

BCC204 - Teoria dos Grafos

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto



- 1 Grafo de Aumento de Fluxo
- 2 Algoritmo de Ford & Fulkerson

Fonte

Este material é baseado no livro

- ▶ Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.

Licença

Este material está licenciado sob a Creative Commons BY-NC-SA 4.0. Isto significa que o material pode ser compartilhado e adaptado, desde que seja atribuído o devido crédito, que o material não seja utilizado de forma comercial e que o material resultante seja distribuído de acordo com a mesma licença.

Grafo de Aumento de Fluxo

Definição

Um **grafo de aumento de fluxo** $G=(V_f, A_f)$ possui somente arcos simples, construído da seguinte forma:

- ▶ $(x, y) \in A_f$, se $(x, y) \in A$ e $f(x, y) < \bar{u}(x, y)$: **arco direto**.
- ▶ $(y, x) \in A_f$, se $(x, y) \in A$ e $f(x, y) > \underline{u}(x, y)$: **arco reverso**.

Folga de um Arco

A **folga** de um arco é obtida da seguinte maneira:

- ▶ $\bar{\xi}(x, y) = \bar{u}(x, y) - f(x, y)$ se $f(x, y) < \bar{u}(x, y)$
- ▶ $\underline{\xi}(x, y) = f(x, y) - \underline{u}(x, y)$ se $f(x, y) > \underline{u}(x, y)$

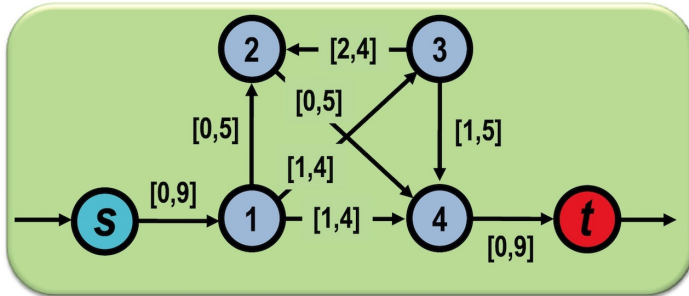
Definição

Dados dois vértices x e y , sendo x em análise e y não analisado, um arco a é **utilizável** em duas situações:

- 1 $a = (x, y)$, dito **arco direto**;
- 2 $a = (y, x)$, dito **arco reverso**.

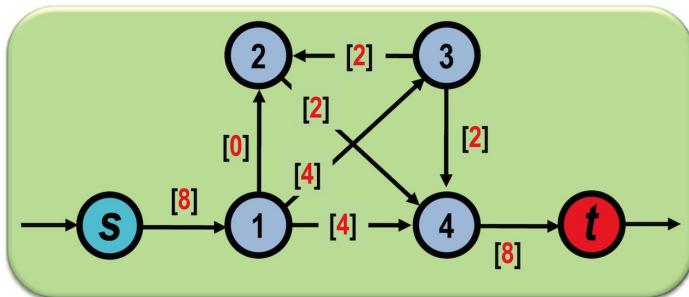
Note que este conceito diz respeito aos algoritmos para o problema de fluxo máximo.

Exemplo



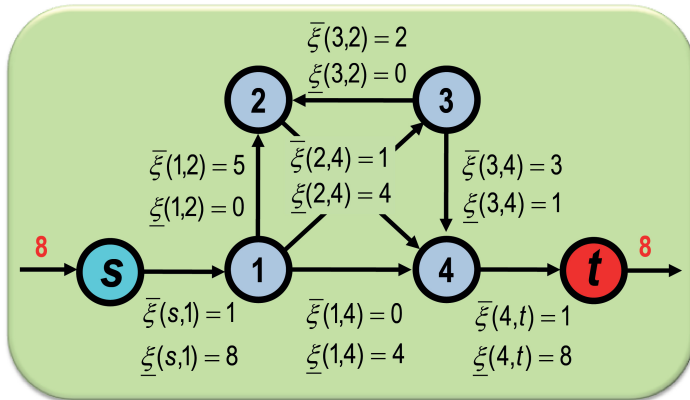
Rede de exemplo.

