

CONTROLO POR COMPUTADOR  
CComp

---

## Relatório - Parte 2

---

### GRUPO 17

Rodrigo RAMOS	81699
Rui CORREIA	90823
Tomás CARNEIRO	81484

DOCENTE: João Pedro Gomes

27 de Dezembro de 2017

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Scripts</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Design LQG</b>	<b>5</b>
3.1	Regulador óptimo . . . . .	5
3.2	Estimador dos estados . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Simulações e Testes</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Resposta no tempo e em frequência em malha fechada</b>	<b>12</b>
<b>6</b>	<b>Efeito da inclusão de pré-filtragem</b>	<b>13</b>
<b>7</b>	<b>Desempenho e limites do sistema de controlo</b>	<b>15</b>
<b>8</b>	<b>Conclusão</b>	<b>18</b>

# 1 Introdução

Este relatório insere-se no âmbito da parte experimental da unidade curricular de Controlo por Computador.

O objetivo deste trabalho laboratorial consiste no controlo da ponta de uma barra flexível acoplada a um motor de corrente contínua. Para tal o trabalho encontra-se dividido em duas partes: Parte 1 e Parte 2.

Na primeira parte deste trabalho procedeu-se à identificação do modelo que descreve a dinâmica do sistema *barra + motor*, o qual pretendemos controlar.

Nesta segunda parte do trabalho e utilizando o modelo identificado anteriormente, vai-se desenvolver um controlador LQG capaz de controlar a posição da ponta da barra. Convém relembrar que o único input do sistema é a tensão aplicada ao motor e que também não temos acesso direto ao estado do sistema.

O desenvolvimento do controlador vai ser feito com recurso ao programa *MATLAB*, no qual as ferramentas presentes na *Control System Toolbox* serão particularmente importantes.

## 2 Scripts

### Script Utilizado para correr simulações

```
% System State-Space
A = [3.11506910744011 -3.74010634305672 2.06382118501694
     -0.438783949400328; 1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0];
B = [1;0;0;0];
C = [-0.0767099115028891 0.161398714293952 0 0];
D = [0];

% LQR
Q = C'*C;
R = 100;
[K,~,p] = dlqr(A,B,Q,R);

% LQE
Qe = 100*eye(4);
Re = 1;
[M,~,~,pe] = dlqe(A,eye(4),C,Qe,Re);

% Pre-filter
N = inv([A-eye(4,4), B; C,0])*[zeros(4,1);1];
Nx = N(1:4,:);
Nu = N(5,:);
Nbar = Nu+K*Nx;

% Open Simulink
open_system('LQG.slx');

% Set Parameters of Signal Generator
set_param('LQG/Signal Generator','Waveform','square');
set_param('LQG/Signal Generator','Amplitude','90');
set_param('LQG/Signal Generator','Frequency','2');

% Simulate
sim('LQG.slx');
```

Figura 1: Script Utilizado para correr simulações

## Script Utilizado para correr testes na planta

```
% Sensor Data Conversion
PotentiometerGain = 180/5.3145;
ExtensometerGain = -3.1481;

% System State-Space
A = [3.11506910744011 -3.74010634305672 2.06382118501694
     -0.438783949400328; 1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0];
B = [1;0;0;0];
C = [-0.0767099115028891 0.161398714293952 0 0];
D = [0];

% LQR
Q = C'*C;
R = 100;
[K,~,p] = dlqr(A,B,Q,R);

% LQE
Qe = 100*eye(4);
Re = 1;
[M,~,~,pe] = dlqe(A,eye(4),C,Qe,Re);

% Integrator
Int_gain = 0.1;

% Pre-filter
N = inv([A-eye(4,4), B; C,0])*[zeros(4,1);1];
Nx = N(1:4,:);
Nu = N(5,:);
Nbar = Nu+K*Nx;

% Open Simulink
open_system('LQG.slx');

% Set Parameters of Signal Generator
set_param('LQG/Signal Generator','Waveform','square');
set_param('LQG/Signal Generator','Amplitude','90');
set_param('LQG/Signal Generator','Frequency','2');

% Simulate
sim('LQG.slx');
```

Figura 2: Script Utilizado para correr testes na planta

## 3 Design LQG

### 3.1 Regulador óptimo

Neste design, o regulador ótimo (LQR) irá gerar a variável  $u$  para o modelo de estado abaixo:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \quad (1)$$

$$y(k) = Kx(k) \quad (2)$$

A lei de controlo LQ, para a variável manipulada  $u$ , consiste em minimizar um custo quadrático dado por

$$J(k) = \sum_{k=0}^{\infty} (x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)) \quad (3)$$

O resultado da minimização do custo anterior será a definição de um vetor de ganhos  $K$  (com dimensão  $1 \times n$ ).  $K$  é um vetor já que existe apenas uma entrada e tem dimensão  $n$  igual ao número de estados existentes. A realimentação será dada por:

$$u(k) = -Kx(k) \quad (4)$$

O vetor  $K$  é definido pelas equações (a segunda equação chama-se equação de Riccati):

$$K = (B^T S B + R)^{-1} B^T S A \quad (5)$$

$$A^T S A - A^T S B (B^T S B + R)^{-1} B^T S A + Q = 0 \quad (6)$$

Recorrendo ao comando MatLab *dlqr*, apenas é necessário definir as matrizes  $Q$  e  $R$  para obter o vetor de ganhos  $K$ . É através destas matrizes que se afina o funcionamento do regulador. A matriz  $Q$  expressa o custo atribuído a um desvio no valor dos estados em relação à referência. Quanto maiores os valores de  $Q$  mais rápido o sistema controlado tenderá para a referência. Tendo em conta que estamos a lidar com um sistema SISO para o qual pretendemos controlar a saída, para a matriz  $Q$  corresponder ao custo associado a essa saída, esta tem de ser tal que

$$Q = k C^T C, \quad (7)$$

sendo  $k$  o custo atribuído à saída. Tendo em conta que o aumento do valor de  $Q$  tem um efeito semelhante a redução do valor de  $R$  (também escalar), apenas faremos variar o valor de  $R$ , definindo  $k = 1$ . Considerando  $R = \frac{1}{\rho}$  a função de custo simplifica-se:

$$J(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( y^2(k) + \frac{1}{\rho} u^2(k) \right) \quad (8)$$

A matriz  $R$  representa o custo atribuído à atuação do sistema. Relativamente a este custo, avaliemos os seus valores limite:

**Quando  $R \approx 0$ ;  $\rho \rightarrow \infty$**

A diminuição de  $R$  tem como vantagens uma resposta mais rápida e um aumento da largura de banda. No entanto, tem a desvantagem de excitar modos de oscilação que não foram modelados.

