

COS'È UN ESPERIMENTO ALEATORIO? Probabilità

Un esperimento aleatorio è un esperimento in cui non è possibile/conveniente stabilire a priori un esito, essi però sono più flessibili rispetto a quelli deterministici, ad esempio:

- Un censimento è l'analisi deterministica della popolazione;
- Il sondaggio è un fenomeno aleatorio;

Tutti questi esperimenti vengono fatti su uno spazio campionario, un insieme contenente tutti i possibili esiti come:

- Lancio di una moneta $\rightarrow S = \{\text{testa}, \text{croce}\}$;
- Lancio di un dado $\rightarrow S = \{1, \dots, 6\}$;
- Estrazione di una carta $\rightarrow S = \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$

Uno spazio campionario può essere:

- continuo: intervalli di numeri reali;
- discreto: numero finito d'elementi, intervalli di numeri naturali;

EVENTI

Un evento è un sottoinsieme dello spazio campionario, per esempio: Lancio di un dado, $S = \{1, \dots, 6\}$

$E = \text{"numeri pari"} \rightarrow E = \{2, 4, 6\}$

$F = \text{"non 1"} \rightarrow F = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Un evento si verifica quando contiene l'esito, è semplice quando ne ha solo uno.

OPERAZIONI SU EVENTI

Dati 2 eventi E e F :

- intersezione $\rightarrow E \cap F = \text{esiti verificati sia in } E \text{ che in } F$;
- unione $\rightarrow E \cup F = \text{esiti verificati in } E \text{ oppure in } F$;
- differenza $\rightarrow E \setminus F = \text{esiti verificati in } E \text{ ma non in } F$;
- complementare $\rightarrow E^c = \bar{E} = \text{esiti non verificati in } E$

Esempio: lancio di 2 dadi

$E = \text{"primo lancio } = 3"$, $F = \text{"secondo lancio } = 6"$, $G = \text{"risultati uguali"}$

$E \cap F \cap G = \{(3, 3)\}$

Due eventi che non si intersecano sono disgiunti

Esempio: $H = \text{"secondo lancio } = 2"$, $I = \text{"secondo lancio } = 3"$

COS'È LA PROBABILITÀ?

Concettualmente, la probabilità è un numero legato agli eventi, in cui lo spazio campionario è finito e ogni elemento deve avere la stessa probabilità. Matematicamente, la probabilità è una funzione che assegna a ogni evento un grado di fiducia che abbiamo nell'occorrenza dell'evento stesso.

Dominio: $E \rightarrow$ insieme di tutti gli eventi nel caso finito, $E = \mathcal{P}(S)$

Codominio: \mathbb{R} , $P: E \rightarrow \mathbb{R}$

$E \mapsto P(E)$

ASSIOMI

- 1) $0 \leq P(E) \leq 1 \forall E$, la probabilità è compresa tra 0 e 1 per ogni evento
- 2) $P(S)$, la probabilità dello spazio campionario è sempre al 100%
- 3) Se E e F sono disgiunti, $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$

PROPRIETÀ

- 1) $P(\emptyset) = 0$, la probabilità dell'insieme vuoto è 0;
- 2) $P(E^c) = 1 - P(E)$

DIMOSTRAZIONE

$$S = E \cup E^c \rightarrow P(S) = P(E) + P(E^c)$$

dato che $P(S) = 1$: $1 = P(E) + P(E^c)$

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

- 3) Dati 2 eventi E e F : $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$
l'intersezione viene contata 2 volte, quindi bisogna toglierla.

FORMULA DELLA PROBABILITÀ

Se S è finito e composto da esiti equiprobabili:

$$P(E) = \frac{\# \text{CASI FAVOREVOLI}}{\# \text{CASI POSSIBILI}}$$

esempio: Lancio una moneta $\#S = 2$

$E = \text{"viene testa"} \rightarrow \#E = 1 \rightarrow P(E) = 1/2$

esempio: Lancio 2 dadi $\#S = 36$

$E = \text{"somma } = 8" \rightarrow \#E = 5 \rightarrow P(E) = 5/36$

$F = \text{"numeri diversi"} \rightarrow \#F = 30 \rightarrow P(F) = \frac{30}{36} = 5/6$

$F^c = \text{"numeri uguali"} \rightarrow \#F^c = 6 \rightarrow P(F^c) = 1 - P(F) = 1/6$

$$P(E \cap F) = \frac{\#(E \cap F)}{\#S} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

NOTA: Se un esperimento è divisibile in 2 o più sottoesperimenti, lo spazio campionario è dato dal prodotto degli esiti.