PCC173/BCC463 - Otimização em Redes

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

Conteúdo

Fonte

Este material é baseado no material

- Goldbarg, M. C., & Luna, H. P. L. (2005). *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Elsevier.
- Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.
- Top Coder. *Minimum cost flow part III: applications*. Disponível em `https://www.topcoder.com/community/data-science/data-science-tutorials/minimum-cost-flow-part-three-applications/`.

Aviso

Licença

O Problema de Transporte

Definição

O problema de transporte é um tradicional problema de programação matemática que consiste em determinar as quantidades de certo produto que deverão ser transportadas de m origens para n destinos.

A solução deste problema é sujeita a restrições de oferta máxima dos produtos em cada origem e de demanda máxima nos destinos.

Modelagem

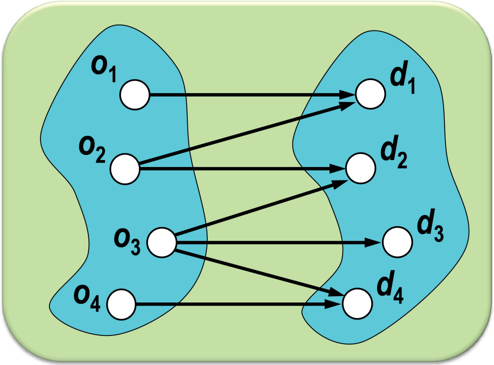
O problema de transporte pode ser modelado como um problema de fluxo em um grafo bipartido.

Na rede são constituídos dois conjuntos de vértices, o conjunto O dos vértices de oferta o_i onde o fluxo é originado, e conjunto D dos vértices de demanda d_i, onde o fluxo é consumido.

No problema clássico, os arcos não possuem limite de capacidade para o fluxo.

A figura a seguir exibe o modelo em rede para o problema de transporte.

O Problema de Transporte



Rede para o problema de transporte.

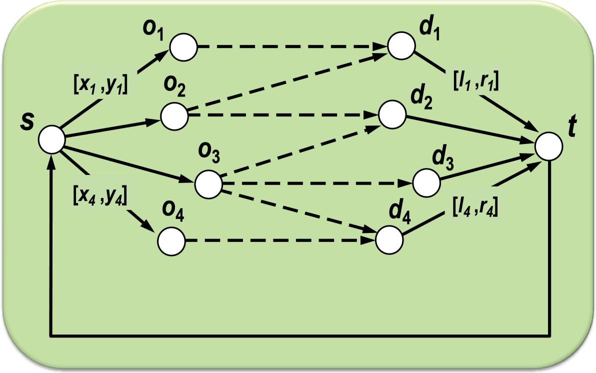
Transformação da Rede

O problema de transporte pode ser transformado em um problema de fluxo conservativo:

1. Pela adição de dois vértices artificiais, s reunindo o fluxo de oferta e t reunindo o fluxo de demanda;
2. Pela adição de arcos capacitados que liguem os vértices s e t aos seus vértices associados e obriguem ou limitem o fluxo dos pontos de demanda e oferta, conforme as restrições do problema.

A figura a seguir exemplifica esta transformação.

O Problema de Transporte



Rede capacitada e conservativa. Por simplicidade, os limites de fluxo são exibidos parcialmente.

Transformação da Rede

Na figura anterior, os arcos $s - o_i$ possuem um valor de fluxo limitado inferior e superiormente.

Na referida figura, os rótulos são representados por $[x_i, y_i]$: se a oferta dos vértices do problema de transporte deve ser completamente escoada, então os arcos $s - o_i$ deverão possuir $x_i = y_i =$ valor da oferta.

Raciocínio semelhante se aplica aos vértices de demanda, cujos limites de fluxo são representados pelo rótulo $[l_i, r_i]$.

O modelo permite considerar situações híbridas em que alguns vértices possuem a obrigatoriedade de escoamento / atendimento de demanda, enquanto outros não.

Características

De uma forma geral, o problema de transporte associa custos ao fluxo que percorre os arcos de conexão entre os vértices de oferta e de demanda – os arcos artificiais, via de regra, não possuem custos associados.

