

PCC173/PCC173/BCC463 - Otimização em Redes

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto



- 1 Coneectividade e Caminhos
- 2 Alcançabilidade
- 3 Conexidade ou Coneectividade

Aviso

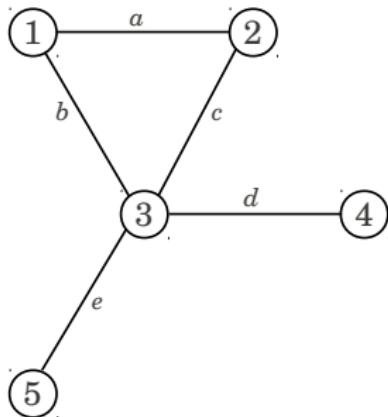
Fonte

Este material é baseado nos livros

- ▶ Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.
- ▶ Goldbarg, M. C., & Luna, H. P. L. (2005). *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Elsevier.

Licença

Este material está licenciado sob a Creative Commons BY-NC-SA 4.0. Isto significa que o material pode ser compartilhado e adaptado, desde que seja atribuído o devido crédito, que o material não seja utilizado de forma comercial e que o material resultante seja distribuído de acordo com a mesma licença.



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

Ex.: 1 - a - 2 - c - 3 - d - 4 - d - 3 - e - 5

ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

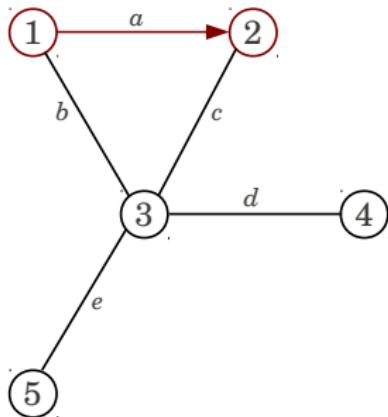
O passeio pode ser:

aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice.

Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1

Definições



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

Ex.: 1 - a - 2 - c - 3 - d - 4 - d - 3 - e - 5

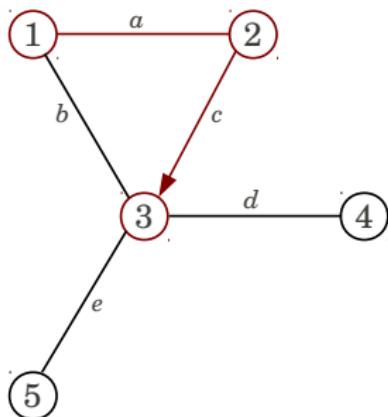
ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice.

Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

Ex.: 1 - a - 2 - c - 3 - d - 4 - d - 3 - e - 5

ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

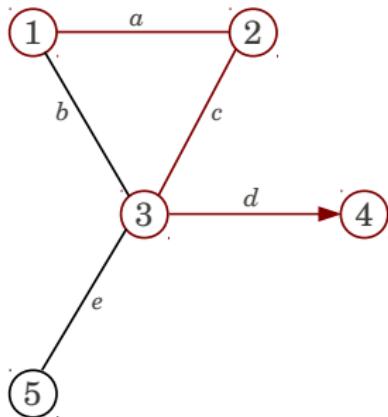
O passeio pode ser:

aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice.

Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1

Definições



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

Ex.: 1 - a - 2 - c - 3 - d - 4 - d - 3 - e - 5

ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

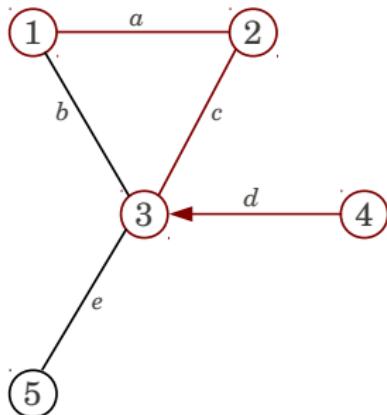
O passeio pode ser:

aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice.

Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1

Definições



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

Ex.: 1 - a - 2 - c - 3 - d - 4 - d - 3 - e - 5

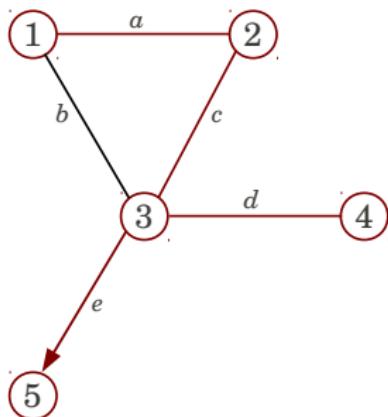
ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice.

Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

Ex.: 1 - a - 2 - c - 3 - d - 4 - d - 3 - e - 5

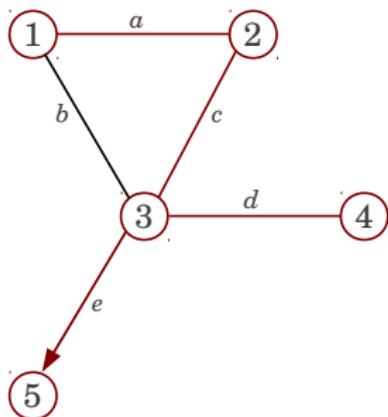
ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice.

Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

Ex.: 1 - a - 2 - c - 3 - d - 4 - d - 3 - e - 5

ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

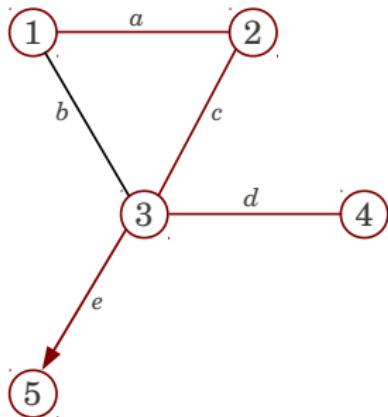
O passeio pode ser:

aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice.

Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1

Definições



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

Ex.: 1 - a - 2 - c - 3 - d - 4 - d - 3 - e - 5

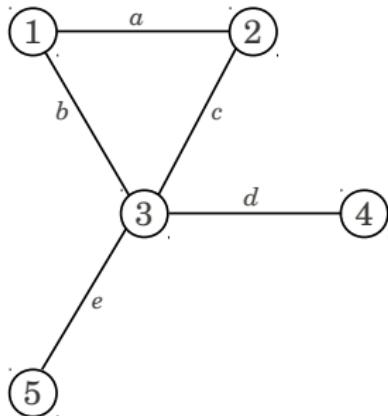
ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice.
Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1

Definições

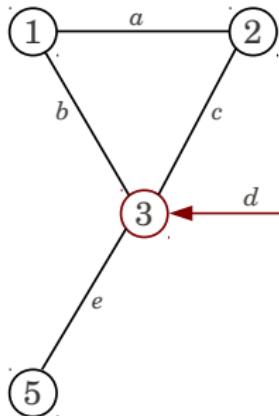


Cadeia

Um passeio sem repetição de **arestas**.

Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5

Definições

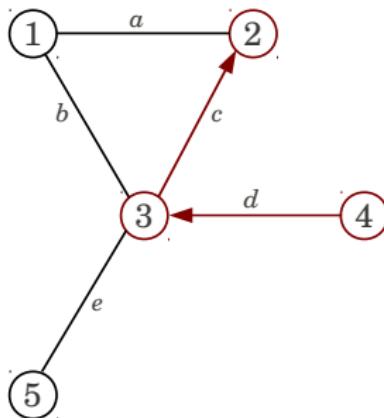


Cadeia

Um passeio sem repetição de **arestas**.

Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5

Definições

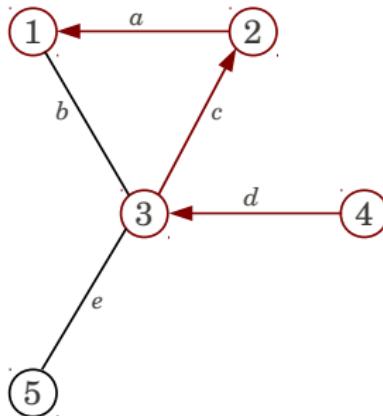


Cadeia

Um passeio sem repetição de **arestas**.

Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5

Definições

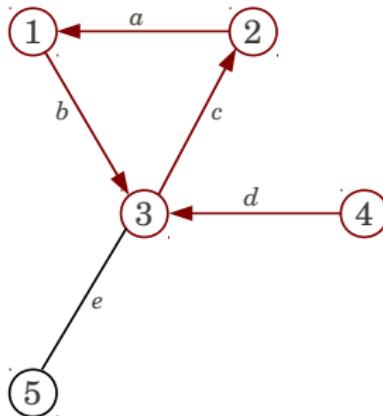


Cadeia

Um passeio sem repetição de **arestas**.

Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5

Definições

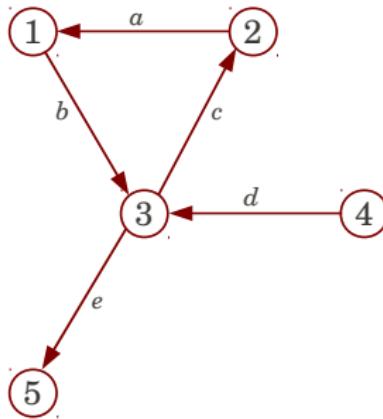


Cadeia

Um passeio sem repetição de **arestas**.

Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5

Definições

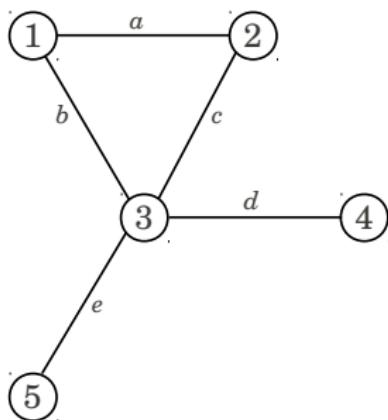


Cadeia

Um passeio sem repetição de **arestas**.

Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5

Definições



Caminho

Uma cadeia sem repetição de **vértices**.

Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

aberto: quando inicia e acaba em vértices diferentes (o caso acima)

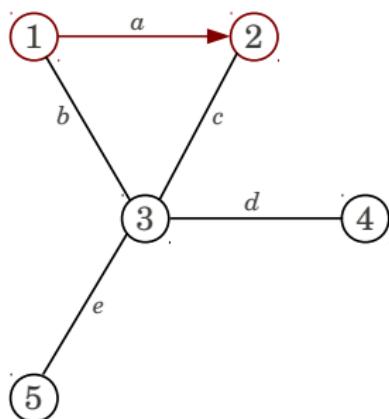
fechado: quando inicia e acaba no mesmo vértice. Ex.: 1-2-3-1.

