

PCC173/BCC463 - Otimização em Redes

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto



Conteúdo

1 Introdução

2 Exemplos

3 Terminologia

4 Representação

Aviso

Fonte

Este material é baseado nos livros

- ▶ Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.
- ▶ Goldbarg, M. C., & Luna, H. P. L. (2005). *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Elsevier.

Licença

Este material está licenciado sob a Creative Commons BY-NC-SA 4.0. Isto significa que o material pode ser compartilhado e adaptado, desde que seja atribuído o devido crédito, que o material não seja utilizado de forma comercial e que o material resultante seja distribuído de acordo com a mesma licença.

Histórico



Edsger Dijkstra:

“A Ciência da computação tem tanto a ver com o computador como a Astronomia com o telescópio, a Biologia com o microscópio, ou a Química com os tubos de ensaio. A Ciência não estuda ferramentas, mas o que fazemos e o que descobrimos com elas.”

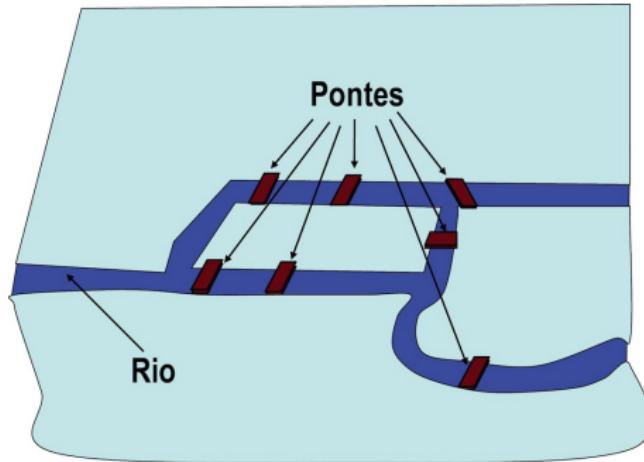
Histórico

Um grafo é uma estrutura de abstração muito útil na representação e solução de problemas computacionais, por representarem relações de interdependência entre elementos de um conjunto.

O primeiro registro de uso data de 1736, por Euler.

O problema era encontrar um caminho circular por Königsberg (atual Kaliningrado) usando cada uma das pontes sobre o rio Pregel (ou Pregolya, Pregola) exatamente uma vez.

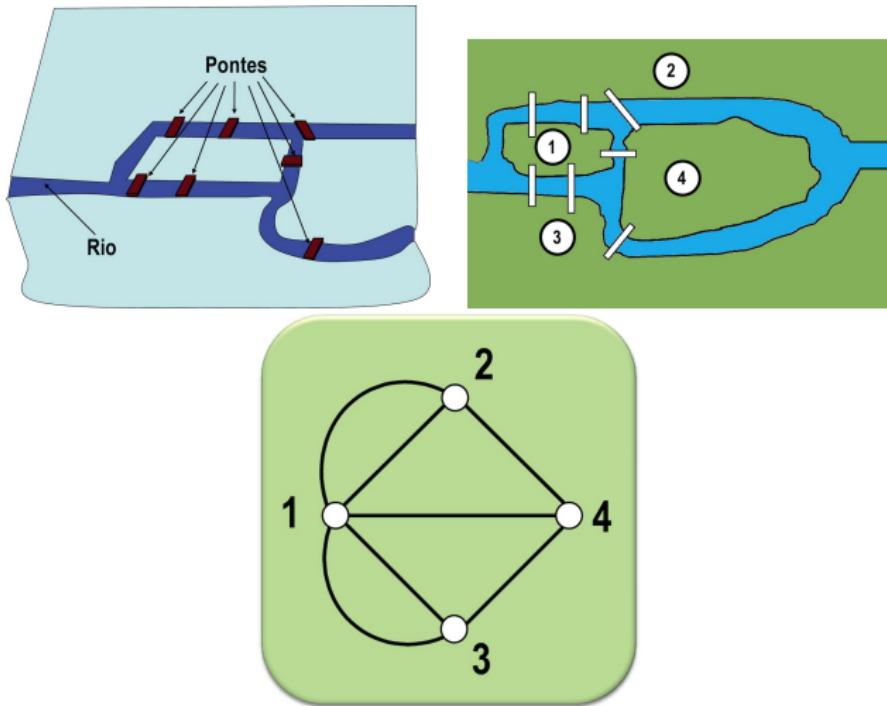
Histórico



1736: Euler e as Pontes de Königsberg

Partindo de uma das margens, pode-se encontrar um percurso que passe somente **uma vez em cada ponte** e retorne ao ponto de partida?

