



UNIVERSITAT POLITÈCNICA  
DE CATALUNYA  
BARCELONATECH

# Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

---

Técnicas de inteligencia artificial i aplicaciones para la automatización

Autores:

Xanti Elola


Verónica Fernández

Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa

# Índice

Índice.....	i
Lista de figuras .....	ii
Lista de tablas.....	ii
1. Introducción.....	4
1.1. Planificación de caminos con técnicas de “foraging” social .....	4
1.2. Objetivos .....	4
1.3. Planificación del trabajo.....	5
2. Técnicas basadas en ‘foraging’ social.....	6
2.1. Ant Colony Optimization (ACO) .....	7
2.2. Particle Swarm Optimization (PSO) .....	11
3. Procedimiento informático y resultados .....	15
3.1. Comportamiento del algoritmo ACO en el entorno generado .....	16
3.2. Comportamiento del algoritmo PSO en el entorno generado.....	20
4. Resultados.....	23
4.1. Resultados de ACO.....	23
4.2. Resultados de PSO .....	28
5. Conclusiones .....	32
6. Bibliografía .....	34


 <b>UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA</b> BARCELONATECH	Tècniques d'intel·ligència artificial i aplicacions per a l'automatització
Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social	
Xanti Elola	
Veronica Fernández	
Marc Rodríguez	
Sergi Torregrosa	

## Lista de figuras

<b>Figura 1.</b> Clasificación de los algoritmos basados en la naturaleza.....	6
<b>Figura 2.</b> Fases de seguimiento de caminos de las hormigas. ....	7
<b>Figura 3.</b> Movimiento circular de las abejas. ....	12
<b>Figura 4.</b> Representación de un grupo de partículas y los efectos de individualidad, sociabilidad e inercia en su movimiento. ....	14
<b>Figura 5.</b> Entorno generado para la planificación de caminos. ....	15
<b>Figura 6.</b> Dimensiones del entorno generado.....	16
<b>Figura 7.</b> Distribución de la orientación de las hormigas en el algoritmo implementado. ....	18
<b>Figura 8.</b> Caminos seguidos por las partículas para dos simulaciones (vista en 3D)..	22
<b>Figura 9.</b> Caminos seguidos por las partículas para cinco simulaciones (vista en 2D). ....	22
<b>Figura 10.</b> Distribución de los caminos seguidos por las diferentes hormigas. ....	23
<b>Figura 11.</b> Resultado del camino óptimo conseguido siguiendo el criterio de mínimo de pasos.....	24
<b>Figura 12.</b> Camino óptimo obtenido con un tiempo de simulación de 1000 iteraciones. ....	25
<b>Figura 13.</b> Camino óptimo con un factor de evaporación de 0,8.....	26
<b>Figura 14.</b> Evolución del número de pasos mínimos necesarios para llegar al objetivo según cantidad de hormigas. ....	27
<b>Figura 15.</b> Simulación en 2D del algoritmo PSO. ....	26
<b>Figura 16 .</b> Valores de las distancias recorridas hasta el objetivo en diferentes casos.....	30
<b>Figura 17.</b> Comparación de los resultados obtenidos mediante ACO y PSO. ....	31

## Lista de tablas

<b>Tabla 1.</b> Planificación del trabajo realizado.....	5
<b>Tabla 2.</b> Tabla resumen de los valores obtenidos con diferentes parámetros en ACO. ....	27
<b>Tabla 3.</b> Comparación del algoritmo PSO en función del factor de inercia w. ....	30

 <p>UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH</p>	Tècniques d'intel·ligència artificial i aplicacions per a l'automatització
Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social	
Xanti Elola	
Veronica Fernández	
Marc Rodríguez	
Sergi Torregrosa	



Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa

## 1. Introducción

### 1.1. Planificación de caminos con técnicas de "foraging" social

Se le denomina 'foraging' a todas aquellas conductas orientadas a conseguir alimento, como son la búsqueda, exploración, selección o manipulación. Existen varios factores que afectan a la habilidad para adquirir esos recursos: capacidad de aprendizaje, la genética, depredación o el parasitismo. Muchas de las especies de la naturaleza se caracterizan por mostrar un comportamiento cooperativo a la hora de buscar alimentos, presentando una conducta de enjambre dando lugar al 'foraging' social.

Durante los últimos años se ha estudiado ampliamente la comunicación entre individuos en una colonia para dar solución a problemas del mundo real. La inteligencia de enjambre mostrada por los animales es la parte de la Inteligencia Artificial basada en el estudio de las acciones de los individuos físicos o virtuales que están comunicados entre sí, para realizar tareas donde se requiere cooperación y colaboración.

De esta forma se ha dado lugar a nuevos algoritmos inspirados en la naturaleza, convirtiéndose en herramientas populares para resolver problemas de optimización de funciones complejas.

### 1.2. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es aplicar técnicas de Inteligencia Artificial a problemas de automatización. En concreto, el problema que se presenta es programar un algoritmo de planificación de caminos para ir de un punto a otro punto desconocido evitando los obstáculos y minimizando la trayectoria, encontrando así el camino óptimo. Eso conlleva a generar un entorno 3D que los individuos simulados que forman el enjambre deberán de recorrer.

El comportamiento que los individuos deberán seguir es la conducta de aquella(s) especie(s) que practican el 'foraging' social para llegar desde un punto inicial a un punto final.



Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa

### 1.3. Planificación del trabajo

En este apartado se muestra la planificación seguida para la elaboración de este trabajo. Tal y como se puede apreciar en la Tabla 1, el trabajo se ha dividido en tres partes fundamentales: búsqueda de información, realización de algoritmos y la redacción del informe. De todas las tareas, las que más tiempo han supuesto ha sido la creación de los algoritmos, que han ocupado casi todo el periodo del proyecto. Las fechas marcadas en amarillo (semanas 10, 11 y 21) corresponden a las reuniones realizadas/fijadas para mostrar el trabajo realizado al tutor.

**Tabla 1.** Planificación del trabajo realizado.

		Semana													
	Responsable	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
Búsqueda de información	Xanti														
Foraging social	Vero														
Planificación de caminos	Xanti														
Realizar algoritmo en Matlab	Marc														
ACO	Marc														
Generar entorno 2D	Xanti														
Generar entorno 3D	Marc														
Estudiar efecto de los parámetros	Xanti														
PSO	Sergi														
Generar entorno 2D	Vero														
Generar entorno 3D	Sergi														
Estudiar efecto de los parámetros	Vero														
Realización del informe	Xanti														

Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa

## 2. Técnicas basadas en 'foraging' social

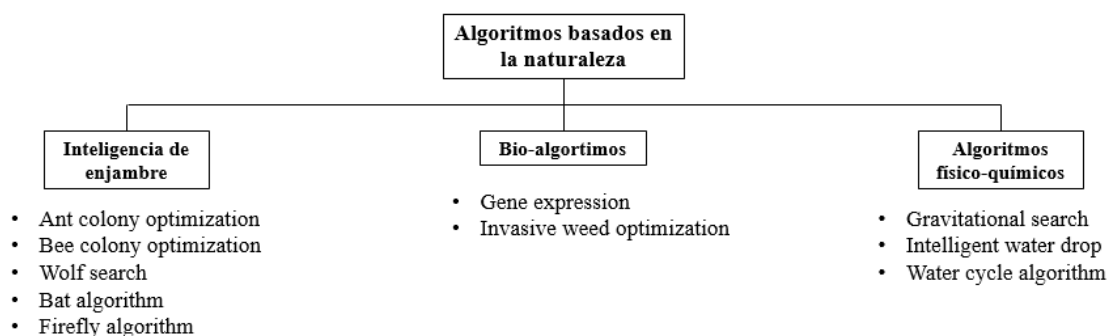
Los diferentes algoritmos utilizados en problemas de optimización que se basan en la naturaleza se pueden dividir en tres grandes grupos: los que se basan en inteligencia de enjambres, los que se inspiran en otros factores de la biología y los basados en sistemas físico-químicos <sup>[1]</sup>.

Los que se basan en inteligencia de enjambre se fundamentan en el comportamiento colectivo entre múltiples individuos que siguen reglas simples. Cada individuo puede considerarse inteligente, mostrando todo el sistema formado por individuos una inteligencia colectiva o inteligencia de enjambre. La información se comparte entre los individuos que forman el enjambre de tal forma que el conjunto de individuos presenta una mayor eficiencia de aprendizaje.

En el segundo grupo se encuentran aquellos algoritmos llamados bio-algoritmos o bio-inspirados. Son aquellos que se basan en la biología, pero excluyen el comportamiento de enjambres.

Por último, se encuentran los basados en la física y química, que no contemplan las características biológicas como las primeras dos. Estos se han desarrollado imitando leyes físico-químicas, como son las cargas eléctricas, gravedad...

En la Figura 1 se muestra un gráfico donde aparecen los algoritmos más utilizados en cada grupo para una mejor distinción entre ellos.



