BCC204 - Teoria dos Grafos

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

Conteúdo

Fonte

Este material é baseado no livro

- Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.

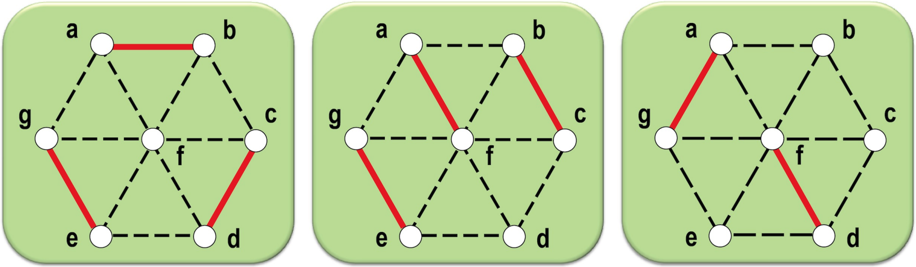
Licença

Este material está licenciado sob a Creative Commons BY-NC-SA 4.0. Isto significa que o material pode ser compartilhado e adaptado, desde que seja atribuído o devido crédito, que o material não seja utilizado de forma comercial e que o material resultante seja distribuído de acordo com a mesma licença.

Casamento em Grafos

Descrição

Dado um grafo, um casamento (também conhecido como emparelhamento ou ***matching***) é um conjunto independente de arestas, ou seja, um conjunto de arestas sem vértices em comum.



Exemplos de casamentos em grafos.

Subconjunto Maximal

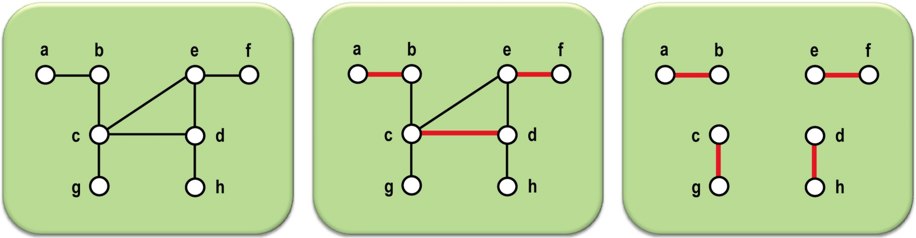
Um subconjunto G_s de um conjunto G é dito maximal em relação a uma propriedade τ se não for um subconjunto de nenhum outro subconjunto de G que também possua a propriedade τ.

Maximal deve ser distinto de *máximo*: maximal é referente à uma condição de pertinência, máximo é referente à cardinalidade.

Casamento Maximal e Casamento Máximo

Um casamento é considerado maximal caso a adição de alguma aresta descaracterize o casamento.

Um casamento é considerado máximo caso possua o maior número de arestas possível, ou seja, caso seja o maior casamento possível no grafo.

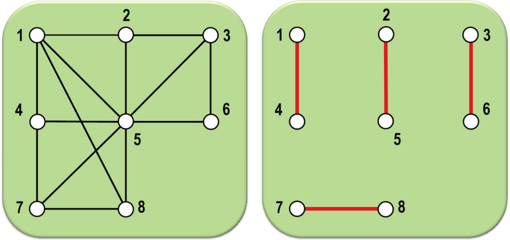


Exemplo de grafo, casamento maximal e casamento máximo.

Casamento Perfeito

Diz-se que um vértice que faz parte do casamento é um vértice saturado. Caso contrário, o vértice é não saturado.

Um casamento perfeito (ou completo) ocorre quando todos os vértices são saturados.

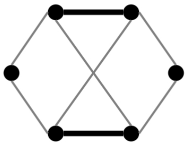


Exemplo de grafo e casamentos perfeito.

Cadeia *M-aumentante*

Definição

Considere um grafo $G = (V, A)$ e um casamento M. Uma cadeia M-aumentante é um caminho entre dois vértices não saturados por M que alternam arestas de M e arestas de $A \setminus M$.



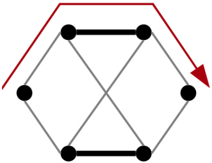
Melhoramento

Sempre que encontrarmos uma cadeia *M-aumentante* poderemos aumentar o casamento – de fato, o modo acima é o único modo de melhorar um casamento.

Cadeia *M-aumentante*

Definição

Considere um grafo $G = (V, A)$ e um casamento M. Uma cadeia M-aumentante é um caminho entre dois vértices não saturados por M que alternam arestas de M e arestas de $A \setminus M$.



