PCC173/BCC463 - Otimização em Redes

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

decom
departamento de computação

Conteúdo

Aviso

Fonte

Este material é baseado no livro

- Goldbarg, M. C., & Luna, H. P. L. (2005). *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Elsevier.

Licença

Recapitulando... Algoritmo

Definição Informal

É qualquer procedimento computacional bem definido que toma algum valor ou conjunto de valores como **entrada** e produz algum valor ou conjunto de valores como **saída**. Portanto, é uma sequência de passos computacionais que transformam uma entrada em uma saída.

Definição Informal 2

Uma ferramenta para resolver um problema computacional bem especificado. O enunciado do problema especifica em termos gerais o relacionamento entre entrada e saída. O algoritmo descreve um procedimento computacional para alcançar esse relacionamento da entrada com a saída.

Definição

Um problema computacional pode ser visto como uma coleção infinita de instâncias junto com uma solução para cada instância.

Definição Informal

Um problema computacional é uma questão geral a ser respondida, possuindo determinados parâmetros.

Exemplo

Problema de Ordenação

Ordenar uma sequência de números de maneira crescente.

Entrada

Uma sequência de n números distintos $<a_1, a_2, \ldots, a_n>$.

Saída

Uma permutação $<a'_1, a'_2, \ldots, a'_n>$ da sequência de entrada, tal que $a'_1 < a'_2 < \ldots < a'_n$.

Instância de um Problema

Uma **instância** de um problema consiste na entrada necessária para se calcular uma solução para o problema, por exemplo <31, 41, 59, 25, 48>.

Problema Computacional

Problema de Decisão

Tipo de problema computacional em que a resposta para cada instância é sim ou não:

"Dadas uma lista de cidades e as distâncias entre todas elas, há uma rota que visite todas as cidades e retorne à cidade original com distância total menor do que 500 km?"

Problema de Busca

Tipo de problema computacional em que é necessário determinar uma possível solução:

"Dadas uma lista de cidades e as distâncias entre todas elas, determine uma rota que visite todas as cidades e retorne à cidade original."

Problema de Contagem

Tipo de problema computacional em que é necessário determinar a quantidade de soluções para um problema de busca:

"Dadas uma lista de cidades e as distâncias entre todas elas, quantas rotas que visitem todas as cidades e retornam à cidade original existem?"

Problema de Otimização Combinatória

Tipo de problema computacional em que é necessário determinar a melhor solução possível entre todas as soluções viáveis.

"Dadas uma lista de cidades e as distâncias entre todas elas, determine a menor rota que visite todas as cidades e retorne à cidade original."

Definição

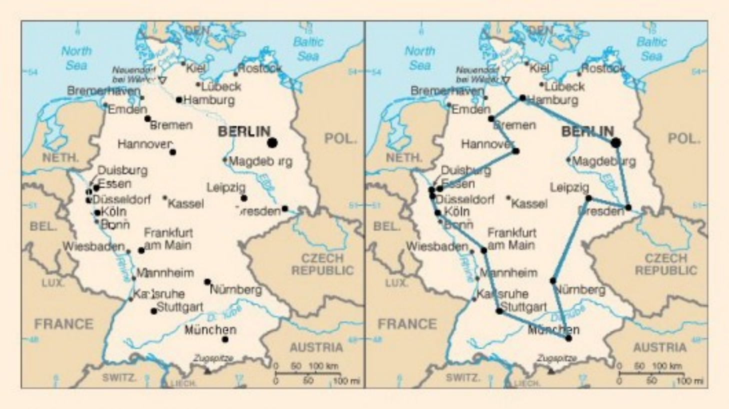
Um problema combinatório é um problema que possui um conjunto de **elementos** (ou **variáveis**) e para sua solução é exigida uma combinação de um subconjunto destes elementos.

Diferentes combinações possuem diferentes valores, porém, o **objetivo** é **otimizar** a solução (achar a de maior valor – **maximização** ou a de menor valor – **minimização**) de acordo com a **função objetivo** ou **função de avaliação**.

As combinações são limitadas por **restrições**, que são regras que definem se uma combinação é **viável** ou **inviável**.

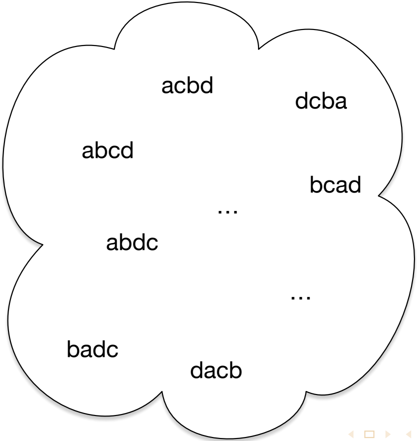
O Problema do Caixeiro Viajante

Dadas uma lista finita de cidades e as distâncias entre todas elas, determine a menor rota que visite todas as cidades e retorne à cidade original, sem repetir nenhuma cidade.



