PCC173/BCC463 - Otimização em Redes

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

Conteúdo

Aviso

Fonte

Este material é baseado nos livros

- Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.
- Goldbarg, M. C., & Luna, H. P. L. (2005). *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Elsevier.

Licença

Este material está licenciado sob a Creative Commons BY-NC-SA 4.0. Isto significa que o material pode ser compartilhado e adaptado, desde que seja atribuído o devido crédito, que o material não seja utilizado de forma comercial e que o material resultante seja distribuído de acordo com a mesma licença.

Algoritmo MPM

Histórico

Desde a criação do algoritmo de Dinitz, diversas propostas foram apresentadas na literatura para melhorar sua complexidade, limitada por $O(mn^2)$.

Uma destas propostas é devida a Malhotra, Pramodh-Kumar and Maheshwari (1978), que apresentam um algoritmo de complexidade $O(n^3)$ para o problema do fluxo máximo, chamado abreviadamente de MPM.

O MPM também é um algoritmo de fluxo forçado.

Algoritmo MPM

Princípio

O princípio do algoritmo MPM é esgotar a capacidade dos nós da rede R, em vez da capacidade de seus arcos.

Para isto é utilizada a noção de **potencial** do vértice.

Potencial de um Vértice

Considerando uma rede em camadas H construída a partir da rede R em que circula um fluxo viável, o **potencial de entrada** de um vértice w de H é dado pela soma das capacidades dos arcos que chegam em w.

Analogamente, o **potencial de saída** de um vértice w de H é dado pela soma das capacidades dos arcos que saem de w.

O **potencial** de w é dado pelo mínimo entre o seu potencial de entrada e de saída.

Algoritmo MPM

Funcionamento

Inicialmente, o algoritmo MPM determina o vértice v de menor potencial, g, na rede em camadas H em que já há um fluxo viável (usualmente, igual a 0).

O algoritmo, então, **empurra** g unidades de fluxo de v para t e, depois, **puxa** g unidades de fluxo de s até v.

Para empurrar g unidades de fluxo entre v e t, os arcos que saem de v são ordenados:

- Suponha que j arcos saem de v: $a_1, \ldots, a_j$, com capacidades $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_j$;
- Se $g \geq \bar{u}_1$, o algoritmo faz passar $\bar{u}_1$ unidades de fluxo em a_1, restando $s_1 = g - \bar{u}_1$ unidades de fluxo;
- Se $s_1 \geq \bar{u}_2$, o algoritmo faz passar $\bar{u}_2$ unidades de fluxo em a_2, restando $s_2 = s_1 - \bar{u}_2$ unidades de fluxo.

Funcionamento

Esse procedimento se repete até que a_j seja saturado ou que $s_i \leq 0$ para algum i, $1 \leq i \leq j$.

Se a_j foi saturado, então o potencial de v é igual ao seu potencial de saída, caso em que $\sum_{i=1}^{j} \bar{u}_i = g$.

O procedimento é repetido para os vértices terminais dos arcos a_i, em que um fluxo foi empurrado sucessivamente até chegar a t.

Algoritmo MPM

Funcionamento

De modo análogo, para **puxar** g unidades de fluxo de s até v, os arcos que chegam a v são ordenados e saturados nesta ordem, até que as g unidades de fluxo se esgotem.

Do mesmo modo, se todos os k arcos que chegam a v forem saturados, o potencial de v é igual ao seu potencial de entrada.

O procedimento é repetido puxando-se fluxo dos vértices terminais até chegar a s.

Algoritmo MPM

Entrada: Rede R com fluxo viável $F = 0$

Construa a rede em camada H a partir de R, considerando o fluxo F;
repita
  enquanto *existir caminho entre s e t em H* **faça**
    Encontre v, o vértice de mínimo potencial g;
    Empurre g unidades de fluxo de v para t;
    Puxe g unidades de fluxo de s até v;
    Atualize a rede H e o fluxo F;
  fim
  Construa a rede em camadas H com base na rede residual de R, considerando o fluxo F;
até *não ser possível construir rede em camada H entre os vértices s e t*;

Algoritmo MPM

Complexidade

Em cada iteração do laço externo, o número total de arcos saturados nas operações **puxa** e **empurra** é, no máximo, m.

