PCC173/BCC463 - Otimização em Redes

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

Conteúdo

Aviso

Fonte

Este material é baseado no material

- Alex Chumbley, Karleigh Moore, and Jimin Khim. *Johnson's Algorithm*. Disponível em `https://brilliant.org/wiki/johnsons-algorithm/`.
- Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., & Stein, C. (2002). Algoritmos: teoria e prática. Editora Campus.

Licença

Algoritmo de *Johnson* para Grafos Esparsos

Histórico

O algoritmo proposto por Donald B. Johnson em 1977[a] determina os caminhos mais curtos entre todos os pares de vértices em grafos:

- Direcionados;
- Ponderados;
- Com arcos de peso negativo;
- Sem ciclos de peso negativo.

Para grafos esparsos, ele é assintoticamente melhor do que o algoritmo de *Floyd-Warshall*.

---

[a] Johnson, Donald B. (1977), "Efficient algorithms for shortest paths in sparse networks", Journal of the ACM 24 (1): 1–13, doi:10.1145/321992.321993.

Algoritmo de *Johnson* para Grafos Esparsos

Princípio

O algoritmo de *Johnson* retorna uma matriz de pesos de caminhos mais curtos ou informa que o grafo de entrada contém um ciclo de peso negativo.

Utiliza como sub-rotinas os algoritmos de *Dijkstra* e *Bellman-Ford*.

Utiliza também uma técnica de **reponderação** para eliminar arcos de peso negativo.

Algoritmo de *Johnson* para Grafos Esparsos

Reponderação

Se todos os pesos de arcos w em um grafo $G{=}(V, E)$ são não negativos, podemos encontrar caminhos mais curtos entre todos os pares de vértices executando o algoritmo de *Dijkstra* uma vez a partir de cada vértice.

Se G possui arcos de peso negativo, mas nenhum ciclo de peso negativo, simplesmente calculamos um novo conjunto de pesos de arcos não negativos que nos permita aplicar o mesmo método.

O novo conjunto de pesos $\hat{w}$ deve satisfazer a duas propriedades importantes:

1. Para todos os pares de vértices $u, v \in V$, um caminho p é um caminho mais curto de u até v usando a função de peso w se e somente se p também é um caminho mais curto desde u até v usando a função de peso $\hat{w}$;
2. Para todos os arcos (u, v), o novo peso $\hat{w}(u, v)$ é não negativo.

Algoritmo de *Johnson* para Grafos Esparsos

Reponderação

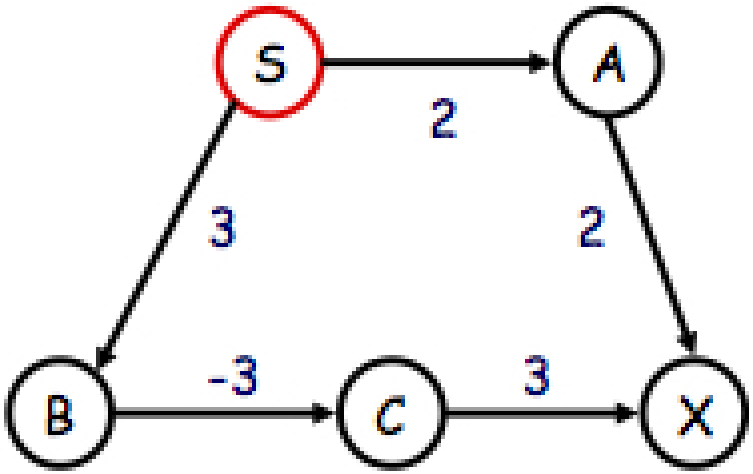
Intuitivamente, podemos tentar reponderar os pesos dos arcos subtraindo o valor do arco de menor custo.

Entretanto, esta estratégia não funciona.

Se houver múltiplos caminhos entre os vértices u e v, então cada um deles deve ser acrescido do mesmo valor, de maneira a preservar a consistência do caminho mais curto em ambos os grafos.

