

# EMB-5641 – Sistemas de Controle

Prof. Dr. Alexandre Garro Brito



# Sumário I

- 1 Visão Geral da Disciplina
- 2 Revisão de Transformada de Laplace
- 3 Modelagem de Sistemas Físicos
- 4 Análise da Resposta Temporal
- 5 Controle Realimentado e seus Requisitos
- 6 Estabilidade
- 7 VI: Análise do Lugar das Raízes
- 8 VII: Controlador PID
- 9 VIII: Resposta em Frequência

# Visão geral da disciplina

A disciplina de Sistemas de Controle visa a preparar o aluno para o projeto e análise de controladores aplicados a sistemas dinâmicos lineares contínuos. É de fundamental importância, dada sua enorme aplicação em variados contextos da engenharia.

# Visão geral da disciplina

**Disciplina:** EMB 5641 – Sistemas de Controle

**Carga Horária:** 72 h/a – 4 créditos

**Ementa:** Modelagem matemática de sistemas: gráfico de fluxo de sinais e fórmula de Mason. Análise de sistemas elétricos, mecânicos, térmicos e hidro-pneumáticos. Análise da resposta temporal de sistemas lineares. Mapa de pólos e zeros. Requisitos de desempenho de sistemas realimentados. Estabilidade. Método do lugar das raízes. Análise da resposta em freqüência. Projeto de controladores lineares nos domínios do tempo e freqüência. Controle PID: características e projeto. Controle de sistemas no espaço de estados. Introdução ao controle digital.

## Bibliografia:

- NISE, N. Engenharia de sistemas de controle. 5. ed. LTC, 2009.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. Sistemas de controle modernos. 11. ed. LTC, 2009.
- OGATA, K. Engenharia de controle moderno. 5. ed. Pearson Brasil, 2011.

# Controle: uma ideia intuitiva



# Um sistema de controle SEMPRE tem:

- i) Um sistema a ser controlado (planta)
- ii) Um ou vários objetivos a serem cumpridos
- iii) Uma forma de atuar sobre a planta de forma que os objetivos sejam cumpridos
- iv) Uma forma de verificar, em tempo real, se os objetivos estão sendo cumpridos e de que forma;
- v) Uma lógica ou lei que garanta o cumprimento dos objetivos.

# Alguns sistemas de controle Φωδα

Malhar é pros fracos...  
Chuááááá  
Na mosca  
É só uma uva. Mas podia ser outra coisa...  
Pra se divertir depois do RU.

# Qual o objetivo da disciplina de Sistemas de Controle?

**Começar** a te preparar para fazer algumas das estripulias anteriores e muitas outras!

# O que aprenderemos nessa disciplina?

- Como analisar e modelar matematicamente um fenômeno (físico, químico, biológico, etc)?
- Como especificar objetivos?
- Como traduzir esses objetivos em requisitos de desempenho de projeto?
- Como bolar uma lei de controle capaz de cumprir os requisitos propostos?
- Como verificar se o desempenho do sistema é de fato satisfatório?

# Para isso, precisamos estudar...

- Noções de modelagem de sistemas físicos (2 a 6 horas-aula)
- Análise transitória e estacionária de sistemas lineares - (6 a 8 horas-aula)
- Requisitos de desempenho de sistemas realimentados (6 a 8 horas-aula)
- Estabilidade de sistemas lineares - (6 a 8 horas-aula)
- Lugar das Raízes - (4 a 8 horas-aula)
- Análise da resposta em frequência (6 a 8 horas-aula)
- Controle PID (4 a 6 horas-aula)
- Projeto de controladores no domínio do tempo e da frequência (8 a 12 horas-aula)
- Controle no espaço de estados - (6 a 8 horas-aula)

# O curso de Sistemas de Controle



[luykensdogssite.nl](http://luykensdogssite.nl)

# Como será o curso?

- Haverá aulas expositivas e computacionais;
- Nas aulas expositivas, discutiremos os tópicos teóricos associados à ementa da disciplina;
- Faremos um Trabalho Técnico onde você aprenderá controle na prática.

# Livros

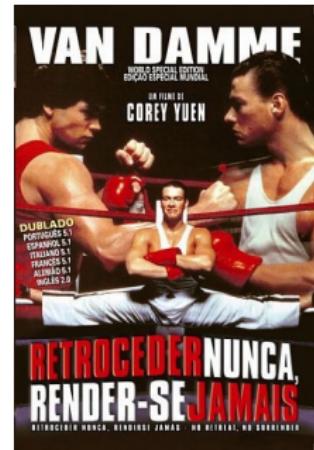
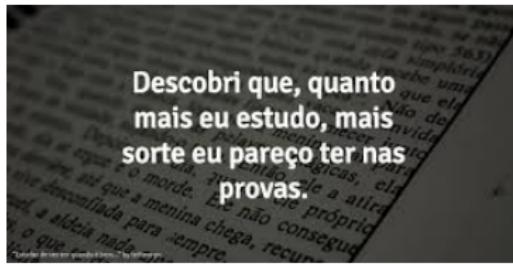


# Leia o Plano de Ensino!!

O Plano de Ensino (disponível no Moodle) regula **tudo** referente a esta disciplina, incluindo:

- Datas;
- Segunda chamada e abono de faltas;
- Atestado médico e outros procedimentos;
- O correto uso deste material;
- Outras questões;
- Note que o aluno não pode alegar desconhecimento do Plano de Ensino nos seus pleitos!

# Que a força esteja com vocês!



# Antes de começar, por favor...

**DESLIGUE O CELULAR !!!**



Por favor...



# Primeira lição de controle!



# Meu primeiro problema de controle!

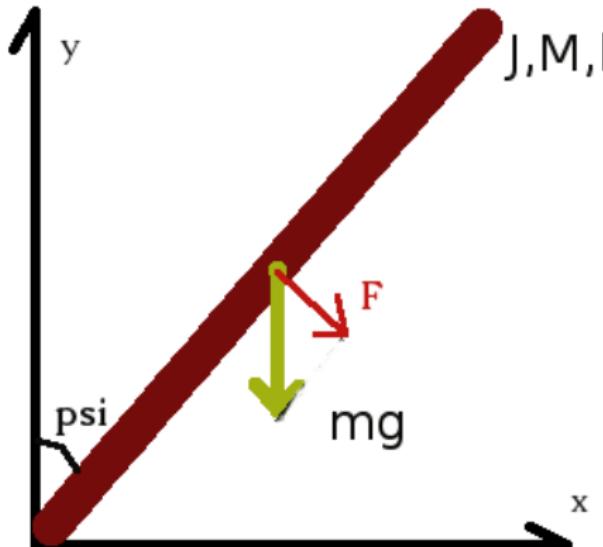
Você foi contratado para criar uma lógica de comando da velocidade de cruzeiro de um carro. Deseja-se que a velocidade seja sempre igual à especificada pelo motorista, independente da pista e do número de passageiros. O carro possui um sensor eletrônico de velocidade e um comando eletromecânico no pedal do acelerador. O carro foi ensaiado em laboratório, tripulado apenas pelo piloto de testes e em terreno plano. Foi levantada a relação entre o deslocamento do pedal provido pelo comando eletromecânico (em cm) e a velocidade final do carro (em km/h). Esta relação se mostrou ser uma reta de inclinação A km/h/cm. Com base nessas informações:

- Bole uma lógica de comando da velocidade de cruzeiro;
- Discuta se sua lógica funcionará quando o carro for tripulado por 5 passageiros em uma subida.

# Cabo de vassoura? Como assim?

- Vamos tentar compreender o que é um sistema de controle através de um caso “simples”: o equilibrista de um cabo de vassoura;
- Papel e caneta: vamos pensar...

# Pêndulo livre



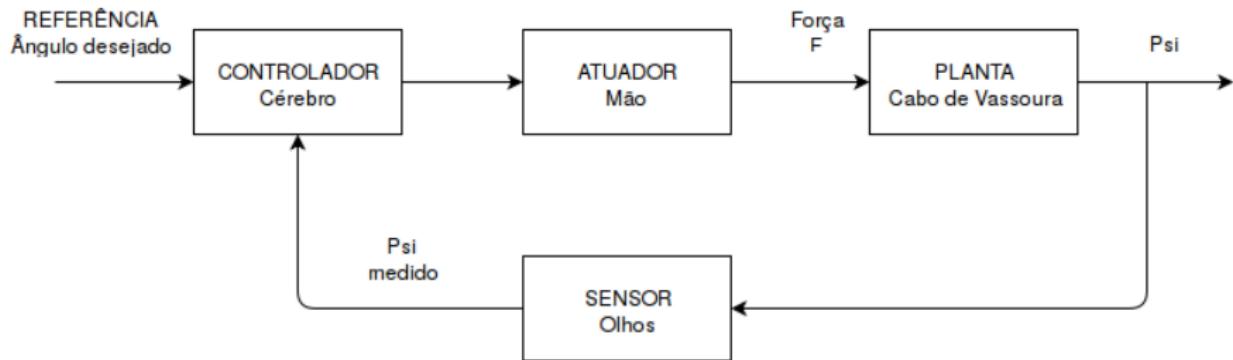
- $F = Mg \operatorname{sen}(\psi)$
- $T_I = F \cdot \frac{J}{2} = J\ddot{\psi}$
- $Mg \frac{J}{2} \operatorname{sen}(\psi) = J\ddot{\psi}$
- O torque ocorre de forma a aumentar indefinidamente  $\psi$ . Então o cabo cai!

# Controlando o cabo de vassoura - o equilibrista!



- Objetivo: equilibrar o cabo de vassoura na vertical. Neste caso, a **referência** desejada é  $\psi \approx 0$ ;
- O **sistema** ou **planta** a ser controlada é o cabo de vassoura;
- A mão é o **atuador** pelo qual operamos sobre a planta;
- Os olhos formam o **sensor** que medem o desvio com a vertical;
- O cérebro é o **controlador**, que elabora a lei de atuação para que o objetivo de controle seja alcançado.

# Controlando o cabo de vassoura - o equilibrista!



# Legal, mas e daí?

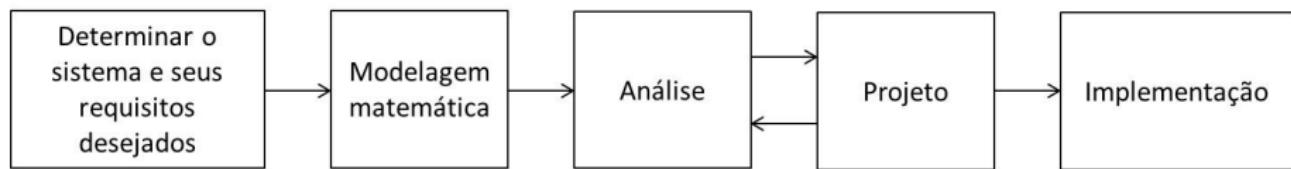
Pêndulo invertido triplo

# Sistemas de Controle

O controle automático é essencial em qualquer campo da engenharia e ciência. É um componente importante em sistemas de veículos espaciais, robóticos, manufatura e qualquer operação que envolva controle de temperatura, pressão, velocidade, umidade, vazão, etc.

# O Processo de Projeto

## Processo de Projeto de um Sistema de Controle



# Então, podemos começar?



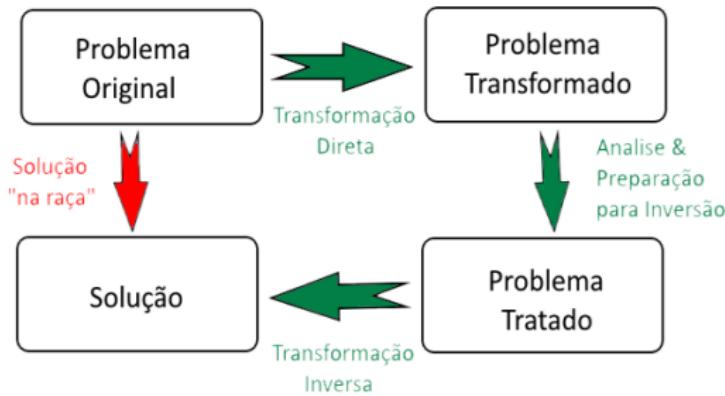
# Exercícios

- E1** Imagine uma ação que cotidianamente você realize no seu dia a dia. Analise esta ação do ponto de vista de controle e estabeleça os “elementos” de controle direta ou indiretamente envolvidos em tal ação.
- ◆
- E2** [Leia este artigo](#) a respeito de usinas nucleares. Suponha que você foi contratado como engenheiro em uma usina baseada na tecnologia PWR. Considerando o funcionamento deste tipo de usina, proponha uma técnica de controle da tensão elétrica gerada e estabeleça os equipamentos necessários para este fim.
- ◆

# Revisão de Transformada de Laplace

# Transformadas integrais

- No estudo da matemática aprendemos técnicas para solução de vários problemas de álgebra, trigonometria, etc.
- Uma outra classe de procedimento é aplicar uma transformação que leve o problema de um domínio de difícil solução e análise para outro em que isso seja um pouco mais simples (ou conveniente). As *Transformadas Integrais* se incluem nessa classe.



# Transformadas integrais

- As transformadas integrais têm o formato padrão:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t,k) dt \quad (1)$$

onde:

- $k$  é a variável do domínio transformado;
- $f(t)$  é a função temporal a transformar;
- $g(t,k)$  é uma função nas variáveis  $t$  e  $k$ , característica para cada transformada. Esta função é conhecida como *núcleo da transformada*;
- $F(k)$  é a função no domínio transformado.

# Pierre Simon Laplace



Pierre Laplace  
Matemático Francês  
★ 23/03/1749  
† 05/03/1827

- Foi uma das mentes mais brilhantes que já existiu, apresentando relevantes contribuições no estudo geométrico da mecânica clássica, probabilidades, campos potenciais, análise funcional, etc.;
- Foi conde e marquês do império francês;
- Sua obra-prima foi *Méchanique Céleste*. Foi um dos primeiros a postularem a existência dos buracos negros e do colapso gravitacional;
- Desenvolveu a ferramenta base de nosso curso!

# Transformada de Laplace

A **transformada de Laplace** é um método operacional que permite converter equações diferenciais lineares em equações algébricas, em uma variável complexa. Possui as seguintes vantagens:

- Permite o uso de técnicas gráficas para prever o desempenho do sistema sem a necessidade de resolver explicitamente a equação diferencial;
- As componentes transitória e estacionária são obtidas em conjunto;
- Em alguns casos, a obtenção da solução da equação diferencial pode ser obtida de uma forma mais simples.

# Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é definida\* como:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2)$$

Onde:

- $f(t)$  é uma função do tempo  $t$ , tal que  $f(t) = 0$  para  $t < 0$ ;
- $\mathcal{L}$  é um símbolo que denota o operador transformada de Laplace;
- $F(s)$  é a transformada de Laplace de  $f(t)$ ;
- $s = \sigma + j\omega$  é a variável complexa de Laplace.

\* Como estamos interessados no tempo  $t \geq 0$ , aplicamos a forma unilateral da Transformada de Laplace.

# Transformada de Laplace – convergência

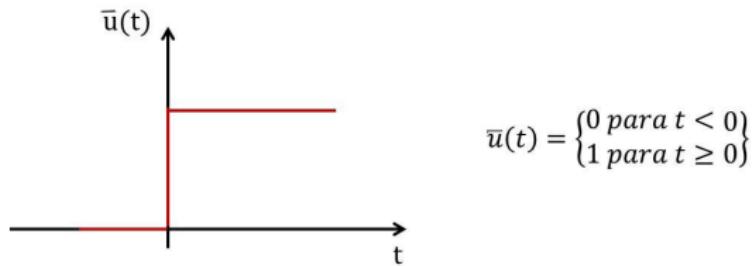
- Existe a transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  se a respectiva integral converge. Isso implica que a integral converge para uma função  $F(s)$  **finita!**
- Como a integral de Laplace é calculada em  $0 \leq t < \infty$ , sua convergência é garantida se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)e^{-st}| = \lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}| = \lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)| e^{-\sigma t} = 0 \quad (3)$$

- Isso significa que uma função  $f(t)$  possuirá transformada de Laplace se ela “crescer” mais devagar que  $e^{-\sigma t}$  decrescer (para algum  $\sigma > \sigma_c > 0$ .  $\sigma_c$  é chamado de *abscissa de convergência* da transformada).
- Todas as funções do tipo  $e^{-\sigma t}$ ,  $t$ ,  $\sin(\omega t)$ ,  $t \sin(\omega t)$ , etc., possuem transformada de Laplace com  $\sigma_c = 0$ ; Já funções do tipo  $e^{g(t)}$  com  $g(t) > t$ ,  $\forall t \geq 0$ , não possuem transformada de Laplace.

# Aplicação em algumas funções

## Função Degrau Unitário



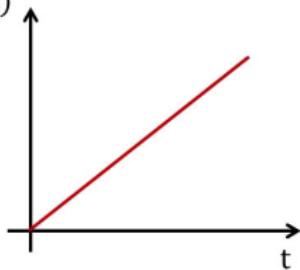
$$\mathcal{L}[\bar{u}(t)] = \int_0^{\infty} 1(e^{-st})dt = \frac{1}{s} \quad (4)$$

Como frequentemente usaremos a letra **u** para sinais de entrada, adotaremos  $\bar{u}$  quando nos referirmos a um degrau unitário.

# Aplicação em algumas funções

## Função Rampa Unitária

$$\bar{r}(t)$$



$$\bar{r}(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ t & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[\bar{r}(t)] = \int_0^{\infty} t(e^{-st})dt = t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} dt = \frac{1}{s^2} \quad (5)$$

Como frequentemente usaremos a letra **r** para sinais de referência, adotaremos  $\bar{r}$  quando nos referirmos a uma rampa unitária.

# Propriedades

## Propriedades de Sistemas Lineares

- Homogeneidade:

$$\mathcal{L}[\alpha f(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)], \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (6)$$

- Aditividade:

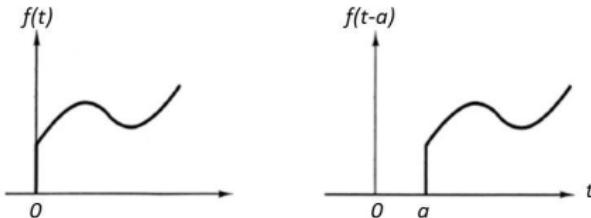
$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)] \quad (7)$$

- Superposição:

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha \mathcal{L}[f_1(t)] + \beta \mathcal{L}[f_2(t)], \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (8)$$

# Teoremas

## Teoremas da Transformada de Laplace



- Translação no tempo:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t-a)(e^{-st})dt = e^{-as}F(s) \quad (9)$$

- Translação na frequência:

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)] = \int_0^{\infty} (e^{-\alpha t})(e^{-st})f(t)dt = F(s + \alpha)$$

# Teoremas

## Teoremas da Transformada de Laplace

- Mudança de escala no tempo:

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), a > 0 \quad (11)$$

- Derivada no tempo:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(0) \quad (12)$$

# Teoremas

## Teoremas da Transformada de Laplace

- Teorema do valor final: Se a transformada de  $f(t)$  é  $F(s)$  e se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \quad (13)$$

é finito, então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (14)$$

- Teorema do valor inicial:

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (15)$$

Os teoremas do valor inicial e final permitem prever o comportamento do sistema no domínio do tempo pela análise direta no domínio de Laplace.

# Transformada Inversa de Laplace

- A transformada inversa de Laplace é o processo matemático de passar uma expressão no domínio de Laplace ( $s$ ) de volta para o domínio do tempo:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (16)$$

para  $t > 0$

- A solução via expressão acima é complicada. O que costuma ser feito é utilizar soluções já tabeladas para diversas funções.

# Tabela de transformada de Laplace - parte I

$f(t); f[k] = f(t = kT_s)$	$F(s)$	$F(z)$
$\delta(t - nT_s)$	$e^{-nsT_s}$	$z^{-n}$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{(z-1)}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{zT_s}{(z-1)^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)}$	$\frac{z}{(z-e^{-aT_s})}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{z(e^{-aT_s}-e^{-bT_s})}{(z-e^{-aT_s})(z-e^{-bT_s})}$
$\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{z \cdot \text{sen}(aT_s)}{z^2-2z\cos(aT_s)+1}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{z(z-\cos(aT_s))}{z^2-2z\cos(aT_s)+1}$
$\frac{1}{b}e^{-at}\text{sen}(bt)$	$\frac{1}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{(1/b)ze^{-aT_s}\text{sen}(bT_s)}{z^2-2ze^{-aT_s}\cos(bT_s)+e^{-2aT_s}}$
$e^{-at}\cos(bt)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT_s}\cos(bT_s)}{z^2-2ze^{-aT_s}\cos(bT_s)+e^{-2aT_s}}$



# Tabela de transformada de Laplace - parte II

$f(t); f[k] = f(t = kT_s)$	$F(s)$	$F(z)$
$t^{\gamma-1}, \gamma \in \mathbb{N}$	$\frac{(\gamma-1)!}{s^\gamma}$	$\lim_{a \rightarrow 0} (-1)^{\gamma-1} \frac{\partial^{\gamma-1}}{\partial a^{\gamma-1}} \left[ \frac{z}{z-e^{-aT_s}} \right]$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{z(1-e^{-aT_s})}{(z-1)(z-e^{-aT_s})}$
$1 - (1+at)e^{-at}$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT_s}} - \frac{zaT_s e^{-aT_s}}{(z-e^{-aT_s})^2}$
$\frac{1}{ab} + \frac{e^{-at}}{a(a-b)} + \frac{e^{-bt}}{b(b-a)}$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{z(A_1 z + B_1)}{(z-1)(z-e^{-aT_s})(z-e^{-bT_s})}$
$1 - e^{-at} (\cos(bt) + \frac{a}{b} \sin(bt))$	$\frac{a^2 + b^2}{s[(s+a)^2 + b^2]}$	$\frac{z(A_2 z + B_2)}{(z-1)(z^2 - 2ze^{-aT_s} \cos(bT_s) + e^{-2aT_s})}$

$$A_1 = \frac{b(1-e^{-aT_s}) - a(1-e^{-bT_s})}{ab(b-a)}$$

$$B_1 = \frac{-be^{-bt}(1-e^{-aT_s}) + ae^{-at}(1-e^{-bT_s})}{ab(b-a)}$$

$$A_2 = 1 - e^{-aT_s} (\cos(bT_s) + \frac{a}{b} \sin(bT_s))$$

$$B_2 = e^{-2aT_s} + e^{-aT_s} \left( \frac{a}{b} \sin(bT_s) - \cos(bT_s) \right)$$

# Exercícios

E3

Complementar ao teorema da derivação real, existe o **teorema da integração real** que estabelece que:

$$\mathcal{L} \left[ \int f(t) dt \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}, \quad f^{-1}(0) = \int f(t) dt \Big|_{t=0}.$$

Vamos usar este teorema para obter a forma geral da transformada de Laplace de uma classe de funções. Para isso, resolva os problemas a seguir sabendo que  $f^{-1}(0) = 0$  em todos os casos abaixo:

- a) Considere uma função de grau de amplitude A. Aplique o teorema da integração real para mostrar que  $\mathcal{L}\{At, t \geq 0\} = A/s^2$ ;
- b) Repita o problema anterior sobre  $At$ ,  $t \geq 0$  para mostrar que  $\mathcal{L}\{At^2, t \geq 0\} = 2A/s^3$ ;
- c) Repita o problema anterior sobre  $At^2$ ,  $t \geq 0$  para mostrar que  $\mathcal{L}\{At^3, t \geq 0\} = 6A/s^4$ ;
- d) Usando indução matemática, mostre que  $\mathcal{L}\{At^n, t \geq 0, n \in \mathbb{N}\} = A^n/s^{n+1}$ .

# Exercícios

E4

Usando o teorema da translação na frequência e o resultado do exercício anterior, mostre que:

$$\mathcal{L}\{5t^8e^{-4t}\} = \frac{201.600}{(s+4)^9}$$



E5

Com base no teorema de Laplace de mudança na escala de tempo e sabendo que:

- i)  $\mathcal{L}\{\cos(t)\} = s/(s^2+1)$ ;
- ii)  $\sin^2(t) = 0,5 [1 - \cos(2t)]$  e  $\cos^2(t) = 0,5 [1 + \cos(2t)]$ ,

mostre que

$$\mathcal{L}\{\sin^2(t)\} = \frac{2}{s(s^2+4)}, \quad \mathcal{L}\{\cos^2(t)\} = \frac{s^2+2}{s(s^2+4)}.$$

# Exercícios

E6

Em processos estocásticos, a função distribuição de probabilidade de uma variável aleatória,  $F_X(x)$ , informa qual a probabilidade de que um dado número  $X$  seja menor ou igual a  $x$ :

$$F_X(x) = P[X \leq x].$$

Para uma dada variável aleatória gaussiana, esta função e sua transformada de Laplace são:

$$F_X(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} du, \quad \mathcal{L}\{F_X(x)\} = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}.$$

- a) Analisando a função e usando seus conhecimentos de probabilidades, qual o valor de  $F_X(x \rightarrow \infty)$ ? (dica: se você demorar mais que 10 minutos para responder esta letra, pule para a próxima).
- b) Responda à pergunta anterior, mas agora utilizando o teorema do valor final de Laplace.

# Exercícios

**E7** Usando a definição da transformada de Laplace, mostre que:

a)

$$\mathcal{L}\{e^{-at} - e^{-bt}\} = \frac{b-a}{(s+a)(s+b)}, \quad b > a$$

b)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{b}e^{-at}\sin(-bt)\right\} = \frac{1}{(s+a)^2 + b^2}.$$

**E8** Prove os teoremas do valor final.



**E9** Prove o teorema da derivação real.



# Exercícios

E10 Considerar a equação diferencial

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 2y(t) = 3u(t), \quad y(0) = 2; \dot{y}(0) = -1.$$

Supondo  $u(t) = 1 - e^{-2t}$ :

- usando o teorema do valor inicial de Laplace, encontre o valor inicial de  $y(t)$ . O valor encontrado está coerente?
- usando o teorema do valor final, mostre que  $y(t \rightarrow \infty) = 3$  e mostre que, neste caso, este valor é independente das condições iniciais.
- usando o teorema do valor inicial de Laplace, encontre o valor inicial de  $y(t)$ . O valor encontrado está coerente?
- usando o teorema do valor final, mostre que  $y(t \rightarrow \infty) = 3$  e mostre que, neste caso este valor é independente das condições iniciais da equação diferencial.

# Modelagem de Sistemas Físicos

Dorf (12a Ed.): Cap 2  
Ogata (5a Ed.): Cap 2 e Cap. 3

# O que é modelagem

- Para analisar e projetar um controlador para um sistema físico, precisamos compreender as leis que regem este sistema;
- A técnica de obtenção dessas leis é conhecida como **modelagem** do sistema;
- Um modelo pode ser:
  - Não paramétrico: quando a representação dos fenômenos do sistema não se faz através de leis ou equações matemáticas, mas através de gráficos, tabelas, maquetes, etc.;
  - Paramétrico: quando as leis físicas que descrevem o sistema são convertidas em equações matemáticas relacionando parâmetros e variáveis associadas a este sistema.

# Tipos de modelos paramétricos

Um modelo paramétrico é classificado de acordo com a forma como o obtemos:

- **caixa-branca:** é aquele obtido através da análise dos processos físicos associados ao seu funcionamento. Por exemplo, expressar o movimento de um sólido a partir das leis de Newton constitui-se em uma modelagem caixa-branca (porque vc “vê” a física interna do sistema);
- **caixa-preta:** é aquele em que as equações matemáticas obtidas se referem apenas ao comportamento das saídas em relação às suas entradas, sem levar em conta os fenômenos físicos que lhe deram origem;
- **caixa-cinza:** é aquele em que as equações matemáticas obtidas combinam informações parciais dos fenômenos físicos e a análise da relações entrada-saída.

# Modelagem de sistemas dinâmicos

- Um **sistema dinâmico** é definido como aquele em que seu estado atual depende, não só dos sinais de entrada que sobre ele atuam no instante atual, mas também do estado deste sistema no tempo passado;
- Dada esta dependência com o seu “passado”, um sistema dinâmico precisa ser modelado matematicamente através de equações diferenciais;
- Já em um **sistema estático**, o estado atual da saída depende apenas do estado atual da entrada;
- Exemplos:
  - Sistema estático: lei de Hooke ( $F_{mola}(t) = Kx_{mola}(t)$ );
  - Sistema dinâmico: lei de Newton ( $F = d(mv)/dt$ ). Note que a quantidade de movimento atual depende da quantidade de movimento anterior!

# Análise de equações diferenciais

- Para compreender as características dos sistemas dinâmicos, precisamos relembrar alguns detalhes da solução das equações diferenciais;
- Tome papel e caneta e encontre as soluções ( $x(t)$ ) da equação diferencial homogênea:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 5\frac{dx(t)}{dt} + 4x(t) = 0 \quad (17)$$

- Se vc fez tudo certo, deve ter obtido as seguintes soluções:

$$x_1(t) = e^{-t}, \quad x_2(t) = e^{-4t}. \quad (18)$$

# Análise de equações diferenciais

- Testemos agora uma combinação linear das soluções anteriores. Será que

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (19)$$

resolve a equação diferencial?

- Para mostrar que sim, basta que derivemos a expressão anterior duas vezes e substituamos na equação diferencial original (faça!);

# Princípio da superposição

- Vamos tentar estender este conceito para uma equação diferencial não-homogênea geral do tipo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (20)$$

onde  $u(t)$  é um sinal de entrada (aplicado) e  $y(t)$  é um sinal de saída (coletado) do sistema.  $f$  e  $g$  são funções gerais.

- Suponha duas entradas distintas  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  que conduzam, respectivamente, às saídas  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  (obviamente via solução da equação diferencial para cada caso);
- Se a combinação linear das entradas anteriores ( $u_3(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$ ) conduzir a uma saída que segue à mesma combinação linear ( $y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ ), dizemos que a equação diferencial atende ao **princípio da superposição**;

# Sistema linear

- Dizemos que um sistema é **linear** se a equação diferencial que descreve seus fenômenos atende ao princípio da superposição. Do contrário, dizemos que o sistema é **não linear**;
- Uma equação diferencial do tipo

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + \alpha_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + \alpha_1(t) \frac{dx(t)}{dt} + \alpha_0(t)x(t) = f(t) \quad (21)$$

é linear se  $\alpha_{n-1}(t), \dots, \alpha_0(t)$  e  $f(t)$  são funções contínuas;

- Exemplos em que o princípio da superposição falha (e a equação diferencial é não linear):

- $\dot{x}^2 + 2x = u(t)$
- $\ddot{x}\dot{x} + 5\sin(x) = e^{u(t)}$

# Sistema invariante no tempo

- Considere a equação diferencial linear do tipo

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + \alpha_1 \frac{dx(t)}{dt} + \alpha_0 x(t) = f(t) \quad (22)$$

com  $\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0$  sendo valores reais constantes;

- Dizemos que esta equação diferencial é **invariante no tempo**, já que os parâmetros de sua formulação  $(\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0)$  não variam com o tempo;
- O sistema massa-mola-amortecedor será um sistema invariante no tempo se os seus elementos (massa, mola, amortecedor) não mudem suas características ao longo do tempo;
- Já um foguete ou um avião é um sistema eminentemente variante no tempo (perde massa, atmosfera variável, etc.).

# Sistema causal

- Um sistema é dito ser **causal** se a sua saída (solução da equação diferencial) no instante atual depender apenas dos valores da entrada no instante atual e passado;
- Este conceito dá a ideia de que a saída é *uma consequência da entrada*, e não o contrário;
- Considere um sistema descrito por uma equação diferencial linear do tipo

$$\begin{aligned} \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + \alpha_0 x(t) &= \\ = \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \beta_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + \beta_0 u(t) & \end{aligned} \quad (23)$$

com  $u(t)$  sendo a entrada do sistema. Pode ser mostrado que este sistema será causal se e somente se  $n \geq m$ ;

- Diremos que a equação acima é *estritamente próprio* se  $n > m$ .

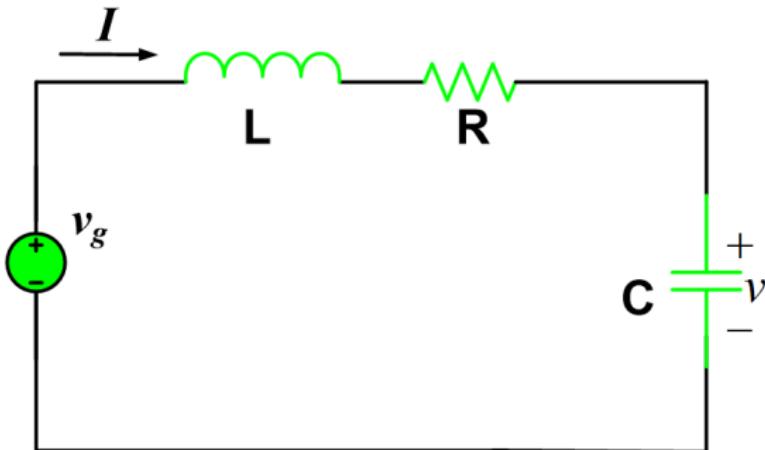
# Sistemas de Controle

Esta disciplina estudará a análise e projeto de controladores destinados a **Sistemas Lineares Causais Invariantes no Tempo!!!**

- Para que isso seja possível, o primeiro passo é obter a descrição matemática (equação diferencial) do sistema a controlar;
- A forma mais natural de conseguir isso é conhecer as leis descritivas básicas do fenômeno em questão, e relacioná-las para a obtenção da ED.

# Modelando um circuito RLC série

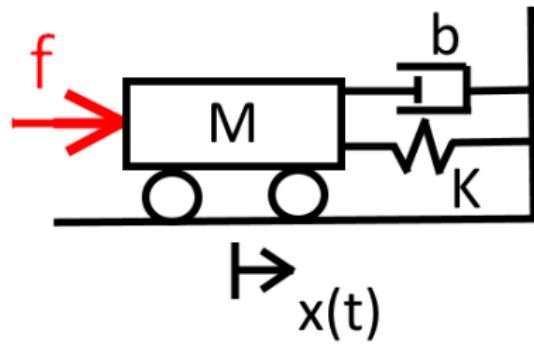
Seja o circuito RLC série abaixo, encontre a equação diferencial que relaciona a tensão de saída sobre o capacitor  $v(t)$  com a tensão de entrada  $v_g(t)$



$$R: LC\ddot{v}(t) + RC\dot{v}(t) + v(t) = v_g(t)$$

# Modelando um sistema massa-mola-amortecedor

Seja o sistema abaixo, encontre a equação diferencial que relaciona o deslocamento da massa  $x(t)$  com a força aplicada  $f(t)$



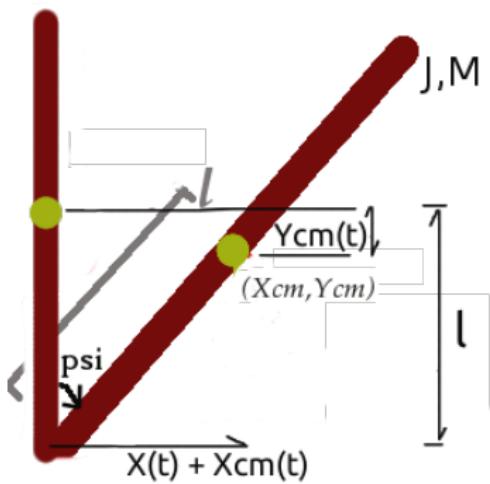
$$R: M\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t)$$

# Modelando o equilibrista de vassoura!



- Objetivo: equilibrar o cabo de vassoura na vertical ( $\psi \approx 0$ );
- Como: produzindo força na mão para sustentar e equilibrar o cabo de vassoura, de forma que o desvio com a vertical seja o menor possível;
- Considerações:
  - Análise apenas no plano xy;
  - Movimento horizontal no eixo x (não há deslocamento vertical,  $y = 0$ );
- Vamos modelar a dinâmica mão + cabo de vassoura (atuador + planta).

# Modelando o equilibrista de vassoura!



- Posição do centro de massa:

$$x_{cm} = x + l \sin(\psi)$$

$$y_{cm} = l - l \cos(\psi)$$

- Calculando as derivadas:

$$\dot{x}_{cm} = \dot{x} + l \dot{\psi} \cos(\psi)$$

$$\dot{y}_{cm} = l \dot{\psi} \sin(\psi)$$

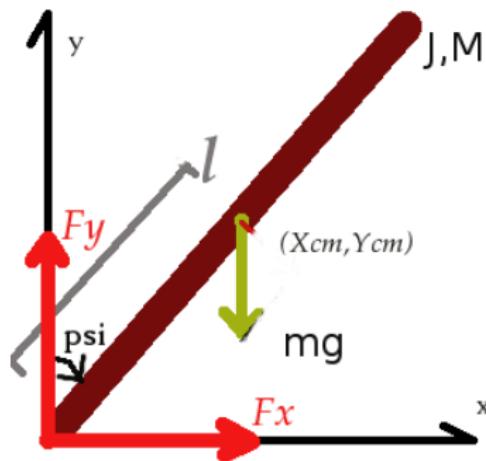
- Derivando de novo:

$$\ddot{x}_{cm} = \ddot{x} + l [\ddot{\psi} \cos(\psi) - \dot{\psi}^2 \sin(\psi)]$$

$$\ddot{y}_{cm} = l [\ddot{\psi} \sin(\psi) + \dot{\psi}^2 \cos(\psi)]$$

# Modelando o equilibrista de vassoura!

## Movimento Translacional do C.M.



- $F_x = M\ddot{x}_{cm}$  e  $Mg - F_y = M\ddot{y}_{cm}$

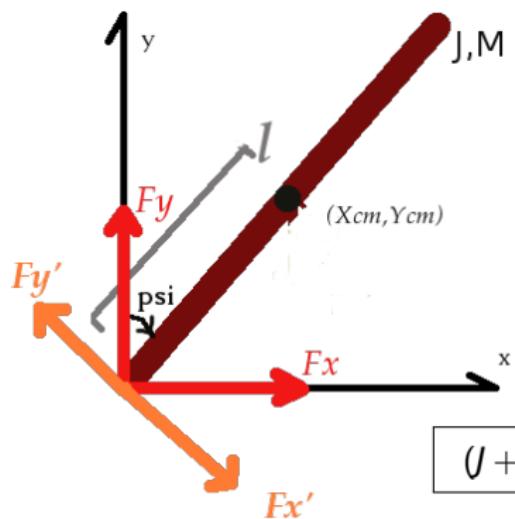
- Logo

$$F_x = M\ddot{x} + MI[\ddot{\psi} \cos(\psi) - \dot{\psi}^2 \sin(\psi)]$$

$$F_y = Mg - MI[\ddot{\psi} \sin(\psi) + \dot{\psi}^2 \cos(\psi)]$$

# Modelando o equilibrista de vassoura!

## Movimento Rotacional do cabo



- $\sum T = J\ddot{\psi} \Rightarrow [F'_y - F'_x]l = J\ddot{\psi}$
  - $F'_x = F_x \cos(\psi)$
  - $F'_x = M\ddot{x} \cos(\psi) + MI[\ddot{\psi} \cos^2(\psi) - \dot{\psi}^2 \sin(\psi) \cos(\psi)]$
  - $F'_y = F_y \sin(\psi)$
  - $F'_y = Mg \sin(\psi) - MI[\ddot{\psi} \sin^2(\psi) + \dot{\psi}^2 \sin(\psi) \cos(\psi)]$
  - Equacionando o torque:  
 $-MI\ddot{x} \cos(\psi) - MI^2 \ddot{\psi} + Mg l \sin(\psi) = J\ddot{\psi}$
- $(J + MI^2)\ddot{\psi} = -MI\ddot{x} \cos(\psi) + Mg l \sin(\psi)$

# Modelando o equilibrista de vassoura!

- Tomando as duas equações destacadas, temos a descrição do movimento (translacional e rotacional) do cabo de vassoura:

$$\begin{cases} F_x = M\ddot{x} + MI[\ddot{\psi} \cos(\psi) - \dot{\psi}^2 \sin(\psi)] \\ (J + MI^2)\ddot{\psi} = -MI\ddot{x} \cos(\psi) + MgI \sin(\psi) \end{cases} \quad (24)$$

- Equacionando  $M\ddot{x}$  em ambas as equações, temos

$$(J + MI^2)\ddot{\psi} - MgI \sin(\psi) = -F_x I \cos(\psi) + MI^2 [\ddot{\psi} \cos^2(\psi) - \dot{\psi}^2 \sin(\psi) \cos(\psi)], \quad (25)$$

que é a equação diferencial que relaciona a força lateral aplicada pela mão do equilibrista com o ângulo do cabo da vassoura em relação à vertical;

# Linearização de sistemas

$$(J + MI^2)\ddot{\psi} - Mgl\sin(\psi) = -F_x l \cos(\psi) + MI^2[\ddot{\psi} \cos^2(\psi) - \dot{\psi}^2 \sin(\psi) \cos(\psi)]$$

- Note que a equação diferencial acima é não linear. Podemos controlar este sistema neste formato, mas isso foge ao escopo de nosso curso (sistemas lineares);
- Para resolver esta questão, vamos **linearizar** a equação acima para pequenos ângulos em torno da vertical ( $\psi \approx 0$ ). Assim,

$$\dot{\psi}^2 \approx 0, \quad \sin(\psi) \approx \psi, \quad \cos(\psi) \approx 1;$$

- Aplicando as aproximações acima, chegamos à forma linear, causal e invariante no tempo (que usaremos para projeto do controlador):

$$J\ddot{\psi} - Mgl\psi = -F_x l, \tag{26}$$

# Linearização de sistemas

- O procedimento de linearização do equilibrista de vassoura recorreu a nossos conhecimentos em trigonometria aplicado ao problema em questão;
- Várias outras estratégias existem para linearizar um sistema não linear;
- Para os nossos propósitos, vamos estudar a linearização de uma outra classe de sistemas não lineares muito importantes em controle: aquela onde funções não lineares estáticas são aplicadas sobre sinais internos;
- Neste caso, utilizaremos a *série de Taylor* truncada no primeiro termo;
- Em vez de analisar o caso geral, vamos compreender a ideia por meio de um caso particular.

# Linearização de sistemas

- Considere, por exemplo, o seguinte sistema:

$$\ddot{y}(t) + \alpha_1 \dot{y}(t) + \alpha_0 y(t) = f(u(t)) \quad (27)$$

onde  $f(u(t))$  é uma função não linear aplicada ao sinal de entrada.

- Deseja-se linearizar a equação diferencial em torno de uma dada condição operacional constante da entrada  $u(t) = u_{ope}$ ;
- Aplicando-se a série de Taylor nesta função (desprezando-se os termos de ordem mais alta), temos:

$$\begin{aligned} f(u(t) - u_{ope}) &\approx f(u_{ope}) + \frac{df(u)}{du}\Big|_{u=u_{ope}} \cdot (u(t) - u_{ope}) \\ f(u(t) - u_{ope}) - f(u_{ope}) &\approx \frac{df(u)}{du}\Big|_{u=u_{ope}} \cdot (u(t) - u_{ope}) \\ \Delta f(t) &\approx K_f \cdot \Delta u(t); \end{aligned} \quad (28)$$

- Note que, agora, para pequenas variações da entrada em torno da condição operacional ( $\Delta u(t)$ ), a variação da função ( $\Delta f(t)$ ) será diretamente proporcional (a esta  $\Delta u(t)$ ) por uma constante  $K_f$ .

# Linearização de sistemas

- Agora precisamos tratar a equação diferencial para trabalhar em torno da condição operacional proposta;
- Mas note que, para um dado  $u_{ope}$  estático, a saída atingirá um valor operacional  $y(t) = y_{ope}$  (em tese, como veremos mais tarde!);
- Então, podemos estabelecer uma variação de  $y(t)$  em torno de  $y_{ope}$ . Assim,  $\Delta y(t) = y(t) - y_{ope}$ ;
- Mas note que:

$$\Delta y(t) = y(t) - y_{ope}$$

$$\dot{\Delta y}(t) = \dot{y}(t)$$

$$\ddot{\Delta y}(t) = \ddot{y}(t)$$

$$\vdots = \vdots$$

(29)

# Linearização de sistemas

- Reunindo estes resultados, reescrevemos a equação diferencial original não linear

$$\ddot{y}(t) + \alpha_1 \dot{y}(t) + \alpha_0 y(t) = f(u(t));$$

- Como uma equação diferencial linear, em torno do ponto de operação escolhido:

$$\ddot{\Delta y}(t) + \alpha_1 \dot{\Delta y}(t) + \alpha_0 \Delta y(t) = K_f \cdot \Delta u(t); \quad (30)$$

- E essa é a equação diferencial que utilizaremos para propósitos de controle  ☺ ☺ ☺.

# Função-solução do equilibrista de vassoura

- Vamos retornar para nosso problema original! Vejamos como a transformada de Laplace pode ser utilizada para estudar (e resolver) uma equação diferencial do equilibrista de cabo de vassoura;
- Aplicando Laplace dos dois lados da equação (26) e usando suas propriedades (linearidade e derivação real), chegamos a:

$$J[s^2\Psi(s) - s\Psi(0) - \dot{\Psi}(0)] - Mgl\Psi(s) = -IF_x(s); \quad (31)$$

- Fatorando-se  $\Psi(s)$  chegamos a

$$\begin{aligned} \Psi(s) &= \frac{Js}{Js^2 - Mgl}\Psi(0) + \frac{J}{Js^2 - Mgl}\dot{\Psi}(0) - \frac{IF_x(s)}{Js^2 + Mgl} \\ &= \frac{Js\Psi(0) + J\dot{\Psi}(0) - IF_x(s)}{Js^2 - Mgl} \end{aligned} \quad (32)$$

- Então, se aplicarmos a transformada inversa de Laplace, obtemos  $\psi(t)$  (solução da E.D.). Fácil, não?

# Função-solução do equilibrista de vassoura



- Bem, acho que não! Note que teremos que pegar esta função de Laplace:

$$\Psi(s) = \frac{Js\psi(0) + J\dot{\psi}(0) - IF_x(s)}{Js^2 - Mgl} \quad (33)$$

para algum  $F_x(s)$  dado;

- E aplicar na integral de inversão de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}[\Psi(s)] = \psi(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \Psi(s)e^{st} ds \quad (34)$$

uma integral “complexa” de variável complexa!

- Será que conseguimos um caminho mais simples?

# Função de transferência

- Em Controle, nosso objetivo primário é conseguir encontrar uma lei capaz de proporcionar um comportamento desejado ao sistema **independente das condições iniciais**;
- A análise (e solução) da equação diferencial para uma dada condição inicial não é tão importante assim para nós - exceto em algumas situações em que de fato desejamos essa solução. Melhor é uma análise qualitativa que valha para qualquer condição inicial da E.D.;
- Sendo assim, vamos considerar **condições iniciais nulas** e ver no que isso nos ajuda;
- No problema em questão:

$$\Psi(s) = \frac{-IF_x(s)}{Js^2 - Mgl} \Rightarrow \frac{\Psi(s)}{F_x(s)} = \frac{-I}{Js^2 - Mgl} \quad (35)$$

# Função de transferência do equilibrista

$$\frac{\Psi(s)}{F_x(s)} = \frac{-l}{Js^2 - Mgl} \quad (36)$$

- Note que ao adotar **condições iniciais nulas** na equação diferencial, conseguimos obter uma **relação algébrica racional** entre a transformada de Laplace da força aplicada ( $F_x(s)$ ) e o respectivo ângulo do cabo de vassoura ( $\Psi(s)$ ). Uma bela (e útil) simplificação!

# Função de transferência

- Podemos aplicar o mesmo procedimento para qualquer equação diferencial de coeficientes constantes. Então, sem perda de generalidade, a E.D.

$$\begin{aligned} \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + \alpha_0 x(t) &= \\ = \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \beta_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + \beta_0 u(t) & \end{aligned} \quad (37)$$

resultará na função racional:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{s^m + \beta_{m-1}s^{m-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}, \quad (38)$$

# Função de transferência

- Esta forma racional recebe o nome de **função de transferência**  $G(s)$  da entrada  $U(s)$  para a saída  $X(s)$  do sistema, expresso pela respectiva equação diferencial;
- Note que só é possível obter a função de transferência de uma equação diferencial linear, invariante no tempo, cujas condições iniciais foram assumidas nulas!!
- Note também que  $G(s)$  é uma função racional complexa na variável de Laplace  $s$ .

# Polos e zeros da função de transferência

- Definimos como **zeros** de uma função complexa analítica  $G(s)$  os pontos nos quais  $G(s) = 0$ ;
- Então, os **zeros** da função de transferência são as **raízes do polinômio numerador** de  $G(s)$  ( $s^m + \beta_{m-1}s^{m-1} + \cdots + \beta_1s + \beta_0 = 0$ );
- Já os polos de uma função complexa analítica  $G(s)$  são definidos como os pontos nos quais  $G(s) \rightarrow \pm\infty$ ;
- Então, os **polos** da função de transferência são as **raízes do polinômio denominador** de  $G(s)$  ( $s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0 = 0$ );
- Observe também que a função de transferência de um sistema causal tem um número de polos maior ou igual ao número zeros, já que  $n \geq m$ .

