{array}{cccc}
 z^0 & z^1 & z^2 & z^3 \\
 \hline
 a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\
 a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
 b_0 & b_1 & b_2 &
 \end{array}$$

é tal que

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix}; \quad b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}; \quad b_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}; \quad (39)$$

- No exemplo em questão, chegamos a $b_0 = -0,96$, $b_1 = 1,59$ e $b_2 = -0,69$.

Teste de estabilidade de Jury - exemplo 1

- Continuamos o processo até restarem três elementos na última linha;
- Para o sistema exemplo, temos:

z^0	z^1	z^2	z^3
-0,2	1,05	-1,8	1
1	-1,8	1,05	-0,2
-0,96	1,59	-0,69	

- O critério de estabilidade de Jury estabelece que os polos do sistema estarão restritos ao disco unitário se as condições a seguir são válidas:
 - i $Q(1) > 0$;
 - ii $(-1)^n Q(-1) > 0$, n sendo a ordem do PC;
 - iii $|a_0| < a_n$;
 - iv Em cada uma das linhas a partir da terceira, o módulo do primeiro elemento for maior que o módulo do último elemento.

Teste de estabilidade de Jury - exemplo 1

- Então para o polinômio característico sob teste:

$$Q(z) = z^3 - 1,8z^2 + 1,05z - 0,20, \quad (40)$$

e tabela de Jury

z^0	z^1	z^2	z^3
-0,2	1,05	-1,8	1
1	-1,8	1,05	-0,2
-0,96	1,59	-0,69	

temos que

- i $Q(1) = 1 - 1,8 + 1,05 - 0,2 > 0;$
- ii $(-1)^n Q(-1) = (-1)^3 [-1 - 1,8 - 1,05 - 0,2] > 0;$
- iii $|a_0| < a_n \Rightarrow 0,2 < 1;$
- iv $|b_0| > |b_2| \Rightarrow 0,96 > 0,69.$

- Portanto, o PC é estável, ou seja, possui todos os seus polos no interior do disco unitário.

Teste de estabilidade de Jury - exemplo 2

- Seja um sistema de controle digital com um ganho proporcional K para o qual o polinômio característico em função de K é:

$$Q(z) = z^2 + (0,368K - 1,368)z + (0,368 + 0,264K). \quad (41)$$

Ache os valores de K para os quais o sistema é estável.

- Montando a tabela de Jury, temos:

z^0	z^1	z^2
$0,368 + 0,264K$	$0,368K - 1,368$	1

que é a única linha possível.

- Então, para que o PC seja estável, precisamos ter:

- i $Q(1) = 1 + 0,368K - 1,368 + 0,368 + 0,264K > 0 \Rightarrow K > 0;$
- ii $(-1)^n Q(-1) = (-1)^2 [1 - 0,368K + 1,368 + 0,368 + 0,264K] > 0 \Rightarrow K < 26,3;$
- iii $|a_0| < a_n \Rightarrow 0,368 + 0,264K < 1 \Rightarrow K < 2,39.$

- Portanto, o PC é estável, se $0 < K < 2,39.$

Critério de estabilidade de Routh

- Já vimos que se aplicarmos a transformada bilinear a uma função de transferência em z , conseguimos reconstituir o mapeamento da região estável para um semiplano esquerdo no plano w ;
- Isso é muito útil porque nos permite utilizar muitas técnicas de análise e projeto vindas do caso analógico para o caso digital;
- Uma dessas técnicas é o *critério de estabilidade de Routh*, que permite verificar a quantidade de polos de um PC no semiplano direito;
- Então, se desejarmos estudar a estabilidade de um sistema digital via Critério de Routh **devemos primeiro** converter o sistema de $G(z)$ para $G(w)$ através da transformação bilinear.

Critério de Estabilidade de Routh – Exemplo

- Considere um sistema digital de malha aberta:

$$G(z) = \frac{0,00484z + 0,00468}{(z - 1)(z - 0,905)}, \quad (42)$$

com $T = 0,1\text{s}$. Desejamos encontrar o conjunto de ganhos de controle K para o qual a malha fechada seja estável;

- Como desejamos aplicar o critério de Routh, o primeiro passo é aplicar a transformada bilinear no sistema acima. Note que o critério de Routh **não funciona** para a função de transferência em z !!

Critério de Estabilidade de Routh – Exemplo

- Aplicando a transformada bilinear, chegamos a:

$$G(w) = G(z) \Big|_{z=1+(T/2)w/1-(T/2)w} = \frac{-0,00016w^2 - 0,1872w + 3,81}{3,81w^2 + 3,80w}; \quad (43)$$

- O polinômio característico de malha fechada é $1 + KG(w)$, ou,

$$PC(w) = (3,81 - 0,00016K)w^2 + (3,80 - 0,1872K)w + 3,81K \quad (44)$$

- Tomamos então o monômio de grau mais elevado. Se esse grau for par, escrevemos na mesma linha do dispositivo todos os coeficientes de grau par em ordem decrescente de grau monomial (e vice-versa para os ímpares);
- Na linha seguinte, escrevemos os coeficientes de grau ímpar em ordem decrescente de grau monomial (e vice-versa);

Critério de Estabilidade de Routh – Exemplo 1

$$PC(w) = (3,81 - 0,00016K)w^2 + (3,80 - 0,1872K)w + 3,81K;$$

- Para o exemplo, temos:

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} (w^2, w^0) \\ w^1 \\ w^0 \end{array} & \begin{array}{c} 3,81 - 0,00016K \quad 3,81K \\ 3,80 - 0,1872K \\ f_0 \end{array} \end{array}$$

- Os elementos das próximas linhas são calculados pela operação cruzada dos elementos das duas linhas anteriores. Assim:

$$f_0 = \frac{((3,80 - 0,1872K) \times (3,81K)) - (0 \times (3,81 - 0,00016K))}{3,80 - 0,1872K}. \quad (45)$$

- Então $f_0 = 3,81K$

Critério de Estabilidade de Routh – Exemplo 1

$$\begin{array}{c|c}
 (w^2, w^0) & 3,81 - 0,00016K \quad 3,81K \\
 w^1 & 3,80 - 0,1872K \\
 w^0 & 3,81K
 \end{array}$$

- O critério de estabilidade de Routh estabelece que o número de troca de sinais na primeira coluna é igual ao número de raízes com parte real positiva;
- Assim, para que o sistema acima seja estável, todos os elementos da primeira coluna devem ser positivos (para um K positivo). Então:

$$\begin{array}{c|c}
 \text{linha 1} & K < 26,813 \\
 \text{linha 2} & K < 20,3 \\
 \text{linha 3} & K > 0
 \end{array}$$

- Portanto, o sistema digital em malha fechada será estável se $0 < K < 20,3$ **no plano \mathcal{W}** .

Estabilidade de $z \in \mathbb{C}$

- De todo o nosso estudo, já não há dúvidas que a variável z é um número complexo, bem como $G(z)$ também será;
- Mas já vimos também que a equação característica de malha fechada

$$1 + G(z) = 0 \quad (46)$$

define a estabilidade deste sistema digital em malha fechada;

- Assim, podemos elaborar um critério no domínio dos números complexos para verificar se um sistema em malha fechada é estável ou não, da mesma forma que o feito para o sistema contínuo.

Critério de Estabilidade de Nyquist - caso digital

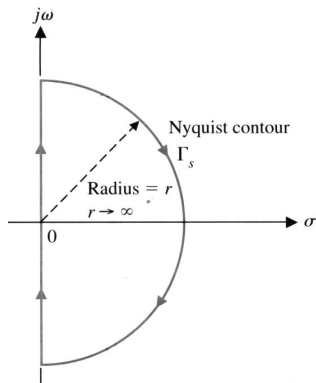
- Para o caso digital há duas vertentes;
- Se for aplicada a transformação bilinear sobre $G(z)$, já sabemos que reconstituímos a ideia de estabilidade pela análise dos semiplanos. Assim, basta aplicar o critério de estabilidade de Nyquist sobre $G(w)$ da mesma forma que no caso contínuo;
- Se quisermos estudar a estabilidade via $G(z)$, temos que nos atentar que a região para instabilidade é outra (o exterior do disco unitário no plano z);
- Para este caso, precisamos modificar o caminho de Nyquist tal que toda a região externa ao disco seja enlaçada. Aí sim poderemos aplicar o critério de Nyquist;
- Mas qual seria este caminho para o caso digital?

Critério de Estabilidade de Nyquist – plano w

Definição (Caso digital - plano w)

Seja o contorno de Nyquist no plano w (ao lado) e seu mapeamento conforme por uma função racional complexa $G(w)$ no plano G . Seja ainda P o número de polos instáveis de $G(w)$. Então, o número Z de zeros de $1 + G(w)$ no semiplano direito, que corresponde ao número de polos instáveis de malha fechada, é igual à soma de P com o número N de enlaces positivos do ponto -1 . Assim,

$$Z = N + P$$



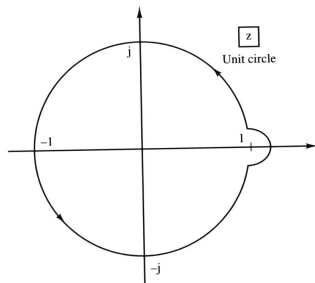
Dorf & Bishop, 2001. Fig. 9.8

Critério de Estabilidade de Nyquist - plano z

Definição (Caso digital - plano z)

Seja o contorno de Nyquist no plano z (ao lado) e seu mapeamento conforme por uma função racional complexa $G(z)$ no plano G . Seja ainda P o número de polos instáveis de $G(z)$. Então, o número Z de zeros de $1 + G(z)$ fora do disco unitário, que corresponde ao número de polos instáveis de malha fechada, é igual à soma de P com o número N de enlaces positivos do ponto -1 . Assim,

$$Z = N + P$$



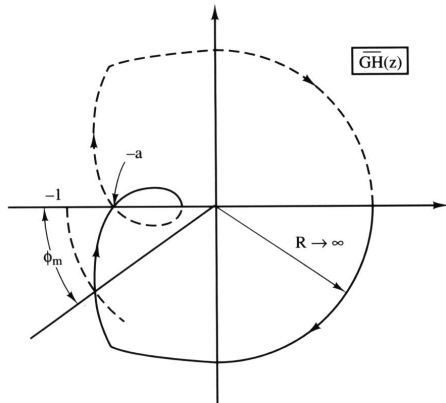
Phillips & Nagle, 1995.
Fig. 7.15

Margens de estabilidade

- Discutimos vários métodos para verificar se uma equação característica (em z ou w) conduz a um sistema em malha fechada estável;
- Outra informação de relevância é, dado que o sistema em malha fechada é estável, o quão longe estamos de uma possível condição de instabilidade;
- Isso é útil, por exemplo, quando desejamos aumentar um ganho de controle até uma condição em que isso represente um perigo de instabilidade;
- Além disso, sabemos que quanto mais próximo os polos do sistema estiverem do círculo unitário, mais oscilatória será sua resposta. Então, manter os polos longe deste círculo também melhora a resposta transitória;
- Quantificamos essa “distância” da condição instável através das *margens de estabilidade*.

Margem de ganho

- Suponha um sistema de malha aberta $K \cdot G(z)$ sem polos instáveis para o qual o diagrama de Nyquist é:



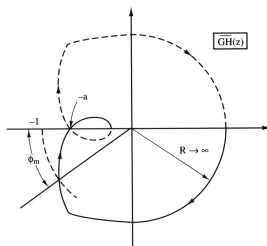
Phillips & Nagle, 1995. Fig. 7.17

Margem de ganho

- Note que, neste caso, o sistema é estável. Entretanto, se aumentarmos o ganho K , seu efeito é o de “engordar” o diagrama, e o cruzamento com o eixo real ocorre cada vez mais à esquerda;
- Note que a folga que temos para aumentar o K , sem enlaçar o ponto -1 é, nesta figura, $MG = 1/a$. Então, esta é a **margem de ganho** de que dispomos antes que o sistema se torne instável.

Margem de fase

- Ainda para o mesmo sistema:



Phillips & Nagle, 1995. Fig. 7.17

- Se adicionarmos fase (ângulo) negativa ao sistema, isso terá como efeito rotacionar o diagrama no sentido horário, e o cruzamento com o eixo real também ocorre cada vez mais à esquerda;
- Note que a folga que temos para adicionar fase sem enlaçar o ponto -1 é $MF = \phi_m$. Esta é a **margem de fase** de que dispomos antes que o sistema se torne instável.

Exercícios

- 6 Considere funções de transferência discretas $G(z) = e(z)/f(z)$, onde $f(z)$ é cada uma das funções abaixo. Usando o teste de Jury verifique se a respectiva função de transferência será estável:

a) $z^2 - 1,2z + 0,4$

e) $z^3 + 1,68z^2 + 0,54z + 1,14$

b) $z^2 - 0,39z + 2,11$

f) $z^4 + 1,4z^3 + 0,98z^2 + 0,39z + 0,83$

c) $z^2 - 2,46z + 0,04$

g) $z^4 + 0,1z^3 + 0,78z^2 + 0,2z + 0,37$

d) $z^3 + 1,14z^2 + z + 0,48$

h) $z^4 + 0,17z^3 + 0,24z^2 + 0,77z + 0,96$

- 7 Sabe-se que a seguinte relação é verdadeira:

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2} \xrightarrow[T_s=0,1s]{\text{ZOH}} G(z) = \frac{0,00935z + 0,00875}{z^2 - 1,801z + 0,8187}.$$

- a) Considere que $G(s)$ é realimentada por um controlador K_{pc} . Mostre que o sistema de malha fechada é estável para qualquer $K_{pc} > 0$;
- b) Considere agora que $G(z)$ é realimentada por um controlador proporcional digital K_{pd} . Mostre que a malha fechada digital só será estável se $0 < K_{pd} < 20,7$;
- c) Explique o comportamento discrepante entre as letras anteriores.

Exercícios

- 8 Considere uma planta discretizada $G(z)$ para a qual aplica-se um controlador $C(z)$, ambos com expressões a seguir:

$$G(z) = \frac{0,3625}{z - 0,4562}; \quad C(z) = \frac{K_p z + K_d(z - 1)}{z}.$$

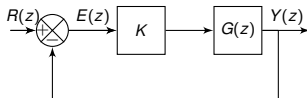
Encontre a faixa de valores de K_p e K_d para os quais o sistema em malha fechada seja estável.

- 9 Considere que uma planta amostrada com $T_s = 1\text{s}$ resulte em:

$$G(z) = \frac{b_0}{z - a_0}.$$

- a) Suponha um controlador proporcional K_{pz} . Encontre, então, a faixa de valores de K_{pz} para que a malha fechada discreta seja estável.
- b) Obtenha $G(w)$ via transformação bilinear e considere um controlador proporcional K_{pw} neste domínio. Encontre, novamente a faixa de valores de K_{pw} para que a malha fechada no domínio w seja estável.
- 10 Considere o exercício 7b. Nestas condições, qual será o menor erro em estado estacionário ao degrau possível para que o sistema em malha fechada seja ainda estável?

