

PCC173/BCC463 - Otimização em Redes

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto



- 1 Problemas de Fluxo em Redes
- 2 Conservação de Fluxo
- 3 Formulação Matemática dos Problemas de Fluxo em Redes

Fonte

Este material é baseado nos livros

- ▶ Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.
- ▶ Goldbarg, M. C., & Luna, H. P. L. (2005). *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Elsevier.

Licença

Este material está licenciado sob a Creative Commons BY-NC-SA 4.0. Isto significa que o material pode ser compartilhado e adaptado, desde que seja atribuído o devido crédito, que o material não seja utilizado de forma comercial e que o material resultante seja distribuído de acordo com a mesma licença.

Descrição

Os chamados **Problemas de Fluxo em Redes** abordam o processo de recursos originados em um ponto de oferta e consumidos em um ponto de demanda dentro de uma rede de interligações possíveis.

Estes problemas normalmente ocorrem dentro de plantas industriais, sistemas de comunicação e de transporte, de distribuição de água, energia elétrica, dados e etc.

Contudo, servem de modelo para inúmeras outras situações absolutamente diversas que lhe são assemelhadas por abstração.

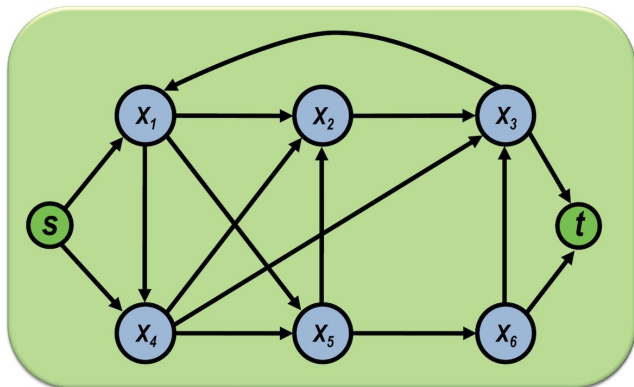
Descrição

Em problemas de fluxo em redes, normalmente:

- ▶ A oferta de cada recurso, bem como sua demanda, possui um valor conhecido;
- ▶ A distribuição de recursos permite pontos intermediários, tais como depósitos ou centros de concentração e distribuição;
- ▶ As interligações podem possuir restrições de capacidade de tráfego e custos variados.

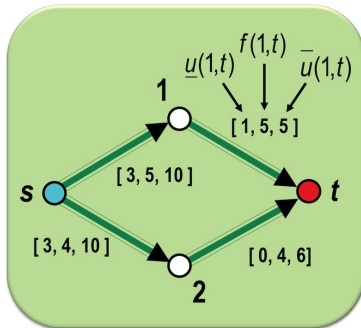
Definição

- ▶ Uma **rede** $R = (V, A, F, U)$ é definida por um **grafo direcionado** $G = (V, A)$ atravessado por um **fluxo**
 - ▶ Vértice tipo **s**: **source** ou **fonte**, emissor do fluxo;
 - ▶ Vértice tipo **t**: **terminal** ou **sumidouro**, consumidor do fluxo.
- ▶ Um **fluxo** F pode ser representado por $F = \{f(i, j)\}, i, j \in V$;
- ▶ O conjunto $U = \{u(i, j)\}, i, j \in V$ é o **conjunto de limites de fluxo** associados aos arcos de A .
 - ▶ $\bar{u}(i, j)$ é o **limite máximo** do fluxo;
 - ▶ $\underline{u}(i, j)$ é o **limite mínimo** do fluxo;
 - ▶ Caso não exista limite inferior, considera-se zero;



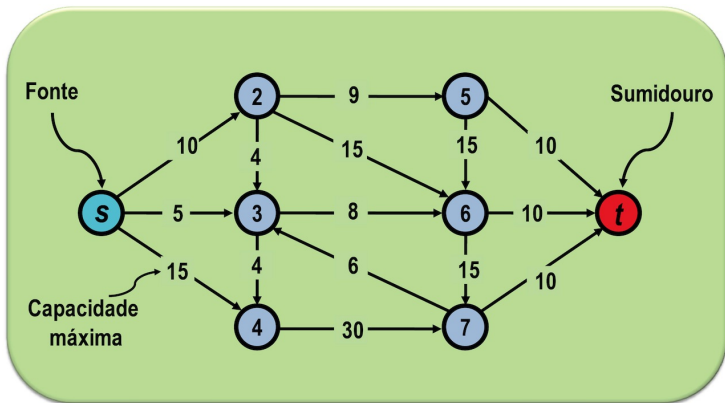
Grafo subjacente a uma Rede R .

