PCC173/BCC463 - Otimização em Redes

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

Conteúdo

Aviso

Fonte

Este material é baseado nos livros

- Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.
- Goldbarg, M. C., & Luna, H. P. L. (2005). *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Elsevier.

Licença

Busca em Grafos

Definição

A Busca em Grafos (ou Percurso em Grafos) é a examinação de vértices e arestas de um grafo.

O projeto de bons algoritmos para determinação de estruturas ou propriedades de grafos depende fortemente do domínio destas técnicas.

Terminologia

- Uma aresta ou vértice ainda não examinados são marcados como não explorados ou não visitados;
- Inicialmente, todos os vértices e arestas são marcados como não explorados;
- Após terem sido examinados, os mesmos são marcados como explorados ou visitados;
- Ao final, todos os vértices e arestas são marcados como explorados (no caso de uma busca completa).

Buscas em Grafos

Buscas em Grafos

Dependendo do critério utilizado para escolha dos vértices e arestas a serem examinados, diferentes tipos de buscas são desenvolvidos a partir da busca genérica.

Basicamente, duas buscas completas em grafos são essenciais:

- Busca em Profundidade (ou **DFS** – *Depth-First Search*); e
- Busca em Largura (ou **BFS** – *Breadth-First Search*).

Busca em Profundidade - DFS

Características

A Busca em Profundidade explora todos os vértices de um grafo, usando como critério **o vértice visitado mais recentemente e não marcado**. Utiliza uma pilha explícita ou recursividade para guiar a busca.

Busca em Profundidade - DFS

```
Entrada: Grafo G=(V, A), vértice inicial v
Marque o vértice v como explorado;
enquanto existir w vizinho de v faça
    se w é marcado como não explorado então
        Explore a aresta {v, w};
        BP(G, w);// chamada recursiva da função
    fim
    senão
        se {v, w} não foi explorada ainda então
            Explore {v, w};
        fim
    fim
fim
```

Algoritmo de Tarjan

Princípio

Durante a Busca em Profundidade de um grafo, o **Algoritmo de Tarjan** (1972) propõe que podemos numerar os vértices de acordo com o início e término desta exploração.

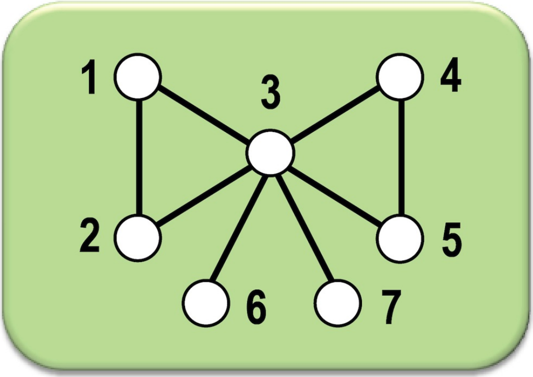
As diferentes situações nos permitem estabelecer uma classificação dos arestas:

- Arestas de Árvore: Satisfazem ao primeiro **se** do algoritmo anterior (linha 4), ou seja, levam à exploração de vértices ainda não visitados;
- Arestas de Retorno: Demais arestas (linha 9). Formam ciclos, pois levam a vértices já visitados.

Árvore de Profundidade

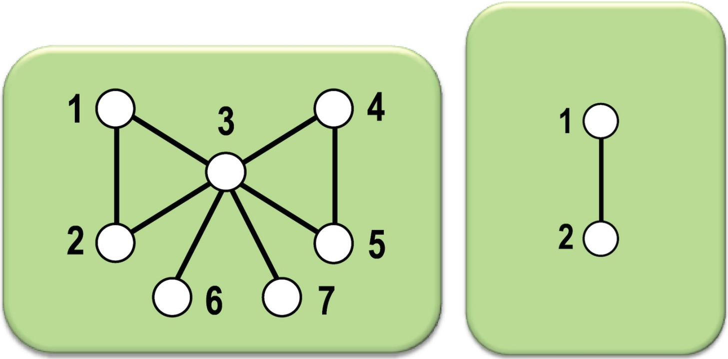
A subárvore de G formada pelas arestas de árvore é chamada de Árvore de Profundidade de G.