Equação característica



- Considere um sistema de malha fechada como o mostrado acima;
- Então, a função de transferência de malha fechada é dada por:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{KG(z)}{1 + KG(z)}. \quad (47)$$

- Já vimos que os polos definem toda a característica transitória do sistema – inclusive a estabilidade;
- Já os zeros moldam a resposta transitória, atuando sobretudo na sua amplitude ao longo do tempo;

Equação característica

- Mas os polos são as raízes do polinômio denominador da função de transferência, ou seu polinômio característico. Então:

$$1 + KG(z) = 0 \rightarrow KG(z) = -1. \quad (48)$$

- Note que a equação característica acima carrega em si todas as informações para o comportamento dinâmico do sistema;
- A *Análise do Lugar das Raízes* é uma ferramenta muito importante, que estuda o comportamento das raízes da equação característica na medida que o ganho K varia;

Lugar das raízes – condições de ângulo e módulo

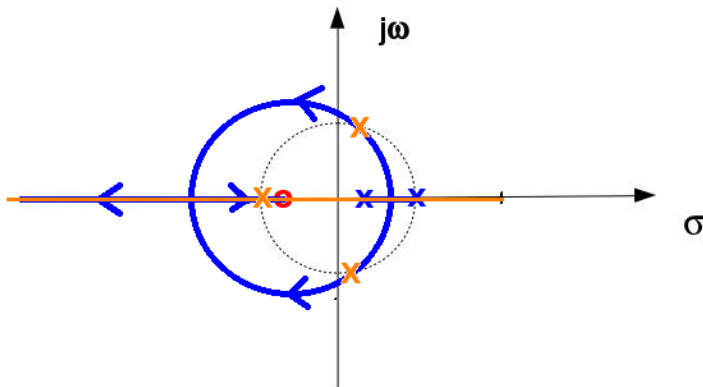
- Como $G(z)$ é uma função complexa, então $KG(z) = -1$ se as duas condições abaixo ocorrerem simultaneamente:
 - i) **Condição de ângulo:** $\angle G(z) = \pm k\pi, \quad k = 1, 3, 5, \dots$
 - ii) **Condição de módulo:** $|KG(z)| = 1, \quad \forall K \in \mathbb{R}$
- O lugar geométrico no plano z (em função de K) para o qual ambas as condições anteriores são válidas é chamado de **Lugar das Raízes** do polinômio característico do sistema em malha fechada.
- Note que o Lugar das Raízes depende apenas das condições de ângulo e módulo nos variados pontos de teste do plano. Então, a sua construção (e seus passos) são os mesmos **independente do plano usado** (s, z, w).

Lugar das raízes – passos de construção

- i) posicione os polos e zeros de $G(\gamma)$ no plano γ , $\gamma = s, z, w$;
- ii) o lugar das raízes no eixo real está à esquerda de um número ímpar de polos e zeros;
- iii) polos complexos conjugados sempre caminham juntos;
- iv) polos chegam (partem) do eixo real onde há caminho possível, dado por $dK/d\gamma = 0$;
- v) polos convergem para zeros no infinito (quando $K \rightarrow \infty$), seguindo a assíntotas de convergência com origem em $\sigma_A = (\sum \text{polos} - \sum \text{zeros}) / (n_{\text{polos}} - n_{\text{zeros}})$ e ângulo entre elas $\phi_A = \frac{180^\circ(2q+1)}{n_{\text{polos}}}$, $q = 0, 1, 2, \dots, (n_{\text{polos}} - 1)$;
- vi) o cruzamento dos polos com os limites da região de estabilidade dependerá do plano. Nos planos s e w , pode ser encontrado via Critério de Routh, enquanto no plano z via critério de Jury;

Lugar das raízes – exemplo

$$G(z) = \frac{0,368(z + 0,717)}{(z - 1)(z - 0,368)} \quad (49)$$



Lugar das raízes – resumo

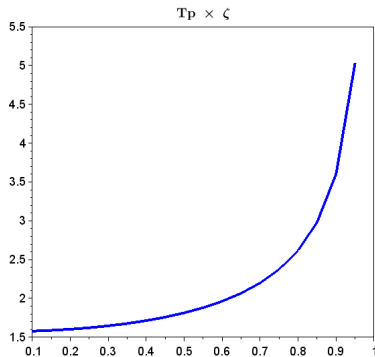
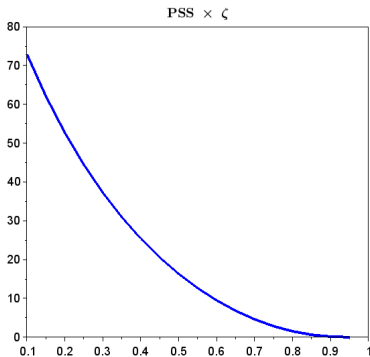
- O método do lugar das raízes não leva em conta nenhuma informação do sistema, apenas do posicionamento dos zeros do polinômio $1 + KG$;
- Então, as regras de traçado são absolutamente as mesmas seja no plano s , z ou w ;
- A única regra que muda é com relação ao cruzamento com o limite de estabilidade, que é diferente dependendo do caso:
 - Planos s e w (limite é o eixo imaginário): usa-se o critério de Routh;
 - Plano z (limite é o círculo unitário): usa-se o critério de Jury;
- Se você não entendeu nada do que eu disse até aqui, “corra” para o material de Sistemas de Controle!

Requisitos de desempenho e ζ no sistema contínuo

- O coeficiente de amortecimento ζ tem importância fundamental na resposta transitória de um sistema dominante de segunda ordem;
- Ele entra no cálculo de todos os índices de desempenho já discutidos;
- $\zeta \rightarrow 0$ gera uma resposta muito oscilatória (alto PSS) com um longo tempo de acomodação;
- $\zeta \rightarrow 1$, por outro lado, leva a uma resposta mais próxima da de um sistema de primeira ordem (exponencial assintoticamente convergente);
- O que faremos a seguir é escolher uma faixa de ζ que leve a um bom compromisso entre os diversos requisitos.

Requisitos de desempenho e ζ no sistema contínuo

- As relações dos requisitos com ζ são:



- Então, uma faixa de valores razoável para o coeficiente de amortecimento é $0,5 \leq \zeta \leq 0,75$.

Requisitos de desempenho e ζ no sistema contínuo

- Mas qual seria o posicionamento de polos com $\zeta \approx 0,6$ no plano s ?
- Lembrando que

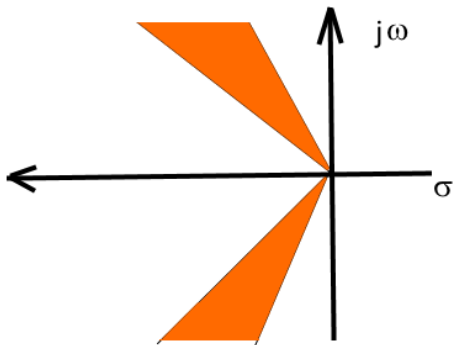
$$\phi = \arctg \left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right), \quad (50)$$

temos que $\phi \approx 0.93rad \approx 53^\circ$;

- Assim, para que polos de um sistema dominante de segunda ordem tenha $\zeta = 0,6$, eles devem estar localizados no plano s tal que $\phi \approx 53^\circ$;

Mapeamento de requisitos no plano s (ou w)

- Vimos acima que um bom compromisso entre os requisitos de PSS e tempo de pico se faz com um ζ na faixa entre 0,5 e 0,75;
- Então, um par de polos dominantes de segunda ordem que satisfaz estes requisitos deve estar alocado na região do plano s limitada aos ângulos $41,4 \leq \phi \leq 60^\circ$;



Mapeamento de requisitos no plano s (ou w)

- Além do tempo de pico, o tempo de acomodação é outra medida da velocidade de resposta do sistema em malha fechada;
- Em termos práticos, o tempo de acomodação é um requisito de velocidade de resposta até mais interessante, pois avalia o tempo de convergência para o valor final;
- Como vimos, o tempo de acomodação é dado por

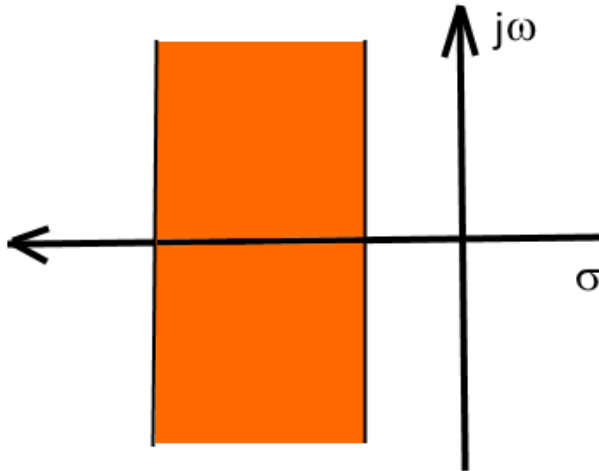
$$T_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n}; \quad (51)$$

- Mas o denominador é exatamente o negativo da parte real dos polos dominantes de segunda ordem;

Mapeamento de requisitos no plano s (ou w)

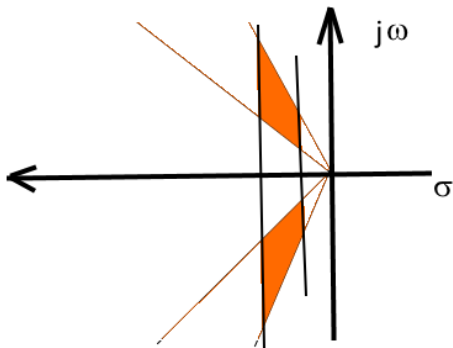
- Então, o requisito de tempo de acomodação se espelha no plano s através de uma reta vertical centrada na parte real de seus polos dominantes de segunda ordem;
- Note que quanto mais rápida a acomodação do sistema, maior a parte real de seus polos dominantes de segunda ordem.
- Portanto, quanto mais à esquerda a reta acima se alocar, maior a exigência quanto ao tempo de convergência;
- Em alguns casos, pode ser necessário limitar o tempo de convergência para se evitar problemas estruturais, por exemplo;
- Então, os polos devem estar limitados à direita de uma reta vertical no plano s .

Mapeamento de requisitos no plano s (ou w)



Mapeamento de requisitos no plano s (ou w)

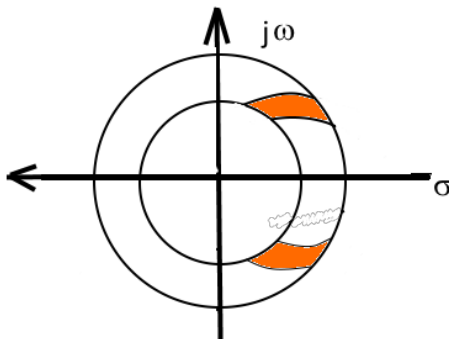
- Podemos desejar mesclar todos os requisitos de desempenho anteriores (PSS, tempo de pico e tempo de acomodação);
- Assim, teríamos restrições sobre o ângulo de alocação e também sobre a parte real dos polos dominantes de segunda ordem. O mapeamento, neste caso, é a junção das duas regiões anteriores;



Mapeamento de requisitos no plano z

- O que precisamos fazer agora é mapear esta região de alocação no plano s para o plano z . Para isto usamos as regras de mapeamento já estudadas neste curso;
- Sabemos que retas verticais em s se mapeiam como círculos em z (de raio $e^{\sigma T}$, onde σ é a parte real da reta vertical);
- Sabemos também que retas com inclinação ϕ no plano s mapeiam-se como espirais logarítmicas no plano z ;
- Assim, a alocação de polos no plano z que leva ao mesmo comportamento dinâmico que o alocamento de polos no plano s – levando-se em conta o ζ e o T_s é o apresentado na figura a seguir;
- Note que saber isso é importante quando desejamos alocar os polos de uma malha fechada digital para um determinado desempenho requerido.

Mapeamento de requisitos no plano z



Projeto de controladores via Lugar das Raízes

- O projeto de um controlador via Lugar das Raízes consiste em se alocar os polos dominantes de segunda ordem de malha fechada na região do plano s para a qual os requisitos de desempenho sejam atendidos;
- No caso de um controlador proporcional (ganho K_p), busca-se o ganho que aloca os polos na região estabelecida;
- É importante lembrar que os requisitos de desempenho são válidos para **polos dominantes de segunda ordem**;
- Se houver outros polos e/ou zeros próximos, o valor apurado para os índices de desempenho (via simulação) serão diferentes dos previamente especificados.

Exercícios

- 11 Esboce o diagrama de lugar das raízes em função de K_p para as equações características a seguir, usando os passos de traçado apresentados. Supondo $T_s = 0,1s$, utilize então o Octave, Matlab ou Scilab para confirmar seu traçado.

a)


$$1 + K_p \left(\frac{z + 0,8}{z^2 - 1,7z + 0,72} \right) = 0.$$

b)


$$1 + K_p \left(\frac{z + 0,7}{z^2 - 1,2z + 0,35} \right) = 0.$$

c)

$$1 + K_p \left(\frac{z + 0,5}{z^4 - z^3 + 0,74z^2 - 0,272z + 0,0832} \right) = 0.$$

- 12  Considere o lugar geométrico do plano z que demarque um tempo de acomodação igual a $1s$ para um sistema dominante de 2ª ordem. Para cada um dos sistemas do exercício anterior, encontre o(s) valor(es) de K_p para que os polos de malha fechada estejam exatamente sobre este lugar geométrico.

Exercícios

- 13  Seja uma planta contínua dada pela seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}.$$

Deseja-se um sistema de controle, implementado digitalmente, tal que o sistema em malha fechada tenha os seguintes requisitos de desempenho:

- Tempo de acomodação menor igual a 1s;
 - Percentual de sobressinal menor igual a 10%.
- a) Encontre a região do plano s que mapeia os requisitos acima para polos dominantes de 2ª ordem;
 - b) Considerando $T_s = 0,1s$, encontre a F.T. digital da planta (usando ZOH);
 - c) Com base nos requisitos acima, projete um controlador $C(z)$ como abaixo. Comente o desempenho do sistema em malha fechada.

$$C(z) = \frac{K(z^2 - az + b)}{z - 1}$$

Regime permanente senoidal

- Até este momento, estudamos o comportamento do sistema de controle baseado em dois sinais de entrada: o degrau unitário e a rampa unitária;
- Com base nas respostas a estes sinais, conseguimos construir boa parte dos requisitos de controle – tanto no regime estacionário quanto no transitório;
- Um outro sinal de muito interesse para nossos estudos é a senóide. Ele nos dará um outro conjunto de informações a respeito do comportamento do sistema de controle;
- O estudo da resposta do sistema em regime permanente senoidal já foi intensamente discutido no curso de Sistemas de Controle. Aqui, apresentaremos seus impactos em sistemas de Controle Digital.

Regime permanente senoidal

- Considere um sinal senoidal $u(t) = U_{max}\text{sen}(\omega t)$ aplicado a um sistema descrito pela função de transferência do tipo

$$G(s) = \frac{p(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \cdots (s + s_n)}; \quad (52)$$

- A resposta do sistema ao sinal senoidal é dada por

$$Y(s) = G(s)U(s); \quad (53)$$

- Desejamos estudar as condições de regime permanente – quando o regime transitório já não afeta mais a resposta – para o sinal senoidal;
- Então, temos que analisar a resposta temporal de

$$Y(s) = G(s) \left[\frac{\omega U_{max}}{s^2 + \omega^2} \right], \quad (54)$$

em que o último termo é a transformada de Laplace do sinal senoidal $u(t)$.

