# BCC204 - Teoria dos Grafos

Marco Antonio M. Carvalho

(baseado nas notas de aula do prof. Haroldo Gambini Santos)
Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

# Conteúdo

## Fonte

Este material é baseado no livro

- Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.

## Licença

## Descrição

Os chamados **Problemas de Fluxo em Redes** abordam o processo de produtos originados em um ponto de oferta e consumidos em um ponto de demanda dentro de uma rede de interligações possíveis.

Estes problemas normalmente ocorrem dentro de plantas industriais, sistemas de comunicação e de transporte, de distribuição de água, energia elétrica, dados e etc.

Contudo, servem de modelo para inúmeras outras situações absolutamente diversas que lhe são assemelhadas por abstração.

# Problemas de Fluxo em Redes

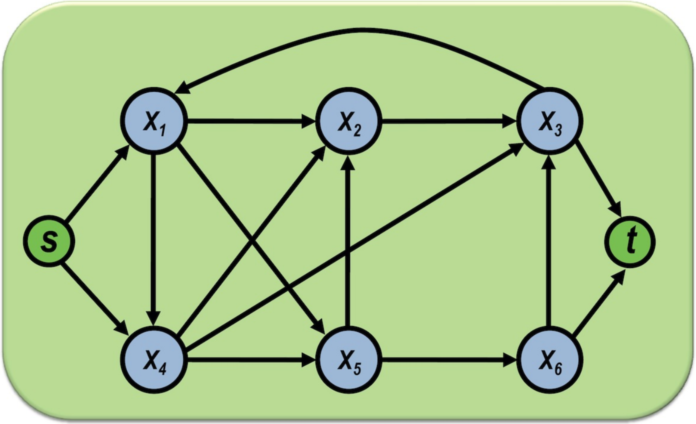
## Descrição

Em problemas de fluxo em redes, normalmente:

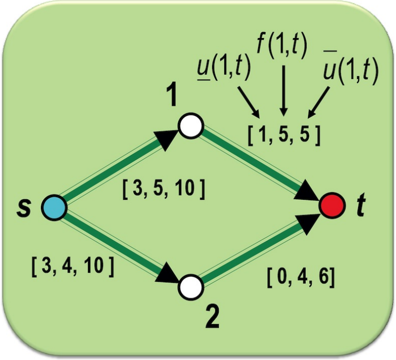
- A oferta de cada produto, bem como sua demanda, possui um valor conhecido;
- A distribuição de produtos permite pontos intermediários, tais como depósitos ou centros de concentração e distribuição;
- Estes pontos intermediários podem possuir restrições de capacidade de tráfego e custos variados.

## Definição

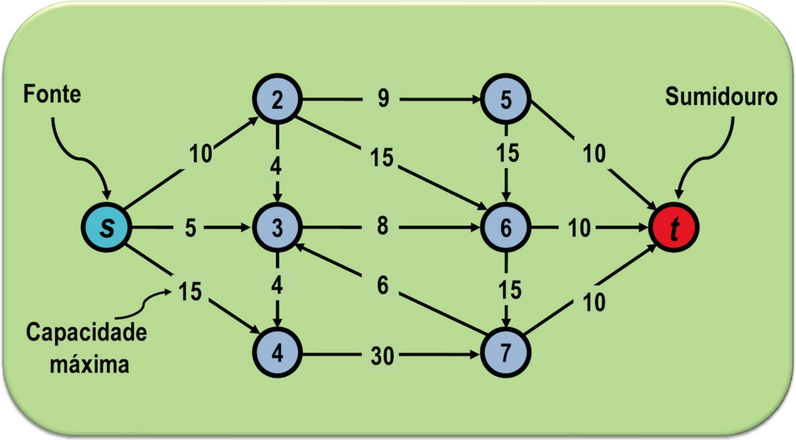
- Uma rede $R = (V, A, F, U)$ é definida por um **grafo direcionado** $G = (V, A)$ atravessado por um **fluxo**
  - Vértice **s**: *source* ou fonte, emissor do fluxo;
  - Vértice **t**: *terminal* ou sumidouro, consumidor do fluxo.
- Um fluxo $F$ pode ser representado por $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ circulando pelos $m$ arcos da rede ou por $F = \{f(i, j)\}$, $i, j \in V$;
- O conjunto $U = \{u(i, j)\}$, $i, j \in V$ é o conjunto de limites de fluxo associados aos arcos de $A$
  - $\bar{u}(i, j)$ é o limite máximo do fluxo;
  - $\underline{u}(i, j)$ é o limite mínimo do fluxo;
  - Caso não exista limite inferior, considera-se zero;
  - Caso não exista limite superior, considera-se $+\infty$.