Mais Definições

O espaço de soluções de um problema combinatório é o conjunto de todas as soluções possíveis, podendo ser restrito às soluções viáveis ou não.



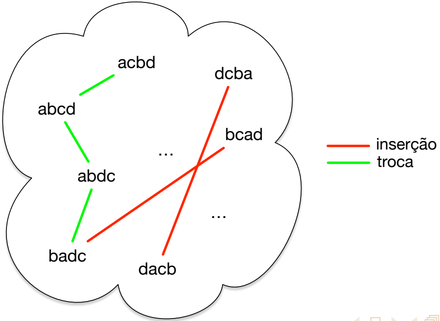
Uma Mente Brilhante - "A cena do Pentágono"
https://youtu.be/aLj8WCO-2QI.

Problemas Combinatórios

Mais Definições

Ao explorarmos o espaço de soluções utilizando alguma técnica, realizamos movimentos entre soluções, ou seja, a partir de uma solução atual, a alteramos de uma determinada maneira e chegamos a uma outra solução.

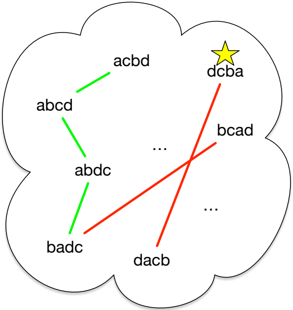
Um movimento induz uma vizinhança no espaço de soluções, tal que as soluções que se diferem entre si por um movimento são ditas vizinhas.



Mais Definições

Uma solução ótima global é uma solução viável que atinge o melhor valor possível de acordo com a função de avaliação de um problema combinatório.

Podemos ter uma ou múltiplas soluções ótimas para um problema, todas com o mesmo valor de avaliação, porém, com configurações diferentes.



Exemplo - O Problema do Caixeiro Viajante

Os elementos a serem combinados são as cidades.

O espaço de soluções são todas as permutações de cidades.

Uma função objetivo possível é a soma das distâncias entre as cidades na rota estabelecida.

A função objetivo deve ser minimizada.

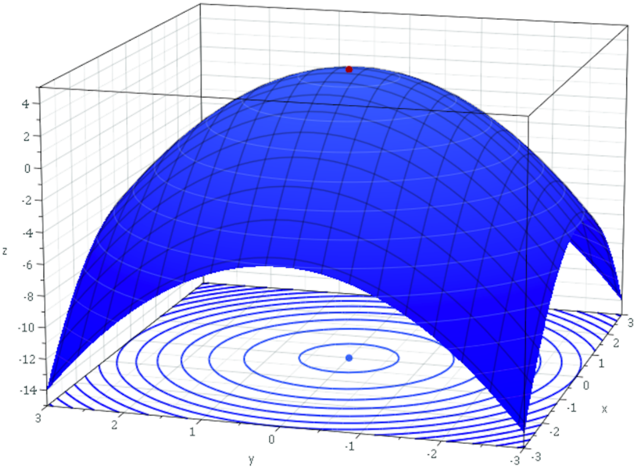
A única restrição é a visitar cada cidade exatamente uma vez.

Uma solução ótima global é a rota viável de menor distância total, ou seja, o melhor valor de função objetivo.

Realocar uma cidade na rota, ou trocar duas cidades de posição caracterizam um movimento.

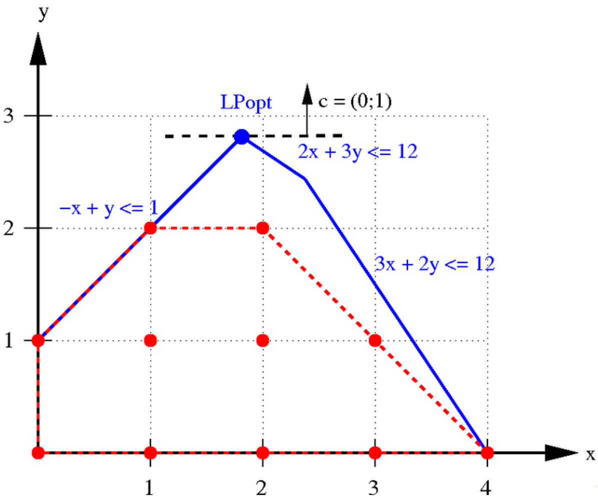
Função Objetivo e Ótimo Global

Gráfico da função $f(x, y) =$ -$(x^2 + y^2)$+4. A solução ótima (0, 0, 4) é indicada por um ponto vermelho.



