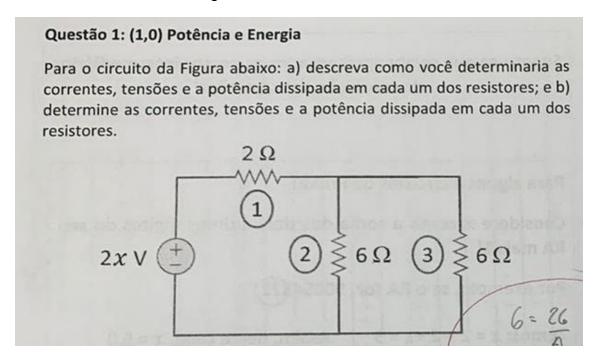
Correção prova de Eletricidade - Marco Bockoski

Questão 1: Potência e Energia



Teoria: A resolução de circuitos mistos (com associação de componentes em paralelo e série) se baseia em determinar o valor "v" da tensão de alimentação que produz uma corrente "i" sob um elemento de resistência "r".

Em geral, determina-se a resistência equivalente do circuito e aplica-se a lei de Ohm para determinar o valor de corrente do circuito (geralmente são dados valores de resistência e da tensão da fonte).

Resolução: passo a passa com as respostas da questão "a" em vermelho e contas da alínea "b" em azul.

Primeiro, determina-se a resistência equivalente do circuito, para a obtenção da corrente total do circuito (produzida pela fonte).

Resistor 2 e 3 estão em paralelo, e o equivalente dele está em série com o Resistor 1, portanto:

Resistência em série: $R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$

Resistência entre 2 resistores em paralelo: $Req = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$

Assim, com:

$$R_1 = 2\Omega$$

$$R_2 = 6\Omega$$

$$R_3 = 6\Omega$$

$$R_{eq} = R_1 + \left(\frac{R_3 R_2}{R_3 + R_2}\right) \to R_{eq} = 2 + \left(\frac{6^2}{2.6}\right) \to R_{eq} = 2 + \left(\frac{6}{2}\right) \to R_{eq} = 5\Omega$$

A tensão da fonte valendo: $V_{cc} = 2xV$

Então, pela Lei de Ohm:

Lei de Ohm: V = R.I ou $V_{cc} = R_{eq}.I_t$

$$I_t = \frac{V_{cc}}{R_{eq}} = \frac{2x}{5} \rightarrow I_t = 0.4xA$$

Percebendo-se que o resistor R_1 está em série com o circuito, nota-se que a corrente que passa em R_1 corresponde a I_t . Portanto, é possível obter o valor de tensão e potência sobre o resistor R_1 .

$$I_{R1} = I_t$$

Lei de Ohm: V = R.I, nesse caso seria: $V_{R1} = R_1.I_t$

Expressão da potência: P = V.I, nesse caso seria: $P_{R1} = V_{R1}.I_t$

Fazendo as contas:

$$V_{R1} = 2.0,4x \rightarrow V_{R1} = 0,8xV$$

$$P_{R1} = 0.8x.0.4x \rightarrow P_{R1} = 0.32x^2W$$

Diferentemente, os resistores R_2 e R_3 estão em paralelo, e dividem os mesmos nós (ambos ligam-se ao mesmo terminal de R_1 e ao terminal negativo da fonte), portanto, a tensão entre os terminais de R_2 e R_3 são iguais. E decorrente do valor de resistência igual dos resistores (6Ω), sob eles passará um valor de corrente igual também.

A tensão entre esses resistores corresponde a tensão da fonte descontado o valor da tensão sob o resistor R_1 . É como se a fonte distribuísse tensão entre os elementos, seguindo a uma lei de conservação de energia:

$$V_{fonte} = \sum V_{elementos}$$

Nesse caso:

$$V_{cc} = V_{R1} + V_{R2}$$
 ou $V_{cc} = V_{R1} + V_{R3}$ já que $V_{R2} = V_{R3}$ $V_{R2} = V_{R3} = V_{cc} - V_{R1} \rightarrow V_{R2} = V_{R3} = 2x - 0.8x \rightarrow V_{R2} = V_{R3} = 1.2xV$

De modo análogo ao resistor R_1 , as expressões de corrente e potência:

$$V_{R2} = R_2. I_{R2} \rightarrow I_{R2} = \frac{V_{R2}}{R_2}$$

$$P_{R2} = V_{R2}.I_{R2}$$

$$V_{R3} = R_3. I_{R3} \to I_{R3} = \frac{V_{R3}}{R_3}$$

$$P_{R3} = V_{R3} . I_{R3}$$

Fazendo as contas:

