PCC173/BCC463 - Otimização em Redes

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

Conteúdo

Aviso

Fonte

Este material é baseado nos livros

- Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.
- Goldbarg, M. C., & Luna, H. P. L. (2005). *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Elsevier.

Licença

Descrição

Os chamados **Problemas de Fluxo em Redes** abordam o processo de produtos originados em um ponto de oferta e consumidos em um ponto de demanda dentro de uma rede de interligações possíveis.

Estes problemas normalmente ocorrem dentro de plantas industriais, sistemas de comunicação e de transporte, de distribuição de água, energia elétrica, dados e etc.

Contudo, servem de modelo para inúmeras outras situações absolutamente diversas que lhe são assemelhadas por abstração.

Descrição

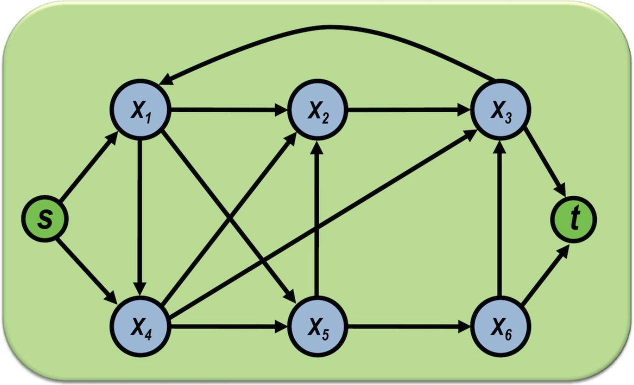
Em Problemas de Fluxo em Redes, normalmente:

- A oferta de cada produto, bem como sua demanda, possui um valor conhecido;
- A distribuição de produtos permite pontos intermediários, tais como depósitos ou centros de concentração e distribuição;
- As interligações podem possuir restrições de capacidade de tráfego e custos variados.

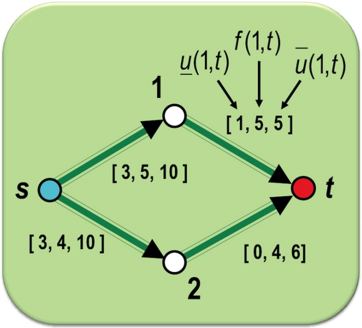
Redes

Definição

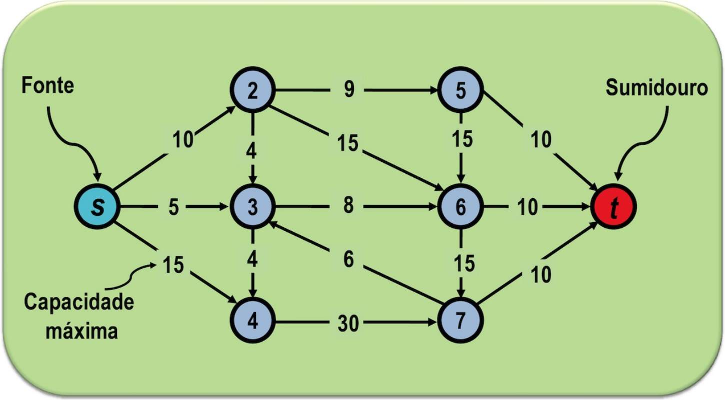
- Uma rede $R = (V, A, F, U)$ é definida por um **grafo direcionado** $G = (V, A)$ atravessado por um **fluxo**
  - Vértice **s**: *source* ou fonte, emissor do fluxo;
  - Vértice **t**: *terminal* ou sumidouro, consumidor do fluxo.
- Um fluxo F pode ser representado por $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ circulando pelos m arcos da rede ou por $F = \{f(i, j)\}$, $i, j \in V$;
- O conjunto $U = \{u(i, j)\}$, $i, j \in V$ é o conjunto de limites de fluxo associados aos arcos de A.
  - $\bar{u}(i, j)$ é o limite máximo do fluxo;
  - $\underline{u}(i, j)$ é o limite mínimo do fluxo;
  - Caso não exista limite inferior, considera-se zero (ou -∞, dependendo do contexto);
  - Caso não exista limite superior, considera-se $+\infty$.