**Figura 1.** Clasificación de los algoritmos basados en la naturaleza.



Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa

Entre los algoritmos mostrados, los bio-inspirados basados en inteligencia de enjambre son los más estudiados hasta la actualidad. Cada uno de los algoritmos expuestos se utiliza para una finalidad en concreto a la hora de resolver problemas de optimización. Para el problema planteado de optimización del camino a recorrer, los algoritmos más utilizados y que mejor se ajustan son los basados en el comportamiento de las colonias de hormigas (ACO) y en los enjambres de partículas (PSO). Es por ello que se ha decidido dar solución al problema utilizando estos dos algoritmos por separado y ver cómo se comporta cada uno aplicado al mismo problema y entorno.

## 2.1. Ant Colony Optimization (ACO)

Tal y como su nombre indica, este algoritmo se basa en el **comportamiento de las colonias de hormigas**. Las hormigas tienen la capacidad de encontrar los caminos más cortos entre el hormiguero y las fuentes de alimentos siendo casi ciegas gracias a la deposición de feromonas. Las feromonas son sustancias químicas secretadas por las hormigas que sirven de rastro para el resto de los individuos. **Las hormigas se mueven de forma aleatoria cuando no encuentran presencia de feromona**, sin embargo, cuando existe feromona depositada, tienen mayor tendencia a seguir el rastro. Las hormigas escogen el camino a seguir con una decisión probabilística dependiente de la cantidad de feromona percibida: cuando mayor sea la concentración, mayor es la probabilidad de elegir ese camino.

**En el momento inicial** (cuando sale la primera hormiga del hormiguero) no existe rastro de feromona en el medio y, por lo tanto, al encontrarse con una **bifurcación**, elige el camino a seguir de manera aleatoria. A medida que pasa el tiempo y varias hormigas han recorrido los caminos más convenientes, estos van recibiendo una mayor cantidad de feromona. Esto se debe a que, al ser el camino más corto, inician el viaje de vuelta desde la fuente de alimento al hormiguero antes, dejando en el camino más corto un rastro de feromona superior al camino más largo. De esta forma, las siguientes hormigas percibirán una cantidad de feromona superior en el camino más corto, por lo que la probabilidad de que escojan ese camino será superior.

La probabilidad de escoger el camino más corto va aumentando progresivamente, ya que cada vez más hormigas escogen ese camino y dejan mayor rastro en el camino. A esto se le suma el hecho de que la feromona se va evaporando poco a poco,



Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

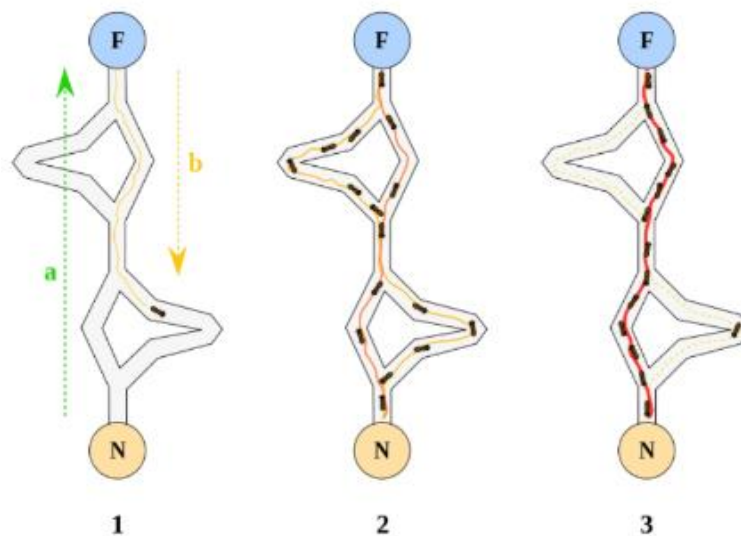
Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa

perdiendo su perceptibilidad a lo largo del tiempo. Así, los caminos menos adecuados pierden el rastro de feromonas a medida que son visitados cada vez por menos hormigas.



**Figura 2.** Fases de seguimiento de caminos de las hormigas.

En la Figura 2 se puede apreciar un ejemplo de un recorrido de las hormigas por cada fase. En la primera imagen se ve como la primera hormiga escoge un camino de forma aleatoria cuando vuelve de la fuente de alimento (F) al hormiguero (N), dejando un rastro de feromona a su paso. En la segunda imagen se aprecia como hay más hormigas que van eligiendo diferentes caminos, pero que en el camino central el rastro de feromonas es superior a los otros caminos posibles, siendo visitada por cada vez más hormigas. De esta forma se observa en la tercera imagen que el rastro de feromonas es muy superior en el camino central y por ello casi todas las hormigas eligen ese camino, siendo la más corta entre todas.

El ACO es un proceso metaheurístico, lo que significa que se usan varios procesamientos para buscar soluciones del problema a optimizar sin poder garantizar que llegue a la óptima.

La probabilidad de una hormiga  $k$  para ir del nodo  $i$  al nodo  $j$  depende de dos factores: el coeficiente de adaptación ( $\eta_{ij}$ ) y el nivel de rastro de feromonas ( $\tau_{ij}$ ), y se expresa de la siguiente forma <sup>[2],[3]</sup>:



Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa

$$P_{ij}^k = \frac{[\tau_{ij}]^\alpha \cdot [\eta_{ij}]^\beta}{\sum [\tau_{ij}]^\alpha \cdot [\eta_{ij}]^\beta}$$

Se puede observar que existen dos parámetros ( $\alpha$  y  $\beta$ ) que controlan la influencia del coeficiente de adaptación y del nivel de feromona, cuyos valores deben ser mayores o iguales a 0 y 1, respectivamente.

El nivel de rastro de feromonas se actualiza de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\tau_{ij} = (1 - \rho)\tau_{ij} + \Delta\tau_{ij}$$

Donde:

$\rho$  = coeficiente de evaporación de feromonas

El objetivo de la actualización del nivel de feromona es incrementar los valores de feromona asociados a buenas soluciones y de disminuir los valores asociados a malas soluciones. Esto se obtiene disminuyendo todos los valores de feromonas mediante el coeficiente de evaporación ( $\rho$ ) e incrementando los niveles asociados al conjunto de soluciones para la actualización en forma de cantidad depositada.

Dentro del ACO existen diferentes algoritmos basados en las diferentes formas de actualizar la feromona <sup>[4]</sup>:

- Ant system (AS): fue el primer algoritmo ACO que apareció en la literatura de la mano de Marco Dorigo en 1992. Su principal característica es que la feromona se actualiza por todas las hormigas que han completado la ruta siguiendo la siguiente expresión:

$$\tau_{ij} = (1 - \rho)\tau_{ij} + \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij}^k$$

Donde:

$m$  = número de hormigas

$\Delta\tau_{ij}^k$  = cantidad de feromona secretada por la hormiga  $k$

$L_k$  = longitud de la ruta de la hormiga  $k$

Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa

$$\Delta\tau_{ij}^k = \begin{cases} \frac{1}{L_k} & \text{si la hormiga } k \text{ sigue el camino entre el nodo } i,j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Ant colony system (ACS): este nuevo algoritmo expuso la primera mejora significativa sobre el sistema original de AS. Fue implementado por Dorigo y Gambardella en 1997, y la principal diferencia se basa en la regla utilizada a la hora del proceso de construcción. Este algoritmo introduce el término de actualización local de feromonas que se ejecuta por todas las hormigas después de la etapa de construcción. Cada hormiga lo aplica únicamente en el último borde atravesado de la siguiente forma:

$$\tau_{ij} = (1 - \rho)\tau_{ij} + \rho \cdot \tau_0$$

Donde:

$\tau_0$  = valor inicial de la feromona

Al igual que en AS, en ACS al final del proceso de construcción se da una actualización de la feromona llamada actualización offline de feromona. En el caso de ACS esta actualización se da solo en la mejor hormiga.

$$\tau_{ij} \leftarrow (1 - \rho)\tau_{ij} + \rho \cdot \Delta\tau_{ij}^{best}$$

Donde:

$$\tau_{ij}^{best} = 1/L_{best}$$

- MAX-MIN ant system (MMAS): este es otra mejora sobre la idea original introducida por Stützle y Hoos en el año 2000. En este caso solo la mejor hormiga añade rastro de feromonas, resultando la ecuación de actualización de feromonas la siguiente forma:

$$\tau_{ij} \leftarrow (1 - \rho)\tau_{ij} + \rho \cdot \Delta\tau_{ij}^{best}$$



Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social
Xanti Elola
Veronica Fernández
Marc Rodríguez
Sergi Torregrosa

El otro parámetro que influye en la toma de decisión es el coeficiente de adaptación ( $\eta_{ij}$ ). Este parámetro no es más que la conveniencia del estado de transición  $ij$ . Su valor es la inversa a la distancia recorrida.