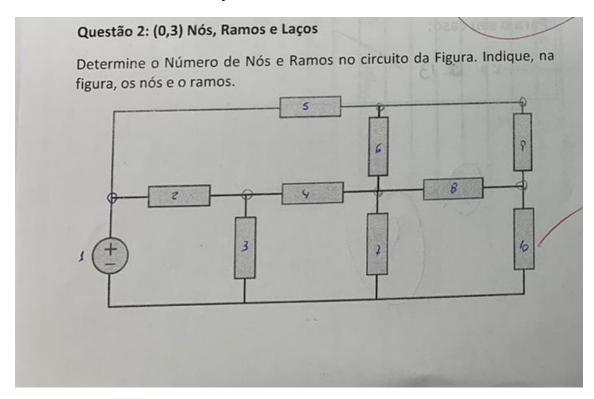
$$I_{R2} = \frac{V_{R2}}{R_2} \rightarrow I_{R2} = \frac{1.2x}{6} \rightarrow I_{R2} = 0.2xA$$

$$P_{R2} = V_{R2}$$
. $I_{R2} \rightarrow P_{R2} = 1.2x$. $0.2x \rightarrow P_{R2} = 0.24x^2W$

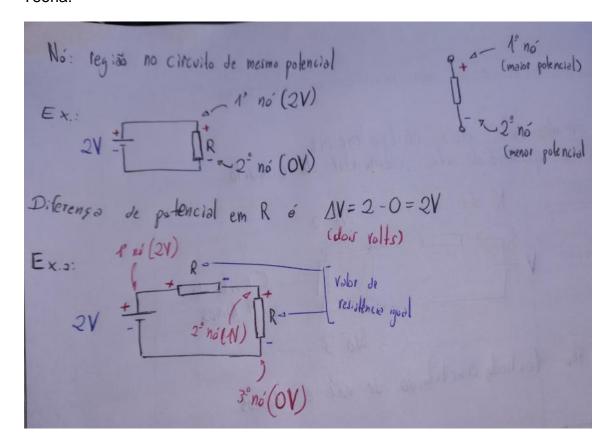
$$I_{R3} = \frac{V_{R3}}{R_2} \rightarrow I_{R3} = \frac{1.2x}{6} \rightarrow I_{R3} = 0.2xA$$

$$P_{R3} = V_{R3}$$
. $I_{R3} \rightarrow P_{R3} = 1.2x$. $0.2x \rightarrow P_{R3} = 0.24x^2W$

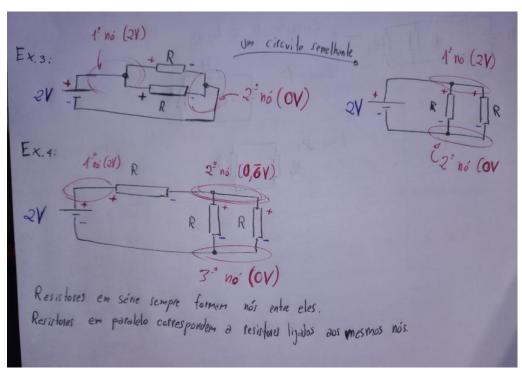
Questão 2: Nós, Ramos e Laços.

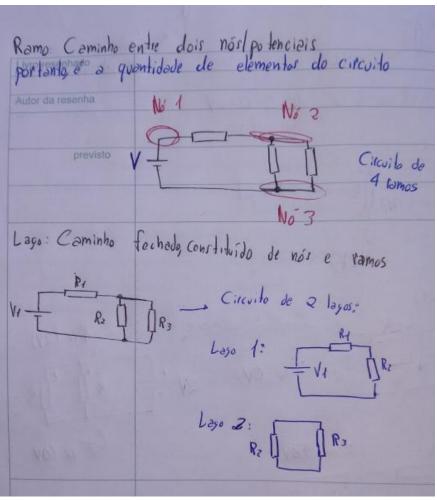


Teoria:

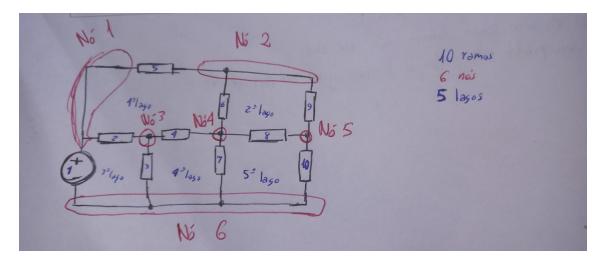


Todo nó corresponde a um valor de tensão nodal, ou, valor de potencial elétrico.