**Quando  $R \approx \infty; \rho \rightarrow 0$**

O aumento de  $R$  tem como vantagem a diminuição da amplitude de  $u$  e a diminuição da largura de banda, o que reduz a sensibilidade a ruído de alta frequência e erros de modelação. No entanto, causa uma resposta mais lenta e aumenta a resposta a perturbações.

Podemos ver a localização dos pólos em malha fechada em função de  $R$  através do *root locus* simétrico, sabendo que os pólos estáveis do *root locus* são os pólos do sistema em malha fechada.

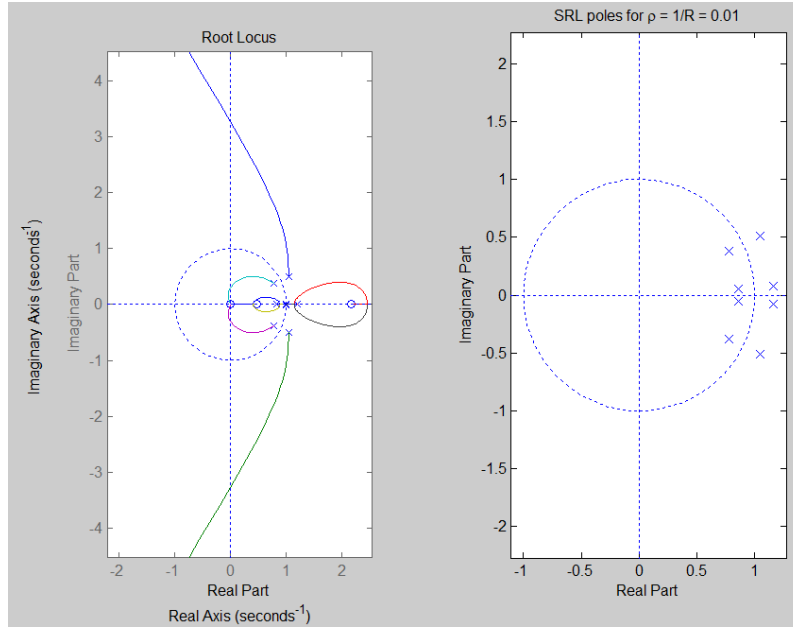


Figura 3: *Root Locus* simétrico e respetivos pólos para  $R=100$

### 3.2 Estimador dos estados

Tendo em conta que a variável medida no nosso sistema é a saída e não os estados, estes precisam de ser estimados para aplicar controlo ao sistema. O objetivo do filtro de Kalman é exatamente estimar o estado da planta através da observação das suas entrada e saída. Este assume que o modelo da planta é modificado por adição de perturbações e ruído na entrada dando origem ao modelo de estados seguinte:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k) \quad (9)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) + v(k) \quad (10)$$

O sinal  $w$  modela as perturbações aleatórias e o sinal  $v$  é o ruído dos sensores. Este filtro tem a estrutura do observador corrente com um ganho otimizado tendo em conta estes termos do ruído. A suas equações são dadas por:

$$\hat{x}(k|k-1) = A\hat{x}(k) + Bu(k-1) \quad (11)$$

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + M(y(k) - C\hat{x}(k|k-1)) \quad (12)$$

O ganho  $M$  é calculado utilizando a função *dlqe* do MATLAB para obter o estimador ótimo e, tal como anteriormente, é calculado de modo a diminuir um custo que é dado por:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} ||x(k) - \hat{x}(k)||^2 \quad (13)$$

A implementação do estimador encontra-se representada na Figura 4:

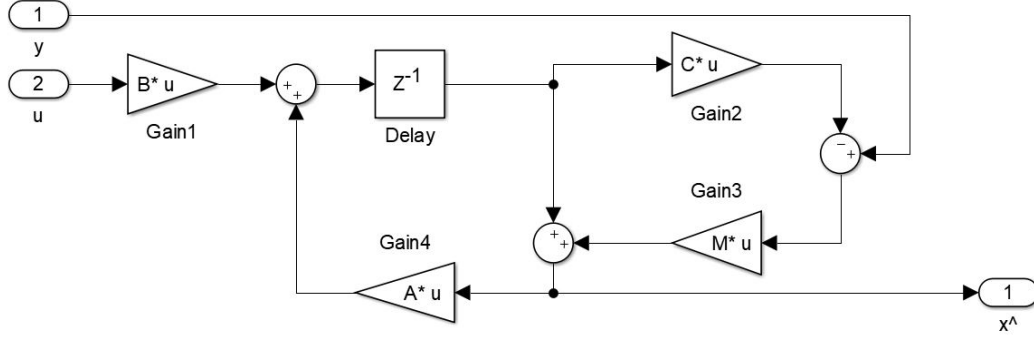


Figura 4: Diagrama de blocos que constitui o observador

O cálculo do ganho do filtro de Kalman requer as matrizes de covariância de  $w(k)$  e de  $v(k)$  que entram no modelo, que são denominadas por  $Q_w$  e  $R_v$ , respetivamente. Podem também ser escritas como  $Q_e$  e  $R_e$ , nomenclatura ao longo deste trabalho. Neste caso  $R_e$  reduz-se a um escalar. Estas variáveis não foram estimadas mas sim utilizadas como "botões de ajuste" de modo a calibrar o observador às nossas necessidades.

**Efeito das matrizes de covariância do ruído em LTR** Já que a função *dlqe* também calcula os pólos da equação de erro do observador, variou-se os valores de  $Q_e$  e  $R_e$  e avaliou-se a sua influência no funcionamento do estimador analisando a localização destes pólos no círculo trigonométrico.

