Respuestas Lab 4

1) Tenemos que $f(1) = 1$

p.d. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

Borrador

$|x^2 - x + 1 - 1| = |x^2 - x| = |x||x-1| \dots$ ①

$|-2x + 3 - 1| = |-2x + 2| = 2|x - 1| \dots$ ②

Sup $|x - 1| < \delta_0$

$\Rightarrow$ ① $< |x|\delta_0$ y ② $< 2\delta_0$

Ademas $-\delta_1 < x - 1 < \delta_1 \Rightarrow -\delta_1 + 1 < x < \delta_1 + 1 \Rightarrow |x| < \delta_1 + 1$

Sea $\delta_1 = 1 \Rightarrow |x| < \delta_1 + 1 = 2$

$\Rightarrow$ ① $< |x|\delta_0 < 2\delta_0$

Como ① $< 2\delta_0$ y ② $< 2\delta_0$

Es suficiente $2\delta_0 = \varepsilon \Rightarrow \delta_0 = \varepsilon/2$

Dem

Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\} = \min\{\varepsilon/2, 1\}$

$\Rightarrow |f(x) - 1| = \begin{cases} |x||x-1| < 2\delta = \varepsilon \\ 2|x-1| < 2\delta = \varepsilon \end{cases} \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

2) Sea $\varepsilon > 0$

Como g es continua en L

$\exists \delta_1 > 0$ t. $|g(y) - g(L)| < \varepsilon$ si $0 < |y - L| < \delta_1$ ... ①

Como $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ $\exists \delta > 0$ t.

$$|f(x) - L| < \delta_1 \quad \text{si} \quad |x - x_0| < \delta$$

Sea $y = f(x)$

$$|y - L| < \delta_1 \quad \text{si} \quad |x - x_0| < \delta$$

De ①

$$|y - L| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - g(L)| = |g(f(x)) - g(L)| < \varepsilon$$

cada vez que $|x - x_0| < \delta$

$\therefore \lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = g(L)$

3) Si $x = 2017$

$(x-2)^{2019} + (x+2)^{2019} = 2015^{2019} + 2019^{2019} > 2019$

Si $x = -2017$

$(x-2)^{2019} + (x+2)^{2019} = -(2019^{2019}) - (2015^{2019}) < 2019$

Como $(x-2)^{2019} + (x+2)^{2019}$ es continua por TVI

$\exists c \in [-2017, 2017]$ t. $(x-2)^{2019} + (x+2)^{2019} = 2019$

4) Como $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow f(x) > 0$ o $f(x) < 0 \quad \forall x \in [a,t]$

<u>Caso 1</u>: $f(x) > 0$

Sup $f(\beta) < 0$ con $\beta \neq \alpha$ y $\beta \in [a,b]$

por TVI $\Rightarrow \exists c \in [a,b]$ t. $f(c) = 0 \quad \overset{\circ}{\nabla}$ contradicción $(f(c) \neq 0)$

$\Rightarrow f(\beta) > 0 \quad \Rightarrow f(\alpha) f(\beta) > 0$

<u>Caso 2</u>: $f(\alpha) < 0$ es análogo.

5) a) Sea $h(x) = f(x^2) - f(1-x)$

$h(1) = f(1) - f(0)$

$h(0) = f(0) - f(1)$

$\Rightarrow h(1) = -h(0)$

Por Bolzano $\Rightarrow \exists c \in [0,1]$ t. $h(c) = 0$

$\Rightarrow f(c^2) - f(1-c) = 0 \Rightarrow f(c^2) = f(1-c)$

b) Sea $g(x) = f(\sqrt{x}) - f(1-x^3)$

$g(1) = f(1) - f(0)$

$g(0) = g(0) - g(1)$

$\Rightarrow g(1) = -g(0)$

Por Bolzano $\Rightarrow \exists c \in [0,1]$ t. $g(c) = 0$

$\Rightarrow f(\sqrt{c}) - f(1-c^3) = 0 \Rightarrow f(\sqrt{c}) = f(1-c^3)$

6) $f(0) = A \sin(0) + B \cos(0) = B$

$f(\pi/2) = A \sin(\pi/2) + B \cos(\pi/2) = A$

Tenemos que $\dfrac{A+B}{2}$ está entre A y B

Como f es continua, por TVI

$\Rightarrow \exists c \in [0, \pi/2]$ t. $f(c) = \dfrac{A+B}{2}$