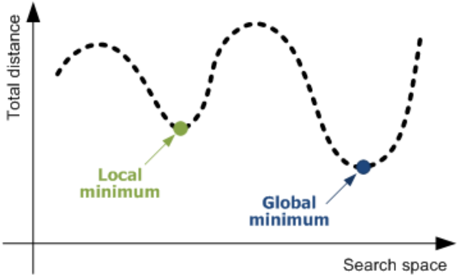
Viabilidade

Um problema com 5 restrições lineares (incluindo as 2 de não negatividade). Na ausência de restrições de integralidade, a região viável é representada em azul, caso contrário, em vermelho.



Mais Definições

Uma solução ótima local ou subótima é uma solução viável que atinge o melhor valor de função objetivo de um problema combinatório entre as soluções vizinhas.



Exemplo de ótimo local e global em um problema de minimização.

Problemas Combinatórios

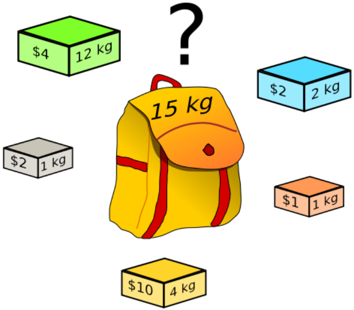
Caracterização

Em resumo, problema combinatório é composto dos seguintes componentes:

- Função objetivo;
- Conjunto de elementos;
- Conjunto de restrições.

O Problema da Mochila 0-1

Dadas uma mochila de capacidade W e uma lista de n itens distintos e únicos (enumerados de 1 a n), cada um com um peso $w_1, w_2, \ldots, w_n$ e um valor $v_1, v_2, \ldots, v_n$, maximizar o valor carregado na mochila, respeitando sua capacidade.



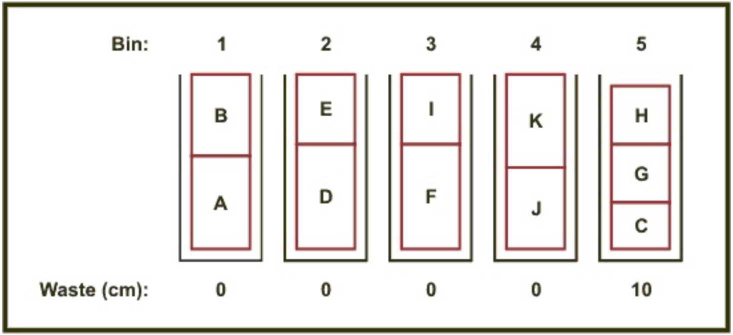
O Problema da Mochila 0-1

Elementos:	Itens;
Espaço de soluções:	Todos os possíveis agrupamentos de itens;
Função objetivo:	Soma dos valores dos itens;
Direção da Função Objetivo:	Maximização;
Restrições:	Capacidade da mochila;
Movimento:	Remover ou inserir um item na mochila.

Problemas Combinatórios

Bin Packing

Dadas uma lista finita de objetos de volumes diferentes e uma lista finita de caixas de volume V, empacotar todos os objetos minimizando o número total de caixas.



Bin Packing

Elementos:	Objetos;
Espaço de soluções:	Todas as combinações de objetos e caixas;
Função Objetivo:	Número de caixas utilizadas;
Direção da Função Objetivo:	Minimização;
Restrição:	Respeitar o volume das caixas;
Movimento:	Inserir ou remover um objeto de uma caixa.

Subset Sum

Dado um conjunto (ou multiconjunto) de números inteiros, determinar se há um subconjunto não vazio cuja soma seja exatamente s.

Exemplo

Consideremos o conjunto {-7, -3, -2, 5, 8 } e $s = 0$.

A resposta é *sim*, porque o subconjunto {-3, -2, 5} possui soma s.

Subset Sum

Elementos:	Os números inteiros;
Espaço de soluções:	Todos os subconjuntos do conjunto original;
Função Objetivo:	Soma dos elementos;
Restrição:	A soma dos elementos deve ser s;
Movimento:	Adicionar ou remover um elemento do subconjunto.

Modelos de Otimização

Os modelos são representações simplificadas da realidade que preservam, para determinadas situações e enfoques, uma equivalência adequada.

Um modelo não é igual a realidade, mas suficientemente similar para que as conclusões obtidas através de sua análise e/ou operação, possam ser estendidas à realidade.

As técnicas que abordaremos destinam-se a estruturar e modelar os modelos quantitativos que podem ser expressos matematicamente.

Estes modelos são estruturados de maneira lógica e amparados no modelo ferramental matemático de representação, objetivando claramente a determinação das melhores condições de funcionamento para os sistemas representados.

