PCC173/BCC463 - Otimização em Redes

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

Conteúdo

Aviso

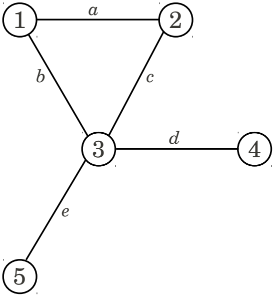
Fonte

Este material é baseado nos livros

- Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.
- Goldbarg, M. C., & Luna, H. P. L. (2005). *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Elsevier.

Licença

Definições



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

Ex.: 1 - *a* - 2 - *c* - 3 - *d* - 4 - *d* - 3 - *e* - 5

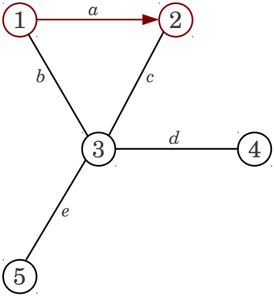
ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1

Definições



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

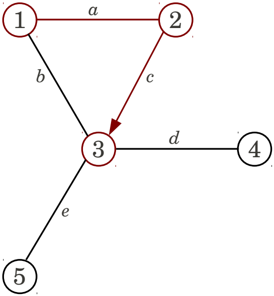
Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

Ex.: 1 - *a* - 2 - *c* - 3 - *d* - 4 - *d* - 3 - *e* - 5
ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

- aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)
- fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1

Definições



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

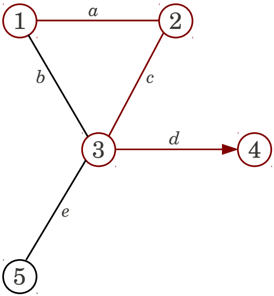
Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

Ex.: 1 - *a* - 2 - *c* - 3 - *d* - 4 - *d* - 3 - *e* - 5
ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

- aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)
- fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

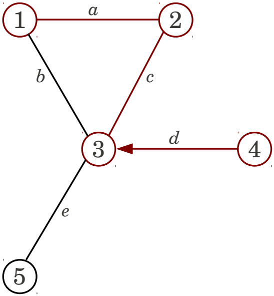
Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

Ex.: 1 - *a* - 2 - *c* - 3 - *d* - 4 - *d* - 3 - *e* - 5
ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

- aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)
- fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1

Definições



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

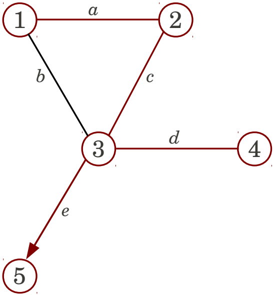
Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

Ex.: 1 - *a* - 2 - *c* - 3 - *d* - 4 - *d* - 3 - *e* - 5
ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

- aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)
- fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

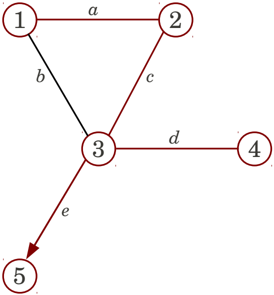
Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

Ex.: 1 - *a* - 2 - *c* - 3 - *d* - 4 - *d* - 3 - *e* - 5
ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

- aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)
- fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

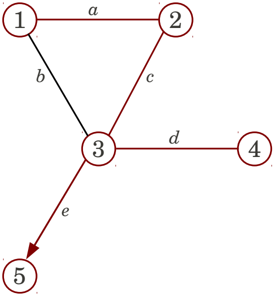
Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

Ex.: 1 - *a* - 2 - *c* - 3 - *d* - 4 - *d* - 3 - *e* - 5
ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

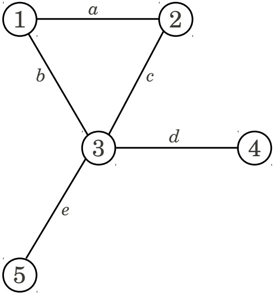
Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

Ex.: 1 - *a* - 2 - *c* - 3 - *d* - 4 - *d* - 3 - *e* - 5
ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

- aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)
- fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1

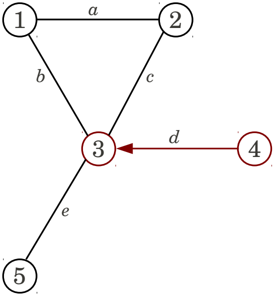


Cadeia

Um passeio sem repetição de **arestas**.

Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5

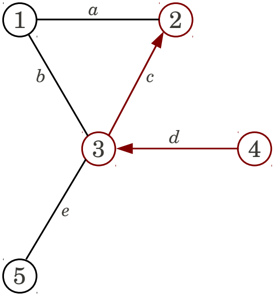
Definições



Cadeia

Um passeio sem repetição de **arestas**.

Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5

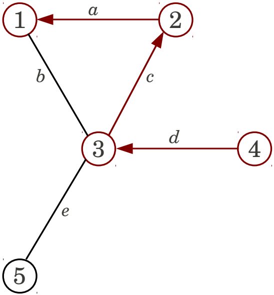


Cadeia

Um passeio sem repetição de **arestas**.

Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5

Definições

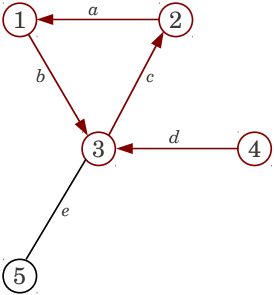


Cadeia

Um passeio sem repetição de **arestas**.

Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5

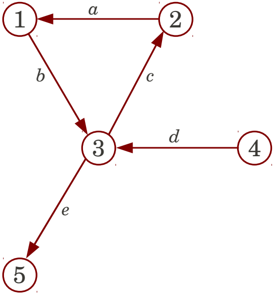
Definições



Cadeia

Um passeio sem repetição de **arestas**.

Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5

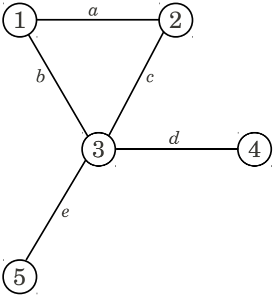


Cadeia

Um passeio sem repetição de **arestas**.

Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5

Definições



Caminho

Uma cadeia sem repetição de **vértices**.

Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

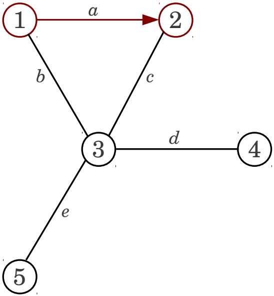
fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-1.

Comprimento

grafo não ponderado: o **número de arestas** que o caminho inclui;

grafo ponderado: o **somatório dos pesos das arestas** que o caminho inclui.

Definições



Caminho

Uma cadeia sem repetição de **vértices**.

Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

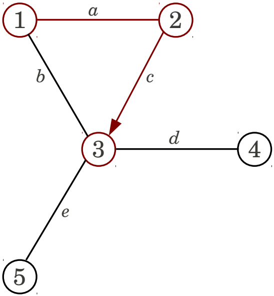
fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-1.

Comprimento

grafo não ponderado: o **número de arestas** que o caminho inclui;

grafo ponderado: o **somatório dos pesos das arestas** que o caminho inclui.

Definições



Caminho

Uma cadeia sem repetição de **vértices**.

Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

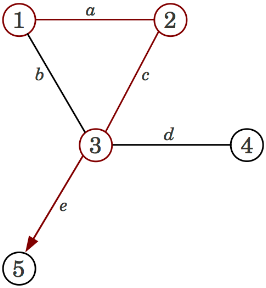
aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-1.

