Campo Elétrico em Corpos Extensos

A partir de determinação experimental, uma relação entre cargas elétricas foi determinada, uma relação de força em função da distância entre as cargas:

$$\overrightarrow{F_E} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon} . \frac{|q.Q|}{r^2}\right) . \hat{r}$$

Válida em casos que a carga é puntiforme (dimensões desprezíveis) e estacionária (inércia estática). O mesmo vale pra outra expressão de força elétrica, formulada em função do vetor campo elétrico:

$$\overrightarrow{F_E} = q\vec{E}$$

Assim, as duas expressões resultariam numa relação entre campo elétrico e a distância entre as cargas:

$$\vec{E} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon} . \frac{|q.Q|}{r^2}\right) . \hat{r}$$

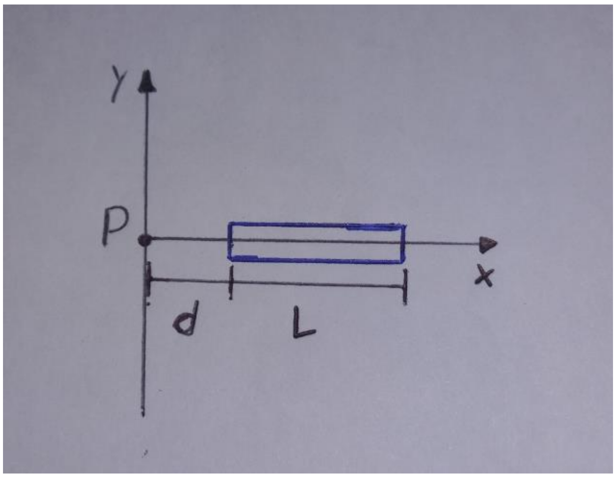
Apesar disso, as expressões de nada valeriam se tratando de corpos extensos, assim, criou-se a noção da configuração de cargas, que se trata do efeito de superposição das forças sobre determinado corpo/ponto. O tipo de configuração tratada nos seguintes casos é de uma configuração contínua de cargas, isto é, o corpo não é divisível facilmente em partes de modo a determinar exatamente o valor da carga em tal região.

Em geral, um corpo com distribuição uniforme de cargas possibilita o cálculo de seu campo por um cálculo que envolve separar algo contínuo em pequenas partes infinitesimais e depois somá-lo, o Cálculo Integral. Além disso, a ideia de separar em pequenas partes significa em adotar uma função prática para a Lei de Coulomb.

Então a metodologia do campo elétrico de corpos extensos irá envolver:

- Separação do corpo em vários pedaços pequenos infinitesimais, de modo a convertê-los em cargas pontuais.
- Cálculo do pequeno campo gerado pela carga pequena infinitesimal pela expressão de campo elétrico obtida pela Lei de Coulomb. (Conversão de algo contínuo em discreto
- Integração de cada contribuição dos pequenos campos a fim de determinar o campo resultante por superposição.

Campo Elétrico de uma Barra Uniformemente Carregada



Uma barra carregada uniformemente de comprimento L a distância d de um ponto P (também correspondente à origem do plano xOy. Deseja-se determinar o vetor campo elétrico nesse ponto P.

Separa-se a barra em vários pedaços infinitesimais dl, no qual, cada um deles tem uma carga dQ. Cada um deles terá uma distância diferente do ponto, consideramos o genérico caso de um campo gerado por um desses pedaços:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon}.\frac{dQ}{x^2}$$

O valor do campo elétrico varia conforme a distância, portanto, para integrar, deve-se adotar um valor diferencial de comprimento, o que ocorre nas distribuições de carga:

- Linear: $\lambda = \Delta Q/\Delta L$
- Superficial: $\sigma = \Delta Q/\Delta A$
- Volumétrica: $\rho = \Delta Q/\Delta \tau$

Podendo também ser levados ao infinitesimal (consideração de corpo pontual):

- Linear: $\lambda = dQ/dL$
- Superficial: $\sigma = dQ/dA$
- Volumétrica: $\rho = dQ/d\tau$

Nesse caso, utiliza-se o linear (pra fins de clareza, será utilizado dx) :

$$\lambda = \frac{dQ}{dx} \rightarrow dQ = \lambda dx$$

Assim:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}.\frac{dQ}{x^2} \rightarrow d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}.\frac{\lambda dx}{x^2}$$

O campo gerado pela superposição desses campos corresponde a soma integral desses campos, com a distância variando em d à $d + L$ (começo e fim da barra):

$$\int d\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{\lambda dx}{x^2}$$

$$\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{\lambda dx}{x^2} \rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \int \frac{dx}{x^2} \rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \int_{d}^{d+L} \frac{dx}{x^2}$$

Regra da potência pra integração: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \left[-\frac{1}{x}\right]_{d}^{d+L} \rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \left(-\frac{1}{d+L} - \left[-\frac{1}{d}\right]\right) \rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+L}\right)$$