DFS - Exemplo



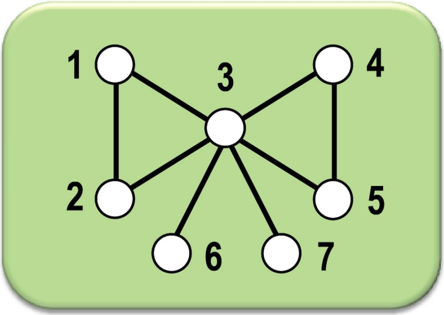
Grafo de exemplo.

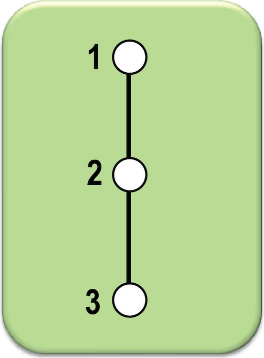
DFS - Exemplo



(1) Aresta {1,2}.

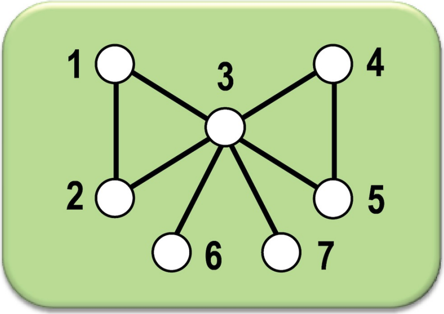
DFS - Exemplo

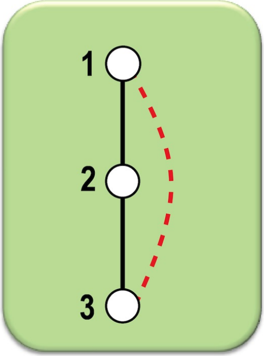




(2) Aresta {2,3}.

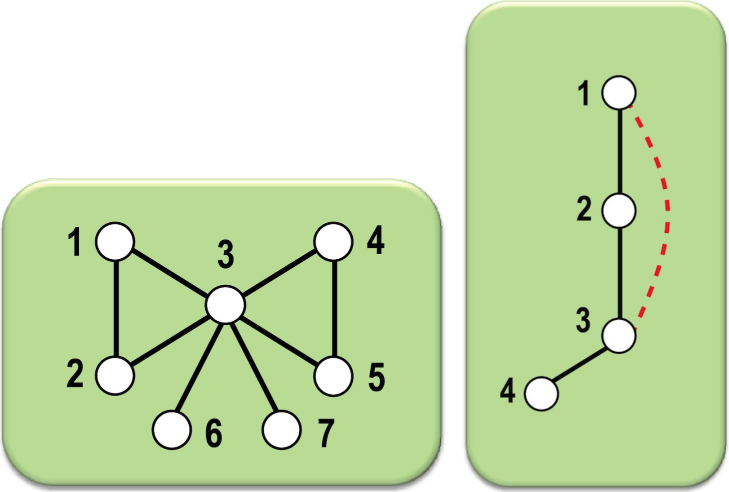
DFS - Exemplo





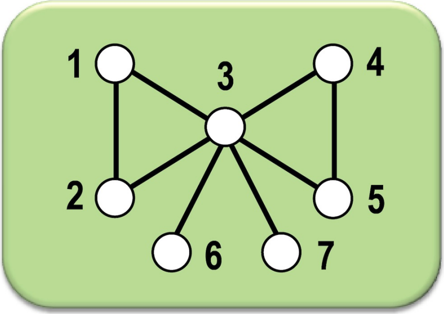
(3) Aresta {3, 1}.

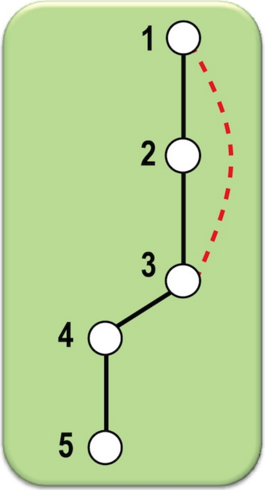
DFS - Exemplo



(4) Aresta {3, 4}.

