

PCC173/BCC463 - Otimização em Redes

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto



Universidade Federal
de Ouro Preto



1 Algoritmos de Fluxo Forçado

2 Algoritmo de Dinitz

Fonte

Este material é baseado nos livros

- ▶ Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.
- ▶ Goldbarg, M. C., & Luna, H. P. L. (2005). *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Elsevier.

Licença

Este material está licenciado sob a Creative Commons BY-NC-SA 4.0. Isto significa que o material pode ser compartilhado e adaptado, desde que seja atribuído o devido crédito, que o material não seja utilizado de forma comercial e que o material resultante seja distribuído de acordo com a mesma licença.

Caracterização

Uma classe de algoritmos de fluxo máximo caracteriza-se por forçar o fluxo através da identificação de gargalos (ou **bloqueios**) de fluxo em uma rede em **camadas**.

Serão apresentados neste tópico os algoritmos de **Dinitz** e **MPM**.

Algoritmo de Dinitz

Histórico

Proposto originalmente pelo soviético Yefim Dinitz em 1970, em resposta a um exercício proposto por George Adelson-Velsky, co-inventor das árvores AVL (e considerado um dos pais da computação).

Em um artigo, o autor alega que não conhecia o algoritmo de Ford&Fulkerson quando inventou o algoritmo:

“Ignorance sometimes has its merits. Very probably, DA would not have been invented then, if the idea of possible saturated edge desaturation had been known to the author.”

Posteriormente, em 1975, uma modificação do algoritmo foi publicada pelo israelense Shimon Even, creditando a versão original a um certo “Dinic”.

Algoritmo de Dinitz

Histórico

A modificação foi motivada por Shimon Even não ter compreendido completamente a descrição original do algoritmo, cujo artigo tinha apenas 4 páginas e era escrito em russo.

Na ausência da compreensão, Shimon Even “completou” à sua maneira a parte do algoritmo que faltava.

Quase vinte anos depois, Dinitz teve a oportunidade de explicar a Shimon Even a tal parte do algoritmo – e de corrigir o nome!



Princípio

O algoritmo de Dinitz utiliza o conceito de **redes em camadas** na construção dos caminhos de aumento de fluxo.

Uma rede em camadas H é uma rede induzida a partir de uma rede R , em que já circula um dado fluxo F :

- ▶ Na camada zero há somente o vértice s da rede R ;
- ▶ Na camada 1 estão apenas os vértices $y \in Y$ tal que exista um arco utilizável de s para y :
 - ▶ A capacidade desses arcos é $\bar{u}(s, y) - f(s, y) + f(y, s)$;

Princípio

- ▶ Na camada 2 estão os vértices w , tais que existem arcos utilizáveis dos vértices y da camada 1 para os vértices w :
 - ▶ Então são colocados em H arcos dos vértices da camada 1 para os vértices da camada 2 tais que a capacidade destes arcos é dada por $\bar{u}(y, w) - f(y, w) + f(w, y)$;

A construção da rede prossegue até que o vértice t seja incluído na camada L ou até que não existam mais arcos utilizáveis para serem incluídos em H :

- ▶ Caso t não tenha sido incluído não existe uma rede H a ser considerada, situação correspondente a um fluxo máximo circulando na rede R ;
- ▶ Caso t seja incluído, existe caminho de aumento de fluxo entre os vértices s e t e o fluxo f pode ser aumentado.

