

# Diffusione dell'epidemia e percezione del rischio nelle reti

Lorenzo Baiardi, Marco Bessi

April 2024

# Contents

<b>1</b>	<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Analisi del Modello</b>	<b>3</b>
3.1	Mean-field approximation . . . . .	4
3.2	Self-organized percolation . . . . .	5
3.2.1	Directed percolation . . . . .	5
3.2.2	Infezione con la percezione del rischio . . . . .	5
3.2.3	Multiplex networks . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Risultati</b>	<b>7</b>
4.1	Mean-field approximation . . . . .	7
4.2	Simple percolation . . . . .	7
4.3	Infezione percezione del rischio . . . . .	8
4.4	Multiplex networks . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Conclusione</b>	<b>12</b>
<b>6</b>	<b>Altri Risultati</b>	<b>13</b>
6.1	Mean-field approximation . . . . .	13
6.2	Simple percolation . . . . .	14
6.3	Infezione percezione del rischio . . . . .	17
6.4	Multiplex networks . . . . .	20

## 1 Abstract

La nostra ricerca analizza la propagazione delle epidemie e il ruolo cruciale che la percezione del rischio svolge nel loro controllo. Esaminiamo inoltre l'effetto delle informazioni sulla diffusione delle malattie, sia attraverso reti fisiche che virtuali, al fine di comprendere meglio come queste influenzino la consapevolezza del pubblico.

## 2 Introduzione

Nel nostro lavoro ci siamo impegnati a ricreare alcuni dei risultati ottenuti nel paper Epidemic spreading and risk perception in multiplex networks: A self-organized percolation method con particolare attenzione alle varie tipologie di grafi, all'approssimazione del campo medio per reti con grado dei nodi fissato e ai metodi di percolazione per grafi multiplex.

## 3 Analisi del Modello

Per prima cosa descriviamo i meccanismi per generare reti regolari, casuali e scale-free. Denotiamo con  $A$  la matrice di adiacenza della rete dove  $a_{ij} = 1$  se c'è un arco da  $j$  a  $i$  e  $a_{ij} = 0$  altrimenti. Denotiamo con  $k_i = \sum a_{ij}$  la connettività del sito  $i$  e con  $j_1^{(i)} \dots j_{k_i}^{(i)}$  i suoi vicini  $\{j : a_{ij} = 1\}$ .

Consideriamo solo reti simmetriche con  $N$  nodi e  $2mN$  collegamenti, in modo che la connettività media  $\langle k \rangle$  di ciascun nodo sia pari a  $2m$ .

- **Reti regolare Unidimensionale:** I nodi sono disposti ad anello. Ogni dato nodo stabilisce un collegamento con gli  $m$  nodi più vicini alla sua destra.
- **Reti casuali:** Ogni nodo stabilisce  $m$  collegamenti con nodi scelti casualmente, evitando auto-loop e collegamenti multipli. La distribuzione di probabilità delle reti casuali è quella di Poisson,  $P(k) = \frac{z^k e^{-z}}{k!}$  dove  $z = \langle k \rangle$ .
- **Reti scale-free:** Utilizziamo un modello fissando anche un cutoff  $K$ . Prima, a ciascun nodo  $i$  viene assegnata una connettività  $k_i$  estratta da una distribuzione di legge di potenza  $P(k) = Ak^{-\gamma}$ ,  $m \leq k \leq K$  con  $A = (\gamma - 1)/(m^{1-\gamma} - K^{1-\gamma})$ . I rimanenti archi sono aggiunti in modo casuale, evitando auto-loop e connessioni multiple, infine il numero totale di archi viene tagliato per ottenere il grado medio desiderato.

Siamo interessati a reti multiplex, ottenute dalla combinazione di uno strato fisico e uno strato virtuale. Per cominciare generiamo le due reti scegliendo tra le tre tipologie sopra descritte.

La rete di informazione viene poi costruita come segue:

- **Rete fisica:**

- Per ogni nodo  $i$  della rete fisica considera il suo vicinato  $\mathcal{N}(i)$ , per ogni  $j \in \mathcal{N}(i)$  aggiungi un arco con direzione da  $i$  verso  $j$  con probabilità  $1 - q$ .

- **Rete virtuale:**

- Esegui la stessa procedura con la rete virtuale ma con probabilità  $q$ .

In quanto questo procedimento si ripete in modo indipendente per ogni nodo, la rete di informazioni risultante non conserva più la sua simmetria originaria (un determinato collegamento può essere scelto da uno dei suoi vertici ma non dall'altro). Il parametro  $q$  indica il peso assegnato alla rete virtuale: maggiore è il valore di  $q$  verso 1, maggiore sarà la somiglianza tra la rete delle informazioni e quella virtuale. In pratica, questo parametro regola quanto gli individui attribuiscono importanza alle loro relazioni virtuali. La quantità  $Nqk$  rappresenta la differenza tra la rete di informazioni e quella fisica.

Questa procedura ci permette di studiare gli effetti su un'epidemia della differenza tra la rete fisica, dove si verifica la diffusione e quella di informazione, dove gli attori diventano consapevoli della malattia, cioè su cui valutano il rischio di essere infettati.