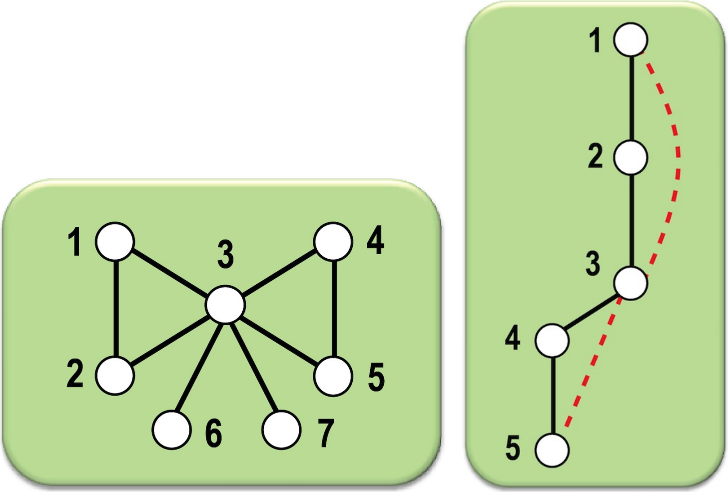
DFS - Exemplo





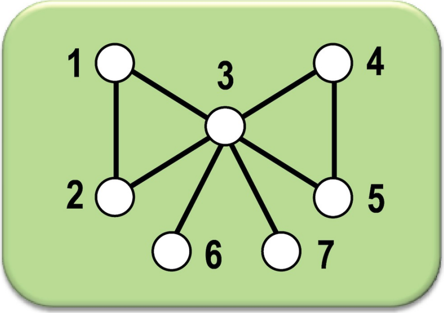
(5) Aresta {4, 5}.

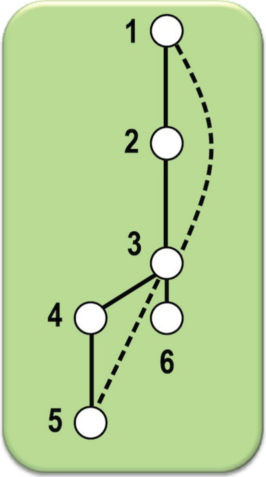
DFS - Exemplo



(6) Aresta {5, 3}.

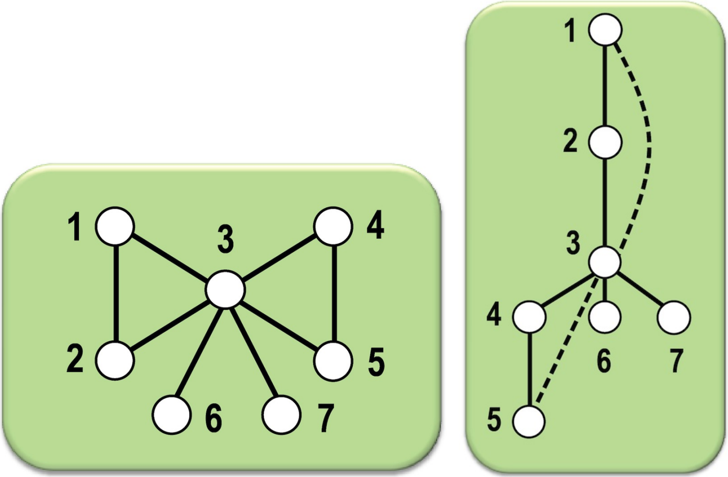
DFS - Exemplo





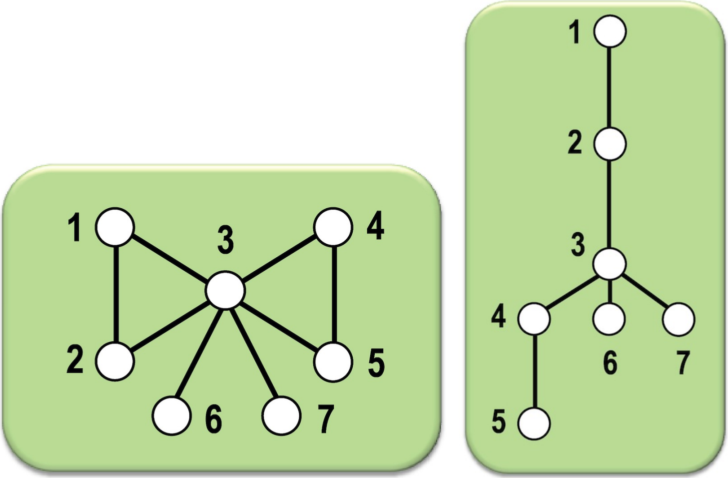
(7) Aresta {3, 6}.