Exemplo



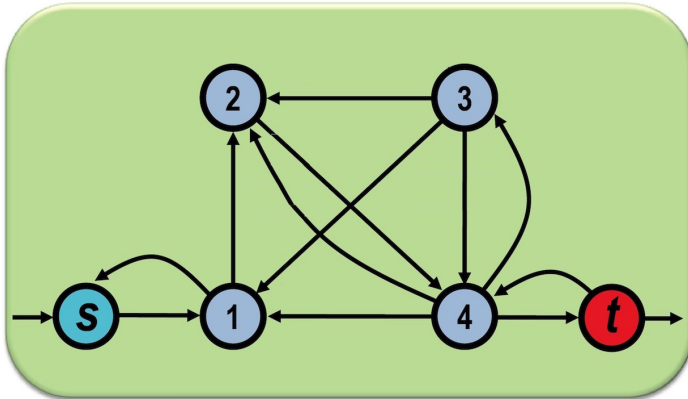
Fluxo de 8 unidades na rede de exemplo.

Exemplo



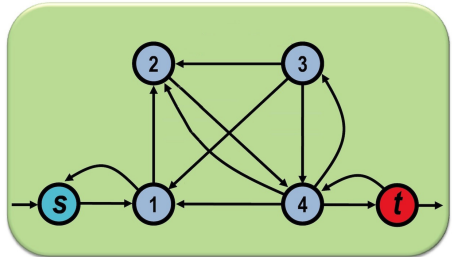
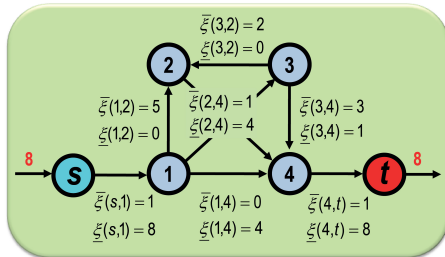
Folgas nos arcos da rede.

Exemplo



Grafo de aumento de fluxo.

Exemplo



Rede original e Grafo de Aumento de Fluxo.

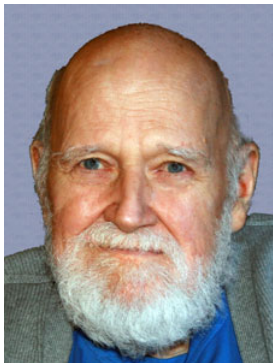
Algoritmos para o Problema de Fluxo Máximo

Estratégia: Aumento de Fluxo

Uma das estratégias mais antigas utilizadas para determinação de fluxo máximo em redes é encontrar uma sequência de caminhos de aumento de fluxo entre s e t , **definidos no grafo de aumento de fluxo**.

Para cada caminho de aumento de fluxo, os algoritmos fazem circular **na rede original** um fluxo entre s e t que esgota o seu arco de menor capacidade e atualiza as capacidades dos arcos percorridos pelo fluxo.

Quando não for mais possível encontrar um caminho de aumento de fluxo entre s e t , o fluxo máximo é alcançado.



Lester Randolph Ford Jr.

★ 23/09/1927 † 26/02/2017

- ▶ Matemático americano;
- ▶ Especialista em fluxo em redes;
- ▶ Autor do algoritmo *Bellman-Ford*;
- ▶ Autor do teorema de corte mínimo/fluxo máximo;
- ▶ Co-autor do algoritmo *Ford-Fulkerson*.



Delbert Ray Fulkerson

★ 14/08/1924 † 10/01/1976

- ▶ Matemático americano;
- ▶ Em sua homenagem, a *Mathematical Programming Society* criou o *Fulkerson Prize*;
- ▶ Co-autor do algoritmo *Ford-Fulkerson*;
- ▶ Autor do algoritmo *Out-of-Kilter*, para o problema de fluxo de custo mínimo.