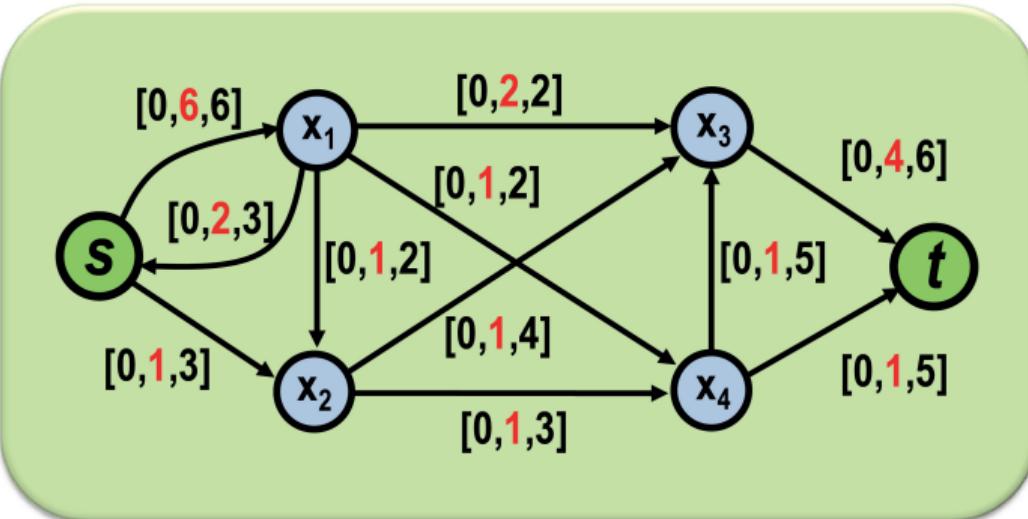
Princípio

No caso de haver um caminho de aumento de fluxo entre s e t , todos os vértices da camada L diferentes de t são removidos de H .

Examinam-se as camadas k de H , $k = L - 1, \dots, 1$, removendo-se sucessivamente os vértices que não possuem arcos para a camada $k + 1$.

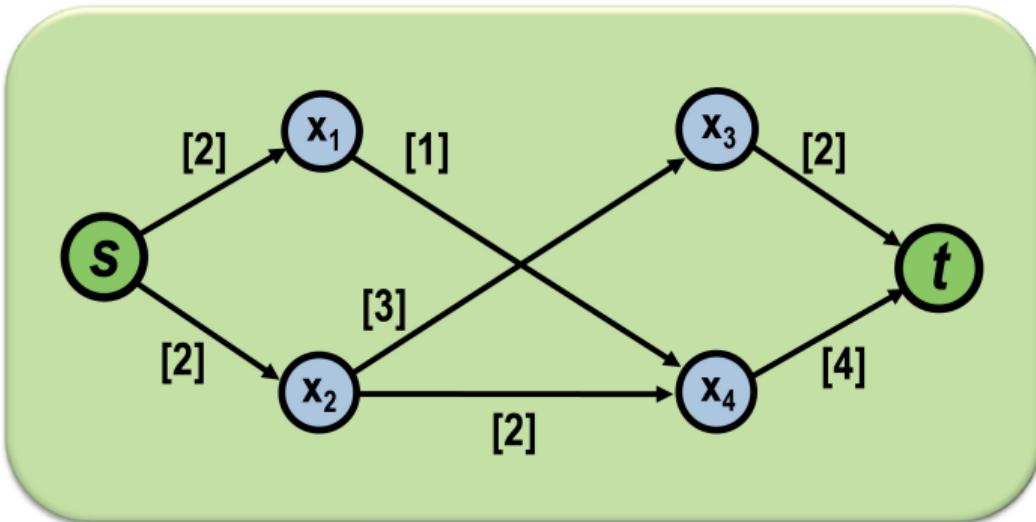
As figuras a seguir ilustram uma rede em camadas induzida a partir de uma rede R com fluxo viável.

Algoritmo de Dinitz



Rede R com um fluxo viável.

Algoritmo de Dinitz



Rede em camadas.

Os números entre chaves na rede em camadas indicam a capacidade do arco, dada por $\bar{u}(y, w) - f(y, w) + f(w, y)$.

Rede em Camadas

Considerando a figura anterior, na camada 0 só existe o vértice s .

Na camada 1 estão os vértices alcançáveis a partir de s por um arco utilizável: x_1 e x_2 .

Embora no arco (s, x_1) esteja passando um fluxo de valor igual a capacidade do arco, no arco (x_1, s) está retornando para s um fluxo de valor 2

- ▶ Portanto, $\bar{u}(s, x_1) - f(s, x_1) + f(x_1, s) = 2$;
- ▶ Assim, é inserido na rede em camadas um arco (s, x_1) com capacidade 2.

No arco (s, x_2) ainda é possível passar 2 unidades de fluxo, portanto, um arco (s, x_2) com capacidade 2 é inserido na rede em camadas.

