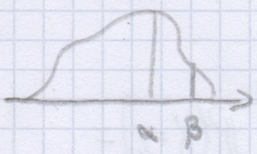
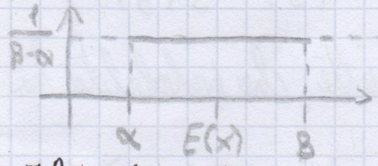
VARIABILI CONTINUE UNIFORMI

Le variabile uniformi sono variabili con densità uniforme nell'intervallo $[\alpha, \beta]$



$$\mathbb{P}(\alpha \le X \le \beta) = \int_\alpha^\beta f_x(x)\,dx$$

$$f_x(X) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & X \in [\alpha, \beta] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



esse si indicano con $X \sim U[\alpha, \beta]$

Il valore atteso sarà dato da:

$$E(X) = \int_\alpha^\beta t \frac{1}{\beta-\alpha} dt = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta t\,dt = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_\alpha^\beta =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha^2}{\beta-\alpha} = \frac{1}{2}\frac{(\beta+\alpha)\cancel{(\beta-\alpha)}}{\cancel{\beta-\alpha}} = \frac{\beta+\alpha}{2}$$

La varianza sarà: $V(X) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$

esempio:

$X \sim U[-2, 2]$

$$-\mathbb{P}(X < 1) = \int_{-2}^{1} \frac{1}{2+2} dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{1} dx = \frac{1}{4}[x]_{-2}^{1} =$$

$$= \frac{1}{4}(1+2) = \frac{3}{4}$$

$$-E(x) = \frac{2-2}{2} = 0 \qquad V(X) = \frac{\cancel{4}^{\,}\,4^2}{\cancel{12}_{3}} = \frac{4}{3}$$

$$-F_x(-1) = \mathbb{P}(X \le -1) = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{2+2} dx = \frac{1}{4}[x]_{-2}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{4}(-1+2) = \frac{1}{4}$$

VARIABILI NORMALI (GAUSSIANE)

Una variabile è normale quando la sua densità è $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ per $x \in \mathbb{R}$

Si può spostare la curva e stringerla o allargarla a piacimento.

NOTA: Questa v.a. non ammette primitive, per trovare le probabilità s'utilizzano tabelle apposite

$E(X) = \mu \quad V(X) = \sigma^2$ si scrive $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

PROPRIETÁ DELLA NORMALE

Date 2 v.a. $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$:

1) $X + Y \sim N(\mu_x + \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$

2) $Z = aX + b \rightarrow Z \sim N(a\mu_x + b, a^2\sigma_x^2)$

3) $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma} \rightarrow E(Z) = \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = 0$

$\rightarrow V(Z) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$

Z ha quindi densità normale $Z \sim N(0,1)$, essa è detta v.a. normale standardizzata mentre la funzione $\frac{X-\mu}{\sigma}$ è detta standardizzazione.

esempio: Il il contenuto di un toner è $X \sim N(500, 50^2)$ calcolare $\mathbb{P}(X > 420)$ e, se ho 10 cartucce, che tutte abbiano più di 420g.

$$\mathbb{P}(X > 420) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{420-500}{50}\right) = \mathbb{P}\left(Z > -\frac{8}{5}\right) =$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1} + \mathbb{P}\left(Z < \frac{8}{5}\right) = \mathbb{P}\left(Z < \frac{8}{5}\right) = 0{,}9452$$

$Y \sim B(10, 0{,}9452)$

$$\mathbb{P}(Y = 10) = \binom{10}{10} 0{,}9452^{10}(1 - 0{,}9452)^0 = 0{,}5692$$

DENSITÁ ESPONENZIALE

La densità esponenziale di parametro $\lambda > 0$ è la densità

$$f_x = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$ si scrive $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

PROPRIETÁ

$-E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad -V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

ASSENZA DI MEMORIA

$$\forall s, t, \ \mathbb{P}(X > t+s \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t) \quad 1 - 1 + e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

$$\frac{\mathbb{P}(X > t+s \cap X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathbb{P}(X > t+s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(t+s)})}{1 - (1 - e^{-\lambda s})} = \frac{e^{-\lambda t}\cancel{e^{-\lambda s}}}{\cancel{e^{-\lambda s}}}$$

$$= e^{-\lambda t}$$

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = -\left[e^{-\lambda t}\right]_0^x = -e^{-\lambda x} + 1 & x > 0 \end{cases}$$