### 3.1 Mean-field approximation

L'approssimazione di campo medio è utile per studiare il comportamento del sistema in condizioni di equilibrio, ma non tiene conto dell'effetto delle fluttuazioni locali. Abbiamo usato quindi la seguente formula di aggiornamento della percentuale  $c$  di infetti sul grafo basata sui metodi di approssimazioni di campo medio:

$$c(t+1) = \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} c^s (1-c)^{k-s} s\tau \exp\left(-J \frac{s}{k}\right) \quad (1)$$

A questo punto fissato un certo valore di  $\tau$ , abbiamo preso il minimo livello di precauzione  $J$  tale per cui  $c$  dopo un certo numero di passi diventa

nullo, ovvero tale da azzerare il numero di infetti. Nella teoria il valore critico di  $J$  viene fornito dalla seguente funzione:

$$J_c = k \ln(k\tau) \quad (2)$$

Viene ricavata considerando lo stato stazionario  $c(t+1) = c(t)$  con  $c \rightarrow 0$  ed eseguendo alcune manipolazioni algebriche.

Nella fase di test e di valutazione andremo a verificare se i valori predetti dalla formula sono molto vicini a quelli che si osservano simulando l'infezione.

### 3.2 Self-organized percolation

Ci siamo quindi dedicati allo studio della diffusione dell'epidemia su grafi mediante l'impiego di modelli basati sulla percolazione. Abbiamo confrontato i valori teorici con quelli derivati dalle simulazioni, al fine di ottenere una visione completa e confrontabile dei risultati.

#### 3.2.1 Directed percolation

Per cominciare abbiamo considerato grafi in cui i nodi non hanno percezione del rischio, l'unica determinante dell'infezione in questo scenario è la bare infection probability  $\tau$ . Ogni nodo ha un proprio valore di  $\tau$  ed è possibile dimostrare che il  $\tau$  ottimale per il nodo  $i$  al tempo  $t + 1$  è dato da:

$$\tau_i(t + 1) = \min_{j=j_1^{(i)}, \dots, j_{k_i}^{(i)}} \max(r_{ij}(t), \tau_i(t)) \quad (3)$$

con  $k_i$  grado del nodo  $i$  e  $j$  indice dei vicini. Dato un certo tempo sufficientemente grande ma finito  $T$ , il valore:  $\min_{i=1, \dots, n} \tau_i(T)$  rappresenta la soglia di percolazione al di sopra della quale c'è almeno un sito infetto nel reticolo. Andremo a verificare anche in questo caso se i valori predetti dalla formula sono molto vicini a quelli che si osservano simulando l'infezione.

#### 3.2.2 Infezione con la percezione del rischio

In questa sezione analizziamo un problema più complesso, cioè assumiamo che i nodi della rete siano dotati di un valore  $J$  che indica la percezione del rischio di infezione. Anche in questo scenario è possibile ricavare una successione di valori ottimali di  $J$  come segue:

$$J_i(t + 1) = \max_{j=j_1^{(i)}, \dots, j_{k_i}^{(i)}} \min \left( J_j(t), \frac{-k_i}{s_i(J_j(t))} \ln \left( \frac{r_{ij}(t)}{\tau} \right) \right) \quad (4)$$

In modo simile a quanto fatto in precedenza prendiamo:  $\max_{i=1,\dots,n} J_i(T)$  come valore critico.

### 3.2.3 Multiplex networks

In conclusione abbiamo affrontato il problema della percolazione in un network fisico come nel caso precedente dove però la percezione del rischio dipende anche dalla topologia della rete di informazione e in particolare dal numero di infetti su quest'ultima. La formula che si ricava è molto simile a quella precedente:

$$J_i(t+1) = \max_{j_1^{(i)}, \dots, j_{k_i}^{(i)}} \min(J_j(t), \frac{-k_i}{\overline{s_i}(J_j(t))} \ln(\frac{r_{ij}(t)}{\tau})) \quad (5)$$

dove l'unica differenza è nel termine  $\overline{s_i}$  che rappresenta il numero di vicini infetti percepito dal nodo  $i$  e viene calcolato sul grafo informativo. Quello che ci si può aspettare è che al crescere del valore di  $q$  la rete informativa si avvicini sempre più a quella virtuale, influenzando molto la percezione del rischio per un dato nodo che concentra la sua attenzione su nodi che non gli sono vicini realmente, sottovalutando il reale livello di rischio del mondo fisico.

## 4 Risultati

### 4.1 Mean-field approximation

Come possiamo vedere dalla figura 1, il calcolo del campo medio approssima bene il valore critico di  $J$ , sia nel caso teorico che in quello pratico, confermando la validità teorica del metodo.