# Voltando à vassoura...

- Para o sistema de equilíbrio do cabo de vassoura, temos a função de transferência:

$$\frac{\Psi(s)}{F_x(s)} = \frac{-l}{Js^2 - Mgl}; \quad (39)$$

- Assim, o sistema (de entrada  $F_x(s)$  e saída  $\Psi(s)$ ) não possui zeros e possui polos em

$$Js^2 - Mgl = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{Mgl}{J}}. \quad (40)$$

dois polos reais distintos e simétricos.

# Resolvendo a equação diferencial

- Bem, vejamos se a função de transferência nos ajuda na obtenção da solução da equação diferencial com **condições iniciais nulas**;
- Primeiro, precisamos dizer para que sinal de força desejamos resolver a E.D. Assumamos que apliquemos uma força  $f_x(t)$  na forma de um degrau unitário. Assim,  $F_x(s) = 1/s$  e

$$\Psi(s) = \frac{-I}{s(Js^2 - Mgl)}; \quad (41)$$

- Para obter  $\psi(t)$ , precisamos aplicar a inversa de Laplace na equação acima. Continuamos com o problema, pois não queremos (ou sabemos) resolver a integral de inversão, nem conseguimos identificar um “par casado” na tabela!
- O que fazer?

# Expansão em frações parciais

- Dividir para conquistar! Primeiro, vamos quebrar a fração anterior em “fraçõezinhas” menores. Se conseguirmos reconhecer cada uma delas na tabela, podemos fazer a inversão diretamente pela tabela;
- Um recurso poderoso de funções de variáveis complexas é chamado de *Expansão em Frações Parciais*, que permite analisar uma função racional complexa por meio dos seus *resíduos*;
- Infelizmente, não vai dar para provar as coisas, ficando esta tarefa para os (muito) interessados. Vejamos como operar uma função racional de Laplace (que é uma função de variável complexa) por meio desta ferramenta.

# Expansão em frações parciais – polos distintos

- Considerar uma função de transferência  $G(s)$  na qual todos os seus polos são reais e distintos:

$$G(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \quad (42)$$

para  $m < n$ ;

- Então, esta fração aceita uma expansão do tipo

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{(s+p_1)} + \frac{a_2}{(s+p_2)} + \cdots + \frac{a_n}{(s+p_n)}, \quad (43)$$

com  $a_k$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) constantes reais.

# Expansão em frações parciais – polos reais distintos

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{(s + p_1)} + \frac{a_2}{(s + p_2)} + \cdots + \frac{a_n}{(s + p_n)},$$

- Podemos resolver este problema na “bruta”: tomando o mínimo múltiplo comum e calculando os coeficientes por comparação com o numerador de  $G(s)$ ;
- Um método bem melhor é usar a expressão a seguir:

$$a_k = [(s + p_k)G(s)]_{s=-p_k}, \quad (44)$$

ou seja, multiplicando  $G(s)$  com o denominador do termo a calcular  $(s + p_k)$  e avaliar a expressão com  $s = -p_k$ ;

# Expansão em frações parciais – polos complexos conjugados

- Vamos estudar mais alguns casos de expansão em frações parciais que serão úteis em outros problemas;
- Quando a fração em  $s$  possuir dois polos complexos conjugados, que naturalmente são distintas entre si, a decomposição anterior não é útil. Isso porque fornecerá constantes  $a_k$  complexas. Mas desejamos uma solução  $f(t)$  real!
- Tomemos, por exemplo, a função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \quad (45)$$

que possui polos  $p_{1,2} = -1 \pm j$ ;

# Expansão em frações parciais – polos complexos conjugados

- Analizando a tabela de transformada de Laplace vemos um par deste tipo

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin(bt)] = \frac{b}{(s+a)^2 + b^2}; \quad (46)$$

que ocorre quando os polos são complexos conjugados;

- Então, basta que encontremos os valores de  $a$  e  $b$  tais que os denominadores das duas frações acima sejam iguais. A esse método daremos o nome de **completamento de quadrado**;
- Analizando o exemplo anterior, temos:

$$(s+a)^2 + b^2 = s^2 + 2as + (a^2 + b^2) = s^2 + 2s + 2; \quad (47)$$

- Isso implica  $2a = 2$  e  $a^2 + b^2 = 2$ , ou seja  $a = 1$  e  $b = 1$  (apenas positivos);

# Polos complexos conjugados – completamento de quadrado

- Assim, temos a expressão final

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1}; \quad (48)$$

- E usando a tabela de transformada, chegamos a

$$g(t) = e^{-t} \sin(t), \quad t \geq 0. \quad (49)$$

# Expansão em frações parciais – polos reais iguais

- Haverá algumas situações onde os polos da FT não serão distintos, mas repetidos com multiplicidade  $v$ . Por exemplo:

$$F(s) = \frac{n(s)}{(s+a)^v}; \quad (50)$$

- Nesse caso, a expansão em frações parciais fica

$$F(s) = \frac{\lambda_1}{s+a} + \frac{\lambda_2}{(s+a)^2} + \cdots + \frac{\lambda_v}{(s+a)^v}; \quad (51)$$

# Expansão em frações parciais – polos reais iguais

- Os coeficientes dos termos com multiplicidade são calculados pela fórmula:

$$\lambda_k = \frac{1}{(m-k)!} \left. \frac{d^{m-k}(s-a)^m G(z)}{ds^{m-k}} \right|_{s=-a}. \quad (52)$$

- O jeito mais fácil de memorizar o cálculo dos coeficientes é começar de  $a_v$  indo até  $a_1$ ;

# Expansão em frações parciais - polos reais iguais

- Por exemplo, seja

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)^2} = \frac{\lambda_0}{s} + \frac{\lambda_1}{s+2} + \frac{\lambda_2}{(s+2)^2}; \quad (53)$$

Então:

- $\lambda_0 = sG(s)|_{s=0} = \frac{1}{(s+2)^2}|_{s=0} = \frac{1}{4};$
- $\lambda_2 = (s+2)^2 G(s)|_{s=-2} = \frac{1}{s}|_{s=-2} = -\frac{1}{2};$
- $\lambda_1 = \frac{1}{1!} \frac{d(s+2)^2 G(s)}{ds}|_{s=-2} = \frac{d1/s}{ds}|_{s=-2} = -\frac{1}{s^2}|_{s=-2} = -\frac{1}{4}.$

# Expansão em frações parciais – vassoura

- No nosso problema de obter a solução  $\psi(t)$ , vemos que a função racional

$$\Psi(s) = \frac{-I}{s(Js^2 - Mgl)}; \quad (54)$$

possui três polos distintos:  $s_1 = 0$  e  $s_{2,3} = \pm\sqrt{Mgl/J}$ ;

- Então, tal função racional pode ser escrita como

$$\Psi(s) = \frac{-I}{s(Js^2 - Mgl)} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s + \gamma} + \frac{a_3}{s - \gamma}, \quad \gamma = \sqrt{Mgl/J} \quad (55)$$

- Assim:

$$a_1 = [s \cdot \Psi(s)]_{s=0} = 1/Mg$$

$$a_2 = [(s + \gamma) \cdot \Psi(s)]_{s=-\gamma} = -1/(2Mg)$$

$$a_3 = [(s - \gamma) \cdot \Psi(s)]_{s=\gamma} = -1/(2Mg)$$

# Vassoura, finish it! (a solução) ☺☺☺

- Observando a tabela de transformada de Laplace, notamos que

$$\mathcal{L}^{-1}[1/s] = u(t), \quad \mathcal{L}^{-1}[1/(s+a)] = e^{-at}, \quad t \geq 0, \quad (57)$$

então

$$\psi(t) = a_1 u(t) + a_2 e^{-\gamma t} + a_3 e^{\gamma t}, \quad t \geq 0. \quad (58)$$

- Essa é a solução, **com condições iniciais nulas**, para o cabo de vassoura, quando aplicamos um degrau unitário de força em sua base;
- Como  $\gamma > 0$ , notamos que essa solução é caracterizada por um termo constante ( $u(t)$ ) somado a duas exponenciais. Uma decresce ao longo do tempo ( $e^{-\gamma t}$ ), enquanto a outra cresce indefinidamente ( $e^{\gamma t}$ ). Resultado: o cabo da vassoura cai!

# Álgebra de Blocos

- Além de muito poderosa na solução de equações diferenciais, a transformada de Laplace goza de propriedades muito úteis para a análise de sistemas lineares;
- Uma dessas propriedades é o seu teorema da convolução conforme será visto a seguir.
- Considere um sistema linear de entrada  $u(t)$  e saída  $y(t)$ . Da teoria de sistemas lineares, sabe-se que a saída é dada pela **convolução** de  $u(t)$  e  $g(t)$ , ou seja,

$$y(t) = u(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)g(t - \tau) d\tau, \quad (59)$$

onde  $g(t)$  é a resposta do sistema ao impulso unitário.

# O teorema da convolução de Laplace

- O teorema da convolução de Laplace estabelece que

$$Y(s) = \mathcal{L}\{u(t) * g(t)\} = U(s) \cdot G(s) \quad (60)$$

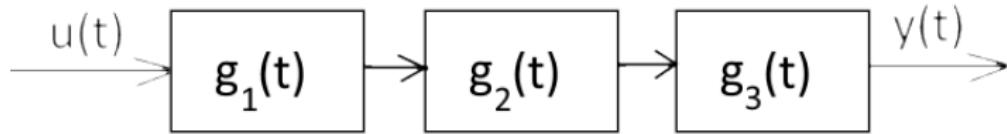
- Pode parecer, à primeira vista, que não ganhamos nada trocando o cálculo da integral de convolução pelo cálculo de duas integrais de Laplace;
- Mas esse procedimento torna-se notoriamente mais simples, sobretudo quando tratamos de associações de sistemas (equações diferenciais).

# Sistema série

- Por exemplo, considere que um sinal de tensão  $u(t)$  que passe consecutivamente por um banco de filtros composto por três filtros em série. Sejam  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$  e  $g_3(t)$  as respostas destes filtros a um impulso unitário, respectivamente;
- Se quisermos obter a saída  $y(t)$  deste banco, deveríamos resolver a equação diferencial conjunto dos três filtros. Considerando-os lineares, isso resultaria calcular:

$$y(t) = u(t) * g_1(t) * g_2(t) * g_3(t); \quad (61)$$

Três integrais de convolução!



# Sistema série

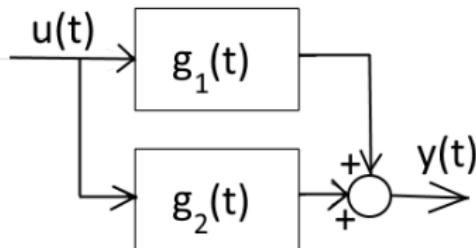
- Aplicando a transformada de Laplace e seu teorema da convolução, temos:

$$Y(s) = U(s) \cdot G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s); \quad (62)$$

- Então, a transformada de Laplace de um sistema série é o produto das transformadas de cada um dos subsistemas!
- Do ponto de vista de cálculo (e sobretudo de análise do sistema, que é o que mais nos interessa), calcular 4 transformadas de Laplace e multiplicá-las é muito melhor que calcular 3 integrais de convolução!

# Sistema paralelo

- Considere agora um sistema físico cuja saída seja a soma da resposta de dois subsistemas, conforme a seguir:



- A resposta temporal da saída é dada por

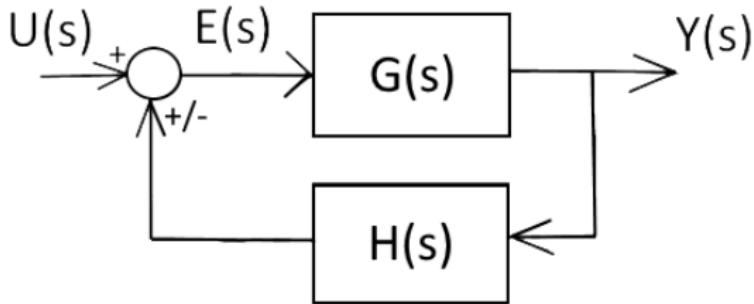
$$y(t) = u(t) * [g_1(t) + g_2(t)]; \quad (63)$$

- Aplicando a transformada de Laplace e seu teorema da convolução, temos:

$$Y(s) = U(s)[G_1(s) + G_2(s)];$$

# Realimentação

- Agora considere um sistema com realimentação. Ele é tal que a saída não depende apenas da entrada. Mas depende da soma desta entrada pelo próprio resultado da saída;
- O diagrama de blocos a seguir (já em Laplace) traz a ideia:



# Realimentação

- Observe que:

$$\begin{aligned} E(s) &= U(s) \pm Y(s)H(s); \\ Y(s) &= E(s)G(s); \end{aligned}$$

onde o sinal depende do ponto de soma de realimentação;

- Substituindo a primeira expressão na segunda, temos:

$$Y(s) = [U(s) \pm Y(s)H(s)]G(s); \quad (65)$$

- Fatorando-se  $Y(s)$  e  $U(s)$ , chega-se à função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)}, \quad (66)$$

onde o sinal é o inverso do ponto de soma de realimentação.

# Realimentação

- Essa expressão pode ser generalizada para qualquer diagrama de blocos com realimentação. Definimos:
  - i Caminho direto como o trecho do diagrama que conecta diretamente a entrada  $U(s)$  à saída  $Y(s)$ ;
  - ii Caminho de realimentação como o trecho do diagrama que conecta a saída  $Y(s)$  ao ponto de soma;
  - iii Ganho direto,  $G_{dir}$ : produto das funções de transferência no caminho direto;
  - iv Ganho de realimentação,  $G_{real}$ : produto das funções de transferência no caminho de realimentação;

# Realimentação

- Então, a função de transferência de malha fechada em um diagrama de blocos com realimentação é dado por

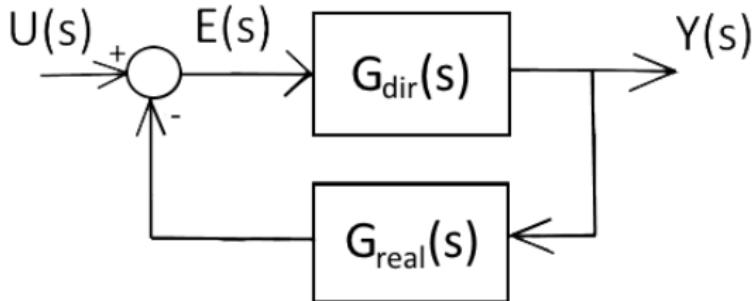
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_{dir}(s)}{1 \mp G_{dir}(s)G_{real}(s)}, \quad (67)$$

onde o sinal é o inverso do ponto de soma de realimentação;

- Note que no diagrama anterior,  $G_{dir}(s) = G(s)$  e  $G_{real}(s) = H(s)$ .

# Realimentação negativa

- A realimentação negativa (aquele em que o sinal da realimentação é negativo) é de extrema importância para este curso. Neste caso:



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_{dir}(s)}{1 + G_{dir}(s)G_{real}(s)},$$

(68)

# Redução de Diagramas de Blocos

- Algumas vezes, nos defrontaremos com diagrama um pouco mais “cabulosos”. Para sua simplificação, deveremos fazer sucessivas manipulações no diagrama **sem mudar o resultado final**, tal que sejamos capazes de obter a função de transferência global.
- O melhor jeito de aprender estas técnicas de redução é fazendo. Sugiro uma boa dose de exercícios!

# Exercícios

**E11** Considere a equação diferencial

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = \dot{u}(t) + u(t),$$

com condições iniciais nulas.

- a) Encontre a função de transferência associada a esta equação diferencial, seus polos e zeros;
- b) Assumindo  $u(t) = 2t$ ,  $t \geq 0$ , encontre a solução  $y(t)$  da equação diferencial para  $t \geq 0$ .

**E12** Considere a equação diferencial  $\dot{y}(t) = u(t)$  com  $y(0) = 0$ .

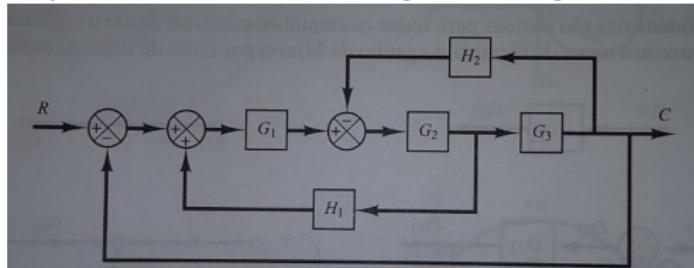
- a) Seja  $u_1(t) = e^{\alpha t}$ . Encontre a solução  $y_1(t)$  da equação diferencial.
- b) Seja  $u_2(t) = \cos(\omega t)$ . Encontre a solução  $y_2(t)$  da equação diferencial.
- c) Seja  $u_3(t) = u_1(t) + u_2(t)$ . Encontre a solução  $y_3(t)$  da equação diferencial.
- d) Essa equação diferencial é linear?

# Exercícios

**E13** Considere a equação diferencial  $\dot{y}(t) = t \cdot u(t)$  com  $y(0) = 1$ .

- a) Seja  $u_1(t) = 2t + 2$ . Encontre a solução  $y_1(t)$  da equação diferencial.
- b) Seja  $u_2(t) = e^{\alpha t}$ . Encontre a solução  $y_2(t)$  da equação diferencial.
- c) Seja  $u_3(t) = u_1(t) + u_2(t)$ . Encontre a solução  $y_3(t)$  da equação diferencial.
- d) Essa equação diferencial é linear?

**E14** (Ogata, 4a.Ed., Exp. 3.13) Considere o seguinte diagrama de blocos

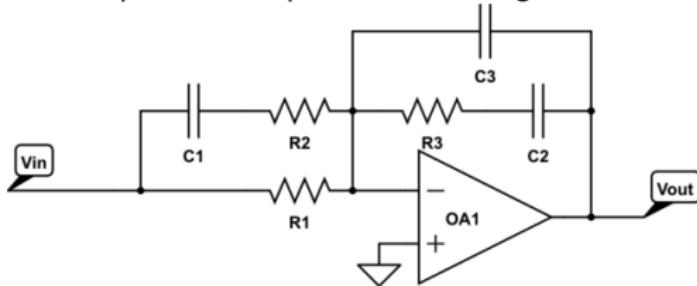


mostre que:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3}.$$

# Exercícios

**E15** Seja o circuito com amplificador operacional a seguir:



- Encontre a função de transferência de  $V_{in}(s)$  para  $V_{out}(s)$  (dica: trabalhe com as impedâncias já em Laplace!);
- Sabendo que  $C_1 = C_2 = 10\mu F$ ,  $C_3 = 100\mu F$ ,  $R_1 = R_2 = 20k\Omega$  e  $R_3 = 10k\Omega$ , encontre os polos e zeros da função de transferência acima;
- Supondo que  $v_{in}(t)$  é um degrau de amplitude 2V, encontre a expressão da resposta temporal em  $v_{out}(t)$ ;
- Com base na resposta anterior, analise o comportamento desta resposta.

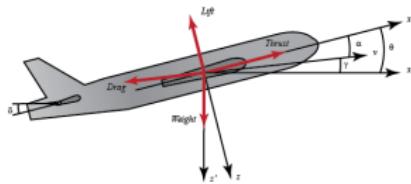
# Exercícios

E16

(Adaptado de...) O ângulo de arfagem  $\theta(t)$  (elevação vertical) de um avião pode ser modificado via ângulo de deflexão  $\delta(t)$  do profundo (em sua parte traseira). Considerando fixas a altitude e velocidade de cruzeiro, e que mudanças no ângulo de arfagem não modifiquem a velocidade da aeronave  $v(t)$ , um certo modelo da Boeing possui as seguintes equações descritivas:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = -0,313\alpha(t) + 56,7q(t) + 0,232\delta(t) \\ \dot{q}(t) = -0,0139\alpha(t) - 0,426q(t) + 0,0203\delta(t) \\ \theta(t) = 56,7q(t) \end{cases} \quad (69)$$

- a) Obtenha a função de transferência  $\Theta(s)/\Delta(s)$ , seus polos e zeros;
- b) Considere um sinal degrau unitário em  $\delta(t)$ . Encontre a resposta  $\theta(t)$  neste caso. Comente o resultado.



# Exercícios

**E17** Neste exercício, mostraremos um fato muito importante para linearização de sistemas. Considere uma equação diferencial do tipo

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Km(t).$$

Suponha que, para uma dada condição operacional  $m_0 = m(t = t_0)$ , desejamos resolver esta equação diferencial nas vizinhanças desta condição operacional, ou seja,  
 $m(t) = m(t_0) + \Delta m(t)$ . Obviamente, a saída na situação de condição operacional  $y(t_0) = Km(t_0)$ .

- a) Com essas informações, mostre que resolver a equação diferencial em torno da condição operacional

$$\tau \cdot \frac{d\Delta y(t)}{dt} + \Delta y(t) = K \cdot \Delta m(t)$$

é equivalente a resolver a equação diferencial original se  $\Delta t \rightarrow 0$ .

- b) Mostre que essa é uma observação geral para qualquer equação diferencial igual a (23).

# Exercícios

**E18** Considere um sistema dinâmico expresso pelo seguinte diagrama de blocos:



onde a função  $f$  é não linear tal que  $m(t) = e^{r(t)}$ , e  $G(s)$  representa a equação diferencial:

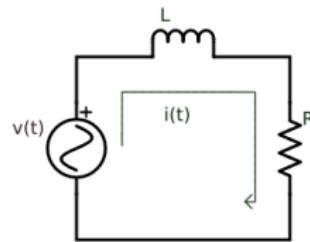
$$\tau \dot{y}(t) + y(t) = Km(t).$$

Assumindo-se uma condição operacional  $r_o = 2$  e considerando uma solução linearizada em torno de  $r_o$  (Taylor), obtenha a função de transferência  $\Delta Y(s)/\Delta R(s)$ .

# Exercícios

E19

O aquecimento de transformadores de energia elétrica é uma questão importante, pois além de representar perdas, ainda pode causar danos ao seu isolamento. A fim de propor um sistema de controle da temperatura de um dado transformador monofásico, um estudante se propõe a realizar a modelagem matemática de sua dinâmica térmica. Para isso, ele toma o seguinte diagrama associado a este transformador e realiza as seguintes considerações:



- 1) o calor  $q(t)$  gerado pelo transformador é igual à potência elétrica dissipada em seu fio, com resistência  $R$ ;
- 2) a relação entre a temperatura  $\theta(t)$  do transformador e o calor gerado em seu fio pela dissipação elétrica é dada por  $q(t) = K[\theta(t) - \theta_{amb}]$ , onde  $\theta_{amb} = 25^\circ\text{C}$  é a temperatura ambiente; considera-se que uma temperatura operacional do transformador de  $60^\circ\text{C}$  é adequada, e deseja-se realizar o controle da sua temperatura em torno desse valor operacional.

# Exercícios

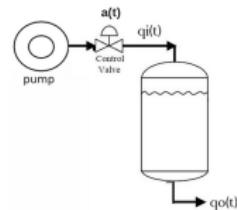
**E19** (Continuação) Sabendo que  $R = 2 \Omega$ ,  $L = 1\text{mH}$  e  $K = 172,86\text{W}/^\circ\text{C}$ , faça o que se pede a seguir.

- Mostre que a relação entre  $\theta(t)$  e  $i(t)$  é não linear;
- Considerando o ponto operacional desejado para a temperatura, mostre que os valores de corrente e tensão de entrada operacionais são, respectivamente,  $i_{ope} = 55\text{A}$  e  $v_{ope} = 110\text{V}$ ;
- Escrevendo a variação potência elétrica dissipada no resistor em torno do ponto operacional como  $\Delta P(t) + P_{ope} = R[\Delta i(t) + i_{ope}]^2$ , mostre, aplicando série de Taylor truncada, que uma expressão linearizada desta variação pode ser escrita como  $\Delta P(t) = 220\Delta i(t)$ ;
- Usando o resultado anterior e a expressão de calor gerado no transformador, mostre que a variação de temperatura (em torno da condição operacional) é dada por  $\Delta\theta(t) = 1,27\Delta i(t)$ ;
- Considerando agora o diagrama elétrico e as propriedades da transformada de Laplace, encontre a função de transferência em torno das condições operacionais  $\Delta I(s)/\Delta V(s)$ ;
- Por fim, encontre a função de transferência para o modelo linearizado em torno da condição operacional  $\Delta\theta(s)/\Delta V(s)$ .

# Exercícios

E20

(Adaptado de...) Uma bomba gera pressão hidráulica sobre um fluido em uma tubulação. A válvula de controle modula, através de sua abertura  $a(t)$ , a vazão de entrada  $q_i(t)$  em um tanque. Por uma outra tubulação na parte inferior do tanque, vaza o fluido com uma vazão de saída  $q_o(t)$ . Neste sistema, todas as variáveis são normalizadas entre 0 e 100%. Para este sistema, valem as seguintes relações:



$$\begin{cases} q_i(t) = -0,0091a^2(t) + 1,57a(t) + 29,25 \\ 2,33q_o(t) + q_o(t) = q_i(t - 1,18) \end{cases}$$

Com base nessas informações, faça o que se pede:

- Obtenha a função de transferência  $Q_o(s)/Q_i(s)$ ;
- Obtenha uma relação linearizada entre  $q_i(t)$  e  $a(t)$  para o ponto operacional  $a_{ope} = 50\%$ ;
- Usando as respostas anteriores, obtenha uma função de transferência linearizada entre  $Q_o(s)/A(s)$  em torno do ponto operacional;
- Encontre os polos e zeros da função de transferência anterior;
- Obtenha analiticamente a resposta de  $q_o(t)$  a um degrau unitário em  $a(t)$ .

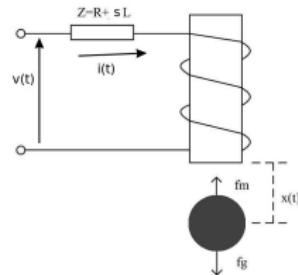
# Exercícios

E21

Considerando um sistema de levitação eletromagnética onde uma esfera de aço é equilibrada por um solenoide. Uma tensão  $v(t)$  alimenta o solenoide, cujo enrolamento possui resistência  $R$  e indutância  $L$ . A corrente  $i(t)$  gera uma força magnética  $f_m(t)$  que contrabalanceia a força-peso, com o objetivo de equilibrar a esfera em uma dada altura  $x(t)$  dada. Pode-se mostrar que

$$f_m(t) = \frac{Ki^2(t)}{x^2(t)}.$$

- a) Desprezando-se qualquer outro efeito, obtenha a equação diferencial descritiva deste sistema;
- b) Sejam  $R = 5,7\Omega$ ,  $L = 0,6H$  e  $K = 0,23 \times 10^{-3} N \cdot m^2/A^2$ . Deseja-se equilibrar a esfera em torno do ponto operacional  $x_{ope} = 25mm$ . Obtenha, então, a função de transferência  $\Delta X(s)/\Delta V(s)$  do sistema linearizado em torno da condição operacional dada.



## Análise da Resposta Temporal

Dorf (12a Ed.): 5.1 a 5.3

Ogata (5a Ed.): Cap. 5

Nise (6a Ed.): Cap. 4

# Análise da Resposta Temporal

- Começamos nosso curso estudando os sistemas físicos e sua modelagem por equações diferenciais;
- Depois estudamos a Transformada de Laplace, que se mostra muito útil no tratamento, análise e solução destas equações diferenciais;
- O próximo passo é compreender o comportamento qualitativo de certas classes de equações diferenciais que estão relacionadas a muitos sistemas físicos reais;
- Com isso poderemos pensar em como atuar no sistema para que ele tenha um determinado comportamento desejado.

# Sinais de Teste

- Para efetuar a análise dos sistemas, ao invés de utilizar sinais de entrada arbitrários, utilizaremos alguns *sinais de teste* padronizados:
  - Sinal degrau:** útil para testar como o sistema se comporta para variações abruptas e de valor final constante;

$$\bar{u}(t) = A, \quad \forall t \geq 0 \Leftrightarrow \bar{U}(s) = A/s; \quad (70)$$

se  $A = 1$ , chamamos o sinal de *degrau unitário*.

- Sinal rampa:** útil para testar o rastreamento do sistema a um sinal de entrada que varia ao longo do tempo:

$$\bar{r}(t) = At, \quad \forall t \geq 0 \Leftrightarrow \bar{R}(s) = A/s^2; \quad (71)$$

se  $A = 1$ , chamamos o sinal de *rampa unitária*.

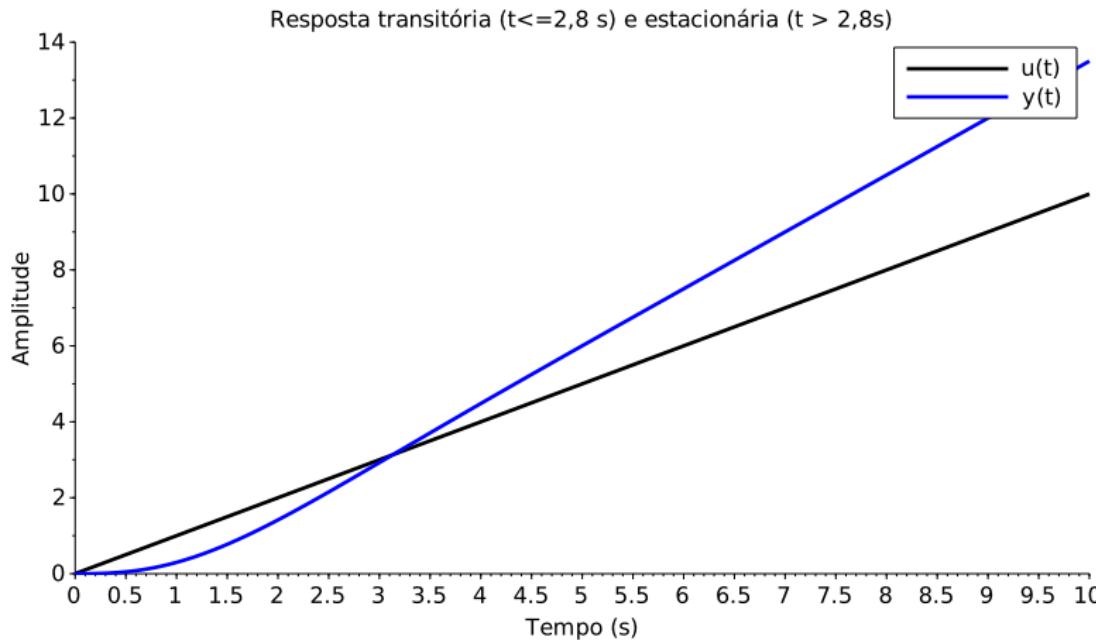
- Sinal senoidal:** útil para análise de resposta em frequência

$$s(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi).$$

# Tipos de Respostas Temporais

- Dividiremos a resposta temporal da saída em dois termos:
  - A **resposta estacionária**, ou **permanente** refere-se àquela em que as características da saída não variam mais, a partir de um instante de tempo. Por exemplo: quando a resposta atinge um valor final estacionário (entrada ao degrau), quando a inclinação da rampa de saída não varia mais (entrada em rampa), ou quando a senóide de saída não muda mais de amplitude e fase (entrada senoidal);
  - A **resposta transitória** refere-se àquela que ocorre desde a aplicação do sinal de entrada até que a saída atinja a resposta estacionária. Neste caso, as características da saída (amplitude, inclinação, fase) estão variando ao longo do tempo.

# Resposta transitória e estacionária



# Sistema de 1<sup>a</sup> ordem – definição

- Considere uma equação diferencial do tipo

$$\tau \dot{y}(t) + y(t) = Ku(t), \quad (73)$$

onde  $\tau, K \in \mathbb{R}$ ,  $u(t)$  é o sinal de entrada e  $y(t)$  o sinal de saída desta equação diferencial;

- Esta equação diferencial é dita ser de **primeira ordem**, pois possui no máximo a derivada primeira da saída;
- Obviamente, um sistema descrito por uma equação diferencial deste tipo é conhecido como **sistema de primeira ordem**.

# Sistema de 1<sup>a</sup> ordem – definição

- Vários elementos físicos apresentam uma dinâmica de primeira ordem, por exemplo:
  - Indutores e capacitores ( $v_L = L di_L/dt$ );
  - Nível em tanques ( $q = C dh/dt$ );
  - Transferência de calor ( $q_t = C dT/dt$ );
- Além disso, muitos sistemas complexos podem ser simplificados para um de primeira ordem. Isso graças às propriedades muito importantes que esta classe de sistemas possui (conforme veremos em breve).

# Sistema de 1<sup>a</sup> ordem – resposta ao degrau

- Retomemos a equação diferencial de primeira ordem genérica

$$\tau \dot{y}(t) + y(t) = Ku(t) \Leftrightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}, \quad (74)$$

- Suponhamos que o sinal de entrada seja um degrau unitário. Neste caso, temos

$$Y(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)} = \frac{K/\tau}{s(s + 1/\tau)} = \frac{K}{s} - \frac{K}{s + 1/\tau}; \quad (75)$$

- Tomando a transformada de Laplace inversa desta expressão, chegamos à **resposta ao degrau do sistema de 1<sup>a</sup> ordem**:

$$y_{degrau}(t) = K[1 - e^{-t/\tau}], \quad t \geq 0. \quad (76)$$

# Sistema de 1<sup>a</sup> ordem – parâmetros

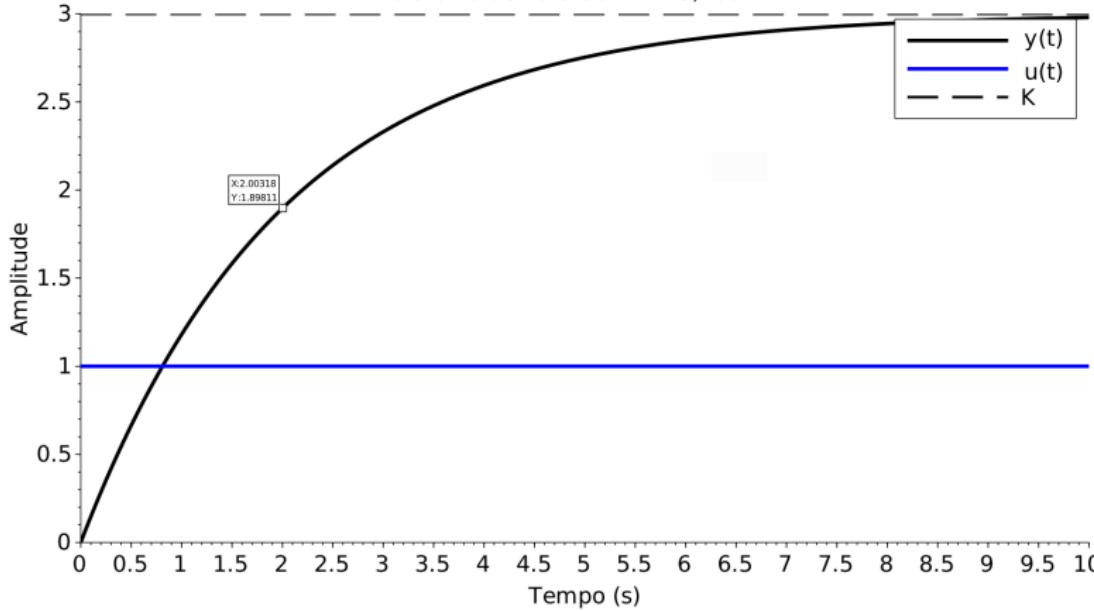
$$y_{degrau}(t) = K[1 - e^{-t/\tau}], \quad t \geq 0$$

- Analisemos esta resposta. Quando  $t = 0$ ,  $y(t) = 0$ ;
- Quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $y(t) = K$ . Então, a saída converge para um valor final  $K$ , parâmetro que receberá o nome de **ganho estático do sistema** (estático porque há uma convergência para este valor final estacionário);
- Quando  $t = \tau$ ,  $y(\tau) = K[1 - e^{-1}] \approx 0,632K$ . Ou seja, quando  $t = \tau$ , a saída alcança 63% de seu valor final;
- O parâmetro  $\tau$  receberá a denominação de **constante de tempo** do sistema de primeira ordem;
- A constante de tempo é, então, o intervalo de tempo para que a resposta ao degrau unitário atinja 63,2% de seu valor final.

# Sistema de 1<sup>a</sup> ordem – resposta temporal

$$y_{degrau}(t) = K[1 - e^{-t/\tau}], \quad t \geq 0$$

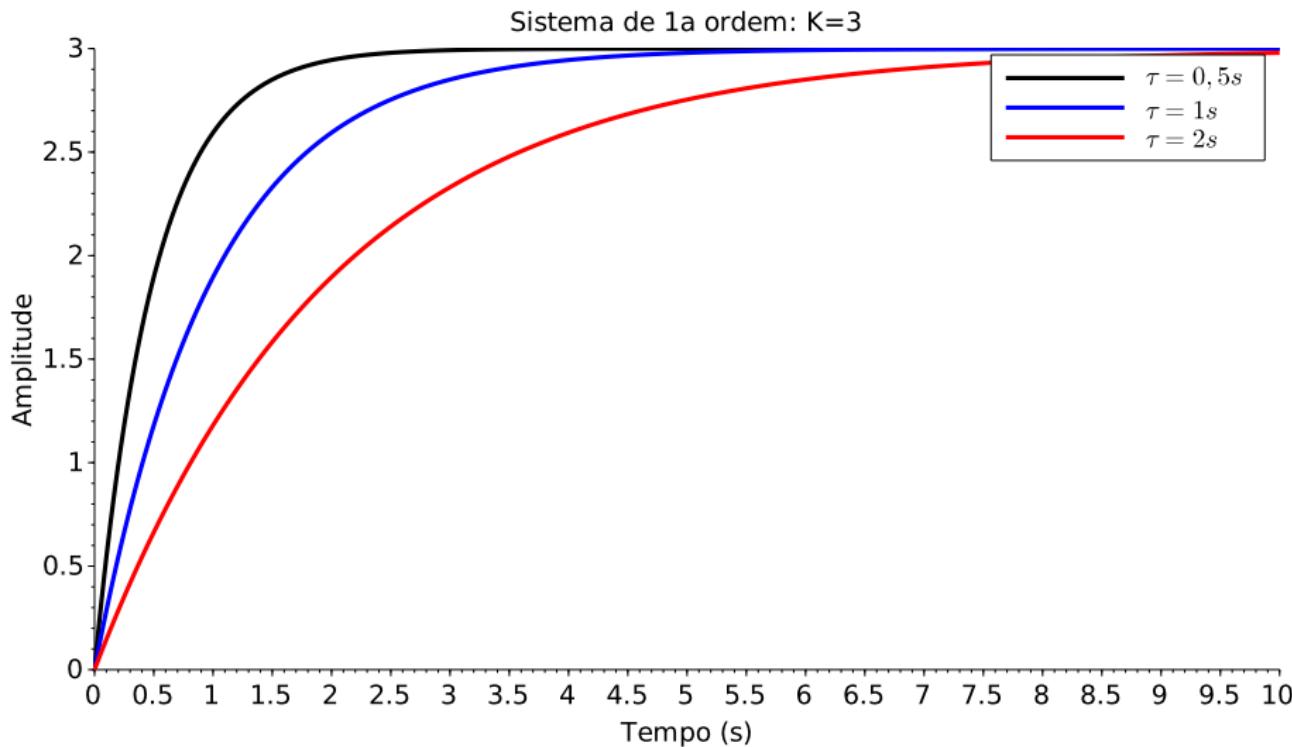
Sistema de 1a ordem: K=3, tau=2



# Sistema de 1<sup>a</sup> ordem – características

- Da resposta ao degrau, note que  $y(t) < K$ ,  $\forall t \geq 0$ . Ou seja, a resposta nunca ultrapassa o valor final ( $t \rightarrow \infty$ );
- Quanto maior o ganho estático  $K$ , maior a amplitude da saída para  $t \rightarrow \infty$ ;
- Quando  $t = 4\tau$ ,  $y(4\tau) \approx 0,98K$ . Ou seja, passadas 4 constantes de tempo, a saída do sistema já alcança mais de 98% de seu valor final. Ao tempo  $t = 4\tau$  daremos o nome de **tempo de acomodação** dos sistemas de 1<sup>a</sup> ordem;
- A constante de tempo  $\tau$  é um indicador de velocidade do sistema. Quanto menor seu valor, mais rapidamente o sistema converge para seu valor final.

# Sistema de 1<sup>a</sup> ordem – características



# Sistema de 1<sup>a</sup> ordem – polo

- Retornemos à função de transferência do sistema de primeira ordem:

$$H(s) = \frac{K}{\tau s + 1}; \quad (77)$$

- Calculando-se o seu polo, vemos que ele ocorre para  $s_1 = -1/\tau$ , ou seja, o (negativo do) inverso da constante de tempo;
- Mas vimos que quanto menor  $\tau$ , mais rápida a resposta do sistema. Portanto, quanto maior o módulo do polo, mais rápido o sistema.

# Sistema de 1<sup>a</sup> ordem – exemplos

- Seja a equação diferencial  $2\dot{y} + 4y = 6u$ . Encontre a constante de tempo e o ganho estático do sistema
  - $Y(s)[2s + 4] = 6U(s)$ , então:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{2s + 4}.$$

- Mas precisamos chegar na forma padrão

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}.$$

- Dividindo-se por 4, temos

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1,5}{0,5s + 1},$$

com  $\tau = 0,5s$ ,  $K = 1,5$ .

# Sistema de 1<sup>a</sup> ordem – exemplos

- Considere os dois sistemas de 1<sup>a</sup> ordem, a seguir:

$$H_1(s) = \frac{2}{s+3}, \quad H_2(s) = \frac{0,7}{0,4s+1}.$$

Qual sistema será mais rápido e qual terá maior valor final ao degrau unitário?

- $H_2(s)$  já está no formato padrão, com  $\tau_2 = 0,4s$  e  $K_2 = 0,7$ ;
- $H_1(s)$  precisa ser colocado no formato padrão. Dividindo-se por 3, temos:

$$H_1(s) = \frac{2/3}{(1/3)s + 1},$$

com  $\tau_1 = (1/3)s$  e  $K_1 = 2/3$ ;

- Então, o sistema  $H_1$  é mais rápido que  $H_2$  ( $\tau_1 < \tau_2$ ). Mas o valor final de  $H_2$  ao degrau unitário é maior ( $K_2 > K_1$ ).

# Sistema de 1<sup>a</sup> ordem – resposta à rampa

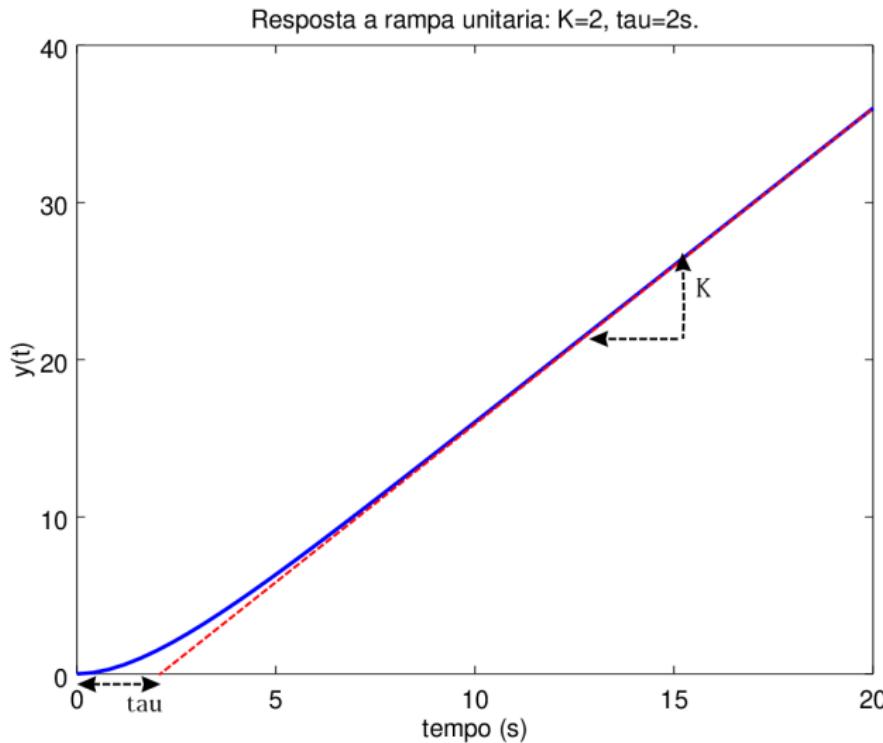
- Suponhamos agora que o sinal de entrada seja uma rampa unitária. Neste caso, temos

$$Y(s) = \frac{K}{s^2(\tau s + 1)} = \frac{K/\tau}{s^2(s + 1/\tau)} = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{a_1}{s + 1/\tau}; \quad (78)$$

- Tomando a transformada de Laplace inversa desta expressão, chegamos à **resposta à rampa do sistema de 1<sup>a</sup> ordem**:

$$y_{rampa}(t) = K[t - \tau + \tau e^{-t/\tau}], \quad t \geq 0. \quad (79)$$

# Sistema de 1<sup>a</sup> ordem – resposta à rampa



## Sistemas de 2<sup>a</sup> Ordem

Dorf (12a Ed.): 5.3

Ogata (5a Ed.): 5.3

Nise (6a Ed.): 4.4 a 4.6

Franklin (6a Ed.): 3.3

# Os sistemas de 2<sup>a</sup> ordem – definição

- Considere uma equação diferencial do tipo

$$\alpha_2 \ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y = \beta_0 u; \quad (80)$$

- Esta equação diferencial é dita ser de **segunda ordem**, pois possui no máximo a derivada segunda;
- Obviamente, um sistema descrito por uma equação diferencial deste tipo é conhecido como **sistema de segunda ordem**.

# Os sistemas de 2<sup>a</sup> ordem – definição

- O estudo dos sistemas de 2<sup>a</sup> ordem é fundamental na teoria de controle. Isso porque, sempre que possível, tentaremos aproximar o comportamento de um sistema dinâmico complexo por um sistema simplificado dominante desta classe;
- Inúmeros são os sistemas pertencentes a esta classe, entre eles o sistema massa-mola-amortecedor e o sistema elétrico RLC;
- Os sistemas de 2<sup>a</sup> ordem se dividem em quatro casos:
  - Sistema sobre(super)amortecido;
  - Sistema criticamente amortecido;
  - Sistema subamortecido;
  - Sistema não amortecido.

# Forma geral de um sistema de 2<sup>a</sup> ordem

- Para estudar as condições e características dos diferentes casos de sistemas de 2<sup>a</sup> ordem, vamos escrevê-los na seguinte forma geral

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2y = K\omega_n^2u \quad (81)$$

- Aplicando Laplace, temos

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (82)$$

- Os polos deste sistema são dados por

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\frac{2\zeta\omega_n}{2} \pm \frac{\sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} \\ &= -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}, \end{aligned}$$

e dependerão dos valores de  $\zeta$  e  $\omega_n$ .

# Forma geral de um sistema de 2<sup>a</sup> ordem – exemplos

Exemplo Ache  $K$ ,  $\omega_n$ ,  $\zeta$  e os polos para os sistemas:



$$\frac{20}{s^2 + 8s + 12};$$



$$\frac{8}{s^2 + 8s + 16};$$



$$\frac{1}{5s^2 + 10s + 20};$$

# Caso 1: sistema sobreamortecido

- Primeiro, vamos estudar o caso em que  $\zeta > 1$ ;
- Da função de transferência (82), vemos que o sistema possuirá dois polos reais distintos;
- Considere a resposta deste sistema a um degrau unitário:

$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s(s + \omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}))(s + \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}))} \quad (84)$$

- Usando a decomposição por frações parciais, chega-se a:

$$Y(s) = K \left[ \frac{l_0}{s} + \frac{l_1}{s + \gamma_1} + \frac{l_2}{s + \gamma_2} \right], \quad (85)$$

com  $\gamma_1 = \omega_n(\zeta + \Delta)$  e  $\gamma_2 = \omega_n(\zeta - \Delta)$ , com  $\Delta = \sqrt{\zeta^2 - 1}$   
 (módulo dos polos do sistema).