Princípio

O algoritmo de Ford & Fulkerson (1956) calcula o fluxo máximo em uma rede a partir de um fluxo viável.

No caso de os limites inferiores de todos os arcos serem iguais a zero, o fluxo zero pode ser adotado, ou seja, $f(i, j) = 0$ para todo arco (i, j) .

O algoritmo rotula os vértices de R buscando encontrar um caminho de aumento de fluxo entre s e t . Caso tal caminho exista, o algoritmo aumenta o fluxo na rede.

Rótulos

O rótulo de um vértice y qualquer segue o formato $[x, \pm, \xi_y]$

- ▶ x : indica o vértice a partir do qual o vértice y foi rotulado;
- ▶ \pm : indica rotulação a partir de um arco direto (+) ou reverso (-);
- ▶ ξ_y : indica o quanto o fluxo pode ser aumentado no caminho de s até o vértice y .

O processo é repetido até que não seja mais possível encontrar um caminho de aumento de fluxo, situação na qual o fluxo máximo está circulando na rede.

Atenção para os detalhes

- ▶ Não é possível selecionar arcos nos quais os dois vértices já foram rotulados;
- ▶ Somente os caminhos que terminam em t devem ser considerados;
- ▶ Não se esqueça dos arcos reversos;
- ▶ Não se esqueça de atualizar o grafo de aumento de fluxo, adicionando e removendo arcos adequadamente.

Algoritmo de Ford & Fulkerson

```
1 Sendo  $f$  um fluxo viável na rede;
2 Rotular  $s$  com  $[-\infty, 0, +\infty]$ ;
3 enquanto existir vértice  $i$  rotulado incidente a um arco utilizável faça
4     se  $a = (i, j)$  então
5         //arco utilizável:  $j$  não rotulado e  $f(i,j) < \bar{u}(i,j)$ 
6         Rotular  $j$  com  $[i, +, \xi_j]$ , em que  $\xi_j = \min\{\xi_i, \bar{u}(i,j)-f(i,j)\}$ 
7     fim
8 senão
9     //arco utilizável  $a = (j, i)$  com  $j$  não rotulado e  $f(i,j) > \underline{u}(i,j)$ 
10    Rotular  $j$  com  $[i, -, \xi_j]$ , em que  $\xi_j = \min\{\xi_i, f(i,j)-\underline{u}(i,j)\}$ 
11 fim
12 se  $t$  foi rotulado então
13     Construir o caminho  $P$  de aumento de fluxo a partir de  $t$ ;
14     Aumentar o fluxo nos arcos de  $P$  somando  $\xi_t$  nos arcos diretos e subtraindo  $\xi_t$  nos
        arcos reversos;
15     Cancelar todos os rótulos (exceto o de  $s$ );
16     Atualizar o grafo de aumento de fluxo;
17 fim
18 fim
```

Algoritmo de Ford & Fulkerson

Complexidade

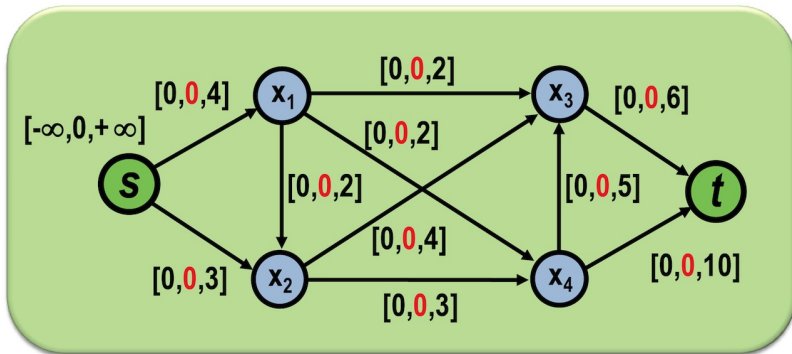
- ▶ No caso de a capacidade dos arcos ser inteira, a complexidade será $O(mf_{max})$;
- ▶ Uma variação deste algoritmo, o algoritmo de **Edmonds–Karp**, possui complexidade independente do fluxo: $O(nm^2)$.