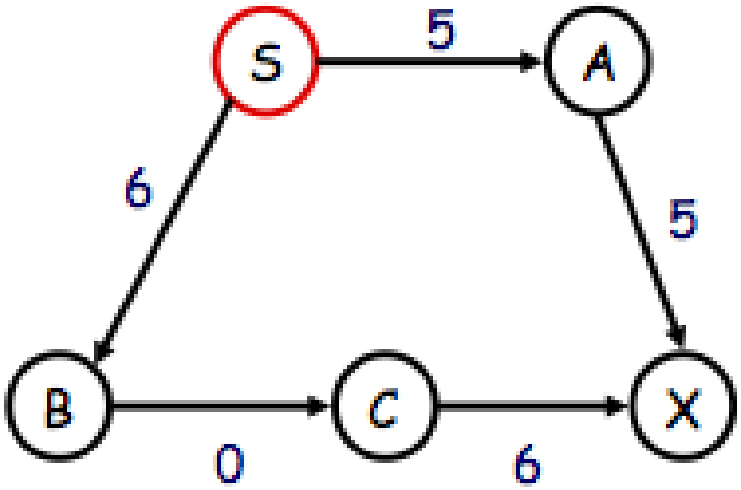
O algoritmo de Johnson utiliza um pré-processamento que associa a cada vértice v um peso $h(v)$, tal que os caminhos entre todos os pares de vértices são acrescidos do mesmo valor, e nenhuma aresta possui peso negativo.

Algoritmo de *Johnson* para Grafos Esparsos



Grafo original.

Algoritmo de *Johnson* para Grafos Esparsos



Reponderação que implica em inconsistência dos caminhos mais curtos (e.g., entre s e x).

Reponderação

O pré-processamento de G para determinar uma nova função de peso $\hat{w}$ pode ser executado em tempo $O(nm)$.

Para um grafo orientado ponderado $G = (V, E)$ com a função de peso $w : E \to \mathcal{R}$, seja $h : V \to \mathcal{R}$ qualquer função que mapeia vértices para números reais. Para cada arco $(u, v) \in E$, definimos

$$\hat{w}(u, v) = w(u, v) + h(u) = h(v)$$

A função $\hat{w}(u, v)$ atende às duas propriedades postas anteriormente: consistência dos menores caminhos e não negatividade.

A prova de corretude será omitida, porém, pode ser encontrada no livro *Algoritmos: Teoria e Prática*.

Algoritmo de *Johnson* para Grafos Esparsos

Reponderação

Para a utilização da função definida anteriormente, um vértice artificial s, sem antecessores e adjacente a todos os demais vértices usando arcos de peso zero, deve ser adicionado ao grafo.

A função $h(v)$ pode ser definida como o comprimento do caminho mais curto entre a origem s e o vértice v ($\forall v \in V$), usando os pesos determinados por w.

É importante observar que o caminhos mais curtos citados acima podem conter arcos de peso negativo, portanto, podem ser calculados pelo algoritmo de *Bellman-Ford*.

Algoritmo de *Johnson* para Grafos Esparsos

Terminologia

- w: pesos originais dos arcos do grafo;
- $\hat{w}$: pesos reponderados dos arcos do grafo;
- δ: comprimentos de caminhos mais curtos calculados usando w;
- $\hat{\delta}$: comprimentos de caminhos mais curtos calculados usando $\hat{w}$;
- $G' = (V', E')$: grafo criado a partir do grafo original, porém, com o acréscimo do vértice s e respectivos arcos de peso zero;
- D: matriz $n \times n$ utilizada para armazenar os caminhos mais curtos.

Algoritmo de *Johnson* para Grafos Esparsos

Entrada: Grafo $G = (V, E)$
1 $G' \leftarrow G$;
2 $V' \leftarrow V' \cup \{s\}$;
3 $E' \leftarrow E' \cup (s, v)\ \forall v \in V$;
4 $w(s, v) \leftarrow 0\ \forall v \in V$;
5 **se** *Bellman-Ford*(G', w, s) = ***FALSO*** **então**
6 | **Imprima** "Contém ciclo negativo!";
7 **senão**
8 | **para** *cada vértice* $v \in V'$ **faça**
9 | | $h(v) \leftarrow \delta(s, v)$;//calculado por *Bellman-Ford*
10 | **fim**
11 **fim**
12 **para** *cada arco* $(u, v) \in E'$ **faça**
13 | $\hat{w}(u, v) \leftarrow w(u, v) + h(u) - h(v)$;
14 **fim**
15 **Crie** uma nova matriz D $n \times n$;
16 **para** *cada vértice* $u \in V$ **faça**
17 | *Dijkstra*$(G, \hat{w}, u)$;//calcula $\hat{\delta}(u, v)\ \forall v \in V$
18 | **para** *cada vértice* $v \in V$ **faça**
19 | | $d_{uv} \leftarrow \hat{\delta}(u, v) + h(v) - h(u)$;
20 | **fim**
21 **fim**
22 **retorna** D;

