# PCC173/PCC173/BCC463 - Otimização em Redes

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

# Conteúdo

# Aviso

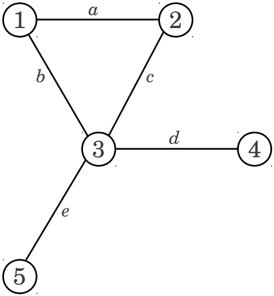
## Fonte

Este material é baseado nos livros

- Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.
- Goldbarg, M. C., & Luna, H. P. L. (2005). *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Elsevier.

## Licença

# Definições




## Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

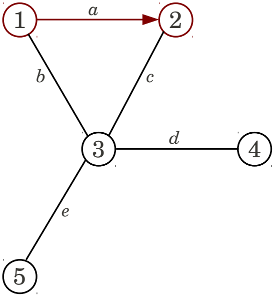
Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

Ex.: 1 - *a* - 2 - *c* - 3 - *d* - 4 - *d* - 3 - *e* - 5
ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

- aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)
- fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1




## Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

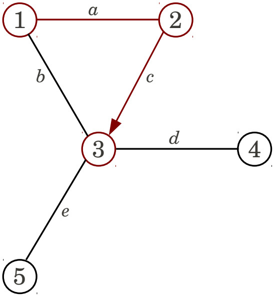
Ex.: 1 - *a* - 2 - *c* - 3 - *d* - 4 - *d* - 3 - *e* - 5
ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1

# Definições




## Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

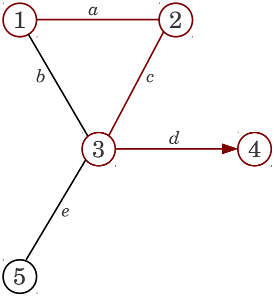
Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

Ex.: 1 - *a* - 2 - *c* - 3 - *d* - 4 - *d* - 3 - *e* - 5
ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1




## Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

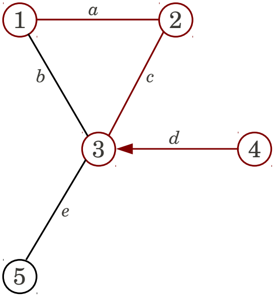
Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

Ex.: 1 - *a* - 2 - *c* - 3 - *d* - 4 - *d* - 3 - *e* - 5
ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

- aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)
- fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1




## Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

Ex.: 1 - *a* - 2 - *c* - 3 - *d* - 4 - *d* - 3 - *e* - 5

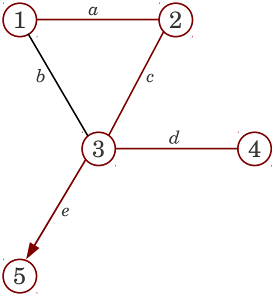
ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1

# Definições




## Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

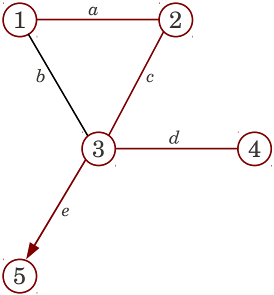
Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

Ex.: 1 - *a* - 2 - *c* - 3 - *d* - 4 - *d* - 3 - *e* - 5
ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

- aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)
- fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1

# Definições




## Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

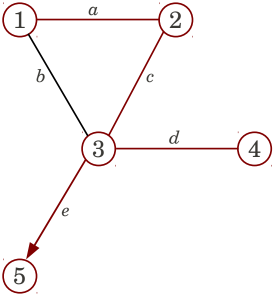
Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

Ex.: 1 - *a* - 2 - *c* - 3 - *d* - 4 - *d* - 3 - *e* - 5
ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

- aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)
- fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1




## Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

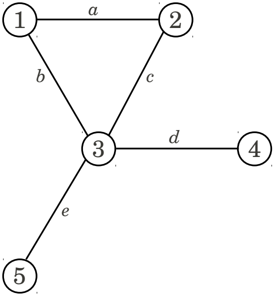
Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice.

