PCC173/BCC463 - Otimização em Redes

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

Conteúdo

Aviso

Fonte

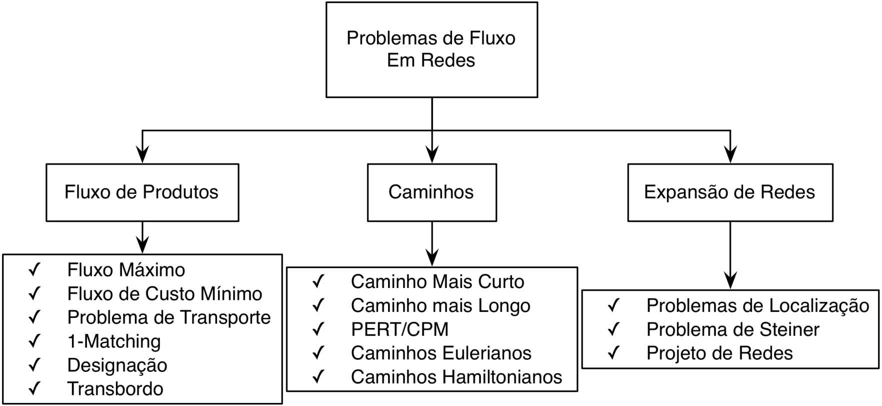
Este material é baseado nos livros

- Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.
- Goldbarg, M. C., & Luna, H. P. L. (2005). *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Elsevier.

Licença

Este material está licenciado sob a Creative Commons BY-NC-SA 4.0. Isto significa que o material pode ser compartilhado e adaptado, desde que seja atribuído o devido crédito, que o material não seja utilizado de forma comercial e que o material resultante seja distribuído de acordo com a mesma licença.

Taxonomia de Problemas de Fluxo em Redes



Taxonomia de problemas de fluxo em redes.

Problemas Relacionados a Caminhos

Importância

Dentre as subestruturas de grafo que oferecem solução para problemas aplicados, os caminhos se destacam especialmente pelo potencial associado aos problemas de trânsito, transporte em geral e localização em sistemas discretos.

A variedade de situações é muito grande e, consequentemente, os problemas podem ser mais ou menos complexos, inclusive do ponto de vista computacional.

Em vista disto, há um grande número de algoritmos propostos para a determinação de caminhos nas situações as mais diversas, que vão desde problemas irrestritos até os que envolvem restrições as mais variadas, utilizando algoritmos exatos ou heurísticos.

A noção de distância é definida e a ela são associadas operações algébricas que podem ser utilizadas na determinação de valores relacionados aos caminhos.

Problemas Relacionados a Caminhos

Problema de Caminho Mais Curto (PCMC)

O caminho mais curto entre dois vértices u e v de um grafo é uma sequência de vértices e arestas que, passando por vértices distintos, liga u a v de forma a acumular o menor comprimento, ou distância.

O comprimento de um caminho pode estar relacionado à quantidade de arestas utilizadas (grafos não ponderados), ou à soma dos pesos das arestas utilizadas (grafos ponderados).

Este problema pode ser resolvido em tempo determinístico polinomial em grafos sem ciclos negativos.

O PCMC está intimamente relacionado à solução de problemas combinatórios como os de roteamento, programação e sequenciamento de tarefas, entre outros.

Problema de Caminho Mais Longo (PCML)

O caminho mais longo entre dois vértices u e v de um grafo é uma sequência de vértices e arestas que, passando por vértices distintos, liga u a v de forma a acumular o maior comprimento, ou distância.

Novamente, o comprimento de um caminho pode estar relacionado à quantidade de arestas utilizadas (grafos não ponderados), ou à soma dos pesos das arestas utilizadas (grafos ponderados).

Ao contrário do PCMC, este problema não pode ser resolvido em tempo determinístico polinomial em grafos arbitrários, a menos que P = NP, dado seu caráter NP-Difícil.

Entretanto, o PCML possui solução em tempo linear para grafos direcionados acíclicos, com aplicação na determinação de caminhos críticos por exemplo.

Tipos de Problemas de Caminho Mais Curto

Single-Pair Shortest Path Problem (SPSPP)

Consiste em determinar o menor caminho entre um único par de vértices do grafo.

Algoritmos: A^*.

Single-Source Shortest Path Problem (SSSPP)

Consiste em determinar o menor caminho entre um vértice de origem v e todos os demais vértices do grafo.

Algoritmos: Dijkstra, Bellman-Ford, Busca Em Largura (GND), etc.