Regime permanente senoidal

- Após uma análise do regime permanente ($t \rightarrow \infty$), pode-se concluir que

$$y_{perm}(t) = Y_{max} \text{sen}(\omega t + \phi). \quad (55)$$

onde

$$\begin{aligned} Y_{max} &= U_{max} |G(j\omega)|; \\ \phi &= \underline{\angle G(j\omega)}; \end{aligned} \quad (56)$$

- Se você não entendeu, “voe” para o material de Sistemas de Controle;

Regime permanente senoidal

$$y_{perm}(t) = U_{max} \cdot |G(j\omega)| \cdot \text{sen}(\omega t + \angle G(j\omega)).$$

- O resultado anterior traz consequências muito importantes para a análise de um sistema linear invariante no tempo;
- Primeiro, notamos que a resposta permanente do sistema a uma entrada senoidal também será senoidal de mesma frequência da entrada;
- A amplitude da senóide de saída dependerá da amplitude da senóide de entrada (U_{max}) e do módulo de $G(j\omega)$ àquela frequência ω da senóide de entrada;
- A senóide de saída estará defasada em relação à senóide de entrada por um ângulo que depende, exclusivamente, da fase de $G(j\omega)$ para aquela frequência ω da senóide de entrada.

Análise da resposta em frequência

- Do exposto anteriormente, podemos conhecer o comportamento permanente senoidal de um sistema pela análise de sua saída para uma senóide de entrada com frequência específica;
- Podemos também analisar o comportamento do sistema para diferentes condições de frequência da senóide de entrada;
- Para um estudo deste tipo damos o nome de **análise da resposta em frequência**, expresso pelo Diagrama de Bode;

Diagrama de Bode – sistema de 1ª ordem

Resumo

$\omega(\text{rad/s})$	$ G(j\omega) _{dB}$	$\angle G(j\omega)$
0	K_{dB}	0°
$1/10\tau$	$\approx K_{dB}$	$\approx -5,8^\circ$
$1/\tau$	$\approx K_{dB} - 3dB$	-45°
$10/\tau$	$\approx K_{dB} - 20dB$	$\approx -85,3^\circ$
$> 10/\tau$	cai $20dB/dec$	-90°

Em vermelho, os valores para a frequência de corte.

Diagrama de Bode – sistema de 1ª ordem

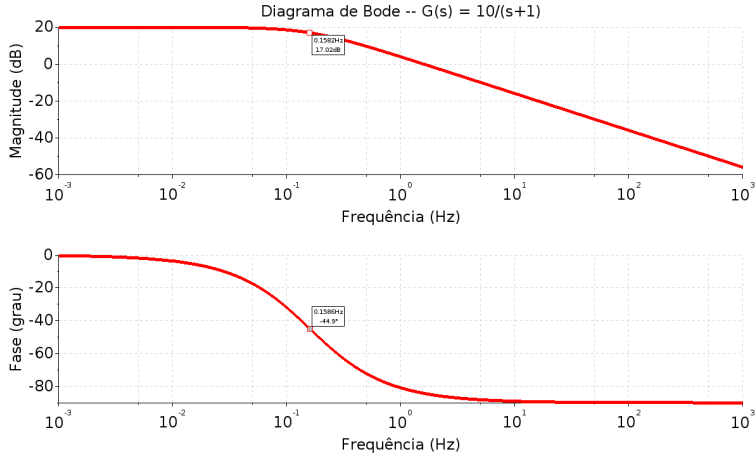


Diagrama de Bode – sistema de 2ª ordem

- Seja agora o sistema de 2ª ordem subamortecido dado por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}; \quad (57)$$

- Quando $\omega \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} |G(j\omega \rightarrow 0)|_{dB} &= \left| \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} \right|_{dB} = 0dB \\ \angle G(j\omega \rightarrow 0) &= \angle \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = 0^\circ \end{aligned}$$

- Então, o gráfico de módulo parte do ganho estático do sistema (em dB). A fase começa em 0° .

Diagrama de Bode – sistema de 2ª ordem

- Quando $\omega \rightarrow \infty$, temos:

$$|G(j\omega \rightarrow \infty)|_{dB} \approx \left| \frac{1}{(j\omega)^2} \right|_{dB, \omega \rightarrow \infty} \approx -40 \log_{10}(\tau\omega)$$

$$\underline{\angle G(j\omega \rightarrow \infty)} = \underline{\angle (j\tau\omega)^{-2}} = \underline{\angle -(\tau\omega)^{-2}} = -180^\circ$$

- Então, para altas frequências, o gráfico de módulo apresenta uma inclinação de -40 dB/dec e a fase convergirá para -180° .

Diagrama de Bode – sistema de 2ª ordem

- Quando $\omega = \omega_n$ (frequência natural do sistema), temos:

$$|G(j\omega)|_{dB} = \left| \frac{\omega_n^2}{(j\omega_n)^2 + 2j\zeta\omega_n^2 + \omega_n^2} \right|_{dB} = \left| \frac{1}{2\zeta} \right|_{dB} \quad (58)$$

- Para a fase, temos:

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{2j\zeta} = -90^\circ; \quad (59)$$

- Então, quando $\omega = \omega_n$, o módulo de $G(j\omega)$ dependerá do valor de ζ . Note que ele será maior que o módulo quando $\omega = 0$ se $\zeta < 0,5$;
- Já a fase será constante e igual a -90° .

Diagrama de Bode – sistema de 2ª ordem

- Vimos então que a amplitude da senóide de saída pode ser maior que a amplitude de entrada quando o sistema de segunda ordem é subamortecido e a frequência da senóide de entrada é igual à frequência natural do sistema;
- Vamos buscar então o valor da frequência da senóide de entrada para o qual a amplitude da senóide de saída é máxima;
- Assim, desejamos achar ω tal que

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \right| \quad (60)$$

seja máximo;

- Bem, temos que

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}}. \quad (61)$$

Diagrama de Bode – sistema de 2ª ordem

- Então, $|G(j\omega)|$ é máximo quando $f(\omega) = (\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2$ é mínimo. Mas isso é conseguido fazendo-se $df(\omega)/d\omega = 0$;
- Mas pode-se mostrar que (exercício!!!!)

$$\frac{df(\omega)}{d\omega} = 4\omega [(2\zeta^2 - 1)\omega_n^2 + \omega^2] ; \quad (62)$$

- Então $|G(j\omega)|$ é máximo se $\omega = \omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2}$. Assim:

$$|G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} ; \quad (63)$$

- Se $\zeta < \sqrt{2}/2 \approx 0,707$, $|G(j\omega_r)| > 1$. Então, para um sistema subamortecido com $\zeta < 0,707$, a amplitude da senóide de saída será maior que aquela da senóide de entrada e ω_r recebe o nome de **frequência de ressonância**.

Diagrama de Bode – sistema de 2ª ordem

Resumo (para sistemas subamortecidos sem ganho estático)

$\omega (rad/s)$	$ G(j\omega) _{dB}$	$\angle G(j\omega)$
0	20dB	0°
ω_n	$ 1/2\zeta _{dB}$	-90°
ω_r	G_{max}	$f(\zeta)$
$\gg \omega_n$	cai 40dB/dec	-180°

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}, G_{max} = (2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2})^{-1}$$

Diagrama de Bode – sistema de 2ª ordem

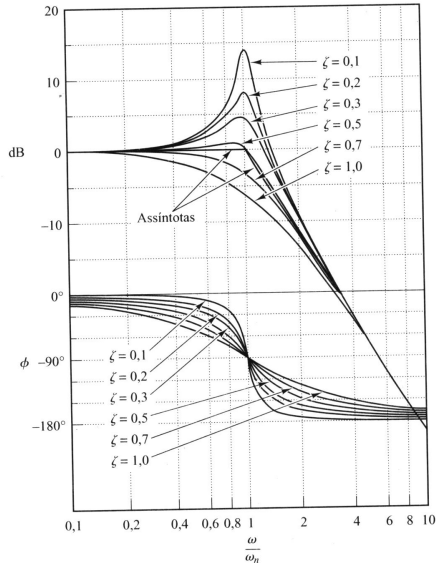


Diagrama de Bode – atraso de tempo

- Vejamos como se comporta o atraso de tempo no que diz respeito à sua resposta em frequência;
- Já vimos que se o sistema possui um atraso de tempo T_a , a função de transferência associada a este atraso é dada por:

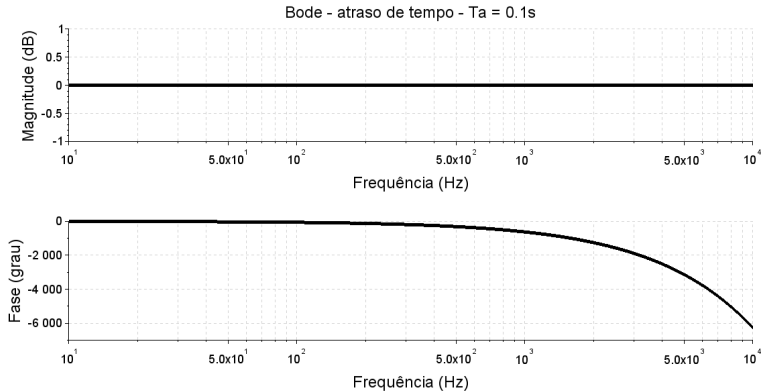
$$Y_{atraso}(s) = e^{-T_a s}; \quad (64)$$

- Então,

$$Y_{atraso}(j\omega) = e^{-jT_a\omega} = 1 \cdot \underline{\angle -jT_a\omega}; \quad (65)$$

- Assim, a resposta em frequência do atraso se caracteriza por uma amplitude constante, mas a sua fase varia linearmente com a frequência.

Diagrama de Bode – atraso de tempo

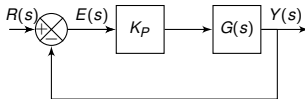


Análise de estabilidade e resposta em frequência

- Vamos discutir agora como estudar a estabilidade de um sistema via resposta em frequência (Diagrama de Bode);
- Considere o diagrama de blocos abaixo. Já vimos que a equação característica do sistema em malha fechada é

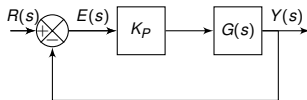
$$1 + KG(s) = 1 + KG(j\omega) = 0; \quad (66)$$

- Vimos também, pelo critério de estabilidade de Nyquist, que dado um $G(s)$ estável, o sistema de malha fechada será estável se $G(j\omega)$ não enlaçar o ponto -1 .



Análise de estabilidade e resposta em frequência

- Mas não enlaçar o ponto -1 implica que $|G(j\omega)| < 1$ quando $\angle G(j\omega) = -\pi$ **E** $\angle G(j\omega) > -\pi$ quando $|G(j\omega)| = 1$;
- Vimos ainda que as margens de estabilidade são exatamente as distâncias em módulo e fase para que um sistema estável em malha fechada atinja a condição de instabilidade;
- Então, para pesquisar a condição de estabilidade via Diagrama de Bode, basta que analisemos a condição de módulo quando $\angle G(j\omega) = -\pi$ e a condição de fase quando $|G(j\omega)| = 1$.



Análise de estabilidade e resposta em frequência

Definição (Estabilidade)

Seja uma planta $G(s)$ estável realimentada por um controlador $C(s)$. O sistema em malha fechada será instável se a resposta em frequência de $C(j\omega)G(j\omega)$ alcançar uma das condições:

- i) $|C(j\omega)G(j\omega)| > 1$ (o que equivale a 0dB) quando $\angle C(j\omega)G(j\omega) = -\pi$, ou;
- ii) $\angle C(j\omega)G(j\omega) < -\pi$ quando $|C(j\omega)G(j\omega)| = 1$.

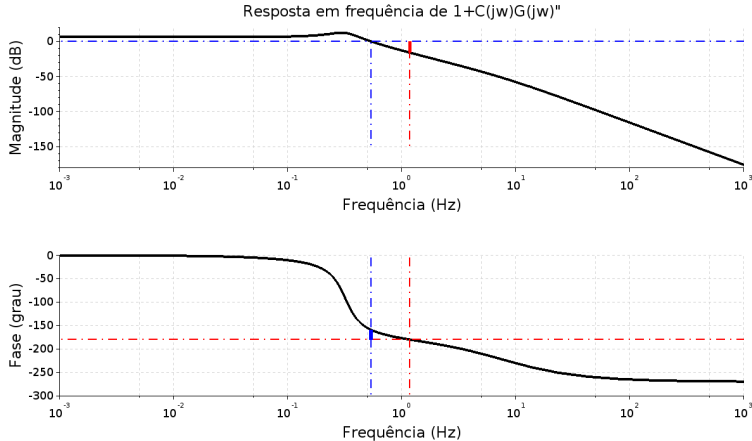
Análise de estabilidade e resposta em frequência

Definição (Margens de estabilidade)

No caso acima:

- i) a **margem de ganho** é definida como o acréscimo de ganho δ_{dB} tal que $|C(j\omega)G(j\omega)|_{dB} + \delta_{dB} = 0$ quando $\angle C(j\omega)G(j\omega) = -\pi$;
- ii) a **margem de fase** é definida como o acréscimo de fase ϕ $\angle C(j\omega)G(j\omega) - \phi = -\pi$ quando $|C(j\omega)G(j\omega)|_{dB} = 0$.

Análise de estabilidade e resposta em frequência



Resposta em frequência de sistemas digitais

- Tratemos agora o caso de digital. Sabemos que a relação entre domínios é

$$z = e^{sT_s} \quad (67)$$

onde T_s é o tempo de amostragem;

- Então, vemos que a resposta em frequência aplicada à variável z resulta em $z = e^{j\omega}$. Portanto, a resposta em frequência no domínio discreto espelha uma lei exponencial aplicada à resposta em frequência no domínio contínuo;
- Assim, não é difícil perceber que toda a argumentação utilizada para construir e justificar o diagrama de Bode (escalas usadas e seus benefícios) se perde em parte quando utilizamos no domínio z ;
- A alternativa é utilizar a transformação bilinear, pois ela converte o sistema digital para um “formato” similar ao utilizado pelos sistemas contínuos.

Resposta em frequência de sistemas digitais

- Tomando a transformação bilinear

$$\begin{aligned}
 w &= \left. \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \right|_{z=e^{j\omega T_s}} \\
 &= \frac{2}{T_s} \frac{e^{j\omega T_s} - 1}{e^{j\omega T_s} + 1} \\
 &= \frac{2}{T_s} \frac{e^{j\omega T_s/2} - e^{j\omega - T_s/2}}{e^{j\omega T_s/2} + e^{j\omega - T_s/2}} \\
 &= j \frac{2}{T_s} \operatorname{tg} \frac{\omega T_s}{2};
 \end{aligned} \tag{68}$$

- Tomando $j\omega_w$ como a parte imaginária de w , podemos associar a frequência ω_w no plano w à frequência ω no plano s por:

$$\omega_w = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg} \frac{\omega T_s}{2}, \tag{69}$$

onde $\omega \leq \omega_s/2$.