# Caso 1: Sistema sobreamortecido

- Calculando-se os parâmetros das frações parciais, chegamos a:

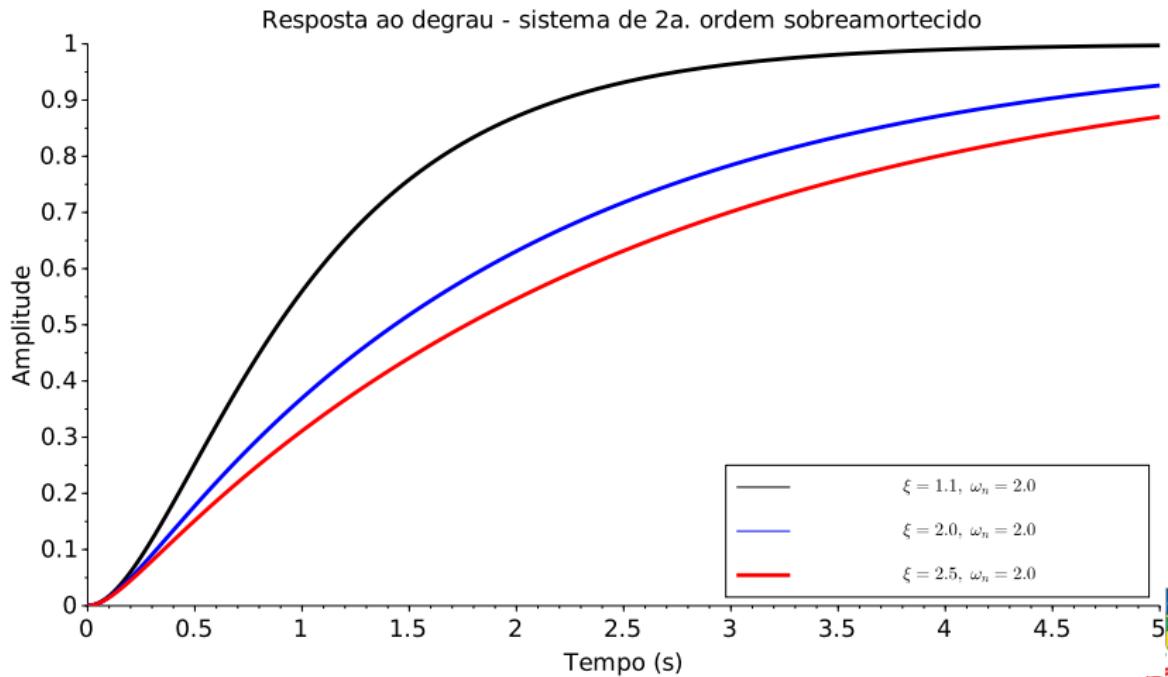
$$l_0 = 1; \quad l_1 = \frac{1}{2\Delta(\zeta + \Delta)}; \quad l_2 = -\frac{1}{2\Delta(\zeta - \Delta)}; \quad (86)$$

- Finalmente, aplicando transformada de Laplace inversa, chegamos a:

$$y(t) = K[1 + l_1 e^{-\gamma_1 t} - l_2 e^{-\gamma_2 t}]; \quad (87)$$

- Note que, como  $\zeta > 1$ , isso implica  $\gamma_1 > \gamma_2$ . Ou seja, a primeira exponencial decai mais rapidamente que a segunda. Então, a segunda exponencial é mais lenta, e é mais notável na resposta!

# Caso 1: Sistema sobreamortecido – resposta ao degrau



# Caso 1: Sistema sobreamortecido – características

$$y(t) = K [1 + l_1 e^{-\gamma_1 t} - l_2 e^{-\gamma_2 t}];$$

- A conclusão é que a saída deste sistema converge assintoticamente para o valor final ( $K$ ) através de duas exponenciais decrescentes;
- Quanto maior  $\zeta$ , maior a distância entre os polos reais;
- O polo de menor módulo tende a dominar a resposta transitória, pois apresenta caráter mais lento (maior constante de tempo). Por isso, a resposta de um sistema sobreamortecido com  $\zeta$  elevado assemelha-se a de um sistema de 1<sup>a</sup> ordem.

## Caso 2: Sistema criticamente amortecido

- Se  $\zeta = 1$ , este sistema possuirá dois polos reais negativos iguais.
- Considere a resposta deste sistema a um degrau unitário:

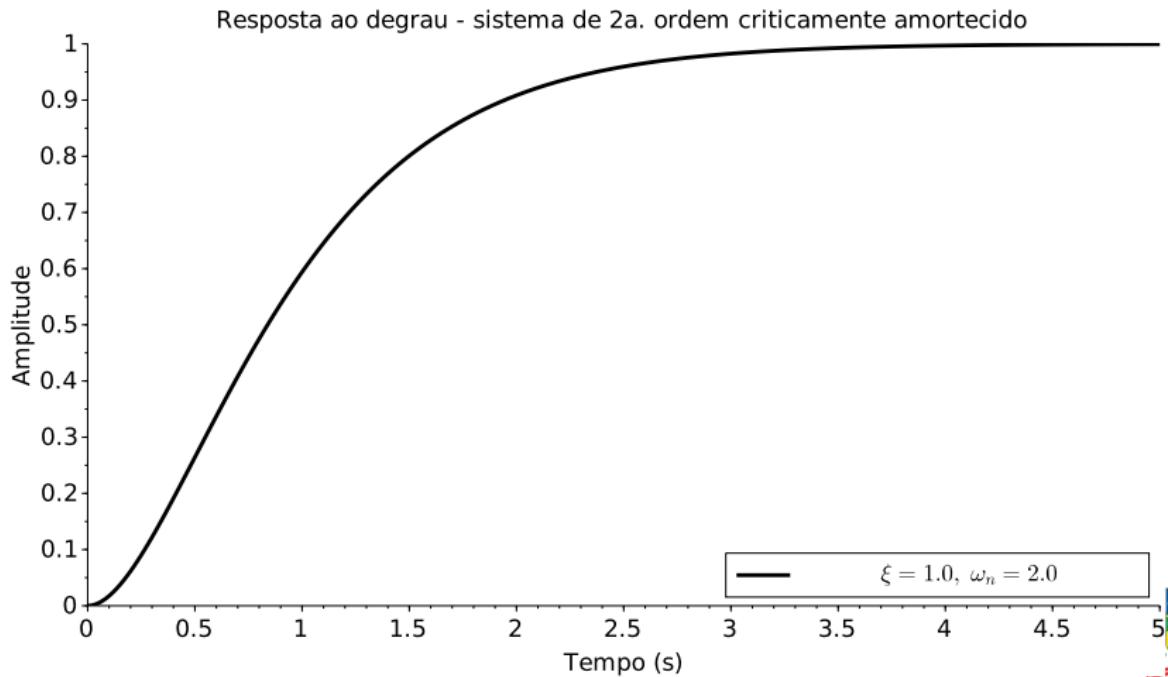
$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} \quad (88)$$

- Aplicando-se a transformada de Laplace inversa, chegamos a:

$$y(t) = K \left[ 1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t} \right]; \quad (89)$$

- Este sistema apresenta um comportamento limítrofe entre um sistema sobre e subamortecido.

# Caso 2: Sistema criticamente amortecido – resp. ao degrau



## Caso 3: Sistema subamortecido

- Se  $0 < \zeta < 1$ , este sistema possuirá dois polos complexos conjugados com parte real negativa;
- Considere a resposta deste sistema a um degrau unitário:

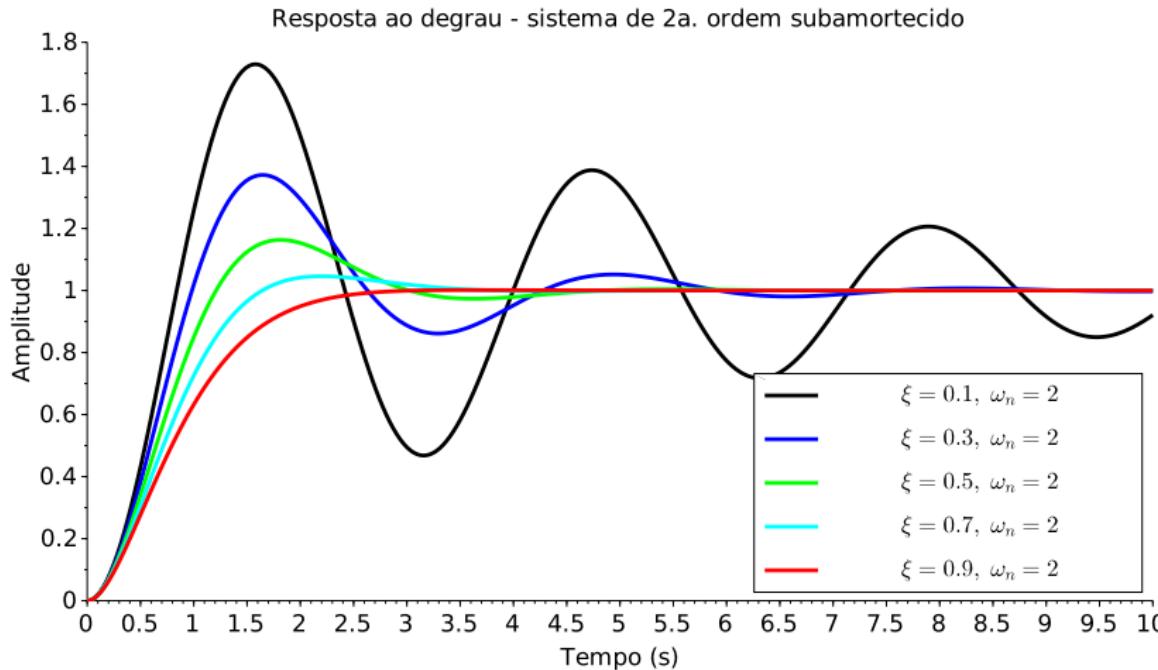
$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s(s + \omega_n\zeta \pm j\omega_d)}. \quad (90)$$

- Aplicando a transformada de Laplace inversa, obtemos a resposta temporal:

$$y(t) = K \left[ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \sin(\omega_d t + \phi) \right] \quad (91)$$

com  $\phi = \arctg(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta)$  e  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ .

# Caso 3: Sistema subamortecido – resposta ao degrau



# Caso 3: Sistema subamortecido – características

- A saída deste sistema converge para o valor final ( $K$ ) através de um sinal senoidal envolto em uma exponencial decrescente;
- Quanto maior  $\zeta$  ( $\zeta < 1$ ), menor a frequência de oscilação da resposta (devido a  $\omega_d$ ). Mais rápida a convergência para o valor final (menor o tempo de decrescimento) e menor a amplitude de oscilação (ambos devidos ao termo exponencial);
- Quanto mais  $\zeta$  se aproxima de zero, mais oscilatória e menos amortecida a resposta.

# Caso 4: Sistema não amortecido

- Se  $\zeta = 0$ , este sistema possuirá dois polos complexos conjugados, com parte real nula;
- Considere a resposta deste sistema a um degrau unitário:

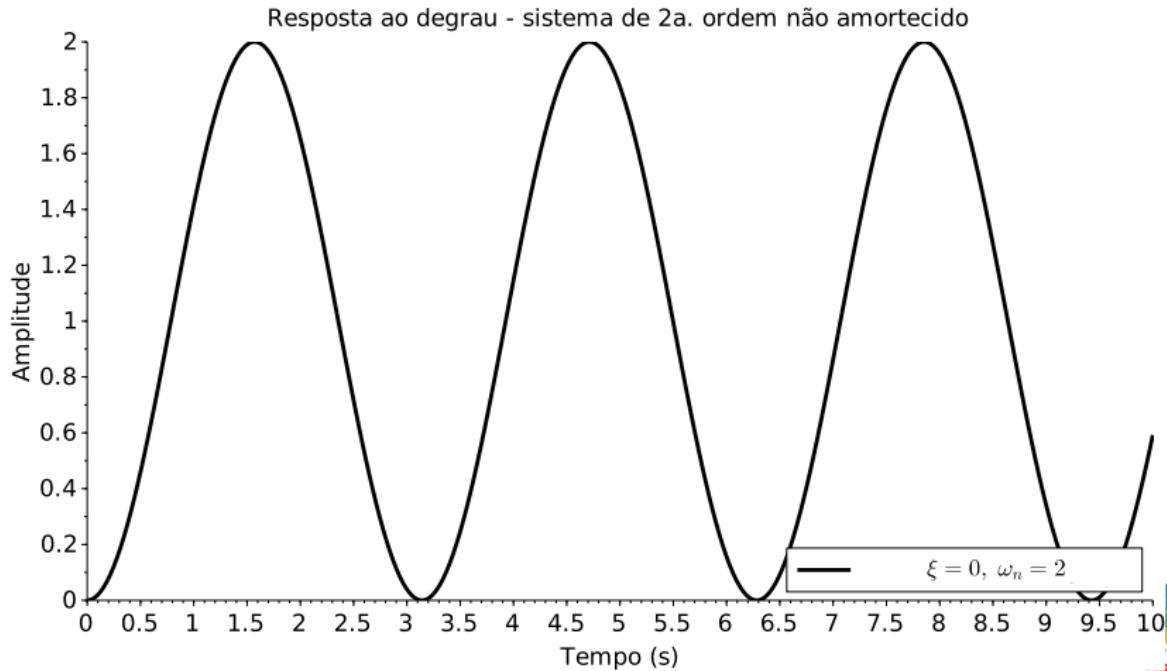
$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)}, \quad (92)$$

- Aplicando a transformada de Laplace inversa, obtemos a resposta temporal:

$$y(t) = K[1 - \cos(\omega_n t)]. \quad (93)$$

- A saída deste sistema não converge para um valor final. Ela oscila em torno deste valor por uma função cossenoidal de frequência  $\omega_n$ ;

# Caso 4: Sistema não amortecido – resposta ao degrau



# Frequência natural e coef. amortecimento

- Chamaremos  $\zeta$  de **coeficiente de amortecimento** do sistema de segunda ordem (adimensional). Ele dá a taxa pela qual as oscilações da resposta do sistema de segunda ordem são amortecidas;
- É exatamente devido a este parâmetro que cada um dos casos de sistema de segunda ordem tem seu nome (sobreamortecido:  $\zeta > 1$ ; criticamente amortecido:  $\zeta = 1$ ; subamortecido:  $0 < \zeta < 1$ ; não amortecido:  $\zeta = 0$ );
- Chamaremos  $\omega_n$  de **frequência natural** de um sistema de 2<sup>a</sup> ordem (em  $\text{rad/s}$ ). Esta será a frequência de oscilação do sistema quando não houver amortecimento ( $\zeta = 0$ );
- Chamaremos  $\omega_d$  de **frequência natural amortecida** (em  $\text{rad/s}$ ). Esta será a frequência de oscilação do sistema quando ele for subamortecido;

# Sistema de 2<sup>a</sup> ordem – resumo

Tipo	$\zeta$	Polos	Resposta
Não amortecido	$\zeta = 0$	complexos conjug. puros	oscilatória
Subamortecido	$0 < \zeta < 1$	complexos conjug. reais negativas duplas	oscilat. decresc.
Crit. amortecido	$\zeta = 1$	reais negativas distintas	exponencial
Sobreamortecido	$\zeta > 1$		exponencial

# Sistema de 2<sup>a</sup> ordem – exemplos

Classifique os sistemas a seguir e qualifique suas respostas transitórias:



$$\frac{2}{s^2 + 3s + 2};$$



$$\frac{1}{s^2 + 2s + 1};$$



$$\frac{2}{s^2 + 2s + 2};$$



$$\frac{2}{s^2 + 2};$$

## Efeito de zeros e sistemas de ordem superior

Dorf (12a Ed.): 5.4

Ogata (5a Ed.): 5.4

Nise (6a Ed.): 4.7 a 4.8

Franklin (6a Ed.): 3.5

# Zeros

- Até este momento, tratamos os sistemas de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> ordens considerando (e analisando) apenas seus polos;
- A próxima pergunta é: se o sistema possuir zeros, qual sua influência na resposta temporal?
- Para responder a esta questão, tomemos uma função de transferência geral

$$G(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}; \quad (94)$$

- Aplicando-se frações parciais, temos

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{(s+p_1)} + \frac{a_2}{(s+p_2)} + \cdots + \frac{a_n}{(s+p_n)}; \quad (95)$$

# Zeros

- Tomando a Laplace inversa, temos

$$g(t) = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \cdots + a_n e^{-p_n t}; \quad (96)$$

- Vemos que esta resposta é um somatório de exponenciais decrescentes. Vemos também que os expoentes desta resposta só dependem dos polos do sistema, e não dos zeros;
- Então, o que define a característica da resposta temporal (se será exponencial, oscilatória, amortecida, etc.) são os **polos** do sistema;
- Os zeros entram no cálculo dos “pesos” da contribuição de cada exponencial ( $a_k$ ), mudando o valor analítico da função-resposta. Entretanto eles não mudam a característica da resposta;
- Falaremos mais sobre a ação dos zeros em outros momentos do curso.

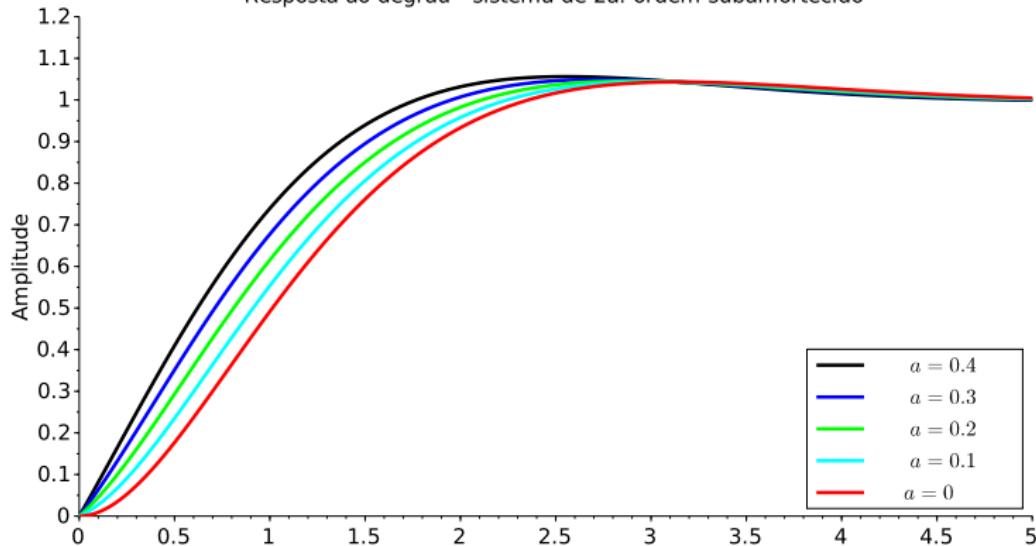
# Zeros - exemplo

Tome o sistema de segunda ordem

$$G(s) = \frac{2(as+1)}{s^2 + 2s + 2} \quad (97)$$

a seguir a resposta para vários valores de  $a$ :

Resposta ao degrau - sistema de 2a. ordem subamortecido



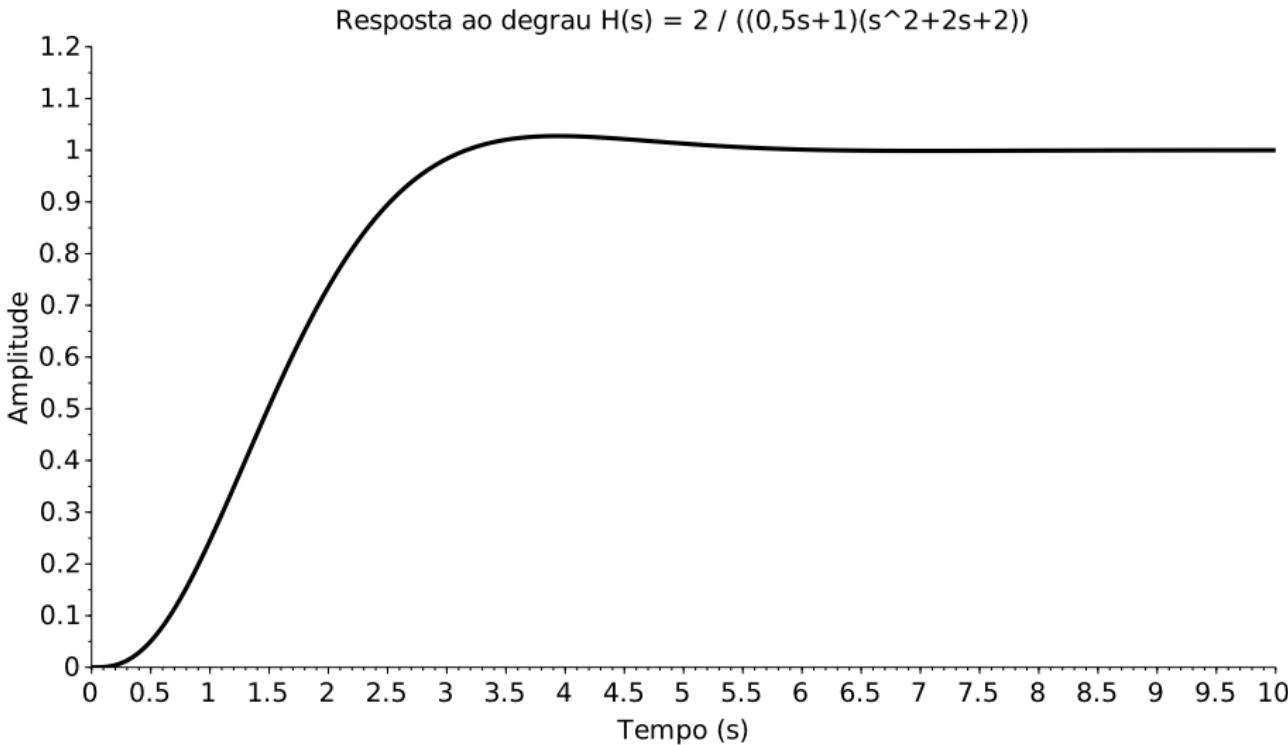
# Sistemas de ordem superior

- A questão seguinte é como analisar sistemas de ordem superior (terceira, quarta, etc.);
- Note que qualquer sistema de ordem  $p$  pode ser convertido em um conjunto de  $m$  sistemas de 1<sup>a</sup> ordem e  $n$  sistemas de segunda ordem através da expansão em frações parciais ( $p = m + n$ );
- Então, a análise do sistema de ordem superior passa pelo estudo das características dos vários sistemas de primeira e segunda ordens que o compõe;
- Por exemplo, o sistema

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{(0,5s+1)(s^2+2s+2)} \quad (98)$$

deve conter uma combinação das características do sistema de 1<sup>a</sup> ordem (constante de tempo), com as de 2<sup>a</sup> ordem (oscilação amortecida).

# Sistemas de ordem superior - exemplo



## Mapa de polos e zeros

Dorf (12a Ed.): 5.6

Ogata (5a Ed.): –

Nise (6a Ed.): –

Franklin (6a Ed.): 3.3

# A importância dos polos na resposta transitória

- Conforme discutido, os polos de uma função de transferência – ou as raízes de seu polinômio denominador – são decisivos na definição da resposta transitória do sistema;
- Assim, é importante saber associar o posicionamento do polos com a resposta transitória esperada no domínio do tempo;
- Note, essa resposta transitória pode ser derivada da solução da equação diferencial associada (via transformada de Laplace inversa, por exemplo);
- Entretanto, o objetivo é ser capaz de “*olhar*” para o posicionamento dos polos de uma função de transferência e “*inferir*” o seu comportamento transitório.

# Variável s

- A variável  $s$ , vinda da transformada de Laplace de uma função real, é uma variável complexa!!
- Isso implica que esta variável possui uma parte real e imaginária. Assim:

$$s = \sigma + j\nu; \quad (99)$$

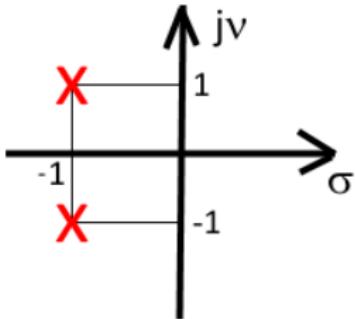
- Assim, os polos de uma determinada função de transferência são representados por um número complexo, com partes real e imaginária associadas.

# O plano s

- Dado o caráter complexo dos polos e zeros, estes podem ser apresentados graficamente por um plano destacando suas partes real e imaginária.
- Por exemplo, para função de transferência e seus polos:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \Leftrightarrow s_{1,2} = -1 \pm j; \quad (100)$$

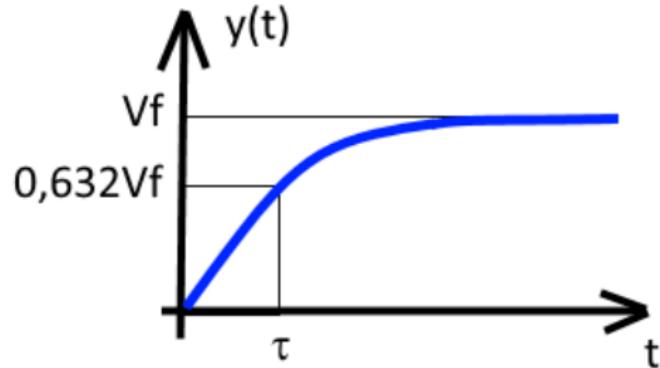
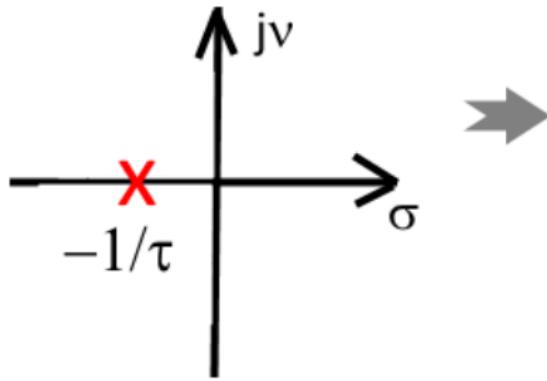
teríamos:



- Os polos são mapeados no plano s como **X**, enquanto os zeros são mapeados como **O**.

# Sistema de 1<sup>a</sup> ordem

- O sistema de 1<sup>a</sup> ordem tem um polo em  $s = -1/\tau$ . A resposta ao degrau unitário é uma exponencial do tipo  $y(t) = K[1 - e^{-t/\tau}]$ ;
- Assim, o mapeamento deste polo no plano  $s$  fica:



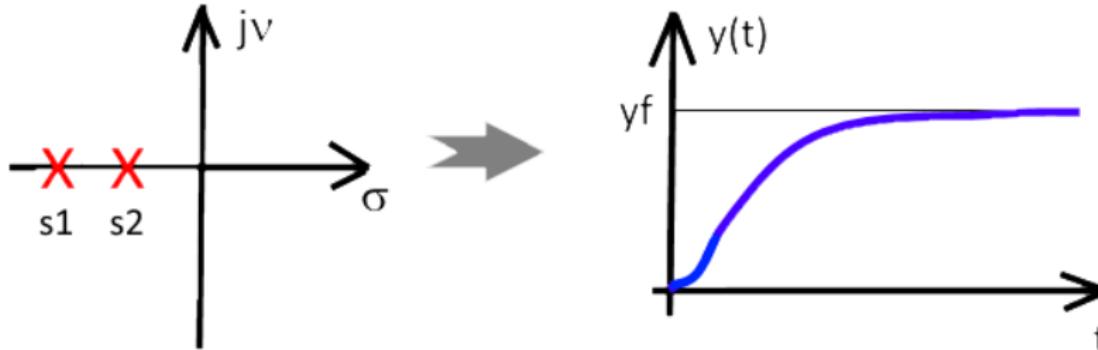
- Quanto menor  $\tau$ , mais rápido o sistema. Então quanto mais o polo estiver distante da origem do plano  $s$ , mais rápido será o sistema de 1<sup>a</sup> ordem.

# Sistema de 2<sup>a</sup> ordem sobreamortecido

- O sistema de 2<sup>a</sup> ordem sobreamortecido ( $\zeta > 1$ ) possui dois polos reais negativos distintos

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Leftrightarrow s_{1,2} = -\omega_n(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}); \quad (101)$$

- Então seu mapa de polos e zeros fica:



# Sistema de 2<sup>a</sup> ordem subamortecido

- Se o sistema de 2<sup>a</sup> ordem

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (102)$$

possui  $0 < \zeta < 1$ , ele terá dois polos complexos conjugados, com parte real negativa;

- Seus polos serão:

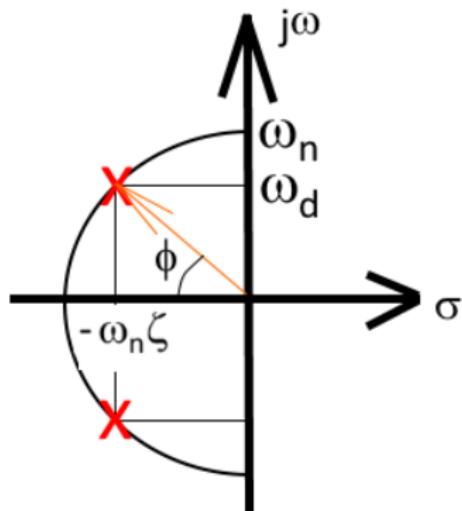
$$s_{1,2} = -\omega_n(\zeta \pm j\sqrt{1 - \zeta^2}); \quad (103)$$

- Conforme já vimos, sua resposta ao degrau unitário converge para o valor final por um sinal senoidal amortecido:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot \sin(\omega_d t + \phi) \quad (104)$$

com  $\phi = \arctg(\sqrt{1 - \zeta^2}/\zeta)$  e  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ .

# Sistema de 2<sup>a</sup> ordem subamortecido



$$s_{1,2} = -\omega_n \zeta \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot \sin(\omega_d t + \phi)$$

com  $\phi = \arctg(\sqrt{1 - \zeta^2}/\zeta)$  e

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}.$$

- Se  $\zeta \rightarrow 0$  os polos se aproximam do eixo imaginário. A oscilação aumenta e a convergência é mais lenta;
- Se  $\zeta \rightarrow 1$  os polos se aproximam do eixo real. A oscilação diminui e a convergência é mais rápida;

# Sistema de 2<sup>a</sup> ordem – resposta × polos

# Dominância

- Da nossa discussão até aqui, observamos que polos mais próximos do eixo imaginário tendem a ser mais lentos;
- Assim, se a função de transferência possui dois polos  $s_1$  e  $s_2$ , mas  $|\Re\{s_1\}| << |\Re\{s_2\}|$  ( $\Re$  = parte real), então a resposta transitória do sistema será praticamente dependente da parte associada a  $s_1$ ;
- Dizendo de outra forma, o polo  $s_1$  é *dominante* em relação ao polo  $s_2$  no que diz respeito à resposta transitória;
- Na prática, dizemos que  $s_1$  é dominante em relação a  $s_2$  se o módulo da parte real de  $s_1$  é de 5 a 10 vezes menor que o módulo da parte real de  $s_2$   $|\Re\{s_2\}| \geq 10|\Re\{s_1\}|$ ;
- Neste caso, a contribuição dinâmica advinda do polo  $s_2$  pode ser desprezada da análise transitória.

# Dominância

- Apenas para exemplificar, tome o sistema sobreamortecido com  $\omega_n = 2 \text{ rad/s}$  e  $\zeta = 1,8$ . Sua função de transferência fica:

$$H(s) = \frac{4}{(s + 6,59)(s + 0,61)}. \quad (105)$$

Portanto, um polo está afastado do outro por um fator de aproximadamente 10 no plano  $s$ ;

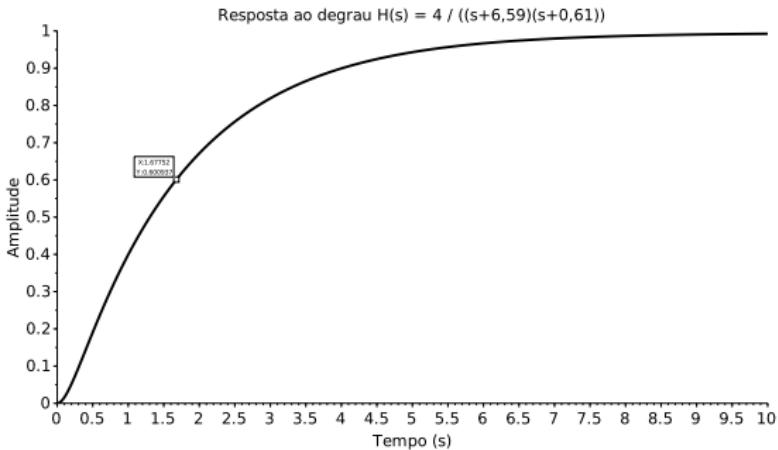
- A resposta deste sistema é

$$y(t) = 1 + 0.67 \left[ \frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right], \quad (106)$$

onde  $s_1 = 6,59$  e  $s_2 = 0,61$ ;

# Dominância

- Note que a constante de tempo da primeira exponencial é de 0,15 s, enquanto a da segunda exponencial é 1,67 s ( $\tau_{1,2} = 1/s_{1,2}$ );

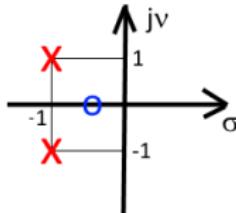


- Assim, como a primeira exponencial “termina” sua ação muito antes da segunda, ela é dominada por esta última.
- Então,  $s_2$  é dominante em relação a  $s_1$ .

# Zeros no plano $s$

- Consider the system of 2<sup>nd</sup> order underdamped with one zero:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s + z)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}; \quad (107)$$



- The transient response to a step will be more affected by the zero as it approaches the poles; thus, the concept of dominance also applies to zeros: if its real part modulus is 5 to 10 times greater than that of the poles, it can be disregarded.

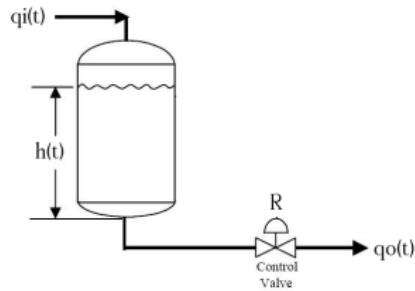
# Exercícios

**E22** Considere um sistema de controle de nível de líquido em um tanque, como mostrado na figura.  $h(t)$  é a altura de líquido no tanque (em m).  $q_i(t)$  e  $q_o(t)$  são as vazões volumétricas de entrada e saída respectivamente (em  $m^3/s$ ). O tanque possui uma capacitância  $C$  – entendida como variação de volume de líquido pela altura de nível (em  $m^3/m$ ).  $R$  é a resistência à vazão proporcionada pela válvula de controle (em  $[m^2/s]^{-1}$ ). Sabendo-se que:

$$\begin{cases} C \cdot dh = (q_i - q_o) \cdot dt \\ q_o = h/R \end{cases} \quad (108)$$

faça o que se pede:

- a) obtenha a função de transferência que relaciona a altura de líquido no tanque, com a vazão de entrada;
- b) obtenha a resposta temporal de altura no tanque quando é aplicado um degrau e uma rampa de vazão de entrada.



# Exercícios

E23

Considere um sistema de primeira ordem em sua forma padrão e uma entrada  $u(t) = \operatorname{sen}(\omega t)$ , mostre que a resposta  $y(t)$  desse sistema é composta pela soma de três parcelas:

- (a) um termo decrescente exponencial de  $-t/\tau$ ;
- (b) um termo senoidal de frequência  $\omega$ ;
- (c) um termo cossenoidal de frequência  $\omega$ .

E24

Demonstramos que um sistema de segunda ordem subamortecido tem resposta ao degrau unitário dada por:

$$y(t) = K \left[ 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \operatorname{sen}(\omega_d t + \phi) \right]$$

com  $\phi = \operatorname{arctg}(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta)$  e  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ .

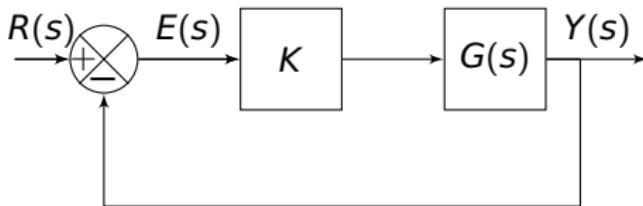
- (a) Mostre com base nessas expressões que  $y(0) = 0$ ;
- (b) Mostre as oscilações ficarão restritas a uma faixa em torno de 2% do valor final para  $t \geq -\ln(0,02\sqrt{1-\zeta^2})/(\zeta\omega_n)$ .

# Exercícios

**E25** Seja o diagrama de blocos abaixo com  $K_P > 0$ ,  $H(s) = Y(s)/R(s)$  e

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}.$$

- a) Mostre que a constante de tempo de  $H(s)$  é dada por  $\tau(1 + K \cdot K_P)^{-1}$ ;
- b) Mostre que ao se aplicar um degrau unitário em  $R(s)$ , a resposta de  $Y(s)$  sempre converge para um valor menor que 1;
- c) Mostre que se  $K = 1$ ,  $K_P = 10$  e  $R(s)$  é um degrau unitário, então  $y(t \rightarrow \infty) = 0,909$ .

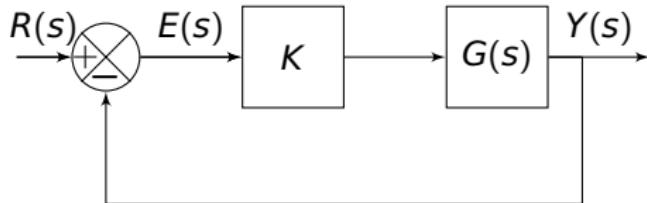


# Exercícios

E26 Seja o diagrama de blocos abaixo com  $K_P > 0$ ,  $H(s) = Y(s)/R(s)$  e

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

- a) Mostre que a frequência natural de  $H(s)$  aumenta com o aumento de  $K_P$ ;
- b) Mostre que a parte real dos polos de  $H(s)$  não depende do valor de  $K_P$ ;
- c) Mostre que o coeficiente de amortecimento de  $H(s)$  é igual a  $\zeta/\sqrt{1+K_P}$ ;
- d) Mostre que se  $\zeta = 2$ , então  $H(s)$  só será oscilatório se  $K_P > 3$ .



# Exercícios

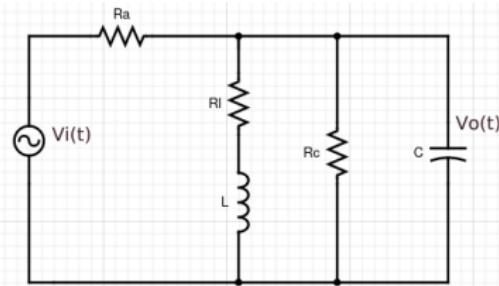
E27

O circuito tanque RLC, que consiste de um capacitor e um indutor em paralelo, é muito comum em diversas aplicações de filtragem e sintonia. Suas características dependem particularmente da qualidade dos componentes utilizados. Considere o circuito abaixo com um capacitor com resistência de fuga  $R_c$  e um indutor com resistência interna  $R_I$ .

- a) Mostre que:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_c(R_I + Ls)}{R_c R_a + R_a(R_I + Ls)(R_c Cs + 1) + R_c(R_I + Ls)}$$

- b) Obtenha a função de transferência do circuito se  $R_c \rightarrow \infty$  e  $R_I \rightarrow 0$ .



# Exercícios

**E28** Desenhe o mapa de polos e zeros das seguintes funções de transferência:

a)

$$\frac{s+1}{s+2};$$

b)

$$\frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 5s^2 + 3s + 1};$$

c)

$$\frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 1}{s^4 + 6s^3 + 3s^2 + s + 1}.$$

**E29** Considere um sistema de aquecimento. Neste caso há duas partes: a elétrica, representada por uma tensão de entrada que alimenta uma resistência; e a térmica que converte a dissipação resistiva em calor. Discuta essas dinâmicas no que tange à dominância dos fenômenos.

# Exercícios

**E30** Em cada uma das seguintes funções de transferência, aplique o conceito da dominância para, se possível, obter uma expressão aproximada para a resposta do sistema equivalente:

a)

$$\frac{3}{s^5 + 10,6s^4 + 24,09s^3 + 96,3s^2 + 81,81s};$$

b)

$$\frac{5s^2 + 90s}{s^3 + 5s^2 + 12s + 8};$$

c)

$$\frac{s^3 + 2,5s^2 + 3s + 1}{s^3 + 25s^2 + 92s + 168}.$$

# Exercícios

E31

████ Neste exercício, você vai mostrar numericamente a validade do conceito de dominância. Considere o sistema de segunda ordem sobreamortecido  $H_1(s)$ , com  $a > 1$ . Desejamos usar a dominância para simplificar este sistema pela exclusão do polo  $s + a$ , chegando na forma simplificada  $H_2(s)$  (com  $\tau = 1s$ ).

$$H_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{a}{(s+a)(s+1)}, \quad H_2(s) = \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} = \frac{1}{s+1}.$$

- a) Obtenha a expressão da resposta ao degrau unitário  $y_2(t)$  e  $y_1(t)$ ;
- b) Mostre que a integral abaixo, que define o erro entre as duas respostas anteriores no intervalo de 1 constante de tempo de  $H_2(s)$ , vale:

$$E(a) = \int_0^1 y_1(t) - y_2(t) dt = \frac{1}{a-1} \left[ \frac{a-1}{a} + \frac{e^{-a}}{a} - e^{-1} \right].$$

- c) Fazendo  $a = 1.001, 2, 5, 10, 15$  e  $20$ , discuta a validade do conceito de dominância para aproximação da resposta de  $H_1(s)$  por  $H_2(s)$  em cada caso.

## Sistema de controle realimentado e seus requisitos de desempenho

Dorf (12a Ed.): 5.3, 5.7 a 5.9

Ogata (5a Ed.): 5.3

Nise (6a Ed.): 7.1 a 7.4

Franklin (6a Ed.): 3.4 e 4.2

# Controlando um sistema dinâmico

- Como visto anteriormente, um sistema entrada-saída tem comportamento definido por suas características dinâmicas, essas expressas por suas equações diferenciais;
- Entretanto, quase sempre estamos interessados que o sistema tenha um determinado comportamento. Tal comportamento está diretamente relacionado com a utilização que será dada ao sistema;
- Dessa forma, precisamos criar uma estratégia de atuação sistemática sobre o sistema, de forma que seu comportamento seja compatível com o desejado;
- A esta estratégia, damos o nome de *controle* do sistema.

# Aqui começa nosso curso!



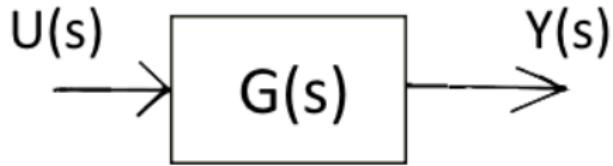
©Bruce Buffer – UFC 200 – NBC Sports

© Prof. Alexandre G. Brito – para utilizar este material, contacte o autor.

# Controle em malha aberta

- A forma mais natural de operar um sistema é aplicar um valor de entrada para o qual conhecemos (ou supomos conhecer) a saída;
- A essa estratégia daremos o nome de **controle em malha aberta**;
- Um exemplo de sistema controlado em malha aberta é a máquina de lavar roupas;
- Neste caso, escolhemos o ciclo de lavagem (geralmente associado a um tempo de operação), e máquina realiza o ciclo no tempo preestabelecido;
- Note que não há meio de saber se, ao final do ciclo, a roupa está de fato limpa.
- Além disso, a máquina opera sempre do mesmo jeito, quer a roupa esteja muito ou pouco suja, ou haja muitas ou poucas peças a lavar.

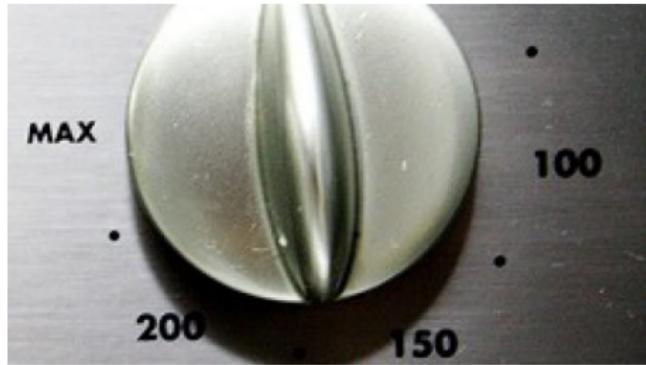
# A máquina de lavar roupas



- $U(s)$ : entrada (no exemplo: ciclo escolhido);
- $Y(s)$ : saída (no exemplo: roupa lavada);
- $G(s)$ : dinâmica do sistema (no exemplo: dinâmica de operação da máquina de lavar);

# O forno de cozinha

Receita do bolo – passo 21: asse o bolo em fogo baixo ( $160^{\circ}$ ) por 30 minutos!



# Características do controle em malha aberta

O controle em malha aberta apresenta as seguintes características:

- É a forma mais simples, mais barata e mais usual de se operar qualquer sistema;
- Não há como garantir que, de fato, a saída esteja no valor desejado;
- Não há (pelo menos em princípio) uma forma sistemática e padronizada de operação do sistema para se alcançar o objetivo;
- A sua eficiência dependerá fortemente do operador e das condições operacionais;
- Não se preocupa, em tese, com aspectos transitórios (como a variável sai de um valor e chega a outro).

# Forno: vamos pensar numa ideia melhor...

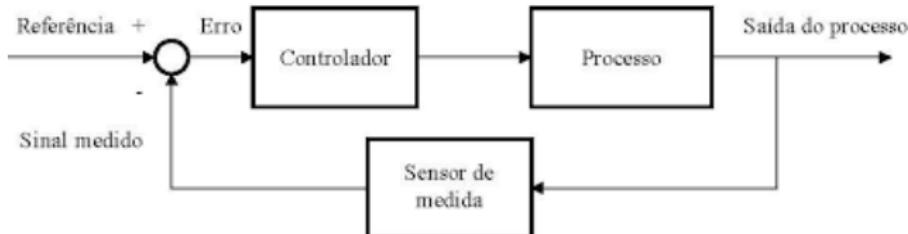
Quero construir um forno que:

- atinja uma temperatura desejada, com uma precisão pré-estabelecida;
- que atinja esta temperatura seguindo um perfil transitório especificado (mais rápido ou mais lento);
- que a ação de eventuais perturbações externas (abrir o forno, introduzir mais ou menos alimento, etc.) seja minorada;
- que funcione dentro do especificado no caso de troca de algum componente (resistência do forno, por exemplo) por outro de mesmo tipo – mas obviamente não perfeitamente igual;
- e quero que ele faça isso tudo da forma mais automática possível, sem intervenção humana.

# Forno: vamos pensar numa ideia melhor...

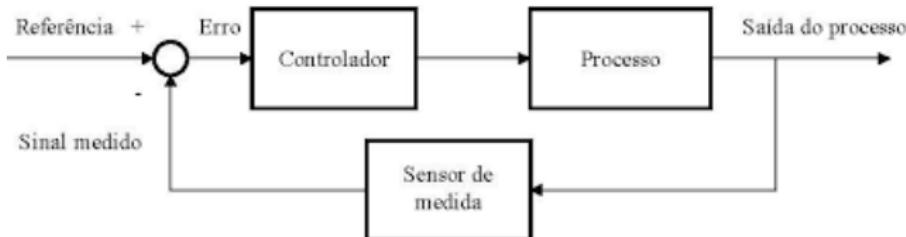
- Ora, se eu quero que o forno atinja uma temperatura desejada, preciso saber o quanto longe sua temperatura está da desejada. Para isso preciso **medir** a temperatura do forno;
- Depois eu preciso **comparar** os valores medido e desejado para quantificar a diferença entre eles;
- Além disso, preciso “bolar” uma **estratégia** para reduzir essa diferença – entre outras coisas;
- Por fim, preciso ser capaz de **atuar** sobre o forno, introduzindo mais ou menos energia, visando à redução da diferença entre as temperaturas medida e desejada.

# Controle em malha fechada



- Uma estratégia de controle na qual a variável medida é **realimentada** e comparada com a variável desejada é chamada de **controle em malha fechada**;
- Uma lavadora com controle em malha fechada mediria continuamente a “limpeza” das roupas durante o processo. E ajustaria automaticamente o seu ciclo de lavagem de acordo com a medição de limpeza.
- Ela obviamente seria mais cara (mais sensores, atuadores, eletrônica, tecnologia...), mas muito mais eficiente e econômica.

# Controle em malha fechada



- Para simplificar um pouco nossa análise daqui pra frente, faremos algumas suposições sobre o sistema em malha fechada:
  - ① o atuador e a planta comporão um pacote único. Então, quando falarmos sobre a planta, subentende-se que o atuador já está nela incluído. Mas é óbvio que isto pode não ser sempre verdade no caso real;
  - ② o sensor será considerado muito mais rápido que a planta. Assim, assumiremos que sua função de transferência é unitária (exceto quando houver um fator de escala entre sua entrada e saída).

# O problema de controle

O problema de controle passa por encontrar um controlador que atenda aos requisitos de operação estabelecidos. Dentre os **requisitos de projeto** que o sistema de controle precisa garantir, estão:

- estabilidade;
- precisão;
- resposta transitória;
- rejeição a perturbações externas;
- robustez a variações dos parâmetros e erros de modelagem.

