JÓVENES EN LA CIENCIA
REVISTA DE DIVULGACIÓN CIENTÍFICA

"Compuerta Cuántica NOT en el Marco de SEA-QT"

García Sánchez Marco Antonio (1), Damián Ascencio César Eduardo (2), Cano Andrade Sergio (3)

1 [Departamento de Ingeniería Mecánica, División de Ingenierías del Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato] | [ma.garciasanchez@ugto.mx]
2 [Departamento de Ingeniería Mecánica, División de Ingenierías del Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato] | [cesar.damian@ugto.mx]
3[Departamento de Ingeniería Mecánica, División de Ingenierías del Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato] | [sergio.cano@ugto.mx]

Resumen

Se compara la evolución de la compuerta Cuántica NOT usando la dinámica de von Neumann en comparación con la dinámica bajo el marco de SEA-QT. Al analizar el proceso con el marco SEA-QT y se explica cómo es la generación de entropía (irreversibilidades) en la compuerta además se muestra la modificación del Hamiltoniano estándar así como la modificación de la ecuación de movimiento de von Neumann para poder obtener los resultados esperados.

Abstract

The evolution of the Quantum NOT gate is compared using the von Neumann dynamics compared to the dynamics under the SEA-QT framework. By analyzing the process with the SEA-QT framework and explaining how the generation of entropy (irreversibilities) in the gate is, the modification of the Hamiltonian is shown as well as the modification of the Neumann movement equation to obtain the expected results.

Palabras Clave Qubit; Termodinámica Cuántica; irreversibilidades; compuerta cuántica;

INTRODUCCIÓN

En computación clásica, la mínima unidad de información es el bit, este bit solo puede tener un valor determinado (0 o 1) y a esto se denomina estado. En la computación es de vital importancia la unidad mínima de información así como las puertas lógicas, estas puertas o compuertas lógicas procesan los bits (uno o más) y cambian su estado o valor de acuerdo a un patrón ya definido en la misma. Haciendo una combinación adecuada de compuertas, es posible realizar desde una operación matemática

Hoy en día existen ciertos problemas para tratar con la información, problemas de muy alta complejidad que al ser atacados con la computación clásica son irresolubles e un tiempo computacional razonable, para poder abordar en estos problemas se recurre a la computación cuántica, que al igual que su análogo clásico tiene una mínima unidad de información ahora llamada Qubit o bit cuántico. La informática cuántica, basada en la física cuántica con propiedades tales como superposición, entrelazamiento cuántico, spin, entre otros ofrece una capacidad enorme para abordar estos problemas, dejando de lado la velocidad de la operación, ya que la gran ventaja reside en la capacidad de procesamiento de datos en paralelo.

Una compuerta clásica NOT cambia el estado del bit, intercambiando un estado por otro entre sus dos posibles valores. Su análogo cuántico cambia el estado del Qubit, usando una propiedad muy particular de las partículas conocido como el Spin sin análogo clásico.

La ecuación de von Neumann como ecuación gobernante para la compuerta NOT considera estados puros o estados muy cercanos al equilibrio. Para la descripción fuera del equilibrio se han desarrollado teorías sin interacción (sistema-entorno) como la propuesta por Hatsopoulos-Gyftopoulos-Beretta bajo el marco teórico Steepest-Entropy-Ascent Quantum Thermodynamics (SEAQT) y se basa en la suposición que la generación de entropía es intrínseca al sistema. Esta ecuación de movimiento describe procesos desde el no-equilibrio al equilibrio estable. Bajo este marco teórico la compuerta cuántica tiene un comportamiento diferente el cual se intenta explicar.

MATERIALES Y MÉTODOS

Sistema bajo estudio.

Se presenta como caso de estudio una partícula (electrón) de spin ½ con su transformación a través de la compuerta cuántica NOT bajo el marco de la mecánica cuántica (sin generación de entropía) al igual que bajo el marco de SEAQT (Steepest Entropy Ascent Quantum Thermodynamics).

En mecánica cuántica, un estado está representado por su función de onda ψ y su evolución es definida por la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial|\psi(p,t)>}{\partial t} = H|\psi(p,t)> \qquad (1)$$

El estado puede ser representado también por la matriz de densidad, ρ, este operador de densidad contiene todas las propiedades estadísticas de un sistema y definido como:

$$\rho = |\psi(p,t)> \otimes < \psi(p,t)| \qquad (2)$$

Para un Qubit el operador de densidad es:

$$\rho = \frac{1}{2}[I + P_x \cdot \sigma_x + P_y \cdot \sigma_y + P_z \cdot \sigma_z] \qquad (3)$$

donde σ_x. σ_y *y* σ_z, son las matrices de Pauli y P_x, P_y *y* P_z son componentes del vector de polarización que rige las coordenadas en la esfera de Bloch.

