PCC104 - Projeto e Análise de Algoritmos

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

Conteúdo

Fonte

Este material é baseado nos livros

- T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, 3rd edition, 2009.
- S. Halim. *Competitive Programming*. 3rd Edition, 2013.
- Ian Parberry and William Gasarch. *Problems on Algorithms*. Second Edition, 2002.
- Ian Parberry *Lecture Notes on Algorithm Analysis and Complexity Theory*. Fourth Edition, 2001.

Licença

O Teorema Mestre

O Teorema Mestre fornece "receitas" para resolver recorrências da forma

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

em que $a \geq 1$ e $b > 1$ são constantes positivas e $f(n)$ é uma função assintoticamente positiva.

A recorrência acima descreve a complexidade de tempo de um algoritmo que divide o problema original de tamanho n em a subproblemas de tamanho n/b.

Os a subproblemas são resolvidos em tempo $T(n/b)$ cada um.

A função $f(n)$ engloba o custo de dividir o problema original e, eventualmente, combinar os resultados dos subproblemas.

Note que n/b pode não ser inteiro, entretanto, o termo $T(n/b)$ pode ser substituído por $T(\lceil n/b \rceil)$ ou $T(\lfloor n/b \rfloor)$ sem afetar o comportamento assintótico da recorrência.

Usando o Teorema Mestre

O Teorema Mestre enumera três casos em que se torna fácil resolver recorrências.

Note que não estamos interessados em obter a forma fechada para a recorrência, mas sim em seu comportamento assintótico, de maneira direta.

Isto é o contrário de quando empregamos o método de substituição, no qual encontramos a forma fechada e depois analisamos seu comportamento assintótico.

O Teorema Mestre

Teorema

Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, $f(n)$ uma função e $T(n)$ definida sobre inteiros não negativos pela recorrência

$$T(n) = aT(n/b) + f(n), \tag{1}$$

em que interpretamos $T(n/b)$ como $T(\lceil n/b \rceil)$ ou $T(\lfloor n/b \rfloor)$.

Então $T(n)$ possui os seguintes limites assintóticos:

1. Se $f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $T(n) = \Theta(n^{log_b a})$.
2. Se $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{log_b a} log\ n)$.
3. Se $f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$ e se $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante c < 1 e n suficientemente grande, então $T(n) = \Theta(f(n))$.

O Teorema Mestre

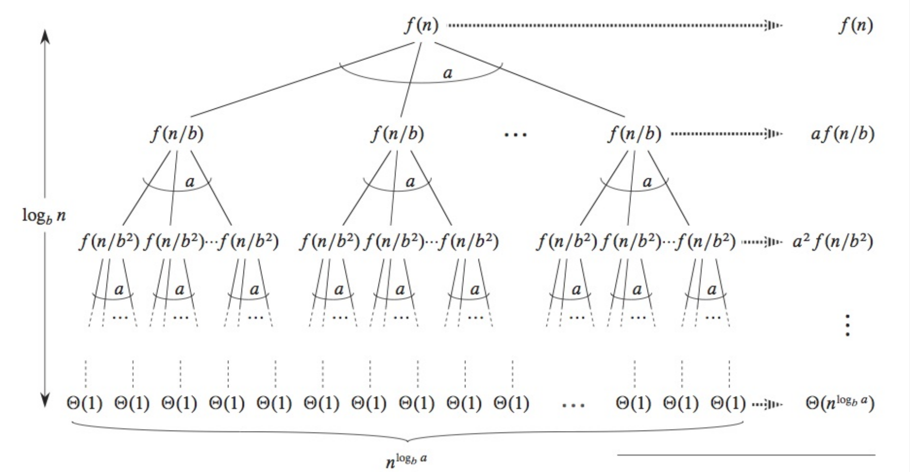
Porquê três casos?

Nos 3 casos, comparamos uma função $f(n)$ com a função $n^{log_b a}$. A complexidade da recorrência é determinada pela maior das duas:

1. No primeiro caso, a função $n^{log_b a}$ é maior, portanto, $T(n) = \Theta(n^{log_b a})$.
2. No terceiro caso, a função $f(n)$ é maior, portanto, $T(n) = \Theta(f(n))$.
3. No segundo caso, as duas funções têm o mesmo "tamanho". A solução é multiplicada por um fator logarítmico, portanto, $T(n) = \Theta(n^{log_b a} log\ n) = \Theta(f(n) log n)$.