Resposta em frequência de sistemas digitais

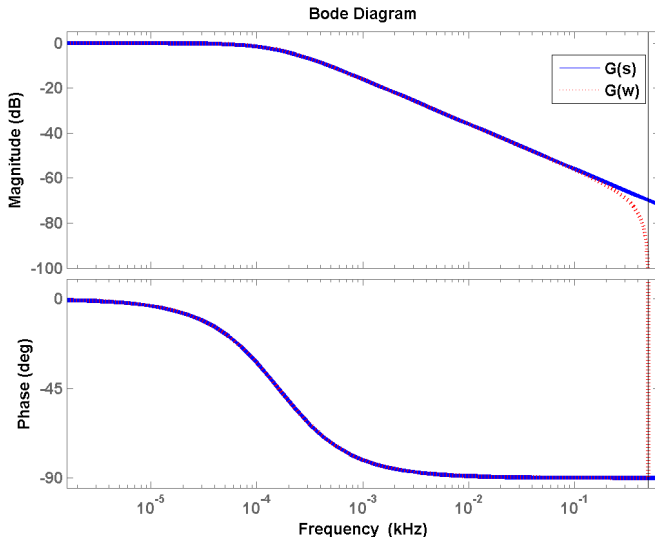
- Note que a relação entre frequências no plano w e s não é linear. Assim, a resposta em frequência no plano w não seguirá à mesma lei assintótica que a que ocorre no plano s ($-20(n - m)dB/dec$ para $\omega \rightarrow \infty$, por exemplo);
- Para pequenos valores de frequência reais ($\omega \ll \omega_s$), temos que:

$$\omega_w = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg} \frac{\omega T_s}{2} \approx \frac{2}{T_s} \frac{\omega T_s}{2} = \omega; \quad (70)$$

ou seja, a resposta em frequência em ω é praticamente a mesma que a resposta em frequência em ω_w ;

- Mas note que se a frequência sob análise começa a se aproximar da frequência de amostragem, a resposta obtida no plano w começa a se dispersar daquela do sistema contínuo;
- Por isso, busca-se sempre uma frequência de amostragem maior que dez vez a banda passante do sistema a ser discretizado.

Resposta em frequência de sistemas digitais

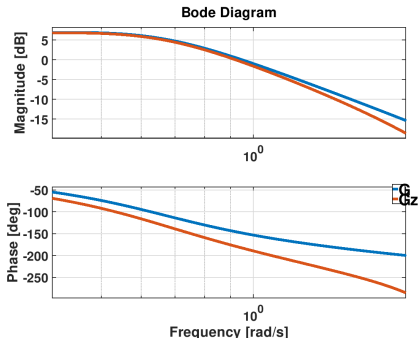


Exercícios

- 14 Tomando a Equação (70), faça o que se pede:
- a) Considere uma frequência normalizada $\bar{\omega} = 2\omega/\omega_s$. Encontre a expressão da razão entre ω_w e ω ;
 - b) Considere a frequência normalizada $\bar{\omega} = 1$ e as frequências metade dela, uma, duas e três décadas abaixo dela. Encontre os valores da razão da letra anterior para cada uma dessas frequências;
 - c) Teça conclusões a respeito dos resultados obtidos.
- 15 Sabe-se que a fase de um sistema de atraso de tempo puro T_a , em função da frequência ω , é dada por $\phi_{at} = -T_a\omega$. Com vistas à digitalização de um sistema contínuo com atraso de tempo, um projetista escolhe o tempo de amostragem como um submúltiplo inteiro de T_a ($T_a = NT_s$, $N \in \mathbb{N}^*$).
- a) Considerando os resultados do exercício anterior, mostre que $\phi_{at} = -N\bar{\omega}$.
 - b) Considere que $\phi_{at} = -28,26^\circ = 0,5\text{rad}$. Encontre, então, a razão entre ω_w e ω em função de N .
 - c) Calcule a razão da letra anterior para $N = \{1, 2, 5, 10, 100\}$.
 - d) Comente os resultados.

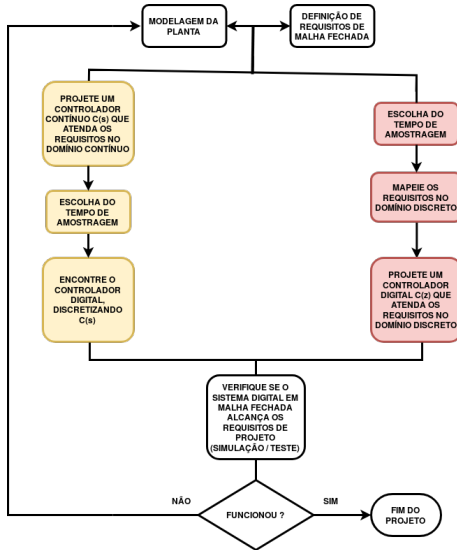
Exercícios

- 16 Considere abaixo o diagram de bode de um sistema contínuo $G(s)$ e sua versão digital G_z para um dado tempo de amostragem.



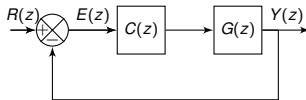
- a) Obtenha uma estimativa das margens de estabilidade para os sistemas;
- b) Considerando os resultados anteriores, você julga que o tempo de amostragem escolhido para obter G_z foi adequado? Por que?
- c) Com base em suas conclusões, proponha um novo tempo de amostragem.

Filosofias de projeto de controle digital



Uma recapitulação

- O objetivo deste curso é calcular um controlador com realimentação negativa tal que o comportamento dinâmico e estacionário em malha fechada seja o desejado;
- Adotamos o diagrama de blocos abaixo. Para o caso em que $C(z)$ era um ganho, estudamos o comportamento do sistema para diversos índices de desempenho;
- Vimos as restrições que esta forma de controlador apresenta na restrição da resposta transitória e estacionária de malha fechada;
- Ao estudarmos o Lugar das Raízes, estas dificuldades se tornaram ainda mais claras, nos levando a concluir que precisamos de uma estrutura de controlador mais versátil;

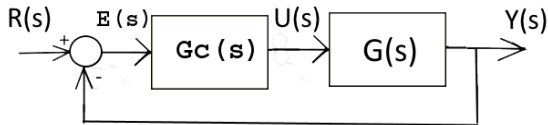


Controlador PID contínuo – formato geral

- O controlador PID contínuo apresenta o seguinte formato matemático:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s, \quad (71)$$

com diagrama de blocos



- Este controlador atua sobre o erro do sistema $e(t)$ por meio de três ações de controle distintas - cada qual com um objetivo específico;
- Estudemos a seguir cada uma dessas ações.

Ação proporcional

- O primeiro termo é um ganho estático proporcional (K_p), que já vínhamos estudando;
- Essa ação opera sobre o sinal de erro no tempo atual, enviando uma ação de comando proporcional ao erro apurado;
- É óbvio que quanto maior o erro apurado, mais efetiva será a ação de controle devida a este termo;
- Note também que esta ação de controle não leva em conta condições passadas do sinal de erro ($u(t) = K_p e(t)$), apenas o que ocorre no momento atual.

Ação integral

- O segundo termo é

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s} \Rightarrow u(t) = \int_0^t K_i \cdot e(t) dt, \quad (72)$$

onde K_i é o ganho integral;

- Essa ação opera sobre a integral do sinal de erro. Assim, ela atua sobre erros remanescentes de períodos anteriores, ainda não corrigidos;
- Sua principal função é, então, corrigir erros persistentes. Quanto maior a presença de erros remanescentes, mais intensa sua ação;
- Então, essa ação é vista como uma correção sobre a história “passada” do erro do sistema.

Ação derivativa

- O terceiro termo é

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_d \cdot s \Rightarrow u(t) = \frac{de(t)}{dt}, \quad (73)$$

onde K_d é o ganho derivativo;

- Essa ação opera sobre a derivada do sinal de erro. Então, ela atua sobre a tendência de evolução deste sinal;
- Se o erro apresenta uma tendência de crescimento (derivada positiva), a ação de controle é mais intensa. Se a tendência é de decrescimento (derivada negativa), a ação é menos intensa;
- Então, essa ação é vista como uma correção sobre a história “futura” do erro do sistema de controle, já que atua sobre sua tendência de evolução.

Aproximações discretas

- Agora que sabemos a ação de cada um dos termos de um controlador PID, precisamos desenvolver uma forma de implementá-las digitalmente;
- Isso implica desenvolver métodos numéricos para representar as operações de derivada e integral, tal que o controlador possa ser construído no computador;
- Note que o controlador final pode ter um comportamento bastante ruim caso essas operações não sejam adequadamente implementadas, podendo gerar sérios problemas em malha fechada;
- A seguir, estudemos as várias aproximações discretas para as operações de derivada e integral e suas propriedades.

Diferenciação discreta – diferenças regressivas

- Seja um sistema discreto com tempo de amostragem T_s . Então a aproximação da derivada por **diferenças regressivas** é dada por

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y(t) - y(t - T_s)}{T_s} \quad (74)$$

- Tomando a transformada de Laplace com condições nulas, temos que

$$sY(s) \approx \frac{Y(s) - e^{-sT_s}Y(s)}{T_s}, \quad (75)$$

e

$$s \approx \frac{1 - e^{-sT_s}}{T_s} = \frac{1 - z^{-1}}{T_s}. \quad (76)$$

Diferenciação discreta – diferenças progressivas

- A aproximação da derivada por **diferenças progressivas** é dada por

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y(t + T_s) - y(t)}{T_s} \quad (77)$$

- Tomando a transformada de Laplace com condições nulas, temos que

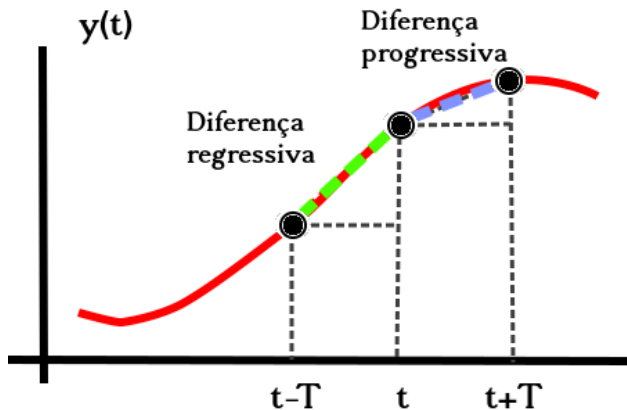
$$sY(s) \approx \frac{e^{sT_s} Y(s) - Y(s)}{T_s}, \quad (78)$$

e

$$s \approx \frac{e^{sT_s} - 1}{T_s} = \frac{z - 1}{T_s}. \quad (79)$$

Aproximações discretas – diferenciação

- Do ponto de vista gráfico, as aproximações discretas da derivada são resumidas pela figura a seguir



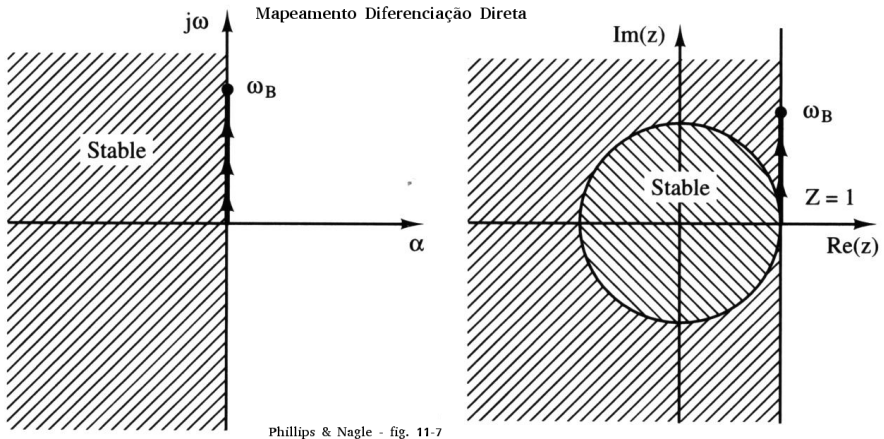
Mapeamento das aproximações discretas de derivada

- Veremos a seguir como cada aproximação mapeia o plano s no z e vice-versa;
- Começemos com a diferença progressivas dada por

$$s \approx \frac{z - 1}{T_s}; \quad (80)$$

- Resolvendo para z , chegamos a $z \approx 1 + sT_s$. Então, o semiplano esquerdo de s se mapeia como o semiplano esquerdo em z , limitado por $z = 1$ (figura na próxima página);
- Note que esta aproximação não é adequada, pois polos estáveis no plano s podem ser mapeados **fora** do círculo unitário em z . Além disso, o eixo imaginário em s não é mapeado como o disco unitário em z ;
- Isso nos leva a evitar o método de diferenças progressivas em implementações práticas de controle digital.

Mapeamento das aproximações discretas de derivada



Mapeamento das aproximações discretas de derivada

- Para o método de diferenças regressivas, temos

$$s \approx \frac{1 - z^{-1}}{T_s} \Rightarrow z \approx \frac{1}{1 - T_s s}; \quad (81)$$

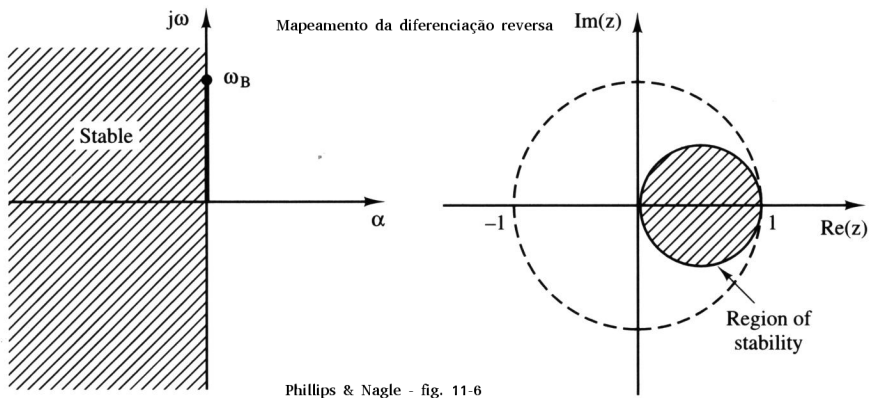
- Tomando o eixo imaginário do plano s , $s = j\omega$, podemos mostrar que ele se mapeia no plano z como

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{j2\arctg(\omega T_s)}, \quad (82)$$

ou seja, um círculo de raio $1/2$ centrado em $z = 1/2$;

- Note que não há mapeamento perfeito do plano s : alguns polos instáveis em s poderão ser mapeados como polos estáveis em z ;
- Mas, pelo menos, esta aproximação garante que polos estáveis em s serão sempre mapeados como polos estáveis em z ;
- Por isso, a derivada é aproximada na forma de diferenciação por diferenças regressivas para fins de controle digital.

