

Universidad de Guanajuato

Método de Volumen Finito (Proyecto III)

García Sánchez Marco Antonio¹

¹División de Ingenierías, Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato,
Salamanca, Gto.

Docente: Damián Ascencio César Eduardo

November 2019

Resumen

Se presenta el método de Volumen Finito para analizar la evolución temporal de la distribución de temperatura. Se comparan diferentes esquemas de discretización: método explícito, método implícito y Crank–Nicolson (teórico), y se utilizan esquemas implícito y explícito para resolver numéricamente las ecuaciones obtenidas.

1. Introducción

El método de Volumen Finito permite discretizar y resolver numéricamente ecuaciones diferenciales. Es un método alternativo a los de diferencias finitas y elementos finitos. Se considera una malla de discretización del dominio. En torno a cada punto de esta malla se construye un volumen de control que no se traslape con los volúmenes de los puntos vecinos. De esta forma, el volumen total del dominio resulta ser igual a la suma de los volúmenes de control considerados.

La ecuación diferencial a resolver se integra sobre cada volumen de control, lo cual entrega como resultado una versión discretizada de dicha ecuación. Para realizar la integración se requiere especificar perfiles de variación de la variable dependiente entre los puntos de la malla, para poder evaluar las integrales resultantes. La principal propiedad del sistema de ecuaciones discretizadas resultante es que la solución obtenida satisface en forma exacta las ecuaciones de conservación consideradas, independientemente del tamaño de la malla. Esto aplica tanto a problemas en estado estacionario como en estado transitorio.

El estado estacionario es aquel en el que no existen cambios de las variables de proceso. En el estado transitorio las variables de proceso cambian en el tiempo debido a la existencia de acumulación de energía o materia.

2. Ecuaciones gobernantes

Un esquema junto con los datos del problema que se atacará se muestran en la Figura 1.

La ecuación gobernante está dada por la siguiente expresión (ecuación unidimensional de difusión térmica):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (1)$$

donde T es la temperatura, t el tiempo y D la difusividad térmica (constante en este trabajo).

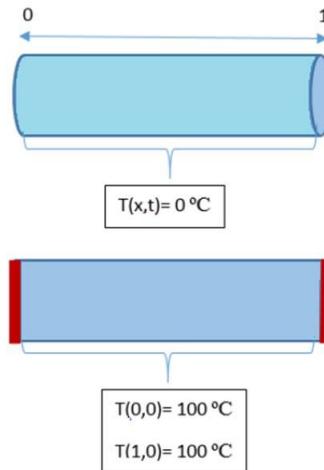


Figura 1. Esquema del problema.

3. Discretización

Discretizando la ecuación gobernante se obtiene, integrando en el volumen de control y en el intervalo temporal $[t^n, t^{n+1}]$:

$$\int_V \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial T}{\partial t} dt dV = D \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\int_A \frac{\partial T}{\partial x} dA \right) dt.$$

Para poder unificar esquemas explícito, implícito y mixto se introduce el parámetro $\Theta \in [0, 1]$, de modo que:

$$\Theta = 0 \Rightarrow \text{esquema explícito}, \quad \Theta = 1 \Rightarrow \text{esquema implícito}, \quad \Theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Crank–Nicolson}.$$

Asumiendo una malla uniforme con paso espacial Δx y paso temporal Δt , y notando T_P^n la temperatura en el nodo P en el instante t^n , una forma compuesta (discretización Θ) para un nodo central es:

$$T_P^{n+1} = T_P^n + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \left[\Theta(T_E^{n+1} - 2T_P^{n+1} + T_W^{n+1}) + (1 - \Theta)(T_E^n - 2T_P^n + T_W^n) \right]. \quad (2)$$

Reordenando, la ecuación nodal para los nodos interiores queda:

$$a_P T_P^{n+1} - a_W T_W^{n+1} - a_E T_E^{n+1} = b, \quad (3)$$

con

$$a_W = a_E = -\Theta \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}, \quad a_P = 1 + 2\Theta \frac{D\Delta t}{\Delta x^2},$$

y

$$b = T_P^n + (1 - \Theta) \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} (T_E^n - 2T_P^n + T_W^n).$$

De aquí se obtienen los esquemas:

- Explícito ($\Theta = 0$): se despeja T_P^{n+1} directamente.
- Implícito ($\Theta = 1$): se resuelve un sistema lineal para T^{n+1} .
- Crank–Nicolson ($\Theta = \frac{1}{2}$): combinación de ambos.

3.1. Nodos en fronteras (nodos fantasma)

Para implementar condiciones de Dirichlet en los extremos $x = 0$ y $x = L$ se usan nodos fantasma cuando es necesario mantener el mismo esquema de diferencias para todos los nodos (esto se detalla en las ecuaciones específicas más adelante).

3.2. Ecuaciones particulares (resumen)

Para mantener la notación coherente con el original, a continuación se exponen las expresiones equivalentes corregidas y con $\Delta x, \Delta t$ consistentes.

3.2.1. Nodos centrales (forma compacta)

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} + \Theta \frac{2D}{\Delta x} \right) T_P^{n+1} - \Theta \frac{D}{\Delta x} (T_E^{n+1} + T_W^{n+1}) = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} - (1 - \Theta) \frac{2D}{\Delta x} \right) T_P^n + (1 - \Theta) \frac{D}{\Delta x} (T_E^n + T_W^n). \quad (4)$$

(Equivalente a tu desarrollo original, expresado con notación consistente.)

3.2.2. Nodos en extremos

Nodo 1 (frontera izquierda, con nodo fantasma en W):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} + \Theta \left(\frac{D_E}{\Delta x} + 2 \frac{D_W}{\Delta x} \right) \right) T_1^{n+1} - \Theta \frac{D_E}{\Delta x} T_2^{n+1} = \\ & \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} + (1 - \Theta) \left(-\frac{D_E}{\Delta x} + 2 \frac{D_W}{\Delta x} \right) \right) T_1^n + (1 - \Theta) \frac{D_E}{\Delta x} T_2^n + (2\Theta \frac{D_W}{\Delta x}) T_a, \end{aligned} \quad (5)$$

donde T_a es la temperatura impuesta en la pared/frontera según el caso.

Nodo n (frontera derecha, con nodo fantasma en E):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} + \Theta \left(2 \frac{D_E}{\Delta x} + \frac{D_W}{\Delta x} \right) \right) T_n^{n+1} - \Theta \frac{D_W}{\Delta x} T_{n-1}^{n+1} = \\ & \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} + (1 - \Theta) \left(-2 \frac{D_E}{\Delta x} - \frac{D_W}{\Delta x} \right) \right) T_n^n + (1 - \Theta) 2 \frac{D_E}{\Delta x} T_b^n + (1 - \Theta) \frac{D_W}{\Delta x} T_{n-1}^n, \end{aligned} \quad (6)$$

donde T_b es la temperatura en la frontera derecha impuesta según el problema.

3.3. Esquemas explícito e implícito (formas particulares)

3.3.1. Explícito ($\Theta = 0$)

Nodos centrales

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} T_P^{n+1} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{2D}{\Delta x} \right) T_P^n + \frac{D}{\Delta x} (T_E^n + T_W^n). \quad (7)$$

Nodo 1 y Nodo n (Se mantienen las mismas fórmulas del desarrollo general aplicando $\Theta = 0$; en la práctica se usan nodos fantasma para imponer las condiciones de frontera tal como en tu versión original.)