Grafo subjacente a uma Rede R.
Os vértices s e t são a fonte e o sumidouro, respectivamente.



Rotulação com limites de fluxo.



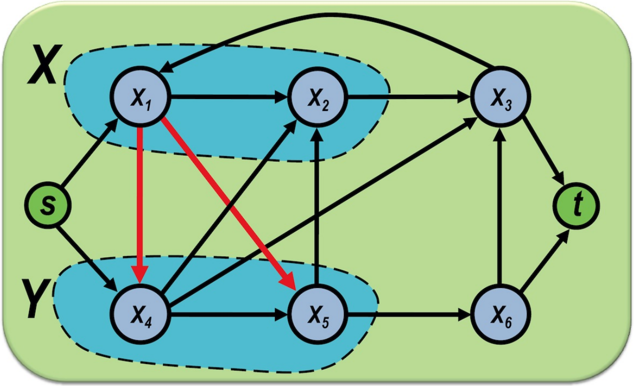
Exemplo de uma rede em que há apenas limite máximo para o fluxo.

Fluxo entre Conjuntos de Vértices

Definição

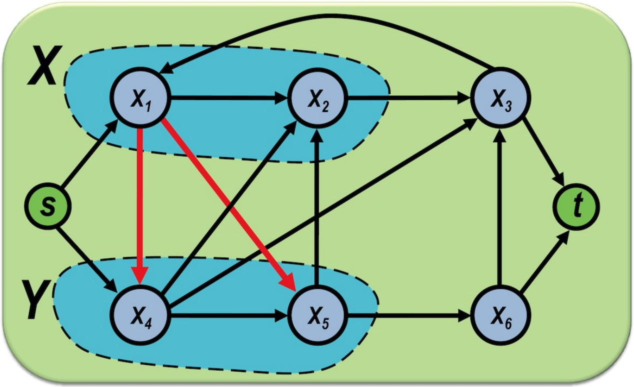
- Dados dois conjuntos X, $Y \subset V$ de vértices de uma rede, tal que $X \cap Y = \emptyset$, o fluxo entre eles ocorre do conjunto X para o conjunto Y e vice-versa;
- O fluxo do conjunto X para o conjunto Y, denotado por $f(X, Y)$ pode ser obtido pela expressão:

$$f(X,Y) = \sum_{e \in S} f_e \qquad S = \{e|(x_i, x_j), x_i \in X, x_j \in Y\}$$



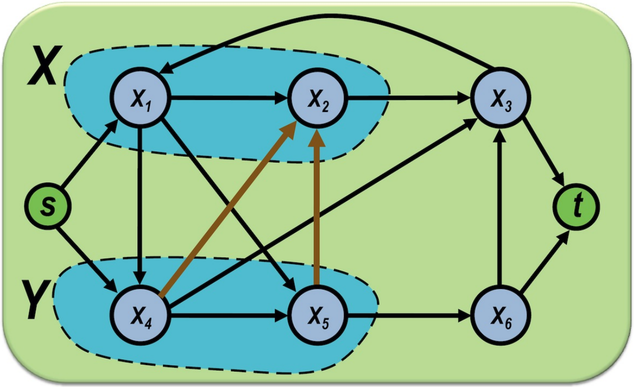
Conjuntos X e $Y \in R$.

Fluxo entre Conjuntos de Vértices



$$f(X,Y) = f(x_1,\, x_4) + f(x_1,\, x_5).$$

Fluxo entre Conjuntos de Vértices



$$f(Y, X) = f(x_4, x_2) + f(x_5, x_2).$$

1a. lei de *Kirchoff*

- Para todo fluxo conservativo em uma rede, o fluxo que chega a um vértice de passagem deve ser igual ao fluxo que sai deste mesmo vértice;
- Os vértices de uma rede que atendem a esta lei são denominados vértices conservativos.