Os vértices s e t são a fonte e o sumidouro, respectivamente.



Rotulação com limites de fluxo.

Fluxo em Redes



Exemplo de uma rede em que há apenas limite máximo para o fluxo.

Conservação de Fluxo

1a. lei de *Kirchoff*

- ▶ Para todo fluxo conservativo em uma rede, o fluxo que chega a um vértice de passagem deve ser igual ao fluxo que sai deste mesmo vértice;
- ▶ Os vértices de uma rede que atendem a esta lei são denominados **vértices conservativos**.

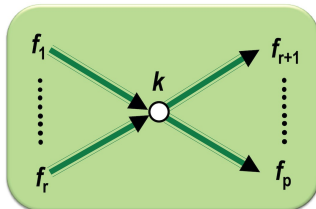


Ilustração da 1a. Lei de *Kirchoff*.

1a. lei de *Kirchoff*

$$\sum (f_1 + \dots + f_r) = \sum (f_{r+1} + \dots + f_p)$$

ou

$$\sum_{i \in \Gamma^-(x)} f(i, x) = \sum_{j \in \Gamma^+(x)} f(x, j)$$

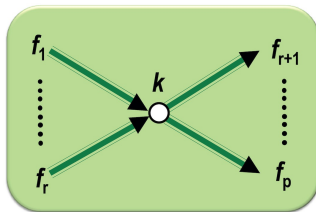


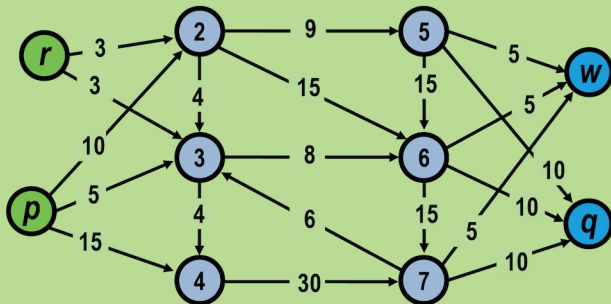
Ilustração da 1a. Lei de *Kirchoff*.

Transformações

Os vértices sumidouro e fonte **não atendem** a 1a. Lei de *Kirchoff*. Todavia, a rede pode ser transformada para que estes vértices também atendam a esta lei:

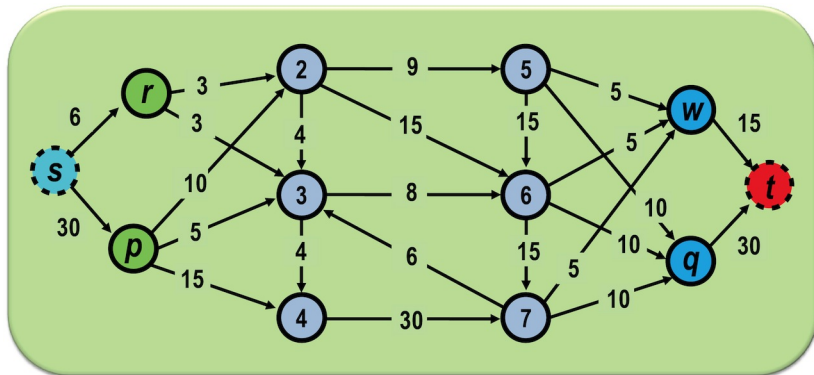
- ▶ Transformação 1: redução de todos os vértices de oferta em um único vértice **fonte** e de todos os vértices de consumo em um único vértice **sumidouro**;
- ▶ Transformação 2: adaptação dos vértices fonte e sumidouro em vértices conservativos.

