BCC204 - Teoria dos Grafos

Marco Antonio M. Carvalho

(baseado nas notas de aula do prof. Haroldo Gambini Santos)
Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

Conteúdo

Fonte

Este material é baseado no livro

- Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.

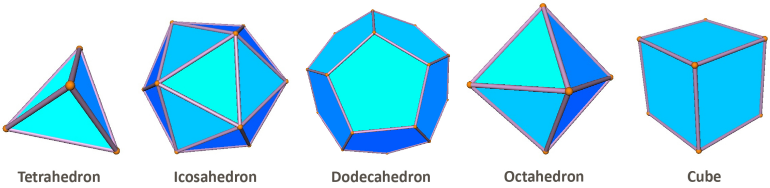
Licença

Sólidos Platônicos

Definição

Os sólidos platônicos (em homenagem ao filósofo Platão) são figuras tridimensionais nas quais todas as faces são polígonos regulares congruentes, tal que cada vértice possui o mesmo número de faces incidentes.

Existem somente 5 sólidos platônicos.



A Fórmula de Euler

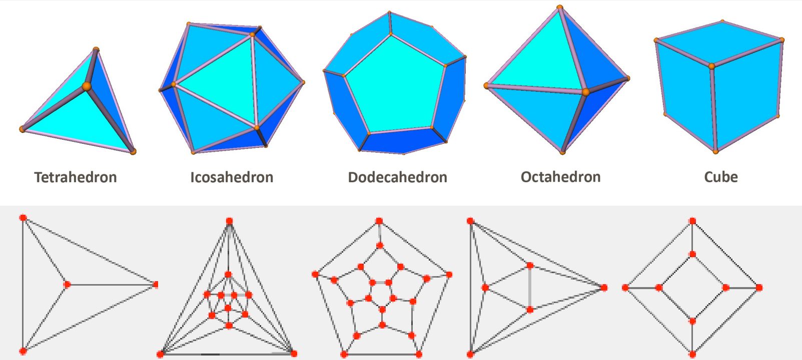
Um sólido platônico é composto por vértices (V), arestas (E) e faces (F). A relação entre estes valores é dada pela Fórmula de Euler:

$$V - E + F = 2$$

Grafos Platônicos

Correspondência

Para cada sólido platônico, há um grafo platônico correspondente, que na verdade representam o "esqueleto" de cada sólido.



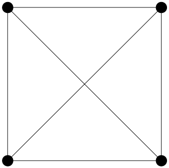
A correlação

Veremos a seguir que o conceito de planaridade possui propriedades dos sólidos platônicos, como a aplicação da fórmula de Euler.

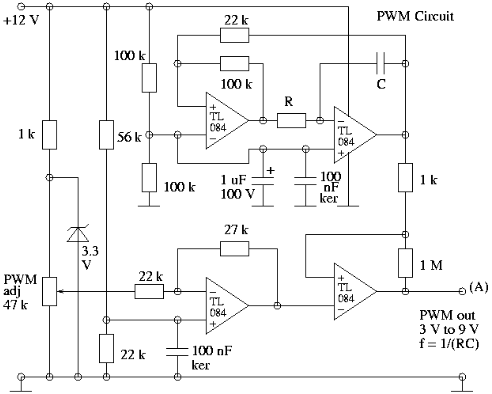
Grafo Planar

Definição

Um grafo G é planar se existir uma representação gráfica de G no plano sem cruzamento de arestas.



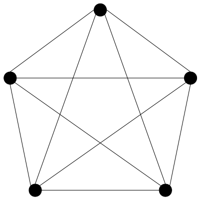
O grafo K_4 é planar?



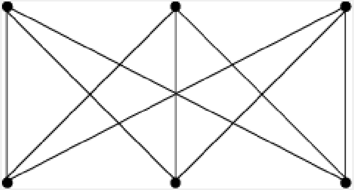
- Vértices: portas lógicas;
- Arestas: fios entre as portas lógicas;
- Objetivo: encontrar um leiaute do circuito sem cruzamento de fios.

Grafos de Kuratowski

K_5 – grafo não planar com menor número de **vértices**.



$K_{3,3}$ – grafo não planar com menor número de **arestas**.



Grafos de Kuratowski

O que K_5 e $K_{3,3}$ têm em comum:

- Ambos são regulares;
- Ambos são não planares;
- A remoção de **uma** aresta ou **um** vértice torna o grafo planar;
- K_5 é o grafo não-planar com o menor número de vértices e o $K_{3,3}$ com o menor número de arestas.

Planaridade

Teorema

Qualquer grafo planar simples pode ter sua representação planar utilizando apenas **linhas retas**.

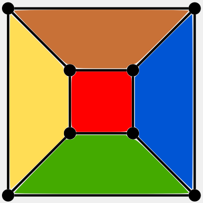
Região ou Face

Definição

Seja G um grafo planar, uma face é uma região fechada de G limitada por algumas arestas de G.

Exemplo

No grafo abaixo temos 6 faces. A última face é o exterior do grafo que também é chamada de face infinita.



Teorema (Fórmula de Euler):

Seja G um grafo conexo e planar com

- n vértices;
- m arestas;
- f faces.

Temos que:

$$n - m + f = 2$$

Implicação: apesar das inúmeras maneiras de se desenhar um grafo no plano, o número de faces irá permanecer o mesmo.