Comprimento

grafo não ponderado: o número de arestas que o caminho inclui;

grafo ponderado: o somatório dos pesos das arestas que o caminho inclui.

Definições



Caminho

Uma cadeia sem repetição de **vértices**.

Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

aberto: quando inicia e acaba em vértices diferentes (o caso acima)

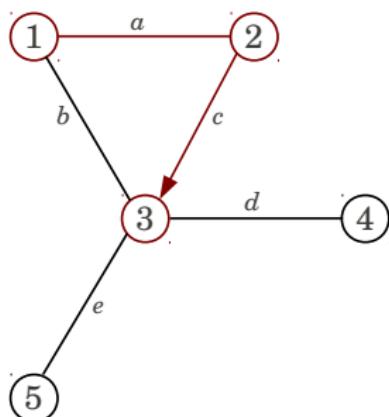
fechado: quando inicia e acaba no mesmo vértice. Ex.: 1-2-3-1.

Comprimento

grafo não ponderado: o número de arestas que o caminho inclui;

grafo ponderado: o somatório dos pesos das arestas que o caminho inclui.

Definições



Caminho

Uma cadeia sem repetição de **vértices**.

Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

aberto: quando inicia e acaba em vértices diferentes (o caso acima)

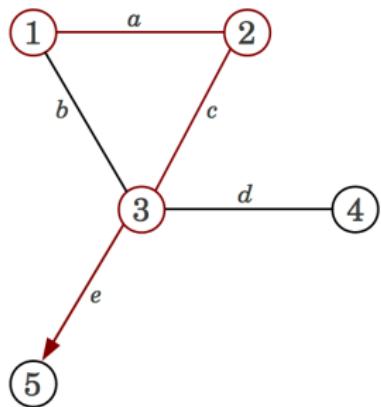
fechado: quando inicia e acaba no mesmo vértice. Ex.: 1-2-3-1.

Comprimento

grafo não ponderado: o número de arestas que o caminho inclui;

grafo ponderado: o somatório dos pesos das arestas que o caminho inclui.

Definições



Caminho

Uma cadeia sem repetição de **vértices**.

Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

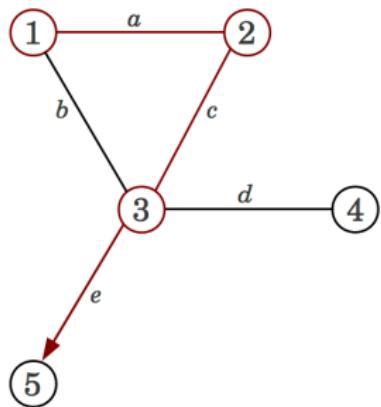
aberto: quando inicia e acaba em vértices diferentes (o caso acima)

fechado: quando inicia e acaba no mesmo vértice. Ex.: 1-2-3-1.

Comprimento

grafo não ponderado: o número de arestas que o caminho inclui;

grafo ponderado: o somatório dos pesos das arestas que o caminho inclui.



Caminho

Uma cadeia sem repetição de vértices.

Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

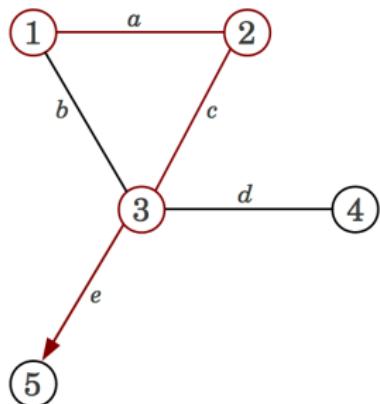
aberto: quando inicia e acaba em vértices diferentes (o caso acima)

fechado: quando inicia e acaba no mesmo vértice. Ex.: 1-2-3-1.

Comprimento

grafo não ponderado: o número de arestas que o caminho inclui;

grafo ponderado: o somatório dos pesos das arestas que o caminho inclui.



Caminho

Uma cadeia sem repetição de vértices.

Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

aberto: quando inicia e acaba em vértices diferentes (o caso acima)

fechado: quando inicia e acaba no mesmo vértice. Ex.: 1-2-3-1.

Comprimento

grafo não ponderado: o número de arestas que o caminho inclui;

grafo ponderado: o somatório dos pesos das arestas que o caminho inclui.

Recapitulando...

Passeio

Sequência finita de vértices e arestas.

Cadeia

Um passeio que não repete arestas.

Caminho

Uma cadeia sem repetição de vértices.

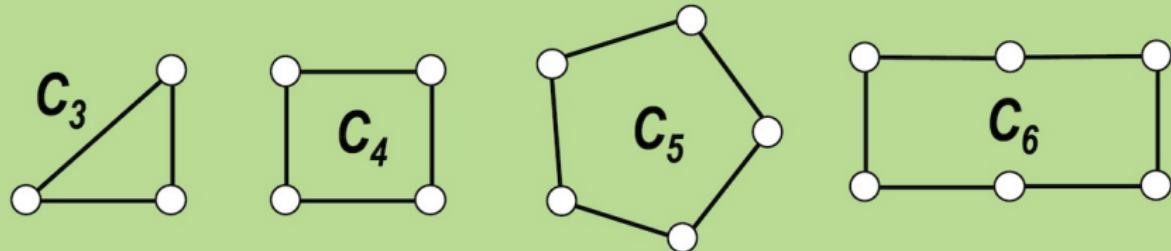
Ciclos

Definição

Um **ciclo** é um caminho fechado.

