PCC173/BCC463 - Otimização em Redes

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

Conteúdo

Aviso

Fonte

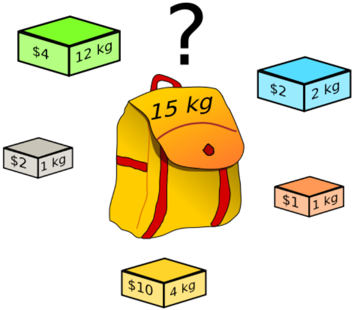
Este material é baseado no livro

- Goldbarg, M. C., & Luna, H. P. L. (2005). *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Elsevier.

Licença

O Problema da Mochila 0-1

Dadas uma mochila de capacidade W e uma lista de n itens distintos e únicos (enumerados de 1 a n), cada um com um peso $w_1, w_2, \ldots, w_n$ e um valor $v_1, v_2, \ldots, v_n$, maximizar o valor carregado na mochila, respeitando sua capacidade.



O Problema da Mochila 0-1

Dadas uma mochila de capacidade W e uma lista de n itens distintos e únicos (enumerados de 1 a n), cada um com um peso $w_1, w_2, \dots, w_n$ e um valor $v_1, v_2, \dots, v_n$, maximizar o valor carregado na mochila, respeitando sua capacidade.

Dados e Variáveis

- Capacidade da mochila W;
- pesos $w_j, \; j = 1, 2, \dots, n$;
- valores $v_j, \; j = 1, 2, \dots, n$;
- variáveis de decisão $x_j, \; j = 1, 2, \dots, n$.

O Problema da Mochila 0-1

Dadas uma mochila de capacidade W e uma lista de n itens distintos e únicos (enumerados de 1 a n), cada um com um peso $w_1, w_2, \ldots, w_n$ e um valor $v_1, v_2, \ldots, v_n$, maximizar o valor carregado na mochila, respeitando sua capacidade.

$$max\ z = \sum_{j=1}^{n} v_j x_j$$

$$sujeito\ a:$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq W$$

$$x_j \in \{0, 1\},\ j = 1, 2, \ldots, n$$

O Problema da Mochila 0-1

Consideremos a seguinte instância do Problema da Mochila 0-1:

Item	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Peso	52	23	35	15	7
Valor	100	60	70	15	8

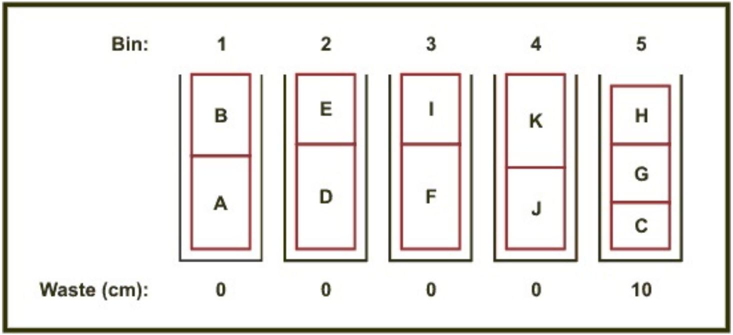
Utilizando estes dados no modelo, temos:

$$
\begin{aligned}
max\ z = & 100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4 + 8x_5 \\
sujeito\ a: & \\
& 52x_1 + 23x_2 + 35x_3 + 15x_4 + 7x_5 \leq 60 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Modelagem de Problemas Clássicos

Bin Packing

Dados um conjunto *Itens* de objetos diferentes, cada um com volume w_j, e um conjunto *Caixas* de caixas de volume V, empacotar todos os objetos minimizando o número de caixas.



Modelagem de Problemas Clássicos

Bin Packing

Dados um conjunto *Itens* de objetos diferentes, cada um com volume w_j, e um conjunto *Caixas* de caixas de volume V, empacotar todos os objetos minimizando o número de caixas.

