

UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO



UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
CAMPUS LEÓN
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS

METAMATERIALES ANÁLOGOS A AGUJEROS NEGROS Y
ELECTRODINÁMICA EN ESPACIOS CURVOS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRO EN FÍSICA

PRESENTA:
MARCO ANTONIO GARCÍA SÁNCHEZ

NUA: 389713

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JOSÉ LUIS LÓPEZ PICÓN

*Para Elena, Arturo,
Alberto y H-EME*

Agradecimientos

Tal vez el universo nos sea indiferente y no se puede agradecer por su aleatoriedad pero me es grato pensar en que existe un ser supremo en todo lugar y explícitamente dentro de nosotros, al cual muestro mi agradecimiento por cada evento que me ha traído aquí.

Agradezco a mis padres y hermanos por el apoyo que día con día recibí de ellos de diferente manera. *Aquí están unas cuantas de las matemáticas por las que siempre preguntaban.* Ustedes son y serán lo mas importante en la vida.

Al Dr. José Luis López Picón, el cual siempre estuvo al pendiente en todo el proceso de este trabajo. Din duda alguna un profesor excelente y un asesor comprometido con el estudiante y el proyecto. Gracias, Luis por todo el conocimiento compartido y espero seguir aprendiendo mucho más de ti.

A mis mejores amigos quienes ayudaron a la revisión y mejora de este trabajo, así como quienes tomaron o tomarán el tiempo para leerlo.

A mis profesores y compañeros de maestría, en especial a mis compañero en el *depa*, los cuales saben lo difícil que fue el cambio de área y nunca desistieron.

Finalmente agradezco al Conacyt y a Quiroga Trucks S.A De C.V por el apoyo económico brindado durante la maestría.

Resumen

En el trabajo titulado *Matamateriales análogos a agujeros negros y electrodinámica en espacio curvo*, se hace una revisión a la analogía entre las ecuaciones de Maxwell en el vacío en una variedad arbitraria en 4 dimensiones y las ecuaciones de Maxwell en un medio anisotrópico en un espacio plano (espacio-tiempo de Minkowski) en donde las propiedades de permeabilidad magnética y permitividad eléctrica quedan determinadas por la métrica. Un primer análisis de esta analogía permite pensar en mimetizar fenómenos astrofísicos en un material con propiedades bien definidas que regresen la respuesta electromagnética deseada (metamaterial). Para este trabajo se mimetiza la trayectoria de la luz cerca del agujero negro de Schwarzschild como se hace [1] y el agujero negro de Reissner-Nordström, los cuales con sus métrica caracterizan los metamateriales.

Para imitar la trayectoria de la luz, es claro que primero se debe encontrar una ecuación que determine la distribución de una onda electromagnética en un medio material, para esto se usa la ecuación de onda de campo eléctrico, con ciertas consideraciones. La ecuación de onda del campo eléctrico proveniente de las ecuaciones de Maxwell y esta necesita de las propiedades del medio para poder ser resuelta, para lo cual fueron encontradas las relaciones constitutivas entre los campos \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} y \mathbf{H} y así caracterizar el metamaterial. La solución de dicha ecuación es obtenida en Comsol Mutipysics para una geometría cuadrada en dos dimensiones con condiciones de frontera para generar un haz Gaussiano de campo eléctrico incidente en una de las aristas de la geometría cuadrada. También se implementa un círculo con $r = r_s$, donde r_s es el radio de Schwarzschild, con propiedades para mimetizar absorberencia en todas las direcciones y así imitar el comportamiento del agujero negro.

Finalmente se muestran los resultados de la distribución de campo eléctrico para diferentes parámetros de impacto y se comparan con la trayectoria determinada por las geodésicas para partículas de tipo luz en cada espacio-tiempo, siendo estas completamente congruentes con las distribuciones devueltas a través de las ecuaciones en la analogía lo cual respalda el uso de esta para modelar el comportamiento de la luz alrededor de un agujero negro por medio de un material anisotrópico.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	III
1. Introducción	1
1.1. Analogía y metamateriales	1
1.2. Alcance	2
1.3. Objetivos	2
1.4. Metodología	3
2. Relatividad General	4
2.1. Tensores	4
2.2. Geodésicas	6
2.3. Ecuaciones de campo de Einstein	7
2.4. Solución de Schwarzschild	7
2.5. Solución de Reissner-Nordström.	11
3. Ecuaciones de Maxwell en espacio curvo	16
3.1. Formulación covariante de las ecuaciones de Maxwell	16
3.2. Ecuaciones de Maxwell en una variedad Riemanniana	18
4. Analogía geometría-medio	20
4.1. Ecuaciones de Maxwell en un medio anisotrópico	20
4.2. Relaciones constitutivas	23
4.3. Propiedades electromagnéticas desde métricas con simetría esférica y estáticas	25
5. Análisis numérico y resultados	28
5.1. Comsol Mutipysics	28
5.1.1. Módulo de matemáticas	29
5.1.2. Óptica de ondas	29
5.1.3. Elementos del constructor de modelo	30
5.2. Solución a las ecuaciones diferenciales de geodésicas utilizando métodos numéricos	33
5.3. Comparación de la distribución de campo eléctrico en el metamaterial con las curvas de geodésicas	34
6. Conclusiones y perspectivas	37
A.	38
A.1. Códigos Implementados	39

A.1.1. Varios cálculos y gráficas en las métricas de Schwarzschild y Reissner-Nordström	39
A.1.2. Gráficos en Python de los resultados en Comsol	41
A.1.3. Runge Kutta 4to orden para resolver las ecuaciones de Geodésicas	46
Bibliografía	49

Índice de figuras

1.1. Todos las posibles propiedades de un material anisotópico en el dominio ϵ - μ . Imagen tomada de [2]	2
2.1. a) Potencial efectivo $V_{eff}(r)$ para partículas de tipo luz comparado con la energía de diferentes parámetros de impacto [3]. b) curvatura de la trayectoria del fotón de acuerdo con la Ec.(2.33.)	11
2.2. Diferentes casos del agujero negro de Reissner-Nordström y sus regiones [4]. . . .	14
4.1. Direcciones de los campos con las consideraciones antes mencionadas en tres di- mensiones (vista 3D y plano x - y) [3].	21
5.1. Geometría para la simulación del problema	31
5.2. Soluciones a las Ecs(5.7 y 5.8) mediante el método de Runge-Kutta de orden 4, para el espacio-tiempo de Schwarzschild con $r_s = 1$ y Reissner-Nordström con $r_s = 1$ y $q = r_s/2$, ambos para sus respectivos parámetros de impacto crítico. . .	34
5.3. Distribución del modulo de campo eléctrico para un haz gaussiano con longitud de onda $\lambda = 0,15r_s$ y ancho $w_0 = 0,2r_s$, con $r_s = 1$ y $\delta = 0,05$, para diferentes parámetros de impacto b y usando las propiedades provenientes del espacio-tiempo de Schwarzschild sintetizadas en la Ec.(4.36).	35
5.4. Distribución del modulo de campo eléctrico para un haz Gaussiano con longitud de onda $\lambda = 0,15r_s$ y ancho $w_0 = 0,2r_s$, con $r_s = 1$, $\delta = 0,05$, para diferentes parámetros de impacto b . En a) y b) se obtiene el agujero negro de Schwarzschild desde la métrica y parámetros de Reissner-Nordström usando $q \rightarrow 0$, en c) y d) se simula la geometría de para el valor máximo permitido de la carga geométrica $q = \frac{r_s}{2}$, es decir, para el agujero negro extremal.	36
A.1. Diagrama de Flujo con los principales elementos a seguir en Comsol Mutiphysics para la simulación de los resultados de la Figura 5.3 y Figura 5.4	38

Capítulo 1

Introducción

1.1. Analogía y metamateriales

Una analogía es una relación de semejanza entre distintas cosas, por ejemplo, cuando intentamos explicar cierta cosa, muchas veces recurrimos a relaciones para simplificar el problema. En la ciencia y como científicos, es común utilizar simplificaciones para explicar ciertos experimentos, cálculos o resultados, en otras palabras, se recurre al uso de analogías para llevar cierto conocimiento que conlleva un tiempo considerable de arduo estudio teórico y matemático, a una comprensión menos detallada pero suficiente para entender el contexto del mismo y así dejarlo a un alcance general. *La analogía cumple aquí la función de asimilar lo nuevo en términos de cosas conocidas, y evita que las premisas explicatorias nuevas resulten demasiado extrañas. Las analogías también se han identificado al nivel de hacer más aceptable la respuesta investigada.* [5]. Esto no quiere decir que todas las analogías en la ciencia, sean para pasar de un conocimiento riguroso, detallado y sólo entendido a detalle matemático por algunos, a términos divulgativos. Existen analogías entre fenómenos, ecuaciones, métodos de solución, etc. En este trabajo se estudia una analogía entre las ciertas ecuaciones escritas en diferentes condiciones de geometría y medio, obteniendo relaciones para caracterizar ciertas propiedades. En específico, al escribir las ecuaciones de Maxwell en el vacío y para un espacio con curvatura y compararlas con las ecuaciones de Maxwell en un medio anisotrópico en un espacio plano, se obtiene una relación directa entre las propiedades de permeabilidad magnética y permitividad eléctrica del medio anisotrópico con la métrica que caracteriza el espacio curvado. En este trabajo se mimetiza la trayectoria de la luz cerca de dos tipos de agujeros negros con simetría esférica y estáticos, usando el poderío de la analogía.

Los materiales usuales no contienen las propiedades para lograr el fenómeno del que aquí se habla, pero si bien es cierto, existen algunos los cuales pueden curvar un haz de luz cuando este pasa a través de ellos, no de la forma en la que se requiere para imitar la trayectoria que seguiría un rayo cerca de un agujero negro, pero si con cierta curvatura. Para esto, se recurre al usar metamateriales.

Las propiedades electromagnéticas de todos los materiales pueden ser determinadas mediante la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética, estas permiten caracterizar el fenómeno deseado al tener interacción con ondas electromagnéticas. Además, ya que no existen restricciones para estos valores, es posible diseñarlos para así producir cualquier efecto. Estos materiales diseñados bajo ciertas restricciones y que no existen de manera natural, son llamados Metamateriales [6].

El prefijo *Meta* proviene del Griego que significa *Más allá*, por tanto, se puede decir que los metamateriales son algo más allá de los materiales. Estos son compuestos artificiales y sus ele-

mentos estructurales son llamados *meta-átomos* y para definir las propiedades macroscópicas se requiere una relación entre tamaño y distanciamiento entre ellos, menor a la longitud de onda que pasa por el mismo [6, 2].

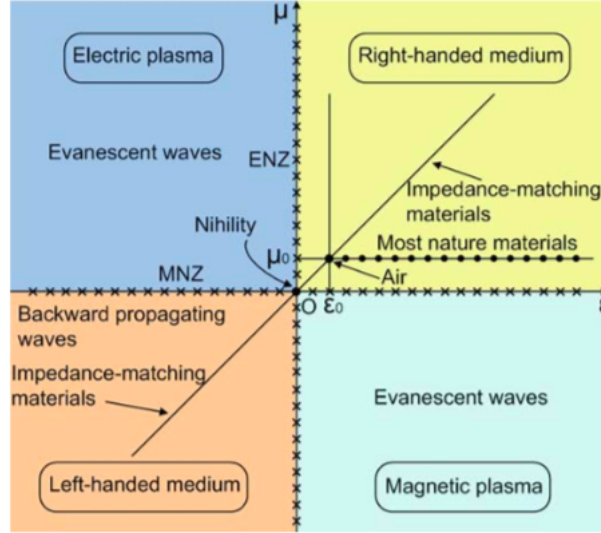


Figura 1.1: Todas las posibles propiedades de un material anisotrópico en el dominio ϵ - μ . Imagen tomada de [2]

En la Figura 1.1 se muestran los cuadrantes formados por una combinación de los valores positivos y negativos de la permitividad y permeabilidad, donde el primer cuadrante ($\epsilon > 0$ y $\mu > 0$) representa materiales diestros, con ondas de propagación hacia adelante, dicho sistema está conformado por la triada de los campos \mathbf{E} , \mathbf{H} y el vector de onda \mathbf{k} . El segundo cuadrante ($\epsilon < 0$ y $\mu > 0$) denota plasma eléctrico, que soporta ondas evanescentes. El tercer cuadrante ($\epsilon < 0$ y $\mu < 0$) son los conocidos materiales zurdos con ondas propagadas hacia atrás, donde la triada antes mencionada forma un sistema izquierdo (una componente o las tres están invertidas en dirección). El cuarto cuadrante ($\epsilon > 0$ y $\mu < 0$) representa el plasma magnético, que soporta ondas evanescentes [2].

1.2. Alcance

En este trabajo se toma un enfoque teórico y se trata de mimetizar la trayectoria de la luz cerca del agujero negro para comparar con las líneas de geodésicas, es decir, se obtienen las propiedades que debe tener el metamaterial para imitar el fenómeno astrofísico, hablando a detalle de todo el proceso, tomando un enfoque más hacia la simulación en Comsol Multiphysics del fenómeno así como la solución a las ecuaciones de geodésicas. Entonces, no se habla a detalle de metamateriales que se podrían usar físicamente para reproducir los resultados de las simulaciones aquí mostradas y simplemente se abordan de forma teórica y detallada, todas las herramientas para reproducir los resultados de [1] usando el espacio-tiempo de Schwarzschild y el de Reissner-Nordström.

1.3. Objetivos

Objetivo general

Revisión de la analogía entre las ecuaciones de Maxwell en el vacío en para una variedad

arbitraria y las ecuaciones de Maxwell en un medio anisotrópico en espacio sin curvatura, para la mimetizar la trayectoria de la luz cerca de agujeros negros.

Objetivos específicos

- 1 Reproducir los resultados de interés del artículo "*Anisotropic metamaterial as an analogue of a black hole*" de Isabel Fernández Núñez y Oleg Bulashenko [1], detallando los procedimientos en Comsol Multiphysics.
- 2 Implementar la métrica de Reissner-Nordström y caracterizar el material para obtener el análogo de la curvatura de un haz de luz cerca de este espacio tiempo.
- 3 Resolver las ecuaciones de geodésicas para comparar directamente con la curvatura del haz Gaussiano de campo eléctrico a su paso por el metamaterial.

1.4. Metodología

Cada capítulo de la tesis tiene una gran relevancia para alcanzar los objetivos antes mencionados. A continuación se habla un poco del alcance y contenido de cada capítulo.

- * En el capítulo 2, se habla sobre relatividad general y lo mas importante es obtener las soluciones de Schwarzschild y Reissner-Nordström a las ecuaciones de Einstein, así como la discusión a ciertos detalles importantes sobre dichas soluciones que llevarán a ciertas consideraciones en los capítulos siguientes. También se obtiene las ecuaciones de geodésicas para cada espacio-tiempo.
- * El capítulo 3 conlleva todo lo relacionado con las ecuaciones de Maxwell sobre una variedad Riemanniana desde la generalización de ciertas operaciones vectoriales para dar un primer vistazo a la analogía en 3 dimensiones.
- * En *Analogía. Geometría-Medio*, se analiza la anisotropía y ciertas consideraciones para simplificar el problema de mimetizar el fenómeno. También se revisan las relaciones constitutivas para de esta forma caracterizar el metamaterial, esto desde la formulación covariante de las ecuaciones de Maxwell.
- * En el capítulo 5, se describen los pasos a seguir dentro de Comsol Multiphysics, para poder reproducir los resultados en [1] y así mimetizar la trayectoria de la luz cerca de un agujero negro de Reissner-Nordström. También se muestran los resultados de las soluciones a las ecuaciones de geodésicas nulas, bajo ciertas consideraciones para poder comparar con la trayectoria del haz Gaussiano dentro del metamaterial, lo cual se muestra de manera gráfica en este mismo capítulo.

Capítulo 2

Relatividad General

En esta sección se analizan las bases matemáticas de relatividad general y las soluciones de Schwarzschild y Reissner-Nordström a las ecuaciones de campo de Einstein. En relatividad general, el espacio-tiempo es tratado como una variedad pseudo-Riemanniana diferenciable de 4 dimensiones, una variedad de Riemann n -dimensional es una generalización de la métrica y diferenciación en el espacio Euclideo de objetos geométricos que localmente tienen la estructura de un espacio Euclideo n -dimensional pero globalmente puede representar una forma curva [7], en otras palabras, es un conjunto de puntos que se asemeja al espacio Euclideo cerca de cada punto pero en general forman un objeto geométrico con curvatura.

2.1. Tensores

Los tensores son invariantes a los sistemas de referencia usados para determinarlos en cuanto a las propiedades y estos son estudiados por el análisis tensorial. Las transformaciones que los dejan invariantes son, transformación covariante con la regla de transformación

$$T'_i = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} T_\alpha \quad (2.1)$$

y transformación contravariante con la regla

$$T'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^\alpha} T^\alpha, \quad (2.2)$$

donde $\{T_\alpha\}$ representa el conjunto de componentes del vector covariante en el sistema coordenado x y $\{T'_i\}$ representa las componentes del mismo vector en el sistema x' , idénticamente para las componentes del los tensores contravariantes $\{T^\alpha\}$ y $\{T'^i\}$. Considerando el producto exterior $C_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_r}^{j_1 \dots j_q l_1 \dots l_s} = A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} B_{k_1 \dots k_r}^{l_1 \dots l_s}$, donde un tensor $T_{i_1 \dots i_\alpha}^{j_1 \dots j_\beta}$ es un tensor α covariante, β contravariante de rango $\alpha + \beta$ (las operaciones de suma de tensores sólo son aplicables entre tensores del mismo tipo) [9]. Es posible generalizar la regla de transformación como

$$T_{\mu_1 \dots \mu_m}^{\nu_1 \dots \nu_n}(x') = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \frac{\partial x'^{\alpha_2}}{\partial x'^{\mu_2}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_m}}{\partial x'^{\mu_m}} \cdot \frac{\partial x'^{\beta_1}}{\partial x^{\nu_1}} \frac{\partial x'^{\beta_2}}{\partial x^{\nu_2}} \dots \frac{\partial x'^{\beta_n}}{\partial x^{\nu_n}} T_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^{\beta_1 \dots \beta_n}(x). \quad (2.3)$$

Una vez que se ha elegido un sistema de coordenadas, la distancia entre puntos es determinada mediante coordenadas asociadas a los mismos. En un espacio Euclideo n -dimensional, el cuadrado de la distancia es $ds^2 = dx^i dx^i$, donde dx^i son los desplazamientos infinitesimales respecto a las componentes x^i de un sistema cartesiano ortogonal. Además, como dicha distancia debe ser

invariante ante estos sistemas coordenados, un cambio de la forma $x^i = x^i(x'^1, \dots, x'^n)$ permite escribir $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta$, donde

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial x'^\beta} \quad (2.4)$$

es el tensor métrico. Por las propiedades del operador derivad, se obtiene que; $g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha$. Además, un tensor métrico cumple con $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, es decir, es simétrico. La métrica es usada para cambiar el tipo de tensor covariante \rightarrow contravariante o viceversa, es decir, $g^{\alpha\beta} T_{\beta\nu}^\mu = T_{\nu}^{\mu\alpha}$. La suma sobre un índice contravariante (superior) y uno covariante (inferior) en el mismo tensor se denomina contracción y reduce el rango del tensor, por ejemplo, $R^\gamma = T^\alpha{}_\alpha{}^\gamma$ donde el tipo de tensor resultante cumple su ley de transformación [8].

Símbolos de Christoffel y derivada covariante

Hasta el momento, todas las operaciones con tensores mencionadas cumplen con una regla de transformación (covariante o contravariante), en otras palabras, después de la operación siguen siendo tensores y por tanto siguen siendo invariantes ante transformaciones de coordenadas. Al generalizar operadores en tensores se podrá construir ecuaciones más complicadas pero con mayor generalidad.

Definiendo un conjunto de funciones designadas por símbolos como

$$\begin{aligned} [ij, k] &= \frac{1}{2} (\partial_j g_{ki} + \partial_i g_{kj} - \partial_k g_{ij}), \\ \Gamma_{ij}^k &= g^{k\alpha} [ij, \alpha], \end{aligned} \quad (2.5)$$

siendo los símbolos de Christoffel de primera y segunda especie respectivamente, los cuales al hacer una transformación de coordenadas de la forma $x^i = x^i(x'^1, \dots, x'^n)$ no transforman como tensores, por ejemplo, el símbolo de segunda especie transforma como

$$\Gamma_{ij}^k(x') = \frac{\partial x'^k}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j} \Gamma_{\alpha\beta}^\rho(x) + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^i \partial x'^j} \frac{\partial x'^k}{\partial x^\alpha}. \quad (2.6)$$

Por otro lado, el conjunto de derivadas parciales de un vector covariante no transforma como tensor y es posible deducir que esta transforma como

$$\frac{\partial}{\partial x'^j} T'_i = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x'^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j} \frac{\partial}{\partial x^\beta} T_\alpha + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^i \partial x'^j}, \quad (2.7)$$

con esta expresión se puede introducir la transformación de los símbolos de Christoffel de segunda especie para obtener un objeto que sí cumple con las leyes de transformación como

$$\nabla_j T_i = \partial_j T_i - \Gamma_{ij}^\alpha T_\alpha, \quad (2.8)$$

el cual define la derivada covariante que se generaliza para tensores de cualquier rango y tipo de la forma

$$\nabla_l T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = \partial_l T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} - \Gamma_{i_1 l}^\alpha T_{\alpha i_2 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} - \dots - \Gamma_{i_r l}^\alpha T_{i_1 \dots i_{r-1} \alpha}^{j_1 \dots j_s} + \Gamma_{\alpha l}^{j_1} T_{i_1 \dots i_r}^{\alpha j_2 \dots j_s} + \Gamma_{\alpha l}^{j_s} T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_{s-1} \alpha}. \quad (2.9)$$

Es posible deducir que las reglas de derivación de la derivada covariante son idénticas a las reglas de derivación convencionales, siendo la derivada covariante una generalización de la derivada ordinaria [7, 8, 9].