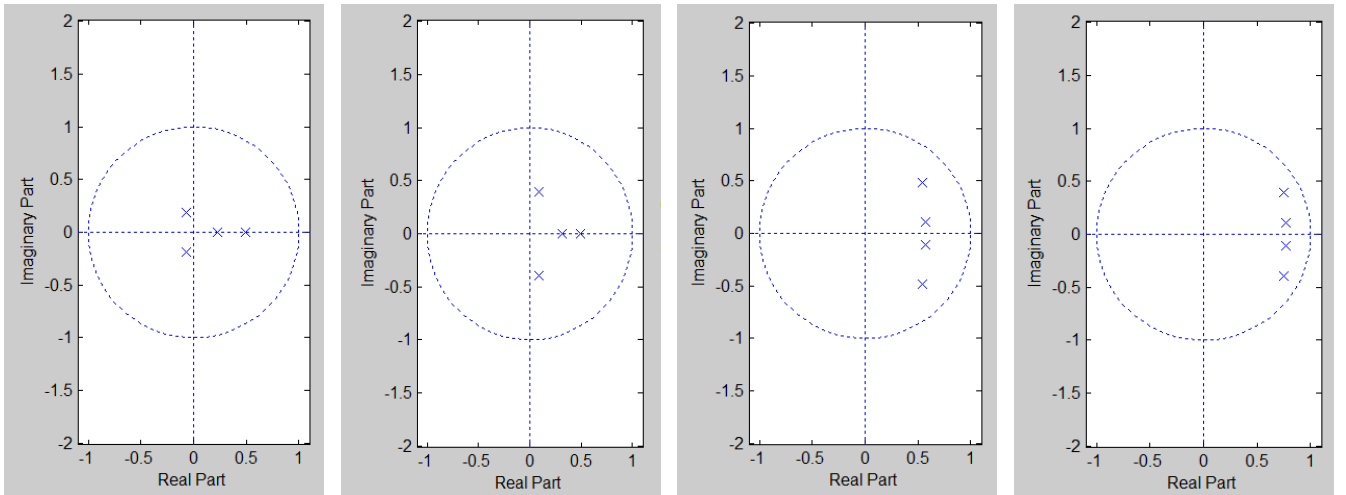


Figura 5: Dependência dos pólos da equação de erro relativamente a  $R_e$  quando  $R_e=0.1$ ,  $R_e=1$ ,  $R_e=100$  e  $R_e=10000$ , respetivamente com  $Q_e=100$



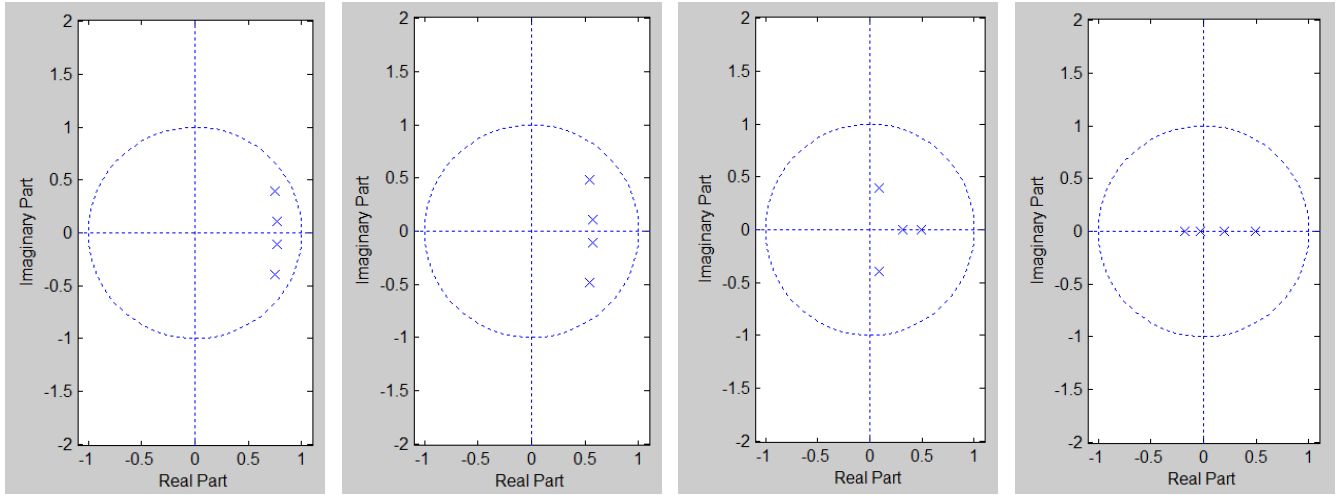


Figura 6: Dependência dos pólos relativamente a  $Q_e$  quando  $Q_e=0.01$ ,  $Q_e=1$ ,  $Q_e=100$  e  $Q_e=10000$ , respetivamente com  $R_e=1$

Através das figuras 5 e 6 pode-se observar que o aumento de  $R_e$  tem o mesmo efeito nos pólos que a diminuição de  $Q_e$ . Faz sentido analisar o impacto de  $R_e$  uma vez que este descreve a sensibilidade ao ruído enquanto  $Q_e$  descreve as perturbações. Podemos então fixar o valor de  $Q_e$  igual ao do enunciado. Observa-se que aumentando o valor de  $R_e$ , os pólos aproximam-se do limite do círculo trigonométrico. De forma semelhante ao regulador, uma diminuição de  $R$  leva a um aumento da velocidade de reposta do sistema, tendo o observador um comportamento "nervoso" mas com uma saída viável. Por outro lado, aumentando o  $R$  obtém-se um observador mais lento e com uma saída mais ruidosa. A introdução deste estimador conduz ao mesmo *root locus* do LQR. Logo podemos analisar a evolução destes pólos na figura 3. Assim, após a análise anterior, podemos concluir que os valores sugeridos pelo guia de laboratório para as matrizes de covariância são aceitáveis e foram mantidos. As matrizes ficam então definidas como:

$$Q_e = 100I \text{ e } R_e = 1$$

## 4 Simulações e Testes

Em primeiro lugar foram simulados o regulador e o estimador individualmente para confirmar o seu correto funcionamento e para analisar a influência da variação dos "botões de ajuste". Após as simulações independentes do regulador e estimador, foi desenhado em Simulink o sistema final para ser simulado antes de ser testado na planta real. O diagrama de blocos que representa este sistema é o seguinte:

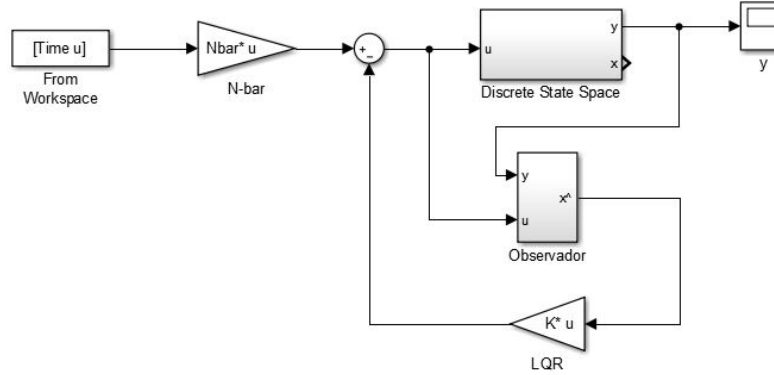


Figura 7: Diagrama de blocos usado nas simulações para testar e afinar o controlador

Após se confirmar o correto funcionamento do controlador projetado e de se fazerem as afinações iniciais, passou-se para os testes na planta real. Para tal substituí-se o modelo identificado, que estava a ser usado para simular o sistema, pela planta real. Com os testes na planta real afinou-se ainda mais o controlador, até os resultados obtidos serem satisfatórios para os elementos do grupo. O diagrama de blocos usado para os testes na planta real está representado na Figura 8.

