

PCC173/BCC463 - Otimização em Redes

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto



- 1 Fluxo Viável
- 2 O Problema da Circulação Viável em Redes

Fonte

Este material é baseado nos livros

- ▶ Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.
- ▶ Goldbarg, M. C., & Luna, H. P. L. (2005). *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Elsevier.

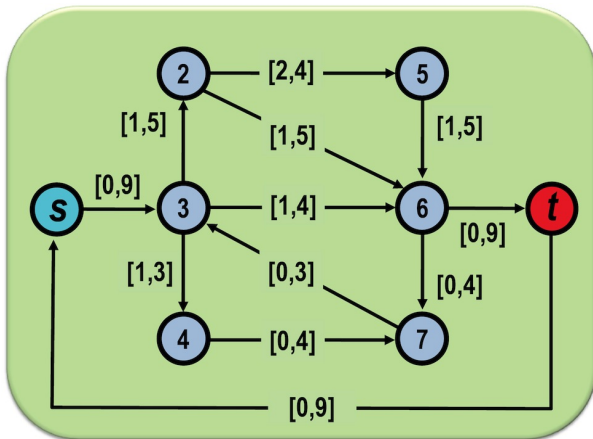
Licença

Este material está licenciado sob a Creative Commons BY-NC-SA 4.0. Isto significa que o material pode ser compartilhado e adaptado, desde que seja atribuído o devido crédito, que o material não seja utilizado de forma comercial e que o material resultante seja distribuído de acordo com a mesma licença.

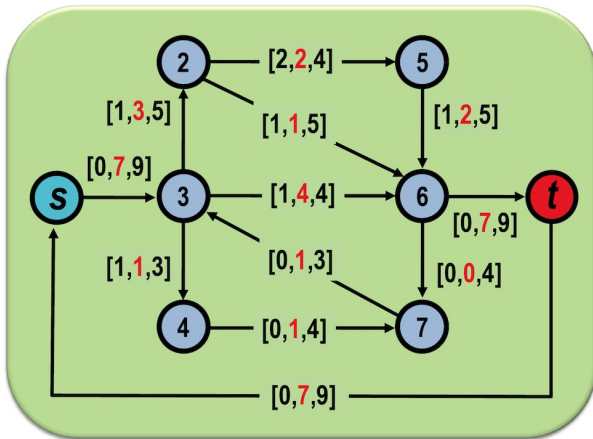
Definição

Um fluxo F é dito **viável** se:

- ▶ É conservativo;
- ▶ Atende as seguintes condições:
 - ▶ $\exists \underline{u}(i, j) \wedge \exists \bar{u}(i, j) \quad (i, j) \in A;$
 - ▶ $\underline{u}(i, j) \leq f_{ij} \leq \bar{u}(i, j) \quad (i, j) \in A;$
 - ▶ $0 \leq \underline{u}(i, j) \leq \bar{u}(i, j).$



Rede de exemplo.



Fluxo viável.

O Problema da Circulação Viável em Redes

Definição

Nos algoritmos a serem apresentados, para encontrar o fluxo máximo em uma rede R sempre se parte de um fluxo viável.

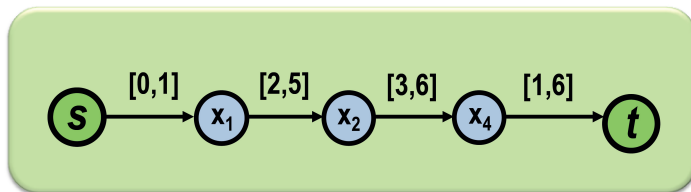
Se os limites inferiores de todos os arcos forem iguais a 0, o problema de encontrar um fluxo viável é trivial, sendo este fluxo 0.

Entretanto, se existem limites inferiores $u(i, j) > 0$ nos arcos (i, j) , o fluxo 0 não é viável.

Com efeito, uma rede desta forma pode, inclusive, não ter circulação viável.

