PCC104 - Projeto e Análise de Algoritmos

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

Conteúdo

Fonte

Este material é baseado nos livros

- T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, 3rd edition, 2009.
- S. Halim. *Competitive Programming*. 3rd Edition, 2013.
- Ian Parberry and William Gasarch. *Problems on Algorithms*. Second Edition, 2002.
- Ian Parberry *Lecture Notes on Algorithm Analysis and Complexity Theory*. Fourth Edition, 2001.

Licença

Ian Parberry e William Gasarch, *Problems on Algorithms*

"*At first sight, this may seem out of place because it doesn't seem to be about algorithms at all. Although the problems are mainly mathematical in nature and have little to do with algorithms, they are good practice in a technique that is fundamental to algorithm design, verification and analysis.*

If you ignored the material on mathematical induction in your discrete mathematics class, thinking that it is useless to a programmer, then think again.

If you can master induction, you have mastered recursion – they are two sides of the same coin."

Indução Matemática

Definição

A indução matemática é um método de prova matemática usado para demonstrar a verdade de um número infinito de proposições.

Aplicação

A indução matemática pode ser aplicada na prova de resultados em uma grande variedade de objetos discretos:

- Complexidade de algoritmos;
- Corretude de algoritmos;
- Teoremas sobre grafos e árvores;
- E uma grande quantidade de inequações.

Definição

Indução matemática é o raciocínio segundo o qual se estende uma propriedade a todos os elementos de um conjunto.

Este raciocínio consiste em provar que um enunciado é válido para um conjunto todo.

Basta provar que um enunciado vale para o primeiro número do conjunto, e **supor** que, portanto, valeria para qualquer elemento n do mesmo conjunto.

A indução se concretiza por conseguir provar determinada propriedade para um elemento $n+1$ genérico, assim independente do ponto de partida, o enunciado valeria para todo o conjunto.

Indução Matemática

Definição

Há duas formas, ou princípios da indução matemática:

- "Princípio da Indução Matemática Fraca"; e
- "Princípio da Indução Matemática Forte" (ou "Princípio da Indução Matemática Completa").

Note que as duas formas de indução matemática são equivalentes entre si.

O fato de que a validade da indução matemática segue do **axioma do bom ordenamento** garante esta equivalência.

Axioma do Bom Ordenamento

"Todo subconjunto não-vazio formado por números naturais possui um menor elemento".

Em outras palavras, isto quer dizer que o conjunto dos números positivos inteiros é **bem ordenado**.

Princípio da Indução Matemática (fraca)

Uma proposição $P(X)$ pode ser provada por indução matemática (ou indução finita) da seguinte maneira:

Base: Comprovamos que P é verdadeira para o caso básico (por exemplo, X=0 ou X=1);

Hipótese Indutiva: Supomos que P seja verdadeira para o caso genérico $X = n$;

Passo Indutivo: Demonstramos que P também é verdadeira para o caso $X = n + 1$.

Idéia

Como a proposição vale para o caso inicial, o passo é correto. Então, essa proposição também será válida para todos os casos subsequentes.

Indução Matemática

Princípio da Indução Matemática (fraca)

Em uma sequência de peças de dominó que estejam em pé, suficientemente próximas entre si, se a primeira peça caiu, então todas caíram.

Prova por indução

Base: A primeira peça caiu (por definição);

Hipótese Indutiva: Supomos que a n-ésima peça tenha caído;

Passo Indutivo: Como a n-ésima peça caiu e está suficientemente próxima da peça seguinte, então a $(n+1)$-ésima peça também terá caído.

Indução Matemática

Princípio da Indução Matemática (fraca)

Seja $P(n)$ uma proposição definida para os inteiros n e seja n_0 um inteiro fixo.

Suponha que as duas afirmações a seguir são verdadeiras:

- $P(n_0)$ é verdadeira;
- Para todos os inteiros $k \geq n_0$, se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, a afirmação para todos inteiros $n \geq n_0$, $P(n)$ é verdadeira.

Observação

É importante salientar que em uma prova por indução matemática não é **assumido** que $P(k)$ é verdadeiro.

