SCHEMA DI BERNOULLI

Lo schema di Bernoulli è la ripetizione dello stesso esperimento n volte, qual è la probabilità d'avere K successi tra n prove?

$X = \#$ successi $\{0, \dots, n\}$

K successi

S	S	S	S	S	S	I	I	I	I	I
0	1	2	3	...	K	K+1	...	...	n-1	n

$\forall$ SUCCESSO $\rightarrow p_i = p$

$\forall$ INSUCCESSO $\rightarrow p_i = 1-p$

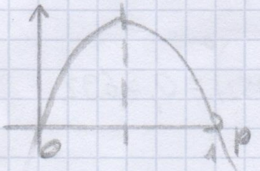
$p^K(1-p)^{n-K}$ = probabilità dello schema

VARIABILE ALEATORIA BINOMIALE

X è una v.a. con 2 esiti

$$X = \begin{cases} 0 & p \\ 1 & 1-p \end{cases}$$

$E(X) = p \qquad V(X) = p - p^2 = p(1-p)$



DENSITÀ BINOMIALE

$X = \#$SUCCESSI su n prove indipendenti e uguali. La densità binomiale (con parametri n e p) è $f_X(K) = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$

Si indica con $X \sim B(n,p)$

$$E(X) = \sum_{K=0}^{n} K f_X(K) = \sum_{K=0}^{n} K \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$$

$X = X_1 + \dots X_n$ si comporta come un contatore

X_i di Bernoulli

$E(X_i) = p \quad V(X_i) = p(1-p)$

$E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = np$

$V(X) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = np(1-p)$

esempio: Lancio 2 dadi, vinco se la somma dei due numeri è almeno 10, quanto è probabile che vinca almeno 2 partite su 8?

$X = \#$ vittorie

$$P(\text{somma} \geq 10) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(X \geq 2) = \sum_{i=2}^{8} P(X=i) = 1 - \sum_{0}^{1} P(X=i) =$$

$$= 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \binom{8}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^8 - \binom{8}{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^7$$

$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8 - \cancel{8}^{\,4} \cdot \frac{1}{\cancel{6}_{\,3}}\left(\frac{5}{6}\right)^7 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8 - \frac{4}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^7 = 0{,}395$$

Sapendo che vinco almeno 2 volte, che probabilità ha di vincerne esattamente 2?

$$P(X=2 \mid X \geq 2) = \frac{P(X=2 \cap X \geq 2)}{P(X \geq 2)} = \frac{P(X=2)^{*}}{P(X \geq 2)} =$$

* $X \geq 2$ comprende anche $X = 2$

$$= \frac{P(X=2)}{0{,}395} = \frac{0{,}26}{0{,}395} = 0{,}658$$

$$P(X=2) = \binom{8}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{1}{36} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0{,}26$$

VARIABILE ALEATORIA DI POISSON

La v.a. X ha densità di Poisson $\lambda > 0$ se $f_X(K) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^K}{K!}$ con $K \in \mathbb{N}$

PROPRIETÀ: Date 2 v.a. di Poisson X e Y:

- $X + Y \sim P(\lambda_X + \lambda_Y)$ con $X \sim P(\lambda_X)$ e $Y \sim P(\lambda_Y)$
- $E(X) = V(X) = \lambda$
- Se $X \sim B(n,p)$ con $np \rightarrow \lambda > 0$, allora $f_X(K) = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K} \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^K}{K!}$ dove $\lambda = np$

In poche parole: se abbiamo una binomiale con n grande e p piccolo, allora $B(n,p) \approx P(\lambda)$ con $\lambda = np$

esempio: a una cassa arrivano clienti secondo un processo di Poisson d'intensità 0,3 persone/minuti

10 minuti $\rightarrow \lambda = 10 \cdot 0{,}3 = 3$

$$P(\text{nessuno in 10 min}) = e^{-3} \frac{3^0}{0!} = e^{-3} = 0{,}05$$

30 minuti $\rightarrow \lambda = 30 \cdot 0{,}3 = 9$

$$P(4 \text{ in 30 minuti}) = e^{-9} \frac{9^4}{4!} = 0{,}034$$