3.3.2. Implícito ($\Theta = 1$)

Nodos centrales

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{2D}{\Delta x} \right) T_P^{n+1} - \frac{D}{\Delta x} (T_E^{n+1} + T_W^{n+1}) = \frac{\Delta x}{\Delta t} T_P^n. \quad (8)$$

Nodos en extremos (Se obtiene análogamente aplicando $\Theta = 1$ en las expresiones de frontera; se resuelven mediante la solución del sistema lineal resultante.)

4. Resultados e Independencia de Malla

Para la solución de las ecuaciones generadas en el método de Volumen Finito, es posible usar métodos numéricos para la solución iterativa de los sistemas de ecuaciones. Para el problema propuesto se implementó un código en Python (ver Anexos) que resuelve las ecuaciones discretizadas; el programa permite controlar el número de nodos espaciales y temporales así como las condiciones de frontera.

4.1. Esquema Implícito

Resolviendo numéricamente las ecuaciones discretizadas fue posible construir una solución temporal de la distribución de T . Las propiedades seleccionadas para la solución numérica se muestran en el Cuadro 1.

Cuadro 1: Propiedades del problema

Datos	valor	unidades
$T(x = 0, t)$	100	°C
$T(x = 1, t)$	100	°C
L	1	m
nodes_x	30	-
nodes_t	100	-
D	0.5	-
Θ	$0 \leq \Theta \leq 1$	-
$E_{propuesto}$	0.001	-

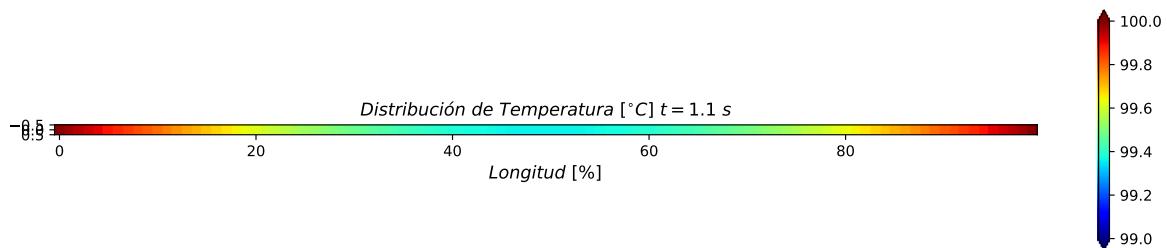
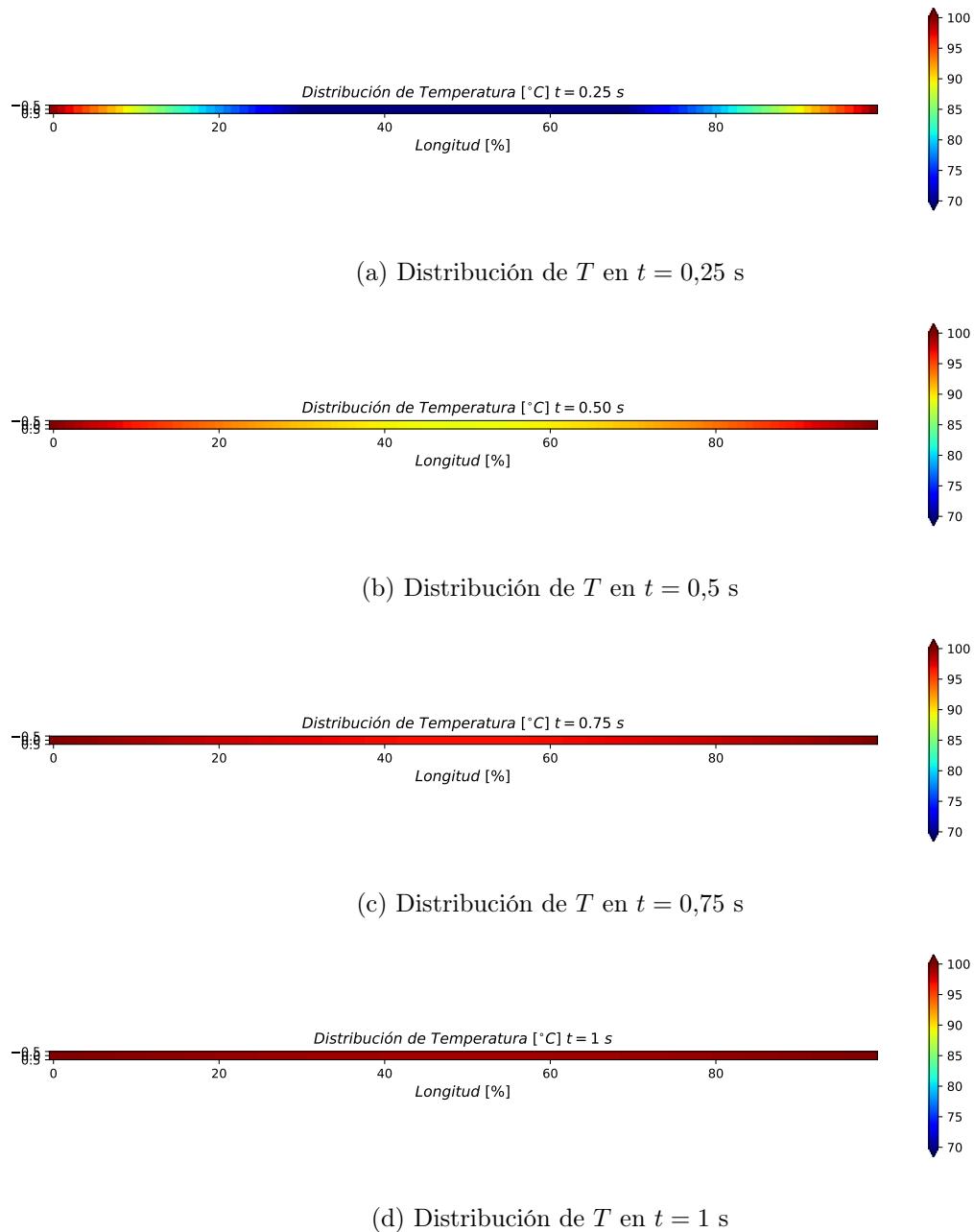


Figura 2. Método Implícito, $t = 1.1$ (instante aproximado de llegada a estado estable)

Figura 1: Método Implícito: $0 \leq t \leq 1$.

En la Figura 2 se observa que la temperatura varía aproximadamente entre $99,5$ °C y 100 °C en el instante $t = 1,1$ s, lo que indica que se alcanza un estado cercano al estacionario alrededor de $1,1$ s con las condiciones impuestas.

La Figura 3 muestra la evolución temporal en diferentes instantes; se observa que para $t = 1$ s la solución ya se aproxima al estado estacionario, coherente con la Figura 2.

Dado que el esquema implícito no está restringido por un criterio de estabilidad condicional, se pueden usar Δt y Δx relativamente grandes comparados con el esquema explícito; en este caso se eligieron 100 nodos temporales para dividir el intervalo de tiempo hasta la estabilidad en pasos de $0,01$ s y apreciar la evolución.