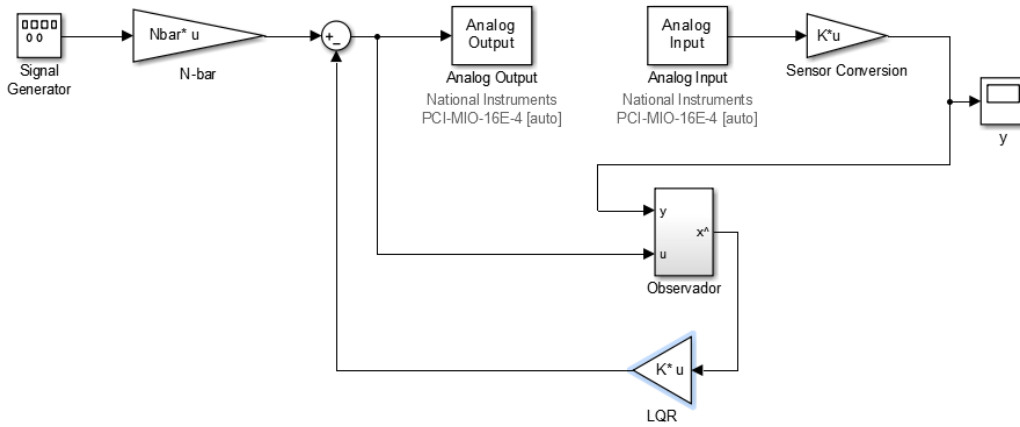


Figura 8: Diagrama de blocos usado para controlar a planta real

Um dos procedimentos seguidos foi, para uma onda quadrada, com diversas amplitudes e variações de amplitude, analisar a resposta do sistema para valores diferentes do ganho do regulador  $R$ . O primeiro valor utilizado foi  $R = 100$  como recomendado no enunciado. O sistema apresentou uma resposta visivelmente não muito afetada por perturbações pelo que se decidiu aumentar o valor de  $R$ . Assim, foram testados também  $R = 200$  e  $R = 300$ . Verificou-se através da análise dos dados obtidos (e apresentados nas Figuras 9, 10 e 11) que, de facto, à medida que se aumenta o valor

de  $R$  a resposta do sistema é mais lenta e apresenta menos ruído de alta frequência. Verificou-se também através da observação da barra que, ao aumentar o valor de  $R$ , o sistema fica mais sensível às perturbações, chegando a um ponto em que a barra nunca estabiliza e tem um comportamento oscilatório de alta frequência. Depois da execução de múltiplos testes com valores de  $R$  a rondar os valores apresentados nas figuras, decidiu-se que a barra tinha o melhor comportamento para  $R=100$ .

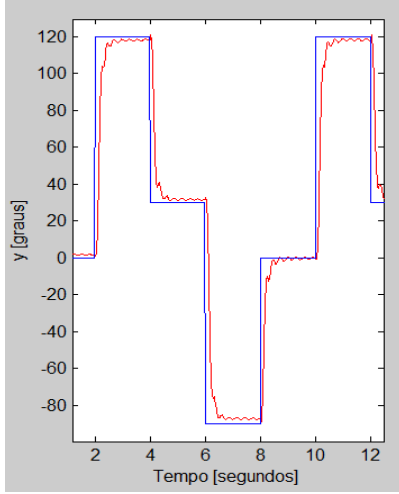


Figura 9: Referência  $u(t)$  e a reposta do sistema  $y(t)$  com  $R=100$

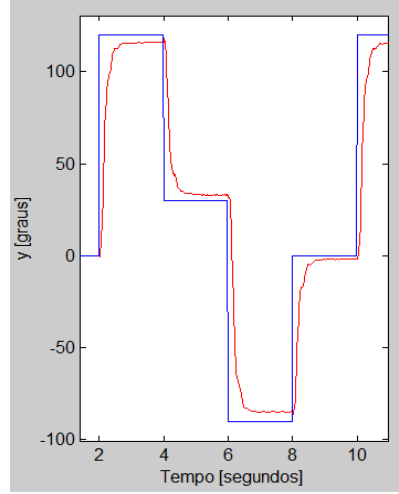


Figura 10: Referência  $u(t)$  e a reposta do sistema  $y(t)$  com  $R=200$

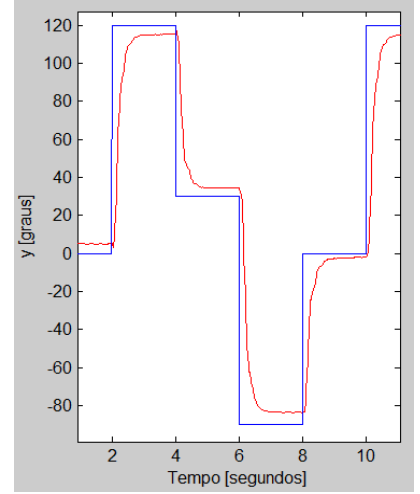


Figura 11: Referência  $u(t)$  e a reposta do sistema  $y(t)$  com  $R=300$

Com o objetivo de tentar melhorar a "performance" do controlador, mais precisamente de tentar que a ponta da barra seguisse melhor a referência e desta forma reduzir o erro estático, experimentou-se ainda a inclusão de um integrador no sistema. O diagrama de blocos resultante da inclusão do integrador está representado na Figura 12.