Algoritmo de Dinitz

Rede em Camadas

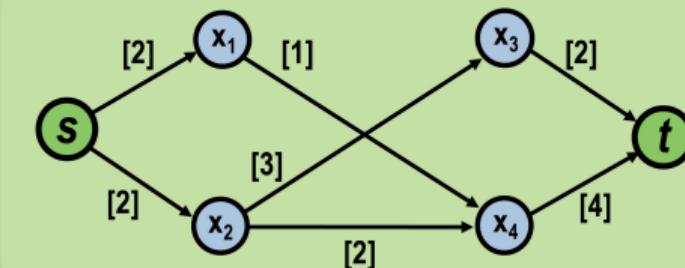
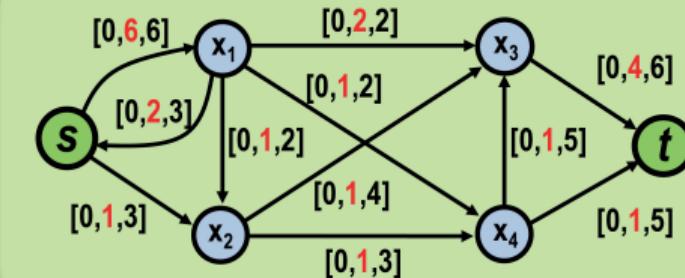
A camada 2 contém os vértices alcançáveis a partir de x_1 e x_2 por um arco utilizável, ou seja, x_3 e x_4 .

Os arcos (x_1, x_4) , (x_2, x_3) e (x_2, x_4) são inseridos na rede em camadas com as capacidades mostradas na figura anterior.

O arco (x_1, x_3) não é inserido na rede em camadas, uma vez que $\bar{u}(x_1, x_3) = f(x_1, x_3)$.

Finalmente, o vértice t é inserido na camada 3.

Algoritmo de Dinitz



Descrição

O algoritmo de Dinitz é composto basicamente por dois laços: um externo e outro interno.

O laço externo constrói novas redes em camadas a partir de um fluxo F .

O laço interno realiza diferentes operações em uma mesma rede em camadas.

Uma vez construída a rede em camadas H , o algoritmo entra no laço mais interno, onde caminhos de aumento de fluxo são encontrados a partir de t .

Em cada um destes caminhos de aumento de fluxo encontrados em H , aumenta-se o fluxo de acordo com o gargalo (ou **bloqueio**).

Descrição

Os caminhos P entre s e t são construídos iterativamente a partir de t :

Suponha que na outra extremidade do arco incidente em t está o vértice v_1 , então, a construção do caminho até s continua a partir de v_1 .

Esse procedimento é repetido até que um arco (s, v_{l-1}) seja escolhido.

Portanto, após L passos, o caminho P de aumento de fluxo é construído no procedimento **caminhoDeAumento**.

O fluxo F é aumentado na rede no valor da menor capacidade residual de um arco no caminho P pelo procedimento **aumentarFluxo(P)**.

Os arcos de P têm suas capacidades atualizadas após isto.

Descrição

Em cada iteração do laço mais interno, pelo menos uma aresta é saturada – exatamente a(s) relacionada(s) ao(s) gargalo(s).

Os arcos saturados de P são armazenadas no conjunto Sat , pelo procedimento **arcosSaturados(P)**.

Este mesmo conjunto é passado como dado de entrada para o procedimento **limpeza()**, o qual remove todos os arcos saturados, vértices com grau de entrada ou de saída igual a zero (exceto s e t) e outros arcos em que um dos vértices terminais tenha sido removido de H .

Algoritmo de Dinitz

Entrada: Rede R com fluxo viável $F = 0$

- 1 **Construa** a rede em camadas H a partir de R , considerando o fluxo F ;
- 2 **repita**

3 **enquanto** existir um caminho entre s e t **faça**

4 $P \leftarrow \text{caminhoDeAumento}(H, s, t);$

5 $F \leftarrow \text{aumentarFluxo}(P);$

6 $Sat \leftarrow \text{arcosSaturados}(P);$

7 $H \leftarrow \text{limpeza}(H, Sat);$

8 **fim**

9 **Construa** a rede em camadas H com base na rede residual de R ,
considerando o fluxo F ;

10 **até** não ser possível construir rede em camadas H entre os vértices s t ;

Complexidade

Pode ser mostrado que há, no máximo, n gargalos (ou bloqueios), portanto, o laço externo executa $O(n)$ vezes.

