

Modelo em grafo baseado nos padrões de corte para o Problema de Minimização de Pilhas Abertas

Rafael de Magalhães Dias Frinhani

Daniel Sadamo Hirayama

Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI

Av. BPS, 1303, Pinheirinho - Itajubá - MG

frinhani@unifei.edu.br; dsadamohirayama@gmail.com

Nei Yoshihiro Soma

Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA

Praça Mar. Eduardo Gomes, 50, Vila das Acácias - São José dos Campos - SP

nys@ita.br

Marco Antonio Moreira de Carvalho

Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP

Campus Universitário Morro do Cruzeiro - Ouro Preto - MG.

mamc@iceb.ufop.br

RESUMO

Diversos métodos para solução do Problema de Minimização de Pilhas Abertas (MOSP) são baseados no grafo MOSP, mas como neste modelo o sequenciamento da produção ocorre na perspectiva das peças, seu uso com métodos focados nos padrões de corte pode não ser trivial. Neste artigo foi validada uma modelagem em grafos baseada nos padrões denominada Padrão \times Padrão. Implementou-se heurísticas clássicas de sequenciamento de padrões (*Yuen3* e *Yuen5*) que originalmente não usam grafos, mas foram ajustadas para o modelo proposto. Também adaptou-se *Yuen3* para melhor explorar este modelo. Experimentos comprovam a viabilidade do modelo proposto, com a heurística adaptada apresentando soluções melhores que a original em vários casos.

PALAVRAS CHAVE. Modelagem em Grafos. MOSP. Sequenciamento de Produção.

Tópicos (TAG - Teoria e Algoritmos em Grafos, POI - PO na Indústria)

ABSTRACT

Many methods for solving the Open Stack Minimization Problem (MOSP) are based on the MOSP graph. Still, as in this model, the production sequencing occurs from the pieces' perspective; its use with methods focused on cutting patterns may not be trivial. This article validated a pattern-based graph modeling called Pattern \times Pattern. Was implemented classic pattern sequencing heuristics (*Yuen3* and *Yuen5*) that originally did not use graphs but were adjusted to the proposed model. *Yuen3* has also been adapted to exploit this model better. Experiments prove the feasibility of the proposed model, with the adapted heuristic presenting better solutions than the original one in several cases.

KEYWORDS. Graph Modeling. MOSP. Production Sequencing.

Paper Topics (TAG - Theory and Algorithms in Graphs, ORI - OR in Industry)

1. Introdução

O Problema de Minimização de Pilhas Abertas (*Minimization of Open Stacks Problem*, MOSP) é comumente observado em ambientes de manufatura quando, a partir de objetos maiores ou padrões de corte, são obtidos objetos menores, denominados peças. As peças obtidas durante o processo de corte são armazenadas em pilhas, que só poderão ser fechadas e movimentadas quando toda a demanda pela peça for atendida. Entretanto, restrições de espaço físico impossibilitam a abertura de pilhas para acomodação simultânea de todas as peças. O objetivo do MOSP é determinar uma sequência de processamento dos padrões de corte, que resulte na menor quantidade de pilhas abertas simultaneamente para uma ocupação otimizada do espaço.

MOSP tem natureza combinatória, foi provado pertencer a classe NP-Difícil, não sendo conhecidos algoritmos de tempo determinístico polinomial para sua solução [Linhares e Yanasse, 2002]. A associação do MOSP com outros problemas de manufatura, além dos desafios em se solucionar um problema NP-Difícil, têm motivado as pesquisas relacionadas ao tema. Para sua solução, alguns métodos utilizam modelagem por grafos e, neste caso, o sequenciamento está associado a um problema de busca. O grafo MOSP [Yanasse, 1997a] é um modelo comumente adotado em métodos de solução do MOSP, no qual os vértices representam as peças e as arestas conectam peças que possuem padrões em comum.

O que se deseja com a solução do MOSP é o sequenciamento dos padrões, no entanto, as estratégias de sequenciamento que adotam o grafo MOSP ocorrem sob a perspectiva das peças. Tal condição exige a execução de uma etapa adicional para conversão da sequência de peças obtidas pelo método, em uma sequência correspondente de padrões. Além disso, existe uma maior dificuldade neste modelo da aplicação de estratégias que focam nos padrões. Para auxiliar o desenvolvimento de métodos que trabalham na perspectiva dos padrões, Frinhani [2018] propõe uma nova modelagem para o MOSP, denominada grafo Padrão \times Padrão. Nela, os padrões de corte são representados pelos vértices e as arestas representam as peças comuns entre os padrões. Testes preliminares realizados pelos autores indicaram a viabilidade do modelo, mas este estudo carece de um maior rigor experimental para resultados mais conclusivos.

O objetivo deste trabalho é validar a modelagem por grafo Padrão \times Padrão proposta por Frinhani [2018], quanto ao seu uso no desenvolvimento de métodos de sequenciamento para solução do MOSP. Para isso, considerando o grafo Padrão \times Padrão foram implementadas heurísticas *ad-hoc* cuja estratégia de sequenciamento tem foco nos padrões, mas originalmente não são baseadas em grafo. Adicionalmente, a adaptação da estratégia de sequenciamento de uma das heurísticas implementadas proporcionou melhorias na qualidade das soluções em comparação a versão original.

2. Referencial Teórico

Em um determinado processo industrial, peças de diferentes tamanhos e formatos são obtidas a partir de objetos maiores de tamanho pré-definido (ex. vidro, madeira, mármore). A disposição das peças nos objetos maiores define um padrão de corte, que são sequencialmente manufaturados a cada estágio de um processo produtivo. Neste processo, uma máquina realiza o corte do padrão, sendo que as peças resultantes são adicionadas a pilhas específicas (ex. caixas, *pallets*) próxima a máquina que as produziu [Yanasse, 1997b]. Uma pilha é considerada aberta quando se adiciona a primeira peça obtida de um padrão de corte. Para reduzir custos logísticos e riscos ao produto, uma pilha só pode ser fechada e removida do ambiente quando toda a demanda pela peça tiver sido atendida, considerando todos os padrões que precisam ser manufaturados. As restrições de espaço físico limitam a acomodação simultânea de pilhas para todas as peças, sendo importante definir a sequência de corte dos padrões para melhor alocação do espaço.

A instância ilustrada na Figura 1(a) tem 7 padrões m_i de índices $i \in \{0, \dots, 6\}$ sendo m o total, além de 7 peças n_j de índices $j \in \{0, \dots, 6\}$ sendo n o total de peças. Ela pode ser representada em uma matriz binária Q de dimensões $m \times n$. Uma célula q_{ij} localizada na i -ésima linha e j -ésima coluna de Q , possui valor 1 se no padrão i existe uma peça j ou valor 0 caso contrário [Yanasse, 1997a]. A propriedade dos 1s consecutivos permite obter o número de pilhas abertas (NPA) em cada estágio de produção [Yanasse e Senne, 2010]. Para isso, é obtida a matriz Q_{Spa}^1 definida da seguinte forma: suas linhas consistem em um permutação de linhas de Q resultante da sequência de padrões Spa , sendo que em cada coluna, as células com valores 0 entre a primeira e a última célula com valor 1, são substituídos por 1 para representar as descontinuidades (pilhas abertas que não receberam peças no estágio e não podem ser removidas devido a uma demanda de produção). O NPA é dado pela soma dos 1s da linha correspondente ao estágio em Q_{Spa}^1 . Uma solução ótima é aquela cujo número máximo de 1s em qualquer uma das linhas da matriz Q_{Spa}^1 é mínimo.