Grafo subjacente a uma rede $R$.
Os vértices $s$ e $t$ são a fonte e o sumidouro, respectivamente.




Rotulação com limites de fluxo.




Exemplo de uma rede em que há apenas limite máximo para o fluxo.

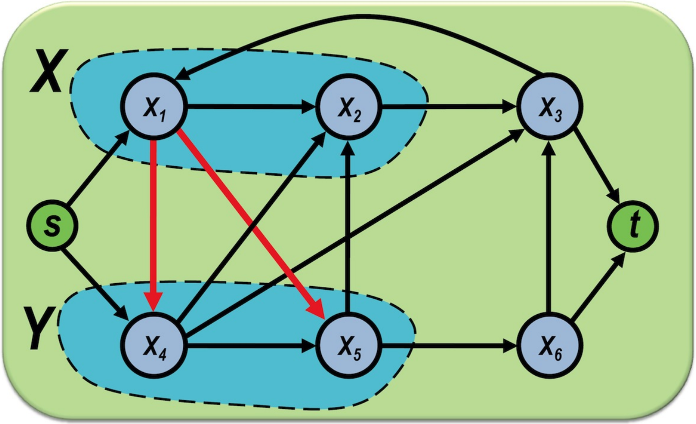
# Fluxo entre Conjuntos de Vértices

## Definição

- Dados dois conjuntos $X$, $Y \subset V$ de vértices de uma rede, tal que $X \cap Y = \emptyset$, o fluxo entre eles ocorre do conjunto $X$ para o conjunto $Y$ e vice-versa;
- O fluxo do conjunto $X$ para o conjunto $Y$, denotado por $f(X, Y)$ pode ser obtido pela expressão:

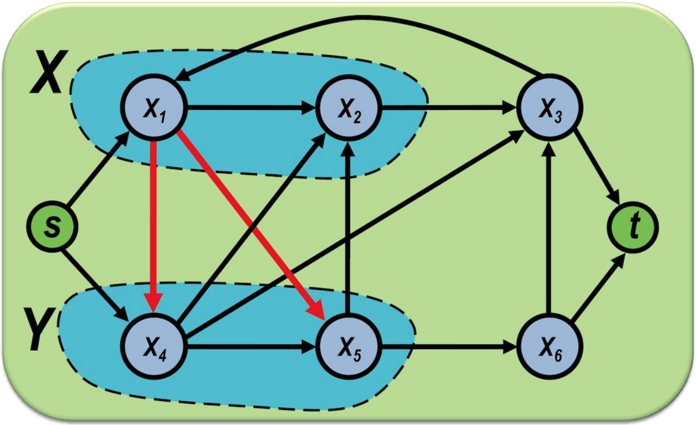
$$f(X, Y) = \sum_{e \in S} f_e \qquad S = \{e|(x_i, x_j), x_i \in X, x_j \in Y\}$$