Alguns autores, utilizam o termo *círculo* para o caso de grafos orientados.

Grafo Ciclo: Um grafo ciclo C_n é um grafo com n vértices formado por apenas um ciclo passando por todos os vértices.



Alcançabilidade

Definição

Um vértice w é **alcançável** a partir do vértice v se houver um caminho entre w e v .

Definição

O conjunto de vértices alcançáveis a partir de v é, portanto, formado pelos sucessores de v , os sucessores dos sucessores e assim por diante.

Alcançabilidade

Definição

Um vértice w é **alcançável** a partir do vértice v se houver um caminho entre w e v .

Definição

O conjunto de vértices alcançáveis a partir de v é, portanto, formado pelos sucessores de v , os sucessores dos sucessores e assim por diante.

Transitividade

Se w é alcançável a partir de v ;
e se x é alcançável de w ;
então x é alcançável a partir de v .

Transitividade

Relação de Alcançabilidade é transitiva.

Alcançabilidade

Transitividade

Se w é alcançável a partir de v ;
e se x é alcançável de w ;
então x é alcançável a partir de v .

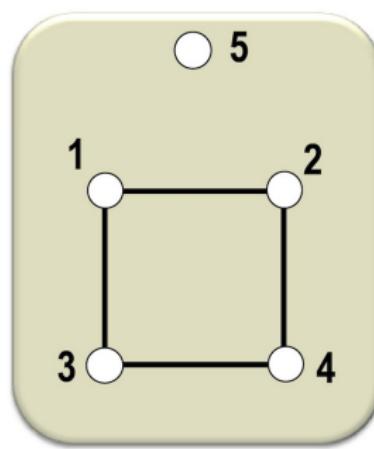
Transitividade

Relação de Alcançabilidade é transitiva.

Fecho Transitivo de um Vértice - Grafo Não Direcionado

Definição

O **Fecho Transitivo** de um vértice v (denotado por $\hat{\Gamma}(v)$) é o conjunto dos vértices de um grafo alcançáveis a partir de v .



$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}(1) &= \{2, 3, 4\} \\ \hat{\Gamma}(5) &= \{\}\end{aligned}$$

Fecho Transitivo de um Vértice - Grafo Direcionado

Fecho Transitivo Direto

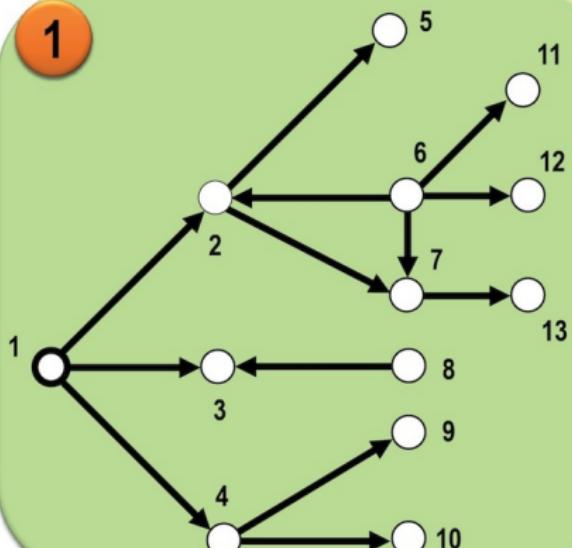
O **Fecho Transitivo Direto** de um vértice v (denotado por $\hat{\Gamma}^+(v)$) é o conjunto dos vértices de um grafo alcançáveis a partir de v . Os vértices em $\hat{\Gamma}^+(v)$ são chamados de **descendentes** de v .

Fecho Transitivo Indireto

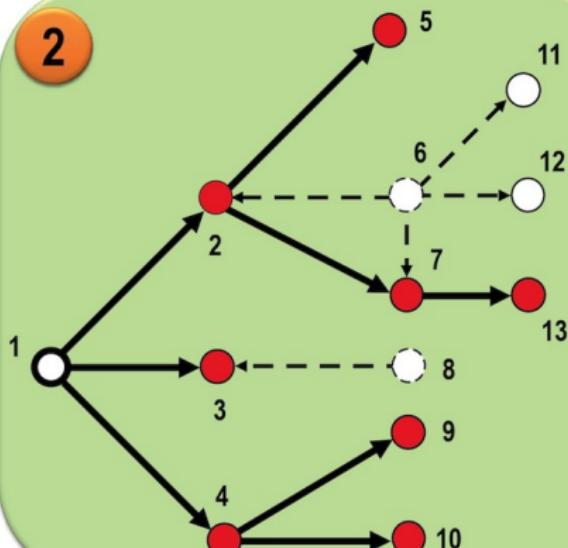
O **Fecho Transitivo Indireto** de um vértice v (denotado por $\hat{\Gamma}^-(v)$) é o conjunto dos vértices de um grafo a partir dos quais v é alcançável. Os vértices em $\hat{\Gamma}^-(v)$ são chamados de **ascendentes** de v .