É mostrado que, se for assumido que $P(k)$ é verdadeiro, então $P(k+1)$ também é verdadeiro.

Indução Matemática

Exemplo 1

Demonstre que, para todos os números naturais x e $n \geq 1$, $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$.

Prova por indução em n:

Base: Para $n = 1$, $x^1 - 1$ é divisível por $x - 1$;

Hipótese Indutiva: Para um valor qualquer $n > 1$, supomos que $x^n - 1$ seja divisível por $x - 1$, para todo $x > 0$ natural;

Passo Indutivo:

- Sabemos que $x^{n+1} - 1 = x^{n+1} - x + x - 1 = x(x^n - 1) + (x - 1)$;
- Pela hipótese de indução, a primeira parcela é divisível por $x - 1$;
- Como sabemos que a segunda parcela também é, o passo está provado.

Exemplo 1

Demonstre que, para todos os números naturais x e $n \geq 1$, $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$.

Prova por indução em n:

Base: Para $n = 1$, $x^1 - 1$ é divisível por $x - 1$;

Hipótese Indutiva: Para um valor qualquer $n > 1$, supomos que $x^n - 1$ seja divisível por $x - 1$, para todo $x > 0$ natural;

Passo Indutivo:

- Sabemos que $x^{n+1} - 1 = x^{n+1} - x + x - 1 = x(x^n - 1) + (x - 1)$;
- Pela hipótese de indução, a primeira parcela é divisível por $x - 1$;
- Como sabemos que a segunda parcela também é, o passo está provado.

Exemplo 2

Prove por indução matemática que $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, para todos inteiros $n \geq 1$.

Base: $P(1)$, para $n = 1$ temos $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$;

Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.

Supondo que a fórmula é verdadeira para $n = k$,

$$P(k) : 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}, \text{ para algum inteiro } k \geq 1$$

Deve-se mostrar que:

$$P(k + 1) : 1 + 2 + \ldots + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Exemplo 2

Prove por indução matemática que $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, para todos inteiros $n \geq 1$.

Base: $P(1)$, para $n = 1$ temos $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$;

Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Supondo que a fórmula é verdadeira para $n = k$,

$$P(k) : 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}, \text{ para algum inteiro } k \geq 1$$

Deve-se mostrar que:

$$P(k+1) : 1 + 2 + \ldots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Exemplo 2

$$
\begin{aligned}
1 + 2 + \ldots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\
&= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3

Prove que para todos os inteiros $n \geq 0$

$$0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+2)}{2} \quad \textit{ERRADO}!$$

Base: $P(0)$, para $n = 0$, temos $0 = 0(0+2)/2 = 0$;

Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Supondo que a fórmula é verdadeira para $n = k$,

$$P(k) : 0 + 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+2)}{2} = \frac{k^2+2k}{2}$$

Deve-se mostrar que:

$$P(k+1) : 0 + 1 + 2 + \ldots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+3)}{2} = \frac{k^2+4k+3}{2}$$

Exemplo 3

Prove que para todos os inteiros $n \geq 0$

$$0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+2)}{2} \quad \mathit{ERRADO}!$$

Base: $P(0)$, para $n = 0$, temos $0 = 0(0+2)/2 = 0$;

Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.

Supondo que a fórmula é verdadeira para $n = k$,

$$P(k) : 0 + 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+2)}{2} = \frac{k^2+2k}{2}$$

Deve-se mostrar que:

$$P(k + 1) : 0 + 1 + 2 + \ldots + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+3)}{2} = \frac{k^2+4k+3}{2}$$

Exemplo 3

$$
\begin{aligned}
0+1+2+\ldots+k+(k+1) &= \frac{k^2+2k}{2}+(k+1)\\
&= \frac{k^2+2k+2(k+1)}{2}\\
&= \frac{k^2+4k+2}{2}
\end{aligned}
$$

Observação

Não foi possível derivar a conclusão a partir da hipótese.

Isto significa que a proposição original é falsa.