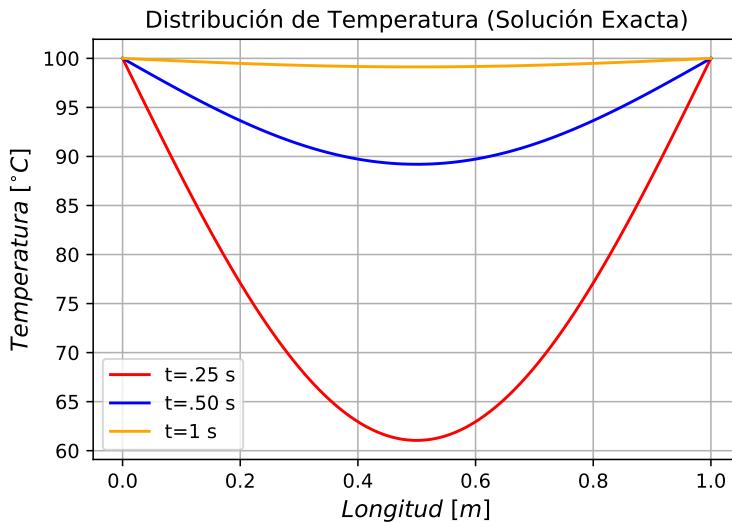
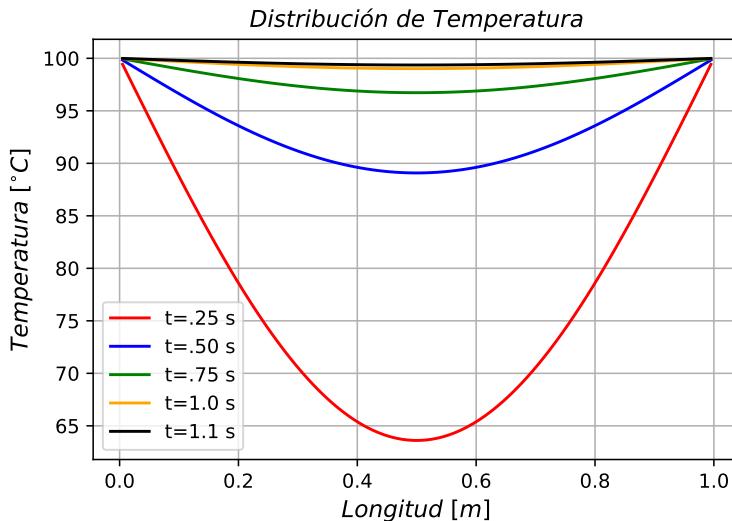
(a) Distribución de T (solución exacta)(b) Distribución de T (numérica, implícita)

Figura 2: Comparación solución exacta vs numérica (implícita).

De acuerdo con la Figura 4 y calculando un error promedio por diferencia nodo a nodo (norma L_2 o promedio porcentual, según tu elección), se obtuvieron los valores reportados en el Cuadro 2.

Cuadro 2: Errores (implícito) — Error promedio

time	Error Promedio
$t = 0,25 \text{ s}$	1.45 %
$t = 0,50 \text{ s}$	1.034 %
$t = 1,0 \text{ s}$	1.23 %

4.2. Esquema Explícito

El esquema explícito tiene la particularidad de que su estabilidad depende del paso temporal y espacial. El criterio de estabilidad para el problema de difusión es:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2D}. \quad (9)$$

El incumplimiento de esta condición provoca inestabilidad numérica en el esquema explícito.

Cuadro 3: Propiedades del problema (explícito)

Datos	valor	unidades
$T(x = 0, t)$	100	°C
$T(x = 1, t)$	100	°C
L	1	m
nodes_x	10	-
nodes_t	100	-
D	0.5	-
Θ	0	-
$E_{propuesto}$	0.001	-

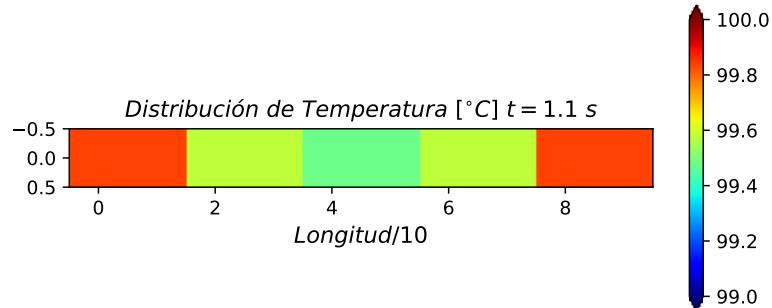
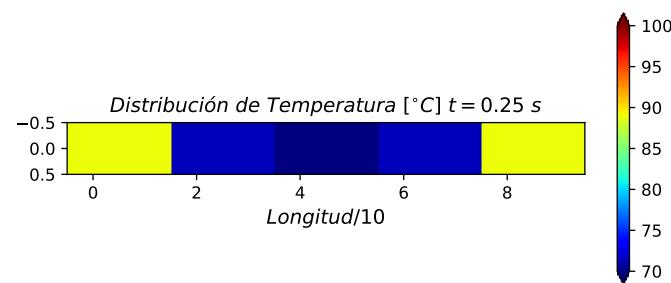
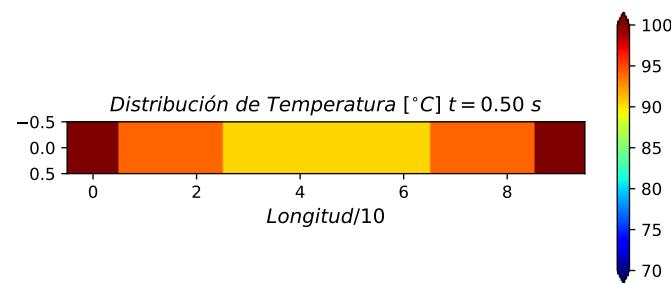
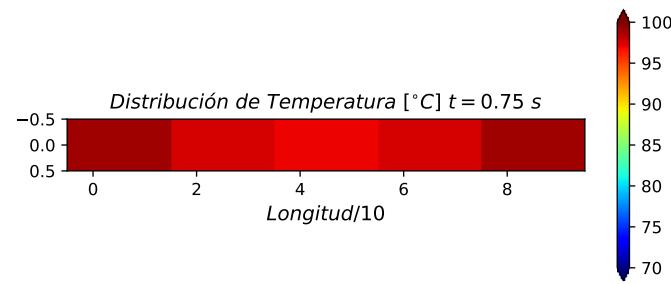
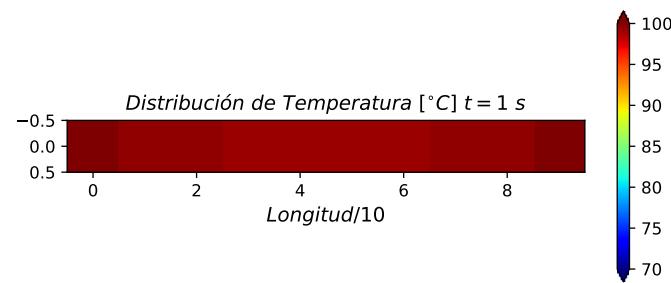


Figura 5. Método Explícito, $t = 1,1$ (tiempo aproximado de llegada a estado estable)

En la Figura 5 la resolución se ve afectada por la selección de nodos espaciales (aquí 10 nodos), lo que incrementa el error y hace menos suave la solución comparada con el esquema implícito.

(a) Distribución de T en $t = 0,25 \text{ s}$ (b) Distribución de T en $t = 0,5 \text{ s}$ (c) Distribución de T en $t = 0,75 \text{ s}$ (d) Distribución de T en $t = 1 \text{ s}$ Figura 3: Método Explícito: $0 \leq t \leq 1$.