Comprimento

grafo não ponderado: o **número de arestas** que o caminho inclui;

grafo ponderado: o **somatório dos pesos das arestas** que o caminho inclui.



Caminho

Uma cadeia sem repetição de **vértices**.

Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

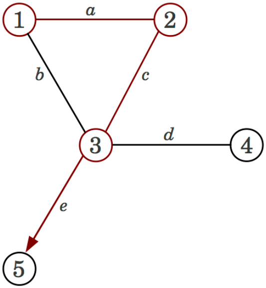
aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-1.

Comprimento

grafo não ponderado: o **número de arestas** que o caminho inclui;

grafo ponderado: o **somatório dos pesos das arestas** que o caminho inclui.



Caminho

Uma cadeia sem repetição de **vértices**.

Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

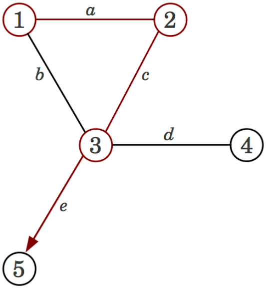
aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-1.

Comprimento

grafo não ponderado: o **número de arestas** que o caminho inclui;

grafo ponderado: o **somatório dos pesos das arestas** que o caminho inclui.



Caminho

Uma cadeia sem repetição de **vértices**.

Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-1.

Comprimento

grafo não ponderado: o **número de arestas** que o caminho inclui;

grafo ponderado: o **somatório dos pesos das arestas** que o caminho inclui.

Recapitulando...

Passeio

Sequência finita de vértices e arestas.

Cadeia

Um passeio que não repete arestas.

Caminho

Uma cadeia sem repetição de vértices.

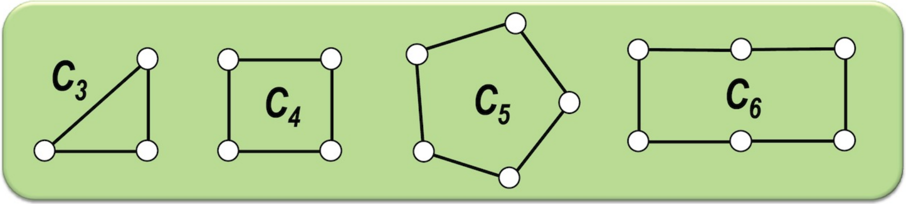
Ciclos

Definição

Um ciclo é um caminho fechado.

Alguns autores, utilizam o termo *circuito* para o caso de grafos orientados.

Grafo Ciclo: Um grafo ciclo C_n é um grafo com n vértices formado por apenas um ciclo passando por todos os vértices.



Definição

Um vértice w é alcançável a partir do vértice v se houver um caminho entre w e v.

Definição

O conjunto de vértices alcançáveis a partir de v é, portanto, formado pelos sucessores de v, os sucessores dos sucessores e assim por diante.

Definição

Um vértice w é alcançável a partir do vértice v se houver um caminho entre w e v.

Definição

O conjunto de vértices alcançáveis a partir de v é, portanto, formado pelos sucessores de v, os sucessores dos sucessores e assim por diante.

Alcançabilidade

Transitividade

Se w é alcançável a partir de v;
e se x é alcançável de w;
então x é alcançável a partir de v.

Transitividade

Relação de Alcançabilidade é transitiva.

Alcançabilidade

Transitividade

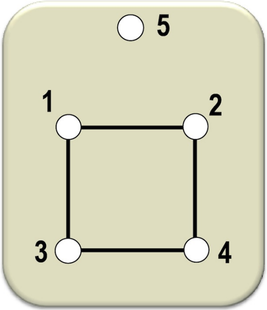
Se w é alcançável a partir de v;
e se x é alcançável de w;
então x é alcançável a partir de v.

Transitividade

Relação de Alcançabilidade é transitiva.

Definição

O Fecho Transitivo de um vértice v (denotado por $\hat{\Gamma}(v)$) é o conjunto dos vértices de um grafo alcançáveis a partir de v.