Resolução:



Uma maneira de comprovar a análise é pelo teorema fundamental da topologia de rede:

$$r = l + n - 1$$

r correspondendo a quantidade de ramos, l de laços e n de nós:

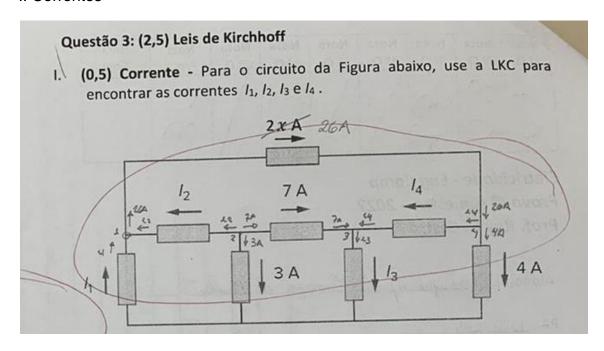
$$10 = 5 + 6 - 1 \rightarrow 10 = 10$$

Para mais análise de topologia de rede e explicações mais claras de cada elemento do circuito, conferir o seguinte link:

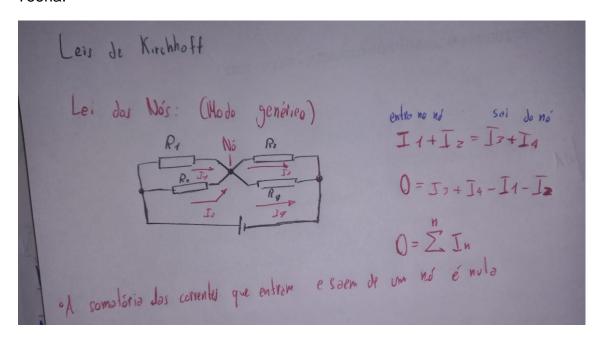
https://www.youtube.com/watch?v=XRpKrDkAuow

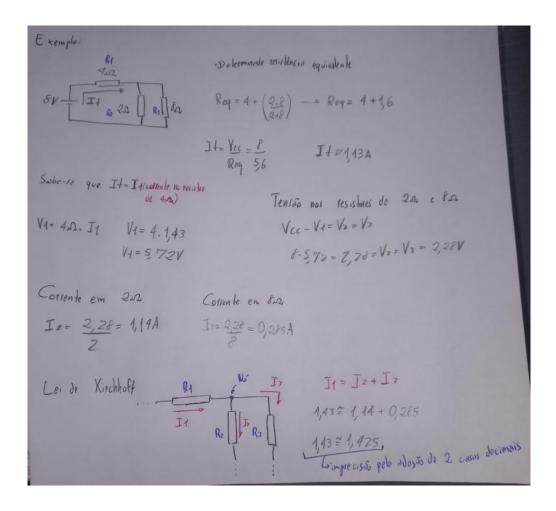
Questão 3: Leis de Kirchhoff

I. Correntes

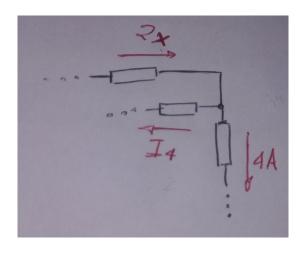


Teoria:

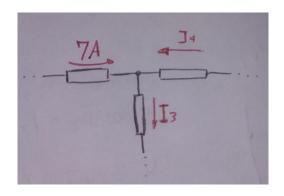




Resolução:

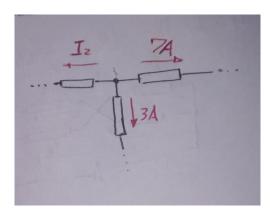


$$2x = 4 + I_4$$
$$(2x - 4)A = I_4$$



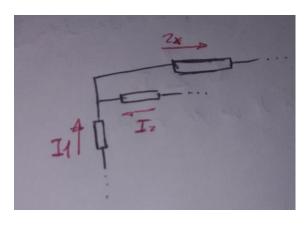
$$I_3 = 7 + I_4$$

 $I_3 = 7 + 2x - 4$
 $I_3 = (3 + 2x)A$



(É impossível que todas as correntes saiam do nó, nesse caso, I_2 certamente será um valor negativo, portanto, isso significa que sua orientação apresenta o sentido oposto do sentido real, é uma corrente que entra no nó, ao invés de sair como as correntes de 7A e 3A)