O Teorema Mestre

$n^{log_b a}$



O Teorema Mestre

Observação 1

$n^{log_b a}$ é o número de folhas da árvore de recursão a-ária gerada por $T(n) = aT(n/b) + f(n)$.

Observação 2

No caso 2, multiplicamos $f(n)$ (equivalente a $n^{log_b a}$) por $logn$ para indicar que o custo $f(n)$ se dá a cada nível da árvore mostrada anteriormente.

Teorema Mestre

Função Polinomialmente Maior

Uma função $f(n)$ é **polinomialmente maior** que outra função $g(n)$ se pudermos achar algum $\epsilon > 0$ tal que $\frac{f(n)}{g(n)} = n^{\epsilon}$.

Exemplo: n^2 é polinomialmente maior que n. No entanto, $nlogn$ e $2n$ não são polinomialmente maiores que n.

Função Polinomialmente Menor

Uma função $f(n)$ é **polinomialmente menor** que outra função $g(n)$ se pudermos achar algum $\epsilon > 0$ tal que $\frac{g(n)}{f(n)} = n^{\epsilon}$.

Função Assintoticamente Igual

Uma função $f(n)$ é assintoticamente igual a outra função $g(n)$ se $lim\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) = 1$, quando n tende ao infinito.

Observação Sobre o Caso 1

A função $f(n)$ não deve ser apenas menor do que $n^{log_b a}$, deve ser **polinomialmente** menor do que $n^{log_b a}$.

Em outras palavras,

$$n^{log_b a}/f(n) = n^{\epsilon}$$

$f(n)$ deve ser assintoticamente menor que $n^{log_b a}$ por um fator n^{ϵ}, para alguma constante $\epsilon > 0$.

Condição de Regularidade

A **condição de regularidade** estabelece que $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e para todo n suficientemente grande.

Isto é, para n tendendo ao infinito, há uma constante c $(0 < c < 1)$ tal que $af(n/b) \leq cf(n)$.

A condição de regularidade sempre é satisfeita quando $T(n)$ é uma função monotonicamente não decrescente (por exemplo 2^n, n^2, $logn$, $n!$, etc.).

Algumas funções de n (tais como $sen(n)$ e $cos(n)$) não monotonicamente não decrescentes, e não satisfazem a condição de regularidade.

Em problemas reais e de interesse prático, o tempo de execução nunca decresce quando n cresce.

Observação Sobre o Caso 3

A função $f(n)$ não deve ser apenas maior do que $n^{log_b a}$, deve ser **polinomialmente** maior do que $n^{log_b a}$, ou seja:

$$f(n)/n^{log_b a} = n^{\epsilon}$$

$f(n)$ deve ser assintoticamente maior que $n^{log_b a}$ por um fator n^{ϵ}, para alguma constante $\epsilon > 0$.

Ainda, $f(n)$ deve satisfazer a condição de "regularidade"

$$af(n/b) \leq cf(n)$$

para alguma constante $c < 1$ e n suficientemente grande.

A condição de regularidade é satisfeita pela maioria das funções polinomiais que encontraremos.

Observação Geral

Existem casos não cobertos para $f(n)$ pelo Teorema Mestre:

- Entre os casos 1 e 2, existem funções $f(n)$ que são menores que $n^{log_b a}$, mas não são **polinomialmente** menores;
- Entre os casos 2 e 3, existem funções $f(n)$ que são maiores que $n^{log_b a}$, mas não são **polinomialmente** maiores.

Se $f(n)$ cai em um destes casos, ou não atende à condição de regularidade do caso 3, então não é possível aplicar o Teorema Mestre.

Exemplo 1

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

- $a = 9$;
- $b = 3$;
- $f(n) = n$.

Logo, $n^{log_b a} = n^{log_3 9} = \Theta(n^2)$.

Como $f(n) = O(n^{log_3 9 - \epsilon})$, onde $\epsilon = 1$, podemos aplicar o caso 1 do Teorema Mestre e concluir que a solução da recorrência é

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

Exemplo 1

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

- $a = 9$;
- $b = 3$;
- $f(n) = n$.

