Cálc. Dif. e Integral I Lab 7

Otoño 2019

1) $f(x)=ax^2+bx+c$, $P(1,3)$ tangente $y=2x$ en $(0,0)$. Determina $(a,b$ y $c)$ traza.

① Sabemos f tangente a $y=2x$ en $(0,0)$

obtengamos $f'(x)$

$f'(x) = 2ax+b$

Como f y $2x$ son tangentes en $(0,0)$

$\Rightarrow f'(x)|_{x=0} = 2x|_{x=0}$ (sus pen

corresp

$\therefore f'(x)|_{x=0} = (2ax+b)|_{x=0} = 2$

$\Leftrightarrow 2a(0)+b=2 \Leftrightarrow b=2$

② f pasa por $(1,3)$ y por $(0,0)$

Como f pasa por $(1,3)$

$\Rightarrow f(1) = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = a+b+c = 3 \quad \ldots (*)$

Como f pasa por $(0,0)$

$\Rightarrow f(0) = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = c = 0$

Ya sabemos que $b=2$ y $c=0$

Sustituyendo en $(*)$ $[a+b+c=3]$

$a+2+0=3 \Leftrightarrow a+2=3 \Leftrightarrow a=1$

2) Sea $f(x) = \begin{cases} 6\sqrt{x} & si\ x\in(0,9) \\ x+9 & si\ x\in[9,12] \end{cases}$

obtén $f'(x_0)$ si $x_0 = 9$.

Notemos que f es continua en 9 ya que:

$$6\sqrt{x}\Big|_{x=9} = 18 = x+9\Big|_{x=9}$$

$\therefore$ La derivada puede existir.

Por la definición de derivada.

$$f'(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 9} \frac{f(x)-f(9)}{x-9}$$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{f(x)-(9+9)}{x-9} = \lim_{x\to 9} \frac{f(x)-18}{x-9} \quad \ldots(*)$$

Analicemos $\lim_{x\to 9} f(x)$

- $\lim_{x\to 9^-} f(x) = \lim_{x\to 9^-} 6\sqrt{x} = 18$

- $\lim_{x\to 9^+} f(x) = \lim_{x\to 9^+} x+9 = 18$

$\therefore \lim_{x\to 9} f = \lim_{x\to 9^-} f = \lim_{x\to 9^+} f$

$\Rightarrow (*) = \lim_{x\to 9} \frac{x+9-18}{x-9} = \lim_{x\to 9} \frac{x-9}{x-9} = \lim_{x\to 9} 1 = \underline{1}$

$\therefore \underline{f'(9) = 1}$

3) $f(x) = h(x^2 g^2(x))$. $g(2) = 3$, $g'(2) = 4$ y h es dif. en 36.

Determina $h'(36)$ si: $f'(2) = 12$

Tenemos que $f(2) = h(2^2 \cdot g^2(2))$

$$= h(4 \cdot (3)^2) = h(4 \cdot 9)$$
$$= h(36)$$

Si encontramos $f'(2)$ encontramos $h'(36)$

$$f'(x) = (h(x^2 g^2(x)))' \underset{\text{regla de la cadena}}{=} h'(x^2 g^2(x)) \cdot (x^2 g^2(x))'$$

$$= h'(x^2 g^2(x)) \cdot (2x g^2(x) + x^2 (2g(x)) g'(x))$$

sustituyendo valores

$$\Rightarrow f'(2) = h'(36) \cdot (2 \cdot 2 g^2(2) + 2^2 \cdot 2 \cdot g(2) \cdot g'(2))$$

$$\Rightarrow f'(2) = h'(36) \cdot (4 \cdot (3)^2 + 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)$$

$$\Rightarrow f'(2) = h'(36) \cdot (36 + 96)$$

por hipotesis

$$\Rightarrow 12 = h'(36) \cdot 132 \quad \Rightarrow h'(36) = \frac{12}{132} = \frac{6}{66} = \frac{3}{33} = \frac{1}{11}$$

4) <u>Teorema del Valor Medio</u>: Asuma que $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y diferenciable en (a,b). Entonces existe al menos un valor c en (a,b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La conclusión del TVI puede escribirse como:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Podemos pensar esta última forma como una Aproximación Lineal que dice

$$f(b) - f(a) \approx f'(a)(b-a)$$

El TVI ~~toma~~ esta última aproximación a una igualdad al reemplazar $f'(a)$ en $f'(c)$ para una elección adecuada de c en (a,b).