## Requisito 1: Precisão

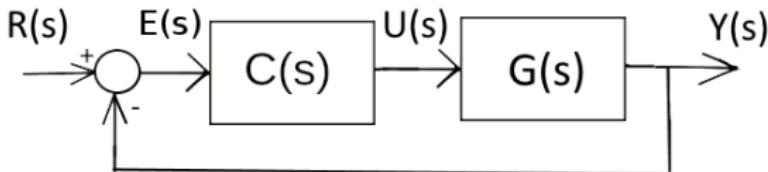


# Requisito 1: precisão

- Suponha que apliquemos um valor de temperatura de referência no forno. Desejamos que a saída alcance este valor, com um erro máximo especificado, após um tempo;
- Dito de outra forma, desejamos que o controlador seja capaz de promover um nível de **precisão** ao sistema em malha fechada – após sua convergência (passado o transitório);
- Uma forma de se avaliar isso é verificar o erro final entre a referência e o valor da saída.

# Requisito 1: precisão

- Considere um sistema em malha fechada contendo um controlador  $C(s)$  e planta  $G(s)$



- O sinal de erro  $E(s)$  reflete a diferença entre o sinal de entrada  $R(s)$  e o sinal de saída  $Y(s)$  ( $E(s) = R(s) - Y(s)$ );
- Mas  $Y(s) = C(s)G(s)E(s)$ . Então,

$$E(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}R(s); \quad (109)$$

- Note que se o sistema for perfeitamente preciso,  $y(t = \infty) \rightarrow r(t = \infty)$ , ou seja,  $e(t = \infty) = 0$ .

# Precisão para uma referência constante

- Considere a referência como sendo um degrau de amplitude  $A$ . Desejamos saber o desvio da saída em relação a esta referência após passado o transitório.
- Avaliaremos, então, o **erro em estado estacionário** ao degrau, consistindo em se avaliar  $e(t \rightarrow \infty)$ ;
- Aplicando-se o teorema do valor final de Laplace na expressão anterior, chegamos a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \cdot \frac{A}{s} = \frac{A}{1 + C(0)G(0)}; \quad (110)$$

- Então, o erro em estado estacionário ao degrau,  $e_{ss-degrau}$ , é dado por:

$$e_{ss-degrau} = \frac{A}{1 + C(0)G(0)}.$$



# Precisão para uma referência constante

- Lembrando que  $G(0)$  expressa o ganho estático da função de transferência, vemos que a precisão para uma referência ao degrau depende, obviamente, da amplitude deste degrau, e dos ganhos estáticos da planta e do controlador;
- Suponha que  $C(s)$  seja um **controlador proporcional** ( $C(s) = K_p$ ) e que  $G(s)$  seja um sistema dominante de 2<sup>a</sup> ordem:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (112)$$

- Então o o *erro em estado estacionário* ao degrau unitário será dado por  $e_{ss-degrau} = 1/(1+K \cdot K_p)$ ;
- Note que o aumento do ganho  $K_p$  leva à redução (mas nunca à anulação) do erro .

# Exercício de fixação

Considere o sistema em malha fechada e assuma a planta como

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 4}. \quad (113)$$

Suponha que a referência seja um degrau unitário.

- Calcule o erro em estado estacionário ao degrau se  $K_p = 1$ ;
- Calcule  $K_p$  tal que o erro em estado estacionário ao degrau seja de 0,05. O que significa isso?

# Plantas com polo na origem

- Algumas plantas naturalmente possuem um ou mais polos na origem do plano  $s$ , ou seja,

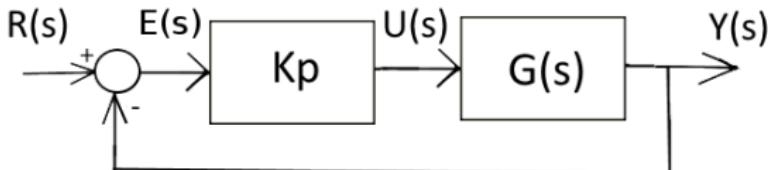
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{s^l(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}, \quad (114)$$

onde  $l$  é o número de polos na origem ( $s = 0$ );

- Um exemplo clássico é o motor CC quando usado para posicionamento angular (um polo na origem devido à integração da velocidade angular);
- Classificamos a planta de acordo com o número de polos na origem. Uma planta é dita do *tipo 0* se não há polos na origem ( $l = 0$ ); é chamada de *tipo 1* se possui um polo na origem ( $l = 1$ ) e assim sucessivamente;
- Mas qual o impacto disso, em malha fechada?

# Plantas com polo na origem

- Retornemos ao diagrama de malha fechada.



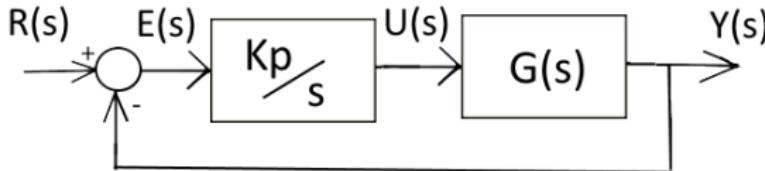
- O erro em estado estacionário ao degrau unitário deste sistema é

$$e_{ss-degrau} = \frac{1}{1 + K_p G(0)} \quad (115)$$

- Se a planta é de **tipo 1** (um polo na origem), então  $\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty$  e, assim,  $e_{ss-degrau} = 0$ .
- Assim, um sistema em malha fechada cujo par planta-controlador é do tipo 1 não possui erro em estado estacionário ao degrau!!

# Precisão perfeita para uma referência constante

- Mas e se a planta é de tipo 0? O que fazer? Bem, então o polo na origem deverá aparecer no controlador se desejamos precisão perfeito para uma referência constante;
- Por exemplo, se  $G(s)$  é de tipo 0 na malha anterior, então basta introduzirmos um polo na origem no controlador:



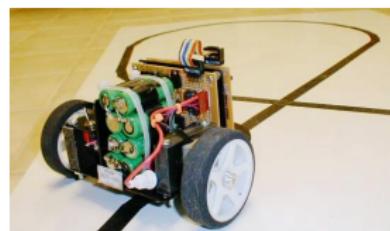
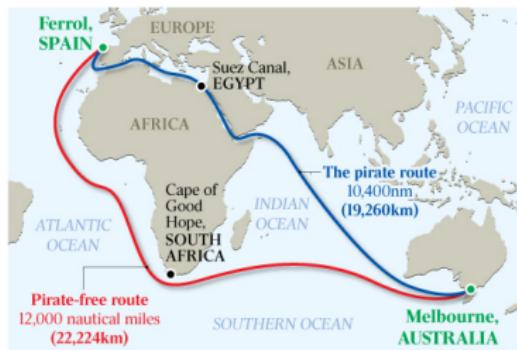
- Neste caso,

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + K_p G(s)/s} \Rightarrow e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{A}{s} \cdot \frac{1}{1 + K_p G(s)/s} = 0. \quad (116)$$

- Note que sistemas de tipo 2 ou superior também possuem erro estacionário nulo ao degrau!

# Precisão para referência em rampa

- Muitas vezes, desejamos que o sistema em malha fechada siga uma referência que varia ao longo do tempo (e não um valor constante simplesmente);
- Este é um problema típico de *rastreamento*, quando queremos seguir uma determinada trajetória;



- Como o degrau unitário é uma entrada constante, ele não é o mais indicado para verificar a capacidade do sistema a seguir uma referência variante;

# Precisão para referência em rampa

- Uma entrada com melhores características neste sentido é a rampa de inclinação A;
- Considerando um controlador proporcional e uma planta tipo 0, temos que  $e_{ss}$  à rampa é

$$e_{ss-rampa} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{A}{s^2} \cdot \frac{1}{1 + K_p G(s)} = \infty; \quad (117)$$

o que significa que o erro à rampa de referência cresce ao longo do tempo;

- Se a planta é do tipo 1, então:

$$e_{ss-rampa} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{A}{s^2} \cdot \frac{1}{1 + K_p \frac{\tilde{G}(s)}{s}} = \frac{A}{K_p \tilde{G}(0)}, \quad (118)$$

onde  $G(s) = \tilde{G}(s)/s$ . Isso significa que o erro em estado estacionário à rampa é constante ao longo do tempo.

# Precisão para referência em rampa

- Finalmente, se o sistema é do tipo 2, o erro à rampa é

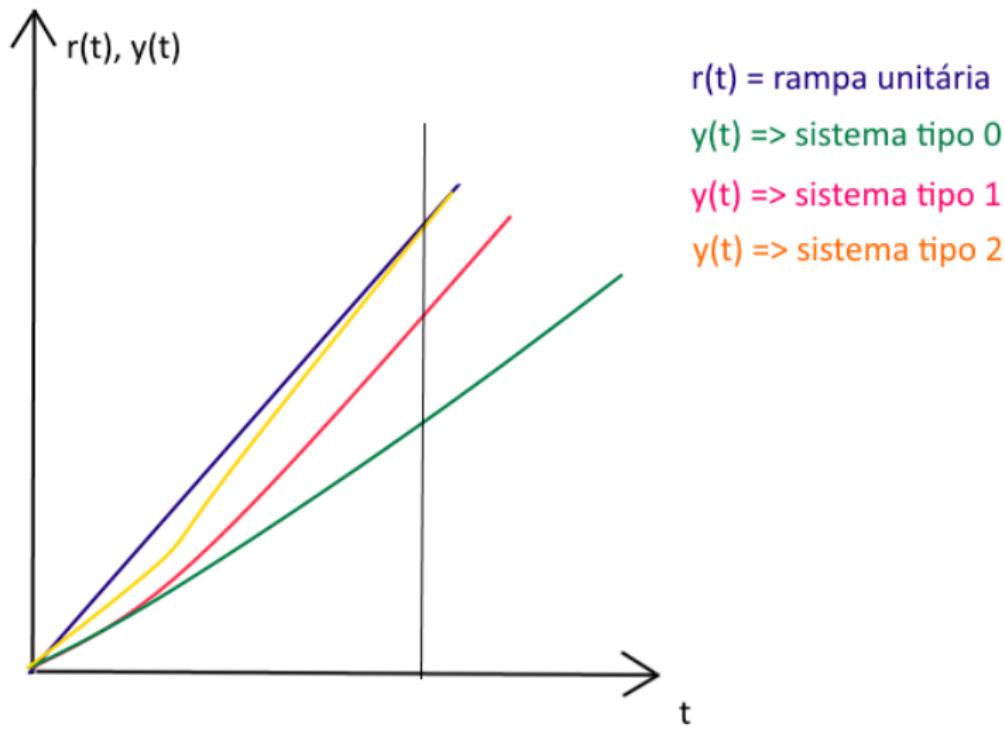
$$e_{ss-rampa} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{A}{s^2} \cdot \frac{1}{1 + K_p \frac{\tilde{G}(s)}{s^2}} = 0; \quad (119)$$

onde  $G(s) = \tilde{G}(s)/s^2$ . Isso significa que o erro em estado estacionário à rampa é nulo;

- Resumo:

	$e_{ss}$		
	Tipo 0	Tipo 1	Tipo 2
degrau	cte.	0	0
rampa	$\infty$	cte.	0

# Precisão para referência em rampa



# Exercício de fixação

Considere uma planta para a qual:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 3}. \quad (120)$$

- i) Encontre um ganho de controle  $K_p$  tal que a malha fechada possua um erro em estado estacionário ao degrau unitário menor que 0,02;
- ii) Suponha que seja incluído um polo na origem do controlador  $K_p(s) = K_p/s$ . Calcule o ganho  $K_p$  para esta nova situação e compare-o com o ganho anterior;
- iii) Nas condições da letra anterior, recalcule o ganho  $K_p$  para que o sistema tenha erro em estado estacionário à rampa unitária menor que 0,05.

# Exercícios

**E32** Neste exercício, você vai verificar matematicamente a ação de um controlador sobre o erro de uma planta controlada. Considere uma planta de 1<sup>a</sup> ordem com ganho estático e constante de tempo unitários. Usando uma tabela de transformada de Laplace, faça o que se pede

- (a) Assumindo um controlador proporcional com  $K_P = 5$ , encontre a função de transferência do sinal de erro  $E(s)$  para o sinal de referência  $R(s)$ .
- (b) Supondo  $R(s)$  um degrau unitário, mostre que o sinal de erro será dado pela expressão  $e(t) = (1+5e^{-6t})/6$ ;
- (c) Supondo  $R(s)$  uma rampa unitária, mostre que quando  $t \gg 0$  o erro segue a uma reta de expressão  $e(t \gg 0) = 5+6t/36$ ;
- (d) Repita a letra a) assumindo agora um controlador  $K_P = 5/s$ .
- (e) Com a expressão da letra anterior e assumindo um degrau unitário em  $R(s)$ , mostre que

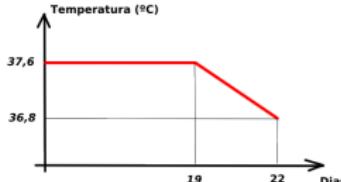
$$e(t) = \frac{\sqrt{5}e^{-t}}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{5}} \sin(2t) - \sin(2t - 1,107) \right]$$

- (f) Os resultados das letras anteriores estão coerentes? Por quê?

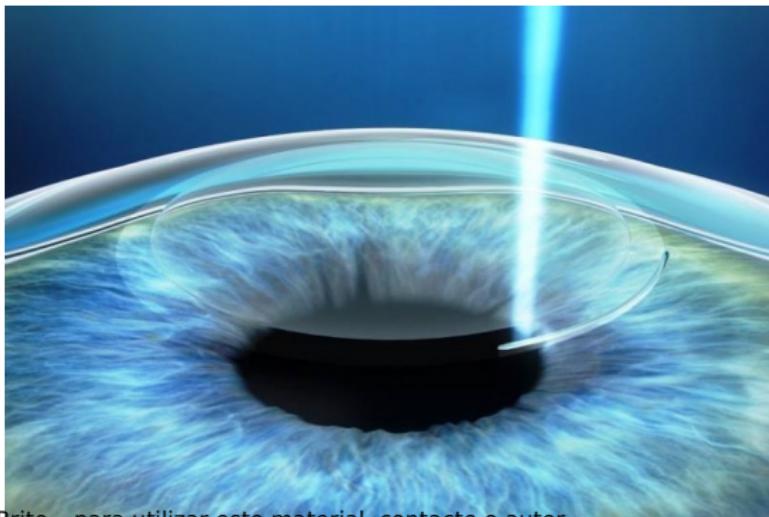
# Exercícios

**E33** A choca industrial de ovos é um processo que depende fundamentalmente do controle da temperatura da chocadeira para uma produtividade satisfatória. Sabe-se que a choca dura 21 dias e que o perfil de temperatura desejado é o apresentado abaixo, com variação máxima de  $\pm 0,2^{\circ}\text{C}$  em torno deste perfil. Considere uma chocadeira modelada como um sistema de 1<sup>a</sup> ordem entre a tensão de comando ( $v(t)$ ) e a temperatura ( $\theta(t)$ ). Essa chocadeira possui constante de tempo de 300s e ganho estático de  $9^{\circ}\text{C}/\text{v}$ . Deseja-se projetar um controlador  $C(s)$  visando à precisão em temperatura.

- a) Considere o sistema inicialmente em  $25^{\circ}\text{C}$ . Dado um comando em degrau até a temperatura de choca e a precisão requerida, mostre que um controlador proporcional deve ter ganho  $K_P > 6,89$ .
- b) Se  $K_P = 6,89$  e a temperatura no início do 19º dia for a especificada, mostre que mesmo o erro à rampa da segunda etapa crescendo indefinidamente, a diferença da temperatura entre o sistema ao final do 21º dia e a temperatura especificada para aquele dia será de cerca de  $0,013^{\circ}\text{C}$ .



## Requisito 2: Ultrapassagem máxima em relação ao valor final



# Percentual de sobressinal

- Já sabemos que o sistema de 1<sup>a</sup> ordem converge assintoticamente para o valor final. O mesmo ocorre para os sistemas de 2<sup>a</sup> ordem sobre e criticamente amortecido;
- Entretanto, o sistema de 2<sup>a</sup> ordem subamortecido pode ter um valor de pico maior que o valor final;
- Imagine agora um sistema em malha fechada cuja saída possa “ultrapassar” seu valor final. Em alguns casos isso é permitido (em determinados patamares), em outros isso é inviável;
- O *percentual de sobressinal* é definido como a relação entre o valor final da saída e o máximo valor alcançado pela mesma, para um degrau unitário de entrada, no sistema em malha fechada. Assim:

$$PSS = 100 \frac{y_{max} - y_{final}}{y_{final}} \%; \quad (121)$$

# Percentual de sobressinal

- Considere que o sistema em malha fechada possa ser aproximado por um sistema dominante de 2<sup>a</sup> ordem subamortecido:

$$G_{mf}(s) = \frac{Y(s)}{Y_{ref}(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}; \quad (122)$$

- Se a referência for um degrau unitário, temos

$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}; \quad (123)$$

- Como desejamos a máxima ultrapassagem, precisamos obter o valor máximo de  $y(t)$ . Isso consiste em fazer  $dy/dt = 0$ .

# Percentual de sobressinal

- Ao invés de obter a transformada inversa de Laplace e derivar, vamos aplicar o teorema de derivação real de Laplace;

$$\frac{dy(t)}{dt} = s \cdot Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}; \quad (124)$$

- Aplicando-se a transformada de Laplace inversa (tabelada), chegamos a:

$$\dot{y}(t) = \frac{K\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2}); \quad (125)$$

- Mas a derivada acima só zera se o termo senoidal for nulo. Isso ocorre quando  $\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2} = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$
- $n = 1$  é o pico máximo, enquanto  $n = 2$  o pico mínimo.

# Percentual de sobressinal

- Assim, o **tempo de pico**,  $T_p$ , é dado por

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}. \quad (126)$$

- Se a referência é um degrau unitário, já vimos que a resposta do sistema de segunda ordem subamortecido será:

$$y(t) = K \left[ 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot \sin(\omega_d t + \phi) \right] \quad (127)$$

com  $\phi = \arctg(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta)$  e  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ ;

# Percentual de sobressinal

- Fazendo  $t = Tp$ , temos o valor de  $y_{max}$

$$y_{max} = K \left[ 1 + e^{-\zeta \pi / \sqrt{1-\zeta^2}} \right]; \quad (128)$$

- Então **percentual de sobressinal**, que indica o máximo de ultrapassagem em relação ao valor final da saída, é dado por:

$$PSS = 100 e^{-\zeta \pi / \sqrt{1-\zeta^2}} \%. \quad (129)$$

- Note que o percentual de sobressinal só depende de  $\zeta$ !!

# Exercício de fixação

Considere o sistema em malha fechada com controlador proporcional  $K_p$  e assuma a planta

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 4}. \quad (130)$$

Suponha que a entrada de referência deste sistema de controle seja um degrau unitário.

- Encontre uma expressão para PSS em função de  $K_p$ ;
- Calcule PSS se  $K_p = 1$ ;
- Calcule  $K_p$  para PSS = 40%.

# Exercícios

**E34**

Considere um sistema de controle composto por: *i*) uma planta de 1<sup>a</sup> ordem com ganho estático unitário e constante de tempo  $\tau$ , e; *ii*) um controlador do tipo  $C(s) = K_P/s$ . Deseja-se que o tempo de pico de malha fechada seja igual à constante de tempo da planta.

- a)** Mostre que, nessas condições, o ganho do controlador deve ser:

$$K_P = \frac{4\pi^2 + 1}{4\tau}.$$

- b)** Mostre que o percentual de sobressinal de malha fechada será dado por:

$$PSS = 100e^{-\tau/2}\%.$$

- c)** Discuta a resposta ao degrau do sistema em malha fechada considerando  $\tau = 0,1; 1; 10$ .

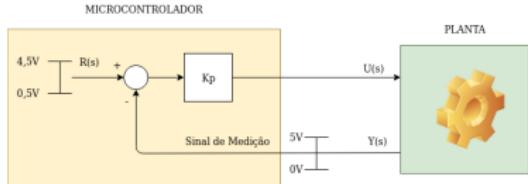
# Exercícios

**E35** Um estudante pretende fazer o controle de um pequeno sistema mecânico modelado como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+3)},$$

onde  $y(t)$  é um sinal de medição em tensão. Para executar o controle, o estudante se utiliza de um microcontrolador cujas entradas analógicas aceitam sinais entre 0 e 5V. Além disso, o estudante codificou internamente um ganho de controle proporcional  $K_p$ . Sabendo que este sistema pode estar sujeito a oscilações, o estudante pretende limitar  $r(t)$  à faixa entre 0,5 e 4,5V. Dessa forma, ele pretende limitar o sinal  $y(t)$  na faixa estabelecida pela entrada analógica do microntrolador, com uma folga de 0,5V.

Supondo um degrau em  $r(t)$  de 0,5 a 4,5V e apenas as restrições impostas acima, faça o que se pede:



- a)** Mostre que o percentual de sobreexcitação máxima para que não haja saturação na medição do sinal  $y(t)$  é de 12,5 %;
- b)** A faixa de ganho de controlador deve ser  $K_p \leq 10,13$ .

## Requisito 3: velocidade de resposta



# Tempo de acomodação

- O **tempo de acomodação**,  $T_s$ , mede o intervalo de tempo necessário para que a resposta transitória do sistema em malha fechada se restrinja a uma faixa predeterminada em torno de  $y_{final}$ ;
- Assumiremos que o sistema estará acomodado no seu valor final quando a resposta temporal estiver constrita a uma faixa de 2% em torno do valor final, a partir de um tempo  $t = T_s$ ;
- Note que este requisito obviamente se aplica tanto a sistemas de primeira, quanto de segunda ordem;
- Então, precisamos encontrar  $T_s$  para um sistema em malha fechada de cada dos tipos acima.

# Tempo de acomodação - sistemas de 1<sup>a</sup> ordem

- Comecemos pelo sistema de primeira ordem

$$G_{mf}(s) = \frac{Y(s)}{Y_{ref}(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}, \quad (131)$$

com resposta a um degrau unitário de referência dada por

$$y(t) = K[1 - e^{-t/\tau}]. \quad (132)$$

- Se  $t = 4\tau$ , temos que  $e^{-4} = 0,02$ . Então, a partir de  $t = T_s = 4\tau$ , podemos assumir que a resposta está acomodada em seu valor final (para uma faixa de 2%).
- Mas  $\tau$  é o inverso do módulo do polo do sistema. Então, *o tempo de acomodação de um sistema de primeira ordem corresponde a 4 dividido pelo módulo da parte real de seu polo!*

# Tempo de acomodação - sistemas de 2<sup>a</sup> ordem

- Para o sistema de segunda ordem sobreamortecido, a conta fica um pouco mais intrincada (devido à existência de dois termos exponenciais decrescentes);
- Entretanto podemos seguir a mesma lógica do sistema de primeira ordem;
- Se  $\zeta \gg 1$ , o polo mais lento será dominante sobre o mais rápido. Então, podemos obter uma aproximação para o tempo de acomodação como sendo 4 sobre o módulo de seu polo mais lento;
- Essa aproximação é boa. Para  $\zeta = 2$ , ela já conduz a um erro máximo de 1% no resultado.

# Tempo de acomodação - sistemas de 2<sup>a</sup> ordem

- Se o sistema for subamortecido, já sabemos que ele terá dois polos complexos conjugados e resposta ao degrau unitária dada por:

$$y(t) = K \left[ 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \sin(\omega_d t + \phi) \right] \quad (133)$$

com  $\phi = \arctg(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta)$  e  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ ;

- Mas a resposta oscilatória decai com o termo exponencial e seu denominador. Então, o tempo para o qual a resposta se restrinja a 2% do valor final é tal que:

$$\frac{e^{-\zeta \omega_n T_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0,02; \quad (134)$$

# Tempo de acomodação - sistemas de 2<sup>a</sup> ordem

- Equacionando  $T_s$ , temos

$$T_s = -\frac{\ln(0,02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n} \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}; \quad (135)$$

- Mas os polos do sistema subamortecido são dados por  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ . Então aqui também o tempo de acomodação será aproximadamente 4 dividido pelo módulo da parte real dos polos;
- CONCLUSÃO:** de forma geral, o tempo de acomodação será aproximadamente 4 vezes o inverso do módulo da parte real de seu polo (dominante);
- Essa aproximação só falha se  $\zeta \approx 1$  ou se  $\zeta \approx 0$ .

# Exercício de fixação

Considere o sistema em malha fechada com um controlador proporcional  $K_p$  e assuma a planta

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 4}. \quad (136)$$

Suponha que a referência seja um degrau unitário. Mostre que o tempo de acomodação  $T_s$  é aproximadamente constante para todo o  $K_p$ , para este caso.

# Tempo de subida

- O *tempo de subida*,  $T_r$ , de um sistema subamortecido em malha fechada, mede o intervalo de tempo necessário para que a resposta transitória saia de 0% e chegue a 100% de seu valor final (pela primeira vez);
- Tomando a resposta transitória do sistema de 2<sup>a</sup> ordem subamortecido:

$$y(t) = K \left[ 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \sin(\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2} + \phi) \right] \quad (137)$$

com  $\phi = \arctg(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta)$ ,

- Desejamos obter  $T_r$  para o qual  $y(T_r) = K$ , ou:

$$\frac{e^{-\zeta \omega_n T_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \sin(\omega_n T_r \sqrt{1-\zeta^2} + \phi) = 0. \quad (138)$$

# Tempo de subida

- Então,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\omega_n T_r \sqrt{1-\zeta^2} + \phi) &= 0 \\ \omega_d T_r + \phi &= \pi;\end{aligned}\tag{139}$$

- Isso implica

$$T_r = \frac{\pi - \phi}{\omega_d}.\tag{140}$$

- O tempo de subida é outro critério de medida da “rapidez” do sistema, muito parecido com o tempo de pico, inclusive na sua formulação.

# Exercício de fixação

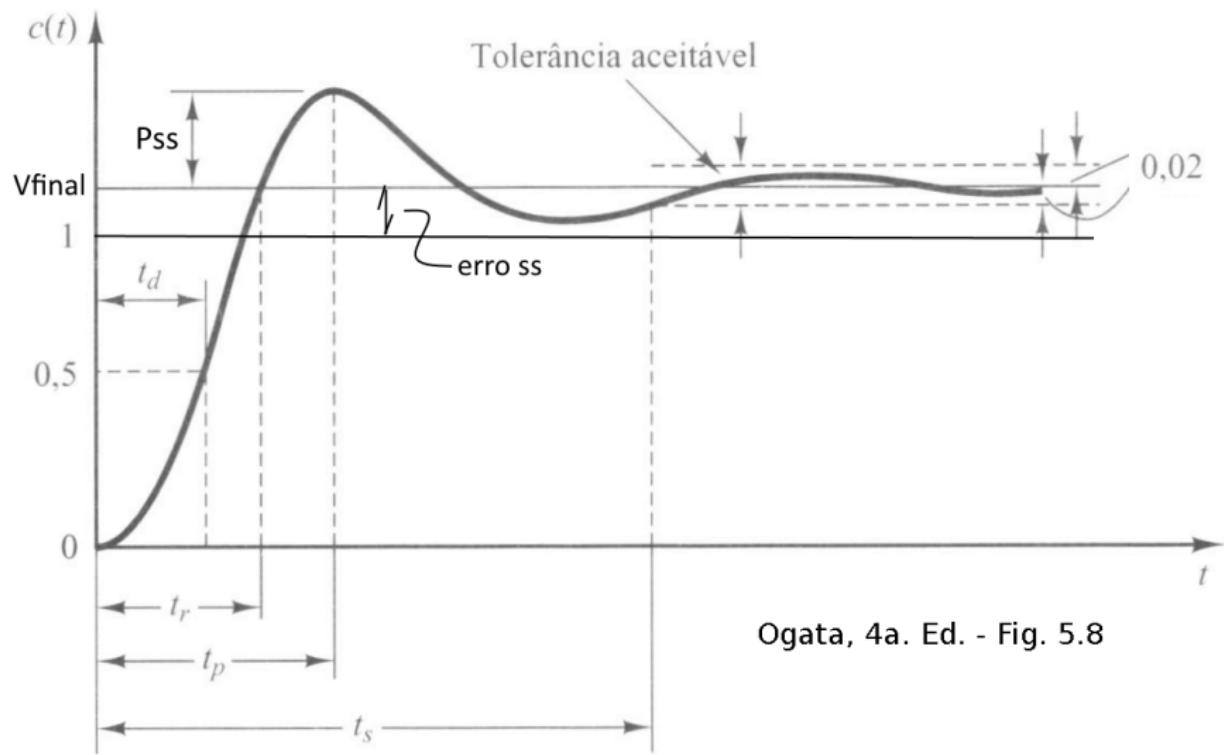
Considere o sistema em malha fechada e assuma a planta

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 4}. \quad (141)$$

Suponha que a entrada deste sistema de controle seja um degrau unitário.

- Encontre uma expressão para  $T_r$  em função de  $K_p$ ;
- Obtenha  $T_r$  se  $K_p = 2$  e  $K_p = 20$ .

# Resumo de requisitos de desempenho



Ogata, 4a. Ed. - Fig. 5.8

# Exercícios

**E36**

- Na expressão (135) foi apresentada uma aproximação para o tempo de acomodação de sistemas de 2<sup>a</sup> ordem subamortecidos. Ela se baseia na suposição de que  $f(\zeta) = \ln(0,02\sqrt{1-\zeta^2}) \approx -4$ . Plote o gráfico de  $f(\zeta)$  e constate que essa é uma aproximação aceitável para  $0,1 \leq \zeta \leq 0,75$ . Essa faixa é representativa para propósitos de controle? Por que?



# Exercícios

E37

Neste exercício, mostraremos que a aproximação para o cálculo do tempo de acomodação para sistemas de 2<sup>a</sup> ordem é ruim quando  $\zeta \rightarrow 1$ . Considere o sistema criticamente amortecido. Já vimos que sua resposta ao degrau unitário é  $y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$ .

- a) Fazendo  $t_n = \eta/|\mathcal{R}|$ , onde  $\mathcal{R}$  é a parte real dos polos, mostre que a resposta do sistema criticamente amortecido ao degrau unitário é dado por:

$$y(t_n) = 1 - (n+1)e^{-n}.$$

- b) Com a fórmula acima, mostre que se utilizada a aproximação  $T_s = 4/|\mathcal{R}|$  para o tempo de acomodação,  $y(T_s)$  estará substancialmente distante da faixa de  $\pm 2\%$  do valor final.
- c) Calcule iterativamente  $y(t_n)$  com  $n = 4, 5, \dots$  para mostrar que uma aproximação melhor do tempo de acomodação do sistema criticamente amortecido seria

$$T_s \approx \frac{6}{|\mathcal{R}|}.$$

# Exercícios

(\*) DICA: ache primeiro  $\zeta$ ,  $\omega_n$  de projeto, e depois  $K_P$ ,  $\tau$

E38



Quando se fala em velocidade de um sistema de controle, nem sempre desejaremos respostas em malha fechada que sejam as mais rápidas o possível, sobretudo quando falamos de sistemas mecânicos. Respostas muito rápidas podem levar a irremediáveis danos estruturais nessa classe de sistemas.

A função de transferência de rotação de um satélite no vácuo é dada por:

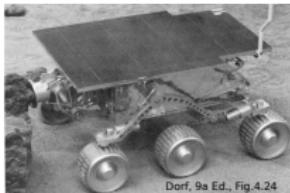
$$\frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2},$$

onde  $J$  é o momento de inércia,  $T(t)$  é o torque e  $\theta(t)$  é a posição angular do satélite. Deseja-se realizar o controle em malha fechada da posição angular do satélite por meio de um controlador  $C(s) = K_P(\tau s + 1)$ . Para se evitar quebra dos painéis solares quando em manobras em degrau, especificou-se que o tempo de pico e o tempo de acomodação do sistema de malha fechada devem ser de cerca de 60s e 80s respectivamente.

- a) Mostre que o controlador que satisfaz esses critérios em um sistema dominante de 2<sup>a</sup> ordem possui  $K_P = 0,0052J$  e  $\tau = 19,15$  (\*).
- b) Mostre que o zero do sistema em malha fechada não atende ao critério de dominância e, portanto, a resposta pode não ser exatamente a especificada.

# Exercícios

E39



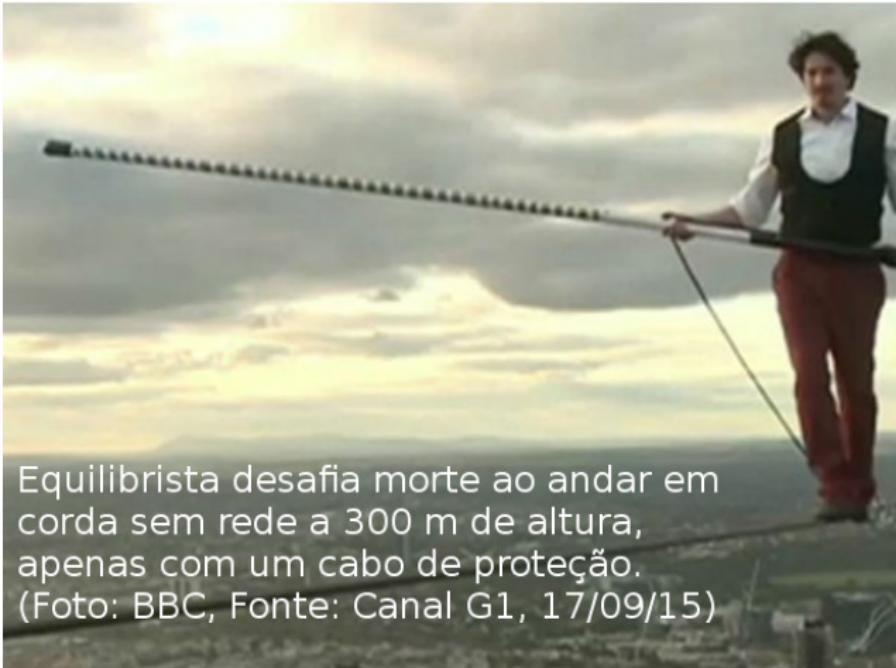
O *Sojourney* chegou à Marte em 4 de julho de 1997, como parte da missão *Pathfinder*. Esse veículo precisa ser operado remotamente da Terra, de onde os pesquisadores enviam comandos de movimento do *rover*, filmagem, coleta e análise de material, etc. Considere o sistema de manobra do veículo. Como entrada ele recebe um comando de tensão  $v(t)$ , fornecendo uma medida de posição  $p(t)$ . Sabe-se que a dinâmica de posição é definida pela seguinte equação diferencial:

$$\ddot{p}(t) + 4\dot{p}(t) + 3p(t) = v(t)$$

A missão demanda que o rover tenha na saída um tempo de pico menor que 1 s e erro em estado estacionário menor que 0,05, para um degrau unitário de entrada.

- a) Mostre que um controlador proporcional  $K_p > 57$  é capaz de atender a ambos os critérios de controle.
- b) Simule a resposta ao degrau do sistema em malha fechada (*Matlab*, *Octave*, *Scilab*) e comprove o resultado.

# Estabilidade



Equilibrista desafia morte ao andar em corda sem rede a 300 m de altura,  
apenas com um cabo de proteção.  
(Foto: BBC, Fonte: Canal G1, 17/09/15)

# Conceito de estabilidade

## Definição (Estabilidade)

*Um sistema é dito ser **estável** se ele possui uma resposta limitada a uma entrada limitada.*

*De uma forma mais formal, suponha que seja aplicada uma entrada a um sistema tal que o limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$  seja finito. Se a resposta do sistema a esta entrada resultar em um sinal  $y(t)$  tal que o limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$  também seja finito, dizemos que o sistema é **estável**. Do contrário, o sistema é **instável**.*

# Exemplos

- Ás do rally (estável)
- Habilidade zero (instável)
- Ao infinito e além (instável)
- Lutando pela estabilidade (estável com louvor!!!)
- Dançarino de capoeira (instável com louvor!!!)

# Função de transferência e estabilidade

- Considere uma função de transferência genérica:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2s^2 + a_1s + a_0}, \quad (142)$$

com  $m \leq n$ ;

- Se a entrada  $u(t)$  é um degrau unitário (que é limitado!!), temos:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \times \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2s^2 + a_1s + a_0}, \quad (143)$$

- Usando expansão por frações parciais, podemos escrever a saída como:

$$Y(s) = \frac{l_0}{s} + \frac{l_1}{s + p_1} + \frac{l_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{l_n}{s + p_n}; \quad (144)$$

# Função de transferência e estabilidade

$$Y(s) = \frac{I_0}{s} + \frac{I_1}{s + p_1} + \frac{I_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{I_n}{s + p_n};$$

- Mas sabemos que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \nu} \right\} = e^{-\nu t}; \quad (145)$$

- Então, a transformada de Laplace inversa de (144) fica:

$$y(t) = I_0 + I_1 e^{-p_1 t} + I_2 e^{-p_2 t} + \cdots + I_n e^{-p_n t}. \quad (146)$$

- A questão é a seguinte: qual a condição para que  $y(t)$  acima seja limitado (ou, em outras palavras, não tenda para infinito)?

# Função de transferência e estabilidade

$$y(t) = I_0 + I_1 e^{-p_1 t} + I_2 e^{-p_2 t} + \cdots + I_n e^{-p_n t}.$$

- Note que se pelo menos uma das exponenciais tenderem para infinito,  $y(t)$  tende para infinito;
- Mas, tomando  $\nu \in \mathbb{C}$ ,  $\nu = w + jv$ , a exponencial

$$e^{-\nu t} = e^{-(w+jv)t} = e^{-wt} e^{-jvt} = e^{-wt} [\cos(vt) - j\sin(vt)] \quad (147)$$

só tenderá para infinito se  $w$  (a parte real de  $\nu$ ) for negativo;

- Então, na expressão de  $y(t)$ , se a parte real de qualquer dos  $p_i$  for negativa, a respectiva exponencial tenderá para infinito e  $y(t)$  também tenderá para o infinito.

# Função de transferência e estabilidade

$$y(t) = 1 + l_1 e^{-p_1 t} + l_2 e^{-p_2 t} + \cdots + l_n e^{-p_n t}.$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{l_1}{s + p_1} + \frac{l_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{l_n}{s + p_n};$$

- Mas  $p_i$  é o negativo do polo daquela respectiva fração!!!
- Então, se a função de transferência em questão possuir pelo menos um polo com parte real positiva, o sistema será **instável**;
- Ao contrário, se todos os polos da função de transferência possuírem parte real negativa, o sistema será **estável**;

# Função de transferência e estabilidade

- Se a **parte real é nula**, o sistema é dito ser **marginalmente estável**:
  - I) polos imaginários puros ( $s = \pm j\omega_n$ ): nesse caso, uma entrada limitada faz o sistema oscilar com amplitude fixa – sistema de 2<sup>a</sup> ordem não amortecido;
  - II)  $s = 0$ : nesse caso, a resposta dependerá da entrada.

● Uma entrada em degrau será indefinidamente integrada, tornando a resposta instável:

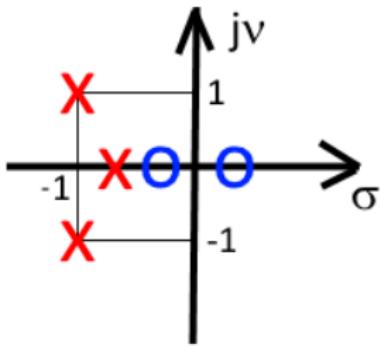
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s} \rightarrow Y(s) = 1/s^2 \rightarrow y(t) = t; \quad (148)$$

- Uma entrada absolutamente integrável\* fará com que a saída tenha um perfil limitado e, portanto, a resposta será estável. Por exemplo, o sinal  $u(t) = e^{-t}$ ,  $t \geq 0$  tem transformada de Laplace  $U(s) = 1/(s+1)$ . Então,

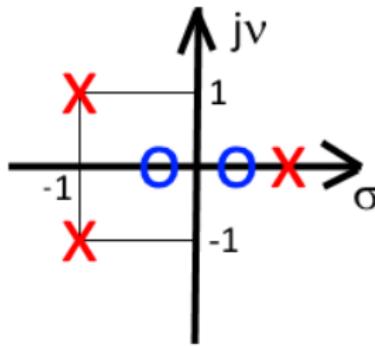
$$\begin{aligned} G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s} &\rightarrow Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} \\ &\rightarrow y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = 1. \end{aligned}$$

# Mapa de polos e zeros e estabilidade

- No mapa de polos e zeros, um polo (ou zero) com parte real positiva é marcado à direita do eixo imaginário;
- Assim, um sistema será **estável** se **todos** os seus polos estão no **semiplano esquerdo** do plano  $s$ ;
- Se **pelo menos um** dos polos do sistema estiver no **semiplano direito** do plano  $s$ , o sistema será **instável**.



Estável



Instável

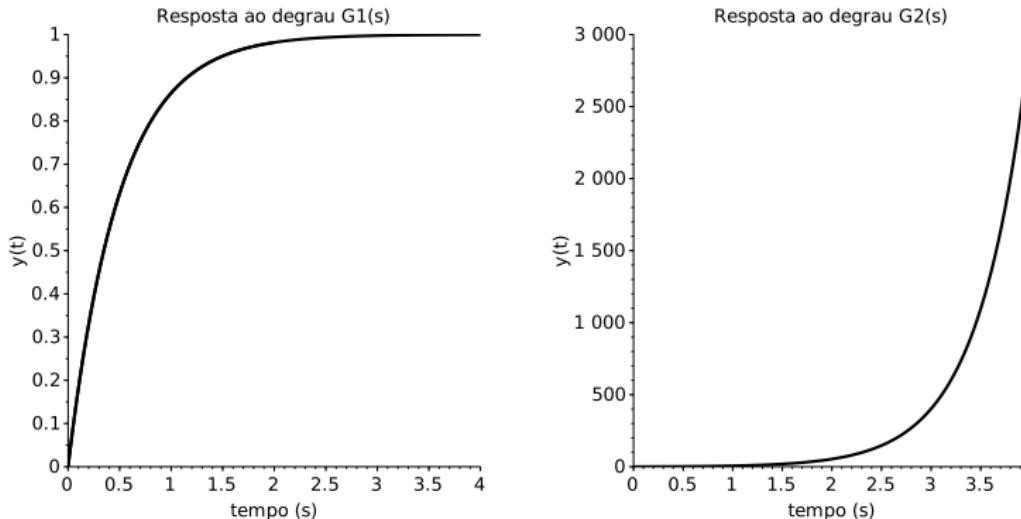
# Exemplo 1: Sistema de 1<sup>a</sup> ordem

- Sejam as funções de transferência

$$G_1(s) = \frac{2}{s+2} \quad G_2(s) = \frac{2}{s-2}; \quad (150)$$

com polos  $s_1 = -2$  e  $s_2 = +2$ .

- Então,  $G_1$  é estável e  $G_2$  é instável.



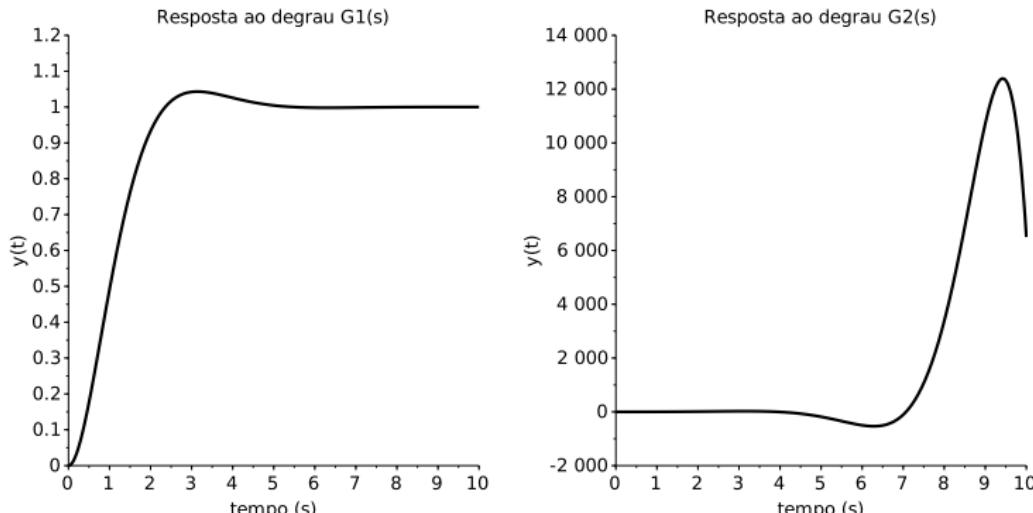
## Exemplo 2: Sistema de 2<sup>a</sup> ordem

- Sejam as funções de transferência

$$G_1(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2} \quad G_2(s) = \frac{2}{s^2 - 2s + 2}; \quad (151)$$

com polos  $s_1 = -1 \pm j$  e  $s_2 = 1 \pm j$ .

- Então,  $G_1$  é estável e  $G_2$  é instável.



# Obtendo os polos de um sistema

- Os polos de uma função de transferência definem o comportamento de um sistema dinâmico – inclusive sua estabilidade;
- Mas os polos são as raízes do polinômio denominador da função de transferência;
- Precisamos então calcular tais raízes para saber se há algum polo com parte real positiva. Isso demarcaria sua instabilidade;
- Bem, hoje é fácil calcular os polos de um sistema (Scilab, Matlab). Mas nem sempre isso foi uma verdade;
- Será que não existe um método para testar a estabilidade sem ter que calcular as raízes do polinômio denominador?

# Edward Routh



Edward Routh  
Matemático Inglês  
★ 20/01/1831  
† 07/06/1907

- Routh foi um célebre professor e pesquisador de Matemática da Universidade de Cambridge;
- Se graduou em Cambridge em 1854 como *Senior Wrangler* (a nota mais alta entre todos os estudantes de *primeiro nível*). James C. Maxwell foi o segundo colocado na mesma turma!
- Além de um professor espetacular (formou 19 de 32 *Wranglers* até 1862 – 10 dos quais em primeiro lugar), produziu importantes avanços na matemática, mecânica e análise dinâmica!

# Critério de Estabilidade de Routh – Exp. 1

- Edward Routh desenvolveu em 1876 um artifício muito interessante para testar se um polinômio possui raízes reais positivas;
- Vamos aprender a usá-lo através de exemplos:

$$2s^3 + 5s^2 + s + 3 = 0; \quad (152)$$

- Montemos o diagrama:

$(s^3, s^1)$	2	1
$(s^2, s^0)$	5	3

# Critério de Estabilidade de Routh – Exp. 1

- Vamos agora calcular a próxima linha...

$$\begin{array}{c|cc} (s^3, s^1) & 2 & 1 \\ (s^2, s^0) & 5 & 3 \\ s^1 & f_1 \end{array}$$

- $f_1$  é calculado pela seguinte regra

$$f_1 = \frac{(5 \times 1) - (3 \times 2)}{5} = -\frac{1}{5} \quad (153)$$

ou seja, multiplicação cruzada em relação à **primeira coluna**;

- Então

$$\begin{array}{c|cc} (s^3, s^1) & 2 & 1 \\ (s^2, s^0) & 5 & 3 \\ s^1 & -1/5 & 0 \end{array}$$

# Critério de Estabilidade de Routh – Exp. 1

- Vamos agora para a última linha...

$(s^3, s^1)$	2	1
$(s^2, s^0)$	5	3
$s^1$	-1/5	0
$s^0$	$f_0$	

- $f_0$  é calculado pela mesma regra

$$f_1 = \frac{(-1/5 \times 3) - (5 \times 0)}{-1/5} = 3 \quad (154)$$

- Então

$(s^3, s^1)$	2	1
$(s^2, s^0)$	5	3
$s^1$	-1/5	0
$s^0$	3	0

# Critério de Estabilidade de Routh – Exp. 1

- O critério de estabilidade de Routh estabelece que o número de troca de sinais na primeira coluna é igual ao número de raízes com parte real positiva;
- Assim,

$(s^3, s^1)$	2	1
$(s^2, s^0)$	5	3
$s^1$	-1/5	0
$s^0$	3	0

temos duas trocas de sinais na primeira coluna. Então, duas raízes deste polinômio possuem parte real positiva!!

- De fato, as raízes de  $2s^3 + 5s^2 + s + 3$  são  
 $s_1 = -2,54$ ,  
 $s_{2,3} = 0,018 \pm 0,77j$ .

# Critério de Estabilidade de Routh – Exp. 2

- Vamos testar a estabilidade de um sistema mais complexo. Seja

$$H(s) = \frac{2s+1}{s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10}. \quad (155)$$

Este sistema é estável?

- Montando o diagrama de Routh, temos:

$(s^5, s^3, s^1)$	1	2	11
$(s^4, s^2, s^0)$	2	4	10

# Critério de Estabilidade de Routh – Exp. 2

- Calculemos a próxima linha

$(s^5, s^3, s^1)$	1	2	11
$(s^4, s^2, s^0)$	2	4	10
$(s^3, s^1)$	$f_1$	$f_2$	0

- Aplicando-se a regra de multiplicação cruzada em relação à **primeira coluna**:

$$f_1 = \frac{2 \times 2 - 4 \times 1}{2} = 0, \quad f_2 = \frac{2 \times 11 - 10 \times 1}{2} = 6; \quad (156)$$

- Logo,

$(s^5, s^3, s^1)$	1	2	11
$(s^4, s^2, s^0)$	2	4	10
$(s^3, s^1)$	0	6	0

Note que o primeiro elemento desta linha zerou, enquanto o segundo não.