# Fluxo entre Conjuntos de Vértices

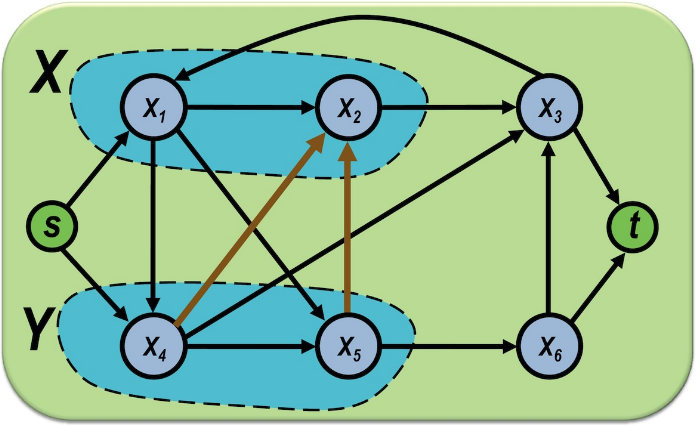



Conjuntos $X$ e $Y \in R$.

# Fluxo entre Conjuntos de Vértices




$$f(X,Y) = f(x_1,\ x_4) + f(x_1,\ x_5).$$




$$f(Y, X) = f(x_4, x_2) + f(x_5, x_2).$$

## 1a. lei de *Kirchoff*

- Para todo fluxo conservativo em uma rede, o fluxo que chega a um vértice de transbordo deve ser igual ao fluxo que sai deste mesmo vértice;
- Os vértices de uma rede que atendem a esta lei são denominados vértices conservativos.

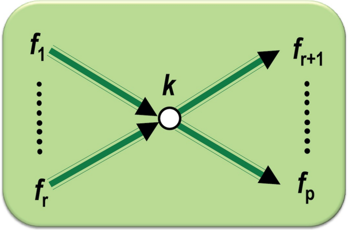


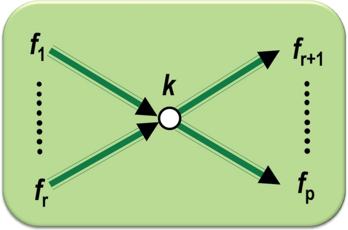

Ilustração da 1a. Lei de *Kirchoff*.