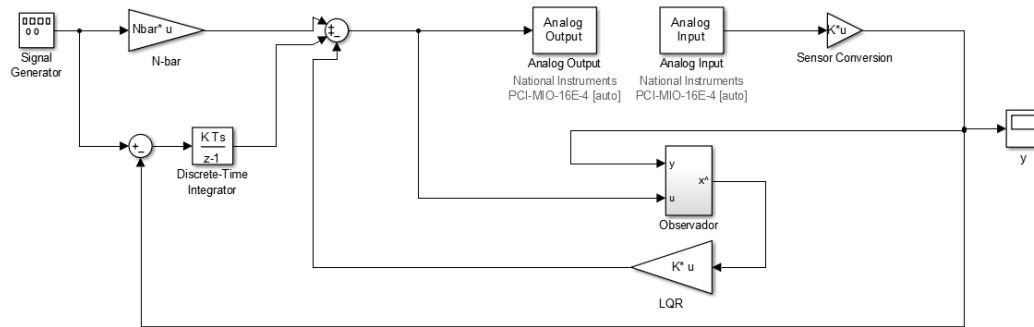


Figura 12: Diagrama de blocos usado para controlar a planta real com a inclusão de um integrador

Utilizando como referência um sinal em rampa, comparou-se a resposta do controlador com integrador e sem integrador. Verificámos que para um controlador sem integrador, a resposta do sistema nunca acompanha a referência enquanto que com integrador, o sistema tende para a referência mesmo tendo um tempo de estabelecimento de aproximadamente 2 segundos. A escolha entre um controlador com ou sem integrador e mesma a escolha do ganho do integrador depende do tipo de uso dado ao sistema, sendo neste caso o controlador com integrador mais vantajoso.

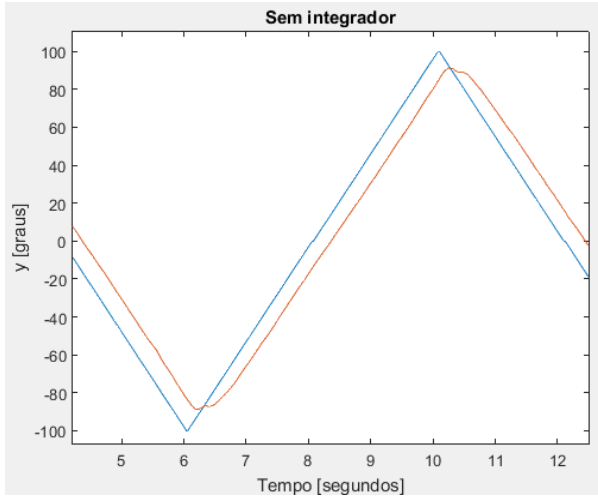


Figura 13: Referência  $u(t)$  em rampa e a resposta do sistema  $y(t)$  com  $R=100$  e sem integrador

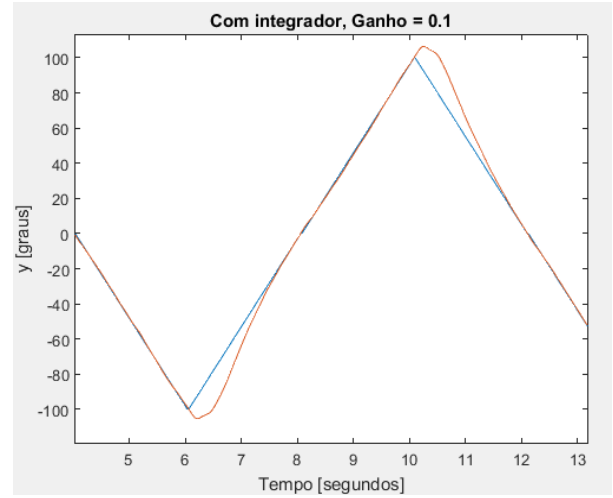


Figura 14: Referência  $u(t)$  em rampa e a resposta do sistema  $y(t)$  com  $R=100$  e com integrador de ganho 0.1

