PCC173/BCC463 - Otimização em Redes

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

Conteúdo

Aviso

Fonte

Este material é baseado nos livros

- Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.
- Goldbarg, M. C., & Luna, H. P. L. (2005). *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Elsevier.

Licença

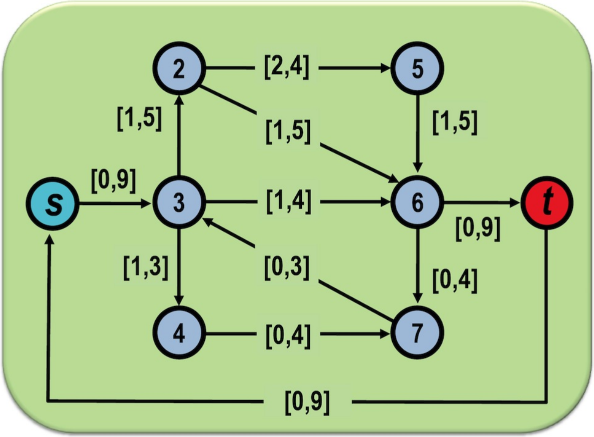
Fluxo Viável

Definição

Um fluxo $F=(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ é dito viável se:

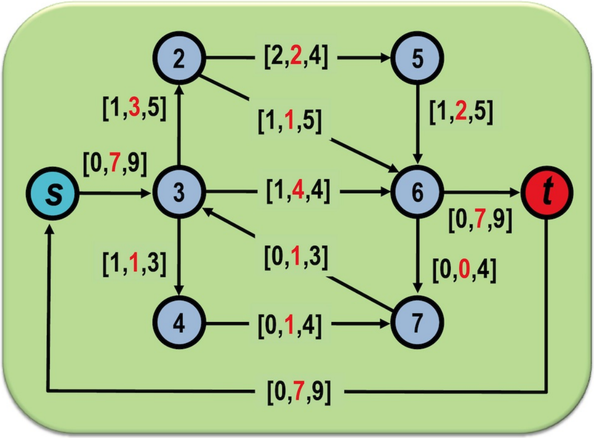
- É conservativo;
- Atende as seguintes condições:
  - $\exists \underline{u}(i,j) \wedge \exists \bar{u}(i,j) \qquad (i,j) \in A;$
  - $\underline{u}(i,j) \leq f_{ij} \leq \bar{u}(i,j) \qquad f_{ij} \in F;$
  - $0 \leq \underline{u}(i,j) \leq \bar{u}(i,j).$

Fluxo Viável



Rede de exemplo.

Fluxo Viável



Fluxo viável.

Definição

Nos algoritmos a serem apresentados, para encontrar o fluxo máximo em uma rede R sempre se parte de um fluxo viável.

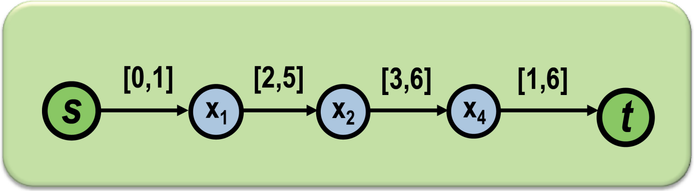
Se os limites inferiores de todos os arcos forem iguais a 0, o problema de encontrar um fluxo viável é trivial, sendo este fluxo 0.

Entretanto, se existem limites inferiores $u(i,j) > 0$ nos arcos $(i,\ j)$, o fluxo 0 não é viável.

Com efeito, uma rede desta forma pode, inclusive, não ter circulação viável.

Esta situação é ilustrada na rede da figura a seguir, onde o maior fluxo que pode chegar ao vértice x_1 é 1 e o menor fluxo que deve passar pelo arco (x_1, x_2) é 2.

O Problema da Circulação Viável em Redes



Exemplo de rede sem circulação viável.

O Problema da Circulação Viável em Redes

Definição

O problema da circulação em uma rede R é o de determinar, para todo e qualquer subconjunto da rede R, um fluxo que atenda as condições de viabilidade definidas anteriormente.

Solução

O problema da circulação viável pode ser resolvido através de algoritmos para o problema do fluxo máximo.

Antes, entretanto, é necessário fazer uma transformação na rede R, conforme proposto por Ford & Fulkerson em 1962.

Considere uma rede $R = (V, A, F, U)$ com fonte s e sumidouro t e capacidades não negativas $0 \leq \underline{u}(i,j) \leq \bar{u}(i,j)$ para todo arco $(i,j) \in A$.

O Problema da Circulação Viável em Redes

Solução

Construímos uma rede $H = (V_H, A_H, F', U')$, a partir de R tal que:

- V_H é constituído por todos os vértices de V e dois vértices especiais s' e t';
- A_H é constituído por todos os arcos de A, arcos adicionais (s', v), (v, t') para todo $v \in V$ e arco de retorno (t, s) com capacidades:
  - $\bar{u}'(t, s) = \infty$;
  - $\bar{u}'(i, j) = \bar{u}(i, j) - \underline{u}(i, j)$ para todo arco $(i, j) \in A$;
  - $\bar{u}'(s', i) = \sum_{k \in \Gamma^-(i)} \underline{u}(k, i)$ para todo vértice $i \in V$;
  - $\bar{u}'(i, t') = \sum_{k \in \Gamma^+(i)} \underline{u}(i, k)$ para todo vértice $i \in V$.

Consequência

- $\underline{u}'(i, j) = 0$ para todo arco $(i, j) \in A_H$.