Tensor de Riemann

Al efectuar la operación derivada covariante segunda de un tensor y construir la operación $[\nabla_n, \nabla_m] T_i$, de donde se deduce que las derivadas covariantes no conmutan, es decir, $[\nabla_n, \nabla_m] T_i = (\partial_m \Gamma_{ni}^\alpha - \partial_n \Gamma_{mi}^\alpha + \Gamma_{ni}^\beta + \Gamma_{mi}^\beta - \Gamma_{\beta n}^\alpha)$. Se define entonces el tensor de Riemann como

$$R_{nmi}^\alpha = (\partial_m \Gamma_{ni}^\alpha - \partial_n \Gamma_{mi}^\alpha + \Gamma_{ni}^\beta + \Gamma_{mi}^\beta - \Gamma_{\beta n}^\alpha). \quad (2.10)$$

Si el tensor de Riemann desaparece en cada punto de una variedad, es decir, que el orden de diferenciaciones no importa para un campo tensorial 1 covariante (esto se puede generalizar para otro tipo y rango de tensor y permite afirmar que el orden de las diferenciaciones covariantes no importa en un campo tensorial de cualquier rango y tipo). Entonces, si $R_{\alpha\beta\gamma}^\mu = 0$ en todos los puntos de la variedad, ésta será plana, de lo contrario, es un espacio con curvatura. Con las propiedades del tensor de Riemann se sabe que tiene $n^2(n^2 - 1)/12$ componentes independientes y 4^n componentes totales, donde n es el número de dimensiones [9].

Se puede comprobar que el tensor de Riemann satisface la relación

$$\nabla_\delta R_{\alpha\beta\gamma}^\mu + \nabla_\beta R_{\alpha\gamma\delta}^\mu + \nabla_\gamma R_{\alpha\delta\beta}^\mu = 0, \quad (2.11)$$

llamada identidad de Bianchi. La contracción de la forma $R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta}^\mu$, se conoce como el tensor de Ricci y el escalar de curvatura es la traza de éste [7], es decir, $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = R_\alpha^\alpha$.

Tensor de Einstein

Usando propiedades del tensor de Riemann, la identidad de Bianchi se puede transformar a la ecuación tensorial $\nabla_\mu R - 2\nabla_\beta R_\mu^\beta = 0$, entonces, con una métrica contravariante se puede escribir como una derivada covariante de una expresión tensorial de la forma $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$, donde

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R, \quad (2.12)$$

es el llamado tensor de Einstein [7].

2.2. Geodésicas

Las curvas geodésicas son las curvas con la mínima distancia entre dos puntos sobre una variedad. Usando que el elemento de arco está dado por $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ y una curva representada por la ecuaciones paramétricas $C : x^i = x^i(t)$ en $[t_1, t_2]$, la longitud de la curva viene dada por

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} dt. \quad (2.13)$$

Extremando la función con las ecuaciones de Euler-Lagrange y usando que $\frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}$, se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha}{\frac{ds}{dt}} \right] - \frac{1}{2} \partial_j g_{\alpha\beta} \frac{\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}{\frac{ds}{dt}} = 0. \quad (2.14)$$

Si se selecciona el parámetro t , tal que $\frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} = 1$, se obtiene una ecuación de la forma $g_{\alpha\beta} \ddot{x}^\alpha + [\alpha\beta, j] \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$ y multiplicando por g_{ij} se obtienen las ecuaciones de geodésicas [7, 10].

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{\alpha\beta}^i \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0. \quad (2.15)$$

Lo que se ha planteado en esta sección de geodésicas, es una generalidad de obtener la menor distancia entre dos puntos sobre una variedad arbitraria y debe ser claro que por la dependencia de la métrica en los símbolos de Christoffel, esta menor distancia estará igualmente en función de la métrica. En secciones posteriores de este mismo capítulo se obtendrán las ecuaciones de geodésicas para partículas con masa y sin masa, mismas que serán resueltas por métodos numéricos en el capítulo 5.

2.3. Ecuaciones de campo de Einstein

En 1907, en un par de revisiones a la relatividad especial [11, 12, 13], se plantea la posibilidad de extender el principio de relatividad a sistemas acelerados. Resulta que de una transformación de un marco de referencia inercial a uno acelerado uniformemente, surge un campo homogéneo el cual identifica con el campo gravitatorio gracias a la relación de la masa inercial y gravitacional [14, 15]. Esto da como resultado el principio de equivalencia que afirma que un sistema inmerso en un campo gravitatorio es puntualmente indistinguible de un sistema de referencia no inercial acelerado, es decir, existe cierto observador acelerado que no tiene forma de distinguir si las partículas se mueven o no dentro de un campo gravitatorio.

Por otro lado, el principio de covarianza establece que una ecuación física será válida en todos los sistemas de coordenadas si ésta es una ecuación tensorial y cierta en ausencia de gravitación. La conexión del tensor de Einstein y el tensor de energía-momento es mediante conservación de energía. Para formular las ecuaciones de campo, se usa el principio de conservación de energía y cantidad de movimiento que puede expresarse como $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, donde $T^{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento. Entonces, recordando que $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$, se puede escribir $G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}$, donde κ es una constante determinada por las ecuaciones de Einstein en el límite Newtoniano [16]. En este límite, la teoría de gravitación de Einstein se convierte en la teoría gravitatoria de Newton siendo éstas una teoría de gravitación covariante y no covariante respectivamente [16].

En 1915 Einstein formula las ecuaciones que describen como el espacio-tiempo se ve deformado por la energía y quedan escritas como

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

donde G es la constante de gravitación de Newton y c es la velocidad de la luz. Estas ecuaciones son un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales independientes para la métrica.

2.4. Solución de Schwarzschild

Cuando Einstein publica las ecuaciones de campo de la relatividad general en 1915 [17], mediante una solución aproximada le da uno de los primeros éxitos a su teoría con el artículo; *sobre el avance del perihelio de Mercurio* [18]. En 1916 Karl Schwarzschild encuentra una solución analítica a dichas ecuaciones [19]. En esta sección se obtiene la solución de Schwarzschild desde argumentos físicos y usando las ecuaciones de Einstein.

Las ecuaciones de Einstein se pueden escribir como

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T^\alpha_\alpha g_{\mu\nu} \right), \quad (2.17)$$

además, considerando resolver para el campo gravitacional fuera de la masa M (ecuaciones en el vacío, $T_{\mu\nu} = 0$) aislada y con simetría esférica y asumiendo que la masa está en reposo en el origen del sistema coordenado, las ecuaciones se pueden escribir como $R_{\mu\nu} = 0$. Para resolver estas ecuaciones se pueden usar las condiciones mostradas en [20, 21], que son:

- Para $r \rightarrow \infty$ se espera que la métrica se convierta en la métrica de Minkowski.
- Si una métrica es independiente del tiempo, es posible cambiar $dt \rightarrow -dt$ sin afectarla y esto indica que no contendrá términos mixtos $dt d\theta$, $dt dr$, $dt d\phi$ y se puede escribir de la forma $ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j$ que cumple con la condición de métrica estática $\frac{dg_{\alpha\beta}}{dt} = 0$.
- Para una métrica esféricamente simétrica se debe poder cambiar $d\theta \rightarrow -d\theta$ y $d\phi \rightarrow -d\phi$ sin cambiar la forma de la misma, entonces, no es posible tener términos mixtos $dr d\theta$, $dr d\phi$ y $d\theta d\phi$. Por tanto, la métrica debe ser diagonal.
- Se debe preservar la signatura $(+ - - -)$, esto se logra escribiendo los coeficientes g_{tt} y g_{rr} como exponenciales de la forma $\exp(2v(r))$ y $\exp(2\lambda(r))$ respectivamente.

Entonces se puede escribir la métrica de la forma $ds^2 = e^{2v}dt^2 - e^{2\lambda}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin(\theta)d\phi^2)$, con la cual es posible calcular las componentes del tensor de Riemann y posteriormente las del tensor de Ricci y obtener el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -v'' + v'\lambda' - (v')^2 - \frac{2}{r}v' &= 0, \\ v'' - v'\lambda' + (v')^2 - \frac{2}{r}\lambda' &= 0, \\ e^{-2\lambda}(rv' - r\lambda' + 1) - 1 &= 0, \end{aligned} \tag{2.18}$$

con esto se puede llegar a que $e^{2v} = e^{-2\lambda} = (1 - \frac{r_s}{r})$, donde en el límite Newtoniano para el caso de campo débil, $r_s = \frac{2MG}{c^2}$ y así obtener la métrica de Schwarzschild [20, 21].

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \tag{2.19}$$

Horizonte de eventos y agujeros negros de Schwarzschild

Para objetos con masa con radio $R \mid R > r_s$, la métrica no tiene problemas de puntos singulares y solo describirá la geometría del espacio-tiempo fuera del objeto, en cambio, para objetos con radio $R \mid R < r_s$, se obtienen una región donde la luz no supera la velocidad de escape para salir de ese campo gravitacional, a esto se le conoce como un agujero negro. Los primeros indicios de este concepto de cuerpos oscuros fueron teorizados por Laplace pero nunca plasmados en sus ediciones de su libro *sistema de mundo*, ya que creía que no podría existir tal objeto. "*Los cuerpos oscuros permanecieron en la obscuridad hasta que la relatividad general y la astrofísica moderna dieron indicios nuevamente de su existencia*" (Shahen Hacyan) [22].

Se sabe que la velocidad de escape es $v_{esc} = (2GM/r)^{1/2}$, donde M es la masa del cuerpo, r es su radio y G es la constante de gravitación universal. Si la velocidad de la luz es el límite máximo de velocidad en el universo, el radio del agujero negro de tipo Schwarzschild es $r_s = 2MG/c^2$, es decir, el horizonte de eventos está a una distancia r_s y marca la superficie por la cual los eventos dentro de él no pueden afectar el exterior. Es claro que en coordenadas esféricas, la métrica de la Ec.(2.19) es singular en $r = 0$ y $r = r_s$, pero la singularidad del horizonte de eventos se puede

hacer desaparecer si se usa el conjunto correcto de coordenadas. Las coordenadas de Lemaître son introducidas por Georges Lemaître en 1933 y fue el primero en introducir una transformación de coordenadas para eliminar la singularidad en $r = r_s$ en la métrica de Schwarzschild [23]. Los diferenciales de dichas coordenadas transforman como

$$\begin{aligned} d\lambda &= dt + \sqrt{\frac{r_s}{r}} \left(1 - \frac{1}{r_s}\right)^{-1} dr \\ d\rho &= dt + \sqrt{\frac{r}{r_s}} \left(1 - \frac{1}{r_s}\right)^{-1} dr, \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde se puede obtener que $d\rho - d\lambda = \sqrt{r/r_s} dr$ e integrando se obtiene $r = r_s^{1/3} \left(\frac{3}{2}(\rho - \lambda)\right)^{3/2}$ y así escribir la métrica en las coordenadas de Lemaître como

$$ds^2 = d\lambda^2 - \frac{r_s}{r} d\rho^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.21)$$

Ahora, considerando un fotón viajando en trayectoria radial ($ds = d\theta = d\phi = 0$) de la Ec.(2.21) se obtiene $d\lambda = \pm \sqrt{r_s/r} d\rho$, donde los signos $+$ y $-$ corresponden al movimiento del fotón hacia afuera y hacia adentro respectivamente. Usando con esto las Ecs.(2.20) se puede obtener

$$dr = \left(\pm 1 - \sqrt{\frac{r_s}{r}}\right) d\lambda, \quad (2.22)$$

donde claramente puede verse que la cantidad entre paréntesis es negativa siempre que $r < r_s$ y si $d\lambda$ es positivo, dr siempre será negativo, esto quiere decir que no importa si los fotones viaja hacia afuera o hacia adentro de la esfera con radio $R = r_s$ siempre serán atraídos y nunca podrán escapar de ella [24].

Algunos de los trabajos inspirados y con el mismo enfoque que Lemaître sobre el horizonte de eventos del espacio-tiempo de Schwarzschild [25, 26, 27, 28] muestran resultados interesantes, donde se menciona que el primero en poner en duda la realidad del caracter singular fue Cornelius Lanczos, donde introduce una nueva singularidad donde la métrica era completamente regular y en sus conclusiones argumenta: *"Este ejemplo demuestra lo poco que se podría concluir de un comportamiento singular de las funciones g_{ij} sobre una singularidad real del campo, ya que posiblemente se pueda eliminar mediante una transformación de coordenadas"* [29].

Geodésicas en el espacio-tiempo de Schwarzschild

Las ecuaciones de geodésicas para cada una de las coordenadas en la métrica de Schwarzschild son:

$$\begin{aligned} \ddot{t} + \frac{r_s \dot{r} \dot{t}}{r^2(1 - \frac{r_s}{r})} &= 0 \\ \ddot{r} - \frac{r_s \dot{t}^2}{2r^2(1 - \frac{r_s}{r})} - r(1 - \frac{r_s}{r})(\dot{\theta} + \dot{\phi} \sin \theta) &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{\theta}^2 \dot{r}^2 - \cos \theta \sin \theta &= 0 \\ \ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{\phi} \dot{r} &= 0, \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde los puntos sobre las variables hacen referencia a derivadas respecto al parámetro arbitrario en las ecuaciones de geodésicas. Las geodésicas de t y ϕ se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \dot{t} \right] &= 0, \\ \frac{d}{d\lambda} (r^2 \dot{\phi}) &= 0,\end{aligned}\tag{2.24}$$

de esta manera se obtienen las cantidades conservadas $e = \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \dot{t}$ y $l = r^2 \dot{\phi}$.

Por otro lado, con la métrica $ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^i)^2$, se puede obtener la dinámica de 3 tipos de partículas.

$$ds^2 = \begin{cases} > 0 & \rightarrow \text{tipo tiempo} \\ < 0 & \rightarrow \text{tipo espacio} \\ = 0 & \rightarrow \text{tipo luz} \end{cases}\tag{2.25}$$

También se sabe que el cuadvivector de velocidad $\vec{u} = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dr}{d\tau}, \frac{d\theta}{d\tau}, \frac{d\phi}{d\tau} \right)$, donde τ es el tiempo propio, cumple con $\vec{u} \cdot \vec{u} = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 1$. Entonces para partículas de tipo espacio (partículas con masa), combinando las Ecs.(2.23) con la métrica de Schwarzschild se obtiene

$$\left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{-1} e^2 - \frac{l^2}{r^2} = 1,\tag{2.26}$$

donde por la simetría esférica y sin perder generalidad se ha usado $\theta = \frac{\pi}{2}$. Si se define $E = \frac{e^2 - 1}{2}$ y como $r = 2m$, donde m es la masa geométrica, se puede reescribir la Ec.(2.26) como

$$E = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + V_{eff},\tag{2.27}$$

ecuación que describe una partícula con energía E que se mueve en un potencial V_{eff} que tiene la forma

$$V_{eff} = -\frac{m}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{l^2 m}{r^3},\tag{2.28}$$

donde el primer término se puede relacionar con el potencial gravitacional, el segundo con el momento angular de mecánica clásica orbital y el último es una modificación que surge de relatividad general [21].

Para partículas de tipo luz, la Ec.(2.26) puede escribirse como

$$\dot{r}^2 - e^2 + \frac{l^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) = 0.\tag{2.29}$$

Dividiendo por $\dot{\phi}^2$ y definiendo el parámetro de impacto como $b = l/e$ se obtiene

$$\left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{r^4}{b^2} - r^2 \left(1 - \frac{r_s}{r} \right),\tag{2.30}$$

ecuación donde $r(\phi)$ sólo depende del parámetro de impacto y el radio de Schwarzschild. Por otro lado, al igual que las geodésicas para partículas de tipo espacio se tiene un potencial efectivo, el cual, de la Ec.(2.29) se deduce que es

$$V_{eff} = \frac{l}{r} \left(1 - \frac{r_s}{r} \right)^{1/2}.\tag{2.31}$$

Estudiando este potencial se pueden encontrar las diferentes trayectorias de los fotones en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Primero, es fácil ver que el potencial tiene un máximo en $r = 3r_s/2$ para un parámetro de impacto crítico $b_c = 3\sqrt{3}r_s/2$ que corresponde a una órbita

circular inestable llamada esfera de fotones. Existen otros dos escenarios, $b < b_c$ donde los fotones caerán al agujero negro y $b > b_c$ donde solo se verán deflectados, Figura 2.1 a) Efectuando el cambio de variable de la forma $u = \frac{1}{r}$ se puede reescribir la Ec.(2.30) como

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + 2u = 3mu^2. \quad (2.32)$$

Esta ecuación se puede resolver por métodos perturbativos si se considera que $\epsilon = 3m$, donde ϵ es una cantidad pequeña comparada con el parámetro de impacto [21]. La solución es de la forma

$$r(\phi) = \frac{b^2}{b \sin(\phi) + m(1 + k \cos \phi + \cos^2 \phi)}, \quad (2.33)$$

donde el parámetro de impacto surge geoméricamente como la menor distancia en el plano desde el origen donde está situada la masa que deforma el espacio tiempo a una línea recta. Sin pérdida de generalidad, para obtener la Ec.(2.33) se ha pedido que la recta sea perpendicular al eje horizontal, esto se muestra en la Figura 2.1 b)

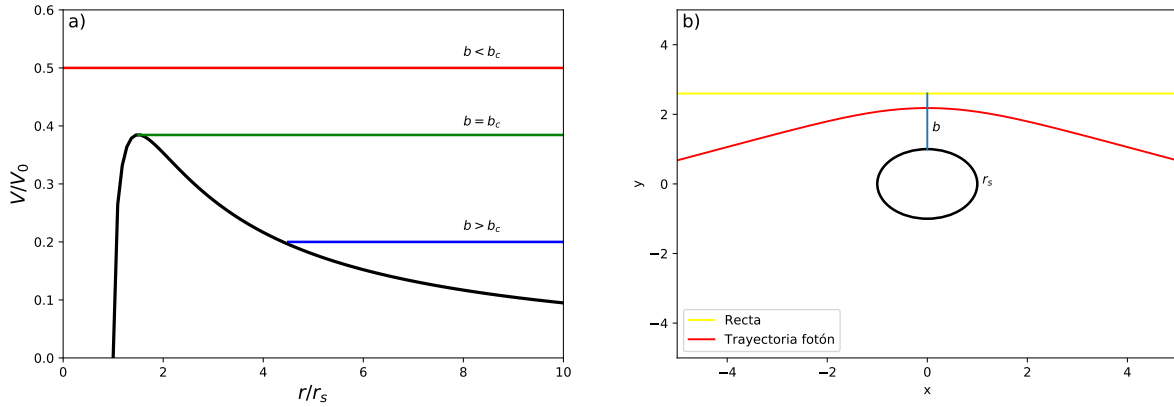


Figura 2.1: a) Potencial efectivo $V_{eff}(r)$ para partículas de tipo luz comparado con la energía de diferentes parámetros de impacto [3]. b) curvatura de la trayectoria del fotón de acuerdo con la Ec.(2.33.)

Es claro que la aproximación ya mencionada y utilizada para la predicción de la curvatura de los rayos de luz será menos precisa entre más próximo sea el radio de Schwarzschild al parámetro de impacto, lo cual se observa en la Figura 2.1 b), donde la trayectoria del fotón debería tocar la línea recta de acuerdo con el parámetro de impacto elegido. Otra forma de obtener la órbita es resolver de manera numérica la Ec.(2.32), lo cual se muestra en el capítulo 6.

2.5. Solución de Reissner-Nordström.

Al poco tiempo de la solución de Schwarzschild, los físicos H. Reissner y G. Nordström encontraron otra solución independiente a las ecuaciones de Einstein que representa el espacio-tiempo fuera de una esfera que además de masa, posee una carga eléctrica [22, 30]. En esta sección se construirá la métrica de Reissner-Nordström desde argumentos físicos, haciendo uso de las ecuaciones de Einstein.

