

UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO



UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

CAMPUS IRAPUATO-SALAMANCA

DIVISIÓN DE INGENIERÍAS

PÉRDIDA DE COHERENCIA EN CIRCUITOS CUÁNTICOS
BAJO EL MARCO DE SEA-QT

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO MECÁNICO

PRESENTA:
MARCO ANTONIO GARCÍA SÁNCHEZ

DIRECTORES:
DR. CÉSAR EDUARDO DAMIÁN ASCENCIO
DR. SERGIO CANO ANDRADE

SALAMANCA, GTO

SEPTIEMBRE 2019

Dedicado a la memoria de los que ya no están pero de alguna manera siguen aquí

Resumen

La pérdida de coherencia en estados cuánticos ha tomado gran importancia desde la llegada de la idea de la computación cuántica. Esta área de investigación tiene un gran potencial teórico y es de suma importancia determinar un modelo matemático que permita caracterizar el fenómeno de decoherencia y así poder prevenirlo. Diferentes propuestas han sido publicadas y estas han considerado que la pérdida de coherencia se debe a las interacciones del sistema con el entorno, en otras palabras, sistemas abiertos. Otro tipo de formulación es el modelos de steepest-entropy-ascent quantum thermodynamics (SEA-QT) que basado en un sistema cerrado y máxima producción de entropía, su construcción matemática mantiene la conservación de energía y la probabilidad.

En este trabajo se pretende determinar la evolución de las compuertas cuánticas del circuito H-CNOT con el cual teóricamente se puede generar un estado de máximo entrelazamiento. El estudio se hace basado en la dinámica del marco teórico SEA-QT, después de analizar las compuertas del circuito cuántico se hace una comparación donde se determina en que componente son más significativos los efectos de disipación en este marco de referencia.

También se hace una hipótesis que asocia un parámetro aún sin caracterizar con la probabilidad de transición. Mediante la regla de oro de Fermi de teoría de perturbaciones se pretende obtener una primera aproximación del mismo para así simular el entrelazamiento y la decoherencia en el circuito.

Agradecimientos

Primero que nada quiero agradecer al ser supremos al que todos llamamos Dios por haberme puesto en el este camino.

Para el agradecimiento a mis padres y hermanos no existen palabras que puedan mostrar tanta gratitud. Su constante apoyo, consejo, ánimos y lucha han sido las principales motivaciones para continuar cuando las cosas se ponen mal.

Agradezco también a mis Asesores César Eduardo Damián Ascencio y Sergio Cano Andrade por haberme brindado su apoyo y no cabe duda que si he visto más lejos es por que estoy sentado sobre los hombros de gigantes.

No puedo dejar de lado a todos los amigos de estudio, parrandas, viajes, etc que después de tanto me tomé la libertad de llamar hermanos.

A la persona tan especial que siempre ha estado para mi. Me alegra haber coincidido en esta vastedad de espacio e inmensidad del tiempo.

Finalmente pero no menos importante, agradezco a Quiroga Trucks S.A De C.V por el apoyo económico brindado durante el ultimo año, sin el cual no hubiera podido tener las herramientas para este trabajo.

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo pretende el estudio del circuito cuántico compuesto por las compuertas Hadamard y Controlled Not denominado H-CNOT mediante la dinámica de steepest-entropy-ascent quantum thermodynamics (SEA-QT) que hace referencia a sistemas cerrados. Se pretende determinar un parámetro llamado "*tiempo de disipación*" y así caracterizar el sistema, de esta manera hacer una comparativa entre los valores propuestos con los cuales se han presentado trabajos relevantes sobre el tema y los que se obtengan mediante la regla de oro de Fermi.

El capítulo presente hace referencia a una breve introducción sobre el trabajo y los inicios de la teoría de SEA-QT. En el Capítulo 2 se presenta un marco teórico bastante extenso con el cual es posible introducir al interesado en la mecánica cuántica y computación cuántica. Igualmente, se muestra una introducción más formal al marco de SEA-QT así como a sus ecuaciones de movimiento, finalmente en este son añadidos algunos resultados anteriores por autores que han trabajado en bajo esta dinámica disipativa en compuertas cuánticas. La metodología y descripción de efectos de las compuertas es presentada en el capítulo 3, de esta manera se puede ahora introducir el funcionamiento del circuito H-CNOT. Finalmente en dicho capítulo es deducida la regla de oro de Fermi (ROF) para uno y dos qubits. En el Capítulo 4 pueden ser encontrados los resultados de la simulación del circuito bajo el marco de SEA-QT, para este primer resultado, son propuestos los "*Tiempos de disipación*" para cada compuerta de acuerdo con trabajos anteriores. Se puede encontrar también los resultados numéricos

del estos tiempos al implementar la teoría de perturbación. Por ultimo e igualmente en el cuarto capítulo son utilizados los valores obtenidos por la ROF para simular nuevamente el protocolo H-CNOT y de esta manera hacer una comparativa con los primeros resultados de dicho apartado. El capítulo 5 está dedicado específicamente a las conclusiones.

1.1. Descripción general de la computación cuántica

"La escala juega un papel importante. A medida que se desciende en ella, los efectos gravitatorios se hacen menos perceptibles y podemos decir que otras fuerzas toman mayor importancia, esto obliga a entrar en un mundo donde las cosas no son nada intuitivas y el sentido común falla"[?].

Con el nacimiento de la teoría cuántica y el avance de la tecnología han surgido ideas muy innovadoras queriendo implementar la combinación de ambas, en muchos casos esta combinación ha creado productos de muy alto impacto. Para otras aplicaciones como la computación cuántica se presentan problemas muy serios desde el diseño de equipos adecuados hasta el intento de predecir y controlar la decoherencia, entonces es de suma importancia el estudio del tiempo en el cual se pierde un estado coherente entre los qubits [?]. La computación cuántica pretende utilizar las propiedades de la mecánica cuántica como; superposición, entrelazamiento cuántico, etc., con el fin de construir un procesador basado en qubits. Por las propiedades ya mencionadas este procesador promete romper con las barreras de los procesadores actuales haciendo posible la solución de problemas hasta el momento irresoluble en un tiempo de computo razonable. Y aunque promete bastante, la mecánica cuántica tiene sus propias limitaciones como el control de partículas tan pequeñas, la decoherencia, etc.

1.2. Descripción general de SEA-QT

En mecánica cuántica la ecuación de Schrodinger es la ecuación de movimiento y aunque tiene grandes éxitos, existen intentos por introducir las irreversibilidades y con

esto introducir la segunda ley de la termodinámica en la mecánica cuántica, tal es el caso de SEA-QT. Los trabajos pioneros de Hatsopoulos y Gyftopoulos de implementar una descripción más general de la segunda ley de la termodinámica da pauta a la combinación de la mecánica cuántica con la termodinámica y en 1976 publican una serie de artículos [?, ?, ?, ?] titulados "*Quantum Theory of Mechanics and Thermodynamics*" donde de acuerdo con 4 postulados, intentan introducir la segunda ley de la termodinámica en la mecánica cuántica.

SEA-QT surge como una idea de un sistema cerrado y propone que las irreversibilidades son intrínsecas al mismo. Basado en el principio de máxima producción de entropía de la mecánica estadística, esta teoría pretende una dinámica más amplia lograda proponiendo que $\rho \geq \rho^2$ y en la construcción matemática se preserva el principio de probabilidad de la mecánica cuántica así como la conservación de la energía para Hamiltonianos independientes del tiempo [?]. En 1985 Beretta en [?] presenta la construcción de la ecuación de movimiento que pretende describir una dinámica fuera del equilibrio y es llamada la ecuación de movimiento de SEA-QT.

1.3. Motivación

La motivación de este trabajo recae en analizar el comportamiento de la decoherencia en circuitos cuánticos y de esta manera analizar que se podría mejorar en el futuro. Como bien es sabido, el entrelazamiento entre sistemas cuánticos es la principal atracción que ha llevado a la idea de computación cuántica ya que aumenta de una manera exponencial el potencial de cómputo [?, ?]. Si se pudiera modelar la pérdida de entrelazamiento o incluso controlarlo se estaría llegando más cerca de por fin ver realizado físicamente el trabajo teórico de muchos. Pero la principal motivación de utilizar el marco teórico de SEA-QT recae gracias a que se pueden predecir fenómenos fuera del equilibrio, por ejemplo, SEA-QT se ha usado para modelar sistemas químicos reactivos [?]. Más relacionado con el tema de compuertas cuánticas, en [?] se modelaron compuertas de un qubit bajo la dinámica de esta teoría. Más recientemente los asesores de este proyecto lo utilizaron para modelar el entrelazamiento en la compuerta "*controlled pashe*", mostrando que el comportamiento de la concurrencia obtenida

experimentalmente y la calculada con la dinámica de SEA-QT es similar.

1.4. Objetivos

Objetivo General

Mediante el marco de SEA-QT obtener una simulación que modele el grado de entrelazamiento (conurrencia), decoherencia y entropía para un sistema y su evolución en el tiempo. Implementar la regla de oro de Fermi al circuito H-CNOT y así obtener un tiempo relacionado con el *"tiempo de disipación"*.

Objetivos específicos:

- Aplicar la regla de oro de Fermi para cada una de las compuestas cuánticas que componen el circuito H-CNOT.
- Crear un programa de modelado de las compuestas bajo la dinámica de SEA-QT mediante Python.
- Comparar las irreversibilidades en las compuertas del circuito H-CNOT para determinar cuál es más significativa.
- Caracterizar el protocolo H-CNOT mediante los tiempos de disipación obtenidos por la ROF.

1.5. Hipótesis

- Los sistemas cuánticos analizados siguen la dinámica de SEA-QT.
- Se puede determinar el tiempo de disipación mediante la probabilidad de transición (Γ) con la relación

$$\tau_D = \frac{1}{\Gamma}.$$

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Introducción a la mecánica cuántica

2.1.1. Inicios de la mecánica cuántica

Los intentos de describir la radiación de un cuerpo negro fueron fallidos ya que la teoría clásica predecía radiación de energía infinita a altas frecuencias por la ley de Rayleigh-Jeans. De forma similar la ley de Wien describía la naturaleza a altas frecuencias. Ese problema fue resuelto por Max Planck que a principios del siglo XX asumió una absorción de energía discreta en función de una constante llamada constante de Planck, dando solución al problema.

Max Planck postuló que la energía no es continua y se transmite en paquetes llamados cuantos, donde la energía fundamental de un cuanto viene dado por la expresión $E = h\nu$ donde ν es la frecuencia de la radiación y h es la constante de Planck ($h = 6,62 \times 10^{-34} J \cdot s$). Además de esto, postula que dichos paquetes contienen energía en múltiplos de este cuanto fundamental, esto es $E = nh\nu$ donde $n = 1, 2, 3, \dots n$ [?].

En 1905 para una descripción del efecto fotoeléctrico, Einstein enuncia usando la teoría de los cuantos de Planck, que fuentes de emisión que pasan del estado de energía $nh\nu$ a $(n-1)h\nu$ emitirán un paquete de energía electromagnética $h\nu$, estos paquetes de energía emitida son llamados fotones, entonces cada fotón tiene un contenido energético fundamental $h\nu$. Si se toma el cuanto como una partícula con masa en reposo $m_0 = 0$, tendrá una energía cinética T que será igual a la energía relativista total E , entonces

se puede establecer una relación entre la energía y el momento p de la partícula como $E = pc$, donde c es la velocidad del cuanto que es igual a velocidad de la luz [?].

Entonces, la energía del fotón y el momento están dados por

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad (2.1)$$

y

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \quad (2.2)$$

respectivamente, donde k es el número de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = 2\pi\nu$ y $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

Las Ecs. (?? y ??) son conocidas como la relación Einstein-Planck. Esta relación conecta propiedades de partículas a las ondas. En 1924 Louis de Broglie postuló que la relación de Einstein-Planck debería extenderse a partículas materiales las cuales tendrían asociada una onda piloto, esta onda piloto tendría una longitud de onda dependiente del momento y una frecuencia en función de la energía total de la partícula como se muestra en las Ecs. (?? y ??) respectivamente.

$$\lambda = h/p \quad (2.3)$$

$$\nu = \frac{E}{h} \quad (2.4)$$

2.1.2. La ecuación de Schrödinger

La idea de Louis de Broglie hacía referencia a que una partícula tenía asociada una onda piloto la cual dictaminaba el movimiento de dicha partícula, sin saber como se propagaban esas ondas piloto. En 1925 Erwin Schrödinger desarrolló una ecuación de movimiento siguiendo los postulados de Louis de Broglie sin utilizar las ondas piloto y más bien una función matemática llamada función de onda $\Psi(r, t)$.

Una deducción de la ecuación de Schrödinger

Una deducción más detallada con poco rigor matemático suficiente para seguirse fácilmente puede encontrarse en [?].

La ecuación de Schrödinger tiene que ser consistente con los postulados de Louis De Broglie y cumplir con la conservación de la energía del sistema. Por otra parte tiene que ser lineal en $\Psi(r, t)$ para poder encajar con la superposición de las ondas y la descripción de experimentos, esto quiere decir que una combinación lineal de las soluciones también es solución. Con $E = T + V$ donde E es la energía total y T es la energía cinética se puede escribir

$$\hbar\omega = \frac{(\hbar k)^2}{2m} + V_0, \quad (2.5)$$

utilizando la función de onda del tipo $\Psi = \cos(kx - \omega t) + \gamma \sin(kx - \omega t)$, donde γ es una constante que dará libertad a que la función de onda propuesta sea una solución de la Ec. ???. Sustituyendo la segunda derivada parcial respecto de x y la primera derivada parcial respecto del tiempo se puede encontrar una correspondencia con la Ec. (??) de la forma

$$\beta \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V_0 \Psi, \quad (2.6)$$

donde α y β son constantes a determinar las cuales deberán ser consistentes con la Ec. (??). Es posible demostrar que usando otras funciones las constantes α y β no son consistentes con dicha ecuación y por tanto no son funciones que cumplan con lo establecido por Schrödinger. De la Ec. (??) y sustituyendo la ecuación propuesta se puede obtener $[-\alpha k^2 + V_0 + \beta \omega \gamma] \cos(kx - \omega t) + [-\alpha k^2 \gamma + V_0 \gamma - \beta \omega] \sin(kx - \omega t) = 0$. De acuerdo con las funciones $\sin(kx - \omega t)$ y $\cos(kx - \omega t)$ en la ecuación anterior, para cumplir la igualdad los términos que acompañan a dichas funciones tienen que ser cero, con esto es posible determinar el valor de las constantes los cuales serán $\alpha = -\frac{\hbar^2}{2m}$, $\beta = i\hbar$ y $\gamma = i$.

Sustituyendo los valores encontrados se obtiene una ecuación que describirá la evolución de la función de onda para una dimensión y con un potencial constante la cual cumple con el principio de conservación de la energía y los postulados de Luis de Bro-

glie utilizados por Schrödinger. Es posible demostrar que incluso cuando el potencial $V(x, t)$ no es constante la ecuación toma la forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) + V(x, t) \Psi(x, t). \quad (2.7)$$

La Ec. (??) es la ecuación de Schrödinger para una dimensión. La ecuación de Schrödinger es una ecuación diferencial en derivadas parciales en el dominio de los números complejos, entonces las soluciones a dicha ecuación tienen un carácter complejo.

Es importante mencionar que la función de onda no es una onda oscilatoria que acompaña a la partícula, ya que no tiene una representación física directa. Como ya fue mencionado el carácter imaginario de la misma no hace referencia a un valor observable dentro de la física.

2.1.3. La función de onda y su relación con la probabilidad

Propuesta por Max Born, la relación entre $\Psi(x, t)$ y la partícula es de probabilidad. Esto es, si en el tiempo t se efectúa una medida para encontrarla en un intervalo $(x, x + dx)$, la probabilidad es igual al cuadrado del valor absoluto de la función de onda, es decir $P(x, t)dx = |\Psi(x, t)|^2 dx = \Psi(x, t)\Psi^*(x, t)dx$, donde Ψ^* es el complejo conjugado de $\Psi(x, t)$, esto nos dice que la probabilidad de encontrar la partícula en todo el espacio de x es la probabilidad total o bien

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1. \quad (2.8)$$

2.1.4. Solución de la ecuación Schrödinger

Para resolver este tipo de ecuaciones se puede usar el método de separación de variables [?] siempre y cuando el potencial sólo dependa del espacio, es decir, $V(x, t) = V(x)$. Para casos donde V depende explícitamente del tiempo la ecuación diferencial es en general no separable y es necesaria una formulación perturbativa.

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

La separación de las variables permite escribir la función de onda como un producto de funciones, una dependiente del tiempo y otra dependiente del espacio como

$$\Psi(x, t) = \psi(x)\phi(t), \quad (2.9)$$

sustituyendo la Ec. (??) en la Ec. (??) y haciendo la modificación ya mencionada en el potencial se obtiene

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x)\phi(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x)\phi(t) + V(x)\psi(x)\phi(t).$$

El método de separación de variables indica que las funciones deben ser iguales a una constante C , entonces se puede escribir dos ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\frac{i\hbar}{\phi(t)} \frac{d}{dt} \phi(t) = \pm C$$

y

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = \pm C\psi(x),$$

la parte dependiente del tiempo de $\Psi(x, t)$ tiene como solución

$$\phi(t) = \exp\left(\frac{-i(\pm C)t}{\hbar}\right),$$

con esto se puede escribirse como una función oscilatoria compleja

$$\phi(t) = \cos\left(\frac{\pm Ct}{\hbar}\right) - i \sin\left(\frac{\pm Ct}{\hbar}\right),$$

entonces, es posible obtener que $C = \mp E$ donde E es la energía total del sistema, por la física del problema es necesario asumir que $C = +E$.

Es posible escribir la parte dependiente e independiente del tiempo de la ecuación Schrödinger como

$$\frac{i\hbar}{\phi(t)} \frac{d}{dt} \phi(t) = E \quad (2.10)$$

y

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad (2.11)$$

respectivamente. Con las Ecs. (?? y ??) es más que claro que para poder usar el método de separación de variables y así obtener una solución de la parte dependiente del tiempo de la ecuación de Schrödinger era necesaria la no dependencia temporal del potencial en la Ec. (??). Para el caso $V(x) = 0$, la Ec. (??) tiene como solución

$$\phi(t) = \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right), \quad (2.12)$$

entonces, la solución de la ecuación de Schrödinger para un potencial que sólo depende del tiempo puede escribirse como

$$\Psi(x, t) = \exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right) \psi(x). \quad (2.13)$$

Recordando las discusiones anteriores sobre cuantizar la energía y los valores permitidos de la misma, se puede ver que la Ec. (??) permite ciertos valores de la energía, entonces existen tantas soluciones $\phi(x)$ como valores de la energía a los cuales se pueda acceder. De igual manera recordando la linealidad de la Ec. (??), es necesario que una suma de todas las soluciones también sea solución y se puede escribir la función de onda como

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(\frac{-iE_n t}{\hbar}\right) \psi(x), \quad (2.14)$$

donde a_n es una cierta amplitud de la onda en el dominio de los complejos, cabe mencionar que no es una amplitud de una onda oscilante física, sino que es una amplitud de la solución de la función de onda. Con la Ec. (??) se puede definir la densidad de probabilidad $\Psi(x, t)\Psi^*(x, t)$ como

$$\Psi(x, t)\Psi^*(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_m^* \exp\left(\frac{-i(E_n - E_m)t}{\hbar}\right) \psi_n(x) \psi_m^*(x). \quad (2.15)$$

Una propiedad importante de la parte independiente del tiempo de la función de onda es la ortogonalidad entre estados 1,2,3,...,n. Esto se representa como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) \psi_m^*(x) dx = \delta_{mn}, \quad (2.16)$$

donde δ_{mn} es la delta de Kronecker. Además, debido a su interpretación probabilista, la función de onda debe estar normalizada

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}. \quad (2.17)$$

En el caso para $\delta_{mn} = 0$ se dice que los estados son ortogonales, entonces se puede decir la que función de onda se encuentra en un espacio n -dimensional donde cada función linealmente independiente corresponde a una solución de la Ec.(??), en otras palabras existen tantas dimensiones como soluciones linealmente independientes $\Psi(x, t)$. Es posible escribir la Ec. (??) como

$$\Psi(x, t) \Psi^*(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_n^* \psi_n(x) \psi_n^*(x), \quad (2.18)$$

y ya que la probabilidad debe conservarse, entonces si se hace el razonamiento de que se tiene que encontrar un estado o una superposición de estados la probabilidad total de encontrar este es total o $P = 1$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, t) \Psi^*(x, t) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_n^* = 1, \quad (2.19)$$

esto hace referencia a la interpretación probabilista de encontrar un estado n , es decir, que como la función de onda superpuesta contiene todos los posibles estados accesibles y $a_n a_n^*$ representa la probabilidad de encontrar el estado n .

2.2. Espacio de Hilbert

El espacio de Hilbert (\mathcal{H}) es un espacio vectorial de dimensión infinita en el campo de los complejos y cuenta con todas las propiedades de un espacio vectorial. Anteriormente fue comentado que la función de onda puede ser representada como una combinación lineal de las mismas. La ortogonalidad de las funciones de onda particulares forman el

espacio de Hilbert. Entonces se puede decir que este tendrá tantas dimensiones como grados de libertad tenga la función de onda superpuesta, con esto se puede representar la función de onda como un vector de la forma

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n |\Psi_n\rangle \quad (2.20)$$

donde la notación $|\Psi\rangle$ representa un vector y será explicada más adelante.

2.3. Postulados de la mecánica cuántica

Para establecer los postulados de la mecánica cuántica es más conveniente introducir una notación diferente a la que se ha estado manejando hasta el momento, esta notación llamada "*notación Bra-Ket o notación de Dirac*" fue introducida por Paul Dirac en 1939 y está basada en asociar la función de onda con un vector reglón que llamó ket, mientras que el complejo conjugado de la función de onda se asocia con un vector reglón llamado bra. De esta forma, el producto interno entre vectores se denomina Braket.