Logo, $n^{log_b a} = n^{log_3 9} = \Theta(n^2)$.

Como $f(n) = O(n^{log_3 9 - \epsilon})$, onde $\epsilon = 1$, podemos aplicar o caso 1 do Teorema Mestre e concluir que a solução da recorrência é

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

Exemplo 2

$$T(n) = T(2n/3) + 1$$

- $a = 1$;
- $b = 3/2$;
- $f(n) = 1$.

Logo, $n^{log_b a} = n^{log_{3/2} 1} = n^0 = 1$.

Como $f(n) = \Theta(n^{log_b a}) = \Theta(1)$, podemos aplicar o caso 2 do Teorema Mestre e concluir que a solução da recorrência é

$$T(n) = \Theta(log\ n)$$

Exemplo 2

$$T(n) = T(2n/3) + 1$$

- a = 1;
- b = 3/2;
- $f(n) = 1$.

Logo, $n^{log_b a} = n^{log_{3/2} 1} = n^0 = 1$.

Como $f(n) = \Theta(n^{log_b a}) = \Theta(1)$, podemos aplicar o caso 2 do Teorema Mestre e concluir que a solução da recorrência é

$$T(n) = \Theta(log\ n)$$

Exemplo 3

$$T(n) = 3T(n/4) + n\ log\ n$$

- $a = 3$;
- $b = 4$;
- $f(n) = n\ log\ n$.

Logo, $n^{log_b a} = n^{log_4 3} = n^{0,793}$.

Como $f(n) = \Omega(n^{log_4 3+\epsilon})$, em que $\epsilon \approx 0,2$, podemos aplicar o caso 3 do Teorema Mestre se provarmos que a condição de regularidade é verdadeira para $f(n)$:

$$af(n/b) = 3(n/4)log(n/4) \leq (3/4)n\ log\ n = cf(n)$$

para $c = 3/4$. Desta forma, podemos aplicar o caso 3 do Teorema Mestre e concluir que a solução da recorrência é

$$T(n) = \Theta(n\ log\ n)$$

Exemplo 3

$$T(n) = 3T(n/4) + n\ log\ n$$

- $a = 3$;
- $b = 4$;
- $f(n) = n\ log\ n$.

Logo, $n^{log_b a} = n^{log_4 3} = n^{0,793}$.

Como $f(n) = \Omega(n^{log_4 3 + \epsilon})$, em que $\epsilon \approx 0,2$, podemos aplicar o caso 3 do Teorema Mestre se provarmos que a condição de regularidade é verdadeira para $f(n)$:

$$af(n/b) = 3(n/4)log(n/4) \leq (3/4)n\ log\ n = cf(n)$$

para $c = 3/4$. Desta forma, podemos aplicar o caso 3 do Teorema Mestre e concluir que a solução da recorrência é

$$T(n) = \Theta(n\ log\ n)$$

Exemplo 4

$$T(n) = 2T(n/2) + n\ log\ n$$

- $a = 2$;
- $b = 2$;
- $f(n) = n\ log\ n$.

Logo, $n^{log_b a} = n^{log_2 2} = n$.

Embora $f(n)$ seja *assintoticamente* maior do que $n^{log_b a}$, não é **polinomialmente** maior.

A razão $f(n)/n^{log_b a} = (n\ log\ n)/n = log\ n$ é assintoticamente menor do que n^{ϵ} para qualquer constante positiva ϵ.

Desta forma, a recorrência cai entre os casos 2 e 3 e não pode ser resolvida pelo Teorema Mestre.

Exemplo 4

$$T(n) = 2T(n/2) + n \; log \; n$$

- $a = 2$;
- $b = 2$;
- $f(n) = n \; log \; n$.

Logo, $n^{log_b a} = n^{log_2 2} = n$.

Embora $f(n)$ seja *assintoticamente* maior do que $n^{log_b a}$, não é **polinomialmente** maior.

A razão $f(n)/n^{log_b a} = (n \; log \; n)/n = log \; n$ é assintoticamente menor do que n^{ϵ} para qualquer constante positiva ϵ.

Desta forma, a recorrência cai entre os casos 2 e 3 e não pode ser resolvida pelo Teorema Mestre.