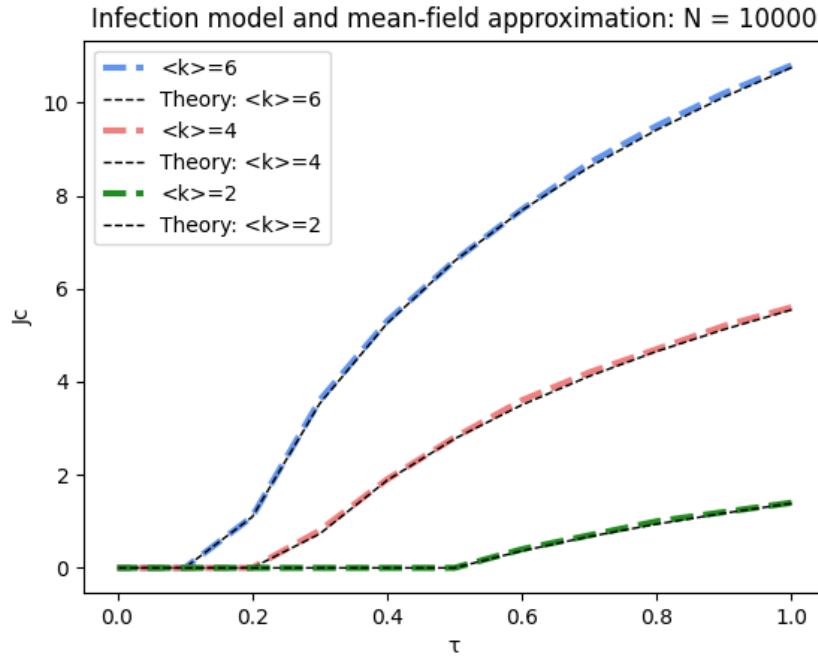


Figure 1: Approssimazione di campo medio al variare di  $k$

### 4.2 Simple percolation

In questo caso abbiamo fatto varie simulazioni in base al numero di nodi e al valore di connettività  $k$ . I risultati in 2 mostrano come anche in questo caso siamo riusciti a ottenere che i valori predetti dalla formula sono molto vicini a quelli che si osservano simulando l'infezione.

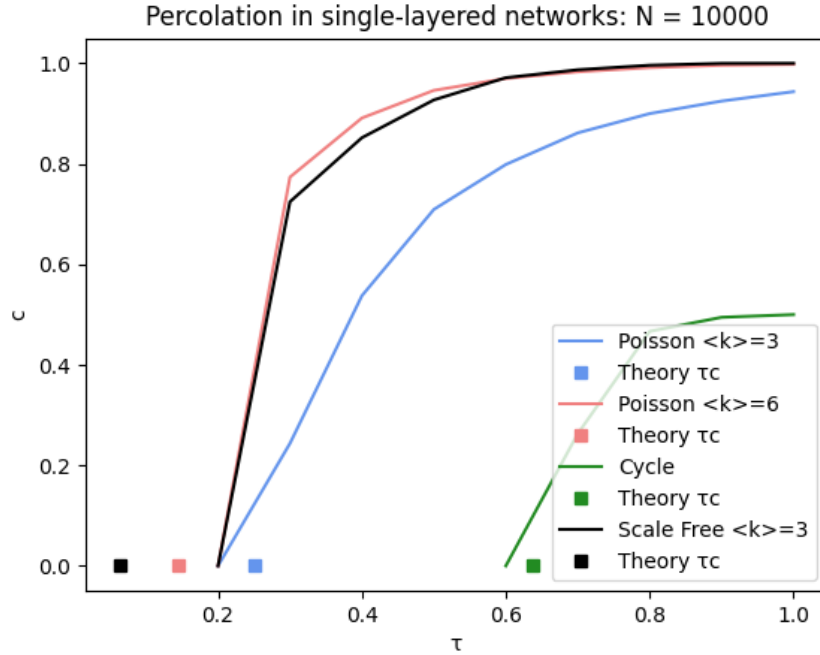


Figure 2: Valutazione della probabilità di percolazione al variare della tipologia di grafo e del numero di nodi

### 4.3 Infezione percezione del rischio

Il modello di infezione con la percezione del rischio considera il fatto che le persone possano adottare precauzioni per proteggersi da una malattia, a differenza del caso precedente. Questo approccio è prezioso per esaminare l'impatto della percezione del rischio sulla diffusione di una malattia, ma non tiene conto dell'influenza delle informazioni virtuali. Nel nostro esperimento, abbiamo constatato che, sotto le nostre ipotesi sui grafi, i valori restituiti dal metodo di percolazione si avvicinano notevolmente a quelli derivati dalla teoria del campo medio, suggerendo un'approssimativa presenza di auto organizzazione critica del sistema. Questo ci fornisce un metodo automatico per determinare il livello critico della percezione del rischio, evitando la necessità di regolare manualmente i parametri di controllo attraverso numerose simulazioni. Ciascun nodo impara il proprio valore critico di  $J$  dopo un certo numero di iterazioni, ad ogni iterazione viene aggiornato  $J$  basandosi sull'informazione fornita dal valore precedente e dallo stato dei suoi vicini,



in questo aspetto il meccanismo di percolazione somiglia a quello di una rete ricorrente su grafi, in cui lo stato dei vari nodi viene aggiornato tramite una funzione ricorsiva che, dipende dagli stati precedenti e dal segnale fornito dai vicini. Anche per questo tipo di reti il numero delle iterazioni non può essere troppo alto per evitare il fenomeno dell'oversmoothing che, semplificando, vanifica l'apprendimento facendo convergere tutti i nodi a uno stesso valore, similmente a quanto si osserva nella percolazione con gli absorbing state. In questo caso è interessante notare come al crescere di  $\tau$  oltre la soglia critica ci sia sempre un  $J$  per cui è possibile arrestare la diffusione dell'epidemia.