Considerando una métrica con los mismos requerimientos que la de Schwarzschild se puede esperar que la métrica que describe el espacio ya mencionado, sea de la forma

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - r(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi), \quad (2.34)$$

donde $f(r)$ es una función a determinar. Para encontrar esta forma funcional hay que hacer uso de las ecuaciones de campo de Einstein. A diferencia del caso de Schwarzschild, en esta ocasión el tensor $T^{\mu\nu}$ es no nulo, ya que existe un campo eléctrico y se sabe que el tensor energía-momento que considera los campos eléctricos y magnéticos en su forma completamente covariante es

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - g_{\nu\beta} F_{\mu\alpha} F^{\beta\alpha} \right). \quad (2.35)$$

Ahora, para describir un campo eléctrico estático con simetría esférica fuera de la esfera cargada se espera que el potencial escalar sea de la forma $\Phi = \Phi(r)$ y sin la presencia de un campo magnético, el potencial vectorial deberá ser nulo. Por consiguiente, se puede escribir el cuspripotencial como $A = A_\mu(\Phi(r)/c, 0, 0, 0)$ y de forma explícita el tensor electromagnético como

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_r/c & 0 & 0 \\ E_r/c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

donde se ha usado la Ec.(3.6) y se definió que $E_r(r) = \partial_r \Phi(r)$. Otra forma de obtener la Ec.(2.36) es hacer una transformación de coordenadas de Minkowski de la Ec.(3.6) a espaciotemporales esféricas [4]. Es claro que se debe encontrar la forma funcional de $E_r(r)$, para hacerlo se puede hacer uso de las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas en su forma tensorial y como no se tienen fuentes externas a la esfera cargada, la Ec.(3.10) se puede reescribir como $\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \nabla_\nu F^{0\nu} + \nabla_\nu F^{1\nu}$, donde ya se ha hecho uso de la Ec.(2.36) para simplificar los cálculos.

Usando la derivada covariante, cada una de estas componentes queda escrita de la forma

$$\begin{aligned} \nabla_\nu F^{0\nu} &= \frac{\partial F^{01}}{\partial r} + \Gamma^0_{01} F^{01} + \Gamma^1_{11} F^{01} + \Gamma^2_{12} F^{01} + \Gamma^3_{13} F^{01}, \\ \nabla_\nu F^{1\nu} &= \Gamma^0_{00} F^{10} + \Gamma^1_{01} F^{10} + \Gamma^2_{12} F^{10} + \Gamma^3_{03} F^{10}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde $\Gamma^0_{01} = -\Gamma^1_{11} = \frac{f'(r)}{2f(r)}$ y $\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}$ son los únicos símbolos de Christoffel no nulos de las expresiones anteriores, por lo tanto, es posible escribir una expresión como

$$\frac{\partial F^{01}}{\partial r} = \frac{-2F^{01}}{r}, \quad (2.38)$$

que tiene como solución $E_r = \frac{C_1}{r^2}$, donde C_1 es una constante de integración que por el teorema de flujo de Gauss se obtiene que $C_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$, entonces la solución para E_r es de la forma

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (2.39)$$

Por otro lado, calculando las componentes $T_{\mu\nu}$ desde la Ec.(2.35) se puede obtener que las únicas

no nulas son

$$\begin{aligned}
T_{00} &= \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{2} g_{00} F_{01} F^{01} - g_{00} F_{01} F^{01} \right) = \frac{1}{2\mu_0 c^2} f(r) E_r^2, \\
T_{11} &= \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{2} g_{11} F_{01} F^{01} - g_{11} F_{01} F^{01} \right) = \frac{1}{2\mu_0 c^2} f(r)^{-1} E_r^2, \\
T_{22} &= -\frac{1}{2\mu_0 c^2} g_{22} E_r^2 = -\frac{1}{2\mu_0 c^2} r^2 E_r^2, \\
T_{33} &= -\frac{1}{2\mu_0 c^2} g_{33} E_r^2 = T_{22} \sin^2 \theta.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Además, las componentes no nulas del tensor de Ricci provenientes de la Ec.(2.34) son

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{1}{2} f(r) \left(\frac{2f'(r)}{r} + f''(r) \right), \\
R_{11} &= -\frac{2f'(r) + r f''(r)}{2r f(r)}, \\
R_{22} &= 1 - f(r) - r f'(r), \\
R_{33} &= \sin^2 \theta R_{22}.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Ahora, usando las ecuaciones de Einstein en la forma de la Ec.(2.17) y como $g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T^\mu_\mu = 0$ para $T_{\mu\nu}$ en la Ec.(2.35), se puede escribir la ecuación

$$1 - f(r) - r f'(r) = -\frac{4\pi G}{\mu_0 c^6} r^2 E_r^2. \tag{2.42}$$

Es claro que $(f(r) + r f'(r)) = \frac{d}{dr} (r f(r))$, por tanto, puede obtenerse

$$\frac{d}{dr} (r f(r)) = 1 + \frac{GQ^2}{4\pi c^4 \epsilon_0 r^2}, \tag{2.43}$$

donde si se define la carga geométrica como $q^2 = \frac{GQ^2}{4\pi c^4 \epsilon_0}$ e integrando se obtiene que $f(r) = 1 - q^2/r^2 + C_2/r$, donde C_2 es una constante de integración que tiene que tomar el valor de r_s para que la métrica se convierta en la de Schwarzschild en el caso de $q = 0$. Entonces, la solución de Reissner-Nordström es de la forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{q^2}{r} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{q^2}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \tag{2.44}$$

Horizonte de eventos y agujeros negros de Reissner-Nordström

Los puntos singulares de g_{00} de la Ec.(2.44) muestran los horizontes de eventos y es claro que a diferencia de la métrica de Schwarzschild, la solución de Reissner-Nordström contiene dos puntos singulares los cuales se encuentran en

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{r_s^2 - 4q^2} \right), \tag{2.45}$$

donde analizando el discriminante y dependiendo el valores que tomen r_s y q , se obtiene dos, una o cero soluciones reales. Analizando el caso de $q > r_s/2$, indica que no habrá horizonte de eventos [4]. Para $q = r_s/2$, representa una solución donde analíticamente los horizontes de eventos se encuentra en el mismo lugar, es decir, existe un solo horizonte el cual siempre estará a una distancia $r_s/2$, a este tipo de agujero negro se le conoce como agujero negro extremal.

Para el caso $q < r_s/2$ contiene dos horizontes de eventos analíticamente concéntricos y se puede dividir en 3 regiones; $I \rightarrow (r_+ < r < \infty)$, $II \rightarrow (r_- < r < r_+)$ y $III \rightarrow (0 < r < r_-)$.

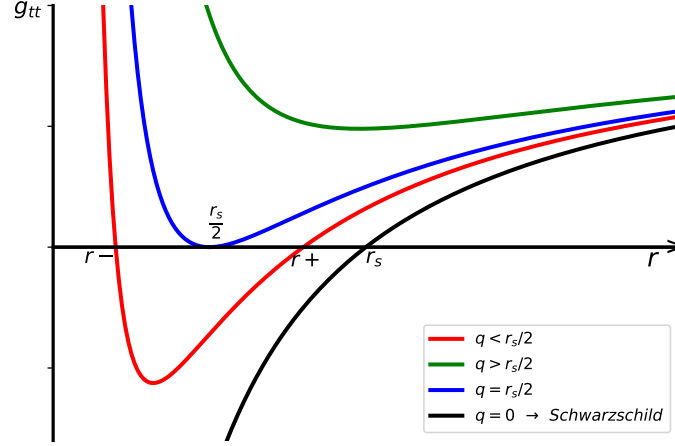


Figura 2.2: Diferentes casos del agujero negro de Reissner-Nordström y sus regiones [4].

Finalmente es necesario mencionar y aunque no es un caso como los anteriores, está claro que cuando $q = 0$, se recupera el agujero negro de Schwarzschild. En la Figura 2.2 pueden verse los puntos singulares de g_{00} así como las tres regiones y diferentes casos de agujeros negros con sus correspondientes horizontes de eventos.

Geodésicas en el espacio-tiempo de Reissner-Nordström

Las ecuaciones de geodésicas para cada una de las coordenadas en la métrica de Reissner-Nordström para el plano $\theta = \pi/2$ son:

$$\begin{aligned} \ddot{t} + \frac{r_s \dot{r} \dot{t}}{r^2(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{q^2}{r^2})} &= 0 & \ddot{r} - \frac{r_s \dot{t}^2}{2r^2(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{q^2}{r^2})} - r\dot{\phi}(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{q^2}{r^2}) &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{\theta}^2\dot{r} &= 0 & \ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{\phi}\dot{r} &= 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Comparando las Ecs.(2.23 y 2.46) es claro que las geodésicas para t y r cambian solamente en el término g_{00} , mientras que para θ y Φ son las mismas y esto se debe a la simetría esférica de ambas. Usando el mismo procedimiento para encontrar la ecuación diferencial que determina el movimiento de una partícula tipo luz en la métrica de Schwarzschild se obtiene para Reissner-Nordström

$$\dot{r}^2 - e^2 + \frac{l^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{q^2}{r^2} \right) = 0, \quad (2.47)$$

donde dividiendo por $\dot{\phi}^2$, se obtiene automáticamente que

$$\left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{r^4}{b^2} - r^2 \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{q^2}{r^2} \right). \quad (2.48)$$

Usando nuevamente el cambio de variable $u = 1/r$, se obtiene la ecuación

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + 2u = 3mu^2 - 2q^2u^3. \quad (2.49)$$

Anteriormente se habló de una solución aproximada de la Ec.(2.32), que corresponde a la Ec.(2.49) en diferente espacio-tiempo, entonces, es claro que esta ultima también puede ser solucionada de manera aproximada. Para esto, debe tenerse en cuenta que el término del lado derecho de la Ec.(2.49) debe considerar objetos con masa y carga geométrica mucho menor que el parámetro de impacto.

Es importante mencionar que de ahora en adelante, cuando se hable de geodésicas en un espacio-tiempo, se hace referencia a las geodésicas nulas. No debe perderse de vista que uno de los objetivos de la tesis es comparar las trayectoria de un fotón que está dada por la Ec.(2.32) para el espacio-tiempo de Schwarzschild y la Ec.(2.49) para el espacio-tiempo de Reissner-Nordström, con la trayectoria de un haz Gaussiano en el metamaterial correspondiente, mediante su distribución de campo eléctrico y por esto deben usarse las ecuaciones de geodésicas nulas.

Capítulo 3

Ecuaciones de Maxwell en espacio curvo

En este capítulo se trabaja con las ecuaciones de Maxwell para observar su invariancia de norma y deducir que los potenciales (escalar y vectorial) están relacionados. Posteriormente, se escriben las mismas ecuaciones en pero en formulación covariante y finalmente haciendo uso del cálculo tensorial y herramientas del mismo, se escriben las ecuaciones del electromagnetismo en una forma general para cualquier variedad Riemanniana.

3.1. Formulación covariante de las ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell en espacio vacío y plano en coordenadas cartesianas para la intensidad de campo eléctrico \mathbf{E} y la inducción magnética \mathbf{B} son

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Un resultado conocido del electromagnetismo es que estas ecuaciones son invariantes ante transformaciones del tipo

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &\rightarrow A' = A + \nabla \Lambda \\ \Phi &\rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t},\end{aligned}\tag{3.2}$$

donde Λ es una función escalar cualquiera y las transformaciones son a nivel de las componentes de los campos Φ y \mathbf{A} y no de las coordenadas. A esta libertad de definir las componentes se le llama invariancia de norma (invariancia de Gauge) [31]. Esto indica que las componentes de los campos no son independientes. Además, es posible agrupar dichos potenciales en un solo cuadvivector de la forma

$$A^\mu = (\Phi/c, \mathbf{A}),\tag{3.3}$$

llamado cuadvipotencial, por lo tanto, es posible escribir los campos eléctrico y magnético en función de este cuadvipotencial y los operadores ∂_μ . Tomando el campo eléctrico de la forma $\mathbf{E} = -(\nabla\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t})$ se pueden escribir sus componentes como

$$E_x = c(\partial^1 A^0 - \partial^0 A^1), \quad E_y = c(\partial^2 A^0 - \partial^0 A^2), \quad E_z = c(\partial^3 A^0 - \partial^0 A^3),\tag{3.4}$$

análogamente se pueden expresar las componentes del campo magnético $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ de la forma

$$B_x = (\partial^3 A^2 - \partial^2 A^3), \quad B_y = (\partial^1 A^3 - \partial^3 A^1), \quad B_z = (\partial^2 A^1 - \partial^1 A^2), \quad (3.5)$$

donde se ha usado que $\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ y el índice en el operador covariante ∂_μ se ha subido con la métrica de Minkowski. Entonces, ambos campos \mathbf{E} y \mathbf{B} pueden expresarse como provenientes de un tensor de rango 2, $F^{\mu\nu}$ definido como

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (3.6)$$

donde de forma explícita queda escrito como

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Introduciendo ahora la cuadricorriente como $J^\mu = (\rho c, \mathbf{J})$ es claro que la ley de Gauss se transforma de su forma diferencial a una ecuación tensorial en función de las componentes de $F^{\mu\nu}$ de la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \mu_0 J^0 \quad (3.8)$$

y las componentes vectoriales de la ecuación de Ampere-Maxwell como

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{B})_x &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mu_0 J_x \rightarrow \partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = \mu_0 J^1, \\ (\nabla \times \mathbf{B})_y &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \mu_0 J_y \rightarrow \partial_0 F^{02} + \partial_1 F^{12} + \partial_3 F^{32} = \mu_0 J^2, \\ (\nabla \times \mathbf{B})_z &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \mu_0 J_z \rightarrow \partial_0 F^{03} + \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{23} = \mu_0 J^3, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde por la antisimetría de $F^{\mu\nu}$, se tiene que los elementos diagonales son cero. De modo que las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas (ecuaciones que contienen fuentes) se pueden escribir de manera covariante como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu. \quad (3.10)$$

Para las ecuaciones homogéneas, la ecuación de ausencia de monopolos magnéticos se escribe en forma de tensores como $\partial_1 F^{23} + \partial_2 F^{31} + \partial_3 F^{12} = 0$, donde al subir los índices con la métrica de Minkowski y usar la antisimetría del tensor $F^{\mu\nu}$, se obtiene que la ecuación en su forma diferencial se puede escribir en forma tensorial como

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = 0. \quad (3.11)$$

Haciendo uso de las mismas propiedades, las componentes vectoriales de la ecuación de Faraday cambian de la forma

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{E})_x &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} \rightarrow \partial^0 F^{13} + \partial^1 F^{30} + \partial^3 F^{01} = 0, \\ (\nabla \times \mathbf{E})_y &= -\frac{\partial B_y}{\partial t} \rightarrow \partial^0 F^{23} + \partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} = 0, \\ (\nabla \times \mathbf{E})_z &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \rightarrow \partial^1 F^{13} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Entonces, las ecuaciones homogéneas se ven incluidas en una formulación covariante del tipo

$$\partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\alpha} + \partial^\nu F^{\alpha\mu} = 0. \quad (3.13)$$

Las Ecs.(3.10 y 3.13) son las ecuaciones de maxwell en su forma covariante [31, 32, 33].

3.2. Ecuaciones de Maxwell en una variedad Riemanniana

Las Ec.(3.1), conectan los campos a las cargas mediante divergencias y los campos entre sí mediante rotacionales, operaciones vectoriales que se pueden generalizar mediante el concepto de derivada covariante. El uso de estas operaciones vectoriales simplifica enormemente el manejo de coordenadas curvilíneas y espacios no Euclidianos.

Tomando un tensor uno contravariante V^i , se sabe que su divergencia en espacio plano es $\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla_i V^i$. Ahora, usando la derivada covariante, se puede escribir la operación anterior como

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \partial_i V^i + \Gamma^i_{ji} V^j. \quad (3.14)$$

Entonces, usando los símbolos de Christoffel de primera especie Ec.(2.5), se puede reescribir como

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \partial_i V^i + \frac{1}{2} g^{il} (\partial_i g_{lj} - \partial_l g_{ji}) V^j + \frac{1}{2} g^{il} \partial_j g_{li} V^j, \quad (3.15)$$

donde por la simetría de la métrica y reescribiendo índices, el segundo término del lado derecho es nulo. Por otro lado, con la igualdad $g^{il} \partial_j g_{li} = 2\partial_j \sqrt{g}/\sqrt{g}$, donde g es el determinante de la métrica completamente covariante, la Ec.(3.14) se puede escribir como

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \partial_i V^i + \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_j (\sqrt{g}) V^j, \quad (3.16)$$

o bien,

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} V^i). \quad (3.17)$$

La ventaja de la Ec.(3.17) sobre la Ec.(3.14) es que no contiene símbolos de Christoffel y está sólo en función de la métrica y derivadas parciales de la misma.

Ahora, para el rotacional se tiene que su forma en espacio plano es $\nabla \times \mathbf{V} = \epsilon^{ijk} \nabla_j V_k \mathbf{e}_i$, donde sustituyendo la derivada covariante del se obtiene

$$(\nabla \times \mathbf{V})^i = \epsilon^{ijk} (\partial_j V_k - \Gamma^{\alpha}_{ij} V_{\alpha}), \quad (3.18)$$

donde los índices i, j, k , van desde 1 hasta 3, entonces, la expresión del lado derecho que tiene los símbolos de Christoffel se se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijk} \Gamma^{\alpha}_{ij} V_{\alpha} = & \epsilon^{123} \Gamma^{\alpha}_{12} V_{\alpha} + \epsilon^{231} \Gamma^{\alpha}_{23} V_{\alpha} + \epsilon^{312} \Gamma^{\alpha}_{31} V_{\alpha} + \dots \\ & + \dots \epsilon^{132} \Gamma^{\alpha}_{13} V_{\alpha} + \epsilon^{213} \Gamma^{\alpha}_{21} V_{\alpha} + \epsilon^{321} \Gamma^{\alpha}_{32} V_{\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

La Ec.(3.19) se anula por la simetría del símbolo de Christoffel de segunda especie y la antisimetría del tensor de Levi-Civita. Con lo anterior, se concluye que la derivada covariante es igual a la derivada parcial, para esta operación.

$$(\nabla \times \mathbf{V})^i = \epsilon^{ijk} \partial_j V_k. \quad (3.20)$$

Con las Ecs.(3.17 y 3.20) se pueden reescribir las ecuaciones de Maxwell como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} E^i) &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} H^i) &= 0 \\ \epsilon^{ijk} \partial_j E_k &= -\mu_0 \frac{\partial H^i}{\partial t} & \epsilon^{ijk} \partial_j H_k &= \epsilon_0 \frac{\partial E^i}{\partial t} + J^i, \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$. Esta forma de las ecuaciones de Maxwell es válida para cualquier geometría, ya que están escritas en un espacio curvado pero sólo en 3 dimensiones ya que la generalización de los operadores vectoriales de ha hecho para una métrica de 3 dimensiones y por eso se pueden comparar con las mismas ecuaciones escritas en un espacio sin curvatura y para un medio anisotrópico [34].

Ahora, una generalización del tensor de Levi-Civita en función del tensor de permutación es

$$\epsilon^{ijk} = \pm \frac{1}{\sqrt{g}} [ijk] \quad (3.22)$$

donde el signo positivo se refiere a un sistema *derecho* y el negativo hace referencia a un sistema *izquierdo*. Los ejes de coordenadas en tres dimensiones tienen sentido según la elección convencional, llamada derecha en el caso de los ejes cartesianos x, y, z. Una transformación de coordenadas que invierte el signo de una o las tres coordenadas regresará una tríada de ejes que no se puede superponer al original y se llamará triada izquierda. Así que, la Ec.(3.22) ya está considerando sistemas derechos e izquierdos y es claro que para cuando sólo son considerados sistemas derechos, el tensor de Levi-Civita y el de permutación son iguales.

Escribiendo los índices de los campos en las Ecs.(3.21) como covariantes e introduciendo la generalización del tensor de Levi-Civita antes mostrada, se pueden obtener las ecuaciones

$$\begin{aligned} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} E_j) &= \frac{\sqrt{g} \rho}{\epsilon_0} & \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} H_j) &= 0 \\ [ijk] \partial_j E_k &= -\mu_0 \frac{\partial (\pm \sqrt{g} g^{ij} H_j)}{\partial t} & [ijk] \partial_j H_k &= \epsilon_0 \frac{\partial (\pm \sqrt{g} g^{ij} E_j)}{\partial t} \pm \sqrt{g} J^i, \end{aligned} \quad (3.23)$$

que corresponden a la ecuaciones: Gauss de campo eléctrico, ausencia de monopolos magnéticos, Faraday y Ampere-Maxwell, respectivamente [34].

La forma tensorial de las ecuaciones de Maxwell Ecs.(3.10 y 3.13) también es posible escribirlas para una variedad Reimanniana y se muestran en el capítulo 4. Ver referencias [35, 36, 34].

Capítulo 4

Analogía geometría-medio

En el presente capítulo se tiene un primer encuentro con la analogía entre las ecuaciones de Maxwell en el vacío en espacio curvo y las mismas en un medio anisotrópico y espacio plano, esto desde una comparación directa entre las ecuaciones antes mencionadas. También se revisa el comportamiento de los campos en un medio anisotrópico con las consideraciones mencionadas en [3] para obtener relaciones importantes que fueron usadas para las simulaciones y resultados en [1] las cuales se implementan en el presente trabajo para mimetizar el comportamiento de un rayo de luz cerca de los agujeros negros de Schwarzschild (reproducción de resultados) y Reissner-Nordström. Por último, se determinan las relaciones constitutivas de Plebanski [38] y de esta manera encontrar las propiedades necesarias del metamaterial.