Ex.: 1 - *a* - 2 - *c* - 3 - *d* - 4 - *d* - 3 - *e* - 5
ou 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

- aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)
- fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1

# Definições

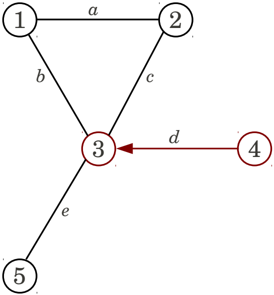



### Cadeia

Um passeio sem repetição de **arestas**.

Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5

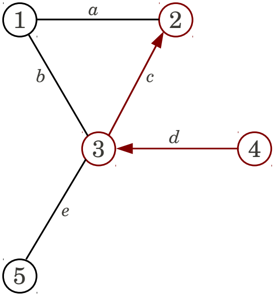
# Definições




### Cadeia

Um passeio sem repetição de **arestas**.

Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5

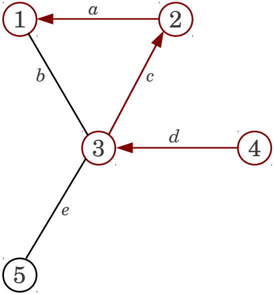



## Cadeia

Um passeio sem repetição de **arestas**.

Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5

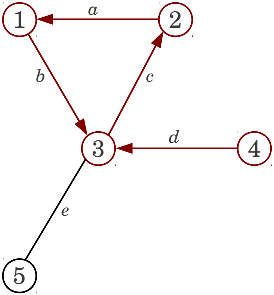
# Definições




## Cadeia

Um passeio sem repetição de **arestas**.

Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5

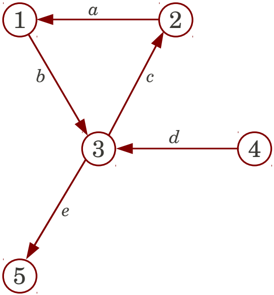



**Cadeia**

Um passeio sem repetição de **arestas**.

Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5

# Definições

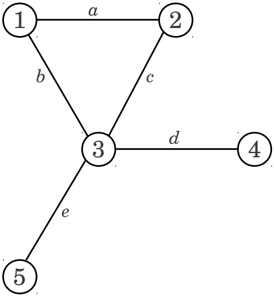



### Cadeia

Um passeio sem repetição de **arestas**.

Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5

# Definições




## Caminho

Uma cadeia sem repetição de **vértices**.

Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

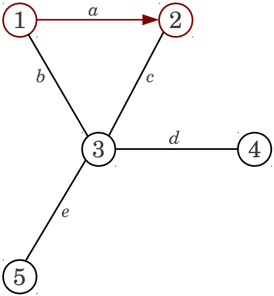
aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-1.

## Comprimento

grafo não ponderado: o **número de arestas** que o caminho inclui;

grafo ponderado: o **somatório dos pesos das arestas** que o caminho inclui.




### Caminho

Uma cadeia sem repetição de **vértices**.

Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

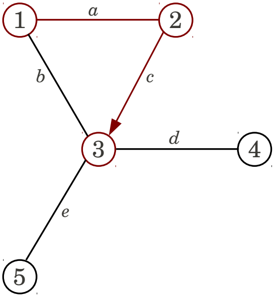
fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-1.

### Comprimento

grafo não ponderado: o **número de arestas** que o caminho inclui;

grafo ponderado: o **somatório dos pesos das arestas** que o caminho inclui.

# Definições




## Caminho

Uma cadeia sem repetição de **vértices**.

Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

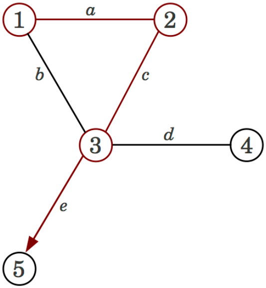
fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-1.

## Comprimento

grafo não ponderado: o **número de arestas** que o caminho inclui;

grafo ponderado: o **somatório dos pesos das arestas** que o caminho inclui.

# Definições




## Caminho

Uma cadeia sem repetição de **vértices**.

Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

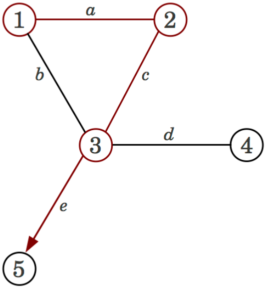
fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-1.

## Comprimento

grafo não ponderado: o **número de arestas** que o caminho inclui;

grafo ponderado: o **somatório dos pesos das arestas** que o caminho inclui.

# Definições




### Caminho

Uma cadeia sem repetição de **vértices**.

Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

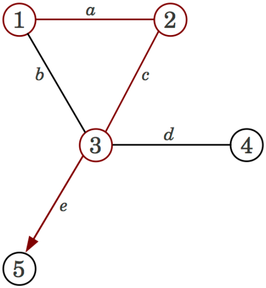
fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-1.

### Comprimento

grafo não ponderado: o **número de arestas** que o caminho inclui;

grafo ponderado: o **somatório dos pesos das arestas** que o caminho inclui.

# Definições




## Caminho

Uma cadeia sem repetição de **vértices**.

Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

aberto: quando inicia e acaba em vértices **diferentes** (o caso acima)

fechado: quando inicia e acaba no **mesmo** vértice. Ex.: 1-2-3-1.

## Comprimento

grafo não ponderado: o **número de arestas** que o caminho inclui;

grafo ponderado: o **somatório dos pesos das arestas** que o caminho inclui.

# Recapitulando...

## Passeio

Sequência finita de vértices e arestas.

## Cadeia

Um passeio que não repete arestas.

## Caminho

Uma cadeia sem repetição de vértices.

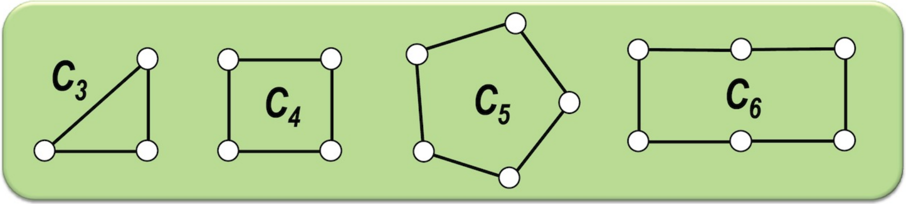
# Ciclos

## Definição

Um ciclo é um caminho fechado.

Alguns autores, utilizam o termo *circuito* para o caso de grafos orientados.

Grafo Ciclo: Um grafo ciclo $C_n$ é um grafo com $n$ vértices formado por apenas um ciclo passando por todos os vértices.



# Alcançabilidade

**Definição**

Um vértice $w$ é alcançável a partir do vértice $v$ se houver um caminho entre $w$ e $v$.

**Definição**

O conjunto de vértices alcançáveis a partir de $v$ é, portanto, formado pelos sucessores de $v$, os sucessores dos sucessores e assim por diante.

# Alcançabilidade

## Definição

Um vértice $w$ é alcançável a partir do vértice $v$ se houver um caminho entre $w$ e $v$.

## Definição

O conjunto de vértices alcançáveis a partir de $v$ é, portanto, formado pelos sucessores de $v$, os sucessores dos sucessores e assim por diante.

# Alcançabilidade

## Transitividade

Se $w$ é alcançável a partir de $v$;
e se $x$ é alcançável de $w$;
então $x$ é alcançável a partir de $v$.

## Transitividade

Relação de Alcançabilidade é transitiva.

# Alcançabilidade

## Transitividade

Se $w$ é alcançável a partir de $v$;
e se $x$ é alcançável de $w$;
então $x$ é alcançável a partir de $v$.

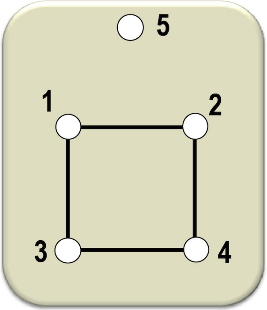
## Transitividade

Relação de Alcançabilidade é transitiva.