Pontes de Königsberg - O Grafo



Plano de Königsberg, modelo e grafo associado.

Definição Formal

Grafo $G = (V, A)$

- ▶ Conjunto V com n vértices (também chamados nós)
 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- ▶ Conjunto A com m arestas ou arcos
 $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

Definição Formal

Grafo $G = (V, A)$

- ▶ Conjunto V com n vértices (também chamados nós)
 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- ▶ Conjunto A com m arestas ou arcos
 $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

Definição Formal

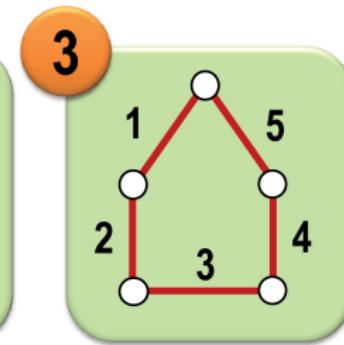
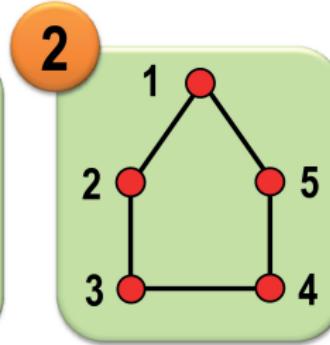
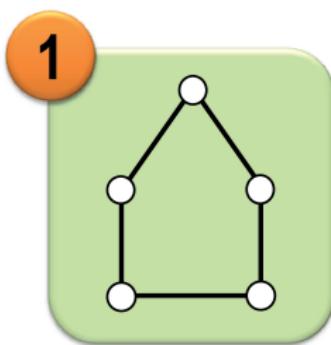
Grafo $G = (V, A)$

- ▶ Conjunto V com n vértices (também chamados nós)
 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- ▶ Conjunto A com m arestas ou arcos
 $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

Terminologia

Grafo Rotulado

Um grafo $G = (V, A)$ é rotulado se existem atribuições associadas a suas arestas ou vértices (tanto numéricas como alfabéticas).

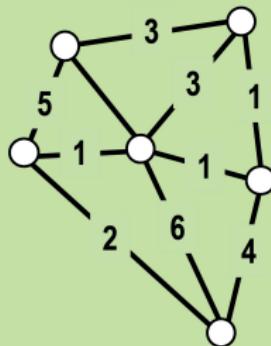


Terminologia

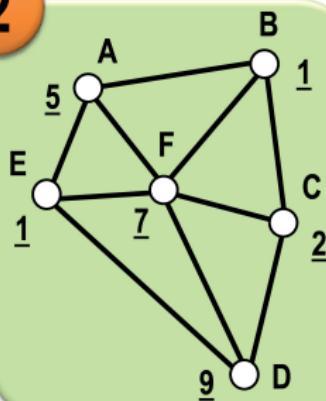
Grafo Ponderado

Um grafo $G = (V, A)$ é ponderado se existem valores numéricos (pesos) associados às suas arestas ou vértices.