Problema de Otimização Contínua

Um *Problema de Otimização Contínua* pode ser formalizado matematicamente da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
&Otimizar\ f(x) \\
&\quad sujeito\ a: \\
&\qquad h_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, m_h \\
&\qquad g_j(x) \leq 0,\ j = 1, \ldots, m_g \\
&\qquad x \in \mathcal{R}^n
\end{aligned}
$$

Em que f (função objetivo), h (restrições de igualdade) e g (restrições de desigualdade) são funções contínuas, geralmente diferenciáveis em problemas tratáveis de grande porte.

Problema de Otimização Discreta

Dados um conjunto finito $E = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ e uma coleção de subconjuntos F de E

$$\emptyset \neq F \subseteq 2^{|E|}$$

e uma função objetivo

$$C : f \to \mathcal{R}$$

Um **Problema de Otimização Discreta** pode ser expresso como o desejo de obter um conjunto $S^* \in F$ satisfazendo

$$C(S^*) \geq C(S), \forall S \in F \text{ (maximização)}$$
$$C(S^*) \leq C(S), \forall S \in F \text{ (minimização)}$$

e sujeito a uma série de restrições.

Problema de Otimização Discreta

S é uma solução viável para o problema;

S^* é a solução ótima;

C é a função objetivo;

F é o espaço de soluções viável do problema.

Modelagem Matemática

Os principais modelos de Otimização/Pesquisa Operacional são denominados de **Programação Matemática**.

Note que o termo "programação" deve ser entendido como "planejamento".

Embora o processo de modelagem matemática em si variar pouco, as técnicas de solução são agrupadas em subáreas, como:

- Programação Linear;
- Programação Não-Linear;
- Programação Inteira.

Modelagem de Problemas

Programação Linear

Caso particular dos modelos de programação em que as variáveis são contínuas, e apresenta comportamento linear, tanto em relação às restrições quanto em relação à função objetivo.

Programação Não-Linear

Um modelo de programação é considerado não-linear se apresentar qualquer tipo de não linearidade, seja na função objetivo ou em qualquer uma de suas restrições.

Programação Inteira

Um modelo de Programação Inteira é assim considerado se qualquer variável não puder assumir valores contínuos, ficando condicionada a assumir valores discretos.

Este requisito, normalmente implica maior complexidade computacional do que a oriunda de não linearidade de funções.

Modelos de Programação Linear

Dentre os diversos modelos, nos concentraremos nos modelos de Programação Linear (PL).

Este modelo é a base para a compreensão de todos os outros modelos de programação matemática, podendo ter seus conceitos estendidos aos demais.

Outra vantagem está na eficiência dos algoritmos de solução (*solvers*) existentes, provendo alta capacidade de cálculo e facilidade de implementação, inclusive por meio de planilhas eletrônicas.

Modelos de Programação Linear

Podemos formular de maneira geral um Problema de Programação Linear (PPL) da seguinte maneira:

$$Otimizar\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$sujeito\ a:$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,\ \ i = 1, \ldots, p$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ \ i = p+1, p+2, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0,\ \ j = 1, \ldots, n$$

$$x_j \in \mathcal{R},\ \ j = 1, 2, \ldots, n$$

Notação

- $M = \{1, 2, \ldots, m\}$: conjunto dos índices das restrições do problema;
- $N = \{1, 2, \ldots, n\}$: conjunto dos índices das variáveis;
- $A = \{a_{ij}\} \equiv$ matriz de restrições;
- $x = (x_j), j \in N$: vetor coluna de n componentes;
- $c = (c_j), j \in N$: vetor coluna de n componentes;
- $b = (b_i), i \in M$: vetor coluna de m componentes.

O termo "otimizar" é utilizado genericamente para representar as possibilidades de minimizar/maximizar.

O problema consiste em, dados a matriz A, e os vetores b e c, achar o vetor de variáveis x que satisfaça ao conjunto de restrições e que otimize o valor do critério z.

O Problema da Mochila 0-1

Dadas uma mochila de capacidade W e uma lista de n itens distintos e únicos (enumerados de 1 a n), cada um com um peso $w_1, w_2, \ldots, w_n$ e um valor $v_1, v_2, \ldots, v_n$, maximizar o valor carregado na mochila, respeitando sua capacidade.

$$max\ z = \sum_{j=1}^{n} v_j x_j$$

$$sujeito\ a:$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq W$$

$$x_j \in \{0, 1\},\ j = 1, 2, \ldots, n$$

O Problema da Mochila 0-1

Consideremos a seguinte instância do Problema da Mochila 0-1:

Item	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Peso	52	23	35	15	7
Valor	100	60	70	15	8

Utilizando estes dados no modelo, temos:

$$
\begin{aligned}
max\ z = & 100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4 + 8x_5 \\
sujeito\ a: & \\
& 52x_1 + 23x_2 + 35x_3 + 15x_4 + 7x_5 \leq 60 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Dúvidas?