Para medir a complexidade do laço interno, utiliza-se a análise amortizada:

- ▶ Podemos utilizar a DFS para determinarmos os caminhos aumentantes em tempo linear $O(n)$, dado que cada caminho possui no máximo $L = n - 1$ vértices;
- ▶ Para cada caminho, são realizadas $O(m)$ limpezas ou aumentos de caminho;
- ▶ Desta forma, o laço interno executa em tempo $O(nm)$

A construção de uma rede em camadas em cada iteração do laço mais externo pode ser realizada em $O(m)$ por uma BFS.

A complexidade geral do algoritmo é, portanto, $O(mn^2)$.

Complexidade

Utilizando árvores dinâmicas, o laço interno tem sua complexidade reduzida para $O(m \log n)$.

Desta forma, a complexidade total se torna $O(mn \log n)$.

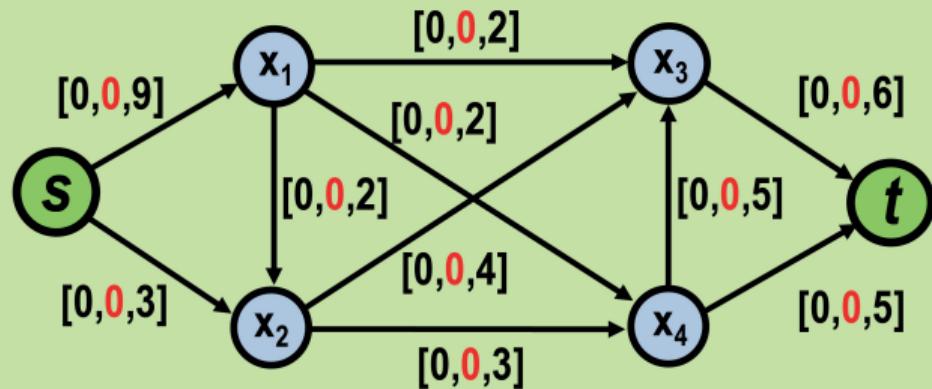
Contribuição de Even

A utilização de BFS e DFS no algoritmo de Dinitz na realidade foi a contribuição de Shimon Even!

A história é relatada em detalhes pelo próprio Yefim Dinitz em um artigo de 2006, dois anos após o falecimento de Shimon Even.

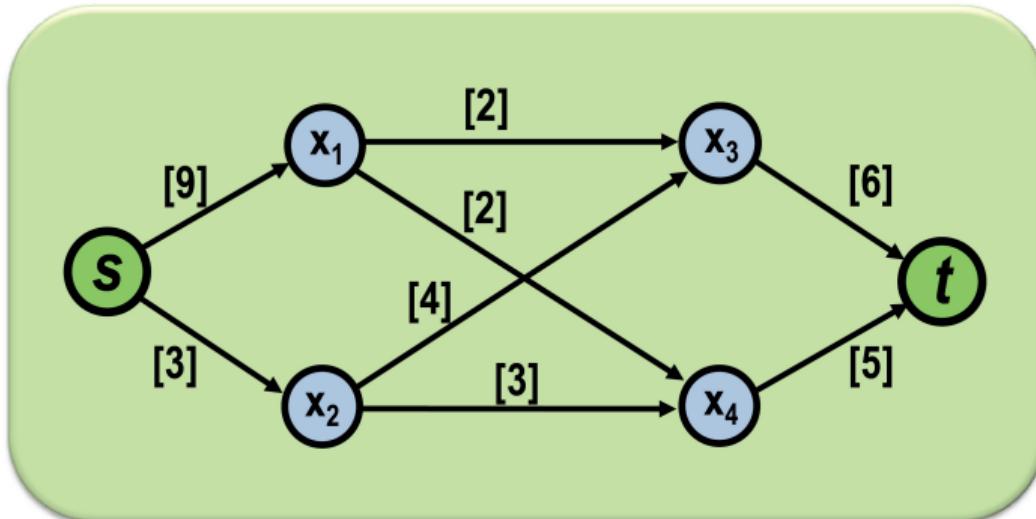
Além disto, o artigo contém a contextualização da escola de algoritmos Russa durante a cortina de ferro e as descrições do algoritmo original e a versão de Even por Yefim Dinitz, invertendo os papéis históricos.

