SCARTO QUADRATICO MEDIO

La scarto quadratico medio è la radice della varianza: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

CASI PARTICOLARI DELLA VARIANZA

- $V(aX+b) = a^2 V(X)$
- $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + Cov(X,Y)$

COVARIANZA

La covarianza è il prodotto incrociato $E((X-E(X))(Y-E(Y)))$ semplificabile come:

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$

esempio:

Y \ X	-1	1	
-1	1/2	0	1/2
1	0	1/2	1/2
	1/2	1/2	

$E(X) = E(Y) = 0$

$V(X) = V(Y) = 1$

$Cov(X,Y) = (-1)(-1)\frac{1}{2} + 1\cdot 1\cdot \frac{1}{2} = 1$

$V(X+Y) = 1+1+2 = 4$

PROPRIETÀ: Quando X e Y sono v.a. indipendenti

$Cov(X,Y) = 0 \rightarrow V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

In più: $E(XY) = E(X)E(Y)$

esempio:

Y \ X	-1	1	
-1	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
	1/2	1/2	

$E(X) = E(Y) = 0$

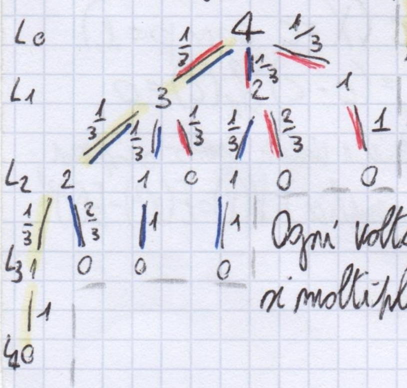
$V(X) = V(Y) = 1$

$V(X+Y) = 1+1 = 2$

$E(XY) = 0\cdot 0 = 0$

ESERCIZIO: CALCOLARE LA PROBABILITÀ ATTRAVERSO GLI ALBERI

ho 4 toner in magazzino, ogni mese ne vengono richiesti 1, 2 o 3 con $p = 1/3$



$f_X(4) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1$

$f_X(3) = \frac{8}{27}$ $\quad f_X(2) = \frac{2}{3}$

PROCEDIMENTO

Ogni volta che si scende, si moltiplica la f_X (vedi i colori)

LEGGE DEI GRANDI NUMERI

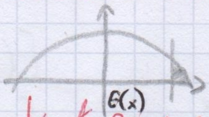
esempio: lancio 100 volte una moneta

Il numero di teste varia da 0 a 100, le probabilità degli estremi sono $\frac{1}{2}^{100} = -31$

quindi: $\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 \dots\dots X_n}{n} = E(X)$

NOTA: $X_1 \dots X_n$ hanno la stessa densità e sono tutte indipendenti

DISUGUAGLIANZA DI MARKOV



X v.a positiva $\rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

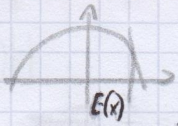
dimostrazione:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x f_X(x)dx = \underbrace{\int_0^a x f_X(x)dx}_{\text{LO BUTTO VIA}} + \int_a^{+\infty} x f_X(x)dx \geq \int_a^{+\infty} x f_X(x)dx$$

$$E(X) \geq P(X \geq a) \rightarrow \frac{E(X)}{a} \geq P(X \geq a)$$

$$\int_a^{+\infty} x f_X(x)dx \rightarrow \text{dato che } x \geq a \rightarrow \int_a^{+\infty} a f_X(x)dx = a\int_a^{+\infty} f_X(x)dx$$

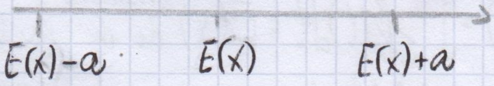
DISUGUAGLIANZA DI CHEBYCHEV



X v.a. con $E(X)$ e $V(X)$

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

I valori sono concentrati intorno a $E(X)$



MEDIA CAMPIONARIA

$X_1 \dots X_n$ v.a indipendenti e con la stessa densità (i.i.d.)

i.i.d.: indipendenti e identicamente distribuite

$E(X_1) = \dots E(X_n) \rightarrow \mu$ // legge dei grandi numeri

$V(X_1) = \dots V(X_n) \rightarrow \sigma^2$

$\overline{X_n} = \frac{X_1 + \dots X_n}{n}$ MEDIA CAMPIONARIA

$E(\overline{X_n}) = \frac{1}{n} E(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n} n\mu = \mu$

$V(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2} V(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$