$\hat{\Gamma}(1) = \{2, 3, 4\}$
$\hat{\Gamma}(5) = \{\}$

Fecho Transitivo de um Vértice - Grafo Direcionado

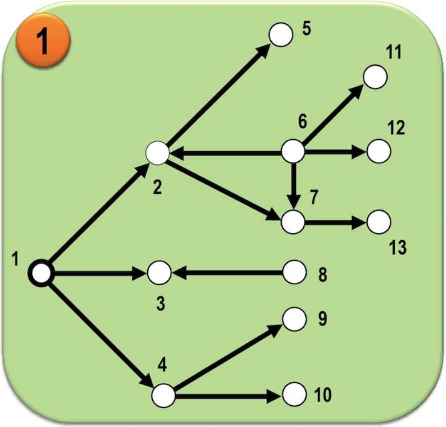
Fecho Transitivo Direto

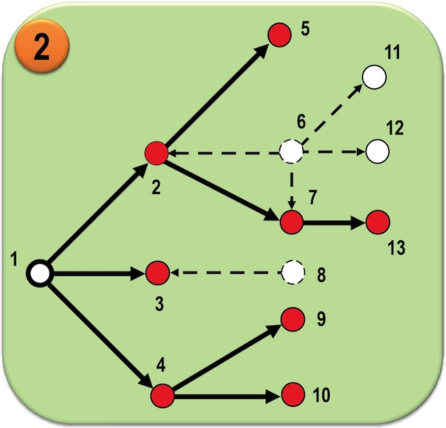
O Fecho Transitivo Direto de um vértice v (denotado por $\hat{\Gamma}^{+}(v)$) é o conjunto dos vértices de um grafo alcançáveis a partir de v.
Os vértices em $\hat{\Gamma}^{+}(v)$ são chamados de descendentes de v.

Fecho Transitivo Indireto

O Fecho Transitivo Indireto de um vértice v (denotado por $\hat{\Gamma}^{-}(v)$) é o conjunto dos vértices de um grafo a partir dos quais v é alcançável.
Os vértices em $\hat{\Gamma}^{-}(v)$ são chamados de ascendentes de v.

Fecho Transitivo Direto e Indireto





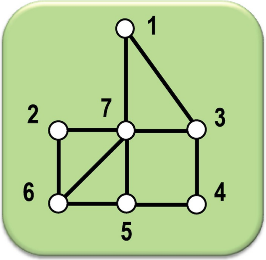
$\hat{\Gamma}^{+}(1) = \{2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 13\}$
$\hat{\Gamma}^{-}(10) = \{1, 4\}$

Conexidade em Grafos Não Direcionados

Definição

Em um GND conexo, todos os vértices são alcançáveis a partir de qualquer outro.

Em um GND conexo, sempre é possível fazer um passeio fechado que inclua todos os vértices.



Definição

Se G é um grafo direcionado, então é considerado conexo quando seu grafo subjacente não direcionado é conexo.

O grafo subjacente não direcionado é o grafo resultante da de G quando a orientação dos arcos é ignorada.

Subgrafos

Definição

Um grafo $G_s = (V_s, A_s)$ é dito ser um subgrafo de um grafo $G =$ (V, A) se todos os vértices e todas as arestas de G_s estão em G, ou seja, se $V_s \subseteq V$ e $A_s \subseteq A$

Subgrafo Maximal

Um subgrafo G_s de G é dito maximal em relação a uma propriedade τ se não for um subgrafo de nenhum outro subgrafo de G que também possua a propriedade τ.