DFS - Exemplo



(8) Aresta {3, 7}.

DFS - Exemplo



Grafo original e correspondente árvore de profundidade.

Complexidade

Para cada vértice do grafo, a DFS percorre todos os seus vizinhos.

Desta forma, cada aresta é visitada duas vezes.

Se representarmos o grafo por uma lista de adjacências, a DFS tem complexidade $O(n+m)$.

DFS-Grafos Direcionados ou Desconexos

Atenção!

A aplicação da DFS em grafos direcionados é essencialmente igual à aplicação em grafos não direcionados.

No entanto, mesmo o grafo direcionado sendo conexo, a DFS pode precisar ser chamada repetidas vezes enquanto houver vértices não explorados, retornando uma floresta.

Este é o mesmo caso quando a DFS é aplicada a um GND desconexo.

Entrada: Grafo G=(V, E)

enquanto *existir* $v \in V$ *não marcado* **faça**

  BP(G, v);

fim

Busca em Profundidade - DFS

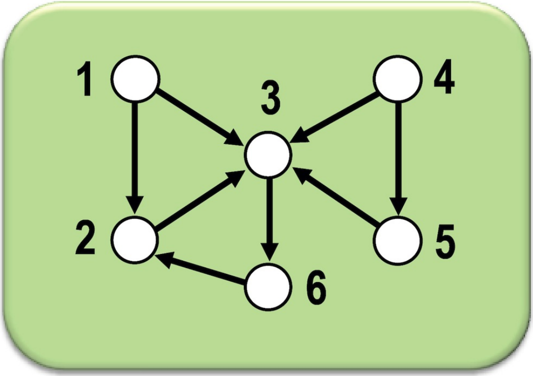
Classificação de Arestas

Novamente, o **Algoritmo de Tarjan** propõe que, ao explorarmos um grafo direcionado G direcionado usando a DFS, podemos categorizar os arcos.

Sejam o vértice v a origem da aresta e o vértice w o destino da mesma:

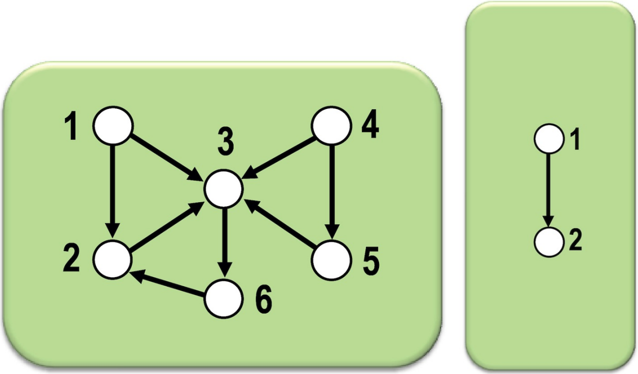
- Arcos de Avanço: Caso w seja descendente de v na floresta;
- Arcos de Retorno: Caso v seja descendente de w na floresta;
- Arcos de Cruzamento: Caso w não seja descendente de v e v não seja descendente de w.

DFS - Exemplo



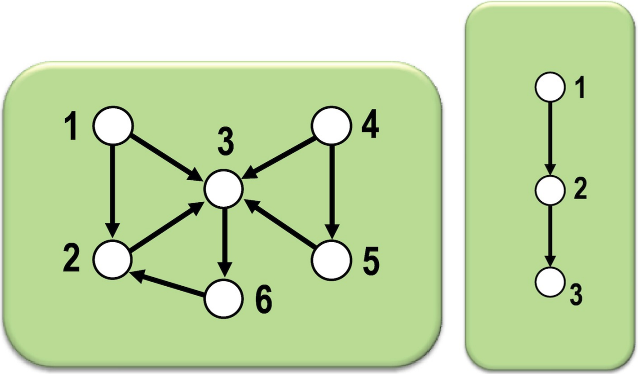
Grafo de exemplo.