## 2.2. Particle Swarm Optimization (PSO)

Tal y como indica su nombre, este algoritmo trata la **optimización de enjambres** de partículas, como por ejemplo el caso de las abejas, peces, aves e incluso en microorganismos. Se basa en un conjunto de individuos que realizan una búsqueda en grupo en un entorno determinado, para detectar alimento, evadir obstáculos y depredadores o guiar al conjunto de manera colectiva a mejores posiciones. **Los individuos se llaman partículas y el conjunto o población se llama enjambre.** <sup>[6]</sup>

El comportamiento de las partículas consiste en el movimiento circular alrededor de un punto de interés llamado vórtice. **Las partículas son individuos que tienen memoria** y, por tanto, retienen parte de información de su estado anterior. Es por ello, que el movimiento de cada partícula está influenciado por dos parámetros ponderados al azar como la individualidad y la sociabilidad. La individualidad se define como la tendencia a regresar a la mejor posición previa de la partícula, y la sociabilidad como la tendencia a moverse hacia la mejor posición previa del enjambre. <sup>[7],[8]</sup>

En la Figura 3 se muestra un enjambre de abejas que buscan polen. Cada abeja de forma individual busca la fuente de alimentación (a), y al encontrarla (b), se lo comunica al enjambre, que se desplaza hacia esa localización óptima generando un vórtice. Para cada abeja se representa la trayectoria seguida, el efecto de la memoria de la posición anterior (individualidad) y el efecto del conocimiento social (sociabilidad).

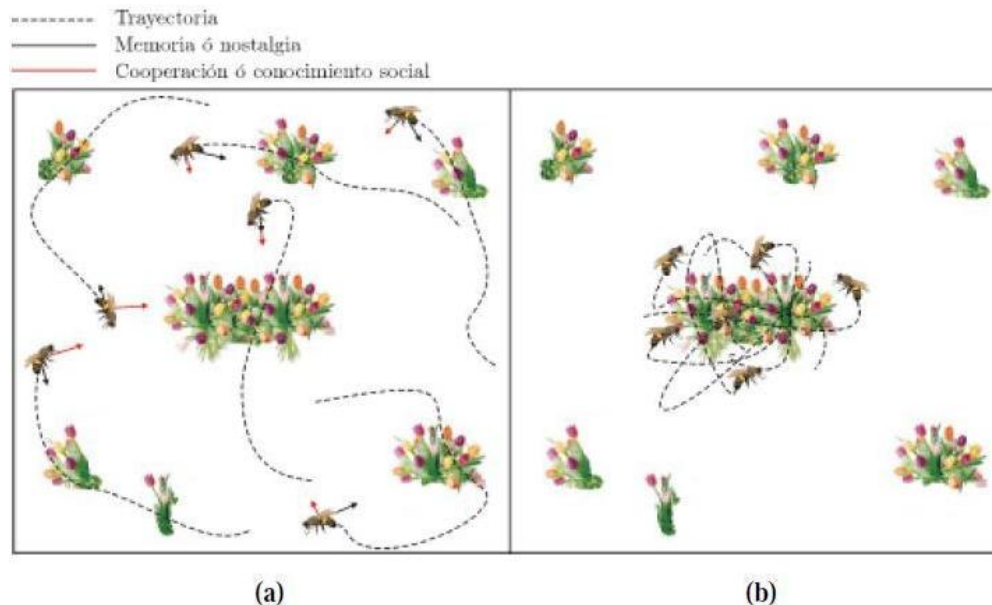
Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa



**Figura 3.** Movimiento circular de las abejas.

El algoritmo PSO es metaheurístico, es decir, se basa en un algoritmo iterativo donde cada partícula explora el espacio en búsqueda de soluciones óptimas, pero sin garantizar encontrar la solución óptima. <sup>[6]</sup>

Este tipo de algoritmos se basa en buscar el mínimo de una función objetivo, que es desconocido para el enjambre.

Para determinar la posición y velocidad de la partícula, existen dos tipos de algoritmos básicos.

- Algoritmo binario: La posición de la partícula se expresa en binario (1 y 0), y no usando valores reales. Entonces, se determina la posición de la partícula de forma aleatoria usando la función de la distribución de probabilidad. Los resultados de este tipo de algoritmo no han sido muy buenos y, por ello, no se realizan demasiados estudios de esta versión. <sup>[8]</sup>
- Algoritmo continuo: La posición de la partícula se expresa con valores reales y se encuentra en el espacio de búsqueda. A continuación, se muestran las ecuaciones:

$$v_{in}(k+1) = \omega v_{in}(k) + c_1 r_1(k) \cdot (p_{in}(k) - x_{in}(k)) + c_2 r_2(k) \cdot (g(k) - x_{in}(k)) \quad (1)$$



Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa

$$x_{in}(k+1) = x_{in}(k) + \tau v_{in}(k+1) \quad (2)$$

Dónde:

$$(w, c_1, c_2, \tau \geq 0)$$

$v_{in}(k+1)$  = velocidad de la partícula  $i$  para iteración  $k+1$  en la dimensión  $n$

$w$  = coeficiente de inercia

$v_{in}(k)$  = velocidad de la partícula  $i$  para iteración  $k$  en la dimensión  $n$

$c_1$  = constante de aceleración individual

$r_1$  = factor random en un intervalo de  $[0,1]$

$p_{in}(k)$  = mejor posición de la partícula  $i$  para iteración  $k$  en la dimensión  $n$

$x_{in}(k)$  = posición de la partícula  $i$  para iteración  $k$  en la dimensión  $n$

$c_2$  = constante de aceleración social

$r_2$  = factor random en un intervalo de  $[0,1]$

$g(k)$  = mejor posición global (de entre todas las partículas del enjambre) en la iteración  $k$  en la dimensión  $n$

$\tau$  = factor de construcción

$x_{in}(k+1)$  = posición de la partícula  $i$  para iteración  $k+1$  en la dimensión  $n$

El subíndice  $i$  indica la partícula,  $n$  la dimensión y  $k$  la iteración.

En la ecuación de la velocidad aparece el término  $c_1 r_1(k) * (p_{in}(k) - x_{in}(k))$ , que es la influencia de la memoria, nostalgia o auto aprendizaje de la partícula, es decir, la individualidad. El segundo término  $c_2 r_2(k) * (g(k) - x_{in}(k))$ , hace referencia a la cooperación y el conocimiento del grupo o enjambre, es decir, la sociabilidad. [8]

En la Figura 4 se da forma vectorizada a la influencia del término de memoria, cooperación e inercia para tres partículas. Como se puede observar la cooperación que modifica cada partícula confluye en un punto llamado  $b_g$ , que es la mejor posición global. Respecto a la memoria, se observa que los vectores para cada partícula se dirigen hacia un punto llamado  $b$ , que representa su mejor posición. En función de estas influencias, y también de la provocada por la inercia, se obtienen las coordenadas de las siguientes posiciones para cada partícula.

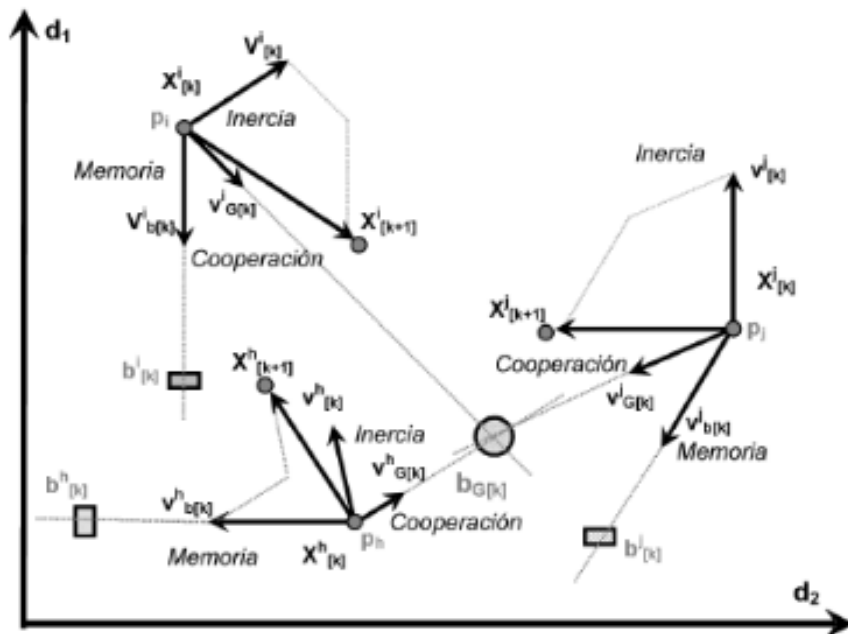
Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa



**Figura 4.** Representación de un grupo de partículas y los efectos de individualidad, sociabilidad e inercia en su movimiento.

Cuando el coeficiente de **inercia  $w$  es elevado**, favorece que las partículas hagan la **búsqueda global**, mientras que **cuando es pequeño**, favorece la **búsqueda local**. Es por ello, que algunos estudios realizados proponen que al inicio de la búsqueda este factor sea elevado y, conforme se explora el entorno, sea más pequeño para así favorecer la búsqueda local. <sup>[8]</sup>

La selección de unos adecuados coeficientes  $c_1$  y  $c_2$  implica mejorar la velocidad de convergencia y reducir los mínimos locales. <sup>[8]</sup>

En función del problema de estudio, hay que ajustar los parámetros  $w$ ,  $c_1$  y  $c_2$  para mejorar la búsqueda.