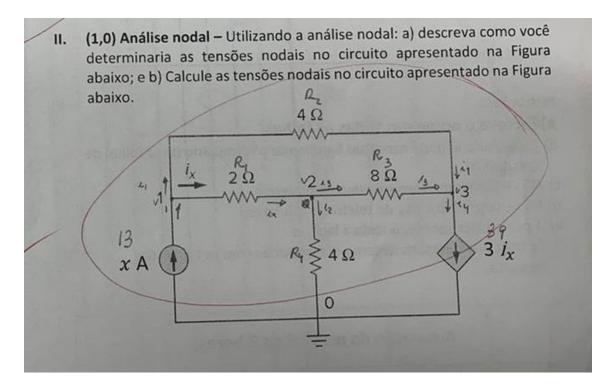
$$I_2 + 3 + 7 = 0 \rightarrow I_2 = -10A$$



$$I_1 + I_2 = 2x \rightarrow I_1 - 10 = 2x$$

 $I_1 = (2x + 10)A$

II. Análise Nodal



Teoria:

A análise das tensões nodais se trata basicamente da aplicação da lei dos nós que desencadeará um sistema de equações, da quantidade de incógnitas dependendo da quantidade de tensões nodais que se deseja determinar.

Resolução:

Correntes do circuito:

$$I_{x} = I_{R1} = \frac{V_{1} - V_{2}}{2}$$

$$I_{R2} = \frac{V_{1} - V_{3}}{4}$$

$$I_{R3} = \frac{V_{2} - V_{3}}{8}$$

$$I_{R4} = \frac{V_{2}}{4}$$

Análise do nó 1:

$$x = I_{R1} + I_{R2}$$

$$x = \frac{V_1}{2} - \frac{V_2}{2} + \frac{V_1}{4} - \frac{V_3}{4} \to 4. x = 2. V_1 - 2. V_2 + V_1 - V_3$$

$$4. x = 3. V_1 - 2V_2 - V_3$$

Análise do nó 2:

$$I_{R1} = I_{R3} + I_{R4}$$

$$\frac{V_1}{2} - \frac{V_2}{2} = \frac{V_2}{8} - \frac{V_3}{8} + \frac{V_2}{4}$$

$$0 = \frac{V_2}{8} - \frac{V_3}{8} + \frac{V_2}{4} - \frac{V_1}{2} + \frac{V_2}{2}$$

$$0 = V_2 - V_3 + 2 \cdot V_2 - 4 \cdot V_1 + 4 \cdot V_2$$

$$0 = -4 \cdot V_1 + 7V_2 - V_3$$

Análise do nó 3:

$$3.I_x = I_{R3} + I_{R2}$$

$$3.\left(\frac{V_1}{2} - \frac{V_2}{2}\right) = \frac{V_2}{8} - \frac{V_3}{8} + \frac{V_1}{4} - \frac{V_3}{4}$$

$$0 = \frac{V_2}{8} - \frac{V_3}{8} + \frac{V_1}{4} - \frac{V_3}{4} - \frac{3.V_1}{2} + \frac{3.V_2}{2}$$

$$0 = V_2 - V_3 + 2.V_1 - 2.V_3 - 12V_1 + 12V_2$$

$$0 = -10V_1 + 13V_2 - 3.V_3$$

$$\begin{cases} 3.V_1 - 2V_2 - V_3 = 4.x \\ -4.V_1 + 7V_2 - V_3 = 0 \\ -10V_1 + 13V_2 - 3.V_3 = 0 \end{cases}$$

Adoção de x = 13 para resolução do sistema.

A resolução de sistema linear foi utilizada o método de Cramer, no qual, considerando o sistema linear, realizam-se 4 determinantes: uma da matriz normal e outras 3, substituindo uma coluna pelos valores da coluna resposta.

Assim, a partir de uma relação de razão entre esses determinantes e o determinante da matriz normal, determina-se valor de V_1 , V_2 e V_3 .