4.1. Ecuaciones de Maxwell en un medio anisotrópico

Para un medio anisotrópico y con las relaciones $D^i = \epsilon_0 \epsilon^{ij} E_j$, $B^i = \mu_0 \mu^{ij} H_j$, las ecuaciones de Maxwell son escritas en [31] como

$$\begin{aligned} \partial_i(\epsilon^{ij} E_j) &= \frac{\sqrt{g}\rho}{\epsilon_0} & \partial_i(\mu^{ij} H_j) &= 0 \\ [ijk] \partial_j E_k &= -\mu_o \frac{\partial(\mu^{ij} H_j)}{\partial t} & [ijk] \partial_j H_k &= \epsilon_o \frac{\partial(\epsilon^{ij} E_j)}{\partial t} \pm \sqrt{g} J^i, \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde se han escalado las fuentes, es decir, $\tilde{\rho} = \pm\sqrt{g}\rho$ y $\tilde{J}^i = \pm\sqrt{g}J^i$, la densidad de carga y de corriente tildadas son las que deberían aparecer en las ecuaciones de Maxwell antes de reescribirlas. Comparando la Ecs.(3.23 y 4.1) se percibe directamente una correspondencia donde la geometría aparece como un medio anisotrópico, en otras palabras, estos medios mimetizan la geometría del espacio-tiempo.

Consideraciones en [1]. Anisotropía magnética

Considerando ondas electromagnéticas provenientes de las ecuaciones de Maxwell en un medio anisotrópico, donde debido al mismo, el campo \mathbf{D} no está en la misma dirección que \mathbf{E} y el campo \mathbf{B} tampoco se encuentra en la misma dirección que \mathbf{H} , es posible hacer ciertas consideraciones que simplifiquen el problema [1].

- Propagación de la onda en el plano x - y .
- Un material con las componentes $\epsilon^{xz} = \epsilon^{yz} = 0$.

Las consecuencias de estas consideraciones son las siguientes: Primero, por la condición de onda plana, el campo \mathbf{E} es perpendicular a la dirección de propagación de la onda y con la segunda $\mathbf{E} = E_z \hat{\mathbf{z}}$. Además, las direcciones de \mathbf{D} y \mathbf{E} coinciden y ϵ^{zz} es el único elemento que conecta dichos campos mediante $\mathbf{D} = \epsilon^{zz} \mathbf{E}$, esto vuelve irrelevante a la anisotropía eléctrica. Por otro lado, mediante la analogía es claro que $\epsilon^{ij} = \mu^{ij}$, entonces $\mu^{xz} = \mu^{yz} = 0$ y por lo tanto, los campos \mathbf{B} y \mathbf{H} están restringidos a estar sobre el plano x - y pero es claro que sus direcciones siguen sin coincidir, resultando en una anisotropía magnética. Además, como $\mathbf{S} \sim \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, el vector de Poynting es perpendicular a a los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} así como \mathbf{k} lo es a \mathbf{B} y \mathbf{D} [1]. En la Figura 4.1 se puede ver de forma gráfica lo antes mencionado.

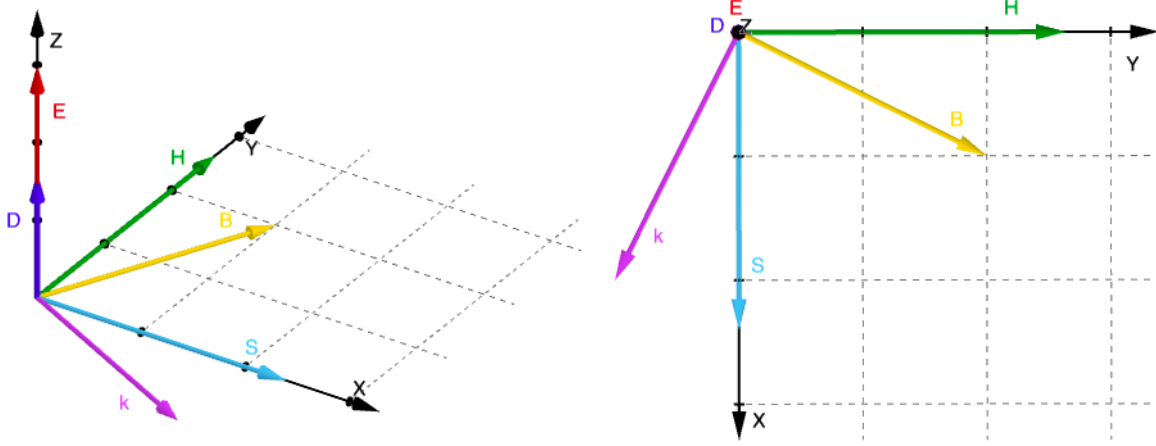


Figura 4.1: Direcciones de los campos con las consideraciones antes mencionadas en tres dimensiones (vista 3D y plano x - y) [3].

Ecuación de onda para el campo eléctrico en [1]

Por lo previamente mencionado, se debe encontrar una ecuación que permita hacer las consideraciones para simplificar el problema, debe ser una ecuación de onda para campo eléctrico. Tomando las ecuaciones de Maxwell libres de fuentes en un medio

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

La ecuación de Faraday con $\mathbf{B} = \hat{\mu} \mathbf{H}$, donde $\hat{\mu}$ es la representación matricial del tensor de permeabilidad magnética, se puede escribir como $\hat{\mu}^{-1} \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$, donde se ha tomado que las propiedades electromagnéticas no cambian con el tiempo. Ahora, aplicando el rotacional a toda la ecuación, se obtiene $\nabla \times (\hat{\mu}^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H})$, donde se puede sustituir la ecuación de Ampere-Maxwell y la relación $\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E}$, para obtener

$$\nabla \times [\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_\omega] = \omega^2 \epsilon \mathbf{E}_\omega, \quad (4.3)$$

donde también se ha considerando una longitud de banda de frecuencias bastante estrecha como para ser considerada una onda monocromática [37] ($\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\omega^2 f$). \mathbf{E}_ω es el campo correspondiente a esa longitud de onda.

Con las consideraciones antes mencionadas, el campo eléctrico en la dirección z es la única componente del mismo, con esto, se puede escribir que dicho campo será una onda plana de la forma

$E = E e^{ik_z z} \hat{\mathbf{z}}$. Por otra parte, se puede deducir otra ecuación para la distribución de campo eléctrico en el material usando las componentes en las ecuaciones de Maxwell. Primero es claro que $B^x = \mu^{xx} H_x + \mu^{xy} H_y$ y $B^y = \mu^{xy} H_x + \mu^{yy} H_y$, entonces, de la ecuación de Faraday se obtiene que las componentes se pueden escribir como

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{E})_x &= -\mu^{xx} \partial_t H_x - \mu^{xy} \partial_t H_y, \\ (\nabla \times \mathbf{E})_y &= -\mu^{yx} \partial_t H_x - \mu^{yy} \partial_t H_y. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ahora, como la única componente del campo esta en la dirección z , se tiene que $E_y = E_x = 0$ y con esto $(\nabla \times \mathbf{E})_x = \partial_y E_z$ y $(\nabla \times \mathbf{E})_y = -\partial_x E_z$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} \partial_y E_z &= -\mu^{xx} \partial_t H_x - \mu^{xy} \partial_t H_y, \\ \partial_x E_z &= \mu^{yx} \partial_t H_x + \mu^{yy} \partial_t H_y. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Estas ecuaciones implican que

$$\begin{aligned} \partial_t H_x &= \frac{\mu^{xy}}{(\mu^{xy})^2 - \mu^{xx} \mu^{yy}} \partial_x E_z + \frac{\mu^{yy}}{(\mu^{xy})^2 - \mu^{xx} \mu^{yy}} \partial_y E_z, \\ \partial_t H_y &= -\frac{\mu^{xx}}{(\mu^{xy})^2 - \mu^{xx} \mu^{yy}} \partial_x E_z - \frac{\mu^{yx}}{(\mu^{xy})^2 - \mu^{xx} \mu^{yy}} \partial_y E_z, \end{aligned} \quad (4.6)$$

lo cual se puede simplificar de la forma

$$\begin{aligned} \partial_t H_x &= \mu_{xy} \partial_x E_z - \mu_{xx} \partial_y E_z \\ \partial_t H_y &= -\mu_{yy} \partial_x E_z - \mu_{yx} \partial_y E_z \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde se han usado componentes de $\hat{\mu}^{-1}$, que esta dada por

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu^{xx} & \mu^{xy} & 0 \\ \mu^{yx} & \mu^{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{zz} \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mu}^{-1} = \frac{\mu^{xx}}{(\mu^{xy})^2 - \mu^{xx} \mu^{yy}} \begin{pmatrix} \mu^{yy} & -\mu^{xy} & 0 \\ -\mu^{yx} & \mu^{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{zz} \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Por otro lado, se sabe que $\partial_t(\nabla \times \mathbf{H})_z = \partial_x \partial_t H_y - \partial_y \partial_t H_x$, donde de la ecuación de Ampere-Maxwell se tiene que $(\nabla \times \mathbf{H})_z = \epsilon^{zz} \partial_t E_z$, entonces $\partial_t(\nabla \times \mathbf{H})_z = \epsilon^{zz} \partial_t \partial_t E_z$, lo cual se puede simplificar de la forma

$$\partial_x \partial_t H_y - \partial_y \partial_t H_x = -\epsilon^{zz} \omega^2 E_z z, \quad (4.9)$$

donde nuevamente se ha usado la condición de onda monocromática. Finalmente, combinando las Ecs.(4.7 y 4.9) se obtiene

$$\partial_x (\mu_{xy} \partial_y E_z - \mu_{yy} \partial_x E_z) - \partial_y (\mu_{xx} \partial_y E_z - \mu_{xy} \partial_x E_z) = \epsilon^{zz} \omega^2 E_z z, \quad (4.10)$$

ecuación que se muestra en [1]. Debe notarse que esta ecuación no es derivada desde la Ec.(4.3), sin embargo, se sigue el mismo procedimiento de usar la ecuación de Faraday y Ampere-Maxwell pero en forma de componentes, en otras palabras, son la misma ecuación. Las Ecs(4.3 y 4.10) se pretende sean resueltas en Comsol Multiphysics con las propiedades determinadas por la analogía para mimetizar el espacio-tiempo de Schwarzschild como en [1] y el espacio-tiempo de Reissner-Nordström, esto se muestra en el capítulo 5.

4.2. Relaciones constitutivas

Para lograr mimetizar fenómenos atrofísicos, la analogía indica que los tensores de propiedades están determinados por la métrica. En este caso la métrica contempla cuatro dimensiones y se deben encontrar las relaciones constitutivas que relacionan los campos \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} y \mathbf{H} desde las ecuaciones de Maxwell en su forma tensorial generalizadas para cualquier curvatura. Entonces, lo que se pretende ahora es encontrar las ecuaciones constitutivas que permiten escribir las ecuaciones de Maxwell covariantes en el vacío en coordenadas espacio-temporales arbitrarias como las ecuaciones de Maxwell en un espacio y un tiempo, es decir, las ecuaciones de Maxwell en 3 dimensiones y en un medio que son las Ec.(3.23 y 4.1) respectivamente. Esto toma un procedimiento muy particular; primero, al tener las ecuaciones escritas en forma covariante y para una variedad arbitraria en función de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} , se escriben ahora en función de los campos \mathbf{D} y \mathbf{H} , con ciertas relaciones. Posteriormente, desde una forma tensorial de se pretende encontrar su forma vectorial y relacionar la métrica con las propiedades. Finalmente, se pretende encontrar una forma funcional de los tensores de propiedades, donde se debe notar que no se está hablando de usar una métrica plana en un espacio curvado, simplemente, se esta buscando el procedimiento inverso al encontrar las ecuaciones covariantes, es decir, obtener un electromagnetismo 3 + 1 desde la su formulación convariante. Estas relaciones son llamadas relaciones constitutivas de Plebanski [38].

Cuando se dedujeron las componentes del tensor electromagnético Ec.(3.7), para subir o bajar índices se uso la métrica de Minkowski con una signatura $(+ - - -)$, en cambio, si se usa una signatura $(- + + +)$, se obtiene otra configuración del tensor electromagnético [35] de la forma

$$F'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \rightarrow F'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

donde se ha tomado $c = 1$ y el nombre F' es para diferenciarlo de la Ec.(3.7). La forma tensorial de las ecuaciones de Maxwell cambia a la siguiente

$$\begin{aligned} \partial_\mu F'^{\mu\nu} &= \mu_0 J^\nu, \\ \partial_\alpha F'_{\mu\nu} + \partial_\mu F'_{\nu\alpha} + \partial_\nu F'_{\alpha\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Para un espacio-tiempo curvado, Las Ecs(4.12) se escriben en [35] como

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_0}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} F'^{\mu\nu}) &= J^\mu, \\ F'_{[\mu\nu, \nu]} &= 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde $F'_{[\mu\nu, \nu]} = \partial_\alpha F'_{\mu\nu} + \partial_\mu F'_{\nu\alpha} + \partial_\nu F'_{\alpha\mu} = 0$ y $[\mu\nu, \nu]$ indica que la ecuación debe ser cíclica para los índices. Es fácil deducir que para un espacio-tiempo de Minkowski las Ecs.(4.13) se transforman en las Ecs.(4.12).

Ahora, se puede definir un tensor $H^{\mu\nu} = \epsilon_0 \sqrt{-g} F'^{\mu\nu}$ o bien en función del tensor $F'_{\mu\nu}$ como

$$H^{\mu\nu} = \epsilon_0 \sqrt{-g} g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} F'_{\lambda\rho} \rightarrow F'_{\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon_0 \sqrt{-g}} g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} H^{\lambda\rho}, \quad (4.14)$$

donde $H^{\mu\nu}$ está construido con los campos \mathbf{D} y \mathbf{H} de la forma

$$H_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & Dx & Dy & Dz \\ -D^x & 0 & Hz & -H^y \\ -D^y & -Hz & 0 & H^x \\ -Dz & H^y & -H^x & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Introduciendo una nueva cuatricorrente como $J'^\mu = \sqrt{-g}J^\mu$, las Ecs(4.1) se pueden obtener con las ecuaciones tensoriales

$$\begin{aligned} \partial_\mu H'^{\mu\nu} &= \mu_0 J'^\mu, \\ \partial_\alpha F'_{\mu\nu} + \partial_\mu F'_{\nu\alpha} + \partial_\nu F'_{\alpha\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Para obtener la primera relación constitutiva se consideran las componentes del campo \mathbf{E} que pueden obtener desde la ecuación $E_i = -F'_{0i}$, entonces, usando la Ec.(4.14), se puede escribir que

$$E_i = \frac{-1}{\epsilon_0 \sqrt{-g}} g_{0\lambda} g_{i\rho} H^{\lambda\rho}, \quad (4.17)$$

Expandiendo el índice ρ , se obtiene

$$E_i = \frac{-1}{\epsilon_0 \sqrt{-g}} (g_{0\lambda} g_{i0} H^{\lambda 0} + g_{0\lambda} g_{i1} H^{\lambda 1} + g_{0\lambda} g_{i2} H^{\lambda 2} + g_{0\lambda} g_{i3} H^{\lambda 3}). \quad (4.18)$$

Ahora, expandiendo la suma sobre lambda, cada uno de estos términos puede expresarse como

$$\begin{aligned} g_{0\lambda} g_{i0} H^{\lambda 0} &= -(g_{01} g_{i0} D^x + g_{02} g_{i0} D^y + g_{03} g_{i0} D^z), \\ g_{0\lambda} g_{i1} H^{\lambda 1} &= g_{00} g_{i1} D^x - g_{02} g_{i1} H^z + g_{03} g_{i1} H^y, \\ g_{0\lambda} g_{i2} H^{\lambda 2} &= g_{00} g_{i2} D^y + g_{01} g_{i2} H^z - g_{03} g_{i2} H^x, \\ g_{0\lambda} g_{i3} H^{\lambda 3} &= g_{00} g_{i3} D^z - g_{01} g_{i3} H^y + g_{02} g_{i3} H^x, \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde los términos que contienen las componentes de \mathbf{D} se pueden escribir como $(-g_{i0}g_{j0} + g_{ij}g_{00})D^j$ y los que contienen las componentes del campo \mathbf{H} se escriben como $[jkl]g_{0j}g_{ik}H^l$, entonces se obtiene

$$E_i = \frac{1}{\epsilon_0 \sqrt{-g}} (g_{i0}g_{j0} - g_{ij}g_{00})D^j - \frac{1}{\epsilon_0 \sqrt{-g}} [jkl]g_{0j}g_{ik}H^l, \quad (4.20)$$

usando identidades de deltas de Kronecker como en [34] y multiplicando por g^{li} , se puede escribir la primera relación constitutiva de los campos de la forma

$$D^i = -\frac{\epsilon_0 \sqrt{-g}}{g_{00}} g^{ij} E_j + \frac{1}{g_{00}} [ijk] g_{j0} H^k. \quad (4.21)$$

Para la segunda relación constitutiva se requiere usar los tensores duales $*F'^{\mu\nu}$ y $*H_{\mu\nu}$ que están definidas en [35] como

$$\begin{aligned} *F'^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F'_{\lambda\rho}, \\ *H_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} H^{\lambda\rho}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde se ha usado una generalización del tensor de Levi-Civita para un espacio de 4 dimensiones y el tensor de permutación sigue las mismas reglas que su correspondiente en 3 dimensiones, donde $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = \sqrt{-g}[\mu\nu\lambda\rho]$ y $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}[\mu\nu\lambda\rho]$. De forma explícita, los tensores duales son

$${}^*F'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad {}^*H'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -H^x & -H^y & -H^z \\ H^x & 0 & -D^z & D^y \\ H^y & D^z & 0 & -D^x \\ H^z & -D^y & D^x & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Las relaciones de la Ec.(4.14) se pueden reescribir nuevamente en función de estos tensores como

$${}^*H_{\mu\nu} = \epsilon_0 \sqrt{-g} g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} {}^*F'^{\lambda\rho} \quad \rightarrow \quad {}^*F'_{\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon_0 \sqrt{-g}} g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} {}^*H_{\lambda\rho}. \quad (4.24)$$

Es claro que las componentes del campo \mathbf{H} se pueden obtener de la ecuación $H^i = -{}^*H_{0i}$, entonces

$$H^i = -\epsilon_0 \sqrt{-g} g_{0\nu} g_{\nu\rho} {}^*F'^{\lambda\rho}, \quad (4.25)$$

expandiendo la sumatoria sobre los índices λ y ρ , se obtiene

$$H^i = -\frac{\epsilon_0}{\sqrt{-g}} (g_{00} g_{ij} - g_{i0} g_{j0}) B_j + \frac{\epsilon_0}{\sqrt{-g}} [jkl] g_{j0} g_{ik} E_l, \quad (4.26)$$

comparando con la Ec.(4.20) es claro que se pueden usar las mismas identidades mencionadas anteriormente obteniendo así la segunda relación constitutiva que tiene la forma

$$B_i = -\frac{\sqrt{-g}}{\epsilon_0 g_{00}} g^{ij} H_j - \frac{1}{g_{00}} [ijk] g_{j0} E_k. \quad (4.27)$$

Ambas ecuaciones constitutivas pueden ser escritas incorporando los tensores de propiedades

$$\begin{aligned} D^i &= \epsilon_0 \epsilon^{ij} E_j + [ijk] \omega_j H^k, \\ B^i &= \mu_0 \mu^{ij} H_j - [ijk] \omega_j E_k, \end{aligned} \quad (4.28)$$

donde

$$\begin{aligned} \epsilon^{ij} &= \mu^{ij} = -\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} g^{ij}, \\ \omega_i &= \frac{g_{0i}}{g_{00}}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Para métricas diagonales el término ω_i se anula por no tener términos cruzados en las componentes de tiempo y espacio.

4.3. Propiedades electromagnéticas desde métricas con simetría esférica y estáticas

Una métrica esféricamente simétrica y estática se puede escribir de manera general de la forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2), \quad (4.30)$$

o bien

$$ds^2 = g_{00}(r)dt^2 + g_{rr}(r) [dr^2 + f(r)(r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2)], \quad (4.31)$$

donde es fácil encontrar que $g_{00} = -f(r)$ y $g_{rr} = f(r)^{-1}$. Ahora, cuando se obtuvieron las Ecs.(4.21, 4.27 y 4.29), se está habló que son relaciones entre los campos para pasar de las ecuaciones de Maxwell tensoriales a las ecuaciones de Maxwell 3 + 1, por lo tanto, las relaciones en la Ec.(4.29) está escrita en 3 dimensiones, es decir, los índices solo van de 1 a 3. Entonces, tomando una transformación de coordenadas admisible de la parte espacial de la Ec.(4.31), se obtiene lo mostrado en [1], una ecuación de la forma.

$$\epsilon^{ij} = \mu^{ij} = \sqrt{-\frac{g_{rr}}{g_{00}}} \left[\delta_{ij} - (1 - f(r)) \frac{x^i x^j}{r^2} \right]. \quad (4.32)$$

Notar que el cambio de coordenadas es exigido por la naturaleza de la Ec.(4.29) ya que son la relaciones constitutivas para escribir las ecuaciones de Maxwell en el vacío en un espacio curvo a las ecuaciones macroscópicas en coordenadas cartesianas Ecs.(3.23) y la proyección en un fondo plano es para pasar de las 4 dimensiones a encontrar un tensor de propiedades con 9 componentes que se pueda introducir a un material y así encontrar la respuesta electromagnética que mimetice el espacio-tiempo en cuestión en un metamaterial. Por lo tanto, ahora los índices en la Ec.(4.32) sólo toman los valores 1, 2 y 3.