Fecho Transitivo Direto e Indireto

1



2



$$\hat{\Gamma}^+(1) = \{2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 13\}$$

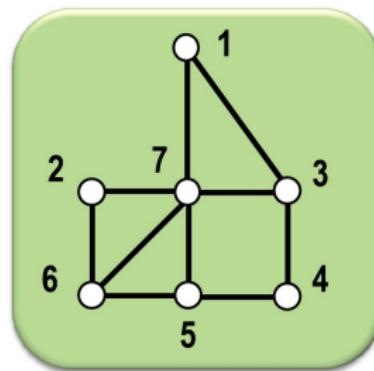
$$\hat{\Gamma}^-(10) = \{1, 4\}$$

Conexidade em Grafos Não Direcionados

Definição

Em um GND conexo, todos os vértices são alcançáveis a partir de qualquer outro.

Em um GND conexo, sempre é possível fazer um passeio fechado que inclua todos os vértices.



Conexidade em Grafos Direcionados

Definição

Se G é um grafo direcionado, então é considerado conexo quando seu grafo subjacente não direcionado é conexo.

O grafo subjacente não direcionado é o grafo resultante da de G quando a orientação dos arcos é ignorada.

Subgrafos

Definição

Um grafo $G_s = (V_s, A_s)$ é dito ser um **subgrafo** de um grafo $G = (V, A)$ se todos os vértices e todas as arestas de G_s estão em G , ou seja, se $V_s \subseteq V$ e $A_s \subseteq A$

Subgrafo Maximal

Um subgrafo G_s de G é dito maximal em relação a uma propriedade τ se não for um subgrafo de nenhum outro subgrafo de G que também possua a propriedade τ .

Propriedades

- ▶ Todo grafo é subgrafo de si próprio;
- ▶ O subgrafo G_{s2} de um subgrafo G_s de G também é subgrafo de G .

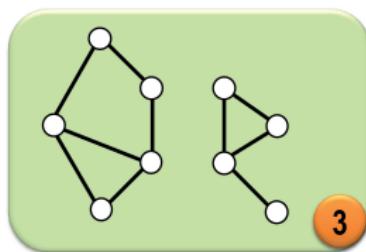
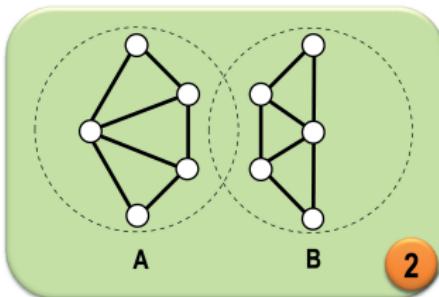
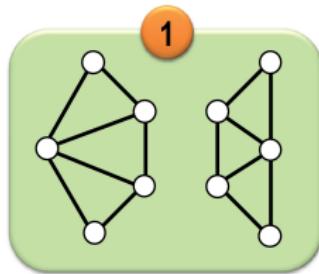
Conexidade

Componentes Conexas

Um componente conexo de um grafo G é um subgrafo conexo maximal de G .

O número de componentes conexas em G é denotado por c ;

Grafos conexos possuem apenas um componente conexo.

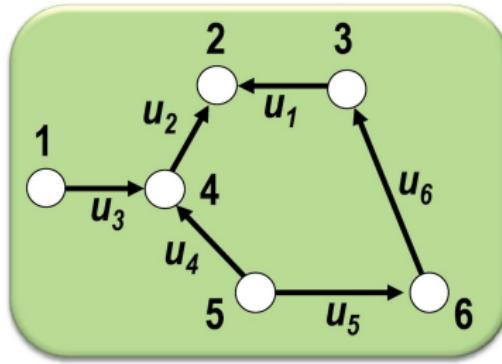


Grafo conexo, componentes conexas e subgrafos não maximais.

Conexidade em Grafos Direcionados

Grafo Simplesmente Conexo: **s-conexo**

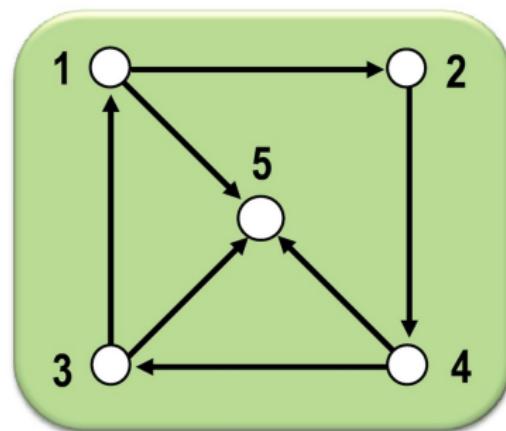
O grafo subjacente não-direcionado obtido através da substituição de todas as arestas de G por arestas não direcionadas é um grafo conexo.