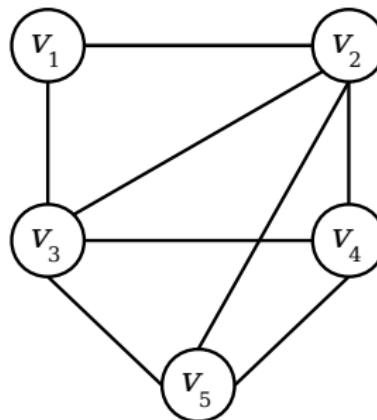
1



2

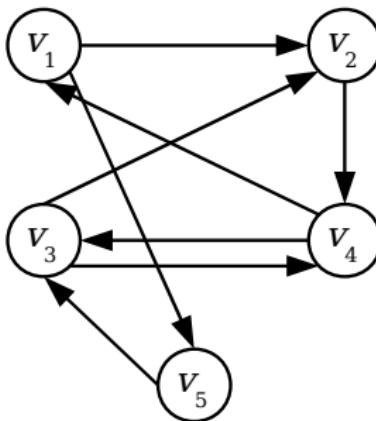


GND - Grafo Não Direcionado



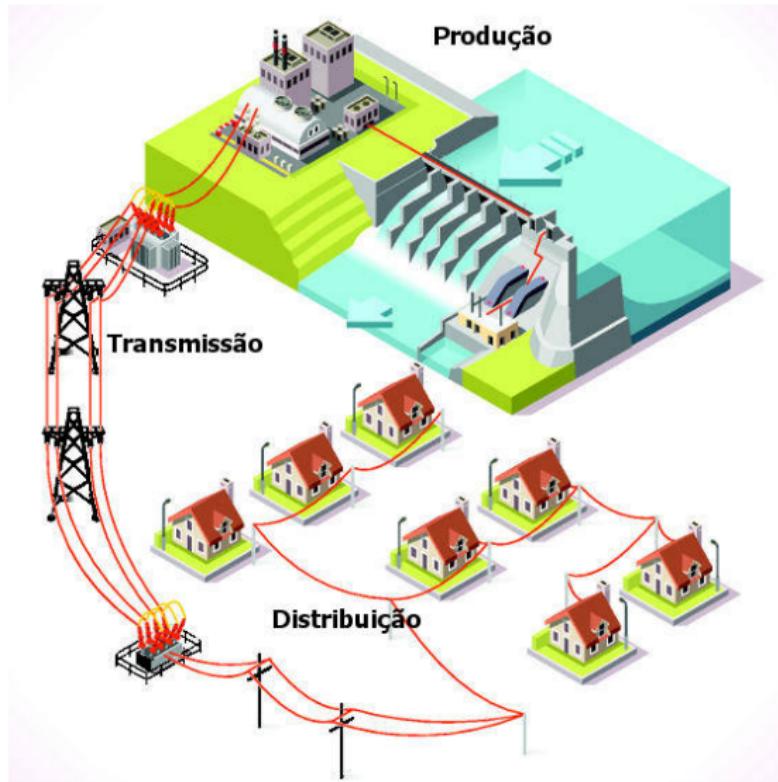
- ▶ Ligações expressas em **Arestas** —
- ▶ Se o vértice a está ligado a b , a recíproca é verdadeira;
- ▶ Cada aresta é representada por um **conjunto** $\{v_1, v_2\}$, indicando os dois vértices envolvidos.

GD - Grafo Direcionado



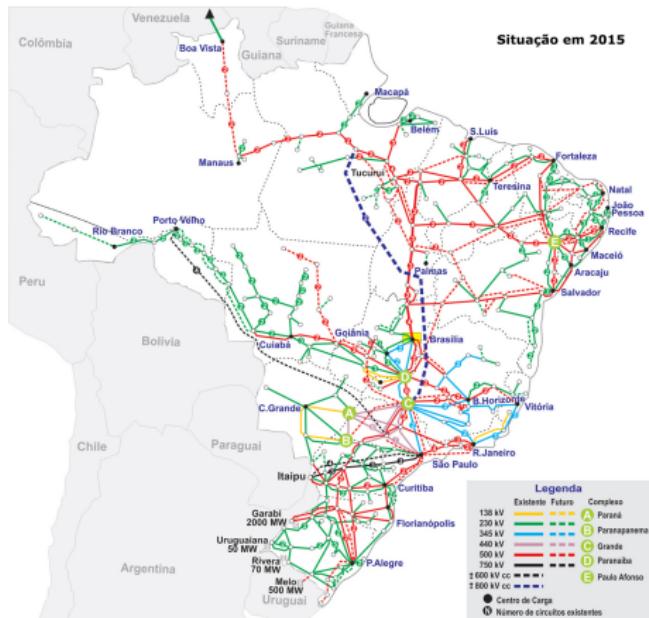
- ▶ Ligações expressas em **Arcos** →
- ▶ Cada arco é representada por um **par ordenado** (v_1, v_2) , indicando os dois vértices envolvidos.

