BCC204 - Teoria dos Grafos

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

Conteúdo

Teoria dos grafos

Fonte

Este material é baseado no livro

- Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.

Licença

Matriz de Adjacências

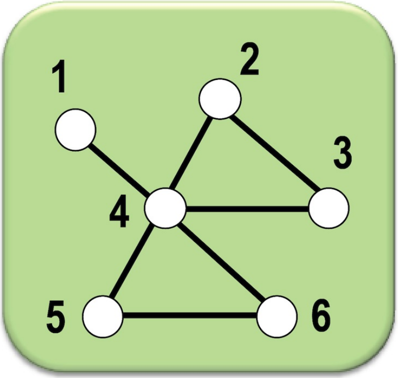
Matriz $A_{n \times n}$, sendo que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se existe a aresta/arco } (v_i, v_j) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Propriedades:

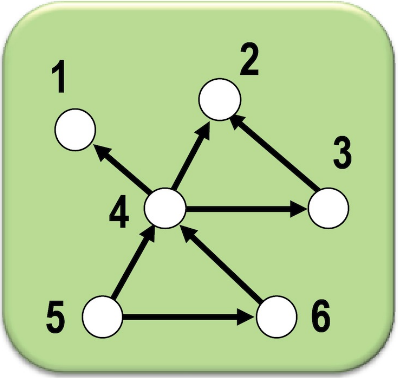
- Simétrica para grafos não direcionados;
- Consulta existência de uma aresta/arco com um acesso à memória: $O(1)$;
- Ocupa $\Theta(n^2)$ de espaço mesmo para grafos esparsos.

Matriz de Adjacências - Grafo Não Direcionado



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Matriz de Adjacências - Grafo Direcionado



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

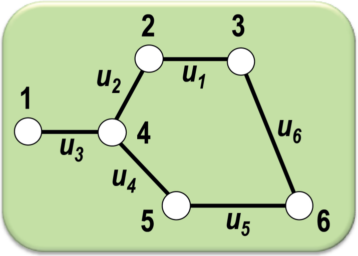
Matriz de Incidências

Matriz $A_{m \times n}$, sendo que:

$$a_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se a aresta } i \text{ tem origem no vértice } j \\ -1 & \text{se a aresta } i \text{ tem como destino o vértice } j \\ 0 & \text{se a aresta } i \text{ não incide no vértice } j \end{cases}$$

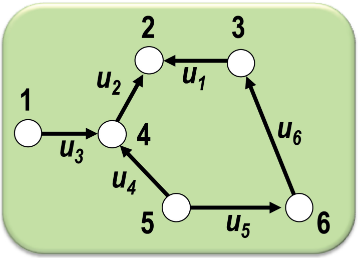
- $\Theta(nm)$ de espaço;
- útil quando informações específicas sobre as arestas são necessárias.

Matriz de Incidências - Grafo Não Direcionado



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Matriz de Incidências - Grafo Direcionado



$$
\begin{array}{c}
\\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \;1\; & \;2\; & \;3\; & \;4\; & \;5\; & \;6\; \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

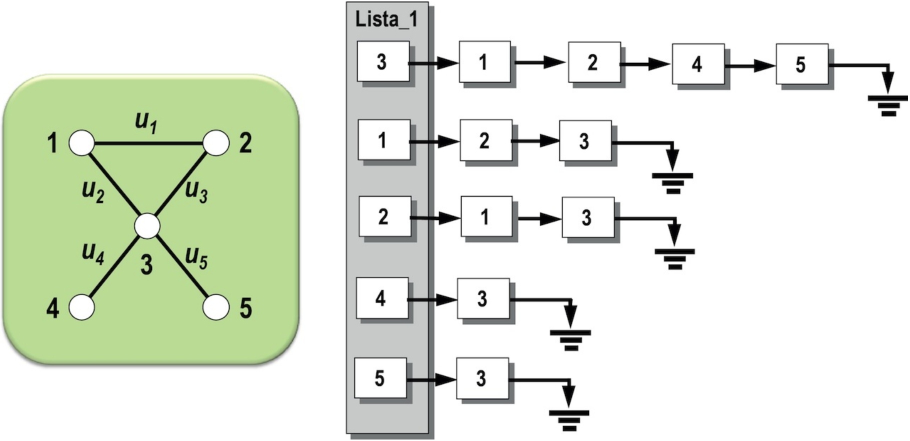
Lista de Adjacências

- Usa n listas, uma para cada vértice;
- Lista de v_i (o i-ésimo vértice) contém todos os vértices adjacentes a ele.

Propriedades:

- Ocupa menos memória: $O(m)$;
- No entanto, a complexidade da operação de determinar uma adjacência é limitada por $O(n)$.

Lista de Adjacências - Grafo Não Direcionado



Matriz de Pesos

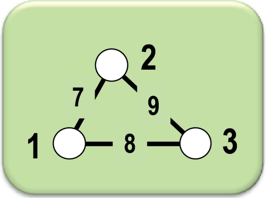
Quando o grafo é ponderado, é possível aproveitar a estrutura em matriz de adjacência, incidência e lista de adjacência para representar os pesos na própria estrutura.

No caso da matriz de adjacência substituem-se os elementos 1s pelo peso da aresta associada.

Essa matriz é denominada **matriz de pesos**.