Corte Mínimo

O fluxo determinado é máximo. Um corte s - t de capacidade mínima pode ser obtido colocando-se todos os nós rotulados^a em X e os restantes em \bar{X} .

^aNa última iteração do algoritmo não será possível rotular todos os vértices em um caminho até t .

Ford & Fulkerson – Exemplo

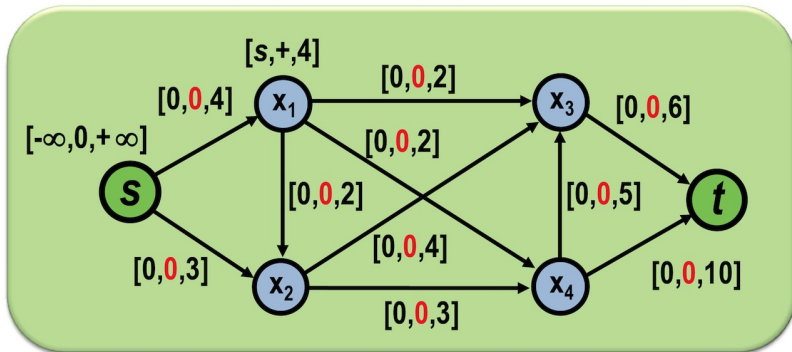


Rede de exemplo.

Fluxo viável $f=0$, logo, não há arcos reversos.

Vértice s rotulado.

Ford & Fulkerson – Exemplo

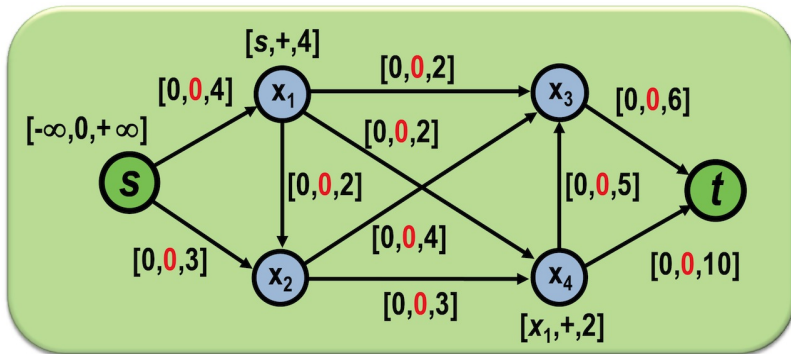


Primeira rotulação do vértice x_1 .

O arco é direto.

$$\xi_{x_1} = \min\{+\infty, 4\}$$

Ford & Fulkerson – Exemplo

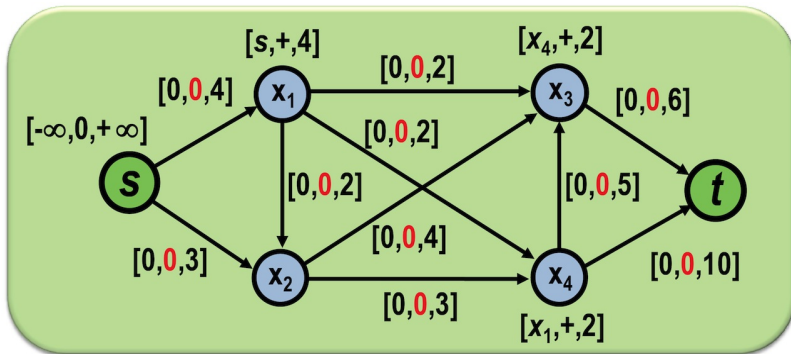


Primeira rotulação do vértice x_4 .