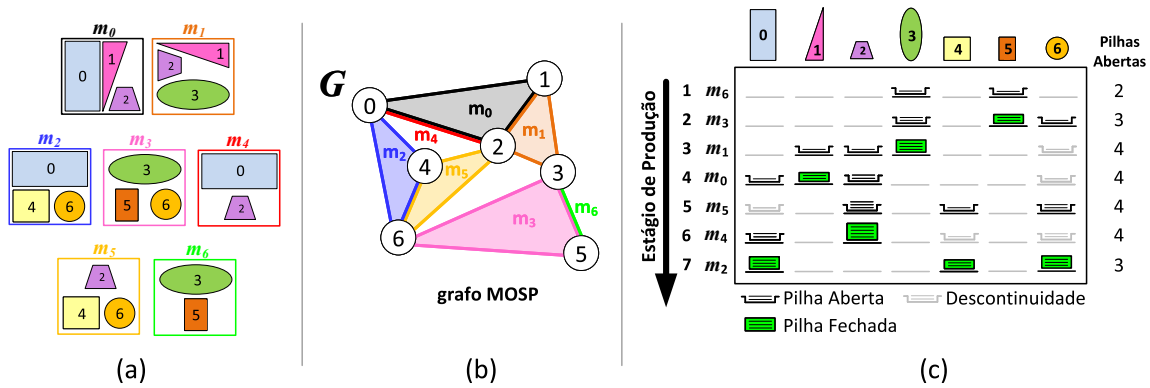


Figura 1: Em (a) conjunto de padrões de corte e suas peças, (b) grafo MOSP correspondente, (c) exemplo de sequenciamento [Frinhani, 2018].

Alguns métodos lidam diretamente com a matriz de entrada da instância do problema e, neste caso, a tarefa envolve a permutação de suas linhas ou colunas para gerar soluções [Yanasse, 1997a; Smith e Gent, 2005]. Outros métodos usam grafos para a representação dos elementos do problema e seus relacionamentos, com estratégias de sequenciamento que envolvem o percurso sobre o grafo. O grafo MOSP de Yanasse [1997b] é um modelo amplamente adotado, como nos métodos *MCNh*, *HB_F_{2r}* e *PieceRank* [Becceneri et al., 2004; Carvalho e Soma, 2015; Frinhani et al., 2018]. No grafo MOSP os padrões são representados por cliques (subgrafo completo) e as peças pelos vértices. A Figura 1(b) contém o grafo MOSP da instância da Figura 1(a). Destacou-se os cliques para um melhor entendimento da composição do grafo. Padrões com até duas peças são representados por uma única aresta, que em certos casos coincide com a de um padrão dominante (ex. arestas m_4 e m_6). Grafo MOSP não possui laços, arestas paralelas, direcionadas ou valoradas.

A Figura 1(c) contém um exemplo de sequenciamento de padrões, os ícones na cor cinza indicam descontinuidades e a seta o sentido da produção. O ícone em verde representa uma pilha que recebeu a última peça e poderá ser fechada e removida no estágio seguinte. O sequenciamento sobre o grafo MOSP define um percurso que dita a ordem de abertura das pilhas de peças. A partir da sequência de peças deve-se executar uma etapa adicional para obter a sequência de padrões correspondente, conforme procedimento descrito por Carvalho e Soma [2015]. A coluna Pilhas Abertas contém o NPA em cada estágio, sendo que o número máximo de pilhas abertas (NMPA) é 4 para a sequência de padrões $Spa = \{m_6, m_3, m_1, m_0, m_5, m_4, m_2\}$.

3. Materiais e Métodos

Para verificar o comportamento de heurísticas em um grafo cujos padrões são o foco das decisões de busca, Frinhani [2018] propõe o grafo Padrão \times Padrão. Nele, os padrões são representados por vértices e as peças pelas arestas. Dois padrões são adjacentes se possuírem peças em comum e o grafo resultante é não direcionado. Formalmente, o modelo Padrão \times Padrão trata-se de um multigrafo sem laços $H = (V, E, f)$, que consiste de um conjunto V de vértices v_i com $|V| = m$ elementos, com $i = \{0, 1, \dots, m-1\}$, um conjunto $E = \{\{u, v\} | u, v \in V, u \neq v\}$ de arestas valoradas obtidas pela associação de vértices de V , e uma função $f : E \rightarrow \mathbb{Z}_+$ que associa a cada elemento de E um valor inteiro positivo.

A Figura 2 ilustra o grafo Padrão \times Padrão para a instância da Figura 1(a). Poderão existir arestas paralelas entre dois vértices caso eles possuam mais de uma peça em comum e, no caso, cada aresta representará uma peça de índice diferente. Também poderão existir arestas distintas que representam a mesma peça, vide por exemplo a peça 2. Sem perda de generalidade, como os laços representam peças pertencentes a um único padrão, não são considerados no modelo.

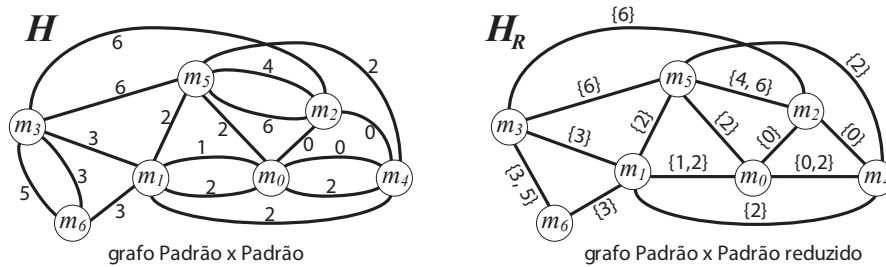


Figura 2: Modelagem por grafo Padrão \times Padrão (H) e Padrão \times Padrão reduzido (H_R), para a instância ilustrada na Figura 1(a).

Devido as arestas múltiplas, o grafo Padrão \times Padrão poderá possuir uma densidade mais elevada que a do grafo MOSP. Uma alternativa (Figura 2), denominada Padrão \times Padrão reduzido (H_R), considera uma única aresta rotulada com uma lista que contém os índices das peças que a aresta representa. Uma vantagem deste grafo é a possibilidade de aplicar heurísticas com abordagem direta sobre os padrões de corte (e.g. *Yuen*) ou mesmo o desenvolvimento de novos métodos.