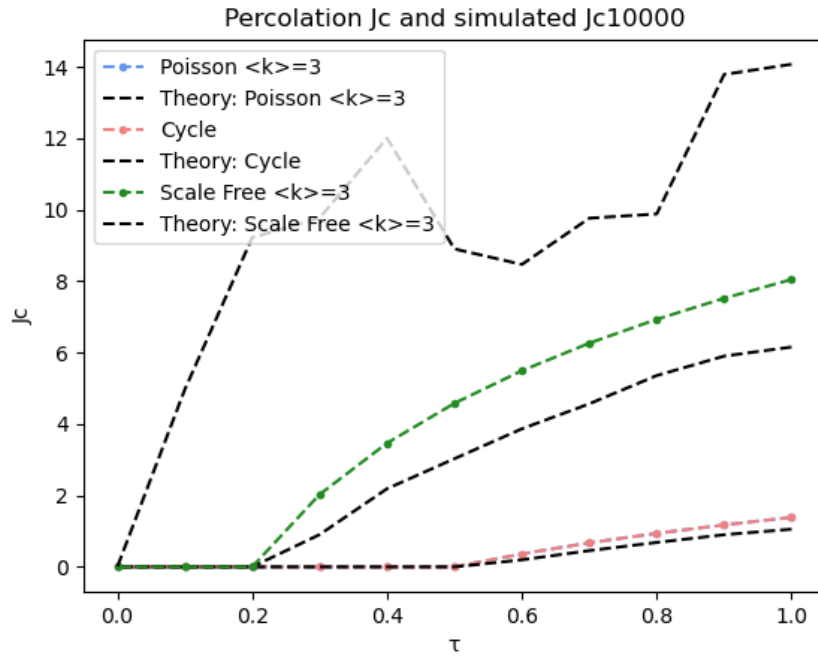


Figure 3: Confronto self percolation and simulation con  $n = 10000$  e 100 iterazioni

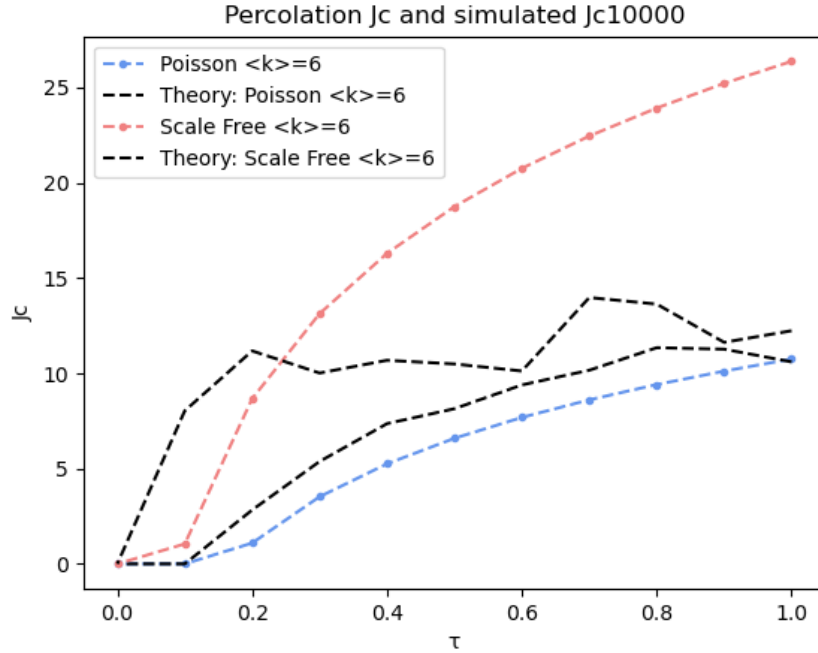


Figure 4: Confronto self percolation and simulation con  $n = 10000$  e 100 iterazioni

#### 4.4 Multiplex networks

I risultati ottenuti dalla simulazione del modello multiplex sono mostrati in figura 5. Nei diagrammi di fase, notiamo che con un valore  $\tau$  sufficientemente elevato, esiste sempre una soglia critica di  $q$  oltre la quale è virtualmente impossibile arrestare l'epidemia. L'aumento di  $t$  e  $q$  comporta una diffusione dell'infezione sempre più ampia e difficile da contenere, poiché i valori di  $J_c$  aumentano in modo significativo. Nella rappresentazione grafica del diagramma di fase, possiamo osservare come la curva della soglia di percolazione approssimi un'iperbole.