O arco é direto.

$$\xi_{x_4} = \min\{4, 2\}$$

Ford & Fulkerson – Exemplo

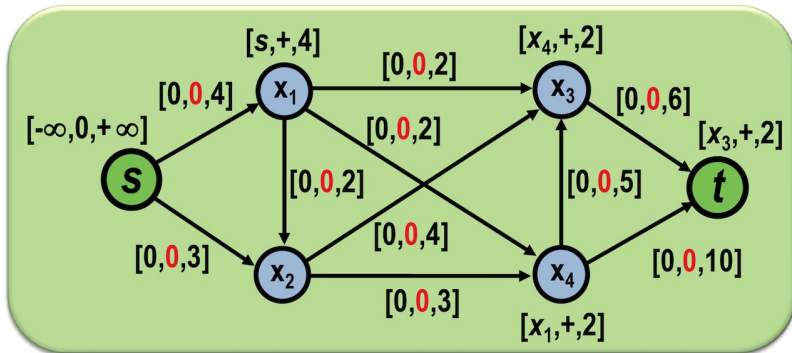


Primeira rotulação do vértice x_3 .

O arco é direto.

$$\xi_{x_3} = \min\{2, 5\}$$

Ford & Fulkerson – Exemplo



Primeira rotulação do vértice t .

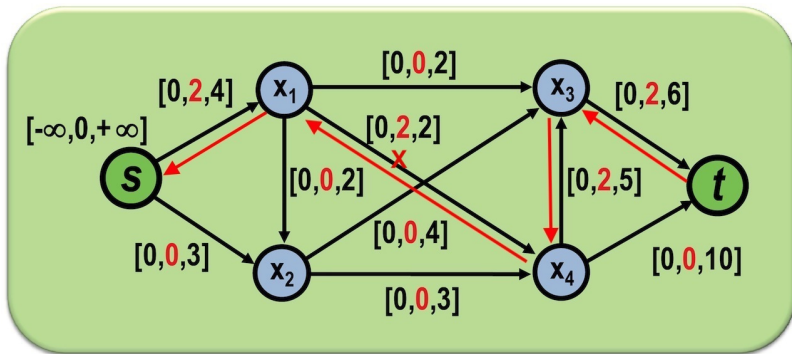
O arco é direto.

$$\xi_t = \min\{2, 6\}$$

Caminho Encontrado

- ▶ Como o vértice t foi rotulado, um caminho de aumento de fluxo foi encontrado;
- ▶ O número de unidades de fluxo que podem ser aumentadas neste caminho é dado por $\xi_t = 2$;
- ▶ Recupera-se o caminho a partir de t , andando para trás: s, x_1, x_4, x_3, t , aumentando o fluxo em 2 nos arcos deste caminho;
- ▶ A capacidade do arco (x_1, x_4) foi esgotada;
- ▶ O algoritmo remove os rótulos de todos os vértices (exceto o de s) e é reiniciado.

Ford & Fulkerson – Exemplo

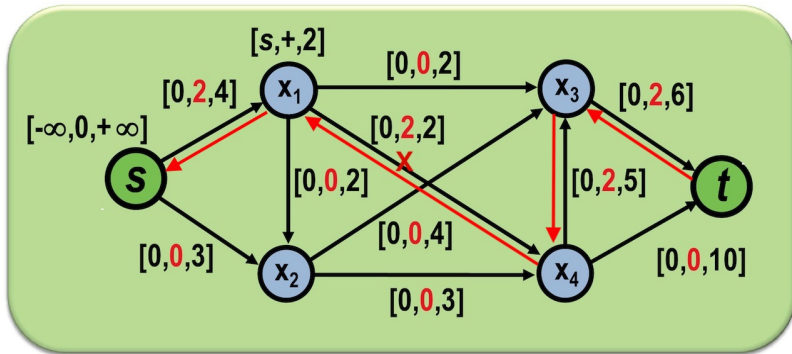


Caminho com aumento de fluxo encontrado.

Rede com fluxo $f=2$.

Note a inclusão de arcos reversos!