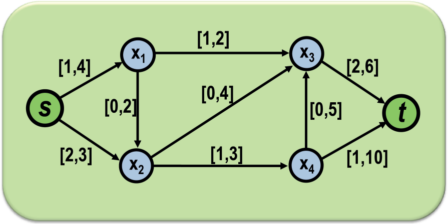
Solução

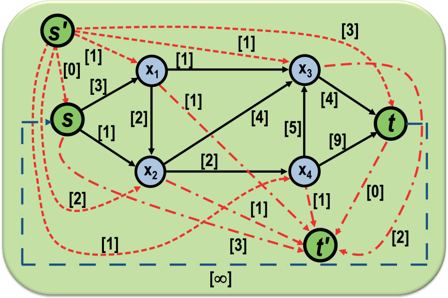
A rede H é obtida de R pela inclusão dos vértices s' e t', dos arcos de s' para todos os vértices de R e dos arcos de todos os vértices de R para t'.

Na nova rede H tem-se que $\bar{u}'(i,j) \geq 0$ para todo arco $(i,j) \in A_H$.

O limite inferior de todos os arcos é **zero** e as capacidades são calculadas conforme descrito anteriormente.

A figura a seguir ilustra este processo.





Transformação de R em H:

A soma dos limites inferiores dos arcos que chegam ao vértice x_2 é 2, portanto, o arco de s' para x_2 tem capacidade 2.

A soma dos limites inferiores dos arcos que saem do vértice x_2 é 1, portanto a capacidade do arco (x_2, t') é 1.

O Problema da Circulação Viável em Redes

Implicação

Das condições de formação de H tem-se que

$$\sum_{i \in V} \bar{u}'(s', i) = \sum_{(i,j) \in A} \underline{u}(i,j) = \sum_{i \in V} \bar{u}'(i, t') = B$$

em que B é o fluxo máximo em H.

Como todos os arcos de H possuem limite inferior zero, os algoritmos de fluxo podem ser aplicados a H a partir do fluxo zero.

Teorema – Condição de existência de um fluxo viável

Existe uma circulação viável em R se e somente se o fluxo máximo em H é

$$B = \sum_{(i,j) \in A} \underline{u}(i,j)$$

Algoritmo Circulação

O Algoritmo Circulação é utilizado para encontrar um fluxo viável em uma rede $R = (V, A, F, U)$ com capacidades $0 \leq \underline{u}(i,j) \leq \bar{u}(i,j)$ para todo arco $(i,j) \in A$.

Após construir a rede H, é chamado o procedimento **fluxo_máximo** para calcular o fluxo máximo na nova rede.

A verificação da saturação dos arcos (s', i) é feita para todo $i \in V$ e é calculado o valor do fluxo na rede R.

Note que o fluxo viável obtido pelo algoritmo não é o máximo para a rede R.

O Problema da Circulação Viável em Redes

Entrada: Rede R

$V_H \leftarrow V \cup \{s', t'\}$;
$A_H \leftarrow A \cup \{(s', i) \mid i \in V\} \cup \{(i, t') \mid i \in V\} \cup \{(t, s)\}$;
$\bar{u}'(t, s) \leftarrow \infty$;
para *cada* $(i, j) \in A$ **faça**
    $\bar{u}'(i, j) \leftarrow \bar{u}(i, j) - \underline{u}(i, j)$;
fim
para *cada* $i \in V$ **faça**
    $\bar{u}'(s', i) \leftarrow \sum_{j \in \Gamma^-(i)} \underline{u}(j, i)$;
    $\bar{u}'(i, t') \leftarrow \sum_{j \in \Gamma^+(i)} \underline{u}(i, j)$;
fim
fluxo_máximo(H);
se $\sum_{i \in V} f'(s', i) = \sum_{(i,j) \in A} \underline{u}(i, j)$ **então**
    para *cada* $(i, j) \in A$ **faça**
        $f(i, j) = f'(i, j) + \underline{u}(i, j)$;
    fim
senão
    ERRO! // Circulação viável impossível.
fim

Complexidade

Considerando que a rede R possui n vértices e m arcos, a rede H possui $n + 2$ vértices e $m + 2n + 1$ arcos.

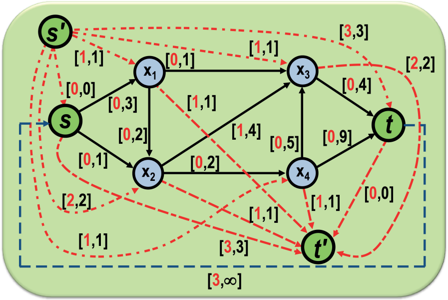
O algoritmo faz $O(m)$ operações para construir a rede H.

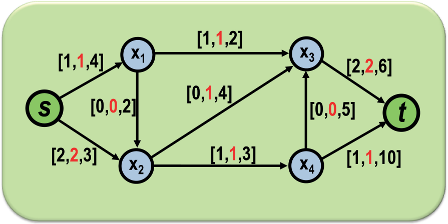
Se o algoritmo MPM for utilizado para obter o fluxo máximo, o procedimento **fluxo_máximo** possui complexidade $O(n^3)$.

A atualização da rede R para a obtenção do fluxo viável é realizada em $O(m)$.

Desta maneira, o algoritmo possui complexidade $O(n^3)$.

O Problema da Circulação Viável em Redes





Fluxo máximo em H e fluxo viável em R. Note que este não é o fluxo máximo em R.

Dúvidas?