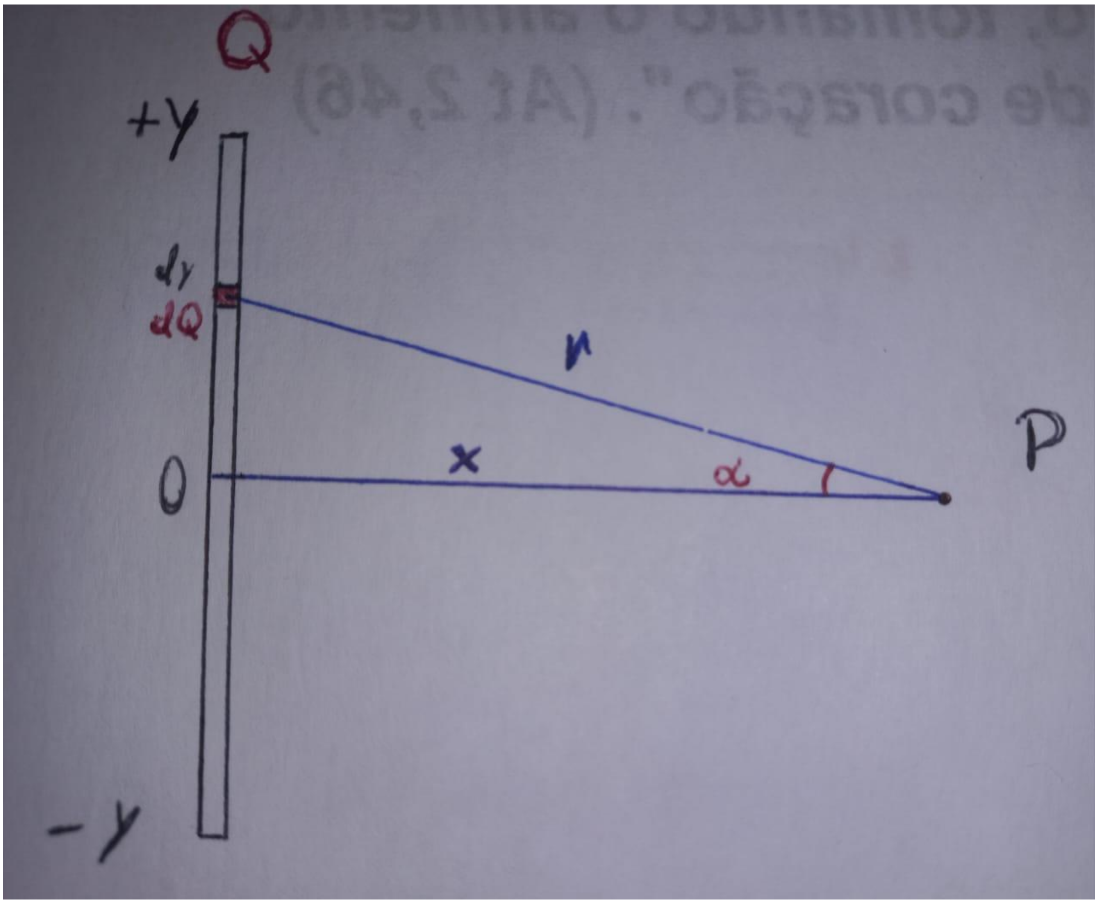
$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{d+L}{d(d+L)} - \frac{d}{d(d+L)}\right) \rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{d+L-d}{d(d+L)}\right) \rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{L}{d(d+L)}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon d(d+L)} \wedge Q = \lambda L \therefore \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q}{d(d+L)}$$

Referência:

- https://www.youtube.com/watch?v=eudGH8JpRdo

Campo Elétrico da Mediatriz da Barra Uniformemente Carregada



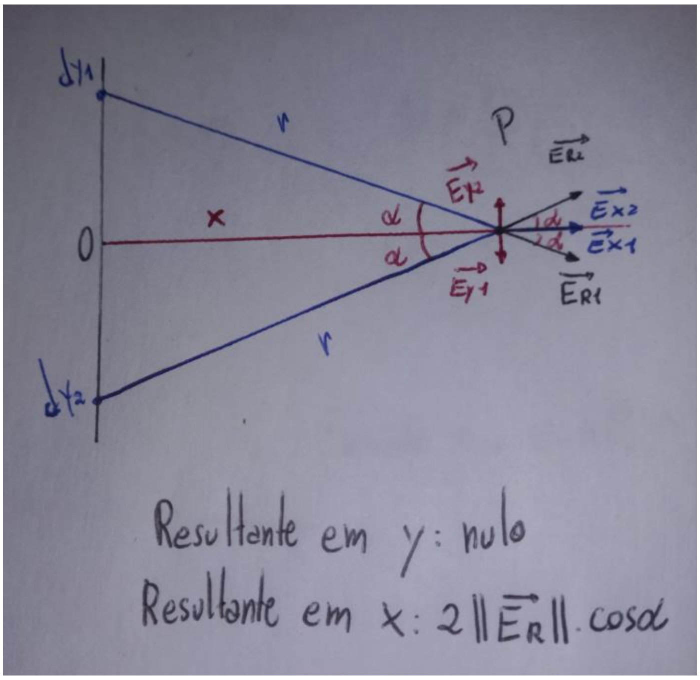
Procurando o campo no ponto P, com distância paralela ao eixo das abscissas ligada à mediatriz da barra, significa que a barra é separada em duas de comprimento igual. Adotando a metodologia convencional, divide-se a barra em pedaços pequenos infinitesimais dy, que contém dQ. Apesar disso, pela carga ser uniformemente distribuída à barra, considera-se:

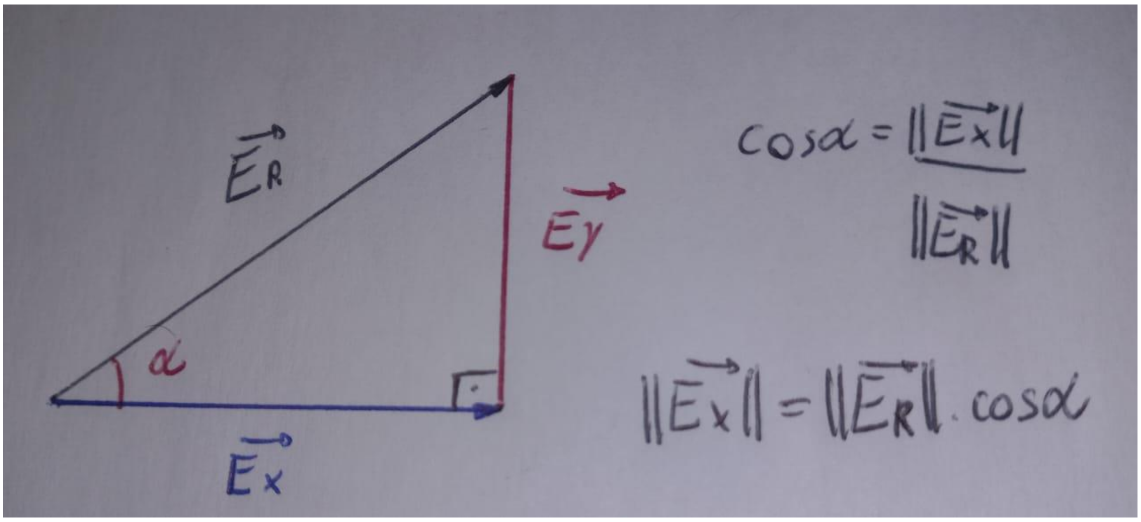
$$\lambda = \frac{dQ}{dy} \wedge \lambda = \frac{Q}{2y}$$