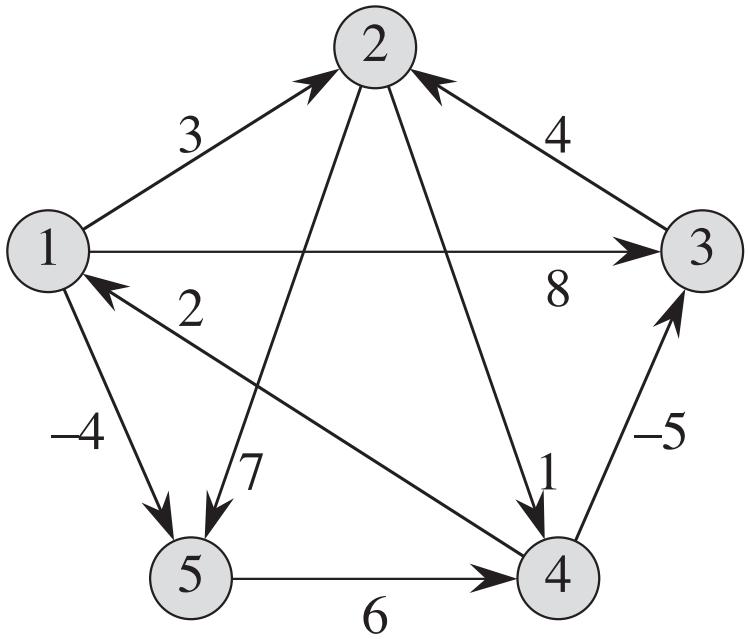
Algoritmo de *Johnson* para Grafos Esparsos

Complexidade

Se implementarmos a fila de prioridade no algoritmo de *Dijkstra* por um *heap* de *Fibonacci*, o algoritmo de Johnson é executado em tempo $O(n^2\ lgn + nm)$.

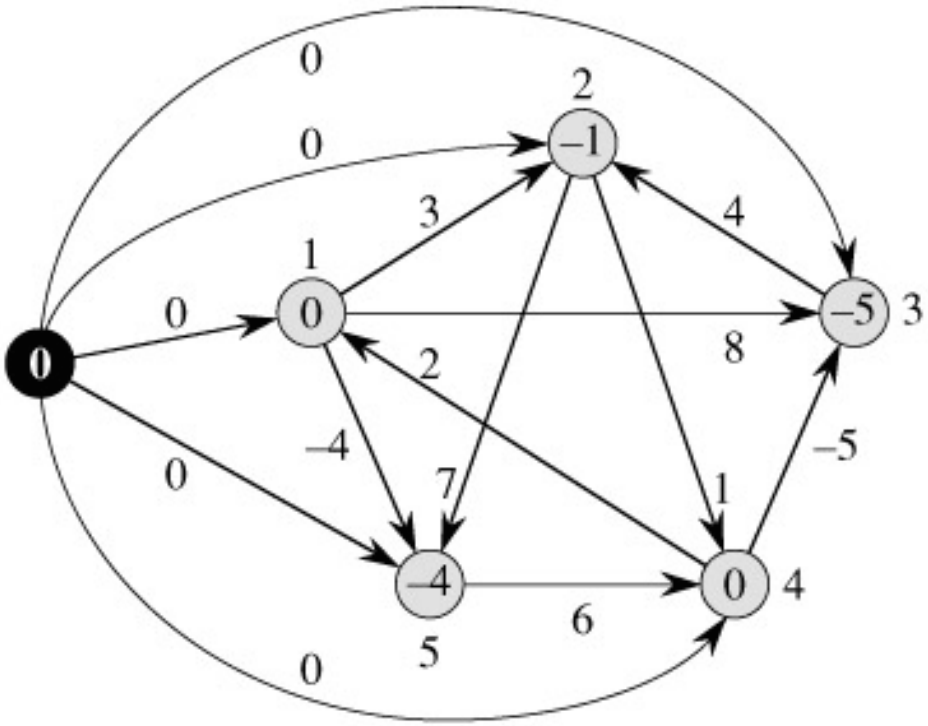
A implementação mais simples por *heap* mínimo binário gera o tempo de execução $O(nm\ lgn)$, que ainda é assintoticamente mais rápido que o algoritmo de Floyd-Warshall, $\Theta(n^3)$, em grafos esparsos.