# Fecho Transitivo de um Vértice - Grafo Não Direcionado

## Definição

O Fecho Transitivo de um vértice $v$ (denotado por $\hat{\Gamma}(v)$) é o conjunto dos vértices de um grafo alcançáveis a partir de $v$.




$\hat{\Gamma}(1) = \{2, 3, 4\}$
$\hat{\Gamma}(5) = \{\}$

# Fecho Transitivo de um Vértice - Grafo Direcionado

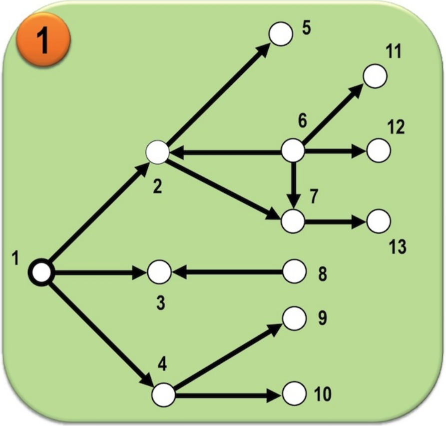
## Fecho Transitivo Direto

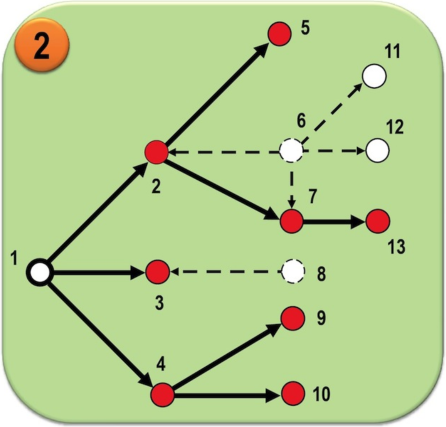
O Fecho Transitivo Direto de um vértice $v$ (denotado por $\hat{\Gamma}^{+}(v)$) é o conjunto dos vértices de um grafo alcançáveis a partir de $v$.
Os vértices em $\hat{\Gamma}^{+}(v)$ são chamados de descendentes de $v$.

## Fecho Transitivo Indireto

O Fecho Transitivo Indireto de um vértice $v$ (denotado por $\hat{\Gamma}^{-}(v)$) é o conjunto dos vértices de um grafo a partir dos quais $v$ é alcançável.
Os vértices em $\hat{\Gamma}^{-}(v)$ são chamados de ascendentes de $v$.

# Fecho Transitivo Direto e Indireto



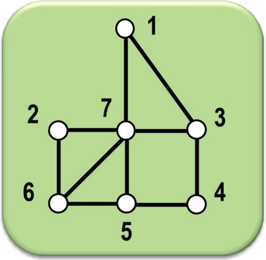




$\hat{\Gamma}^{+}(1) = \{2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 13\}$
$\hat{\Gamma}^{-}(10) = \{1, 4\}$

## Definição

Em um GND conexo, todos os vértices são alcançáveis a partir de qualquer outro.

Em um GND conexo, sempre é possível fazer um passeio fechado que inclua todos os vértices.



# Conexidade em Grafos Direcionados

## Definição

Se G é um grafo direcionado, então é considerado conexo quando seu grafo subjacente não direcionado é conexo.

O grafo subjacente não direcionado é o grafo resultante da de G quando a orientação dos arcos é ignorada.

# Subgrafos

## Definição

Um grafo $G_s = (V_s, A_s)$ é dito ser um subgrafo de um grafo $G$ = (V, A) se todos os vértices e todas as arestas de $G_s$ estão em $G$, ou seja, se $V_s \subseteq V$ e $A_s \subseteq A$

## Subgrafo Maximal

Um subgrafo $G_s$ de G é dito maximal em relação a uma propriedade $\tau$ se não for um subgrafo de nenhum outro subgrafo de G que também possua a propriedade $\tau$.