Ford & Fulkerson – Exemplo

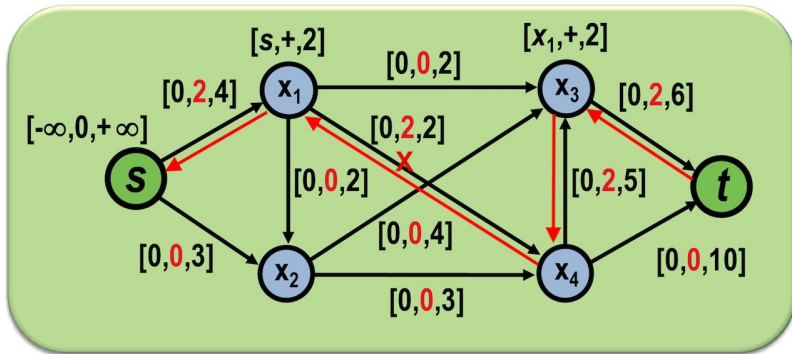


Segunda rotulação do vértice x_1 .

O arco é direto.

$$\xi_{x_1} = \min\{+\infty, 2\}$$

Ford & Fulkerson – Exemplo

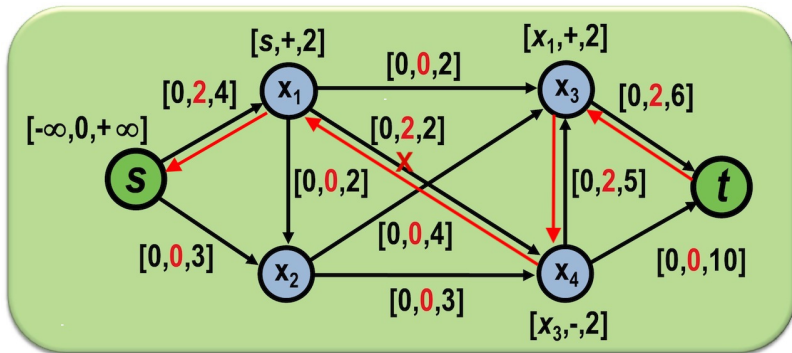


Segunda rotação do vértice x_3 .

O arco é direto.

$$\xi_{x_3} = \min\{2, 2\}$$

Ford & Fulkerson – Exemplo



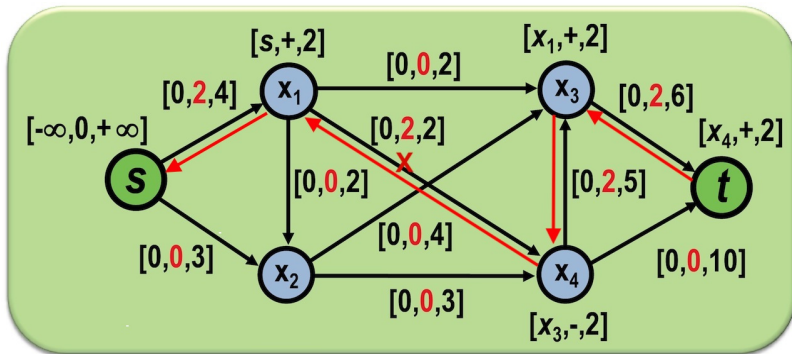
Segunda rotulação do vértice x_4 .

O arco é reverso.

$$f(x_4, x_3) - \underline{u}(x_4, x_3) = 2$$

$$\xi_{x_4} = \min\{2, 2\}$$

Ford & Fulkerson – Exemplo



Segunda rotulação do vértice t .

