Otoño 2019

Lab 8

1) a) Por TVI $\exists c \in (a,b)$ t. $f(c)=0$

Sup $\exists d \in (a,b)$ t. $f(d)=0$ con $c \neq d$

Por TVM como $f(c)=f(d) \Rightarrow \exists \alpha \in (a,b)$ t. $f'(\alpha)=0$ ∇

$\Rightarrow d=c$.

b) $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(d)$ con $d \in (a,b)$ por TVM.

Como $f(a)<f(b)$ y $a<b \Rightarrow f'(d)>0$

Sup $\exists \beta \in (a,b)$ t. $f'(\beta)<0$

$\Rightarrow f'(d)\cdot f'(\beta)<0 \Rightarrow \exists \gamma \in (a,b)$ t. $f'(\gamma)=0$ ∇

$\therefore f'(x)>0 \ \forall x \in (a,b)$ [f es creciente en (a,b)]

2) $\dfrac{f(0)-f(1)}{0-1} = \dfrac{1-f(1)}{-1} = f(1)-1 = f'(c)$ con $c \in (0,1)$ [TVM]

Sea el intervalo $[0,x]$ con $x \in (0,1)$

$\Rightarrow \exists c_x \in (0,1)$ t. $\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \left|\dfrac{f(x)-1}{x}\right| = |f'(c_x)| \leq 2$

$\Rightarrow |f(x)-1| \leq 2|x| \Rightarrow |f(x)-1| \leq 2x$ (ya que $x \in (0,1)$)

$\Rightarrow 1-2x \leq f(x) \leq 1+2x$

3) Hagamos el caso cuando $x>0$. Consideremos el int. $[0,x]$

Sea $f(x)=\cos(x)$ dif y cont en $[0,x]$. Por TVM:

$$\left|\dfrac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0}\right| = \left|\dfrac{\cos(x)-1}{x}\right| = |f'(c)| = |-\operatorname{sen}(c)| \leq 1 \text{ con } c \in [0,x]$$

$\Rightarrow |\cos(x)-1| \leq |x|$ si $x \in (0,\infty)$

El otro caso es análogo.

4) a) Sea $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x)$ es cont. y dif en $(0, \infty)$. Sean $a, b \in (0,\infty)$ con $a<b$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a} = f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}} \quad \text{para alguna } c \in (a,b)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \quad \text{como } a<c<b$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b}-\sqrt{c} < \frac{b-a}{2\sqrt{a}}$$

b) Sea $b=18$, $a=16$

$$\Rightarrow \frac{18-16}{2\sqrt{18}} < \sqrt{18}-\sqrt{16} < \frac{18-16}{2\sqrt{16}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3\sqrt{2}} + 4 < \sqrt{18} < \frac{1}{4} + 4 \Rightarrow 4+\frac{1}{5} < \sqrt{18} < 4+\frac{1}{4}$$

5) Sea el intervalo (a,b) con $a<b$ y sea $f(x) = \tan(x)$

$$\left|\frac{\tan(b)-\tan(a)}{b-a}\right| = |f'(c)| = |\sec^2(c)| \geq 1 \Rightarrow |\tan(b)-\tan(a)| \geq |b-a|$$

Sea ahora el intervalo $(-b, a)$

$$\left|\frac{\tan(a)-\tan(-b)}{a+b}\right| = |\sec^2(c)| \geq 1 \Rightarrow |\tan(a)+\tan(b)| \geq |a+b|$$

6) $f(-1) = 0\, f(1)$ es evidente.

$$f'(c) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2} & \text{con } x \in (0,-1) \\ \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} & \text{con } x \in (-1,0) \end{cases} \neq 0 \ \forall c \in (-1,1)$$

No se contradice el teorema ya que $f'(x)$ no es dif en 0.