3.1. Métodos de Sequenciamento sobre o grafo Padrão \times Padrão

Para verificar a viabilidade do grafo Padrão \times Padrão foram implementadas as heurísticas *ad hoc Yuen3* e *Yuen5* [Yuen, 1995], cujo funcionamento original não usa grafos. Algumas adaptações foram realizadas em *Yuen3* para melhor aproveitar os recursos da modelagem em grafo como, por exemplo, a identificação dos vértices adjacentes de um vértice. Todos os algoritmos recebem como entrada o grafo Padrão \times Padrão reduzido (H_R) e retornam a sequência de padrões *Spa*.

3.1.1. Heurística *Yuen3pp*

O Algoritmo 1 refere-se ao método *Yuen3pp*, que tem como entrada um grafo Padrão \times Padrão reduzido (H_R). Na linha 1, o padrão que possui a maior quantidade de peças (*padraoInicial*) é selecionado para iniciar a sequência. Este padrão é adicionado à sequência de padrões *Spa* na linha 2. Na linha 3, *pecasSpa* representa a lista de todas as peças associadas aos padrões que já foram sequenciados, que em um primeiro momento correspondem as peças do *padraoInicial*. A linha 4 cria uma lista com todos os padrões não sequenciados até o momento. A linha 5 itera sobre os padrões ainda não sequenciados enquanto o tamanho da *Spa* for menor que o total de padrões.

Na linha 6 atribui-se um valor suficientemente pequeno para variável *maiorM*, que armazena o maior valor de *M* (*match*) entre um padrão candidato a ser sequenciado e os padrões que constam em *Spa*. *M* é dado pela diferença entre a quantidade de peças comuns (*C*) e a quantidade de novas peças (*N*) que um padrão candidato possui em relação as peças dos padrões já sequenciados (*pecasSpa*). Um alto valor de *M* indica uma melhor associação com *Spa*, sendo este o critério de escolha do próximo padrão a ser sequenciado. Na linha 7 é atribuído um valor suficientemente grande para variável *menorN*, que armazena o menor valor de *N* encontrado durante as iterações. *N* é utilizado como critério de desempate nos casos em que mais de um padrão possua o mesmo valor máximo de *M*. Nas linhas 8–12 ocorre a iteração dos padrões não sequenciados e o cálculo de *C*, *N*, *M*. Nas linhas 13–16 é encontrado o valor de *maiorM*. Casos de empate de *M* são tratados nas linhas 17–19, sendo priorizado o padrão de *menorN*. Nas linhas 20–23 o padrão escolhido é adicionado a *Spa*, suas peças são adicionadas a lista *pecasSpa*, o padrão é removido da lista dos padrões ainda não sequenciados e a sequência de padrões *Spa* é retornada pelo método.

Algoritmo 1: Heurística *Yuen3pp* sobre o grafo Padrão \times Padrão

```

Data:  $H_R$ 
1  padraoInicial  $\leftarrow$  selecionaPadraoMaiorQtdPecas( $H_R$ );
2  Spa  $\leftarrow$  padraoInicial;
3  pecasSpa  $\leftarrow$  obtenPecas(padraoInicial);
4  padroesNaoSequenciados  $\leftarrow$  obtenTodosPadroes( $H_R$ ) – padraoInicial;
5  while tamanho Spa < qtdPadroes do
6      maiorM  $\leftarrow$   $-\infty$ ;
7      menorN  $\leftarrow$   $+\infty$ ;
8      for padraoCandidato  $\in$  padroesNaoSequenciados do
9          pecasCandidato  $\leftarrow$  obtenPecas(padraoCandidato);
10         C  $\leftarrow$  obtenQtdElementos(pecasCandidato  $\cap$  pecasSpa);
11         N  $\leftarrow$  obtenQtdElementos(pecasCandidato – pecasSpa);
12         M  $\leftarrow$  C – N;
13         if M > maiorM then
14             padraoEscolhido  $\leftarrow$  padraoCandidato;
15             maiorM  $\leftarrow$  M;
16             menorN  $\leftarrow$  N;
17         else if M == maiorM and N < menorN then
18             padraoEscolhido  $\leftarrow$  padraoCandidato;
19             menorN  $\leftarrow$  N;
20     Spa  $\leftarrow$  padraoEscolhido;
21     pecasSpa  $\leftarrow$  obtenPecas(padraoEscolhido);
22     padroesNaoSequenciados.remove(adjEscolhido);
23 return Spa

```

Visando usufruir de benefícios da modelagem em grafo, adaptou-se o método original de modo que apenas sejam analisados os padrões adjacentes aos já sequenciados. Supõe-se que só faz sentido analisar *M* de um padrão candidato, que seja adjacente a pelos menos um dos padrões da sequência parcial *Spa* pois, do contrário, novas pilhas seriam abertas. Para isso, foi criada a heurística *Yuen3ppAd* a partir de uma adaptação do Algoritmo 1 que consistiu na inclusão após a linha 21 do comando “*padroesAdjacentes* \leftarrow obtenVizinhos(*adjEscolhido*) – *padroesAdjacentes* – *Spa*;”. Este comando evita duplicidades na lista *padroesAdjacentes*, ao considerar apenas a inclusão dos padrões adjacentes ainda pertencentes a esta lista, além daqueles já sequenciados.

A Figura 3 ilustra o funcionamento de *Yuen3* adaptado para o grafo Padrão \times Padrão reduzido H_R (*Yuen3ppAd*). Em (a) o padrão dado pelo vértice 0 é escolhido para iniciar a sequência,

sendo destacado na cor cinza e o id de seus adjacentes em azul. Vértices 3 e 6 são desconsiderados pois não são adjacentes a 0 e sua inclusão abriria mais duas pilhas. Em (b) são considerados apenas os padrões adjacentes, já em (c) os padrões 3 e 6 tornam-se candidatos com a inclusão do padrão 1 em *Spa*. A execução continua em (d) e (e) até que todos os vértices sejam percorridos e em (f) destaca-se o percurso que gerou a sequência de padrões $Spa = \{0, 4, 1, 6, 3, 2, 5\}$.

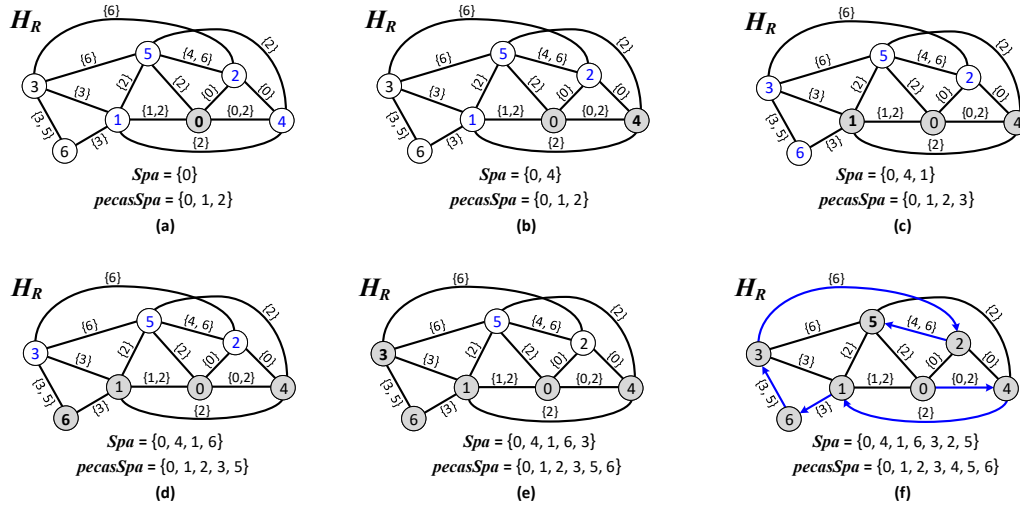


Figura 3: Exemplo de percurso sobre o grafo Padrão \times Padrão reduzido (H_R) para a instância da Figura 1(a), conforme heurística *Yuen3ppAd*.