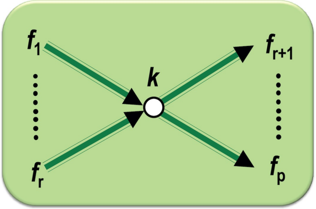


Ilustração da 1a. Lei de *Kirchoff*.

1a. lei de *Kirchoff*

$$\sum(f_1 + \ldots + f_r) = \sum(f_{r+1} + \ldots + f_p)$$

ou

$$\sum_{i \in \Gamma^-(x)} f(i, x) = \sum_{j \in \Gamma^+(x)} f(x, j)$$

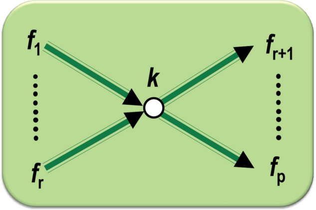


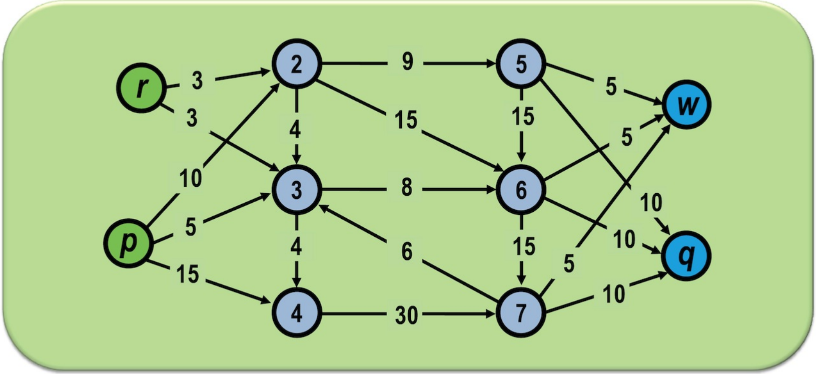
Ilustração da 1a. Lei de *Kirchoff*.

Transformações

Os vértices sumidouro e fonte não atendem a 1a. Lei de *Kirchoff*. Todavia, a rede pode ser transformada para que estes vértices também atendam a esta lei:

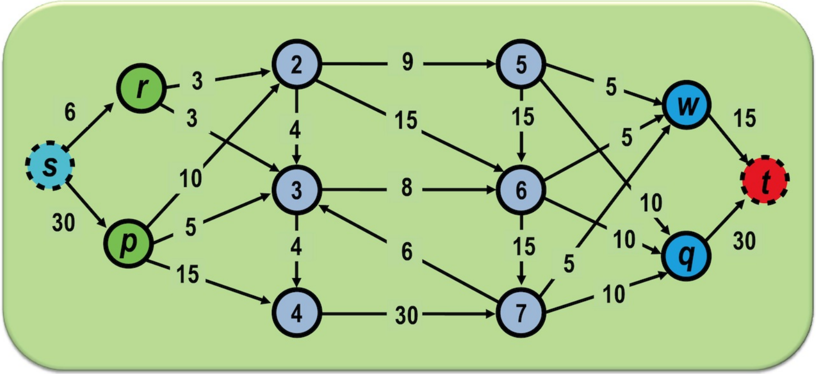
- Transformação 1: redução de todos os vértices de oferta em um único vértice fonte e de todos os vértices de consumo em um único vértice sumidouro;
- Transformação 2: adaptação dos vértices fonte e sumidouro em vértices conservativos.

Conservação de Fluxo



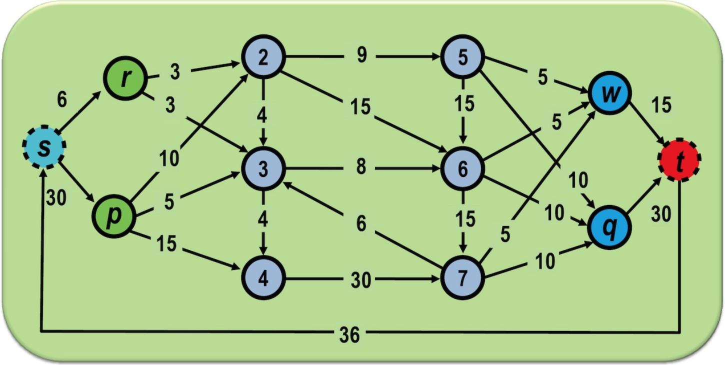
Rede original.