# Critério de Estabilidade de Routh – Exp. 2

- Para prosseguir com a análise, substituímos esse elemento nulo por uma variável infinitesimal  $\epsilon > 0$ , e continuamos o procedimento...

$(s^5, s^3, s^1)$	1	2	11
$(s^4, s^2, s^0)$	2	4	10
$(s^3, s^1)$	$\epsilon$	6	0
$(s^2, s^0)$	$f_3$	$f_4$	0
$s^1$	$f_5$	0	0
$s^0$	$f_6$	0	0

- Então,  $f_4 = f_6 = 10$ ,

$$f_3 = \frac{4\epsilon - 12}{\epsilon}, \quad f_5 = \frac{-10\epsilon^2 + 24\epsilon - 72}{4\epsilon - 12}. \quad (157)$$

- Tomando o limite das expressões acima quando  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , temos  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f_3 = -\infty$ ,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f_5 = 6$ .

# Critério de Estabilidade de Routh – Exp. 2

- Finalmente, completando a tabela

$(s^5, s^3, s^1)$	1	2	11
$(s^4, s^2, s^0)$	2	4	10
$(s^3, s^1)$	$\epsilon > 0$	6	0
$(s^2, s^0)$	-∞	10	0
$s^1$	6	0	0
$s^0$	10	0	0

- Há duas trocas de sinais na primeira coluna. Então, duas raízes do polinômio denominador têm parte real positiva e o sistema em questão é instável;
- De fato, os polos de

$$H(s) = \frac{2s+1}{s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10}$$

são  $s_1 = -1,31$ ,  $s_{2,3} = -1,24 \pm 1,04j$  e  $s_{4,5} = 0,9 \pm 1,46j$ .

# Critério de Estabilidade de Routh – Exp. 3

- Vamos, por fim, analisar a estabilidade de um último sistema:

$$H(s) = \frac{s+3}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 2}. \quad (158)$$

- Montando o diagrama de Routh, temos:

$(s^4, s^2, s^0)$	1	3	2
$(s^3, s^1)$	2	4	0
$s^2$	1	2	0
$s^1$	0	0	0

- Note que uma linha inteira se anulou. Como analisar o sinal na primeira coluna?
- Para resolver esta questão, pegamos a linha anterior:

$$(s^2, s^0) \mid 1 \ 2$$

# Critério de Estabilidade de Routh – Exp. 3

$$(s^2, s^0) \mid 1 \ 2$$

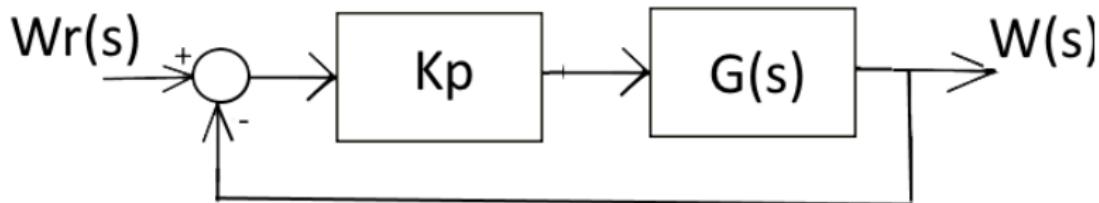
- Formando o polinômio e o igualando a zero, chegamos a:

$$s^2 + 2 = 0 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{2}; \quad (160)$$

- Então, quando uma linha inteira do diagrama de Routh zera, isso significa que temos polos simétricos em relação à origem ( $s_{1,2} = \pm\sigma$  ou  $s_{1,2} = \pm j\omega$ );**
- Note que uma linha nula não invalida a análise de troca de sinais para as outras linhas!!!

# Projeto de um ganho estabilizante

- Considere um sistema em malha fechada:



onde  $G(s)$  é o sistema a ser controlado e  $K_p$  o ganho de controle;

- Podemos usar o critério de estabilidade de Routh para achar um ganho  $K_p$  tal que o sistema em malha fechada seja estável;
- Vamos supor que

$$G(s) = \frac{s}{s^3 + 3s^2 + s + 4}. \quad (161)$$

$G(s)$  é instável em malha aberta!!

# Projeto de um ganho estabilizante

- A função de transferência de malha fechada (em função de  $K_p$ ) fica:

$$G_{mf}(s) = \frac{W(s)}{W_r(s)} = \frac{K_p s}{s^3 + 3s^2 + (1 + K_p)s + 4}; \quad (162)$$

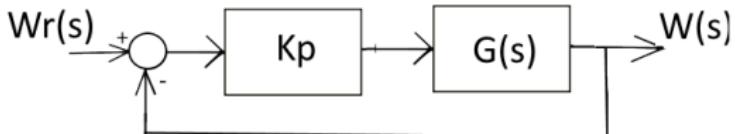
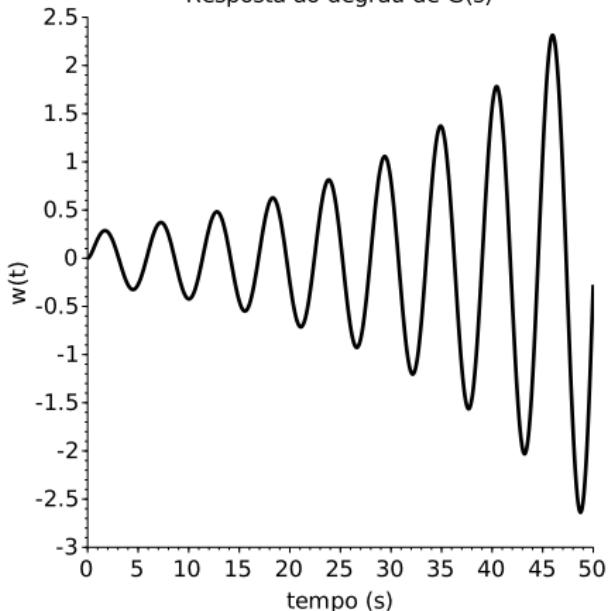
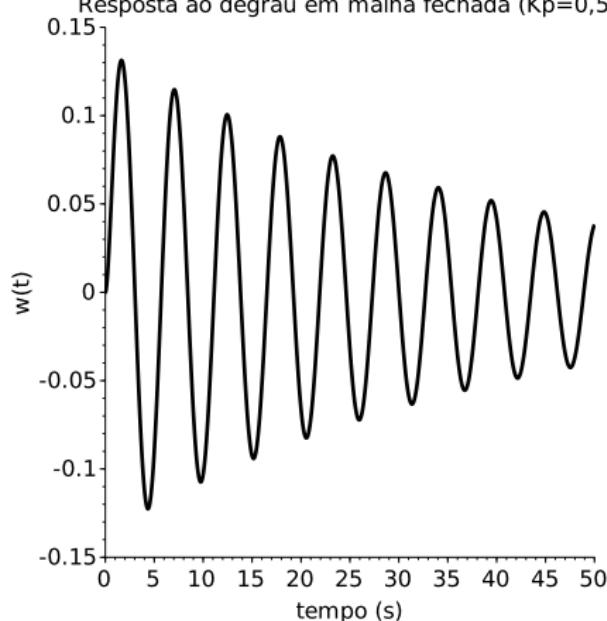
- Se construirmos o diagrama de Routh, chegamos a:

$(s^3, s^1)$	$1$	$1 + K_p$
$(s^2, s^0)$	$3$	$4$
$(s^1)$	$f_1$	$0$
$(s^0)$	$f_2$	$0$

com  $f_1 = (3K_p - 1)/3$  e  $f_2 = 4$ .

- Mas não haverá troca de sinal na primeira coluna se  $f_1, f_2 > 0$ , ou  $K_p > 1/3$ ;
- Então, esse sistema será estável se  $K_p > 1/3$ .

# Projeto de um ganho estabilizante

Resposta ao degrau de  $G(s)$ Resposta ao degrau em malha fechada ( $K_p=0,5$ )

# Exercícios

**E40**

Desenhe o mapa de polos e zeros das seguintes funções de transferência. Aplique o critério de Routh para analisar sua estabilidade:

$$G_1(s) = \frac{s+2}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5}, \quad G_2(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 5s^2 + 3s + 1},$$

$$G_3(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 1}{s^4 + 6s^3 + 3s^2 + s + 1}, \quad G_4(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)(s + 2)}.$$

**E41**

Considere o diagrama de blocos em malha fechada, onde  $G(s)$  é cada uma das funções acima. Encontre a faixa de valores de  $K_p$  que estabiliza a respectiva malha fechada.

# Exercícios

E42



Considere o desafio de criar um robô que caminha sobre duas rodas simétricas. É necessário que o corpo do robô se mantenha ereto, com menor ângulo possível com a vertical que passa pelo eixo de suas rodas. Isso deve ser conseguido através de torques controlados sobre suas rodas.

Sua modelagem é similar ao do equilibrista de vassoura já estudado:

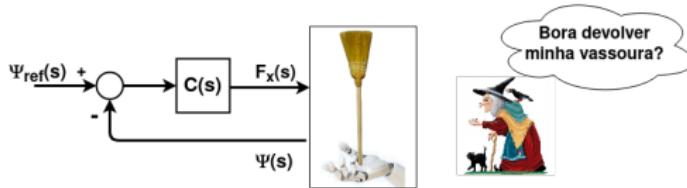
$$\frac{\Psi(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2 - \alpha'}$$

onde  $\psi(t)$  é o ângulo do corpo do robô com a vertical,  $T(t)$  é o torque produzido pelas rodas e  $J$  e  $\alpha'$  são parâmetros construtivos do robô.

Mostre que o sistema em malha aberta é instável. Mostre também que um controlador proporcional  $K_p$  é capaz de tornar o sistema apenas marginalmente estável. Nesse caso, mostre que a frequência de oscilação do corpo em relação à vertical é igual a

$$f_{osc} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_p - \alpha'}{J}} \text{ Hz}$$

# Exercícios



Agora sim, nós podemos pensar em uma estratégia de controle do equilibrista de cabo de vassoura. Lembre-se que o sistema é instável em malha aberta. Considere que (vide Eq. (39) e um controlador escolhido)

$$\frac{\Psi(s)}{F_x(s)} = \frac{I}{Js^2 - Mgl}; \quad C(s) = K_P + K_D s.$$

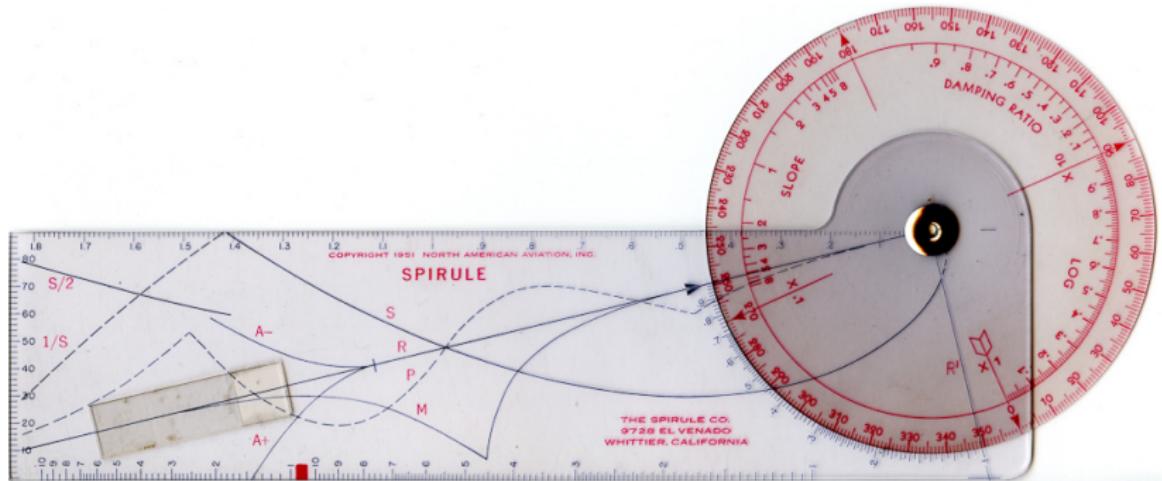
Deseja-se que, em malha fechada:

- I) O sistema seja estável;
- II) O percentual de sobressinal seja menor que 10% ;
- III) O tempo de acomodação seja menor que 1,0s.

Mostre que a faixa de valores de ganho do controlador que atende a esses requisitos é

$$K_D > \frac{8J}{I}; \quad 0 < K_P < Mg + \frac{K_D^2 I}{1,44 J}.$$

# Análise do Lugar das Raízes



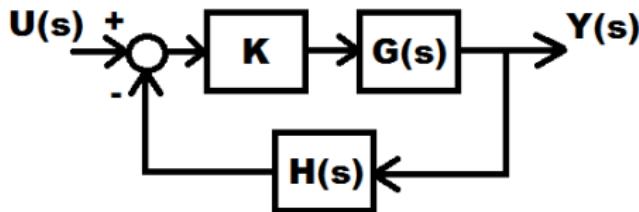
**Spirule:** uma régua de cálculo muito útil para desenho e análise de sistemas de controle nos diagramas de Lugar das Raízes, Bode, Nyquist e Carta de Nichols.

© Steve Blanchard, 11/08/2013. Site Flickr.

© Prof. Alexandre G. Brito – para utilizar este material, contacte o autor.

# Equação característica

- Considere um sistema de malha fechada como o mostrado abaixo:



- Então, a função de transferência de malha fechada é dada por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}. \quad (163)$$

- Já vimos que os polos definem toda a característica transitória do sistema – inclusive a estabilidade;
- Já os zeros moldam a resposta transitória, atuando sobretudo na sua amplitude ao longo do tempo;

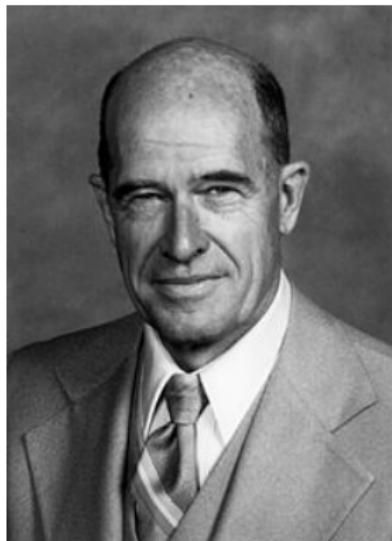
# Equação característica

- Mas os polos são as raízes do polinômio denominador da função de transferência. Então:

$$1 + KG(s)H(s) = 0 \rightarrow KG(s)H(s) = -1. \quad (164)$$

- A equação acima é chamada de *equação característica do sistema em malha fechada*, enquanto  $1 + KG(s)H(s)$  é seu *polinômio característico*. Ela carrega em si todas as informações para o comportamento dinâmico do sistema;
- **A Análise do Lugar da Raízes é uma ferramenta muito importante, que estuda o comportamento das raízes da equação característica na medida que o ganho K (ou outro parâmetro) varia;**
- Este método de análise é devido a Walter Evans.

# Walter Evans



Walter R. Evans  
Engenheiro  
americano  
★ 15/01/1920  
† 10/07/1999

- Evans foi um renomado engenheiro de controle americano, trabalhando na General Electric, Autonetics (agora Rockwell), entre outras;
- Em 1948, ele propôs o Método do Lugar das Raízes – um marco na teoria de controle;
- Escreveu o livro “*Control System Dynamics*” em 1954;
- Ele também inventou o *spirule* – um dispositivo muito útil para soma de ângulos e multiplicação do módulo de vetores.

# Lugar das raízes – condições de ângulo e módulo

- Tomemos novamente a equação característica  $1 + KG(s)H(s) = 0$ ;
- Como  $G(s)$  e  $H(s)$  são funções complexas, então  $KG(s)H(s) = -1$  se e somente se as duas condições abaixo ocorrerem simultaneamente:
  - i) **Condição de ângulo:**  $\underline{G(s)H(s)} = \pm k\pi, \quad k = 1, 3, 5, \dots$
  - ii) **Condição de módulo:**  $|KG(s)H(s)| = 1, \quad K \in \mathbb{R}$
- O lugar geométrico no plano  $s$  (em função de  $K$ ) para o qual ambas as condições são válidas é chamado de **Lugar das Raízes**;
- **Note que este é também o lugar geométrico dos polos de ma-  
lha fechada em função de K!**

# Lugar das raízes – condições de ângulo e módulo

- Considere que  $G(s)H(s)$  pode ser escrito como uma função de transferência do tipo

$$G(s)H(s) = \frac{\prod_{i=1}^m s + z_i}{\prod_{j=1}^n s + p_j}, \quad (165)$$

com  $m$  zeros e  $n$  polos de malha aberta ( $n \geq m$ );

- Em um ponto qualquer no plano  $s$ ,  $s = q$ , as condições de ângulo e módulo indicam que:

i)

$$\sum_{i=1}^m \angle(q + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(q + p_j) = -\pi$$

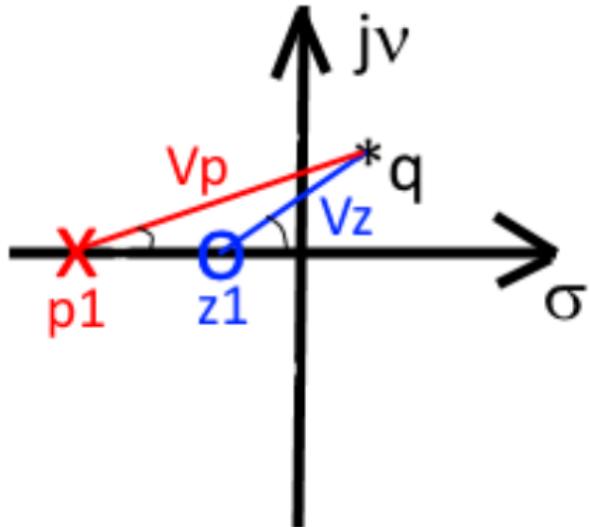
ii)

$$\frac{K \prod_{i=1}^m |q + z_i|}{\prod_{j=1}^n |q + p_j|} = 1.$$

# Condições de ângulo e módulo – exemplo

$$PC(s) = 1 + \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)} = 0$$


---



$$\angle q + z_1 - \angle q + p_1 = -\pi$$


---

$$\frac{K|q + z_1|}{|q + p_1|} = 1.$$


---

$$\angle v_z - \angle v_p = -\pi$$

$$\frac{K|v_z|}{|v_p|} = 1.$$

# Lugar das raízes – consequências

- Note que as raízes do polinômio característico são exatamente os polos do sistema em malha fechada;
- Então é possível se avaliar a alocação desses polos de malha fechada em função de um parâmetro do sistema ou de um ganho de controle ( $K$  neste caso);
- Assim, o Lugar das Raízes é extremamente útil tanto em análise como em projeto de controladores de sistemas lineares;
- A questão seguinte é: será que eu preciso pesquisar todo o plano  $s$  em busca dos pontos que atendem às condições de módulo e ângulo? Será que não existe uma forma sistemática de fazer isso?
- Discutamos, então, algumas regras construtivas para nos auxiliar no esboço do diagrama de Lugar das Raízes.

# Lugar das Raízes: $K = 0$ e $K \rightarrow \infty$

- Comecemos “marotamente” analisando o que ocorre no polinômio característico quando  $K = 0$  e  $K \rightarrow \infty$ ;
- Tome o  $PC(s) = 1 + KG(s)H(s) = 0$  e  
 $G(s)H(s) = (\prod_{i=1}^m s+z_i)/(\prod_{j=1}^n s+p_j)$ . Então,

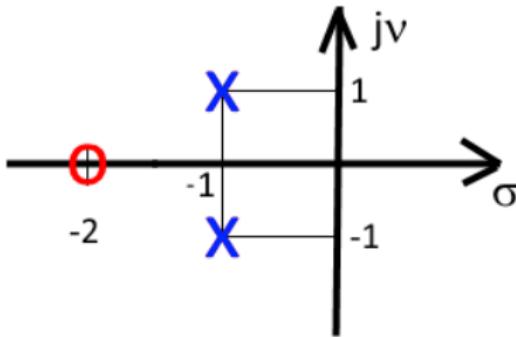
$$\prod_{j=1}^n (s + p_j) + K \prod_{i=1}^m (s + z_i) = 0; \quad (166)$$

- Ora, quando  $K = 0$ , temos que  $PC(s) = 0 \Rightarrow \prod_{j=1}^n (s + p_j) = 0$ . Ou seja, as raízes do PC são os próprios polos de  $G(s)H(s)$ ;
- Quando  $K \rightarrow \infty$ ,  $PC(s) = 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^m (s + z_i) = 0$ . Ou seja, as raízes do PC convergem para os zeros de  $G(s)H(s)$ ;
- **Conclusão: o Lugar das Raízes começa nos polos de malha aberta e termina nos zeros de malha aberta!!**

# Lugar das Raízes – passo 1

- Então, o lugar das raízes partem dos polos em direção aos zeros (mesmo aqueles no infinito), quando  $0 \leq K < \infty$ ;
- Marcamos no plano  $s$  os polos (com **X**) e os zeros (com **O**) da malha aberta ( $G(s)H(s)$ );
- Exemplo: se

$$G(s)H(s) = \frac{s+2}{s^2 + 2s + 2} \quad (167)$$



# Lugar das Raízes – eixo real

- Analisemos como se comporta o Lugar das Raízes no eixo real através das situações abaixo, através da condição de ângulo:



- A fase em  $R$  é:

$$\phi_R = \angle R - Z + \angle R - P_1 - \angle R - P_2$$

$$\phi_R = 0 - 0 - \pi = -\pi$$

$R$  está no lugar das raízes.



- A fase em  $S$  é:

$$\phi_S = \angle S - Z + \angle S - P_1 - \angle S - P_2$$

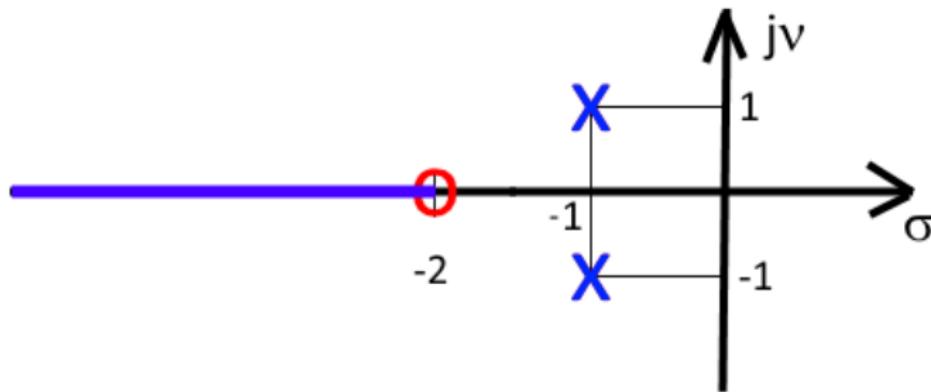
$$\phi_S = \pi - \pi - 0 = 0$$

$S$  não está no lugar das raízes.

- No eixo real, o LR está sempre à esquerda de um número ímpar de polos e zeros da malha aberta!

# Lugar das Raízes – passo 2

- Para o sistema exemplo, temos:



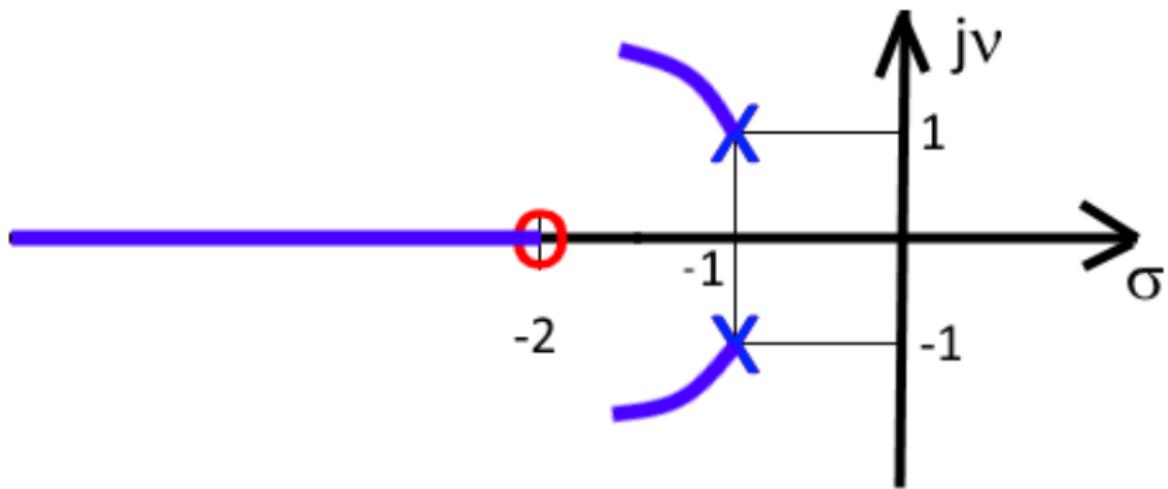
- Note que a presença de polos e zeros complexos conjugados não invalidam a análise no eixo real!

# Lugar das Raízes – polos complexos conjugados

- Em qualquer sistema físico, se existir um polo complexo, seu conjugado também será um polo;
- Então, o lugar das raízes que representam os polos complexos conjugados caminharão juntos;
- **Conclusão: no diagrama de Lugar das Raízes, se houver um caminho fora do eixo real (polo complexo), haverá outro simétrico em relação ao eixo real (o polo complexo conjugado)!**

## Lugar das Raízes – passo 3

- Polos complexos conjugados sempre caminham juntos;
- Então, para o sistema exemplo, temos:



# Lugar das Raízes – partida/chegada no eixo real

- Vimos que podem existir trechos de LR para os polos complexos (fora do eixo real) e trechos de LR para os polos reais (sobre o eixo real);
- Note que não temos nenhuma razão para acreditar que o lugar geométrico do LR seja descontínuo para  $K$  (isso é até um absurdo matemático, concorda?);
- Então, os trechos de LR complexos precisam encontrar os trechos de LR reais em algum ponto do eixo real. E obviamente isso só pode ocorrer em trechos do eixo real que sejam LR!
- Há duas situações a considerar:
  - ① polos reais “viraram” complexos conjugados a partir de algum **ponto de partida** do eixo real;
  - ② polos complexos conjugados “viraram” reais a partir de algum **ponto de chegada** no eixo real;

# Lugar das Raízes – passo 4

- Pode ser mostrado que os pontos de chegada e partida no eixo real são dados tomando-se  $dK/ds = 0$ , em

$$1 + KG(s)H(s) = 0 \Rightarrow K = -\frac{1}{G(s)H(s)}; \quad (168)$$

- Para o sistema exemplo:

$$1 + K \frac{s+2}{s^2+2s+2} = 0 \Rightarrow K = -\frac{s^2+2s+2}{s+2}; \quad (169)$$

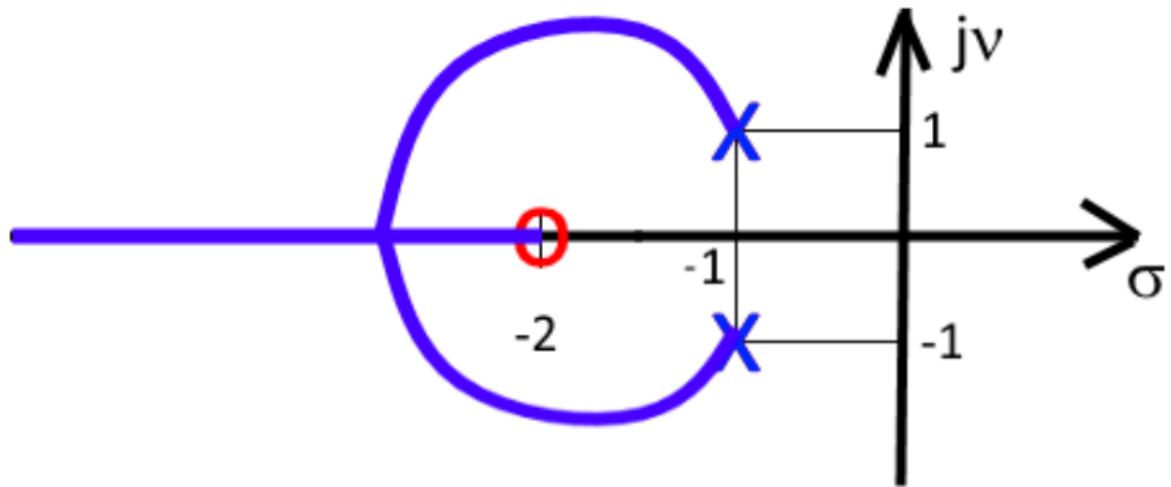
- Então,

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(s+2)(2s+2) - (s^2+2s+2)}{(s+2)^2} = -\frac{s^2+4s+2}{(s+2)^2}; \quad (170)$$

- Para  $dK/ds = 0$ , temos  $s_1 = -1 - \sqrt{2}$ ,  $s_2 = -1 + \sqrt{2}$ . Mas  $s_2$  não está no LR no eixo real (não serve). Então, temos um ponto de chegada em  $s_1$ .

## Lugar das Raízes – passo 4

- Para o sistema exemplo, temos:



# Lugar das raízes – convergência para o infinito

- Já sabemos que o LR parte dos polos de malha aberta e convergem para os zeros de malha aberta. Mas como, em geral, o número de polos é maior que o de zeros, alguns dos polos irão em busca de zeros no infinito;
- Então, há **assíntotas de convergência** do LR para o infinito. Essas assíntotas partem de um mesmo ponto de origem (chamado de centróide,  $\sigma_A$ ) e com ângulos  $\phi_A$  em relação ao eixo real positivo;
- O número de assíntotas de convergência para o infinito é  $N = n_{polos} - n_{zeros}$  (de  $G(s)H(s)$ );
- O centróide e ângulos das assíntotas são dados por:

$$\sigma_A = \frac{(\sum \text{polos} - \sum \text{zeros})}{N}; \quad \phi_A = \frac{2q+1}{N} 180^\circ, \quad (171)$$

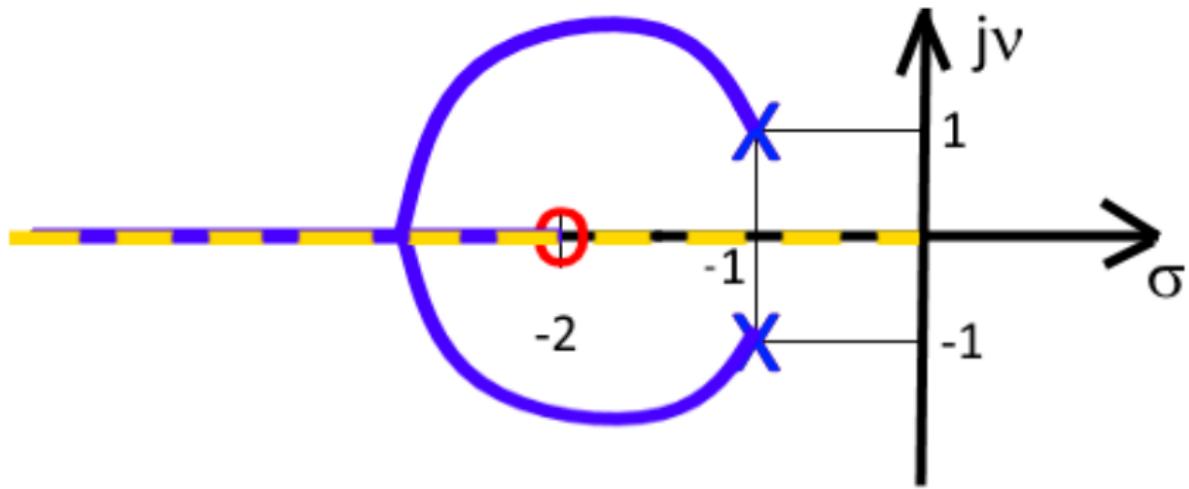
com  $q = 0, 1, \dots, (N-1)$

# Lugar das Raízes – passo 5

- Para o sistema exemplo, temos

$$N = 1, \quad \sigma_A = -1, \quad \phi_A = 180^\circ. \quad (172)$$

- Então,



# Lugar das Raízes – cruzamento com o eixo imaginário

- Se o Lugar das Raízes caminhar no sentido do semiplano direito, evidentemente haverá pontos em que ele cruzará com o eixo imaginário;
- Para calcular os pontos exatos em que tal cruzamento ocorre, podemos usar o Critério de Routh sobre o polinômio característico, em função de  $K$ ;
- Assim, calculamos  $K$  para o qual o PC é criticamente estável. Levando este  $K$  no PC (ou analisando a linha anterior à totalmente nula no Critério de Routh), obtemos as raízes para aquela condição.

# Lugar das raízes – passo 6

- Não ocorre cruzamento do LR com o eixo imaginário para o sistema exemplo (você concorda?);
- Mas o sistema cuja equação característica é

$$1 + K \frac{1}{s(s^2 + 2s + 3)} = 0 \quad (173)$$

possui polos  $s_{1,2} = \pm j\sqrt{3}$  quando  $K = 6$  (exercício: aplique Critério de Routh sobre PC para mostrar isso).

# Traçado do LR – usando o Matlab e o Scilab

- Entre as décadas de 40 e 60, o projeto de controladores via Lugar das Raízes era muito comum. Mas naquela época não havia a capacidade computacional que existe hoje. Assim, o perfeito traçado “manual” era fundamental para um bom projeto;
- Hoje, é bem mais fácil usar pacotes como o Matlab/Octave e o Scilab para nos ajudar com isso, né?
- Mas nunca podemos nos esquecer da argumentação técnica e teórica por trás desta importante ferramenta de controle;
- A função para traçado do LR no Scilab é a *evans*. No Matlab/Octave é a *rlocus*.

# Traçado do lugar das raízes

- Seja o polinômio característico

$$1 + KG(s)H(s) = 1 + K \frac{s+2}{s^2 + 2s + 2}; \quad (174)$$

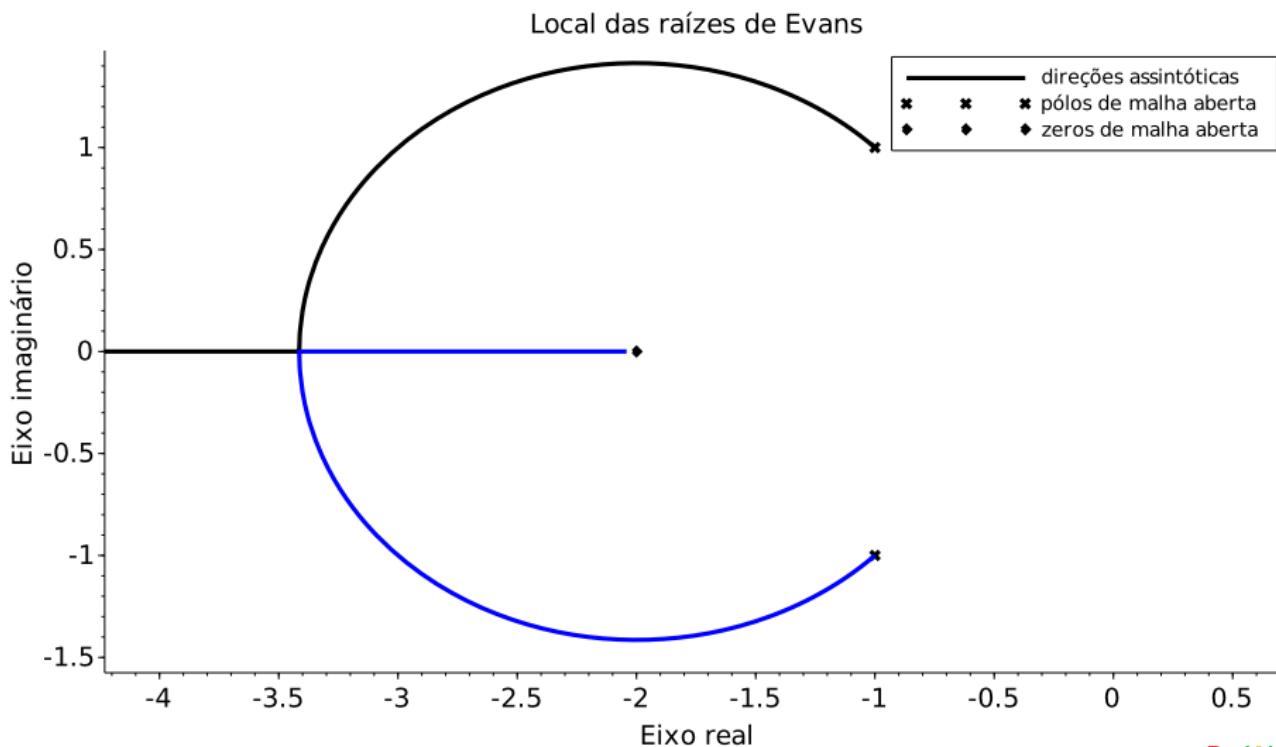
- No Scilab, fazemos:

```
s=poly(0,'s');
Gma=syslin('c',(s+2)/(s^2+2s+2));
evans(Gma);
```

- No Matlab/Octave, fazemos:

```
s=tf('s');
Gma=(s+2)/(s^2+2s+2);
rlocus(Gma);
```

# Traçado do lugar das raízes: Scilab

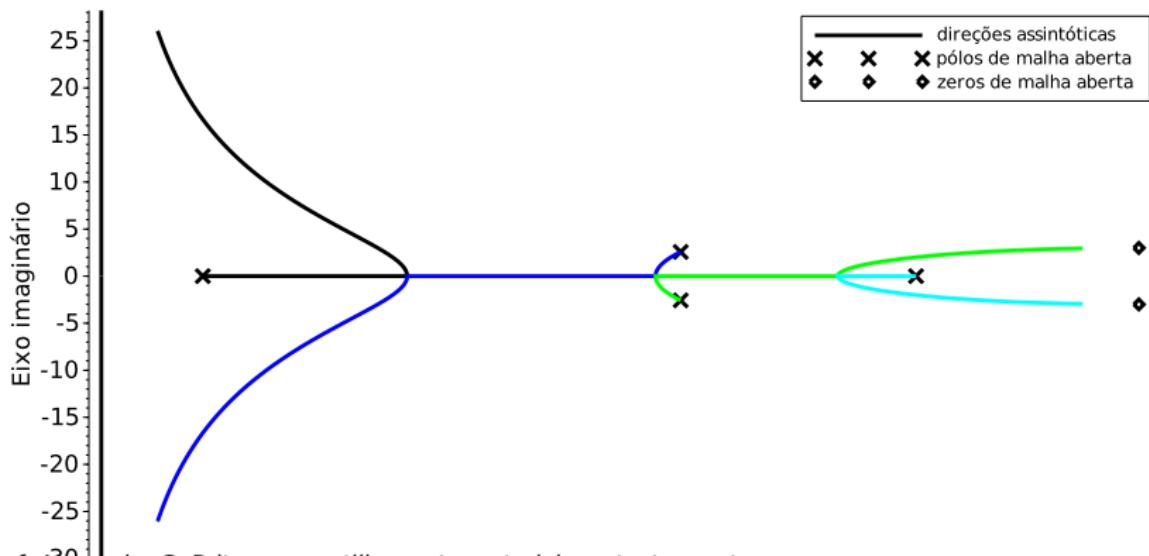


# Traçado do LR – exemplo 2

Desejamos traçar o lugar das raízes do polinômio característico

$$1 + KG(s)H(s) = 1 + K \frac{s^2 + 2s + 10}{s^4 + 38s^3 + 512s^2 + 2950s + 6000}; \quad (175)$$

Local das raízes de Evans

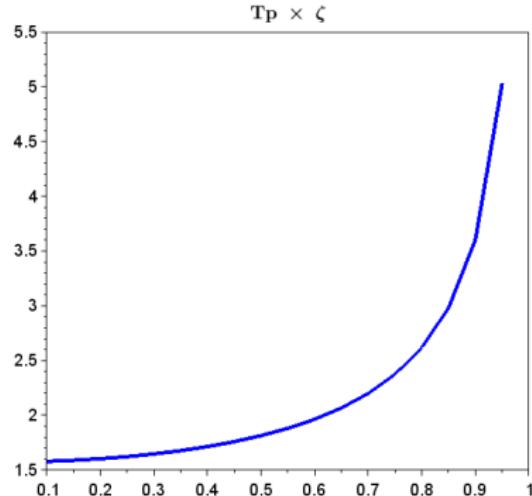
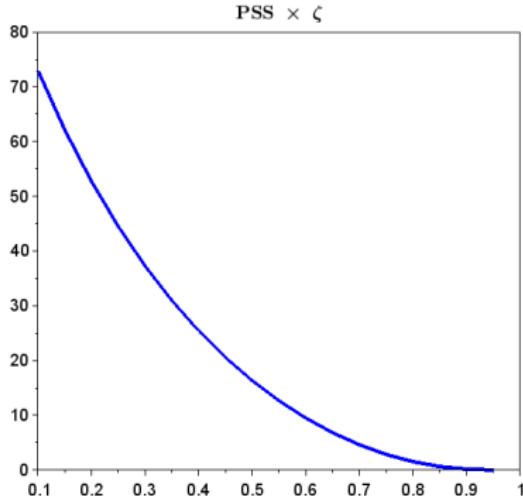


# Requisitos de desempenho e $\zeta$

- Vamos pensar agora em um sistema de malha fechada que possa ser analisado como um sistema dominante de segunda ordem;
- O coeficiente de amortecimento  $\zeta$  tem importância fundamental na sua resposta transitória. Ele entra no cômputo de todos os índices de desempenho já discutidos;
- $\zeta \rightarrow 0$  gera uma resposta muito oscilatória (alto PSS) com um longo tempo de acomodação;
- $\zeta \rightarrow 1$ , por outro lado, leva a uma resposta mais próxima da de um sistema de primeira ordem (exponencial assintoticamente convergente);
- O que faremos a seguir é escolher uma faixa de  $\zeta$  que leve a um bom compromisso entre os diversos requisitos.

# Requisitos de desempenho e $\zeta$

- As relações dos requisitos com  $\zeta$  são:



- Então, uma faixa de valores razoável para o coeficiente de amortecimento é  $0,5 \leq \zeta \leq 0,75$ .

# Requisitos de desempenho e $\zeta$

- Mas qual seria o posicionamento de polos com  $\zeta \approx 0,6$  no plano  $s$ ?
- Lembrando que

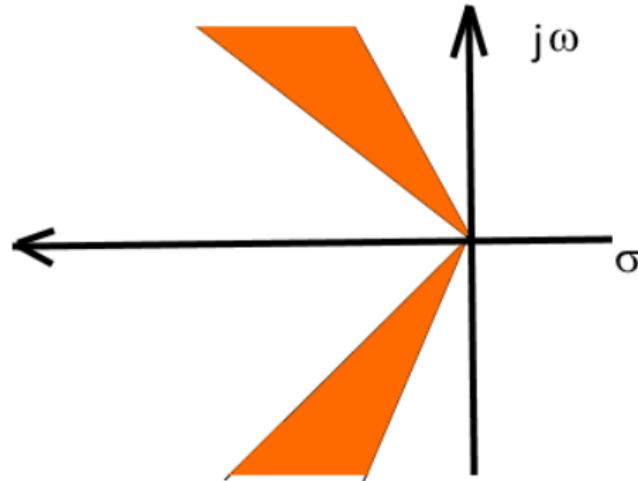
$$\phi = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right), \quad (176)$$

temos que  $\phi \approx 0.93\text{rad} \approx 53^\circ$ ;

- Assim, para que polos de um sistema dominante de segunda ordem tenham  $\zeta = 0,6$ , eles devem estar localizados no plano  $s$  tal que  $\phi \approx 53^\circ$ ;

# Mapeamento de requisitos no plano $s$

- Vimos acima que um bom compromisso entre os requisitos de PSS e tempo de pico se faz com um  $\zeta$  na faixa entre 0,5 e 0,75;
- Então, um par de polos dominantes de segunda ordem que satisfaz estes requisitos deve estar alocado na região do plano  $s$  limitada aos ângulos  $41,4 \leq \phi \leq 60^\circ$ ;



# Mapeamento de requisitos no plano $s$

- Além do tempo de pico, o tempo de acomodação é outra medida da velocidade de resposta do sistema em malha fechada;
- Em termos práticos, o tempo de acomodação é um requisito de velocidade de resposta até mais interessante, pois avalia o tempo de convergência para o valor final;
- Como vimos, o tempo de acomodação é dado por

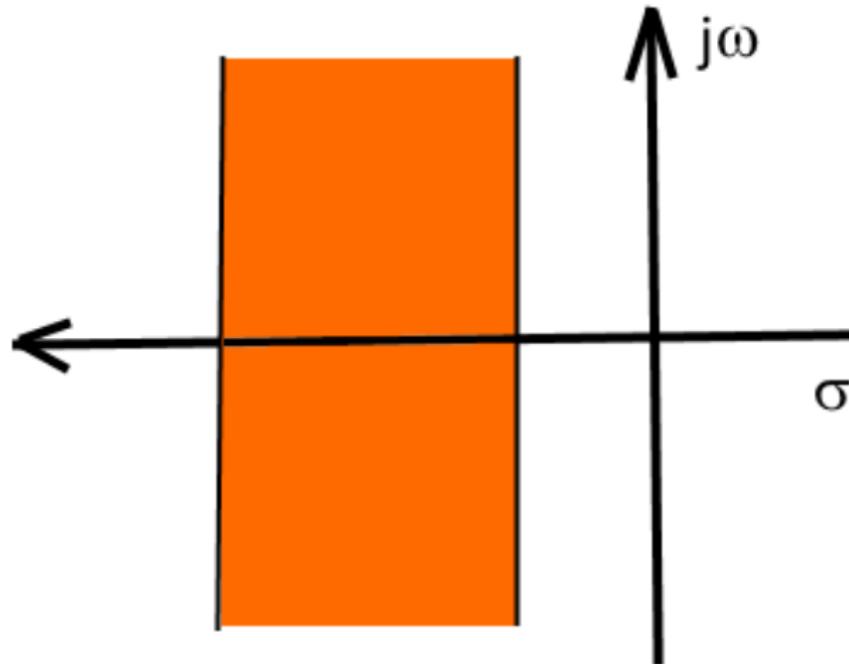
$$T_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n}; \quad (177)$$

- Mas o denominador é exatamente o negativo da parte real dos polos dominantes de segunda ordem;

# Mapeamento de requisitos no plano $s$

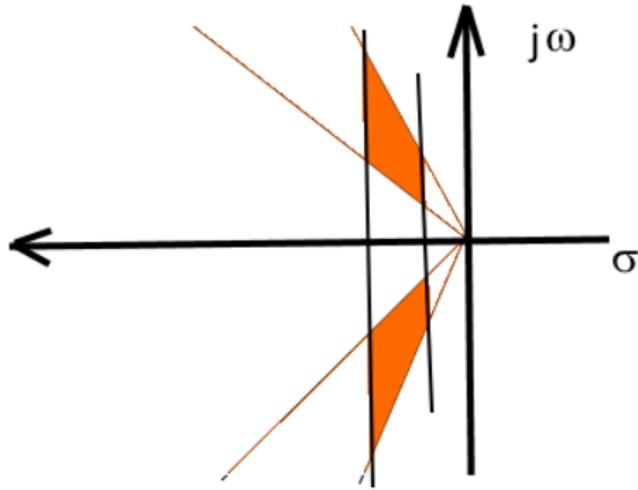
- Então, o requisito de tempo de acomodação se espelha no plano  $s$  através de uma reta vertical centrada na parte real de seus polos dominantes de segunda ordem;
- Note que quanto mais rápida a acomodação do sistema, maior a parte real de seus polos dominantes de segunda ordem.
- Portanto, quanto mais à esquerda a reta acima se alocar, maior a exigência quanto ao tempo de convergência;
- Em alguns casos, pode ser necessário limitar o tempo de convergência para se evitar problemas estruturais, por exemplo;
- Então, os polos devem estar limitados à direita de uma reta vertical no plano  $s$ .

## Mapeamento de requisitos no plano $s$



# Mapeamento de requisitos no plano $s$

- Podemos desejar mesclar os requisitos de desempenho anteriores (PSS e tempo de acomodação);
- Assim, teríamos restrições sobre o ângulo de alocação e também sobre a parte real dos polos dominantes de segunda ordem. Isso seria conseguido com a seguinte região no plano  $s$ :



# Projeto de controladores via Lugar das Raízes

- O projeto de um controlador via Lugar das Raízes consiste em se alojar os polos dominantes de segunda ordem de malha fechada na região do plano  $s$  para a qual os requisitos de desempenho sejam atendidos;
- No caso de um controlador proporcional (ganho  $K_p$ ), busca-se o ganho que aloca os polos na região estabelecida;
- É importante lembrar que os requisitos de desempenho são válidos para **polos dominantes de segunda ordem**;
- Se houver outros polos e/ou zeros próximos, o valor apurado para os índices de desempenho (via simulação) serão diferentes dos previamente especificados.