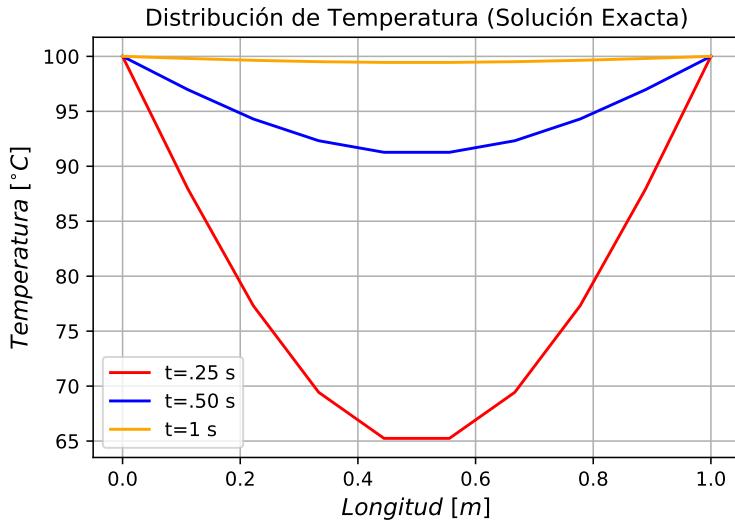
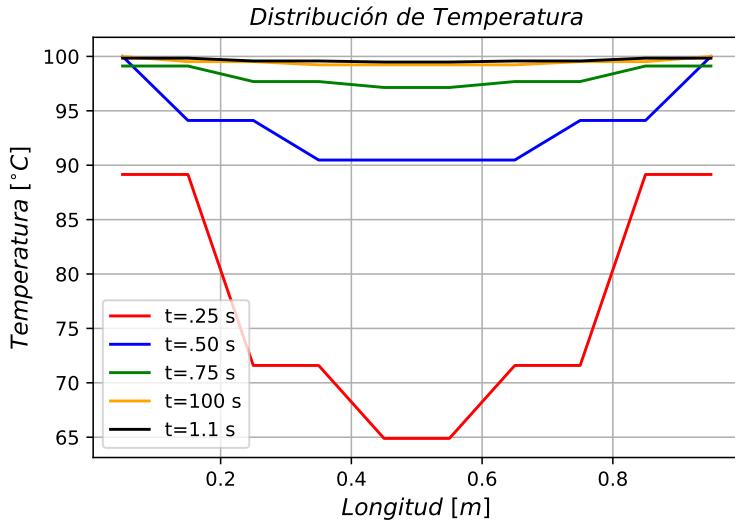
(a) Distribución de T (solución exacta)(b) Distribución de T (numérica, explícita)

Figura 4: Comparación solución exacta vs numérica (explícito).

Cuadro 4: Errores (explícito) — Error promedio

time	Error Promedio
$t = 0,25\text{ s}$	5.12 %
$t = 0,50\text{ s}$	3.67 %
$t = 1,0\text{ s}$	1.87 %

5. Conclusiones

En este trabajo se presentó una comparativa entre el método implícito y el método explícito para la solución de un problema transitorio tratado con Volumen Finito. Observando los resultados, se concluye que el método

más conveniente es el método implícito, ya que es incondicionalmente estable frente al esquema explícito. Sin embargo, el implícito implica resolver un sistema de ecuaciones en cada paso temporal, lo que demanda más operaciones.

El porcentaje de error de cada método frente a la solución exacta depende en gran medida del número de nodos espaciales seleccionados: a mayor número de elementos es más fácil captar variaciones y reducir el error.

Los resultados muestran que el sistema alcanza el estado estacionario en aproximadamente 1,1 s; las comparaciones en $t = 0,25, 0,50, 0,75$ y 1,0 s permiten verificar la evolución hacia la relajación térmica. El valor final reportado (variación aproximada de 0,003 °C en $t = 1,2$ s) concuerda con la estabilidad observada en las simulaciones.

Referencias

- [1] H. Versteeg and W. Malalasekera, "An introduction to computational fluid dynamics," *Finite Volume Method*, Essex, Longman Scientific & Technical, 1995.