Pela simetria proporcionada pela divisão da barra em sua mediatriz, nota-se que os efeitos do campo de dy em relação a sua parte pequena infinitesimal simétrica ao eixo "x" possui uma seguinte peculiaridade:

- Considerando os valores de x (distância entre mediatriz e ponto P) e de r (distância entre dy e o ponto P), todo valor assumido por dy forma um triângulo retângulo, assim, o vetor $d\overrightarrow{E_r}$ pode ser decomposto em $d\overrightarrow{E_x}$ e $d\overrightarrow{E_y}$.
- A simetria propiciada pela mediatriz, juntamente da homogeneidade da distribuição da carga sobre a barra faz com que os tais valores de dy

simétricos em relação ao eixo das abscissas anulem o efeito de campo em relação ao eixo das ordenadas, deste modo:



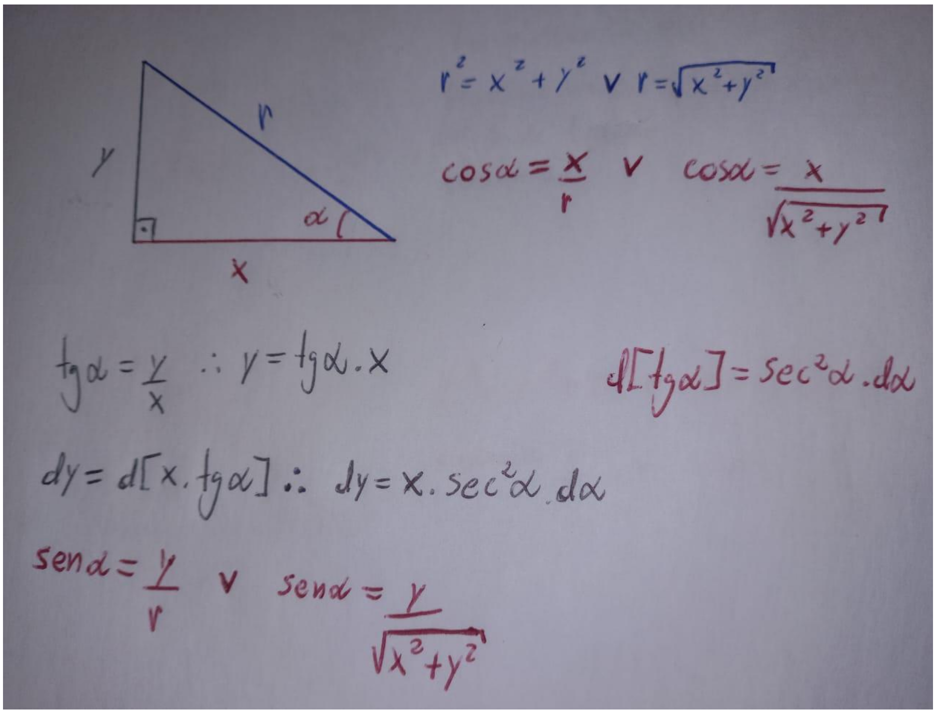


Assim, a força resultante no ponto P considerando apenas dois simétricos é:

$$d\overrightarrow{E_x} = \left(2\left\|d\overrightarrow{E_r}\right\| \cos\alpha\right).\hat{\imath}$$

Portanto é integração pode ser feita apenas por metade da barra pela expressão de $d\overrightarrow{E_x}$ já considerar o efeito de nulidade em y e a ação de ambas partes carregas simétricas em relação à Ox que exercem força em P.

A partir de operações simples com conceitos trigonométricos e o Teorema de Pitágoras obtém-se expressões para $r^2 = f(x, y)$ e $\cos\alpha = f(x, y)$.



$$r^2 = x^2 + y^2 \ \wedge \ \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Concluindo com o campo gerado pelo pedaço pequeno infinitesimal dy de carga dQ:

$$d\overrightarrow{E_r} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{dQ}{r^2}\right)\hat{r}$$

Assim, determina-se:

$$d\overrightarrow{E_x} = \left(2\left\|d\overrightarrow{E_r}\right\|\cos\alpha\right).\hat{\imath}$$

Substituindo o módulo de $d\overrightarrow{E_r}$ e a expressão $\cos\alpha = f(x,y)$:

$$d\overrightarrow{E_x} = \left(2\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{dQ}{r^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).\hat{\imath}$$

Substituindo o valor de $r^2 = f(x,y)$ e considerando $dQ = \lambda dy$.

- Observação: a expressão $dQ = \lambda dy$ é originada na ideia da barra ter distribuição de cargas uniformes, portanto:

$$\lambda = \frac{dQ}{dy} \rightarrow dQ = \lambda dy$$

- Porém, a expressão de λ não é exata, portanto, a carga (Q) e o comprimento (y) podem assumir vários valores:

$$\lambda = \frac{dQ}{dy} = \frac{2.dQ}{2.dy} = \frac{3.dQ}{3.dy} = \frac{Q}{2y}$$

- Outra observação a ser feita é a necessidade de trocar dQ por uma expressão com dy, pois o valor diferencial que deve ser integrado é y, o comprimento, pois ele é a variável adotada como puntiforme. Também se entende que ela é a variável que muda o valor de $d\overrightarrow{E_x}$, assim $d\overrightarrow{E_x}$ muda conforme a posição, diretamente relacionado a r, que depende do valor de y, que é o que muda.