Exemplo 4

Prove que $P(n) : \sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$ para todos os números inteiros $n \geq 0$ e para todos os números reais $r, r \neq 1$.

Base: $P(0)$, para $n = 0$, temos $r^0 = 1 = \frac{(r^{0+1}-1)}{r-1} = \frac{r-1}{r-1} = 1$;

Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k+1$, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Supondo que a fórmula é verdadeira para $n = k$,

$$P(k) : \sum_{i=0}^{k} r^i = \frac{r^{k+1}-1}{r-1}$$

para $k \geq 0$

Deve-se mostrar que:

$$P(k+1) : \sum_{i=0}^{k+1} r^i = \frac{r^{k+2}-1}{r-1}$$

Exemplo 4

Prove que $P(n) : \sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$ para todos os números inteiros $n \geq 0$ e para todos os números reais $r, r \neq 1$.

Base: $P(0)$, para $n = 0$, temos $r^0 = 1 = \frac{(r^{0+1}-1)}{r-1} = \frac{r-1}{r-1} = 1$;

Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Supondo que a fórmula é verdadeira para $n = k$,

$$P(k) : \sum_{i=0}^{k} r^i = \frac{r^{k+1}-1}{r-1}$$

para $k \geq 0$

Deve-se mostrar que:

$$P(k+1) : \sum_{i=0}^{k+1} r^i = \frac{r^{k+2}-1}{r-1}$$

Exemplo 4

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} r^i &= \sum_{i=0}^{k} r^i + r^{k+1} \\
&= \frac{r^{k+1}-1}{r-1} + r^{k+1} \\
&= \frac{r^{k+1}-1}{r-1} + \frac{r^{k+1}(r-1)}{r-1} \\
&= \frac{r^{k+1}-1+r^{k+2}-r^{k+1}}{r-1} \\
&= \frac{r^{k+2}-1}{r-1}
\end{aligned}$$

Exemplo 5

Prove que $P(n): 2^{2n} - 1$ é divisível por 3, para $n \geq 1$

Base: $P(1)$, para $n = 1$, temos $2^{2\times 1} - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$, que é divisível por 3;

Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, ou seja, $P(k) \to P(k + 1)$.

Supondo que a fórmula é verdadeira para $n = k$,

$$P(k) : 2^{2k} - 1 \text{ é divisível por } 3$$

Deve-se mostrar que:

$$P(k+1) : 2^{2(k+1)} - 1 \text{ é divisível por } 3$$

Exemplo 5

Prove que $P(n) : 2^{2n} - 1$ é divisível por 3, para $n \geq 1$

Base: $P(1)$, para $n = 1$, temos $2^{2\times 1} - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$, que é divisível por 3;

Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.

Supondo que a fórmula é verdadeira para $n = k$,

$$P(k) : 2^{2k} - 1 \text{ é divisível por 3}$$

Deve-se mostrar que:

$$P(k+1) : 2^{2(k+1)} - 1 \text{ é divisível por 3}$$

Exemplo 5

$$
\begin{aligned}
2^{2(k+1)} - 1 &= 2^{2k+2} - 1 \\
&= 2^{2k} \times 2^2 - 1 \\
&= 2^{2k} \times 4 - 1 \\
&= 2^{2k} \times (3+1) - 1 \\
&= 2^{2k} \times 3 + (2^{2k} - 1)
\end{aligned}
$$

Observação

O primeiro termo da soma é divisível por 3, pela multiplicação realizada, e o segundo também, pela hipótese indutiva.

Temos que a soma de dois números divisíveis por 3 é um número também divisível por 3, portanto, a prova é válida.