## 5 Resposta no tempo e em frequência em malha fechada

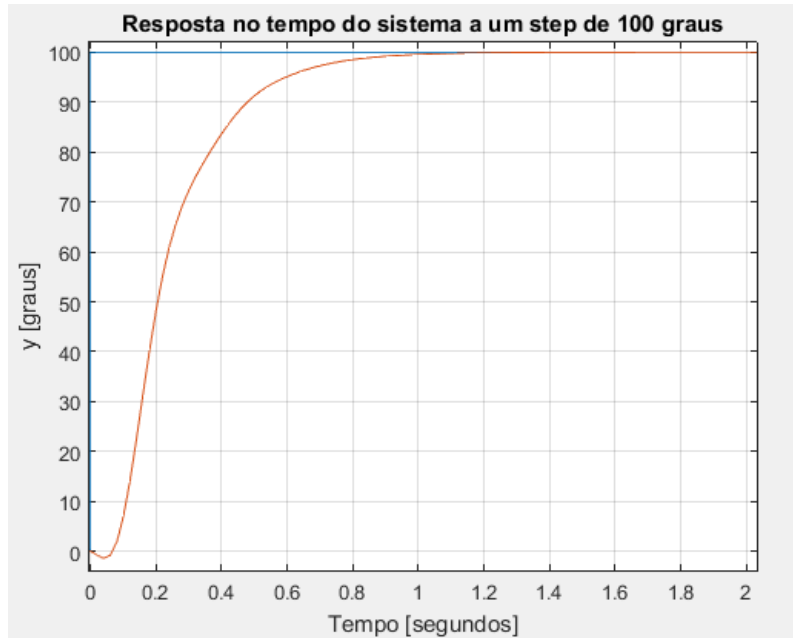


Figura 15: Resposta no tempo em malha fechada

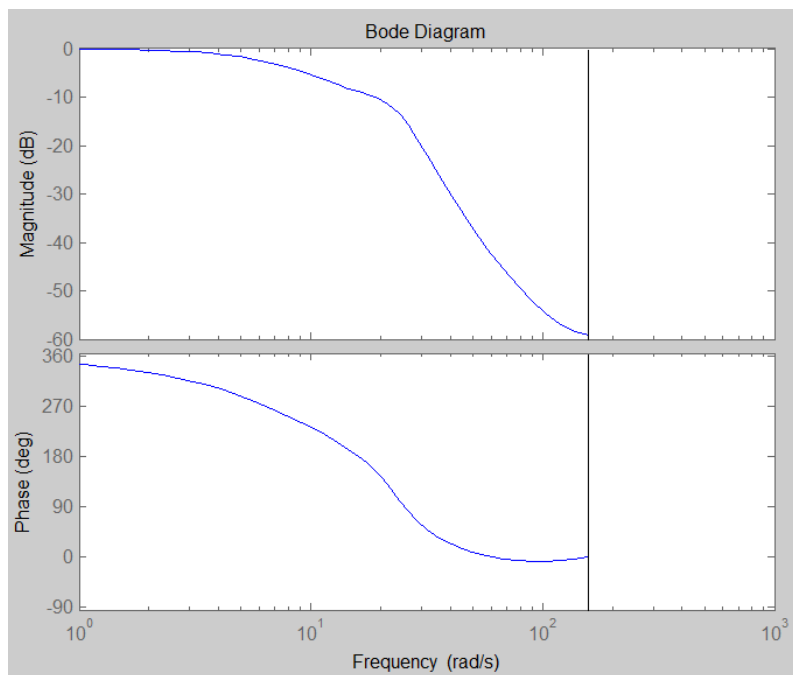


Figura 16: Resposta em frequência em malha fechada

## 6 Efeito da inclusão de pré-filtragem

Como é visível pelo diagrama de blocos resultante da integração do controlador (Figura 8 ou 12), o sistema possui uma pré-filtragem da referência a ser seguida. Esta pré-filtragem é obtido multiplicando a referência por um ganho, dado pelo bloco  $N\text{-}bar$  nos diagramas de blocos das Figuras 8 e 12.

O valor do ganho de pré-filtragem aplicado à referência é igual ao inverso do ganho estático do conjunto: Sistema a Controlar (ou Processo) / Estimador / Controlador. Ao tomar este valor, o efeito que a pré-filtragem tem no conjunto global (inclui o ganho de pré-filtragem) é a obtenção um ganho estático unitário.

Ao forçar um ganho estático unitário no sistema, garantimos que o controlador desenvolvido vai seguir a referência desejada quando esta não é nula. O efeito da pré-filtragem na saída pode ser observado nas Figuras 17 e 18.