Yuen3ppAd tem como vantagem conter a busca em uma região de padrões que se relacionam diretamente. Desse modo, espera-se que M seja calculado apenas para os padrões adjacentes aos da sequência parcial *Spa*. Caso um padrão selecionado na busca adie o fechamento de certas pilhas, o uso de *backtracking* pode ser útil para identificar outros padrões na região que se mostrem mais adequados para o sequenciamento. Em um grafo desconexo – constituído por mais de um componente conexo sem ligações entre si – deve-se analisar todos os vértices que restam serem sequenciados, priorizando-se os de maior M .

3.1.2. Heurística *Yuen5pp*

É similar a *Yuen3pp* (Algoritmo 1), diferenciando-se do critério de desempate nos casos em que dois ou mais padrões possuem valores iguais do maior M . Para o desempate, é realizada uma simulação do sequenciamento dos padrões empatados, assumindo um passo a frente em cada sequência. O padrão escolhido é o que obtiver o maior M na simulação considerando o passo a frente. Caso ainda ocorra um empate, é escolhido o padrão de menor índice. O Algoritmo 2 descreve *Yuen5pp*, as linhas 1–6 tem o mesmo propósito do algoritmo *Yuen3pp*. Na linha 7 são armazenados os padrões empatados no valor de M . Nas linhas 8–12 são calculados os valores de C , N e M . Nas linhas 13–16 é obtido o valor de maior M ou a lista *padroesEmpatados* (linhas 17–18). Após a análise dos padrões candidatos, na linha 19 é verificada a existência de padrões empatados e, caso afirmativo, é executado o laço da linha 21 que realiza as simulações. Nas linhas 22–24 atribui-se todas as peças do padrão empatado à lista *pecasPadraoEmpatado* e cria-se as listas usadas na simulação, que conterão as peças já sequenciadas e os padrões não sequenciados. As linhas 25–32 simulam o passo seguinte para os padrões empatados. Ao identificar o padrão mais adequado executa-se o mesmo procedimento do Algoritmo 1 (linhas 33–36), sendo retornada a sequência de padrões *Spa*.

Algoritmo 2: Heurística *Yuen5pp* sobre o grafo Padrão \times Padrão

```

Data:  $H_R$ 
1  $padraoInicial \leftarrow selecionaPadraoMaiorQtdPecas(H_R);$ 
2  $Spa \leftarrow padraoInicial;$ 
3  $pecasSpa \leftarrow obtemPecas(padraoInicial);$ 
4  $padroesNaoSequenciados \leftarrow obtemTodosPadroes(H_R) - padraoInicial;$ 
5 while tamanho  $Spa < qtdPadroes$  do
6    $maiorM \leftarrow -\infty;$ 
7    $padroesEmpatados \leftarrow [ ];$ 
8   for  $padraoCandidato \in padroesNaoSequenciados$  do
9      $pecasCandidato \leftarrow obtemPecas(padraoCandidato);$ 
10     $C \leftarrow obtemQtdElementos(pecasCandidato \cap pecasSpa);$ 
11     $N \leftarrow obtemQtdElementos(pecasCandidato - pecasSpa);$ 
12     $M \leftarrow C - N;$ 
13    if  $M > maiorM$  then
14       $padraoEscolhido \leftarrow padraoCandidato;$ 
15       $maiorM \leftarrow M;$ 
16       $padroesEmpatados \leftarrow \emptyset;$ 
17    else if  $M == maiorM$  then
18       $padroesEmpatados \leftarrow \{padraoCandidato, padraoEscolhido\};$ 
19  if  $padroesEmpatados \neq \emptyset$  then
20     $maiorM \leftarrow -\infty;$ 
21    for  $padraoEmpatado \in padroesEmpatados$  do
22       $pecasPadraoEmpatado \leftarrow obtemPecas(padraoEmpatado);$ 
23       $pecasSpaSimulacao \leftarrow pecasSpa + pecasPadraoEmpatado;$ 
24       $padroesNaoSeqSimulacao \leftarrow padroesNaoSequenciados - padraoEmpatado;$ 
25      for  $padrao \in padroesNaoSeqSimulacao$  do
26         $pecasPadrao \leftarrow obtemPecas(padrao);$ 
27         $C \leftarrow obtemQtdElementos(pecasPadrao \cap pecasSpaSimulacao);$ 
28         $N \leftarrow obtemQtdElementos(pecasPadrao - pecasSpaSimulacao);$ 
29         $M \leftarrow C - N;$ 
30        if  $M > maiorM$  then
31           $maiorM \leftarrow M;$ 
32           $padraoEscolhido \leftarrow padraoEmpatado;$ 
33   $Spa \leftarrow padraoEscolhido;$ 
34   $pecasSpa \leftarrow obtemPecas(padraoEscolhido);$ 
35   $padroesNaoSequenciados.remove(padraoEscolhido);$ 
36 return  $Spa$ 

```

3.2. Projeto de Experimentos

Os experimentos foram organizados em duas partes. A primeira avaliou as características do grafo MOSP e do grafo Padrão \times Padrão para uma mesma instância. A segunda buscou validar o funcionamento dos algoritmos utilizando o grafo Padrão \times Padrão a partir de experimentos com métodos *Yuen3* (*Yuen3pp*), *Yuen3* adaptado para análise dos padrões adjacentes (*Yuen3ppAd*) e *Yuen5* (*Yuen5pp*). Os métodos foram comparados considerando o tempo de execução, qualidade das soluções (NMPA) e *gap* percentual da solução em relação ao ótimo.

O tempo de execução foi medido em milissegundos (*ms*), com contagem iniciando no instante da chamada do método e término na entrega da sequência de padrões. A qualidade das soluções é dada pelo menor NMPA. Nas instâncias múltiplas foi considerada a média dos valores. A distância percentual entre o valor obtido pelo método e o valor da solução ótima ou melhor conhecido é dada por $\%gap = 100 \times (Sol_Método - Sol_Ótima) / Sol_Ótima$.

Todos os experimentos foram realizados em um *desktop* com processador Intel Core i5-2400 3.1GHzx4, 4GB de RAM, sistema operacional Linux Ubuntu 20.4 LTS 64bits. A linguagem Python 3.9.5 MSC v.1928 64bit foi usada na implementação dos métodos descritos na Subseção 3.1, além das bibliotecas iGraph 0.9.1 para operações sobre grafos (igraph.org/python) e NumPy 1.20.2 para manipulação de matrizes.