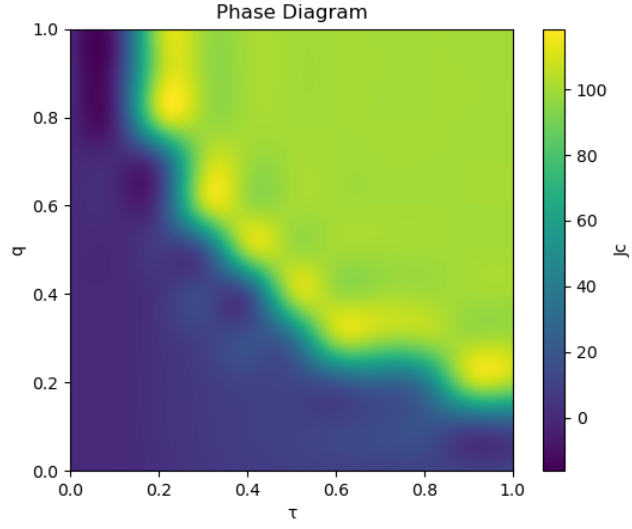


Figure 5: Diagramma di fase al variare di  $q$  e  $\tau$ : grafo Poisson con  $k = 6$ , nodi 10000, iterazioni 100. Valore di  $J_{\max} = 100$

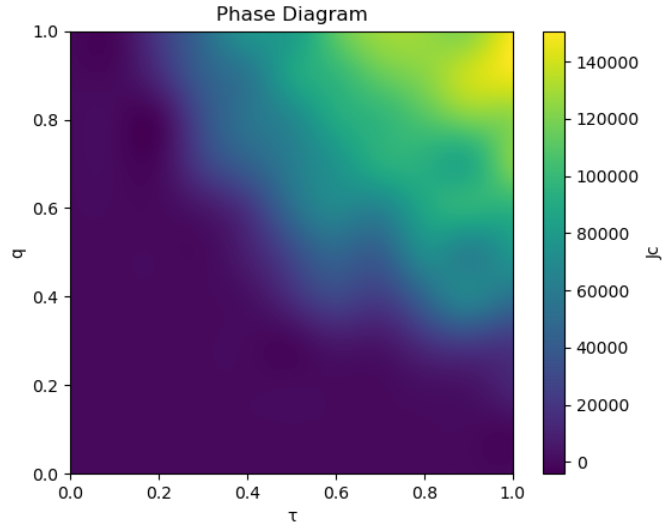


Figure 6: Diagramma di fase al variare di  $q$  e  $\tau$ : grafo Poisson con  $k = 6$ , nodi 10000, iterazioni 100. Valore di  $J_{\max} = \inf$

## 5 Conclusione

Abbiamo esaminato l'interazione tra la diffusione di un'epidemia e la percezione del rischio nelle reti multiplex, utilizzando approssimazioni di campo medio e un metodo self-organized che permette di determinare la soglia di percolazione in una sola simulazione. La nostra attenzione si è concentrata sulle reti multiplex, poiché le persone si infettano attraverso contatti fisici, ma spesso raccolgono informazioni da una rete informativa, che può differire notevolmente dalle reti fisiche. Abbiamo scoperto che la somiglianza tra le reti fisiche e informative è fondamentale per fermare l'infezione se il livello di precauzione è sufficientemente alto. Se le reti sono molto diverse, non è possibile evitare l'epidemia. Questa transizione avviene bruscamente, anche per bassi valori di probabilità di infezione, senza segnali premonitori. Un fenomeno simile può essere preso come esempio degli svantaggi dell'eccessiva dipendenza da fonti esterne, quali i social media, come unica fonte di informazione.

## 6 Altri Risultati

### 6.1 Mean-field approximation

Qui vengono mostrate tutte le valutazione effettuate con il metodo di approssimazione del campo medio al variare di  $k$ .