DFS - Exemplo

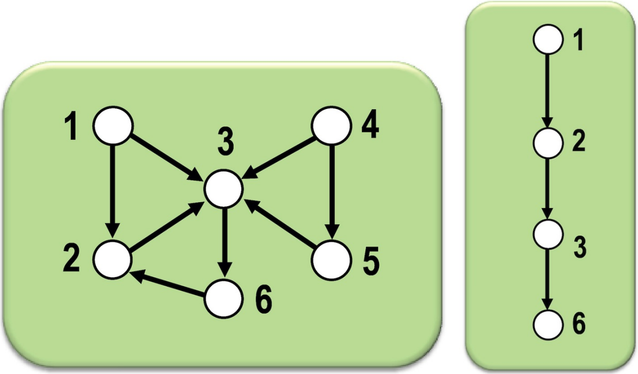


(1) Arco (1,2).

DFS - Exemplo

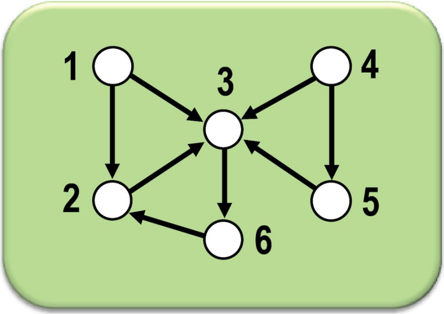


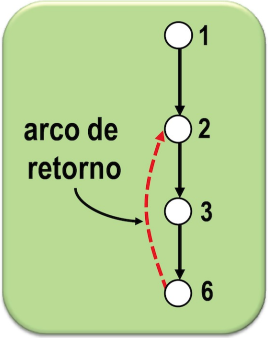
(2) Arco (2,3).



(3) Arco (3, 6).

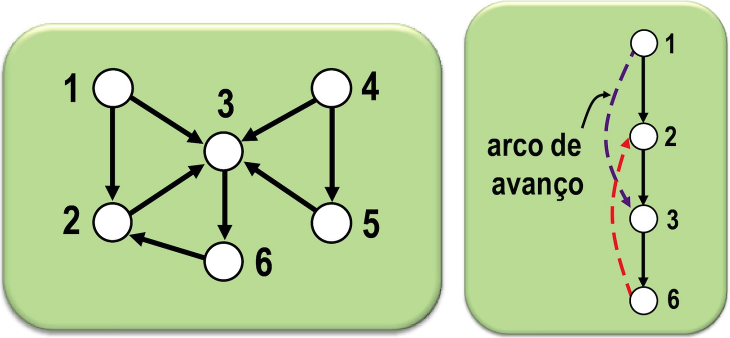
DFS - Exemplo



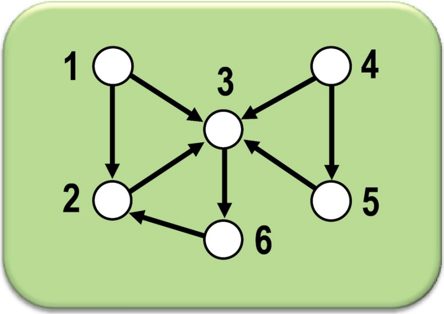


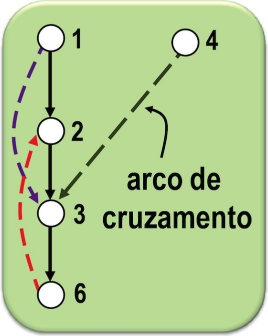
(4) Arco (6, 2).

DFS - Exemplo

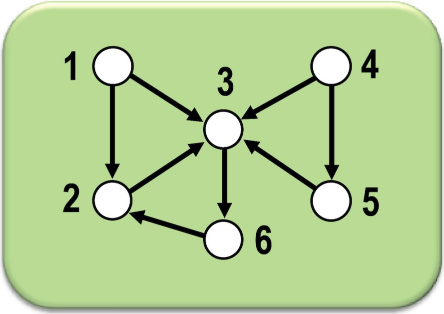


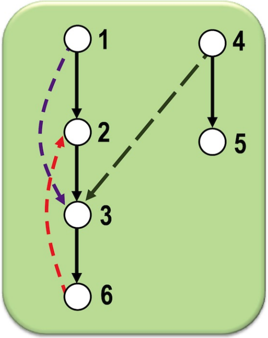
(5) Arco (1, 3).