Conexidade em Grafos Direcionados

Grafo Semi-Fortemente Conexo: sf-conexo

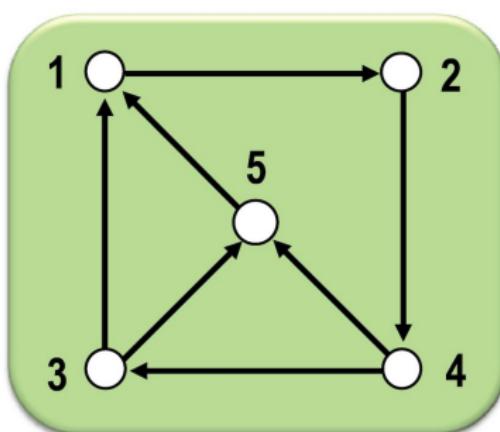
Para cada par de vértices (v_1, v_2) , existe um caminho de v_1 para v_2 ou de v_2 para v_1 .



Conexidade em Grafos Direcionados

Grafo Fortemente Conexo: f-conexo

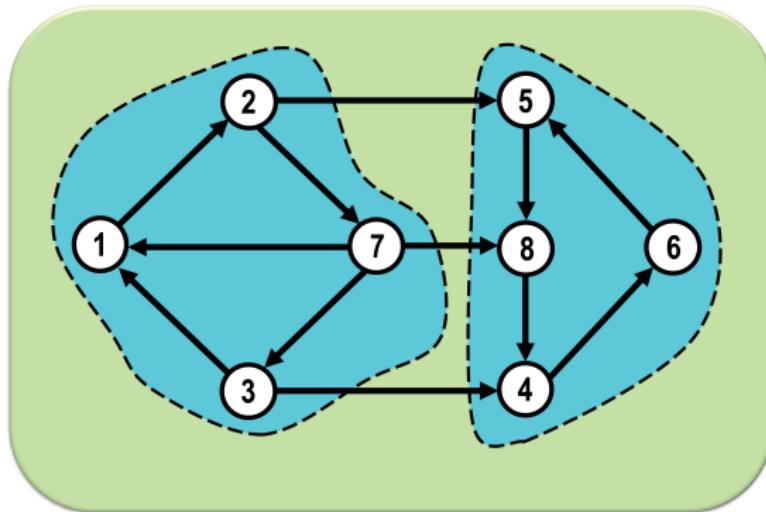
Para cada par de vértices (v_1, v_2) , existe um caminho direcionado de v_1 para v_2 e de v_2 para v_1 .



Conexidade em Grafos Direcionados

Componentes Fortemente Conexos

Em um grafo direcionado, componentes fortemente conexos são subgrafos maximais f-conexos.



Conexidade ou Conectividade em Vértices

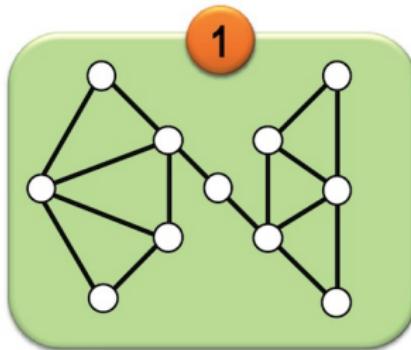
Definição

A **conexidade** ou **conectividade** em vértices $\kappa(G)$ de um grafo $G = (V, E)$ é o menor número de vértices cuja remoção desconecta G ou o reduz a um único vértice.

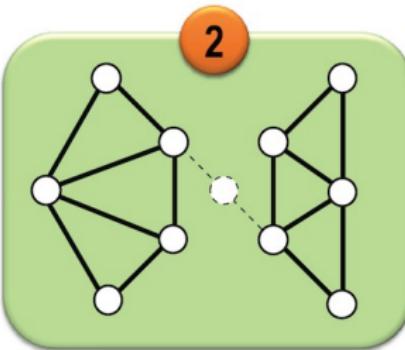
Atenção

- Conceito aplicado a **Grafos Não Direcionados**;
- Indica o quanto um grafo é conexo.

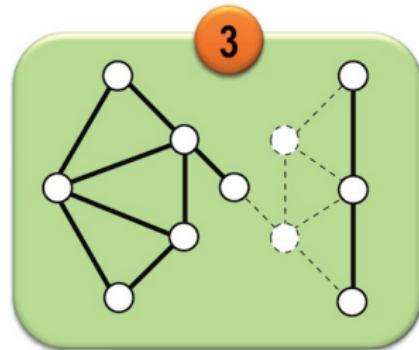
Conexidade ou Conectividade em Vértices



1



2



3

Exemplos de remoções de conjuntos de vértices que desconectam o grafo.
Neste caso, $\kappa(G) = 1$ (figura 2).

Conexidade ou Conectividade em Vértices

Grafos Completos

Para grafos completos com n vértices, $\kappa(K_n) = n - 1$.

Grafos Não Completos

Para grafos não completos haverá um par (v_1, v_2) de vértices não adjacentes, então temos que:

$$\kappa(G) \leq n - 2 \quad \forall G \neq K_n$$

Limite superior para $\kappa(G)$ em qualquer grafo:

$$\kappa(G) \leq \delta(G)^a$$

$^a\delta(G)$: menor grau em um GND.

Conexidade ou Conectividade em Vértices

Grafos Completos

Para grafos completos com n vértices, $\kappa(K_n) = n - 1$.

Grafos Não Completos

Para grafos não completos haverá um par (v_1, v_2) de vértices não adjacentes, então temos que:

$$\kappa(G) \leq n - 2 \quad \forall G \neq K_n$$

Limite superior para $\kappa(G)$ em qualquer grafo:

$$\kappa(G) \leq \delta(G)^a$$

^a $\delta(G)$: menor grau em um GND.