Matriz de Pesos - Grafo Não Direcionado

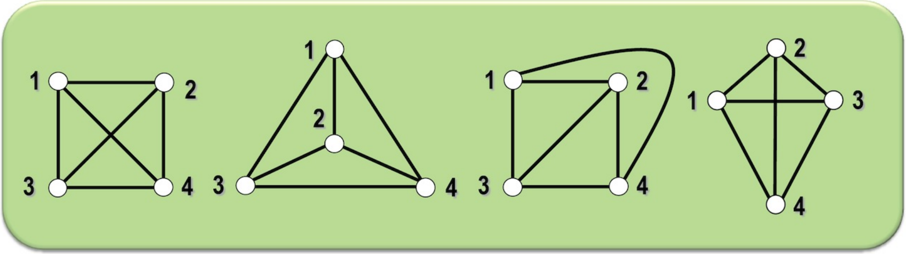
$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} 0 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 9 \\ 8 & 9 & 0 \end{array}\right]
\end{array}
$$



Isomorfismo

Definição

Dois grafos G e H são ditos isomorfos se existir uma correspondência um-para-um entre seus vértices e entre suas arestas, de maneira que as relações de incidência são preservadas.

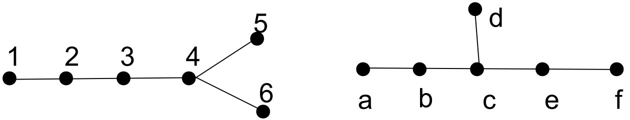


Isomorfismo

Condições necessárias mas não suficientes para isomorfismo

- Mesmo número de vértices;
- Mesmo número de arestas;
- Mesmo número de componentes;
- Mesmo número de vértices com o mesmo grau.

Exemplo:



Observação: Não existem algoritmos comprovadamente eficientes para determinar se dois grafos são isomorfos.

Complexidade

O algoritmo intuitivo para testes de isomorfismo consiste em analisar as permutações de linhas e colunas de matrizes de equivalência, em busca de uma relação um-para-um, ou seja, $O(n!)$.

Em outubro de 2015, Lászó Babai, da Universidade de Chicago, anunciou um algoritmo quasipolinomial[a] para o teste de isomorfismo![b]

Em 4 de janeiro de 2017, foi descoberto um erro na prova, reclassificando o algoritmo como subexponencial[c].

Em 9 de janeiro de 2017, o erro na prova foi anunciado como contornado[d].

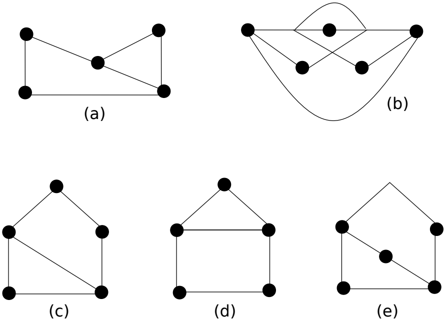
[a] Mais lento que polinomial, mas significativamente mais rápido que exponencial.

[b] `https://jeremykun.com/2015/11/12/a-quasipolynomial-time-algorithm-for-graph-isomorphism-the-details/`

[c] Mais lento que quasipolinomial, mas mais rápido que exponencial.

[d] `http://people.cs.uchicago.edu/~laci/update.html`

1. Qual grafo é diferente dos demais?

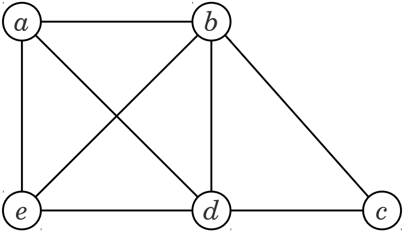


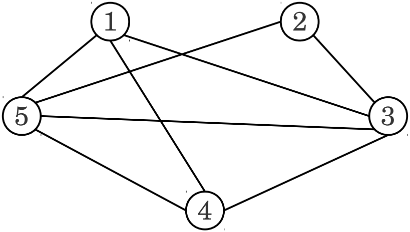
Isomorfismo

Algoritmo Básico

- Verificar todas as seguintes propriedades:
  - mesmo número de vértices;
  - mesmo número de arestas;
  - mesmo número de componentes;
  - mesmo número de vértices com o mesmo grau.
- Em seguida efetuar a combinação das matrizes de adjacência dos grafos, verificando se são semelhantes.

Isomorfismo e Matrizes de Adjacência

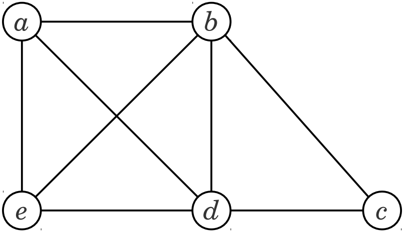


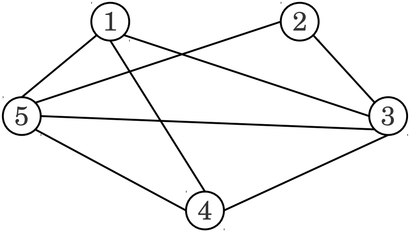


	a	b	c	d	e
a	0	1	0	1	1
b	1	0	1	1	1
c	0	1	0	1	0
d	1	1	1	0	1
e	1	1	0	1	0

	1	2	3	4	5
1	0	0	1	1	1
2	0	0	1	0	1
3	1	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	1	1	1	1	0

Isomorfismo e Matrizes de Adjacência





	a	b	c	d	e
a	0	1	0	1	1
b	1	0	1	1	1
c	0	1	0	1	0
d	1	1	1	0	1
e	1	1	0	1	0

	1	5	2	3	4
1	0	1	0	1	1
5	1	0	1	1	1
2	0	1	0	1	0
3	1	1	1	0	1
4	1	1	0	1	0

Dúvidas?