PROPRIETÀ DELLA DENSITÀ

- $f_X(n) \geq 0 \quad \forall n$
- $\sum_{n=0}^{\infty} f_X(n) = 1$

esempio: Lancio di 3 monete

$X = \#$ teste

$S = \{TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC\}$

$\#S = 8$

X ha valori in 0, 1, 2, 3

$f_X(0 \dots 3) = \mathbb{P}(0 \dots 3) = \underbrace{\frac{1}{8}}_{0} \cdot \underbrace{\frac{3}{8}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{3}{8}}_{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{8}}_{3}$

esempio: Lancio di 4 monete

$X = \begin{cases} 0 & \text{elementi consecutivi diversi} \\ 1 & \text{elementi consecutivi uguali} \end{cases}$

$f_X(0) = \mathbb{P}(X=0) = \frac{14}{16} \quad f_X(1) = \mathbb{P}(X=1) = \frac{2}{16}$

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE (CUMULATA)

La funzione cumulata è la funzione:

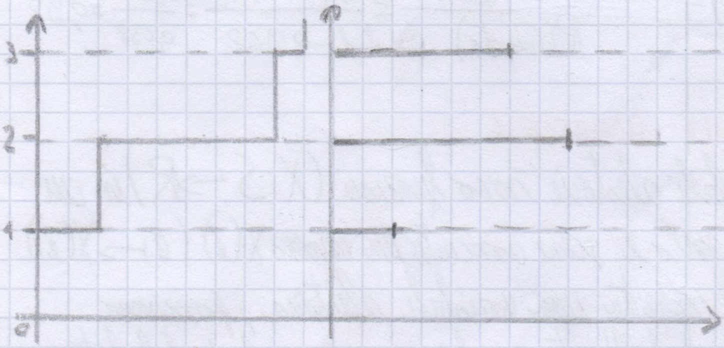
$F_X(n) = \mathbb{P}(X \leq n), \forall n \in \mathbb{R}$

Essa serve per misurare probabilità più basse di n.

CASO DISCRETO: $F_X(n) = \sum_{k \leq n} f_X(k)$

Dalla densità, è possibile ricavare la funzione di ripartizione, esempio:

$$F_X(X) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 3/44 & 1 \leq x < 2 \\ 32/44 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$



PROPRIETÀ DELLA CUMULATA

- F_X è debolmente crescente;
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(X) = 0$;
- $\lim_{x \to +\infty} F_X(X) = 1$;

DENSITÀ CONGIUNTA

Date 2 v.a. X e Y con densità $f_X(K)$ e $f_Y(h)$, in cui K e h sono i valori assunti, la densità congiunta è la funzione:

$f_{XY}(K,h) = \mathbb{P}(X=K \cap Y=h)$

$f_X(K)$ e $f_Y(h)$ sono dette densità marginali.

Da una densità congiunta, posso ottenere infinite densità marginali:

$f_X(K) = \sum_h f_{XY}(K,h) \quad f_Y(h) = \sum_h f_{XY}(K,h)$

La densità congiunta si può illustrare con una matrice

esempio: estrazione di 4 palline (2 verdi e 2 rosse)

X = prima verde $\{1, 2, 3\}$

Y = seconda verde $\{2, 3, 4\}$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 3 & 4 & h \\ \hline 1 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/2 \\ 2 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 3 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ \hline K & 1/6 & 1/3 & 1/2 & \end{array}$$

CASO PARTICOLARE

due v.a. X e Y sono indipendenti se $f_{XY}(K,h) = f_X(K) f_Y(h)$

In questo caso, X e Y non sono indipendenti perché:

$f_{XY}(1,2) \neq f_X(1) \cdot f_Y(2) \to \frac{1}{6} \neq \frac{1}{12}$

INTEGRALI IMPROPRI

Un integrale è improprio quando b tende a $+\infty$ oppure a tende a $-\infty$ oppure a un numero reale

$f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua

$\int_a^{+\infty} f(x)dx \to \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$

$f: (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ continua

$\int_{-\infty}^b f(x)dx \Rightarrow \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$

NOTA: un integrale può anche tendere a $+\infty$ su b e a $-\infty$ su a contemporaneamente.

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

Una variabile aleatoria è continua quando assume valori in un determinato intervallo, infatti: $X: S \to \mathbb{R}$

X assume valori in $f_X(K) = \mathbb{P}(X=K) \ \forall K$

la densità di X è la funzione $f_X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in cui se $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$