# Exercícios de fixação

- 1 Esboce o diagrama de lugar das raízes para as equações características cujas funções de transferência sejam as abaixo. A seguir, use o Scilab ou Matlab/Octave para confirmar seu esboço:

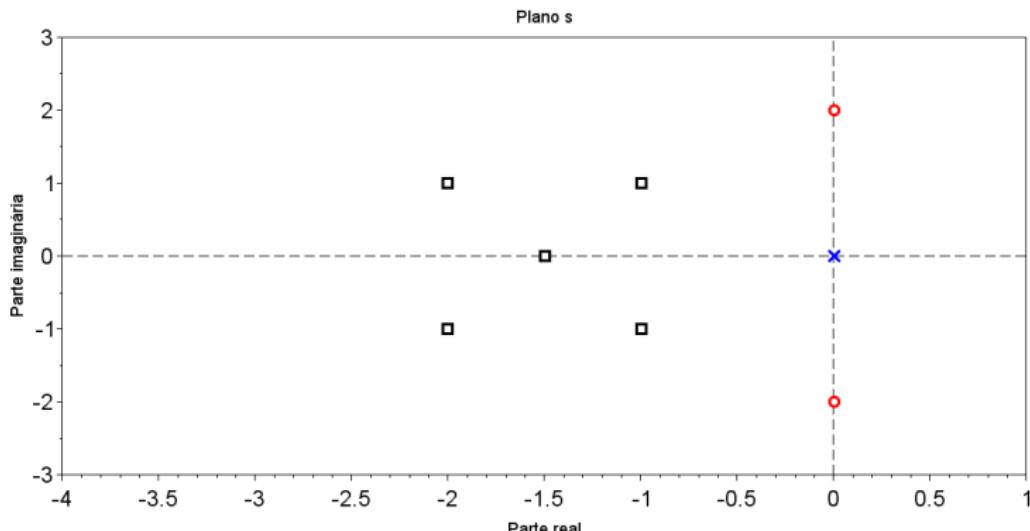
$$G_1(s) = \frac{s+2}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5}, \quad G_2(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 5s^2 + 3s + 1},$$

$$G_3(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 1}{s^4 + 6s^3 + 3s^2 + s + 1}, \quad G_4(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)(s + 2)}.$$

- 2 Considere uma planta dominante de 2<sup>a</sup> ordem. Encontre a região no plano  $s$  para os polos de malha fechada onde  $PSS \leq 10\%$  e  $1 \leq T_s \leq 5$ .

# Exercícios de fixação

- 3 Seja um sistema de malha aberta com dois polos e dois zeros. Os zeros e um dos polos estão posicionados conforme mapa a seguir. Use a condição de ângulo para encontrar a posição do segundo polo sobre o eixo real tal que cada um dos pontos marcados como um quadrado faça parte do lugar das raízes da equação característica do respectivo sistema.



# Exercícios de fixação

- 4) O Lugar das Raízes pode ser traçado não apenas em relação ao ganho de controle, mas em função de qualquer outro parâmetro da malha fechada. Considere uma planta do tipo:

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 4\zeta s + 4}, \quad (178)$$

realimentada por um controlador proporcional  $K_p = 2$ . Trace o Lugar das Raízes deste sistema em função  $\zeta$  ( $0 \leq \zeta < \infty$ ) e comente o resultado.

- 5) Seja

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}. \quad (179)$$

Usando a condição de módulo, ache o valor de um ganho de controle  $K_p$  para o qual um dos polos de malha fechada se localize em  $s = -1$ .

# Controlador PID



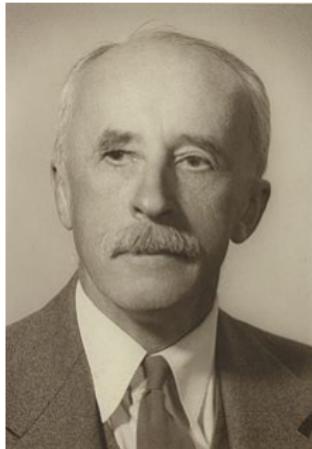
Controlador PID com visualizador de resposta incorporado.  
©Yokogawa, 14/11/2018. Site do fabricante.

© Prof. Alexandre G. Brito – para utilizar este material, contacte o autor.

# O controlador PID

- O controlador PID (Proporcional-Integral-Derivativo) é um paradigma em projeto de controle desde sua proposição no início do século passado;
- Os estudos sobre controle são tão remotos que é difícil dizer quem foi o proposito da ideia de controle PID;
- Entretanto, o primeiro trabalho científico sistemático publicado sobre o tema é de autoria de Nicolas Minorsky.

# Nicolas Minorsky



Nicolas Minorsky  
Engenheiro russo

★ 23/09/1885  
† 31/07/1970

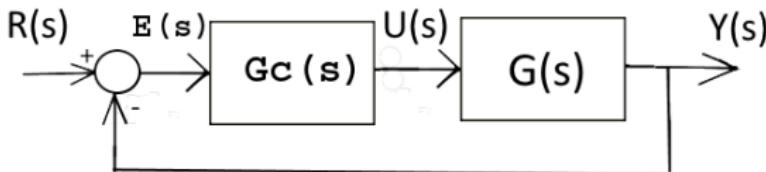
- Minorsky publicou, em 1922, o artigo *Directional stability of automatically steered bodies* (J. Amer. Soc. of Naval Eng.), onde estudou as ações de um controlador proporcional, integral e derivativo, sobre o controle de equilíbrio de um navio de guerra;
- Ele se graduou na Academia Marítima Russa (São Petersburgo) e, por mais de 40 anos, ele trabalhou na GE (EUA), desenvolvendo inúmeros trabalhos em controle de sistemas.

# Controlador PID - formato geral

- O controlador PID apresenta o seguinte formato matemático:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s, \quad (180)$$

com diagrama de blocos



- Este controlador atua sobre o erro do sistema  $e(t)$  por meio de três ações de controle distintas - cada qual com um objetivo específico;
- Estudemos a seguir cada uma dessas ações.

# Ação proporcional

- O primeiro termo é um ganho estático proporcional ( $K_p$ ), que já víhamos estudando;
- Essa ação opera sobre o sinal de erro no tempo atual, enviando uma ação de comando proporcional ao erro apurado;
- É óbvio que quanto maior o erro apurado, mais efetiva será a ação de controle devida a este termo;
- Note também que esta ação de controle não leva em conta condições passadas do sinal de erro ( $u(t) = K_p e(t)$ ), apenas o que ocorre no momento atual.

# Ação integral

- O segundo termo é

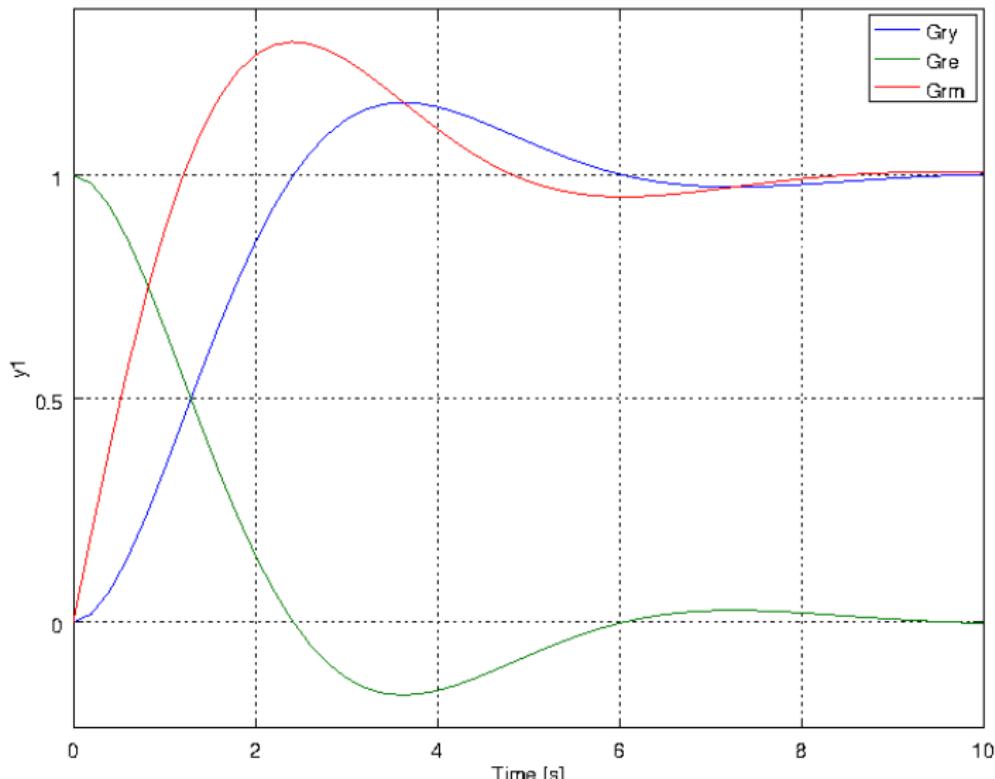
$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s} \Rightarrow u(t) = \int_0^t K_i \cdot e(t) dt, \quad (181)$$

onde  $K_i$  é o ganho integral;

- Essa ação opera sobre a integral do sinal de erro. Assim, ela atua sobre erros remanescentes de períodos anteriores, ainda não corrigidos;
- Sua principal função é, então, corrigir erros persistentes. Quanto maior a presença de erros remanescentes, mais intensa sua ação;
- Então, essa ação é vista como uma correção sobre a história “passada” do erro do sistema, com foco no regime estacionário.

# Ação integral

Sinais  $y(t)$ ,  $e(t)$  e  $m(t)$  para  $C(s)=1/s$  e  $G(s)=1/(s+1)$



# Ação derivativa

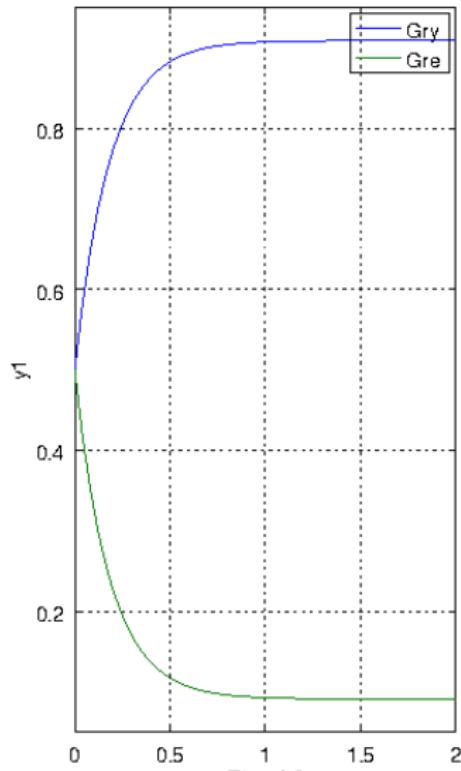
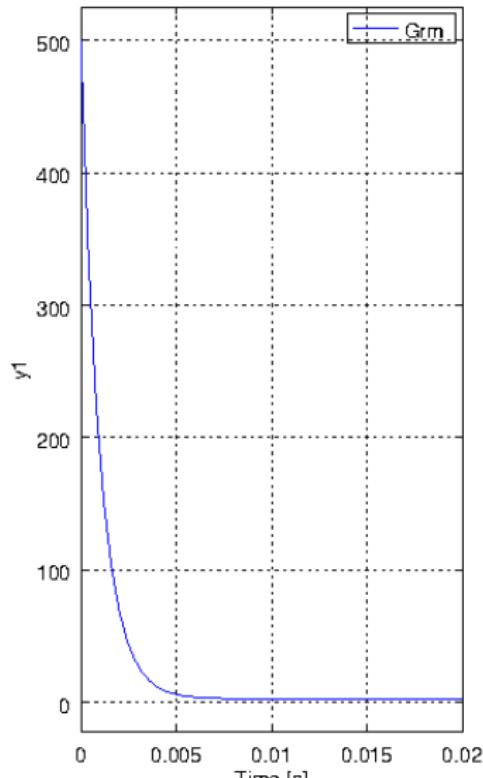
- O terceiro termo é

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_d \cdot s \Rightarrow u(t) = \frac{de(t)}{dt}, \quad (182)$$

onde  $K_d$  é o ganho derivativo;

- Essa ação opera sobre a derivada do sinal de erro. Então, ela atua sobre a tendência de evolução deste sinal;
- Se o erro apresenta uma tendência crescente (positiva ou negativa), a ação de controle é mais intensa. Se a tendência é de decrescimento, a ação é menos intensa;
- Então, essa ação é vista como uma correção sobre a história “futura” do erro do sistema de controle, já que atua sobre sua tendência de evolução. O foco aqui é a resposta transitória.

# Ação derivativa

Sinais  $y(t)$ ,  $e(t)$  para  $C(s)=s+10$  e  $G(s)=1/(s+1)$ Sinais  $m(t)$  e para  $C(s)=s+10$  e  $G(s)=1/(s+1)$ 

# Implementação física de um controlador PID

- Se tomarmos os três termos do controlador PID, temos

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}; \quad (183)$$

e nota-se claramente que há mais zeros que polos (sistema impróprio). Este sistema não é fisicamente realizável;

- Para que o sistema possa ser implementado, precisamos introduzir um polo adicional, de forma a tornar o controlador próprio;
- A ideia, então, é introduzir um polo bem à esquerda no plano  $s$ . Assim, esse polo adicional – necessário para a construção física do controlador – influencia muito pouco em sua resposta global (dominância);

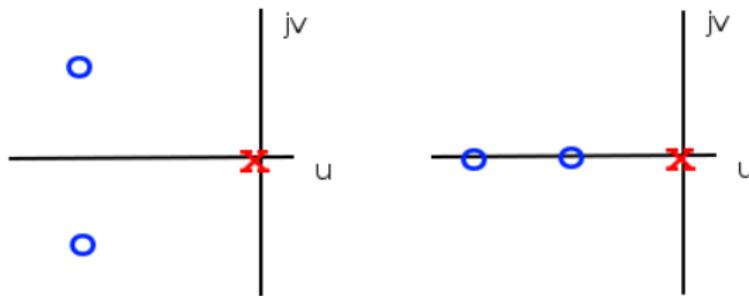
# Mapa de polos e zeros de um controlador PID

- O controlador PID,

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}; \quad (184)$$

possui um polo na origem e dois zeros;

- A posição dos dois zeros pode ser alocada conforme os requisitos de desempenho desejados. Já sabemos que introduzir um polo na origem tem a ação de zerar o erro em estado estacionário.



# Planta de segunda ordem

- Seja o controlador PID,  $G_c(s)$ , e a planta de 2<sup>a</sup> ordem

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}; \quad (185)$$

- A função de transferência de malha fechada é

$$G_{mf}(s) = \frac{\omega_n^2(K_d s^2 + K_p s + K_i)}{s^3 + (2\zeta\omega_n + K_d\omega_n^2)s^2 + \omega_n^2(1 + K_p)s + K_i\omega_n^2}; \quad (186)$$

- Note que, diferentemente do ganho  $K_p$  que vínhamos usando até este momento, podemos com o controlador PID mexer em todos os termos de um sistema de malha dominante de 2<sup>a</sup> ordem;
- Isso dará muito mais liberdade para operar sobre os requisitos de desempenho.

# Controlador PID e Lugar das Raízes

- O controlador PID possui sempre um polo na origem. O objetivo é anular o erro em estado estacionário ao degrau unitário (para sistemas do tipo 0);
- Já discutimos que os zeros atraem os polos no diagrama do Lugar das Raízes;
- Então, podemos alojar esses zeros no plano  $s$  de forma que o Lugar das Raízes do sistema em malha fechada passe pelas regiões do plano  $s$  que nos interessam;
- Infelizmente, apesar de possível, isso não é tão simples quanto parece. É preciso um pouco de vivência em Controle para tomar as melhores decisões de projeto.

# Exemplo de projeto de controlador PID

- Seja a planta

$$G(s) = \frac{1}{s+1}; \quad (187)$$

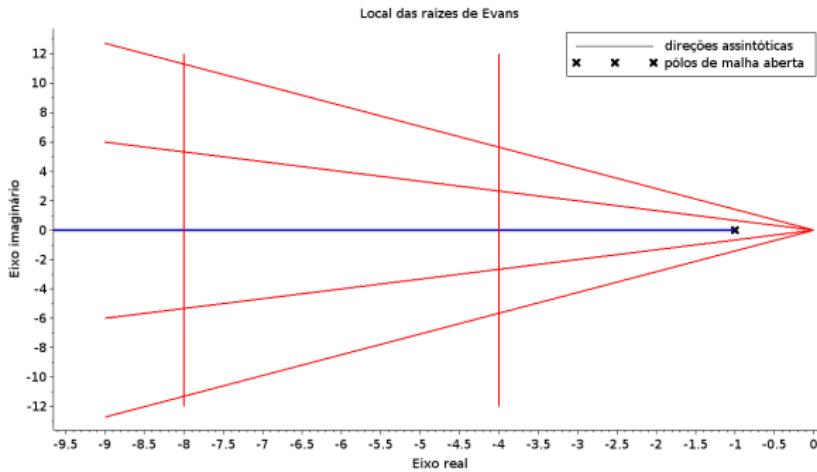
- Projetemos um controlador PID tal que os polos de malha fechada levem a um  $0,5 \leq \zeta \leq 0,75$  e tempo de acomodação entre  $0,5 \leq T_s \leq 1s$ .
- Para facilitar a exposição seguinte, considere o controlador PID na forma

$$G_{PID}(s) = \frac{K(s+a+jb)(s+a-jb)}{s} = \frac{K(s^2 + 2as + (a^2 + b^2))}{s}; \quad (188)$$

- O projeto do controlador PID consiste em se encontrar  $K$ ,  $a$  e  $b$  tais que os polos de malha fechada estejam no interior da região delimitada pelos requisitos acima.

# Exemplo de projeto de controlador PID

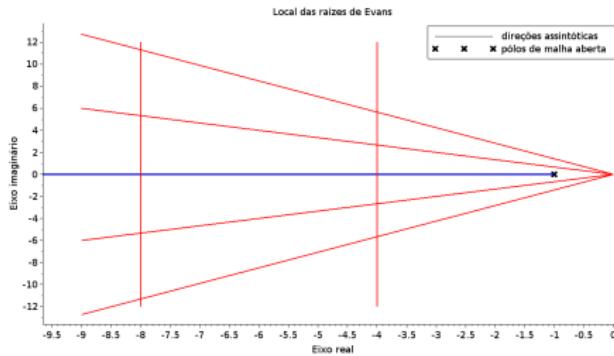
- Primeiro, vejamos o lugar das raízes do sistema apenas com um controlador proporcional;



- Note que o Lugar das Raízes não passa por aquela região para nenhum  $K_p$  real.

# Exemplo de projeto de controlador PID

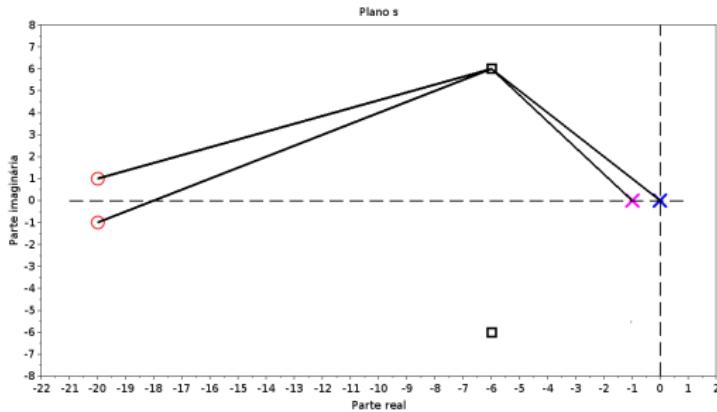
- O projeto começa escolhendo um ponto dentro da região desejada para forçar a passagem do Lugar das Raízes por este ponto. No caso em questão, podemos escolher o ponto  $q = -6 + 6j$ ;



- Agora precisamos escolher a posição dos zeros do controlador PID ( $a$  e  $b$ ).

# Exemplo de projeto de controlador PID

- Escolhamos dois zeros complexos conjugados. Achamos a posição dos zeros através da condição de ângulo tal que o Lugar das Raízes passe pelo ponto escolhido;



- Para os zeros em  $z_{1,2} = a \pm jb$ , temos  
 $\underline{q+a+jb} + \underline{q+a-jb} - \underline{q+1} - \underline{q} = -\pi$

# Exemplo de projeto de controlador PID

Como queremos  $q = -6 + j6$ , temos:

$$\underline{q+a+jb} + \underline{q+a-jb} - \underline{q+1} - \underline{q} = \pm\pi$$

$$\underline{-6+j6+a+jb} + \underline{-6+j6+a-jb} - \underline{-6+j6+1} - \underline{-6+j6} = \pm\pi$$

$$\arctg\left(\frac{6+b}{-6+a}\right) + \arctg\left(\frac{6-b}{-6+a}\right) - \arctg\left(\frac{6}{-5}\right) - \arctg\left(\frac{6}{-6}\right) = \pm\pi$$

$$\arctg\left(\frac{6+|b|}{|a|-6}\right) + \arctg\left(\frac{6-|b|}{|a|-6}\right) - \left[90 + \arctg\left(\frac{5}{6}\right)\right] - \left[90 + \arctg\left(\frac{6}{6}\right)\right] = \pm\pi$$

$$\arctg\left(\frac{6+|b|}{|a|-6}\right) + \arctg\left(\frac{6-|b|}{|a|-6}\right) - 129,8^\circ - 135^\circ = -180^\circ$$

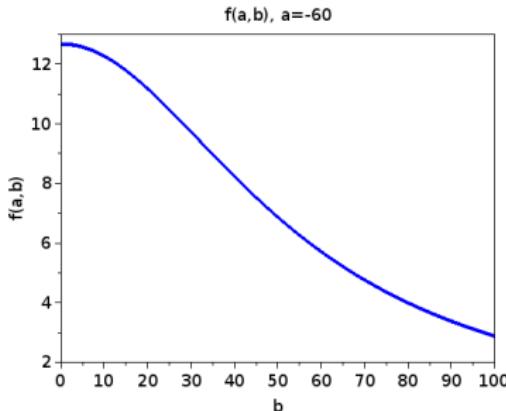
$$\arctg\left(\frac{6+|b|}{|a|-6}\right) + \arctg\left(\frac{6-|b|}{|a|-6}\right) = 84,4^\circ$$

# Exemplo de projeto de controlador PID

- Então, precisamos calcular  $a$  e  $b$  tais que

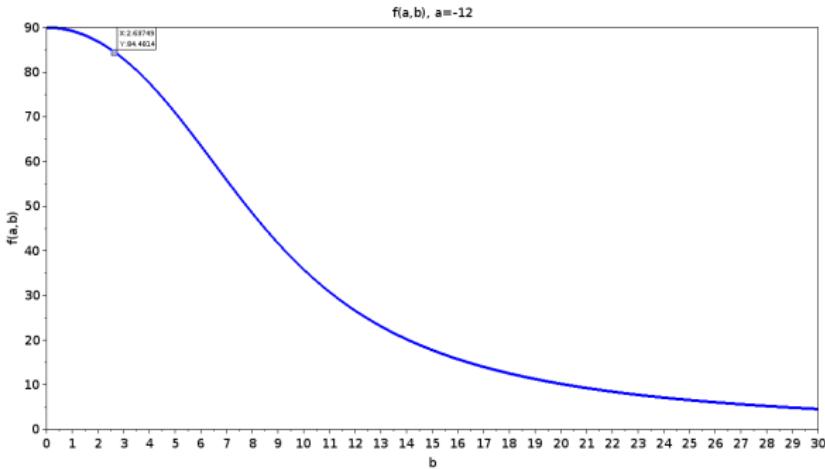
$$f(a,b) = \operatorname{arctg} \left( \frac{6 + |b|}{|a| - 6} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{6 - |b|}{|a| - 6} \right) = 84,4^\circ; \quad (189)$$

- Queremos ainda  $a$  o maior possível (dominância). Tomando  $a = -60$  e  $0 \leq |b| \leq 100$ :



# Exemplo de projeto de controlador PID

- Se tomarmos  $a = -12$  e  $0 \leq |b| \leq 30$ , temos:



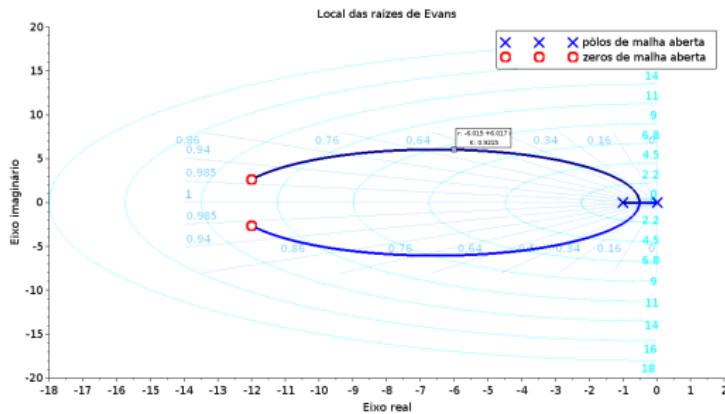
- Tomando  $|b| = 2,634$ , chegamos ao requisito de ângulo desejado. Assim, os zeros do controlador PID devem ser  $z_{1,2} = -12 \pm j2,634$

# Exemplo de projeto de controlador PID

- Por fim, dados a planta e o controlador PID

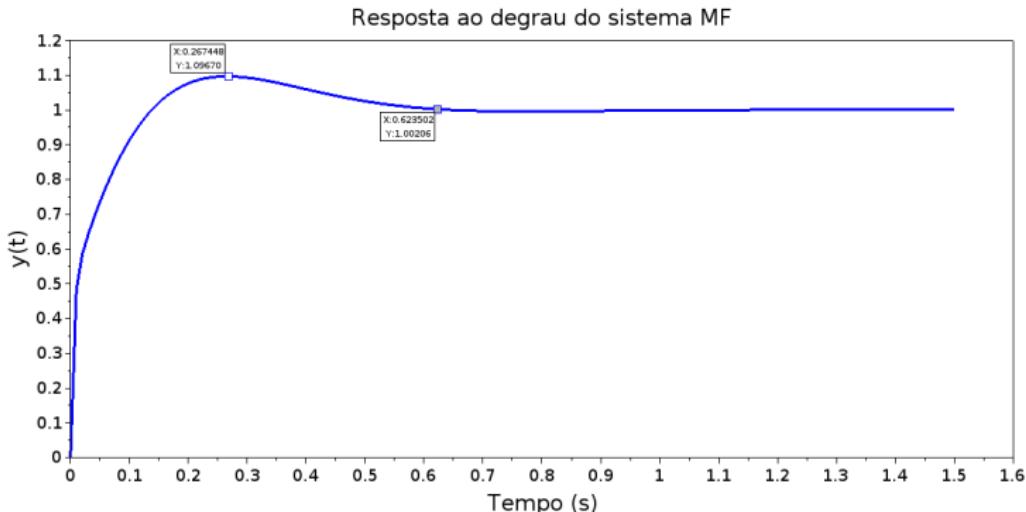
$$G(s) = \frac{1}{s+1}, \quad G_{pid}(s) = \frac{K[s^2 + 2(12)s + (12^2 + 2,634^2)]}{s(\lambda s + 1)}, \quad (190)$$

com  $\lambda = 1/120$  para implementação do controlador, temos o seguinte Lugar das Raízes em função de  $K$



# Exemplo de projeto de controlador PID

- Usando  $K = 0,92$  para o posicionamento no ponto escolhido, chegamos à resposta ao degrau do sistema MF



- Note que, apesar de satisfazer os requisitos, os zeros próximos ao ponto de alocação influenciam a resposta, sobretudo para  $t \approx 0$ .

# Controlador PID – outro exemplo

- Seja a planta

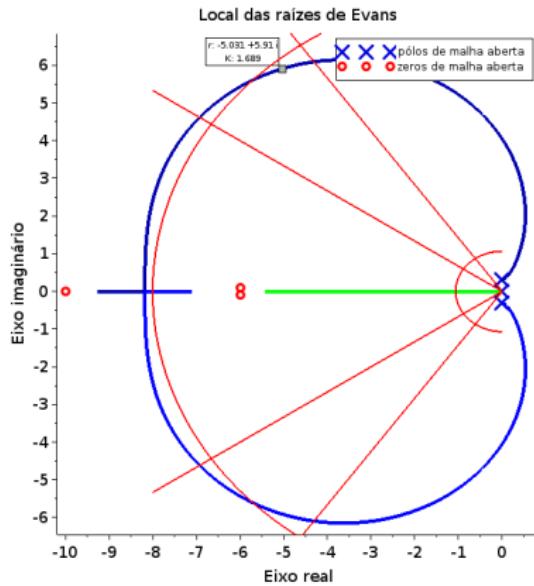
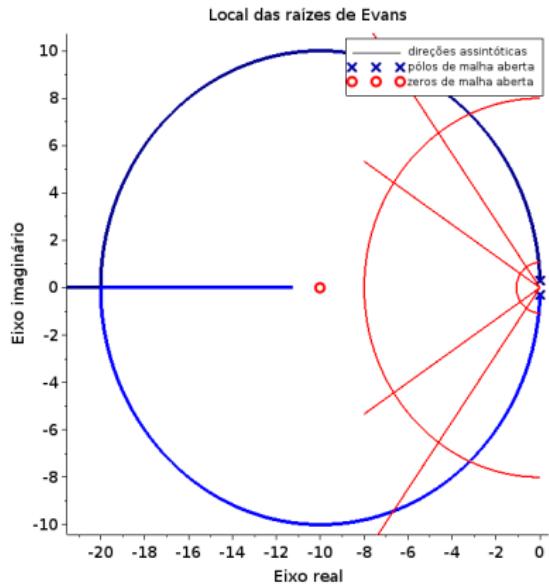
$$G(s) = \frac{s+10}{s^2 + 1}; \quad (191)$$

- Analisemos o lugar das raízes deste sistema com um controlador PID dado por

$$G_{pid}(s) = \frac{K(s^2 + 12s + 36,01)}{s(\lambda s + 1)}, \quad (192)$$

com  $\lambda = 1/120$ .

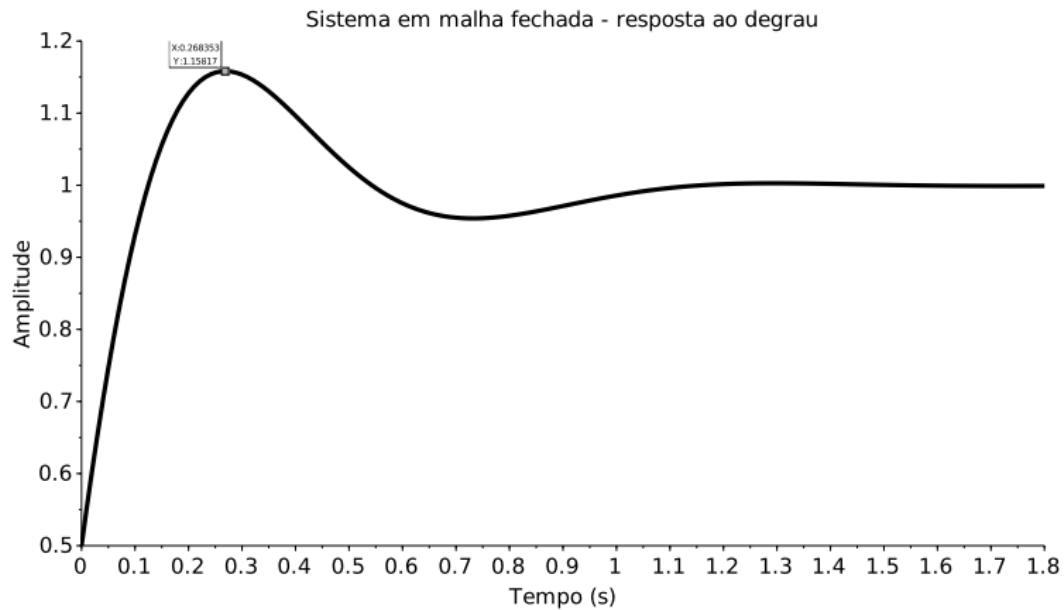
# Controlador PID – outro exemplo



# Controlador PID – outro exemplo

- Note que sem o PID, o lugar das raízes sequer passa pela região escondida para os requisitos. Com o PID, isso já ocorre;
- Entretanto, devido à não dominância dos polos de 2<sup>a</sup> ordem, isso não quer dizer que a resposta atenderá aos requisitos estabelecidos.
- De fato, se tomarmos  $K = 1,689$  no caso PID, que gera polos no interior da região de interesse, chegamos à resposta ao degrau abaixo. Note que os requisitos não foram atingidos.

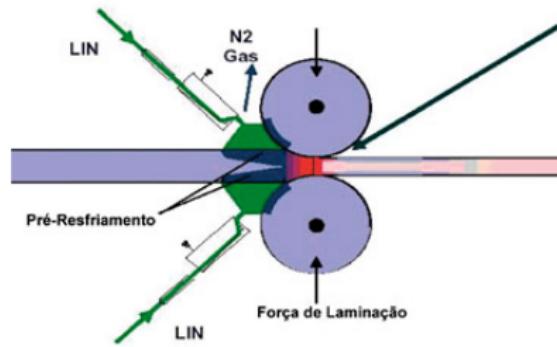
# Controlador PID – outro exemplo



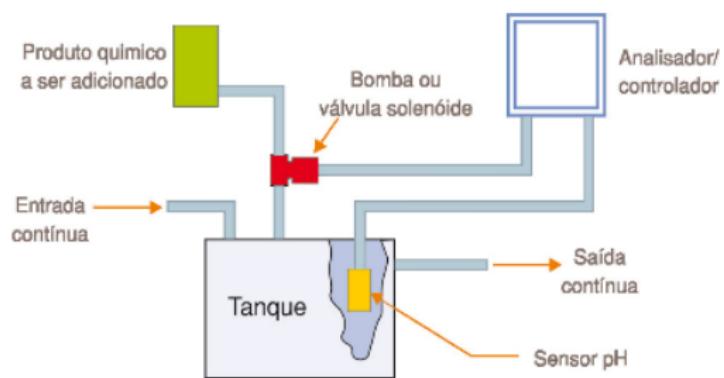
# Sistemas com atraso de tempo

- Até este momento, estudamos sistemas dinâmicos nos quais sua resposta se dá imediatamente à aplicação de uma entrada;
- Entretanto, existem inúmeros casos em que a resposta a uma entrada só pode ser observado alguns instantes após sua aplicação;
- Estes são sistemas com *atraso de tempo*, *atraso de transporte* ou *tempo morto*;
- É muito importante compreender que o atraso de tempo (tempo para obtenção de alguma resposta após a aplicação de uma entrada) **não tem nada a ver** com a resposta dinâmica do sensor (constante de tempo, banda passante, etc);
- Esse é um erro muito comum!!

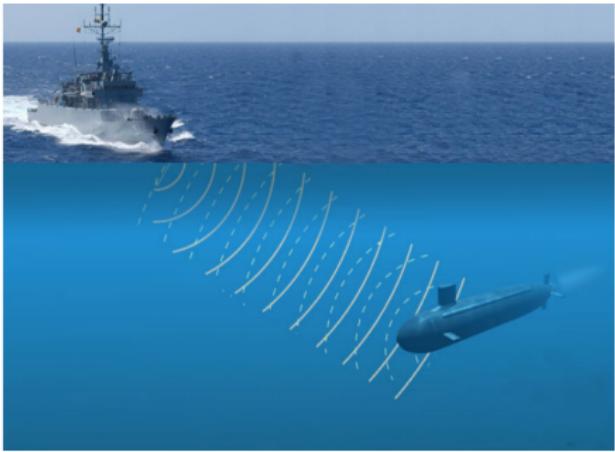
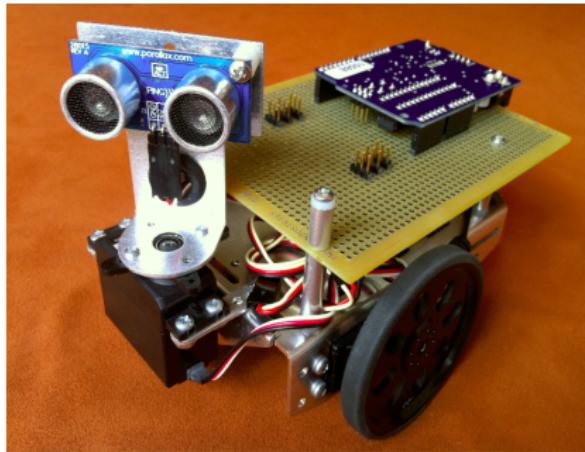
# Exemplo 1: Laminador



## Exemplo 2: Tratamento de água

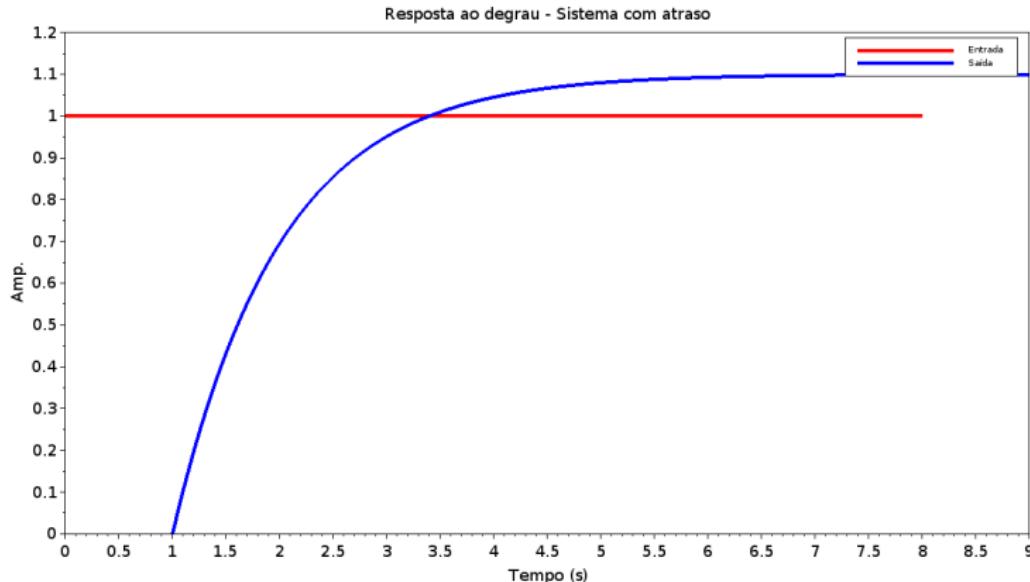


## Exemplo 3: Sonar



# Atraso de tempo nos sistemas contínuos

- Em um sistema com atraso, a medição obtida no tempo atual  $t_0$  ( $y(t = t_0)$ ) é resultante de uma entrada aplicada em um instante de tempo  $T_a$  anterior ( $u(t = t_0 - T_a)$ );



# Atraso de tempo nos sistemas contínuos

- Matematicamente, no instante atual  $t$ , temos  $u(t)$  e  $y(t-T_a)$ . Aplicando o teorema da translação real de Laplace, temos:

$$\mathcal{L}\{y(t-T_a)u(t-T_a)\} = e^{-T_a s} Y(s); \quad (193)$$

- Então, um sistema contínuo com atraso de tempo é escrito como:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)e^{-T_a s}, \quad (194)$$

onde  $G(s)$  é a função de transferência que define a física do processo e  $T_a$  é o atraso de transporte do sistema.

# Atraso de tempo – exemplo

Seja um sistema de laminação de aço. A entrada é a força  $f$  aplicada nos rolos de compressão e a saída a espessura da chapa  $e$ . Suponha que a dinâmica de laminação seja dada pela função de transferência

$$\frac{E(s)}{F(s)} = \frac{5}{s+2}. \quad (195)$$

Considere que a espessura da chapa só possa ser medida  $2s$  após a compressão que lhe deu origem. Então, o sistema de laminação, considerando este atraso tempo, é modelado como

$$\frac{E(s)}{F(s)} = \frac{5e^{-2s}}{s+2}. \quad (196)$$

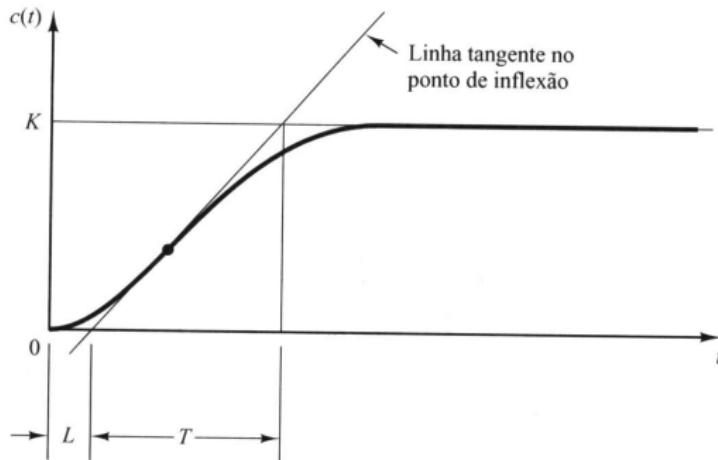
# Aproximação de sistemas de ordem superior

- Em Controle, é muito comum aproximar um sistema de dinâmica complexa por um modelo mais simples. Isso permite, em alguns casos, efetuar o projeto de controle “mais facilmente”;
- Usar do conceito de dominância é exatamente uma forma de se fazer isso: considerar que o sistema em questão – com todos os seus polos e zeros – possa ser aproximado por um sistema dominante de primeira ou segunda ordem;
- Uma outra forma de se aproximar um sistema complexo – que não possui sobressinal – é através de um modelo de primeira ordem com um atraso de tempo.

# Aproximação de sistemas de ordem superior

- Considere um sistema com resposta sobreamortecida;
- Esta resposta pode ser aproximada por um sistema de 1<sup>a</sup> ordem com um atraso de tempo como se segue:
  - (i) Tome uma reta paralela ao eixo real e que passe pelo valor de estado estacionário;
  - (ii) Tome uma reta que seja tangente ao ponto de inflexão da resposta transitória;
  - (iii) A constante de tempo aproximada  $\hat{\tau}$  será o intervalo de tempo entre a interseção da reta tangente com o eixo real e a interseção entre as retas anteriores;
  - (iv) O atraso de tempo aproximado  $\hat{L}$  é o intervalo de tempo para o cruzamento da reta tangente e o eixo de tempo.

# Aproximação de sistemas de ordem superior



E a aproximação fica

$$G(s) \approx \frac{Ke^{-Ls}}{Ts + 1}$$

# Sintonia de controladores PID

- John Ziegler (1909-1997) e Nathaniel Nichols (1914-1997) propuseram, em 1942, alguns métodos empíricos de ajuste de controladores PID baseados em testes simples executados nas plantas;
- Estes métodos de sintonia tiveram um grande impacto, pois permitia que engenheiros de variados tipos de processos pudessem ajustar o controlador PID de suas malhas, sem um conhecimento aprofundado da teoria de controle;
- Estes métodos de sintonia foram (e têm sido) aperfeiçoados ao longo do tempo. Mas neste curso, aprenderemos sua forma original.

# Sintonia de Ziegler-Nichols – primeiro método

- Suponha um ensaio em campo (resposta ao degrau no sistema) para o qual um comportamento similar ao de um sistema sobreamortecido (curva em S);
- Neste caso, podemos aplicar a aproximação de um sistema de 1<sup>a</sup> ordem com atraso de tempo;
- Considere também o controlador PID com o formato

$$G_{PID}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right), \quad (198)$$

onde  $T_i$  e  $T_d$  são, respectivamente, os tempos integral e derivativo ( $K_i = K_p/T_i$  e  $K_d = K_p T_d$ );

# Sintonia de Ziegler-Nichols – primeiro método

- Após um estudo sistemático de vários processos, Ziegler e Nichols propuseram a seguinte tabela de ajustes dos parâmetros do controlador PID com base nos coeficientes aproximados da planta ( $K$ ,  $L$  e  $T$ )

Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$T/(KL)$	$\infty$	0
PI	$0,9T/(KL)$	$L/0,3$	0
PID	$1,2T/(KL)$	$2L$	$0,5L$

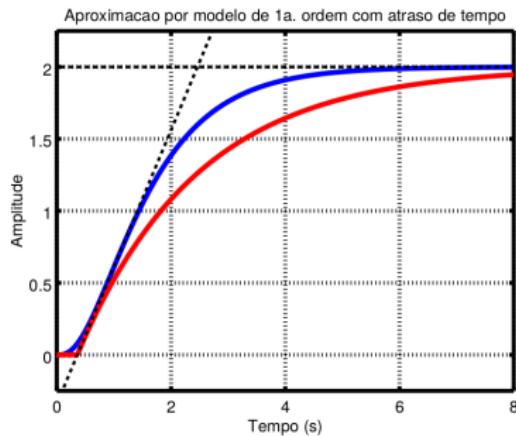
**ATENÇÃO:** em várias tabelas Z-N encontradas em livros e artigos, inclusive no Ogata, omitiu-se o ganho estático da planta ( $K$ ) no ajuste do ganho  $K_p$ . Nos parece que essa falha se originou no Ogata (talvez por um erro tipográfico ou uma falta de detalhamento) e se espalhou pela literatura. Esse termo é fundamental e sua omissão pode gerar grande degradação no desempenho da malha fechada (vide: Brito, A. "On the misunderstanding of the Ziegler-Nichols's formulae usage." *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica.* v. 6(1), pp. 142-147, 2019).

# Sintonia de Ziegler-Nichols – primeiro método (exemplo)

- Seja a planta

$$G(s) = \frac{20}{(s+1)(s+2)(s+5)}; \quad (199)$$

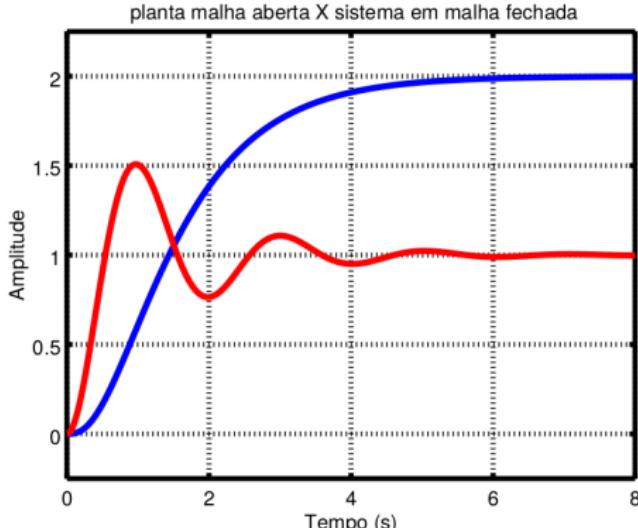
- O modelo de 1<sup>a</sup> ordem com atraso de tempo fica



com  $K = 2$ ,  $T = 2.11s$  e  $L = 0.36s$ .

# Sintonia de Ziegler-Nichols – primeiro método (exemplo)

- Com esses parâmetros, os ganhos de um controlador PID seriam  $K_p = 3,5167$ ,  $T_i = 0,72s$  e  $T_d = 0,18s$ .
- com este controlador PID, chegamos à seguinte resposta ao degrau do sistema em malha fechada:

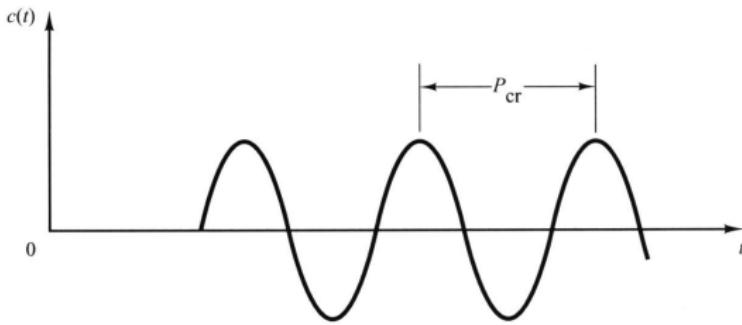


# Sintonia de Ziegler-Nichols – segundo método

- No segundo método, o sistema já é ensaiado em malha fechada com o controlador PID. Não há necessidade de teste da resposta ao degrau, nem a aproximação desta por um modelo de 1<sup>a</sup> ordem com atraso de tempo;
- Isso é muito vantajoso quando não queremos (ou não podemos) abrir a malha do controlador;
- Partimos do pressuposto de que seja possível colocar o sistema de malha fechada em oscilação sustentada para algum ganho proporcional  $K_p$ . Isso será possível em sistemas instabilizáveis por ganho.
- Se a condição anterior não é possível para nenhum valor de  $K_p$  viável, este segundo método de sintonia não pode ser utilizado.