Uma situação particular poderá determinar custos nos arcos artificiais, quando se deseja levar em conta custos de produção da oferta no vértice associado.

Nesse caso, todavia, o limite de fluxo deverá ser restrito somente em seu valor máximo, o que permitiria regular a participação de cada vértice no processo de atendimento da rede.

Formulação Restrita

$$min\ z = \sum_{i \in O} \sum_{j \in D} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

$$sujeito\ a:$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{(k,i) \in A} x_{ki} = 0 \quad i \in V \tag{2}$$

$$x_{si} = o_i \quad i \in O \tag{3}$$

$$x_{jt} = d_j \quad j \in D \tag{4}$$

$$x_{ts} = \sum_{j \in D} d_j = \sum_{i \in O} o_i \tag{5}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i,j) \in A \tag{6}$$

Formulação Clássica

Podemos formular o problema de transporte somente considerando as demandas e ofertas localizadas nos vértices e sem os arcos e vértices artificiais da seguinte forma:

$$min\ z = \sum_{i=1}^{|O|} \sum_{j=1}^{|D|} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

$$sujeito\ a:$$

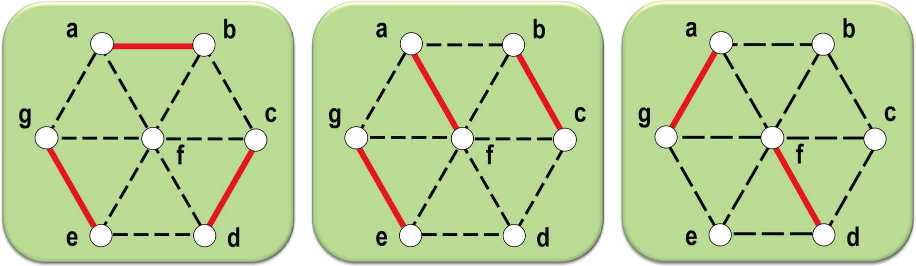
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = o_i \quad i = 1, \dots, \mid O \mid \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad j = 1, \dots, \mid D \mid \tag{3}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, \mid O \mid; j = 1, \dots \mid D \mid \tag{4}$$

Descrição

Dado um grafo, um emparelhamento (também conhecido como casamento, acoplamento ou *matching*) é um conjunto independente de arestas, ou seja, um conjunto de arestas sem vértices em comum.

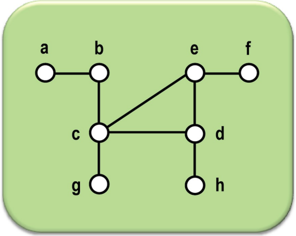


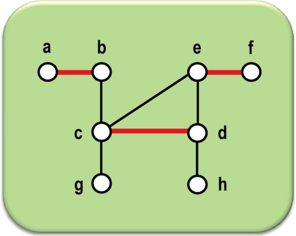
Exemplos de emparelhamentos em grafos.

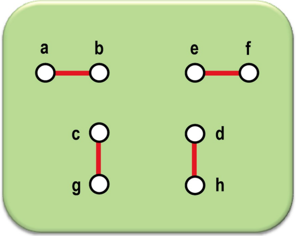
Emparelhamento Maximal e Emparelhamento Máximo

Um emparelhamento é considerado maximal caso a adição de alguma aresta descaracterize o emparelhamento.

Um emparelhamento é considerado máximo caso possua o maior número de arestas possível, ou seja, caso seja o maior emparelhamento possível no grafo.







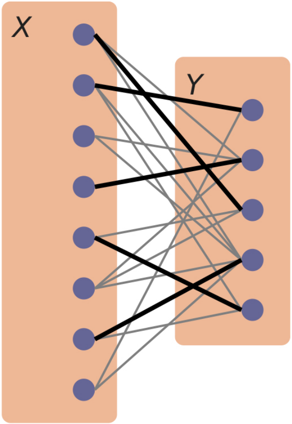
Exemplo de grafo, emparelhamento maximal e emparelhamento máximo.

Emparelhamento Ponderado

Em grafos ponderados, um emparelhamento deve ser maximal e também possuir custo mínimo.