Appendix I: Solution Codes

```

1 print('033[H\033[J')
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from gauss_seidel import gauss_seidel
5 n=100 #orden del sistema (numero de nodos)
6 n_time=110 #orden del tiempo (numero de nodos temporales)
7 time=1.1 #segundos
8 error=.001 #error propuesto
9
10 A=np.zeros(((n,n)),float)
11 X=np.zeros(((n)),float)
12 B=np.zeros(((n)),float)
13 Xc=np.zeros(((n)),float)
14 E=np.zeros(((n)),float)
15 Ln=np.zeros(((n)),float)
16 B0=np.zeros(((n)),float)
17
18 #vectores para graficar cada 25% de avance del tiempo de solucion
19 X25=np.zeros(((n)),float)
20 X50=np.zeros(((n)),float)
21 X75=np.zeros(((n)),float)
22 X100=np.zeros(((n)),float)
23 X110=np.zeros(((n)),float)
24
25
26 theta=1
27 T_a=100
28 T_b=100
29 L=1
30 dx=L/n
31 dt=time/n_time
32 De=Dw=.5
33 a=dx/dt
34 ae=De/dx
35 aw=Dw/dx
36
37 for j in range(0,n_time):
38     for i in range(0,n):
39         aux1=i+1
40         aux2=i-1
41         Ln[i]=aux1*dx-(dx/2)
42         if i==0:
43             A[i,i]=a+(theta)*(ae+2*aw)
44             A[i,aux1]=-theta*ae
45             B[i]=(a+(1-theta)*(-ae-2*aw))*B0[i]+(ae*(1-theta))*B0[aux1]+(2*aw*(1-theta))*T_a
46             +(2*aw*theta)*T_a
47             if i==(n-1):
48                 A[i,i]=a+(theta)*(2*ae+aw)
49                 A[i,aux2]=-theta*aw
50                 B[i]=(a+(1-theta)*(-2*ae-aw))*B0[i]+(ae*(1-theta))*B0[aux2]+(2*ae*(1-theta))*T_b
51                 +(2*ae*theta)*T_b
52
53         else:
54             A[i,i]=a+(theta)*(ae+2*aw)
55             A[i,aux1]=-theta*ae
56             A[i,aux2]=-theta*aw
57             B[i]=(a+(1-theta)*(-ae-2*aw))*B0[i]+(ae*(1-theta))*B0[aux1]+(2*aw*(1-theta))*T_a
58             +(2*aw*theta)*T_a
59             B[i]=(a+(1-theta)*(-2*ae-aw))*B0[i]+(ae*(1-theta))*B0[aux2]+(2*ae*(1-theta))*T_b
60             +(2*ae*theta)*T_b
61
62         gauss_seidel(A,Xc,B)
63         Xc=Xc.reshape((n))
64         X=Xc
65
66         if j==0:
67             X25=Xc
68             X50=Xc
69             X75=Xc
70             X100=Xc
71             X110=Xc
72
73         else:
74             X25=Xc
75             X50=Xc
76             X75=Xc
77             X100=Xc
78             X110=Xc
79
80         if j==0:
81             X25=Xc
82             X50=Xc
83             X75=Xc
84             X100=Xc
85             X110=Xc
86
87         else:
88             X25=Xc
89             X50=Xc
90             X75=Xc
91             X100=Xc
92             X110=Xc
93
94         if j==0:
95             X25=Xc
96             X50=Xc
97             X75=Xc
98             X100=Xc
99             X110=Xc
100
101         else:
102             X25=Xc
103             X50=Xc
104             X75=Xc
105             X100=Xc
106             X110=Xc
107
108         if j==0:
109             X25=Xc
110             X50=Xc
111             X75=Xc
112             X100=Xc
113             X110=Xc
114
115         else:
116             X25=Xc
117             X50=Xc
118             X75=Xc
119             X100=Xc
120             X110=Xc
121
122         if j==0:
123             X25=Xc
124             X50=Xc
125             X75=Xc
126             X100=Xc
127             X110=Xc
128
129         else:
130             X25=Xc
131             X50=Xc
132             X75=Xc
133             X100=Xc
134             X110=Xc
135
136         if j==0:
137             X25=Xc
138             X50=Xc
139             X75=Xc
140             X100=Xc
141             X110=Xc
142
143         else:
144             X25=Xc
145             X50=Xc
146             X75=Xc
147             X100=Xc
148             X110=Xc
149
150         if j==0:
151             X25=Xc
152             X50=Xc
153             X75=Xc
154             X100=Xc
155             X110=Xc
156
157         else:
158             X25=Xc
159             X50=Xc
160             X75=Xc
161             X100=Xc
162             X110=Xc
163
164         if j==0:
165             X25=Xc
166             X50=Xc
167             X75=Xc
168             X100=Xc
169             X110=Xc
170
171         else:
172             X25=Xc
173             X50=Xc
174             X75=Xc
175             X100=Xc
176             X110=Xc
177
178         if j==0:
179             X25=Xc
180             X50=Xc
181             X75=Xc
182             X100=Xc
183             X110=Xc
184
185         else:
186             X25=Xc
187             X50=Xc
188             X75=Xc
189             X100=Xc
190             X110=Xc
191
192         if j==0:
193             X25=Xc
194             X50=Xc
195             X75=Xc
196             X100=Xc
197             X110=Xc
198
199         else:
200             X25=Xc
201             X50=Xc
202             X75=Xc
203             X100=Xc
204             X110=Xc
205
206         if j==0:
207             X25=Xc
208             X50=Xc
209             X75=Xc
210             X100=Xc
211             X110=Xc
212
213         else:
214             X25=Xc
215             X50=Xc
216             X75=Xc
217             X100=Xc
218             X110=Xc
219
220         if j==0:
221             X25=Xc
222             X50=Xc
223             X75=Xc
224             X100=Xc
225             X110=Xc
226
227         else:
228             X25=Xc
229             X50=Xc
230             X75=Xc
231             X100=Xc
232             X110=Xc
233
234         if j==0:
235             X25=Xc
236             X50=Xc
237             X75=Xc
238             X100=Xc
239             X110=Xc
240
241         else:
242             X25=Xc
243             X50=Xc
244             X75=Xc
245             X100=Xc
246             X110=Xc
247
248         if j==0:
249             X25=Xc
250             X50=Xc
251             X75=Xc
252             X100=Xc
253             X110=Xc
254
255         else:
256             X25=Xc
257             X50=Xc
258             X75=Xc
259             X100=Xc
260             X110=Xc
261
262         if j==0:
263             X25=Xc
264             X50=Xc
265             X75=Xc
266             X100=Xc
267             X110=Xc
268
269         else:
270             X25=Xc
271             X50=Xc
272             X75=Xc
273             X100=Xc
274             X110=Xc
275
276         if j==0:
277             X25=Xc
278             X50=Xc
279             X75=Xc
280             X100=Xc
281             X110=Xc
282
283         else:
284             X25=Xc
285             X50=Xc
286             X75=Xc
287             X100=Xc
288             X110=Xc
289
290         if j==0:
291             X25=Xc
292             X50=Xc
293             X75=Xc
294             X100=Xc
295             X110=Xc
296
297         else:
298             X25=Xc
299             X50=Xc
300             X75=Xc
301             X100=Xc
302             X110=Xc
303
304         if j==0:
305             X25=Xc
306             X50=Xc
307             X75=Xc
308             X100=Xc
309             X110=Xc
310
311         else:
312             X25=Xc
313             X50=Xc
314             X75=Xc
315             X100=Xc
316             X110=Xc
317
318         if j==0:
319             X25=Xc
320             X50=Xc
321             X75=Xc
322             X100=Xc
323             X110=Xc
324
325         else:
326             X25=Xc
327             X50=Xc
328             X75=Xc
329             X100=Xc
330             X110=Xc
331
332         if j==0:
333             X25=Xc
334             X50=Xc
335             X75=Xc
336             X100=Xc
337             X110=Xc
338
339         else:
340             X25=Xc
341             X50=Xc
342             X75=Xc
343             X100=Xc
344             X110=Xc
345
346         if j==0:
347             X25=Xc
348             X50=Xc
349             X75=Xc
350             X100=Xc
351             X110=Xc
352
353         else:
354             X25=Xc
355             X50=Xc
356             X75=Xc
357             X100=Xc
358             X110=Xc
359
360         if j==0:
361             X25=Xc
362             X50=Xc
363             X75=Xc
364             X100=Xc
365             X110=Xc
366
367         else:
368             X25=Xc
369             X50=Xc
370             X75=Xc
371             X100=Xc
372             X110=Xc
373
374         if j==0:
375             X25=Xc
376             X50=Xc
377             X75=Xc
378             X100=Xc
379             X110=Xc
380
381         else:
382             X25=Xc
383             X50=Xc
384             X75=Xc
385             X100=Xc
386             X110=Xc
387
388         if j==0:
389             X25=Xc
390             X50=Xc
391             X75=Xc
392             X100=Xc
393             X110=Xc
394
395         else:
396             X25=Xc
397             X50=Xc
398             X75=Xc
399             X100=Xc
400             X110=Xc
401
402         if j==0:
403             X25=Xc
404             X50=Xc
405             X75=Xc
406             X100=Xc
407             X110=Xc
408
409         else:
410             X25=Xc
411             X50=Xc
412             X75=Xc
413             X100=Xc
414             X110=Xc
415
416         if j==0:
417             X25=Xc
418             X50=Xc
419             X75=Xc
420             X100=Xc
421             X110=Xc
422
423         else:
424             X25=Xc
425             X50=Xc
426             X75=Xc
427             X100=Xc
428             X110=Xc
429
430         if j==0:
431             X25=Xc
432             X50=Xc
433             X75=Xc
434             X100=Xc
435             X110=Xc
436
437         else:
438             X25=Xc
439             X50=Xc
440             X75=Xc
441             X100=Xc
442             X110=Xc
443
444         if j==0:
445             X25=Xc
446             X50=Xc
447             X75=Xc
448             X100=Xc
449             X110=Xc
450
451         else:
452             X25=Xc
453             X50=Xc
454             X75=Xc
455             X100=Xc
456             X110=Xc
457