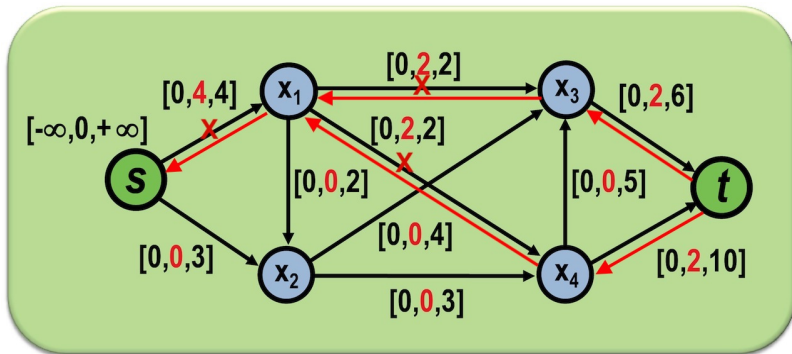
O arco é direto.

$$\xi_t = \min\{2, 10\}$$

Caminho Encontrado

- ▶ Como o vértice t foi rotulado, um caminho de aumento de fluxo foi encontrado;
- ▶ O número de unidades de fluxo que podem ser aumentadas neste caminho é dado por $\xi_t = 2$;
- ▶ Recupera-se o caminho a partir de t , andando para trás: s, x_1, x_3, x_4, t , aumentando o fluxo em 2 unidades nos arcos deste caminho;
- ▶ As capacidades dos arcos (s, x_1) e (x_1, x_3) foram esgotadas;
- ▶ O algoritmo remove os rótulos de todos os vértices (exceto o de s) e é reiniciado.

Ford & Fulkerson – Exemplo

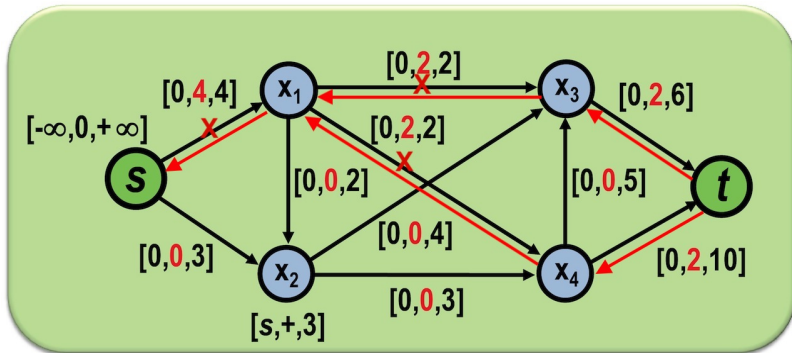


O fluxo dos arcos diretos é aumentado em 2 unidades.

O fluxo do arco reverso é diminuído em 2 unidades.

Rede com fluxo $f=4$.

Ford & Fulkerson – Exemplo

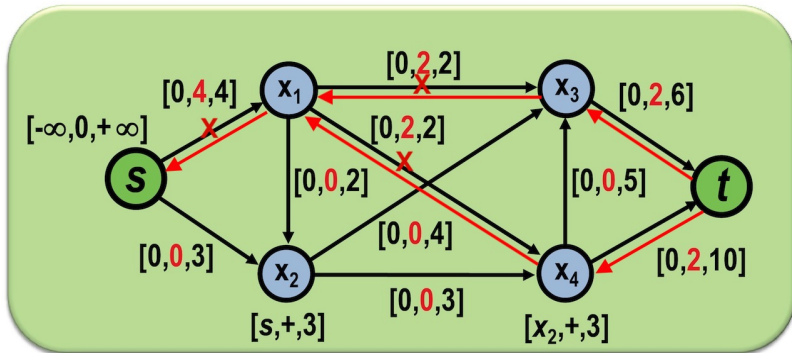


Primeira rotulação do vértice x_2 .

O arco é direto.

$$\xi_2 = \min\{+\infty, 3\}$$

Ford & Fulkerson – Exemplo

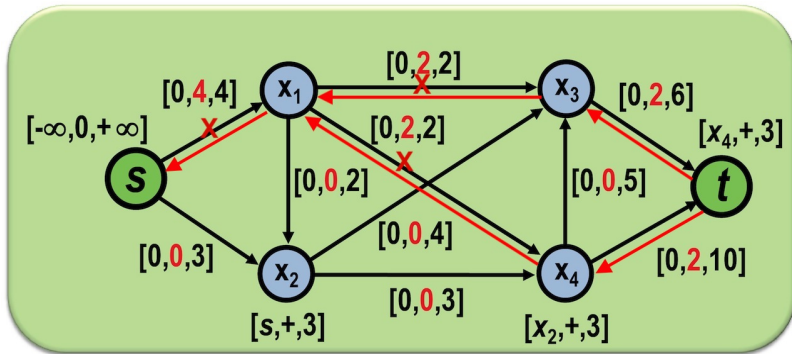


Terceira rotulação do vértice x_4 .