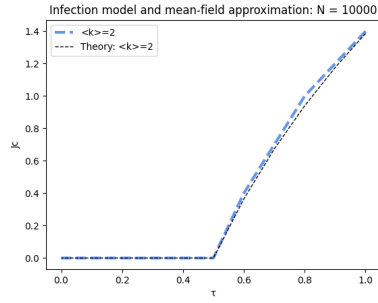


Figure 7:  $k = 2$ : 10000 iterazioni

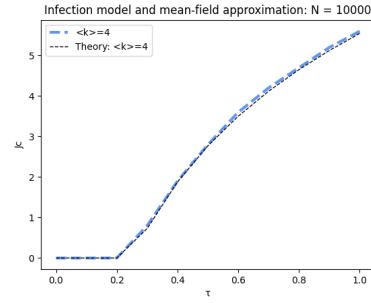


Figure 8:  $k = 4$ : 10000 iterazioni

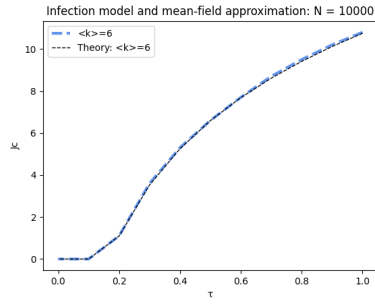


Figure 9:  $k = 6$ : 10000 iterazioni

## 6.2 Simple percolation

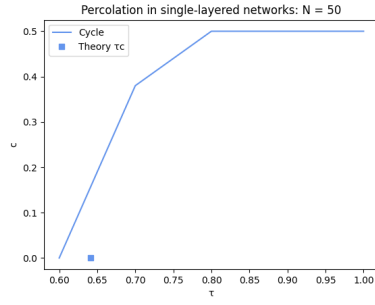


Figure 10: Cycle

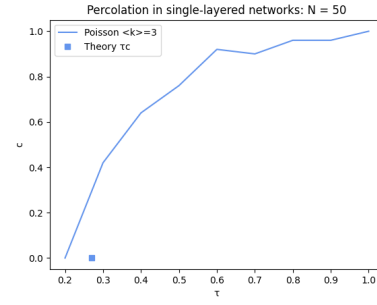


Figure 11: Poisson:  $k = 3$

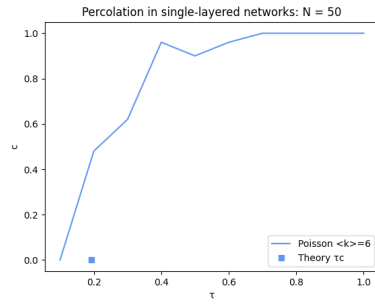


Figure 12: Poisson:  $k = 6$

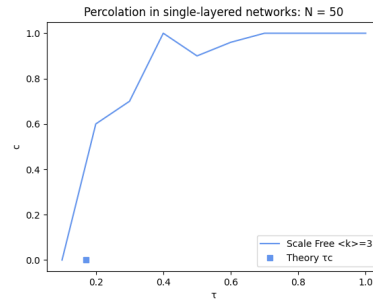


Figure 13: Scale-Free:  $k = 6$

Figure 14: Valutazione della probabilità di percolazione al variare della tipologia di grafo e del numero di nodi, con  $n = 50$  e 10000 iterazioni

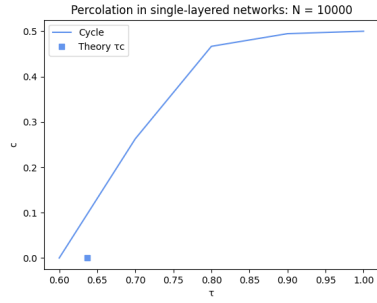


Figure 15: Cycle

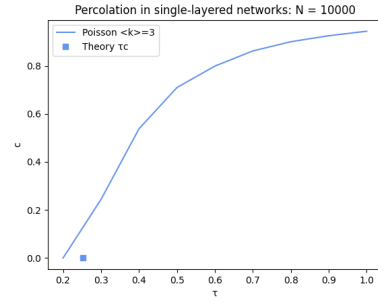


Figure 16: Poisson:  $k = 3$

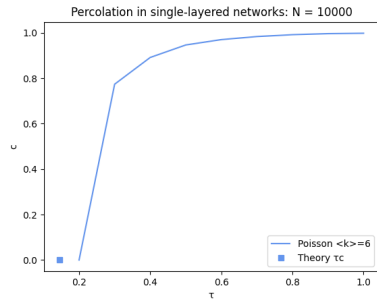


Figure 17: Poisson:  $k = 6$

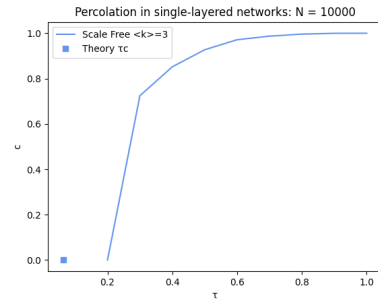


Figure 18: Scale-Free:  $k = 3$

Figure 19: Valutazione della probabilità di percolazione al variare della tipologia di grafo e del numero di nodi, con  $n = 10000$  e 10000 iterazioni

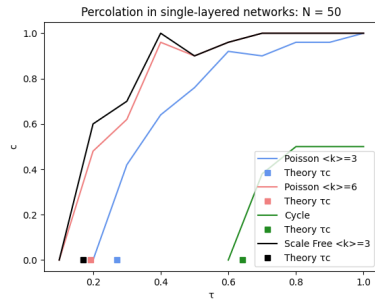


Figure 20: Valutazione della probabilità di percolazione al variare della tipologia di grafo e del numero di nodi

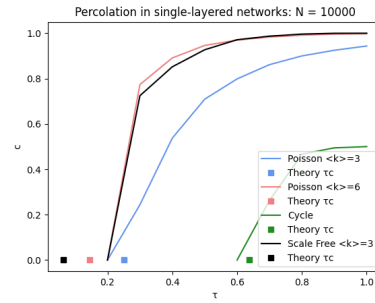


Figure 21: Valutazione della probabilità di percolazione al variare della tipologia di grafo e del numero di nodi

Figure 22: Valutazione della probabilità di percolazione al variare della tipologia di grafo e del numero di nodi