Realização do determinante da matriz normal utilizando o método de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 10 & -13 & 3 \end{vmatrix} + 2.(-1).10 + (-1).(-4).(-17)$$

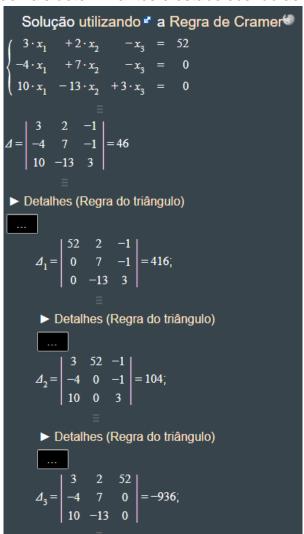
$$- [10.7.(-1)] - [(-13), (-1).3] - [3.(-4).2]$$

$$63 - 20 - 52 + 70 - 39 + 74$$

$$-9 + 55 = 1$$

$$1 = 46$$

Resolvendo os demais determinantes e estabelecendo as razões, têm-se:



Respostas Finais:

$$x_{1} = \Delta_{1} / \Delta = \frac{416}{46} = \frac{208}{23}$$

$$x_{2} = \Delta_{2} / \Delta = \frac{104}{46} = \frac{52}{23}$$

$$x_{3} = \Delta_{3} / \Delta = \frac{-936}{46} = \frac{-468}{23}$$
Resposta:
$$x_{1} = \frac{208}{23}$$

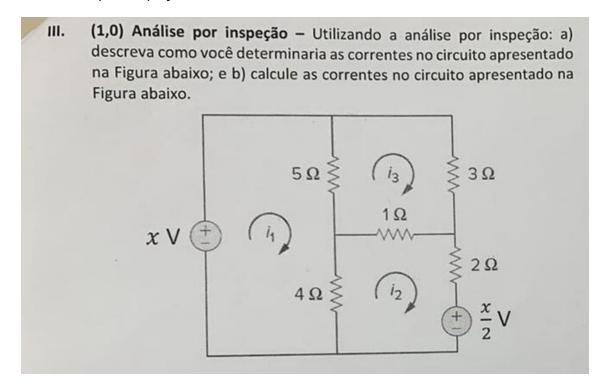
$$x_{2} = \frac{52}{23}$$

$$x_{3} = \frac{-468}{23}$$

Sendo x_1 , x_2 e x_3 ; os valores de V_1 , V_2 e V_3 ; respectivamente.

Site utilizado: https://matrixcalc.org/pt/slu.html

III. Análise por inspeção



Teoria: A análise por inspeção é bem metódica, e requer conhecimento decorado ou utilização de material consultivo para realização.

Uma análise por inspeção se trata na construção de uma matriz conforme a quantidade de malhas que o circuito tem. A matriz resposta corresponde a valores de tensão, enquanto a matriz de incógnitas corresponde aos valores de resistência e corrente. Assim, as matrizes são desse tipo:

$$\begin{pmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & \cdots & R_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$$

Correspondentes ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} I_1.\,R_{11} + \cdots + I_1.\,R_{1n} = V_1 \\ & \vdots \\ I_n.\,R_{n1} + \cdots + I_n.\,R_{nn} = V_n \end{cases}$$

Algumas peculiaridades da construção dessa matriz são:

 R_{kk} isto é, a resistência das posição da matriz em que o valor da linha é o mesmo da coluna R_{11}, R_{22} , etc...

No caso dessa resistência, ela sempre corresponderá ao somatório das resistências constituintes da malha k, isto é, considere que uma malha 1 é composta por resistores de 1Ω , 7Ω e 5Ω , o valor de R_{11} será 13Ω .

 R_{kj} seria o valor das resistências da posição da matriz em que o valor da linha e da coluna diverge, por exemplo: R_{12} e R_{32} . Essa resistência corresponde ao oposto da resistência em comum entre as malhas k e j.

Exemplificação: malhas 3 e 4 dividem um resistor de 8Ω , portanto, os valores de R_{34} seria de -8Ω , tal como R_{43} .

As tensões de cada linha V_k correspondem às fontes presentes na malha, considerados de valor positivo quando a fonte faz papel de gerador (não tem sentido contrário a corrente de malha), e negativa quando comporta-se como receptor (tem sentido contrário à corrente de malha).

Gerador: Corrente sai pelo pólo positivo, e entra pelo pólo negativo (Típico de fonte).

Receptor: Corrente entre pelo pólo positivo, e sai pelo negativo (Típico de resistores).

As correntes I_k correspondem às incógnitas.

