Respuestas Lab 1

1) a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}}$

Tenemos que $\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)} \geq 0$ y que $(x+3)(x+4) \neq 0$

Caso 1: $(x+3)(x+4) \neq 0$

$(x+3)(x+4)=0$ si $x=-3$ o $x=-4$

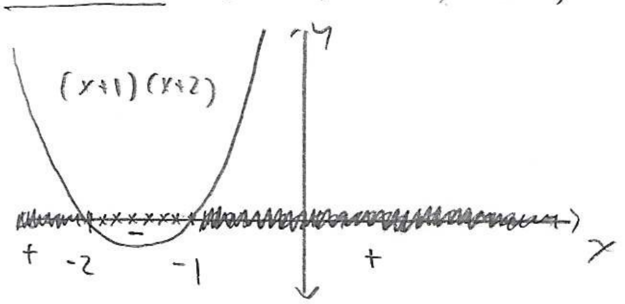
Por lo tanto, $x \neq -3$ y $x \neq -4$

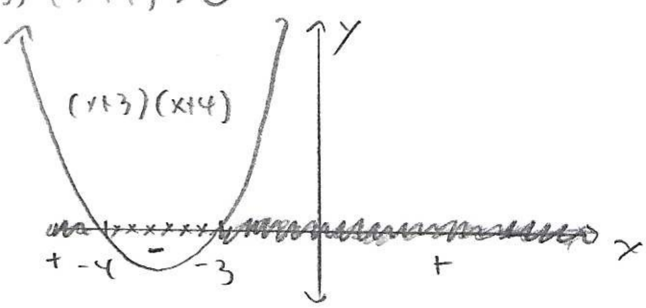
Caso 2: $\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)} \geq 0$

Esto sucede si $(x+1)(x+2) \geq 0$ y $(x+3)(x+4) > 0$

o $(x+1)(x+2) < 0$ y $(x+3)(x+4) < 0$

Caso 2.1: $(x+1)(x+2) \geq 0$ y $(x+3)(x+4) > 0$





De las gráficas se sigue que $(x+1)(x+2) \geq 0$ si $x \in (-\infty,-2] \cup [-1,\infty)$

y que $(x+3)(x+4) > 0$ si $x \in (-\infty,-4) \cup (-3,\infty)$

Intersectando el resultado anterior se tiene que el caso 2.1 se cumple cuando $x \in (-\infty;4) \cup (-3,-2] \cup [-1,\infty)$

Caso 2.2: $(x+1)(x+2)<0$ y $(x+3)(x+4)<0$

Del las mismas gráficas del caso 2.1 se sigue que

$$\begin{cases} (x+1)(x+2)<0 & \text{si } x\in(-2,-1) \\ (x+3)(x+4)<0 & \text{si } x\in(-4,-3) \end{cases}$$

Pero vemos que: $(-2,-1)\cap(-4,-3)=\{\phi\}$

Por lo tanto el caso 2.2 no se cumple para ningún valor de x.

Del caso 2.1 y caso 2.2 se sigue que $\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}\geq 0$

si $x\in(-\infty,4)\cup(-3,-2]\cup[-1,\infty)$

Tomando en cuenta el caso 1 y el caso 2:

$\mathrm{Dom}(f)=(-\infty,4)\cup(-3,-2]\cup[-1,\infty)$ ✗

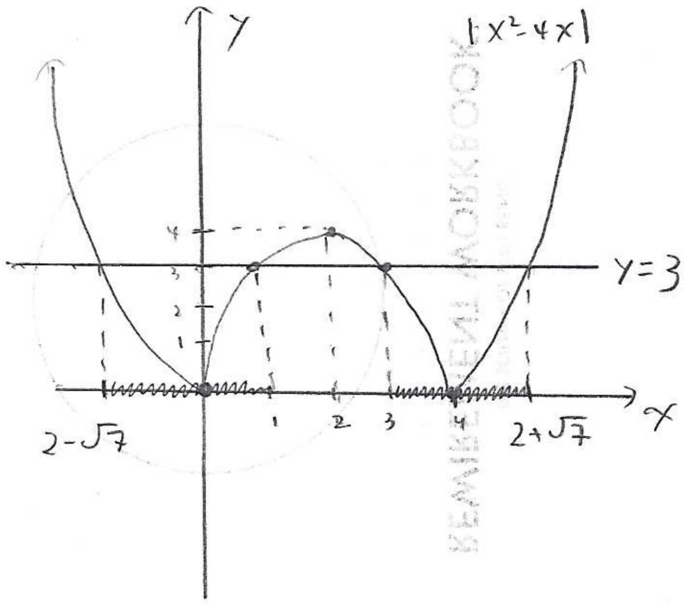
b) $f(x)=\sqrt{3-|x^2-4x|}$

Tenemos que $3-|x^2-4x|\geq 0$

$\Rightarrow |x^2-4x|\leq 3$

• Para Graficar:

$$\bullet\ |x^2-4x|=\begin{cases} x^2-4x & \text{si } x\in(-\infty,0]\cup[4, \\ -x^2+4x & \text{si } x\in(0,4) \end{cases}$$



• Caso 1: $x\in(-\infty,0]\cup[4,\infty)$

$x^2-4x=3$

$\Rightarrow x^2-4x-3=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{16+12}}{2}=2\pm\sqrt{7}$

• Caso 2: $x\in(0,4)$

$-x^2+4x=3$

$\Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow (x-3)(x-1)=0$

$\Rightarrow x=1,3$

De la gráfica se sigue que $|x^2-4x|\leq 3$ se cumple si:

$$x\in[2-\sqrt{7},1]\cup[4,2+\sqrt{7}]$$

$$\therefore \text{Dom}(f)=[x-\sqrt{7},1]\cup[4,2+\sqrt{7}]$$

c) $f(x)=g(|x+1|-|x-2|)$ si $\text{Dom}(g)=(-2,2]$

La funcón es de la forma $f(x)=g(h(x))$

donde $h(x)=|x+1|-|x-2|$

Primero tenemos que obtener $\text{Dom}(h)$

Pero $\text{Dom}(h)=\mathbb{R}$ ya que $\forall x\in\mathbb{R}$ $h(x)$ esta definida.

Ahora, se tiene que cumplir:

$$-2<|x+1|-|x-2|\leq 2$$

$$h(x)=\begin{cases} \text{Si } x\leq -1, & -x-1-(-x+2)=-3 \\ \text{si } -1<x\leq 2, & x+1-(-x+2)=2x-1 \\ \text{si } 2<x, & x+1-(x-2)=3 \end{cases}$$

Vemos que si $x\leq -1$, $h(x)=-3$ y si $2<x$, $h(x)=3$

$\therefore$ si $x\leq -1$ y $2<x$ no se cumple $-2<h(x)\leq 2$

Solo nos fijamos en $-1<x\leq 2$

$$-2<2x-1\leq 2 \Rightarrow -1<2x\leq 3 \Rightarrow -\frac{1}{2}<x\leq\frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{Dom}(f)=\mathbb{R}\cap\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$$

d) $f(x) = h\left(\dfrac{1}{2-|x-2|}\right)$ si $Dom(h) = (0, \frac{1}{2}]$

Sea $f(x) = h(g(x))$ con $g(x) = \dfrac{1}{2-|x-2|}$

Primero determinemos $Dom(g)$

- $2-|x-2| \neq 0 \Rightarrow |x-2| \neq 2 \Rightarrow x \neq 0$ y $x \neq 4$

  $\therefore Dom(g) = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$

Ahora veamos para que valores $0 < g(x) \leq \frac{1}{2}$ se cumple.