2.3.1. Estado

Un estado contiene una completa descripción del sistema, en mecánica cuántica es un vector en el espacio de Hilbert. La función de onda se representa como un vector ket en el espacio de Hilbert, es decir $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ y tiene un carácter complejo. Para poder formar una base, los vectores $|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle, |\Psi_3\rangle, \dots, |\Psi_n\rangle$ deben estar normalizados, la normalización es la misma que para cualquier vector, entonces $|\widehat{\Psi}_n\rangle = \frac{|\Psi_n\rangle}{||\Psi_n\rangle||}$, donde $||\Psi_n\rangle||$ es definida como el modulo y matemáticamente escrita como $\sqrt{\langle\Psi_n|\Psi_n\rangle}$. El producto interno está definido como $\langle\Psi_n|\Psi_n\rangle$ y tiene las siguientes propiedades.

- i) Positivo: $\langle\Psi|\Psi\rangle > 0$
- ii) Lineal: $\langle\varphi|(a|\Psi_1\rangle + b|\Psi_2\rangle) = a\langle\varphi|\Psi_1\rangle + b\langle\varphi|\Psi_2\rangle$
- iii) Simétrico de la forma $\langle\varphi|\Psi\rangle = \langle\Psi|\varphi\rangle^*$

Nada impide hacer el producto interno $\langle \Psi_m | \Psi_n \rangle$, si estos vectores son ortonormales se puede escribir que $\langle \Psi_m | \Psi_n \rangle = \delta_{mn}$.

Es posible hacer operaciones con vectores en la notación de Dirac, entonces tomando la Ec. (??) se puede escribir

$$\langle \Psi_n | \Psi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle \Psi_n | \Psi_n \rangle ,$$

estando los vectores normalizados entonces; $a_n = \langle \Psi_n | \Psi \rangle$ y sustituyendo en la Ec. (??) se obtiene

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \Psi_n | \Psi_n \rangle |\Psi\rangle ,$$

de lo anterior es posible deducir que $\sum_{n=1}^{\infty} \langle \Psi_n | \Psi_n \rangle = I$, donde I es la matriz identidad, entonces

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \langle \Psi | \sum_{n=1}^{\infty} \langle \Psi_n | \Psi_n \rangle |\Psi\rangle$$

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \Psi | \Psi_n \rangle \cdot \langle \Psi_n | \Psi \rangle$$

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} || \langle \Psi | \Psi_n \rangle ||^2$$

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} ||a_n||^2. \quad (2.21)$$

La Ec. (??) estando el vector $|\Psi\rangle$ normalizado tiene una interpretación probabilista de manera que $\sum_{n=1}^{\infty} ||a_n||^2 = 1$. Entonces el vector de onda puede representarse como

$$|\Psi\rangle = [\langle \Psi_1 | \Psi \rangle, \langle \Psi_2 | \Psi \rangle, \langle \Psi_2 | \Psi \rangle, \dots, \langle \Psi_n | \Psi \rangle]^T = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]^T \quad (2.22)$$

La Ec. (??) es la representación de la función de onda como un vector en un espacio \mathcal{H} lo que quiere decir que el vector de estado puede ser representado como una combinación lineal de la base que forma el espacio, cada componente es compleja y el producto

interno $\langle \Psi | \Psi \rangle$, regresará la probabilidad de encontrar cada estado accesible [?].

2.3.2. Observables

Los observables son cantidades que se pueden medir físicamente. Las cantidades físicas tales como el momento y la energía son representadas mediante operadores hermíticos, es decir $\hat{T} = \hat{T}^\dagger$, donde $\hat{T} = (\hat{T}^*)^T$ "traspuesta conjugada". Un operador puede ser representado de forma matricial como

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & \dots & T_{2n} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & \dots & T_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & T_{n3} & \dots & T_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

El rango del operador es igual a la dimensión de espacio de Hilbert para el sistema en cuestión [?]. Recordando la ortogonalidad entre los estados del espacio vectorial, así como la normalizaación de la base, es posible representar cada componente del operador como $T_{ij} = \langle \Psi_i | T | \Psi_j \rangle$. Entonces es posible escribir el operador como.

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} \langle \Psi_1 | T | \Psi_1 \rangle & \langle \Psi_1 | T | \Psi_2 \rangle & \langle \Psi_1 | T | \Psi_3 \rangle & \dots & \langle \Psi_1 | T | \Psi_n \rangle \\ \langle \Psi_2 | T | \Psi_1 \rangle & \langle \Psi_2 | T | \Psi_2 \rangle & \langle \Psi_2 | T | \Psi_3 \rangle & \dots & \langle \Psi_2 | T | \Psi_n \rangle \\ \langle \Psi_3 | T | \Psi_1 \rangle & \langle \Psi_3 | T | \Psi_2 \rangle & \langle \Psi_3 | T | \Psi_3 \rangle & \dots & \langle \Psi_3 | T | \Psi_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \Psi_n | T | \Psi_1 \rangle & \langle \Psi_n | T | \Psi_2 \rangle & \langle \Psi_n | T | \Psi_3 \rangle & \dots & \langle \Psi_n | T | \Psi_n \rangle \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Los observables están relacionados con los operadores como lo indica la Ec. (??)

$$\langle T \rangle = \sum_{n=1} \langle \Psi_n | \hat{T} | \Psi_n \rangle. \quad (2.25)$$

De la Ec. (??) es evidente que el resultado es un escalar el cual corresponde al observable, por otro lado aunque los estados y observables pueden ser números complejos, al ser los operadores hermíticos garantiza que siempre un observable sea un numero real.

2.3.3. Mediciones

Los valores medidos de un operador \hat{T} son los eigenvalores del mismo, antes de la medición cada observable tiene una probabilidad de ser obtenido.

Recordando la ecuación característica es posible escribir el observable en función de los eigenvalores del observable como

$$\langle \hat{T} \rangle = \lambda_n \langle \Psi_n | \Psi_n \rangle, \quad (2.26)$$

donde λ_n son los n eigenvalores del sistema. Si el estado está normalizado cada eigenvalor corresponde al valor de expectación del observable [?].

2.3.4. Dinámica

La evolución de un estado cuántico es unitaria, es decir, los operadores tienen la propiedad de que $U^\dagger U = U U^\dagger = I$ y es generada por un operador llamado "*Hamiltoniano*" que cumple también esta propiedad. Es claro que la Ec. (??) usando la notación de Dirac puede escribirse como

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = H |\Psi\rangle, \quad (2.27)$$

donde el Hamiltoniano es la suma de la energía cinética y la potencial y es escrito como

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 |\Psi\rangle}{\partial x^2} + V |\Psi\rangle. \quad (2.28)$$

La Ec. (??) es la ecuación de movimiento y dictamina la evolución de sistemas cuánticos.

2.4. El operador de densidad

El formalismo del operador de densidad " ρ " es una representación que contienen toda la información de los estados accesibles del sistema. Con las propiedades de este operador se puede tener una descripción total de un sistema cuántico [?] y está definido como

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} P_n |\Psi\rangle \langle \Psi|, \quad (2.29)$$

con esta ecuación es claro que los valores en la diagonal ρ_{nn} del operador de densidad corresponden a los valores de probabilidad de encontrar el sistema en el estado n , los valores fuera de la diagonal ρ_{mn} son conocidos como "*coherencias*" que representan la interferencia entre los estados $|\Psi_m\rangle$ y $|\Psi_n\rangle$ [?].

Si el estado es conocido entonces $P = 1$ y el estado estará bien definido lo cual es llamado como estado puro y el operador de densidad estará definido como $\rho = |\Psi\rangle \langle \Psi|$. Los valores de expectación pueden ser calculados a partir del operador de densidad con la operación Traza del operador densidad en relación con el operador relacionado, es decir

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho \hat{A}). \quad (2.30)$$

2.4.1. Propiedades del operador de densidad

Hermítico $\rho = \rho^\dagger$

Si $\rho = |\Psi\rangle \langle \Psi|$ y $|\Psi\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, entonces

$$|\Psi\rangle \langle \Psi| = \begin{bmatrix} \alpha\alpha^* & \alpha\beta^* \\ \beta\alpha^* & \beta\beta^* \end{bmatrix},$$

con esto claramente $\rho = \rho^\dagger$. Otra forma de concluir esto es utilizando la notación de estado, con esto se puede escribir que

$$\rho^\dagger = [|\Psi\rangle \langle \Psi|]^\dagger,$$

usando las propiedades de la transposición y el conjugado entonces se puede escribir

$$\rho^\dagger = [|\Psi\rangle \langle \Psi|],$$

finalmente

$$\rho = \rho^\dagger.$$

Indempotente para estados puros $\rho = \rho^2$

Si $\rho = |\Psi\rangle \langle\Psi|$, entonces

$$\rho^2 = [|\Psi\rangle \langle\Psi|][|\Psi\rangle \langle\Psi|],$$

entonces

$$\rho^2 = |\Psi\rangle \langle\Psi| |\Psi\rangle \langle\Psi|,$$

si el vector de estado esta normalizado entonces

$$\rho^2 = |\Psi\rangle \langle\Psi|,$$

con esto se llega a

$$\rho = \rho^2.$$

Traza unitaria $Tr(\rho) = 1$

Si $\rho = |\Psi\rangle \langle\Psi|$ y $|\Psi\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, entonces

$$|\Psi\rangle \langle\Psi| = \begin{bmatrix} \alpha\alpha^* & \alpha\beta^* \\ \beta\alpha^* & \beta\beta^* \end{bmatrix},$$

para esto es claro que α y β son números complejos y que $|\alpha|^2 = \alpha\alpha^\dagger$ y $|\beta|^2 = \beta\beta^\dagger$, con esto se concluye que estos términos corresponden a las probabilidades de encontrar el sistema en su correspondiente estado, entonces la suma de los mismos tiene que ser igual a la unidad.

Positivo definido $\rho \geq 0$

2.4.2. Ecuación de movimiento en función del operador de densidad

Es posible determinar la dinámica del sistema cuántico en términos de la matriz de densidad. En 1927 el matemático John von Neumann desarrolló una ecuación de movimiento introduciendo el formalismo de este operador. La Ec. (??) es una ecuación diferencial que determina la evolución temporal del vector de estado $|\Psi\rangle$, multiplicándola desde la derecha por $|\Psi\rangle$, además si se obtiene la transpuesta conjugada de la misma y multiplicando desde la izquierda por $|\Psi\rangle$ se obtienen las ecuaciones

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} \langle\Psi| = H |\Psi\rangle \langle\Psi|$$

y

$$-|\Psi\rangle i\hbar \frac{\partial \langle\Psi|}{\partial t} = |\Psi\rangle \langle\Psi| H,$$

respectivamente, restando la segunda ecuación de la primera se obtiene

$$i\hbar \left(\frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} \langle\Psi| + |\Psi\rangle \frac{\partial \langle\Psi|}{\partial t} \right) = H |\Psi\rangle \langle\Psi| - |\Psi\rangle \langle\Psi| H,$$

reduciendo se obtiene la ecuación de von Neumann que se puede escribir como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{-i}{\hbar} [H, \rho]. \quad (2.31)$$

La Ec. (??) determinará la evolución del operador de densidad en el tiempo y contiene toda la información de sistema.

2.5. Fundamentos de SEA-QT

En [?] se menciona a la mecánica cuántica como una ciencia incompleta pero no por la falta de determinismo sino por la imposibilidad de descripción de fenómenos fuera del equilibrio con su ecuación de movimiento, ya que no puede describir todos los estados físicos reales. La Figura ?? muestra que la mecánica cuántica con las propiedades de la matriz de densidad ρ sólo puede asumir estados puros. La idea principal de tener

a la mecánica cuántica y la termodinámica en una teoría unificada está propuesta en el marco de SEA-QT, el cual conserva el formalismo matemático de ambas teorías propone una dinámica ampliada ($\rho \geq \rho^2$).

Con esta nueva dinámica propuesta la matriz de densidad puede ser una matriz no idempotente ($\rho \geq \rho^2$). En la esfera de Bloch de radio unitario los estados ahora pueden ser representados en el interior de esta como en la Figura ?? . Estos estados son denominados estados no puros o mixtos, donde se debe cumplir $(P_x)^2 + (P_y)^2 + (P_z)^2 \leq 1$.

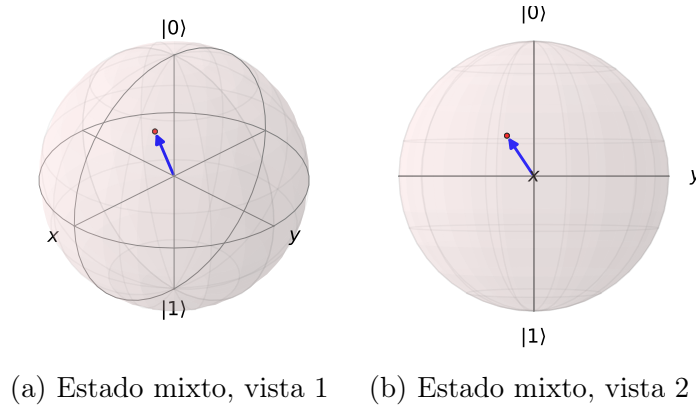


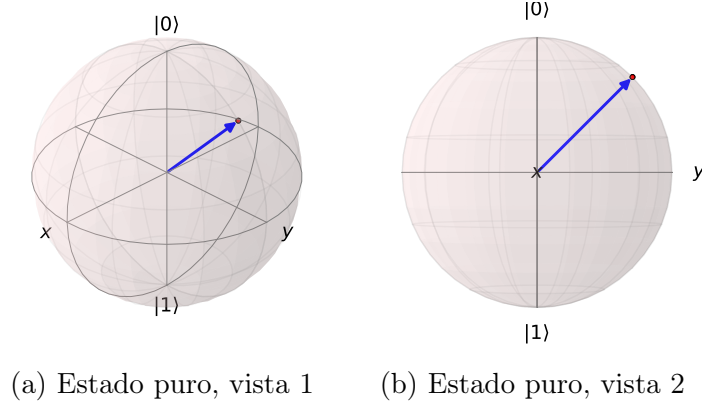
Figura 2.1: Estados mixtos ($\rho \geq \rho^2$)

La Figura ?? muestra dentro de la esfera de Bloch (radio unitario) un estado para una partícula de spin $\frac{1}{2}$. Para un sistema de dos estados accesibles, es conveniente expresar la matriz de densidad en términos de las matrices de Pauli como

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{P}_i \vec{\sigma}_i), \quad (2.32)$$

donde σ_i , ($i = 1, 2, 3$) representa cada una de las matrices de Pauli que junto con la matriz identidad I forman una base completa de las matrices 2x2. Usando la ecuación de la esfera para un radio unitario $P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = 1$, es fácil comprobar que con cualquier valor de $P_{x,y,z}$ se satisface que $\rho = \rho^2$ en la superficie de la esfera.

La dinámica ampliada propuesta en el marco de SEA-QT permite que los estados no puros puedan ser accedidos dinámicamente además de predecir una generación de entropía no nula en contraste con la dinámica de von Neumann. De la Ec. (??) es posible deducir que la generación de entropía es nula usando la formulación de

Figura 2.2: Estados puros ($\rho = \rho^2$)

la entropía de von Neumann [?]. En otras palabras la evolución de un qubit donde la ecuación de movimiento es la Ec. (??) podría ser vista como un proceso reversible. Esto se observa al sustituir la dinámica de la ecuación de von Neumann en la definición de entropía matemáticamente escrita como

$$S = -k_B \text{Tr}(\rho \ln \rho). \quad (2.33)$$

Derivando la Ec. (??) respecto del tiempo, sabiendo que $\frac{d}{dt} \text{Tr}(\rho) = 0$ y sustituyendo la Ec. ?? se obtiene

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-k_B i}{\hbar} \text{Tr}([H, \rho] \ln(\rho)),$$

donde $[A, B]$ es el conmutador el cual se define como $[A, B] = AB - BA$, sustituyendo esto en la ecuación anterior y usando las propiedades cíclicas de las trazas es posible determinar que $\frac{ds}{dt} = 0$. Por tanto la ecuación de Schrödinger predice una nula generación de entropía de acuerdo con la formulación de entropía de von Neumann. En el marco de SEA-QT la dinámica propuesta permite conservar el principio de hermiticidad y positividad, con esto se conserva la probabilidad y la conservación de energía. En [?] se propone una ecuación de movimiento con la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sqrt{\rho} E + E^\dagger \sqrt{\rho}, \quad (2.34)$$

como se muestra en [?], es conveniente definir el producto de Hilbert-Schmidt para

matrices hermíticas como

$$(F|G) = \frac{1}{2}Tr(F^\dagger G + G^\dagger F), \quad (2.35)$$

entonces para un observable independiente del tiempo ($R \neq R(t)$), su valor de expectación está determinado como $r(\rho) = Tr(\rho R)$. De esta manera, la dependencia temporal del observable puede ser convenientemente expresada en términos del producto de Hilbert-Schmidt como

$$\frac{dr}{dt} = 2(R\sqrt{\rho}|E), \quad (2.36)$$

donde para observables independientes del tiempo, el producto de Hilbert-Schmidt es zero, indicando ortogonalidad con respecto al operador E . Además, en [?] se indica que el gradiente de un observable puede ser escrito como

$$\frac{dr}{d\sqrt{\rho}} = (R\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho}R). \quad (2.37)$$

Para el caso de la entropía de von Neumann, la generación de entropía y su gradiente son expresados como

$$\frac{ds}{dt} = (E|\frac{ds}{d\sqrt{\rho}}) \quad (2.38)$$

y

$$\frac{ds}{d\sqrt{\rho}} = -2k_B(\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho}Ln(\rho)), \quad (2.39)$$

respectivamente. Definiendo $E = E_H + E_D$, donde $E_H = \frac{-i}{\hbar}\sqrt{\rho}[H - Tr(\rho H)I]$ y para el caso $E_D = 0$, se recupera la ecuación de movimiento de la mecánica cuántica para estados puros. Para el caso $E_D \neq 0$ y con la Ec. (??) se obtiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{-i}{\hbar}[H, \rho] + \sqrt{\rho}E_D + E_D^\dagger\sqrt{\rho}. \quad (2.40)$$

Para introducir la generación de entropía se asume que el operador E_D está en la dirección del gradiente de entropía. Además para $(E_D|\sqrt{\rho}R_i) = 0$ donde $R_i = \{I, H\}$ los operadores R_i y E_D forman una base de un espacio lineal de operadores [?]. Geo-

métricamente esto indica que la dinámica ampliada del marco de SEA-QT tiene una dirección alineada con el gradiente de entropía. Un conteo de unidades sugiere que el factor de proporcionalidad E_D y la proyección del gradiente de entropía ortogonal a los operadores R_i (definido como el operador D) están relacionados como

$$E_D = -\frac{1}{2\tau}\tilde{D}, \quad (2.41)$$

entonces con la ecuación de movimiento propuesta en el marco de SEA-QT se puede escribir como

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{-i}{\hbar}[H, \rho] - \frac{1}{\tau}D_j, \quad (2.42)$$

donde

$$D_j = \frac{1}{2}(\sqrt{\rho}\tilde{D}_j + (\sqrt{\rho}\tilde{D}_j)^\dagger)$$

y los operadores \tilde{D}_j son expresados mediante la matriz de Gram Schmidt como

$$\tilde{D} = \frac{\begin{bmatrix} (\sqrt{\rho}\ln(\rho))^j & (\sqrt{\rho}R_0)^j & (\sqrt{\rho}R_1)^j & & (\sqrt{\rho}R_n)^j \\ (R_0, \ln(\rho))^j & (R_0, R_0)^j & (R_0, R_1)^j & \dots & (R_0, R_n)^j \\ (R_1, \ln(\rho))^j & (R_1, R_0)^j & (R_1, R_1)^j & \dots & (R_1, R_n)^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (R_n, \ln(\rho))^j & (R_n, R_0)^j & (R_n, R_1)^j & \dots & (R_n, R_n)^j \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} (R_0, R_0)^j & (R_0, R_1)^j & \dots & (R_0, R_n)^j \\ (R_1, R_0)^j & (R_1, R_1)^j & \dots & (R_1, R_n)^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (R_n, R_0)^j & (R_n, R_1)^j & \dots & (R_n, R_n)^j \end{bmatrix}},$$

donde $(F, G) = (\sqrt{\rho}F|\sqrt{\rho}G)$.

2.5.1. Ecuación de movimiento para sistemas de una partícula en el marco de SEA-QT

Para sólo un generador de movimiento, el operador \tilde{D} está determinado por $R_0 = I$ y $R_1 = H$, entonces el determinante de Gram Schmidt se reduce a

$$\tilde{D} = \frac{\begin{bmatrix} \sqrt{\rho} \ln(\rho) & \sqrt{\rho} R_0 & \sqrt{\rho} R_1 \\ (I, \ln(\rho)) & (I, I) & (I, H) \\ (H, \ln(\rho)) & (H, I) & (H, H) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} (I, I) & (I, H) \\ (H, I) & (H, H) \end{bmatrix}}.$$

Utilizando la Ec. (??) para resolver el determinante la ecuación de movimiento queda escrita como

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{-i}{\hbar} [H, \rho] - \frac{1}{\tau_D} (\rho \ln(\rho) + \alpha(\rho) + \frac{1}{2} \beta(\rho) \{H, \rho\}), \quad (2.43)$$

donde $\alpha(\rho)$ y $\beta(\rho)$ son funciones de ρ y están definidos como

$$\alpha(\rho) = \frac{\text{Tr}(\rho H \ln(\rho)) \text{Tr}(\rho H) - \text{Tr}(\rho \ln(\rho)) \text{Tr}(\rho H^2)}{\text{Tr}(\rho H^2) - [\text{Tr}(\rho H)]^2}$$

y

$$\beta(\rho) = \frac{\text{Tr}(\rho \ln(\rho)) \text{Tr}(\rho H) - \text{Tr}(\rho H \ln(\rho))}{\text{Tr}(\rho H^2) - [\text{Tr}(\rho H)]^2},$$

donde $\{A, B\}$ es el anticonmutador entre A y B definido como $\{A, B\} = AB + BA$.