Tipos de Problemas de Caminho Mais Curto

Single-Destination Shortest Path Problem (SDSPP)

Consiste em determinar o menor caminho entre todos os vértices de um grafo direcionado e um único vértice de destino.

Pode ser transformado no SSSPP invertendo as orientações dos arcos do grafo.

Algoritmos: Os mesmos do SSSPP, depois de efetuada a transformação dos arcos.

All-Pairs Shortest Path Problem (APSPP)

Consiste em determinar os menores caminhos entre todos pares de vértices do grafo.

Algoritmos: Floyd-Warshall, Johnson, Thorup, etc.

Observação

As generalizações do problema original possuem algoritmos mais eficientes.

Formulação PLI

As variáveis de decisão x_{ij} indicam se a aresta que liga os vértices i e j está incluída ou não no menor caminho.

Os valores c_{ij} indicam o custo da aresta que liga os vértices i e j.

Os vértices o e d representam os vértices de início e de término do caminho.

A função objetivo visa minimizar o custo das arestas utilizadas no caminho.

As restrições são relacionadas à formação de um caminho: exceto pelos vértices o e d, o número de arestas que chegam deve ser igual ao número de arestas que saem.

As variáveis são binárias, indicando a pertinência das arestas à solução, portanto, adicionamos restrições para este fim.

Formulação PLI

$$min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

$$sujeito\ a:$$

$$\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(k,i)\in A} x_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = o \\ 0 & \text{se } i \neq o \text{ e } i \neq d \\ -1 & \text{se } i = d \end{cases} \tag{2}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}\ (i,j) \in A \tag{3}$$

Problema de Caminho Mais Curto

Variantes

Os caminhos em grafos podem ser associados à restrições diversas, especialmente quando representam problemas do mundo real.

Restrições comuns dizem respeito à presença ou não de determinados vértices ou arestas na solução.

Outro conjunto de restrições comuns aborda intervalos de tempo específicos para visita de vértices ou arestas.

Finalmente, problemas de caminho mais curto se associam a problemas de roteamento, caracterizando-se um grande número de situações definidas por restrições relacionadas à disponibilidade de combustível, capacidade dos veículos, pagamento de pedágio, recolhimento de bônus, etc.

Problema de Caminho Mais Curto com Janelas de Tempo

Definição

O caminho mais curto com janelas de tempo é o menor caminho entre um par de vértices v e w, que atende as condições do rótulo $[t_i^{min}, t_i^{max}]$ para cada vértice i visitado.

Os valores dos rótulos referem-se a intervalos de tempo para os quais é permitido visitar cada vértice.

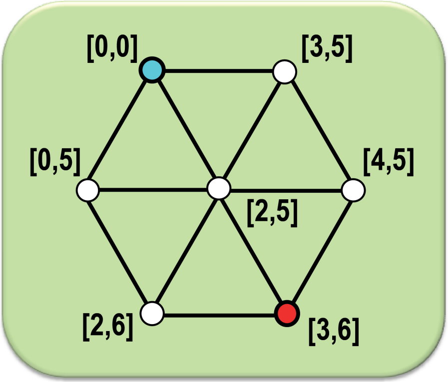
Cada arco (i, j) no grafo possui um custo c_{ij} de percurso e um tempo t_{ij} necessário para percorrê-lo.

Há também um custo w por unidade de tempo em espera.

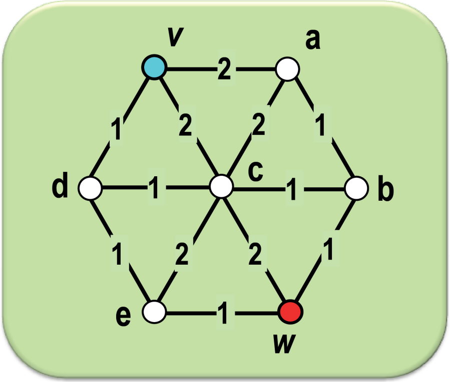
Dados um vértice inicial o e um vértice final d, a soma dos tempos das arestas utilizadas no caminho deve respeitar o intervalo definido para cada vértice.

A versão de decisão deste problema é NP-Completo.

