esempio: estraggo 40 carte da un mazzo di 40
E = "prima carta RE"
F = "ultima carta RE"

CASO CON RIMPIAZZO (reinserisco la carta nel mazzo)

In questo caso la probabilità di E e F sarà:

$\mathbb{P}(E) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$ $\mathbb{P}(F) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

Questo succede perché, dato che reinserisco la carta nel mazzo, il numero di carte non diminuisce e quindi hanno tutte la stessa probabilità.

Calcolando $\mathbb{P}(E|F) = \frac{1}{100}$ si scopre che gli eventi E e F sono indipendenti perché: $\mathbb{P}(E|F) = \mathbb{P}(E) \cdot \mathbb{P}(F) = \frac{1}{100} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \rightarrow \frac{1}{100} = \frac{1}{100}$

CASO SENZA RIMPIAZZO (Carta non reinserita nel mazzo)

Dato che non reinserisco più le carte nel mazzo, la probabilità di F sarà data dai coefficienti binomiali, dato che, per avverarsi, bisogna pescare 3 re e altre 36 carte non re.

$\mathbb{P}(E) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

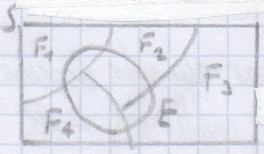
$\mathbb{P}(F) = \binom{4}{3}\binom{36}{36} / \binom{40}{39} = \frac{1}{10}$

Calcolando $\mathbb{P}(E|F)$ e $\mathbb{P}(E \cap F)$ si può notare che gli eventi E e F non sono indipendenti ($\mathbb{P}(E \cap F) \neq \mathbb{P}(E|F)$

$\mathbb{P}(E \cap F) = \binom{4}{2}\binom{36}{36} / \binom{40}{38} = \frac{1}{130}$

$\mathbb{P}(E|F) = \mathbb{P}(E) \cdot \mathbb{P}(F) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$

PROBABILITÀ TOTALE



Per calcolare $\mathbb{P}(E)$ bisogna calcolare e sommare le probabilità di tutte le intersezioni degli insiemi F con E:

$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=0}^{4} \mathbb{P}(E|F_i) = \sum_{i=0}^{4} \mathbb{P}(E \cap F_i)\mathbb{P}(F_i)$

TEST DIAGNOSTICO

Una macchina deve riconoscere se un paziente è malato o meno, si sa che:
- Un paziente malato indica un esito positivo e viceversa;
- Un paziente sano indica un esito negativo e viceversa;

	S	M
N		
P		

Si può dire che:
- $\mathbb{P}(P|M) \rightarrow \mathbb{P}(M|P) = \mathbb{P}(M \cap P) / \mathbb{P}(P) =$
$\mathbb{P}(M|P) = \mathbb{P}(P|M)\mathbb{P}(M) / \mathbb{P}(P)$
- $\mathbb{P}(N|S) \rightarrow \mathbb{P}(S|N) = \mathbb{P}(S \cap N) / \mathbb{P}(N) =$
$\mathbb{P}(N|S) = \mathbb{P}(S|N)\mathbb{P}(S) / \mathbb{P}(N)$

La formula di Bayes è la probabilità di due eventi E e F in cui:

$$\mathbb{P}(F|E) = \frac{\mathbb{P}(E|F)\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(E)}$$

esempio: 2 fabbriche A e B producono RAM, esse hanno probabilità di malfunzionamento rispettivamente del 5% e del 1%. Supponendo che A fornisce il 70% dei PC, calcolare
a) probabilità d'avere un PC funzionante;
b) se il PC non è funzionante, calcolare la probabilità che abbia RAM di A

Caso a

$\mathbb{P}(Funz) = \mathbb{P}(Funz|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(Funz|B)\mathbb{P}(B) = 0{,}95 \cdot 0{,}7 + 0{,}99 \cdot 0{,}3$
$= 0{,}962$

Caso b

$\mathbb{P}(A|Guasto) = \frac{\mathbb{P}(Guasto|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(Guasto)} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}7}{1 - 0{,}962} = \frac{0{,}35}{0{,}038} = 0{,}92$

VARIABILI ALEATORIE

Le variabili aleatorie sono funzioni $(X: S \rightarrow \mathbb{R})$ in cui per ogni esito e viene associato un numero $X(e)$ $(e \mapsto X(e))$. Una volta scoperta una variabile aleatoria, possiamo dimenticarci dell'esito perché mantiene la probabilità. Una variabile è discreta quando la sua immagine è finita oppure $\mathbb{N}$, altrimenti è continua. Una v.a. discreta assume valori in $\mathbb{N}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ ne calcola $\mathbb{P}(X=n)$.
La densità di una v.a. è la funzione $f_X(n) = \mathbb{P}(X=n)$