Equações Inadimissíveis

- $T(n) = 2^n T\left(\frac{n}{2}\right) + n^n$: a não é constante – o número de subproblemas deve ser fixo;
- $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{\log n}$: A razão entre $f(n)$ e $n^{\log_b a}$ não é polinomial;
- $T(n) = 0,5T\left(\frac{n}{2}\right) + n$: $a < 1$ implica em menos do que um subproblema;
- $T(n) = 64T\left(\frac{n}{8}\right) - n^2 \log n$: $f(n) < 0$ implica em tempo de combinação negativo;
- $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + n(2 - \cos n)$: não atende a condição de regularidade.

Notação Assintótica em Funções

Utilização

Comumente, manipulamos a notação assintótica em expressões matemáticas.

Por exemplo, considerando a notação O, podemos escrever que $n = O(n^2)$.[a]

Em outro exemplo, temos que $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$.

É necessário termos em mente o abuso de notação que fazemos em relação à notação assintótica: $=$ significa $\in$.

Adicionalmente, é necessário lembrar que o sinal $=$ é **unidirecional**.

[a] O que é verdade, porém, impreciso.

Interpretação Lado Direito

Caso a notação assintótica apareça sozinha no lado direito de uma igualdade, temos que o lado esquerdo é membro do conjunto do lado direito.

Por exemplo, $n = O(n^2)$ significa $n \in O(n^2)$ ou $n \subseteq O(n^2)$.

Note que não se escrevem igualdades em que a notação assintótica aparece sozinha do lado esquerdo.

Por exemplo, seria possível concluir erroneamente que $n^2 = n$ a partir de $O(n^2) = n$.

Interpretação Lado Direito pt. 2

Utilizamos a notação assintótica em substituição a uma função que não necessita ser definida precisamente.

Por exemplo,

$$2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$$

significa

$$2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + f(n)$$

em que $f(n)$ é alguma função pertencente ao conjunto $\Theta(n)$.

De fato, $f(n) = 3n + 1$ pertence a $\Theta(n)$.

Notação Assintótica em Funções

Conclusão

A utilização de notação assintótica em expressões nos permite abstrair detalhes não essenciais.

Este é o caso na análise do comportamento assintótico de equações de recorrência, em que ignoramos os termos de mais baixa ordem. Por exemplo, em

$$T(n) = 2T(n-1) + \Theta(n)$$

entende-se que os termos de mais baixa ordem estão incluídos em uma função $f(n) \in \Theta(n)$.

Interpretação Lado Esquerdo

A notação assintótica também pode aparecer do lado esquerdo de uma igualdade, como em

$$2n^2 + \Theta(n) = \Theta(n^2)$$

Interpretamos estes casos da seguinte maneira:

- Existe uma função $f(n)$ para o lado esquerdo da igualdade tal que existe uma função $g(n)$ para o lado direito que torna a igualdade válida.
- O lado direito da igualdade é definido menos precisamente do que o lado esquerdo, conforme nos dois exemplos abaixo:

$$2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$$

$$2n^2 + \Theta(n) = \Theta(n^2)$$

Interpretação Lado Esquerdo pt. 2

$$2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$$
$$2n^2 + \Theta(n) = \Theta(n^2)$$

As duas equações dos exemplos anteriores podem ser interpretadas conforme descrito:

- A primeira equação diz que existe uma função $f(n) \in \Theta(n)$ tal que $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + f(n)$ para todo n.
- A segunda equação diz que para qualquer função $g(n) \in \Theta(n)$, existe uma função $h(n) \in \Theta(n^2)$ tal que
$$2n^2 + g(n) = h(n)$$
para todo n.

Note que isto implica em $2n^2 + 3n + 1 = \Theta(n^2)$, que é exatamente o que as duas equações dizem.

Exercícios

Aplique o Teorema Mestre ou prove não ser possível:

1. $T(n) = 4T(n/2) + n$;
2. $T(n) = 4T(n/2) + n^2$;
3. $T(n) = 4T(n/2) + n^3$;
4. $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$;
5. $T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^2)$ //Multiplicação de Matrizes;
6. $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$ //Multiplicação de Strassen.

Dúvidas?