Conexidade ou Conectividade em Vértices

Grafos Completos

Para grafos completos com n vértices, $\kappa(K_n) = n - 1$.

Grafos Não Completos

Para grafos não completos haverá um par (v_1, v_2) de vértices não adjacentes, então temos que:

$$\kappa(G) \leq n - 2 \quad \forall G \neq K_n$$

Limite superior para $\kappa(G)$ em qualquer grafo:

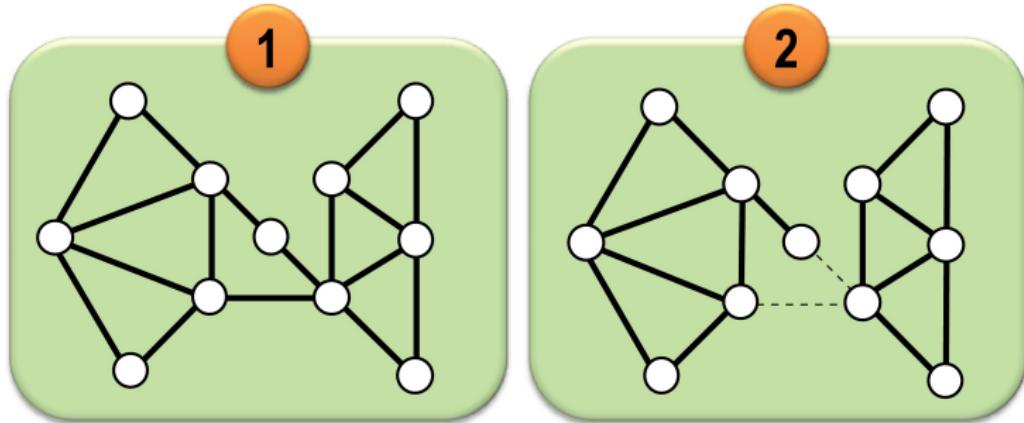
$$\kappa(G) \leq \delta(G)^a$$

^a $\delta(G)$: menor grau em um GND.

Conexidade ou Conectividade em Arestas

Definição

A **conexidade** ou **conectividade** em arestas $\lambda(G)$ de um grafo $G = (V, E)$ é o menor número de arestas cuja remoção desconecta G .



Exemplo de remoção de conjuntos de aresta que desconectam o grafo.
Neste caso, $\lambda(G) = 2$ (figura 2).

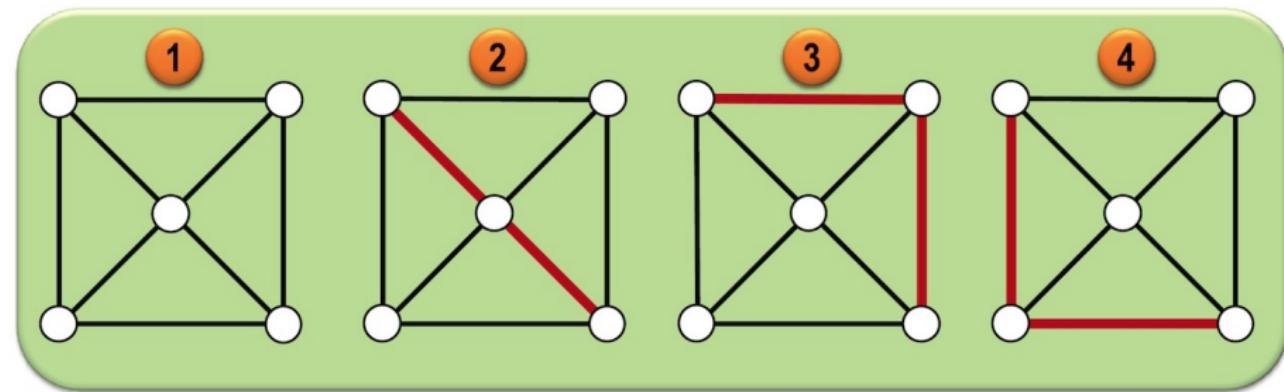
k -Conexidade ou k -Conectividade

Definição

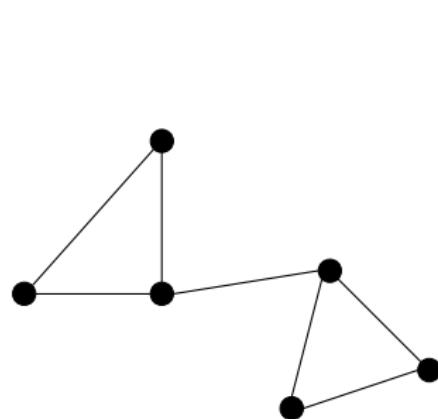
Um grafo $G = (V, E)$ é **k -conexo** se e somente se para todo para $v, w \in V, v \neq w$ existirem ao menos k percursos disjuntos.

Caminhos Disjuntos

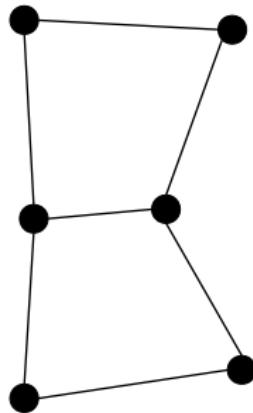
Dois percursos entre os vértices v e w de um grafo são **disjuntos** se não houver interseção de arestas.