Algoritmo de Dinitz



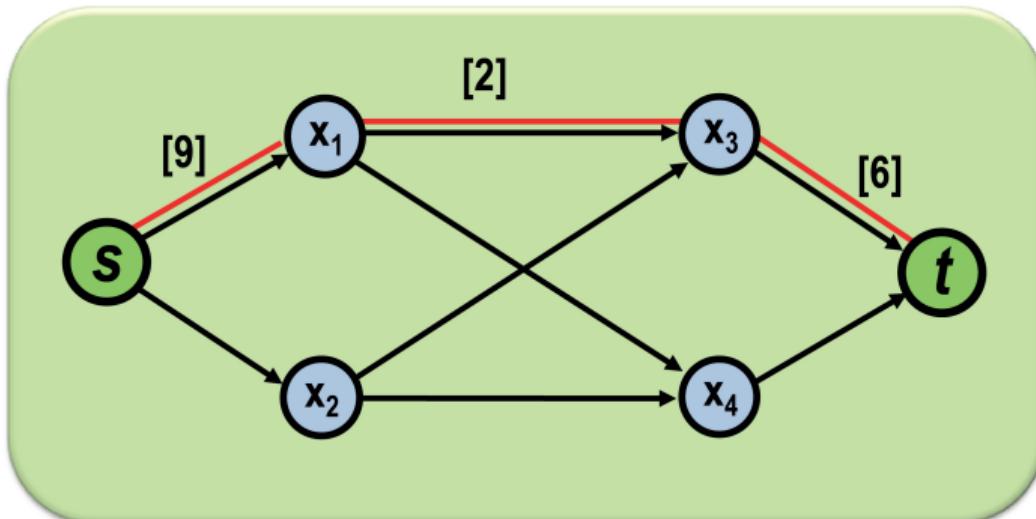
Rede R com um fluxo viável $f = 0$.

Algoritmo de Dinitz



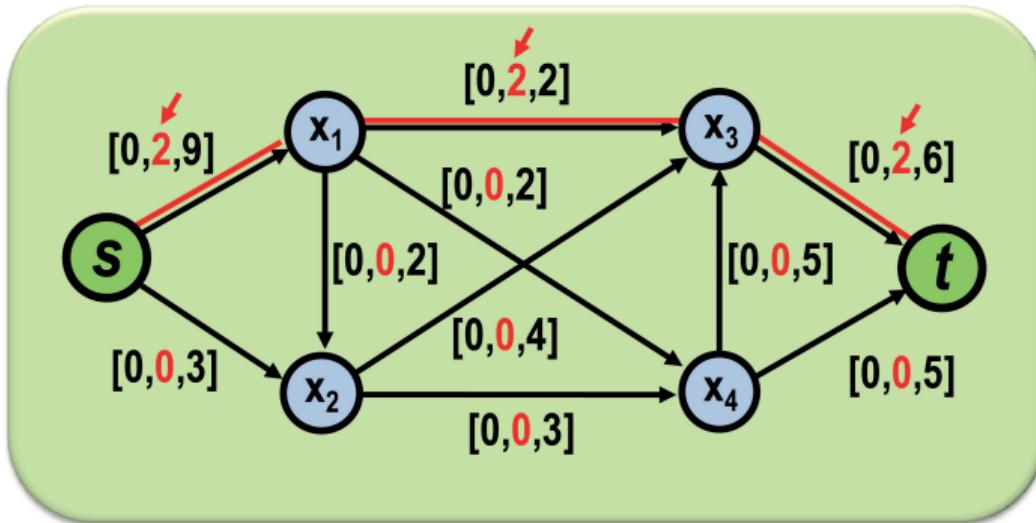
Primeira rede em camadas.