458         if j==0:
459             X25=Xc
460             X50=Xc
461             X75=Xc
462             X100=Xc
463             X110=Xc
464
465         else:
466             X25=Xc
467             X50=Xc
468             X75=Xc
469             X100=Xc
470             X110=Xc
471
472         if j==0:
473             X25=Xc
474             X50=Xc
475             X75=Xc
476             X100=Xc
477             X110=Xc
478
479         else:
480             X25=Xc
481             X50=Xc
482             X75=Xc
483             X100=Xc
484             X110=Xc
485
486         if j==0:
487             X25=Xc
488             X50=Xc
489             X75=Xc
490             X100=Xc
491             X110=Xc
492
493         else:
494             X25=Xc
495             X50=Xc
496             X75=Xc
497             X100=Xc
498             X110=Xc
499
500         if j==0:
501             X25=Xc
502             X50=Xc
503             X75=Xc
504             X100=Xc
505             X110=Xc
506
507         else:
508             X25=Xc
509             X50=Xc
510             X75=Xc
511             X100=Xc
512             X110=Xc
513
514         if j==0:
515             X25=Xc
516             X50=Xc
517             X75=Xc
518             X100=Xc
519             X110=Xc
520
521         else:
522             X25=Xc
523             X50=Xc
524             X75=Xc
525             X100=Xc
526             X110=Xc
527
528         if j==0:
529             X25=Xc
530             X50=Xc
531             X75=Xc
532             X100=Xc
533             X110=Xc
534
535         else:
536             X25=Xc
537             X50=Xc
538             X75=Xc
539             X100=Xc
540             X110=Xc
541
542         if j==0:
543             X25=Xc
544             X50=Xc
545             X75=Xc
546             X100=Xc
547             X110=Xc
548
549         else:
550             X25=Xc
551             X50=Xc
552             X75=Xc
553             X100=Xc
554             X110=Xc
555
556         if j==0:
557             X25=Xc
558             X50=Xc
559             X75=Xc
560             X100=Xc
561             X110=Xc
562
563         else:
564             X25=Xc
565             X50=Xc
566             X75=Xc
567             X100=Xc
568             X110=Xc
569
570         if j==0:
571             X25=Xc
572             X50=Xc
573             X75=Xc
574             X100=Xc
575             X110=Xc
576
577         else:
578             X25=Xc
579             X50=Xc
580             X75=Xc
581             X100=Xc
582             X110=Xc
583
584         if j==0:
585             X25=Xc
586             X50=Xc
587             X75=Xc
588             X100=Xc
589             X110=Xc
590
591         else:
592             X25=Xc
593             X50=Xc
594             X75=Xc
595             X100=Xc
596             X110=Xc
597
598         if j==0:
599             X25=Xc
600             X50=Xc
601             X75=Xc
602             X100=Xc
603             X110=Xc
604
605         else:
606             X25=Xc
607             X50=Xc
608             X75=Xc
609             X100=Xc
610             X110=Xc
611
612         if j==0:
613             X25=Xc
614             X50=Xc
615             X75=Xc
616             X100=Xc
617             X110=Xc
618
619         else:
620             X25=Xc
621             X50=Xc
622             X75=Xc
623             X100=Xc
624             X110=Xc
625
626         if j==0:
627             X25=Xc
628             X50=Xc
629             X75=Xc
630             X100=Xc
631             X110=Xc
632
633         else:
634             X25=Xc
635             X50=Xc
636             X75=Xc
637             X100=Xc
638             X110=Xc
639
640         if j==0:
641             X25=Xc
642             X50=Xc
643             X75=Xc
644             X100=Xc
645             X110=Xc
646
647         else:
648             X25=Xc
649             X50=Xc
650             X75=Xc
651             X100=Xc
652             X110=Xc
653
654         if j==0:
655             X25=Xc
656             X50=Xc
657             X75=Xc
658             X100=Xc
659             X110=Xc
660
661         else:
662             X25=Xc
663             X50=Xc
664             X75=Xc
665             X100=Xc
666             X110=Xc
667
668         if j==0:
669             X25=Xc
670             X50=Xc
671             X75=Xc
672             X100=Xc
673             X110=Xc
674
675         else:
676             X25=Xc
677             X50=Xc
678             X75=Xc
679             X100=Xc
680             X110=Xc
681
682         if j==0:
683             X25=Xc
684             X50=Xc
685             X75=Xc
686             X100=Xc
687             X110=Xc
688
689         else:
690             X25=Xc
691             X50=Xc
692             X75=Xc
693             X100=Xc
694             X110=Xc
695
696         if j==0:
697             X25=Xc
698             X50=Xc
699             X75=Xc
700             X100=Xc
701             X110=Xc
702
703         else:
704             X25=Xc
705             X50=Xc
706             X75=Xc
707             X100=Xc
708             X110=Xc
709
710         if j==0:
711             X25=Xc
712             X50=Xc
713             X75=Xc
714             X100=Xc
715             X110=Xc
716
717         else:
718             X25=Xc
719             X50=Xc
720             X75=Xc
721             X100=Xc
722             X110=Xc
723
724         if j==0:
725             X25=Xc
726             X50=Xc
727             X75=Xc
728             X100=Xc
729             X110=Xc
730
731         else:
732             X25=Xc
733             X50=Xc
734             X75=Xc
735             X100=Xc
736             X110=Xc
737
738         if j==0:
739             X25=Xc
740             X50=Xc
741             X75=Xc
742             X100=Xc
743             X110=Xc
744
745         else:
746             X25=Xc
747             X50=Xc
748             X75=Xc
749             X100=Xc
750             X110=Xc
751
752         if j==0:
753             X25=Xc
754             X50=Xc
755             X75=Xc
756             X100=Xc
757             X110=Xc
758
759         else:
760             X25=Xc
761             X50=Xc
762             X75=Xc
763             X100=Xc
764             X110=Xc
765
766         if j==0:
767             X25=Xc
768             X50=Xc
769             X75=Xc
770             X100=Xc
771             X110=Xc
772
773         else:
774             X25=Xc
775             X50=Xc
776             X75=Xc
777             X100=Xc
778             X110=Xc
779
780         if j==0:
781             X25=Xc
782             X50=Xc
783             X75=Xc
784             X100=Xc
785             X110=Xc
786
787         else:
788             X25=Xc
789             X50=Xc
790             X75=Xc
791             X100=Xc
792             X110=Xc
793
794         if j==0:
795             X25=Xc
796             X50=Xc
797             X75=Xc
798             X100=Xc
799             X110=Xc
800
801         else:
802             X25=Xc
803             X50=Xc
804             X75=Xc
805             X100=Xc
806             X110=Xc
807
808         if j==0:
809             X25=Xc
810             X50=Xc
811             X75=Xc
812             X100=Xc
813             X110=Xc
814
815         else:
816             X25=Xc
817             X50=Xc
818             X75=Xc
819             X100=Xc
820             X110=Xc
821
822         if j==0:
823             X25=Xc
824             X50=Xc
825             X75=Xc
826             X100=Xc
827             X110=Xc
828
829         else:
830             X25=Xc
831             X50=Xc
832             X75=Xc
833             X100=Xc
834             X110=Xc
835
836         if j==0:
837             X25=Xc
838             X50=Xc
839             X75=Xc
840             X100=Xc
841             X110=Xc
842
843         else:
844             X25=Xc
845             X50=Xc
846             X75=Xc
847             X100=Xc
848             X110=Xc
849
850         if j==0:
851             X25=Xc
852             X50=Xc
853             X75=Xc
854             X100=Xc
855             X110=Xc
856
857         else:
858             X25=Xc
859             X50=Xc
860             X75=Xc
861             X100=Xc
862             X110=Xc
863
864         if j==0:
865             X25=Xc
866             X50=Xc
867             X75=Xc
868             X100=Xc
869             X110=Xc
870
871         else:
872             X25=Xc
873             X50=Xc
874             X75=Xc
875             X100=Xc
876             X110=Xc
877
878         if j==0:
879             X25=Xc
880             X50=Xc
881             X75=Xc
882             X100=Xc
883             X110=Xc
884
885         else:
886             X25=Xc
887             X50=Xc
888             X75=Xc
889             X100=Xc
890             X110=Xc
891
892         if j==0:
893             X25=Xc
894             X50=Xc
895             X75=Xc
896             X100=Xc
897             X110=Xc
898
899         else:
900             X25=Xc
901             X50=Xc
902             X75=Xc
903             X100=Xc
904             X110=Xc
905
906         if j==0:
907             X25=Xc
908             X50=Xc
909             X75=Xc
910             X100=Xc
911             X110=Xc
912
913         else:
914             X25=Xc
915             X50=Xc
916             X75=Xc
917             X100=Xc
918             X110=Xc
919
920         if j==0:
921             X25=Xc
922             X50=Xc
923             X75=Xc
924             X100=Xc
925             X110=Xc
926
927         else:
928             X25=Xc
929             X50=Xc
930             X75=Xc
931             X100=Xc
932             X110=Xc
933
934         if j==0:
935             X25=Xc
936             X50=Xc
937             X75=Xc
938             X100=Xc
939             X110=Xc
940
941         else:
942             X25=Xc
943             X50=Xc
944             X75=Xc