Exemplo 6

Prove que $P(n) : 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para $n \geq 0$

Base: $P(0)$, temos que $2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$;

Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Supondo que a fórmula é verdadeira para $n = k$,

$$P(k) : 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

Deve-se mostrar que:

$$P(k+1) : 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$$

Exemplo 6

Prove que $P(n): 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para $n \geq 0$

Base: $P(0)$, temos que $2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$;

Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Supondo que a fórmula é verdadeira para $n = k$,

$$P(k): 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

Deve-se mostrar que:

$$P(k+1): 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$$

Exemplo 6

$$
\begin{aligned}
2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \\
&= 2 \times 2^{k+1} - 1 \\
&= 2^{k+2} - 1
\end{aligned}
$$

Exemplo 7

Considere a sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definida como $a_1 = 2$ e $a_n = 5 \times a_{n-1}$, para $n \geq 2$. Prove que $a_n = 2 \times 5^{n-1}$ para $n \geq 1$

Base: $P(1)$, para $n = 1$, temos que $a_1 = 2$ e $2 \times 5^{1-1} = 2 \times 1 = 2$;

Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.

Supondo que a fórmula é verdadeira para $n = k$,

$$P(k) : a_k = 2 \times 5^{k-1}$$

Deve-se mostrar que:

$$P(k+1) : a_{k+1} = 2 \times 5^{(k+1)-1} = 2 \times 5^k$$

Exemplo 7

Considere a sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definida como $a_1 = 2$ e $a_n = 5 \times a_{n-1}$, para $n \geq 2$. Prove que $a_n = 2 \times 5^{n-1}$ para $n \geq 1$

Base: $P(1)$, para $n = 1$, temos que $a_1 = 2$ e $2 \times 5^{1-1} = 2 \times 1 = 2$;

Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, ou seja, $P(k) \to P(k+1)$.

Supondo que a fórmula é verdadeira para $n = k$,

$$P(k) : a_k = 2 \times 5^{k-1}$$

Deve-se mostrar que:

$$P(k+1) : a_{k+1} = 2 \times 5^{(k+1)-1} = 2 \times 5^k$$

Exemplo 7

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 5 \times a_{(k+1)-1} \\
&= 5 \times a_k \\
&= 5 \times (2 \times 5^{k-1}) \\
&= 2 \times (5 \times 5^{k-1}) \\
&= 2 \times 5^k
\end{aligned}
$$

Exemplo 8

Prove que $P(n): n^3 - n$ é divisível por 3 para $n \geq 1$.

Base: $P(1)$, para $n = 1$, temos que $1^3 - 1 = 1 - 1 = 0$, que é divisível por 3;

Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Supondo que a fórmula é verdadeira para $n = k$,

$$P(k): k^3 - k \text{ é divisível por 3}$$

Deve-se mostrar que:

$$P(k+1): (k+1)^3 - (k+1) \text{ é divisível por 3}$$

Exemplo 8

Prove que $P(n) : n^3 - n$ é divisível por 3 para $n \geq 1$.

Base: $P(1)$, para $n = 1$, temos que $1^3 - 1 = 1 - 1 = 0$, que é divisível por 3;

Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, ou seja, $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.

Supondo que a fórmula é verdadeira para $n = k$,

$$P(k) : k^3 - k \text{ é divisível por 3}$$

Deve-se mostrar que:

$$P(k+1) : (k+1)^3 - (k+1) \text{ é divisível por 3}$$

Exemplo 8

$$\begin{aligned}(k+1)^3-(k+1) &= (k^3+3k^2+3k+1)-(k+1)\\ &= (k^3-k)+3(k^2+k)\end{aligned}$$

Observações

Cubo da soma: "O cubo do primeiro termo mais três vezes o quadrado do primeiro termo vezes o segundo termo mais três vezes o primeiro termo vezes o quadrado do segundo termo mais o cubo do segundo termo."

O primeiro termo da soma é divisível por 3, pela hipótese indutiva, e o segundo também, pela multiplicação realizada.

Temos que a soma de dois números divisíveis por 3 é um número também divisível por 3, portanto, a prova é válida.

Aplicação

A indução matemática é útil para provar asserções sobre a corretude e a eficiência de algoritmos, pois podemos inferir uma lei geral a partir de instâncias particulares.

Seja T um teorema que possua como parâmetro um número natural n. Para provarmos que T é verdadeiro para todos os possíveis valores de n, provamos que:

Base: T é válido para $n = 1$;

Passo Indutivo: Para todo $n > 1$, se T é válido para n, então T é válido para $n + 1$.