2.5.2. Ecuación de movimiento para sistemas de dos partículas en el marco de SEA-QT

La ecuación de movimiento para sistemas compuestos divisibles en marco de SEA-QT es definida en [?] como el postulado 5 de la ecuación de movimiento de SEA-QT que está matemáticamente escrita como

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{-i}{\hbar} [H, \rho] + \frac{D\rho}{Dt}, \quad (2.44)$$

donde

$$\frac{D\rho}{Dt} = - \sum_{j=1}^n \frac{1}{\tau_j} D_j \otimes \rho_{\hat{j}},$$

además, con

$$D_j = \frac{1}{2}(\sqrt{\rho}\tilde{D}_j + (\sqrt{\rho}\tilde{D}_j)^\dagger),$$

para dos partículas la ecuación se reduce a

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{-i}{\hbar}[H, \rho] - \left(\frac{1}{\tau_{D_A}} D_A \otimes \rho_B + \frac{1}{\tau_{D_B}} D_B \otimes \rho_A\right). \quad (2.45)$$

Resolviendo el determinante para \hat{D}_A se puede obtener D_A que queda escrito como

$$D_A = \frac{1}{2}\{\rho_A, \ln(\rho_A)\} + \alpha_A(\rho_A)\rho_A + \frac{1}{2}\beta_A(\rho_A)\{\rho_A, H_A\},$$

donde

$$\alpha_A(\rho_A) = \frac{Tr(\rho_A H_A) \frac{1}{2} Tr(\{H_A, \ln(\rho_A)\}) - Tr(\rho_A \ln(\rho_A)) Tr(\rho_A H_A^2)}{Tr(\rho_A H_A^2) - [Tr(\rho_A H_A)]^2}$$

y

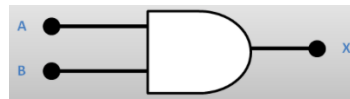
$$\beta_A(\rho_A) = \frac{Tr(\rho_A \ln(\rho_A)) Tr(\rho_A H_A) - \frac{1}{2} Tr(\rho_A \{H_A, \ln(\rho_A)\})}{Tr(\rho_A H_A^2) - [Tr(\rho_A H_A)]^2}.$$

Es claro que en sistemas compuestos el espacio de Hilbert para dos partículas se hace más grande, en este caso se tiene un espacio de Hilbert de dimensión 4 y fue expandido gracias al producto tensorial " \otimes " de las partículas individuales.

2.6. Computación y procesamiento clásico

El bit (binary digit) es la unidad mínima de información y puede tomar sólo dos valores 0 y 1. La manipulación de los bits depende de la compuerta lógica que actúe sobre ellos, una compuerta lógica es un objeto formado por transistores que transforma el estado en otro. Por ejemplo la compuerta NOT invierte o cambia el estado es decir, si a esta se introduce 1 lógico la salida será un 0 lógico. [?]

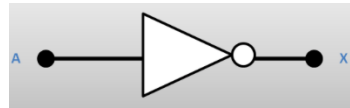
Existen diferentes tipos de compuertas lógicas de uno o varios bits como son AND, OR, NOT, NAND, etc.



(a) Compuerta lógica AND



(b) Compuerta lógica OR



(c) Compuerta lógica NOT

Figura 2.3: Compuertas lógicas. Imágenes tomadas de [?]

Tabla 2.1: Tabla de verdad de las compuertas lógicas

		AND	OR	NOT
A	B	X	X	X
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

A nivel de procesamiento los procesadores actuales cuentan con millones de transistores los cuales pueden formar circuitos lógicos. Para realizar cualquier tarea que sea requerida por los usuarios, desde resolver operaciones aritméticas hasta complicados procesamiento de imágenes pueden ser completadas con una serie de compuertas lógicas.

En 1965 el co-fundador de Intel Gordon Moore afirmó que el número de transistores en los procesadores sería duplicado cada año, 10 años más tarde modificó su afirmación diciendo que este crecimiento sería cada 18 meses. Intel en los últimos 50 años pareciera que se quiere apegar a la hipótesis de Moore [?]. Desde las primeras aportaciones en el mundo de los procesadores, Intel ha tenido un gran avance ya que cada vez hace más pequeños los transistores usando un nivel nuevo de manufactura, por ejemplo entre 1950 y 1960 el procesador "*Intel 8088*" tenía una tecnología de manufactura de $3\mu m$ con un total de 29,000 transistores, en 2007 con el procesador *quad-Core Intel Xeon* la empresa llegó a una tecnología de manufactura de $45nm$ con un total de 820 millones de transistores por procesador [?]. En 2017 Intel contaba con la capacidad de colocar

100.8 millones de transistores por cada mm^2 con una tecnología de manufactura de $10nm$ [?]. Incluso con estos avances tecnológicos y nivel de procesamiento al que se ha llegado existen limitaciones, las principales problemáticas que enfrentan este tipo de industrias son; 1. El avance y costo de la manufactura tan sofisticada y 2. Se está llegando a niveles donde la física se comporta completamente diferente a lo que se está acostumbrado cotidianamente, es decir el nivel de procesamiento tendrá una barrera ya que llegará el tiempo en el cual no se podrá reducir más los transistores de los procesadores.

Con la llegada del cómputo paralelo fue posible realizar tareas de mayor complejidad en un tiempo de cómputo razonable. La idea principal de esto es dividir las tareas y mandarlas a procesadores diferentes para ser realizadas al mismo tiempo y regresar los resultados a un procesador principal, a diferencia del cómputo en serie, ofrece una herramienta muy poderosa para atacar problemas de alta complejidad [?].

Incluso con estos avances tecnológicos, existen problemas irresolubles en un tiempo de cómputo razonable ya que son del tipo complejidad espacial y complejidad temporal, es decir, requieren un gran recurso de tiempo y espacio de almacenamiento de acuerdo con la teoría de la complejidad que ejemplifica cuales problemas pueden o no ser resueltos en un tiempo de cómputo razonable [?]. Se podría pensar que con el avance en los procesadores y el número creciente de transistores, con el paso del tiempo se podría llegar a la solución de estos problemas en un tiempo razonable, sin embargo, algunos problemas no tienen una escala de complejidad lineal pudiendo ser cuadrática o exponencial. En [?] se muestran algunos ejemplos sobre la complejidad de algunos sistemas y el aumento de la misma cuando existen expansiones de datos en el sistema.

2.7. Computación cuántica

La simulación de la física siempre ha sido de gran importancia, en 1982 Richard P.Feynman, uno de los pioneros de la computación cuántica publicó un artículo titulado "*Simulating Physics with Computers*"[?], donde analiza las fronteras de la computación para la simulación de la física y propone la idea de usar las propiedades de la

mecánica cuántica para crear un procesador cuántico, lo que más tarde formaría una rama de investigación llamada "*Computación Cuántica*". En [?] Feynman aborda más formalmente la idea de computación cuántica.

La idea principal de la computación cuántica es usar las propiedades de la mecánica cuántica y crear procesadores que tengan una gran ventaja sobre todo de rapidez comparada con los convencionales. La ventaja de la velocidad del procesamiento es bastante y muchos investigadores creen que por más progreso que tenga la computación clásica no podría compararse con la computación cuántica [?].

2.7.1. Qubits

La unidad mínima de información cuántica es el bit cuántico o qubit el cual es un sistema en el espacio de Hilbert de dimensión 2, en otras palabras, para obtener un qubit se necesita encontrar un sistema cuántico con dos estados accesibles, este sistema puede ser el electrón u otras partículas con una propiedad llamada spin. El spin es un concepto muy complicado de explicar pero basta con decir que puede tomar dos valores $(\frac{1}{2})$ y $(-\frac{1}{2})$ que denominaremos como los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ respectivamente, estos vectores son también llamados base computacional.

Los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son ortogonales y son representados como

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

El bit puede tomar sólo los valores 0 y 1, a diferencia de este, el qubit usando el principio de superposición se encuentra en $|0\rangle$ y $|1\rangle$ al mismo tiempo, representando el estado de superpuesto como

$$|\Psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (2.47)$$

donde $|\alpha|^2 = \alpha\alpha^*$ y $|\beta|^2 = \beta\beta^*$ y representan la probabilidad de encontrar el qubit en el estado $|0\rangle$ o en el estado $|1\rangle$ respectivamente, entonces es evidente que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ya que el sistema sólo tiene dos estados accesibles.

Si se tienen 2 qubits, el espacio de Hilbert será de dimensión 4 y el estado estará en una superposición de 4 posibles con probabilidades α_{xy} de encontrarlos bajo la medición y puede ser escrito como

$$|\Psi\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle, \quad (2.48)$$

donde $|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$, $|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$, $|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle$ y $|11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$.

$$|00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

En la Tabla ?? se puede observar los estados accesibles para dos bits y dos qubits. Es posible determinar una ventaja significativa de la computación cuántica sobre la computación clásica ya que mientras la primera contiene todos los estados al mismo tiempo y puede hacer operaciones simultaneas con cada uno de estos, la segunda sólo podrá obtener un estado de los 4 posibles y operar con este. Es claro que usando la superposición, las operaciones cuentan con cierto paralelismo, expandiendo hasta n qubits. El aumento de esta potencia de cómputo es de manera exponencial de la forma 2^n , donde n es el número de qubits y el espacio de Hilbert para un sistema de n qubits es de dimensión 2^n .

Tabla 2.2: Estados accesibles de dos bits y dos qubits

A	B	Bit	Qubit
0	0	00	$ 00\rangle$
0	1	01	$ 01\rangle$
1	0	10	$ 10\rangle$
1	1	11	$ 11\rangle$

Para alcanzar este nivel de cómputo es necesario mantener una propiedad de los qubits llamada entrelazamiento. El entrelazamiento será explicado más adelante pero basta con saber que si los qubits no están entrelazados no es posible el aumento exponencial de cómputo ya mencionado [?].

2.7.2. Esfera de Bloch

La esfera de Bloch es una representación geométrica donde pueden ser representados estados puros o mixtos de 2 niveles. Se dice que un estado es puro si los estados quedan plasmados en la superficie de la esfera, si recaen dentro de la misma son llamados estados mixtos. Por otra parte con la formulación del operador de densidad de un qubit, este puede ser representado en la esfera de Bloch.

Para un qubit la matriz de densidad puede ser escrita como

$$\rho = \frac{1}{2}[I + P_x\sigma_x + P_y\sigma_y + P_z\sigma_z], \quad (2.50)$$

donde $P_{x,y,z}$ son componentes ortogonales de la esfera de Bloch y Las matrices de Pauli son $\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ y $\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

La Ec. (??) queda escrita como

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + P_z & P_x - iP_y \\ P_x + iP_y & 1 - P_z \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

Es claro que $P_{x,y,z}$ son las coordenadas de un punto dentro de la esfera de Bloch. La ecuación de movimiento determinará la evolución de dichas coordenadas y evoluciona de acuerdo con el Hamiltoniano del sistema [?].

2.7.3. Compuertas cuánticas

En la computación clásica las compuertas lógicas hacen operaciones entre bits, es decir las compuertas lógicas cambian el estado de un bit de acuerdo a un patrón determinado. Existen compuertas lógicas que operan con 1 bit como la NOT o con 2 bits como las AND, OR, etc., en computación cuántica existen compuertas que en general son operaciones sobre los qubits. Los operadores son representados por matrices con el mismo rango que la dimensión del espacio de Hilbert. Con la representación del operador de densidad para qubits así como con la esfera de Bloch será posible observar el comportamiento del qubit o qubits al ser transformados por las compuertas

cuánticas[?].

Las compuertas cuánticas pueden ser vistas como operadores que actúan sobre un estado o qubit, estas compuertas actúan como transformaciones unitarias y por tanto cualquier compuerta cuántica tiene que ser un operador unitario el cual cumple con $U^\dagger U = I$, siendo U el operador unitario y en este caso la compuerta.

Compuertas cuánticas de 1 qubit

Las compuertas de 1 qubit son aquellas que son capaces de manipular un qubit, entre ellas están la compuerta identidad que no modifica el estado, la NOT que intercambia el estado o más específicamente intercambia la probabilidad de medir un estado u otro, la Hadamard que genera una superposición de estados entre otras. Los efectos de estas y su representación como operadores se muestra a continuación.

i) Compuerta Identidad:

$$U_i |0\rangle = |0\rangle \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

ii) Compuerta Not:

$$U_{Not} |0\rangle = |1\rangle \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

iii) Compuerta Hadamard:

$$U_H |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Para sistemas donde los efectos de las compuertas son generados por campos magnéticos, el Hamiltoniano está determinado por una oscilación en el eje Z

$$H = -\frac{1}{2}\hbar\omega_L\sigma_z, \quad (2.55)$$

donde \hbar es la constante modificada de Plank, ω_L es la frecuencia de Larmor y σ_z es la matriz de Pauli en la dirección z.

Compuertas cuánticas de 2 qubits

Las compuertas cuánticas de 2 qubits son operadores unitarios en un espacio del Hilbert de dimensión 2^2 . Trabajos previos han investigado el comportamiento de la dinámica de 2 partículas sujetas a campos magnéticos en el marco del SEA-QT [?] desarrollando la dinámica de sistemas compuestos y ejemplificando la generación teórica un estado entrelazado sin el uso de compuertas cuánticas, otras investigaciones se han concentrado en la compuerta CNOT, esta compuerta es muy importante dentro de la computación cuántica pues genera entrelazamiento de estados. También se resalta la importancia de CNOT ya que todos los circuitos cuánticos de compuertas de más qubits o más complicados puede ser reducidos a compuertas Controlled Not combinadas con compuertas de 1 qubit [?].

la compuerta CNOT consta de un qubit de control que cuando está en el estado $|1\rangle$ negará el estado qubit objetivo en cualquier estado que este se encuentre, otra compuerta importante es la SWAP la cual intercambia el estado de los qubits. A continuación se muestran su representación matricial.

i) Compuerta CNOT:

$$U_{CN} |10\rangle = |11\rangle \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

i) Compuerta SWAP:

$$U_{Swap} |10\rangle = \frac{1}{2}[(1 + e^{i\pi}) |10\rangle - (1 - e^{i\pi}) |01\rangle], \quad (2.57)$$

donde

$$U_{Swap} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+e^{i\pi}}{2} & \frac{1-e^{i\pi}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-e^{i\pi}}{2} & \frac{1+e^{i\pi}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

El espacio de Hilbert para el sistema es ahora de dimensión 2^2 lo cual hace que el operador de densidad sea una matriz de orden 4 que se obtiene mediante un producto tensorial, y esta definido como

$$\rho = \rho_A \otimes \rho_B, \quad (2.59)$$

donde ρ es el operador de densidad del sistema global, ρ_A y ρ_B son los operadores de densidad de cada subsistema. Estos subsistemas pueden ser calculados como $\rho_A = Tr_B(\rho)$, $\rho_B = Tr_A(\rho)$ donde Tr_j se refiere a la traza parcial del operador de densidad global y es también conocida como descomposición de Schmidt [?]. La traza parcial mapea del espacio de Hilbert del sistema global a un espacio del subsistema y elimina los grados de libertad del otro subsistema.

2.7.4. Circuitos cuánticos

Los circuitos cuánticos son formados por dos o más compuertas actuando sobre qubits. Los circuitos son leídos de izquierda a derecha y cada línea representa el paso del tiempo de un qubit y sus transformaciones unitarias a través de las compuertas. Otro aspecto importante es que son acíclicos, es decir, no se permite volver desde una parte del circuito a una parte anterior. También es importante resaltar que no se permite unir dos cables a un tercero igualmente tampoco que dos cables salgan de uno. En

otras palabras, no pueden salir 2 qubits de una línea ya que lo prohíbe el principio de no clonación [?].

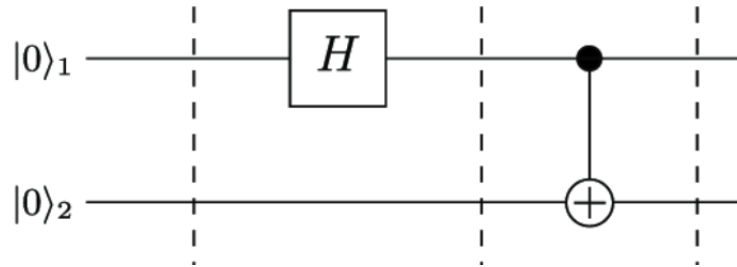


Figura 2.4: Circuito cuántico H-CNOT. Imagen tomada de [?]

En la Figura ?? se muestra un circuito cuántico de 2 qubits. En la línea del qubit 1 se coloca una compuerta Hadamard para generar una superposición de estados y posteriormente se aplica sobre estos dos qubits una compuerta CNOT para generar un entrelazamiento ya que este circuito regresa un estado de Bell de máximo entrelazamiento. Todos los circuitos cuánticos tienen como inicial el estado $|0\rangle$.

2.8. Entrelazamiento cuántico

El entrelazamiento fue introducido por Erwin Schrödinger en la década de los 30 dándole el nombre de enredo a una correlación de la naturaleza cuántica y establece que el estado cuántico de partículas entrelazadas no puede definirse individualmente, sino que la función de onda es única para el sistema, en otras palabras, el estado de ambas partículas está determinado por la misma función de onda [?]. Científicos como Einstein, Podolsky y Rosen lo nombraron "*Acción fantasmal a distancia*" en un artículo que contenía la paradoja EPR [?] como un intento de desacreditar a la mecánica cuántica como una teoría completa mediante una contradicción en sus postulados [?]. La paradoja EPR contenía una incompatibilidad con la relatividad, más específicamente con la transmisión de información superlumínica. Además, violaba el principio de localidad donde dos objetos se veían influenciados incluso después de estar separados. Este pensamiento de una mecánica cuántica incompleta llevó a la comunidad científica a buscar variables ocultas las cuales complementarían la función de onda y

con esto dar un carácter determinista a la teoría. Con EPR se vieron involucrados artículos científicos intentando encontrar formas de desacreditarla [?], pero fue hasta 1964 que John Bell propuso una forma matemática de prevenir dicha paradoja [?]. Bell, asumiendo que la mecánica cuántica obedece el principio de localidad y leyes deterministas logró deducir desigualdades las cuales si EPR estaba en lo cierto serían ciertas y si son violadas entonces la teoría cuántica sería una teoría completa incluso al romper con el determinismo de la física. Además existiría un entrelazamiento entre los sistemas con un colapso de la función de onda transmitido instantáneamente [?]. Recordando que para sistemas compuestos de dos qubits, el estado está representado por el producto tensorial entre los estados, es decir $|\Psi\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$, (estado no entrelazado) entonces las partículas estarán entrelazadas si el estado del sistema global no se puede factorizar en dos estados individuales, en otras palabras, la función de onda o estado es diferente del producto tensorial de los estados individuales, o bien $|\Psi\rangle \neq |a\rangle \otimes |b\rangle$. Un ejemplo de estados entrelazados son los estados puros entrelazados de Bell [?] que se expresan como

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle) \quad (2.60)$$

y

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle). \quad (2.61)$$

Para estados mixtos se dice que el estado es separable si se puede escribir como

$$\rho = \sum_i p_i |a_i\rangle \langle a_i| \otimes |b_i\rangle \langle b_i|, \quad (2.62)$$

donde p_i son coeficientes de probabilidad. Es importante mencionar en muchas ocasiones no es tan fácil ver si el estado puede ser separable, para esto han desarrollado métodos con los cuales se puede determinar si los estados están entrelazados realmente, siempre recordando que un estado que tiende a una matriz diagonal estará más cerca de no estar entrelazado [?] ya que los elementos ρ_{mn} (elementos fuera de la diagonal) son las coherencias del sistema y por ende cuando estas están decayendo a 0 el estado estará perdiendo el entrelazamiento.

2.8.1. Caracterización del entrelazamiento

Aunque el entrelazamiento cuántico promete un amplio uso en aplicaciones cuánticas como en computación o información del tipo, este no ha sido comprendido del todo y existen diferentes intentos de caracterizarlo. Se ha relacionado con la entropía que recaería en una estrecha relación entre este y la termodinámica [?, ?]. En [?] es presentada otra forma diferente a la convencional "*concurrency*" de medir el entrelazamiento entre hasta 3 qubits llamada "*harmony*".

Una manera de caracterizar el entrelazamiento de estados puros es mediante la Entropía de von Neumann, para estados mixtos esta metodología no es aceptada del todo y se tienen que recurrir a nuevos modelos para caracterizar el entrelazamiento. Para un estado mixto el entrelazamiento de formación es definido como el entrelazamiento mínimo promedio de un conjunto de estados puros representados por una matriz de densidad ρ .

Recordando que para dos qubits el sistema está en el espacio vectorial de Hilbert creado por el producto tensorial entre los dos espacios individuales, es decir, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ se consideran las probabilidades (no negativas) P_i en

$$\rho = \sum_i p_i |\Phi_i\rangle \langle \Phi_i|, \quad (2.63)$$

donde $|\Phi_i\rangle$ es un estado puro en el espacio \mathcal{H} e i puede ser tan grande como el espacio de Hilbert. Entonces en general el entrelazamiento de formación esta definido como

$$E(\rho) = \min \sum_i p_i E_v(\Phi_i) \geq 0, \quad (2.64)$$

donde el entrelazamiento para un estado puro es definido como la entropía de von Neumann y entonces $E_v(\Phi_i) = -Tr(\rho_A \log_2(\rho_A)) = -Tr(\rho_B \log_2(\rho_B))$ representa la entropía de los subsistemas por separado. Por otro lado, con explicaciones anteriores es claro que para un estado separable $E_v(\Phi_i) = 0$, ahora para un estado mixto en [?] fue demostrado que para 2 qubits se puede caracterizar mediante rotaciones de la fase del estado ya que la fase está relacionada con la coherencia del sistema. Entonces el operador de densidad con spin-flipped es definido como

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (2.65)$$

donde ρ^* es el complejo conjugado de ρ , además es posible comprobar que el producto no hermítico $\rho \tilde{\rho}$ tiene eigenvalores positivos reales. Con esto el entrelazamiento de formación se define como

$$E(\rho) = \epsilon \left(\frac{1 + \sqrt{1 + C(\rho)^2}}{2} \right), \quad (2.66)$$

donde

$$\epsilon = -\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2} \text{Log}_2 \left| \frac{1 + \sqrt{1 + C(\rho)^2}}{2} \right| - \frac{1 - \sqrt{1 - C^2}}{2} \text{Log}_2 \left| \frac{1 - \sqrt{1 + C(\rho)^2}}{2} \right|, \quad (2.67)$$

donde C es la concurrencia. Ya que ϵ tiene un valor entre 0 y 1, a medida que C va de 0 a 1 se puede tomar el valor de la concurrencia como una medida del entrelazamiento. Para un estado de 2 qubits la concurrencia es medida como

$$C(\rho) = \max(0, \lambda_4 - \lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1), \quad (2.68)$$

donde λ_i son los valores propios ordenados de menor a mayor de la matriz $R = \sqrt{\sqrt{\rho} \tilde{\rho} \sqrt{\rho}}$, esta matriz representa el entrelazamiento en función del operador de densidad y mide la cercanía los estados obtenidos y los estados de los estados generalizados de Bell Ec.(?? y ??) [?, ?].