Problema de Caminho Mais Curto com Janelas de Tempo

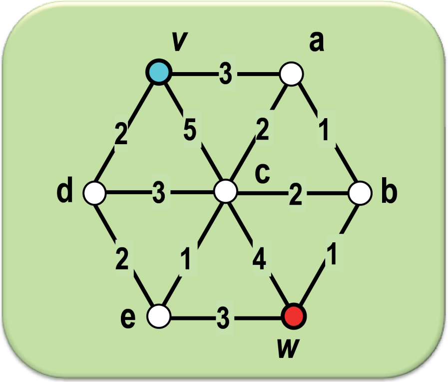


Janelas de tempo para cada vértice.

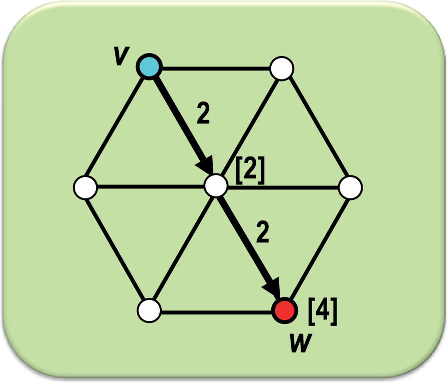


Tempos de percurso para cada aresta.

Problema de Caminho Mais Curto com Janelas de Tempo

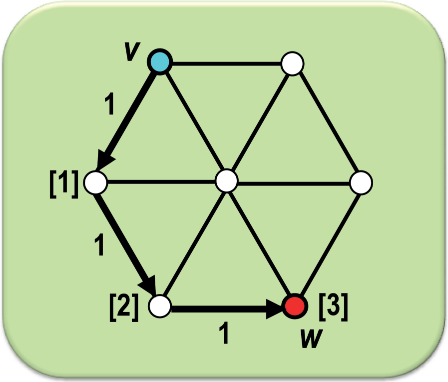


Custo de cada aresta.

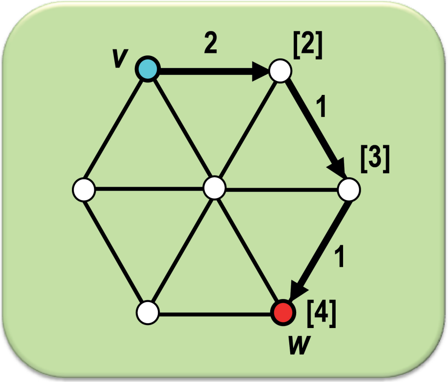


Caminho de custo igual a 9.

Problema de Caminho Mais Curto com Janelas de Tempo



Caminho de custo igual a 7.



Caminho de custo igual a 5.

Formulação PNLIM

As variáveis de decisão x_{ij} indicam se o arco que liga os vértices i e j está incluída ou não no menor caminho.

A variável T_i indica o tempo de partida do vértice $i \in V$.

Com isto, é possível calcular o tempo de espera no arco (i, j) como $T_j - T_i - t_{ij}$.

Os vértices o e d representam os vértices de início e de término do caminho.

A função objetivo visa minimizar o custo das arestas utilizadas no caminho e também o tempo de espera.

As variáveis são binárias, indicando a pertinência das arestas à solução, portanto, adicionamos restrições para este fim.

Formulação PNLIM

$$min \sum_{(i,j) \in A} (c_{ij} + w(T_j - T_i - t_{ij}))x_{ij} \tag{1}$$

$$sujeito\ a:$$

$$\sum_{(o,j) \in A} x_{oj} = \sum_{(i,d) \in A} x_{id} = 1 \tag{2}$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in A} x_{ji} = 0,\ \forall i \in V \setminus \{o, d\} \tag{3}$$

$$x_{ij}(T_i + t_{ij} - T_j) \leq 0,\ \forall (i,j) \in A \tag{4}$$

$$t_i^{min} \leq T_i \leq t_i^{max} \tag{5}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}\ (i,j) \in A \tag{6}$$

Problema de Caminho Mais Curto com Vértices de Reabastecimento

Definição

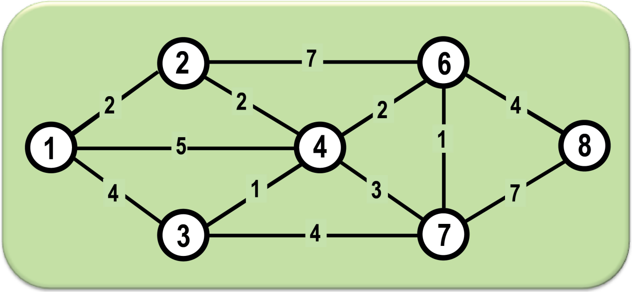
Trata-se do caso em que o deslocamento entre determinado par de vértices é realizado por um veículo que possui autonomia limitada e menor do que o caminho mais curto entre os pontos inicial e final.