Esta situação é ilustrada na rede da figura a seguir, onde o maior fluxo que pode chegar ao vértice x_1 é 1 e o menor fluxo que deve passar pelo arco (x_1, x_2) é 2.

O Problema da Circulação Viável em Redes



Exemplo de rede sem circulação viável.

O Problema da Circulação Viável em Redes

Definição

O problema da circulação em uma rede R é o de determinar, para todo e qualquer subconjunto da rede R , um fluxo que atenda as condições de viabilidade definidas anteriormente.

Solução

O problema da circulação viável pode ser resolvido através de algoritmos para o problema do fluxo máximo.

Antes, entretanto, é necessário fazer uma transformação na rede R , conforme proposto por Ford & Fulkerson em 1962.

Considere uma rede $R = (V, A, F, U)$ com fonte s e sumidouro t e capacidades não negativas $0 \leq \underline{u}(i, j) \leq \bar{u}(i, j)$ para todo arco $(i, j) \in A$.

O Problema da Circulação Viável em Redes

Solução

Construímos uma rede $H = (V_H, A_H, F', U')$, a partir de R tal que:

- ▶ V_H é constituído por todos os vértices de V e dois vértices especiais s' e t' ;
- ▶ A_H é constituído por todos os arcos de A , arcos adicionais (s', v) , (v, t') para todo $v \in V$ e arco de retorno (t, s) com capacidades:
 - ▶ $\bar{u}'(t, s) = \infty$;
 - ▶ $\bar{u}'(i, j) = \bar{u}(i, j) - \underline{u}(i, j)$ para todo arco $(i, j) \in A$;
 - ▶ $\bar{u}'(s', i) = \sum_{k \in \Gamma^-(i)} \underline{u}(k, i)$ para todo vértice $i \in V$;
 - ▶ $\bar{u}'(i, t') = \sum_{k \in \Gamma^+(i)} \underline{u}(i, k)$ para todo vértice $i \in V$.

Consequência

- ▶ $\underline{u}'(i, j) = 0$ para todo arco $(i, j) \in A_H$.

O Problema da Circulação Viável em Redes

Solução

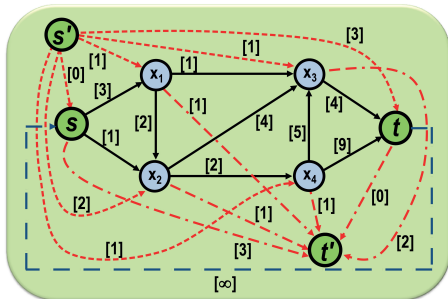
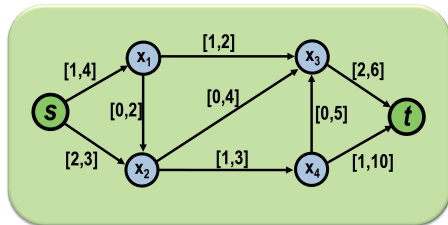
A rede H é obtida de R pela inclusão dos vértices s' e t' , dos arcos de s' para todos os vértices de R e dos arcos de todos os vértices de R para t' .

Na nova rede H tem-se que $\bar{u}'(i,j) \geq 0$ para todo arco $(i,j) \in A_H$.

O limite inferior de todos os arcos é **zero** e as capacidades são calculadas conforme descrito anteriormente.

A figura a seguir ilustra este processo.

O Problema da Circulação Viável em Redes



Transformação de R em H :

A soma dos limites inferiores dos arcos que chegam ao vértice x_2 é 2, portanto, o arco de s' para x_2 tem capacidade 2.

A soma dos limites inferiores dos arcos que saem do vértice x_2 é 1, portanto a capacidade do arco (x_2, t') é 1.

O Problema da Circulação Viável em Redes

Implicação

Das condições de formação de H tem-se que

$$\sum_{i \in V} \bar{u}'(s', i) = \sum_{(i,j) \in A} \underline{u}(i,j) = \sum_{i \in V} \bar{u}'(i, t') = B$$

em que B é o fluxo máximo em H .