Por otro lado, cuando se utilizó la consideración para eliminar la anisotropía eléctrica, se dejó confinado al campo eléctrico a sólo estar en la dirección z al igual que el vector de desplazamiento eléctrico \mathbf{D} . Entonces, el único ángulo a determinar está entre los campos \mathbf{H} y \mathbf{B} , el cual, es el mismo que el formado por \mathbf{S} y \mathbf{k} ya que estos últimos forman una triada rotante junto con el campo \mathbf{D} y los primeros con \mathbf{E} . Es claro que este ángulo cambiará conforme la onda electromagnética atraviese el material pero será de vital importancia su cálculo para controlar las condiciones de entrada de un haz Gaussiano de campo eléctrico lo cual se mostrará en el capítulo 5. De modo que es claro que dicho ángulo está determinado por $\alpha = \tan^{-1}(B_y/B_x)$, pero como $B^x = \mu^{xx}H_x + \mu^{xy}H_y$ y $B^y = \mu^{xy}H_x + \mu^{yy}H_y$ y si se toma \mathbf{H} en la dirección mostrada en la Figura 4.1 entonces $H_x = 0$ y el ángulo queda determinado por

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{\mu^{xy}}{\mu^{yy}} \right), \quad (4.33)$$

sustituyendo las componentes obtenidas por la Ec.(4.32), se obtiene lo mostrado en [1]

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{(1 - f(r))xy}{x^2 + f(r)y^2} \right), \quad (4.34)$$

Propiedades desde la métrica de Schwarzschild

Con la métrica de Schwarzschild escrita en la forma de la Ec.(4.31), se puede obtener las propiedades de permitividad eléctrica y permeabilidad magnética, las cuales caracterizarán el metamaterial de forma electromagnética necesaria para obtener la respuesta deseada desde la solución a la Ec.(4.3). Es claro que un material tiene más propiedades, por ejemplo; térmicas, mecánicas, acústicas, etc. En este caso, como se muestra en el capítulo 6, sólo son necesarias las propiedades electromagnéticas ya mencionadas y esto se debe a la naturaleza del fenómeno que se quiere modelar (Mimetizar la trayectoria de la luz cerca de un agujero negro) y la ecuación que gobierna dicho fenómeno.

Entonces, usando $f(r) = -g_{00}(r) = 1/g_{rr}(r)$ y $f(r) = (1 - \frac{r_s}{r})$, con la Ec.(4.32) se obtiene

$$\epsilon^{ij} = \mu^{ij} = \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \left[\delta_{ij} - \frac{x^i x^j r_s}{r^3} \right], \quad (4.35)$$

entonces los tensores $\hat{\mu}$ y $\hat{\epsilon}$ son

$$\epsilon^{ij} = \mu^{ij} = \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{r_s x^2}{r^2} & -\frac{r_s xy}{r^2} & 0 \\ -\frac{r_s xy}{r^2} & 1 - \frac{r_s y^2}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Ademas, el ángulo α queda determinado mediante la Ec.(4.33), donde claramente en cada punto del medio por donde pase onda electromagnética tendrá un valor diferente.

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{xyr_s}{r^3 - y^2r_s} \right), \quad (4.37)$$

ambos resultados será utilizados en el capítulo siguiente para la reproducción de resultados en [1].

Propiedades desde la métrica de Reissner-Nordström

Para la métrica de Reissner-Nordström la Ec.(4.32), toma la forma

$$\epsilon^{ij} = \mu^{ij} = \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r} + \frac{q^2}{r_s}} \left[\delta_{ij} - \left(\frac{r_s}{r} - \frac{q^2}{r^2} \right) \frac{x^i x^j}{r^2} \right], \quad (4.38)$$

donde $f(r) = 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{q^2}{r^2}$, con lo cual se obtiene que los tensores de propiedades electromagnéticas son

$$\epsilon^{ij} = \mu^{ij} = \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r} + \frac{q^2}{r^2}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\left(\frac{r_s}{r} - \frac{q^2}{r^2}\right)x^2}{r^2} & -\frac{\left(\frac{r_s}{r} - \frac{q^2}{r^2}\right)xy}{r^2} & 0 \\ -\frac{\left(\frac{r_s}{r} - \frac{q^2}{r^2}\right)xy}{r^2} & 1 - \frac{\left(\frac{r_s}{r} - \frac{q^2}{r^2}\right)y^2}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

El ángulo entre los campos \mathbf{H} y \mathbf{B} está determinado para esta métrica de la forma

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{\left(\frac{r_s}{r} - \frac{q^2}{r^2}\right)xy}{x^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)y^2} \right) \quad (4.40)$$

Estos resultados serán utilizados para mimetizar la curvatura de la luz cerca de un agujero de Reissner-Nordström con diferentes valores de la carga geométrica.

Capítulo 5

Análisis numérico y resultados

En este capítulo se muestra la programación del modelo en Comsol Mutiphysic. Se abordan dos formas de resolver el problema, usando los módulos de óptica de ondas y matemáticas, donde finalmente se termina optando por el módulo de optica ya que las condiciones de frontera se vuelven más favorables y sencillas. Por lo tanto, se resuelve la ecuación Ec.(4.3) sobre un material con las propiedades electromagnéticas descritas en el capítulo anterior (reproducción de resultados de la métrica de Schwarzschild en [1] y con la métrica de Reissner-Nordström) y las condiciones de frontera necesarias para simular la trayectoria de la luz cerca de un agujero negro. Posteriormente se resuelven de manera numérica las ecuaciones de geodésicas para cada espacio-tiempo (Ecs.(2.32 y 2.49)) con la condiciones iniciales necesarias para poder ser comparadas con los resultados de la distribución del campo \mathbf{E} al resolver su ecuación de onda (resultado de Comsol).

5.1. Comsol Mutiphysics

COMSOL Multiphysics es un paquete de software de análisis y resolución por elementos finitos para varias aplicaciones, se pueden resolver ecuaciones diferenciales sin implicaciones físicas usando el módulo de matemática, también se pueden seleccionar *físicas*, donde aparecerán módulos como: óptica, térmica, acústica, mecánica, entre otros. Cada una de estas físicas tendrá su propia ecuación que gobierna el fenómeno. Además, se pueden unir varios análisis de diferentes áreas de la física y formar una *multifísica* en un sólo modelo si así se requiere, por ejemplo, en [39] se usa una multifísica para analiza el calentamiento de un cuerpo mediante un láser incidente. Para las simulaciones de interés en Comsol se ha creado un diagrama de flujo (Figura A.1) con los elementos principales para reproducir los resultados aquí mostrados. Los pasos en el diagrama serán detallados a continuación.

Primero se selecciona un modelo asistido, esto despliega un menú de selección de dimensión y simetrías. La dimensión hace referencia literalmente a en cuantas dimensiones se trabajará y esto hará las simplificaciones necesarias en las físicas de manera automática y la as simetrías hacen referencia a problemas donde el usuario sabe que el problema tiene uno o más ejes de simetría por lo cual no es necesario resolver en todo el dominio sino que se resolverá sólo una parte y se extenderá a todos las demás. Para este caso y por las consideraciones antes mencionadas se selecciona un modelo 2D sin simetrías. El siguiente menú después de haber seleccionado el tipo de análisis (dimensión y simetrías), muestra los módulos a seleccionar, donde los de principal interés son: *Matemáticas* y *Óptica*. En el primero se puede introducir la Ec.(4.10) y en el segundo, la física contiene precargada la Ec.(4.3).

5.1.1. Módulo de matemáticas

El módulo de matemáticas contiene un sub-módulos de EDP (*Ecuaciones Diferenciales Parciales*) que contiene nuevos sub-módulos como: EDP *forma general* y EDP *en forma de coeficientes*. Usando la la ruta EDP \rightarrow EDP en forma de coeficientes y seleccionar un estudio no dependiente del tiempo, el programa tendrá cargada una ecuación diferencial de la forma

$$\nabla \cdot (-c\nabla \mathbf{u} - \alpha \mathbf{u} + \gamma) + \beta \cdot \nabla \mathbf{u} + a\mathbf{u} = f, \quad (5.1)$$

donde $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$ ya que el análisis es en dos dimensiones. Ahora, si se define una matriz en función de los elementos de $\hat{\mu}$, de la forma

$$\hat{\chi} = \begin{pmatrix} -\mu^{yy} & \mu^{xy} \\ \mu^{xy} & -\mu^{xx} \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

la Ec.(4.10) se puede escribir de la forma

$$(\partial_x, \partial_y)\hat{\chi} \begin{pmatrix} \partial_x E_z \\ \partial_y E_z \end{pmatrix} - \epsilon^{zz}\omega^2 E_z = 0, \quad (5.3)$$

donde comparando con la Ec.(5.1), es claro que para introducirla en Comsol, los coeficientes deben ser: $c = -\hat{\chi}$, $\alpha = \epsilon^{zz}\omega^2$ y $\mathbf{u} = E_z$.

Las condiciones de frontera más usuales dentro de este modelo de ecuaciones diferenciales suelen ser condiciones de tipo Neumann y Dirichlet. Para esta forma de resolver el problema en cuestión, en [1] se menciona que cierta condición de frontera es un haz Gaussiano para simular un rayo que pasa por el metamaterial, pero es importante mencionar que las condiciones de frontera deben ser modificadas como se muestra en [40] donde resuelven ciertos fenómenos de ondas desde este módulo usando la Ec.(4.10).

Para la parte de la geometría se deberá usar la descrita la sección de *Elementos del constructor de modelo* pero sin cargar un material como se mostrara en la sección de *Óptica de ondas* ya que es claro que el material está contemplado en los elementos de $\hat{\mu}$ y $\hat{\epsilon}$.

5.1.2. Óptica de ondas

Óptica de ondas es una *física* de Comsol y es el principal módulo para mimetizar el fenómeno astrofísico del que se ha venido hablando, este módulo contiene de forma explícita la ecuación Ec.(4.3) con la condición $\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y) \exp(-ikz)\hat{\mathbf{z}}$, sólo hay que seleccionar un modelo en dos dimensiones y sin simetrías, seleccionar óptica, óptica de ondas y ondas electromagnéticas con dominio de la frecuencia. Al seleccionar esta sección se tendrá precargada la ecuación de onda de campo eléctrico y se podrá seleccionar que la variable de entrada sea la longitud de onda λ , esto con motivo de reproducir los resultados de [1].

Para este caso es necesario definir las propiedades de permitividad relativa y permeabilidad relativa, y aunque la Ec.(4.3) está en función de las propiedades, se está trabajando con una física que exige el uso de geometría, por tanto, las propiedades serán cargadas desde el módulo de geometría y simplemente tomadas por el programa de forma automática para resolverse la ecuación diferencial de forma puntual.

5.1.3. Elementos del constructor de modelo

El constructor de modelo es el menú que se despliega después de la selección de una física o multifísica y contiene todos los elementos de parámetros, variables, geometría, caracterización de ecuaciones, condiciones de frontera, mallado, procesamiento después de resultados, etc., que se agregan al modelo para la simulación [41].

Definiciones globales. Parámetros y variables

Las definiciones globales son: parámetros, variables, funciones, etc., que se podrán usar en todo el programa. En este caso, en los parámetros se definen las constantes geométricas como las dimensiones usadas en los modelos. En las variables se define las cantidades en función de los ejes coordenados x y y , por ejemplo; $f(r)$, los coeficientes μ^{ij} , el ángulo α , entre otros.

Geometría

La sección geometría se encuentra dentro de un apartado llamado *Componente 1*, aquí deberán definirse la geometría del metamaterial en dos dimensiones sobre las cuales pasará la onda electromagnética. En la Figura 5.1 se muestra el modelo de trabajo que consiste en un cuadrado de longitud de lado $L = 7r_s$, un círculo que delimita el horizonte de eventos y está centrado en el origen con radio $r = r_s + \delta$, donde $r_s = 1 \text{ m}$ y $\delta = 0,05r_s$. Estos valores son tomados de [1] para el mimetizar la curvatura de la luz en el caso del agujero negro de Schwarzschild, donde es claro que r_s corresponde a la distancia del horizonte de eventos y la razón para tomar el horizonte del agujero negro como el horizonte real más cierta cantidad pequeña es para evitar que los valores numéricos de las propiedades queden indeterminados, es decir, analizando la Ec.(4.36), es claro que las propiedades se indeterminan en $r = r_s$, entonces con la geometría descrita anteriormente logra evitar la indeterminación [1, 42].

Para el caso del agujero negro de Reissner-Nordström son analizados dos casos: El primero donde se convierte en Schwarzschild ($q = 0$) y el segundo, donde el agujero negro de Reissner-Nordström es extremal ($q = r_s/2$), entonces, para definir el radio correcto se usa la Ec.(2.45) con el valor de la carga geométrica correspondiente. Por otro lado se debe recordar en usar un δ adecuado, para este caso se usó $\delta = 0,1m$ para $q = r_s/2$ y $\delta = 0,05$ para $q = 0$.

Todo lo anterior es fácil de generalizarse usando los parámetros y variables globales, ya que simplifica las expresiones y deja de manera general un programa donde sólo se deben variar el parámetro de impacto y la carga geométrica.

Materiales

Comsol cuenta con una basta lista de materiales bien caracterizados en cuanto a todas las propiedades, pero es de esperar que no contenga un material con las propiedades necesarias para mimetizar agujeros negros, para introducirlas es necesario definir un *material en blanco*. Un material en blanco es un material al cual se le pueden definir propiedades de todo tipo: mecánicas, eléctricas, térmicas, etc., para el caso en cuestión es necesario sólo definir permitividad relativa y permeabilidad relativa ya que la Ec.(4.3), sólo es función de estas propiedades. Por otro lado, al introducir dichas propiedades, es necesario definir si estas son o no completas, es decir, es posible introducir un sólo valor lo cual regresará un material isotrópico o una matriz de 9 componentes (3x3), donde deben introducirse los valores de la Ec.(4.36), donde la región de dicho material es el cuadrado excluyendo el círculo.

Para el círculo que mimetiza el agujero negro, deberán utilizarse otras propiedades ya que se requiere que la intensidad del campo eléctrico sea cero en esa región. Las primeras simulaciones

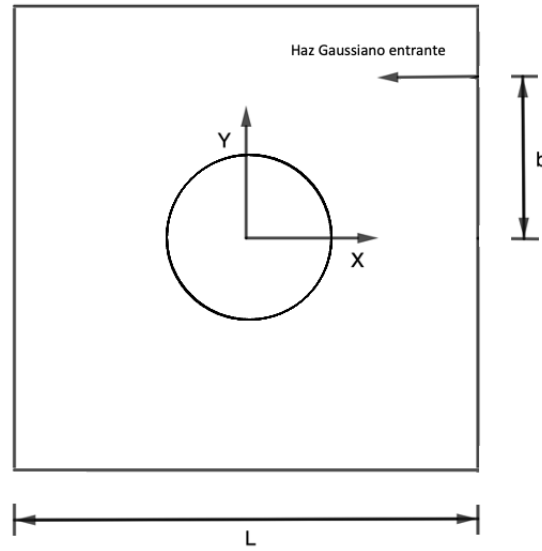


Figura 5.1: Geometría para la simulación del problema

donde se pretendía mimetizar el horizonte de eventos de un agujero negro mediante la absorción de las ondas electromagnéticas, indicaba una división del dominio en tres secciones: un cuadrado con permitividad ϵ_0 , un anillo con permitividad dependiente del radio para generar cierta curvatura de un haz de campo eléctrico y finalmente un círculo interno con permitividad con parte real e imaginaria, lo cual evanecía todas las ondas entrantes en dicho círculo que delimitaba el horizonte de eventos [43, 44, 45, 46]. Esto tiene ciertas consideraciones físicas, por ejemplo, dentro del agujero negro no es posible saber que pasa con los fotones y entonces, se puede considerar un metamaterial absorbente para mimetizar el comportamiento que sí se conoce, todo esto se implementa mediante índices de refracción complejos como en [42] o simplemente considerar un material dieléctrico para obligar a que el campo eléctrico sea cero en cierta región. Usando las recomendaciones en [42], donde se implementa el uso de ciertas funciones de r para definir las propiedades dentro del material las cuales cambian conforme aumenta el radio y son de la forma

$$\mu_r = \mu_\theta = \epsilon_z = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) (i + 1) \quad \rightarrow \quad 0 < r < r_s + \delta, \quad (5.4)$$

donde es necesario hacer un cambio de coordenadas para poder introducir los valores numéricos en Comsol. Es importante mencionar que en [1], no se detallan los pasos para definir las propiedades de este círculo que mimetiza la absorción del campo, por tanto, es posible que alguna diferencia entre los resultados aquí mostrados y los que se intentan reproducir pueda ser a causa de no haber usado los mismos valores en dicha geometría, tema que se discutirá con mayor detalle en los resultados de la simulación.

Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera en Comsol están precargadas en el componente en el que se esté trabajando y dentro del módulo que tendrá el nombre de la física seleccionada. Estas condiciones son respectivas a cada física, por ejemplo: en el módulo de matemáticas, existen condiciones de tipo Neumann o Dirichlet y en los módulos de físicas, existen algunas condiciones de frontera ya construidas para fenómenos de interés.

Al trabajar en la física de óptica, las condiciones de frontera precargadas tienen diferentes atributos, por ejemplo: para modelar campo lejano [47] o modelar un dominio con límites abiertos,

es decir, un límite del dominio computacional a través del cual pasará una onda electromagnética sin ninguna reflexión [48]. Para este modelo se espera que por el comportamiento del fenómeno astrofísico, en las fronteras el campo no sufra ninguna alteración, es decir, la onda se ve enviada hasta el infinito (condición de frontera sin bordes) y decaerá a cero en este límite. Lo anterior podría modelarse haciendo uso de una geometría mas grande (un par de veces mas grande) con condiciones de que el campo de vuelve cero en las fronteras, lo cual se refleja en un costo a nivel computacional elevado, y aunque es factible también una resolución de este problema, no aportará mucho a los resultados y conclusiones a los obtenidos con un modelo de condición de contorno de difracción.

En [1] se menciona que para sus simulaciones se ha usado una condición del tipo *Perfectly Matched Layers* (PML) con el fin de simular un fenómeno sin fronteras, en [48] se hace referencia a que es posible usar una condición de contorno de difracción a segundo orden y hacer un ahorro de recurso computacional en lugar de usar una PML. Para este trabajo, una justificación de usar una condición de contorno de difracción es que no se esta interesado en el valor numérico de la intensidad del campo en cada uno de los puntos del dominio y es de mayor interés analizar el comportamiento global del mismo, es decir, ver si este se comporta de manera similar a las geodésicas.

Con la condición de contorno ya seleccionada, es claro que todas las fronteras deberán ser modeladas por la misma e incluso la frontera por la cual se introduce el haz Gaussiano, en este caso y como se muestra en la Figura 5.1, el haz de campo eléctrico se introduce por la parte derecha de la geometría. Ahora, para definir el campo incidente, se puede usar lo mostrado en [49, 50] donde basicamente se usa una función Gaussiana de la forma

$$E_z = \exp \left[- \left(\frac{y - b}{w_0} \right)^2 \right], \quad (5.5)$$

donde b es el parámetro de impacto y w_0 es el ancho del haz [41].

Por otro lado, para que el haz siempre esté introducido en una dirección controlada y paralelo al eje x se debe tomar en cuenta que este tiene una velocidad de propagación en diferente dirección que el vector de numero de onda y resulta que el ángulo formado entre ellos es el mismo que se encuentra entre los campos \mathbf{H} y \mathbf{B} que está determinado por la Ec.(4.34) [3]. Entonces, se impone que $\mathbf{k} = -(\cos \alpha)\hat{\mathbf{x}} - (\sin \alpha)\hat{\mathbf{y}}$ [3, 1]. Estos valores deberán ser colocados en el programa en la parte de las componentes del vector de onda.

Malla para la solución puntual

A grandes rasgos, el método numérico para la solución, convierte la ecuación diferencial gobernante en un sistema de ecuaciones lineales de n ecuaciones con n incógnitas, teniendo entonces que la solución es puntual para cada una de las coordenadas mediante los nodos. Para este caso se ha usado un mayado triangular por defecto, donde se ha modificado el tamaño mínimo de elemento que tiene precargado el programa (*Malla extremadamente fina*), ya que de acuerdo con la documentación de Comsol [41, 51], para obtener resultados correctos se especifica que el tamaño de la malla debe tener relación con la longitud de onda, la cual será especificada por el usuario. El tamaño máximo de elemento usado fue de $0,01r_s$ pero se observó una independencia de los resultados desde elementos con tamaño máximo de $0,015r_s$. Nuevamente es importante recordar que el interés principal del trabajo es analizar una correspondencia entre las trayectorias marcadas por la la analogía y las geodésicas, por tal motivo no se ha hecho mucho énfasis en optimizar el mallado. También es importante mencionar que los dos dominios son mallados con una malla similar y homogénea de elementos triangulares, aunado a esto, se debe recalcar que

los nodos (puntos de solución) que unen ambos dominios están conectados. Se podría pensar que es necesaria una condición de frontera extra en el círculo interno, pero no es así, simplemente el cambio tan drástico de la intensidad de campo en esta unión será determinado por las propiedades cambiantes del exterior al círculo interno.