Dados e Variáveis

- volume $w_j, \ \forall j \in Itens$;
- volume V das caixas;
- y_i indica a utilização da caixa i;
- x_{ij} indica se o item j é colocado na caixa i.

Bin Packing

$$
\begin{aligned}
min \quad & \sum_{i \,\in\, Caixas} y_i & (1)\\
sujeito\ a: & \\
& \sum_{i \,\in\, Caixas} x_{ij} = 1, \ \forall j \in Itens & (2)\\
& \sum_{j \,\in\, Itens} w_j x_{ij} \leq V_i y_i, \ \forall i \in Caixas & (3)\\
& x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in Caixas, \ \forall j \in Itens & (4)\\
& y_i \in \{0, 1\}, \forall i \in Caixas & (5)
\end{aligned}
$$

Bin Packing

Consideremos a seguinte instância do *Bin Packing*: $V = 1$ e

Objeto	1	2	3	4	5	6	7
Volume	0,2	0,5	0,4	0,7	0,1	0,3	0,8

Utilizando estes dados no modelo, temos:

$$
\begin{aligned}
min \; & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 \\
sujeito\ a: & \\
& . \\
& . \\
& . \\
& y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7 \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1

Uma metalúrgica deseja maximizar sua receita bruta. A tabela abaixo indica a proporção de cada material na mistura para obtenção de uma tonelada das ligas passíveis de fabricação.

O preço está cotado em Reais, e as restrições de disponibilidade estão expressas em toneladas.

	Liga Especial de Baixa Resistência	Liga Especial de Alta Resistência	Disponibilidade de Matéria Prima
Cobre	0,5	0,2	16
Zinco	0,25	0,3	11
Chumbo	0,25	0,5	15
Preço de Venda	3.000	5.000	

Exemplo 1

As variáveis de decisão x_i indicam quantas toneladas de cada liga serão produzidas ($i = 1$ indica baixa resistência e $i = 2$ indica alta resistência).

A função objetivo visa maximizar o preço de venda da produção das ligas de baixa e alta resistência.

As restrições são relativas à disponibilidade dos metais que compõem as ligas.

Por fim, as variáveis não podem assumir valores negativos, portanto, adicionamos restrições de não-negatividade.

Exemplo 1

$$max\ 3000x_1 + 5000x_2 \tag{1}$$

$$sujeito\ a:$$

$$0,5x_1 + 0,2x_2 \leq 16 \tag{2}$$

$$0,25x_1 + 0,3x_2 \leq 11 \tag{3}$$

$$0,25x_1 + 0,5x_2 \leq 15 \tag{4}$$

$$x_1 \geq 0 \tag{5}$$

$$x_2 \geq 0 \tag{6}$$

Modelagem de Problemas de PL Contínua

Exemplo 2

Em uma dieta para redução calórica, é necessário determinar as quantidades de certos alimentos que deverão ser ingeridos diariamente, de maneira que requisitos nutricionais sejam satisfeitos a custo mínimo.

A tabela abaixo expressa os requisitos nutricionais de alguns alimentos em termos de vitaminas A, C e D, controlados por sua quantidade mínima necessária.

	Leite (Litro)	Carne (kg)	Peixe (kg)	Salada (100g)	Requisito Nutricional Mínimo
A	2 mg	2 mg	10 mg	20 mg	11 mg
C	50 mg	20 mg	10 mg	30 mg	70 mg
D	80 mg	70 mg	10 mg	80 mg	250 mg
Custo	2 reais	4 reais	1,50 real	1 real	

Exemplo 2

As variáveis de decisão x_i indicam a quantidade de cada tipo de alimento $i \in \{l$-leite, c-carne, p-peixe, s-salada $\}$, a ser consumida na dieta.

A função objetivo visa minimizar o custo associado aos alimentos.

As restrições são relativas aos requisitos nutricionais mínimos de cada vitamina.