945             X100=Xc
946             X110=Xc
947
948         if j==0:
949             X25=Xc
950             X50=Xc
951             X75=Xc
952             X100=Xc
953             X110=Xc
954
955         else:
956             X25=Xc
957             X50=Xc
958             X75=Xc
959             X100=Xc
960             X110=Xc
961
962         if j==0:
963             X25=Xc
964             X50=Xc
965             X75=Xc
966             X100=Xc
967             X110=Xc
968
969         else:
970             X25=Xc
971             X50=Xc
972             X75=Xc
973             X100=Xc
974             X110=Xc
975
976         if j==0:
977             X25=Xc
978             X50=Xc
979             X75=Xc
980             X100=Xc
981             X110=Xc
982
983         else:
984             X25=Xc
985             X50=Xc
986             X75=Xc
987             X100=Xc
988             X110=Xc
989
990         if j==0:
991             X25=Xc
992             X50=Xc
993             X75=Xc
994             X100=Xc
995             X110=Xc
996
997         else:
998             X25=Xc
999             X50=Xc
1000            X75=Xc
1001            X100=Xc
1002            X110=Xc
1003
1004         if j==0:
1005             X25=Xc
1006             X50=Xc
1007             X75=Xc
1008             X100=Xc
1009             X110=Xc
1010
1011         else:
1012             X25=Xc
1013             X50=Xc
1014             X75=Xc
1015             X100=Xc
1016             X110=Xc
1017
1018         if j==0:
1019             X25=Xc
1020             X50=Xc
1021             X75=Xc
1022             X100=Xc
1023             X110=Xc
1024
1025         else:
1026             X25=Xc
1027             X50=Xc
1028             X75=Xc
1029             X100=Xc
1030             X110=Xc
1031
1032         if j==0:
1033             X25=Xc
1034             X50=Xc
1035             X75=Xc
1036             X100=Xc
1037             X110=Xc
1038
1039         else:
1040             X25=Xc
1041             X50=Xc
1042             X75=Xc
1043             X100=Xc
1044             X110=Xc
1045
1046         if j==0:
1047             X25=Xc
1048             X50=Xc
1049             X75=Xc
1050             X100=Xc
1051             X110=Xc
1052
1053         else:
1054             X25=Xc
1055             X50=Xc
1056             X75=Xc
1057             X100=Xc
1058             X110=Xc
1059
1060         if j==0:
1061             X25=Xc
1062             X50=Xc
1063             X75=Xc
1064             X100=Xc
1065             X110=Xc
1066
1067         else:
1068             X25=Xc
1069             X50=Xc
1070             X75=Xc
1071             X100=Xc
1072             X110=Xc
1073
1074         if j==0:
1075             X25=Xc
1076             X50=Xc
1077             X75=Xc
1078             X100=Xc
1079             X110=Xc
1080
1081         else:
1082             X25=Xc
1083             X50=Xc
1084             X75=Xc
1085             X100=Xc
1086             X110=Xc
1087
1088         if j==0:
1089             X25=Xc
1090             X50=Xc
1091             X75=Xc
1092             X100=Xc
1093             X110=Xc
1094
1095         else:
1096             X25=Xc
1097             X50=Xc
1098             X75=Xc
1099             X100=Xc
1100             X110=Xc
1101
1102         if j==0:
1103             X25=Xc
1104             X50=Xc
1105             X75=Xc
1106             X100=Xc
1107             X110=Xc
1108
1109         else:
1110             X25=Xc
1111             X50=Xc
1112             X75=Xc
1113             X100=Xc
1114             X110=Xc
1115
1116         if j==0:
1117             X25=Xc
1118             X50=Xc
1119             X75=Xc
1120             X100=Xc
1121             X110=Xc
1122
1123         else:
1124             X25=Xc
1125             X50=Xc
1126             X75=Xc
1127             X100=Xc
1128             X110=Xc
1129
1130         if j==0:
1131             X25=Xc
1132             X50=Xc
1133             X75=Xc
1134             X100=Xc
1135             X110=Xc
1136
1137         else:
1138             X25=Xc
1139             X50=Xc
1140             X75=Xc
1141             X100=Xc
1142             X110=Xc
1143
1144         if j==0:
1145             X25=Xc
1146             X50=Xc
1147             X75=Xc
1148             X100=Xc
1149             X110=Xc
1150
1151         else:
1152             X25=Xc
1153             X50=Xc
1154             X75=Xc
1155             X100=Xc
1156             X110=Xc
1157
1158         if j==0:
1159             X25=Xc
1160             X50=Xc
1161             X75=Xc
1162             X100=Xc
1163             X110=Xc
1164
1165         else:
1166             X25=Xc
1167             X50=Xc
1168             X75=Xc
1169             X100=Xc
1170             X110=Xc
1171
1172         if j==0:
1173             X25=Xc
1174             X50=Xc
1175             X75=Xc
1176             X100=Xc
1177             X110=Xc
1178
1179         else:
1180             X25=Xc
1181             X50=Xc
1182             X75=Xc
1183             X100=Xc
1184             X110=Xc
1185
1186         if j==0:
1187             X25=Xc
1188             X50=Xc
1189             X75=Xc
1190             X100=Xc
1191             X110=Xc
1192
1193         else:
1194             X25=Xc
1195             X50=Xc
1196             X75=Xc
1197             X100=Xc
1198             X110=Xc
1199
1200         if j==0:
1201             X25=Xc
1202             X50=Xc
1203             X75=Xc
1204             X100=Xc
1205             X110=Xc
1206
1207         else:
1208             X25=Xc
1209             X50=Xc
1210             X75=Xc
1211             X100=Xc
1212             X110=Xc
1213
1214         if j==0:
1215             X25=Xc
1216             X50=Xc
1217             X75=Xc
1218             X100=Xc
1219             X110=Xc
1220
1221         else:
1222             X25=Xc
1223             X50=Xc
1224             X75=Xc
1225             X100=Xc
1226             X110=Xc
1227
1228         if j==0:
1229             X25=Xc
1230             X50=Xc
1231             X75=Xc
1232             X100=Xc
1233             X110=Xc
1234
1235         else:
1236             X25=Xc
1237             X50=Xc
1238             X75=Xc
1239             X100=Xc
1240             X110=Xc
1241
1242         if j==0:
1243             X25=Xc
1244             X50=Xc
1245             X75=Xc
1246             X100=Xc
1247             X110=Xc
1248
1249         else:
1250             X25=Xc
1251             X50=Xc
1252             X75=Xc
1253             X100=Xc
1254             X110=Xc
1255
1256         if j==0:
1257             X25=Xc
1258             X50=Xc
1259             X75=Xc
1260             X100=Xc
1261             X110=Xc
1262
1263         else:
1264             X25=Xc
1265             X50=Xc
1266             X75=Xc
1267             X100=Xc
1268             X110=Xc
1269
1270         if j==0:
1271             X25=Xc
1272             X50=Xc
1273             X75=Xc
1274             X100=Xc
1275             X110=Xc
1276
1277         else:
1278             X25=Xc
1279             X50=Xc
1280             X75=Xc
1281             X100=Xc
1282             X110=Xc
1283
1284         if j==0:
1285             X25=Xc
1286             X50=Xc
1287             X75=Xc
1288             X100=Xc
1289             X110=Xc
1290
1291         else:
1292             X25=Xc
1293             X50=Xc
1294             X75=Xc
1295             X100=Xc
1296             X110=Xc
1297
1298         if j==0:
1299             X25=Xc
1300             X50=Xc
1301             X75=Xc
1302             X100=Xc
1303             X110=Xc
1304
1305         else:
1306             X25=Xc
1307             X50=Xc
1308             X75=Xc
130
```

```

50     if i!=0 and i!=n-1:
51         A[i,i]=a+theta*(ae+aw)
52         A[i,aux1]=-theta*ae
53         A[i,aux2]=-theta*aw
54         B[i]=(a+(1-theta)*(-ae-aw))*B0[i]+(ae*(1-theta))*B0[aux1]+(aw*(1-theta))*B0[aux2]
55 AA=np.linalg.inv(A)
56 sol=np.dot(AA,B)
57 #X=gauss_seidel(A,B,X,Xc,E,n,error,np)
58 B0=sol
59 if j==25:
60     X25=sol
61 if j==50:
62     X50=sol
63 if j==75:
64     X75=sol
65 if j==100:
66     X100=sol
67 if j==109:
68     X110=sol
69
70 plt.figure()
71 plt.plot(Ln,X25,label = "t=.25 s", color = 'red')
72 plt.hold(True)
73 plt.plot(Ln,X50,label = "t=.50 s", color = 'blue')
74 plt.plot(Ln,X75, label = "t=.75 s", color = 'green')
75 plt.plot(Ln,X100, label = "t=1 s", color = 'orange')
76 plt.plot(Ln,X110, label = "t=1.1 s", color = 'black')
77 plt.grid(True)
78 plt.legend(loc="lower left")
79 plt.xlabel(r"\$Longitud\ [m]\$", fontsize = 12, color ='black')
80 plt.ylabel(r"\$Temperatura\ [{}^\circ C]\$", fontsize = 12, color = 'black')
81 plt.title(r"\$Distribucion\ de\ Temperatura\$",fontsize = 12, color = 'black',
           verticalalignment = 'baseline', horizontalalignment = 'center')
82 plt.savefig('Grafical.pdf')
83 plt.show()
84
85 espesor=int(n/10)
86 X25_1=np.zeros(((espesor*n)),float)
87 X50_1=np.zeros(((espesor*n)),float)
88 X75_1=np.zeros(((espesor*n)),float)
89 X100_1=np.zeros(((espesor*n)),float)
90 X110_1=np.zeros(((espesor*n)),float)
91 for k in range(1,espesor+1):
92     for l in range(0,(espesor+1)*n):
93         if l<k*n and l>=(k-1)*n:
94             X25_1[l]=X25[l-(k-1)*n]
95             X50_1[l]=X50[l-(k-1)*n]
96             X75_1[l]=X75[l-(k-1)*n]
97             X100_1[l]=X100[l-(k-1)*n]
98             X110_1[l]=X100[l-(k-1)*n]
99
100 plt.figure(1)
101 arr = X25.reshape((1,n))
102 fig = plt.figure(figsize=(15, 3))
103 im1 = plt.imshow(arr, cmap='jet')
104 plt.colorbar(extend='both')
105 plt.clim(70, 100);
106 plt.xlabel(r"\$Longitud\ [\%]\$", fontsize = 12, color = 'black')
107 plt.title(r"\$Distribucion\ de\ Temperatura\ [{}^\circ C]\ t=0.25\ s\$",fontsize = 12, color =
           'black', verticalalignment = 'baseline', horizontalalignment = 'center')