Este algoritmo usado es el más estudiado y, por tanto, la base para muchos estudiados. Estos, en función del problema a resolver, implementan modificaciones. **Una de las problemáticas que suelen tener los algoritmos PSO es la convergencia** en mínimos locales y evadirlos se han desarrollado varios algoritmos como:

- Algoritmo de Gloworm: desarrollado por Krishnanand en 2009, está basado en lo estrategia general de realizar una dispersión cuando el enjambre se encuentra en un mínimo local. <sup>[7]</sup>

Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

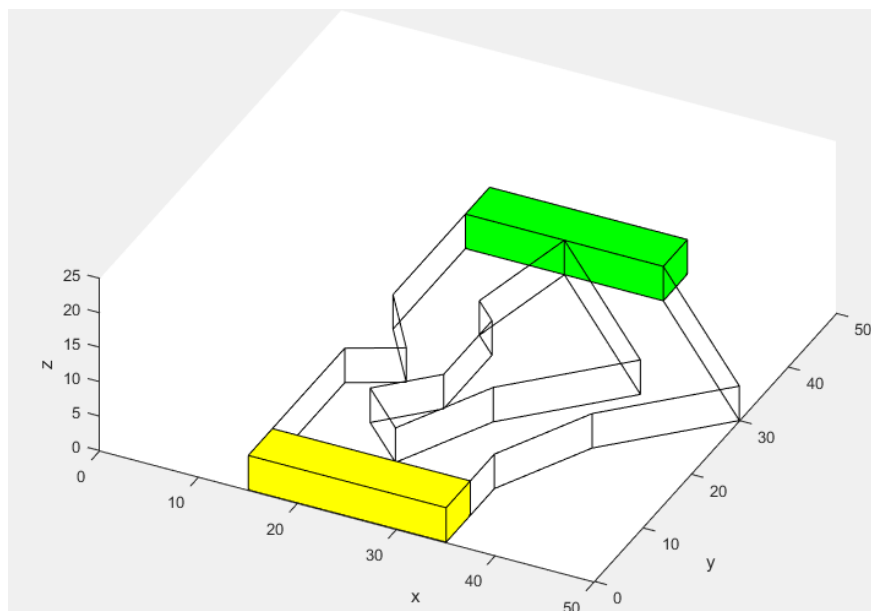
Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa

- Algoritmo de Waves of Swarm Particles WoSP: propuesto por Hendtlass en 2005, se basa en la estrategia general de la inercia modulada para escapar de mínimos locales. <sup>[7]</sup>
- Particle Swirl Algorithm PSA: propuesto por Menser en 2006, se fundamenta en el concepto de vorticidad para escapar de mínimos locales. <sup>[7]</sup>

### 3. Procedimiento informático y resultados

Una vez realizada la explicación matemática de estos dos métodos, se han implementado los algoritmos para ver su comportamiento en el mismo entorno generado. Se ha generado el entorno que se muestra en la Figura 5 para poder observar y comparar los algoritmos.



**Figura 5.** Entorno generado para la planificación de caminos.

Se puede observar que el entorno consta de dos zonas: la zona de salida (marcada en amarillo) y la zona de llegada u objetivo (marcada en verde). Esto aplicado al mundo real representaría el nido (de donde salen las hormigas/partículas) y la comida que buscan obtener para su subsistencia.



## Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

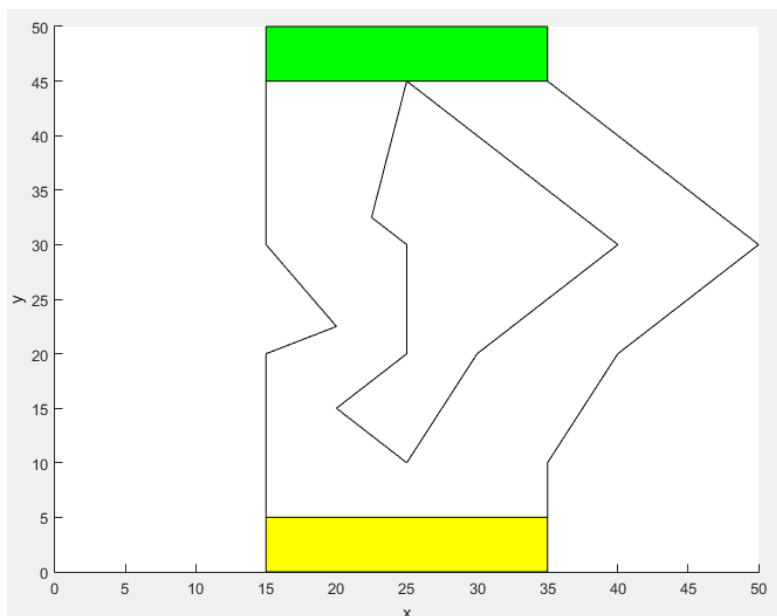
Veronica Fernández

Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa

El entorno tiene dos caminos diferentes y cuenta con una cierta altura por donde los elementos a estudiar pueden moverse. Se ha considerado que el punto objetivo no es un punto sino toda la zona marcada en verde, es por ello que el resultado será válido si llegan a cualquier punto que conforma esa zona.

Para una mejor percepción del entorno se ha incluido la Figura 6, donde se pueden apreciar las distancias de cada uno de los caminos. A simple vista no se puede prever cuál de los dos caminos es más corto, ya que, aunque el de la derecha parece más largo no cuenta con el estrangulamiento que tiene el camino de la izquierda.



**Figura 6.** Dimensiones del entorno generado.

Para poder evaluar los resultados obtenidos con ambos algoritmos, se ha utilizado el mismo entorno para ambos.

### 3.1. Comportamiento del algoritmo ACO en el entorno generado

Tal y como se ha visto en la explicación matemática de este algoritmo, existen varios parámetros que afectan a la probabilidad a la hora de escoger un camino. Es por ello



Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa

que en este apartado se analizarán varios casos para dar con el óptimo. Sin embargo, antes de esto, se explicará cómo se ha implementado dicho algoritmo.

El pseudocódigo que describe el algoritmo ACO, mostrado más abajo, se puede observar que el primer paso es generar el movimiento de cada hormiga, seguidamente se aplica en el caso que sea posible, y por último se actualiza el valor de las feromonas a partir de los datos generados anteriormente. Este procedimiento se repite hasta que se alcance las iteraciones deseadas.

```
procedure ACO_MetaHeuristic
  while(not_termination)
    generateSolutions()
    daemonActions()
    pheromoneUpdate()
  end while
end procedure
```

Primero de todo, se ha generado una variable de nombre ants que tiene varios datos asignados, como lo son la posición, dirección, si va en busca de comida o no... El elemento "ants" comienza caminando con un ángulo que varía de forma semi-aleatoria para determinar su posición en el plano x-y. El ángulo de giro se obtiene mediante el sistema indicado en la Figura 7. Se genera un número aleatorio entero (entre el 1 y el 6) que define el caso que adopta la hormiga, que determina en cuál de los cuatro cuadrantes estará.

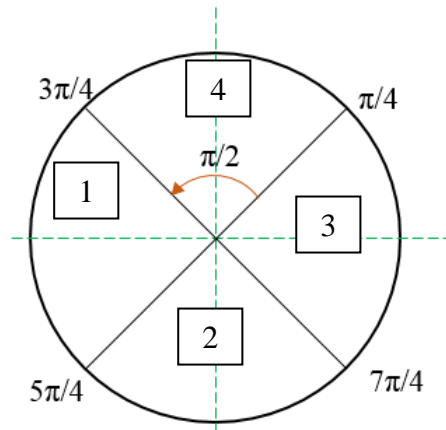
Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa



**Figura 7.** Distribución de la orientación de las hormigas en el algoritmo implementado.

Dentro de cada cuadrante puede adoptar cualquier posición dependiendo de un número aleatorio generado, tal y como se puede apreciar en el siguiente trozo de código:

```
switch move
case 1
    ants(i).dir = 3*(pi/4) + ((pi/2)*rand(1));
case 2
    if ants(i).to_food == 1
        ants(i).dir = 5*(pi/4) + ((pi/2)*((rand(1))))
    end
    else
        ants(i).dir = (pi/4) + ((pi/2)*((rand(1))));
    end
case 3
    ants(i).dir = 7*(pi/4) + ((pi/2)*rand(1));
otherwise
    if ants(i).to_food == 1
        ants(i).dir = (pi/4) + ((pi/2)*((rand(1)))^(fero(i)));
    else
        ants(i).dir = 5*(pi/4) + ((pi/2)*((rand(1))));
    end
end
```



Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa

Si el número aleatorio **generado es igual a 1** se encuentra dentro del primer cuadrante, si es igual a dos está en el segundo cuadrante, si es igual a tres en el tercero y para los otros casos en el cuarto. Para determinar cada cuadrante se le asigna el valor que limita con el precedente y se le suma  $90^\circ$  multiplicado por un número aleatorio entre el 0 y el 1 (ángulo delimitador +  $(\pi/2) \cdot \text{rand}(1)$ ).