Para validação do grafo foram incluídos os resultados da implementação de *Yuen3* de Carvalho e Soma [2015], denominada *Yuen3cs*, cujo código foi escrito na linguagem ANSI C, compilados com gcc 5.4.0 e opção -O3. Como referência de um método baseado no grafo MOSP, foram incluídos os resultados da heurística *PieceRank*, implementada em Python 3.5.1 MSC v.1900 64bit. Os resultados ótimos foram obtidos pelo método *Chu & Stuckey*, escrito na linguagem ANSI C, compilado e executado conforme recomendado pelos autores. Devido ao tempo do método exato considerou-se as soluções não comprovadas ótimas obtidas por *HBF_{2r}* nas instâncias 400×400 e 600×600 , e *PieceRank* nas 800×800 e 1000×1000 .

No total foram 1.050 instâncias dos conjuntos de dados: *First Constraint Modelling Challenge* (GP, Miller, NWRS, Shaw, SP), Faggioli & Bentivoglio, SCOOP e *Chu & Stuckey* estão disponíveis em doi.org/10.1371/journal.pone.0203076. As instâncias *Carvalho & Soma* estão disponíveis em doi.org/10.13140/2.1.3035.4886 e as *Frinhani, Carvalho & Soma* em <http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.31716.48006/1>. Os resultados detalhados estão disponíveis em doi.org/10.13140/RG.2.2.10043.18720.

4. Resultados e Discussão

Os resultados da primeira parte dos experimentos constam na Tabela 1, que contém uma síntese das características dos grafos MOSP e Padrão \times Padrão. Conjuntos de dados com múltiplas instâncias foram reunidos em uma única linha e seus valores correspondem a média da quantidade de vértices (IV), de arestas (IE), da densidade (D) e do tempo de construção do grafo (T). A coluna I contém o número de instâncias do conjunto de dados, PA a quantidade de padrões e PE a de peças.

No conjunto *First Constraint Modelling Challenge* (FCMC) o grafo Padrão \times Padrão tem maior quantidade de arestas em GP, Miller, Shaw e NWRS (este último cerca de 3 vezes mais), mas possui menos arestas em SP. O modelo proposto gerou grafos menos densos em Miller, NWRS e SP. Já em *Faggioli & Bentivoglio* (linhas nº 6–8) e SCOOP (nº 12–35), notam-se vantagens do modelo proposto quando a quantidade de padrões é menor que a de peças. A depender das características da instância ocorrerão reduções na quantidade de vértices e, por consequência, também na de arestas (ex. 72% na instância nº 19). O redimensionamento do grafo tem impactos na sua densidade, o que justifica o aumento desta medida no grafo Padrão \times Padrão em algumas instâncias (ex. SCOOP).

Na maioria dos casos o tempo de construção dos grafos é na ordem de *ms*, com Padrão \times Padrão sendo mais custoso nas instâncias grandes (ex. *Frinhani, Carvalho & Soma* linhas nº 47–50). Nas instâncias simétricas baseadas no gerador de *Chu & Stuckey* (nº 36–50), o número de vértices entre as modelagens é semelhante, sendo que o de arestas e a densidade são cerca de 1% maiores no grafo Padrão \times Padrão. No geral os modelos apresentaram quantidade próximas de arestas, sendo que no total o grafo Padrão \times Padrão tem apenas 100 arestas a mais que o grafo MOSP. Grafos Padrão \times Padrão são mais densos que grafos MOSP e demandam mais tempo de construção nas instâncias de grande dimensão.

4.1. Análise dos métodos de sequenciamento sobre o grafo Padrão \times Padrão

Na segunda parte dos experimentos os resultados de *Yuen3pp*, *Yuen3ppAd* e *Yuen5pp* foram comparados com a implementação *Yuen3* de Carvalho & Soma (*Yuen3cs*). O método *PieceRank* foi usado apenas como referência. Nas tabelas, as instâncias estão organizadas em linhas e os métodos em colunas. A coluna D contém a densidade do grafo Padrão \times Padrão e a coluna OPT o

valor ótimo ou melhor conhecido em NMPA. Para ambas as medidas foi considerada a média nos conjuntos de dados com múltiplas instâncias. A coluna T é o tempo de execução (ms), NMPA é o valor da solução e %gap o percentual em relação a OPT. Nas instâncias múltiplas o tempo é dado pela soma dos valores das instâncias e o valor da solução dado pela média. A linha Total contém a soma dos valores da respectiva coluna, exceto a coluna %gap, que corresponde ao percentual entre os valores totais da solução (Sol.) e OPT. Os melhores resultados foram destacados na cor azul.

Tabela 1: Comparação das características dos grafos MOSP e Padrão \times Padrão.

