PCC173/BCC463 - Otimização em Redes

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

Conteúdo

Aviso

Fonte

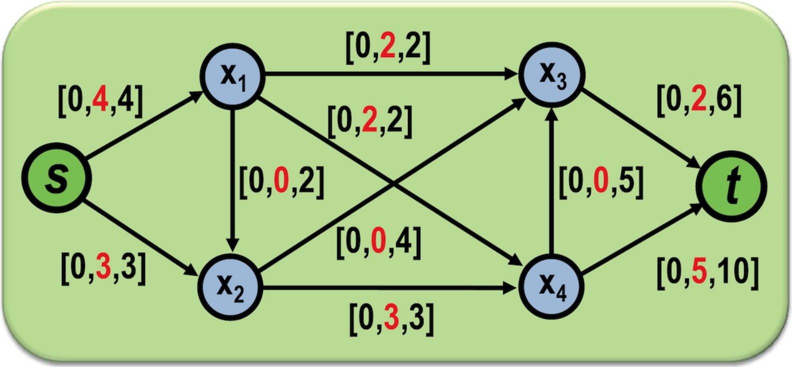
Este material é baseado nos livros

- Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.
- Goldbarg, M. C., & Luna, H. P. L. (2005). *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Elsevier.

Licença

Definição

O problema do Fluxo Máximo consiste em fazer circular, em uma dada rede R=(V, A, F, U), o maior fluxo viável possível entre os vértices s e t.



Fluxo máximo s-t igual a 7 unidades.

Definição

É comum denominar os elementos que restringem o fluxo em uma rede de **elementos gargalo**.

Os gargalos podem ser arcos ou conjuntos de arcos:

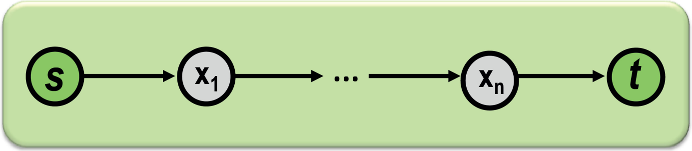
- O arco de menor capacidade em um caminho de fluxo é dito **gargalo** do caminho;
- O corte de mínimo fluxo em uma rede é denominado de **gargalo de fluxo**.

Definição

Consideremos uma rede $s - t$ constituída por um único caminho de s para t como exemplificado na figura abaixo.

O valor do fluxo máximo que percorre esta rede é

$$f_0 = min\{\bar{u}(s, x_1), \bar{u}(x_1, x_2), \ldots, \bar{u}(x_n, t)\}$$



Caminho $s - t$.

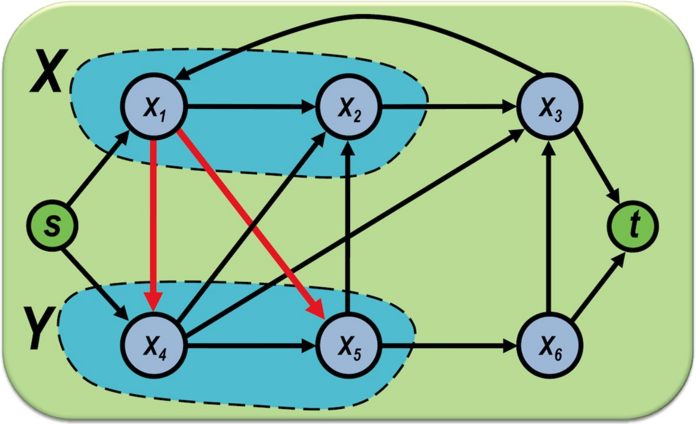
Fluxo entre Conjuntos de Vértices

Definição

- Dados dois conjuntos X, $Y \subset V$ de vértices de uma rede, tal que $X \cap Y = \emptyset$, o fluxo entre eles ocorre do conjunto X para o conjunto Y e vice-versa;
- O fluxo do conjunto X para o conjunto Y, denotado por $f(X, Y)$ pode ser obtido pela expressão:

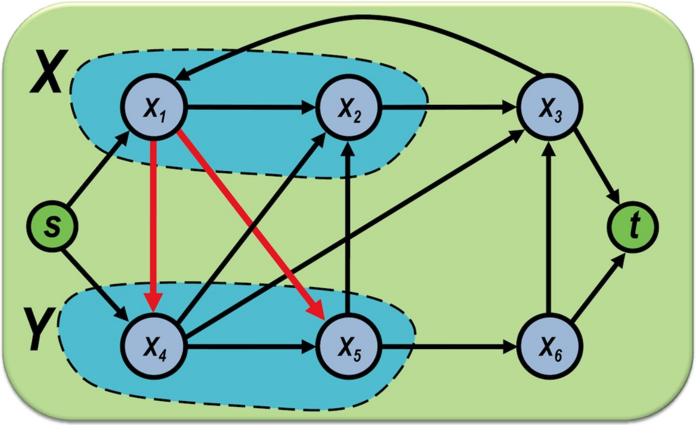
$$f(X, Y) = \sum_{e \in S} f_e \qquad S = \{e | (x_i, x_j), x_i \in X, x_j \in Y\}$$

Fluxo entre Conjuntos de Vértices



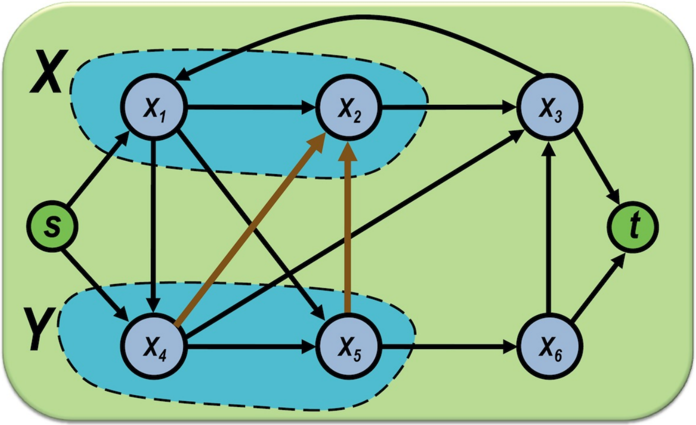
Conjuntos X e $Y \in R$.

Fluxo entre Conjuntos de Vértices



$$f(X,Y) = f(x_1, x_4) + f(x_1, x_5).$$

Fluxo entre Conjuntos de Vértices



$$f(Y, X) = f(x_4, x_2) + f(x_5, x_2).$$

Definição

Em um grafo $G = (V, A)$, um corte é uma divisão dos vértices em dois conjuntos disjuntos:

- $X \subseteq V$; e
- $\bar{X} = V \setminus X$.

Cortes em Redes

Em uma rede de fluxo, definimos um corte $s - t$ como um corte em que a fonte s e o sumidouro t encontram-se em conjuntos diferentes.

Capacidade de um Corte

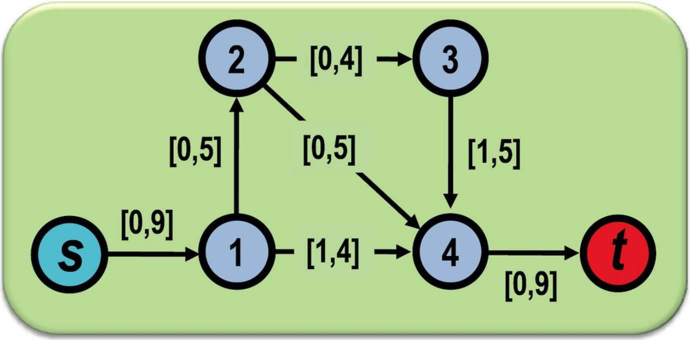
Em uma rede, a capacidade de um corte *s*-*t* é a soma dos fluxos dos arcos associados ao corte. Os limites da capacidade do corte são as somas dos limites dos arcos associados ao corte. Todos são definidos de X para $\bar{X}$.

$$c = \sum_{e \in S} f_e$$

$$\bar{u}(X, \bar{X}) = \sum_{e \in S} \bar{u}_e$$

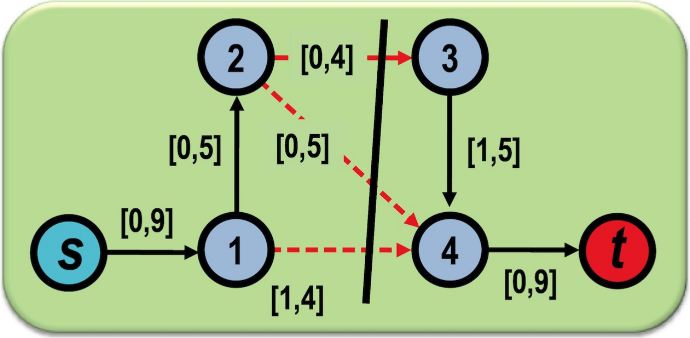
$$\underline{u}(X, \bar{X}) = \sum_{e \in S} \underline{u}_e$$

$$S = \{e | (i, j), i \in X, j \in \bar{X}\}$$



Rede de exemplo.