Estudio, Resultados y gráficos en python

El estudio es la sección del constructor del modelo, donde se define en este caso la longitud de onda. En [1] se ha usado $\lambda = 0,15r_s$.

Con todo lo anterior se puede resolver el modelo y Comsol mostrará una distribución del campo eléctrico en la superficie geométrica construida. En la sección de resultados puede hacerse ciertos tipos de procesamientos como por ejemplo: cambio de colores base para el campo, definir un valor máximo y mínimo del campo o exportar resultados a archivos de texto. Sólo fue de interés exportar los resultados a un archivo de texto para poder leerlos y realizar las gráficas correspondientes en python, esto sin modificar los resultados obtenidos desde Comsol y si plemente dar un formato de mejor visualización y comparación directa sin perder calidad de imagen.

5.2. Solución a las ecuaciones diferenciales de geodésicas utilizando métodos numéricos

En el capítulo 2, cuando se hablo de las ecuaciones diferenciales de geodésicas, se mostró que podían ser reescritas con un cambio de variable $u = 1/r$ y cambiaban de la forma

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 &= \frac{r^4}{b^2} - r^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) & \rightarrow & \frac{d^2u}{d\phi^2} + 2u = 3mu^2 \\ \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 &= \frac{r^4}{b^2} - r^2 \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) & \rightarrow & \frac{d^2u}{d\phi^2} + 2u = 3mu^2 - 2q^2u^3, \end{aligned} \quad (5.6)$$

siendo éstas, las ecuaciones de geodésicas para Schwarzschild y Reissner-Nordström respectivamente.

Primero, es claro que las ecuaciones en función de r y las que están en función de u , son ecuaciones diferenciales no lineales de primer y segundo orden respectivamente, pero es más fácil introducir las condiciones necesarias para $u(\phi_0)$ y $u'(\phi_0)$, donde ϕ_0 es el ángulo desde el cual comenzarán a resolverse las Ec(5.6). De acuerdo con la Figura A.1, el haz Gaussiano entrante, esta a una distancia $r_0 = \sqrt{(L/2)^2 + b^2}$ del origen y el ángulo inicial debe ser $\phi_0 = \tan^{-1}(2b/L)$. Para tener una dirección controlada (en estas simulaciones siempre paralela al eje x) se requiere que $\frac{dr}{d\phi} = 0$.

Las ecuaciones diferenciales no lineales se pueden resolver usando el método de Runge-Kutta. Los resultados en [52] donde realiza una modificación del método convencional, con motivo de lograr una convergencia en un menor número de iteraciones llamándolo ahora *Runge-Kutta-Fehlberg*, se han reproducido para tener una validación de la programación del método. Para este caso bastó con implementar Runge-Kutta de orden 4.

Las ecuaciones de segundo orden deben escribirse como dos ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas. Definiendo $Y_1 = u$ y $Y_2 = u'$, se obtiene para Schwarzschild

$$\frac{dY_2}{d\phi} + Y_1 = 3mY_1^2 \quad \frac{dY_1}{d\phi} = Y_2 \quad (5.7)$$

y para Reissner-Nordström

$$\frac{dY_2}{d\phi} + Y_1 = 3mY_1^2 - 2q^2Y_1^3 \quad \frac{dY_1}{d\phi} = Y_2 \quad (5.8)$$

Las soluciones a las Ecs.(5.7 y 5.8) se muestran en la Figura 5.2, donde ya se ha regresado a las variables originales, r y ϕ . En Ambas soluciones se han implementado las condiciones de contorno de las que se habló anteriormente y se han resuelto para sus parámetros de impacto crítico, además, el horizonte de eventos de Schwarzschild corresponde al círculo en negro y el de Reissner-Nordström al círculo gris. Estas Soluciones serán comparadas junto con la distribución del campo eléctrico en el metamaterial (solución de Comsol) para analizar una relación directa entre la curvatura del haz Gaussiano en el medio y la trayectoria de las geodésicas correspondientes.

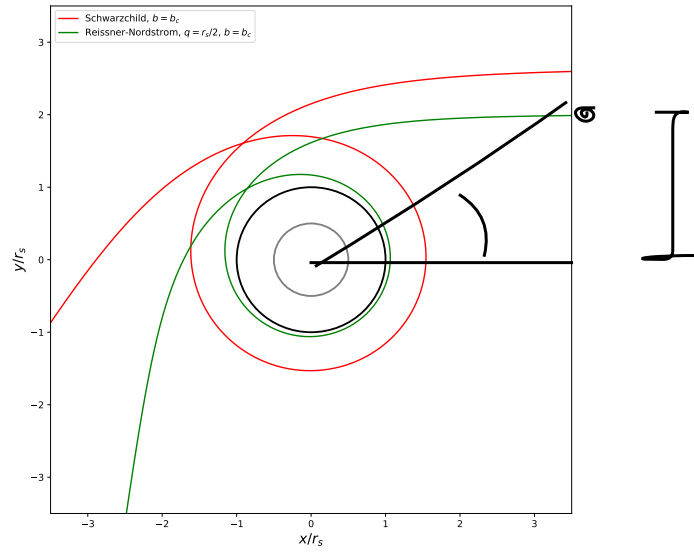


Figura 5.2: Soluciones a las Ecs(5.7 y 5.8) mediante el método de Runge-Kutta de orden 4, para el espacio-tiempo de Schwarzschild con $r_s = 1$ y Reissner-Nordström con $r_s = 1$ y $q = r_s/2$, ambos para sus respectivos parámetros de impacto crítico.

5.3. Comparación de la distribución de campo eléctrico en el metamaterial con las curvas de geodésicas

Reproducción de resultados en [1]. Espacio-tiempo de Schwarzschild

En la Figura 5.3 se muestra la distribución de la intensidad de campo eléctrico proveniente de resolver la Ec(4.3) en Comsol y encima la solución de las ecuaciones de geodésicas con las condiciones geométricas adecuadas para comparar los resultados. Además, comparando de forma de distribución del campo en los resultados de esta figura y los mostrados en [1] se puede concluir que se han logrado reproducir los resultados del mismo, donde usan diferentes parámetros de impacto para ver la dinámica del haz Gaussiano a su paso por el metamaterial. Primero, en 5.3 a) y b) se muestra una pequeña distorsiones en las líneas de geodésicas antes de entrar en el agujero negro, así como una forma espiral de la distribución de campo eléctrico al rededor del círculo interno que simula el horizonte de eventos. Para $b = b_c \approx 2,6$, el fotón hace una órbita con bastante cercanía a la esfera de fotones del agujero negro para después solamente viajar al

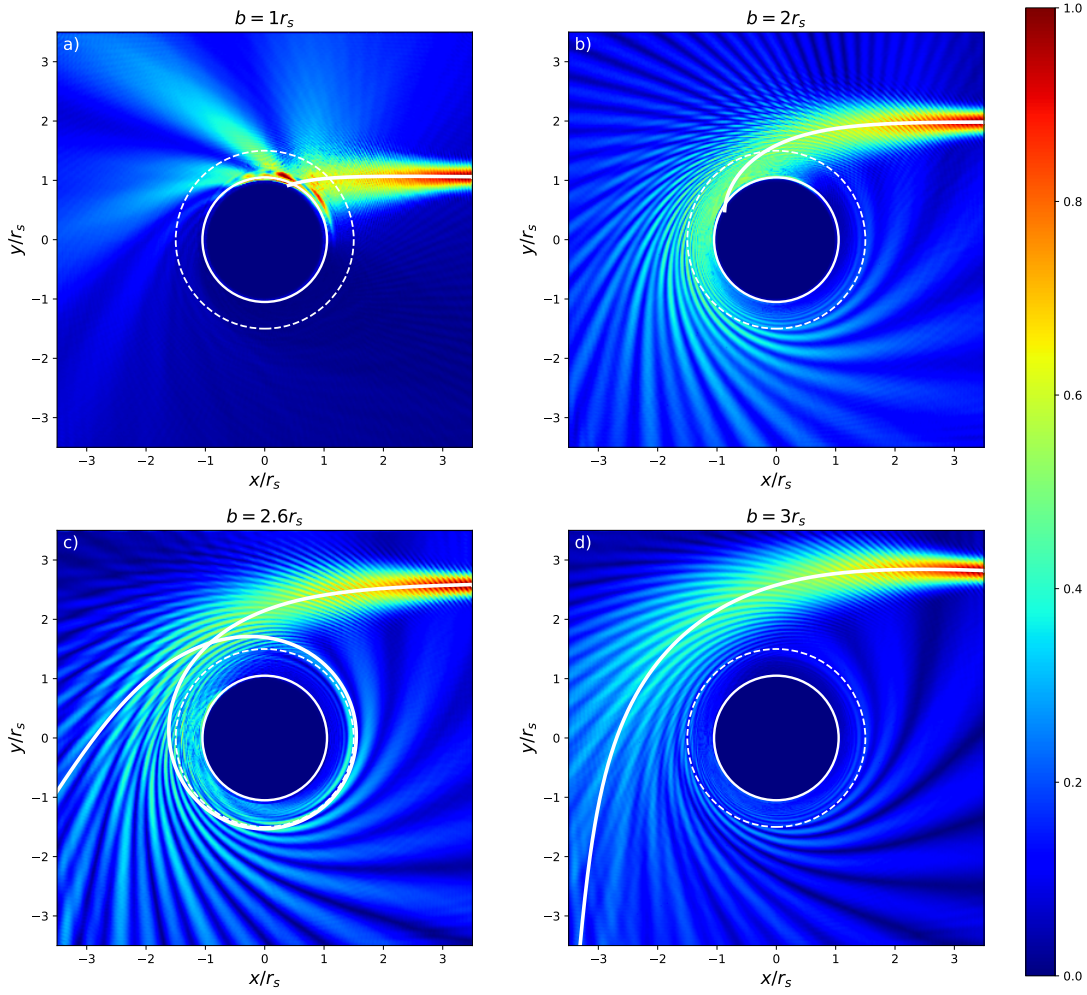


Figura 5.3: Distribución del modulo de campo eléctrico para un haz gaussiano con longitud de onda $\lambda = 0,15r_s$ y ancho $w_0 = 0,2r_s$, con $r_s = 1$ y $\delta = 0,05$, para diferentes parámetros de impacto b y usando las propiedades provenientes del espacio-tiempo de Schwarzschild sintetizadas en la Ec.(4.36).

infinito hasta su paso por otra distorsión en el espacio-tiempo. Finalmente en 5.3 d) se muestra la curvatura de un haz de luz pasando cerca del agujero negro con un parametro de impacto mayor al parámetro de impacto crítico. estos casos siguen lo antes mencionado sobre la Figura 2.1 a).

Otro aspecto importante mencionar que en todos los elementos de la Figura 5.3, es claro que el haz Gaussiano de entrada se ve dispersado a su paso por el material, lo cual podría solucionarse haciendo la longitud de onda mas corta que la reportada en [1], pero esto tiene un costo a nivel de computo más alto que el implementado para las simulaciones ya que con los requerimientos en [41, 51] el mallados debería ser mas fino. Otra aparente solución podría ser reducir el valor del ancho del pulso ω pero al hacer pruebas sobre esto, se ha observado que el haz se dispersa de manera más rápida con lo cual no es posible comparar las geodésicas con la distribución de campo. Entonces, se considera que los parámetros utilizados en [1] son adecuados para hacer la comparación antes mencionada.

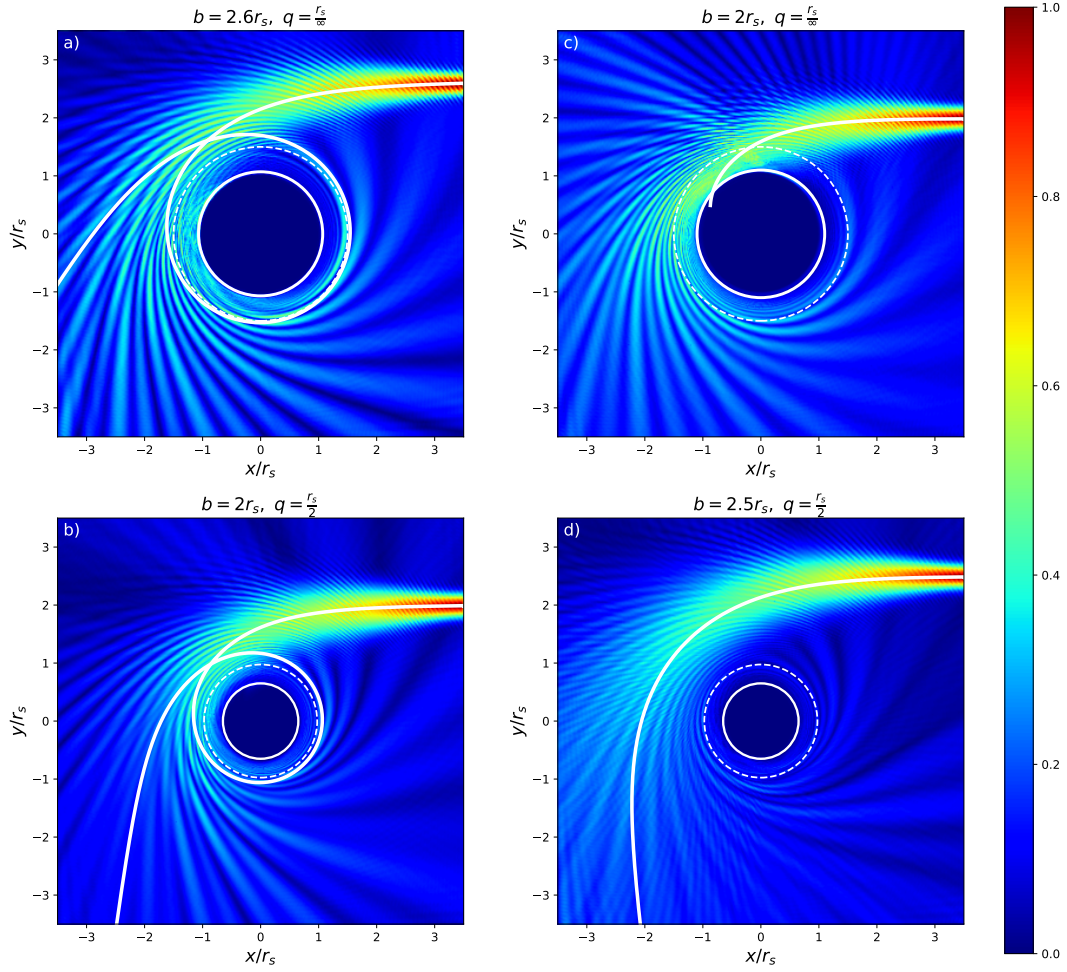


Figura 5.4: Distribución del modulo de campo eléctrico para un haz Gaussiano con longitud de onda $\lambda = 0,15r_s$ y ancho $w_0 = 0,2r_s$, con $r_s = 1$, $\delta = 0,05$, para diferentes parámetros de impacto b . En a) y b) se obtiene el agujero negro de Schwarzschild desde la métrica y parámetros de Reissner-Nordström usando $q \rightarrow 0$, en c) y d) se simula la geometría de para el valor máximo permitido de la carga geométrica $q = \frac{r_s}{2}$, es decir, para el agujero negro extremal.

espacio-tiempo de Reissner-Nordström

La Figura 5.4 muestra la trayectoria del haz Gaussiano mediante la distribución de campo eléctrico usando las propiedades provenientes de la métrica de Reissner-Nordström, a su paso por el metamaterial, donde se compara con las soluciones a las ecuaciones de geodésicas en el mismo espacio-tiempo. Primero, en 5.4 a) y b) se muestra como el espacio-tiempo de Reissner-Nordström se convierte en el espacio-tiempo de Schwarzschild para cuando $q = 0$ y se reproducen los resultados mostrados en la Figura 5.3. Además, en 5.4 c) y d) se muestra el caso del agujero negro extremal para diferentes parámetros de impacto $b = b_c$ y $b > b_c$, donde ahora el parámetro de impacto critico corresponde al obtenido para la métrica del agujero negro cargado.

Capítulo 6

Conclusiones y perspectivas

En este trabajo se revisó la analogía entre las ecuaciones de Maxwell en el vacío en una variedad arbitraria en 4 dimensiones y las Ecuaciones de Maxwell en un medio anisotrópico en un espacio plano. El objetivo principal de esto es mimetizar fenómenos astrofísicos en un metamaterial caracterizado por la métrica en cuestión, reproducir los resultados en [1] y utilizar lo aprendido para comparar la dinámica de una onda electromagnética (haz Gaussiano de campo eléctrico) a su paso por el metamaterial con propiedades determinadas por la métrica de un agujero negro de Reissner-Nordström con sus respectivas soluciones de geodésicas.

Durante los capítulos se habló de la analogía y las relaciones constitutivas, donde es importante hacer énfasis en que las ecuaciones de Maxwell en forma vectorial en las cuales se introdujeron operaciones vectoriales generalizadas mediante la derivada covariante. Dichos operadores siguen escritos para un espacio y un tiempo, es decir, están escritas en tres dimensiones y en función del tiempo, donde estos están no conectados como en el espacio-tiempo. Esto fue posible porque simplemente se usó una variedad en 3 dimensiones y por eso se observó una analogía directa entre las Ecs.(3.23 y 4.1). Por otro lado, para mimetizar fenómenos astrofísicos se deben usar métricas en 4 dimensiones y es por esa razón que se encontraron las relaciones constitutivas mostradas en las Ecs.(4.21 y 4.27) desde una formulación covariante de las ecuaciones de Maxwell en espacio curvo al exigir que esas ecuaciones regresen de cierta manera a las ecuaciones $3 + 1$ del electromagnetismo y esto corresponde al proceso inverso por el cual se obtuvo la formulación covariante en el Capítulo 3.

La Comparación de la geodésicas de partículas de tipo luz para cada espacio-tiempo con la distribución del campo mostrada en las Figuras 5.3 y 5.4, aseguran que el haz Gaussiano tiene por lo menos una correspondencia con las geodésicas hasta que se ve cierta dispersión del rayo pero es de esperarse que se mantenga la relación tan buena como se muestra en los resultados a la entrada del rayo por el metamaterial.

La primera perspectiva de trabajos futuros es generalizar la mimetización de la trayectoria de la luz cerca de un agujero negro con métricas no diagonales. Además, se espera simular más geometrías pertenecientes a diferentes agujeros negros, por ejemplo: agujeros negros sin singularidades [53] y el agujero negro de Schwarzschild con una métrica no conmutativa. Finalmente, también se podría trabajar dentro de Comsol para obtener una correspondencia de mayor trayecto entre el haz Gaussiano a su paso por el metamaterial y las geodésicas, esto haciendo cambios en los parámetros como ya fue mencionado en el capítulo anterior.