Propriedades

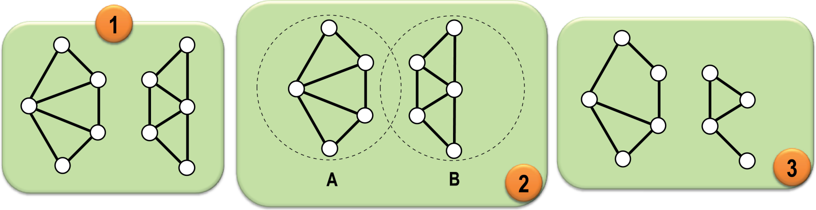
- Todo grafo é subgrafo de si próprio;
- O subgrafo G_{s2} de um subgrafo G_s de G também é subgrafo de G.

Componentes Conexas

Um componente conexo de um grafo G é um subgrafo conexo maximal de G.

O número de componentes conexas em G é denotado por c;

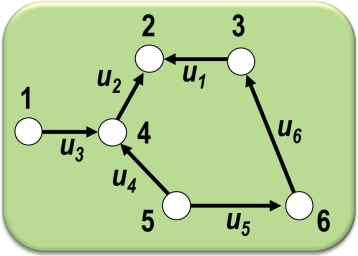
Grafos conexos possuem apenas um componente conexo.



Grafo conexo, componentes conexas e subgrafos não maximais.

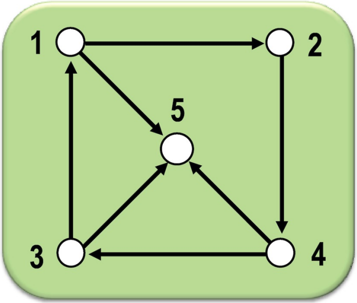
Grafo Simplesmente Conexo: s-conexo

O grafo subjacente não-direcionado obtido através da substituição de todas as arestas de G por arestas não direcionadas é um grafo conexo.



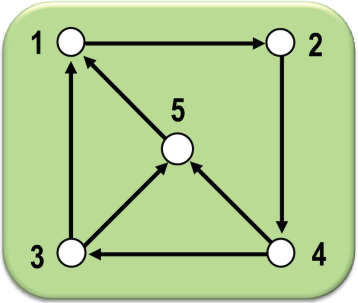
Grafo Semi-Fortemente Conexo: sf-conexo

Para cada par de vértices (v_1, v_2), existe um caminho de v_1 para v_2 **ou** de v_2 para v_1.



Grafo Fortemente Conexo: f-conexo

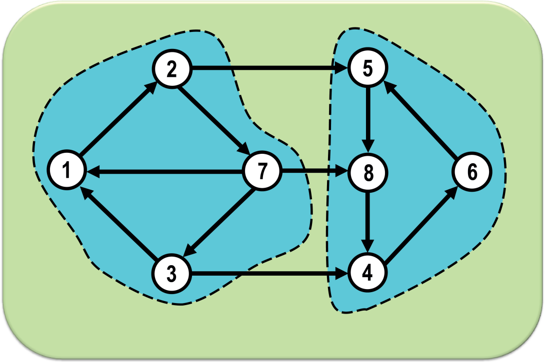
Para cada par de vértices (v_1, v_2), existe um caminho direcionado de v_1 para v_2 e de v_2 para v_1.



Conexidade em Grafos Direcionados

Componentes Fortemente Conexos

Em um grafo direcionado, componentes fortemente conexos são subgrafos maximais f-conexos.



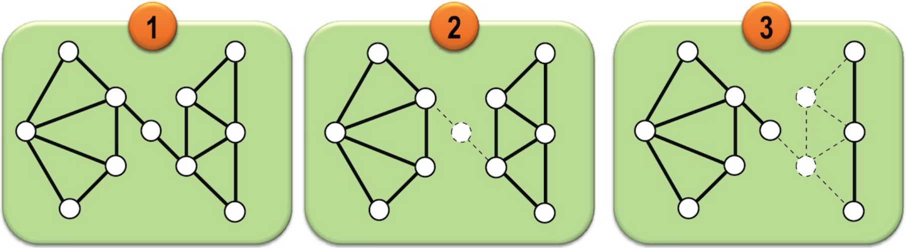
Conexidade ou Conectividade em Vértices

Definição

A conexidade ou conectividade em vértices $\kappa(G)$ de um grafo $G = (V, E)$ é o menor número de vértices cuja remoção desconecta G ou o reduz a um único vértice.