Em cada iteração do laço mais interno, o número de arcos parcialmente saturados é, no máximo, 2 para cada vértice atingido pelas operações **puxa** e **empurra**.

Para cada vértice de potencial mínimo são atingidos, no máximo, n outros vértices.

No máximo, n iterações do laço mais interno são realizadas, uma vez que em cada iteração, pelo menos, 1 vértice é removido de H.

A operação de encontrar um vértice de mínimo potencial é realizada em conjunto com a saturação dos arcos.

Cada vez que um arco é atingido nas operações **puxa** e **empurra**, os potenciais de seus vértices terminais são atualizados. Assim, o custo de manter os potenciais dos vértices atualizados é $O(n)$.

Algoritmo MPM

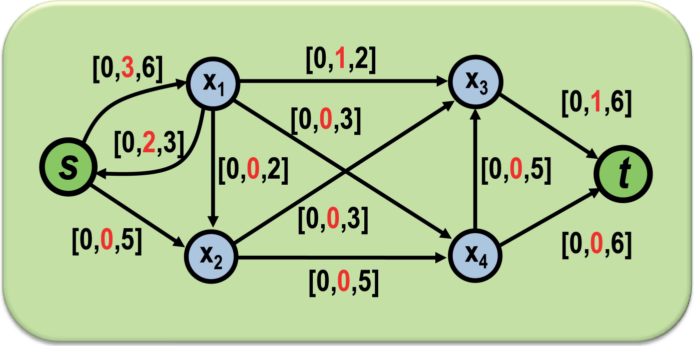
Histórico

Desse modo, uma iteração do laço interno do algoritmo MPM possui complexidade $O(m + n^2)$.

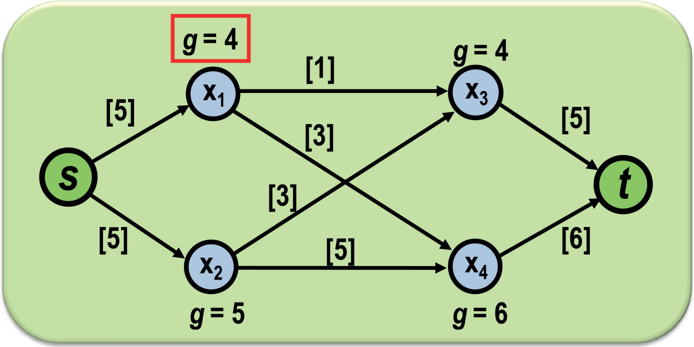
Como visto anteriormente, pela construção da rede em camadas, o número de iterações do laço externo é $O(n)$.

Portanto a complexidade do algoritmo MPM é $O(n^3)$.

Algoritmo MPM

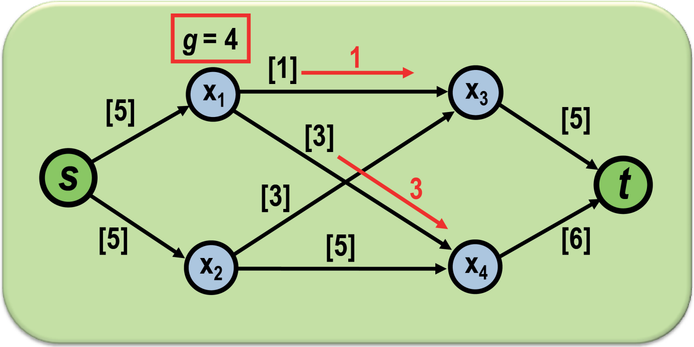


Rede R, em que já circula um fluxo viável.