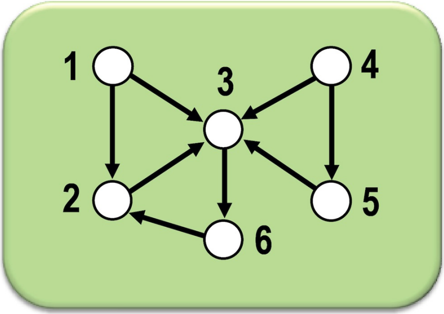


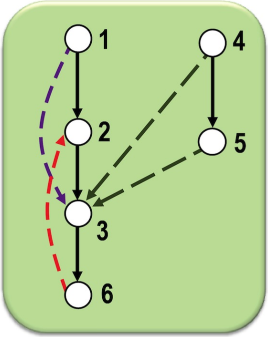
(6) Arco (4, 3).





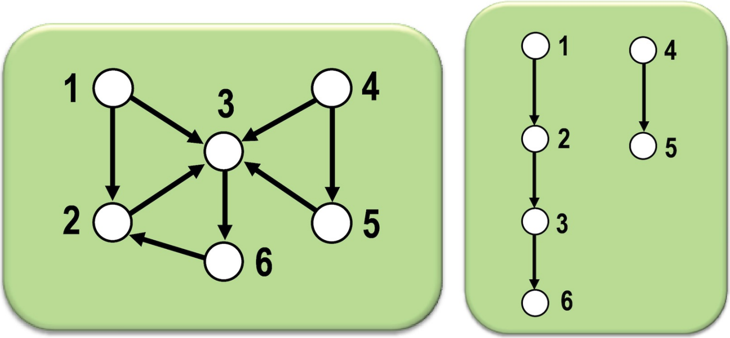
(7) Arco (4, 5).





(8) Arco (5, 3).

DFS - Exemplo



Grafo original e respectiva floresta de profundidade.

Busca em Largura

Características

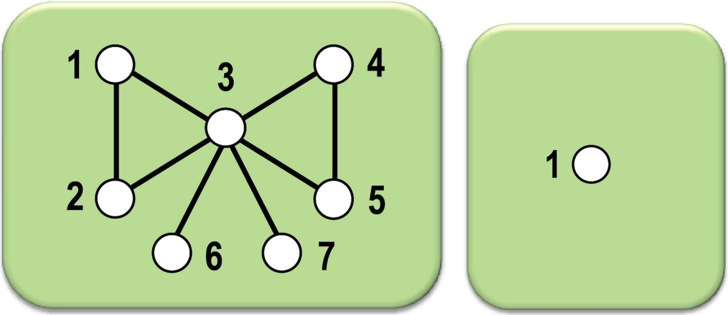
A Busca em Largura explora todos os vértices de um grafo, usando como critério **o vértice visitado menos recentemente e não marcado**. Utiliza uma fila guiar a busca. Atuação em camadas:

- Inicialmente são considerados os vértices com distância 0 do vértice inicial;
- Na iteração 1 são explorados os vértices com distância 1; prosseguindo, de modo genérico, na iteração d será adicionada uma camada com todos os vértices com distância d do vértice inicial;
- Cada novo vértice explorado é adicionado no final de uma fila Q;
- Cada vértice da fila é removido depois que toda a vizinhança for visitada;
- A busca termina quando a fila se torna vazia.

Busca em Largura - BFS

Entrada: Grafo G=(V, A), vértice inicial v

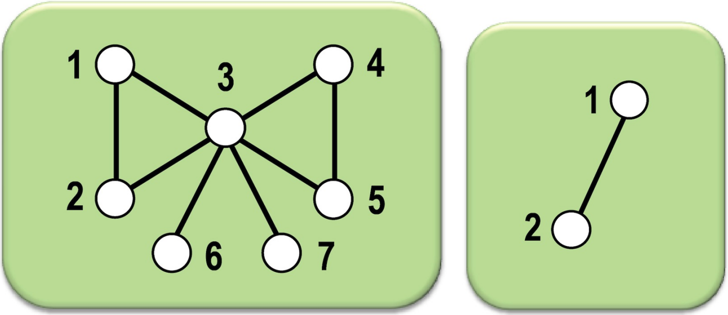
Crie uma fila **Q** vazia;
Marque v como explorado;
Insira v em Q;
enquanto $Q \neq \emptyset$ **faça**
    $v \leftarrow$ remove elemento de Q;
    para todo *vértice* w *vizinho de* v **faça**
        se w *é marcado como não explorado* **então**
            Explore a aresta $\{v, w\}$;
            Insira w em Q;
            Marque w como explorado;
        fim
        senão
            se $\{v, w\}$ *não foi explorada ainda* **então**
                Explore $\{v, w\}$;
            fim
        fim
    fim
fim