Mapeamento das aproximações discretas de derivada



Aproximações discretas – integração retangular

- Estudemos agora a integração numérica;
- Seja um sinal $x(t)$ amostrado em T_s . Seja $y(t)$ a integral de $x(t)$. Então a aproximação da integral $y(t)$ conhecida como **integração retangular** é apresentada em duas versões;
- A *integração retangular à esquerda* é tal que os vértices dos retângulos tocam a função à esquerda, ou seja,

$$y(t + T_s) \approx y(t) + T_s \cdot x(t); \quad (83)$$

- Tomando a transformada de Laplace com condições nulas:

$$Y(s)e^{sT_s} \approx Y(s) + T_s \cdot X(s), \quad (84)$$

e

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s} \approx \frac{T_s}{e^{sT_s} - 1} \Rightarrow s \approx \frac{z - 1}{T_s}. \quad (85)$$

Aproximações discretas – integração retangular

- Por outro lado, *integração retangular à direita* é tal que

$$y(t) \approx y(t - T_s) + T_s \cdot x(t); \quad (86)$$

- Tomando a transformada de Laplace com condições nulas, temos que

$$Y(s) \approx Y(s)e^{-sT_s} + T_s \cdot X(s), \quad (87)$$

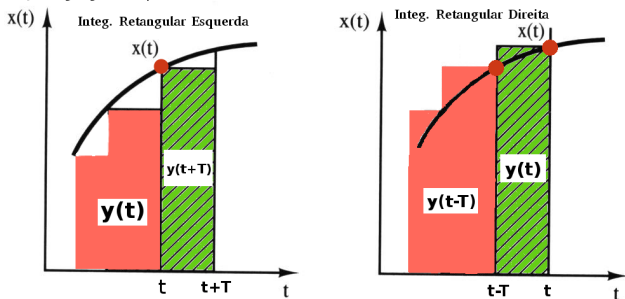
e

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s} \approx \frac{T_s}{1 - e^{-sT_s}} \Rightarrow s \approx \frac{1 - z^{-1}}{T_s}. \quad (88)$$

Aproximações discretas – integração retangular

- Do ponto de vista gráfico, as aproximações discretas da integração retangular são resumidas pela figura a seguir

Phillips & Nagle fig. 11-3 adaptada



- Note que a *integração retangular à esquerda* tem a mesma formulação da *diferenciação por diferenças progressivas*;
- Por outro lado, a *integração retangular à direita* tem a mesma formulação da *diferenciação por diferenças regressivas*;

Aproximações discretas – integração trapezoidal

- Buscando mais precisão no cálculo da integral, podemos escolher aproximar a área sob $x(t)$ durante um tempo de amostragem por um trapézio (ao invés de um retângulo);
- A **integração trapezoidal** é a média entre as integrações retangulares à esquerda e à direita (tomada um passo anterior):

$$\frac{Y(z)}{X(z)} \approx \frac{T_s}{2} \left[\frac{1}{z-1} + \frac{1}{1-z^{-1}} \right] \Rightarrow s \approx \frac{2}{T_s} \left(\frac{z-1}{z+1} \right); \quad (89)$$

- Mas a fórmula anterior é exatamente a definição da transformação bilinear!
- Então, a integração trapezoidal sintetiza a transformação bilinear. Por isso, este é o método de integração numérica preferido em controle digital.

Mapeamento das aproximações discretas da integral

- Dada a similaridade entre a integração retangular à esquerda e a diferenciação progressiva e entre a integração retangular à direita e a diferenciação regressiva, os respectivos mapeamentos são idênticos aos já apresentados anteriormente;
- Para a integração trapezoidal, ela emula a transformação bilinear e já estudamos o seu mapeamento: o semiplano esquerdo de s se mapeia perfeitamente no interior do círculo unitário em z ;
- Isso faz com que o método de integração trapezoidal seja o mais usado em aplicações práticas de controle digital.

Controlador PID digital – formato

- Da análise anterior, fica claro que a operação de derivada é melhor representada pela diferenciação regressiva e que a operação de integral é melhor representada pela integração trapezoidal;
- Usando essas informações e o formato de um controlador PID contínuo, chegamos ao formato de implementação de um controlador PID digital:

$$C(z) = K_p + K_i \frac{T_s}{2} \left(\frac{z+1}{z-1} \right) + \frac{K_d}{T_s} \left(\frac{z-1}{z} \right), \quad (90)$$

onde K_p , K_i e K_d são, respectivamente, os ganhos proporcional, integral e derivativo do **controlador digital**;

- **ATENÇÃO:** o controlador PID acima é obtido via transformação bilinear (o que garante polos dentro do disco unitário). Isso implica que é adequado que a planta também seja aproximada discretamente via transformação bilinear!!! (veja próxima seção)

Aproximação da planta por transformação bilinear

- Até este momento do curso, discretizamos uma planta contínua $G(s)$ através do ZOH para obter $G(z)$. Isso nos conduziu ao mapeamento do semiplano (em s) como um disco unitário (em z);
- Depois, aplicamos a transformação bilinear sobre $G(z)$ para “tentar” reconstituir um semiplano esquerdo aproximado (plano w), dando origem a $G(w)$. Isso nos permite reutilizar as técnicas de controle do caso contínuo;
- Mas vimos que a transformação bilinear confere, também, boas características de aproximação discreta da integração (trapezoidal neste caso).
- Então podemos usar este fato para encontrar uma aproximação discreta de $G(s)$ não mais usando o ZOH, mas usando a transformação bilinear

$$s = \frac{2}{T_s} \left(\frac{z - 1}{z + 1} \right); \quad (91)$$

Aproximação da planta por transformação bilinear

- Esta técnica permite encontrar uma $G_{bilinear}(z)$ que traz as vantagens de aproximação discreta da transformação bilinear;
- Além disso, pode-se mostrar os seguintes fatos a respeito da $G_{bilinear}(z)$, independente de T_s :

Teorema (Aproximação de $G(s)$ por transformação bilinear)

Seja $G(s)$ uma planta estritamente própria, estável e com zeros de fase mínima, contendo n polos e m zeros ($n > m$). Considere $G_{bilinear}(z)$ sua aproximação por transformação bilinear para algum tempo de amostragem T_s . Então, valem os seguintes fatos:

- i) *Todos os polos e zeros de $G_{bilinear}(z)$ estão serão mapeados dentro do disco unitário;*
- ii) *$G_{bilinear}(z)$ é sempre próprio (mesmo número de polos e zeros);*
- iii) *$G_{bilinear}(z)$ tem $n - m$ zeros em $z = -1$.*

Demonstração.

Exercícios.

Aproximação da planta por transformação bilinear

- Note que, como exposto, para uma planta estável e de fase mínima (todos os polos e zeros no semiplano esquerdo de s) temos um $G_{bilinear}(z)$ **como o mesmo número de polos e zeros, e todos eles estão no disco unitário**;
- Ora, se buscarmos um controlador também próprio (mesmo número de polos e zeros), estável e de fase mínima (todos os polos e zeros dentro do disco), **isso significa que o lugar das raízes no plano z começa e termina dentro do disco**!
- Mas o PID digital proposto é próprio e (marginalmente) estável. E podemos (e queremos) fazê-lo também de fase mínima o quanto possível (certo?);
- Estes fatos favorecem o projeto. Se a planta e controlador são próprios, e todos os seus polos e zeros estiverem no interior do disco, podemos garantir uma presença maciça de trechos de lugar das raízes dentro do disco. Ou seja, ao projetar o controlador para uma dada posição de polos q_z dentro do disco, temos uma maior garantia que os demais trechos de lugar das raízes estejam dentro do disco, garantindo a estabilidade em malha fechada.
- Esta é uma grande vantagem do uso de $G_{bilinear}(z)$ para projeto de controle digital (em vez de $G_{ZOH}(z)$)!!!

Aproximação da planta por transformação bilinear

- É muito importante lembrar alguns fatos:
 - i) $G_{bilinear}(z) \neq G(w)$!! O primeiro termo é uma aproximação discreta de uma planta contínua, enquanto o segundo é um remapeamento do disco unitário (vindo da aproximação por ZOH) em um semiplano esquerdo aproximado;
 - ii) $G_{bilinear}(z) \neq G_{ZOH}(z)$!! Note que essas são duas aproximações discretas diferentes. Então polos e zeros serão mapeados em locais distintos do plano z ;
 - iii) $G_{bilinear}(z) \neq G(s)$!! Não há nenhuma relação, mesmo que aproximada, entre as duas coisas;
- No Matlab, Scilab ou Octave esta aproximação é conseguida por meio da opção '*tustin*' da função *c2d* (consulte a ajuda da função);

Exercícios

17 Neste exercício, vamos demonstrar os fatos do teorema de aproximação de $G(s)$ por transformação bilinear.

- a) Considere um ponto $s_\gamma = -\gamma$, $\gamma > 0$ (semiplano esquerdo de s) como sendo um polo ou um zero de uma dada função de transferência. Mostre que o ponto z_γ mapeado pela transformação bilinear estará no interior do disco unitário do plano z ;
- b) Tome uma função de transferência genérica


$$G(s) = \frac{\prod_{k=1}^m (s + z_k)}{\prod_{l=1}^n (s + p_l)}$$

com $m < n$. Mostre que, ao se aplicar a transformação bilinear para aproximar $G(z)$, o número de polos e zeros de $G(z)$ será igual;






- c) Conclua da letra anterior que se $m < n$, então haverá $n - m$ zeros em $z = -1$

Exercícios




Nos próximos dois exercícios, vamos mostrar a vantagem de se usar $G_{bilinear}(z)$ para o projeto de controle digital em vez de $G_{ZOH}(z)$.

- 18 Tome uma planta estável $G(s) = p/(s+p)$. Deseja-se controlá-la digitalmente por meio de um ganho proporcional K_p .
 - a) Encontre $G_{ZOH}(z)$ e $G_{bilinear}(z)$ para esta planta. Comente suas diferenças.
 - b) Mostre, via lugar das raízes, que o sistema em malha fechada será estável para qualquer valor de K_p se $G_{bilinear}(z)$ for usado, mas isso não será verdade se $G_{ZOH}(z)$ for usado.
- 19 Considere um sistema contínuo de segunda ordem estável e sem zeros. Suponha que este sistema seja aproximado por transformação bilinear e que ele será controlador digitalmente por um ganho proporcional.
 - a)  Tome o lugar das raízes no plano z para mostrar que se este cruzar o eixo imaginário, o fará em um ponto dentro disco unitário;
 - b) Com base na resposta acima, seria razoável afirmar que todo o lugar das raízes estará dentro do disco neste caso? Por que?

Exercícios



- 20  Neste exercício, vamos discutir a utilização da Eq. (90) para projeto de um controlador PID digital. Considere a planta $G(s) = 1/(s+1)$. No curso de Sistemas de Controle vimos que um controlador PID contínuo com ganhos ($K_p = 22$, $K_i = 134$, $K_d = 0,92$) apresenta comportamento de malha fechada com $0,5 \leq \zeta \leq 0,75$ e tempo de acomodação entre 0,5 e 1 segundo.
- a)  Simule a resposta ao degrau do sistema contínuo em malha fechada. Escolha, então, um tempo de amostragem adequado para a discretização.
 - b)  Com base no T_s obtido acima, encontre o controlador PID digital dado pela Eq. (90).
 - c)  Realize a conversão digital da planta $G(z)$ pela aproximação ZOH e para a transformação bilinear. Discuta os resultados;
 - d)  Realize a simulação da resposta ao degrau para o sistema digital em malha fechada para cada uma das aproximações digitais anteriores. Comente os resultados.

Exercícios

- 21  Vamos agora elaborar o projeto do controlador PID digital diretamente no domínio z , sem depender de aproximações e transformações do controlador (como na Eq. (90)). Considere a mesma planta e tempo de amostragem do exercício anterior.
- a)  Vimos em Sistemas de Controle que o ponto $q = -6 + 6j$ está na região do plano s desejada para os requisitos de malha fechada. Obtenha, então, o respectivo ponto no plano z .
 - b)  Considere um controlador digital escrito como

$$C(z) = K \left(\frac{z^2 - az + b}{z(z - 1)} \right).$$

Este controlador tem o aspecto de um PID? Explique.

- c)  Usando a condição de ângulo do lugar das raízes no plano z , encontre um condição para (a, b) (há inúmeras!) para a planta representada digitalmente por transformação bilinear.
- d)  Simule o sistema em malha fechada e comente os resultados.

Controlador *deadbeat*: a ideia

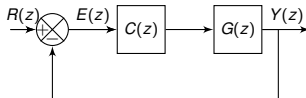
- Os sistemas contínuos podem alcançar determinados valores finais apenas de forma assintótica. Por exemplo, sabemos que o sistema

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{s+2} \quad (92)$$

convergir para a saída $y(t) = 3$ quando da aplicação de um degrau unitário de entrada e do $t \rightarrow \infty$;

- Os sistemas discretos operam de forma diferente. A saída consegue atingir o valor final exatamente em um número finito de passos (lembra da série de Fourier discreta);
- Então, podemos projetar um sistema de controle tal que a malha fechada “crave” no valor de referência após um número finito de passos de atraso;
- Um controlador deste tipo é chamado de *controlador deadbeat*.

Controlador *deadbeat*: a ideia

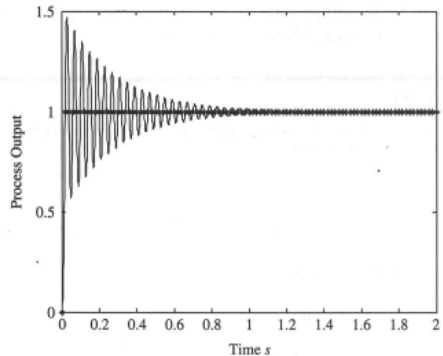
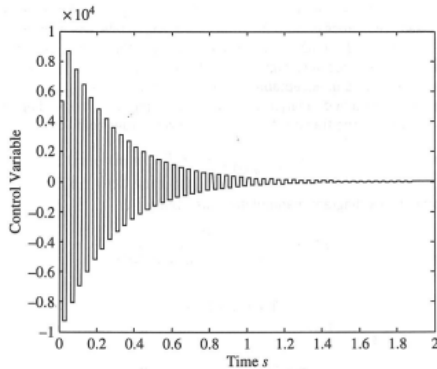


- Tome o sistema de controle digital acima. Desejamos que a malha fechada seja capaz de rastrear a referência após um número de passos de amostragem n . Então:

$$G_{mf}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} = z^{-n}; \quad (93)$$

- Entretanto, temos que nos alertar para um detalhe: se para conseguir tal rastreamento, a entrada de controle $u(kT)$ (entrada da planta) ficar variando substancialmente seu valor, a planta (contínua) poderá apresentar uma oscilação entre as amostras discretas;
- Este é a chamada *oscilação intra-amostras*.

Controlador *deadbeat*: a ideia



Fadali (2013), figs: 6.39 e 6.40

Controlador *deadbeat*: o projeto

- Para evitar tais oscilações, além de prover erro nulo entre a referência e saída discreta após um número de passos n , precisamos também garantir que o sinal de controle $u(kT)$ fique constante após esses n passos;
- Tome, no sistema anterior, o caminho direto na forma

$$G_{ma}(z) = C(z)G(z) = \frac{N_L(z)}{D_L(z)}, \quad (94)$$

as condições para que o controlador deadbeat funcione adequadamente, garantindo rastreamento da referência após um número de passos e evitando a oscilação intra-amostras, é:

- i) $N_L(z) + D_L(z) = z^n$, onde n é tal que o controladore seja causal;
- ii) os sistema de malha aberta ser de tipo 1 (para zerar o erro em estado estacionário);
- iii) todos os polos e zeros de malha aberta estarem dentro do disco unitário.