Esfera de Bloch

Para partículas de dos niveles se cuenta con una poderosa herramienta gráfica para visualizar su estado y su evolución, La esfera de Bloch. IMAGEN 1. Las coordenadas en este objeto son obtenidas a partir del operador de densidad con:

$$Px = \rho_{01} + \rho_{10} \qquad (4)$$

$$Py = \frac{1}{i}(\rho_{10} - \rho_{01}) \qquad (5)$$

$$Pz = \rho_{00} - \rho_{11} \qquad (6)$$

Donde

$$\rho = \begin{matrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{matrix} \qquad (7)$$

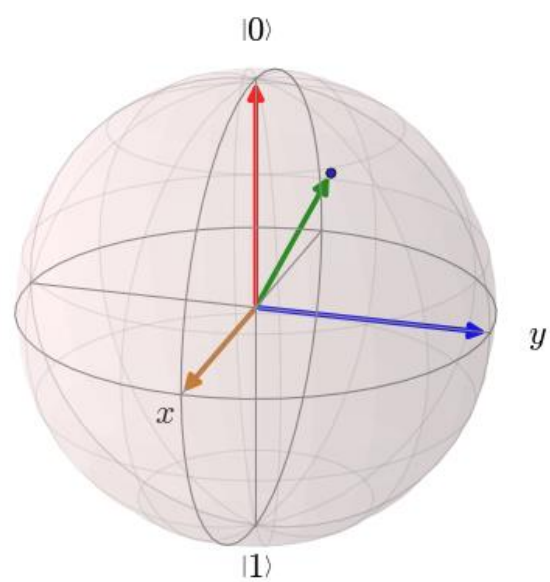

IMAGEN 1: Esfera de Bloch con la representación de un estado arbitrario.

Ecuación de movimiento

En la mecánica cuántica la ecuación de movimiento es la ecuación de Von Neumann:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{-i}{\hbar}[H, \rho] \qquad (8)$$

Esta ecuación proporciona información sobre un sistema cuántico, la ecuación fue modificada por Hatsopoulos-Gyftopoulos-Beretta [4] agregando un término no lineal con la finalidad de describir fenómenos fuera del equilibrio. Con esta modificación se tiene que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{-i}{\hbar}[H, \rho] - \frac{1}{\tau_D}\left(\rho \ln \rho + \alpha(\rho)\rho + \frac{1}{2}\beta(\rho)\{H, \rho\}\right) \qquad (9)$$

donde el hamiltoniano H representa la energía total del sistema, los términos α y β son simplificaciones, el termino τ_D es un parámetro libre en la ecuación el cual representa el tiempo en el que se pierde la coherencia en el sistema [3].

Compuerta ideal NOT

El hamiltoniano estándar:

$$H_0 = \frac{-1}{2}\hbar w_L \sigma_z \qquad (10)$$

donde w_L es la frecuencia de oscilación en la esfera de Bloch llamada también frecuencia angular de Larmor.

Este operador deja en precesión la información en un solo estado |1> 0 |0> y para obtener el efecto de la compuerta NOT se deberá modificar o agregar un término extra, este término es denominado bias. El bias contiene un pulso en forma gaussiana $\theta_G(t)$ que hace que en un tiempo determinado t1 actué la compuerta y termine en un tiempo t2, el máximo punto de este pulso es en t0 y de esta manera se puede definir su duración "τ" con las ecuaciones t0=t1+τ/2 y t0=t2-τ/2

$$V_G(t) = \hbar\theta_G(t)\Omega \qquad (11)$$

donde

$$\theta_G(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\tau}e^{-(\frac{t-t_0}{\tau})^2} \qquad (12)$$

$$\Omega = \sigma_x \qquad (13)$$

El efecto de la compuerta en un estado puede ser representado como Ω|0>=|1> esto indica que en la esfera de Bloch hay cambios en las coordenadas, Px → Px, Py →-Py y Pz → -Pz

Finalmente para que la precesión se detenga cuando actúa la compuerta se tiene que incluir un pulso unitario que cancele la parte estándar del hamiltoniano. Se puede normalizar el mismo pulso mostrado θ_G, quitando su amplitud, por tanto el Hamiltoniano de la compuerta NOT se representa matemáticamente como:

$$H_{not} = \frac{-\hbar w_L}{2}\left(1 - e^{-(\frac{t-t_0}{\tau})^2}\right)\sigma_z + \hbar\theta_G(t)\Omega \qquad (14)$$

Para resolver la ecuación diferencial de movimiento los parámetros libres son el tiempo donde el pulso tiene una amplitud máxima (t_0) y el tiempo del pulso (τ) de esta manera se puede encontrar t1 y t2, para este presente caso de deja paramétrico la frecuencia de Larmor así como la constante modificada de Planck.