```

```
108 plt.savefig('Grafica2_a.pdf')
109
110 plt.figure(2)
111 arr2 = X50.reshape((1,n))
112 fig = plt.figure(figsize=(15, 3))
113 im2 = plt.imshow(arr2, cmap='jet')
114 plt.colorbar(extend='both')
115 plt.clim(70, 100);
116 plt.xlabel(r"$Longitud\ [\%]", fontsize = 12, color = 'black')
117 plt.title(r"$Distribucion\ de\ Temperatura\ [^{\circ} C]\ t=0.50\ s$",fontsize = 12, color =
    'black', verticalalignment = 'baseline', horizontalalignment = 'center')
118 plt.savefig('Grafica2_b.pdf')
119
120 plt.figure(3)
121 arr3 = X75.reshape((1,n))
122 fig = plt.figure(figsize=(15, 3))
123 im3 = plt.imshow(arr3, cmap='jet')
124 plt.colorbar(extend='both')
125 plt.clim(70, 100);
126 plt.xlabel(r"$Longitud\ [\%]", fontsize = 12, color = 'black')
127 plt.title(r"$Distribucion\ de\ Temperatura\ [^{\circ} C]\ t=0.75\ s$",fontsize = 12, color =
    'black', verticalalignment = 'baseline', horizontalalignment = 'center')
128 plt.savefig('Grafica2_c.pdf')
129
130 plt.figure(4)
131 arr4 = X100.reshape((1,n))
132 fig = plt.figure(figsize=(15, 3))
133 im4 = plt.imshow(arr4, cmap='jet')
134 plt.colorbar(extend='both')
135 plt.clim(70, 100);
136 plt.xlabel(r"$Longitud\ [\%]", fontsize = 12, color = 'black')
137 plt.title(r"$Distribucion\ de\ Temperatura\ [^{\circ} C]\ t=1\ s$",fontsize = 12, color =
    'black', verticalalignment = 'baseline', horizontalalignment = 'center')
138 plt.savefig('Grafica2_d.pdf')
139
140 plt.figure(4)
141 arr5 = X110.reshape((1,n))
142 fig = plt.figure(figsize=(15, 3))
143 im4 = plt.imshow(arr5, cmap='jet')
144 plt.colorbar(extend='both')
145 plt.clim(99, 100);
146 plt.xlabel(r"$Longitud\ [\%]", fontsize = 12, color = 'black')
147 plt.title(r"$Distribucion\ de\ Temperatura\ [^{\circ} C]\ t=1.1\ s$",fontsize = 12, color =
    'black', verticalalignment = 'baseline', horizontalalignment = 'center')
148 plt.savefig('Grafica2_e.pdf')
```