Novamente, as variáveis não podem assumir valores negativos, portanto, adicionamos restrições de não-negatividade.

Exemplo 2

$$min\ 2x_l + 4x_c + 1,5x_p + x_s \tag{1}$$

$$sujeito\ a:$$

$$2x_l + 2x_c + 10x_p + 20x_s \geq 11 \tag{2}$$

$$50x_l + 20x_c + 10x_p + 30x_s \geq 70 \tag{3}$$

$$80x_l + 70x_c + 10x_p + 80x_s \geq 250 \tag{4}$$

$$x_l \geq 0, x_c \geq 0, x_p \geq 0, x_s \geq 0 \tag{5}$$

Exemplo 3

Um sitiante está planejando sua estratégia de plantio para o próximo ano, visando o maior lucro. Ele deseja cultivar trigo, arroz e milho e sabe de antemão qual é a produtividade de sua terra para cada uma das culturas, reportada na tabela abaixo.

	Produtividade em kg por m^2	Lucro por kg de produção
Trigo	0,2	10,8 centavos
Arroz	0,3	4,2 centavos
Milho	0,4	2,03 centavos

Por falta de um local de armazenamento próprio, a produção máxima está limitada a 60 toneladas. A área cultivável do sítio é de 200.000m^2.

Por fim, para atender as demandas do próprio sítio, é imperativo que se plante 400m^2 de trigo, 800m^2 de arroz e 10.000m^2 de milho.

Modelagem de Problemas de PL Contínua

Exemplo 3

As variáveis de decisão x_i indicam a área em m^2 a ser cultivada a cultura do tipo $i \in${t-trigo, a-arroz, m-milho}.

A função objetivo visa maximizar o lucro com a produção, para tanto, multiplicamos a produtividade pelo lucro previsto.

As restrições são agrupadas em três conjuntos:

- Restrições associadas à demanda do sítio;
- Restrições associadas à área total disponível;
- Restrição associada ao armazenamento.

Novamente, as variáveis não podem assumir valores negativos, portanto, adicionamos restrições de não-negatividade.

Exemplo 3

$$max\ 2,16x_t + 1,26x_a + 0,812x_m \quad (1)$$

$$sujeito\ a:$$

$$x_t \geq 400 \quad (2)$$

$$x_a \geq 800 \quad (3)$$

$$x_m \geq 10.000 \quad (4)$$

$$x_t + x_a + x_m \leq 200.000 \quad (5)$$

$$0,2x_t + 0,3x_a + 0,4x_m \leq 60.000 \quad (6)$$

$$x_a \geq 0, x_t \geq 0, x_m \geq 0 \quad (7)$$

Exemplos de Modelagem de Problemas de PL Inteira com Possibilidade de Aproximação Contínua

Exemplo 1

Uma fábrica de móveis de madeira possui em seu portfólio escrivaninhas, mesas, armários e prateleiras. A composição de cada móvel é descrita na tabela abaixo, que também apresenta o valor de revenda e a disponibilidade de cada material.

	Consumo por unidade de produto (m^2)				Estoque (m^2)
	Escrivaninha	Mesa	Armário	Prateleira	
Tábua	1	1	1	4	250
Prancha	0	1	1	2	600
Painel	3	2	4	0	500
Valor de Revenda	100	80	120	20	

O problema consiste em maximizar a receita com a venda de móveis.

Exemplos de Modelagem de Problemas de PL Inteira com Possibilidade de Aproximação Contínua

Exemplo 1

As variáveis de decisão x_i indicam a quantidade de ser produzida do móvel do tipo $i \in$ {1-escrivaninha, 2-mesa, 3-armário, 4-porta}.

A função objetivo visa maximizar o lucro com a produção.

As restrições são relacionadas à disponibilidade de material.

Novamente, as variáveis não podem assumir valores negativos, portanto, adicionamos restrições de não-negatividade.