Resolução:

$$R_{11} = 4\Omega + 5\Omega = 9\Omega$$

$$R_{22} = 1\Omega + 3\Omega + 5\Omega = 9\Omega$$

$$R_{33} = 1\Omega + 2\Omega + 4\Omega = 7\Omega$$

$$R_{12} = R_{21} = -5\Omega$$

$$R_{32} = R_{23} = -1\Omega$$

$$R_{31} = R_{13} = -4\Omega$$

$$V_1 = xV$$
, $V_2 = -\frac{x}{2}V$, $V_3 = 0V$

Montando a matriz:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -5 & -4 \\ -5 & 9 & -1 \\ -4 & -1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -\frac{x}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Adotando x = 13

$$\begin{bmatrix} 9 & -5 & -4 \\ -5 & 9 & -1 \\ -4 & -1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -\frac{13}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

A resolução é a mesma utilizada no exercício anterior, Cramer com Sarrus

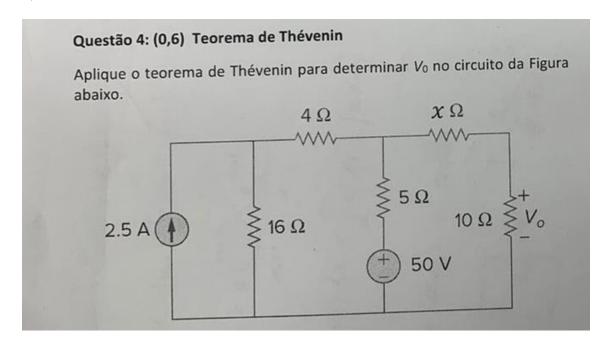
$$I_1 = 2,78A$$

$$I_2 = 1,01A$$

$$I_3 = 1,73A$$

Utilização do software para obtenção das respostas: https://matrixcalc.org/pt/slu.html#solve-using-Cramer%27s-rule%28%7B%7B9,-5,-4,13%7D,%7B-5,9,-1,-13/2%7D,%7B-4,-1,7,0%7D%7D%29

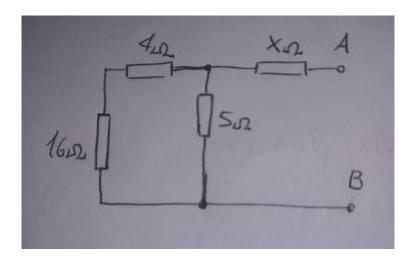
Questão 4: Teorema de Thévenin



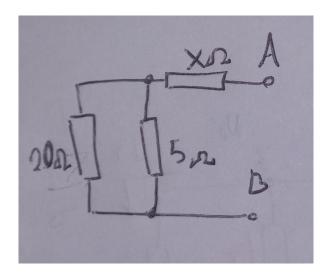
Teoria: O método de Thévenin para simplificação de circuitos se baseia em substituir um sistema inteiro por um simples, composto unicamente de 1 resistor e 1 fonte de tensão. Para isso, determina-se a tensão entre os terminais do que ligam a carga desejada (no caso o resistor de 10Ω), e a resistência equivalente do circuito.

Para determinar a resistência equivalente, também anula-se o efeito das fontes cujas impedâncias não competem ao cálculo do equivalente. A fonte de corrente fica em aberto e a fonte de tensão vira um curto.

Resolução:



 16Ω e 4Ω em série: substitui-se por 20Ω



 20Ω em paralelo com 5Ω : substitui por 4Ω

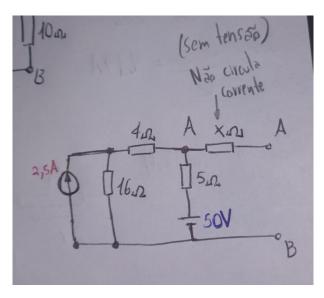
$$\frac{20.5}{20+5} = 4\Omega$$

 $x\Omega$ e 4Ω em série: substitui-se por $(4+x)\Omega$

Essa resistência equivalente também pode ser chamada de resistência de Thévenin.

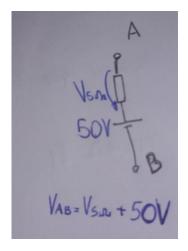
A determinação da tensão exige uma observação um pouco mais detalhada, requer mais conhecimento.

Primeiramente, deve-se entender a tensão entre quais nós, que corresponde aos nós A e B na imagem abaixo.

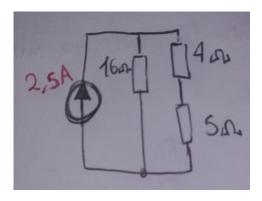


Os valores de tensão que são exigidos para determinar a tensão V_{AB} são apenas o do resistor de 5Ω ($V_{5\Omega}$) e da fonte de 50V. O resistor de $x\Omega$ não entra

na conta por não apresentar tensão, pois está conectado a dois nós de mesmo potencial, portanto, por ele não passa corrente e não há tensão entre seus terminais.



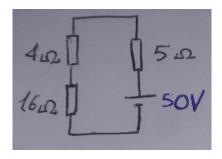
Cálculo da corrente em 5Ω pelo método de superposição, anulando o efeito da fonte de tensão (virou curto).