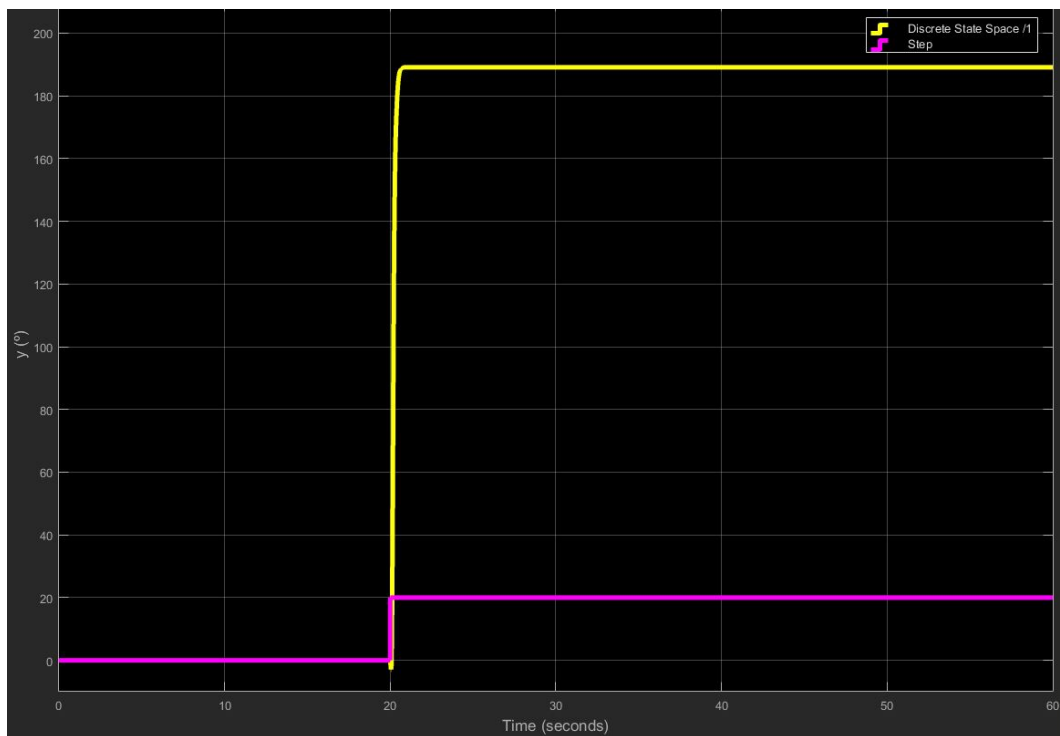


Figura 17: Saída do sistema sem pré-filtragem para um *step* de  $20^{\circ}$

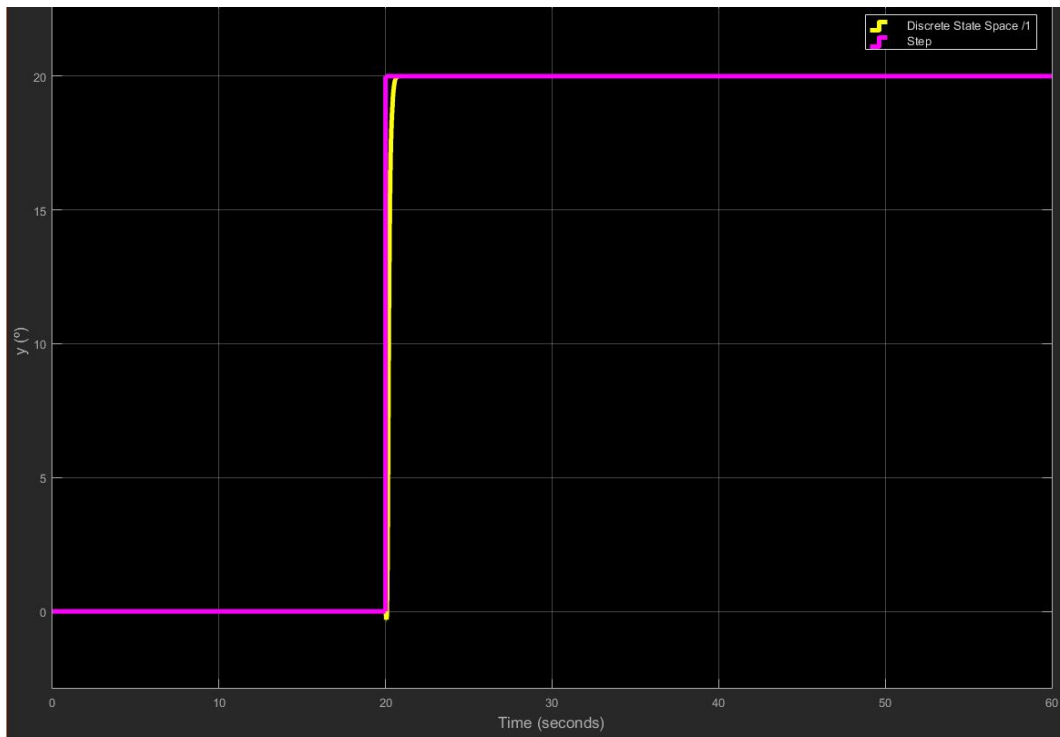


Figura 18: Saída do sistema com pré-filtragem para um *step* de  $20^{\circ}$

Uma análise rápida das Figuras 17 e 18 mostra que para uma referência nula ambos os sistemas (com e sem pré-filtragem) não têm problema em seguir corretamente a referência nula. Por outro lado, quando a referência não é nula, o sistema sem pré-filtragem não consegue aproximar-se desta, uma vez que o ganho estático não é unitário. Quando se aplica a pré-filtragem, é visível, pela Figura 18, que o sistema passa a seguir corretamente a referência já que o ganho passou a ser unitário.

*Nota:* Os dados das Figuras 17 e 18 foram obtidos fora do laboratório em *Simulink* com o modelo identificado. O comportamento observado na planta real foi igual, sem contar com a presença do erro estático já detetado anteriormente.

## 7 Desempenho e limites do sistema de controle

De modo a avaliar o desempenho do sistema de controle, este foi testado em laboratório com vários impulsos diversos. Pode-se observar nas figuras que se seguem alguns exemplos da resposta do sistema e o respetivo impulso de referência. Para efeito da avaliação do desempenho do sistema de controle apenas teremos em conta o sistema sem o integrador.

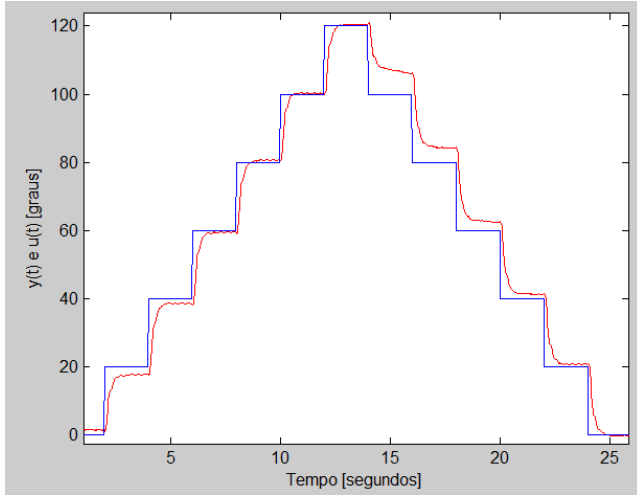


Figura 19: Referência  $u(t)$  em escada e a resposta do sistema  $y(t)$

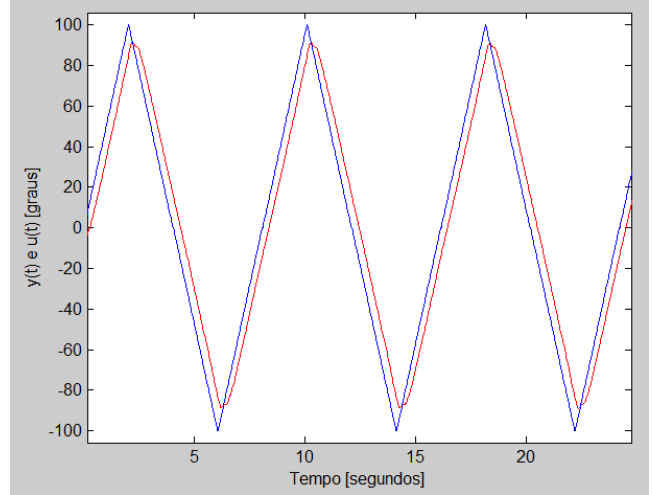


Figura 20: Referência  $u(t)$  em rampa e a resposta do sistema  $y(t)$

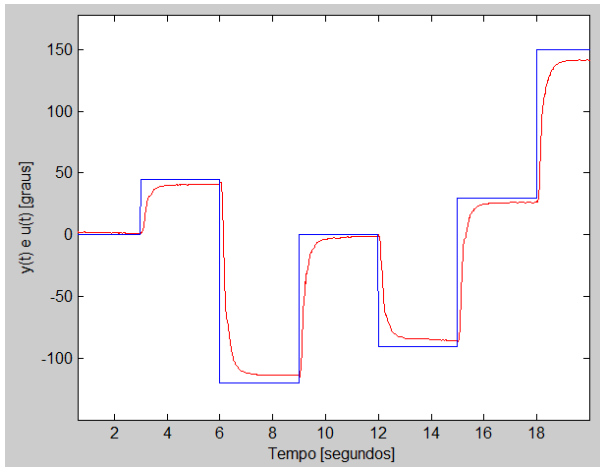


Figura 21: Referência  $u(t)$  aleatória com  $T=24s$  e a resposta do sistema  $y(t)$

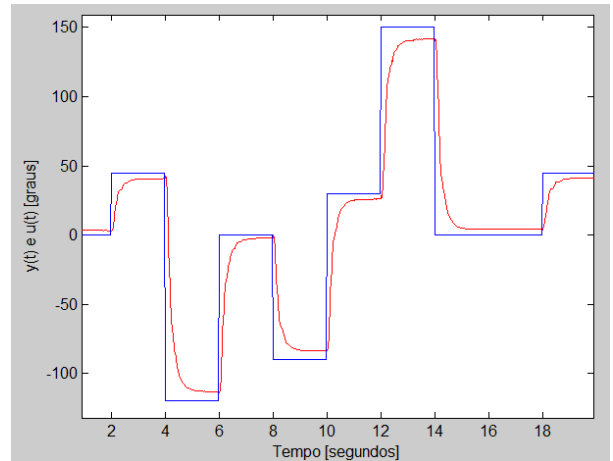


Figura 22: Referência  $u(t)$  aleatória com  $T=15s$  e a resposta do sistema  $y(t)$