# Sintonia de Ziegler-Nichols – segundo método

- Façamos, inicialmente,  $T_i = \infty$  e  $T_d = 0$  (anulamos a ação integral e derivativa);
- Ajustamos  $K_p$  até que a resposta do sistema em malha fechada seja uma oscilação sustentada (polos sobre o eixo imaginário). Quando isto ocorrer, encontramos o ganho proporcional crítico  $K_{cr}$ ;
- Medimos experimentalmente o período de oscilação da saída  $P_{cr}$ .



# Sintonia de Ziegler-Nichols – segundo método

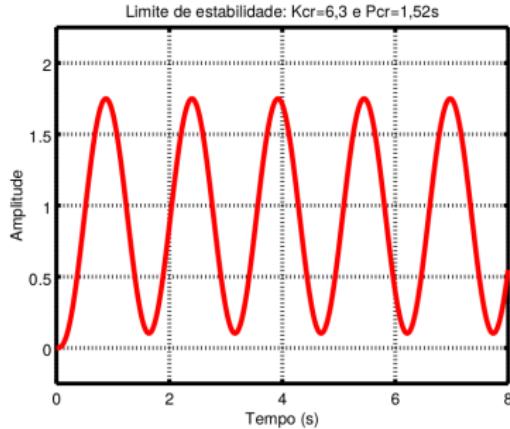
- Com base neste ensaio, os parâmetros do controlador PID são sintonizados de acordo com a tabela a seguir:

Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0,5K_{cr}$	$\infty$	0
PI	$0,45K_{cr}$	$P_{cr}/1,2$	0
PID	$0,6K_{cr}$	$P_{cr}/2$	$0,125P_{cr}$

- Ambas as técnicas de sintonia de ganhos de Ziegler-Nichols têm um problema: geram um sistema em malha fechada muito pouco amortecido;
- Entretanto, seu apelo prático teve imenso impacto em sistemas nos quais se desejava um ajuste viável do controlador sem a necessidade de um estudo de controle mais aprofundado. Essas técnicas são amplamente usadas até hoje!

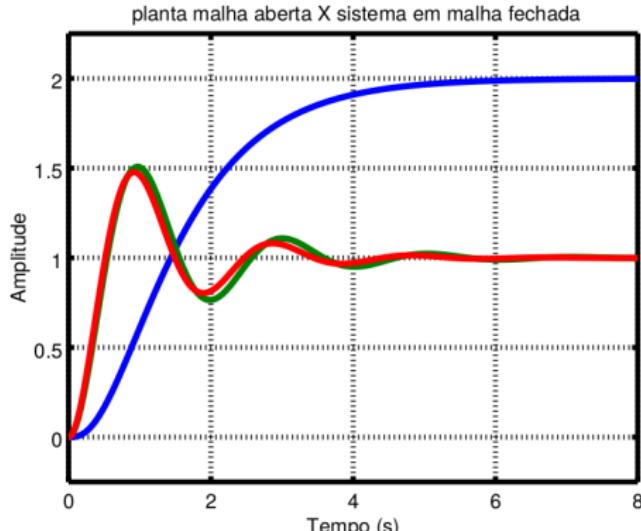
# Sintonia de Ziegler-Nichols – segundo método (exemplo)

- Tomando novamente a planta  $G(s) = 20/((s+1)(s+2)(s+5))$  é fácil constatar que ela é instabilizável por ganho;
- Aplicando-se o critério de Routh (faça!) o ganho proporcional necessário para tornar o sistema oscilatório é  $K_p = K_{cr} = 3,78$ . Esse valor leva a uma oscilação de frequência  $\omega_{cr} = 4,12 \text{ rad/s}$ , ou um período crítico  $P_{cr} = 1,52\text{s}$ .



# Sintonia de Ziegler-Nichols – primeiro método (exemplo)

- Com esses parâmetros, os ganhos de um controlador PID seriam  $K_p = 3,78$ ,  $T_i = 0,76s$  e  $T_d = 0,19s$ .
- Assim, o segundo método (curva vermelha abaixo), fica bem próximo do primeiro método (curva verde);



# Exercícios

- 1 Sejam as plantas a seguir. Para cada uma, obtenha o controlador PID que garanta erro em estado estacionário nulo, tempo de acomodação menor que 1s e  $\zeta > 0,6$ . Simule o sistema em malha fechada com entrada degrau unitário e comente os resultados.

$$G_1(s) = \frac{2}{s + 0,5}; \quad G_2(s) = \frac{3}{s^2 + 4s + 2}; \quad G_3(s) = \frac{s + 2}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

- 2 Para cada uma das plantas acima, aplique os métodos de ajuste PID de Ziegler-Nichols e comente os resultados.

# Resposta em Frequência



Imagen de ressonância magnética. Uma importante aplicação relacionada à resposta em frequência.

©Jornal of Diagnostic Imaging in Therapy, 06/11/2018.

# Regime permanente senoidal

- Até este momento, estudamos o comportamento do sistema de controle baseado em dois sinais de entrada: o degrau unitário e a rampa unitária;
- Com base nas respostas a estes sinais, conseguimos construir boa parte dos requisitos de controle – tanto no regime estacionário quanto no transitório;
- Um outro sinal de muito interesse para nossos estudos é a senóide. Ele nos dará um outro conjunto de informações a respeito do comportamento do sistema de controle;
- O estudo da resposta do sistema em regime permanente senoidal será discutido nesta aula.

# Regime permanente senoidal

- Considere um sinal senoidal  $u(t) = U_{max} \operatorname{sen}(\omega t)$  aplicado a um sistema descrito pela função de transferência do tipo

$$G(s) = \frac{p(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \cdots (s + s_n)}; \quad (200)$$

- A resposta do sistema ao sinal senoidal é dada por

$$Y(s) = G(s)U(s); \quad (201)$$

- Desejamos estudar as condições de regime permanente – quando o regime transitório já não afeta mais a resposta – para o sinal senoidal;
- Então, temos que analisar a resposta temporal de

$$Y(s) = G(s) \frac{\omega U_{max}}{s^2 + \omega^2}, \quad (202)$$

em que o último termo é a transformada de Laplace do sinal senoidal  $u(t)$ .

# Regime permanente senoidal

- Primeiro, escrevamos a expressão anterior em função de sua decomposição por frações parciais:

$$Y(s) = \frac{a}{s+j\omega} + \frac{\bar{a}}{s-j\omega} + \frac{b_1}{s+s_1} + \dots + \frac{b_n}{s+s_n}; \quad (203)$$

- Tomando a transformada inversa de Laplace para obter a resposta temporal da saída, chegamos a

$$y(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1 e^{-s_1 t} + \dots + b_n e^{-s_n t}; \quad (204)$$

- Partindo do pressuposto que o sistema é estável,  $y(t)$  é limitada quando  $t \rightarrow \infty$ . Então, no regime permanente ( $t \rightarrow \infty$ ), as exponenciais em  $e^{-s_k t}$  zeram;
- Então, a resposta permanente fica

$$y_{perm}(t) = ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t};$$

# Regime permanente senoidal

- Os coeficientes  $a$  e  $\bar{a}$  são obtidos conforme o cálculo de resíduos da expansão em frações parciais:

$$\begin{aligned} a &= G(s) \frac{\omega U_{max}}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{U_{max}G(-j\omega)}{2j}; \\ \bar{a} &= G(s) \frac{\omega U_{max}}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{U_{max}G(j\omega)}{2j}; \end{aligned} \quad (206)$$

- Mas  $G(j\omega)$  é, obviamente, uma grandeza complexa. Então ela pode ser escrita em função de seu módulo e sua fase

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\phi}, \quad (207)$$

onde  $\phi = \arctg(\mathcal{I}_m\{G(j\omega)\}/\mathcal{R}_e\{G(j\omega)\})$ , com  $\mathcal{I}_m$  e  $\mathcal{R}_e$  denotando, respectivamente, a parte imaginária e a parte real de um número complexo;

# Regime permanente senoidal

- Neste caso,

$$G(-j\omega) = |G(-j\omega)| e^{-j\phi} = |G(j\omega)| e^{-j\phi}; \quad (208)$$

- Usando a notação acima e aplicando nas expressões de  $a$  e  $\bar{a}$ , temos

$$\begin{aligned} y_{perm}(t) &= -\frac{U_{max} |G(j\omega)| e^{-j\phi} e^{-j\omega t}}{2j} + \frac{U_{max} |G(j\omega)| e^{j\phi} e^{j\omega t}}{2j} \\ &= U_{max} |G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \\ &= U_{max} |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (209)$$

- Assim, a resposta permanente senoidal do sistema é dada por:

$$y_{perm}(t) = Y_{max} \sin(\omega t + \phi). \quad (210)$$

# Regime permanente senoidal

$$y_{perm}(t) = Y_{max} \operatorname{sen}(\omega t + \phi).$$

- O resultado anterior traz consequências muito importantes para a análise de um sistema linear invariante no tempo;
- Primeiro, notamos que a resposta permanente do sistema a uma entrada senoidal também será senoidal de mesma frequência da entrada;
- A amplitude da senóide de saída dependerá da amplitude da senóide de entrada ( $U_{max}$ ) e do módulo de  $G(j\omega)$  àquela frequência  $\omega$  da senóide de entrada;
- A senóide de saída estará defasada em relação à senóide de entrada por um ângulo  $\phi$  que depende, exclusivamente, da fase de  $G(j\omega)$  para aquela frequência  $\omega$  da senóide de entrada.

# Análise da resposta em frequência

- Do exposto anteriormente, podemos conhecer o comportamento permanente senoidal de um sistema pela análise de sua saída para uma senóide de entrada com frequência específica;
- Podemos também analisar o comportamento do sistema para diferentes condições de frequência da senóide de entrada;
- Para um estudo deste tipo damos o nome de **análise da resposta em frequência**;
- Um dos primeiros a desenvolver estudos de controle envolvendo a resposta em frequência foi *Hendrik Bode*.

# Hendrik Wade Bode



Hendrik W. Bode  
Matemático  
americano  
★ 24/12/1905  
† 21/06/1982

- Bode foi um dos maiores mestres da teoria de Controle. Desenvolveu as bases da análise da resposta em frequência que, ainda hoje, fundamenta praticamente todos os ramos de controle automático;
- Trabalhou por muitos anos na Bell Labs., produzindo inúmeras ideias em eletrônica, comunicação e sistemas militares. Foi um dos precursores dos estudos de estabilidade de sistemas realimentados. Foi autor de nada menos que 25 patentes;
- Em 1938, desenvolveu o *Diagrama de Bode*, alvo do nosso estudo neste momento.

# Diagrama de Bode

- Como vimos, a resposta em frequência de um sistema depende da amplitude e fase de  $G(j\omega)$  para uma dada frequência de excitação senoidal  $\omega$ ;
- O Diagrama de Bode é, basicamente, composto por dois gráficos que expressam a variação de  $|G(j\omega)|$  e  $\angle G(j\omega)$  em função de  $\omega$ ;
- Adotando um inteligente esquema de escalas, um número imenso de informações a respeito do sistema pode ser extraído graficamente.

# Diagrama de Bode – gráfico de módulo

- Uma amplitude  $A$  pode ser expressa em uma escala de *decibéis (dB)* pelo uso da fórmula

$$A_{dB} = 20 \log_{10}(A); \quad (211)$$

- O gráfico de módulo do diagrama de Bode é a relação gráfica de  $|G(j\omega)|_{dB}$  em função da frequência  $\omega$  em uma escala logarítmica;
- Para compreender o que levou Bode a escolher expressar a amplitude do sistema em *dB*, basta que consideremos um exemplo. Suponha o sistema-série  $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ . Então,  $|G(s)| = |G_1(s)| \cdot |G_2(s)|$ ;
- Usando a escala em *dB*, temos:

$$\begin{aligned} |G(s)|_{dB} &= 20 \log_{10}(|G_1(s)| \cdot |G_2(s)|) \\ &= 20 \log_{10}(|G_1(s)|) + 20 \log_{10}(|G_2(s)|) \\ &= |G_1(s)|_{dB} + |G_2(s)|_{dB}. \end{aligned} \quad (212)$$

# Diagrama de Bode – gráfico de módulo

- Com isso, podemos realizar a análise do módulo de um sistema-série pela soma dos módulos dos subsistemas que o compõem, se uma escala  $dB$  é utilizada;
- Isso é muitíssimo interessante em um cenário em que a malha de controle pode conter muitos blocos internos;
- Ataquemos agora a questão da escala logarítmica para a frequência. Seja um sistema cuja função de transferência é

$$G(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}, \quad (213)$$

com  $n > m$ ;

- Em termos da resposta em frequência, temos

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0} \right|.$$

# Diagrama de Bode – gráfico de módulo

- Quando a frequência de excitação senoidal é muito alta ( $\omega \rightarrow \infty$ ), o módulo anterior pode ser aproximado por

$$|G(j\omega)| \approx \left| \frac{(j\omega)^m}{(j\omega)^n} \right| = \left| \frac{1}{(j\omega)^{n-m}} \right| = \left| (j\omega)^{-(n-m)} \right| = \omega^{-(n-m)}; \quad (215)$$

- Expressando o módulo em  $dB$ , temos

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20(n-m) \log_{10}(\omega); \quad (216)$$

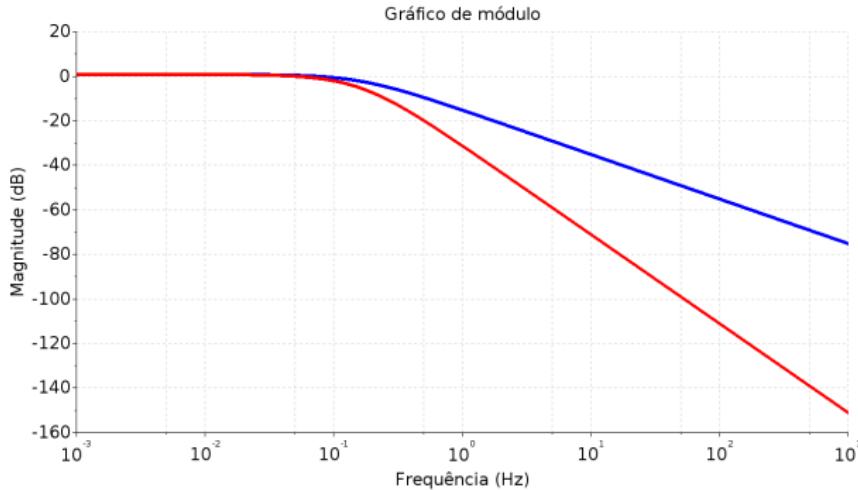
- Então, o módulo em  $dB$  varia de forma logarítmica em função da frequência  $\omega$  quando esta frequência é elevada. Assim:

$\omega$	$\omega_1$	$10\omega_1$	$100\omega_1$	$1000\omega_1$
$ G(j\omega) _{dB}$	$\gamma\lambda$	$\gamma(1+\lambda)$	$\gamma(2+\lambda)$	$\gamma(3+\lambda)$

onde  $\gamma = -20(n-m)$  e  $\lambda = \log_{10}(\omega_1)$ .

# Diagrama de Bode – gráfico de módulo

- Então, para altas frequências, o gráfico de módulo de Bode produzido conforme acima terá inclinação de  $\gamma = -20(n - m)dB$  para cada **dé-cada** (multiplicação por 10) na frequência. Ou seja, terá inclinação de  $-20(n - m) dB/dec.$



# Diagrama de Bode – gráfico de fase

- O segundo gráfico que compõe o Diagrama de Bode é o *gráfico de fase*. Ele apresenta a variação de  $\angle G(j\omega)$  em função da frequência de excitação senoidal  $\omega$ ;
- Note que, neste caso, não é necessário realizar nenhum ajuste de escala para o ângulo. Isso porque, para um sistema-série  $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ , temos:

$$\angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega)G_2(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega), \quad (217)$$

- Dado que já definimos a utilização de uma escala logarítmica para o eixo de frequência, vamos mantê-la para o gráfico de fase. Vejamos apenas o que ocorre com a fase de  $G(j\omega)$  quando a frequência é muito alta;
- Seja novamente o sistema

$$G(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}, \quad (218)$$

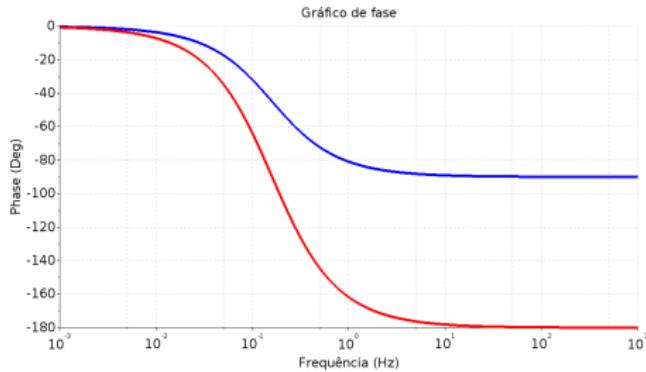
com  $n > m$ .

# Diagrama de Bode – gráfico de fase

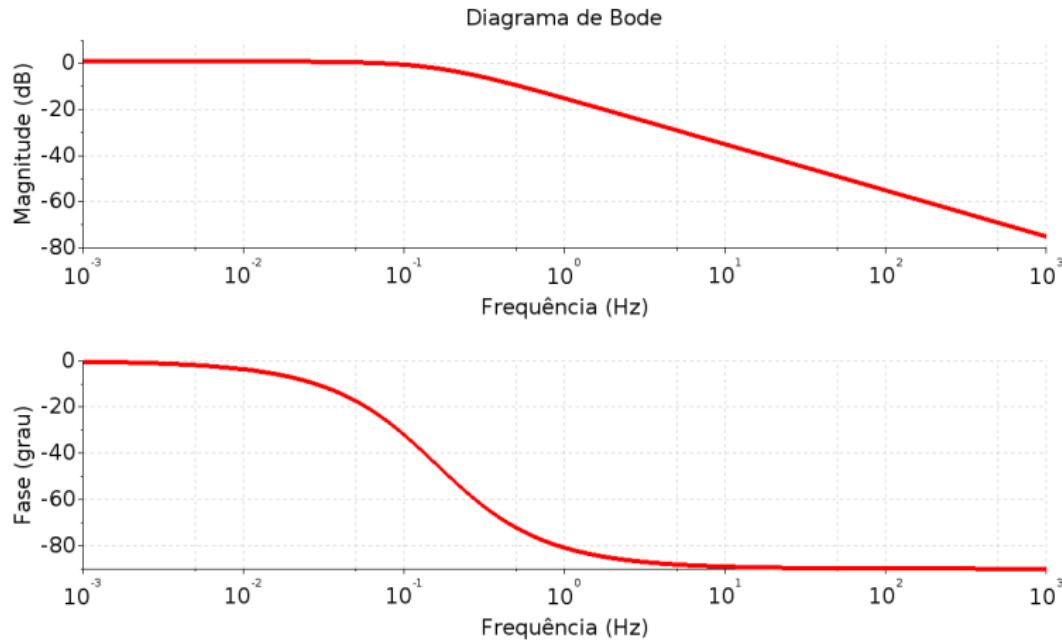
- Quando a frequência de excitação senoidal é muito alta ( $\omega \rightarrow \infty$ ), a fase pode ser aproximada por

$$\angle G(j\omega) \approx \angle \frac{(j\omega)^m}{(j\omega)^n} = \angle \frac{1}{(j\omega)^{n-m}} = \angle (j\omega)^{-(n-m)} = -90(n-m)^\circ; \quad (219)$$

- Então, para altas frequências, o gráfico de fase de Bode produzido conforme acima convergirá para um ângulo  $-90(n-m)^\circ$ .



# Diagrama de Bode – completo



# Diagrama de Bode – sistema derivador

- A partir de agora, analisaremos o diagrama de Bode para alguns sistemas de interesse;
- Comecemos com o sistema derivador expresso por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = s; \quad (220)$$

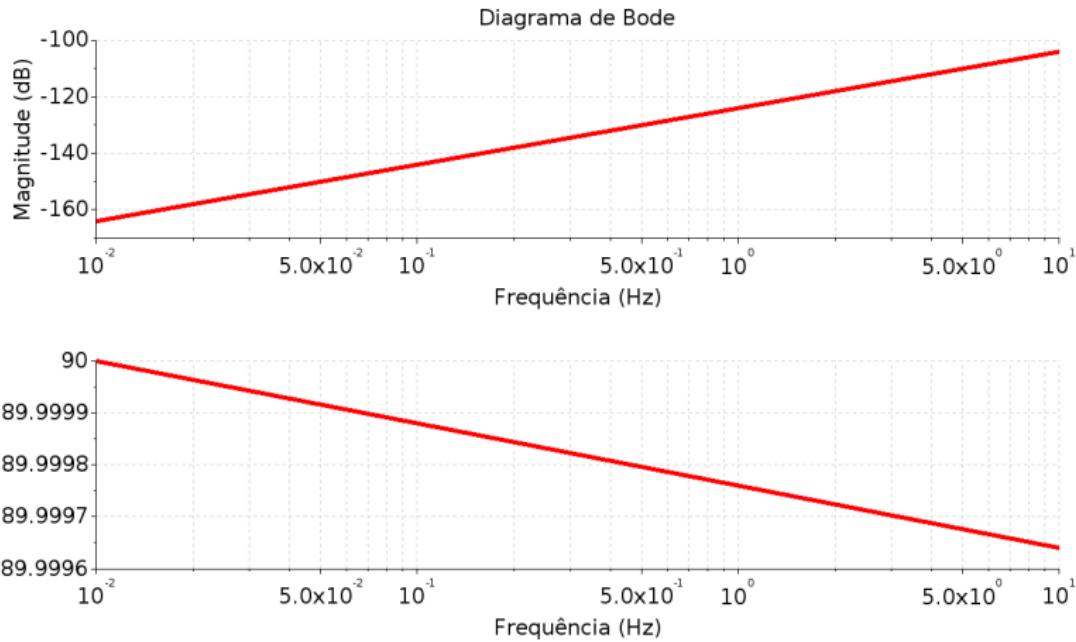
- Vemos que

$$|G(j\omega)|_{dB} = |j\omega|_{dB} = 20 \log_{10}(\omega); \quad (221)$$

- Usando a escala logarítmica decimal para o eixo de frequências, vemos que  $|G(j\omega)|_{dB}$  se expressa como uma reta com inclinação  $20 \text{ dB/dec}$ ;
- Vemos ainda que

$$\angle G(j\omega) = \angle j\omega = 90^\circ \quad \forall \omega. \quad (222)$$

# Diagrama de Bode – sistema derivador



# Diagrama de Bode – sistema integrador

- Seja o sistema integrador expresso por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}; \quad (223)$$

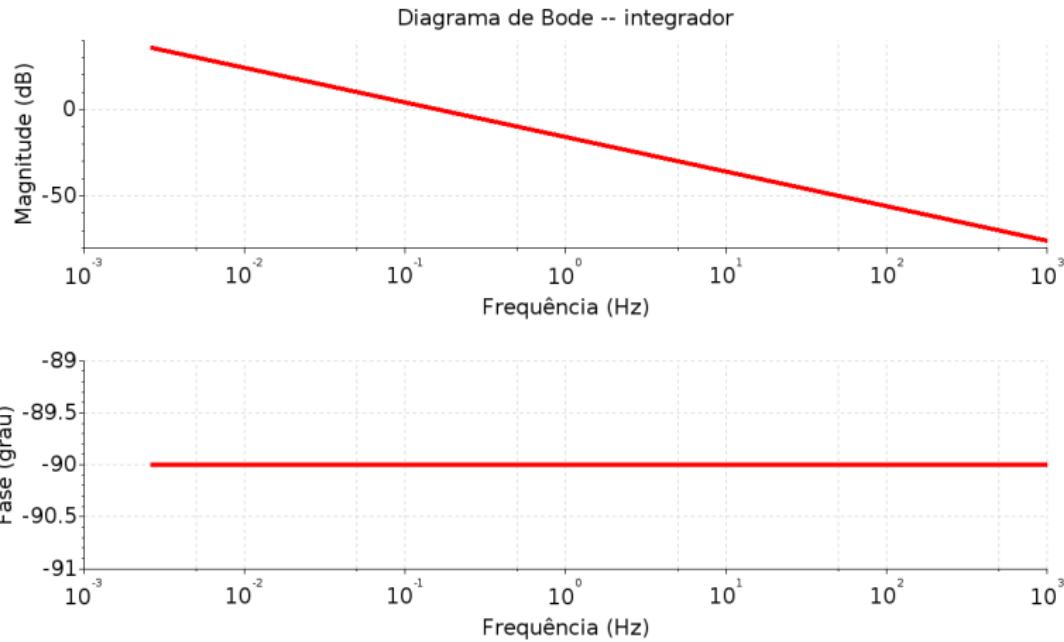
- Vemos que

$$|G(j\omega)|_{dB} = |(j\omega)^{-1}|_{dB} = -20 \log_{10}(\omega); \quad (224)$$

- Usando a escala logarítmica decimal para o eixo de frequências, vemos que  $|G(j\omega)|_{dB}$  se expressa como uma reta com inclinação  $-20 \text{ dB/dec}$ ;
- Vemos ainda que

$$\angle G(j\omega) = \angle (j\omega)^{-1} = -90^\circ \quad \forall \omega. \quad (225)$$

# Diagrama de Bode – sistema integrador



# Diagrama de Bode – sistema de 1<sup>a</sup> ordem

- Vamos estudar um caso um pouco mais complexo. Seja o sistema de primeira ordem dado por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}; \quad (226)$$

- Vejamos o que ocorre quando  $\omega \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} |G(j\omega \rightarrow 0)|_{dB} &= \left| \frac{K}{j \cdot 0 + 1} \right|_{dB} = 20 \log_{10}(K) \\ \angle G(j\omega \rightarrow 0) &= \angle \frac{K}{j \cdot 0 + 1} = 0^\circ \end{aligned}$$

- Então, o gráfico de módulo parte do ganho estático do sistema (em dB). A fase começa em  $0^\circ$ .

# Diagrama de Bode – sistema de 1<sup>a</sup> ordem

- Quando  $\omega \rightarrow \infty$ , já vimos o resultado:

$$\begin{aligned}|G(j\omega \rightarrow \infty)|_{dB} &= \left| \frac{K}{j\tau\omega + 1} \right|_{dB, \omega \rightarrow \infty} \approx -20 \log_{10}(\omega) \\ \underline{\angle G(j\omega \rightarrow \infty)} &= \underline{\angle (j\tau\omega)^{-1}} = -90^\circ\end{aligned}$$

- Então, para altas frequências, o gráfico de módulo apresenta uma inclinação de  $-20 \text{ dB/dec}$  e a fase convergirá para  $-90^\circ$ .

# Diagrama de Bode – sistema de 1<sup>a</sup> ordem

- Vejamos o que ocorre quando  $\omega = 1/\tau$ . Neste caso:

$$\begin{aligned}
 |G(j\omega)|_{dB} &= \left| \frac{K}{j\tau(1/\tau) + 1} \right|_{dB} = \left| \frac{K}{j+1} \right|_{dB} = 20 \log_{10} \left( \frac{K}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= 20 [\log_{10}(K) - \log_{10}(\sqrt{2})] \\
 &\approx 20 \log_{10}(K) - 3 = K_{dB} - 3dB
 \end{aligned} \tag{227}$$

- Para a fase, temos:

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{K}{j\tau(1/\tau)+1} = \angle \frac{K}{j+1} = -45^\circ; \tag{228}$$

- Então, quando  $\omega = 1/\tau$ , o módulo de  $G(j\omega)$  cai aproximadamente  $3dB$  ( $0,707$ ) de seu ganho quando  $\omega = 0$  ( $K_{dB}$ ). A fase decairá  $45^\circ$  (metade de sua excursão máxima que será de  $-90^\circ$ );

# Diagrama de Bode – sistema de 1<sup>a</sup> ordem

- Por fim, analisemos o que ocorre quando  $\omega$  está uma década abaixo e acima da frequência anterior ( $\omega = 1/10\tau$  e  $\omega = 10/\tau$ );
- Os cálculos não serão apresentados, mas seguem à mesma sequência acima. Pode-se mostrar que:

$\omega$	$ G(j\omega) _{dB}$	$\angle G(j\omega)$
$1/10\tau$	$\approx K_{dB}$	$\approx -5,8^\circ$
$10/\tau$	$\approx K_{dB} - 20dB$	$\approx -85,3^\circ$

- Então, a frequência  $\omega = 1/\tau$  demarca a separação entre duas regiões da resposta em frequência de  $G(j\omega)$ :
  - I) a região na qual a resposta é muito similar àquela obtida para  $\omega = 0$  ( $\omega < 1/\tau$ ) – a resposta de  $G(s)$  é, basicamente, a senóide de entrada multiplicada por um ganho;
  - II) a região na qual a resposta é muito similar àquela obtida para  $\omega \rightarrow \infty$  ( $\omega > 1/\tau$ );

# Diagrama de Bode – sistema de 1<sup>a</sup> ordem

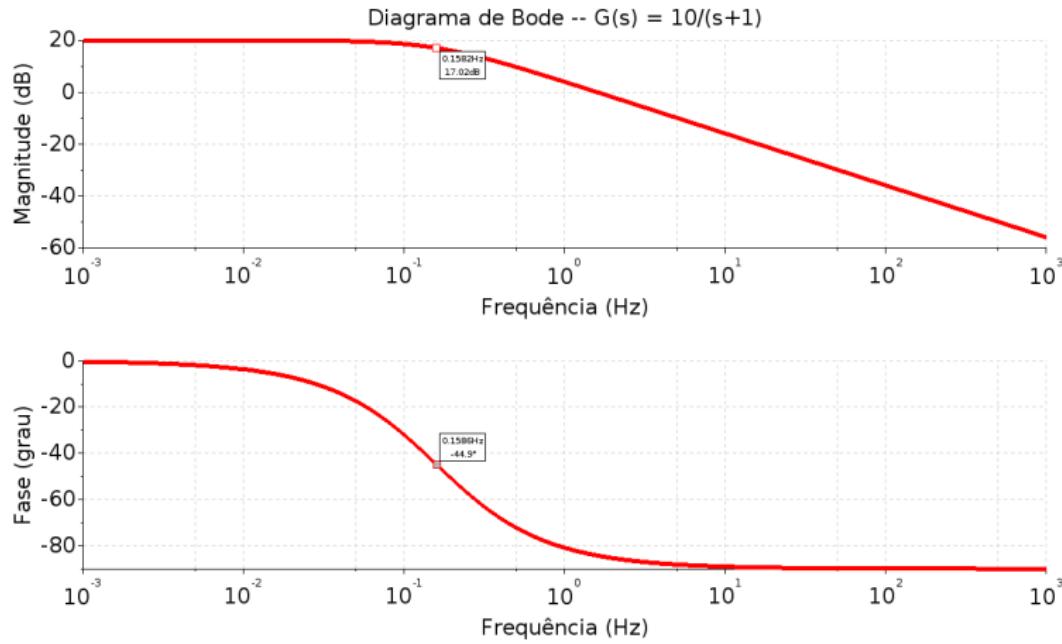
Dada esta característica, a frequência  $\omega = 1/\tau$  recebe o nome especial de **frequência de corte** ou **banda passante**.

## Resumo

$\omega (rad/s)$	$ G(j\omega) _{dB}$	$\angle G(j\omega)$
0	$K_{dB}$	$0^\circ$
$1/10\tau$	$\approx K_{dB}$	$\approx -5,8^\circ$
$1/\tau$	$\approx K_{dB} - 3dB$	$-45^\circ$
$10/\tau$	$\approx K_{dB} - 20dB$	$\approx -85,3^\circ$
$> 10/\tau$	cai $20dB/dec$	$-90^\circ$

Em vermelho, os valores para a frequência de corte.

# Diagrama de Bode – sistema de 1<sup>a</sup> ordem



# Diagrama de Bode – sistema de 2<sup>a</sup> ordem

- Seja agora o sistema de 2<sup>a</sup> ordem subamortecido dado por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}; \quad (229)$$

- Quando  $\omega \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} |G(j\omega \rightarrow 0)|_{dB} &= \left| \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} \right|_{dB} = 0 \text{ dB} \\ \angle G(j\omega \rightarrow 0) &= \angle \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = 0^\circ \end{aligned}$$

- Então, o gráfico de módulo parte do ganho estático do sistema (em dB). A fase começa em  $0^\circ$ .

# Diagrama de Bode – sistema de 2<sup>a</sup> ordem

- Quando  $\omega \rightarrow \infty$ , temos:

$$\begin{aligned}|G(j\omega \rightarrow \infty)|_{dB} &\approx \left| \frac{1}{(j\omega)^2} \right|_{dB, \omega \rightarrow \infty} \approx -40 \log_{10}(\omega) \\ \angle G(j\omega \rightarrow \infty) &= \angle (j\tau\omega)^{-2} = \angle -(τ\omega)^{-2} = -180^\circ\end{aligned}$$

- Então, para altas frequências, o gráfico de módulo apresenta uma inclinação de  $-40 \text{ dB/dec}$  e a fase convergirá para  $-180^\circ$ .

# Diagrama de Bode – sistema de 2<sup>a</sup> ordem

- Quando  $\omega = \omega_n$  (frequência natural do sistema), temos:

$$|G(j\omega)|_{dB} = \left| \frac{\omega_n^2}{(j\omega_n)^2 + 2j\zeta\omega_n^2 + \omega_n^2} \right|_{dB} = \left| \frac{1}{2\zeta} \right|_{dB} \quad (230)$$

- Então, quando  $\omega = \omega_n$ , o módulo de  $G(j\omega)$  dependerá do valor de  $\zeta$ . Note que ele será maior que o módulo quando  $\omega = 0$  se  $\zeta < 0,5$ ;
- Note que se  $\omega = \omega_n$  e  $\zeta = \sqrt{2}/2 \approx 0,707$ ,  $|G(j\omega)|_{dB} = -3dB$ . Ou seja, nestas condições a frequência de corte é igual à frequência natural não amortecida;
- Já para fase temos

$$\underline{\angle G(j\omega)} = \underline{\angle \frac{1}{2j\zeta}} = -90^\circ, \quad (231)$$

independentemente de  $\zeta$ .

# Diagrama de Bode – sistema de 2<sup>a</sup> ordem

- Vimos então que a amplitude da senóide de saída pode ser maior que a amplitude de entrada quando o sistema de segunda ordem é subamortecido e a frequência da senóide de entrada é igual à frequência natural do sistema;
- Vamos buscar então o valor da frequência da senóide de entrada para o qual a amplitude da senóide de saída é máxima;
- Assim, desejamos achar  $\omega$  tal que

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} \right| \quad (232)$$

seja máximo;

- Bem, temos que

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}}.$$

# Diagrama de Bode – sistema de 2<sup>a</sup> ordem

- Então,  $|G(j\omega)|$  é máximo quando  $f(\omega) = (\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2$  é mínimo.  
Mas isso é conseguido fazendo-se  $df(\omega)/d\omega = 0$ ;
- Mas pode-se mostrar que (exercício!!!!)

$$\frac{df(\omega)}{d\omega} = 4\omega[(2\zeta^2 - 1)\omega_n^2 + \omega^2]; \quad (234)$$

- Então  $|G(j\omega)|$  é máximo se  $\omega = \omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2}$ . Assim:

$$|G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}; \quad (235)$$

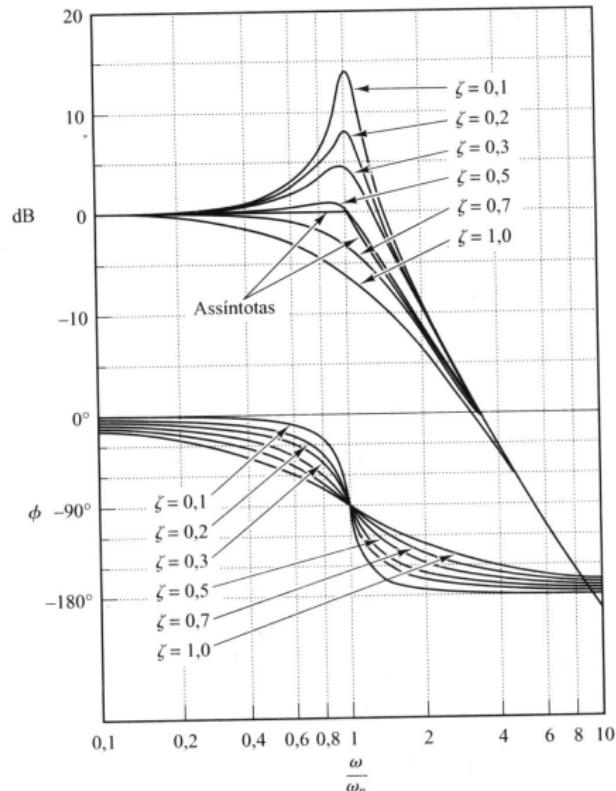
- Se  $\zeta < \sqrt{2}/2 \approx 0,707$ ,  $|G(j\omega_r)| > 1$ . Então, para um sistema subamortecido com  $\zeta < 0,707$ , a amplitude da senóide de saída será maior que aquela da senóide de entrada e  $\omega_r$  recebe o nome de **frequência de ressonância**.

# Diagrama de Bode – sistema de 2<sup>a</sup> ordem

Resumo (para sistemas subamortecidos sem ganho estático)

$\omega$ (rad/s)	$ G(j\omega) _{dB}$	$\angle G(j\omega)$
0	0 dB	0°
$\omega_n$	$ ^{1/2}\zeta _{dB}$	-90°
$\omega_r$	máximo	$f(\zeta)$
$>> \omega_n$	caia $40 dB/dec$	-180°

# Diagrama de Bode – sistema de 2<sup>a</sup> ordem



# Diagrama de Bode – zeros

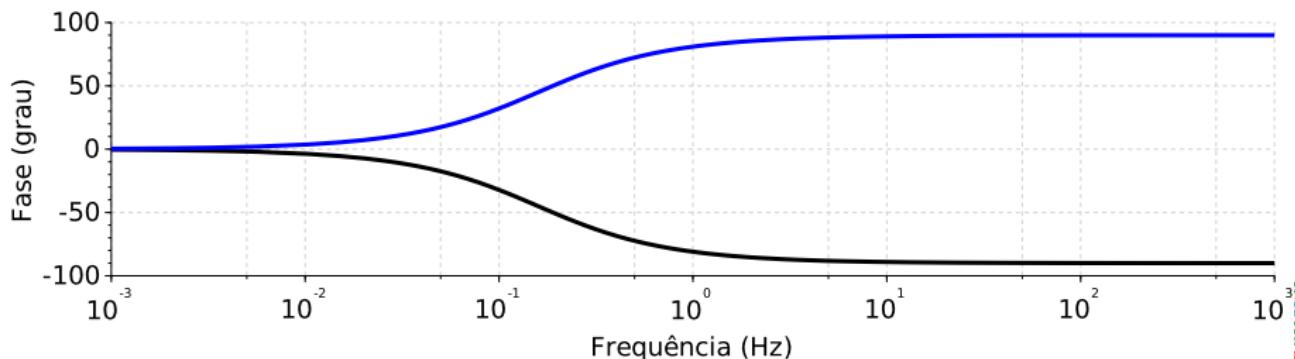
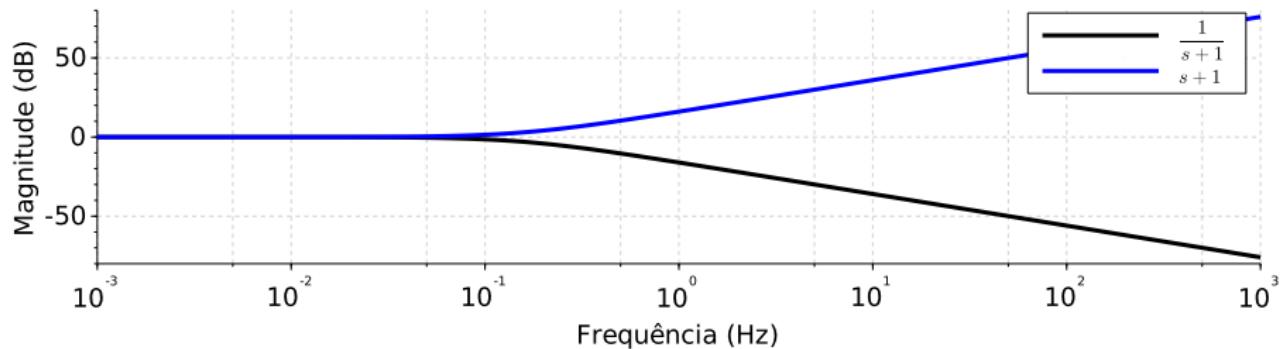
- Ao estudarmos o sistema de primeira e segunda ordem, analisamos, respectivamente, a existência de um ou dois polos na função de transferência;
- Como fica o diagrama de Bode quando a função de transferência tem zeros?
- A lógica é a mesma já traçada até aqui. Para chegarmos a uma conclusão geral, faremos rapidamente para um sistema não causal com um zero (só pra facilitar a conta!!!)

$$G(s) = \tau s + 1 \Rightarrow G(j\omega) = j\tau\omega + 1 \quad (236)$$

# Diagrama de Bode – zeros

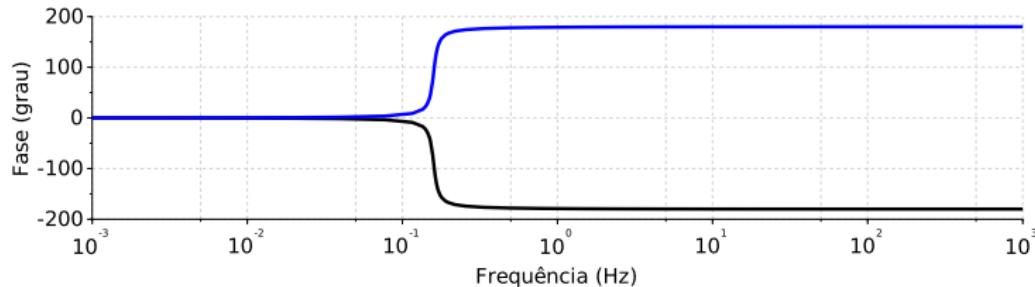
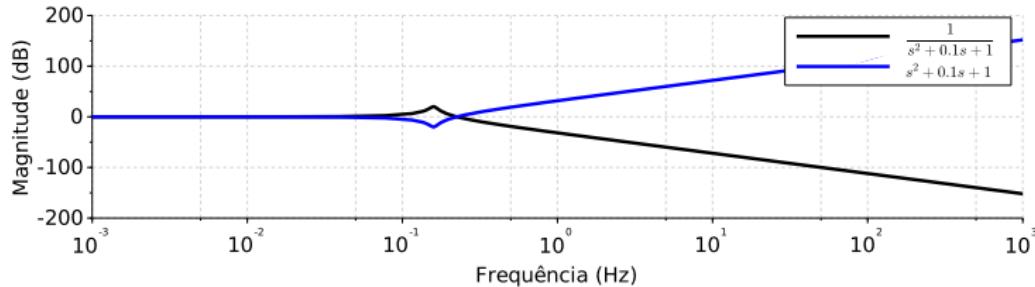
- Quando  $\omega \ll 1/\tau$ ,  $G(j\omega) \approx 1$ . Então  $|G(j\omega)|_{dB} \approx 0dB$  e  $\angle G(j\omega) = 0^\circ$ ;
- Quando  $\omega \gg 1/\tau$ ,  $G(j\omega) \approx j\omega$ . Então  $|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}(\omega)$  e  $\angle G(j\omega) = 90^\circ$ ;
- Quando  $\omega = 1/\tau$ ,  $G(j\omega) = j + 1$ . Então  $|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}(\sqrt{2}) = 3dB$  e  $\angle G(j\omega) = 45^\circ$ ;
- Conclusão: para frequências muito abaixo da frequência de corte ( $\omega = 1/\tau$ ), o diagrama de Bode têm módulo e fase nulas. Na frequência de corte, o módulo cresce 3dB e a fase é 45°. Para frequências muito acima dessa, a fase tende para +90°, enquanto o módulo cresce na taxa de 20 dB/dec;
- Então o diagrama de Bode de um zero é simétrico ao do polo em relação ao eixo das frequências.

# Diagrama de Bode – zeros



# Diagrama de Bode – zeros

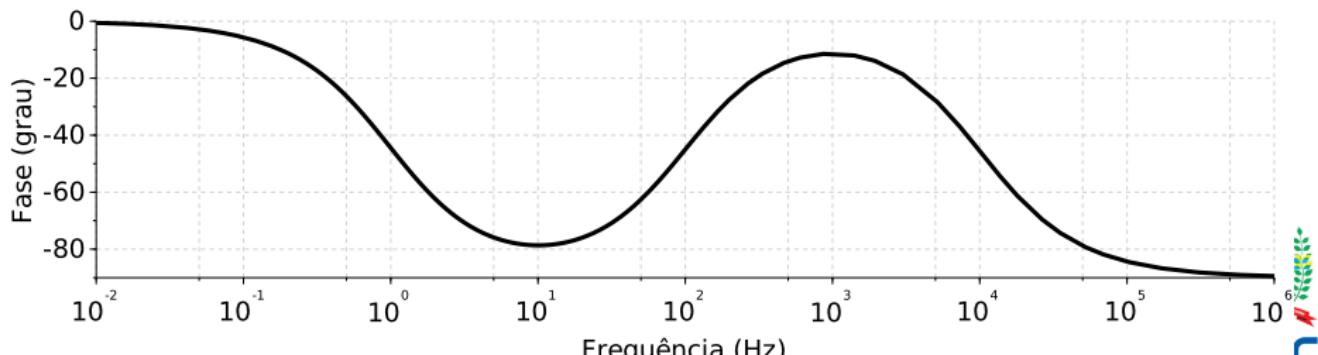
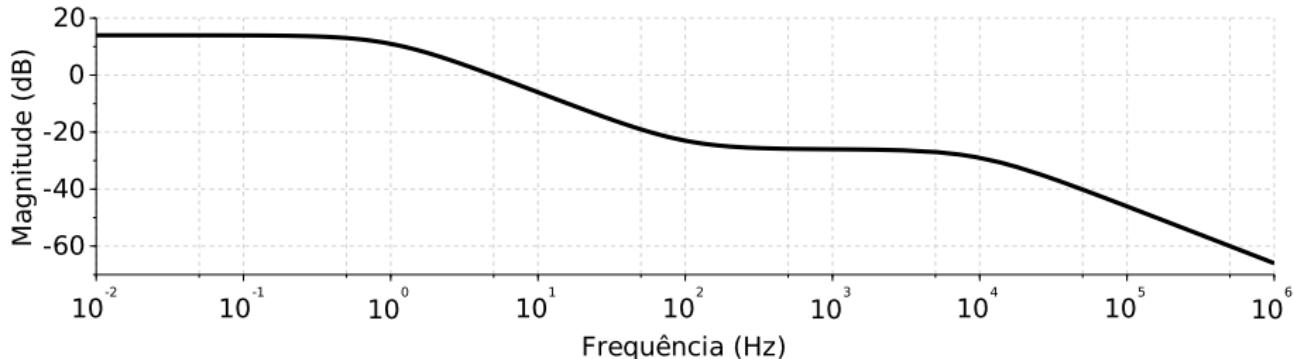
- Quando temos dois zeros, o mesmo raciocínio se aplica;
- Se houver dois zeros tais que  $\zeta_z < 1$ , então o diagrama de Bode será simétrico ao eixo das frequências;



# Estimando a função de transferência via resposta em frequência

- Partindo do fato que já possuímos a resposta em frequência de um sistema, podemos estimar a sua função de transferência;
- Fazemos isso analisando-se o diagrama de Bode e coletando as seguintes informações:
  - i) Ganho estático:  $|G(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0}$
  - ii) Relação entre número de polos e de zeros:  $|G(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty}$  ou  $\angle G(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty}$
  - iii) Valor dos polos e zeros: análise de pontos de crescimento ou decrescimento dos gráficos de módulo e fase, ressonâncias, etc.