## 1a. lei de *Kirchoff*

$$f_1 + \ldots + f_r = f_{r+1} + \ldots + f_p$$

ou

$$\sum_{i \in \Gamma^-(x)} f(i,x) = \sum_{j \in \Gamma^+(x)} f(x,j)$$

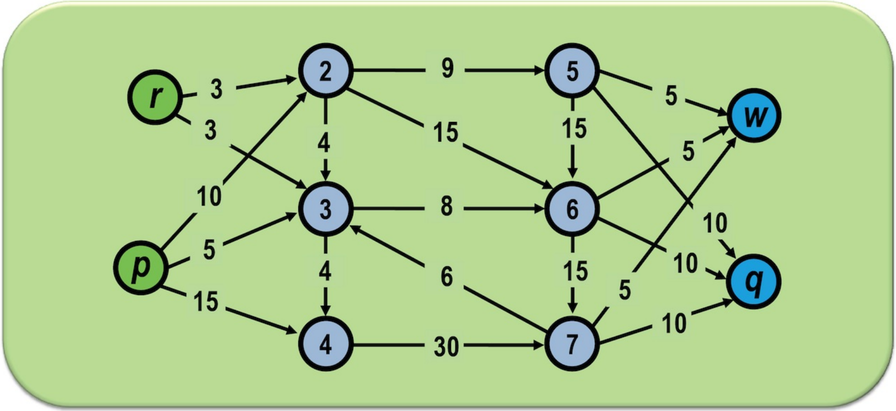


# Conservação de Fluxo

## Transformações

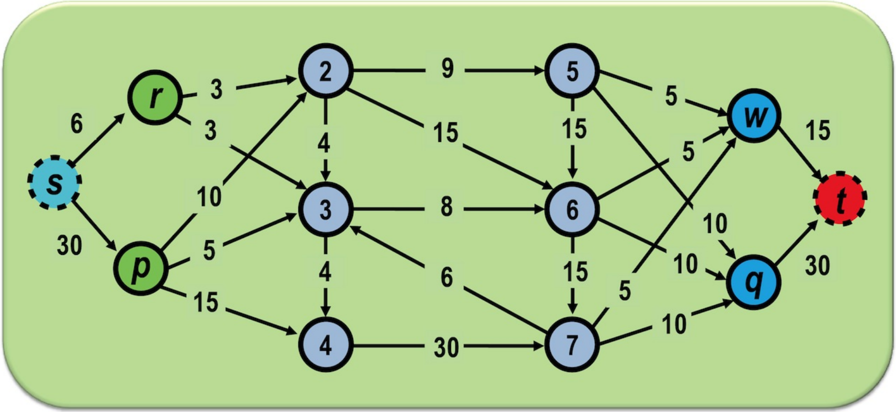
Os vértices sumidouro e fonte não atendem a 1a. Lei de *Kirchoff*. Todavia, a rede pode ser transformada para que estes vértices também atendam a esta lei:

- Transformação 1: redução de todos os vértices de oferta em um único vértice fonte e de todos os vértices de consumo em um único vértice sumidouro;
- Transformação 2: adaptação dos vértices fonte e sumidouro em vértices conservativos.

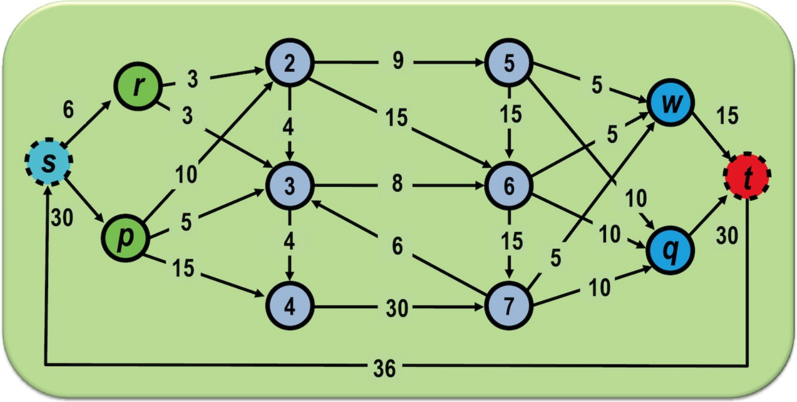



Rede original.

# Conservação de Fluxo




Primeira transformação: rede com os vértices de demanda e oferta unificados.



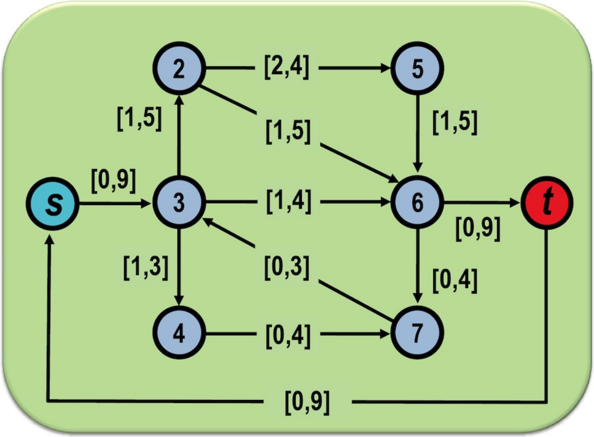

Adaptação dos vértices $s$ e $t$.
A capacidade do arco é o menor valor entre oferta (36) e demanda (45).
Segunda transformação: todos os vértices atendem à lei de conservação do fluxo.

# Fluxo Viável

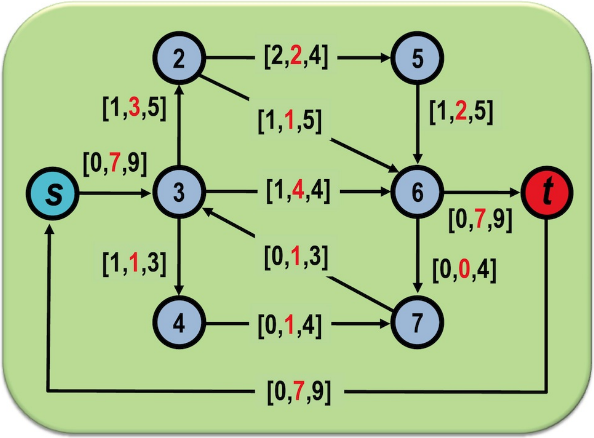
## Definição

Um fluxo $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ é dito viável se:

- É conservativo;
- Atende as seguintes condições:
  - $\exists \underline{u}(i,j) \wedge \exists \bar{u}(i,j) \qquad (i,j) \in A$;
  - $\underline{u}(i,j) \leq f_{ij} \leq \bar{u}(i,j) \qquad f_{ij} \in F$;
  - $0 \leq \underline{u}(i,j) \leq \bar{u}(i,j)$.




Rede de exemplo.

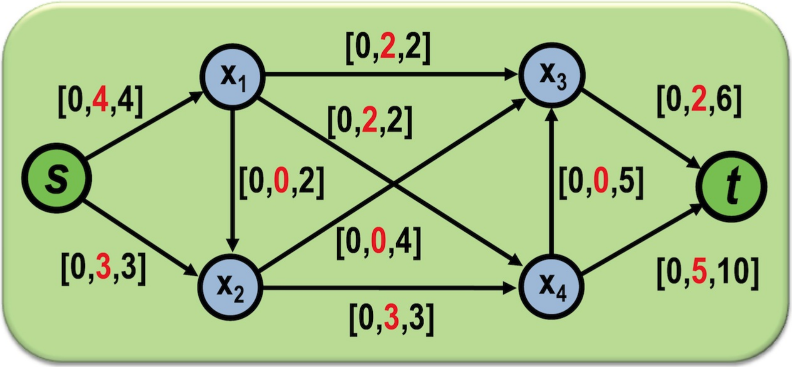



Fluxo viável.

# O Problema de Fluxo Máximo

## Definição

O problema do Fluxo Máximo consiste em fazer circular, em uma dada rede $R$=($V$, $A$, $F$, $U$), o maior fluxo viável possível entre os vértices $s$ e $t$.




Fluxo máximo $s$-$t$ igual a 7 unidades.

# Corte

## Cortes em Grafos

Em um grafo $G = (V, A)$, um corte é uma divisão dos vértices em dois conjuntos disjuntos:

- $X \subseteq V$; e
- $\bar{X} = V \setminus X$.

## Cortes em Redes

Em uma rede de fluxo, definimos um corte $s - t$ como um corte em que a fonte $s$ e o sumidouro $t$ encontram-se em conjuntos diferentes.

## Capacidade de um Corte

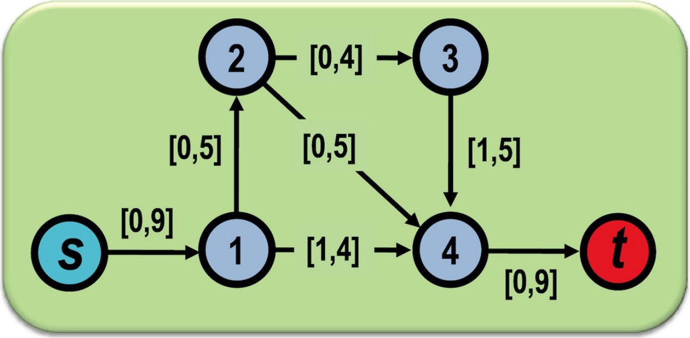
Em uma rede, a capacidade de um corte $s$-$t$ é a soma dos fluxos dos arcos associados ao corte. Os limites da capacidade do corte são as somas dos limites dos arcos associados ao corte. Todos são definidos de $X$ para $\bar{X}$.