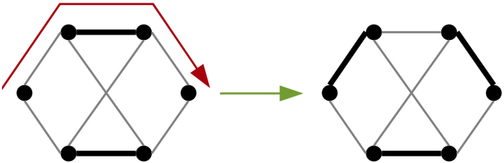
Melhoramento

Sempre que encontrarmos uma cadeia *M-aumentante* poderemos aumentar o casamento – de fato, o modo acima é o único modo de melhorar um casamento.

Cadeia *M-aumentante*

Definição

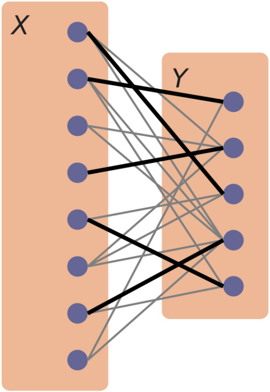
Considere um grafo $G = (V, A)$ e um casamento M. Uma cadeia M-aumentante é um caminho entre dois vértices não saturados por M que alternam arestas de M e arestas de $A \setminus M$.



Melhoramento

Sempre que encontrarmos uma cadeia *M-aumentante* poderemos aumentar o casamento – de fato, o modo acima é o único modo de melhorar um casamento.

Casamento em Grafos Bipartidos



Definição

Seja G um grafo bipartido com uma partição (X, Y) dos vértices.

Dizemos que temos um casamento de X em Y quando o casamento satura Y (não necessariamente X).

O Problema de Atribuição Linear

Definição

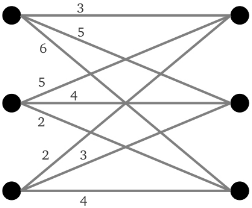
Consiste em determinar a maneira ótima de se atribuir n tarefas à n agentes de modo que nenhuma tarefa deixe de ser executada e que todos os agentes tenham uma tarefa atribuída a eles.

Em outras palavras, consistem em atribuir o "melhor agente" à "melhor tarefa".

Exemplo:

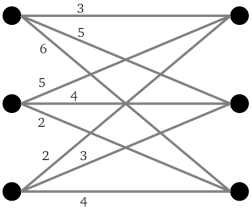
Em uma fábrica temos 3 operários e 3 máquinas. Pelo conhecimento e pelas características de cada operário o custo por hora é diferente, segundo a atribuição das máquinas a cada operário. Qual a atribuição de menor custo?

Operário\Máquina	1	2	3
1	3	5	6
2	5	4	2
3	2	3	4



Exemplo

Operário\Máquina	1	2	3
1	3	5	6
2	5	4	2
3	2	3	4



Ao atribuir uma máquina para cada operário estamos tomando 3 elementos da matriz tal que:

- Cada elemento está em uma linha diferente;
- Cada elemento está em uma coluna diferente;
- Cada linha e coluna contém exatamente 1 elemento.

Uma solução[1]: $x_{1,1}, x_{2,2}, x_{3,3}$, com custo 11. Solução ótima?

[1] $x_{i,j}$ indica a seleção do elemento da linha i e coluna j.

Definição

- Origem em 1935, por H. W. Kuhn, porém, inventado em 1931, pelos húngaros E. Egerváry e D. König;
- Resolve o problema de atribuição linear em tempo polinomial, normalmente, $O(n^3)$;
- Utiliza transformações na matriz de custo.

Teorema 1

Se um número real é somado ou subtraído de todas as entradas de uma linha ou coluna, então uma alocação ótima para a matriz resultante é também uma alocação ótima para a matriz original.

Ao diminuir os valores nas linhas e colunas, estamos comparando-as com valores relativos.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{-3} \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 0^* & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2^* \\ 2 & 3^* & 4 \end{vmatrix}$$

Sumário

- **Passo 1** Identifique o valor mínimo de cada linha e o subtraia de cada elemento da linha;
- **Passo 2** Identifique o valor mínimo de cada coluna e o subtraia de cada elemento da coluna;
- **Passo 3a** Identifique o número mínimo de riscos que cubra todos os zeros da matriz;
- **Passo 3b** Sem solução viável (número de riscos $< n$)? Identifique o o valor mínimo dos elementos não riscados e o subtraia desses mesmos elementos; para elementos cobertos por dois riscos, adicione esse valor;
- **Passo 3c** Sem solução viável novamente? Então volte para o passo 3a; Caso contrário, a solução é viável, vá para o passo 4;
- **Passo 4** Identifique a solução ótima na solução viável encontrada.