## Propriedades

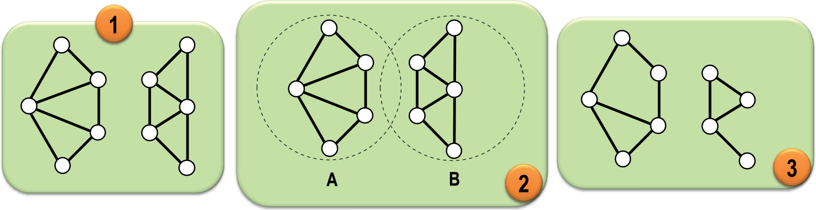
- Todo grafo é subgrafo de si próprio;
- O subgrafo $G_{s2}$ de um subgrafo $G_s$ de $G$ também é subgrafo de $G$.

## Componentes Conexas

Um componente conexo de um grafo G é um subgrafo conexo maximal de G.

O número de componentes conexas em G é denotado por $c$;

Grafos conexos possuem apenas um componente conexo.

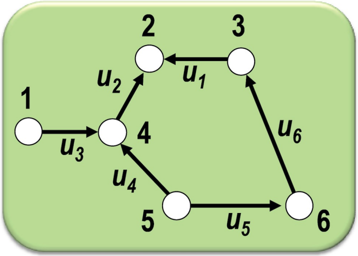



Grafo conexo, componentes conexas e subgrafos não maximais.

# Conexidade em Grafos Direcionados

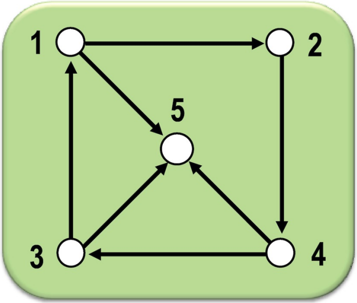
## Grafo Simplesmente Conexo: s-conexo

O grafo subjacente não-direcionado obtido através da substituição de todas as arestas de G por arestas não direcionadas é um grafo conexo.



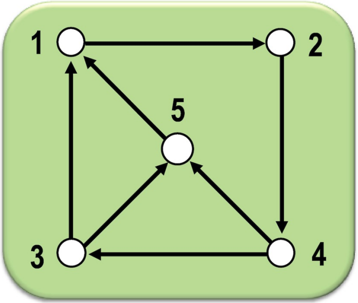
## Grafo Semi-Fortemente Conexo: sf-conexo

Para cada par de vértices $(v_1, v_2)$, existe um caminho de $v_1$ para $v_2$ **ou** de $v_2$ para $v_1$.



## Grafo Fortemente Conexo: f-conexo

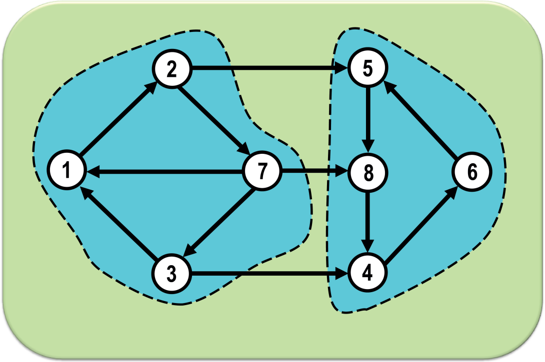
Para cada par de vértices $(v_1, v_2)$, existe um caminho direcionado de $v_1$ para $v_2$ e de $v_2$ para $v_1$.



# Conexidade em Grafos Direcionados

## Componentes Fortemente Conexos

Em um grafo direcionado, componentes fortemente conexos são subgrafos maximais f-conexos.



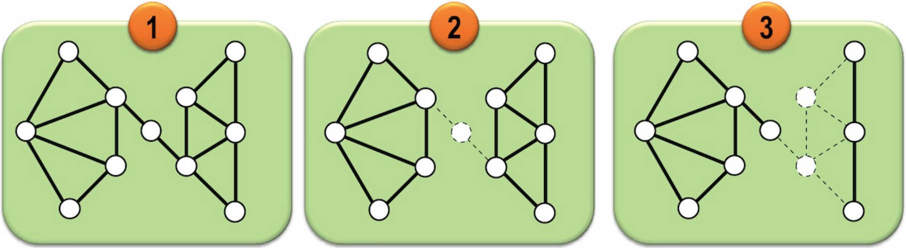
# Conexidade ou Conectividade em Vértices

## Definição

A conexidade ou conectividade em vértices $\kappa(G)$ de um grafo $G = (V, E)$ é o menor número de vértices cuja remoção desconecta $G$ ou o reduz a um único vértice.