$$c = \sum_{e \in S} f_e$$

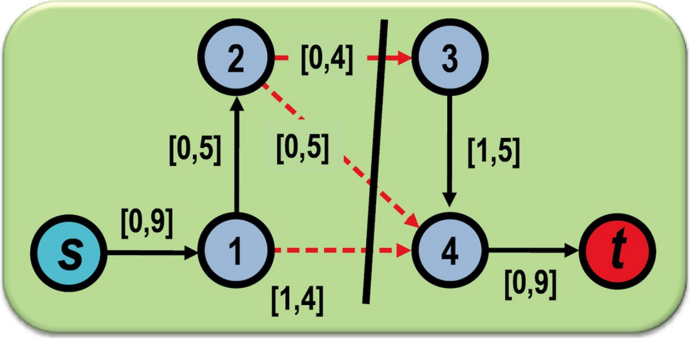
$$\bar{u}(X, \bar{X}) = \sum_{e \in S} \bar{u}_e$$

$$\underline{u}(X, \bar{X}) = \sum_{e \in S} \underline{u}_e$$

$$S = \{e|(i,j), i \in X, j \in \bar{X}\}$$




Rede de exemplo.




Um corte s-t.

$$\bar{u}(X, \bar{X}) = 4+5+4$$

$$\underline{u}(X, \bar{X}) = 1$$

# Fluxo Líquido e Capacidade Líquida

## Fluxo Líquido

O fluxo líquido através do corte $s - t$ é o resultado da diferença entre o fluxo de $X$ para $Y$ e de $Y$ para $X$, conforme a expressão abaixo:

$$f_l = f(X, Y) - f(Y, X)$$

## Capacidade Líquida

A capacidade líquida do corte $s - t$ é o resultado da diferença das capacidades dos arcos do corte, conforme a expressão abaixo:

$$u_l = \bar{u}(X, Y) - \underline{u}(Y, X)$$

# Fluxo Líquido e Capacidade Líquida

## Fluxo Máximo, Fluxo Líquido e Capacidade Líquida

Os cortes $s - t$ podem possuir tanto arcos de entrada como arcos de saída, ligando os dois conjuntos de vértices do corte.

Como é possível que haja circulação em arcos de entrada e saída de cada conjunto, de fato a circulação entre $s$ e $t$ está associada ao fluxo líquido em qualquer corte $s - t$ da rede.

O conceito de fluxo máximo em uma rede está associado aos conceitos de fluxo líquido máximo e capacidade líquida máxima de um corte em uma rede $R$.

Como é possível a existência de diferentes cortes $s - t$ em uma rede, o fluxo máximo está associado ao corte de menor capacidade líquida entre $s$ e $t$.

# Gargalo de Fluxo

## Definição

É comum denominar os elementos que restringem o fluxo em uma rede de **elementos gargalo**.

Os gargalos podem ser arcos ou conjuntos de arcos:

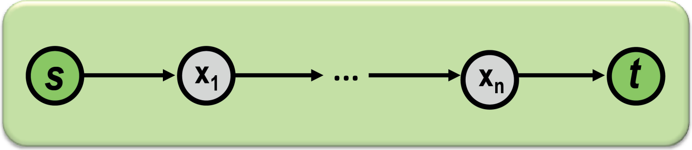
- O arco de menor capacidade em um caminho de fluxo é dito **gargalo** do caminho;
- O corte de mínimo fluxo em uma rede é denominado de **gargalo de fluxo**.

## Definição

Consideremos uma rede $s - t$ constituída por um único caminho de $s$ para $t$ como exemplificado na figura abaixo.

O valor do fluxo máximo que percorre esta rede é

$$f_0 = min\{\bar{u}(s, x_1), \bar{u}(x_1, x_2), \ldots, \bar{u}(x_n, t)\}$$




Caminho $s - t$.

# Teoremas

## Teorema Fluxo/Corte

Dado um fluxo $f$ de valor $val(f)$, qualquer que seja o corte $(X, \bar{X})$:

$$val(f) \leq \bar{u}(X, \bar{X}) - \underline{u}(\bar{X}, X)$$

## Teorema Fluxo Máximo/Corte Mínimo

Para qualquer rede $s - t$ o valor do fluxo máximo é igual a capacidade líquida mínima entre seus cortes $s - t$.

# Dúvidas?