Exemplos



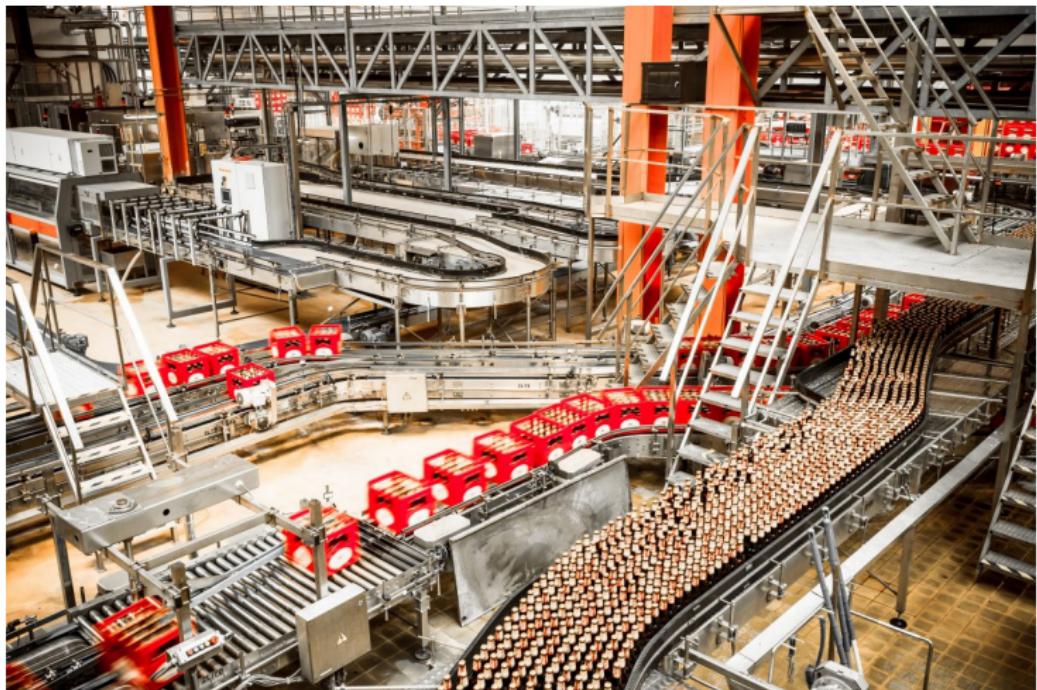
Rede de distribuição de energia elétrica. Fonte: Brasil Escola.

Exemplos



Rede de distribuição de energia elétrica. Fonte: ANEEL.

Exemplos



Logística de produtos. Fonte: TecnoTri.

Exemplos



Rede de gasodutos. Fonte: AMVAP.

Exemplos

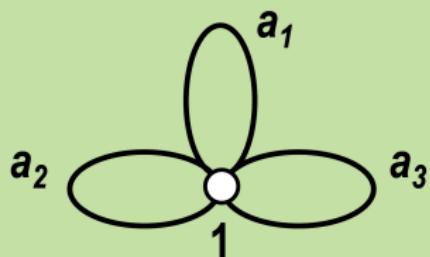


Rede de gasodutos. Fonte: GasNet.

Terminologia

Laço

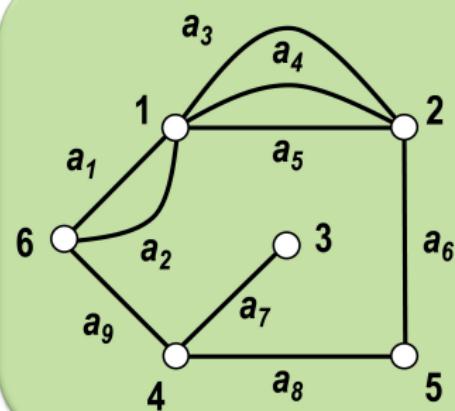
Uma aresta cujas duas extremidades incidem em um mesmo vértice.



Terminologia

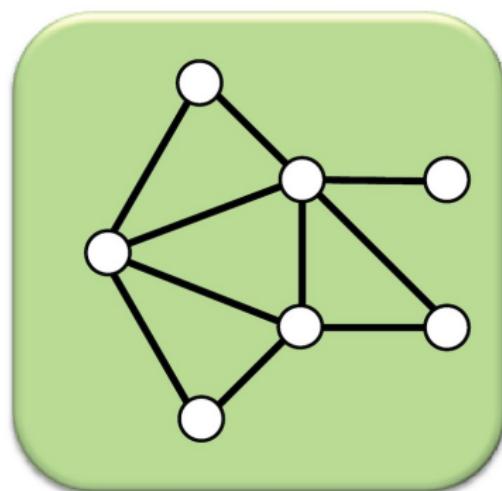
Arestas Paralelas

Mais de uma aresta associada ao mesmo par de vértices.



Grafo simples

Grafo que não possui laços e nem arestas paralelas.