Se puede apreciar que cuando se encuentra en el cuarto cuadrante (cuando está mirando hacia delante), aparece un término denominado "fero" que es la probabilidad inducida por el algoritmo ACO. Esto hace que la hormiga tienda a girar más hacia un lado cuando la probabilidad de ir por ese camino sea mayor.

Para obtener el valor de la variable fero se han ido contando los pasos que da cada hormiga que "ha salido del nido y va en busca de comida". De esta forma se guarda el valor de los pasos que han necesitado las hormigas que van por un camino y por el otro.

Recordemos que el coeficiente de adaptación era la inversa a la cantidad de pasos de todas las hormigas que habían elegido ese camino. Es por ello que se calcula también la cantidad de hormigas que han tomado ese camino y se realiza la media de pasos que han necesitado.

Después se calcula el nivel de rastro de feromonas utilizando el método AS. Para ello entra en juego el coeficiente de evaporación junto a la cantidad de pasos. Una vez que se tienen el nivel de rastro y el coeficiente de adaptación (tanto de cada hormiga individual como el total) para cada camino se calcula la probabilidad de ir por el camino 1 y de ir por el 2.

La variable fero es la inversa a la división entre la probabilidad 1 y la probabilidad 2:

$$fero(i) = \frac{1}{\frac{ants(i).prob1}{ants(i).prob2}}$$

De esta forma, si esa hormiga tiene una probabilidad mayor de ir por el camino 1 la variable fero será inferior a 1 y como está elevado al rango de giro se orientará para ir al camino 1. Ocurre lo contrario cuando la probabilidad es superior para ir por el camino 2. De esta forma se obtiene aplicar el algoritmo ACO a la planificación de caminos.



Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa

### 3.2. Comportamiento del algoritmo PSO en el entorno generado

En este segundo tipo de algoritmo, tal y como se ha explicado anteriormente en el c hay muchos factores que se ven implicados a la hora de escoger el camino de menos recorrido hacia el objetivo. A continuación, se muestra el pseudocódigo del algoritmo PSO.

S: InicializarCumulo()

**While** no se alcance la condición de parada **do**

**For**  $i = 1$  to size( $S$ ) **do**

        Calcular cada posición  $x_{in}(k+1)$

**If** condiciones **then**

            Evaluar  $x_{in}(k+1)$

$x_{in}(k) = x_{in}(k+1)$

**End if**

**If** condiciones **then**

            Evaluar mejor posición individual  $p_{in}(k)$

**End if**

**If** condiciones **then**

            Evaluar mejor posición global  $g(k)$

**End if**

        Calcular cada velocidad  $v_{in}(k+1)$

**End for**

    Evaluar la distancia recorrida

**End while**

Primero, se inicializa el cúmulo, es decir, las posiciones para cada partícula de forma aleatoria dentro de la zona de salida marcada en amarillo. También, se inicializa la velocidad con valores de cero.

El cálculo de la siguiente posición se hace usando la ecuación (2). Para el entorno escogido se decide que el factor de construcción  $\tau$  sea de  $1/1.6$  para reducir el peso de la velocidad en el cálculo de la posición debido a la estrechez de los caminos. De esta



Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social
Xanti Elola
Veronica Fernández
Marc Rodríguez
Sergi Torregrosa

manera se consigue que la distancia recorrida entre la posición anterior y la siguiente sea menor y, por tanto, disminuya las probabilidades de que la siguiente posición se encuentre fuera del camino.

Después, se evalúa que la posición calculada se encuentre dentro de los límites del entorno. Para ello, se limita la posición en función de los límites físicos del camino y se obliga a que la diferencia en el eje y entre la coordenada de la posición anterior y la siguiente, es decir, la distancia en y, sea igual o menor de 10 debido a la forma de los caminos. De esta manera, si no se cumplen estos requisitos, la posición no se actualizará a la posición calculada y la partícula no se moverá.

Seguidamente, se busca la mejor posición individual y global. Para ello se sustituye las coordenadas de las posiciones en una función objetivo de la que se desea encontrar su mínimo. En este caso, se ha seleccionado una función paraboloide cóncava, de forma que solo tiene un mínimo, y que está situado en la posición (25,47,3) dentro de la zona de llegada en verde. Así, se evite los problemas de estancamiento en mínimos locales. La función escogida es la siguiente:

$$(\text{swarm}(i).\text{posx} - 25)^2 + (\text{swarm}(i).\text{posy} - 47)^2 + (\text{swarm}(i).\text{posz} - 3)^2$$

Para cada partícula se obtiene un valor de esta función y el valor mínimo indicará la mejor posición global. Se evalúa que la posición global esté dentro de los límites físicos del entorno, si no es así, se coge el siguiente valor mínimo hasta que se cumpla.

Seguidamente, se calcula la velocidad usando la ecuación (1).

A continuación, se calcula el coste para la mejor posición global. Se ha decidido que para una mejor comparación con el algoritmo de ACO, el coste se evalúe en función de la distancia recorrida por la mejor posición. Al ser posiciones expresadas en coordenadas, esto se traduce en el cálculo del módulo entre las coordenadas de la posición actual y la anterior.

Una vez se ha iterado estos cálculos varias veces y las partículas han encontrado el mínimo de la función, se repite el algoritmo para encontrar el camino óptimo recorrido por la mejor posición global. Este camino óptimo tendrá el valor mínimo de coste, es decir, la menor distancia entre la salida y la llegada.

Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

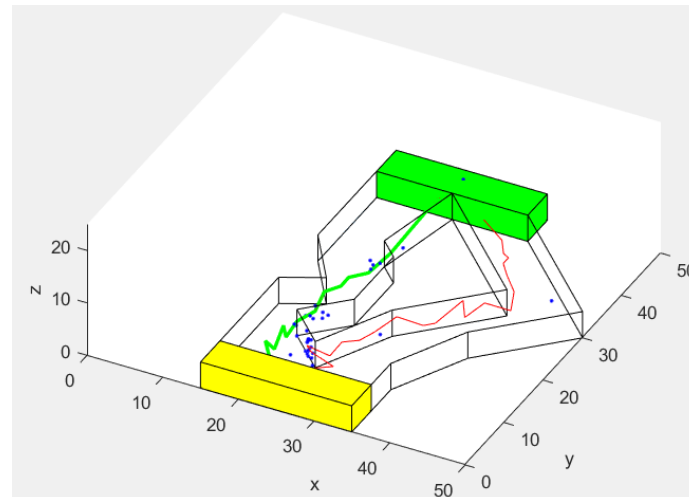
Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

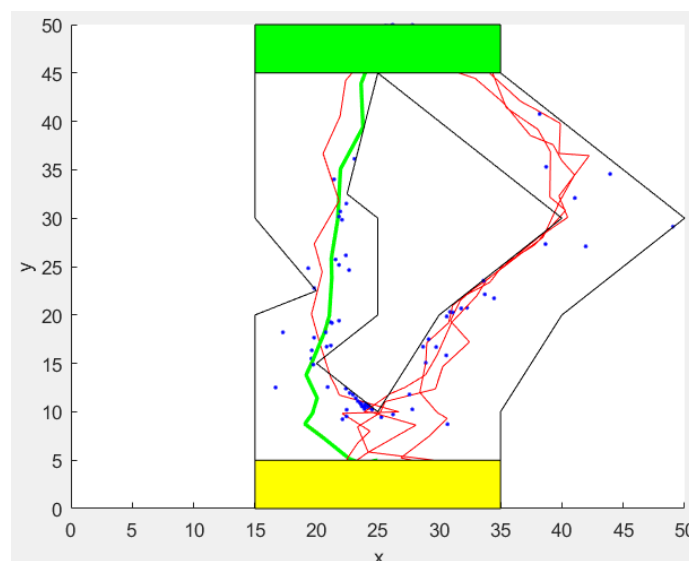
Sergi Torregrosa

En la Figura8 se muestra el algoritmo PSO realizado para dos simulaciones, donde en verde se muestra el camino óptimo. En rojo se muestran el resto de caminos, en este caso 1. Los puntos azules representan cada una de las partículas.



**Figura 8.** Caminos seguidos por las partículas para dos simulaciones (vista en 3D).

En la Figura 9 se muestra otra simulación que, aunque está realizada en 3D, para una mayor visualización se muestra la vista en 2D.