O modelo utilizado para o problema de emparelhamento ponderado representa também o **Problema de Atribuição Linear**, que pode ser resolvido pelo algoritmo húngaro.

Ambos problemas são um caso particular do problema de transporte em que as demandas e ofertas são unitárias.



Definição

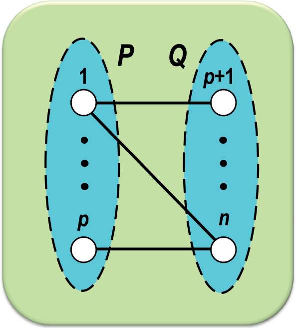
Seja G um grafo bipartido com uma partição (X, Y) dos vértices. Dizemos que temos um emparelhamento de X em Y quando um acoplamento de G satura Y (não necessariamente X).

Solução

O problema de emparelhamento em grafos bipartidos pode ser formulado e solucionado através de fluxo em redes.

Seja um grafo G simples (ponderado ou não), bipartido com dois conjuntos de vértices P e Q possuindo, respectivamente, p e q vértices ($P \cup Q = V$), como exibido na figura a seguir.

O Problema de Emparelhamento



Grafo bipartido obtido de G.

O Problema de Emparelhamento

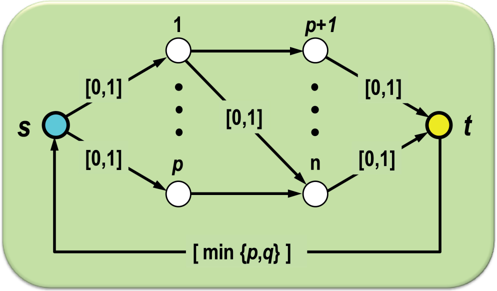
Solução

O grafo bipartido é incorporado a uma rede atravessada por um fluxo de valor igual ao mínimo entre p e q.

A rede possuirá um vértice fonte ligado a um dos conjuntos de vértices do grafo e o vértice sumidouro será ligado ao outro conjunto de vértices do grafo bipartido.

Todos os arcos da rede, com exceção do arco $t - s$, possuem capacidade máxima de fluxo igual a uma unidade.

O arco $t - s$ determina a obrigatoriedade de um fluxo igual a $min\{p, q\}$.



Rede de fluxo no grafo bipartido.

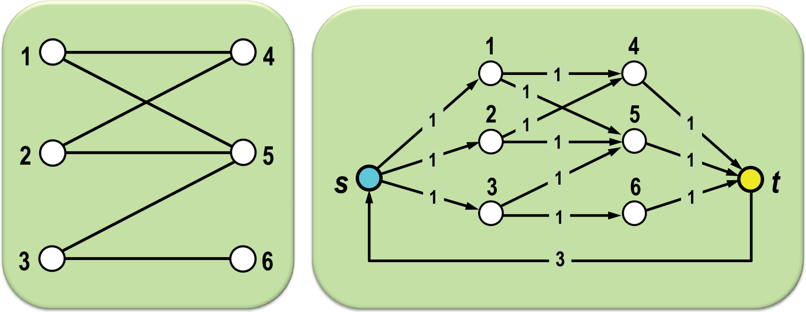
Solução

Para o caso de um grafo ponderado, o problema de fluxo a ser solucionado é o problema de fluxo máximo a custo mínimo.

Graças à direção esquerda-direita dos arcos, a rede não conterá ciclos de custo negativos, o que nos fornece uma dica de qual algoritmo utilizar para obter a menor complexidade.

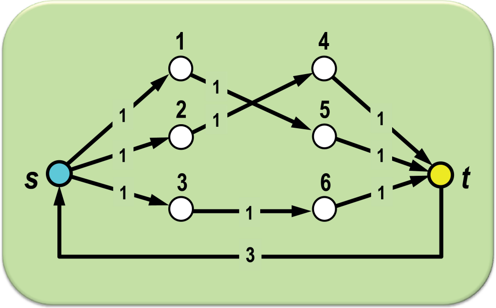
Os slides a seguir exemplificam os passos da solução do problema de emparelhamento através de fluxo em redes, ilustrando como o fluxo de se associa ao emparelhamento máximo.