Algoritmo de Dinitz



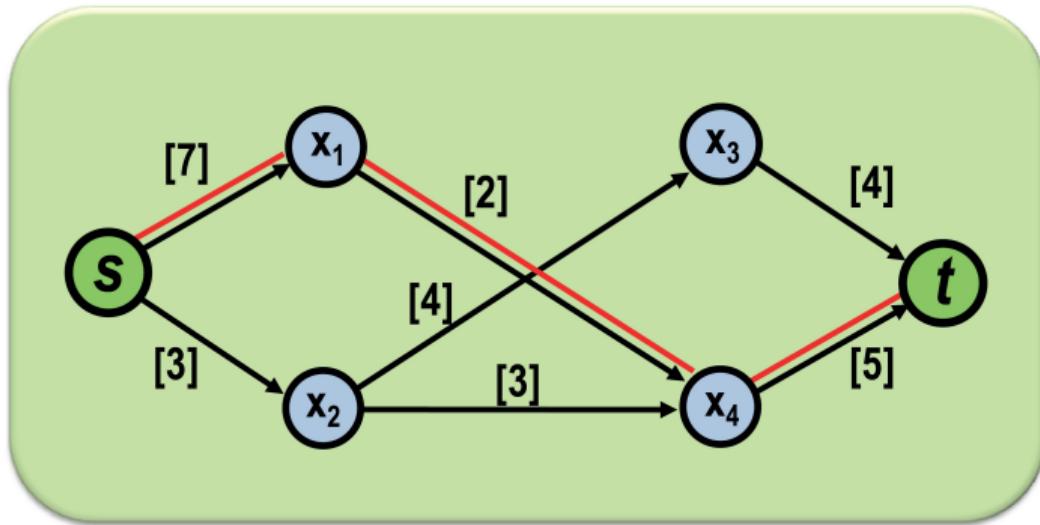
O caminho de aumento de fluxo $P = s - x_1 - x_3 - t$ é escolhido pelo algoritmo e possui gargalo (ou bloqueio) 2.

Algoritmo de Dinitz



Primeiro aumento de fluxo em R (2 unidades).

Algoritmo de Dinitz

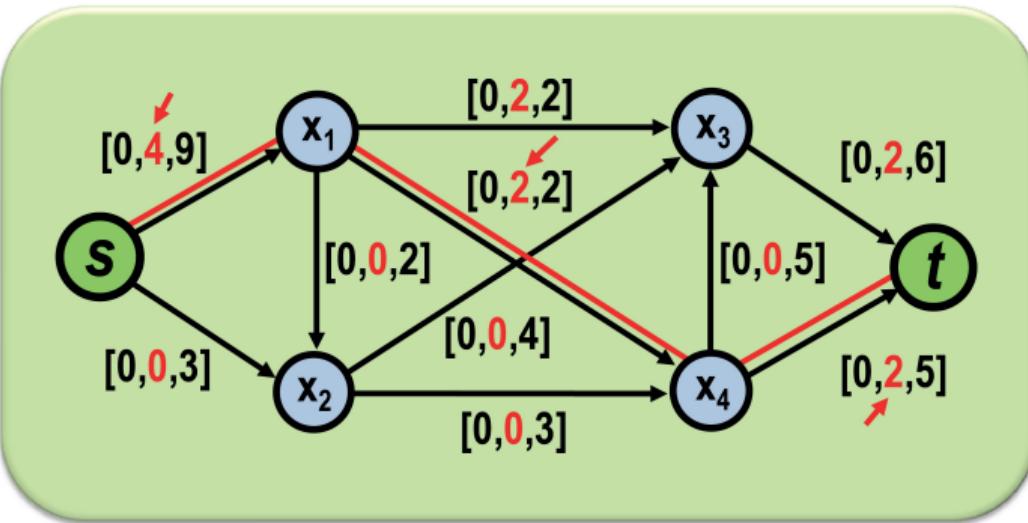


No procedimento de limpeza o arco saturado (x_1, x_3) é removido.

Os arcos (s, x_1) e (x_3, t) tiveram suas capacidades atualizadas.