Apéndice A

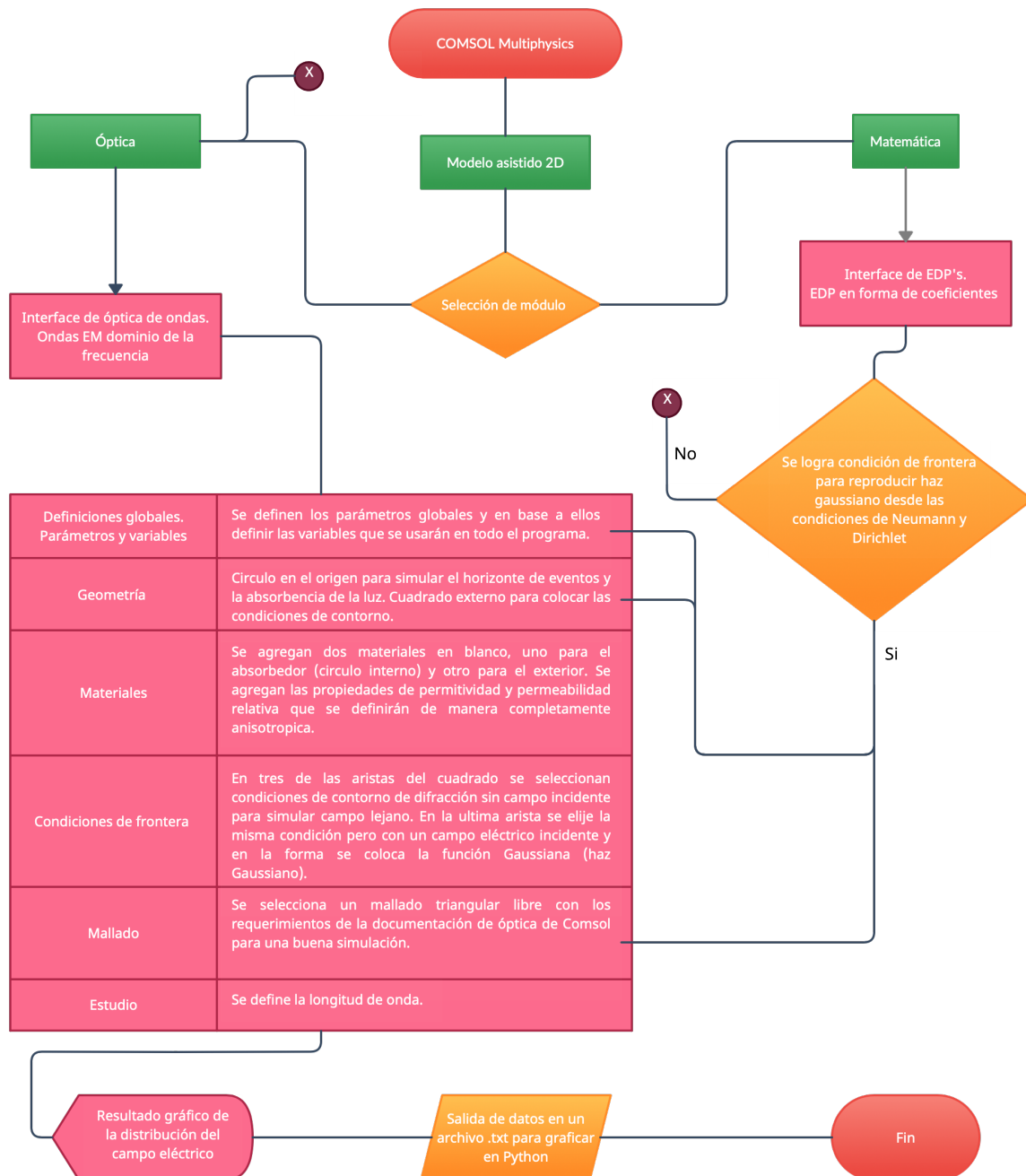


Figura A.1: Diagrama de Flujo con los principales elementos a seguir en Comsol Mutiphysics para la simulación de los resultados de la Figura 5.3 y Figura 5.4

A.1. Códigos Implementados

A continuación se muestran los códigos de programación que fueron implementados para el desarrollo de la tesis. El lenguaje de programación fue Python con la interfaz de Jupyter Notebook

A.1.1. Varios cálculos y gráficas en las métricas de Schwarzschild y Reissner-Nordström

En esta parte se muestran los códigos implementados para las gráficas del potencial efectivo, la solución aproximada a las ecuaciones de geodésicas y los casos de la métrica de Reissner-Nordström variando la carga geométrica q .

```

1 import numpy as np
2 import pandas as pd
3 import requests
4 import os
5 import math
6 import matplotlib.pyplot as plt
7 from matplotlib import cm
8 from matplotlib.ticker import LinearLocator
9 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
10 from scipy import interpolate
11 from scipy.interpolate import griddata
12
13
14 #APROXIMACION DE A SOLUCION DE GEODESICAS NULAS DE SCHWARZSCHILD
15
16 rs=1
17 m=rs/2
18 d=2
19 k=0
20 l=7
21 ti=np.arctan(d/(l/2))
22
23 a=0
24 def eqq(d,k,m):
25     r=np.zeros(1000)
26     phi=np.linspace(0,np.pi,1000)
27     for i in range(len(r)):
28         r[i]=(d**2)/(d*np.sin(phi[i]-a)+m*(1+k*np.cos(phi[i]-a)+np.cos(phi[i]-a)
29             **2))
29     y=r*np.sin(phi)
30     x=r*np.cos(phi)
31     return x,y
32 A=eqq(d,k,m)
33 B=eqq(2,k,m)
34 C=eqq(4,k,m)
35
36 plt.figure(figsize=(7,5))
37 plt.axhline(y=3*np.sqrt(3)*rs/2, xmin=-5, xmax=5,color='yellow',label="Recta")
38 plt.plot(A[0],A[1],color='red',label="Trayectoria foton")
39 plt.axvline(x=0, ymin=0.6, ymax=0.76)
40 draw_circle = plt.Circle((0.0, 0.0), 2*m, fill=False, color='black', linewidth=2,
41     linestyle="solid")
42 plt.annotate(r'$b$',xy=(0.1, 1.5), xycoords='data', fontsize=10)
43 plt.text(-4.9, 4.5, "b",fontsize=14)

```

```

43 plt.annotate(r'$r_s$',xy=(1.1, 0), xycoords='data', fontsize=10)
44 plt.gca().add_artist(draw_circle)
45 plt.xlabel('x')
46 plt.ylabel('y')
47 plt.xlim(-5,5)#
48 plt.ylim(-5,5)
49 plt.legend(loc='lower left')
50 plt.savefig('rrr.pdf')
51
52
53 #POTENCIAL EFECTIVO SCHWARZSCHILD
54
55 r1 = np.linspace(0, 10, 100)
56 v=np.zeros(len(r1))
57 rs=1
58 q=1/2
59 for k in range(len(r1)):
60     v[k]=(1/r1[k])*np.sqrt(1-rs/r1[k]+q**2/r1[k]**2)
61
62
63 plt.figure(figsize=(7,5))
64 plt.title("",fontsize=18, color = 'black')
65 plt.plot(r1,v, color='black',linewidth=2.5)
66 plt.xlim(0,10)
67 plt.ylim(0, 0.6)
68 plt.axhline(y=0.5, xmin=0, xmax=5,color='red', linewidth=2)
69 plt.axhline(y=np.max(v), xmin=0.15, xmax=5,color='green', linewidth=2)
70 plt.axhline(y=.2, xmin=0.45, xmax=5, color='blue', linewidth=2)
71 plt.annotate(r'$b<b_c$',xy=(8, 0.52), xycoords='data', fontsize=10)
72 plt.annotate(r'$b=b_c$',xy=(8, 0.4), xycoords='data', fontsize=10)
73 plt.annotate(r'$b>b_c$',xy=(8, 0.22), xycoords='data', fontsize=10)
74 plt.text(0.1, 0.57, "a",fontsize=14)
75 #plt.axvline(x=3.5, ymin=-5, ymax=5)
76 plt.xlabel("$r/r_s$",fontsize=15, color = 'black')
77 plt.ylabel("$V/V_0$",fontsize=15, color = 'black')
78 #plt.grid(color = '0.5', linestyle = '--', linewidth = 1)
79 plt.savefig('potencial.pdf')
80
81
82 #HORIZONTES DEL AGUJERO NEGRO DE RN
83
84 r1 = np.linspace(0, 10, 1000)
85 v1=np.zeros(len(r1))
86 v2=np.zeros(len(r1))
87 v3=np.zeros(len(r1))
88 S=np.zeros(len(r1))
89 rs=1
90 q1=.4*rs
91 q2=1/2*rs
92 q3=.7*rs
93 for k in range(len(r1)):
94     v1[k]=(1-rs/r1[k]+q1**2/r1[k]**2)
95     v2[k]=(1-rs/r1[k]+q2**2/r1[k]**2)
96     v3[k]=(1-rs/r1[k]+q3**2/r1[k]**2)
97     S[k]=(1-rs/r1[k])
98
99

```



```

100
101 plt.figure(figsize=(7,5))
102 plt.title("",fontsize=18, color = 'black')
103 plt.plot(r1,v1, color='red',linewidth=2.5, label=r '$q<r_s/2$')
104 plt.plot(r1,v3, color='green',linewidth=2.5, label=r '$q>r_s/2$')
105 plt.plot(r1,v2, color='blue',linewidth=2.5, label=r '$q=r_s/2$')
106 plt.plot(r1,S, color='black',linewidth=2.5, label=r '$q=0$ \ \ to \ \
    Schwarzschild$')
107 plt.axhline(y=0.0, xmin=0, xmax=5,color='black', linewidth=2)
108 plt.annotate(r '$r-$',xy=(0.10, -0.07), xycoords='data', fontsize=13)
109 plt.annotate(r '$r+$',xy=(0.76, -0.085), xycoords='data', fontsize=13)
110 plt.annotate(r '$r_s$',xy=(1, -0.07), xycoords='data', fontsize=13)
111 plt.annotate(r '$\frac{r_s}{2}$',xy=(.5, 0.07), xycoords='data', fontsize=15)
112 plt.annotate(r '$r$',xy=(1.9, -0.08), xycoords='data', fontsize=16)
113 plt.annotate(r '$>$',xy=(1.94, -0.035), xycoords='data', fontsize=16)
114 ax = plt.axes()
115 ax.spines['bottom'].set_linewidth(2)
116 ax.spines['left'].set_linewidth(2)
117 ax.spines['top'].set_visible(False)
118 ax.spines['right'].set_visible(False)
119 ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
120 ax.yaxis.set_ticks_position('left')
121 ax.xaxis.set_ticks([0, 0, np.pi, 3*np.pi/2, 2*np.pi])
122 ax.xaxis.set_ticklabels(['$ $', '$ $', '$ $', '$ $', '$r/r_s$'])
123 ax.yaxis.set_ticks([-1, -0.5, 0, 0.5, 1])
124 ax.yaxis.set_ticklabels(['$ $', '$ $', '$ $', '$ $', '$ $' '$g_{tt}$'])
125 ax.tick_params(labelsize=14)
126
127 ax = plt.gca() # gca stands for 'get current axis'
128 ax.spines['right'].set_color('none')
129 ax.spines['top'].set_color('none')
130 ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
131 ax.spines['bottom'].set_position(('data',0))
132 ax.yaxis.set_ticks_position('left')
133 ax.spines['left'].set_position(('data',0))
134
135 plt.xlim(0,2)
136 plt.ylim(-0.8, 1)
137 plt.legend(loc='lower right')
138 plt.savefig('Horizontes.pdf')

```

A.1.2. Gráficos en Python de los resultados en Comsol

Se Muestra el código que lee un archivo de Excel que contiene la solución puntual y sus coordenadas, para recrear en Python la solución de la distribución de campo eléctrico en el metamaterial que se obtuvo en Comsol.

```

1 import numpy as np
2 import pandas as pd
3 import requests
4 import os
5 import math
6 import matplotlib.pyplot as plt
7 from matplotlib import cm
8 from matplotlib.ticker import LinearLocator
9 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

```



```

10 from scipy import interpolate
11 from scipy.interpolate import griddata
12
13 #ANALISIS DE DATOS EN COMSOL SCHWARZSCHILD
14
15 dat1= pd.read_excel('b1new.xlsx')
16 dat1=np.array(dat1)
17
18 dat2= pd.read_excel('b2.xlsx')
19 dat2=np.array(dat2)
20
21 datp_s= pd.read_excel('b26new.xlsx')
22 datp_s=np.array(datp_s)
23
24 dat3= pd.read_excel('b3.xlsx')
25 dat3=np.array(dat3)
26
27 malla_x=800
28 malla_y=800
29 L=7
30
31 def den_funcion(dat, malla_x, malla_y, L):
32     x=dat[:,0]
33     y=dat[:,1]
34     z=dat[:,2]
35     den=np.zeros([malla_x, malla_y])
36     z_new=np.zeros([malla_x, malla_y])
37     z_final=np.zeros([malla_x, malla_y])
38     x=x*malla_x/L
39     y=y*malla_x/L
40     for i in range(len(x)):
41         a=int(int(x[i])+malla_x/2-1)
42         b=-int(int(y[i])+malla_y/2-1)
43         den[a,b]=den[a,b]+1
44         z_new[a,b]=z_new[a,b]+z[i]
45         z_final[b,a]=z_new[a,b]/den[a,b]
46     return z_final
47
48 S1=den_funcion(dat1,350,350,L)
49 S2=den_funcion(dat2, malla_x, malla_y, L)
50 S3=den_funcion(dat3, malla_x, malla_y, L)
51 Sp_s=den_funcion(datp_s,600,600,L)
52
53 plt.figure(figsize=(14,14))
54
55 plt.subplot(221)
56 plt.imshow(S1, interpolation='bilinear', cmap='jet', extent=(-3.5,3.5,-3.5,3.5))
57 plt.xlabel("$x/r_s$", fontsize=15, color='black')
58 plt.ylabel("$y/r_s$", fontsize=15, color='black')
59 plt.plot(sol1[0], sol1[1], color='white', linewidth=3)
60 plt.xlim(-3.5, 3.5)
61 plt.ylim(-3.5, 3.5)
62 plt.xticks([-3.0, -2, -1, 0,1,2,3], fontsize=10, color='black')
63 plt.yticks([-3.0, -2, -1, 0,1,2,3], fontsize=10, color='black')
64 plt.title(r"$b=1r_s$", fontsize=15, color='black', verticalalignment='
        baseline', horizontalalignment='center')
65 #plt.plot(z,z)

```

```

66 plt.text(-3.4, 3.2, "a", fontsize=14, color = 'white')
67 draw_circle = plt.Circle((0.0, 0.0), 1.05, fill=False, color='white', linewidth=2,
    linestyle="solid")
68 plt.gcf().gca().add_artist(draw_circle)
69 draw_circle = plt.Circle((0.0, 0.0), 1.5, fill=False, color='white', linewidth=1.5,
    linestyle="dashed")
70 plt.gcf().gca().add_artist(draw_circle)
71
72 plt.subplot(222)
73 plt.imshow(S2, interpolation='bilinear', cmap='jet', extent=(-3.5, 3.5, -3.5, 3.5))
74 plt.xlabel("$x/r_s$", fontsize=15, color = 'black')
75 plt.ylabel("$y/r_s$", fontsize=15, color = 'black')
76 plt.plot(sol2[0], sol2[1], color='white', linewidth=3)
77 #plt.plot(XX, YY, color='white', linewidth=3)
78 plt.xlim(-3.5, 3.5)
79 plt.ylim(-3.5, 3.5)
80 plt.xticks([-3.0, -2, -1, 0, 1, 2, 3], fontsize=10, color = 'black')
81 plt.yticks([-3.0, -2, -1, 0, 1, 2, 3], fontsize=10, color = 'black')
82 plt.title(r"$b=2r_s$", fontsize = 15, color = 'black', verticalalignment = '
    baseline', horizontalalignment = 'center')
83 plt.text(-3.4, 3.2, "b", fontsize=14, color = 'white')
84 draw_circle = plt.Circle((0.0, 0.0), 1.05, fill=False, color='white', linewidth=2,
    linestyle="solid")
85 plt.gcf().gca().add_artist(draw_circle)
86 draw_circle = plt.Circle((0.0, 0.0), 1.5, fill=False, color='white', linewidth=1.5,
    linestyle="dashed")
87 plt.gcf().gca().add_artist(draw_circle)
88
89 plt.subplot(223)
90 plt.imshow(Sp_s, interpolation='bilinear', cmap='jet', extent=(-3.5, 3.5, -3.5, 3.5))
91 plt.xlabel("$x/r_s$", fontsize=15, color = 'black')
92 plt.ylabel("$y/r_s$", fontsize=15, color = 'black')
93 plt.plot(sol3[0], sol3[1], color='white', linewidth=3)
94 plt.xlim(-3.5, 3.5)
95 plt.ylim(-3.5, 3.5)
96 plt.xticks([-3.0, -2, -1, 0, 1, 2, 3], fontsize=10, color = 'black')
97 plt.yticks([-3.0, -2, -1, 0, 1, 2, 3], fontsize=10, color = 'black')
98 plt.title(r"$b=2.6r_s$", fontsize = 15, color = 'black', verticalalignment = '
    baseline', horizontalalignment = 'center')
99 plt.text(-3.4, 3.2, "c", fontsize=14, color = 'white')
100 draw_circle = plt.Circle((0.0, 0.0), 1.05, fill=False, color='white', linewidth=2,
    linestyle="solid")
101 plt.gcf().gca().add_artist(draw_circle)
102 draw_circle = plt.Circle((0.0, 0.0), 1.5, fill=False, color='white', linewidth=1.5,
    linestyle="dashed")
103 plt.gcf().gca().add_artist(draw_circle)
104
105 plt.subplot(224)
106 plt.imshow(S3, interpolation='bilinear', cmap='jet', extent=(-3.5, 3.5, -3.5, 3.5))
107 plt.xlabel("$x/r_s$", fontsize=15, color = 'black')
108 plt.ylabel("$y/r_s$", fontsize=15, color = 'black')
109 plt.plot(sol4[0], sol4[1], color='white', linewidth=3)
110 plt.xlim(-3.5, 3.5)
111 plt.ylim(-3.5, 3.5)
112 plt.xticks([-3.0, -2, -1, 0, 1, 2, 3], fontsize=10, color = 'black')
113 plt.yticks([-3.0, -2, -1, 0, 1, 2, 3], fontsize=10, color = 'black')

```

```

114 plt.title(r"$b=3r_s$", fontsize = 15, color = 'black', verticalalignment = '
    baseline', horizontalalignment = 'center')
115 plt.text(-3.4, 3.2, "d)", fontsize=14, color = 'white')
116 draw_circle = plt.Circle((0.0, 0.0), 1.05, fill=False, color='white', linewidth=2,
    linestyle="solid")
117 plt.gcf().gca().add_artist(draw_circle)
118 draw_circle = plt.Circle((0.0, 0.0), 1.5, fill=False, color='white', linewidth=1.5,
    linestyle="dashed")
119 plt.gcf().gca().add_artist(draw_circle)
120 #cax = plt.axes([.93, 0.1, 0.024, 0.8])
121 cax = plt.axes([.113, .055, 0.8, 0.02])
122 plt.colorbar(cax=cax, orientation="horizontal")
123
124 plt.savefig('Grafica1.pdf')
125 plt.show()
126
127
128 #ANALISIS DE DATOS EN COMSOL REISSNER NORDSTROM
129
130 dat26RN= pd.read_excel('b26RN-qmin.xlsx')
131 dat26RN=np.array(dat26RN)
132
133 dat2RN= pd.read_excel('b2RN-qmax.xlsx')
134 dat2RN=np.array(dat2RN)
135
136 dat1RN= pd.read_excel('RN_2.5bnew.xlsx')
137 dat1RN=np.array(dat1RN)
138
139 dat2RNmin= pd.read_excel('b2RN-qmin.xlsx')
140 dat2RNmin=np.array(dat2RNmin)
141
142 malla_x=800
143 malla_y=800
144 L=7
145
146 S2p6RN=den_funcion(dat26RN, malla_x, malla_y, L)
147 S2RN=den_funcion(dat2RN, malla_x, malla_y, L)
148 S2RNmin=den_funcion(dat2RNmin, malla_x, malla_y, L)
149 S1RN=den_funcion(dat1RN, 600, 600, L)
150
151 plt.figure(figsize=(14,14))
152
153 plt.subplot(221)
154 plt.imshow(Sp_s, interpolation='bilinear', cmap='jet', extent=(-3.5,3.5,-3.5,3.5))
155 plt.xlabel("$x/r_s$", fontsize=15, color = 'black')
156 plt.ylabel("$y/r_s$", fontsize=15, color = 'black')
157 plt.plot(sol1R[0], sol1R[1], color='white', linewidth=3)
158 plt.xlim(-3.5, 3.5)
159 plt.ylim(-3.5, 3.5)
160 plt.xticks([-3.0, -2, -1, 0, 1, 2, 3], fontsize=10, color = 'black')
161 plt.yticks([-3.0, -2, -1, 0, 1, 2, 3], fontsize=10, color = 'black')
162 plt.title(r"$b=2.6r_s, \ q=\frac{r_s}{\infty}$", fontsize = 15, color = 'black',
    verticalalignment = 'baseline', horizontalalignment = 'center')
163 plt.text(-3.4, 3.2, "a)", fontsize=14, color = 'white')
164 draw_circle = plt.Circle((0.0, 0.0), 1.07, fill=False, color='white', linewidth
    =2.5, linestyle="solid")
165 plt.gcf().gca().add_artist(draw_circle)

```

```

166 draw_circle = plt.Circle((0.0, 0.0), 1.5, fill=False, color='white', linewidth=1.5,
    linestyle="dashed")
167 plt.gcf().gca().add_artist(draw_circle)
168
169 plt.subplot(222)
170 plt.imshow(S2RNmin, interpolation='bilinear', cmap='jet', extent=(-3.5, 3.5, -3.5, 3.5)
    )
171 plt.xlabel("$x/r_s$", fontsize=15, color = 'black')
172 plt.ylabel("$y/r_s$", fontsize=15, color = 'black')
173 plt.xlim(-3.5, 3.5)
174 plt.ylim(-3.5, 3.5)
175 plt.plot(sol2R[0], sol2R[1], color='white', linewidth=3)
176 plt.xticks([-3.0, -2, -1, 0, 1, 2, 3], fontsize=10, color = 'black')
177 plt.yticks([-3.0, -2, -1, 0, 1, 2, 3], fontsize=10, color = 'black')
178 plt.title(r"$b=2r_s, \ q=\frac{r_s}{\infty}$", fontsize = 15, color = 'black',
    verticalalignment = 'baseline', horizontalalignment = 'center')
179 plt.text(-3.4, 3.2, "c", fontsize=14, color = 'white')
180 draw_circle = plt.Circle((0.0, 0.0), 1.1, fill=False, color='white', linewidth=2.5,
    linestyle="solid")
181 plt.gcf().gca().add_artist(draw_circle)
182 draw_circle = plt.Circle((0.0, 0.0), 1.5, fill=False, color='white', linewidth=1.5,
    linestyle="dashed")
183 plt.gcf().gca().add_artist(draw_circle)
184
185
186 plt.subplot(223)
187 plt.imshow(S2RN, interpolation='bilinear', cmap='jet', extent=(-3.5, 3.5, -3.5, 3.5))
188 plt.xlabel("$x/r_s$", fontsize=15, color = 'black')
189 plt.ylabel("$y/r_s$", fontsize=15, color = 'black')
190 plt.plot(sol3R[0], sol3R[1], color='white', linewidth=3)
191 plt.xlim(-3.5, 3.5)
192 plt.ylim(-3.5, 3.5)
193 plt.xticks([-3.0, -2, -1, 0, 1, 2, 3], fontsize=10, color = 'black')
194 plt.yticks([-3.0, -2, -1, 0, 1, 2, 3], fontsize=10, color = 'black')
195 plt.title(r"$b=2r_s, \ q=\frac{r_s}{2}$", fontsize = 15, color = 'black',
    verticalalignment = 'baseline', horizontalalignment = 'center')
196 plt.text(-3.4, 3.2, "b", fontsize=14, color = 'white')
197 draw_circle = plt.Circle((0.0, 0.0), .5+0.05*3, fill=False, color='white',
    linewidth=2, linestyle="solid")
198 plt.gcf().gca().add_artist(draw_circle)
199 draw_circle = plt.Circle((0.0, 0.0), .65*1.5, fill=False, color='white', linewidth
    =1.5, linestyle="dashed")
200 plt.gcf().gca().add_artist(draw_circle)
201
202
203 plt.subplot(224)
204 plt.imshow(S1RN, interpolation='bilinear', cmap='jet', extent=(-3.5, 3.5, -3.5, 3.5))
205 plt.xlabel("$x/r_s$", fontsize=15, color = 'black')
206 plt.ylabel("$y/r_s$", fontsize=15, color = 'black')
207 plt.plot(sol4R[0], sol4R[1], color='white', linewidth=3)
208 plt.xlim(-3.5, 3.5)
209 plt.ylim(-3.5, 3.5)
210 plt.xticks([-3.0, -2, -1, 0, 1, 2, 3], fontsize=10, color = 'black')
211 plt.yticks([-3.0, -2, -1, 0, 1, 2, 3], fontsize=10, color = 'black')
212 plt.text(-3.4, 3.2, "d", fontsize=14, color = 'white')
213 plt.title(r"$b=2.5r_s, \ q=\frac{r_s}{2}$", fontsize = 15, color = 'black',
    verticalalignment = 'baseline', horizontalalignment = 'center')