Nº	Conjunto de Dados				grafo MOSP				grafo Padrão \times Padrão			
		I	PA	PE	V	E	D	T	V	E	D	T
1	GP	8	75	75	75	2.851	0,923	0,08	75	3.088	1,000	0,33
2	Miller	1	40	20	20	100	0,526	0,00	40	320	0,410	0,01
3	NWRS	8	34	18	18	98	0,578	0,00	34	296	0,475	0,01
4	Shaw	25	20	20	20	126	0,665	0,00	20	166	0,871	0,00
5	SP	4	63	63	63	483	0,220	0,02	63	467	0,208	0,03
6	p10n	50	10	30	30	83	0,265	0,00	10	18	0,410	0,00
7	p15n	50	15	30	30	81	0,287	0,00	15	43	0,405	0,00
8	p20n	50	20	30	30	85	0,325	0,00	20	79	0,416	0,00
9	p25n	50	25	30	30	97	0,352	0,01	25	126	0,419	0,01
10	p30n	50	30	30	30	105	0,380	0,00	30	181	0,417	0,01
11	p40n	50	40	30	30	126	0,428	0,01	40	327	0,419	0,01
12	A_AP-9.d_10	1	13	20	20	41	0,216	0,00	13	26	0,333	0,00
13	A_AP-9.d_11	1	21	27	27	50	0,143	0,00	21	47	0,224	0,00
14	A_AP-9.d_3	1	16	20	20	37	0,195	0,00	16	30	0,250	0,00
15	A_AP-9.d_6	1	20	31	31	45	0,097	0,00	20	26	0,137	0,00
16	A_FA+AA_1	1	37	105	105	358	0,066	0,02	37	128	0,192	0,01
17	A_FA+AA_11	1	28	99	99	316	0,065	0,01	28	53	0,140	0,01
18	A_FA+AA_12	1	20	75	75	259	0,093	0,01	20	47	0,247	0,01
19	A_FA+AA_13	1	37	134	134	572	0,064	0,02	37	116	0,174	0,01
20	A_FA+AA_15	1	18	68	68	224	0,098	0,01	18	31	0,203	0,01
21	A_FA+AA_2	1	19	75	75	281	0,101	0,01	19	33	0,193	0,00
22	A_FA+AA_6	1	21	79	79	356	0,116	0,01	21	59	0,281	0,01
23	A_FA+AA_8	1	28	82	82	301	0,091	0,01	28	79	0,209	0,01
24	B_12F18_11	1	15	21	21	47	0,224	0,00	15	32	0,305	0,00
25	B_12M18_12	1	22	28	28	76	0,201	0,00	22	73	0,316	0,01
26	B_18AB1_32	1	11	14	14	41	0,451	0,00	11	30	0,546	0,00
27	B_18CR1_33	1	18	19	19	21	0,123	0,00	18	25	0,163	0,00
28	B_22X18_50	1	10	14	14	60	0,659	0,00	10	31	0,689	0,00
29	B_23B25_52	1	21	27	27	42	0,120	0,00	21	39	0,186	0,00
30	B_39Q18_82	1	10	14	14	34	0,374	0,00	10	32	0,711	0,00
31	B_42F22_93	1	10	17	17	32	0,235	0,00	10	14	0,311	0,00
32	B_CARLET_137	1	12	13	13	33	0,423	0,00	12	29	0,439	0,00
33	B_CUC28A_138	1	26	31	31	71	0,153	0,00	26	91	0,280	0,01
34	B_GTM18A_139	1	20	24	24	41	0,149	0,00	20	39	0,205	0,00
35	B_REVAL_145	1	49	60	60	149	0,084	0,01	49	192	0,163	0,01
36	Random-30-30	25	30	30	30	271	0,623	0,00	30	283	0,651	0,01
37	Random-40-40	25	40	40	40	434	0,556	0,01	40	447	0,573	0,02
38	Random-50-50	25	50	50	50	638	0,521	0,01	50	650	0,531	0,03
39	Random-50-100	25	100	50	50	829	0,677	0,02	100	2.502	0,506	0,21
40	Random-75-75	25	75	75	75	1.136	0,409	0,02	75	1.147	0,413	0,07
41	Random-100-50	25	50	100	100	1.037	0,210	0,03	50	417	0,340	0,03
42	Random-100-100	25	100	100	100	1.652	0,334	0,04	100	1.660	0,336	0,14
43	Random-125-125	25	125	125	125	2.151	0,278	0,06	125	2.164	0,279	0,22
44	Random-150-150	50	150	150	150	2.648	0,237	0,07	150	2.650	0,237	0,29
45	Random-175-175	50	175	175	175	3.225	0,212	0,10	175	3.257	0,214	0,41
46	Random-200-200	50	200	200	200	3.746	0,188	0,13	200	3.755	0,189	0,55
47	Random-400-400	80	400	400	400	20.745	0,260	0,54	400	20.763	0,260	14,96
48	Random-600-600	80	600	600	600	34.340	0,191	1,22	600	34.428	0,192	47,68
49	Random-800-800	110	800	800	800	87.876	0,275	2,19	800	87.922	0,275	337,76
50	Random-1000-1000	110	1.000	1.000	1.000	116.833	0,234	3,38	1.000	116.897	0,234	661,34
Total					5.366	285.283	0,294	8,11	4.768	285.354	0,352	1.064,23

4.1.1. Conjuntos de Dados *First Constraint Modelling Challenge* e *Faggioli & Bentvoglio*

Os resultados de NMPA (Sol.) e %gap obtidos por *Yuen3pp* no conjunto *FCMC* são idênticos aos de *Yuen3cs*, sendo este um indicativo que o grafo Padrão \times Padrão possibilita a reprodução de métodos baseados nos padrões. Como este comportamento é observado em todos os demais conjuntos de dados, apenas a coluna T foi mantida. Em GP, Miller e NWRS os resultados de %gap são iguais entre os métodos, sendo que em Shaw e SP *Yuen3ppAd* reduziu o valor total de NMPA (143,46). Ocorreu um pequeno aumento no tempo na versão em grafo (0,35 ms), justificado pela linguagem e biblioteca adotadas. Em *Faggioli & Bentvoglio*, *Yuen5pp* obteve melhores soluções em 57% dos subconjuntos, com *Yuen3ppAd* sendo superior a *Yuen3cs/pp* em 66% dos casos.

Tabela 2: Resultados de *First Constraint Modelling Challenge* e *Faggioli & Bentvoglio*

				grafo MOSP						grafo Padrão x Padrão							
				PieceRank			Yuen3cs			Yuen3pp	Yuen3ppAd			Yuen5pp			
Nº	Conjunto	Densidade	OPT	T	Sol.	%gap	T	Sol.	%gap	T	T	Yuen.	%gap	T	Yuen.	%gap	
1	GP	0,923	57,50	0,50	58	0,87	0,00	68,88	19,78	0,31	0,31	68,88	19,78	0,67	71,75	24,78	
2	Miller	0,526	13	0,00	13	0,00	0,00	13	0,00	0,00	0,00	13	0,00	0,01	13	0,00	
3	NWRS	0,578	8,88	0,00	8,88	0,00	0,00	10,63	19,72	0,00	0,01	10,63	19,72	0,02	11,75	32,39	
4	Shaw	0,665	13,68	0,00	13,92	1,75	0,00	15,08	10,23	0,00	0,00	14,96	9,36	0,00	15,28	11,70	
5	SP	0,220	28,75	0,02	32	11,30	0,00	37,00	28,70	0,04	0,04	36,00	25,22	0,04	35,50	23,48	
Total				121,81	0,52	125,80	3,28	0,00	144,58	18,70	0,35	0,36	143,46	17,78	0,74	147,28	20,91

6	p10n	0,265	6,74	0,00	7,28	8,01	0,00	7,40	9,79	0,00	0,00	7,40	9,79	0,00	7,34	8,90	
7	p15n	0,287	7,14	0,00	8,14	14,01	0,00	8,72	22,13	0,00	0,00	8,62	20,73	0,00	8,70	21,85	
8	p20n	0,325	8,24	0,00	9,24	12,14	0,00	10,14	23,06	0,00	0,00	10,08	22,33	0,00	10,00	21,36	
9	p25n	0,352	9,72	0,00	10,72	10,29	0,00	12,38	27,37	0,00	0,00	12,10	24,49	0,00	12,22	25,72	
10	p30n	0,380	10,88	0,00	11,66	7,17	0,00	13,70	25,92	0,00	0,00	14,02	28,86	0,00	13,54	24,45	
11	p40n	0,428	13,08	0,00	14,04	7,34	0,00	16,22	24,01	0,00	0,00	16,06	22,78	0,00	16,02	22,48	
Total				55,80	0,03	61,08	9,46	0,00	68,56	22,87	0,00	0,00	68,28	22,37	0,00	67,82	21,54

4.1.2. Conjunto de Dados SCOOP

Este conjunto é constituído de dados reais. Os tempos foram baixos em todas as versões. *Yuen3ppAd* obteve menores gap que *Yuen3cs/pp* em 33% dos casos, com reduções significativas em certas instâncias (ex. nº 19 de 52,94% para 29,41%), além de valores ótimos (ex. nº 29, 31 e 33).