Compuerta NOT con irreversibilidades

Con el hamiltoniano modificado en la sección anterior pero bajo el marco de la Termodinámica Cuántica la ecuación gobernante corresponde a la modificada por Hatsopoulos-Gyftopoulos-Beretta, esta ecuación 9 genera un comportamiento de pérdida de información cuando el estado comienza a caer al centro de la esfera de Bloch.

Para este caso el parámetro τ_D indica el tiempo en el cual la coherencia comienza a desaparecer y es un parámetro libre.

Condiciones Iniciales

Para la solución de la ecuación de movimiento es necesario tener un estado inicial ρ_0, así como definir los tiempos de los diferentes parámetros.

Tabla 1: matriz de densidad inicial y parámetros libres

parámetro	Mecánica cuántica	Termodinámica Cuántica
1. Px	0.5	0.5
2. Py	0.0	0.0
3. Pz	0.8	0.8
4. to	31.5 s	31.5 s
5. τ	0.1 s	0.1 s
6. τ_D		40s
7. $\hbar$	1	1
8. w_L	1	1
9. k_b	1	1
10. intervalo de solución	80 s	80 s

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Solucionando la ecuación de movimiento para los dos marcos teóricos se obtienen resultados muy diferentes. En la IMEGEN 2 (izquierda) se muestra la evolución del Qubit, se observa que se mantiene oscilando hasta que actúa la compuerta para cambiar del estado |0> a |1> para después tener una oscilación en el estado |1>.

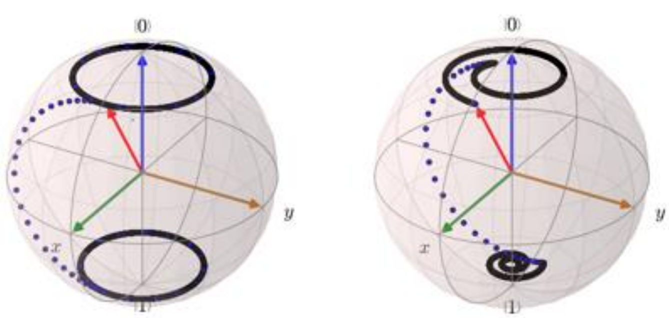

IMAGEN 2: evolución del qubit a través de la compuerta NOT bajo el marco ideal de la Mecánica Cuántica (izquierda) y bajo el marco de la Termodinámica Cuántica (derecha).

Al igual que en el marco de la Mecánica Cuántica, la Termodinámica Cuántica cambia el Qubit de estado pero tiene una pérdida de información o pérdida de Coherencia por las irreversibilidades intrínsecas generadas en el sistema. Este es uno de los principales problemas a solucionar en la Computación Cuántica, la pérdida de coherencia ya que el sistema perdería su estado cuántico, controlar esta decoherencia o realizar las operaciones antes de que se pierdan las propiedades cuánticas en el sistema, son hasta ahora lo más estudiado en estos campos para combatir con este problema.

Para el marco de la SAE QT las irreversibilidades son de suma importancia, en la IMAGEN 3 se muestra como es la tendencia de la generación de entropía en el tiempo. La formulación matemática es determinada por la definición de entropía de von Neumann [1]. También es apreciable que en el accionamiento de la compuerta hay una gran generación de entropía.

$$S = -kTr(\rho)ln(\rho) \tag{15}$$

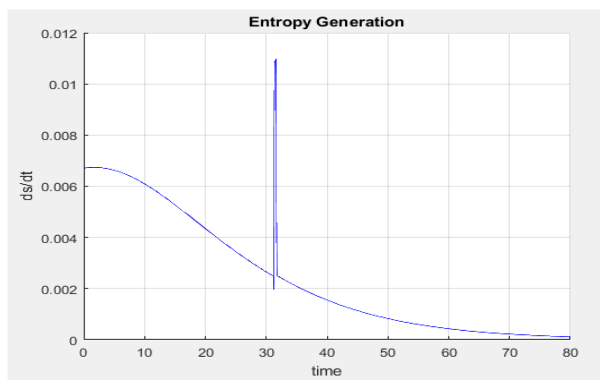

IMAGEN 3: generación de entropía en el sistema bajo el marco SEA-QT

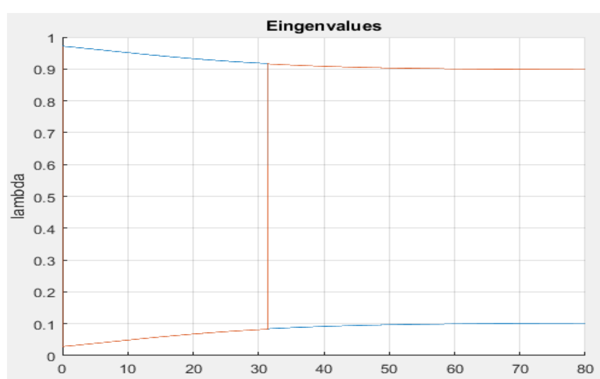

IMAGEN 4: Evolución de los observables del sistema en la compuerta NOT en el marco de la Termodinámica Cuántica