Controlador *deadbeat*: o projeto

- Seja, então, uma planta $G(z) = N_G(z)/D_G(z)$ tipo 0. Desejamos achar o controlador deadbeat

$$C(z) = \frac{K \cdot N_C(z)}{(z-1)D_C(z)} \quad (95)$$

para rastreamento de uma referência em degrau;

- Forçando $N_C(z) = D_G(z)$, temos o seguinte sistema em malha aberta

$$G_{ma}(z) = \frac{K \cdot N_G(z)}{(z-1)D_C(z)}, \quad (96)$$

- Finalmente, tomando $D_C(z)$ genérico e n tais que $(z-1)D_C(z)$ resulte em um controlador causal, podemos encontrar K e os parâmetros de $D_C(z)$, via as condições anteriores, por:

$$K \cdot N_G(z) + (z-1)D_C(z) = z^n; \quad (97)$$

Controlador *deadbeat*: exemplo

- (Fadali, 1990) Considere um motor CC de função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+10)}. \quad (98)$$

Deseja-se obter um controlador deadbeat para rastreamento de uma referência em degrau com tempo de amostragem $T = 0,1\text{s}$;

- Para este tempo de amostragem, a planta discretizada com ZOH fica:

$$G(z) = \frac{N_G(z)}{D_G(z)} = \frac{0,00355z + 0,002465}{z^2 - 1,273z + 0,3329} \quad (99)$$

- Como a planta é de tipo 0, encontremos um controlador dada por:

$$C(z) = \frac{K \cdot N_C(z)}{(z-1)D_C(z)}. \quad (100)$$

Controlador *deadbeat*: exemplo

- Fazendo $N_C(z) = D_G(z)$, vemos que o denominador do controlador precisa ser de 2º grau para que o controlador seja causal.
- Mas como já temos o polo $z - 1$ (erro em estado estacionário nulo ao degrau), podemos escolher $D_C(z) = z - b_0$. Então:

$$K \cdot N_G(z) + (z-1)(z-b_0) = K(0,00355z + 0,002465) + (z-1)(z-b_0) = z^2; \quad (101)$$

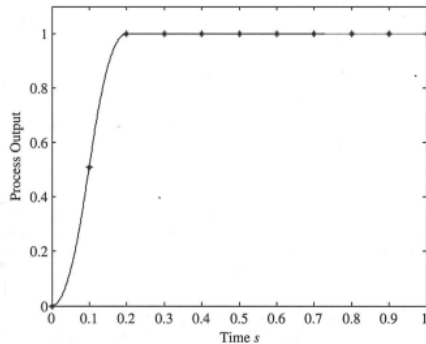
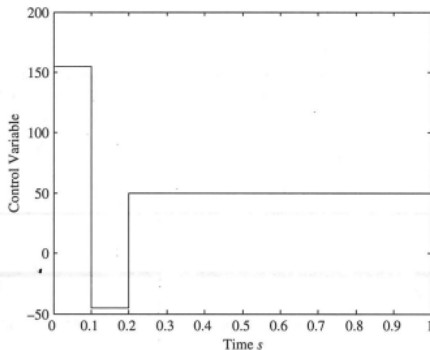
- Para igualdade, temos que

$$\begin{cases} 0,00355K - 1 - b_0 = 0 \\ 0,002465K + b_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow b_0 = -0,4099, \quad K = 166,2352; \quad (102)$$

- Então o controlador deadbeat fica:

$$C(z) = \frac{166,2352(z^2 + 1,273z + 0,3329)}{(z-1)(z+0,4099)}. \quad (103)$$

Controlador *deadbeat*: exemplo



Fadali (2013), figs: 6.46 e 6.47

OBS: quanto maior o grau n , mais passos são necessários para rastreamento, mas menor a amplitude máxima da variável de controle!

Exercícios

- 22 Para cada uma das plantas a seguir, discretizadas com $T = 0,1s$, analise a viabilidade de aplicação do projeto de controlador deadbeat apresentado. Caso seja possível, realize o projeto. Avalie a resposta do sistema e o sinal de controle do sistema de malha fechada.

a)

$$\frac{0,8z + 0,7}{z^2 - 1,6z + 0,8}.$$

b)

$$\frac{z + 0,2}{z^2 - 2z + 0,99};$$

c)

$$\frac{z^2 - 2z + 0,99}{z^3 - 2,2z^2 + 1,55z - 0,35}.$$

Margem de fase e desempenho

- Na seção anterior, vimos que apesar de estável, o sistema pode estar próximo de uma possível condição de instabilidade;
- A *métrica* utilizada para quantificar a “distância” para a condição de instabilidade são as margens de estabilidade;
- Além de garantir robustez ao projeto de controle, a margem de fase está intimamente correlacionada com o amortecimento de um sistema dominante de 2ª ordem pela relação

$$\zeta \approx 0,01\phi_{MF}; \quad (104)$$

- Assim, se quisermos garantir um amortecimento de 0,6 para a malha fechada (para limitar o percentual de sobressinal, por exemplo), temos que garantir uma margem de fase de 60° ;
- Isso significa que um projeto de controle visando à margem de fase buscará, indiretamente, a garantia de resposta temporal aceitável.

Controlador de avanço de fase

- Suponha que um sistema possua uma margem de ganho aceitável, mas a margem de fase esteja baixa, ou desejamos elevá-la. Bem, para isso, precisamos adicionar fase positiva à malha aberta;
- Entretanto, queremos fazer isso se mexer na margem de ganho, que já está adequada;
- Para fazer isso, utilizaremos um controlador do tipo

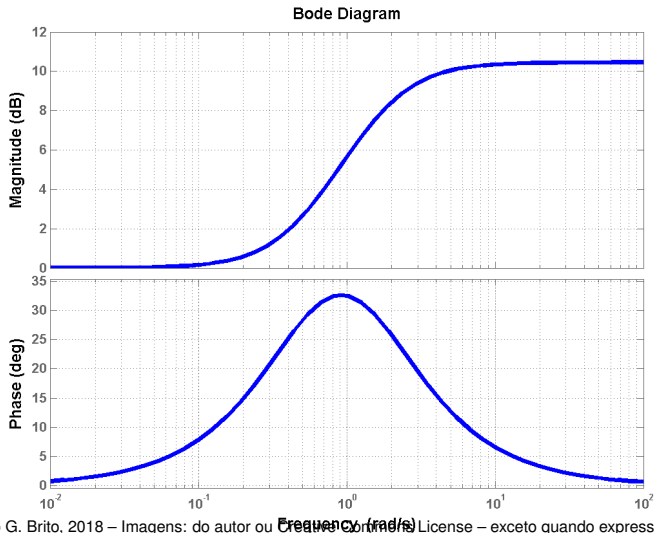
$$C_{AvF}(s) = \frac{\tau s + 1}{\gamma \tau s + 1}; \quad (105)$$

com $0 < \gamma < 1$ e $\tau > 0$. Este é o **controlador de avanço de fase**;

- Para compreender o porquê deste nome, basta que vejamos o seu diagrama de Bode;

Controlador de avanço de fase

$$\tau = 2; \quad \gamma = 0,3$$



Controlador de avanço de fase

- Vamos interpretar esta resposta;
- Para o módulo, o sistema parte do ganho estático K_{dB} (0dB, neste caso). Ao encontrar a frequência de corte do zero do controlador ($1/\tau$) sua amplitude começa a crescer;
- Este crescimento ocorrerá até a frequência de corte do polo ($1/\gamma\tau$), quando entra na convergência para o ganho $1/\gamma$;
- Note que o ganho de convergência será tanto maior quanto menor γ ;
- Para a fase, observamos que ela parte de 0 graus. Ao encontrar uma década antes do zero do controlador, a fase começa a aumentar.

Controlador de avanço de fase

- Aproximando-se de uma década do polo do controlador, esta tendência de crescimento começa a ser menos pronunciada, até que um valor máximo seja atingido. A partir daí, o polo domina a resposta, forçando o decréscimo da fase até 0 graus;
- Pode-se mostrar que o máximo de fase ocorre na média geométrica das frequências do polo e do zero:

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{\gamma\tau}} = \frac{1}{\tau\sqrt{\gamma}}; \quad (106)$$

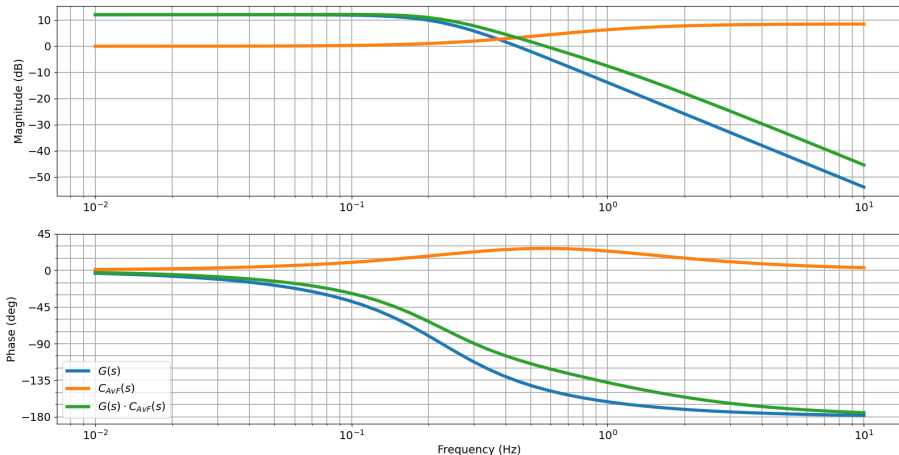
- Nesta frequência, é fácil mostrar que a fase e módulo proporcionado pelo controlador de avanço de fase é:

$$\text{sen}(\phi_{max}) = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}, \quad |C_{AvF}(j\omega_{max})| = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}. \quad (107)$$

Controlador de avanço de fase – utilização

- O controlador de avanço de fase é utilizado quando desejamos corrigir ou aumentar a margem de fase do sistema;
- Como já visto, estaremos operando indiretamente sobre o coeficiente de amortecimento do sistema em malha fechada;
- O problema é que ele se comporta como um filtro passa-alta, ou seja, ele amplifica sinais de alta frequência. Isso pode ser péssimo se houver ruído na malha de controle;
- Note que o comportamento acima é equivalente à ação derivativa de um controlador PID.

Controlador de avanço de fase



Controlador de avanço de fase – passos de projeto

- 1 Considere uma planta $G(s)$ e o controlador de avanço de fase $C_{AvF}(s)$ em (105);
- 2 Construa o diagrama de Bode de $G(s)$. Avalie a margem de fase;
- 3 Determine o avanço de fase necessário e adicione de 5 a 12 graus nesse valor (a razão disso é que o controlador por avanço de fase naturalmente desloca o ponto de cruzamento com 0dB para a direita – o que reduz a margem de fase);
- 4 Usando a fase acima como ϕ_{max} , ache γ via $\sin(\phi_{max}) = (1-\gamma)/(1+\gamma)$;
- 5 Encontre em $G(s)$ a frequência ω_{max} para a qual $|G(\omega_{max})|_{dB} = -20 \log(1/\sqrt{\gamma})$. Esta será a nova frequência de cruzamento com 0dB;
- 6 Encontre $\tau = 1/(\omega_{max}\sqrt{\gamma})$ e obtenha o controlador $C_{AvF}(s)$;
- 7 Tomando a nova frequência de cruzamento de ganho ω_{max} , escolha o tempo de amostragem tal que $G_{ma}(s) = G(s)C_{AvF}(s)$ resulte em $G_{ma}(s) \approx G_{ma}(w)$ (a discretização não pode influenciar sobremaneira a ação do sistema naquela faixa de frequências). Uma boa escolha é $\omega_s \geq 100\omega_{max}$ (2 décadas acima);
- 8 Finalmente, ache $C_{AvF}(z)$ pela discretização de $C_{AvF}(s)$.

Controlador de avanço de fase – exemplo de projeto

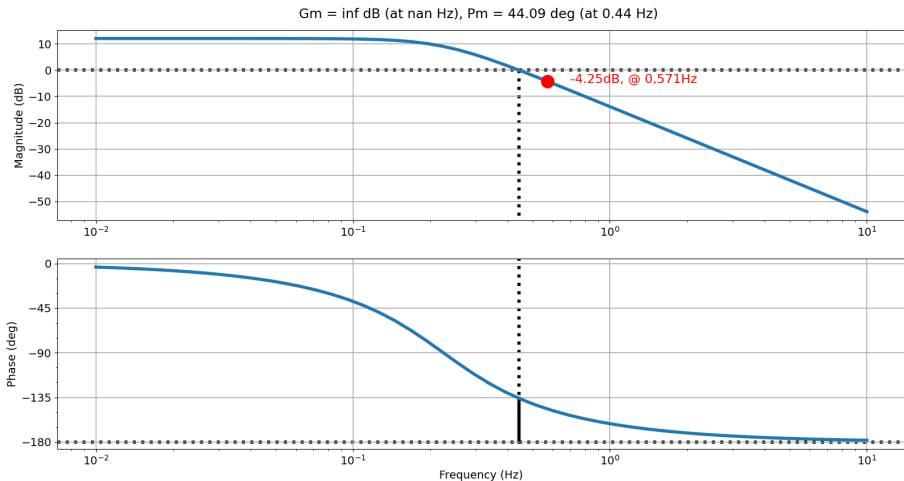
- Considere uma planta com função de transferência:

$$G(s) = \frac{8}{s^2 + 2s + 2}. \quad (108)$$

Deseja-se que o sistema em malha fechada possua uma margem de fase de cerca de 60° . Encontre um controlador de avanço de fase digital $C_{AvF}(z)$ para este requisito.

- Primeiro, precisamos avaliar as margens de estabilidade da planta, via diagrama de Bode.

Controlador de avanço de fase – exemplo de projeto



• Atribui-se então $\phi_{max} = 60^\circ - 45^\circ + 12^\circ = 27^\circ$.

Controlador de avanço de fase – exemplo de projeto

- Encontra-se γ como

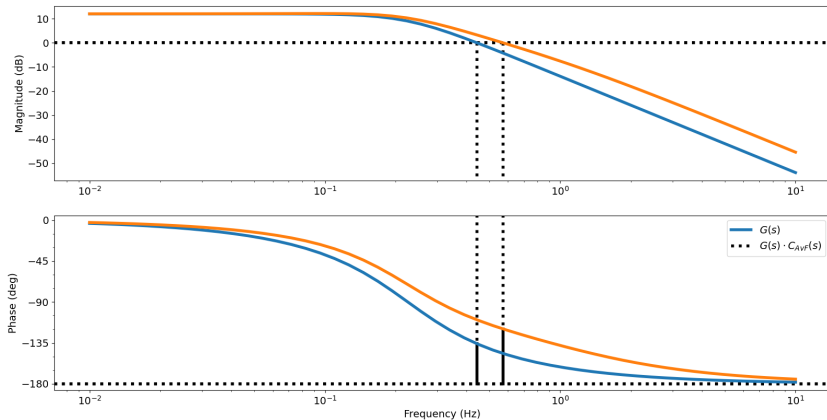
$$\sin(\phi_{max} = 27^\circ) = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \rightarrow \gamma = 0,376.$$

- Agora, no diagrama de módulo de $G(j\omega)$, busca-se a frequência ω_{max} para a qual $|G(j\omega)|_{dB} = -|1/\sqrt{\gamma}|_{dB} = -4,25dB$. Isso é feito para compensar o ganho que o controlador de avanço de fase dará na sua frequência de fase máxima. Note no gráfico anterior que este módulo ocorre em $\omega_{max} = 0,571Hz$;
- Finalmente, encontramos $\tau = 1/(\omega_{max}\sqrt{\gamma}) = 0,4548$, levando ao controlador:

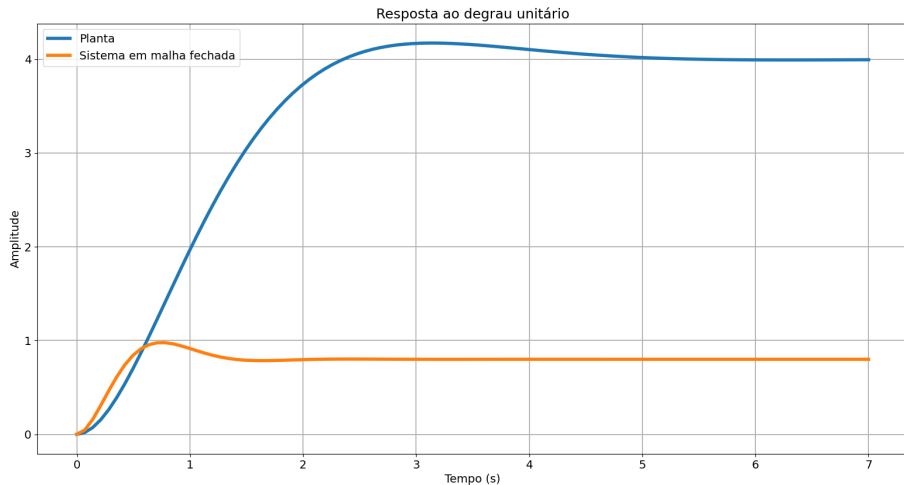
$$C_{AvF} = \frac{0,4548s + 1}{0,1708s + 1}. \quad (109)$$

Controlador de avanço de fase—exemplo de projeto

$G_m = \infty$ dB (at nan Hz), $P_m = 60.37$ deg (at 0.57 Hz)



Controlador de avanço de fase—exemplo de projeto



Controlador de atraso de fase

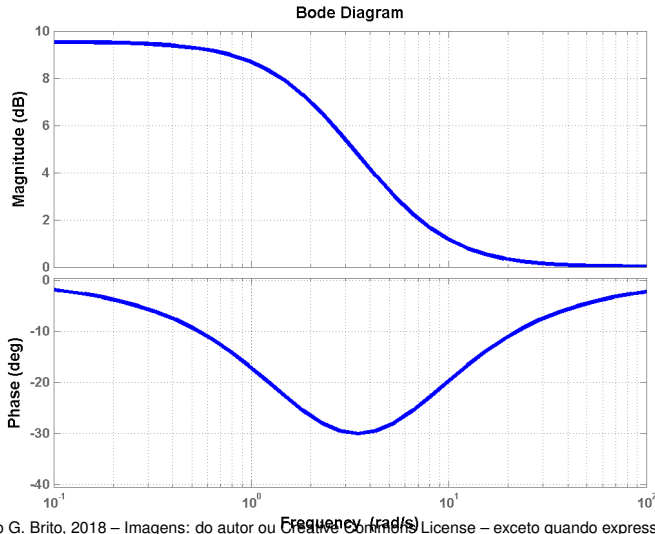
- Suponha que um sistema possua uma margem de fase aceitável, mas o ganho estático (relacionado ao erro em estado estacionário) está deficiente;
- Já vimos que se, simplesmente, usarmos um ganho para melhorar o erro em estado estacionário vamos aumentar a oscilação do sistema. Isso equivale a reduzir a margem de fase;
- Então, queremos um controlador que aumente o ganho em baixas frequências **sem** alterar a resposta em frequências mais altas;
- Para fazer isso, utilizaremos um controlador do tipo

$$C_{AtF}(s) = \frac{s + \lambda b}{s + b}; \quad (110)$$

com $\lambda > 1$ e $b > 0$. Este é o **controlador de atraso de fase**.

Controlador de atraso de fase

$$b = 2; \quad \lambda = 3$$



Controlador de atraso de fase

- Vamos interpretar esta resposta;
- Para o módulo, o sistema parte do ganho estático λ . Ao encontrar a frequência de corte do polo do controlador (b) sua amplitude começa a cair;
- Este decrescimento ocorrerá até a frequência de corte do zero (λb), quando entra na convergência para o ganho 0 dB (um);
- Note que o ganho inicial será tanto maior quanto maior λ . Ou seja, podemos usar esse valor para aumentar o ganho estático na malha aberta (e reduzir o erro em estado estacionário);
- Para a fase, observamos que ela parte de 0 graus. Ao se encontrar uma década antes do polo do controlador, a fase começa a cair.

Controlador de atraso de fase

- Aproximando-se de uma década do zero do controlador, esta tendência de decrescimento começa a ser menos pronunciada, até que um valor mínimo seja atingido. A partir daí, o zero domina a resposta, forçando crescimento da fase até 0 graus;
- Pode-se mostrar que o mínimo de fase ocorre na média geométrica das frequências do polo e do zero:

$$\omega_{min} = \sqrt{b \cdot \lambda b} = b\sqrt{\lambda}; \quad (111)$$

- Dado a redução na fase, justificamos o nome do controlador.

Controlador de atraso de fase – utilização

- O controlador de atraso de fase é utilizado quando desejamos corrigir ou aumentar o ganho estático do sistema em malha aberta sem afetar muito a margem de fase do sistema;
- Por exemplo, suponha que precisamos dobrar o ganho de baixas frequências para reduzir o erro em estado estacionário;
- Para obter isso, basta que escolhamos $\lambda = 2$. Mas a escolha de b deve ser feita com cuidado para não afetar a margem de fase (que está em uma frequência mais alta);
- Assim, posicionamos a frequência de fase mínima do controlador (ω_{min}) para algo entre 0,1 e 0,01 da frequência de margem de fase da planta (ω_{MF}):
 - ❶ $\omega_{min} \rightarrow 0,1\omega_{MF}$ faz a convergência em estado estacionário mais rápida, mas afeta mais a margem de fase do conjunto controlador + planta;
 - ❷ $\omega_{min} \rightarrow 0,01\omega_{MF}$ afeta menos a margem de fase do conjunto controlador + planta, mas faz a convergência em estado estacionário mais lenta;

Controlador de atraso de fase – passos de projeto

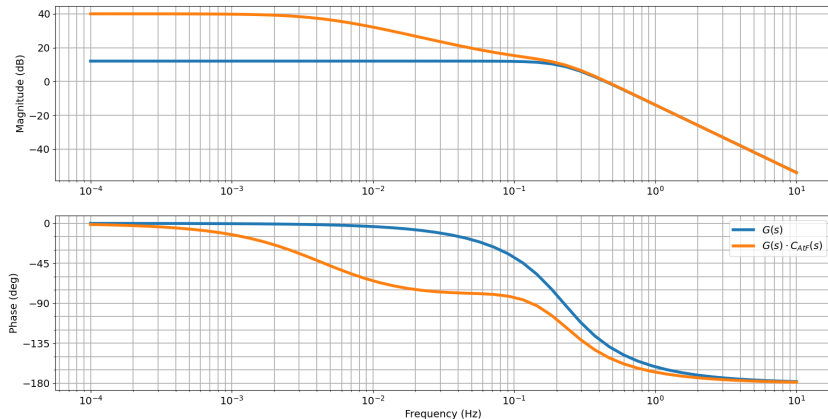
- 1 Considere uma planta $G(s)$ e o controlador de atraso de fase $C_{AtF}(s)$ em (110);
- 2 Determine o quanto deve ser aumentado o ganho de $G(s)$ para que o requisito de erro em estado estacionário ao degrau seja atendido. Faça λ igual a esse ganho;
- 3 Encontre a frequência de margem de fase de $G(s)$, denotada por ω_{MF} . Escolha a frequência central do atraso de fase ω_{min} entre uma e duas décadas abaixo de ω_{MF} ;
- 4 Encontre b por $\omega_{min} = b\sqrt{\lambda}$ e obtenha o controlador C_{AtF} ;
- 5 Tomando a frequência de margem de fase de $G(s)$ (ω_{MF}), escolha o tempo de amostragem tal que $\omega_s \geq 100\omega_{MF}$ (2 décadas acima);
- 6 Finalmente, ache $C_{AtF}(z)$ pela discretização de $C_{AtF}(s)$.

Controlador de atraso de fase – exemplo de projeto

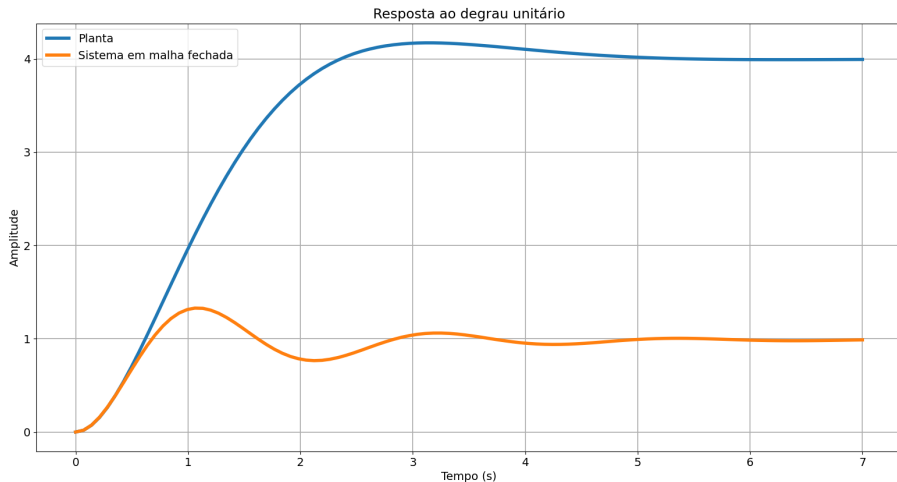
- Considere novamente a planta da Eq. (108). Deseja-se que o sistema em malha fechada possua erro em estado estacionário ao degrau unitário de 0,01, mas não desejamos (ou podemos) aumentar o ganho estático da malha aberta. Encontre um controlador de atraso de fase $C_{AtF}(s)$ para este requisito;
- O ganho estático da planta é 4. Para que $e_{ss-degrau} = 0,01$, o ganho estático de malha aberta (planta + controlador) precisar ser de 99;
- Então o controlador deve prover um ganho estático de 24,75. Assim, $\lambda = 25$;
- Já vimos que a margem de fase da planta ocorre em $2\pi(0,44)rad/s$. Tomemos $\omega_{min} = \omega_{MF}/20 \approx 0,14rad/s$. Isso leva a $b = 0,028$;
- Então o controlador de atraso de fase fica:

$$C_{AtF} = \frac{s + 0,691}{s + 0,028}. \quad (112)$$

Controlador de atraso de fase – exemplo de projeto



Controlador de atraso de fase – exemplo de projeto



Rede atraso-avanço de fase

- Podemos mesclar os benefícios dos controladores avanço e atraso de fase no mesmo projeto;
- Assim, chegamos à rede atraso-avanço de fase:

$$C_{AvAtF}(s) = \frac{(\tau s + 1)(s + \lambda b)}{(\gamma \tau s + 1)(s + b)}; \quad (113)$$

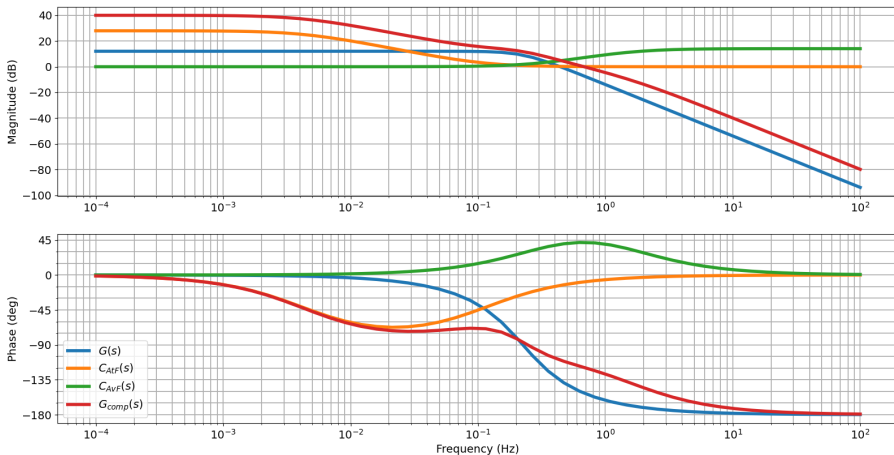
- O projeto em geral começa pela rede de atraso. Ela é escolhida para os requisitos de resposta estacionária. O zero e polo deste controlador são posicionados em uma frequência bem mais baixa que a região de margem de fase;
- Depois, o sistema compensado em atraso passa pela compensação em avanço de fase, onde objetiva-se a melhoria da margem de fase;
- Note que a junção dos controladores de avanço e atraso de fase tem efeito similar ao de um controlador PID.

Rede atraso-avanço de fase – exemplo de projeto

- Utilizemos novamente a planta da Eq. (108), com requisitos de $e_{ss-degrau} = 0,01$ e margem de fase de cerca de 60° . Desejamos aplicar uma rede avanço-atraso de fase.
- O projeto de atraso de fase já foi realizado, Então podemos partir das margens de fase de $G(s)C_{AtF}(s)$:

Rede atraso-avanço de fase – exemplo de projeto

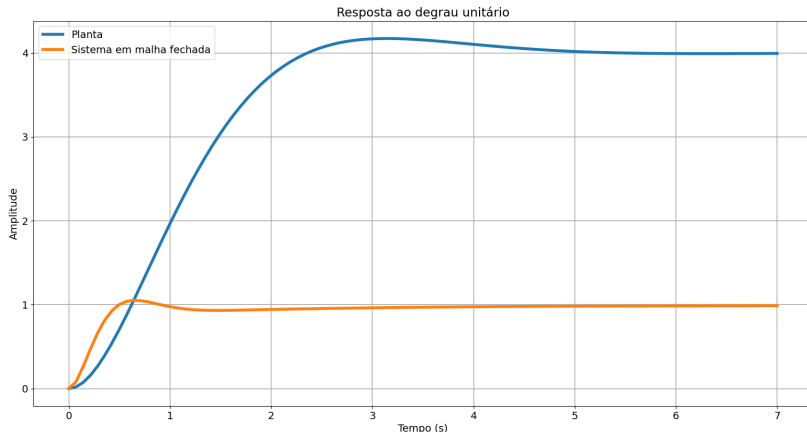
- Observando que a margem de fase do sistema compensado em atraso é de 30° , repetimos o projeto de avanço de fase para um $\phi_{max} = 60 - 30 + 12 = 42^\circ$.




Rede atraso-avanço de fase – exemplo de projeto

- Chegamos então à rede avanço-atraso de fase:

$$C = C_{AtF} C_{AvF}; \quad C_{AtF} = \frac{s + 0,691}{s + 0,028}; \quad C_{AvF} = \frac{0,532s + 1}{0,105s + 1} \quad (114)$$



Exercícios

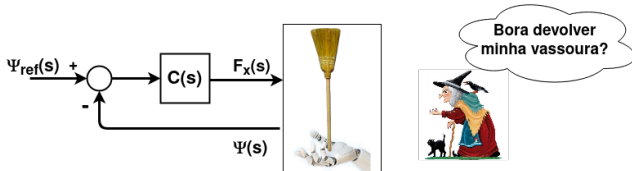
23  Seja o sistema contínuo

$$G(s) = \frac{6}{(s + 3)(s^2 + 0,5s + 2)}.$$

Deseja-se que o sistema em malha fechada possua margem de fase de, pelo menos, 60° e erro de estado estacionário ao degrau unitário de, no máximo, 0,001.

- i) Projete um controlador digital de avanço de fase que garanta os requisitos de precisão e margem de fase estabelecidos;
- ii) Projete um controlador digital de atraso de fase que garanta a precisão estabelecida;
- iii) Projete uma rede atraso-avanço digital que atenda a ambos os requisitos;
- iv) Simule, para cada um dos casos acima, o sistema em malha fechada e discuta os resultados (não se esqueça de discretizar adequadamente a planta).