Continuando:

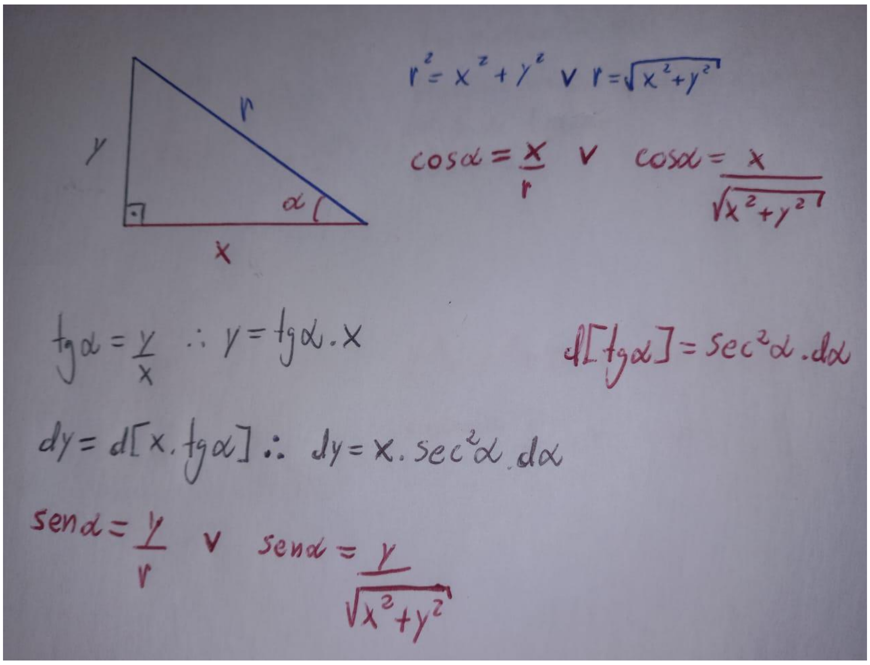
$$d\overrightarrow{E_x} = \left(2\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\lambda dy}{(x^2+y^2)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).\hat{\imath}$$

Adotando integral para efeito da soma dos campos:

$$\int d\overrightarrow{E_x} = \left(\int 2\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\lambda dy}{(x^2+y^2)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).\hat{\imath} \rightarrow \overrightarrow{E_x} = \left(2\frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon}\int\frac{dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right).\hat{\imath}$$

A técnica de integração utilizada para resolver a integral da expressão: $\int\frac{dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ é chamada de substituição trigonométrica, na qual, muda-se a variável de integração para um ângulo, geralmente é bem utilizada para expressões como: $\sqrt{a^2+b^2}$ determinar expressões equivalentes com razões trigonométricas envolvidas. (Substitui y por α apenas para integração)

A partir do triângulo retângulo obtido por x, y e r: obtém-se:



$$\tan\alpha = \frac{y}{x} \rightarrow y = x.\tan\alpha$$

$$dy = d[x.\tan\alpha] \rightarrow dy = x\sec^2\alpha\, d\alpha$$

$$\int \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \rightarrow \int \frac{x\sec^2\alpha\, d\alpha}{(x^2 + (x.\tan\alpha)^2)^{3/2}} \rightarrow \int \frac{x\sec^2\alpha\, d\alpha}{(x^2 + x^2.\tan^2\alpha)^{3/2}}$$

$$\int \frac{x\sec^2\alpha\, d\alpha}{(x^2[1 + \tan^2\alpha])^{3/2}}$$

Considerando a identidade trigonométrica fundamental:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow \tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

$$\int \frac{x\sec^2\alpha\, d\alpha}{(x^2[1 + \tan^2\alpha])^{3/2}} \rightarrow \int \frac{x\sec^2\alpha\, d\alpha}{(x^2[\sec^2\alpha])^{3/2}} \rightarrow \int \frac{x\sec^2\alpha\, d\alpha}{(x\sec\alpha)^3} \rightarrow \int \frac{x\sec^2\alpha\, d\alpha}{x^3\sec^3\alpha}$$

$$\int \frac{d\alpha}{x^2\sec\alpha} \rightarrow \frac{1}{x^2}\int \cos\alpha\, .\, d\alpha \rightarrow \left[\frac{1}{x^2}\sin\alpha\right]$$

Lembrando que: $\frac{d[\sin\alpha]}{d\alpha} = \cos\alpha$ e $\int \cos\alpha \, . \, d\alpha = \sin\alpha$

Com a expressão de $\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e retornando com a expressão modular de $\overrightarrow{E_x}$:

$$\left\|\overrightarrow{E_x}\right\| = 2\frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{x^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_0^y \rightarrow \left\|\overrightarrow{E_x}\right\| = 2\frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{x^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Substituindo λ por $\frac{Q}{2y}$, tem-se a simplificação:

$$\left\|\overrightarrow{E_x}\right\| = 2\frac{Q}{2y}\frac{x}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{x^2}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow \left\|\overrightarrow{E_x}\right\| = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{x\sqrt{x^2+y^2}}$$

Com a versão vetorial sendo:

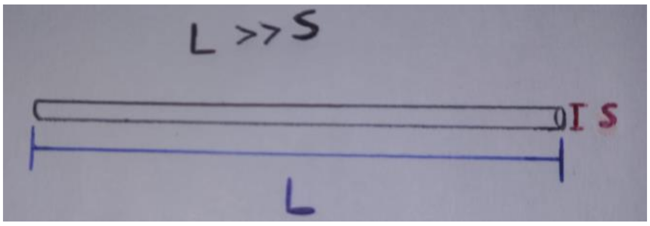
$$\overrightarrow{E_x} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{x\sqrt{x^2+y^2}}\right).\hat{\imath}$$

Referências:

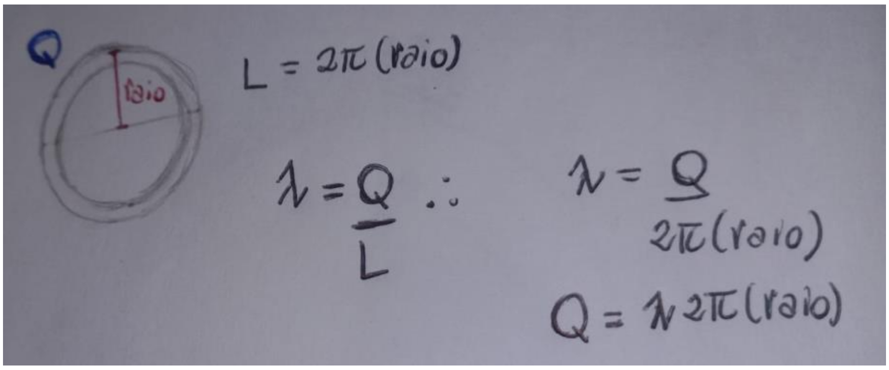
- https://www.youtube.com/watch?v=7HspxeihtvA
- https://www.youtube.com/watch?v=U95YpUwuyWc
- https://www.youtube.com/watch?v=_8K0vVL-k3g
- Livro: Física de Sears & Zemansky: Volume III: Eletromagnetismo: Volume 3

Campo Elétrico de um Anel Uniformemente Carregado

- O Anel uniformemente carregado adotado é considerado linear, de modo que seu comprimento seja muito maior que a sua seção transversal: $L \gg S$.