```

```

214 draw_circle = plt.Circle((0.0, 0.0), .5+0.05*3, fill=False, color='white',
    linewidth=2, linestyle="solid")
215 plt.gcf().gca().add_artist(draw_circle)
216 draw_circle = plt.Circle((0.0, 0.0), .65*1.5, fill=False, color='white', linewidth
    =1.5, linestyle="dashed")
217 plt.gcf().gca().add_artist(draw_circle)
218
219
220 cax = plt.axes([.113, .055, 0.8, 0.02])
221 #cax = plt.axes([.93, 0.1, 0.024, 0.8])
222 plt.colorbar(cax=cax, orientation="horizontal")
223
224 plt.savefig('Grafica2.pdf')
225 plt.show()

```

A.1.3. Runge Kutta 4to orden para resolver las ecuaciones de Geodésicas

Se muestra la programación del método de Runge Kutta hasta 4to orden para las soluciones de las Ecs.(5.6)

```

1 import numpy as np
2 import pandas as pd
3 import requests
4 import os
5 import math
6 import matplotlib.pyplot as plt
7 from matplotlib import cm
8 from matplotlib.ticker import LinearLocator
9 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
10 from scipy import interpolate
11 from scipy.interpolate import griddata
12
13 #RGK SOLUCION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES
14
15 def geodesicas(d,l,rs,n,ti,tf,z0,y0,q):
16     h=(tf-ti)/n
17     time1=list(range(0,n+1));
18     y=list(range(0,n+1))
19     z=list(range(0,n+1))
20     r=list(range(0,n+1))
21     y[0]=y0
22     z[0]=z0
23     r[0]=1/z0
24     time1[0]=ti
25     m=rs/2
26     rh=rs/2+np.sqrt(rs**2-4*q**2)/2
27     for i in range(0,len(time1)-1):
28         time1[i+1]=time1[i]+h
29         k1=h*y[i]
30         l1=h*(3*m*z[i]**2-z[i]-2*(q**2)*(z[i]**3))
31         k2=h*(y[i]+l1/2)
32         l2=h*(3*m*(z[i]+k1/2)**2-(z[i]+k1/2)-2*(q**2)*((z[i]+k1/2)**3))
33         k3=h*(y[i]+l2/2)
34         l3=h*(3*m*(z[i]+k2/2)**2-(z[i]+k2/2)-2*(q**2)*((z[i]+k2/2)**3))
35         k4=h*(y[i]+l3)

```

```

36         l4=h*(3*m*(z[i]+k3/2)**2-(z[i]+k3/2)-2*(q**2)*((z[i]+k3/2)**3))
37         z[i+1]=(z[i]+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4))
38         y[i+1]=y[i]+(1/6)*(l1+2*l2+2*l3+l4)
39         r[i+1]=1/z[i]
40
41     x_graf=r*np.cos(time1)
42     y_graf=r*np.sin(time1)
43     for j in range(0,len(time1)-1):
44         #if x_graf[j]<-1/2 or y_graf[j]<-1/2 or r[j]<1 or x_graf[j]>1/2 or y_graf
45         [j]>1/2:
46             if r[j]<rh:
47                 x_graf[j]=np.nan
48                 y_graf[j]=np.nan
49             return x_graf,y_graf,time1
50 l=7                #longitud del cuadrado
51 q=0
52 d1=1.06
53 n=5000
54 rs=1
55 ti=np.arctan(d1/(1/2))
56 tf=ti+1*np.pi
57 z0=1/np.sqrt((1/2)**2+d1**2)
58 y0=(np.sin(np.pi/(2)))/np.sqrt((1/2)**2+d1**2)
59 sol1=geodesicas(d1,l,rs,n,ti,tf,z0,y0,q)
60
61 d2=1.98
62 rs=1
63 ti=np.arctan(d2/(1/2))
64 tf=ti+1*np.pi
65 z0=1/np.sqrt((1/2)**2+d2**2)
66 y0=(np.sin(np.pi/(2)))/np.sqrt((1/2)**2+d2**2)
67 sol2=geodesicas(d2,l,rs,n,ti,tf,z0,y0,q)
68
69 d3=2.58
70 rs=1
71 ti=np.arctan(d3/(1/2))
72 tf=ti+3*np.pi
73 z0=1/np.sqrt((1/2)**2+d3**2)
74 y0=(np.sin(np.pi/(2)))/np.sqrt((1/2)**2+d3**2)
75 sol3=geodesicas(d3,l,rs,n,ti,tf,z0,y0,q)
76
77 d4=2.82
78 rs=1
79 ti=np.arctan(d4/(1/2))
80 tf=ti+1.5*np.pi
81 z0=1/np.sqrt((1/2)**2+d4**2)
82 y0=(np.sin(np.pi/(2)))/np.sqrt((1/2)**2+d4**2)
83 sol4=geodesicas(d4,l,rs,n,ti,tf,z0,y0,q)
84
85
86 plt.figure(figsize=(10,10))
87 draw_circle = plt.Circle((0.0, 0.0), rs ,fill=False, color='black',linewidth=2,
88     linestyle="solid")
89 plt.gca().add_artist(draw_circle)
90 plt.xlim(-3.5, 3.5)
91 plt.ylim(-3.5, 3.5)

```

```
91 plt.plot(sol1[0], sol1[1], color='red', label="b=1")
92 plt.plot(sol2[0], sol2[1], color='blue', label="b=2")
93 plt.plot(sol3[0], sol3[1], color='green', label="$b=b_c$")
94 plt.plot(sol4[0], sol4[1], color='yellow', label="b=3")
95 plt.legend(loc='upper left')
96 plt.xlabel("$x/r_s$", fontsize=15, color='black')
97 plt.ylabel("$y/r_s$", fontsize=15, color='black')
98 plt.savefig('RGK-S.pdf')
```

Bibliografía

- [1] I. Fernández-Núñez and O. Bulashenko, “Anisotropic metamaterial as an analogue of a black hole,” *Physics Letters A*, vol. 380, no. 1-2, pp. 1–8, 2016.
- [2] T. J. Cui, D. R. Smith, and R. Liu, *Metamaterials*. Springer, 2010.
- [3] I. Fernández Núñez *et al.*, *Wave propagation in metamaterials mimicking spacetime geometry: black holes and cosmic strings*. PhD thesis, Universitat de Barcelona, 2018.
- [4] R. A. d’Inverno, *Introducing Einstein’s relativity*. Clarendon Press, 1992.
- [5] L. A. Godoy, “Sobre la estructura de las analogías en ciencias,” *Interciencia*, vol. 27, no. 8, pp. 422–429, 2002.
- [6] L. M. Castellanos, F. López, and E. Reyes-Vera, “Metamateriales: principales características y aplicaciones,” *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, vol. 40, no. 156, pp. 395–401, 2016.
- [7] S. M. Carroll, “Lecture notes on general relativity,” *arXiv preprint gr-qc/9712019*, 1997.
- [8] H. Iass, *Análisis vectorial y tensorial*. CECSA, 1969.
- [9] I. S. Sokolnikoff and M. Walker, “Tensor analysis: theory and applications,” *American Journal of Physics*, vol. 20, no. 4, pp. 249–250, 1952.
- [10] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.
- [11] H. Schwartz, “Einstein’s comprehensive 1907 essay on relativity, part i,” *American Journal of Physics*, vol. 45, no. 6, pp. 512–517, 1977.
- [12] H. Schwartz, “Einstein’s comprehensive 1907 essay on relativity, part ii,” *American Journal of Physics*, vol. 45, no. 9, pp. 811–817, 1977.
- [13] H. Schwartz, “Einstein’s comprehensive 1907 essay on relativity, part iii,” *American Journal of Physics*, vol. 45, no. 10, pp. 899–902, 1977.
- [14] J. D. Norton, “General covariance and the foundations of general relativity: eight decades of dispute,” *Reports on progress in physics*, vol. 56, no. 7, p. 791, 1993.
- [15] I. Ciufolini and J. A. Wheeler, *Gravitation and inertia*, vol. 101. Princeton university press, 1995.
- [16] B. Schutz, *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009.
- [17] A. Einstein, “The field equations of gravitation,” *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, vol. 1915, pp. 844–847, 1915.

- [18] A. Einstein, “Erklärung der perihelionbewegung der merkur aus der allgemeinen relativitätstheorie,” *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss.*, vol. 47, pp. 831–839, 1915.
- [19] K. Schwarzschild, “Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie,” *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pp. 189–196, 1916.
- [20] S. Chandrasekhar, *The mathematical theory of black holes*, vol. 69. Oxford University Press, 1998.
- [21] D. McMahon, *Relativity demystified*. Tata McGraw-Hill Education, 2006.
- [22] S. Hacyan, *Los hoyos negros y la curvatura del espacio tiempo*. Fondo de Cultura Económica, 2012.
- [23] G. Lemaître, “L’univers en expansion,” in *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, vol. 53, p. 51, 1933.
- [24] J. Nordebo, “The reissner-nordström metric,” 2016.
- [25] H.-J. Schmidt, “Schwarzschild and synge once again,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 37, no. 6, pp. 1157–1158, 2005.
- [26] J. L. Synge, “The gravitational field of a particle,” in *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences*, vol. 53, pp. 83–114, JSTOR, 1950.
- [27] J. Eisenstaedt, “The early interpretation of the schwarzschild solution,” 1989.
- [28] A. Gsponer, “More on the early interpretation of the schwarzschild solution,” *arXiv preprint physics/0408100*, 2004.
- [29] C. Lanczos, “Ein vereinfachendes koordinatensystem für die einsteinschen gravitationsgleichungen,” *Phys. Z.*, vol. 23, pp. 537–539, 1922.
- [30] H. Reissner, “Über die eigengravitation des elektrischen feldes nach der einsteinschen theorie,” *Annalen der Physik*, vol. 355, no. 9, pp. 106–120, 1916.
- [31] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 2007.
- [32] D. J. Griffiths, “Introduction to electrodynamics,” 2005.
- [33] W. K. Panofsky and M. Phillips, *Classical electricity and magnetism*. Courier Corporation, 2005.
- [34] U. Leonhardt and T. Philbin, *Geometry and light: the science of invisibility*. Courier Corporation, 2010.
- [35] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. Macmillan, 1973.
- [36] V. Red’kov, N. Tokarevskaya, B. EM, and G. J. Spix, “Maxwell equations in riemannian space-time, geometrical modeling of medias,”
- [37] L. D. Landau, J. Bell, M. Kearsley, L. Pitaevskii, E. Lifshitz, and J. Sykes, *Electrodynamics of continuous media*, vol. 8. elsevier, 2013.

- [38] J. Plebanski, “Electromagnetic waves in gravitational fields,” *Physical Review*, vol. 118, no. 5, p. 1396, 1960.
- [39] W. Frei, “modeling-laser-material-interactions-in-comsol-multiphysics.” [urlhttps://www.comsol.com/blogs/modeling-laser-material-interactions-in-comsol-multiphysics/](https://www.comsol.com/blogs/modeling-laser-material-interactions-in-comsol-multiphysics/), 2015.
- [40] Y. Liu, B. Gralak, and S. Guenneau, “Finite element analysis of electromagnetic waves in two-dimensional transformed bianisotropic media,” *Optics express*, vol. 24, no. 23, pp. 26479–26493, 2016.
- [41] C. Multiphysics, “Comsol multiphysics reference manual,” *COMSOL: Grenoble, France*, p. 1084, 2013.
- [42] H. Chen, R.-X. Miao, and M. Li, “Transformation optics that mimics the system outside a schwarzschild black hole,” *Optics express*, vol. 18, no. 14, pp. 15183–15188, 2010.
- [43] E. E. Narimanov and A. V. Kildishev, “Optical black hole: Broadband omnidirectional light absorber,” *Applied Physics Letters*, vol. 95, no. 4, p. 041106, 2009.
- [44] Q. Cheng, T. J. Cui, W. X. Jiang, and B. G. Cai, “An omnidirectional electromagnetic absorber made of metamaterials,” *New Journal of Physics*, vol. 12, no. 6, p. 063006, 2010.
- [45] Y. Yang, L. Y. Leng, N. Wang, Y. Ma, and C. Ong, “Electromagnetic field attractor made of gradient index metamaterials,” *JOSA A*, vol. 29, no. 4, pp. 473–475, 2012.
- [46] M. Yin, X. Y. Tian, L. L. Wu, *et al.*, “A broadband and omnidirectional electromagnetic wave concentrator with gradient woodpile structure,” *Optics Express*, vol. 21, no. 16, pp. 19082–19090, 2013.
- [47] S. Andrew, “2 methods for simulating radiated fields in comsol multiphysics.” [urlhttps://www.comsol.com/blogs/2-methods-for-simulating-radiated-fields-in-comsol-multiphysics/](https://www.comsol.com/blogs/2-methods-for-simulating-radiated-fields-in-comsol-multiphysics/), 2017.
- [48] W. Frei, “Using perfectly matched layers and scattering boundary conditions for wave electromagnetics problems.” [urlhttps://www.comsol.com/blogs/using-perfectly-matched-layers-and-scattering-boundary-conditions-for-wave-electromagnetics-problems/](https://www.comsol.com/blogs/using-perfectly-matched-layers-and-scattering-boundary-conditions-for-wave-electromagnetics-problems/), 2015.
- [49] M. Yosuke, “Understanding the paraxial gaussian beam formula.” [urlhttps://www.comsol.com/blogs/understanding-the-paraxial-gaussian-beam-formula/](https://www.comsol.com/blogs/understanding-the-paraxial-gaussian-beam-formula/), 2016.
- [50] C. Totorial, “Gaussian beam incident at the brewster angle.” [urlhttps://www.comsol.com/model/gaussian-beam-incident-at-the-brewster-angle-17093](https://www.comsol.com/model/gaussian-beam-incident-at-the-brewster-angle-17093), 2016.
- [51] A. COMSOL, “Wave optics module user’s guide, comsol multiphysics® v. 5.3 a,” *Stockholm, Sweden*, pp. 38–46, 2017.
- [52] A. Chowdhury, S. Clayton, and M. Lemma, “Numerical solutions of nonlinear ordinary differential equations by using adaptive runge-kutta method,” *Journal of Advances in Mathematics*, vol. 17, 2019.

-
- [53] J. Ponce de Leon, “Regular reis sner-nordström black hole solutions from linear electrodynamics,” *Physical Review D*, vol. 95, 06 2017.

UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATO

Agosto 18, 2021

Asunto: Carta de revisión de tesis de Marco Antonio García Sánchez

Dr. DAVID DELEPINE
DIRECTOR DE LA DIVISION DE CIENCIAS E INGENIERIAS
CAMPUS LEÓN
UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
P R E S E N T E

Estimado Dr. Delepine,

En mi calidad de director de tesis del estudiante de Maestría Marco Antonio García Sánchez (NUA: 389713) y además miembro del comité de sinodales como suplente, por este medio informo a usted que he revisado la tesis titulada *"Metamateriales análogos a agujeros negros y electrodinámica en espacios curvos"* que realizó Marco Antonio con el fin de obtener el grado de Maestro en Física.

El trabajo de Marco Antonio posee el contenido y la relevancia necesaria como trabajo de investigación y Marco ha considerado e implementado las correcciones sugeridas por un servidor. Considero que su trabajo de tesis está listo para ser defendido públicamente.

Sin más por el momento, me despido de usted con un cordial saludo.

Dr. José Luis López-Picón
Departamento de Física
División de Ciencias e Ingenierías, Campus León
Universidad de Guanajuato
email: jl_lopez@fisica.ugto.mx



León, Gto, 31 de Agosto de 2021

Asunto: Carta liberación Marco Antonio García Sánchez

Dr. David Delepinde
Director de la DCI

Como sinodal del estudiante C. **Marco Antonio García Sánchez**, me permito comentar que he leído el manuscrito de su tesis de maestría, *Metamateriales análogos a agujeros negros y electrodinámica en espacios curvos*. Considero que el trabajo realizado está al nivel de una Maestría en Física, por lo me permito recomendar que haga los trámites administrativos correspondientes para que se presente lo más pronto posible.

“LA VERDAD OS HARA LIBRES”

A handwritten signature in blue ink, appearing to be "J. Socorro García Díaz".

Dr. José Socorro García Díaz
Sinodal



Asunto: Revisión de Tesis de maestría.

León, Gto., a 28 de Junio del 2021.

Dr. David Delepine
Director de la DCI-UG
Campus León.

Por medio de la presente quiero responder a la solicitud de revisión del trabajo de tesis titulado: ***“Metamateriales análogos a agujeros negros y electrodinámica en espacios curvos”***, realizado por Marco Antonio García Sánchez.

Después de leer el trabajo en cual el objetivo se centra en utilizar las ecuaciones de Maxwell para simular soluciones de agujeros negros e interpretándolas como metamateriales. El trabajo es interesante y hay perspectivas de utilizar esta formulación para nuevos sistemas de agujeros negros.

Por lo mencionado anteriormente creo que el trabajo de tesis es acorde para obtener el grado de maestro en física y esta listo para defensa pública.

Sin más por el momento

Atentamente


Dr. Oscar Miguel Sabido Moreno.

C.c.p. Archivo

DIVISION DE CIENCIAS E INGENIERÍAS, CAMPUS LEÓN

Loma del Bosque 103, Fracc. Lomas del Campestre C.P. 37150 León, Gto., Ap. Postal E-143 C.P. 37000 Tel. (477) 788-5100
Fax: (477) 788-5100 ext. 8410, <http://www.fisica.ugto.mx>

UNIVERSIDAD DE
GUANAJUATOLeón, Gto., a 3 de septiembre de 2021
Asunto: **Revisión de Tesis**

DR. DAVID YVES GHISLAIN DELEPINE
DIRECTOR
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERIAS
CL -UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

A través de la presente constato que he revisado la tesis del C. **Marco Antonio García Sánchez** con el fin de obtener el grado de Maestría en Física. Su trabajo de tesis se titula “**Metamateriales análogos a agujeros negros y electrodinámica en espacios curvos**”. En su trabajo de investigación, Marco desarrolla los cálculos de los tensores de permitividad eléctrica y de permeabilidad magnética en espacio curvo, para un material análogo a un agujero negro en usando las métricas de Schwarzschild y de Reissner-Nordström. También desarrolló el modelado y cálculo numérico en COMSOL de la interacción de un haz de luz gaussiano con un metamaterial con estas características para demostrar el potencial de su teoría. El trabajo de titulación satisface con la completez y solidez de un proyecto de titulación a nivel maestría. Marco ha realizado las correcciones recomendadas al documento de la tesis. Además, he cuestionado a Marco en los temas relacionados a su trabajo de tesis, demostrando su dominio en los temas abordados en su trabajo de tesis. Por lo que considero que ya puede proceder con los trámites para la disertación de tesis.

Sin más por el momento le envío saludos cordiales.

Atentamente

Dr. Carlos Herman Wiechers Medina
Profesor-Investigador

Tel. +52 (477) 7885100 Ext. 8467
Cel. +52 (477) 1080605
e-mail 1: carherwm@fisica.ugto.mx
e-mail 2: ch.wiechers@ugto.mx

División de Ciencias e Ingenierías
Loma del Bosque # 103, Col. Loma del Campestre. León, Guanajuato, México. C. P. 37150
Tel: +52 (477) 7885100 Exts. 8420 y 8421, Fax. Ext. 8410. www.dci.ugto.mx