Tabela 3: Resultados para o conjunto de dados SCOOP

				grafo MOSP							grafo Padrão x Padrão						
				PieceRank			Yuen3cs			Yuen3pp	Yuen3ppAd			Yuen5pp			
Nº	Conjunto	D	OPT	T	Sol.	%gap	T	Sol.	%gap	T	T	Sol.	%gap	T	Sol.	%gap	
12	SCOOP-A_AP-9.d_10	0,333	6	0,00	7	16,67	0,00	7	16,67	0,00	0,00	7	16,67	0,00	8	33,33	
13	SCOOP-A_AP-9.d_11	0,224	6	0,00	6	0,00	0,00	8	33,33	0,00	0,00	8	33,33	0,00	8	33,33	
14	SCOOP-A_AP-9.d_3	0,250	6	0,00	6	0,00	0,00	6	0,00	0,00	0,00	6	0,00	0,00	6	0,00	
15	SCOOP-A_AP-9.d_6	0,137	5	0,00	5	0,00	0,00	6	20,00	0,00	0,00	6	20,00	0,00	7	40,00	
16	SCOOP-A_FA_1	0,192	12	0,00	14	16,67	0,00	15	25,00	0,00	0,00	15	25,00	0,00	14	16,67	
17	SCOOP-A_FA_11	0,140	11	0,00	12	9,09	0,00	16	45,45	0,00	0,00	14	27,27	0,00	16	45,45	
18	SCOOP-A_FA_12	0,247	9	0,00	10	11,11	0,00	14	55,56	0,00	0,00	13	44,44	0,00	14	55,56	
19	SCOOP-A_FA_13	0,174	17	0,00	21	23,53	0,00	26	52,94	0,00	0,00	22	29,41	0,00	26	52,94	
20	SCOOP-A_FA_15	0,203	9	0,00	10	11,11	0,00	13	44,44	0,00	0,00	15	66,67	0,00	13	44,44	
21	SCOOP-A_FA_2	0,193	11	0,00	13	18,18	0,00	14	27,27	0,00	0,00	12	9,09	0,00	14	27,27	
22	SCOOP-A_FA_6	0,281	13	0,00	13	0,00	0,00	16	23,08	0,00	0,00	15	15,38	0,00	16	23,08	
23	SCOOP-A_FA_8	0,209	11	0,00	12	9,09	0,00	15	36,36	0,00	0,00	15	36,36	0,00	14	27,27	
24	SCOOP-B_12F18_11	0,305	6	0,00	7	16,67	0,00	6	0,00	0,00	0,00	8	33,33	0,00	6	0,00	
25	SCOOP-B_12M18_12	0,316	6	0,00	7	16,67	0,00	6	0,00	0,00	0,00	7	16,67	0,00	6	0,00	
26	SCOOP-B_18AB1_32	0,545	6	0,00	6	0,00	0,00	6	0,00	0,00	0,00	7	16,67	0,00	7	16,67	
27	SCOOP-B_18CR1_33	0,163	4	0,00	4	0,00	0,00	4	0,00	0,00	0,00	4	0,00	0,00	4	0,00	
28	SCOOP-B_22X18_50	0,689	10	0,00	10	0,00	0,00	10	0,00	0,00	0,00	10	0,00	0,00	10	0,00	
29	SCOOP-B_23B25_52	0,186	5	0,00	5	0,00	0,00	6	20,00	0,00	0,00	5	0,00	0,00	6	20,00	
30	SCOOP-B_39Q18_82	0,711	5	0,00	5	0,00	0,00	6	20,00	0,00	0,00	6	20,00	0,00	6	20,00	
31	SCOOP-B_42F22_93	0,311	5	0,00	5	0,00	0,00	6	20,00	0,00	0,00	5	0,00	0,00	5	0,00	
32	SCOOP-B_CARLET_137	0,439	5	0,00	5	0,00	0,00	6	20,00	0,00	0,00	6	20,00	0,00	6	20,00	
33	SCOOP-B_CUC28A_138	0,280	6	0,00	6	0,00	0,00	8	33,33	0,00	0,00	6	0,00	0,00	6	0,00	
34	SCOOP-B_GTM18A_139	0,205	5	0,00	5	0,00	0,00	5	0,00	0,00	0,00	5	0,00	0,00	5	0,00	
35	SCOOP-B_REVAL_145	0,163	7	0,00	8	14,29	0,00	9	28,57	0,00	0,00	10	42,86	0,00	9	28,57	
Total				186,00	0,00	202	8,60	0,00	234	25,81	0,00	0,00	212	13,98	0,00	232	24,73

No total, *Yuen3ppAd* reduziu o *gap* cerca de 45,8% (de 25,81% para 13,98%) em comparação as outras versões *Yuen3*, o que corresponde a 22 pilhas a menos. Nota-se uma tendência de melhor desempenho da versão adaptada nos grafos esparsos, possivelmente devido a contenção da análise à apenas os adjacentes. Evitar que o percurso ocorra em profundidade pode reduzir a abertura prematura de novas pilhas.

4.1.3. Conjuntos de Dados baseados no gerador de instâncias de *Chu & Stuckey*

Considerados mais difíceis que os anteriores pois os grafos gerados não possuem estruturas triviais que facilitem sua solução. As instâncias estão organizadas em subconjuntos de acordo com seu tamanho e número máximo de peças por padrão (ex. Random-30-30-2 possui 30 padrões, 30 peças, 2 peças por padrão). No conjunto *Chu & Stuckey*, *Yuen3ppAd* obteve melhores soluções em 87,5% dos subconjuntos, porém exigindo um maior tempo de execução (0,50 ms).

Tabela 4: Resultados para os conjuntos *Chu & Stuckey*, *Carvalho & Soma* e *Frinhani, Carvalho & Soma*.