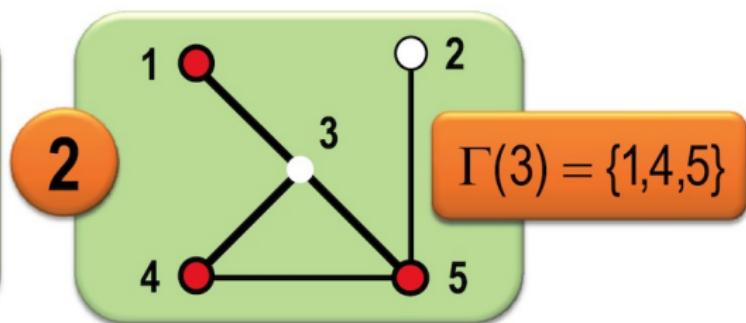
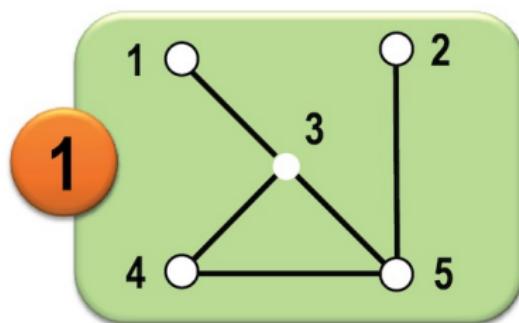


Terminologia

Vértices Adjacentes

Vértices que são as extremidades de uma mesma aresta.

A função $\Gamma(i)$ retorna o conjunto de vértices adjacentes ao vértice i .

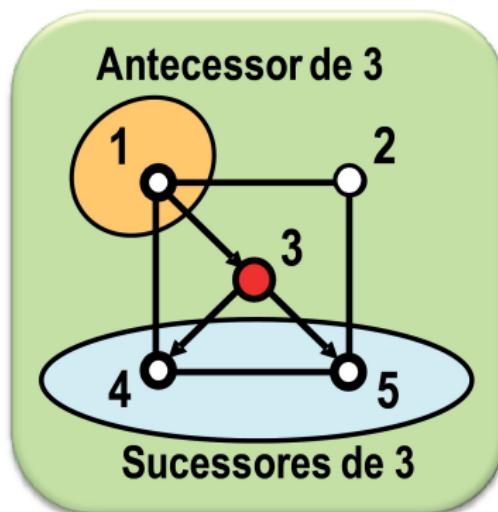


Terminologia

Antecessores e Sucessores

Um vértice j é sucessor de i se existe pelo menos um arco ligando i a j . Os sucessores do vértice i são $\Gamma^+(i)$.

No caso da ocorrência da relação inversa diz-se que o vértice j é antecessor de i . Os antecessores do vértice i são $\Gamma^-(i)$.



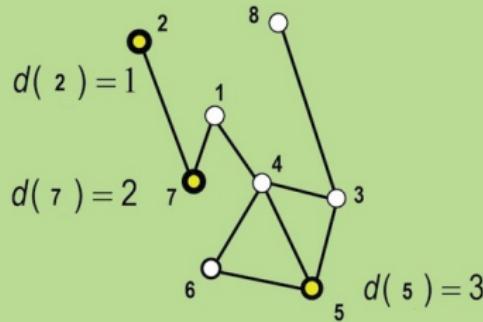
Terminologia

Grau de um Vértice

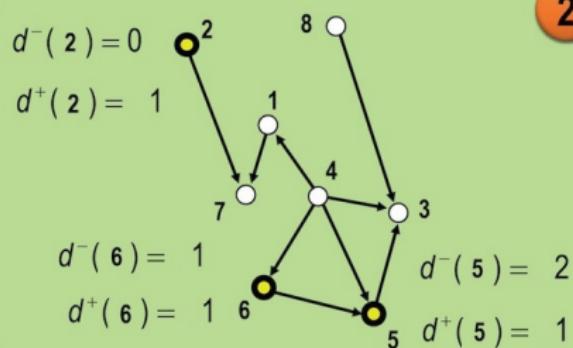
O **grau** ($d(i)$) de um vértice i em um grafo não direcionado é igual o número de arestas incidentes a i .

O **grau de entrada** ($d^-(i)$) de um vértice i em um grafo direcionado é igual o número de arestas que entram em i .

O **grau de saída** ($d^+(i)$) de um vértice i em um grafo direcionado é igual o número de arestas que saem de i ;



1



2

Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G .

$$\sum_{i=1}^n d(i) = 2m$$

Teorema

O número de vértices de grau ímpar em um GND é par.

Terminologia

Teorema do Aperto de Mãos

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G .