Exercícios



- 24 No curso de Sistemas de Controle, discutimos o projeto de um controlador para o equilibrista de cabo de vassoura. Considere que

$$\frac{\Psi(s)}{F_x(s)} = \frac{l}{Js^2 - Mgl};$$

com $M = 1,5\text{kg}$, $l = 1,2\text{m}$ e $J = 1\text{kg} \cdot \text{m}^2$. Deseja-se que o sistema de controle digital em malha fechada possua as seguintes características:

- tempo de acomodação menor ou igual a $0,5\text{s}$;
- percentual de sobressinal menor ou igual a 10% ;
- erro em estado estacionário ao degrau menor que 2% da amplitude deste degrau.

Projete, então três controladores para alcançar os requisitos acima: a) PID digital; b) deadbeat, e; c) rede avanço-atraso digital. Discuta o comportamento de cada um deles frente aos objetivos propostos.

Efeitos da sobreamostragem

- Ao longo de todo o curso, discutimos o efeito da amostragem na análise de sistemas digitais;
- Um ponto que foi corriqueiro em nossa discussão é que a frequência de amostragem precisa ser substancialmente mais alta que as dinâmicas envolvidas;
- A questão é que isso pode levar a um proceder contrário e igualmente danoso: o uso de uma frequência de amostragem excessivamente maior que o necessário, face as dinâmicas envolvidas;
- A esse fenômeno damos o nome de **sobreamostragem**, que estudaremos aqui mediante exemplos.

Efeitos da sobreamostragem – exemplo 1

- Considere um sistema contínuo dado por:

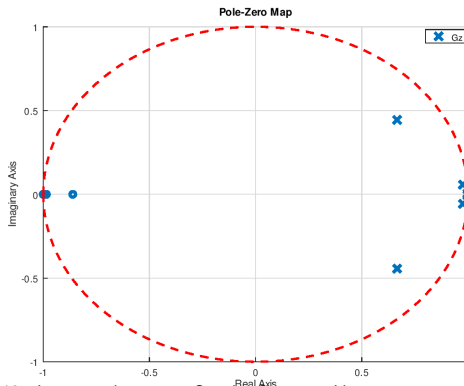
$$G(s) = \frac{2}{s^2 + s + 2}. \quad (115)$$

desejamos estudar como a frequência de amostragem afeta a respectiva expressão de $G(z)$;

- A frequência natural desse sistema é $\omega_n = \sqrt{2} \text{ rad/s}$. Vamos adotar como frequência de amostragem 5 condições: $\omega_s = 1, 2, 3, 4$ e 5 décadas acima de ω_n ;
- Vamos analisar como os polos e zeros de $G(z)$ se comportam em relação à ω_s adotada.

Efeitos da sobreamostragem – exemplo 1

Frequência ω_s	zeros	polos
$10\omega_n$	-0,8608	$0,66642 \pm 0,44403j$
$100\omega_n$	-0,97634	$0,97634 \pm 0,05745j$
$1.000\omega_n$	-0,9985	$0,99776 \pm 0,000586j$
$10.000\omega_n$	-0,9999	$0,99978 \pm 0,00059j$
$100.000\omega_n$	-1,0000	$0,99998 \pm 0,00006j$



Efeitos da sobreamostragem – exemplo 2

- Considere um sistema contínuo dado por:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}. \quad (116)$$

desejamos estudar como a frequência de amostragem afeta a respectiva expressão de $G(z)$;

- A frequência de corte desse sistema é $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$. Vamos adotar como frequência de amostragem 5 condições: $\omega_s = 1, 2, 3, 4$ e 5 décadas acima de ω_c ;
- Vamos analisar como os coeficientes de $G(z)$ se comportam em relação à ω_s adotada.

Efeitos da sobreamostragem – exemplo 2

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \Leftrightarrow G(z) = \frac{b_0}{z+a_0}$$

Frequência ω_s	b_0	a_0	$ a_0 / b_0 $	bits*
$10\omega_c$	$4,67 \times 10^{-1}$	$-5,33 \times 10^{-1}$	1,24	2
$100\omega_c$	$6,09 \times 10^{-2}$	$-9,39 \times 10^{-1}$	15,4	4
$1.000\omega_c$	$6,26 \times 10^{-3}$	$-9,94 \times 10^{-1}$	158,7	8
$10.000\omega_c$	$6,28 \times 10^{-4}$	$-9,99 \times 10^{-1}$	1.591	11
$100.000\omega_c$	$6,28 \times 10^{-5}$	-10×10^{-1}	15.915	14

(*) número mínimo de bits para escrever a_0 com precisão b_0 .

Diretrizes para definição da freq. amostragem

- Do exposto até aqui, vemos que tanto a sub quanto a sobreamostragem são danosas do ponto de vista de controle digital;
- Mas, então, há alguma estratégia consistente e absoluta para definição de uma frequência de amostragem que atenda aos variados critérios?
- A resposta é **NÃO**. Tudo dependerá do caso técnico em questão;
- Como uma diretriz geral, a escolha do tempo de amostragem deve ser feita conhecendo-se o processo, suas características e requisitos de controle. Também deve contemplar o aparato técnico de controle disponível (sensores, conversores, etc.);
- Uma boa estratégia é primeiro definir os requisitos de malha fechada, descobrindo-se a banda passante necessária para que tais requisitos sejam satisfeitos;
- Escolhendo-se a frequência de amostragem duas décadas acima da banda passante acima, garante-se boa amostragem para a malha fechada e evitam-se os efeitos danosos da sobreamostragem.

Solução dos Exercícios

- 1
 - a) $K = 2$ e $\tau = 0,5s$;
 - b) $K = 0,67$ e $\tau = 0,13s$;
- 2
 - a) $K = 1$, $\zeta = 0,29$ e $\omega_n = 9,2 \text{ rad/s}$;
 - b) $K = 1,52$, $\zeta = 0,6$ e $\omega_n = 2 \text{ rad/s}$;
- 3 Obtenha $G_{mf}(s)$ e $G_{mf}(z)$ e aplique o teorema do valor final para referência em degrau unitário. Isso mostrará o resultado.
- 4 $z_{1,2} = 0,79 \pm j0,214$.
- 5
 - a) $K_p = 65,13$;
 - b) Ache os polos de malha fechada com o K_p acima;
 - c) O sistema contínuo de 2ª ordem original não possui zeros implicando, portanto, que o aumento do ganho não leva à instabilidade. No plano z , a região de estabilidade é um disco unitário. E, além disso, a discretização da planta leva a dois zeros na malha fechada. Isso impede o aumento indefinido do ganho K_p no sistema digital. Lembre-se que o teorema do valor final somente se aplica **se** o sistema em questão é estável!
 - d) $K_p < 8,2569$. Dica: ache os polos de MF em função de K_p .
 - e) Aplique o teorema do valor final.

- 6
- a) estável;
 - b) instável;
 - c) instável;
 - d) instável;
 - e) estável;
 - f) instável;
 - g) instável;
 - h) estável;
 - i) instável;
- 7
- a) Aplique o critério de Routh.
 - b) Aplique o teste de Jury.
 - c) Compreenda o efeito da discretização sobre os zeros do sistema.
- 8 $K_d < 2,7586$ e $0 < K_p < 4,0171 - 2K_d$.
- 9
- a) $a_0 - 1 < b_0 K_{pz} < a_0 + 1$.
 - b) $a_0 - 1 < b_0 K_{pw} < a_0 + 1$.
- 10 $e_{ss,degrau} > 4,5\%$

11 Vide solução no computador;

12 a) não existe K_p que satisfaça;

b) $K_p = 0,141$, para $z_{1,2}^{MF} \approx 0,53 \pm 0,41j$;

K_p	$z_{1,2}^{MF}$
0,031	$\approx 0,46 \pm 0,48j$
2,17	$\approx -0,55 \pm 0,39j$
6,47	$\approx -0,67$

c)

13 a) Toda a região do plano s que satisfaça:

- parte real menor igual a -4 ;
- módulo da relação entre a parte imaginária e a parte real menor igual a $1,33$.

b)

$$G(z) = \frac{0,00935z + 0,00875}{z^2 - 1,801z + 0,8187}$$

c) Há inúmeras soluções que resolvem as condições do lugar das raízes para a região de requisitos proposta. Entretanto, nem todas conduzirão ao atendimento dos requisitos devido à não dominância. Por exemplo:

- o ponto $s = -4 + 4j$ (que conduz ao ponto $z = 0,617 + 0,261j$) está no limite da região de requisitos. Entretanto, o sistema em malha fechada terá $PSS \approx 18\%$;
- já o ponto $s = -4 + 2j$ (que conduz ao ponto $z = 0,657 + 0,133j$) atende a todos os requisitos. Teríamos, então, o controlador $C(z) = (45,44z^2 - 74,5z + 30,54)/(z-1)$.

14

a)

$$\frac{\omega_w}{\omega} = \frac{2}{\bar{\omega}\pi} \operatorname{tg}\left(\frac{\bar{\omega}\pi}{2}\right)$$

b)

$\bar{\omega}$	1	0,5	0,1	0,01	0,001
ω_w/ω	1×10^{16}	1,27	1,0083	1,0001	1

c)

O erro entre as frequências no mundo contínuo e o discreto cresce dramaticamente quando $\omega \rightarrow \omega_s/2$. Note que para ω igual a um quarto de frequência de amostragem, o erro é de 27% entre os domínios.

15

a)

Obtido diretamente do exercício anterior.

b)

$$\frac{\omega_w}{\omega} = \frac{4N}{\pi} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4N}\right)$$

c)

N	1	2	5	10	100
ω_w/ω	1,2732	1,0548	1,0083	1,0021	1

d)

Usando o tempo de amostragem exatamente como o tempo de atraso, o erro em frequência (e por conseguinte, em fase) é grande entre a representação discreta e contínua do atraso de tempo. Com a redução do tempo de amostragem, essa representação melhora substancialmente.

16 a) **G**: $MG=7,96\text{dB} @ 1,41\text{rad/s}$; $MF=31,46^\circ @ 0,95\text{rad/s}$;
Gz: $MG=0,14\text{dB} @ 0,93\text{rad/s}$; $MF=0,96^\circ @ 0,92\text{rad/s}$;

- b) Obviamente que o tempo de amostragem não foi bem escolhido. As margens de estabilidade foram consideravelmente afetadas pela amostragem, indicando que a análise do domínio discreto em muito pouco se assemelha a do domínio contínuo. O sistema discreto é muito menos robusto a variações paramétricas e de modelagem.
- c) Levando-se em conta apenas esse gráfico, uma escolha inicial seria $\omega_s \geq 10\text{rad/s}$. Mesmo nesse caso, teríamos uma degradação das margens de estabilidade. Para $\omega_s \geq 20\text{rad/s}$, as margens do sistema discreto difeririam do sistema contínuo por cerca de 3dB e 8° .

- 17 a) Substitua $s_\gamma = \lambda(z_\gamma - 1)/(z_\gamma + 1)$, $\lambda = 2/T_s$. Isolando-se z_γ nas condições do problema, você concluirá que $|z_\gamma| < 1$, demonstrando o fato i) do teorema;
- b) Novamente, tomando a transformação bilinear na variável s de $G(s)$, e após algum algebrismo, você chegará a

$$G(z) = \frac{(z+1)^{n-m} \prod_{k=1}^m \lambda(z-1) + z_k(z+1)}{\prod_{l=1}^n \lambda(z-1) + p_l(z+1)}.$$

Note que haverá n monômios em z no denominador de $G(z)$ e n monômios no numerador. Então, demonstra-se o fato ii) do teorema;

- c) Por inspeção da expressão acima, observa-se $n - m$ zeros em $z = -1$ em $G(z)$, demonstrando o fato iii) do teorema;

18

a)

$$G_{ZOH}(z) = \frac{1 - e^{-pT_s}}{z - e^{-pT_s}}; \quad G_{bilin}(z) = \frac{p(z+1)}{\lambda(z-1) + p(z+1)};$$

com $\lambda = 2/T_s$. Já vimos que se T_s é suficientemente baixo, o polo de $G_{ZOH}(z)$ é próximo de $G_{bilin}(z)$. Há, entretanto, um zero em $z = -1$ esta última forma;

b)

Um simples esboço do lugar das raízes para ambos os casos mostrará que há trecho do LR no eixo real fora do disco unitário no caso do $G_{ZOH}(z)$. Já no caso do $G_{bilin}(z)$, o LR no eixo real convergirá para o zero em $z = -1$, ficando restrito ao interior do disco unitário para qualquer K_p .

- 19 a) Se a planta é estável e representada por transformação bilinear, isso implica que ela terá dois polos dentro do disco unitário e dois zeros em $z = -1$. Então seu LR para um controlador K_p partirá desses polos rumo aos zeros, não havendo assíntotas de convergência para o infinito. Ora, se estamos supondo um cruzamento do LR com o eixo imaginário, esses polos deve ter parte real positiva, certo? Suponha, então que esses polos sejam $z_{1,2} = a \pm bj$, com $a^2 + b^2 < 1$ (estabilidade). Isso conduz a

$$G_{bilinear}(z) = \frac{(z + 1)^2}{z^2 - 2az + a^2 + b^2}.$$

Tomando a equação característica $1 + K_p G_{bilinear}(z) = 0$, podemos mostrar que os polos de MF terão parte real nula quando $K_p = a$ e que, neste caso, a parte imaginária terá módulo menor que 1 – portanto, dentro do disco unitário.

- b) É uma afirmação razoável. Note que os dois polos estão dentro do disco e partirão rumo aos zeros também no disco. Além disso, o ponto de cruzamento com o eixo imaginário ocorre dentro do disco. Então, apesar de não provarmos, supor que o LR se restringirá ao interior do disco parece uma afirmação correta. Observe que no exemplo da Eq (49) isso não ocorre no caso da representação do sistema via ZOH!

- 20 a) A resposta do sistema contínuo em malha fechada apresenta tempo de pico em 0,3s e tempo de acomodação em 0,55s. Qual tempo de amostragem você escolheria? Eu escolhi $T_s = 0,04s$.

b)

$$C(z) = \frac{47,68z^2 - 65,32z + 23}{z^2 - z}.$$

c)

$$G_{ZOH} = \frac{0,03921}{z - 0,9608}; \quad G_{bilinear} = \frac{0,01961z + 0,01961}{z - 0,9608}$$

Ambas as representações apresentam o mesmo polo. Entretanto a transformação bilinear apresenta um zero em $z = 1$, não existente no ZOH. Obviamente isso deve ser levado em conta no projeto do controlador a depender da proposta utilizada.

d)

Ao realizar a simulação, você notará que a malha fechada digital considerando o controlador acima e a planta representada por ZOH é instável! Já o controlador PID digital com a planta representada via transformação bilinear é estável e representa bem o comportamento da malha fechada contínua. Isso pode ser explicado pelas características já discutidas sobre a aproximação bilinear. Neste caso em particular, todo o trecho de lugar das raízes estará dentro do disco unitário!

- 21 a) Para o mesmo $T_s = 0,04s$, temos $q_z = 0,764 + 0,187j$.
 b) Novamente, há inúmeras soluções. Uma condição que atende à condição de ângulo é $a = 0,635$ e $b = 0,067$), que leva ao controlador PID:

$$C(z) = \frac{37,63z^2 - 46,62z + 14,96}{z^2 - z}.$$

- c) Abaixo a simulação do sistema contínuo em malha aberta (azul) e digital em malha fechada (vermelho):