Resolvendo pelo divisor de corrente:

$$I_{5\Omega}=2.5\frac{16}{25} \rightarrow I_{5\Omega}=1.6A$$
 (Contribuição da fonte de corrente)

Cálculo da corrente em 5Ω pelo método de superposição, anulando o efeito da fonte de corrente (virou aberto).

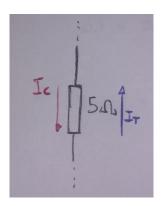


Resolvendo por resistência equivalente:

$$R_{eq} = 4 + 16 + 5 = 25\Omega$$

Aplicando Lei de Ohm:

 $I_{5\Omega} = \frac{50}{25} = 2A$ (Contribuição da fonte de tensão)



Já que as correntes tem sentidos opostos no resistor de 5Ω , então uma subtração entre os valores determina o seu valor de corrente, sendo a corrente de maior intensidade a que define o sentido da corrente no resistor:

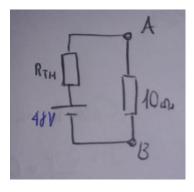
$$I_{50} = 2 - 1.6 = 0.4A$$

$$V_{5\Omega} = I_{5\Omega}. \, 5\Omega \rightarrow V_{5\Omega} = 0.4. \, 5 \rightarrow V_{5\Omega} = 2V$$

Por fim, a tensão V_{AB} é dada por $V_{AB}=50-V_{5\varOmega}$ $ightarrow V_{AB}=48V$

Assim, o equivalente Thévenin é:

$$\begin{cases} R_{TH} = (4+x)\Omega \\ V_{TH} = 48V \end{cases}$$

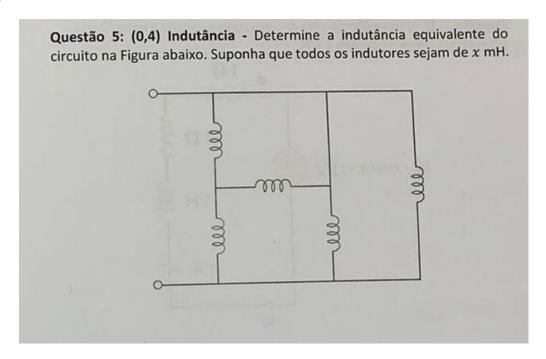


Por divisor de tensão, determina-se a tensão sob o resistor de 10Ω

$$V_{10\Omega} = 48. \frac{10}{10 + 4 + x}$$

$$V_{10\Omega} = \left(\frac{480}{14 + x}\right) V$$

Questão 5: Indutância

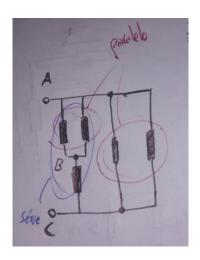


Teoria: A indutância equivalente de nada muda em relação à resistência equivalente, claro que as justificativas são diferentes, porém a relação estabelecida é análoga, portanto, é possível comparar:

$$L_{paralelo} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

$$L_{s\acute{e}rie} = L_1 + L_2$$

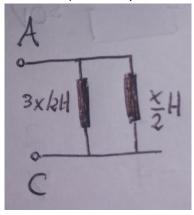
Uma análise minuciosa deve ser feita para identificar como os elementos estão associados, podendo ser escritos dessa maneira mais visível:



$$L_{paralelo} = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$$

$$L_{s\acute{e}rie} = x + \frac{x}{2} = \frac{3x}{2}$$

No fim, temos um indutor de x/2H em paralelo com outro de 3x/2H:



$$L_{eq} = \frac{\frac{3x}{2} \cdot \frac{x}{2}}{\frac{3x}{2} + \frac{x}{2}} = \frac{\frac{3x^2}{4}}{2x} = \frac{3x}{8}H$$

Questão 6: Corrente Alternada

Questão 6: (0,7) Corrente alternada

A partir das tensões apresentadas abaixo: a) Determine a amplitude, a fase, o período e a frequência de cada uma delas; B) Calcule a defasagem entre elas. Qual das duas está mais adiantada; C)Apresente as senoides na forma de fasores; e d) Calcule a razão entre elas.

$$v_1(t) = 25 \cos(30 \cdot t + 50^\circ)$$

$$v_2(t) = 20 \cdot \text{sen} (30 \cdot t + x^\circ)$$

A teoria de corrente alternada é extensa e cansativa, portanto, privei de escrever um texto para ser mais sucinto na resolução desses exercícios:

(Resolução apenas para V_1 , seguir o raciocínio exercido pode ser útil para resolução de V_2).