O veículo possui uma quantidade de combustível inicial, e o peso de cada arco indica a quantidade de combustível necessária para percorrê-lo.

Desta maneira, o veículo deverá ser reabastecido durante o trajeto, passando por tantos pontos de reabastecimento quantos se fizerem necessários.

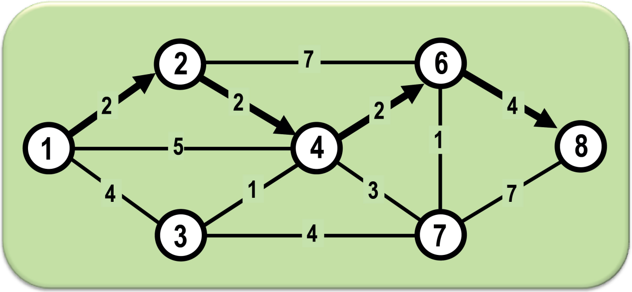
O caminho mais curto tradicional é um caso particular deste problema, em que todos os vértices são de reabastecimento e a autonomia do veículo é maior ou igual que o peso do maior arco do grafo.

Problema de Caminho Mais Curto com Vértices de Reabastecimento



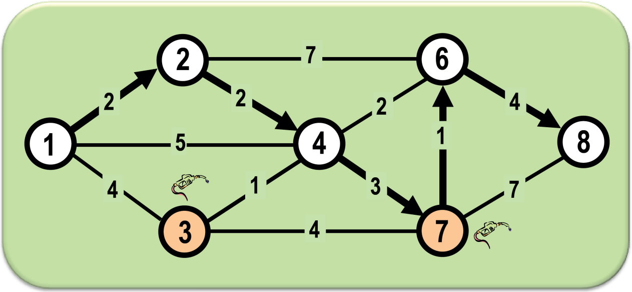
Grafo de exemplo. Desejamos o menor caminho entre os vértices 1 e 8, a autonomia do veículo é 7 e os vértices de reabastecimento são 3 e 7.

Problema de Caminho Mais Curto com Vértices de Reabastecimento



Caminho mais curto tradicional, com comprimento 10.

Problema de Caminho Mais Curto com Vértices de Reabastecimento



Caminho mais curto restrito, com comprimento 12.

Problema de Caminho Mais Curto com Vértices de Reabastecimento

Formulação PLI

As variáveis de decisão $x_{i,e}$ indicam se a aresta e é utilizada no estágio i $(0 \leq i \leq T)$.

As variáveis y_i indicam a quantidade de combustível disponível após o estágio i.

Os valores f_v indicam o combustível disponível no vértice v.

Os vértices o e d representam os vértices de início e de término do caminho.

A função objetivo visa minimizar o custo das arestas utilizadas no caminho.

As variáveis são binárias, indicando a pertinência das arestas à solução, portanto, adicionamos restrições para este fim.

Problema de Caminho Mais Curto com Vértices de Reabastecimento

$$min \sum_{i \in T} \sum_{e \in A} c_e x_{i,e} \tag{1}$$

$sujeito\ a:$

$$\sum_{e \in A,(*,v)} x_{i,e} - \sum_{e \in A,(v,*)} x_{i+1,e} = \begin{cases} -1 & \text{se } i = 0 \text{ e } v = o \\ 1 & \text{se } i+1 = T \text{ e } v = d \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases} \tag{2}$$

Problema de Caminho Mais Curto com Vértices de Reabastecimento

$$\sum_{i \in T} \sum_{e \in A, (*,v)} x_{i,e} \leq 1, \ \forall v \in V \tag{3}$$

$$\sum_{i \in T} \sum_{e \in A, (v,*)} x_{i,e} \leq 1, \ \forall v \in V \tag{4}$$

$$y_0 \leq \text{combustível inicial} \tag{5}$$

$$y_i \geq \sum_{e \in A} c_e x_{i,e}, \ \forall i \in T \tag{6}$$

$$y_{i+1} \leq y_i + \sum_{e \in A} (-c_e + f(\text{destino de } e)) x_{i,e}, \ \forall i \in T, \ \forall v \in V \tag{7}$$