2.9. Decoherencia cuántica

El colapso de la función de onda de acuerdo con la medida o proceso de medición fue clasificado como una evolución no unitaria, a diferencia de una evolución unitaria determinada por la ecuación de Schrödinger, dicha evolución no contiene una conservación de la probabilidad y obliga al estado a dejar las propiedades cuánticas como la superposición y presentar un comportamiento clásico [?]. La pérdida de coherencia o decoherencia cuántica es una extensión del colapso de la función de onda y es un

término el cual se asocia con la explicación de como un estado entrelazado pierde las propiedades cuánticas para exhibir un comportamiento clásico o sin entrelazamiento. Matemáticamente es representada como la pérdida de coherencia en la fase compleja de la función de onda relativa a las combinaciones lineales que definen el estado o la superposición de estados [?, ?].

Otros autores han definido la decoherencia como el fenómeno a través de la cual las componentes de un vector de estado se desfasan con respecto a las otras por efectos de interacción con el entorno y así destruyen la información condensada en el entrelazamiento [?]. El marco de referencia SEA-QT se basa en un sistema cerrado y elimina las interacciones con el ambiente proponiendo que la decoherencia es debida intrínsecamente al sistema.

2.10. Teoría de perturbaciones

La ecuación de Schrödinger es posible resolverse de manera exacta para muy pocos casos como son; *partícula libre*, *pozo de potencial*, *barrera de potencial*, *oscilador armónico*, *potencial de coulomb*, entre otros. Esto es posible ya que como se mencionó anteriormente el potencial al que se encuentran permite una solución analítica, en los casos que el potencial no permite una solución exacta se puede emplear el método de perturbaciones y puede ser una herramienta muy poderosa para encontrar una solución aproximada muy razonable [?]. Existen perturbaciones independientes del tiempo así como dependientes, las primeras tratan con la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo proponiendo que existe un Hamiltoniano que se puede escribir como

$$H = H^0 + H', \quad (2.69)$$

donde H^0 corresponde al Hamiltoniano sin perturbación, H' es el Hamiltoniano que contiene la perturbación.

Entonces con el nuevo Hamiltoniano la ecuación independiente del tiempo queda escrita como

$$(H^0 + H') |\psi_n\rangle^0 = E_n |\psi\rangle, \quad (2.70)$$

donde ahora $E_n \neq E_n^0$ son los eigenvalores del ahora nuevo Hamiltoniano que deben ser determinados. Por otro lado los métodos de perturbaciones dependientes del tiempo contienen un Hamiltoniano H^0 (independiente del tiempo) y otra parte dependiente $H'(t)$. Matemáticamente descrito en [?, ?] por

$$H = H^0 + H'(t). \quad (2.71)$$

En este trabajo se utilizará la regla de oro de Fermi (método de perturbaciones dependiente del tiempo) para intentar predecir el tiempo de disipación τ_D del marco de SEA-QT de acuerdo con la hipótesis propuesta y será encontrada una deducción detallada en el siguiente capítulo.

2.11. Anteriores aplicaciones de SEA-QT en compuertas cuánticas

Con el paso del tiempo se ha implementado el marco de SEA-QT en diferentes áreas. En esta sección se presenta más detalladamente sus aplicaciones pasadas en el ámbito de las compuertas cuánticas por algunos autores así como los parámetros más importantes de las mismas para finalmente mostrar una reproducción del trabajo. En [?] se presenta la evolución de sistemas en compuertas de un qubit bajo dos diferentes ecuaciones de movimiento las cuales él llama como "*Lindblad*", donde la dinámica incluye las irreversibilidades del sistema y "*Beretta*" por su ecuación de disipación intrínseca o bien por el marco SEA-QT.

Al resolver la ecuación de movimiento del sistema se tendrá caracterizado el mismo. Utilizando la definición del operador de densidad así como el Hamiltoniano, se puede dividir la Ec. (??) en 4 ecuaciones diferenciales como

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(1 + P_z) &= 0 \\
\frac{d}{dt}(P_x - iP_y) &= i\omega_L(P_x - iP_y) \\
\frac{d}{dt}(P_x + iP_y) &= -i\omega_L(P_x + iP_y) \\
\frac{d}{dt}(1 - P_z) &= 0
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Es claro que para esta solución se necesita un ρ_0 o condición inicial que es determinada a partir del vector de polarización P inicial.

El parámetro τ_D es libre, es decir, puede ser cualquier número que se encuentre entre un tiempo $(0, t_s)$ donde t es el tiempo de simulación. Por lo tanto τ_D tiene una relación con el tiempo en el cual el sistema alcanza un estado de equilibrio nuevamente. En [?] se menciona τ_D uno de los principales campos de investigación de los investigadores que trabajan con el marco de SEA-QT.

Compuerta NOT bajo dos dinámicas diferentes

En [?] y [?] se tratan compuertas de Pauli donde la matriz σ_x es la compuerta NOT también llamada " U_X ". Entonces el operador X intercambia las probabilidades de al medir obtener ese posible estado. Ya que las mediciones afectan al sistema y obligan al qubit a dejar la superposición y sólo mostrar un estado ya sea $|0\rangle$ o bien $|1\rangle$, entonces si se realiza una medición cuando el estado está más cercano a $|0\rangle$ será más probable que al medir se obtenga el mismo [?]. Al actuar la compuerta NOT sobre el sistema intercambiará esas probabilidades, es decir,

$$X|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}. \tag{2.73}$$

En términos del operador densidad la compuerta NOT genera un cambio en el vector de polarización, donde $P_x \rightarrow P_x$, $P_y \rightarrow -P_y$ y $P_z \rightarrow -P_z$. Este cambio garantiza la transformación $\rho_{11} \leftrightarrow \rho_{22}$ los cuales involucran directamente los valores de probabilidad.

En [?] Tabakin muestra el Hamiltoniano de la compuerta NOT, siendo escrito como

$$H = -\frac{1}{2}\hbar\omega_L(1 - \theta_B(t))\sigma_z + \hbar\theta_G(t)U, \quad (2.74)$$

donde el primer término del lado derecho es el Hamiltoniano estándar con una modificación, esta parte dejará al sistema en precesión hasta que se llegue a un tiempo determinado. El término $\theta_B(t)$ es denominado como Bias y neutralizará completamente esta precesión. Este pulso se define como $\theta_B(t) = \frac{\theta_s(t)}{\theta_s(t_0)}$ y $\theta_s(t)$ es

$$\theta_s(t) = N_f \frac{1}{2} [Erf(\frac{t - t_1}{\tau}) - Erf(\frac{t - t_2}{\tau})], \quad (2.75)$$

donde t_0 es el tiempo al centro del pulso, es decir, el tiempo en el cual $\theta_B(t)$ alcanza un valor máximo de 1, τ es el ancho del pulso, en otras palabras, es el tiempo en el cual el pulso pasará desde los valores mínimo a máximo para volver al mínimo que es 0, t_1 y t_2 son los tiempos en los cuales se iniciará y terminará el pulso, estos tiempos están definidos como $t_1 = t_0 - \frac{\tau}{2}$ y $t_2 = t_0 + \frac{\tau}{2}$.

El parámetro N_f queda definido como

$$N_f = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_G(t) dt = \frac{\pi}{2}, \quad (2.76)$$

donde

$$\theta_G(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\tau} \exp[-(\frac{t - t_0}{\tau})^2]. \quad (2.77)$$

Este pulso $\theta_B(t)$ puede ser sustituido por un pulso Gausiano el cual puede ser definido por los mismos parámetros. Si el pulso $\theta_G(t)$ normalizado tiene la misma funcionalidad que $\theta_B(t)$, el pulso $\theta_B(t)$ puede ser escrito como

$$\theta_B(t) = \exp[-(\frac{t - t_0}{\tau})^2], \quad (2.78)$$

donde el segundo término del lado derecho del Hamiltoniano Ec. (??) contiene la compuerta la cual generará un cambio estado. Esta segunda parte del Hamiltoniano contiene un pulso no normalizado θ_G que ha sido definido en la Ec. (??) así como la

compuerta U_X [?]. Por otro lado, la ecuación de movimiento del marco de SEA-QT es general para cualquier Hamiltoniano en un espacio del Hilbert de dimensión 2, esto quiere decir que incluso con el cambio del Hamiltoniano de la compuerta NOT respecto al estándar podría ser simulado el sistema. Entonces usando la Ecs. (?? y ??) se puede hacer la simulación de la compuerta cuántica NOT bajo el marco de SEAQT. En la Tabla ?? se muestran los parámetros usados para la simulación bajo la ecuación de movimiento de von Neumann así como bajo el marco de SEA-QT. En [?] pueden ser encontrados los parámetros de la simulación.

Tabla 2.3: Parámetros para compuerta NOT

Nombre	Mecánica Cuántica	SEAQT()
P_x	0.5	0.5
P_y	0.0	0.0
P_z	0.8	0.8
ω_L	$0.2675 U_t$	$0.2675 U_t$
\hbar	1 J s	1 J s
t_s =tiempo de simulación	$100 U_t$	$100 U_t$
τ_D	-	$40 U_t$
τ	5 ns	$5 U_t$
t_0	33.5625 ns	$33.5625 U_t$

En la Figura ?? se muestra la evolución del qubit bajo la ecuación de movimiento de la mecánica cuántica, dentro de este marco de referencia no se pierde de información en la evolución a comparación con ?? donde se muestra una pérdida de información a causa de ser un sistema que irreversible, incluso aunque el sistema es cerrado existen irreversibilidades intrínsecas al mismo, lo cual es un principio fundamental del SEA-QT. En ??, ??,?? y ?? es notable que el pulso cambia de manera esperada el vector de polarización, también muestran una degeneración en las componentes P_x y P_y para el marco de la termodinámica cuántica. En ?? y ?? se muestra la generación de entropía y la entropía total del sistema respectivamente. Cabe mencionar que existe una generación de entropía significativa relacionada al tiempo de activación de la compuerta cuántica.

Compuerta Controlled NOT bajo la dinámica de SEA-QT

Existen múltiples menciones y estudios de esta compuerta y sus efectos sobre los

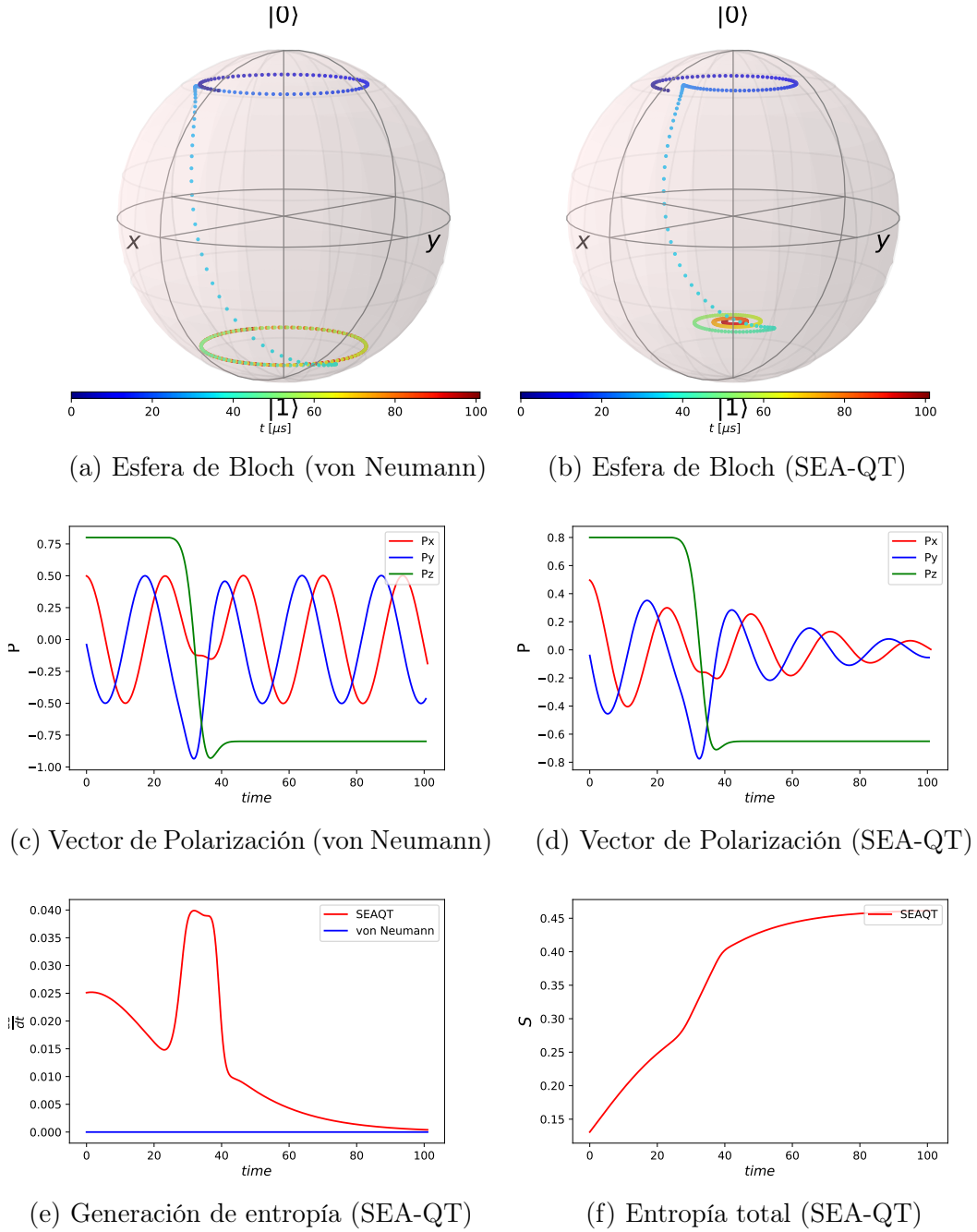


Figura 2.5: Evolución de un qubit bajo los efectos de la compuerta cuántica NOT en 2 marcos de referencia diferentes. Trabajo realizado para el 6^{to} encuentro de jóvenes investigadores 2018 [?].

qubits así como el entrelazamiento generado [?, ?]. Montilla en [?] realizó un estudio sobre el tema usando el marco de SEA-QT, también muestra los valores usados para su simulación, con los cuales se lograron reproducir sus resultados, las gráficas en este trabajo mencionado fueron reproducidas y son mostradas a continuación. La finalidad

principal en [?] es modelar el entrelazamiento en la compuerta CNOT y sus resultados son de vital importancia en el presente trabajo así como las investigaciones de los asesores del presente.

Los parámetros de simulación son mostrados en la Tabla ??.

Tabla 2.4: Parámetros para compuerta C-NOT

Nombre	Mecánica Cuántica	SEAQT()
ω_L	$0.2675 U_t$	$0.2675 U_t$
\hbar	$1 U_E U_t$	$1 U_E U_t$
t_s =tiempo de simulación	$180 ns$	$180 ns$
τ_D	-	$40 U_t$
τ	$5 U_t$	$5 U_t$
t_0	$20 U_t$	$20 U_t$

Los estados iniciales fueron seleccionados como

$$\rho_A = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 0,98 \end{bmatrix} \quad \rho_B = \begin{bmatrix} 0,02 & 0 \\ 0 & 0,98 \end{bmatrix}. \quad (2.79)$$

Más detalladamente, en [?] Montilla mostró y discutió como evoluciona la entropía del sistema, la generación de entropía, la pureza de los estados, el factor de coherencia, la concurrencia y el funcional de correlación . Es importante resaltar que la compuerta CNOT no puede generar un estado entrelazado, ya que una concurrencia negativa es sinónimo de estados no entrelazados.

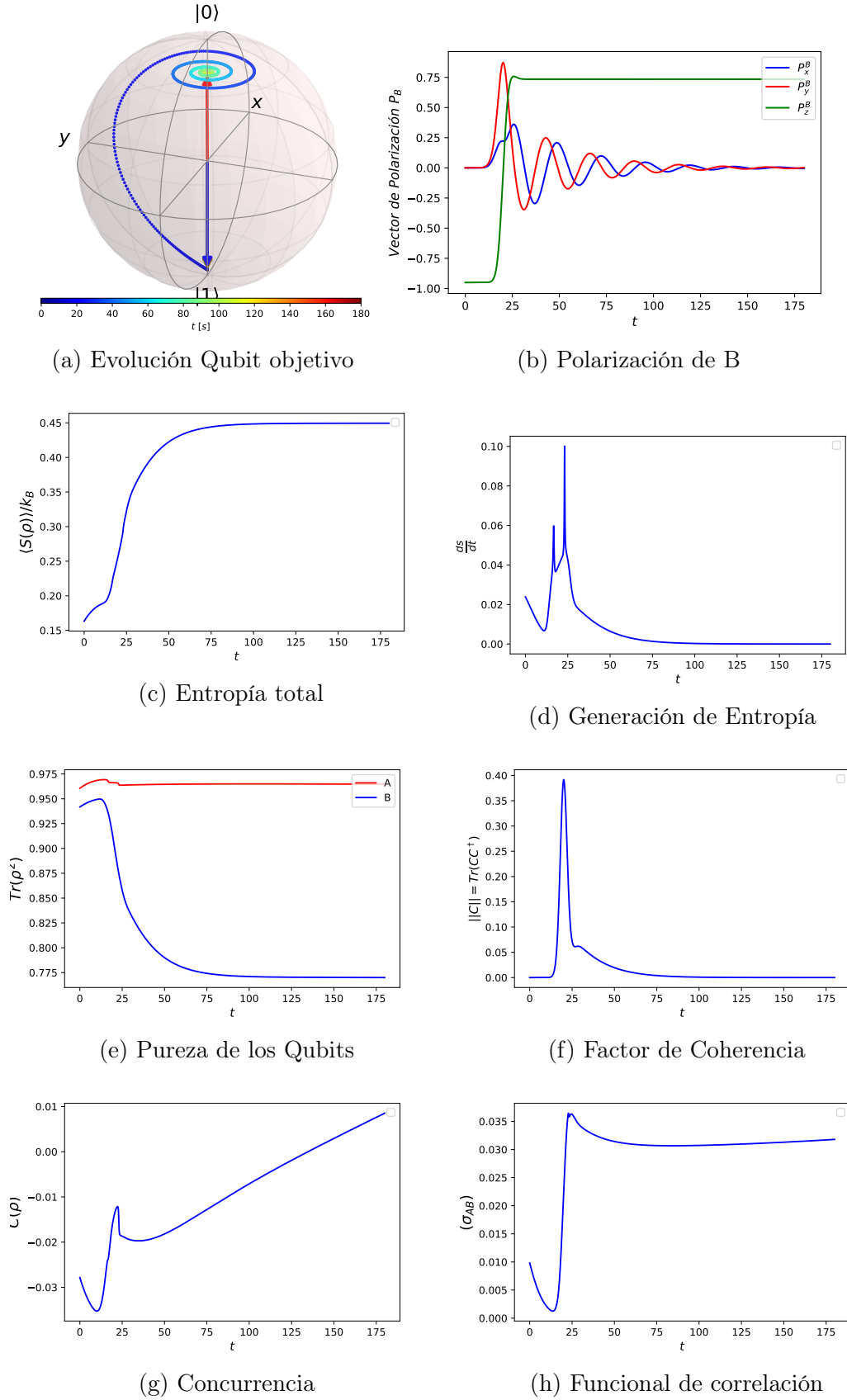


Figura 2.6: Evolución de la CNOT bajo el marco de SEA-QT. Gráficas reproducidas con los datos de Montilla en [?].

Capítulo 3

Metodología

En este Capítulo se presentan los elementos necesarios para la construcción del circuito H-CNOT para generar entrelazamiento así como la construcción matemática de la regla de oro de Fermi como una propuesta para encontrar el tiempo de disipación τ_D de cada subsistema.

3.1. Compuerta Hadamard

La compuerta cuántica Hadamard U_H no tiene una análoga clásica ya que esta es generadora de una superposición desde un estado definido, es decir, si se tiene el estado $|0\rangle$ y se le aplica una compuerta U_H se generará un estado superpuesto $|\Psi\rangle$. La representación matricial de la compuerta U_H está definida como

$$U_H = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

La operación de un estado sin superposición con la compuerta H genera un estado superpuesto, es decir

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

La compuerta Hadamard genera una superposición donde el estado tiene 50% de

probabilidades de estar en cualquier estado, a partir de un estado bien definido. En la Figura ?? se muestra la evolución del sistema desde el estado $|0\rangle$ hasta un estado en superposición.

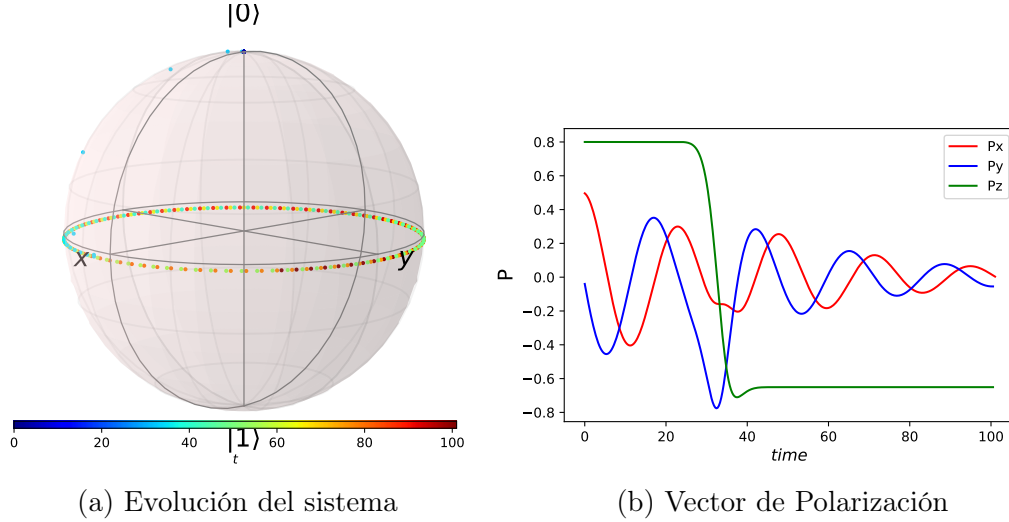


Figura 3.1: Evolución del estado $|0\rangle$ bajo los efectos de la compuerta cuántica Hadamard. Trabajo realizado para el 6^{to} encuentro de jóvenes investigadores 2018 [?].