Corte



Um corte.

$$\bar{u}(X,\bar{X}) = 4{+}5{+}4$$

$$\underline{u}(X,\bar{X}) = 1$$

Fluxo Líquido e Capacidade Líquida

Fluxo Líquido

O fluxo líquido através do corte $s - t$ é o resultado da diferença entre o fluxo de X para Y e de Y para X, conforme a expressão abaixo:

$$f_l = f(X, Y) - f(Y, X)$$

Capacidade Líquida

A capacidade líquida do corte $s - t$ é o resultado do balanço de capacidades dos arcos do corte, conforme a expressão abaixo:

$$u_l = \bar{u}(X, Y) - \underline{u}(Y, X)$$

Fluxo Líquido e Capacidade Líquida

Fluxo Máximo, Fluxo Líquido e Capacidade Líquida

Os cortes $s - t$ podem possuir tanto arcos de entrada como arcos de saída, ligando os dois conjuntos de vértices do corte.

Como é possível que haja circulação em arcos de entrada e saída de cada conjunto, de fato a circulação entre s e t está associada ao fluxo líquido em qualquer corte $s - t$ da rede.

O conceito de fluxo máximo em uma rede está associado aos conceitos de fluxo líquido máximo e capacidade líquida máxima de um corte em uma rede R.

Como é possível a existência de diferentes cortes $s - t$ em uma rede, o fluxo máximo está associado ao corte de menor capacidade líquida entre s e t.

Teoremas

Teorema Fluxo/Corte

Dado um fluxo f de valor $val(f)$, qualquer que seja o corte $(X, \bar{X})$:

$$val(f) \leq \bar{u}(X, \bar{X}) - \underline{u}(\bar{X}, X)$$

Teorema Fluxo Máximo/Corte Mínimo

Para qualquer rede $s - t$ o valor do fluxo máximo é igual a capacidade líquida mínima entre seus cortes $s - t$.

Grafo de Aumento de Fluxo

Definição

Um grafo de aumento de fluxo $G=(V_f, A_f)$ possui somente arcos simples, construído da seguinte forma:

- $(x, y) \in A_f$, se $(x, y) \in A$ e $f(x, y) < \bar{u}(x, y)$: arco direto.
- $(y, x) \in A_f$, se $(x, y) \in A$ e $f(x, y) > \underline{u}(x, y)$: arco reverso.

Folga de um Arco

A folga de um arco é obtida da seguinte maneira:

- $\bar{\xi}(x, y) = \bar{u}(x, y) - f(x, y)$ se $f(x, y) < \bar{u}(x, y)$
- $\underline{\xi}(x, y) = f(x, y) - \underline{u}(x, y)$ se $f(x, y) > \underline{u}(x, y)$

Arco Utilizável

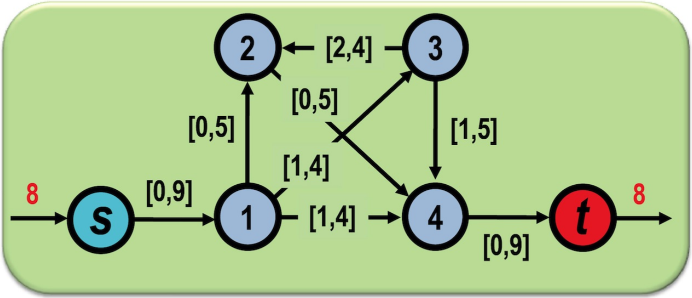
Definição

Dados dois vértices x e y, sendo x em análise e y não analisado, um arco a é utilizável em duas situações:

1. $a = (x, y)$, dito arco direto;
2. $a = (y, x)$, dito arco reverso.