Exemplo



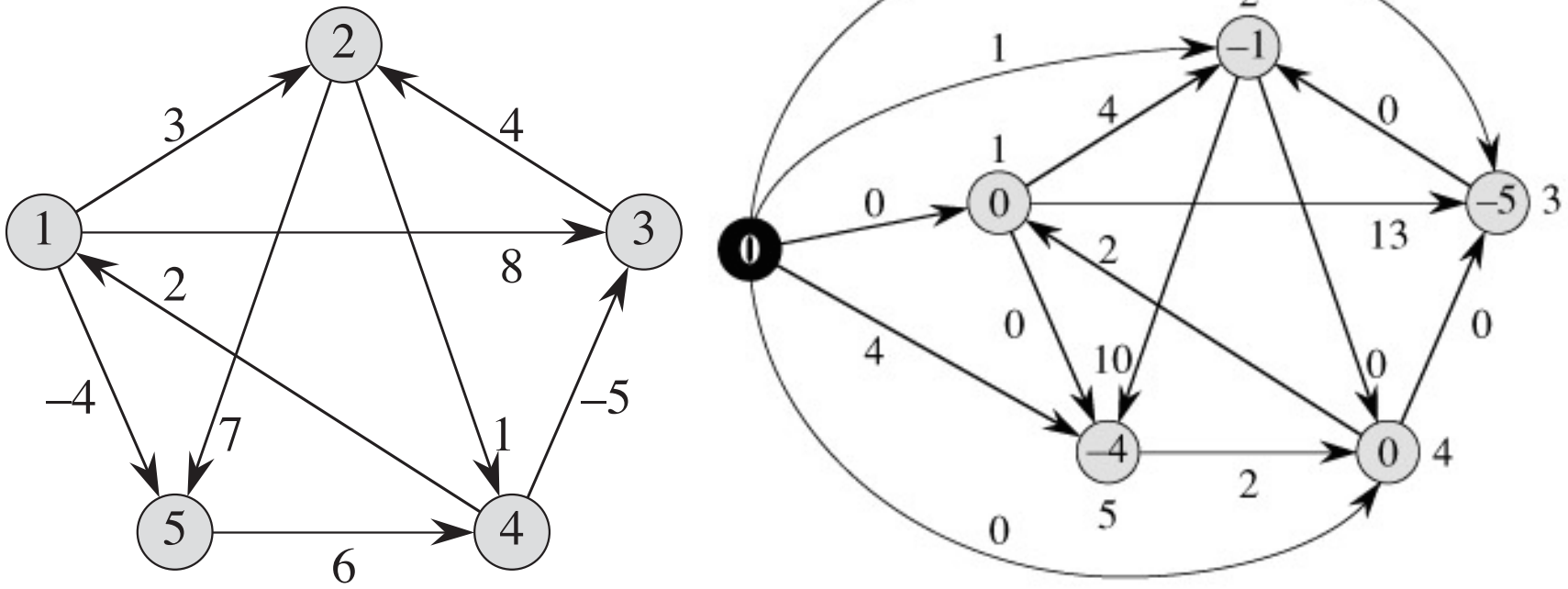
Grafo original.

Exemplo



Grafo G' com a função peso w original. O novo vértice s é destacado em preto. O rótulo de cada vértice v é $h(v) = \delta(s, v)$.

Exemplo



Cada arco (u, v) é reponderado com a função peso $\hat{w}(u, v) = w(u, v) + h(u) - h(v)$.