En función del operador de densidad el vector de polarización cambia sus componentes de la forma; $P_x \rightarrow P_z$, $P_y \rightarrow -P_y$ y $P_z \rightarrow P_x$ para así formar el efecto de la compuerta Hadamard. Usando el mismo Hamiltoniano que en la compuerta NOT basado en pulsos, se pueden simular los efectos de U_H con el simple hecho de cambiar el operador NOT por Hadamard.

3.2. Compuerta CNOT

La compuerta Controlled NOT o U_{CNOT} , Ec. (??) es una compuerta en un espacio de Hilbert compuesto por dos qubits, es decir $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ y actúa sobre dos qubits, uno de ellos es llamado control y el otro objetivo y el funcionamiento esta basado en la negación del objetivo siempre y cuando el de control se encuentre en el estado $|1\rangle$ entonces se pueden tener 4 casos posibles, $U_{CNOT} |00\rangle = |00\rangle$, $U_{CNOT} |01\rangle = |01\rangle$, $U_{CNOT} |10\rangle = |11\rangle$ y $U_{CNOT} |11\rangle = |10\rangle$.

$$U_{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Un Hamiltoniano para un sistema de dos qubits está compuesto por los Hamiltonianos independientes de cada subsistema de la siguiente manera

$$H_{2Q} = H_A \otimes I_B + I_A \otimes H_B, \quad (3.4)$$

donde $H_A = H_B = -\frac{1}{2}\hbar\omega_L\sigma_z$ son los Hamiltonianos independientes de cada subsistema. El Hamiltoniano de la compuerta CNOT es muy parecido al de la compuerta NOT pero esta generalizado para 2 qubits, el cual es definido como

$$H_{CNOT} = \hbar\omega(1 - \theta_B(t))H_{2Q} + \hbar\theta_G(t)U_{CNOT}, \quad (3.5)$$

el término $\theta_B = \frac{\theta_s(t)}{\theta_s(t_0)}$ es un pulso normalizado donde θ_s dado por

$$\theta_s(t) = N_f \frac{1}{2} [Erf(\frac{t-t_1}{\tau}) - Erf(\frac{t-t_2}{\tau})], \quad (3.6)$$

donde t_0 es el tiempo al centro del pulso, es decir, el tiempo en el cual $\theta_B(t)$ alcanza un valor máximo de 1, τ es el ancho del pulso, en otras palabras, es el tiempo en el cual el pulso pasará desde los valores mínimo a máximo para volver a 0, t_1 y t_2 son los tiempos en los cuales se iniciará y terminará el pulso y están definidos como $t_1 = t_0 - \frac{\tau}{2}$ y $t_2 = t_0 + \frac{\tau}{2}$. El parámetro N_f queda definido como

$$N_f = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_G(t) dt = \frac{\pi}{2}, \quad (3.7)$$

donde θ_G es un pulso definido matemáticamente como

$$\theta_G(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\tau} \exp[-(\frac{t-t_0}{\tau})^2]. \quad (3.8)$$

Es claro que si se quiere hacer ver la evolución de dos qubits sin uso de compuerta bajo

cualquiera de las dos dinámicas ya discutidas anteriormente se debe utilizar el Hamiltoniano H_{2Q} Ec. (??). De la Ec. (??) se puede ver que el Hamiltoniano se compone de 2 partes. El primer término del lado derecho de la igualdad es la precesión de los qubits que por un momento se detiene en un tiempo determinado gracias al factor $(1 - \theta_B(t))$ y la evolución sólo quedará determinada por los demás términos, el segundo término es la activación de un pulso ($\theta_G(t)$) que activará la compuerta mientras la precesión esta inhibida por el pulso $\theta_B(t)$.

Montilla en [?] muestra cómo evoluciona el qubit objetivo al ser operado con la compuerta CNOT bajo la ecuación de movimiento de la mecánica cuántica (Figura ??) con los mismos parámetros mostrados en la Tabla ??

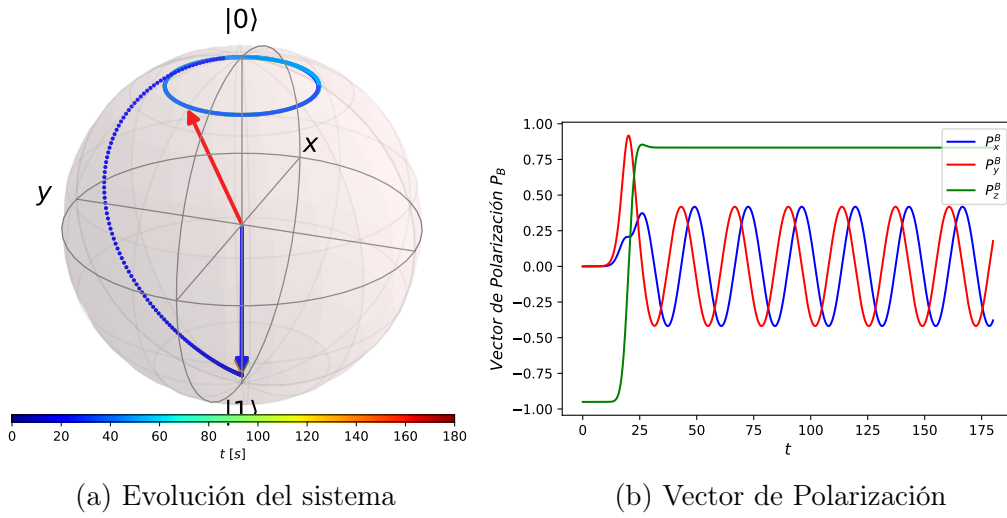


Figura 3.2: Evolución del sistema bajo los efectos de la compuerta cuántica CNOT. Gráficas reproducidas con los datos de Montilla en [?].

3.3. Circuito cuántico H-CNOT

El circuito Cuántico H-CNOT es mostrado en la Figura ??, está formado por una compuerta Hadamard en el qubit de control y un qubit en el estado $|0\rangle$ en el objetivo, estos qubits son posteriormente operados simultáneamente por una compuerta CNOT para generar así los estados de Bell. El circuito actúa matemáticamente de la siguiente manera:

i) Se aplica la compuerta Hadamard U_H al qubit de control como

$$U_H |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle). \quad (3.9)$$

ii) Para que la compuerta CNOT pueda actuar sobre los dos qubits se tiene que hacer el producto tensorial entre el el qubit de control y el objetivo entonces el estado será

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle). \quad (3.10)$$

iii) Se aplica la compuerta CNOT al estado anterior, recordando los efectos de esta última compuerta, se niega el estado del qubit objetivo si el de control esta en el estado 1, entonces se obtiene después del circuito el estado

$$U_{CNOT} |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle). \quad (3.11)$$

El estado anterior es un estado de Bell [?] con el más alto entrelazamiento posible. En términos del operador de densidad ($\rho = \rho_A \otimes \rho_B$) para determinar la evolución del estado con la ecuación de movimiento de SEA-QT para dos qubits Ec. (??), el operador de densidad queda escrito como

$$\rho = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

y de esto puede determinarse la concurrencia con un valor de 1.

3.4. Regla de oro de Fermi

En esta sección se desarrollará la regla de oro de Fermi (ROF) para intentar predecir la probabilidad de transición y con ella intentar dar una primera estimación del término de disipación τ_D den marco de SEAQT. Teniéndose un Hamiltoniano de la forma

$$H = H^0 + H'(t), \quad (3.13)$$

la parte no perturbada del Hamiltoniano satisface la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, entonces

$$H^0 |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle$$

recordando que la función de onda dependiente del tiempo es la parte dependiente multiplicando a la fase, el estado se puede escribir como

$$|\Psi_n\rangle = |\psi_n\rangle e^{-iE_n t/\hbar}$$

expandiendo en una combinación lineal

$$|\Psi\rangle = \sum_n C_n(t) |\psi_n\rangle e^{-iE_n t/\hbar}$$

Este nuevo estado tiene que satisfacer la ecuación de Schrödinger que es $H|\Psi\rangle = (H^0 + H')|\Psi\rangle = i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t}$, entonces

$$H^0 \sum_n C_n(t) |\psi_n\rangle e^{-iE_n t/\hbar} + H' \sum_n C_n(t) |\psi_n\rangle e^{-iE_n t/\hbar} = i\hbar \frac{d}{dt} \left(\sum_n C_n(t) |\psi_n\rangle e^{-iE_n t/\hbar} \right)$$

recordando que $H^0 |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle$, la ecuación anterior queda escrita como

$$\begin{aligned} \sum_n C_n(t) E_n |\psi_n\rangle e^{-iE_n t/\hbar} + \sum_n C_n(t) H' |\psi_n\rangle e^{-iE_n t/\hbar} = \\ = i\hbar \left(\left(\frac{-iE_n}{\hbar} \right) \sum_n C_n(t) |\psi_n\rangle e^{-iE_n t/\hbar} + \sum_n \dot{C}_n(t) |\psi_n\rangle e^{-iE_n t/\hbar} \right), \end{aligned}$$

reduciendo y multiplicando por la derecha por un estado cualquiera $\langle \psi_m |$, se obtiene

$$\sum_n C_n(t) \langle \psi_m | H' |\psi_n\rangle e^{-iE_n t/\hbar} = i\hbar \left(\sum_n \dot{C}_n(t) \langle \psi_m | \psi_n \rangle e^{-iE_n t/\hbar} \right),$$

los estados $|\psi_m\rangle$ y $|\psi_n\rangle$ deben ser ortonormales, es decir, $\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn}$, entonces

$$\dot{C}_m(t) = \frac{-i}{\hbar} \sum_n C_n(t) H'_{mn} e^{-i(E_n - E_m)t/\hbar}, \quad (3.14)$$

donde $H_{mn} = \langle \psi_m | H' | \psi_n \rangle$ son las componentes de la matriz H' , finalmente si se considera un sistema de dos estados admisibles (qubit) se pueden obtener dos ecuaciones diferenciales acopladas

$$\begin{aligned}\dot{C}_1(t) &= -\frac{i}{\hbar}(C_1(t)H'_{11}e^{-i(E_1-E_1)t/\hbar} + C_2(t)H'_{12}e^{-i(E_2-E_1)t/\hbar}) \\ \dot{C}_2(t) &= -\frac{i}{\hbar}(C_1(t)H'_{21}e^{-i(E_1-E_2)t/\hbar} + C_2(t)H'_{22}e^{-i(E_2-E_2)t/\hbar})\end{aligned}\quad (3.15)$$

3.4.1. Regla de oro de Fermi para un qubit

Es posible simplificar las ecuaciones anteriores, sabiendo que los valores de la energía E_n y E_m son los eigenvalores del Hamiltoniano no perturbativo. Si el valor C_1 corresponde al valor complejo que acompaña al estado $|0\rangle$ así como C_2 corresponde a $|1\rangle$, entonces las probabilidades están determinadas por estos coeficientes.

Para las compuertas cuánticas mostradas en en Capítulo anterior, la Ec. (??) se puede tomar $H^0 = -\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_Z$ como el Hamiltoniano no perturbado ya que el factor $(1 - \theta_B)$ es sólo la inhibición del mismo. La parte con perturbación debe ser tomada como $H' = \theta_G\hbar U$.

Los valores de los niveles de energía están definidos como los eigenvalores del Hamiltoniano no perturbado, estos son

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= E_1 = -\frac{1}{2}\hbar\omega \\ \lambda_2 &= E_2 = \frac{1}{2}\hbar\omega\end{aligned}\quad (3.16)$$

Los eigenvectores son

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Para la parte perturbada $H_{mn} = \langle \psi_m | H' | \psi_n \rangle$, es necesario definir cuál compuerta será utilizada. Recordando que es de interés U_H entonces el Hamiltoniano dependiente del tiempo queda escrito como

$$H' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_G\hbar & \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_G\hbar \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_G\hbar & -\frac{1}{\sqrt{2}}\theta_G\hbar \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

entonces $H_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_G\hbar$, $H_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_G\hbar$, $H_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_G\hbar$ y $H_{22} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\theta_G\hbar$. Con esto, el sistema de ecuaciones diferenciales queda escrito como

$$\begin{aligned} \dot{C}_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}i}\theta_G(C_1(t) + C_2(t)e^{-i\omega t}) \\ \dot{C}_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}i}\theta_G(C_1(t)e^{i\omega t} - C_2(t)) \end{aligned} \quad (3.19)$$

De acuerdo con la superposición, los coeficientes $|C_1(t)|$ y $|C_2(t)|$ corresponden a probabilidades que cambian en el tiempo. La normalización de ellas se puede determinar como $C_{1_N} = \sqrt{\frac{C_1}{\langle \Psi | \Psi \rangle}}$, donde C_{1_N} es el valor normalizado de C_1 que claramente está en el campo de los complejos y $|\Psi\rangle = C_1|0\rangle + |1\rangle$ es el estado en la base de los eigenvectores del Hamiltoniano no perturbado. Podemos definir la tasa de decaimiento Γ como la probabilidad de un estado de cambiar a otro, entonces se puede escribir como

$$\Gamma = \frac{d|C_{1_N}|}{dt}, \quad (3.20)$$

donde la tasa de decaimiento se asocia con el valor del tiempo de intra-relajación de la forma

$$\tau_D = \frac{1}{\Gamma}, \quad (3.21)$$

y ya que Γ es una función, se podría tomar como primera aproximación de este, un valor promedio de una función en un intervalo cerrado $(t_i - t_f)$ se obtiene mediante el teorema del valor medio como

$$\Gamma_{Prom} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \Gamma dt, \quad (3.22)$$

finalmente se espera obtener un valor del tiempo τ como

$$\tau_{D_{Prom}} = \frac{1}{\Gamma_{Prom}}. \quad (3.23)$$

3.4.2. Regla de oro de Fermi para dos qubit

El Hamiltoniano para la compuerta CNOT queda definido mediante la Ec. (??) y se puede asociar a la parte no perturbada corresponde al primer término, entonces este queda definido como

$$H^0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\hbar\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\hbar\omega \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

donde los eigenvalores son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 &= \hbar\omega \\ \lambda_2 &= -\hbar\omega \end{aligned} \quad (3.25)$$

y los eigenvectores

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Para la parte dependiente del tiempo se puede escribir el Hamiltoniano como

$$H' = \begin{bmatrix} \hbar\theta_G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\theta_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hbar\theta_G \\ 0 & 0 & \hbar\theta_G & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Por otra parte, de acuerdo con la Ec. (??) se pueden escribir las ecuaciones para un sistema compuesto por 2 qubits y quedan escritas como

$$\begin{aligned}
\dot{C}_1 &= -\frac{i}{\hbar}(C_1 H'_{11} e^{i\omega_{11}t} + C_2 H'_{12} e^{i\omega_{12}t} + C_3 H'_{13} e^{i\omega_{13}t} + C_4 H'_{14} e^{i\omega_{14}t}) \\
\dot{C}_2 &= -\frac{i}{\hbar}(C_1 H'_{21} e^{i\omega_{21}t} + C_2 H'_{22} e^{i\omega_{22}t} + C_3 H'_{23} e^{i\omega_{23}t} + C_4 H'_{24} e^{i\omega_{24}t}) \\
\dot{C}_3 &= -\frac{i}{\hbar}(C_1 H'_{31} e^{i\omega_{31}t} + C_2 H'_{32} e^{i\omega_{32}t} + C_3 H'_{33} e^{i\omega_{33}t} + C_4 H'_{34} e^{i\omega_{34}t}) \\
\dot{C}_4 &= -\frac{i}{\hbar}(C_1 H'_{41} e^{i\omega_{41}t} + C_2 H'_{42} e^{i\omega_{42}t} + C_3 H'_{43} e^{i\omega_{43}t} + C_4 H'_{44} e^{i\omega_{44}t})
\end{aligned} \tag{3.28}$$

donde C es una función de tiempo como en el caso de un qubit, es decir $C = C(t)$. Con los valores ya obtenidos de la parte perturbada y no perturbada, se puede reducir el sistema a dos ecuaciones desacopladas y un sistema de dos ecuaciones diferenciales que quedan escritos como

$$\begin{aligned}
\dot{C}_1 &= \frac{1}{i}(C_1 \theta_G) \\
\dot{C}_2 &= \frac{1}{i}(C_2 \theta_G) \\
\dot{C}_3 &= \frac{1}{i}(C_4 \theta_G e^{i\omega t}) \\
\dot{C}_4 &= \frac{1}{i}(C_3 \theta_G e^{-i\omega t})
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Como en el caso de la regla de oro de Fermi para un qubit Sec. (??), se determinó lo que se propone como el tiempo τ_{DH} (qubit de control) y no el del objetivo, ya que este último no tiene efectos de perturbación. Para este caso, por las ecuaciones diferenciales Ec. (??), se espera que el qubit de control no tenga efectos de perturbación por parte de la compuerta pero para el qubit objetivo se podría seguir la metodología anteriormente descrita y encontrar el término τ_B , donde B es el qubit objetivo en la compuerta CNOT.

3.5. Entropía

La entropía de von Neumann viene de sistemas microscópicos estadísticos y su formulación matemática está en función del operador de densidad, von Neumann en [?]

formuló un marco matemático riguroso de la mecánica cuántica. La entropía es matemáticamente descrita como

$$S = -k_B \text{Tr}(\rho \log_2(\rho)), \quad (3.30)$$

donde K_B es la constante de Boltzmann. Con un logaritmo de base 2, la entropía máxima para cada un sistema es $S_{max}=1$ y ocurre cuando los dos valores propios son todos iguales a $\frac{1}{2}$. La entropía mínima de cero se obtiene cuando un valor propio es uno, todos los demás son cero. Derivando la entropía de von Neumann se obtiene la tasa de generación de la misma, entonces el término $\frac{dS}{dt}$ se puede escribir como

$$\dot{S} = -k_B \text{Tr}(\dot{\rho} \log_2(\rho)). \quad (3.31)$$

3.6. Funcional de correlación

En [?] se definió un parámetro que sirve para modelar la decoherencia en sistemas cuánticos. Este término es denominado funcional de correlación el cual está basado en la propiedad de subaditividad de la entropía de von Neumann. Matemáticamente quedo definido como

$$\sigma_{A,B}(\rho) = \text{Tr}(\rho \ln(\rho)) - \text{Tr}(\rho_A \ln(\rho_A)) - \text{Tr}(\rho_B \ln(\rho_B)). \quad (3.32)$$

También se definió la norma del conmutador $[H, \rho]$ como una medida de la coherencia del sistema como

$$||C|| = \text{Tr}(CC^\dagger), \quad (3.33)$$

donde $C = i[H, \rho]$.

Capítulo 4

Resultados

En este Capítulo se presentan los resultados numéricos de la evolución de los qubits en un circuito H-CNOT así como la evolución del sistema en general para diferentes observables tales como; *evolución de los qubits en la esfera de bloch, vector de polarización, factor de coherencia, entropía, generación de entropía, funcional de correlación y concurrencia* en el marco de SEA-QT. También se presenta las tasa de decaimiento media y con esta una primera aproximación de un valor esperado del término τ_D .

Es importante mencionar que todas las simulaciones del circuito cuántico H-CNOT fueron realizadas en un código fuente propio escrito en Python, para esto fue necesaria la instalación de la librería qutip. Para resolver las ecuaciones diferenciales de la ecuación de movimiento se usó el paquete de soluciones de ecuaciones diferenciales complejas numérico "*complex ode*".

4.1. Resultados del circuito H-CNOT

4.1.1. Esfera de Bloch y vector de polarización

Con el código realizado fueron reproducidos los resultados reportados en [?] donde se había estudiado la compuerta CNOT usando la dinámica de SEA-QT y estos resultados fueron tomados como validación del código. Los parámetros usados para la obtención de resultados de esta sección son presentados en la Tabla ??.

En la Figura ?? se la evolución del vector de polarización, cuando el tiempo de evolu-

ción llega al t_1 la compuerta se activa y empieza el cambio en el vector de polarización. En la Figura ?? se muestra que el qubit objetivo inicia su evolución en el estado $|0\rangle$. Es importante mencionar que estas figuras sólo muestran los efectos de la compuerta cuántica CNOT pero los qubits iniciales (control y objetivo) ya fueron analizados en el marco de SEA-QT y evolucionados con los parámetros de la Tabla ?. Esto se puede notar con los vectores naranja y verde en la esfera de Bloch que apuntan a los estados iniciales con los que se generará el operador de densidad, ya que si la compuerta Hadamard fuera evolucionada desde un estado muy próximo a $|0\rangle$ el vector tendría que apuntar a la superficie de la esfera exactamente a la mitad entre el estado $|0\rangle$ y $|1\rangle$ representando la superposición. La evolución de vector hacia el centro de la esfera es un comportamiento típico del marco de SEAQT donde el estado evoluciona a un estado mixto.