Provar a segunda condição é geralmente mais fácil do que provar o teorema diretamente, uma vez que podemos usar a asserção de que T é válido para n.

As duas condições implicam em T válido para $n = 2$, $n = 3$ e assim por diante.

Aplicação

Obter a solução de uma equação de recorrência pode ser difícil, porém, obter um limite superior para a ordem de complexidade pode ser mais fácil.

Nestes casos, não estamos interessados em obter uma solução exata, porém, apenas um limite superior.

Exemplo

Considere a recorrência abaixo, definida para valores de n que são potências de 2:

$$T(2) = 1,$$
$$T(2n) \leq 2T(n) + 2n - 1.$$

O objetivo é encontrar um limite superior na notação assintótica, onde o lado direito da desigualdade representa o pior caso.

Exemplo

Para encontrar tal limite, procuramos $f(n)$ tal que $T(n) = O(f(n))$, tentando que $f(n)$ seja o mais preciso possível da solução real para $T(n)$, ou seja, um **limite assintótico firme**.

Vamos considerar, por palpite, $f(n) = n^2$. Queremos provar que

$$T(n) \leq f(n) = O(f(n))$$

utilizando indução matemática em n.

Exemplo

Prove que $T(n) \leq f(n) = O(f(n))$, para $f(n) = n^2$, sendo

$$T(2) = 1,$$
$$T(2n) \leq 2T(n) + 2n - 1,$$

definida para valores de n que são potências de 2.

Base: $T(n)$ para $n = 2$, temos que $T(2) = 1 \leq f(2) = 4$;

Passo Indutivo: Se a recorrência é verdadeira para n, então deve ser verdadeira para $2n$, ou seja, $T(n) \rightarrow T(2n)$.

Deve-se mostrar que:

$$T(2n) \leq f(2n)$$

Observação

Note que por definição, n deve ser uma potência de 2, portanto, o próximo elemento após n é $2n$, e não $n + 1$.

Exemplo

$$T(2n) \leq 2T(n) + 2n - 1$$

[Definição da recorrência]

$$\leq 2n^2 + 2n - 1$$

[Pela hipótese indutiva, podemos substituir $T(n)$]

$$\leq 2n^2 + 2n - 1 < (2n)^2$$

[A conclusão é verdadeira?]

$$\leq 2n^2 + 2n - 1 < 4n^2$$

[Sim]

A última inequação é o que queremos provar, logo, $T(n) = O(n^2)$.

Exemplo

$$T(2n) \leq 2T(n) + 2n - 1$$

[Definição da recorrência]

$$\leq 2n^2 + 2n - 1$$

[Pela hipótese indutiva, podemos substituir $T(n)$]

$$\leq 2n^2 + 2n - 1 < (2n)^2$$

[A conclusão é verdadeira?]

$$\leq 2n^2 + 2n - 1 < 4n^2$$

[Sim]

A última inequação é o que queremos provar, logo, $T(n) = O(n^2)$.

Exemplo

$$T(2n) \leq 2T(n) + 2n - 1$$

[Definição da recorrência]

$$\leq 2n^2 + 2n - 1$$

[Pela hipótese indutiva, podemos substituir $T(n)$]

$$\leq 2n^2 + 2n - 1 < (2n)^2$$

[A conclusão é verdadeira?]

$$\leq 2n^2 + 2n - 1 < 4n^2$$

[Sim]

A última inequação é o que queremos provar, logo, $T(n) = O(n^2)$.

Exemplo

$$T(2n) \leq 2T(n) + 2n - 1$$

[Definição da recorrência]

$$\leq 2n^2 + 2n - 1$$

[Pela hipótese indutiva, podemos substituir $T(n)$]

$$\leq 2n^2 + 2n - 1 < (2n)^2$$

[A conclusão é verdadeira?]

$$\leq 2n^2 + 2n - 1 < 4n^2$$

[Sim]

A última inequação é o que queremos provar, logo, $T(n) = O(n^2)$.