				grafo MOSP						grafo Padrão x Padrão						
				PieceRank			Yuen3cs			Yuen3pp	Yuen3ppAd			Yuen5pp		
Nº	Conjunto	D	OPT	T	Sol.	%gap	T	Sol.	%gap	T	T	Sol.	%gap	T	Sol.	%gap
36	Random-30-30	0,623	19,60	0,00	21,04	7,35	0,00	23,08	17,76	0,00	0,00	22,80	16,33	0,00	23,16	18,16
37	Random-40-40	0,556	25,48	0,00	27,08	6,28	0,00	30,32	19,00	0,00	0,00	30,00	17,74	0,00	30,24	18,68
38	Random-50-50	0,521	31,40	0,00	33,56	6,88	0,00	37,92	20,76	0,00	0,00	37,56	19,62	0,03	38,12	21,40
39	Random-50-100	0,676	38,44	0,01	39,28	2,19	0,00	44,24	15,09	0,08	0,10	44,16	14,88	0,18	44,96	16,96
40	Random-75-75	0,409	38,44	0,00	48,04	24,97	0,00	54,60	42,04	0,07	0,07	54,64	42,14	0,08	55,24	43,70
41	Random-100-50	0,209	41,08	0,00	45,60	11,00	0,00	52,16	26,97	0,00	0,03	50,96	24,05	0,05	51,16	24,54
42	Random-100-100	0,334	58,20	0,03	61,72	6,05	0,00	73,28	25,91	0,08	0,11	72,12	23,92	0,15	72,96	25,36
43	Random-125-125	0,278	70,20	0,04	75,84	8,03	0,00	88,40	25,93	0,11	0,19	88,12	25,53	0,27	89,92	28,09
Total				322,84	0,08	352,16	9,08	404,00	25,14	0,34	0,50	400,36	24,01	0,77	405,76	25,68
44	Random-150-150	0,237	83,26	0,05	88,98	6,87	0,00	106,24	27,60	0,16	0,31	103,88	24,77	0,42	104,54	25,56
45	Random-175-175	0,212	96,70	0,06	104,80	8,38	0,00	123,26	27,47	0,23	0,44	122,08	26,25	0,62	123,06	27,26
46	Random-200-200	0,188	110,34	0,07	118,04	6,98	0,00	140,62	27,44	0,29	0,59	137,52	24,63	0,88	139,68	26,59
Total				290,30	0,18	311,82	7,41	370,12	27,50	0,68	1,34	363,48	25,21	1,92	367,28	26,52
47	Random-400-400	0,210	261,64	0,44	269,50	3,00	0,00	313,61	19,86	2,21	7,13	308,00	17,72	8,82	311,67	19,12
48	Random-600-600	0,239	429,73	1,36	440,82	2,58	0,05	499,20	16,17	8,22	32,83	492,46	14,60	40,35	496,37	15,51
49	Random-800-800	0,192	-	2,27	586,09	-	0,08	665,57	13,56	16,62	73,05	654,72	11,71	90,93	659,56	12,54
50	Random-1000-1000	0,125	-	2,76	702,61	-	0,12	810,36	15,34	25,00	115,46	795,28	13,19	140,88	800,01	13,86
Total				-	6,83	1.999,02	-	2.288,74	14,49	52,05	228,47	2.250,45	12,58	280,98	2.267,61	13,44

No conjunto *Carvalho & Soma* (nº 44–46) os *gaps* de *Yuen3ppAd* foram menores que *Yuen3cs/pp* em 80% dos subconjuntos. Assim como em *Chu & Stuckey*, as reduções mais significativas ocorrem nas instâncias com 2 a 4 peças por padrão, que geram grafos esparsos. A versão proposta exigiu mais tempo que *Yuen3cs/pp*, embora ainda considerado baixo (1,34 ms).

Nas instâncias *Frinhani, Carvalho & Soma* (nº 47–50) os métodos seguem o comportamento observado nos conjuntos anteriores, com *Yuen3ppAd* obtendo as melhores soluções em 83% dos subconjuntos. Nas instâncias de 2 a 6 peças dos subconjuntos 800 e 1000, nota-se casos em que *Yuen3ppAd* diminuiu entre 18 a 30 pilhas em relação a *Yuen3cs/pp*. Exemplos de reduções mais expressivas em NMPA são observadas nos subconjuntos Random-800-800-4 (30,70 pilhas a menos na média) e Random-1000-1000-4 (31,70 pilhas a menos) e Random-1000-1000-6 (29,20). *Yuen5pp* destaca-se nas instâncias com até 2 peças por padrão. Não ocorreram reduções significativas do tempo em relação a *Yuen3pp* como se esperava. Conjectura-se que este aumento esteja relacionado ao custo das análises dos padrões adjacentes. O método mais custoso foi *Yuen5pp*, que exigiu 280,98 ms para execução de todas as instâncias.

5. Conclusão

Diversos métodos para solução do Problema de Minimização de Pilhas Abertas adotam o grafo MOSP, sendo que neste modelo o sequenciamento da produção ocorre na perspectiva das peças. Tal característica, pode tornar o seu uso não trivial para métodos baseados nos padrões

de corte. Neste artigo foi analisada a viabilidade do grafo Padrão \times Padrão, como modelo para implementação de métodos clássicos de sequenciamento que trabalham na perspectiva dos padrões.

Um amplo conjunto de experimentos computacionais foi realizado para comparar as características dos grafos MOSP e Padrão \times Padrão gerados, bem como o desempenho de métodos de sequenciamento. Os resultados mostram que o grafo Padrão \times Padrão é funcional e viável, sendo mais adequado para instâncias com uma menor quantidade de padrões do que de peças e grafos esparsos. Porém, costumam ser mais densos que grafos MOSP e exigem maior tempo de construção. Resultados obtidos com a heurística adaptada mostraram melhorias nas soluções em comparação a versão tradicional, sendo um indicativo do potencial da modelagem em grafos baseada nos padrões.

Como trabalhos futuros sugere-se a otimização do algoritmo de construção do grafo Padrão \times Padrão para redução do tempo de execução, além da aplicação de métodos de pré-processamento de padrões para avaliar seu desempenho na redução das dimensões do grafo. Também sugere-se estudos de uma modelagem baseada em hipergrafos, que seria obtida pela combinação dos grafos MOSP e grafo Padrão \times Padrão, para possibilitar estratégias combinadas baseadas nas perspectivas das peças e dos padrões simultaneamente. Outras possibilidades envolvem o uso de recursos da ciência de redes, como a centralidade e a detecção de comunidades, na construção de novos métodos de sequenciamento sobre o grafo Padrão \times Padrão.

Referências

- Becceneri, J. C., Yanasse, H. H., e Soma, N. Y. (2004). A method for solving the minimization of the maximum number of open stacks problem within a cutting process. *Computers & Operations Research*, 31(14):2315–2332.
- Carvalho, M. A. M. e Soma, N. Y. (2015). A breadth-first search applied to the minimization of the open stacks. *Journal of the Operational Research Society*, 66(6):936–946.
- Frinhani, R. d. M. D., de Carvalho, M. A. M., e Soma, N. Y. (2018). A pagerank-based heuristic for the minimization of open stacks problem. *PloS one*, 13(8):e0203076.
- Frinhani, R. d. M. D. (2018). *Uma heurística baseada no PageRank para o problema de minimização de pilhas abertas*. PhD thesis, Divisão de Engenharia Eletrônica e Computação – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos/SP.
- Linhares, A. e Yanasse, H. H. (2002). Connections between cutting-pattern sequencing, VLSI design, and flexible machines. *Computers & Operations Research*, 29(12):1759–1772.
- Smith, B. M. e Gent, I. P. (2005). Constraint modelling challenge 2005. In *IJCAI 2005 Fifth Workshop on Modelling and Solving Problems with Constraints*, p. 1–8.
- Yanasse, H. H. (1997a). On a pattern sequencing problem to minimize the maximum number of open stacks. *European Journal of Operational Research*, 100(3):454–463.
- Yanasse, H. H. (1997b). A transformation for solving a pattern sequencing problem in the wood cut industry. *Pesquisa Operacional*, 17(1):57–70.
- Yanasse, H. H. e Senne, E. L. F. (2010). The minimization of open stacks problem: A review of some properties and their use in pre-processing operations. *European Journal of Operational Research*, 203(3):559–567.
- Yuen, B. J. (1995). Improved heuristics for sequencing cutting patterns. *European Journal of Operational Research*, 87(1):57–64.