Tabla 4.1: Parámetros para simulación del circuito H-CNOT

Parámetro	Valor
Parámetros Generales	
ω_L	$0.2675 U_t^{-1}$
\hbar	$1 U_E U_t$
Compuerta Hadamard	
P_x	0.001
P_y	0.0
P_z	0.999
t_s =tiempo de simulación	$40 U_t$
τ_D	$40 U_t$
τ	$5 U_t$
t_0	$10 U_t$
Qubit objetivo	
P_x	0.001
P_y	0.0
P_z	0.999
t_s =tiempo de simulación	$40 U_t$
τ_D	$40 U_t$
Compuerta CNOT	
t_s =tiempo de simulación	$180 U_t$
τ_D	$40 U_t$
τ	$5 U_t$
t_0	$10 U_t$

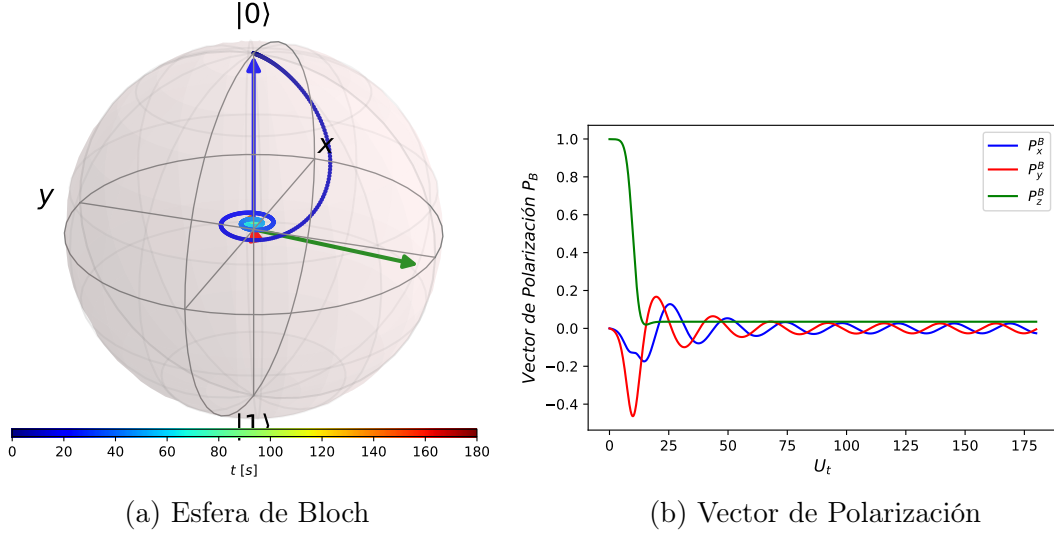


Figura 4.1: Evolución del qubit objetivo representado en la esfera de Bloch y vector de polarización, ambos en el protocolo H-CNOT bajo la dinámica de SEA-QT.

4.1.2. Entropía

De acuerdo con la entropía de von Neumann, se puede determinar la entropía total del sistema. En la Figura ?? se observa cómo el marco de SEA-QT predice un aumento pronunciado de la entropía del sistema en el tiempo que es activada la compuerta, esto es corroborado por una taza de generación de la misma propiedad, en la misma figura que muestra incremento en forma de pulso de la generación de entropía tras la activación de la compuerta. Todo esto nos permite afirmar que el marco de SEA-QT predice alta generación de entropía que podría ser asociada a la compuerta cuántica.

4.1.3. Concurrencia

La concurrencia ya había sido definida como una medida del entrelazamiento para estados mixtos, entonces es de vital importancia determinar el grado de entrelazamiento de los qubits en el marco de SEA-QT. En la Figura ?? se observa cómo el circuito H-CNOT presenta una concurrencia que aumenta desde 0, muy rápido al mismo tiempo que la compuerta es activada y por tanto el entrelazamiento aumenta. Esto concuerda con la física del problema ya que el sistema antes de la compuerta CNOT cuenta con subsistemas no correlacionados. Un valor positivo de concurrencia es prueba suficien-

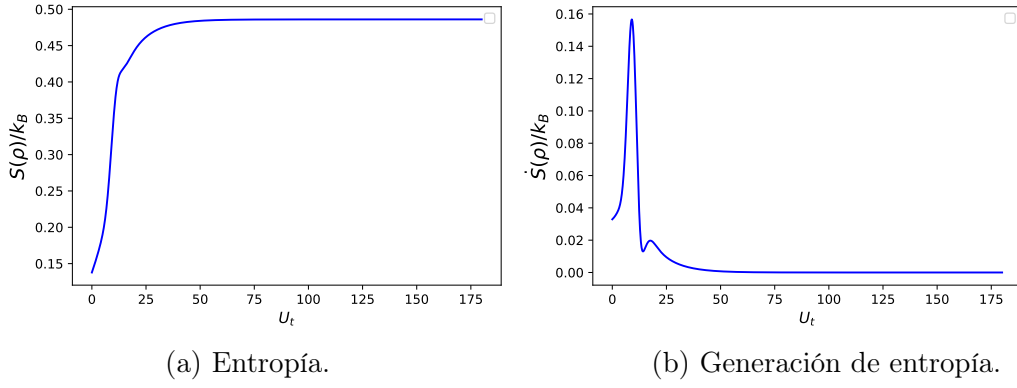


Figura 4.2: Entropía y generación de entropía en el protocolo H-CNOT bajo la dinámica de SEA-QT.

te de entrelazamiento. En la Figura ?? se observa cómo al modificar el parámetro $\tau_{D_J}(J = A, B)$ de la compuerta CNOT y manteniendo en $\tau_{D_H} = \tau_{D_{QO}} = 40\nu s$ (para generar un estado muy cercano al la superposición ideal de la compuerta Hadamard) se obtiene una pérdida de concurrencia mientras el $\tau_{D_J}(J = A, B)$ aumenta. De acuerdo con la Ec. (??) se puede ver que mientras el valor de $\tau_{D_J}(J = A, B) \rightarrow \infty$ se recupera la ecuación de von Neumann y se genera el caso sin disipación.

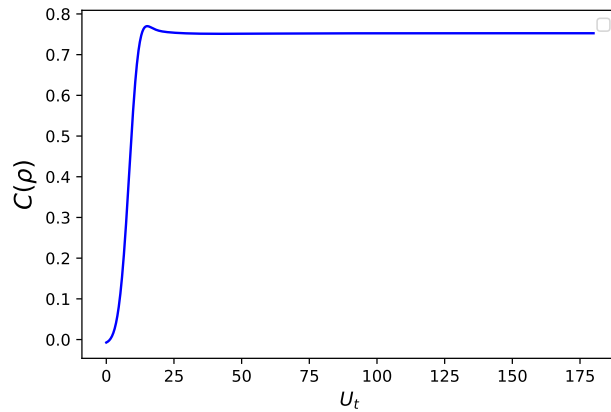


Figura 4.3: Concurrencia generada por el protocolo H-CNOT en el marco de SEAQT.

La Figura ?? muestra que mientras aumenta el parámetro $\tau_{D_J}(J = A, B)$ la entropía total del sistema disminuye, entonces con las discusiones anteriores se puede decir que el poco entrelazamiento generado entre subsistemas se debe a la alta producción de entropía y podemos relacionar esta última con la no generación de coherencias en el operador de densidad.

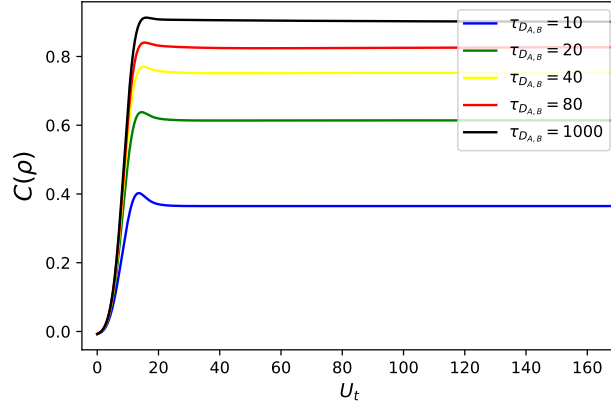


Figura 4.4: Concurrencia generada por el protocolo C-NOT en la dinámica de SEA-QT para diferentes valores de $\tau_{D_{A,B}}$ manteniendo constante el parámetro $\tau_{D_{H,QO}}$.

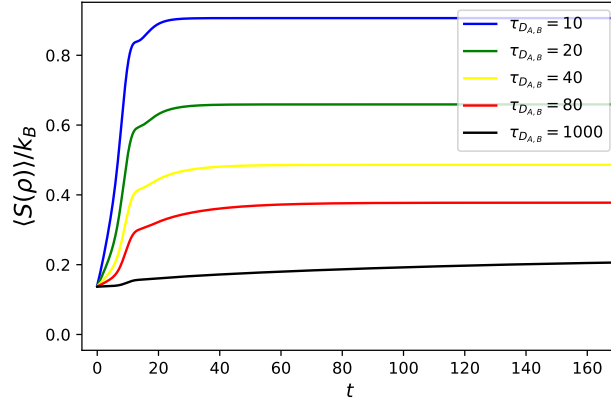


Figura 4.5: Entropía total del sistema bajo la evolución del protocolo H-CNOT en el marco de SEA-QT para diferentes valores de $\tau_{D_{A,B}}$ manteniendo constante el parámetro $\tau_{D_{H,QO}}$.

Finalmente en la Figura ?? manteniendo fijo el tiempo $\tau_{D_J}(J = A, B) = 40ns$ y variando $\tau_{D_K}(K = H, QO)$, se muestra cómo mientras más pequeño sea, la generación concurrencia disminuye de una manera muy severa, esto indica que la principal pérdida de concurrencia esta asociada a la compuerta Hadamard ya que aunque el estado generado por la misma es una superposición, las irreversibilidades se hacen presentes disminuyendo los términos fuera de la diagonal del estado y aunque teóricamente generaría un estado de Bell de máximo entrelazamiento, los qubits tendrían un valor de concurrencia pequeño lo cual es perjudicial para la concurrencia.

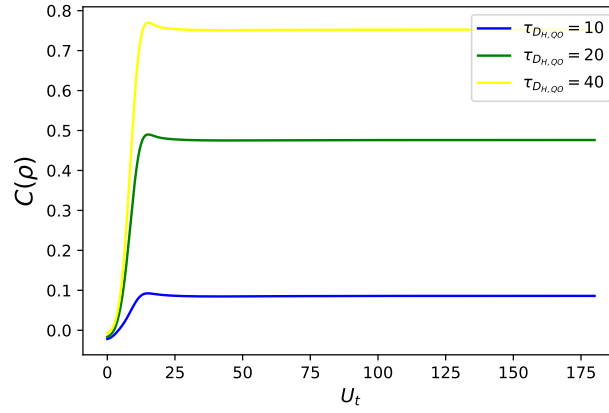


Figura 4.6: Concurrencia generada por el protocolo C-NOT en la dinámica de SEA-QT para diferentes valores de $\tau_{D_{H,QO}}$ manteniendo constante el parámetro $\tau_{D_{A,B}}$.

4.1.4. Funcional de correlación

Como herramienta para medir la coherencia se determina el funcional de correlación. En la Figura ?? se muestra un comportamiento muy similar al de la concurrencia, ambos estipulando que hay generación de entrelazamiento.

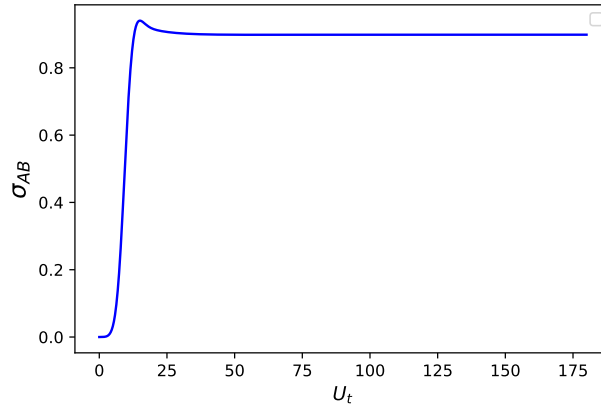


Figura 4.7: Funcional de correlación para el protocolo C-NOT en la dinámica de SEA-QT.

En la Figura ?? se muestra un comportamiento donde el sistema está perdiendo la coherencia, esto no predicho en la concurrencia ni en el funcional de correlación.

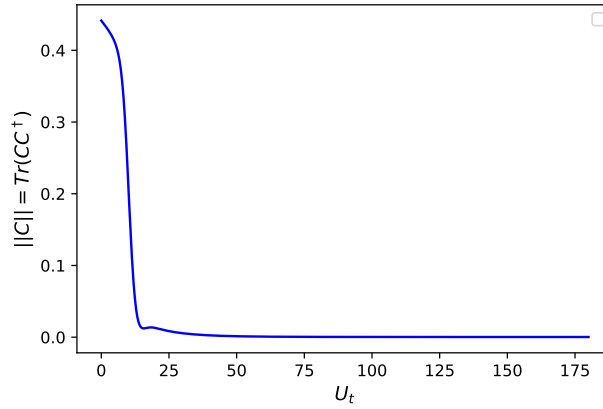


Figura 4.8: Factor de coherencia para el protocolo C-NOT en la dinámica de SEA-QT.

4.2. Resultados de los tiempos τ_D usando la regla de oro de Fermi

En la sección ?? se desarrolló la ROF para uno y dos qubits y se mencionó que sólo puede determinarse para los qubits que presentan un cambio de nivel de energía. Si no existe dicho cambio, el valor de Γ es constante y el término τ_D tenderá a ser infinito. Entonces sólo será posible determinar dos tiempos de disipación, esto es, uno para el qubit que es transformado en la compuerta Hadamard y otro para el qubit objetivo (qubit QO). En el protocolo Hadamard el estado final después de evolucionar en el marco de SEA-QT durante un tiempo determinado se tomará como el estado inicial del qubit de control en la compuerta CNOT (qubit A). Por otro lado, el tiempo de disipación del qubit A no se podrá determinar ya que con las ecuaciones deducidas para el caso de dos sistemas con dos niveles, los dos qubits están desacoplados y dictaminarán tiempos que tienden al infinito. Esto es consistente con el hecho de que no hay un cambio de nivel de energía.

Otro tiempo que se puede determinar es el del qubit objetivo (qubit B), el qubit objetivo antes de entrar en la compuerta CNOT es analizado mediante la dinámica de SEA-QT para tomar su estado final como el inicial para el protocolo CNOT, en otras palabras, como no existe cambio de energía en el estado antes de que se accione la compuerta de 2 qubits no se puede determinar un tiempo de disipación. Después de entrar en la compuerta CNOT el qubit objetivo puede o no ser modificado, el caso

de interés es cuando este es modificado y entonces se podrá determinar el tiempo de disipación.

Es claro que falta caracterizar el sistema para hacer una simulación más apegada a los resultados obtenidos. Por simplicidad y como los dos qubits en la compuerta CNOT están relacionados, se propone $\tau_{D_A} = \tau_{D_B}$ y como el qubit objetivo antes del protocolo CNOT es el ya mencionado qubit QO entonces, es razonable pensar que tenga el mismo orden de magnitud que el del qubit objetivo y entonces se propone que $\tau_{D_{QO}} = \tau_{D_B}$. Con lo anterior, ahora sólo es necesario determinar el parámetro θ_G que es un término íntimamente ligado a la activación de la compuerta el cual da el carácter de dependencia del tiempo al Hamiltoniano con perturbación así como las condiciones de frontera al sistema de ecuaciones diferenciales. En la Tabla ?? se muestran los parámetros referentes a la compuerta (τ y t_0) así como también se muestran las condiciones iniciales.

Tabla 4.2: Parámetros para determinar los tiempos τ_D mediante la regla de oro de Fermi

Parámetro	Valor
Parámetros Generales	
ω_L	$0.2675 U_t^{-1}$
Compuerta Hadamard	
τ	$.5 U_t$
t_0	$10 U_t$
$C1_0$	1
$C2_0$	0
Qubit objetivo	
τ	$5 U_t$
t_0	$10 U_t$
$C3_0$	1
$C4_0$	0

Es importante aclarar nuevamente que $C1C1^*$ es la probabilidad de encontrar el sistema en el estado $|0\rangle$ y $C2C2^*$ de encontrarlo en $|1\rangle$. Como se se explicó en el apartado ??, el qubit iniciará en el estado $|0\rangle$ y por ello son definidas las condiciones de frontera de la Tabla ?. Para el qubit objetivo se siguió la misma linea de pensamiento.

También es de importancia recalcar que la frecuencia de Larmor está escalada a las

unidades de tiempo, es decir que si las unidades de tiempo fueran ns entonces se recupera el caso donde $\omega_L = 0.2675 \times 10^9$ y los resultados son exactamente los mismos pero escalados. Con esto, los resultados para los tiempos de disipación son

$$\begin{aligned}\tau_{D_H} &= 24,219430199706039 \text{ } Ut \\ \tau_{D_B} &= 5,259462390770364 \text{ } Ut\end{aligned}\tag{4.1}$$

Como ya fue mencionado y justificado, para hacer la simulación se propone que: $\tau_{D_A} = \tau_{D_{Q0}} = \tau_{D_B}$.

4.3. Resultados del circuito H-CNOT usando los tiempos de la regla de oro de Fermi

Para esta sección se usaron los datos mostrados en la Tabla ?? pero los valores de τ_D fueron cambiados por los que se obtuvieron en el apartado anterior de la manera ya mencionada.

4.3.1. Esfera de Bloch y vector de polarización.

En la Figura ?? se muestra lo ya discutido de la Figura ?? utilizando los tiempos de disipación obtenidos mediante la ROF. Haciendo una comparativa entre estas ya mencionadas figuras, se puede concluir que para el caso donde fueron propuestos los tiempos τ_D , el término disipativo es menor y esto conlleva a que tenga un mayor tiempo de evolución hacia el centro de la esfera y por tanto llega más lentamente a un estado de equilibrio. Además, es importante notar que en comparación con el vector verde que apunta al estado inicial del qubit de control y el cual fue el estado final después de aplicar la compuerta U_H , se puede observar que el estado está más cercano a la superficie de la esfera e indica que el estado ha generado menos irreversibilidades que en el caso de esta presente sección de resultados. En la Figura ?? se aprecia una pronta relajación ya que entre el valor propuesto del término τ_{D_B} y el determinado por la ROF existe una diferencia perjudicial significativa de alrededor de 34 unidades

de tiempo.

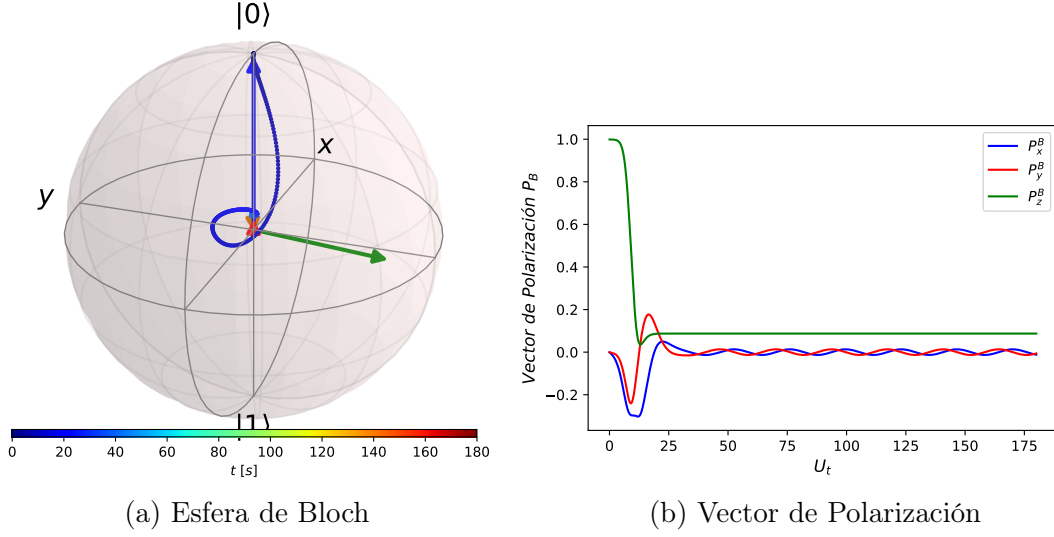


Figura 4.9: Evolución del qubit objetivo representado en la esfera de Bloch y vector de polarización, ambos en el protocolo H-CNOT bajo la dinámica de SEA-QT usando los tiempos de la regla de oro de Fermi.

4.3.2. Entropía

Como es de esperarse, existe una mayor entropía total en el protocolo con menores tiempos de disipación, esto es, ya que entre menor sean estos parámetros para cada compuerta, el término disipativo se vuelve más significativo. El comportamiento de la generación en entropía es la derivada de la gráfica de la Figura ?? y es mostrada en la Figura ?? donde se muestra nuevamente que la compuerta a lo que por derecho podríamos llamar una perturbación repentina en la evolución que conlleva una alta tasa de producción de entropía.

En general, y haciendo una comparativa entre las Figuras ?? y ?? se ve que para los valores calculados de τ_D mediante la ROF, la entropía total y generada es mayor que para el caso propuesto. Como es de esperarse, mientras el sistema llega más rápidamente a un estado de equilibrio existe una máxima generación de entropía, entonces como ya se había mencionado, se asocia al término τ_D con el tiempo en el cual se llega nuevamente al equilibrio.

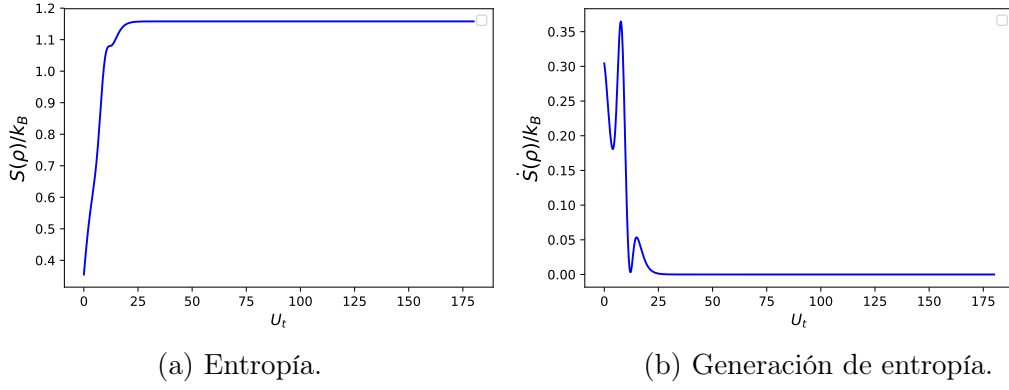


Figura 4.10: Entropía y generación de entropía en el protocolo H-CNOT bajo la dinámica de SEA-QT usando los tiempos τ_D predichos por la regla de oro de Fermi.