Exemplo

$$T(2n) \leq 2T(n) + 2n - 1$$

[Definição da recorrência]

$$\leq 2n^2 + 2n - 1$$

[Pela hipótese indutiva, podemos substituir $T(n)$]

$$\leq 2n^2 + 2n - 1 < (2n)^2$$

[A conclusão é verdadeira?]

$$\leq 2n^2 + 2n - 1 < 4n^2$$

[Sim]

A última inequação é o que queremos provar, logo, $T(n) = O(n^2)$.

Segundo Palpite

Vamos tentar um segundo palpite, menor desta vez: $f(n) = cn$, para alguma constante c. Queremos provar que

$$T(n) \leq f(n) = cn = O(f(n))$$

utilizando indução matemática em n.

Segundo Palpite

Prove que $T(n) \leq f(n) = O(f(n))$, para $f(n) = cn$, sendo

$$T(2) = 1,$$
$$T(2n) \leq 2T(n) + 2n - 1,$$

definida para valores de n que são potências de 2.

Base: $T(n)$, para $n = 2$, $T(2) = 1 \leq f(2) = 2c$;

Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para n, então deve ser verdadeira para $2n$, ou seja, $T(n) \rightarrow T(2n)$.

Deve-se mostrar que:

$$T(2n) \leq f(2n)$$

Segundo Palpite

$$T(2n) \leq 2T(n) + 2n - 1$$

[Definição da recorrência]

$$\leq 2cn + 2n - 1$$

[Pela hipótese indutiva, podemos substituir $T(n)$]

$$\leq 2cn + 2n - 1 > 2cn$$

[A conclusão $T(2n) \leq 2cn$ não é válida]

Segundo Palpite

$$T(2n) \leq 2T(n) + 2n - 1$$

[Definição da recorrência]

$$\leq 2cn + 2n - 1$$

[Pela hipótese indutiva, podemos substituir $T(n)$]

$$\leq 2cn + 2n - 1 > 2cn$$

[A conclusão $T(2n) \leq 2cn$ não é válida]

Observação

A função $f(n) = cn$ cresce mais lentamente do que $T(n)$;

Mais especificamente, $T(n)$ está entre cn e n^2.

Terceiro Palpite

Vamos tentar um terceiro palpite, entre cn e n^2: $f(n) = n\ log\ n$.
Queremos provar que

$$T(n) \leq f(n) = n\ log\ n = O(f(n))$$

utilizando indução matemática em n.

Terceiro Palpite

Prove que $T(n) \leq f(n) = O(f(n))$, para $f(n) = n\ log\ n$, sendo

$$T(2) = 1,$$
$$T(2n) \leq 2T(n) + 2n - 1,$$

definida para valores de n que são potências de 2.

Base: $T(n)$, para $n = 2$, $T(2) = 1 \leq f(2) = 2log2 = 2$;

Passo Indutivo: Se a fórmula é verdadeira para n, então deve ser verdadeira para $2n$, ou seja, $T(n) \rightarrow T(2n)$.

Deve-se mostrar que:

$$T(2n) \leq f(2n)$$

Terceiro Palpite

$T(2n) \leq 2T(n) + 2n - 1$

[Definição da recorrência]

$\leq 2n\ log\ n + 2n - 1$

[Pela hipótese indutiva, podemos substituir $T(n)$]

$\leq 2n\ log\ n + 2n - 1 < 2n\ log\ 2n$

[A conclusão é verdadeira?]

$\leq 2n\ log\ n + 2n - 1 < 2n\ log\ n + 2n$

[Sim]

Comentário Final

No último palpite, a diferença entre os dois lados da segunda desigualdade é apenas 1, foi um bom palpite!

Com efeito, $T(n) = n\ log\ n - n + 1$ é a solução exata para

$$T(1) = 0,$$
$$T(n) \leq 2T(\frac{n}{2}) + n - 1$$

que descreve o comportamento do algoritmo **Mergesort**.

Exercícios

Demonstre por Indução Matemática

1. $n^3 + 2n$ é divisível por 3, para $n \geq 0$;
2. $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para $n \geq 0$;
3. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para $n \geq 1$.

Dúvidas?