Conservação de Fluxo



Primeira transformação: rede com os vértices de demanda e oferta unificados.

Conservação de Fluxo



Adaptação dos vértices s e t.
A capacidade do arco é o menor valor entre oferta (36) e demanda (45).
Segunda transformação: todos os vértices atendem à lei de conservação do fluxo.

Elementos

Os diferentes problemas de fluxo em redes são caracterizados por possuírem elementos em comum em sua formulação:

- Restrições de capacidade dos arcos;
- Restrições de equilíbrio de fluxo em cada vértice.

Diferentes funções objetivo determinam as particularidades de cada problema.

Mais comumente, encontramos como objetivo determinar o **Fluxo Máximo** e o **Fluxo de Custo Mínimo**.

Consideremos a variável de decisão x_{ij} o fluxo que irá circular pelo arco $(i, j) \in A$ para os próximos slides.

Restrições de Capacidade dos Arcos

Todos os arcos de uma rede são capacitados, mesmo quando os limites são $-\infty$ ou $+\infty$.

Representaremos o limite inferior de fluxo do arco $(i, j) \in A$ por l_{ij} e o superior por L_{ij}.

Desta forma, as restrições de limite de fluxo são escritas como a seguir:

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq L_{ij}, (i, j) \in A$$

Restrições de Equilíbrio de Fluxo em Cada Vértice

Como visto, os vértices de uma rede devem ser conservativos em relação ao fluxo, exceto pelos vértices fonte e sumidouro.

Desta forma, as restrições de equilíbrio de fluxo em cada vértice são escritas como a seguir:

$$\sum_{(k,i) \in A} x_{ki} - \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = 0$$

Funções Objetivo

Fluxo Máximo:

$$max\ z = \sum_{(s,j)\ \in\ A} x_{sj}$$

Fluxo de Custo Mínimo:

$$min\ z = \sum_{(i,j)\ \in\ A} c_{ij}x_{ij}$$

Formulação Geral

Em muitas ocasiões é interessante considerar o equilíbrio de fluxo associado a um vetor de oferta ou de demanda em cada vértice.

A formulação assim elaborada não necessita da consideração explícita de um vértice fonte e um vértice sumidouro, bem como libera a necessidade da consideração de arcos artificiais que liguem os vértices de oferta a uma fonte e os de demanda a um sumidouro.

De fato, a essência da modelagem por fluxo em rede permanece preservada; contudo, para determinados fins, essa abordagem é mais eficiente.

Nesse caso, a equação de equilíbrio de fluxos poderá ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix}\text{Fluxo que}\\ \text{chega ao vértice}\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\text{Fluxo produzido}\\ \text{pelo vértice}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\text{Fluxo que}\\ \text{sai do vértice}\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\text{Fluxo consumido}\\ \text{pelo vértice}\end{Bmatrix}$$

Formulação Geral

Se denominarmos genericamente por d_i o balanço final entre o que é produzido e consumido dentro de cada vértice, então podemos reescrever a formulação geral do problema de fluxo em redes da seguinte forma:

$$min\ z = \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

$$sujeito\ a:$$

$$\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(k,i)\in A} x_{ki} = d_i \quad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq L_{ij}\ \forall\ (i,j) \in A \tag{3}$$

Formulação Restrita

De um modo geral, o problema de fluxo em uma rede com $n = n' + 2$ vértices, onde n' representa o número de vértices reais e n o número de vértices da rede equilibrada, poderá ser formulado também como:

$$min\ z = \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

$$sujeito\ a:$$

$$\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(k,i)\in A} x_{ki} = 0 \quad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq L_{ij}\ \forall\ (i,j) \in A \tag{3}$$

Dúvidas?