## Atenção

- Conceito aplicado a Grafos Não Direcionados;
- Indica o quanto um grafo é conexo.




Exemplos de remoções de conjuntos de vértices que desconectam o grafo. Neste caso, $\kappa(G) = 1$ (figura 2).

# Conexidade ou Conectividade em Vértices

## Grafos Completos

Para grafos completos com $n$ vértices, $\kappa(K_n) = n - 1$.

## Grafos Não Completos

Para grafos não completos haverá um par $(v_1, v_2)$ de vértices não adjacentes, então temos que:

$$\kappa(G) \leq n - 2 \quad \forall G \neq K_n$$

## Limite superior para $\kappa(G)$ em qualquer grafo:

$$\kappa(G) \leq \delta(G)^a$$

[a] $\delta(G)$ : menor grau em um GND.

## Grafos Completos

Para grafos completos com $n$ vértices, $\kappa(K_n) = n - 1$.

## Grafos Não Completos

Para grafos não completos haverá um par $(v_1, v_2)$ de vértices não adjacentes, então temos que:

$$\kappa(G) \leq n - 2 \quad \forall G \neq K_n$$

## Limite superior para $\kappa(G)$ em qualquer grafo:

$$\kappa(G) \leq \delta(G)^a$$

[a] $\delta(G)$ : menor grau em um GND.

# Conexidade ou Conectividade em Vértices

## Grafos Completos

Para grafos completos com $n$ vértices, $\kappa(K_n) = n - 1$.

## Grafos Não Completos

Para grafos não completos haverá um par $(v_1, v_2)$ de vértices não adjacentes, então temos que:

$$\kappa(G) \leq n - 2 \quad \forall G \neq K_n$$

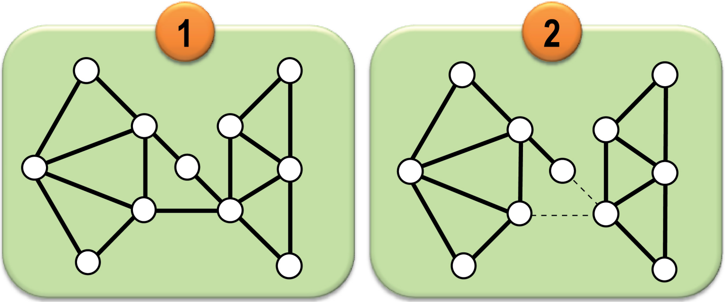
## Limite superior para $\kappa(G)$ em qualquer grafo:

$$\kappa(G) \leq \delta(G)^{a}$$

[a] $\delta(G)$ : menor grau em um GND.

## Definição

A conexidade ou conectividade em arestas $\lambda(G)$ de um grafo $G = (V, E)$ é o menor número de arestas cuja remoção desconecta $G$.




Exemplo de remoção de conjuntos de aresta que desconectam o grafo. Neste caso, $\lambda(G) = 2$ (figura 2).