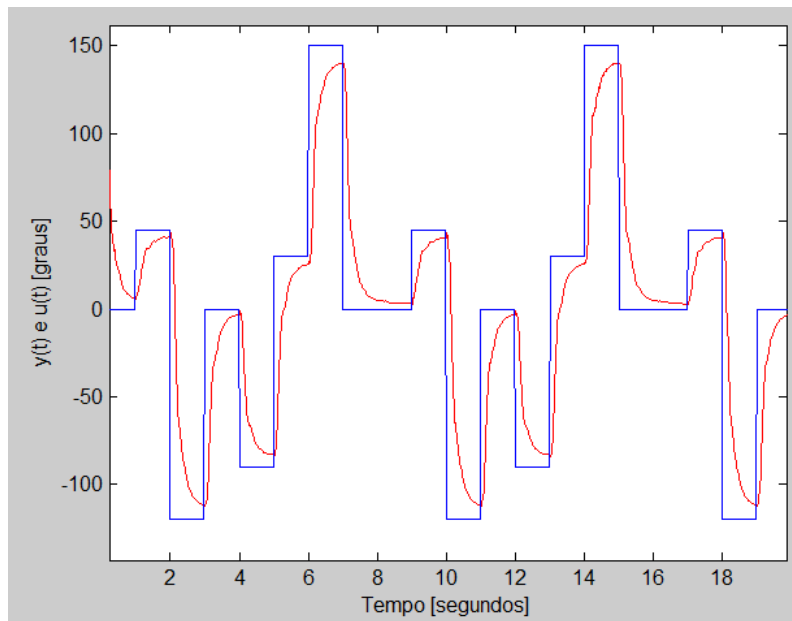


Figura 23: Referência  $u(t)$  aleatória com  $T=8s$  e a resposta do sistema  $y(t)$

A análise do desempenho do sistema baseia-se acima de tudo na velocidade de resposta do mesmo, ou seja, no tempo de estabelecimento, no caráter oscilatório da resposta e no erro estático verificado. Entre a velocidade de resposta e o caráter oscilatório da resposta terá sempre de existir um compromisso. Note-se que um sistema também não terá um bom desempenho se demonstrar um comportamento oscilatório devido à sensibilidade a perturbações. Em relação ao erro estático, apesar da pré-filtragem existe sempre algum erro estático (que pode ser eliminado com a introdução de um integrador como visto anteriormente).

Podemos desde logo observar na figura 19 que o sistema inicialmente segue com alguma precisão a referência. No entanto, quando há uma alteração na direção da rotação, o sistema apresenta dificuldade em seguir a referência desejada e vai diminuindo o erro com o tempo até conseguir novamente seguir a referência. Este erro também pode estar relacionado com o sistema físico, por exemplo, folga nas engrenagens.

Através da figura 20 observa-se o pequeno atraso de resposta do sistema. Pode-se inferir que se a referência tiver transições muito rápidas o sistema pode não conseguir seguir corretamente a referência durante a transição.

Pode-se estudar o impacto da frequência e da variação de amplitude do impulso de forma mais detalhada através das imagens 21, 22 e 23, onde os impulsos têm frequências cada vez maiores, respetivamente, e, cada um deles, diversas amplitudes diferentes. Em relação à variação de amplitude, esta não influencia o erro estático do sistema. Analisando a frequência da onda quadrada, para frequência mais baixas o sistema tem uma boa resposta e consegue convergir para a referência corretamente. À medida que a frequência do impulso aumenta, o sistema segue corretamente a referência até que atinge uma combinação de frequência e variação de amplitude para a qual o tempo de estabelecimento do sistema não lhe permite atingir a referência. Na figura 23 temos alguns exemplos da resposta por vezes a não conseguir chegar à referência.

**Limites do sistema** Como foi visto anteriormente, este sistema não irá controlar com sucesso todos os impulsos que lhe possam ser fornecidos. Um limite será sempre o tempo de estabelecimento que não permitirá ao sistema atingir a referência para sinais de entrada com frequências e variações de amplitude elevadas. Observa-se também que o sistema não consegue compensar de imediato, de modo a seguir a referência, quando ocorre mudança de direção num impulso em escada. Este limite do sistema deve-se mais provavelmente a uma limitação ao nível do motor ou das engrenagens do motor ou do potenciômetro.

Outro limite do sistema está relacionado com o erro estático que apenas pode ser corrigido à custa da existência de sobre-elevações introduzidas pela presença de um integrador. Em relação à identificação do modelo, como esta foi feita para ter em conta apenas o carácter oscilatório de mais baixa frequência da barra, esta encontra-se muito sujeita a perturbações para valores de  $R$  maiores, o que constitui também uma limite de operação do controlo da barra.

## 8 Conclusão

A conclusão da segunda parte deste trabalho laboratorial põe um fim ao controlo do ângulo da ponta da barra flexível acoplada a um motor de corrente contínua.

Relembrando a Parte 1 deste trabalho, identificou-se o sistema que se pretendia controlar recorrendo aos dados obtidos nas três primeiras sessões de laboratório. Com base no modelo obtido, projetou-se, nesta segunda parte, um controlador capaz de colocar a ponta da barra na posição desejada. O controlador obtido foi o acoplamento de duas peças distintas a funcionar em conjunto: o LQR (Regulador) e o LQE (Estimador). O LQR realimenta do estado do sistema com um certo ganho para seguir a referência, sendo este ganho calculado com base no modelo identificado. Como não temos acesso direto ao estado do sistema, projetou-se um estimador que, também com base no modelo identificado, fornece uma estimativa do estado do sistema quando lhe são fornecidas a entrada e a saída do sistema. Tanto o LQR e o LQE foram projetados com o auxílio de ferramentas presentes no MATLAB.

A implementação do controlador projetado na planta real satisfaz bastante todos os membros do grupo já que o sistema se aproximou bastante da referência dada, sendo ao mesmo tempo rápido a reagir e com poucas oscilações. O erro estático foi minimizado fazendo pequenos "tweaks" ao regulador, até os resultados estarem de acordo com as nossas exigências.

Do trabalho realizado ao longo das seis sessões de laboratório retiraram-se preciosos conhecimentos de como controlar um sistema do qual se conhece pouco ou quase nada, sendo estes conhecimentos importantes para aprofundar o nosso saber sobre as várias técnicas de controlo. É com satisfação que o grupo considera que o trabalho desenvolvido foi um sucesso.