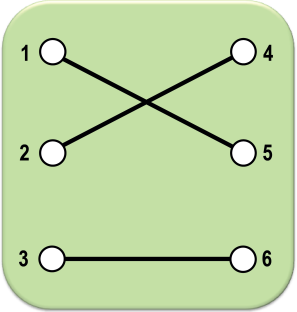
O Problema de Emparelhamento



Grafo G e formação da rede.

O Problema de Emparelhamento





Fluxo de custo mínimo e emparelhamento máximo.

Formulação

O modelo apresentado a seguir considera um grafo bipartido em que ambos conjuntos de vértices possuem cardinalidade n.

As variáveis binárias x_{ij} indicam a pertinência ou não de cada aresta na solução.

O custo de cada aresta é representado por c_{ij}.

O Problema de Emparelhamento

Formulação

$$min\ z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

sujeito a :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, n \tag{3}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \tag{4}$$

Definição

Um veículo (e.g. avião ou ônibus) possui capacidade para transportar p passageiros e visita as localidades $1, 2, 3, \ldots, n$ em uma sequência fixa.

O veículo pode receber o embarque de passageiros em todas as cidades e desembarcá-los em qualquer cidade posterior. O preço da passagem depende da origem e do destino.

O objetivo do problema de **Otimização da Lotação em Aviões e Ônibus** é determinar o número de passageiros a serem transportados entre cada par origem-destino de maneira a maximizar o lucro.

Este é um caso especial do problema de fluxo de custo mínimo.

Otimização da Lotação em Aviões e Ônibus

Definição

Seja b_{ij} o número de passageiros que podem embarcar na cidade i e desejam desembarcar na cidade j, com custo de passagem f_{ij}.

São criados vértices de oferta artificiais para cada par origem-destino e cada cidade é representada por um vértice de demanda.

O peso de cada arco é dado por f_{ij}.

A rede contém dados referentes somente aos arcos com custos diferentes de zero e capacidades definidas.

Qualquer outro arco sem custo é definido como custo zero e qualquer arco sem capacidade é definido como tendo capacidade infinita.

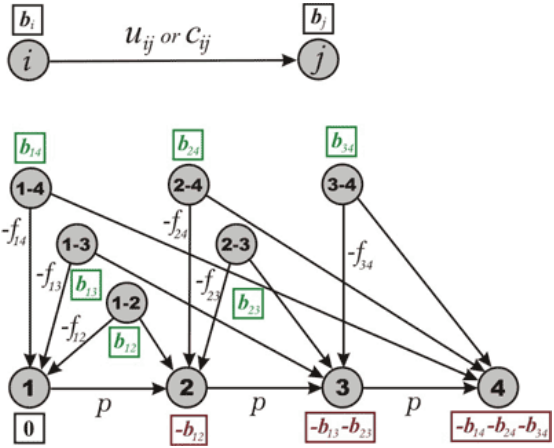
Definição

Por exemplo, consideremos um exemplo com quatro cidades.

Particularmente, três tipos de passageiros estão disponíveis na cidade 1: 1-2, 1-3 e 1-4, com ofertas b_{12}, b_{13} e b_{14}. Desta forma, 3 vértices de oferta são criados.

Como ilustração, os passageiros do par 1-3 embarcam na cidade 1 e desembarcam na cidade 3, fluindo pelos arcos (1-3, 1) e (1, 3) com custo -f_{13} ou então não embarcam nunca, fluindo pelo arcos (1-3, 3) sem custo.

A figura a seguir ilustra esta rede.



Formulação do problema de otimização de lotação em aviões e ônibus como fluxo de custo mínimo.

O Problema de Aproveitamento de Carga em Aviões de Passageiros

Definição

É comum que aviões de passageiros transportem cargas aproveitando capacidade ociosa.

Nestes fluxos de cargas áreas entre cidades o peso e volume são previamente conhecidos, como é o caso da distribuição de correspondências e jornais (antigamente).

Na programação de transporte de cargas de demanda estável entre cidades, é possível a definição do **Problema de Aproveitamento de Capacidade de Carga**.