Algoritmo de *Johnson* para Grafos Esparsos

Exemplo

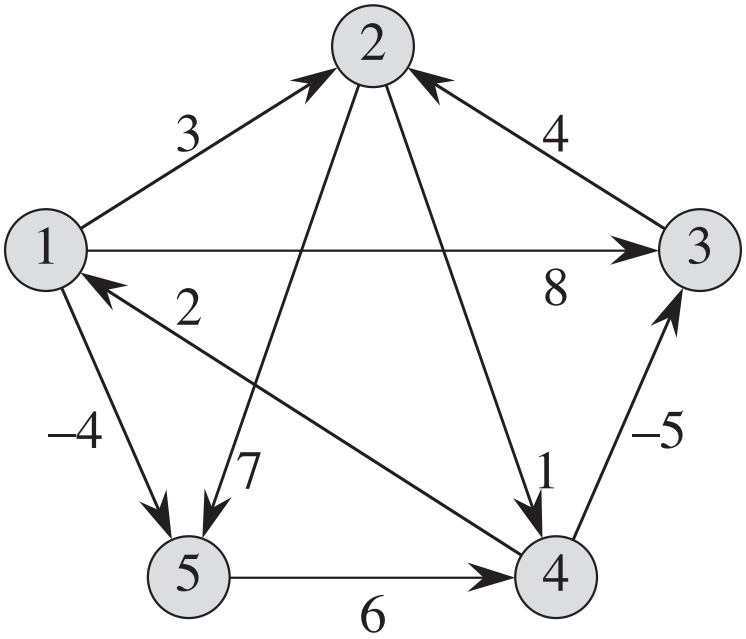
Os slides a seguir ilustram a execução do algoritmo de *Dijkstra* em cada vértice de G, usando a função de peso $\hat{w}$.

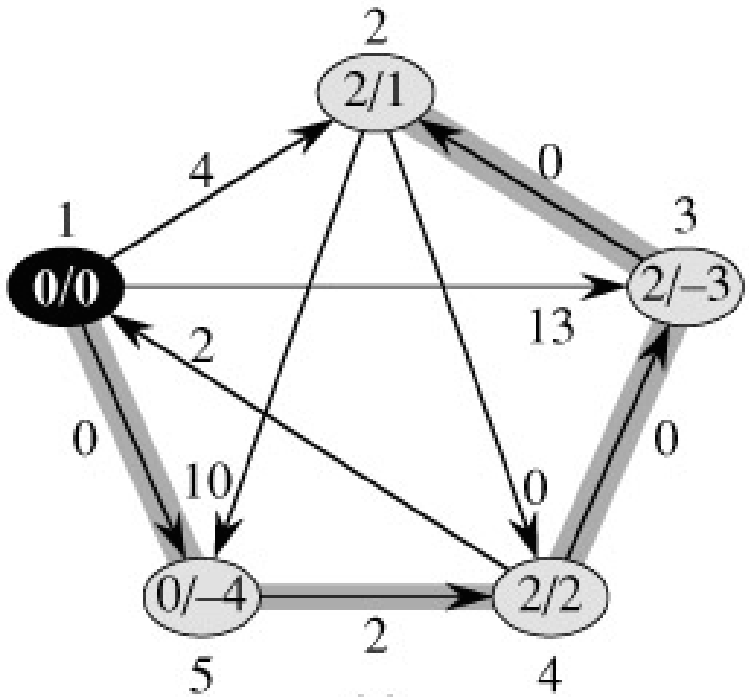
Em cada figura, o vértice de origem é o destacado em preto, e os arcos sombreados estão na árvore de caminhos mais curtos calculada pelo algoritmo.

Dentro de cada vértice v estão indicados os valores $\hat{\delta}(u, v)$ e $\delta(u, v)$, separados por uma barra.