- $0 < \dfrac{1}{2-|x-2|} \leq \dfrac{1}{2} \underset{\text{positivo}}{\Rightarrow} \underbrace{\dfrac{2}{1} \leq \dfrac{2-|x-2|}{1}}_{\text{Recíproco}}$

  $\Rightarrow 0 \leq -|x-2| \Rightarrow |x-2| \leq 0 \Rightarrow x = 2$

$\therefore Dom(f) = (\mathbb{R} \setminus \{0,4\}) \cap \{2\} = \{2\}$

2) $|x+2| \leq 1$, $\max/\min\{|2x-1| + |x+1|\}$

Como $|x+2| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x+2 \leq 1 \Rightarrow -3 \leq x \leq -1 \ldots$ ①

Sea $f(x) = |2x-1| + |x+1|$

$$f(x) = \begin{cases} \text{si } x \leq 1, & -2x+1-x-1 = -3x \\ \text{si } 1 < x \leq 1/2, & -2x+1+x+1 = -x+2 \\ \text{si } 1/2 < x, & 2x-1+x+1 = 3x \end{cases}$$

De ① como $-3 \leq x \leq -1$ solo nos interesa $f(x)$ cuando $x \leq 1$

i.e $f(x) = -3x$ función lineal

$\therefore$ $\max\{f(x)\} = \max\{-3x\} = 3$ cuando $x = -1$

$\min\{f(x)\} = \min\{-3x\} = 9$ cuando $x = -3$

3) $|x-2| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \frac{4}{2x-1} - \frac{3}{2} \right| < \frac{1}{2}$

$|x-2| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x-2 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$

$\Rightarrow 3 < 2x < 5 \Rightarrow 2 < 2x-1 < 4 \underset{\text{positivos}}{\Longrightarrow} \frac{1}{4} < \frac{1}{2x-1} < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 1 < \frac{4}{2x-1} < 2 \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{4}{2x-1} - \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \left| \frac{4}{2x-1} - \frac{3}{2} \right| < \frac{1}{2}$

4.a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{4}{x} - 4x}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{4-4x^2}{x}}{\frac{x^2-1}{1}} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(4-4x^2)(1)}{(x^2-1)(x)}$

$= \lim\limits_{x \to 1} \frac{4(1-x^2)}{(x+1)(x-1)(x)} \overset{\lim_{x\to 1}}{=} \frac{-4(x^2-1)}{(x+1)(x-1)(x)} \overset{\lim_{x\to 1}}{=} \frac{-4\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}(x)}$

$= \lim\limits_{x \to 1} -\frac{4}{x} = -4$

4.b) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-2x-3}{27-x^3} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(3-x)(9+3x+x^2)} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{-\cancel{(3-x)}(x+1)}{\cancel{(3-x)}(x^2+3x+9)}$

$= \lim\limits_{x \to 3} \frac{x+1}{x^2+3x+9} = \frac{4}{27}$

4. c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9+h} - 3}{1-\sqrt{1+4h}} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9+h} - 3}{1-\sqrt{1+4h}} \cdot \dfrac{\sqrt{9+h}+3}{\sqrt{9+h}+3} \cdot \dfrac{1+\sqrt{1+4h}}{1+\sqrt{1+4h}}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(9+h-9)(1+\sqrt{1+4h})}{(1-1-4h)(\sqrt{9+h}+3)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(1+\sqrt{1+4h})}{(-4h)(\sqrt{9+h}+3)}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1+\sqrt{1+4h}}{-4(\sqrt{9+h}+3)} = \dfrac{2}{-24} = -\dfrac{1}{12}$

4.d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|2+x|-|2-x|}{x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0}|2+x| - \lim\limits_{x\to 0}|2-x|}{\lim\limits_{x\to 0} x}$

$= \dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(2+x) - \lim\limits_{x\to 0}(2-x)}{\lim\limits_{x\to 0} x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(2+x-2+x)}{\lim\limits_{x\to 0} x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to 0} 2 = 2$