4.3.3. Concurrencia

Un comportamiento no muy parecido a la concurrencia con los valores propuestos se muestra en la Figura ?? . Es de suma importancia notar que si hay una relación entre la generación de entropía y la concurrencia, estas dos gráficas muestran que cuando el valor de generación de entropía va aumentando la concurrencia disminuye o cuando va decreciendo, la concurrencia tiende a aumentar. Se puede concluir que aunque se obtiene la información de la Figura ?? a partir de la Figura ??, es más ilustrativa la generación de entropía para predecir el comportamiento del entrelazamiento.

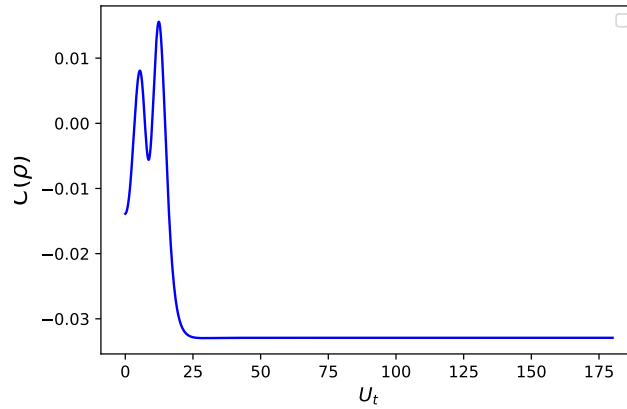


Figura 4.11: Concurrencia generada por el protocolo H-CNOT en el marco de SEA-QT para los tiempos de la regla de oro de Fermi.

4.3.4. Funcional de correlación

Nuevamente calculando el funcional de correlación pero con los tiempos que dictamina la ROF se puede hacer una comparativa entre esta sección y la Cección ???. La Figura ?? muestra menores valores de $\sigma_{A,B}(\rho)$, esto es por que las irreversibilidades del sistema tienen un alto impacto con la generación de entrelazamiento. Como ya se ha venido mencionando, el tiempo de disipación tiene un efecto de disminución de entrelazamiento y esto se ve constatado en la comparación entre las gráficas con los tiempos propuestos y las gráficas con los tiempos de la ROF.

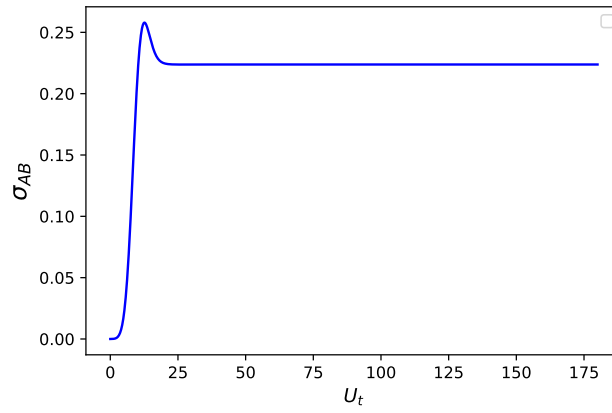


Figura 4.12: Funcional de correlación para el protocolo C-NOT en la dinámica de SEA-QT usando los tiempos de la regla de oro de Fermi.

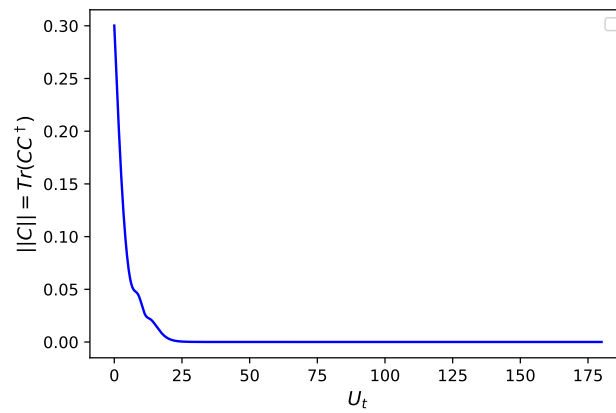


Figura 4.13: Factor de coherencia para el protocolo C-NOT en la dinámica de SEA-QT usando los tiempos de la regla de oro de Fermi.

La Figura ?? muestra cómo se pierde la coherencia del sistema. Como ya fue definido

anteriormente, las decoherencias corresponden a los términos fuera de la diagonal del operador de densidad y entonces la Figura ?? muestra cómo estos valores decaen a cero lo cual claramente indica que los términos fuera de la diagonal del operador de densidad están rondando el 0 y se están estabilizando.

Capítulo 5

Conclusiones

La finalidad de este trabajo fue relacionar la decoherencia utilizando la concurrencia en sistemas de estados mixtos con la entropía bajo el marco de SEA-QT. De los resultados obtenidos se concluye que como se esperaba, el término de disipación genera irreversibilidades en el sistema las cuales impiden la generación de entrelazamiento, mientras se tenga un aumento en la disipación se obtendrá un menor valor de concurrencia.

En cuanto a la comparación se determinó que las irreversibilidades en el qubit con compuerta Hadamard son importantes ya que mientras el estado tiende más hacia el centro de la esfera de Bloch se generan valores bajos de concurrencia, esto ya que este es tomado para ser el qubit de control de la compuerta CNOT, entonces se concluiría que son más importantes las irreversibilidades en la compuerta Hadamard y es necesario el estudio de dicha compuerta en el marco de SEA-QT.

En cuanto a la compuerta Hadamard, se puede decir que es una compuerta con bastantes complicaciones de generar correctamente, haciendo referencia a que se pretende que regrese un estado a la mitad de los estados de la base computacional. En otras palabras, generar una probabilidad de $\frac{1}{2}$ y se logrará ajustando los parámetros de la compuerta. Hacer ajustes en los tiempos que caracterizan a la compuerta se refiere a encontrar el tiempo adecuado en el cual actúa la compuerta pero no degenera el qubit a otro estado de energía no deseado, lo cual se logró dejando el tiempo de la compuerta del orden de $\frac{1}{10}$ veces el tiempo de acción de la CNOT. Generar un estado

con probabilidad $\frac{1}{2}$ es de suma importancia para generar un máximo entrelazamiento. Para la regla de oro de Fermi se concluye que es una herramienta que de acuerdo a la hipótesis y las condiciones físicas del problema contribuye con datos del orden de magnitud esperados. Es importante también mencionar que la ROF de la forma que fue utilizada, no predice el tiempo de disipación si el estado se mantiene en un valor de energía constante.

El parámetro $\tau_{D_J}(J = A, B)$ es un factor que se puede asociar con un término en el cual el estado alcanza un nuevo equilibrio y cuanto este tiende al infinito se recupera la ecuación de von Neumann y el sistema no genera disipación. La obtención de este parámetro mediante la ROF caracteriza la evolución del protocolo H-CNOT, y esto permite obtener resultados razonables y con un comportamiento esperado para la compuerta.

Esta primera aproximación ha generado resultados que aunque no son tan beneficiosos para el entrelazamiento, se espera que de manera experimental, sean caracterizados en este rango.

Finalmente se concluye que los resultados permiten una simulación más realista ya que se ha utilizado el marco de SEA-QT en cada uno de los componentes del circuito, permitiendo así simular el grado de generación y la pérdida de entrelazamiento (conurrencia).

Como propuesta de mejora o propuesta de trabajos futuros se analiza la idea de resolver las ecuaciones diferenciales no mediante pulsos sino que con condicionales en el programa resolver las ecuaciones en 3 partes (precesión, compuerta y precesión) y de esta manera eliminar los estados indeseables para la energía. Esto pierde un poco el carácter físico pero permitiría acercarse más a algunos valores reportados relacionados con parámetros experimentales de compuertas, aunque hay que advertir que hasta el momento la mayoría de valores reportados corresponden a computación cuántica hecha con superconductores.

Otra propuesta con el fin de abrir más los horizontes es determinar el grado de entrelazamiento con una herramienta literalmente nueva llamada "*harmony*" y comparar resultados con los ya obtenidos.

Apéndice A

Códigos de los Modelos

A.1. Código para dos qubits

```
1 print('\033[H\033[J')
2 import numpy as np
3 from scipy.integrate import complex_ode
4 import qutip as qt
5 import scipy as sp
6 import matplotlib.pyplot as plt
7 from scipy . constants import hbar,k
8 from partial_trace import partial_traceA
9 from partial_trace import partial_traceB
10 from matplotlib import cm
11 import matplotlib as mpl
12 import math
13 from estados_iniciales import Hadamard_inicial
14 from estados_iniciales import Qubit_objetivo
15
16
17 #matrices de Pauli
18 sx=np.matrix([[0.0 , 1.0],[1.0 , 0.0]]),complex)
19 sy=np.matrix([[0.0 , -1.0j],[1.0j , 0.0]]),complex)
20 sz=np.matrix([[1.0 , 0.0],[0.0 , -1.0]]),complex)
21 ide=np.eye(2)
22
```

```

23 #bases para espacio de Hilbert dimension 4
24 sx2=np.kron(sx , sx)
25 sy2=np.kron(sy , sy)
26 sz2=np.kron(sz , sz)
27
28 #Caso='Resultados anteriores'
29 Caso='Resultados Circuito H-CNOT'
30
31 if Caso=='Resultados anteriores':
32     Resultados_Montilla='H-CNOT'
33 #parametros de la compuerta
34     tao=5;                #tiempo de accion de la compueta
35     t0=10;                #pulso medio de la compuerta
36     t1=t0-tao/2;          #tiempo de inicio de activacion de compuerta
37     t2=t0+tao/2;          #tiempo de termino de activacion de compuerta
38     w=.2675;              #frecuencia angular
39
40
41 #constantes fisicas utilizadas
42     hb=1;                 #constante modificada de Planck
43     kb=1;                 #constante de Boltzman
44     FA=0.0002*hb*w        #fuerza de acoplamiento entre subsistemas
                             termino que quiere mantener acoplados los subsistemas...
45     V=-FA*(sx2+sy2+sz2)
46     if Resultados_Montilla=='CNOT':
47         tauA=40;          #tiempo disipativo A
48         tauB=40;          #tiempo disipativo B
49
50     #RESULTADOS DE MONTILLA
51     #caso Controlled Not sin compuerta Hadamard iniciando con los
    estados |1> en el objetivo y |1> en el de control
52     rhoAi=np.matrix([[0.01 , .0],[.0 , .98]] , complex) #qubit #de
    control
53     rhoBi=np.matrix([[.02 , 0],[0 , .98]] , complex) #qubit objetivo
54
55     if Resultados_Montilla=='H-CNOT':
56         tauA=10;          #tiempo disipativo A

```

```

57     tauB=10;                #tiempo disipativo B
58     #caso controlled not con compuerta Hadamard en el qubit objetivo
59     rhoAi=np.matrix([[0.5 , .5],[.5 , .5]],complex) #qubit #de control
60     rhoBi=np.matrix([[.98 , 0],[0 , .02]],complex) #qubit objetivo
61
62
63 if Caso=='Resultados Circuito H-CNOT':
64     tauA=40;                #tiempo disipativo A
65     tauB=40;                #tiempo disipativo B
66
67 #parametros de la compuerta
68     tao=5;                  #tiempo de accion de la compueta
69     t0=10;                  #pulso medio de la compuerta
70     t1=t0-tao/2;            #tiempo de inicio de activacion de compuerta
71     t2=t0+tao/2;            #tiempo de termino de activacion de compuerta
72     #w=1
73     w=.2675;                #frecuencia angular
74
75 #constantes fisicas utilizadas
76     hb=1;                   #constante modificada de Planck
77     kb=1;                   #constante de Boltzman
78     FA=0.0002*hb*w          #fuerza de acoplamiento entre subsistemas
79     termino que quiere mantener acoplados los subsistemas...
80     V=-FA*(sx2+sy2+sz2)
81
82 #polarizacion para qubit A (Control) Esto define el estado inicial de
83     la compuerta Hadamard bajo la dinamica de SEAQT
84 #la H es de 'Hadamard' en todo el codigo y la funcion generadora de
85     estados iniciales
86
87     r1H=0.001;
88     r2H=0;
89     r3H=.999;
90
91 #polarizacion para qubit B (Objetivo) Esto define el estado inicial
92     precesando bajo el marco de SEAQT
93 #la S es de 'sin compuerta'
94     r1S=0.001;

```

```

90     r2S=0;
91     r3S=.999;
92
93 #parametros para los estados iniciales
94     tauH=40          #tiempo disipativo de la compuerta Hadamard
95     tauS=40          #tiempo disipativo del qubit objetivo
96     tHS = 40         #tiempo de evolucion de los estados iniciales
97     dtHS = .1        #intervalos de integracion numerica
98
99 #RESULTADOS DEL CIRCUITO H-CNOT CON TODAS LAS COMPUERTAS DEL PROTOCOLO
    BAJO EL MARCO DE SEAQT
100     rhoAi=Hadamard_inicial(r1H,r2H,r3H,tauH,tHS,dtHS)
101     rhoBi=Qubit_objetivo(r1S,r2S,r3S,tauS,tHS,dtHS)
102
103
104 #####Compuerta CNOT
    #####
105 #le evolucion de la compuerta CNOT tiene como qubit de control una
    compuerta Hadamard que ya ha sido evolucionada
106 #con el marco de SEAQT y como qubit objetivo un estado precesando que ya
    fue evolucionado en el marco de SEAQT
107
108 rhoi=np.kron(rhoAi,rhoBi)
109 rho1=np.asarray(rhoi).reshape(1,16)
110
111
112
113 #Hamiltonianos de subsistemas
114 HA=-(1/2)*(hb*w)*sz
115 HB=-(1/2)*(hb*w)*sz
116
117 #operadores de densidad locales iniciales (TR_A mapea de rho—>rhoA)
118 rhoA=partial_traceA(rhoi,np)
119 rhoB=partial_traceB(rhoi,np)
120
121 #compuerta Controlled Not
122 C_NOT=np.matrix((( [1, 0, 0, 0 ],[0,1,0,0],[0,0,0,1],[0,0,1,0] ) ,complex)

```



```

123 Hl=np.kron(HA,ide)+np.kron(ide,HB)           #ya tiene los terminos hb*w en
        los hamiltonianos estandar
124
125 def f(t,rho):
126     rho=rho.reshape(4,4)
127     rhoA=partial_traceA(rho,np)
128     rhoB=partial_traceB(rho,np)
129
130     lnrho=sp.linalg.logm(rho)
131     lnrhoA=partial_traceA((np.dot(np.kron(ide,rhoB),lnrho)),np)
132     lnrhoB=partial_traceB((np.dot(np.kron(rhoA,ide),lnrho)),np)
133
134     thetaB=math.exp(-((t-t0)/tao)**2);
135     thetaG=(math.sqrt(math.pi)/(2*tao))*math.exp(-((t-t0)/tao)**2);
136     H=(1-thetaB)*Hl+hb*thetaG*C_NOT
137
138     HA=partial_traceA((np.dot(np.kron(ide,rhoB),H)),np)
139     HB=partial_traceB((np.dot(np.kron(rhoA,ide),H)),np)
140
141     gammaA=np.trace(np.dot(rhoA,np.dot(HA,HA)))-(np.trace(np.dot(rhoA,HA)
        ))**2;
142     alphaA=(np.trace(np.dot(rhoA,HA))*(1/2)*np.trace(np.dot(rhoA,(np.dot(
        HA,lnrhoA)+np.dot(lnrhoA,HA))))-np.trace(np.dot(rhoA,np.dot(HA,HA)))*
        np.trace(np.dot(rhoA,lnrhoA)))/gammaA;
143     betaA=(np.trace(np.dot(rhoA,lnrhoA))*np.trace(np.dot(rhoA,HA))-(1/2)*
        np.trace(np.dot(rhoA,(np.dot(HA,lnrhoA)+np.dot(lnrhoA,HA)))))/gammaA;
144     DA=(1/2)*((np.dot(rhoA,lnrhoA))+(np.dot(lnrhoA,rhoA)))+(alphaA*rhoA)
        +((1/2)*betaA*(np.dot(rhoA,HA)+np.dot(HA,rhoA)));
145
146     gammaB=np.trace(np.dot(rhoB,np.dot(HB,HB)))-(np.trace(np.dot(rhoB,HB)
        ))**2;
147     alphaB=(np.trace(np.dot(rhoB,HB))*(1/2)*np.trace(np.dot(rhoB,(np.dot(
        HB,lnrhoB)+np.dot(lnrhoB,HB))))-np.trace(np.dot(rhoB,np.dot(HB,HB)))*
        np.trace(np.dot(rhoB,lnrhoB)))/gammaB;
148     betaB=(np.trace(np.dot(rhoB,lnrhoB))*np.trace(np.dot(rhoB,HB))-(1/2)*
        np.trace(np.dot(rhoB,(np.dot(HB,lnrhoB)+np.dot(lnrhoB,HB)))))/gammaB;

```

```

149     DB=(1/2)*((np.dot(rhoB,lnrhoB))+(np.dot(lnrhoB,rhoB)))+(alphaB*rhoB)
        +((1/2)*betaB*(np.dot(rhoB,HB)+np.dot(HB,rhoB)));
150     D=((1/tauA)*(np.kron(DA,rhoB)))+((1/tauB)*(np.kron(rhoA,DB)))
151     #D=0
152     drho=-(1j/hb)*(np.dot(H,rho)-np.dot(rho,H))-D;
153
154     return drho.reshape(1,16)
155
156 r = complex_ode(f)
157 r.set_initial_value(rho1, 0)
158
159 t = 180
160 dt = .1
161 i=00
162
163 Px=np.zeros(((int(t/dt), 1)),complex)
164 Py=np.zeros(((int(t/dt), 1)),complex)
165 Pz=np.zeros(((int(t/dt), 1)),float)
166
167 Px2=np.zeros(((int(t/dt), 1)),complex)
168 Py2=np.zeros(((int(t/dt), 1)),complex)
169 Pz2=np.zeros(((int(t/dt), 1)),float)
170 time=np.zeros(int(t/dt),float)
171 Fac_Cor=np.zeros(((int(t/dt), 1)),complex)
172
173 Fac_Cor2=np.zeros(((int(t/dt), 1)),complex)
174
175 sSEA=np.zeros(int(t/dt),float)
176 sSEA_A=np.zeros(int(t/dt),float)
177 sSEA_B=np.zeros(int(t/dt),float)
178
179 Purity_A=np.zeros(int(t/dt),float)
180 Purity_B=np.zeros(int(t/dt),float)
181 dsdtSEA=np.zeros(int(t/dt),float)
182 sigmaAB=np.zeros(int(t/dt),float)
183 zeros_FD=np.zeros(((int(t/dt))),float)
184 Concurrencia=np.zeros(((int(t/dt))),float)

```

```

185 drho1=np.zeros(((int(t/dt),16)),float)
186 rho=np.zeros(((int(t/dt),4,4)),float)
187 eigenvalH=np.zeros(int(t/dt),float)
188 eigenval2H=np.zeros(int(t/dt),float)
189
190 Energy_B=np.zeros(int(t/dt),float)
191
192
193 while r.successful() and (i+dt)*dt <= t:
194     r.integrate(r.t+dt)
195     rho=r.y.reshape(4,4)
196
197     rhoA=partial_traceA(rho,np)
198     rhoB=partial_traceB(rho,np)
199
200     thetaB=math.exp(-((t-t0)/tao)**2);
201     thetaG=(math.sqrt(math.pi)/(2*tao))*math.exp(-((t-t0)/tao)**2);
202     H=(1-thetaB)*H1+hb*thetaG*C_NOT      #si quitamos V tambien funciona
203
204     HA=partial_traceA((np.dot(np.kron(ide,rhoB),H)),np)
205     HB=partial_traceB((np.dot(np.kron(rhoA,ide),H)),np)
206
207     #HA=(1/2)*(hb*w)*sz
208     #HB=(1/2)*(hb*w)*sz
209
210     lnrho=sp.linalg.logm(rho)
211     lnrhoA=partial_traceA((np.dot(np.kron(ide,rhoB),lnrho)),np)
212     lnrhoB=partial_traceB((np.dot(np.kron(rhoA,ide),lnrho)),np)
213
214     drho1=f(i*dt,rho)
215     drho=drho1.reshape(4,4)
216
217     Fac_Cor[i]=np.trace(((np.dot(H1,np.kron(rhoA,rhoB))-np.dot(np.kron(
rhoA,rhoB),H1)))*(np.dot(np.kron(rhoA,rhoB),H1)-(np.dot(H1,np.kron(
rhoA,rhoB)))))/((w**2)*(hb**2))
218     sSEA[i]=-np.trace(np.dot(rho,sp.linalg.logm(rho)))      #entropia del
sistema

```

```

219     sSEA_A[i]=-np.trace(np.dot(rhoA,sp.linalg.logm(rhoA))) #entropia del
        subsistema A
220     sSEA_B[i]=-np.trace(np.dot(rhoB,sp.linalg.logm(rhoB))) #entropia del
        subsistema B
221     sigmaAB[i]=np.trace(np.dot(rho,sp.linalg.logm(rho)))-np.trace(np.dot(
        rhoA,sp.linalg.logm(rhoA)))-np.trace(np.dot(rhoB,sp.linalg.logm(rhoB)
        ))
222     Purity_A[i]=np.trace(np.dot(rhoA,rhoA)) #pureza del
        subsistema A
223     Purity_B[i]=np.trace(np.dot(rhoB,rhoB)) #pureza del
        subsistema B
224     Energy_B[i]=np.trace(np.dot(HB,rhoB))
225
226     eig= np.linalg.eig(rho)
227     eig2=eig[0]
228     eigenvalH[i]=eig2[0]
229     eigenval2H[i]=eig2[1]
230     #EH[i]=np.trace(np.dot(H,rho))
231
232
233     #concurrency
234     rho_concurrency=np.dot(np.dot(sy2,np.conjugate(rho)),sy2)
235     rho_raiz=sp.linalg.sqrtm(rho)
236     R=sp.linalg.sqrtm(np.dot(np.dot(rho_raiz,rho_concurrency),rho_raiz))
237     R_lamda=sorted(np.linalg.eigh(R)[0])
238     Concurrencia[i]=R_lamda[3]-R_lamda[2]-R_lamda[1]-R_lamda[0]
239     zeros_FD[i]=rho[0,1]*np.conjugate(rho[0,1])+rho[0,2]*np.conjugate(rho
        [0,2])+rho[0,3]*np.conjugate(rho[0,3])+rho[1,0]*np.conjugate(rho
        [1,0])+rho[1,2]*np.conjugate(rho[1,2])+rho[1,3]*np.conjugate(rho
        [1,3])+rho[2,0]*np.conjugate(rho[2,0])+rho[2,1]*np.conjugate(rho
        [2,1])+rho[2,3]*np.conjugate(rho[2,3])+rho[3,0]*np.conjugate(rho
        [3,0])+rho[3,1]*np.conjugate(rho[3,1])+rho[3,2]*np.conjugate(rho
        [3,2])
240
241     dsdtSEA[i]=-(np.trace(np.dot(drho,sp.linalg.logm(rho)))-np.trace(drho
        ))/w
242