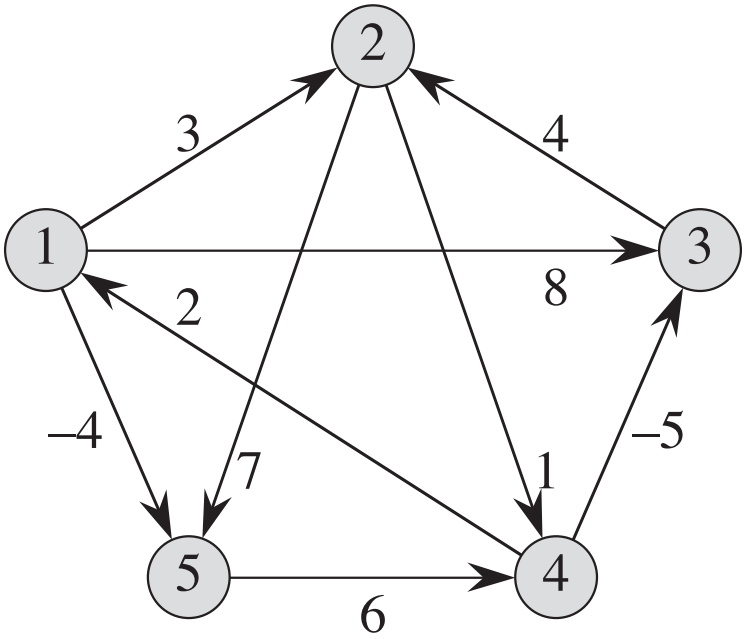
O valor $d_{uv} = \delta(u, v)$ é igual a $\hat{\delta}(u, v) + h(v) - h(u)$.