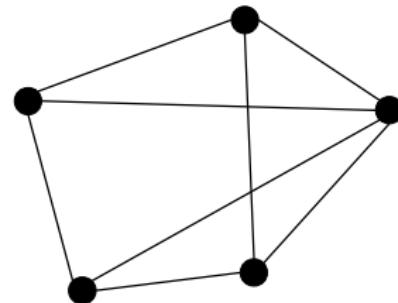
k -Conexidade ou k -Conectividade



1-Conexo



2-Conexo



3-Conexo

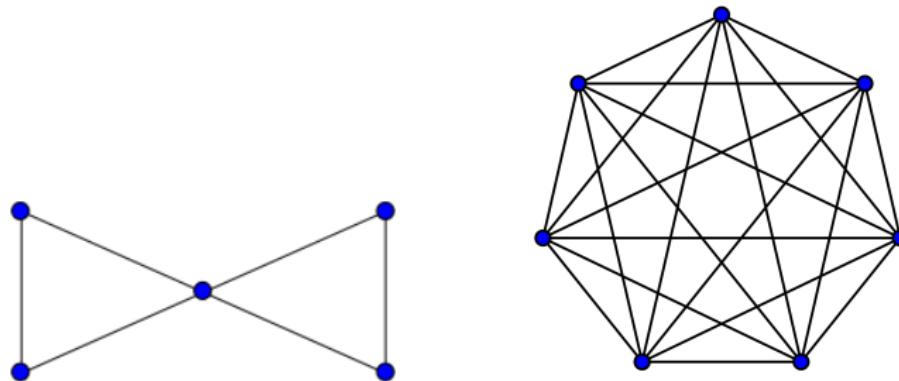
Propriedades

Para todo grafo k -conexo:

$$\kappa(G) \leq \delta(G)$$

$$\kappa(G) \leq k$$

k -Conexidade ou k -Conectividade



Exemplos

Grafo borboleta: 2-conexo

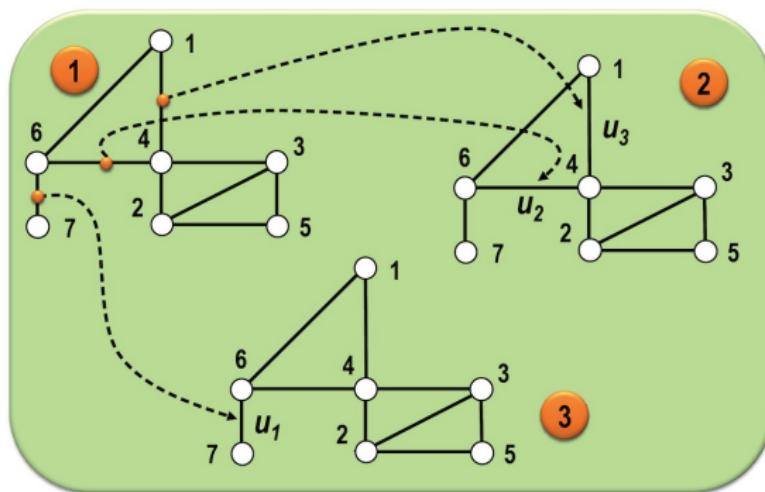
K_7 : 6-conexo, mas também é 1-conexo, 2-conexo, 3-conexo, 4-conexo, 5-conexo...

$$k \geq \kappa(G) \leq \delta(G)$$

Articulação

Aresta de articulação (ou Ponte)

Uma **aresta de articulação** de um grafo G é uma aresta cuja remoção resulta na desconexão de G .

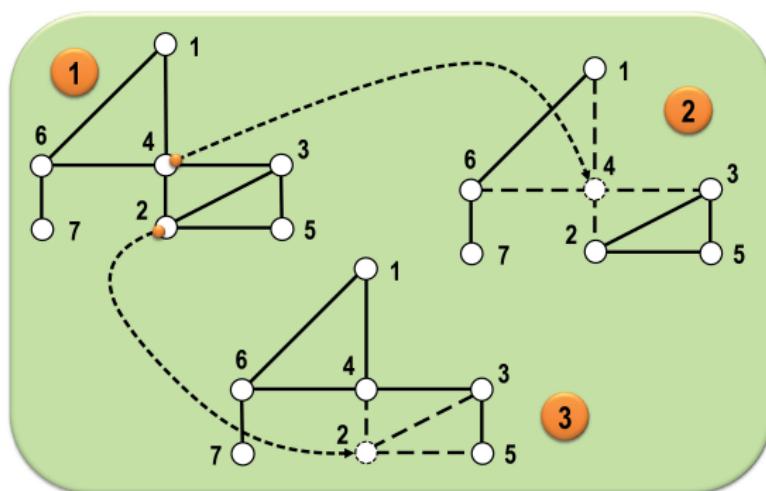


A aresta u_1 é de articulação. As arestas u_3 e u_4 não são.

Articulação

Vértice de articulação

Um **vértice de articulação** de um grafo G é um vértice cuja remoção resulta na desconexão de G .



O vértice 4 é de articulação, porém, o vértice 2 não é.

Dúvidas?