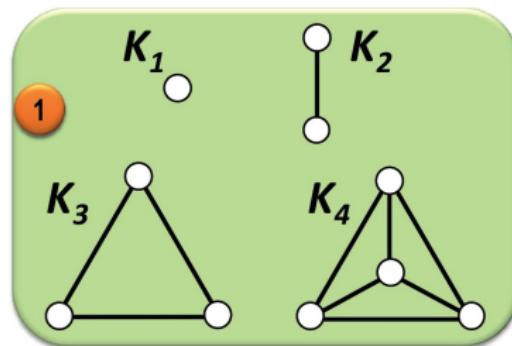
$$\sum_{i=1}^n d(i) = 2m$$

Teorema

O número de vértices de grau ímpar em um GND é par.

Grafo Completo

Um grafo completo com n vértices, denominado K_n é um grafo simples contendo exatamente uma aresta para cada par de vértices distintos.

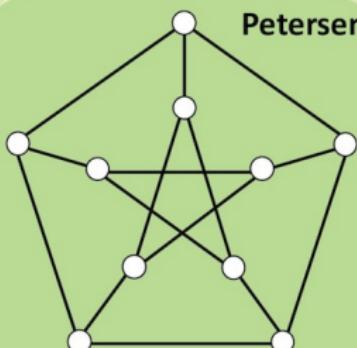


Terminologia

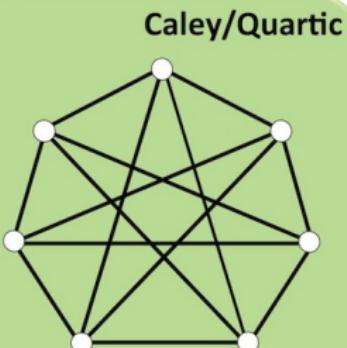
Grafo Regular

Grafo no qual todos os vértices possuem o mesmo grau.

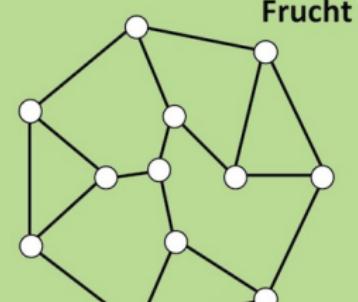
Obs: qualquer grafo completo é regular.



Petersen



Caley/Quartic



Frucht

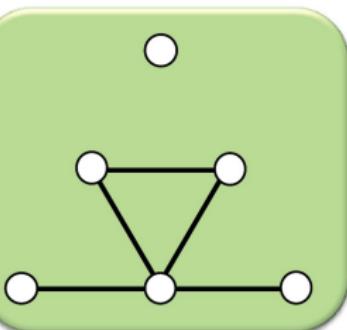
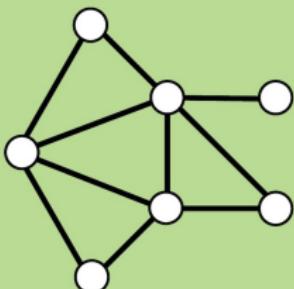
Terminologia

Grafo Conexo

Para todo par de vértices i e j de G existe pelo menos um caminho entre i e j .

Grafo Desconexo

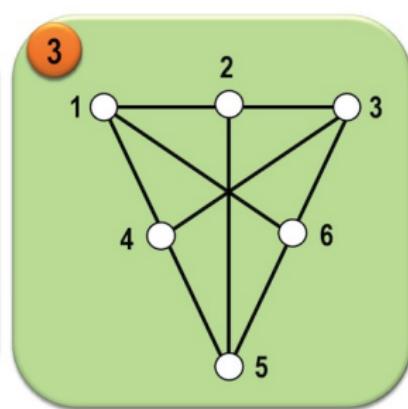
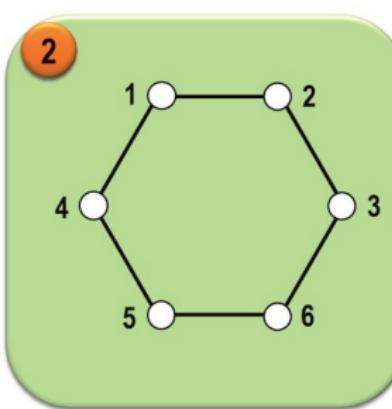
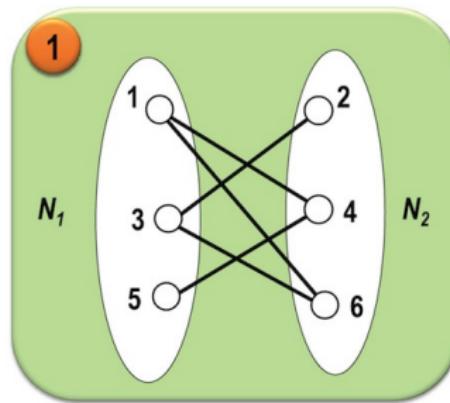
Consiste de 2 ou mais grafos conexos, chamados de **componentes**.