5) $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ cont en $[0,1]$ y dif en $(0,1)$. Sup que $f(0)=1$ y $f'(x) \geq 3$ $\forall x \in (0,1)$. P.d. $\exists!\, c \in (0,1)$ t. $f(c) = 7/2$.

1) Probaremos la existencia de c t. $f(c) = 7/2$

Por contradicción. Sup $\forall c \in (0,1)$ $f(c) \neq 7/2$

Por TVI, como f es cont en $[0,1]$,

$\forall M$ t. M está entre $f(0)$ y $f(1)$ $\exists c$ t. $f(c) = M$

como $\forall c \in [0,1]$ $f(c) \neq 7/2$ y $f(0) = 1 \Rightarrow f(1) < 7/2$

Ahora bien, $\dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0) = f(1) - 1$.

Por TVM $\exists c_2$ t. $f(1) - 1 = f'(c_2)$

$\Rightarrow$ $f(1) = f'(c_2) + 1$ como $f'(x) \geq 3$ $\forall x \in (0,1)$

$\Rightarrow$ $f(1) = f'(c_2) + 1 \geq 3 + 1 = 4$ $\Rightarrow f(1) \geq 4$

pero $f(1) < 7/2$ $\Rightarrow 4 \leq f(1) < 7/2$ $\Rightarrow 4 < 7/2$ ∇

contradicción $\Rightarrow \exists c \in (0,1)$ t. $f(c) = 7/2$

2) Probaremos la unicidad de c

Sup $\exists d \in (0,1)$ t. $f(d) = 7/2$ con $d \neq c$

Por Rolle $\dfrac{f(c) - f(d)}{c - d} = f'(\alpha)$ con $\alpha \in (0,1)$

$\Rightarrow$ $f'(\alpha) = \dfrac{7/2 - 7/2}{c - d} = \dfrac{0}{c - d} = 0$ ∇ contradicción

ya que $f'(\alpha) \geq 3$ $\therefore \exists!\, c \in (0,1)$ t. $f(c) = 7/2$

6) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es dos veces dif. f tiene 3 raíces $c_1 < c_2 < c_3$ en $[a,b]$. P.d. f' tiene dos raíces $d_1 \in (c_1, c_2)$ y $d_2 \in (c_2, c_3)$ y f'' tiene raíz $e \in (d_1, d_2)$.

1) p.d f' tiene dos raíces.

por TVM en (c_1, c_2)

f es continua porque es diferenciable.

$$\Rightarrow \frac{f(c_1) - f(c_2)}{c_1 - c_2} = f'(\alpha_1) \text{ para alguna } \alpha_1 \in (c_1, c_2)$$

$$\Rightarrow f'(\alpha_1) = \frac{0 - 0}{c_1 - c_2} = 0$$ $\therefore \alpha_1$ es raíz de f' en (c_1, c_2)

Lo mismo para (c_2, c_3)

$$\Rightarrow \frac{f(c_2) - f(c_3)}{c_2 - c_3} = f'(\alpha_2) \text{ para alguna } \alpha_2 \in (c_2, c_3)$$

$\therefore \alpha_2$ es raíz de f' en (c_2, c_3).

2) f es dos veces dif. $\Rightarrow f'$ es dif.

$\Rightarrow f'$ es continua en (α_1, α_2)

Por TVI $\exists\, e \in (\alpha_1, \alpha_2)$

t. $$\frac{f'(\alpha_1) - f'(\alpha_2)}{\alpha_1 - \alpha_2} = f''(e) \Rightarrow f''(e) = \frac{0 - 0}{\alpha_1 - \alpha_2} = 0$$

$\therefore e$ es raíz de f'' en (α_1, α_2)

7) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ cont en $[a,b]$ y dif en (a,b). Sup $f'(x) \neq 0$ $\forall$ $x \in (a,b)$

p.d. f inyectiva.

Sup. $f(c) = f(d)$ para alguna c y d en (a,b)

p.d $c = d$

Sup $c \neq d$ SPG $c < d$

Como f es es cont y dif en (a,b) por TVM $\exists\, d \in (c,d)$ t.q.

$$\frac{f(c) - f(d)}{c-d} = f'(d) \Rightarrow f'(d) = \frac{0}{c-d} = 0$$

contradicción $f'(d) \neq 0$ ya que $d \in (c,d) \subseteq (a,b)$

$\therefore$ $\underline{c = d}$