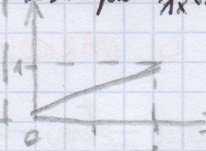
PROPRIETÀ DELLA DENSITÀ

- $f_X(X) \geq 0 \longrightarrow f_X(K) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(X) = 1 \longrightarrow \sum_K f_X(K) = 1$

PROPRIETÀ DELLA DENSITÀ CONGIUNTA

- F_X è continua e non decrescente.
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} F_X(X) = 1$

esempio: $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x \in [0,2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



1) Calcolare $F_X(X)$;
2) Calcolare $\mathbb{P}(X \leq 1)$;
3) Calcolare $\mathbb{P}(\frac{3}{2} \leq X \leq 2)$

1) $F_X(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{2}t\,dt = \left[\frac{1}{4}t^2\right]_0^x = \frac{x^2}{4}$

$F_X(0) = 0 \quad F_X(3) = 1$

2) $\mathbb{P}(X \leq 1) = F_X(1) = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

3) $\mathbb{P}(\frac{3}{2} \leq x \leq 2) = F_X(2) - F_X(\frac{3}{2}) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE

$F_X(X) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = F_X(X)$ primitiva di dx

esempio: calcolare probabilità tra a e b

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx = F_X(b) - F_X(a)$$

(vedi punto 3 dell'esercizio precedente)

VALORE ATTESO (MEDIA)

V.A. DISCRETE: Il valore atteso è la somma dei prodotti tra tutti gli elementi di una v.a. e la rispettiva densità: $E(X) = \sum_K K f_X(K)$

V.A. CONTINUE: Il valore atteso è l'integrale di una v.a. per la sua densità: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$

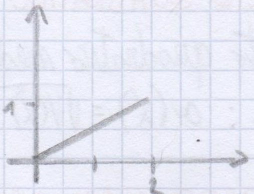
esempio: lancio una moneta

$X = \begin{cases} 0 \to \text{croce} & f_X(0) = \frac{1}{2} \\ 1 \to \text{testa} & f_X(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

esempio:

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x \in [0,2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



$E(X) = \int_0^2 t\,\frac{1}{2}t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 t^2\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^2 = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{8}{3} - 0 = \frac{4}{3}$

PROPRIETÀ DEL VALORE ATTESO

- Consideriamo X e una funzione g(x)

$E(g(X)) = \sum_K g(K) f_X(K)$ CASO DISCRETO

$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,dx$ CASO CONTINUO

- Se g(x) è lineare $(mx+q)$ allora:

$E(g(x)) = g(E(x))$

- Date due v.a. X e Y:

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

ENTROPIA

l'entropia è la quantità d'informazione in un esperimento e si calcola nel seguente modo:

$H(X) = \sum_{i=1}^{n} I(K_i)$ $\quad I(K_i)$ è l'informazione di K_i e vale: $-p_i \log_2(p_i)$

VARIANZA

la varianza di una v.a. X è un numero che indica la distribuzione dei valori nello spazio campionario, si ricava con la seguente formula:

$V(X) = E((X - E(X))^2)$ che si può semplificare come:

$V(X) = \sum_K (K - E(X))^2 f_X(K)$ CASO DISCRETO

$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x)\,dx$ CASO CONTINUO

PROPRIETÀ DELLA VARIANZA

- $V(X) \geq 0$
- CASO ESTREMO: $X \equiv c$ ($X = c$ con $p = 1$)

$E(X) = c \longrightarrow V(X) = (c-c)^2 f_X(c) = 0$

- Maggiore è la varianza, più i valori sono dispersi.
- Formula analoga (e più semplice): $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$