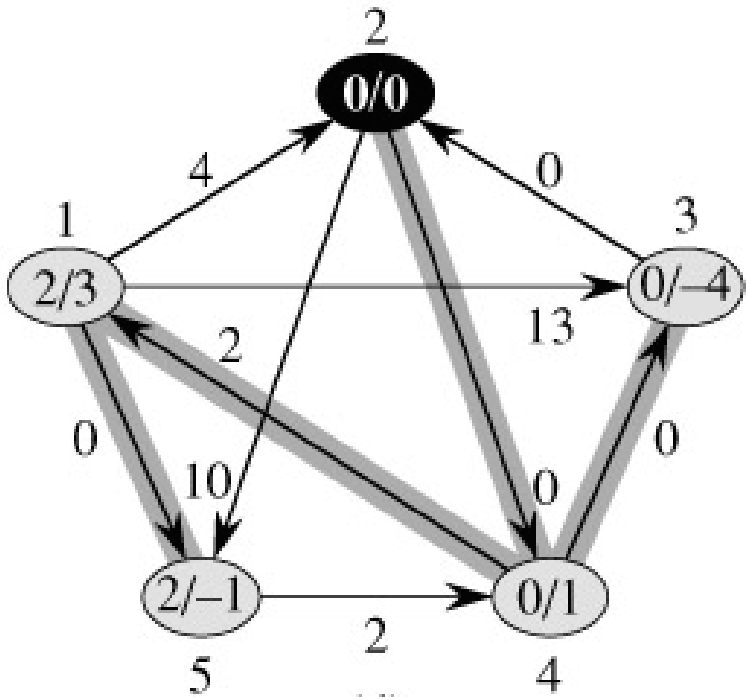
Exemplo



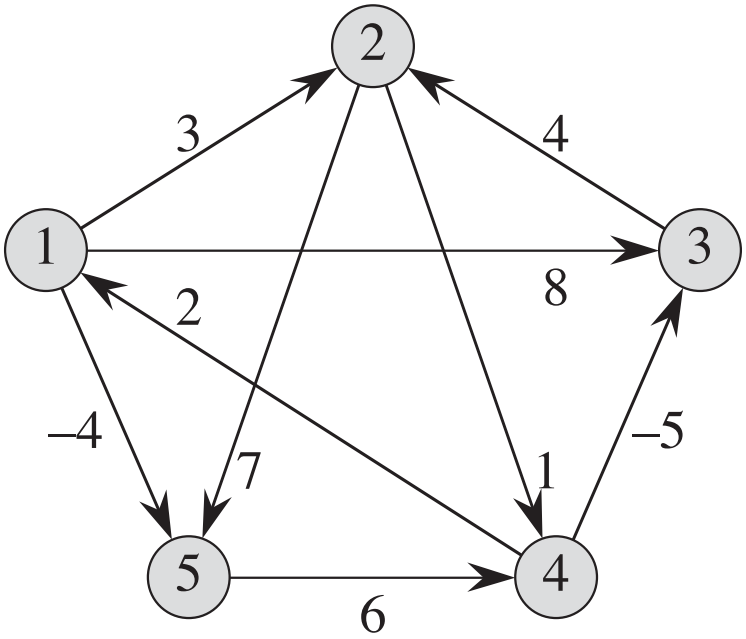


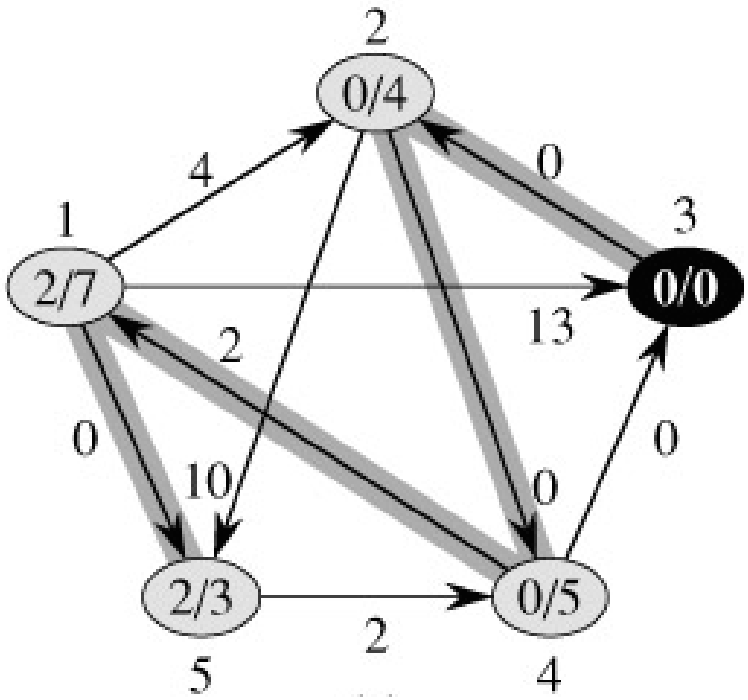
Exemplo



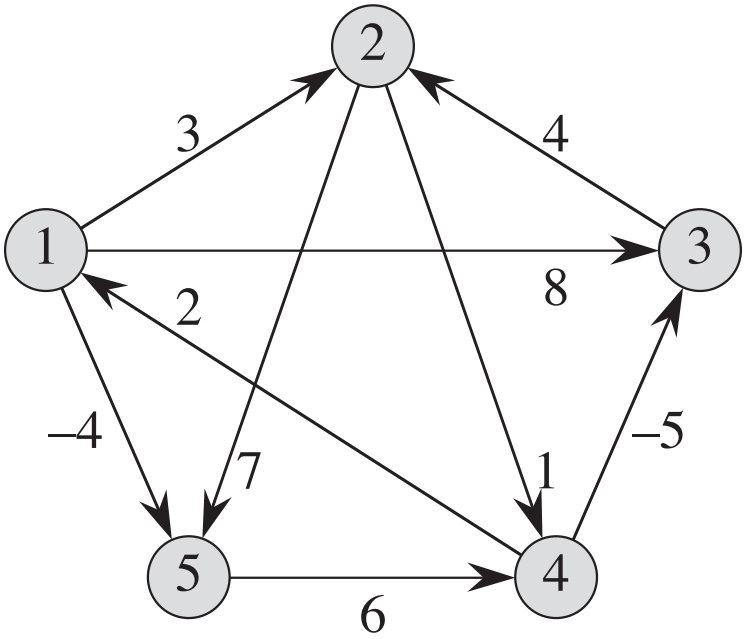