Grafo Bipartido

Definição

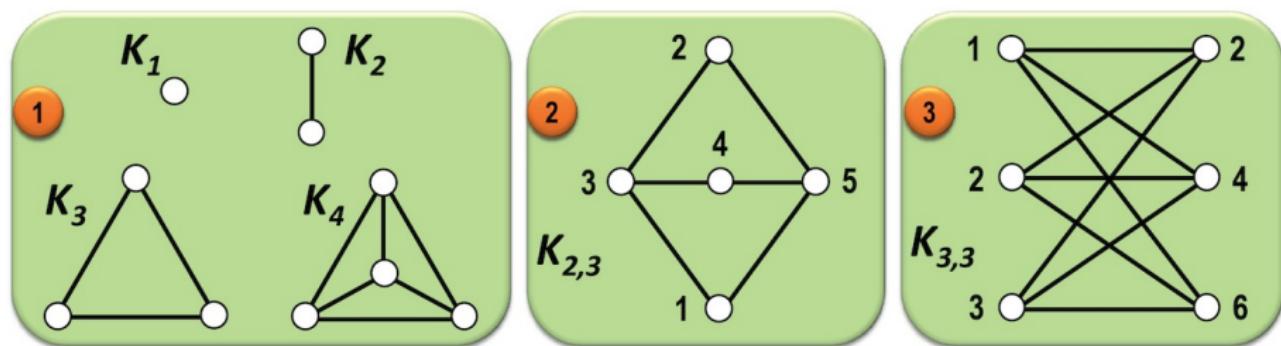
Um grafo é **bipartido** se o conjunto de vértices V pode ser partitionado em 2 subconjuntos V_1 e V_2 tal que todas as arestas do grafo são incidentes a um vértice de V_1 e a um vértice de V_2 .



Grafo Bipartido Completo

Definição

Um grafo bipartido é **completo** ($K_{|V_1|, |V_2|}$) se cada vértice do subconjunto V_1 é adjacente a todos os vértices do subconjunto V_2 e vice-versa.



Exemplo de grafos completos (1) e bipartidos completos (2 e 3).

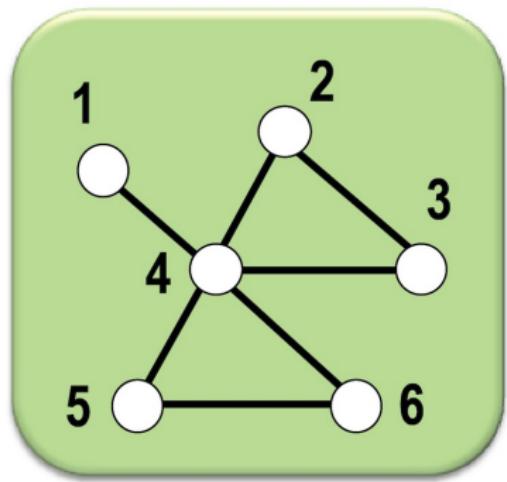
Matriz de Adjacências

Matriz $A_{n \times n}$, sendo que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se existe a aresta/arco } (v_i, v_j) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

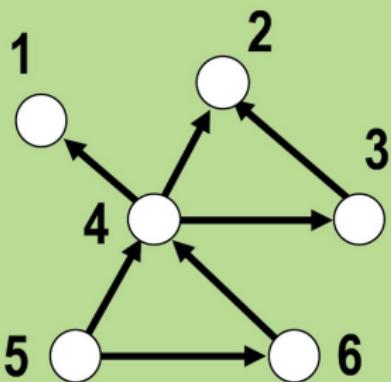
- ▶ simétrica para grafos não direcionados;
- ▶ consulta existência de aresta/arco com um acesso à memória ($O(1)$);
- ▶ $\Theta(n^2)$ de espaço mesmo para grafos esparsos.