Como todos os arcos de H possuem limite inferior zero, os algoritmos de fluxo podem ser aplicados a H a partir do fluxo zero.

Teorema – Condição de existência de um fluxo viável

Existe uma circulação viável em R se e somente se o fluxo máximo em H é

$$B = \sum_{(i,j) \in A} \underline{u}(i,j)$$

O Problema da Circulação Viável em Redes

Algoritmo Circulação

O Algoritmo Circulação é utilizado para encontrar um fluxo viável em uma rede $R = (V, A, F, U)$ com capacidades $0 \leq \underline{u}(i, j) \leq \bar{u}(i, j)$ para todo arco $(i, j) \in A$.

Após construir a rede H , é chamado o procedimento **fluxo_máximo** para calcular o fluxo máximo na nova rede.

A verificação da saturação dos arcos (s', i) é feita para todo $i \in V$ e é calculado o valor do fluxo na rede R .

Note que o fluxo viável obtido pelo algoritmo **não** é o máximo para a rede R .

O Problema da Circulação Viável em Redes

Entrada: Rede R

```
1  $V_H \leftarrow V \cup \{s', t'\};$ 
2  $A_H \leftarrow A \cup \{(s', i) \mid i \in V\} \cup \{(i, t') \mid i \in V\} \cup \{(t, s)\};$ 
3  $\bar{u}'(t, s) \leftarrow \infty;$ 
4 para cada  $(i, j) \in A$  faça
5    $\bar{u}'(i, j) \leftarrow \bar{u}(i, j) - \underline{u}(i, j);$ 
6 fim
7 para cada  $i \in V$  faça
8    $\bar{u}'(s', i) \leftarrow \sum_{j \in \Gamma^-(i)} \underline{u}(j, i);$ 
9    $\bar{u}'(i, t') \leftarrow \sum_{j \in \Gamma^+(i)} \underline{u}(i, j);$ 
10 fim
11 fluxo_máximo( $H$ );
12 se  $\sum_{i \in V} f'(s', i) = \sum_{(i, j) \in A} \underline{u}(i, j)$  então
13   para cada  $(i, j) \in A$  faça
14      $f(i, j) = f'(i, j) + \underline{u}(i, j);$ 
15   fim
16 senão
17   ERRO! // Circulação viável impossível.
18 fim
```

O Problema da Circulação Viável em Redes

Complexidade

Considerando que a rede R possui n vértices e m arcos, a rede H possui $n + 2$ vértices e $m + 2n + 1$ arcos.

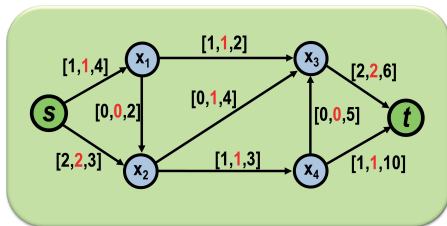
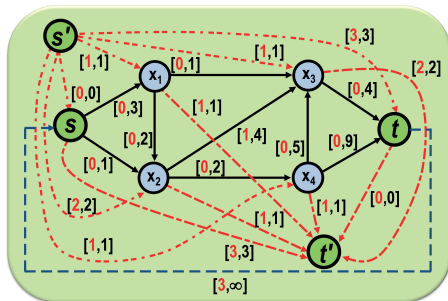
O algoritmo faz $O(m)$ operações para construir a rede H .

Se o algoritmo MPM for utilizado para obter o fluxo máximo, o procedimento **fluxo_máximo** possui complexidade $O(n^3)$.

A atualização da rede R para a obtenção do fluxo viável é realizada em $O(m)$.

Desta maneira, o algoritmo possui complexidade $O(n^3)$.

O Problema da Circulação Viável em Redes



Fluxo máximo em H e fluxo viável em R . Note que este não é o fluxo máximo em R .

Dúvidas?