Exemplos de Modelagem de Problemas de PL Inteira com Possibilidade de Aproximação Contínua

Exemplo 1

$$max\ 100x_1 + 80x_2 + 120x_3 + 20x_4 \quad (1)$$

$$sujeito\ a:$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 250 \quad (2)$$

$$x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 600 \quad (3)$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 500 \quad (4)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \quad (5)$$

Exemplos de Modelagem de Problemas de PL Inteira com Possibilidade de Aproximação Contínua

Exemplo 2

Um atleta pratica natação e ciclismo. Com um orçamento mensal de 70 reais, o atleta pode dedicar, no máximo, 18 horas mensais e 80.000 calorias à prática de esportes:

- A natação custa 3 reais por sessão de 2 horas, e queima 1.500 calorias;
- O ciclismo custa 2 reais por sessão de 2 horas e queima 1.000 calorias.

Considerando que o atleta gosta igualmente de ambos esportes, o problema consiste em programar seu treinamento de maneira a otimizar o número de seções.

Exemplo 2

As variáveis de decisão x_i indicam a quantidade de seções do esporte do tipo $i \in \{$1-natação, 2-ciclismo$\}$.

A função objetivo visa maximizar o número de seções de treinamento.

As restrições são relacionadas à disponibilidade de dinheiro, calorias e tempo.

Novamente, as variáveis não podem assumir valores negativos, portanto, adicionamos restrições de não-negatividade.

Exemplos de Modelagem de Problemas de PL Inteira com Possibilidade de Aproximação Contínua

Exemplo 2

$$
\begin{aligned}
& max\ x_1 + x_2 && (1)\\
sujeito\ a: & \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 70 && (2)\\
& 1.500x_1 + 1.000x_2 \leq 80.000 && (3)\\
& 2x_1 + 2x_2 \leq 18 && (4)\\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 && (5)
\end{aligned}
$$

Exemplos de Modelagem de Problemas de PL Inteira sem Aproximação Contínua

Exemplo 1

Um hospital trabalha com atendimento variável em demanda 24 horas por dia, segundo a tabela abaixo.

Turno	Horário	Número Mínimo de Enfermeiros
1	08:00-12:00	50
2	12:00-16:00	60
3	16:00-20:00	50
4	20:00-00:00	40
5	00:00-04:00	30
6	04:00-08:00	20

A jornada de trabalho de um enfermeiro dura 8 horas consecutivas, exceto no turno 5, cuja jornada é de apenas 4 horas. A remuneração para o turno 4 possui uma gratificação de 50%. O problema consiste em minimizar o gasto com a mão de obra.

Exemplos de Modelagem de Problemas de PL Inteira sem Aproximação Contínua

Exemplo 1

As variáveis de decisão x_i indicam a quantidade de enfermeiros que iniciam sua jornada no turno i.

A princípio, os enfermeiros recebem a mesma remuneração, o que nos permite minimizar o número de enfermeiros. Entretanto, deve-se ponderar os enfermeiros do turno 4 levando em consideração a gratificação que recebem e também os enfermeiros do turno 5, que recebem o dobro por hora de trabalho.

As restrições são relacionadas ao número mínimo de enfermeiros por turno.

As variáveis não podem assumir valores negativos ou contínuos, portanto, adicionamos restrições de não-negatividade e de integralidade.

Exemplos de Modelagem de Problemas de PL Inteira sem Aproximação Contínua

Exemplo 1

$$min\ x_1 + x_2 + x_3 + 1,5x_4 + 2x_5 + x_6 \quad (1)$$

$$sujeito\ a:$$

$$x_6 + x_1 \geq 50 \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 \geq 60 \quad (3)$$

$$x_2 + x_3 \geq 50 \quad (4)$$

$$x_3 + x_4 \geq 40 \quad (5)$$

$$x_5 \geq 30 \quad (6)$$

$$x_6 \geq 20 \quad (7)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathcal{Z}^+ \quad (8)$$

Dúvidas?