Conservação de Fluxo



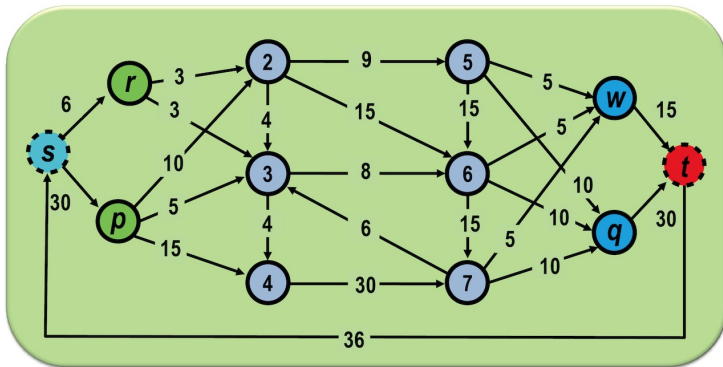
Rede original.

Conservação de Fluxo



Primeira transformação: rede com os vértices de demanda e oferta unificados.

Conservação de Fluxo



Adaptação dos vértices s e t .

A capacidade do arco é o menor valor entre oferta (36) e demanda (45).

Segunda transformação: todos os vértices atendem à lei de conservação do fluxo.

Elementos

Os diferentes problemas de fluxo em redes são caracterizados por possuírem elementos em comum em sua formulação:

- ▶ Restrições de capacidade dos arcos;
- ▶ Restrições de equilíbrio de fluxo em cada vértice.

Diferentes funções objetivo determinam as particularidades de cada problema.

Mais comumente, encontramos como objetivo determinar o **Fluxo Máximo** e o **Fluxo de Custo Mínimo**.

Consideremos a variável de decisão x_{ij} o fluxo que irá circular pelo arco $(i, j) \in A$ para os próximos slides.

Restrições de Capacidade dos Arcos

Todos os arcos de uma rede são capacitados, mesmo quando os limites são $-\infty$ ou $+\infty$.

Representaremos o limite inferior de fluxo do arco $(i, j) \in A$ por l_{ij} e o superior por L_{ij} .

Desta forma, as restrições de limite de fluxo são escritas como a seguir:

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq L_{ij}, (i, j) \in A$$

Restrições de Equilíbrio de Fluxo em Cada Vértice

Como visto, os vértices de uma rede devem ser conservativos em relação ao fluxo, exceto pelos vértices fonte e sumidouro.

Desta forma, as restrições de equilíbrio de fluxo em cada vértice são escritas como a seguir:

$$\sum_{(k,i) \in A} x_{ki} - \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = 0$$

Funções Objetivo

Fluxo Máximo:

$$\max z = \sum_{(s,j) \in A} x_{sj}$$

Fluxo de Custo Mínimo:

$$\min z = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}x_{ij}$$

Formulação Geral

Em muitas ocasiões é interessante considerar o equilíbrio de fluxo associado a um vetor de oferta ou de demanda em cada vértice.

A formulação assim elaborada não necessita da consideração explícita de um vértice fonte e um vértice sumidouro, bem como libera a necessidade da consideração de arcos artificiais que liguem os vértices de oferta a uma fonte e os de demanda a um sumidouro.

De fato, a essência da modelagem por fluxo em rede permanece preservada; contudo, para determinados fins, essa abordagem é mais eficiente.

Nesse caso, a equação de equilíbrio de fluxos poderá ser reescrita como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fluxo que} \\ \text{chega ao vértice} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Fluxo produzido} \\ \text{pelo vértice} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Fluxo que} \\ \text{sai do vértice} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Fluxo consumido} \\ \text{pelo vértice} \end{array} \right\}$$

Formulação Geral

Se denominarmos genericamente por d_i o balanço final entre o que é produzido e consumido dentro de cada vértice, então podemos reescrever a formulação geral do problema de fluxo em redes da seguinte forma:

$$\min z = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

sujeito a :

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{(k,i) \in A} x_{ki} = d_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq L_{ij} \quad \forall (i,j) \in A \quad (3)$$

Formulação Restrita

De um modo geral, o problema de fluxo em uma rede com $n = n' + 2$ vértices, onde n' representa o número de vértices reais e n o número de vértices da rede equilibrada, poderá ser formulado também como:

$$\min z = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

sujeito a :

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{(k,i) \in A} x_{ki} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq L_{ij} \quad \forall (i,j) \in A \quad (3)$$

Dúvidas?