O arco é direto.

$$\xi_4 = \min\{3, 3\}$$

Ford & Fulkerson – Exemplo



Terceira rotulação do vértice t .

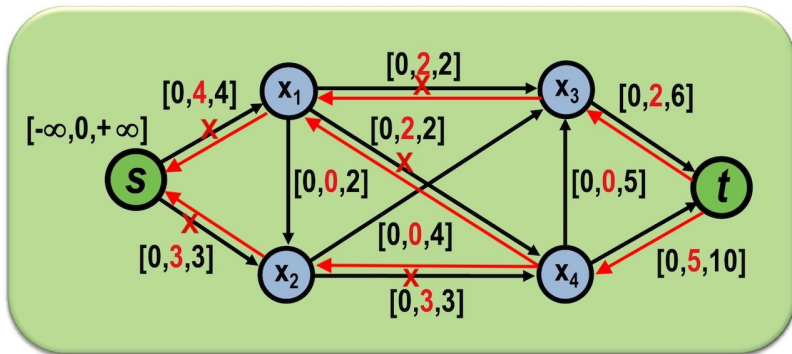
O arco é direto.

$$\xi_t = \min\{3, 8\}$$

Caminho Encontrado

- ▶ Como o vértice t foi rotulado, um caminho de aumento de fluxo foi encontrado;
- ▶ O número de unidades de fluxo que podem ser aumentadas neste caminho é dado por $\xi_t = 3$;
- ▶ Recupera-se o caminho a partir de t , andando para trás: s, x_2, x_4, t , aumentando o fluxo em 3 nos arcos deste caminho;
- ▶ As capacidades dos arcos (s, x_2) e (x_2, x_4) foram esgotadas;
- ▶ O algoritmo remove os rótulos de todos os vértices (exceto o de s) e é reiniciado.

Ford & Fulkerson – Exemplo



O fluxo dos arcs diretos é aumentado em 3 unidades.

Não há arcs diretos.

Rede com fluxo $f=7$.

Final do Algoritmo

- ▶ Após a rotulação do vértice t , o algoritmo remove todos os rótulos e reinicia;
- ▶ No entanto, não existe arco utilizável a partir de s , e desta forma, não há nenhum outro vértice a ser rotulado – o fluxo é máximo;
- ▶ O algoritmo termina quando o vértice t não puder mais ser rotulado – neste caso os vértices rotulados e os não rotulados definem também um corte mínimo em R ;
- ▶ O único vértice rotulado é s , logo, o corte mínimo do exemplo é $X = \{s\}$ e $\bar{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, t\}$.

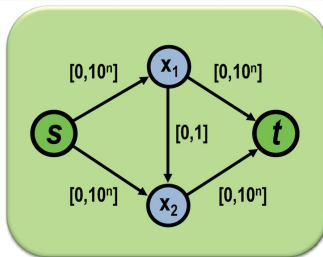
Ford & Fulkerson – Ponto fraco

Ponto Fraco

O algoritmo de Ford & Fulkerson pode apresentar um comportamento ineficiente caso enfrente alguns casos patológicos.

No caso abaixo, é possível que o algoritmo escolha alternadamente os caminhos de aumento de fluxo (s, x_1, x_2, t) e (s, x_2, x_1, t) . Serão necessárias 2×10^n operações de aumento de fluxo.

Caso a escolha fosse (s, x_1, t) e (s, x_2, t) , seriam necessárias apenas 2 iterações.



Dúvidas?