Expressão:

 $v1(t) = 25 \cdot \cos (30t + 50^{\circ})$

 $v1(t) = amplitudade \cdot cos ([velocidade angular].t + fase)$

Letra "a":

Amplitude = 25V

Fase = 50°

Velocidade angular = $2\pi/[Período]$

Período = $\pi/15$ s 0u **209,44ms**

Frequência = 1 / [Período]

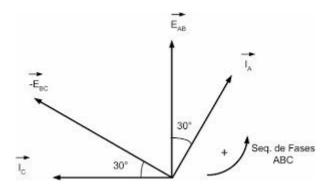
Frequência = 4,77Hz

Letra "b":

Defasagem entre fases significa a diferença entre eles (sempre o menor entre os ângulos).

A diferença entre os ângulos 90° e 60° pode ser de 30° ou de 330°, adota-se de 30°.

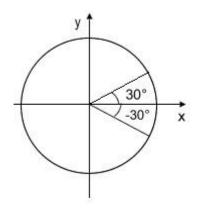
Em relação a adiantamento e atraso de fasores, considera-se o valor de fase mais próximo de 360° (mais próximo de cos0° = 1).



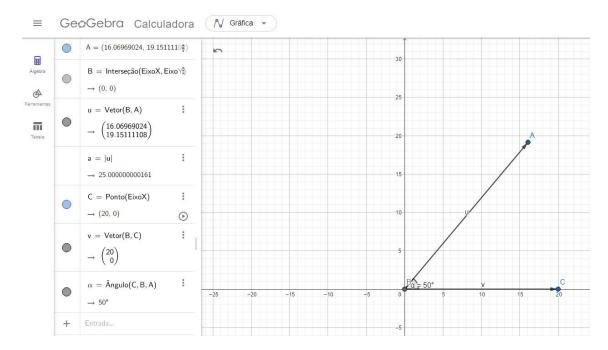
Defasagem entre Eab e la corresponde ao exemplo dado acima.

No caso, entre fasores de fase 220° e 110°, o fasor de fase 220° está adiantado em relação ao de 110°.

No caso de ângulos como -30°, é considerado um 30° em sentido horário, correspondente a 330°. Assim, -30° está adiantado em relação a 30°.



Letra "c":



A representação de um fasor de v1 corresponde a um vetor de módulo (comprimento) 25 que forma um ângulo de 50° com o eixo das abscissas (dos x).

Letra "d":

A razão entre os fasores se trata da seguinte operação:

fasor1 = módulo1 . fase1

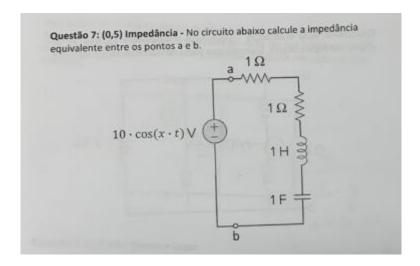
fasor2 = módulo2 . fase 2

(não mistura fase com módulo)

fasor1/fasor2 = [módulo1/módulo2] . [fase1 - fase2]

(não mistura fase com módulo)

Questão 7: Impedância



Impedância é uma grandeza complexa, que representa o impedimento total de passagem de corrente elétrica, seja pela resistência do material (propriedade física-químicas) ou pela reatância (propriedade eletromagnéticas do material). Portanto, é possível afirmar que a impedância é composta por uma parte real, que é a resistência; e pela parte complexa, que seria as reatâncias (capacitiva e indutiva).

Relação entre capacitância e reatância: $X_c = \frac{1}{i\omega c}$

Relação entre indutância e reatância: $X_L = j\omega L$

Portanto, impedância corresponde à: $Z = R + X_L + X_c$

$$Z = 1 + j\omega + \frac{1}{j\omega}$$

 ω é dado no circuito pela fonte, $\omega = x \, rad/s$

$$Z = 1 + jx + \frac{1}{jx}$$

$$Z = 1 + jx + \frac{1}{jx}$$

$$Z = 1 + j\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)$$

Com x = 13

$$Z = (1 + j13, 0769) \Omega$$

Na forma polar:

$$|Z| = \sqrt{1^2 + (13,0769)^2} = 13,1151\Omega$$

$$\theta = arctg\left(\frac{13,0769}{1}\right) = 85,63^{\circ}$$

$$\mathbf{Z} = (13, 1151\langle 85, 63^{\circ})\boldsymbol{\Omega}$$