Es bien sabido que los eigenvalores de la matriz de densidad corresponden a valores medibles físicamente, a lo que se le llama observables, en la IMAGEN 5 se muestra su evolución en el tiempo de la simulación del sistema bajo el marco SEA-QT.

Como ya se mostró en la IMAGEN 3. El sistema tiene diferentes ritmos de generación de entropía, la entropía total del sistema en los instantes de tiempo se muestra en la imagen 5.

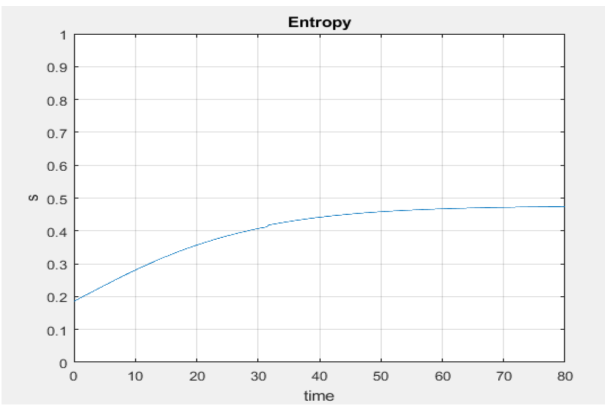

IMAGEN 5: Variación de la entropía total del sistema.

En la IMAGEN 6 se muestra el cambio del vector de polarización (coordenadas de la evolución del estado en la esfera de Bloch), donde se puede apreciar una atenuación ya que el estado está llegando al centro de la esfera, también puede apreciarse el tiempo en el cual actúa la compuerta.

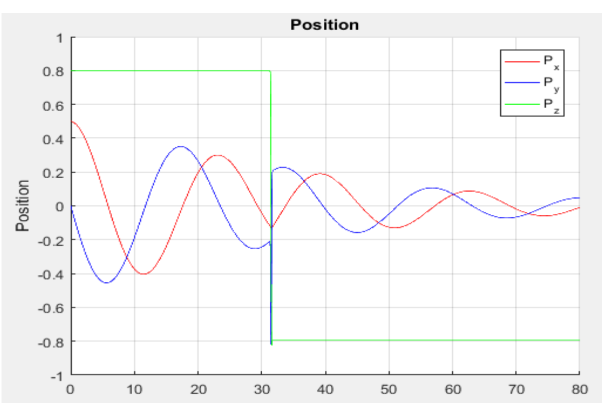

IMAGEN 6: Cambio en el vector de Polarización (P). Coordenadas X, Y y Z

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se analizó la compuerta Cuántica NOT bajo el Marco de SEA-QT el cual propone que en un sistema cuántico existen irreversibilidades intrínsecas al sistema, también se comparó con la misma compuerta pero con el marco de la Mecánica Cuántica.

Es de gran importancia el análisis de las irreversibilidades y la decoherencia para futuras aplicaciones así como su control, ya que son la principal barrera para el avance de la computación cuántica.

AGRADECIMIENTOS

Marco Antonio García Sánchez agradece a Veranos UG 2018 por haber permitido su participación en este evento tan enriquecedor que lo ayudo a tener un acercamiento con un área de investigación de tan gran interés para su formación profesional. Al igual Marco agradece al Dr. César Eduardo Damián Ascencio y al Dr. Sergio Cano Andrade por su apoyo tan de cerca en el tema y al presente trabajo.

REFERENCIAS

[1] TABAKIN, Frank. Model dynamics for quantum computing. *Annals of Physics*, 2017, vol. 383, p. 33-78.

[2] NIELSEN, Michael A.; CHUANG, Isaac. Quantum computation and quantum information. 2002

[3] CANO-ANDRADE, Sergio. *Thermodynamic Based Framework for Determining Sustainable Electric Infrastructures as well as Modeling of Decoherence in Quantum Composite Systems*. 2014. Tesis Doctoral. Virginia Tech.

[4] BERETTA, Gian Paolo, et al. Quantum thermodynamics. A new equation of motion for a single constituent of matter. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, 1984, vol. 82, no 2, p. 169-191.

[5] WEINBERG, Steven. *Lectures on quantum mechanics*. Cambridge University Press, 2015