$$y_i \geq 0, \forall i \in T \tag{8}$$

$$x_e \in \{0, 1\}, \forall e \in A \tag{9}$$

Problema de Caminho Mais Curto k-Centro

Definição

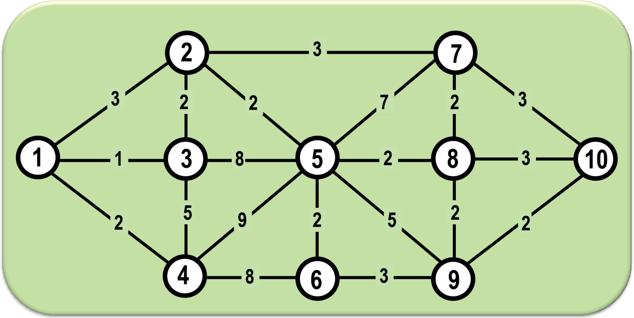
Trata-se do caminho entre dois vértices v e w que minimiza a soma das k maiores arestas pertencentes a ele.

Se o caminho entre v e w é inexistente, ou possui menos que k arestas, seu valor acumulado é definido como infinito.

Este modelo possui aplicações militares e também na solução de modelos de investimento em mercados de capitais.

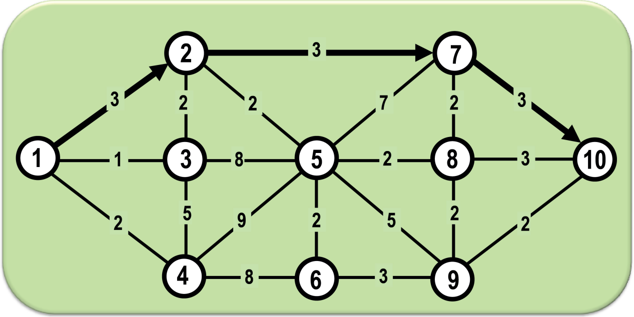
Este problema é NP-Difícil.

Problema de Caminho Mais Curto k-Centro



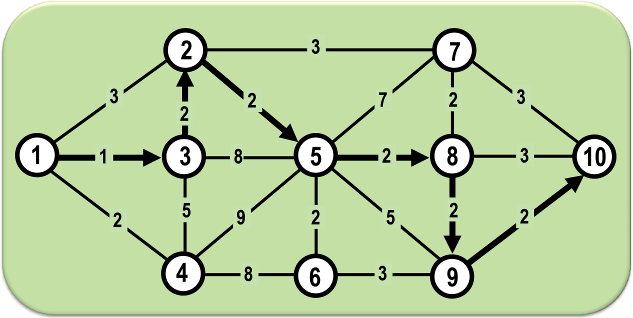
Considerando este grafo e $k = 2$, desejamos o menor caminho 2-centro entre os vértices 1 e 10.

Problema de Caminho Mais Curto k-Centro



Caminho mais curto tradicional, com comprimento 9.

Problema de Caminho Mais Curto k-Centro



Caminho mais curto 2-centro, com comprimento 11.

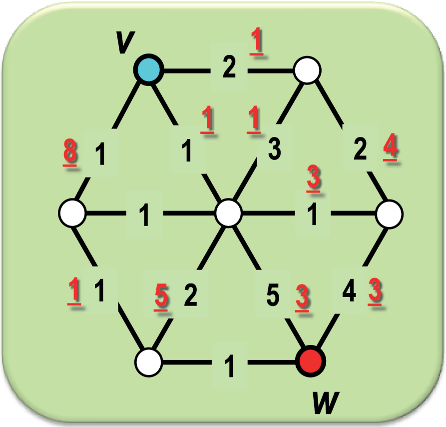
Problema de Caminho Mais Curto Restrito em Peso

Definição

Dado um grafo G=(V, A) com pesos w_{ij} e custos d_{ij} para todo $\{i, j\} \in A$, o caminho mais curto restrito em peso é o menor caminho entre um dado par de vértices v e w tal que o valor dos pesos não ultrapasse um limite k.

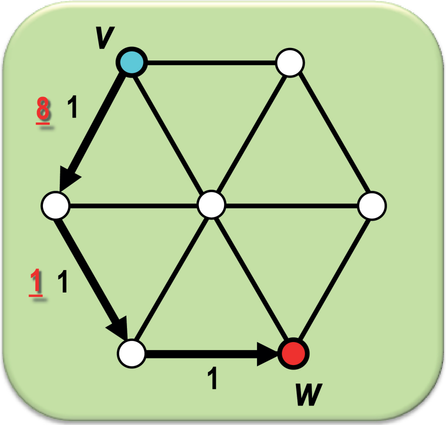
Este problema é NP-Difícil.