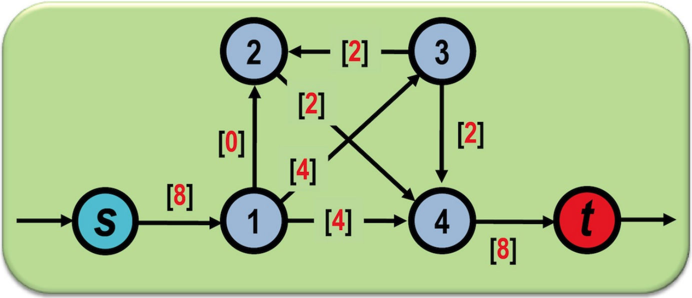
Note que este conceito diz respeito aos algoritmos para o problema de fluxo máximo.

Exemplo

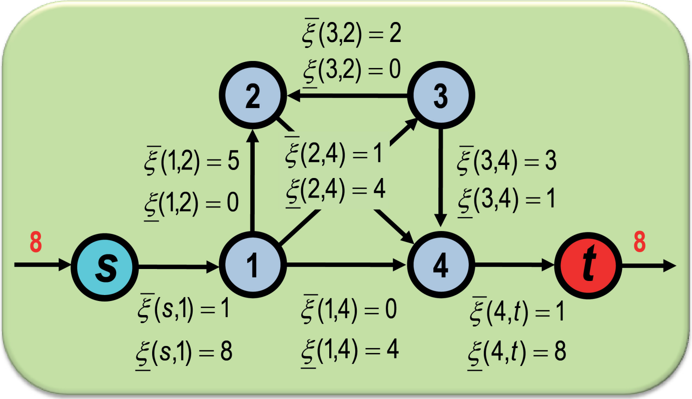


Rede de exemplo.

Exemplo

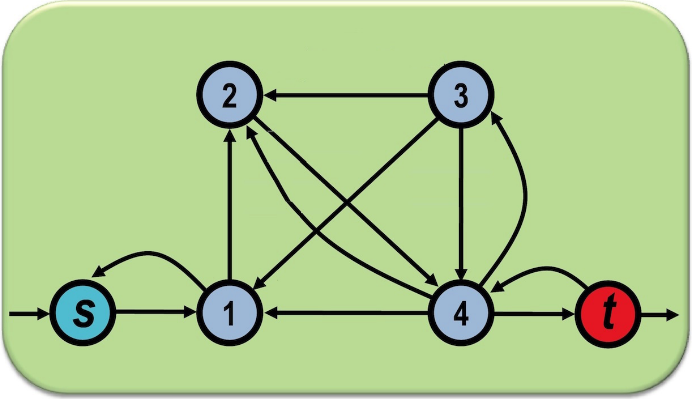


Fluxo de 8 unidades na rede de exemplo.



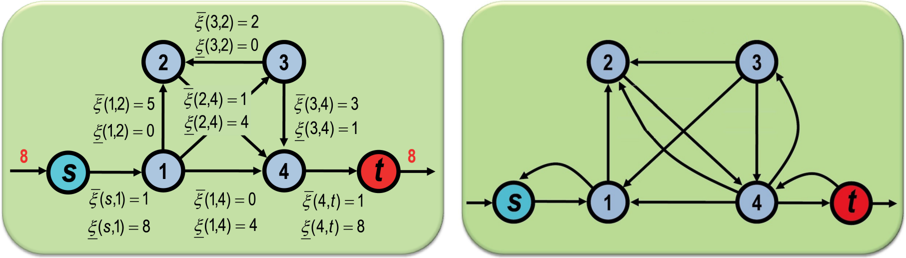
Folgas nos arcos da rede.

Exemplo



Grafo de aumento de fluxo.

Exemplo



Rede com folgas e Grafo de Aumento de Fluxo.

Estratégia: Aumento de Fluxo

- Uma das estratégias mais antigas utilizadas para determinação de fluxo máximo em redes é encontrar uma sequência de caminhos de aumento de fluxo entre s e t, definidos no grafo de aumento de fluxo;
- Para cada caminho de aumento de fluxo, os algoritmos fazem circular um fluxo entre s e t que esgota o seu arco de menor capacidade e atualiza as capacidades dos arcos percorridos pelo fluxo;
- Quando não for mais possível encontrar um caminho de aumento de fluxo entre s e t, o fluxo máximo é alcançado.

Aplicações

Fluxo em Redes

- O problema de transporte;
- O problema de emparelhamento em grafos;
- O problema de aproveitamento de carga em aviões comerciais;
- Projeto de redes;
- Instalações telefônicas, hidráulicas, elétricas, de petróleo e gás;
- Protocolos de comunicação da internet;
- Computação móvel;
- Projeto de circuitos em placas eletrônicas.

Dúvidas?