Matriz de Adjacências - Grafo Não Direcionado



	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	1	0	0
2	0	0	1	1	0	0
3	0	1	0	1	0	0
4	1	1	1	0	1	1
5	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	1	1	0

Matriz de Adjacências - Grafo Direcionado



	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0
5	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	1	0	0

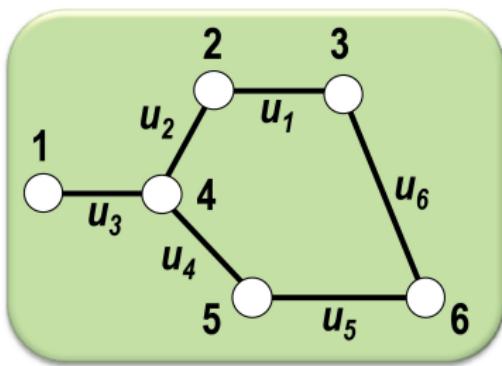
Matriz de Incidências

Matriz $A_{m \times n}$, sendo que:

$$a_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se a aresta } i \text{ tem origem no vértice } j \\ -1 & \text{se a aresta } i \text{ tem como destino o vértice } j \\ 0 & \text{se a aresta } i \text{ não incide no vértice } j \end{cases}$$

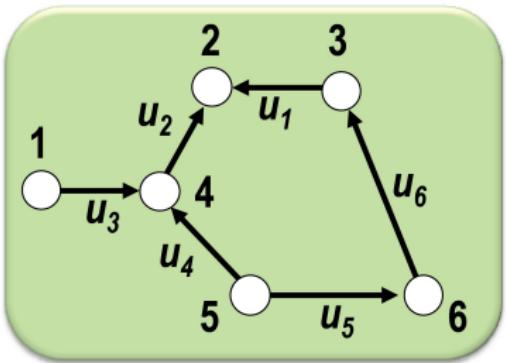
- ▶ $\Theta(nm)$ de espaço;
- ▶ útil quando informações específicas sobre as arestas são necessárias.

Matriz de Incidências - Grafo Não Direcionado



	1	2	3	4	5	6
u_1	0	1	1	0	0	0
u_2	0	1	0	1	0	0
u_3	1	0	0	1	0	0
u_4	0	0	0	1	1	0
u_5	0	0	0	0	1	1
u_6	0	0	1	0	0	1

Matriz de Incidências - Grafo Direcionado

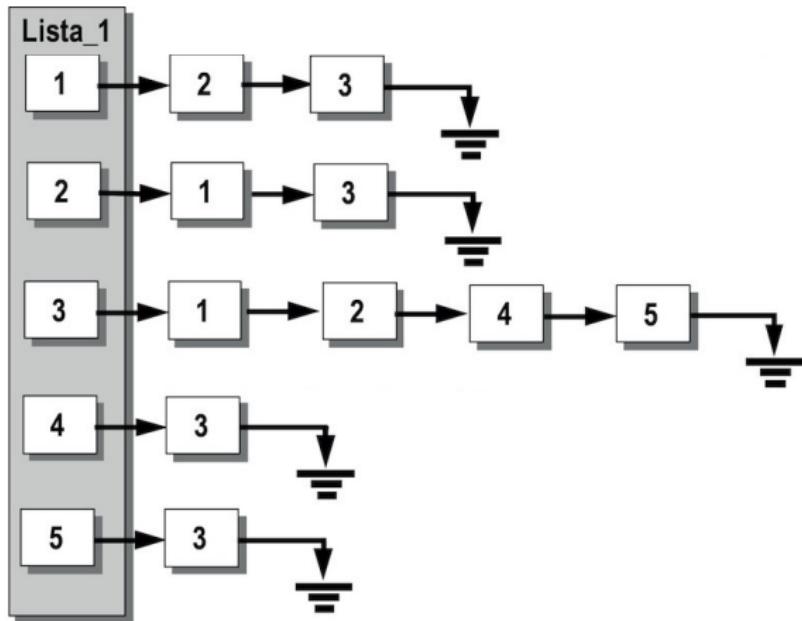
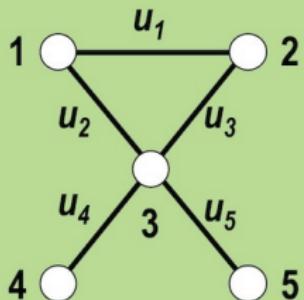


	1	2	3	4	5	6
u_1	0	-1	1	0	0	0
u_2	0	-1	0	1	0	0
u_3	1	0	0	-1	0	0
u_4	0	0	0	-1	1	0
u_5	0	0	0	0	1	-1
u_6	0	0	-1	0	0	1

Lista de Adjacências

- ▶ Usa n listas, uma para cada vértice;
- ▶ Lista de v_i (o i -ésimo vértice) contém todos os vértices adjacentes a ele;
- ▶ Ocupa menos memória: $\Theta(m)$;
- ▶ No entanto, determinar uma adjacência é limitada por $O(n)$.

Lista de Adjacências - Grafo Não Direcionado



Dúvidas?