### 6.3 Infezione percezione del rischio

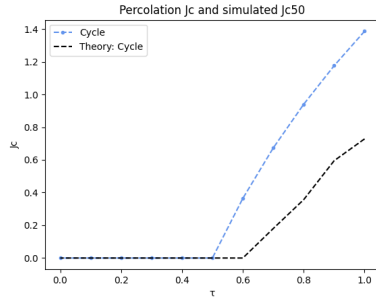


Figure 23: Self percolation Cycle with  $k = 2$

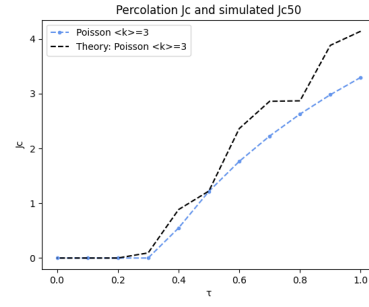


Figure 24: Self percolation Poisson with  $k = 3$

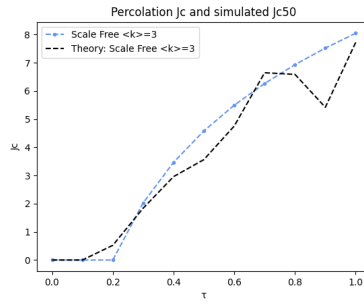


Figure 25: Self percolation Scale-Free with  $k = 3$

Figure 26: Confronto self percolation and simulation con  $n = 50$  e 10000 iterazioni

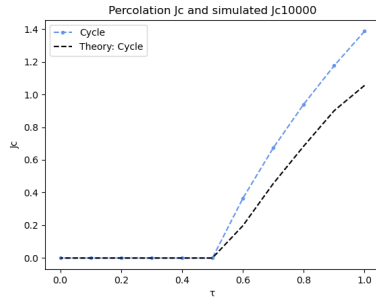


Figure 27: Cycle:  $k = 2$

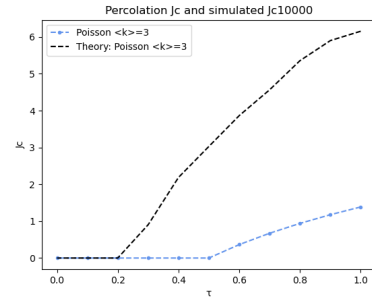


Figure 28: Poisson:  $k = 3$

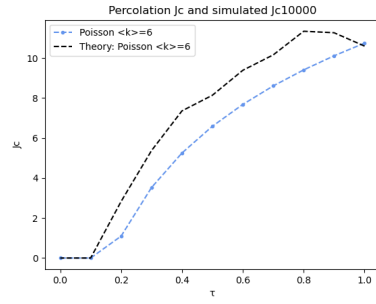


Figure 29: Poisson:  $k = 6$

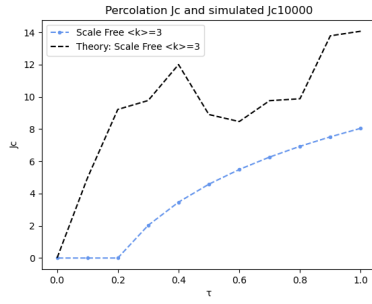


Figure 30: Scale-Free:  $k = 3$

Figure 31: Confronto self percolation and simulation con  $n = 10000$  e 100 iterazioni

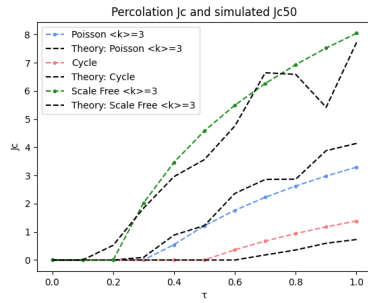


Figure 32: Confronto self percolation and simulation con  $n = 50$  e 10000 iterazioni

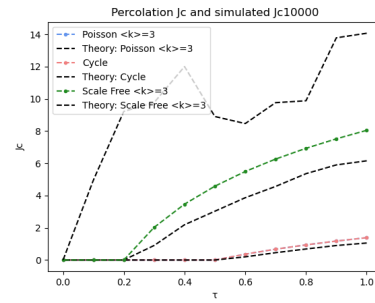


Figure 33: Confronto self percolation and simulation con  $n = 10000$  e 100 iterazioni

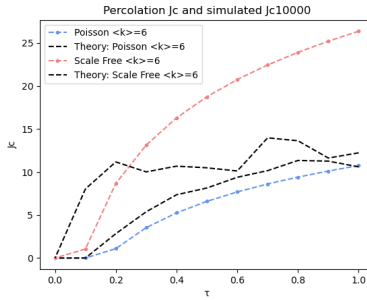


Figure 34: Confronto self percolation and simulation con  $n = 10000$  e 100 iterazioni

Figure 35: Confronto self percolation and simulation con  $n = 10000$  e 100 iterazioni

## 6.4 Multiplex networks

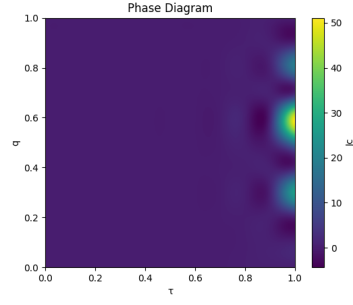


Figure 36: Cycle

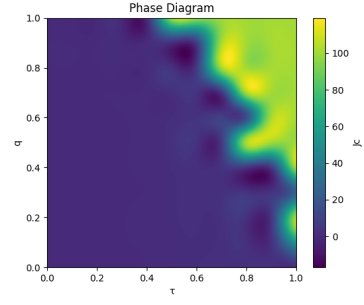


Figure 37: Poisson:  $k = 3$

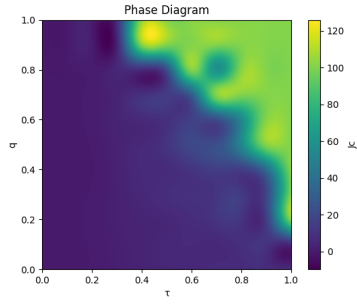


Figure 38: Scale-Free:  $k = 3$

Figure 39: Diagramma di fase al variare di  $q$  e  $\tau$  con  $n = 100$  e 10000 iterazioni.  $J_{\max} = \inf$