# Estimando a função de transferência via resposta em frequência - exemplo

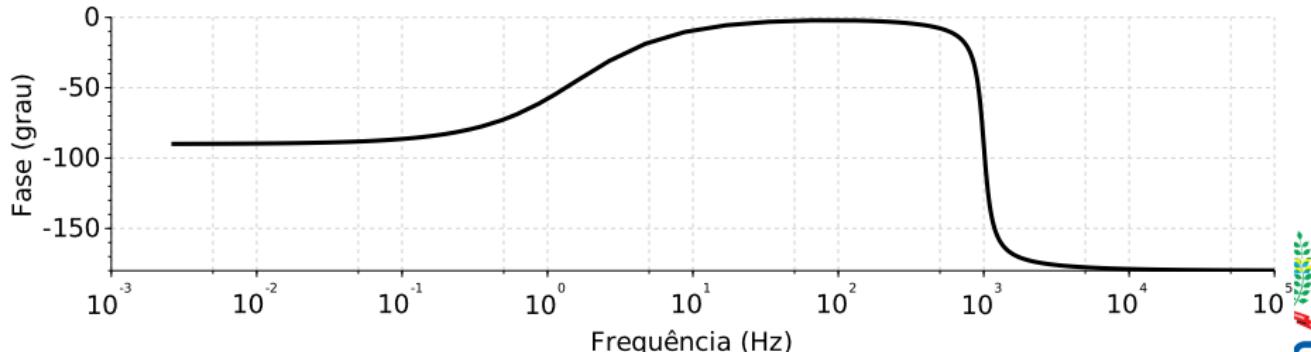
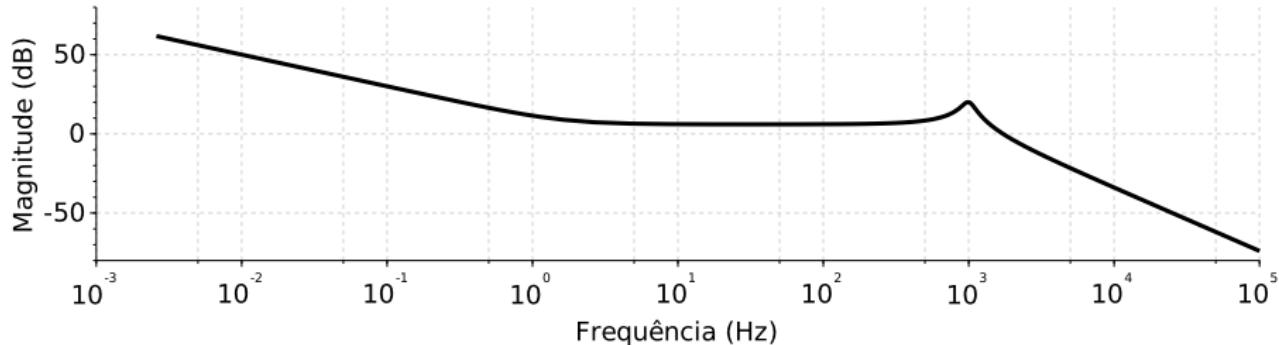


# Estimando a função de transferência via resposta em frequência - exemplo

- No caso anterior, a função de transferência real é:

$$H(s) = \frac{5\left(\frac{s}{200\pi} + 1\right)}{\left(\frac{s}{2\pi} + 1\right)\left(\frac{s}{20.000\pi} + 1\right)} \quad (237)$$

# Estimando a função de transferência via resposta em frequência - exercício



# Diagrama de Bode – atraso de tempo

- Vejamos como se comporta o atraso de tempo no que diz respeito à sua resposta em frequência;
- Já vimos que se o sistema possui um atraso de tempo  $T_a$ , a função de transferência associada a este atraso é dada por:

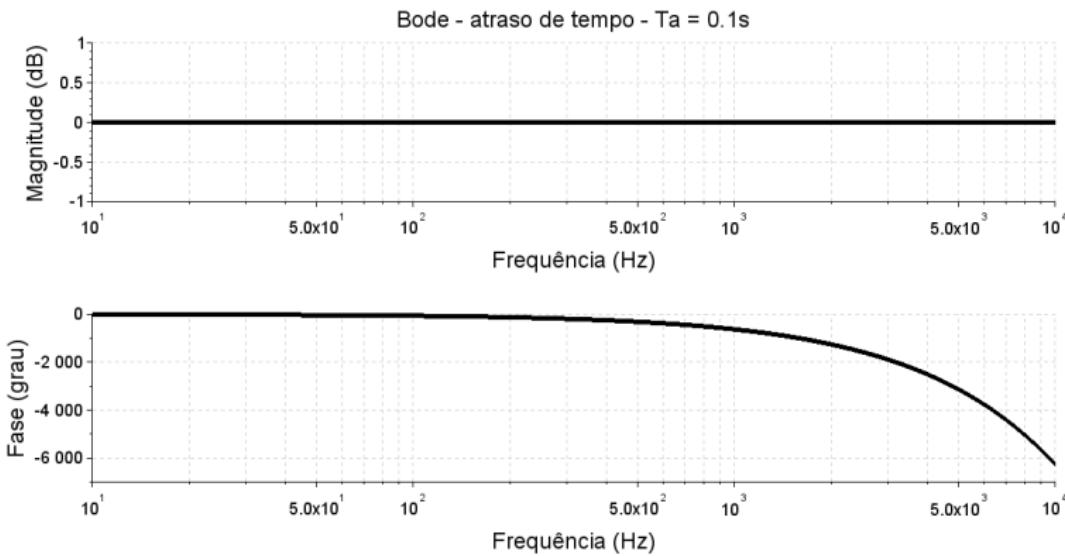
$$Y_{\text{atraso}}(s) = e^{-T_a s}; \quad (238)$$

- Então,

$$Y_{\text{atraso}}(j\omega) = e^{-jT_a \omega} = 1 \cdot \cancel{e^{-jT_a \omega}}; \quad (239)$$

- Assim, a resposta em frequência do atraso se caracteriza por uma amplitude constante, mas a sua fase varia linearmente com a frequência.

# Diagrama de Bode – atraso de tempo



# Principais informações extraídas do Diag. de Bode

- O Diagrama de Bode é útil pois fornece um conjunto muito grande de informações a respeito do sistema físico;
- Entre essas informações, destacam-se a banda passante, ressonância, margens de estabilidade, etc.;
- Veremos que algumas dessas informações só podem ser obtidas através da análise da resposta em frequência;

# Banda Passante

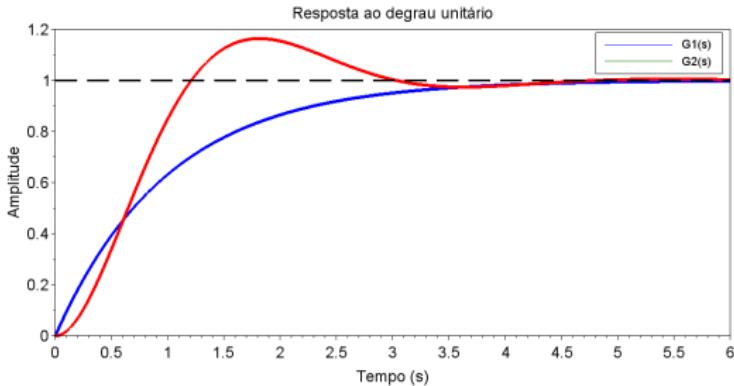
- Já definimos a *frequência de corte ou banda passante* como a frequência para a qual a amplitude do sistema cai 3 dB em relação à amplitude com frequência nula ( $s \rightarrow 0$ );
- Note que até esta frequência, sua amplitude cai muito pouco. A partir dela, a amplitude cai muito mais rapidamente com a frequência;
- Então, a banda passante dá uma ideia da rapidez do sistema;
- Quanto maior seu valor, menor a influência de  $|G(j\omega)|$  sobre a amplitude de senóides de entrada até esta frequência.

# Banda Passante – exemplo

- Considere dois sistemas lineares:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad G_2(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 4} \quad (240)$$

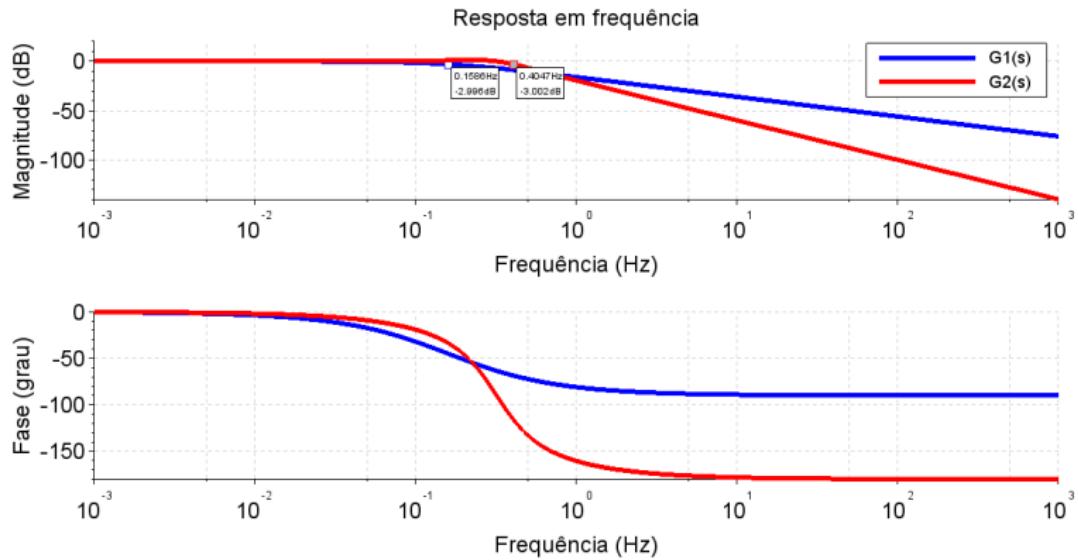
- Qual desses sistemas é mais rápido? Bom, poderíamos ver isso pela sua resposta ao degrau unitário...



- Note que  $G_2(s)$  passa pelo valor final primeiro e, portanto é mais rápido que  $G_1(s)$ . Mas de onde vem essa rapidez?

# Banda Passante – exemplo

- Analisemos o diagrama de Bode dos dois sistemas:



- A frequência de corte de  $G_1(s)$  é 0,15 Hz, enquanto a de  $G_2(s)$  é 0,42 Hz;

# Banda Passante – exemplo

- Então,  $G_2$  permite que senóides até  $0,42 \text{ Hz}$  seja reproduzidas na saída com pouca atenuação. Mas esse valor é quase três vezes maior que o de  $G_1$ ;
- Por isso,  $G_2$  é quase três vezes mais rápido que  $G_1$ ;
- Note que, apesar de perceber que  $G_2$  é mais rápido que  $G_1$  via resposta temporal, só podemos compreender e quantificar apropriadamente este efeito via resposta em frequência.

# Ressonância

- O nome **ressonância** aparece em inúmeros contextos da engenharia;
- O *conceito geral* de ressonância infere que “ela é a condição para a qual o sistema apresenta um comportamento severo, que potencialmente pode causar danos”. Esta definição é, naturalmente, incompleta e incorreta;
- O conceito de ressonância é importantíssimo e sua compreensão passa pela análise da resposta em frequência de um sistema físico;
- Vamos destrinchar este conceito.

# Ressonância

## Definição (Ressonância)

Considere a resposta permanente de um sistema físico a uma entrada senoidal do tipo

$$u(t) = A \operatorname{sen}(\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad A = \text{cte.} \quad (241)$$

O sistema é dito possuir uma condição de **ressonância** se a característica de módulo de sua resposta em frequência possuir um extremo para alguma frequência finita não-nula  $\omega$ .

## Definição (Frequência de ressonância)

A **frequência de ressonância** do sistema é o valor de frequência finita  $\omega$  para uma excitação senoidal, para a qual a resposta em frequência do sistema apresente uma condição de ressonância.

# Ressonância – características

- Nem todo sistema físico possui ressonância;
- Por exemplo: o sistema de 1<sup>a</sup> ordem não apresenta ressonância, pois sua resposta em frequência não apresenta um extremo para um frequência não-nula;
- Já o sistema de segunda ordem só apresenta uma condição de ressonância se  $\zeta < 0,707$ ;
- Um sistema de 2<sup>a</sup> ordem não amortecido possui amplitude senoidal de saída infinita quando excitado na frequência de ressonância;
- Um sistema físico pode possuir mais de uma condição de ressonância;

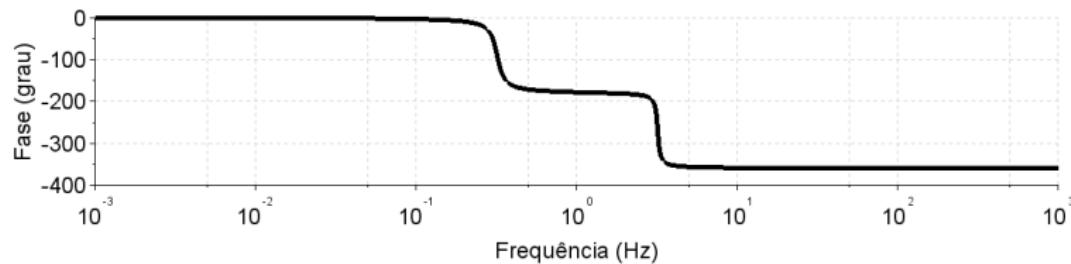
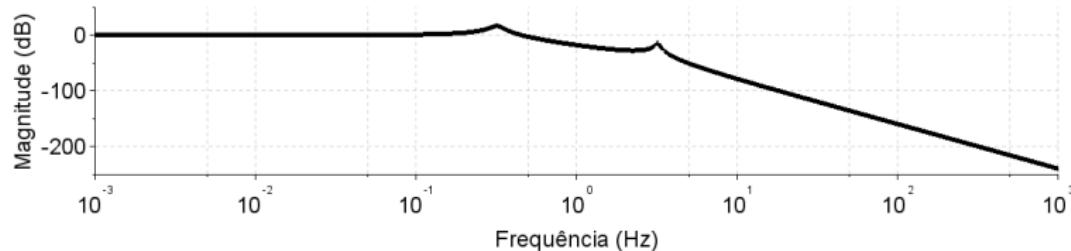
# Ressonância – mitos

- A ressonância nem sempre é indesejada, como muito comumente apresentado em alguns textos;
- Exemplos bem simples disso são os sintonizadores de rádio, que usam o fenômeno de ressonância em um circuito LC para seleção da frequência de sintonia;
- Já os equipamentos de ressonância magnética nuclear usam o mesmo fenômeno para produção de imagens seletivas de tecidos;
- Mas é óbvio que em alguns casos – sobretudo de sistemas mecânicos – a excitação na frequência de ressonância pode ser indesejada, por estar associadas a danos estruturais.

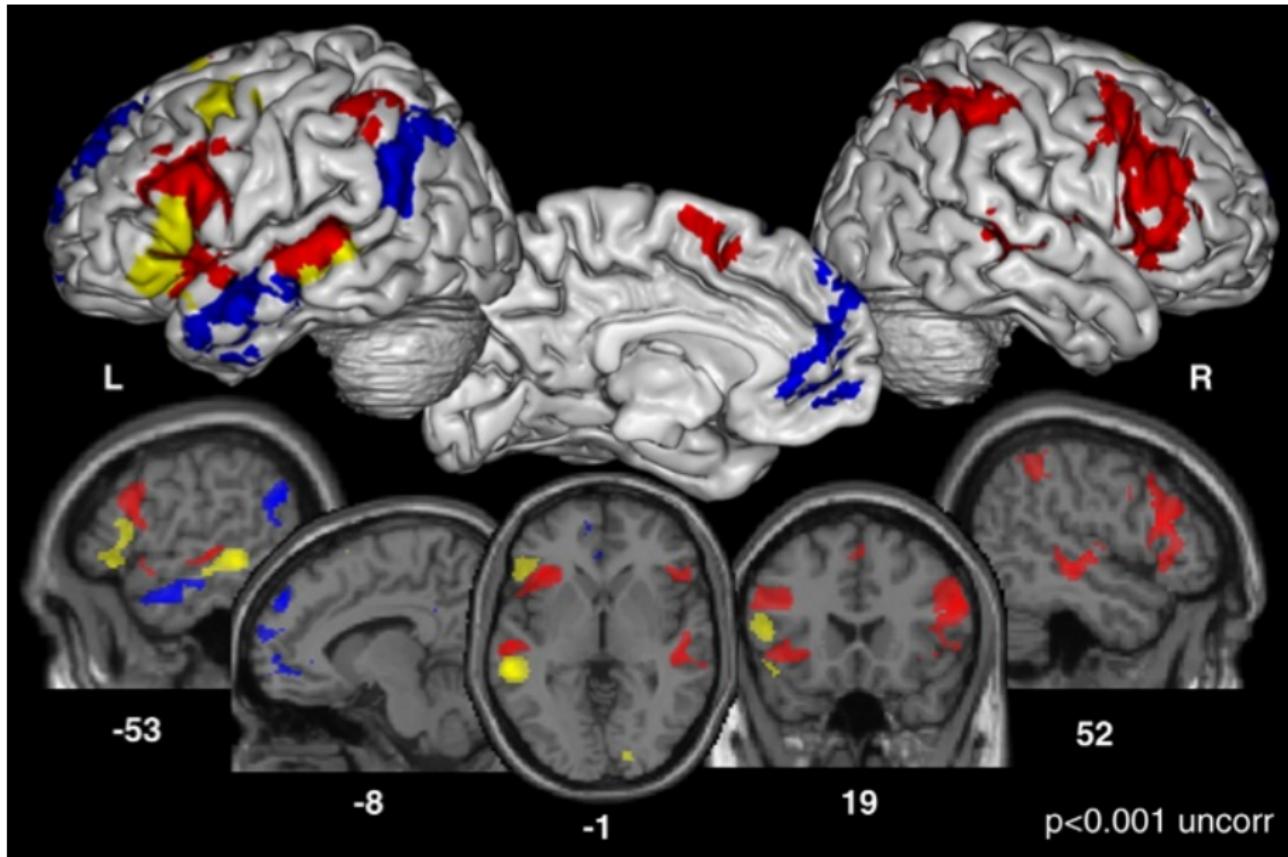
# Ressonância – fenômenos

Barra excitação 1 (link)

Barra excitação 2 (link)



# Ressonância – fenômenos



# Ressonância: Tacoma Narrows Bridge (1940)

- Ponte-minhoca (link)
- É muito comum usar este evento como um exemplo de ressonância. Mas isso não é correto!



- A razão desta confusão é o aspecto aparentemente *oscilatório* da ponte;
- Mas note que, para ocorrer ressonância, a excitação deve ocorrer na frequência de ressonância. Assim, **a excitação deve ser oscilatória**;
- Felizmente, o vento não possui característica oscilatória (pelo menos não em nosso planeta)!

# Ressonância: e a Tacoma Narrows Bridge???

- Poderia se arguir que o vento – apesar de não oscilatório – produziu turbulências de caráter oscilatório (vórtices) na extremidade anterior da ponte, que “excitariam” a ressonância da ponte. Entretanto, isso só seria viável se a oscilação da ponte ocorresse na mesma frequência dos vórtices, o que não ocorre de acordo com estudos aerodinâmicos;
- A teoria mais aceita atualmente é que a ponte passou por um complexo fenômeno não-linear auto-sustentado (flutter) que teve um efeito similar à ocorrência de um coeficiente de amortecimento negativo no sistema;
- Um excelente texto que explora esta questão em detalhes é (sugiro aos curiosos): Billah, K. & Scanian, R. *Resonance, Tacoma Narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks*. Am. J. Phys. pp 118–124. Vol. 59(2), 1991.

# Estabilidade de $s \in \mathbb{C}$

- De todo o nosso estudo, já não há dúvidas que a variável  $s$  é um número complexo, bem como  $G(s)$  também será;
- Mas já vimos também que a equação característica de malha fechada

$$1 + KG(s) = 0 \quad (242)$$

define a estabilidade deste sistema em malha fechada;

- Assim, podemos elaborar um critério no domínio dos números complexos para verificar se um sistema em malha fechada é estável ou não;
- Bem, não vai ter jeito. Vamos ter que estudar um pouco de análise em variável complexa.

# Mapeamento no plano $s$

- Sejam duas variáveis complexas  $u$  e  $v$ . Considere uma função de variável complexa  $F(\cdot)$ , tal que  $v = F(u)$ ;
- Então, se  $u$  define um contorno ou uma trajetória no plano complexo  $u$  ( $\operatorname{Re}\{u\}$ ,  $\operatorname{Im}\{u\}$ ) a função  $F(u)$  expressa o *mapeamento* desta variável no plano complexo  $v$  ( $\operatorname{Re}\{v\}$ ,  $\operatorname{Im}\{v\}$ );
- A função  $F(\cdot)$  é denominada como um **mapeamento conforme** se ela retém localmente no plano  $v$  transformado as mesmas condições de ângulo e orientação da trajetória original  $u$ ;
- Para contornos (trajetórias fechadas), definiremos como o *percurso positivo* aquele em que a área enlaçada é circundada pela *direita*.

# Augustin-Louis Cauchy



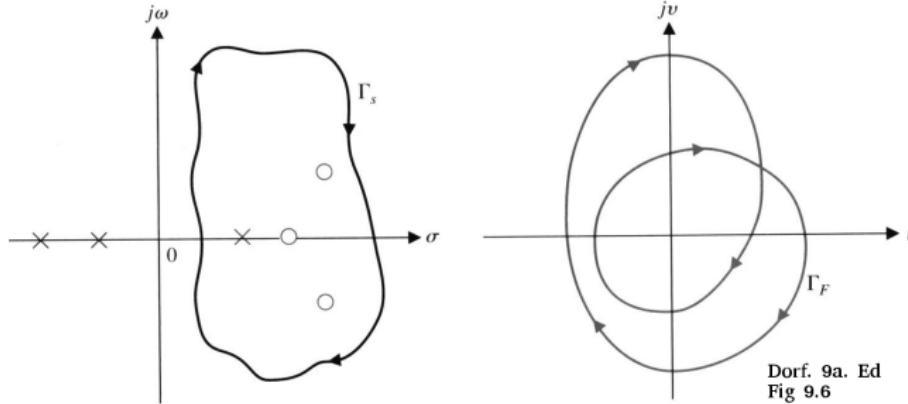
Augustin-Louis  
Cauchy  
Matemático Francês  
★ 21/08/1789  
† 23/05/1857

- Cauchy foi um dos mais importantes matemáticos da história, estudando diversos aspectos de álgebra e cálculo. É considerado o pai da Análise (estudo das funções);
- Se graduou na École Polytechnique (Paris) em 1810 em engenharia civil-militar com alta distinção;
- Dentre os seus mais importantes estudos, veremos um teorema básico da análise de funções complexas.

# Teorema de Cauchy

## Teorema (Princípio do Argumento)

Seja uma função racional complexa  $F(s)$ . Considere um percurso fechado positivo  $\Gamma_s$  que enlace  $Z$  zeros e  $P$  polos de  $F(s)$  no plano  $s$ , sem passar por sobre nenhum deles. Então, o caminho fechado  $\Gamma_F$  enlaçará positivamente a origem do plano  $F$ ,  $N = Z - P$  vezes.



# Harry Nyquist



Harry Nyquist  
Engenheiro Sueco

\* 07/02/1889  
† 04/04/1976

- Nyquist foi um precursores da teoria de controle de sistemas. Seus trabalhos em estabilidade de sistemas realimentados iniciou toda uma era de estudos que culminou com praticamente tudo o que se entende hoje por controle;
- Trabalhou na Bell Laboratories, uma gigante tecnológica de sua época. Collaborou também em áreas como telecomunicações. Juntamente com Claude-Shannon elaborou o conhecido *teorema de amostragem*.

# Critério de Estabilidade de Nyquist

- O critério de estabilidade de Nyquist usa do teorema de Cauchy para estabelecer as condições para que um sistema realimentado seja estável;
- Seja uma planta  $G(s)$  realimentada por um ganho  $K$ . Então:

$$G_{mf}(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)}, \quad G(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}; \quad (243)$$

- Ora, o número complexo  $L(s) = 1 + K \cdot G(s)$  fica

$$L(s) = \frac{\prod_{j=1}^n (s + p_j) + K \cdot \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}; \quad (244)$$

- Note que os zeros de  $L(s)$  são os pólos de malha fechada, enquanto os polos de  $L(s)$  são os polos de malha aberta!

# Critério de Estabilidade de Nyquist

- Agora pense em um contorno  $\Gamma_s$  que enlace positivamente todo o semiplano direito do plano  $s$ ;
- Considere que façamos o mapeamento  $L(\Gamma_s)$ , que consiste em aplicar os números complexos definidos pelo enlace na função  $L(s)$ . Ou seja,  $L(a + bj)$  com  $(a + bj) \in \Gamma_s$ ;
- Então, pelo princípio do argumento de Cauchy, o número de vezes que o mapeamento  $L(\Gamma_s)$  enlaçar positivamente a origem do plano  $L$ , corresponderá à diferença entre o número de zeros e de polos de  $L(s)$  ( $N = Z - P$ );
- Agora façamos uma manobra “ousada”: ao invés de fazer o mapeamento  $L(s)$ , façamos o mapeamento  $S(s) = L(s) - 1$ . Então, o mapeamento de  $S(\Gamma_s)$  resultará em um número de enlaces positivos **em torno de**  $-1$ , correspondentes à diferença  $N = Z - P$ ;

# Critério de Estabilidade de Nyquist

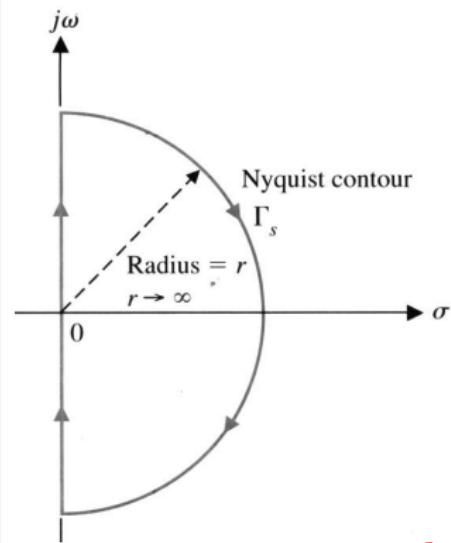
- Mas  $S(s) = KG(s)$ , ou seja, o mapeamento  $S(\Gamma_s)$  corresponde a aplicar o percurso no sistema em malha aberta!!! Então o Nyquist teve a seguinte ideia:
  - i) Primeiro, crie um percurso positivo  $\Gamma_s$  que enlace todo o semi-plano direito (e portanto instável) do plano  $s$ ;
  - ii) Aplique este enlace na função  $S(\Gamma_s) = KG(\Gamma_s) = G_{ma}(\Gamma_s)$ ;
  - iii) Analise, no plano mapeado  $S(s)$ , o número de enlaces positivos em torno do ponto  $-1$ ;
  - iv) Esse número de enlaces  $N$  será igual à diferenças do número de zeros ( $Z$ ) e polos ( $P$ ) da função  $L(s) = 1 + KG(s)$  no semiplano direito;
  - v) Mas  $P$  é o número de polos instáveis do sistema de malha aberta (que eu conheço), e  $Z$  é o número de polos instáveis de **malha fechada** (que é o que eu queria saber);
  - vi) Então, de uma análise do sistema em malha aberta, eu descubro não apenas se o sistema em malha fechada será instável, como também quantos são seus os polos instáveis!

# Critério de Estabilidade de Nyquist

## Definição

Seja o contorno de Nyquist no plano  $s$  (ao lado) e seu mapeamento conforme por uma função racional complexa  $G_{ma}(s)$  no plano  $G_{ma}$ . Seja ainda  $P$  o número de polos instáveis de  $G_{ma}(s)$ . Então, o número  $Z$  de zeros de  $1 + G_{ma}(s)$  no semiplano direito, que corresponde ao número de polos instáveis de malha fechada, é igual à soma de  $P$  com o número  $N$  de enlaces positivos do ponto  $-1$ . Assim,

$$Z = N + P$$



Dorf & Bishop, 2001.

Fig. 9.8

# Critério de Estabilidade de Nyquist



# Critério de Estabilidade de Nyquist

- Então, o procedimento para testar a estabilidade via Critério de Nyquist é:
  - i Faça o gráfico de  $\text{Im}\{G_{ma}(j\omega)\} \times \text{Re}\{G_{ma}(j\omega)\}$  para  $0 \leq \omega \leq \infty$  (Diagrama de Nyquist);
  - ii Se  $G_{ma}(s)$  tem  $P = 0$  (não há polos instáveis em  $G_{ma}(s)$ ), então o sistema em malha fechada será estável se e somente o Diagrama de Nyquist **não enlaçar o ponto  $-1$** . Assim,  $Z = N + P = 0$ ;
  - iii Se  $G_{ma}(s)$  tem  $P$  polos instáveis, então o sistema em malha fechada será estável se e somente se o Diagrama de Nyquist **enlaçar o ponto  $-1$   $P$  vezes no sentido negativo**. Assim,  $Z = N + P = N + (-N) = 0$ ;

# Critério de Estabilidade de Nyquist – exemplo

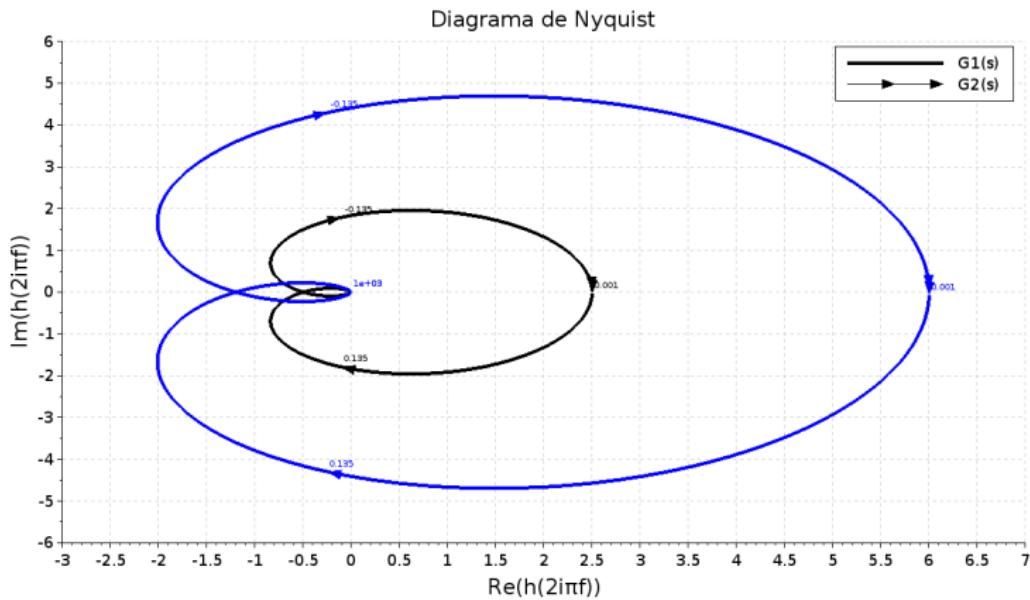
- Desejamos estudar a estabilidade dos sistemas em malha fechada cujas plantas são, respectivamente:

$$G_1(s) = \frac{5}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)} \quad \text{e} \quad G_2(s) = \frac{12}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)}; \quad (245)$$

Note que  $P = 0$  em ambos os casos (número de pólos de malha aberta instáveis);

- Desenhemos, então o Diagrama de Nyquist para ambos os sistemas.

# Critério de Estabilidade de Nyquist – exemplo



# Critério de Estabilidade de Nyquist – exemplo

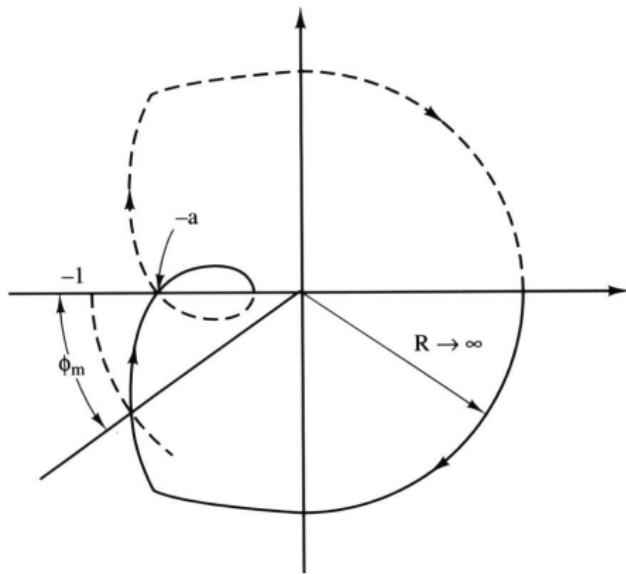
- Note que o Diagrama de Nyquist de  $G_1(s)$  não enlaça o ponto  $-1$ . Como  $P = 0$ ,  $Z = N + P = 0 + 0 = 0$  e não há zeros de  $1 + G_1(s)$  (ou polos de malha fechada) no semiplano direito. Esse sistema é estável em malha fechada;
- Já o Diagrama de Nyquist de  $G_2(s)$  enlaça o ponto  $-1$  duas vezes no sentido positivo (a região enlaçada está à direita). Então  $N = 2$ . Como  $P = 0$ ,  $Z = N + P = 2 + 0 = 2$  e há dois zeros de  $1 + G_1(s)$  (ou polos de malha fechada) no semiplano direito. Esse sistema é instável em malha fechada;
- É importante notar que, igualmente ao Diagrama de Lugar das Raízes, utilizamos o sistema em malha aberta para análise de estabilidade.

# Margens de estabilidade

- Discutimos até agora vários métodos para verificar se uma equação característica conduz a um sistema em malha fechada estável;
- Outra informação de relevância é, dado que o sistema em malha fechada é estável, o quanto longe estamos de uma possível condição de instabilidade;
- Isso é útil, por exemplo, quando desejamos aumentar um ganho de controle até uma condição em que isso represente um perigo de instabilidade;
- Além disso, sabemos que quanto mais próximo os polos do sistema estiverem do eixo imaginário, mais oscilatória será sua resposta. Então, se manter longe deste eixo também melhora a resposta transitória;
- Quantificamos essa “distância” da condição instável através das *margens de estabilidade*.

# Margem de ganho

- Suponha um sistema de malha aberta  $K \cdot G(s)$  sem polos instáveis para o qual o diagrama de Nyquist (mapeamento de  $K \cdot G(j\omega)$  no plano complexo) é:



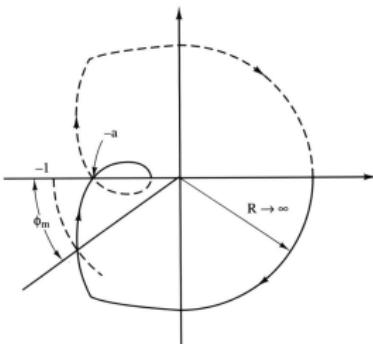
Phillips & Nagle, 1995. Fig. 7.17

# Margem de ganho

- Note que, neste caso, o sistema é estável. Entretanto, se aumentarmos o ganho  $K$ , seu efeito é o de “engordar” o diagrama, e o cruzamento com o eixo real ocorre cada vez mais à esquerda;
- Note que a folga que temos para aumentar o  $K$ , sem enlaçar o ponto  $-1$  é, nesta figura,  $MG = 1/a$ . Então, esta é a **margem de ganho** de que dispomos antes que o sistema se torne instável.

# Margem de fase

- Ainda para o mesmo sistema:



Phillips & Nagle, 1995. Fig. 7.17

- Se adicionarmos fase (ângulo) ao sistema, isso terá como efeito rotacionar o diagrama, e o cruzamento com o eixo real também ocorre cada vez mais à esquerda;
- Note que a folga que temos para adicionar fase sem enlaçar o ponto  $-1$  é  $MF = \phi_m$ . Esta é a **margem de fase** de que dispomos antes que o sistema se torne instável.

# Margens de estabilidade - comentários

- Tomemos agora um sistema de segunda ordem

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}; \quad (246)$$

- Pode-se mostrar que a margem de fase  $\phi_m$  (em graus) deste sistema só depende de seu coeficiente de amortecimento  $\zeta$ . Uma relação aproximada entre estas duas variáveis é dada por

$$\zeta \approx 0,01\phi_m; \quad (247)$$

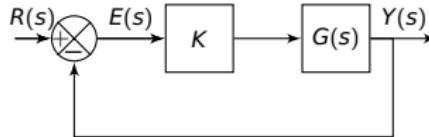
- Mas já vimos que  $\zeta$  estabelece muito da resposta transitória do sistema dominante de segunda ordem;
- Assim, nosso projeto será fundamentalmente baseado em manter determinadas margens tais que a estabilidade seja garantida a despeito de erros de modelagem, sensibilidade dos parâmetros (robustez) e garantia de uma resposta transitória adequada;

# Análise de estabilidade e resposta em frequência

- Vamos discutir agora como estudar a estabilidade de um sistema via resposta em frequência (Diagrama de Bode);
- Considere o diagrama de blocos abaixo. Já vimos que a equação característica do sistema em malha fechada é

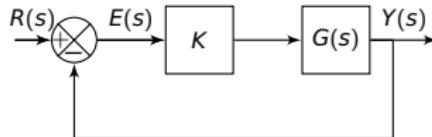
$$1 + KG(s) = 1 + KG(j\omega) = 0; \quad (248)$$

- Vimos também, pelo critério de estabilidade de Nyquist, que dado um  $G(s)$  estável, o sistema de malha fechada será estável se  $G(j\omega)$  não enlaçar o ponto  $-1$ .



# Análise de estabilidade e resposta em frequência

- Mas não enlaçar o ponto  $-1$  implica que  $|KG(j\omega)| < 1$  quando  $\underline{|G(j\omega)|} = -\pi$  E  $\underline{|G(j\omega)|} > -\pi$  quando  $|KG(j\omega)| = 1$ ;
- Vimos ainda que as margens de estabilidade são exatamente as distâncias em módulo e fase para que um sistema estável em malha fechada atinja a condição de instabilidade;
- Então, para pesquisar a condição de estabilidade via Diagrama de Bode, basta que analisemos a condição de módulo quando  $\underline{|G(j\omega)|} = -\pi$  e a condição de fase quando  $|KG(j\omega)| = 1$ .



# Análise de estabilidade e resposta em frequência

## Definição (Estabilidade)

Seja uma planta  $G(s)$  estável realimentada por um controlador  $C(s)$ . O sistema em malha fechada será instável se a resposta em frequência de  $C(j\omega)G(j\omega)$  alcançar uma das condições:

- i)  $|C(j\omega)G(j\omega)| > 1$  (o que equivale a  $0dB$ ) quando  $\angle C(j\omega)G(j\omega) = -\pi$ , ou;
- ii)  $\angle C(j\omega)G(j\omega) < -\pi$  quando  $|C(j\omega)G(j\omega)| = 1$ .

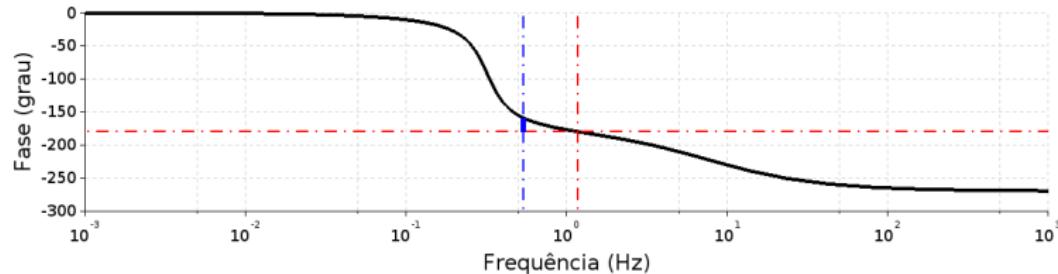
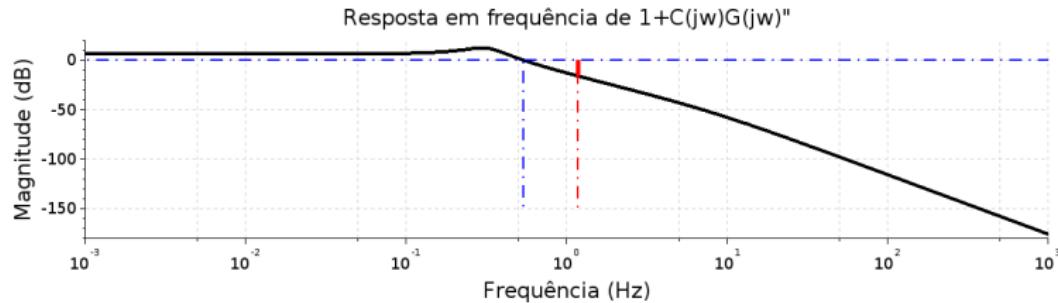
# Análise de estabilidade e resposta em frequência

## Definição (Margens de estabilidade)

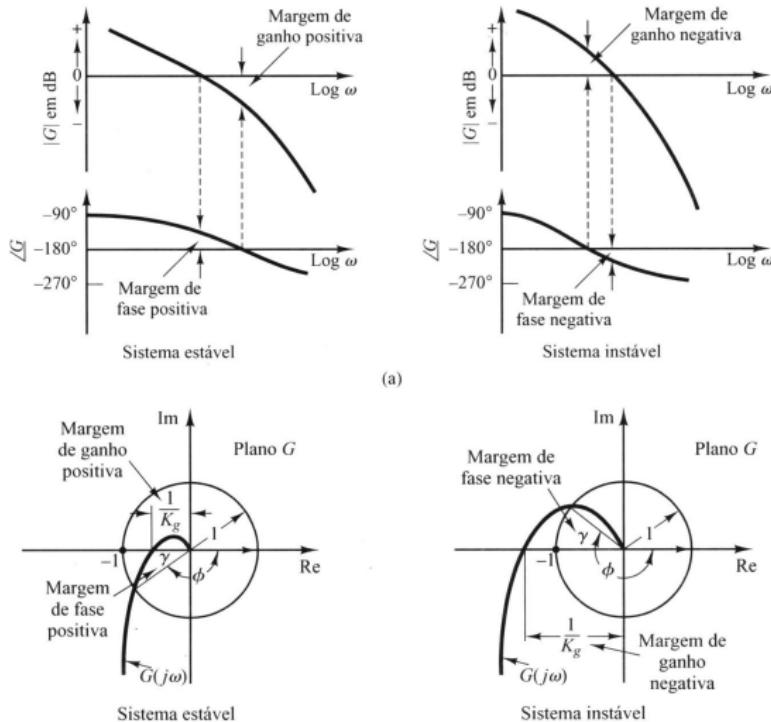
No caso acima:

- i) a **margem de ganho** é definida como o acréscimo de ganho  $\delta_{dB}$  tal que  $|C(j\omega)G(j\omega)|_{dB} + \delta_{dB} = 0$  quando  $\angle C(j\omega)G(j\omega) = -\pi$ ;
- ii) a **margem de fase** é definida como o acréscimo de fase  $\phi$  tal que  $\angle C(j\omega)G(j\omega) - \phi = -\pi$  quando  $|C(j\omega)G(j\omega)|_{dB} = 0$ .

# Análise de estabilidade e resposta em frequência



# Análise de estabilidade e resposta em frequência



# Atraso de tempo e estabilidade

- Na discussão dos sistemas de atraso de tempo vimos que

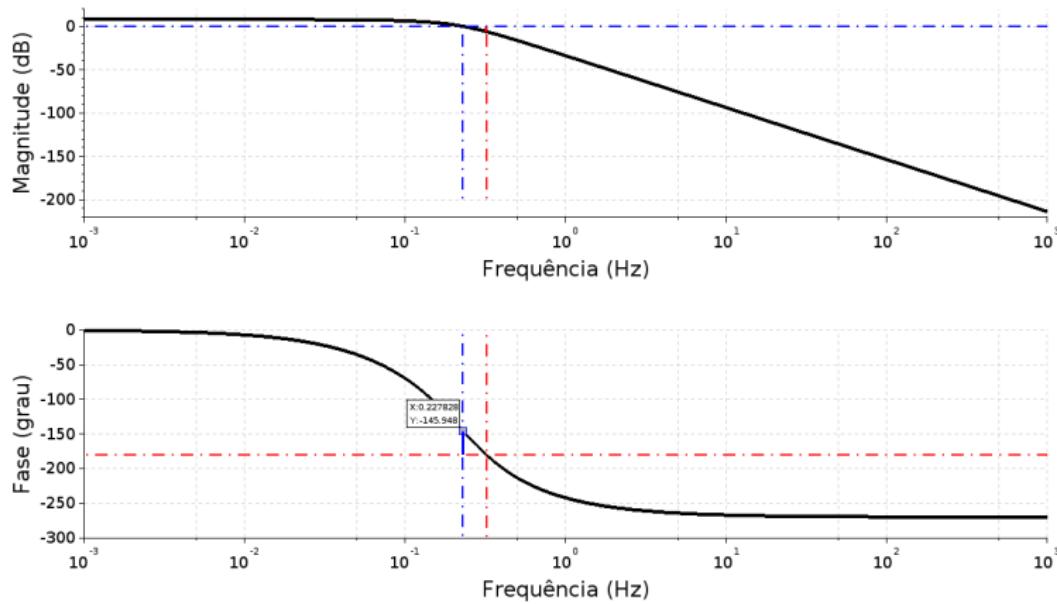
$$Y_{\text{atraso}}(j\omega) = e^{-jT_a \omega} = 1 \cdot \cancel{e^{-jT_a \omega}}; \quad (249)$$

- Então, o atraso de tempo somente introduz fase ao sistema em questão;
- Por exemplo, seja a planta

$$G(s) = \frac{5e^{-T_a s}}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)} \quad (250)$$

- O Diagrama de Bode apenas do sistema (sem o atraso) é mostrado a seguir.

# Atraso de tempo e estabilidade



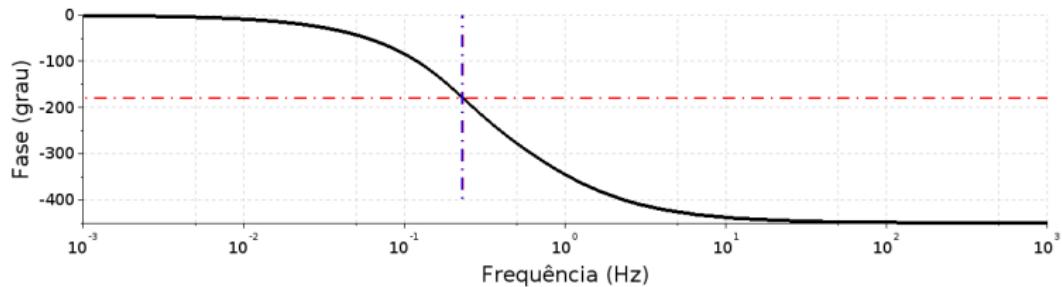
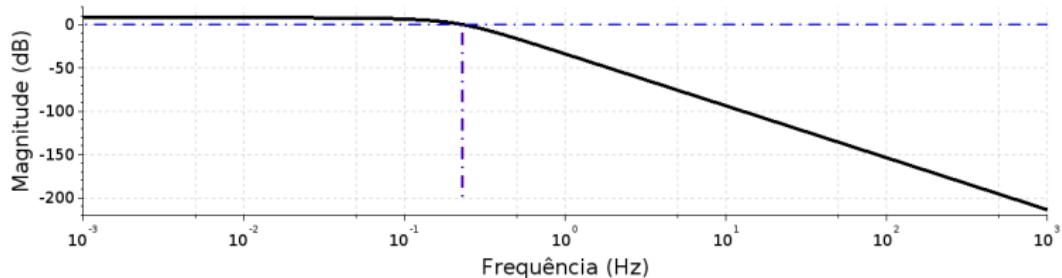
- Neste caso, o sistema em malha fechada tem uma margem de fase de aproximadamente  $35^\circ$  em  $f = 0,228\text{Hz}$ .

# Atraso de tempo e estabilidade

- Suponha um atraso de tempo  $T_a = 0,4\text{s}$ . Em  $f = 0,228\text{Hz}$  (a frequência de margem de fase), este atraso introduzirá uma fase de, aproximadamente,  $-33^\circ$  no sistema ( $\omega T_a = -2\pi f T_a$  em  $\text{rad/s}$  e a margem de fase em  $\text{rad}$ );
- Assim, a margem de fase que antes era de  $35^\circ$  foi quase totalmente corroída pelo atraso de tempo. O sistema está muito próximo da instabilidade em malha fechada!!!
- Por isso, muito cuidado deve ser tomado quando estamos controlando um sistema contendo atrasos ou zeros de fase não mínima!

# Atraso de tempo e estabilidade

- Introduzindo, então o atraso  $T_a = 0,4\text{s}$  no sistema anterior, temos:



# Exercícios

Recomendo os seguintes exercícios dos livros de nossa bibliografia:

- ① **Nise, 5a. Ed., Capítulo 10:** exercícios 4, 5, 10, 11, 28, 29, 30, 35, 36, 37, 40, 46, 47 e 49;
- ② **Ogata, 4a. Ed., Capítulo 8:** exercícios A.8.1, A.8.4, A.8.7, A.8.8, A.8.9, A.8.11, A.8.15, A.8.17, B.8.3, B.8.4, B.8.7, B.8.9, B.8.11, B.8.27, B.8.30;
- ③ **Dorf, 9a. Ed., Capítulos 8 e 9:** problemas: 8.1, 8.4, 8.5, 8.11, 8.14, 8.16, 8.18, 8.21, AP8.5, 9.1, 9.2, 9.6, 9.8, 9.11, 9.12, 9.13, 9.16, 9.19, 9.21, 9.25, 9.27.