Atenção

- Conceito aplicado a Grafos Não Direcionados;
- Indica o quanto um grafo é conexo.



Exemplos de remoções de conjuntos de vértices que desconectam o grafo. Neste caso, $\kappa(G) = 1$ (figura 2).

Conexidade ou Conectividade em Vértices

Grafos Completos

Para grafos completos com n vértices, $\kappa(K_n) = n - 1$.

Grafos Não Completos

Para grafos não completos haverá um par (v_1, v_2) de vértices não adjacentes, então temos que:

$$\kappa(G) \leq n - 2 \quad \forall G \neq K_n$$

Limite superior para $\kappa(G)$ em qualquer grafo:

$$\kappa(G) \leq \delta(G)^a$$

[a] $\delta(G)$: menor grau em um GND.

Conexidade ou Conectividade em Vértices

Grafos Completos

Para grafos completos com n vértices, $\kappa(K_n) = n - 1$.

Grafos Não Completos

Para grafos não completos haverá um par (v_1, v_2) de vértices não adjacentes, então temos que:

$$\kappa(G) \leq n - 2 \quad \forall G \neq K_n$$

Limite superior para $\kappa(G)$ em qualquer grafo:

$$\kappa(G) \leq \delta(G)^a$$

[a] $\delta(G)$: menor grau em um GND.

Conexidade ou Conectividade em Vértices

Grafos Completos

Para grafos completos com n vértices, $\kappa(K_n) = n - 1$.

Grafos Não Completos

Para grafos não completos haverá um par (v_1, v_2) de vértices não adjacentes, então temos que:

$$\kappa(G) \leq n - 2 \quad \forall G \neq K_n$$

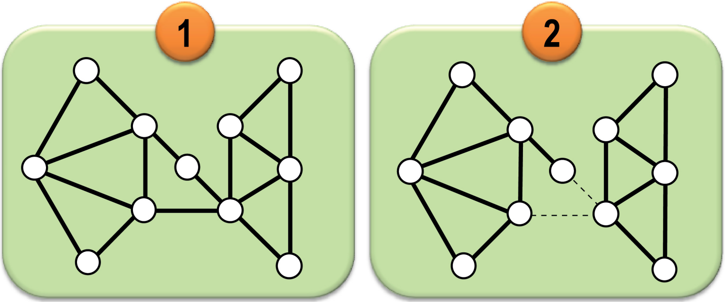
Limite superior para $\kappa(G)$ em qualquer grafo:

$$\kappa(G) \leq \delta(G)^{a}$$

[a] $\delta(G)$: menor grau em um GND.

Definição

A conexidade ou conectividade em arestas $\lambda(G)$ de um grafo $G = (V, E)$ é o menor número de arestas cuja remoção desconecta G.



Exemplo de remoção de conjuntos de aresta que desconectam o grafo. Neste caso, $\lambda(G) = 2$ (figura 2).