(1) Inclusão de 1

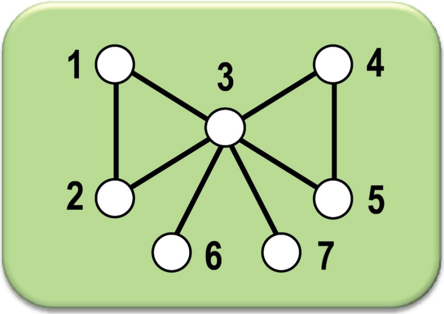
$Q = \{1\}$

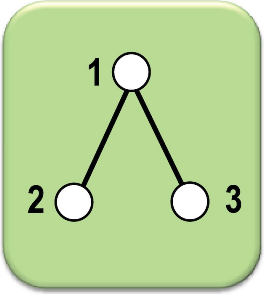
BFS - Exemplo



(2) ArestaAresta{1, 2}

$$Q = \{2\}$$

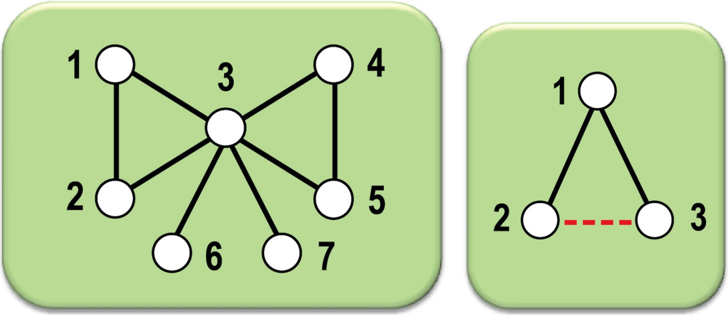




(3) Aresta{1, 3}

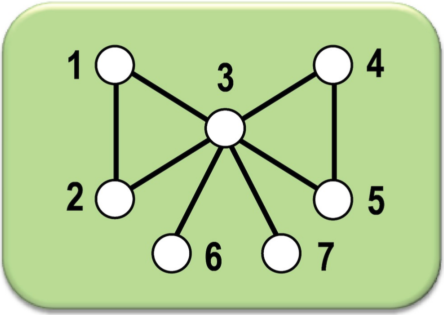
$$Q = \{2, 3\}$$

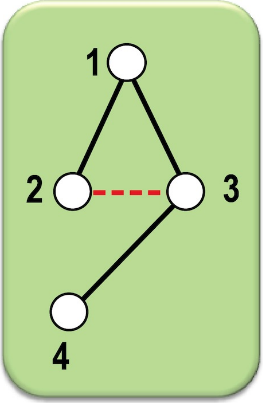
BFS - Exemplo



(4) Aresta{2, 3}

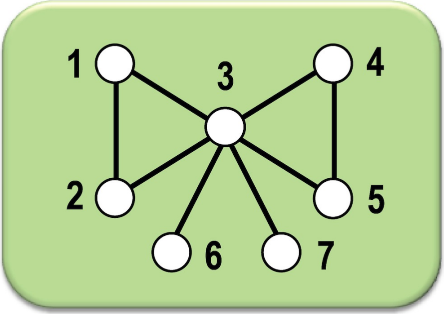
$$Q = \{3\}$$

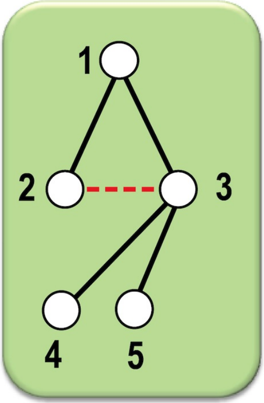




(5) Aresta{3, 4}

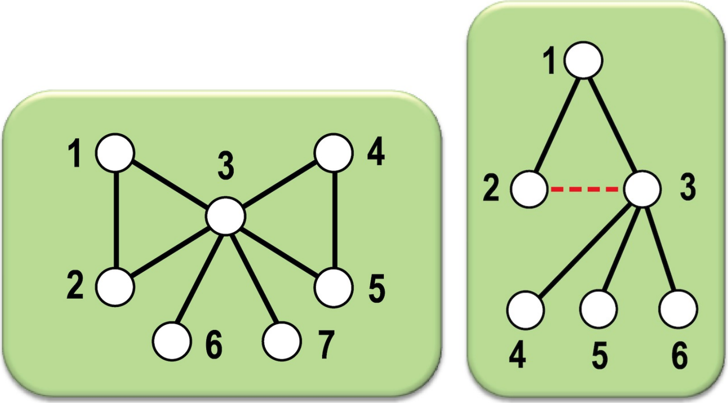
$$Q = \{4\}$$





(6) Aresta{3, 5}

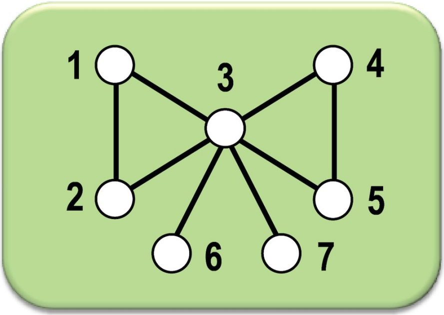
$$Q = \{4, 5\}$$

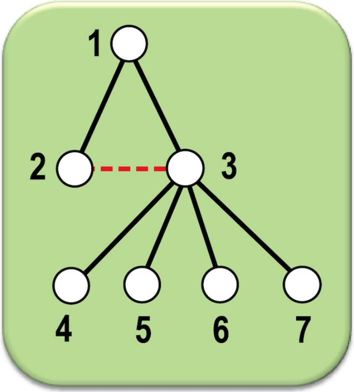


(7) Aresta{3, 6}

$Q = \{4, 5, 6\}$