- Por se tratar de um anel, um objeto de formato semelhante à de uma circunferência, seu comprimento e dada pela expressão: $L = 2\pi(raio)$.



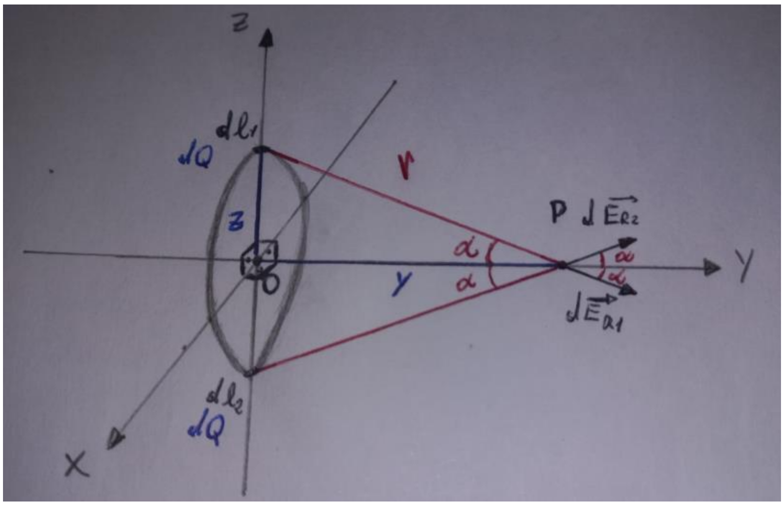
- Nesse caso, analisando em relação a densidade linear de carga, sua expressão é:
-

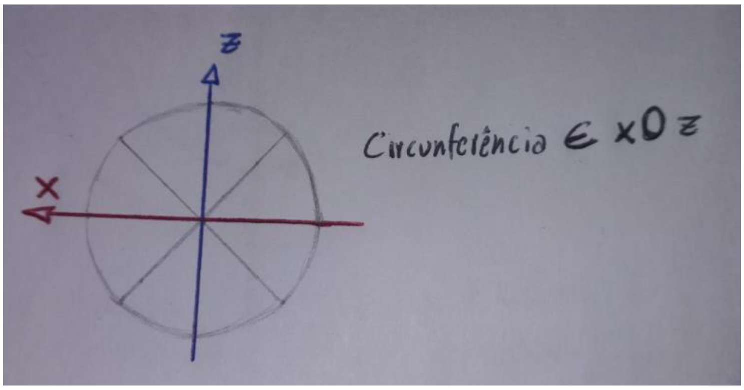
$$\lambda = \frac{Q}{L} \rightarrow \lambda = \frac{Q}{2\pi(raio)} \rightarrow Q = \lambda.2\pi(raio)$$

- E no contexto de considerar um tamanho infinitesimal do fio que forma o anel:

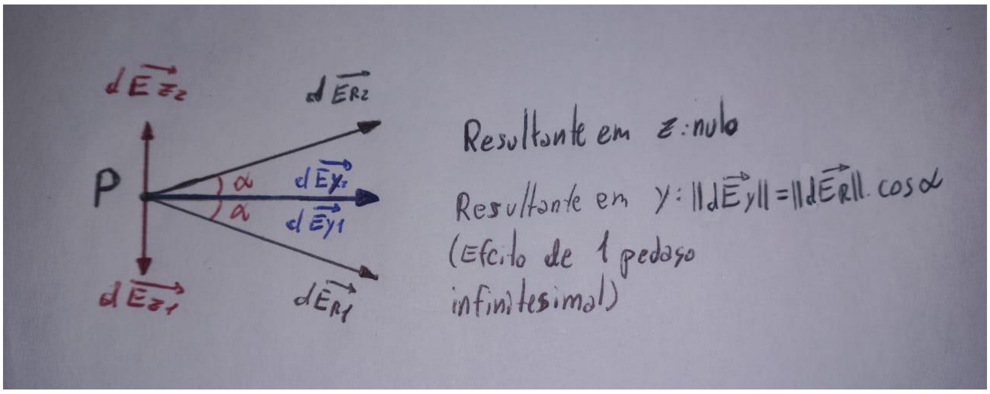
$$\lambda = \frac{dQ}{dl} \rightarrow dQ = \lambda dl$$

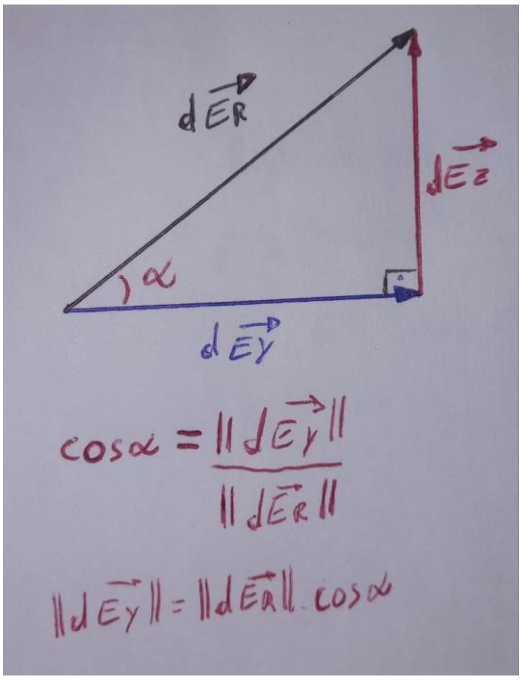
Considerando um anel que forma uma circunferência no plano xOz, o campo que ela gera no ponto P, de modo que, P ∈ eixo Oy se manifesta de maneira análoga ao que ocorre na mediatriz da barra uniformemente carregada (Para esse caso em particular, o raio foi considerado como letra z, assim, todas as expressões que tem a notação $(raio)$ é considerada a letra z):