O Método Húngaro

Exemplo 1:

$$\begin{array}{c} \left|\begin{array}{ccc} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right| \begin{array}{c} -3 \\ -2 \\ -2 \end{array} \\ \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \left|\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right| \\ \begin{array}{ccc} & \text{-1} & \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \left|\begin{array}{ccc} 0^* & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0^* \\ 0 & 0^* & 2 \end{array}\right| \\ \end{array}$$

A solução ótima fica evidente.

O Método Húngaro

Exemplo 1:

$$\left|\begin{array}{ccc|c}3&5&6&-3\\5&4&2&-2\\2&3&4&-2\end{array}\right. \rightarrow \begin{array}{c}\begin{vmatrix}0&2&3\\3&2&0\\0&1&2\end{vmatrix}\\ \quad\text{-1}\quad\end{array} \rightarrow \begin{vmatrix}0^*&1&3\\3&1&0^*\\0&0^*&2\end{vmatrix}$$

A solução ótima fica evidente.

O Método Húngaro

Exemplo 1:

$$
\begin{array}{|ccc|c}
3 & 5 & 6 & -3 \\
5 & 4 & 2 & -2 \\
2 & 3 & 4 & -2
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|ccc|}
0 & 2 & 3 \\
3 & 2 & 0 \\
0 & 1 & 2 \\
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{-1} & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|ccc|}
0^* & 1 & 3 \\
3 & 1 & 0^* \\
0 & 0^* & 2
\end{array}
$$

A solução ótima fica evidente.

Exemplo 2:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 10 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{matrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} & & \text{-2} \end{matrix}$$

Solução inviável, mais zeros necessários. Continuando...

Viabilização

$$\begin{matrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Teorema de König

Se o número mínimo de traços que atravessam todos os zeros for exatamente n, temos uma alocação possível para cada linha ou coluna.

Interpretação

Se tivermos n traços, então haverá pelo menos n elementos zero distribuídos conforme necessário, e consequentemente, uma atribuição ótima.

Caso contrário, existirão linhas ou colunas que não possuirão elementos zero, impedindo que haja uma atribuição ótima.

Viabilização

$$\begin{matrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Teorema de König

Se o número mínimo de traços que atravessam todos os zeros for exatamente n, temos uma alocação possível para cada linha ou coluna.

Interpretação

Se tivermos n traços, então haverá pelo menos n elementos zero distribuídos conforme necessário, e consequentemente, uma atribuição ótima.

Caso contrário, existirão linhas ou colunas que não possuirão elementos zero, impedindo que haja uma atribuição ótima.

$$\begin{matrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Operação de Viabilização

Identificamos o valor do menor elemento não riscado e o subtraímos em todos os elementos não riscados.

Para elementos riscados duas vezes, adicionamos esse mesmo valor.

Viabilização (exemplo)

$$\begin{array}{c} \left|\begin{array}{ccc} 0 & \color{red}{4} & \color{red}{3} \\ 0 & \color{red}{3} & \color{red}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{c} \\ \color{red}{-3} \\ \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 0* & 1 & 0 \\ 0 & 0* & 2 \\ 3 & 0 & 0* \end{array}\right|$$

Matriz Original:

$$\left|\begin{array}{ccc} 2* & 6 & 7 \\ 3 & 6* & 10 \\ 2 & 2 & 4* \end{array}\right|$$

Solução com custo 12.

Viabilização (exemplo)

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \; -3 \qquad \begin{vmatrix} 0* & 1 & 0 \\ 0 & 0* & 2 \\ 3 & 0 & 0* \end{vmatrix}$$

Matriz Original:

$$\begin{vmatrix} 2* & 6 & 7 \\ 3 & 6* & 10 \\ 2 & 2 & 4* \end{vmatrix}$$

Solução com custo 12.

Viabilização (exemplo)

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \; -3 \qquad \begin{vmatrix} 0* & 1 & 0 \\ 0 & 0* & 2 \\ 3 & 0 & 0* \end{vmatrix}$$

Matriz Original:

$$\begin{vmatrix} 2* & 6 & 7 \\ 3 & 6* & 10 \\ 2 & 2 & 4* \end{vmatrix}$$

Solução com custo 12.

Ajustes

- O método húngaro só resolve problemas de minimização em matrizes quadradas.
- Porém, o algoritmo pode ser adaptado para problemas de maximização, bastando multiplicar a matriz de custos por -1.
- Além disto, matrizes não quadradas podem se tornar quadradas pela inclusão de linhas/colunas zeradas.

Dúvidas?