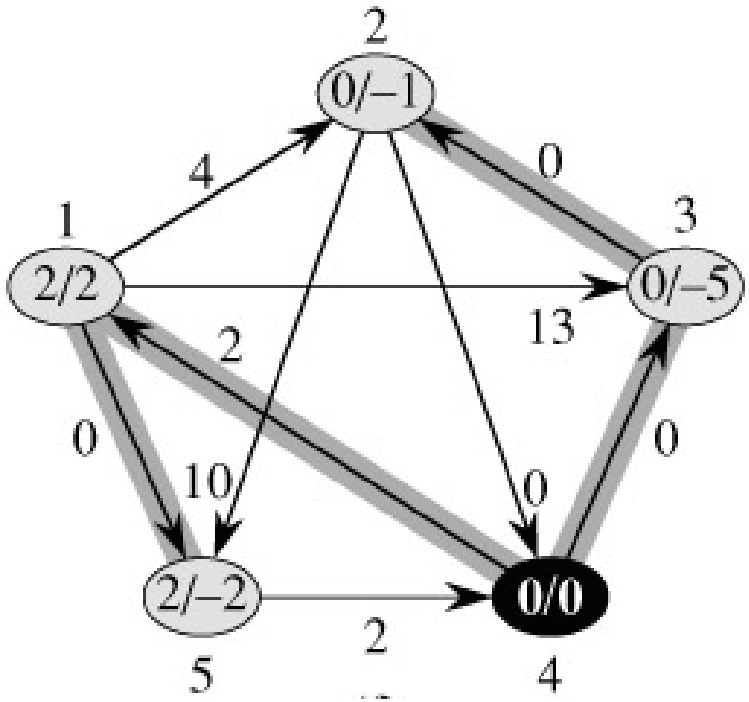
Exemplo



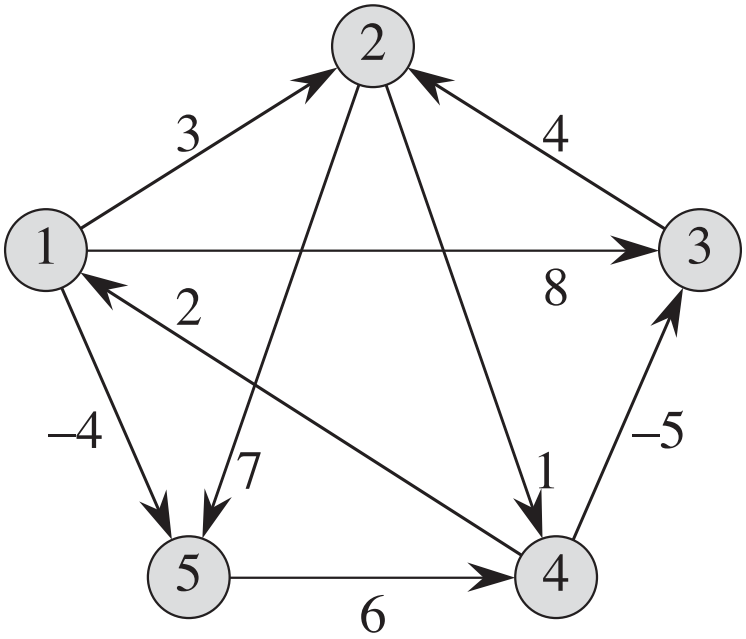


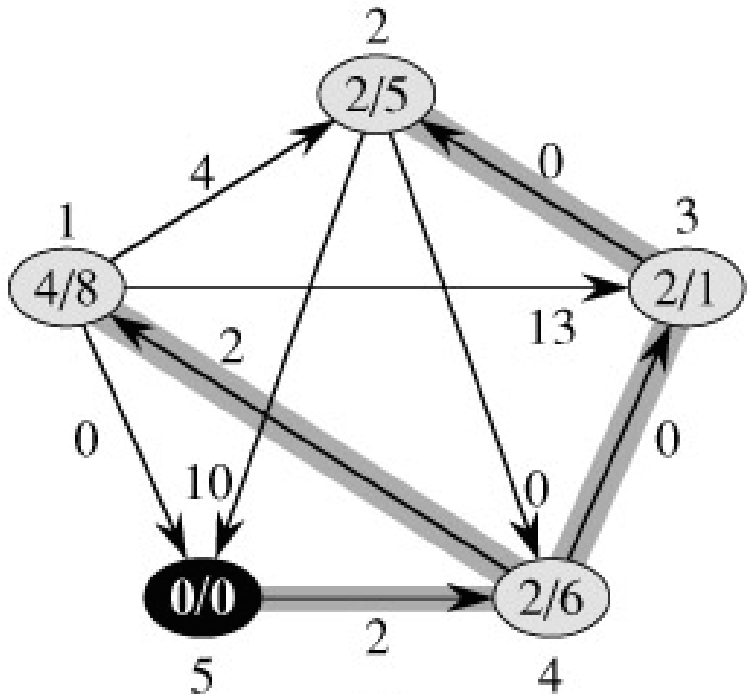
Exemplo





Exemplo





Dúvidas?