```

```

243     time[i]=dt*i
244     Px[i]=rhoA[0,1]+rhoA[1,0]
245     Py[i]=(-1/(1j))*(rhoA[0,1]-rhoA[1,0])
246     Pz[i]=(rhoA[0,0]-rhoA[1,1])
247
248     Px2[i]=rhoB[0,1]+rhoB[1,0]
249     Py2[i]=(-1/(1j))*(rhoB[0,1]-rhoB[1,0])
250     Pz2[i]=(rhoB[0,0]-rhoB[1,1])
251
252     i=i+1
253     tlist = np.linspace(0,t,t/dt)
254
255
256     #####Esfera de Bloch
257     #####
258     plt.figure(1)
259     b = qt.Bloch()
260     nrm = mpl.colors.Normalize(0,t)
261     colors = cm.jet(nrm(tlist))
262     pnt=[Px.real,Py.real,Pz.real]
263     b.frame_alpha=.1
264     b.sphere_alpha=.2
265     b.markersize=.1
266     b.view =[-45,10]
267     b.view =[110,25]
268     #b.add_points(pnt,'m')
269     b.point_color = list(colors)
270     b.point_marker =['o']
271     b.point_size = [10]
272     vecAi =[Px.real[0][0],Py.real[0][0],Pz.real[0][0]]
273     b.add_vectors(vecAi)
274     vecAf =[Px.real[-1][0],Py.real[-1][0],Pz.real[-1][0]]
275     b.add_vectors(vecAf)
276     pnt2=[Px2.real,Py2.real,Pz2.real]
277     b.add_points(pnt2,'m')
278     vecBi =[Px2.real[0][0],Py2.real[0][0],Pz2.real[0][0]]
279     b.add_vectors(vecBi)

```

```

279 vecBf =[Px2.real[-1][0],Py2.real[-1][0],Pz2.real[-1][0]]
280 b.add_vectors(vecBf)
281 b.show()
282 ax1= b.fig.add_axes([0.02 ,0.09 ,0.95 ,0.015])
283 cmap=mpl.cm.jet
284 cb1=mpl.colorbar.ColorbarBase(ax1,cmap = cmap,norm=norm,orientation='
    horizontal')
285 cb1.set_label(r'$t \ [s]$', fontsize = 10)
286 b.fig
287 b.fig.savefig('Grafica2bloch2.pdf')
288
289
290 #####Vector de Polarizacion A
    #####
291 plt.figure (2)
292 plt.figure
293 plt.plot(tlist,Px, label = r"$P_x^A$", color = 'blue')
294 plt.plot(tlist,Py, label = r"$P_y^A$", color = 'red')
295 plt.plot(tlist,Pz, label = r"$P_z^A$", color = 'green')
296 #plt.xlim(-5e-9,185e-9)
297 plt.legend(loc="upper right")
298 plt.grid(True)
299 plt.grid(color = '0.5', linestyle = '—', linewidth = 1)
300 plt.xlabel(r"$U_t$", fontsize = 12, color = 'black')
301 plt.show()
302
303
304 #####Vector de Polarizacion B
    #####
305 plt.figure (3)
306 plt.figure
307 plt.plot(tlist,Px2, label = r"$P_x^B$", color = 'blue')
308 plt.plot(tlist,Py2, label = r"$P_y^B$", color = 'red')
309 plt.plot(tlist,Pz2, label = r"$P_z^B$", color = 'green')
310 #plt.xlim(-5e-9,185e-9)
311 plt.legend(loc="upper right")
312 plt.grid(True)

```

```

313 plt.grid(color = '0.5', linestyle = '—', linewidth = 1)
314 plt.xlabel(r"$U_t$", fontsize = 12, color = 'black')
315 plt.savefig('PolarizacionB.pdf')
316 plt.show()
317
318
319 #####Factor de Coherencia
      #####
320 plt.figure (4)
321 plt.plot(tlist,Fac_Cor, color = 'blue')
322 plt.legend(loc="upper right")
323 #plt.xlim(-5e-9,185e-9)
324 plt.grid(True)
325 plt.grid(color = '0.5', linestyle = '—', linewidth = 1)
326 plt.xlabel(r"$U_t$", fontsize = 12, color = 'black')
327 plt.ylabel(r"$||C||=Tr(CC^\dagger)$", fontsize = 12, color = 'black')
328 plt.title('Factor de Coherencia',fontsize = 12, color = 'black',
            verticalalignment = 'baseline', horizontalalignment = 'center')
329 plt.savefig('Factor_Coherencia.pdf')
330 plt.show()
331
332
333 #####degeracion de Entropia
      #####
334 plt.figure (5)
335 plt.plot(tlist,dsdtSEA, color = 'blue')
336 plt.legend(loc="upper right")
337 #plt.xlim(-5e-9,185e-9)
338 plt.ylim(.9,1.4)
339 plt.grid(True)
340 plt.grid(color = '0.5', linestyle = '—', linewidth = 1)
341 plt.savefig('Generacion_Entropia.pdf')
342 plt.show()
343
344
345 #####Entropia Percibida
      #####

```

```
346 plt.figure (6)
347 plt.plot(tlist ,sSEA, color = 'blue')
348 plt.legend(loc="upper right")
349 #plt.xlim(-5e-9,185e-9)
350 plt.ylim(.9,1.4)
351 plt.grid(True)
352 plt.grid(color = '0.5', linestyle = '—', linewidth = 1)
353 plt.savefig('Grafica_entropy_total.pdf')
354 plt.show()
355
356
357 #####Entropia percibida de subsistemas
    #####
358 plt.figure (7)
359 plt.plot(tlist ,sSEA_A, label = "A", color = 'red')
360 plt.plot(tlist ,sSEA_B, label = "B", color = 'Blue')
361 plt.legend(loc="upper right")
362 ##plt.xlim(-5e-9,185e-9)
363 plt.ylim(0,1.4)
364 plt.grid(True)
365 plt.grid(color = '0.5', linestyle = '—', linewidth = 1)
366 plt.savefig('Grafica_entropy_subsistemas.pdf')
367 plt.show()
368
369
370 #####Pureza de subsistemas
    #####
371 plt.figure (8)
372 plt.plot(tlist ,Purity_A, label = "A", color = 'red')
373 plt.plot(tlist ,Purity_B, label = "B", color = 'Blue')
374 plt.legend(loc="upper right")
375 #plt.xlim(-5e-9,185e-9)
376 plt.ylim(.75,1)
377 plt.grid(True)
378 plt.grid(color = '0.5', linestyle = '—', linewidth = 1)
379 plt.savefig('Pureza.pdf')
380 plt.show()
```



```

381
382
383 #####Funcional de Correlacion
      #####
384 plt.figure (9)
385 plt.plot(tlist ,sigmaAB, color = 'blue')
386 plt.legend(loc="upper right")
387 #plt.xlim(-5e-9,185e-9)
388 plt.ylim(0,.08)
389 plt.grid(color = '0.5', linestyle = '—', linewidth = 1)
390 plt.grid(True)
391 plt.savefig('Funcional_Correlacion.pdf')
392 plt.show()
393
394
395
396 #####Concurrencia
      #####
397 plt.figure (10)
398 plt.plot(tlist ,Concurrencia, color = 'blue')
399 plt.legend(loc="upper right")
400 #plt.xlim(-5e-9,185e-9)
401 plt.ylim(0,.08)
402 plt.grid(color = '0.5', linestyle = '—', linewidth = 1)
403 plt.grid(True)
404 plt.savefig('Concurrencia.pdf')
405 plt.show()

```

A.2. Código para un qubit

```

1 print('\033[H\033[J')
2 import numpy as np
3 from scipy.integrate import complex_ode
4 import qutip as qt
5 import math
6 from scipy . constants import hbar,k
7 import scipy as sp

```

```

8 import matplotlib as mpl
9 import matplotlib.pyplot as plt
10 from matplotlib import cm
11
12
13 sx=np.matrix([[0 , 1],[1 , 0]],complex)
14 sy=np.matrix([[0 , -1j],[1j , 0]],complex)
15 sz=np.matrix([[1 , 0],[0 , -1]],complex)
16 ide=np.matrix([[1,0],[0,1]])
17 Had=1/np.sqrt(2)*np.matrix([[1,1],[1,-1]])
18 r1=0.0001;
19 r2=0;
20 r3=.999;
21
22 tauH=40; #tiempo disipativo
23 taoH=.5; #tiempo de accion de la compueta
24 t0H=33.5625;
25 #t0H=10
26 t1H=t0H-taoH/2;
27 t2=t0H+taoH/2;
28 w=.2675;
29 hb=1;
30 kb=k;
31
32 rho0H=(1/2)*(r1*sx+r2*sy+r3*sz+ide);
33 rho1=np.asarray(rho0H).reshape(1,4);
34 Com=Had
35
36 def f(t,rho):
37
38     rho=rho.reshape(2,2)
39     thetaB=math.exp(-((t-t0H)/taoH)**2);
40     thetaG=(math.sqrt(math.pi)/(2*taoH))*math.exp(-((t-t0H)/taoH)**2);
41     H=-(1/2)*w*hb*(1-thetaB)*sz+hb*thetaG*Com;
42     gamma=np.trace(np.dot(rho,np.dot(H,H)))-(np.trace(np.dot(rho,H)))**2;
43     alpha=(np.trace(np.dot(rho,H))*np.trace(np.dot(rho,np.dot(H,sp.linalg
.logm(rho))))-np.trace(np.dot(rho,np.dot(H,H)))*np.trace(np.dot(rho,
```

```

    sp.linalg.logm(rho)))/gamma;
44     beta=(np.trace(np.dot(rho,sp.linalg.logm(rho)))*np.trace(np.dot(rho,H
    ))-np.trace(np.dot(rho,np.dot(H,sp.linalg.logm(rho)))))/gamma;
45     D=(np.dot(rho,sp.linalg.logm(rho)))+(alpha*rho)+((1/2)*beta*(np.dot(H
    ,rho)+np.dot(rho,H)));
46     D=0
47     drho=(-(1j/hb)*(np.dot(H,rho)-np.dot(rho,H))-D/tauH);
48     return (drho.reshape(1,4))
49
50 r = complex_ode(f)
51 r.set_initial_value(rho1, 0)
52
53 t = 101
54 dt = .3
55 i=0
56
57 PxH=np.zeros(((int(t/dt), 1)),complex)
58 PyH=np.zeros(((int(t/dt), 1)),complex)
59 PzH=np.zeros(((int(t/dt), 1)),complex)
60 time=np.zeros(int(t/dt),float)
61 dsdtSEAH=np.zeros(int(t/dt),float)
62 dsdtQMH=np.zeros(int(t/dt),float)
63 sSEAH=np.zeros(int(t/dt),float)
64 eigenvalH=np.zeros(int(t/dt),float)
65 eigenval2H=np.zeros(int(t/dt),float)
66 dsdtH=np.zeros(int(t/dt),float)
67 EH=np.zeros(int(t/dt),float)
68
69
70 while r.successful() and (i+1+dt)*dt < t:
71     r.integrate(r.t+dt)
72     rho=r.y.reshape(2,2)
73     #rho=r.y2
74     drho1=f(i*dt, rho)
75     drho=drho1.reshape(2,2)
76     #
77     thetaB=math.exp(-(i*dt-t0H)/taoH)**2);

```

```

78     thetaG=(math.sqrt(math.pi)/(2*taoH))*math.exp(-((i*dt-t0H)/taoH)**2);
79     H=-(1/2)*w*hb*(1-thetaB)*sz+hb*thetaG*sx;
80     gamma=np.trace(np.dot(rho,np.dot(H,H)))-(np.trace(np.dot(rho,H)))**2;
81     alpha=(np.trace(np.dot(rho,H))*np.trace(np.dot(rho,np.dot(H,sp.linalg
      .logm(rho))))-np.trace(np.dot(rho,np.dot(H,H))*np.trace(np.dot(rho,
      sp.linalg.logm(rho)))))/gamma;
82     beta=(np.trace(np.dot(rho,sp.linalg.logm(rho))*np.trace(np.dot(rho,H
      ))-np.trace(np.dot(rho,np.dot(H,sp.linalg.logm(rho)))))/gamma;
83     D=((np.dot(rho,sp.linalg.logm(rho)))+(alpha*rho)+((1/2)*beta*(np.dot(
      H,rho)+np.dot(rho,H))));
84     Dd=((np.dot(sp.linalg.logm(rho),rho))+(alpha*rho)+((1/2)*beta*(np.dot
      (rho,H)+np.dot(H,rho))));
85     dsdtSEAH[i]=((1/taoH)*np.trace(np.dot(D,Dd)))/w
86     dsdtSEAH[i]=-(np.trace(np.dot(drho,sp.linalg.logm(rho)))-np.trace(
      drho))/w
87     sSEAH[i]=-np.trace(np.dot(rho,sp.linalg.logm(rho)))
88
89
90     eig= np.linalg.eig(rho)
91     eig2=eig[0]
92     eigenvalH[i]=eig2[0]
93     eigenvalH[i]=eig2[1]
94     EH[i]=np.trace(np.dot(H,rho))
95
96
97     PxH[i]=rho[0,1]+rho[1,0]
98     PyH[i]=(-1/(1j))*(rho[0,1]-rho[1,0])
99     PzH[i]=(rho[0,0]-rho[1,1])
100    time[i]=dt*i
101    i=i+1
102    if i>1:
103        dsdtH[i-2]=(sSEAH[i-1]-sSEAH[i-2])/dt
104
105
106
107
108    tlist = np.linspace(0,t,t/dt)

```

```

109
110 b = qt.Bloch()
111 nrm = mpl.colors.Normalize(0,t)
112 colors = cm.jet(nrm(tlist))
113 pnt=[PxH.real,PyH.real,PzH.real]
114 b.frame_alpha=.1
115 b.sphere_alpha=.2
116 b.markersize=.1
117 b.view =[-45,10]
118 b.add_points(pnt, 'm')
119 b.point_color = list(colors)
120 b.point_marker = ['o']
121 b.point_size = [10]
122 b.show()
123 ax1= b.fig.add_axes([0.02 ,0.09 ,0.95 ,0.015])
124 cmap=mpl.cm.jet
125 cb1=mpl.colorbar.ColorbarBase(ax1,cmap = cmap,norm=nrm,orientation='
    horizontal')
126 cb1.set_label(r'$t\ [\mu s]$', fontsize = 10)
127 b.fig
128 b.fig.savefig('Grafica2bloch.pdf')
129
130 plt.figure (2)
131 plt.plot(tlist,PxH.real, label = "Px", color = 'red')
132 plt.plot(time,PyH.real, label = "Py", color = 'blue')
133 plt.plot(time,PzH.real, label = "Pz", color = 'green')
134 plt.legend(loc="upper right")
135 plt.grid(True)
136 plt.grid(color = '0.5', linestyle = '—', linewidth = 1)
137 plt.xlabel(r"$time$", fontsize = 12, color = 'black')
138 plt.ylabel(r"P", fontsize = 15, color = 'black')
139 plt.title('Polarizacion', fontsize = 12, color = 'black',
    verticalalignment = 'baseline', horizontalalignment = 'center')
140 plt.savefig('Grafica1.pdf')
141 plt.show()
142
143

```

```

144 plt.figure (3)
145 plt.plot(tlist,dsdtSEAH, label = "SEAQT", color = 'red')
146 plt.plot(tlist,dsdtQMH, label = "von Neumann", color = 'blue')
147 plt.legend(loc="upper right")
148 plt.grid(True)
149 plt.grid(color = '0.5', linestyle = '—', linewidth = 1)
150 plt.xlabel(r"$time$", fontsize = 12, color = 'black')
151 plt.ylabel(r"$\frac{ds}{dt}$", fontsize = 15, color = 'black')
152 plt.title('Generacion de Entropia',fontsize = 12, color = 'black',
            verticalalignment = 'baseline', horizontalalignment = 'center')
153 plt.savefig('Grafica_entropy_generation.pdf')
154 plt.show()
155
156 plt.figure (4)
157 plt.plot(tlist,sSEAH, label = "SEAQT", color = 'red')
158 plt.legend(loc="upper right")
159 plt.grid(True)
160 plt.grid(color = '0.5', linestyle = '—', linewidth = 1)
161 plt.xlabel(r"$time$", fontsize = 12, color = 'black')
162 plt.ylabel(r"$S$", fontsize = 15, color = 'black')
163 plt.title('Entropia Total',fontsize = 12, color = 'black',
            verticalalignment = 'baseline', horizontalalignment = 'center')
164 plt.savefig('Grafica_entropy.pdf')
165 plt.show()
166
167 plt.figure (5)
168 plt.plot(tlist,eigenvalH, label = r"$\lambda_1$", color = 'red')
169 plt.plot(tlist,eigenval2H, label = r"$\lambda_2$", color = 'blue')
170 plt.legend(loc="upper right")
171 plt.grid(True)
172 plt.grid(color = '0.5', linestyle = '—', linewidth = 1)
173 plt.xlabel(r"$time$", fontsize = 12, color = 'black')
174 plt.ylabel(r"$\lambda$", fontsize = 15, color = 'black')
175 plt.title('Eigenvalores',fontsize = 12, color = 'black',
            verticalalignment = 'baseline', horizontalalignment = 'center')
176 plt.savefig('Grafica_eigenvalues.pdf')
177 plt.show()

```

```

178
179 plt.figure (5)
180 plt.plot(tlist,EH, color = 'red')
181 plt.legend(loc="upper right")
182 plt.grid(True)
183 plt.xlim(33.56e-9,36.56e-9)
184 plt.grid(color = '0.5', linestyle = '—', linewidth = 1)
185 plt.xlabel(r"$time$", fontsize = 12, color = 'black')
186 plt.ylabel(r"$\lambda$", fontsize = 15, color = 'black')
187 plt.title('Energy',fontsize = 12, color = 'black', verticalalignment = '
    baseline', horizontalalignment = 'center')
188 plt.savefig('Grafica_eigenvalues.pdf')
189 plt.show()
190
191 plt.figure (5)
192 plt.plot(eigenvalH,sSEAH, color = 'red')
193 plt.plot(eigenva2H,sSEAH, color = 'blue')
194 plt.grid(True)
195 plt.legend(loc="upper right")
196 plt.grid(color = '0.5', linestyle = '—', linewidth = 1)
197 plt.xlabel(r"$time$", fontsize = 12, color = 'black')
198 plt.ylabel(r"$\lambda$", fontsize = 15, color = 'black')
199 plt.title('Energy',fontsize = 12, color = 'black', verticalalignment = '
    baseline', horizontalalignment = 'center')
200 plt.savefig('Grafica_eigenvalues.pdf')
201 plt.show()
202
203 plt.figure (5)
204 plt.plot(sSEAH,abs(EH), color = 'red')
205 plt.plot(sSEAH,eigenva2H, color = 'blue')
206 plt.legend(loc="upper right")
207 plt.grid(True)
208 plt.grid(color = '0.5', linestyle = '—', linewidth = 1)
209 plt.xlabel(r"$Entropy$", fontsize = 12, color = 'black')
210 plt.ylabel(r"$Energy$", fontsize = 15, color = 'black')
211 plt.title('Energy-Entropy',fontsize = 12, color = 'black',
    verticalalignment = 'baseline', horizontalalignment = 'center')

```

```

212 plt.savefig('Grafica_eigenvalues.pdf')
213 plt.show()

```

A.3. Código para resolver sistemas de ED complejas (Principal)

```

1  close all
2  clc
3  clear all
4  format long
5
6  ti=10
7  tf=10.5
8  dt=.001
9
10 [t,C] = ode45(@Funcion_Fermi,[ti:dt:tf],[1;0]);
11
12 C1=(C(:,1))
13 C1C=conj(C1)
14 C2=(C(:,2))
15 C2C=conj(C2)
16
17 for i=1: length(C1)
18     Norma(i)=sqrt(C1(i)*C1C(i)+C2(i)*C2C(i));
19     alpha(i)=C1(i)/Norma(i);
20     beta(i)=C2(i)/Norma(i);
21     Probability_alpha(i)=alpha(i)*conj(alpha(i));
22     Probability_beta(i)=beta(i)*conj(beta(i));
23     Probability_total(i)=Probability_alpha(i)+Probability_beta(i);
24 end
25
26 time=ti:dt:tf-dt;
27 Gamma=(diff(Probability_beta)/(dt))
28 Q_alpha = trapz(t,Probability_alpha)
29 Q_beta = trapz(t,Probability_beta)
30 Gamma_integrado=trapz(time,Gamma)

```



```

31 GammaP=(1/(tf-ti))*Gamma_integrado
32 t_D=GammaP^-1
33
34 figure (4)
35 plot(t,Probability_alpha , t,Probability_beta ,time ,Gamma, '-')
36 title('Solution of C_1 and C_2');
37 xlabel('t');
38 ylabel('Solution C');
39 legend('P_{alpha}','P_{beta}','Gamma_{alpha}')
40 grid on

```

A.4. Código para resolver sistemas de ED complejas (Función)

```

1 function dydt = Funcion_Fermi(t,C)
2 w=.2675;
3 t_0=10.25
4 tao=.5
5 theta_G=(sqrt(pi)/2*tao)*exp(-((t-t_0)/tao)^2)
6
7 %dydt = [(1/i)*(C(2)*exp(i*w*t))*theta_G; (1/i)*(C(1)*exp(-i*w*t))*
8         theta_G]
9 %Hadamard:
10 dydt = [(1/(i*sqrt(2)))*theta_G*(C(2)*exp(-i*w*t)+C(1)); (1/(i*sqrt(2)))*
11         theta_G*(C(1)*exp(i*w*t)-C(2))]
12 end

```