Este problema consiste em definir a melhor programação da distribuição de cargas aéreas em vôos comerciais para o caso de demandas estáveis e bem conhecidas.

O Problema de Aproveitamento de Carga em Aviões de Passageiros

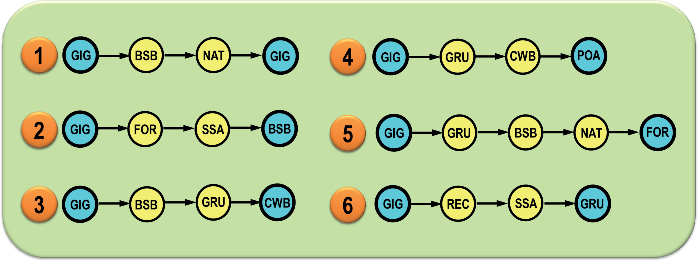
Exemplo

Para exemplificar a presente aplicação será examinado um caso fictício de transporte de jornais.

No exemplo, o jornal é editado no Rio de Janeiro (GIG) e distribuído para algumas cidades do Brasil.

A figura a seguir exibe, para o exemplo, seis vôos iniciando no Rio de Janeiro (GIG) e capazes de visitar as cidades que demandam pelo jornal (visita em horário apropriado à distribuição desse jornal).

O Problema de Aproveitamento de Carga em Aviões de Passageiros



Exemplo de vôos noturnos apropriados para o transporte de jornais.

Exemplo

Nem todas as cidades visitadas pelos vôos demandam pelo jornal, como o caso de Salvador (SSA) e Porto Alegre (POA), no exemplo.

Cada vôo é realizado por um avião com diferente capacidade de carga disponível, capacidade máxima nominada pela variável $\kappa_i, i = 1, \ldots, 6$.

Cada uma das cidades demanda um número diferente de jornais, que é expresso em um diferente peso de carga a ser transportada d_j, para a cidade j, $j = 1, \ldots, 6$ (GRU, REC, CWB, BSB, FOR e NAT).

O Problema de Aproveitamento de Carga em Aviões de Passageiros

Exemplo

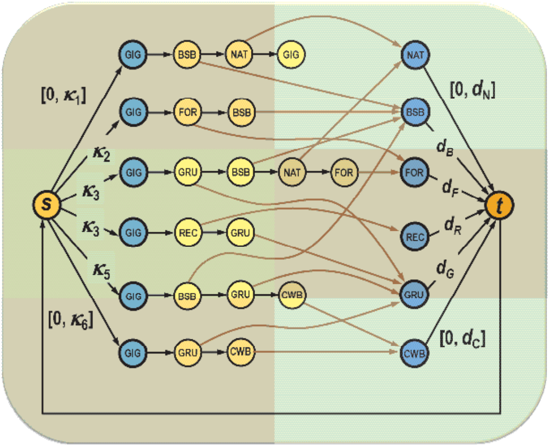
Com base nos dados anteriormente descritos, é possível a constituição da rede exibida a seguir.

O vértice GIG é o vértice fonte. O vértice sumidouro é artificial e a ele se ligam todas as cidades que demandam por jornal.

A capacidade dos arcos que ligam as cidades de demanda ao vértice artificial é igual a demanda da cidade.

A capacidade dos arcos de cada rota de vôo é igual a capacidade máxima de carga disponível no avião que realiza o vôo.

O Problema de Aproveitamento de Carga em Aviões de Passageiros



Rede de solução do problema proposto.

O Problema de Aproveitamento de Carga em Aviões de Passageiros

Exemplo

Considerando que a tarifa cobrada pelo quilo de carga transportada não depende do avião que faz esse transporte, e que o lucro unitário da empresa transportadora é o mesmo qualquer que seja a cidade de destino da carga, o fluxo máximo na rede representa uma solução para o transporte da demanda ou o máximo de demanda que será possível à empresa transportar.

Observa-se que a oferta de transporte em cada vôo relativa a uma cidade é concentrada em um vértice artificial com o mesmo nome da cidade.

Dúvidas?