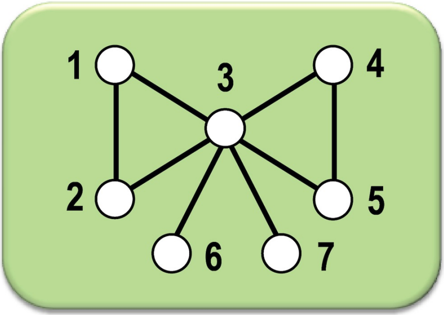
BFS - Exemplo

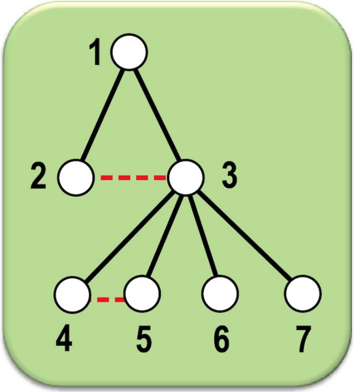




(8) Aresta{3, 7}

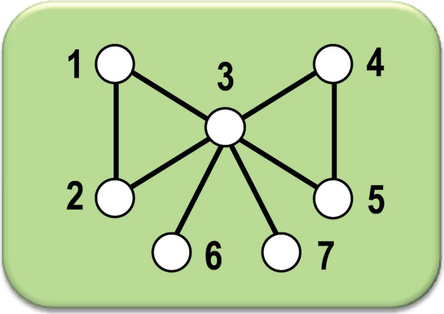
$Q = \{4, 5, 6, 7\}$

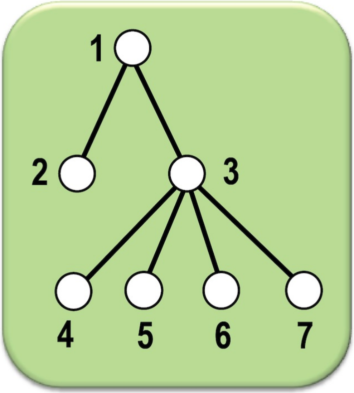




(9) Aresta{4, 5}

$$Q = \{5, 6, 7\}$$





Grafo original e respectiva árvore de exploração.

Complexidade

Cada vértice só entra na fila uma vez.

Inserir e remover na fila possuem complexidade constante, realizadas $|V|$ vezes cada.

A lista de adjacências de cada vértice é examinada apenas uma vez, e a soma dos comprimentos de todas as listas é $\Theta(m)$.

Logo, se representarmos o grafo por uma lista de adjacências, a BFS tem complexidade $O(n+m)$.

Dúvidas?