Analogamente a barra, a circunferência também obedece a uma simetria em torno de seu eixo, que nesse caso é Oy; portanto, as diferentes partes infinitesimais dl vão anular seu efeito em $d\overrightarrow{E_x}$ e $d\overrightarrow{E_z}$ (O caso ilustrado seria um $d\overrightarrow{E_z}$ radialmente), portanto, o corpo presente no ponto P só sofrerá ação em relação ao eixo das ordenadas. Determinada a relação em $d\overrightarrow{E_R}$ (De direção entre o ponto e um dl) e $d\overrightarrow{E_y}$ (De direção $\hat{j}$):



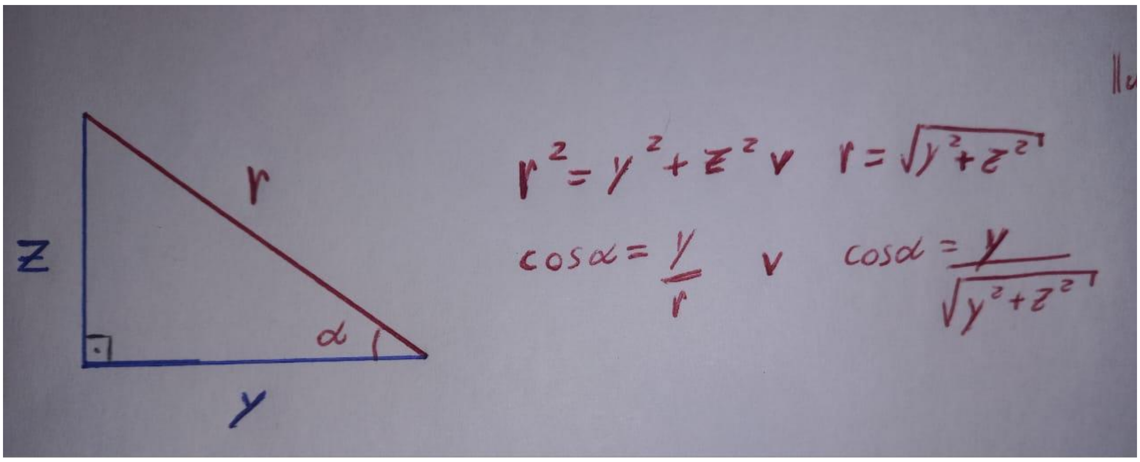


$$d\overrightarrow{E_y} = \left(\left\|d\overrightarrow{E_R}\right\| \cos\alpha\right) \hat{\jmath}$$

A expressão genérica de $d\overrightarrow{E_R}$ sendo:

$$d\overrightarrow{E_R} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon} . \frac{dQ}{r^2}\right) \hat{r}$$

Considerando valores de $\cos\alpha$, r e dQ:



$$\cos\alpha = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \wedge r^2 = y^2 + z^2 \wedge dQ = \lambda dl$$

Substituindo na expressão de $d\overrightarrow{E_y}$:

$$d\overrightarrow{E_y} = \left(\left\|d\overrightarrow{E_R}\right\| \cos\alpha\right) \hat{\jmath} \rightarrow d\overrightarrow{E_y} = \left(\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon} . \frac{\lambda dl}{(y^2 + z^2)}\right] \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}\right) \hat{\jmath}$$

$$d\overrightarrow{E_y} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon} . \frac{\lambda y . dl}{(y^2 + z^2)^{3/2}}\right) \hat{\jmath}$$

Integrando a parte modular:

$$\int dE_y = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon} . \frac{\lambda y . dl}{(y^2 + z^2)^{3/2}}$$

4, π e ε são constantes, tal como o inverso do produto deles. λ é um valor constante, o anel não muda de posição em relação ao ponto P (y é constante), e o valor do raio do anel não varia (z é constante). Enquanto dl representa o pedaço infinitesimal do anel, que nada mais é que um fio, já apurado como primeira afirmação da demonstração, portanto, dl pode assumir valor de zero até o comprimento total ($2\pi z$).

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\lambda y}{(y^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi z} dl$$

$$\int dx = \int 1 . dx = \int x^0 . dx$$

Regra da Potência pra Integração: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$$\int x^0 . dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} = x$$

$$\int_0^{2\pi z} dl = \int_0^{2\pi z} 1 . dl \therefore \int_0^{2\pi z} dl = [l]_0^{2\pi z} \rightarrow [l]_0^{2\pi z} = [2\pi z - 0]$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\lambda y}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}[2\pi z - 0] \rightarrow E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\lambda 2\pi z y}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Relembrando no início da demonstração que:

$$\lambda = \frac{Q}{L} \rightarrow \lambda = \frac{Q}{2\pi(raio)} \rightarrow Q = \lambda.2\pi(raio) \wedge (raio) = z \therefore Q = \lambda.2\pi z$$

Determina-se E_y em vetor e módulo:

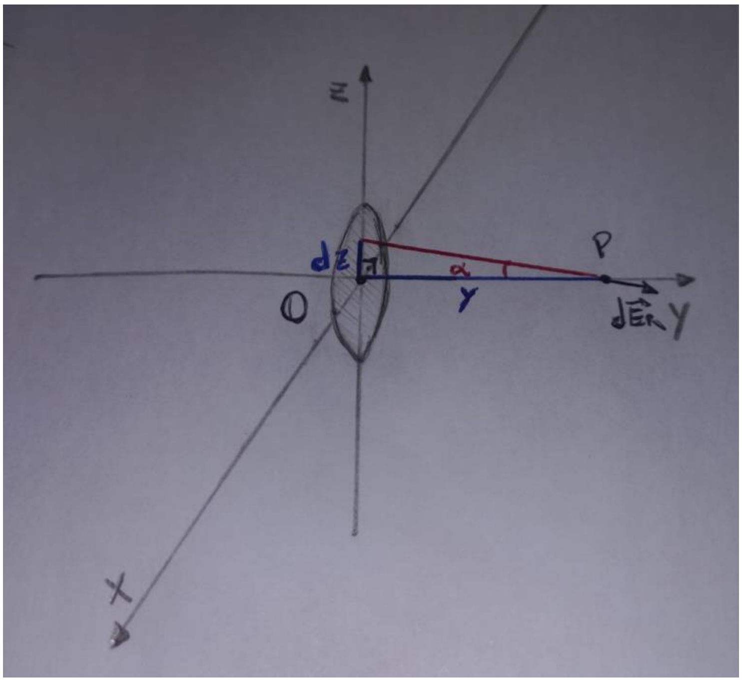
$$\overrightarrow{E_y} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Qy}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\hat{j} \wedge E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Qy}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Referências:

- Livro: Física de Sears & Zemansky: Volume III: Eletromagnetismo: Volume 3
- https://www.youtube.com/watch?v=2lViCRvFfT0
- https://www.youtube.com/watch?v=uX8LLJW_f6w
- https://slideplayer.com.br/slide/3636892/

Campo Elétrico de um Disco Uniformemente Carregado

O disco, assim como o anel, pertence ao plano xOz e seu eixo de rotação corresponde a origem do espaço cartesiano $O(0;0;0)$. Deseja-se determinar o vetor campo elétrico no ponto P, que tem distância y da origem. O disco não exerce força sobre o eixo das abscissas, nem das cotas; o seu caso, pois, se assemelha ao do anel justamente pelo tratamento do disco se equivaler a sobreposição de anéis de raio zero à $z_{máx}$ (corresponde ao raio do disco).



Dentre todos os casos, esse é o único que se utiliza o conceito da densidade superficial de cargas:

$$\sigma = \frac{Q}{A} \vee \sigma = \frac{dQ}{dA}$$

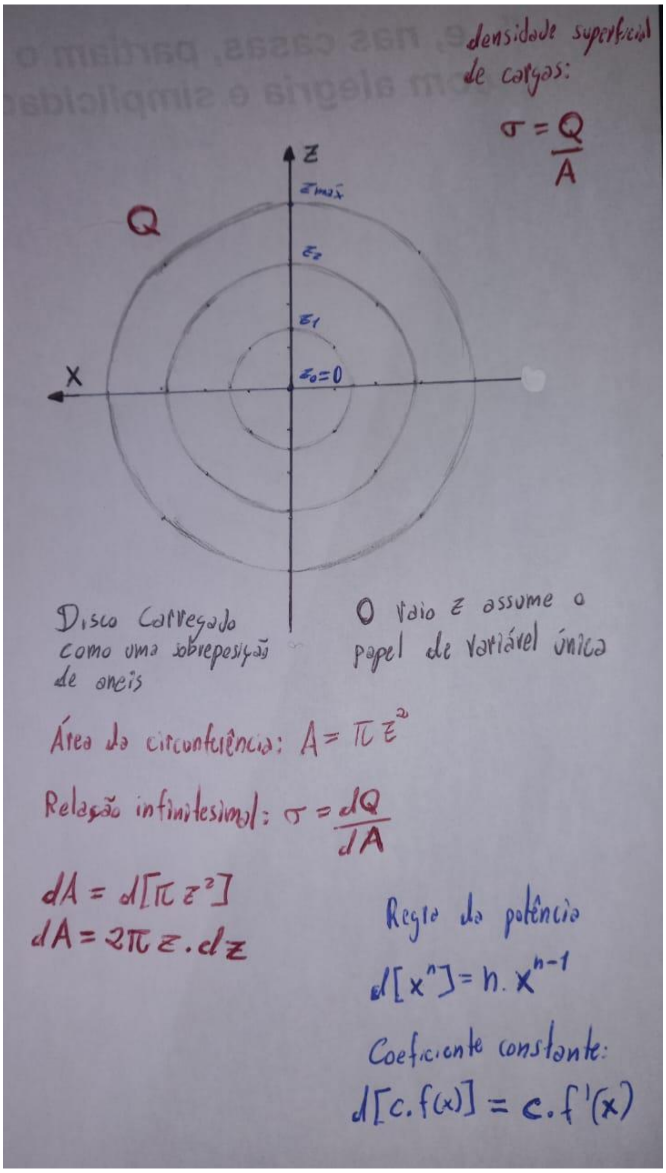
Essa segunda expressão se trata da consideração de um anel de carga dQ e altura de secção transversal dz infinitesimalmente pequeno, o que resulta nessa pequena área dA infinitesimal.

O campo produzido por esse anel já foi determinado:

$$\overrightarrow{E_y} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Qy}{(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{\jmath}$$

No entanto, nesse caso o anel também é tratado como um produto de uma grandeza infinitesimal (dz), portanto a equação se torna diferencial, exigindo uma integração:

$$d\overrightarrow{E_y} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{dQy}{(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{\jmath}$$



dQ pode ser substituído por uma expressão que envolve o valor infinitesimal que varia dz, portanto, a partir desse valor, é possível integrar:

$$dQ = \sigma dA$$

A área da circunferência é dada por:

$$A = \pi z^2$$

Sendo sua derivada:

$$dA = d[\pi z^2] \rightarrow dA = 2\pi z.dz$$

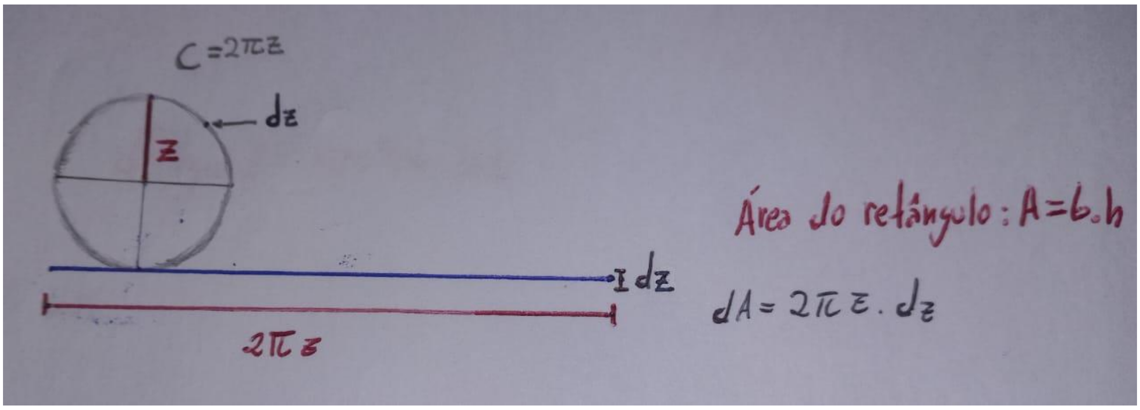
Portanto $dQ = \sigma 2\pi z.dz$

Assim, a nova expressão do campo gerado por um anel de altura de secção transversal dz é:

$$d\overrightarrow{E_y} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\sigma 2\pi z.dz.y}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{\jmath}$$

Observação pra clareza:

- A área calculada é de um retângulo, que nessa ocasião tem começo e fim unidos, de modo a se assemelhar a uma circunferência, mas na verdade, seria exatamente uma coroa circular. Portanto, a integral desses anéis infinitesimais, corresponderia a um somatório de várias coroas, que nesse caso, podem ser tratadas como retângulos:



Integrando a expressão dE_y:

$$\int dE_y = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\sigma 2\pi z.dz.y}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \to E_y = \frac{2\pi y\sigma}{4\pi\varepsilon} \int \frac{z.dz}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Aplicando a Técnica de Integração por substituição:

$$u = y^2 + z^2 \therefore du = d[y^2+z^2] \to du = 2z.dz \to dz = \frac{du}{2z}$$

$$E_y = \frac{2\pi y\sigma}{4\pi\varepsilon} \int \frac{z.\frac{du}{2z}}{(u)^{\frac{3}{2}}} \to E_y = \frac{2\pi y\sigma}{4\pi\varepsilon} \int \frac{du}{2(u)^{\frac{3}{2}}} \to E_y = \frac{2\pi y\sigma}{2.4\pi\varepsilon} \int \frac{du}{(u)^{\frac{3}{2}}}$$

Regra da Potência pra Integração: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$$\int \frac{du}{(u)^{\frac{3}{2}}} = \int u^{-\frac{3}{2}} du \to \int u^{-\frac{3}{2}} du = \left[\frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right] \to \left[\frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right] = \left[-\frac{2}{\sqrt{u}} \right]$$

Retomando a expressão $u = y^2 + z^2$, com a integração em relação a z que varia do menor raio ao maior: zero à $z_{máx}$

$$E_y = \frac{2\pi y\sigma}{2.4\pi\varepsilon}\left[-\frac{2}{\sqrt{y^2+z^2}}\right]_0^{z_{máx}}$$

$$E_y = \frac{4\pi y\sigma}{2.4\pi\varepsilon}\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{y^2+{z_{máx}}^2}}\right)-\left(-\frac{1}{\sqrt{y^2+0^2}}\right)\right]$$

$$E_y = \frac{y\sigma}{2\varepsilon}\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{y^2+{z_{máx}}^2}}\right)-\left(-\frac{1}{\sqrt{y^2+0^2}}\right)\right]$$

$$E_y = \frac{y\sigma}{2\varepsilon}\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{y^2+{z_{máx}}^2}}\right)+\frac{1}{y}\right]$$

$$E_y = \frac{y\sigma}{2\varepsilon}\left[\frac{1}{y}-\frac{1}{\sqrt{y^2+{z_{máx}}^2}}\right]$$

A simplificação da expressão pode ser feita em duas maneiras:

1° Metodologia:

- Faça a distributiva para y

$$E_y = \frac{y\sigma}{2\varepsilon}\left[\frac{1}{y}-\frac{1}{\sqrt{y^2+{z_{máx}}^2}}\right] \rightarrow E_y = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\left[\frac{y}{y}-\frac{y}{\sqrt{y^2+{z_{máx}}^2}}\right]$$

- Expressão em módulo e vetor:

$$E_y = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\left[1-\frac{y}{\sqrt{y^2+{z_{máx}}^2}}\right] \wedge \overrightarrow{E_y} = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon}\left[1-\frac{y}{\sqrt{y^2+{z_{máx}}^2}}\right]\right)\hat{j}$$

2° Metodologia:

- Force um fator comum y^2 dentro da raiz da expressão

$$E_y = \frac{y\sigma}{2\varepsilon}\left[\frac{1}{y}-\frac{1}{\sqrt{y^2+{z_{máx}}^2}}\right] \rightarrow E_y = \frac{y\sigma}{2\varepsilon}\left[\frac{1}{y}-\frac{1}{\sqrt{y^2\left(1+\frac{{z_{máx}}^2}{y^2}\right)}}\right]$$

- Retire o y^2 da raiz e torne y^{-1} fator comum

$$E_y = \frac{y\sigma}{2\varepsilon}\left[\frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{y^2\left(1+\frac{{z_{máx}}^2}{y^2}\right)}}\right] \rightarrow E_y = \frac{y\sigma}{2\varepsilon}\left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y.\sqrt{\left(1+\frac{{z_{máx}}^2}{y^2}\right)}}\right]$$

$$E_y = \frac{y\sigma}{2\varepsilon}\left[\frac{1}{y}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{{z_{máx}}^2}{y^2}\right)}}\right)\right] \rightarrow E_y = \frac{y\sigma}{2\varepsilon}\frac{1}{y}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{{z_{máx}}^2}{y^2}\right)}}\right]$$

- Resultando na expressão modular e vetorial:

$$E_y = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{{z_{máx}}^2}{y^2}\right)}}\right] \wedge \overrightarrow{E_y} = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{{z_{máx}}^2}{y^2}\right)}}\right]\right)\hat{\jmath}$$

Referências:

- Livro: Física de Sears & Zemansky: Volume III: Eletromagnetismo: Volume 3
- https://www.youtube.com/watch?v=ChMfWPEgdFk
- https://slideplayer.com.br/slide/3636892/