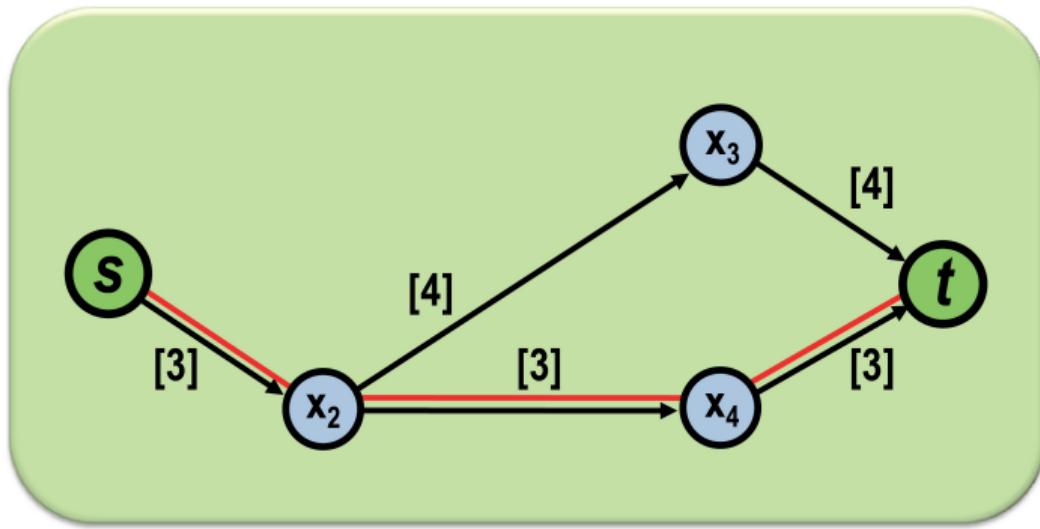
O caminho de aumento de fluxo $P = s - x_1 - x_4 - t$, de gargalo (ou bloqueio) 2 é escolhido.

Algoritmo de Dinitz



Segundo aumento de fluxo em R (2 unidades).

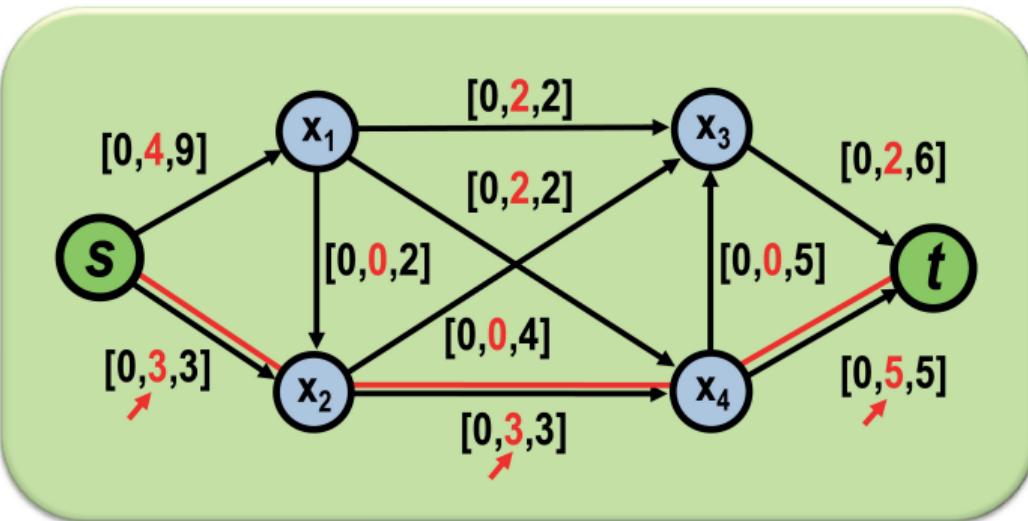
Algoritmo de Dinitz



O arco (x_1, x_4) é removido de H e, como consequência, o vértice x_1 também é retirado, uma vez que o mesmo não possui arcos de saída.

No caminho de aumento de fluxo $P = s - x_2 - x_4 - t$ todos os arcos possuem capacidade 3, permitindo um aumento de fluxo de 3 unidades.