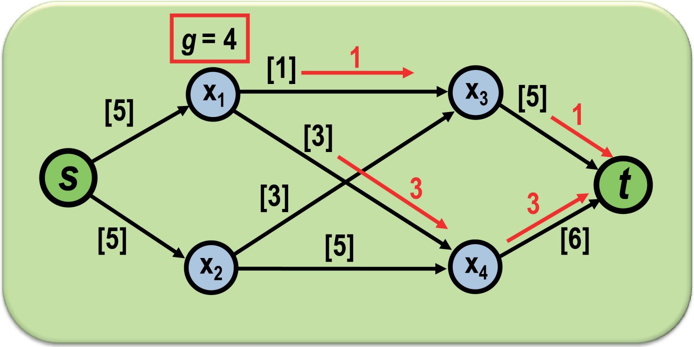


Primeira rede em camadas H produzida pelo algoritmo e os potenciais de cada vértice.

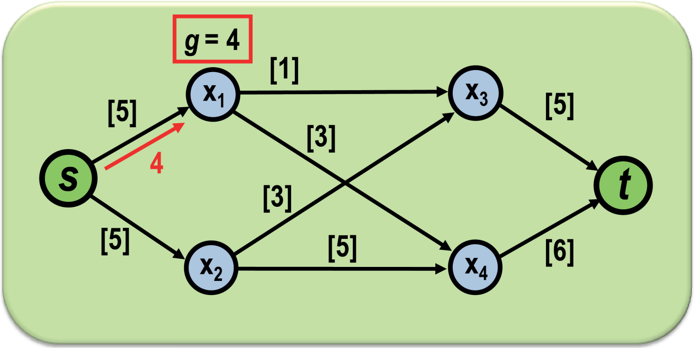
Algoritmo MPM



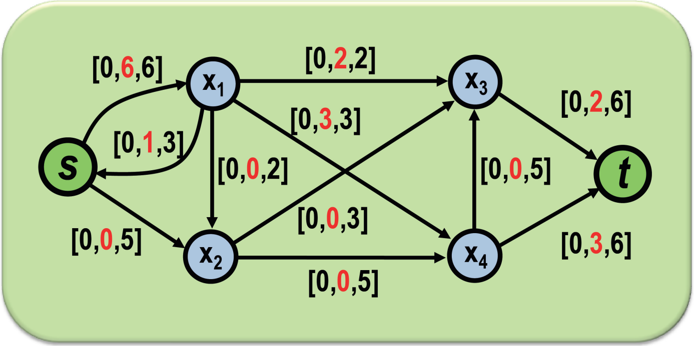
É escolhido o vértice x_1 como o vértice de menor potencial (4). Portanto, o algoritmo vai empurrar 4 unidades de fluxo de x_1 até t, saturando os arcos de saída de x_1 e depois puxar a mesma quantidade de fluxo de s a x_1.



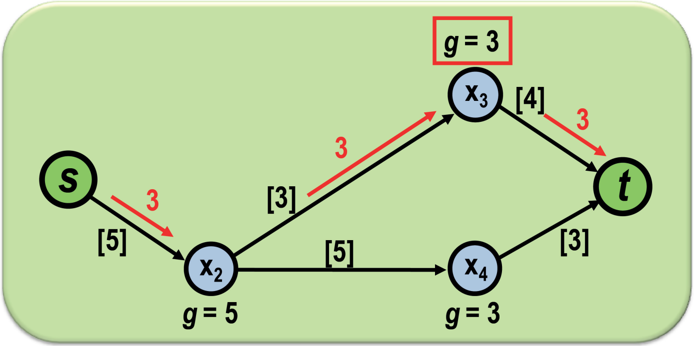
O fluxo que chega aos vértices x_3 e x_4 continua sendo escoado pela rede até chegar ao vértice t. São empurradas 1 unidade de fluxo a partir de x_3 e 3 unidades a partir de x_4.