**Figura 9.** Caminos seguidos por las partículas para cinco simulaciones (vista en 2D).

Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

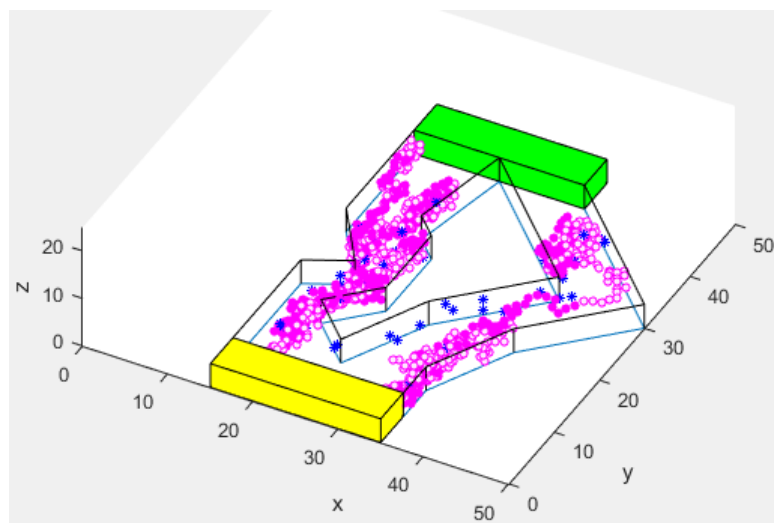
Sergi Torregrosa

## 4. Resultados

### 4.1. Resultados de ACO

La primera simulación se ha realizado con los siguientes parámetros:

- Número de hormigas = 80
- Coeficiente de evaporación = 0,5
- $\alpha = 0$
- $\beta = 1$



**Figura 10.** Distribución de los caminos seguidos por las diferentes hormigas.

Se ha dejado la simulación por un tiempo de 600 iteraciones donde 11 hormigas han logrado llegar al destino. La hormiga que ha llegado en menos pasos lo ha hecho con 98 pasos siguiendo el camino marcado en la Figura 11. Se puede observar que el camino óptimo ha sido por el camino de la izquierda y que la hormiga ha tenido varias "indecisiones".



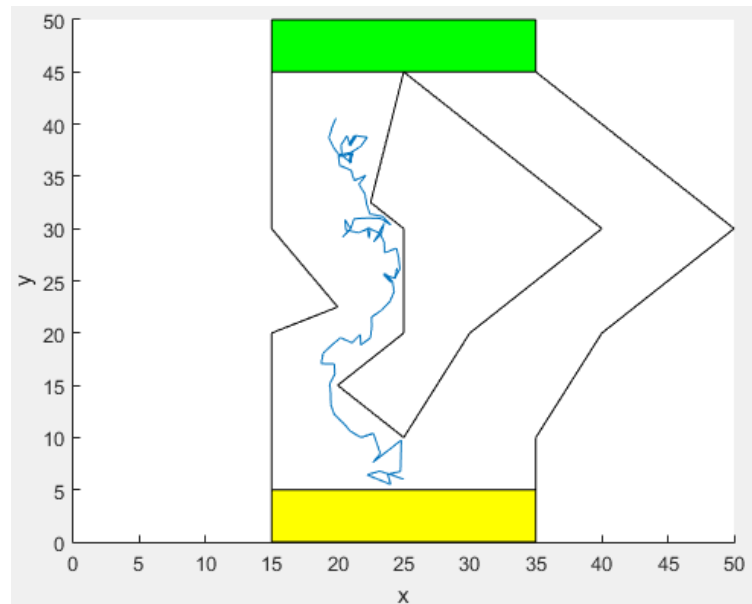
Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa



**Figura 11.** Resultado del camino óptimo conseguido siguiendo el criterio de mínimo de pasos.

La segunda prueba se ha realizado con los mismos valores de los parámetros, pero se ha dejado más tiempo de simulación (hasta 1000 iteraciones). De esta forma más hormigas llegarán al destino y habrá mayor rastro de feromonas para perseguir.

En este caso la hormiga con menos pasos en llegar al destino ha necesitado 77 (un 21% menos que en caso anterior). Si se observa la Figura 2 se puede apreciar que el camino es más recto que en caso anterior y que no hay tantas idas y vueltas.

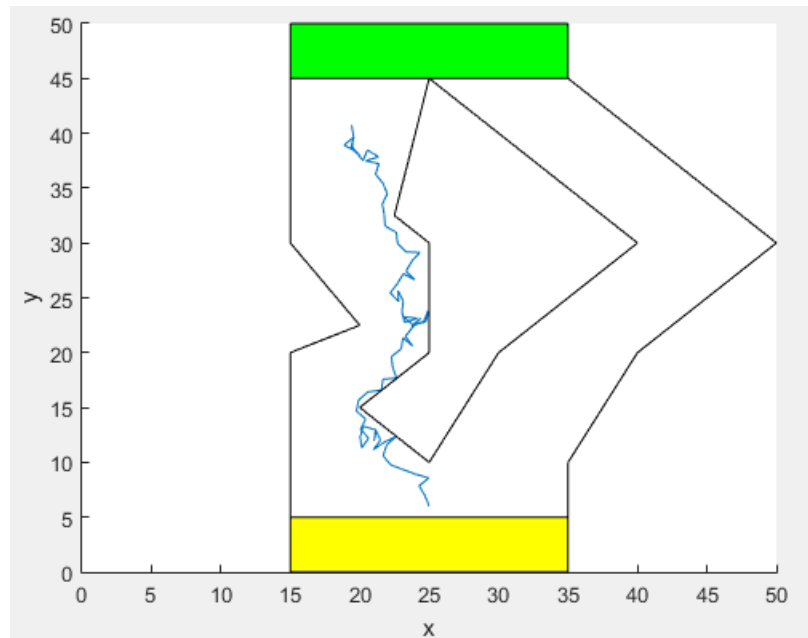
Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa



**Figura 12.** Camino óptimo obtenido con un tiempo de simulación de 1000 iteraciones.

Se ha comprobado que cuanto más tiempo se deje la simulación (cuantas más hormigas lleguen al destino) mejor es el camino, ya que se reducen los pasos necesarios y se obtiene una trayectoria más directa.

La siguiente simulación se ha realizado con un coeficiente de evaporación más elevado que el anterior (0,8 en este caso). En este caso los pasos necesarios se han reducido a 60 y han trazado la trayectoria mostrada en la Figura 3. Se puede observar que es más directa que la anterior, cosa que se ve plasmado en la cantidad de pasos necesaria.

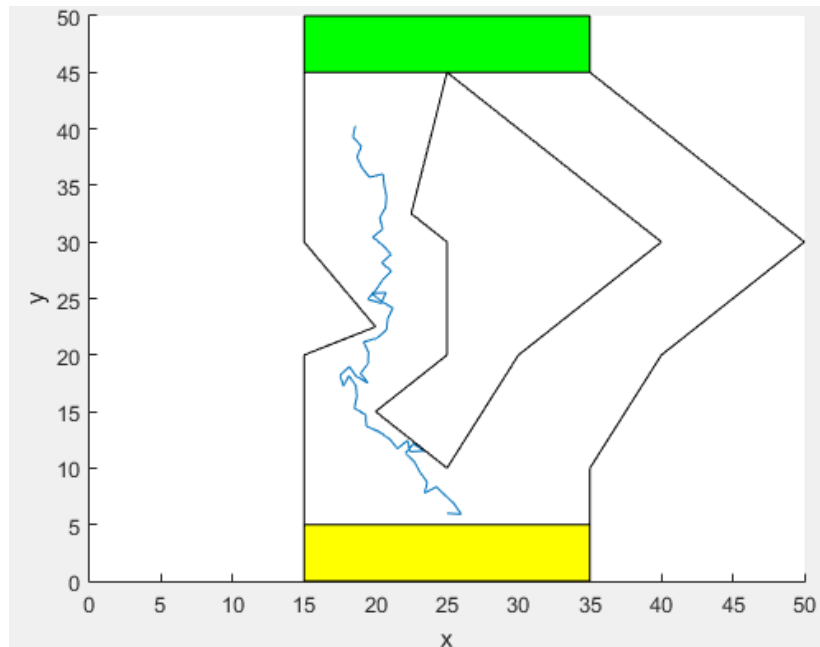
Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa



**Figura 13.** Camino óptimo con un factor de evaporación de 0,8.

Para sacar alguna conclusión se ha de entender que significa aumentar el coeficiente de evaporación. El coeficiente de evaporación tiene como objetivo incrementar el valor de feromona asociado a las buenas soluciones y de disminuir el valor de las malas. Esto lo realiza disminuyendo todos los valores (se evaporan) e incrementando los niveles asociados al conjunto de soluciones para la actualización en forma de cantidad depositada. Es por ello que se observa una mejora en los resultados obtenidos.

Sin embargo, incrementar demasiado el coeficiente de evaporación puede suponer que se pierdan también las buenas soluciones si la hormiga no las ha detectado a tiempo. Es por ello que se ha de establecer un límite. Se ha comprobado que un nivel superior a 0,87 supone un aumento en la distancia recorrida.

Las siguientes pruebas se han realizado cambiando los valores de los coeficientes que elevan el nivel de feromonas y el coeficiente de adaptación ( $\alpha$  y  $\beta$ ). Para no cargar demasiado el informe, únicamente se ha mostrado la cantidad de pasos necesarios con cada prueba y no la figura. En la Tabla 2 se muestran los resultados obtenidos realizando la media entre los valores de las diferentes pruebas (3 simulaciones para cada caso). Con los resultados recogidos en esta tabla se contempla toda la casuística, ya que se modifica cada parámetro fijando otros como referencia.

Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

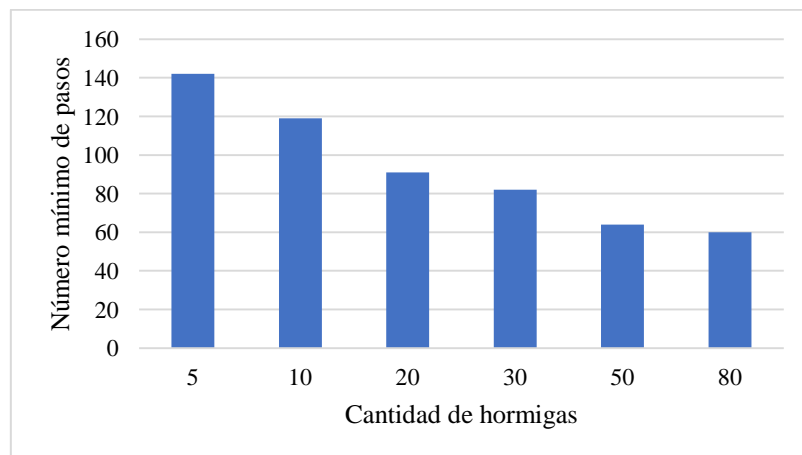
Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa

**Tabla 2.** Tabla resumen de los valores obtenidos con diferentes parámetros en ACO.

Número de hormigas	Coefficiente de evaporación	$\alpha$	$\beta$	Camino elegido	Pasos camino óptimo
80	0,8	0	1	IZQ.	60
80	0,8	0,5	1	IZQ.	74
80	0,8	0	1,5	IZQ.	83
50	0,8	0	1	IZQ.	62

Se puede observar que el número de hormigas es bastante indiferente ya que a partir de un cierto número la cantidad de pasos no se ve tan afectada (puede variar ligeramente, pero no se verá reducido significativamente). Sin embargo, existe un número mínimo para el cual se observa una reducción importante en la cantidad mínima de pasos (aproximadamente a partir de 20 hormigas no se percibe tanto cambio tal y como se muestra en la Figura 4).



**Figura 14.** Evolución del número de pasos mínimos necesarios para llegar al objetivo según cantidad de hormigas.

También se observa que la variación de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  no disminuyen la cantidad de pasos, si no que los aumentan. Se ha deducido que esto ocurre ya que, al aumentar la probabilidad de seguir a las hormigas anteriores, las hormigas nuevas son

## Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa

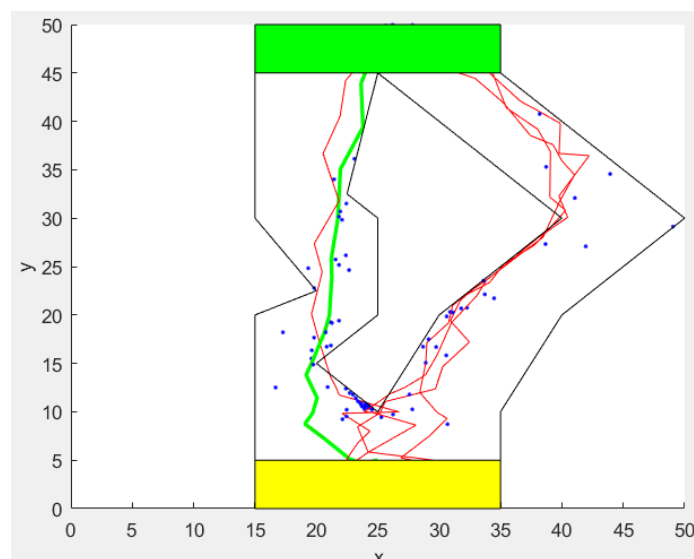
incapaces de generar rutas alternativas, por lo que no pueden disminuir la cantidad de pasos.

Cabe destacar, que, para todos los casos, el camino más corto ha sido el de la izquierda.

### 4.2. Resultados de PSO

En la Figura 15 se observa la simulación del algoritmo PSO para un tiempo muy pequeño, donde solo se han realizado cinco caminos. En rojo se muestran todos los caminos explorados y en verde, el óptimo de entre todos.

Las partículas que se observan en mitad del camino son aquellas que la posición calculada no cumplía con los requisitos que se evalúan y, por tanto, no se actualiza la posición. Al alejarse la mejor posición global de la posición de estas partículas, la velocidad se incrementa, disminuyendo así la probabilidad de que la nueva posición calculada esté dentro de los límites. Este problema del algoritmo se puede arreglar en gran medida ajustando el valor del factor de inercia  $w$ , de forma que la búsqueda de las partículas sea más local y menos global. En estos puntos, también se observa que las partículas se concentran, a veces colocadas de forma circular alrededor de un punto, de ahí la vorticidad de este tipo de algoritmo. Esto sucede por la influencia que ejerce cada partícula sobre el resto.



**Figura 15.** Camino óptimo para un tiempo de simulación pequeño, con 50 partículas,  $w$  de 0,5,  $c_1$  de 1,  $c_2$  de 2.

Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

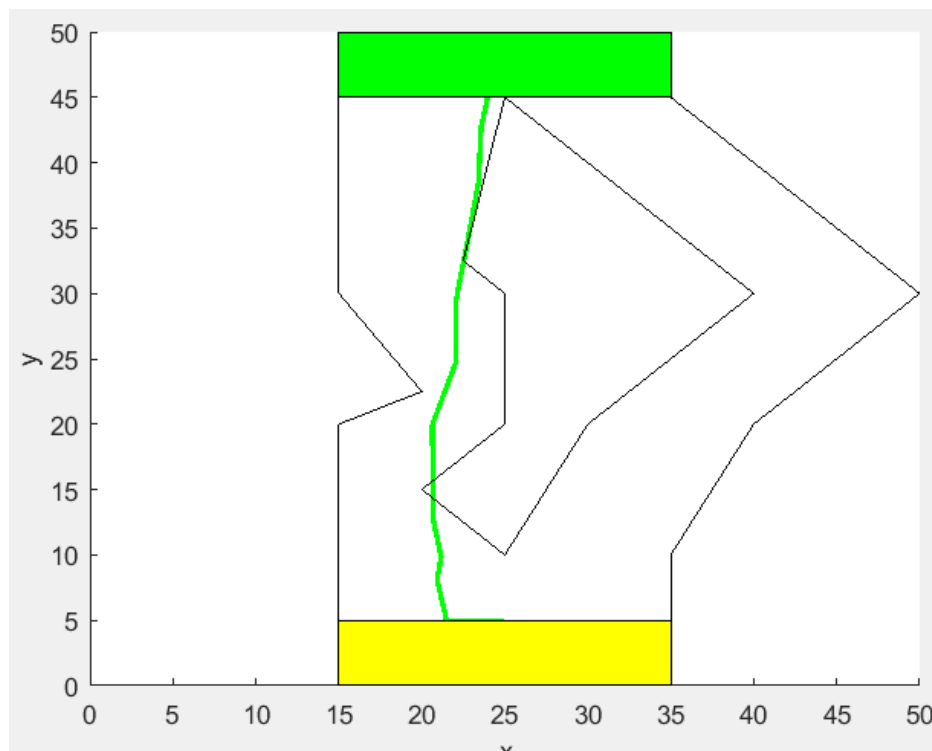
Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa

En la Figura 16 se muestra una simulación donde se ha dejado un tiempo de simulación muy elevado. Para los mismos parámetros anteriores, un número total de 50 partículas, un factor de inercia  $w$  de 0.5, una constante de aceleración individual  $c_1$  de 1, una constante de aceleración social  $c_2$  de 2, se obtiene un camino óptimo de 43.86.

Si se compara este camino óptimo con el de la Figura 15 se observa que es mucho más recto, y no hace tanto zigzag.

Durante la simulación, se observa que conforme aumentan los caminos explorados por el algoritmo, el tiempo que tarda en explorar un solo camino aumenta.



**Figura 16.** Camino óptimo para 50 partículas,  $w$  de 0,5,  $c_1$  de 1,  $c_2$  de 2.

A continuación, se muestra en la Tabla 3 la variación del valor de los parámetros que pueden provocar más variaciones en los resultados por lo que hace el menor recorrido.

Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

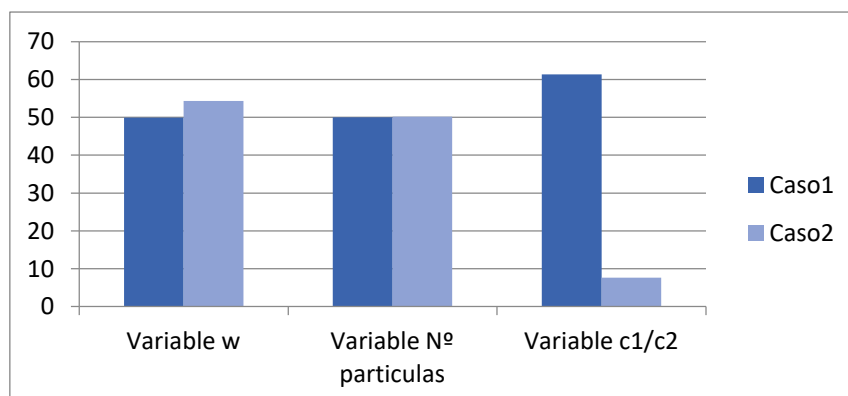
Sergi Torregrosa

**Tabla 3.** Comparación del algoritmo PSO en función del de diferentes parámetros.

Número de abejas	Iteraciones	c1/c2	w	Camino elegido	Distancia opt. camino
50	40	2/2	0,5	IZQ.	49,88
50	40	2/2	0,75	IZQ.	54,29
80	40	2/2	0,5	IZQ.	49,96
100	40	2/2	0,5	IZQ.	50,21
50	40	1/2	0,5	IZQ.	61,36
50	40	2/1	0,5	IZQ.	7,63

En la tabla anterior, se puede extraer como información relevante que el camino izquierdo es el de menor recorrido y que, a cuanto mayor es el coeficiente de inercia, al estar relacionado con la velocidad produce que la distancia recorrida hasta el objetivo sea mayor. También otro factor a destacar es que cuanto mayor es la población del enjambre mayor es el recorrido a realizar. Finalmente, si se varía la aceleración asociada al individuo de forma que sea mayor a la grupal, lo que sucede es que el grupo llega antes al mejor punto y no llegan hasta la ubicación destino marcada. Por eso en la tabla anterior, el último caso sale un valor de distancia tan pequeño.

Se ha investigado resultados para dos posibles valores de cada de unos de los parámetros, los cuales pueden afectar más al desarrollar el algoritmo. A continuación, se puede ver una gráfica con los resultados obtenidos en la tabla anterior.



**Figura 16.** Valores de las distancias recorridas hasta el objetivo en diferentes casos.



Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa

Cuando se indica en el gráfico anterior el nombre de "Variable w", hace referencia que es el parámetro que le damos distintos valores para poder ver la afectación sobre la obtención del camino de menor recorrido. También comentar que los valores del eje "y" están relacionados con la distancias recorridos en cada caso. Cabe destacar que en la parte de la derecha del todo dónde se ve un valor muy pequeño de distancia, eso es así, por culpa que la aceleración de las partículas es mucho mayor que la del grupo y por eso llega al punto óptimo antes de llegar a la ubicación destino marcada en verde en la Figura 6.



Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

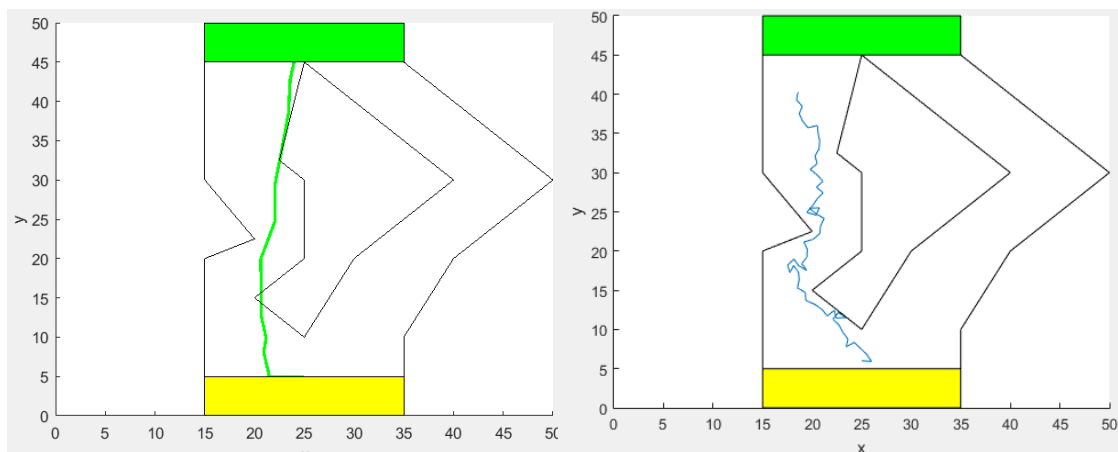
Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa

## 5. Conclusiones

La primera conclusión que se puede obtener de este trabajo es que se han aplicado dos técnicas de inteligencia artificial a un problema de búsqueda del camino óptimo. Se ha generado un entorno 3D con varios obstáculos de por medio que los dos algoritmos implementados han sido capaces de evitar y poder llegar desde un punto inicial al objetivo. De la misma forma, se han estudiado y analizado esos dos algoritmos basados en el foraging social tanto de forma matemática como su aplicación informática.

Al estudiar dos algoritmos diferentes para dar solución al mismo problema, se han podido comparar los resultados obtenidos y valorar cual da mejor solución al problema descrito. Esa comparación se muestra en la Figura 16.



**Figura 17.** Comparación de los resultados obtenidos mediante ACO y PSO.

En las imágenes anteriores se pueden visualizar y extraer diferentes conclusiones. Primeramente, cabe destacar que para los dos tipos han escogido el camino de la izquierda como el más corto. Se ha comprobado también que en el caso del algoritmo de ACO sólo serviría en un caso de tomar una decisión de coger un camino, a la izquierda o a la derecha, pero no tanto para la búsqueda del óptimo. En cambio, para el caso del PSO sí que es un buen algoritmo para encontrar un camino de forma rápida y efectiva.

Cabe destacar que en el caso de ACO, aunque las hormigas tengan un comportamiento de colonia, actúan de forma más individual que las partículas del



Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa

PSO. Cada hormiga realiza sus propios movimientos donde el resto del hormiguero solo influye en su orientación. En el caso del PSO, las partículas presentan un comportamiento de enjambre, donde influye en la siguiente posición que adoptará cada una de ellas. Es por ello que se observa una trayectoria más limpia en el caso de PSO.

Respecto al tiempo de simulación, cabe destacar que el ACO coge más espacio de memoria ya que se necesitan guardar más variables para poder ejecutar el siguiente paso de cada hormiga. Para llegar a un tiempo de simulación (cantidad de iteraciones) para el cual se puede suponer que el resultado es lo suficientemente representable, el ACO necesita más de 5 minutos de simulación, tiempo que aumenta exponencialmente a medida que las hormigas llegan al punto objetivo. Sin embargo, para el PSO, la simulación se completa en menos de un minuto.

Como conclusión final, se ha concluido que el algoritmo ACO es un algoritmo que se basa en la toma de decisiones a la hora de encontrarse con una bifurcación. Es un algoritmo que presenta buenas soluciones a problemas de tipo TSP (Travelling Salesman Problem) donde los caminos están formados por nodos y se decide porque nodos se ha de pasar. Sin embargo, para este problema se ha presentado un camino "vacío" donde el camino es libre y no está formado por nodos. Es por ello que la trayectoria presentada no es tan directa y existen zigzagueos en el camino. La decisión de plantear así el problema ha sido para poder comparar los dos algoritmos sobre las mismas condiciones y poder observar un comportamiento más cercano a la realidad animal.



Planificación de caminos con técnicas de 'foraging' social

Xanti Elola

Veronica Fernández

Marc Rodríguez

Sergi Torregrosa

## 6. Bibliografía

[1] Hernández Pérez, Hipólito. *Descripción de comportamientos animales que se utilizan para algoritmos de optimización e inteligencia artificial*. Universidad de La Laguna. Septiembre 2017.

[2] Dorigo, Marco & Stützle, Thomas. *Ant Colony Optimization*. The MIT Press; Cambridge, Massachusetts. 2004.

[3] Brand, Michael; Masuda, Michael; Wehner, Nicole, Yu, Xiao-Hua. *Ant Colony Optimization Algorithm for Robot Path Planning*. Department of Electrical Engineering, California Polytechnic State University, San Luis Obispo, CA, USA. 2010.

[4] Scholarpedia. Ant colony optimization. Dorigo, Marco. Université Libre de Bruxelles, Brussels, Belgium. Disponible en:

[http://www.scholarpedia.org/article/Ant\\_colony\\_optimization](http://www.scholarpedia.org/article/Ant_colony_optimization)

[5] NetLogo Web. *Ants*. Disponible en:

<http://www.netlogoweb.org/launch#http://www.netlogoweb.org/assets/modelslib/Sample%20Models/Biology/Ants.nlogo>

[6] Torres, Mateo; Barán, Benjamín. Optimización de Enjambre de Partículas para Problemas de Muchos Objetivos. Latin American Computing Conference (CLEI). 2015

[7] Espitia, Helbert; Sofrony, Jorge. *Algoritmo de optimización basado en enjambres de partículas con comportamiento de vorticidad y búsqueda individual y grupal*. Universidad Nacional de Colombia. Mayo 2014.

[8] Info-PSO. Universidad Carlos III de Madrid, 2005. Disponible en:

<http://tracer.uc3m.es/tws/psa/>