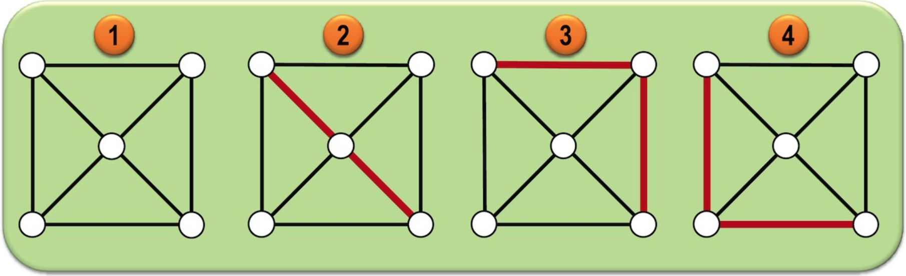
# $k$-Conexidade ou $k$-Conectividade

## Definição

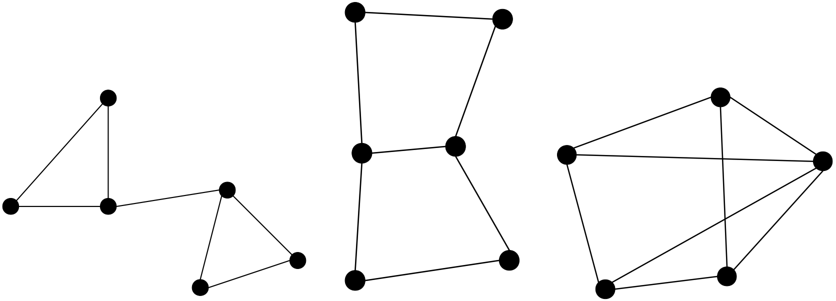
Um grafo $G = (V, E)$ é $k$-conexo se e somente se para todo par $v, w \in V, v \neq w$ existirem ao menos $k$ percursos disjuntos.

## Caminhos Disjuntos

Dois percursos entre os vértices $v$ e $w$ de um grafo são disjuntos se não houver interseção de arestas.



# $k$-Conexidade ou $k$-Conectividade



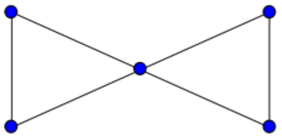
1-Conexo 2-Conexo 3-Conexo

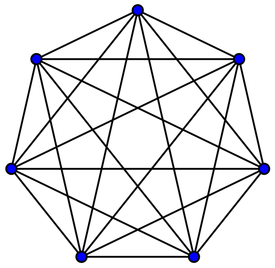
## Propriedades

Para todo grafo $k$-conexo:

$$\kappa(G) \leq \delta(G)$$

$$\kappa(G) \leq k$$





## Exemplos

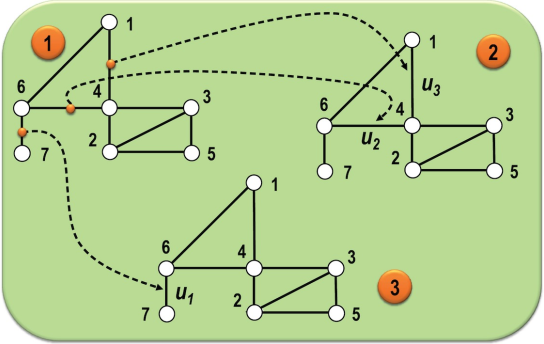
Grafo borboleta: 2-conexo

$K_7$: 6-conexo, mas também é 1-conexo, 2-conexo, 3-conexo, 4-conexo, 5-conexo...

$$k \geq \kappa(G) \leq \delta(G)$$

## Aresta de articulação (ou Ponte)

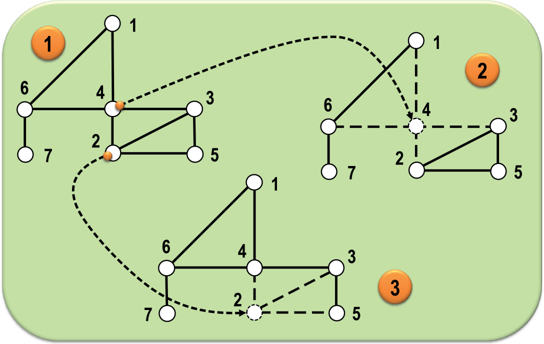
Uma aresta de articulação de um grafo $G$ é uma aresta cuja remoção resulta na desconexão de $G$.




A aresta $u_1$ é de articulação. As arestas $u_3$ e $u_4$ não são.

## Vértice de articulação

Um vértice de articulação de um grafo $G$ é um vértice cuja remoção resulta na desconexão de $G$.




O vértice 4 é de articulação, porém, o vértice 2 não é.

# Dúvidas?