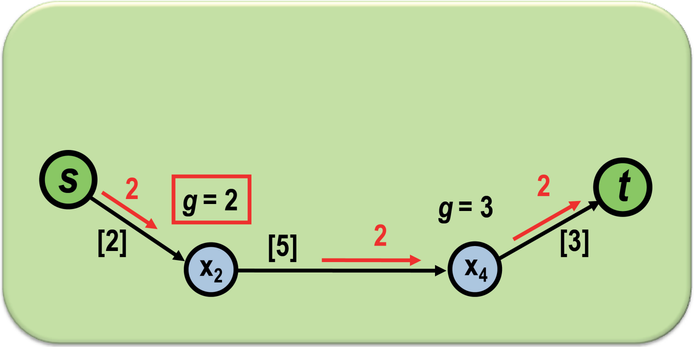
Puxa 4 unidades de fluxo a partir de s até x_1.



Rede R com fluxo atualizado de 4 unidades.

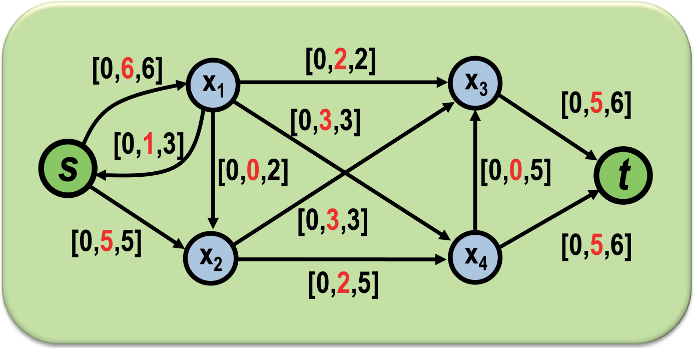


O vértice x_3 é escolhido. Primeira atualização da rede H após puxar e empurrar 3 unidades de fluxo.

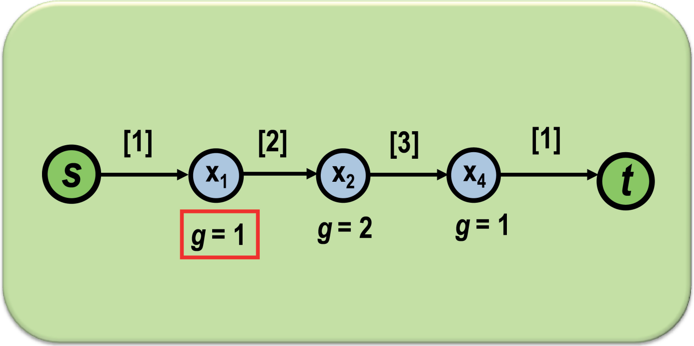


O vértice x_2 é escolhido. Segunda atualização da rede H após puxar e empurrar 2 unidades de fluxo.

A rede H se tornará desconexa e a primeira iteração do laço interno é encerrado.



Fluxo na rede R no início da segunda iteração.



Rede em camadas H construída no final da iteração anterior, com potenciais atualizados.

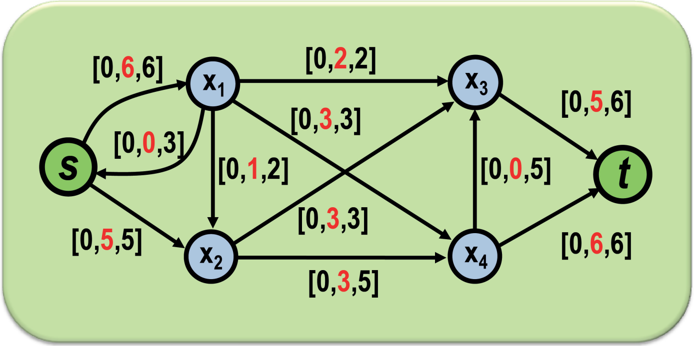
O vértice x_1 é escolhido.

Exemplo

Existe um único caminho de aumento de fluxo na nova rede rede H, cujo menor potencial é 1, portanto, é escolhido o vértice x_1.

Após esta atualização de fluxo a rede é desconectada: uma nova rede em camadas não pode ser construída pelo algoritmo que termina com o fluxo máximo exibido na figura a seguir.

Algoritmo MPM



Fluxo máximo em R.

Dúvidas?