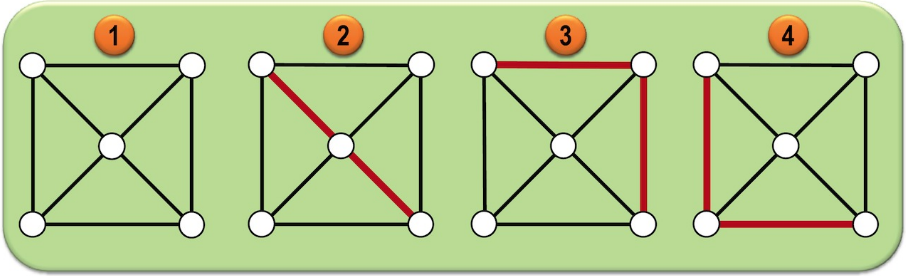
k-Conexidade ou k-Conectividade

Definição

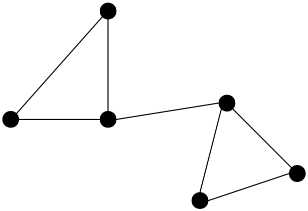
Um grafo $G = (V, E)$ é k-conexo se e somente se para todo par $v, w \in V, v \neq w$ existirem ao menos k percursos disjuntos.

Caminhos Disjuntos

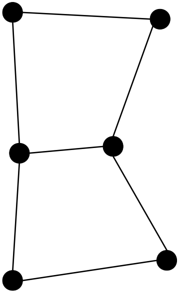
Dois percursos entre os vértices v e w de um grafo são disjuntos se não houver interseção de arestas.



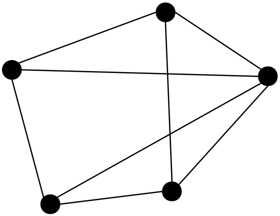
k-Conexidade ou k-Conectividade



1-Conexo



2-Conexo



3-Conexo

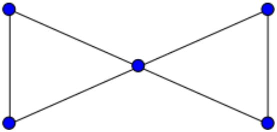
Propriedades

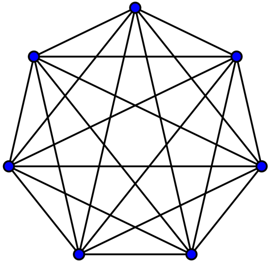
Para todo grafo k-conexo:

$$\kappa(G) \leq \delta(G)$$

$$\kappa(G) \leq k$$

k-Conexidade ou k-Conectividade





Exemplos

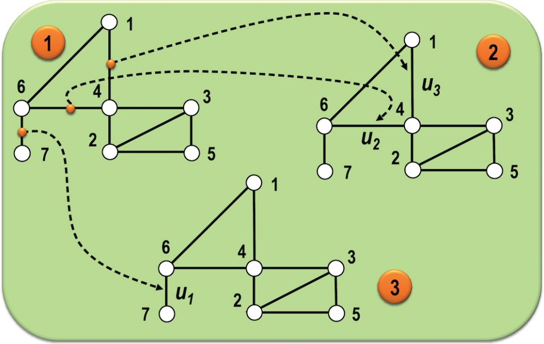
Grafo borboleta: 2-conexo

K_7: 6-conexo, mas também é 1-conexo, 2-conexo, 3-conexo, 4-conexo, 5-conexo...

$$k \geq \kappa(G) \leq \delta(G)$$

Aresta de articulação (ou Ponte)

Uma aresta de articulação de um grafo G é uma aresta cuja remoção resulta na desconexão de G.

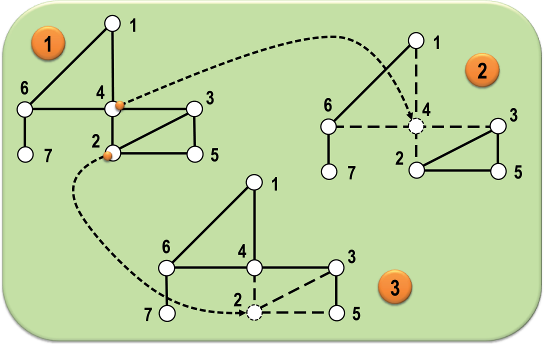


A aresta u_1 é de articulação. As arestas u_3 e u_4 não são.

Articulação

Vértice de articulação

Um vértice de articulação de um grafo G é um vértice cuja remoção resulta na desconexão de G.



O vértice 4 é de articulação, porém, o vértice 2 não é.

Dúvidas?