Problema de Caminho Mais Curto Restrito em Peso

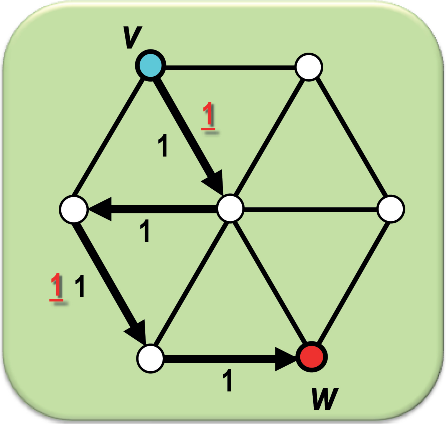


Grafo de exemplo em que os pesos são representados em vermelho e os custos em preto. Arestas sem peso indicado possuem peso zero.

Problema de Caminho Mais Curto Restrito em Peso



Caminho de custo 3 e peso 9.



Caminho de custo 4 e peso 2.

Problema de Caminho Mais Curto de Mínimo Gargalo

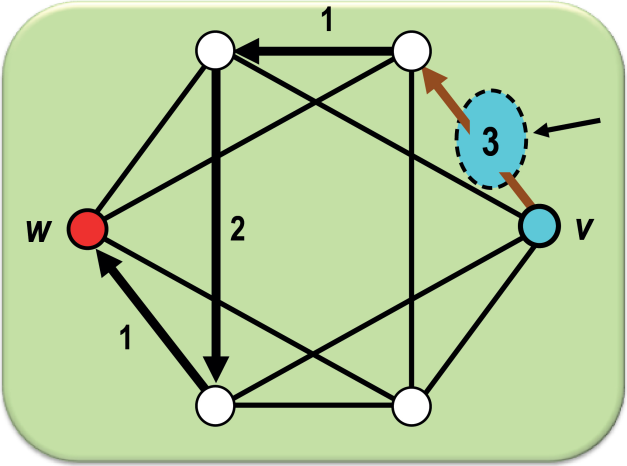
Definição

Um caminho de mínimo gargalo em um grafo G é o caminho entre qualquer par de vértices v e w que minimize a aresta de gargalo entre todos os caminhos ligando v e w.

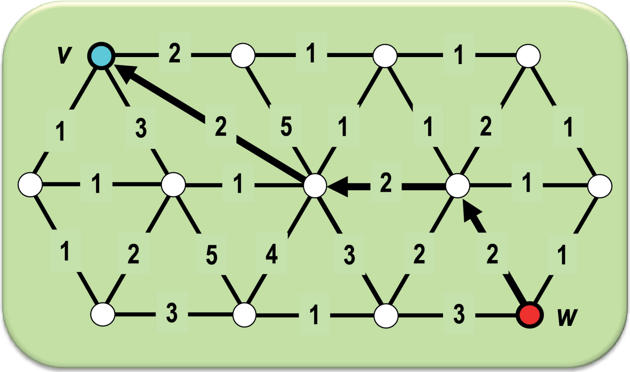
Em um grafo ponderado G, seja c_e o custo da aresta e em G, o gargalo de um caminho em G é a aresta de maior peso neste caminho.

Este problema pode ser resolvido em tempo determinístico polinomial.

Problema de Caminho Mais Curto de Mínimo Gargalo

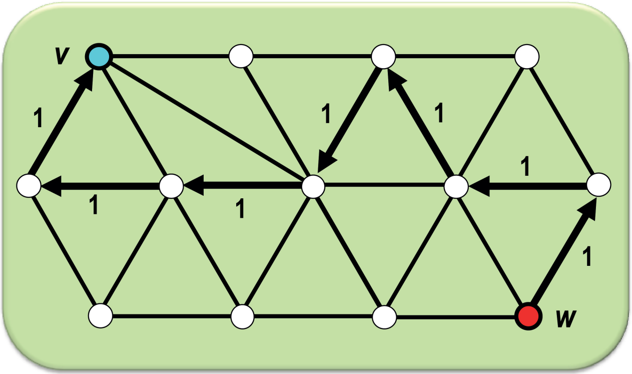


Caminho no grafo de exemplo com aresta gargalo ressaltada.



Caminho mais curto tradicional, com comprimento 6.

Problema de Caminho Mais Curto de Mínimo Gargalo



Caminho mais curto de mínimo gargalo, com comprimento 7.

Dúvidas?