Algoritmo de Dinitz

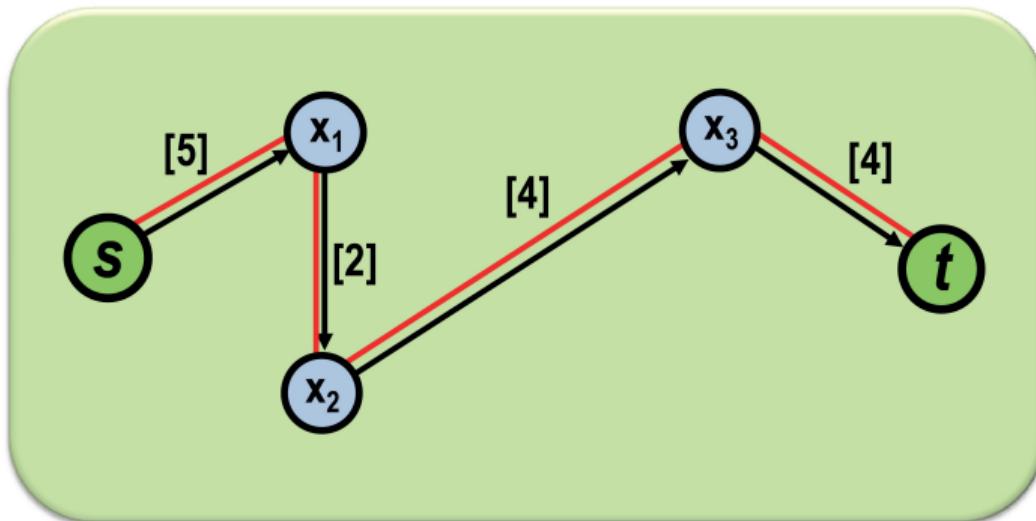


Terceiro aumento de fluxo em R (3 unidades).

Exemplo

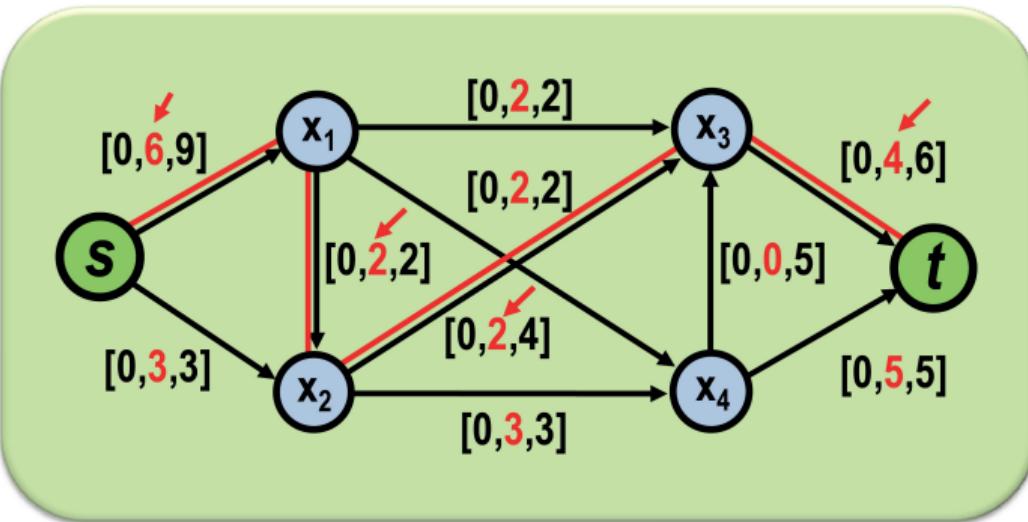
A rede atualizada após a última operação de aumento de fluxo não possui caminho entre s e t , então o laço mais interno termina e o algoritmo constrói uma nova rede em camadas H com base no fluxo circulante, que é mostrada na figura a seguir.

Algoritmo de Dinitz



Único caminho de aumento de fluxo entre s e t : $P = s - x_1 - x_2 - x_3 - t$, com gargalo (ou bloqueio) 2.

Algoritmo de Dinitz



Quarto aumento de fluxo em R (2 unidades).

Exemplo

Após o aumento de fluxo anterior, a rede H é desconectada e o laço mais interno termina.

O algoritmo então inicia a construção de uma nova rede em camadas: o vértice s é incluído na camada 0 e o vértice x_1 na camada 1, o único com um arco utilizável a partir de s .

Entretanto, todos os arcos a partir de x_1 estão saturados e uma rede em camadas entre s e t não pode ser construída.

Portanto, o algoritmo termina mostrando que o fluxo máximo nesta rede tem valor 9.

Yefim Dinitz (2006). “Dinitz’ Algorithm: The Original Version and Even’s Version”. In Oded Goldreich, Arnold L. Rosenberg, and Alan L. Selman. Theoretical Computer Science: Essays in Memory of Shimon Even. Springer. pp. 218–240. Disponível em: http://www.cs.bgu.ac.il/~dinitz/Papers/Dinitz_alg.pdf.

Dúvidas?