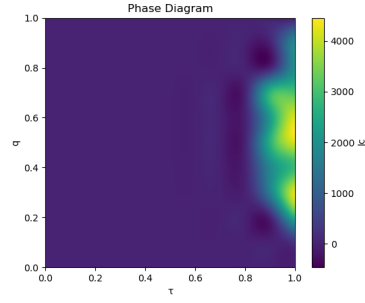


Figure 40: Cycle

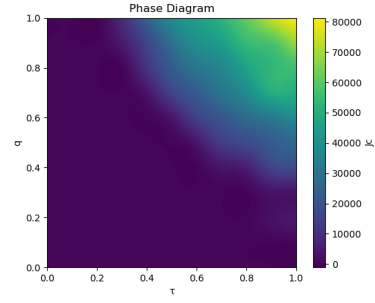


Figure 41: Poisson:  $k = 3$

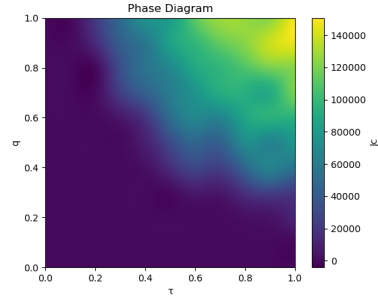


Figure 42: Poisson:  $k = 6$

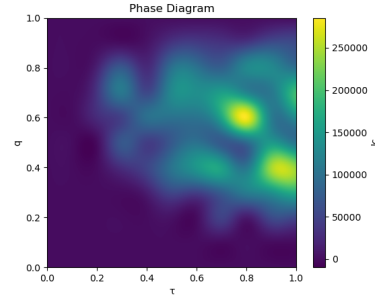


Figure 43: Scale-Free:  $k = 3$

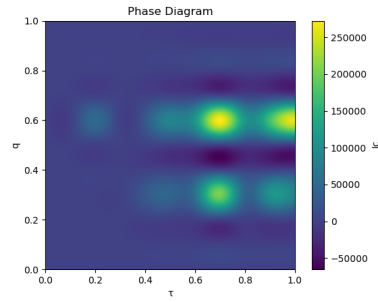


Figure 44: Scale-Free:  $k = 6$

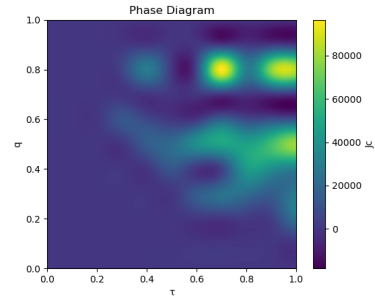


Figure 45: PG:Poisson:  $k = 6$  +  
VG:Scale-Free:  $k = 6$

Figure 46: Diagramma di fase al variare di  $q$  e  $\tau$  con  $n = 10000$  e 100 iterazioni.  $J_{\max} = \inf$

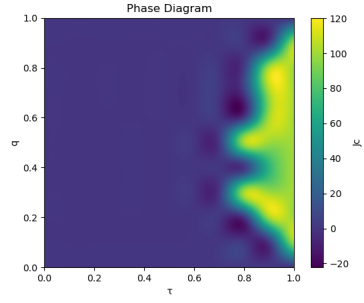


Figure 47: Cycle

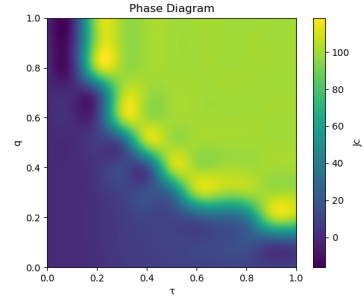


Figure 48: Poisson:  $k = 3$

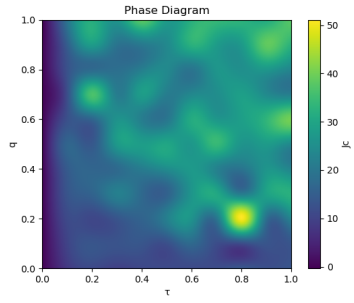


Figure 49: Scale-Free:  $k = 6$

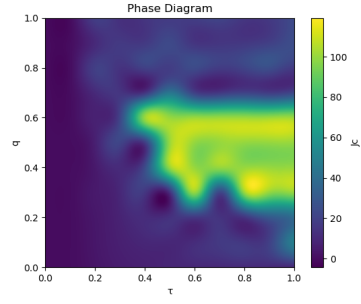


Figure 50: PG:Poisson:  $k = 6$  +  
VG:Scale-Free:  $k = 6$

Figure 51: Diagramma di fase al variare di  $q$  e  $\tau$  con  $n = 10000$  e 100 iterazioni.  $J_{\max} = 100$