Teorema (Fórmula de Euler):

Seja G um grafo conexo e planar com

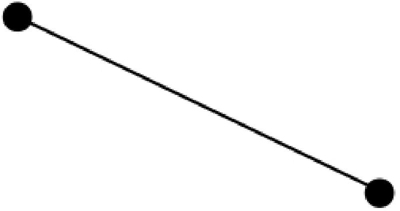
- n vértices;
- m arestas;
- f faces.

Temos que:

$$n - m + f = 2$$

Implicação: apesar das inúmeras maneiras de se desenhar um grafo no plano, o número de faces irá permanecer o mesmo.

Prova

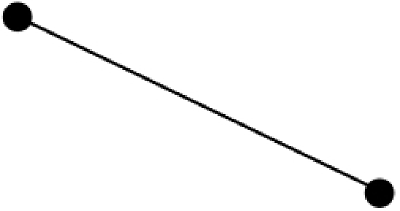


G_1

A fórmula de Euler é válida para G_1.

É fácil mostrar que a fórmula de Euler é válida para **qualquer árvore**, ou seja, um grafo onde $m = n - 1$ e $f = 1$.

Prova

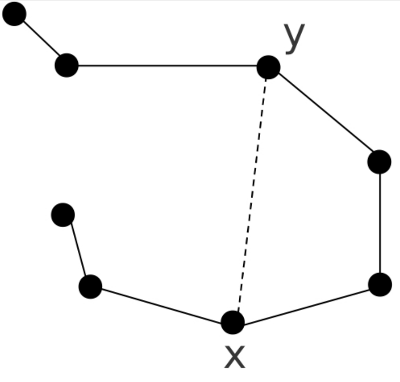


G_1

A fórmula de Euler é válida para G_1.

É fácil mostrar que a fórmula de Euler é válida para **qualquer árvore**, ou seja, um grafo onde $m = n - 1$ e $f = 1$.

Prova (cont.)



Se G é conexo, então a adição de uma nova aresta a cria um ciclo e, por consequência, uma nova face em G.

Ou seja, adicionar arestas em uma árvore (onde a fórmula de Euler está correta), não modifica o valor obtido pela fórmula.

A Fórmula de Euler

Corolário (*decorrência imediata de um teorema*)

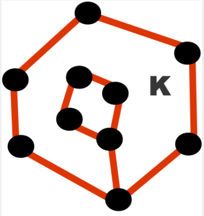
Se G é um grafo planar conexo com $m > 1$, então

$$m \leq 3n - 6$$

Prova (p.1)

Definimos o grau de uma face como o número de arestas nos seus limites. Se uma aresta aparece duas vezes pelo limiar, então contamos duas vezes.

Ex.: A região K tem grau 12.



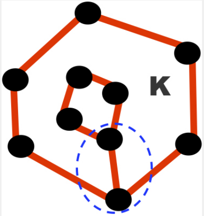
Corolário (*decorrência imediata de um teorema*)

Se G é um grafo planar conexo com $m > 1$, então

$$m \leq 3n - 6$$

Prova (p.1)

Definimos o grau de uma face como o número de arestas nos seus limites. Se uma aresta aparece duas vezes pelo limiar, então contamos duas vezes.
Ex.: A região K tem grau 12.



Corolário

Se G é um grafo planar conexo com $m > 1$, então $m \leq 3n - 6$.

Prova (p.2)

Note que nenhuma face pode ter menor do que grau 3, considerando grafos simples.

Logo, $2m$[a] $\geq 3f$, ou seja, $f \leq \frac{2}{3}m$.

Isolando f na fórmula de Euler, temos que f=2+m-n. Substituindo f na equação anterior, temos:

$$2 + m - n \leq \frac{2}{3}m$$

Multiplicando por 3 para eliminar a fração e isolando m temos:

$$6 + 3m - 3n \leq 2m$$

$$m \leq 3n - 6$$

[a] $2m$: soma dos graus das faces

A Fórmula de Euler

Corolário

Se G é um grafo planar conexo com $m > 1$, então $m \leq 3n - 6$.

Prova (p.2)

Note que nenhuma face pode ter menor do que grau 3, considerando grafos simples.

Logo, $2m^{a} \geq 3f$, ou seja, $f \leq \frac{2}{3}m$.

Isolando **f** na fórmula de Euler, temos que f=2+m-n. Substituindo **f** na equação anterior, temos:

$$2 + m - n \leq \frac{2}{3}m$$

Multiplicando por 3 para eliminar a fração e isolando m temos:

$$6 + 3m - 3n \leq 2m$$

$$m \leq 3n - 6$$

[a] $2m$: soma dos graus das faces

A Fórmula de Euler

Corolário

Se G é um grafo planar conexo com $m > 1$, então $m \leq 3n - 6$.

Prova (p.2)

Note que nenhuma face pode ter menor do que grau 3, considerando grafos simples.

Logo, $2m$[a] $\geq 3f$, ou seja, $f \leq \frac{2}{3}m$.

Isolando **f** na fórmula de Euler, temos que f=2+m-n. Substituindo **f** na equação anterior, temos:

$$2 + m - n \leq \frac{2}{3}m$$

Multiplicando por 3 para eliminar a fração e isolando m temos:

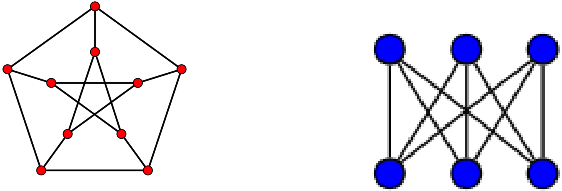
$$6 + 3m - 3n \leq 2m$$

$$m \leq 3n - 6$$

[a] $2m$: soma dos graus das faces

Discussão

É possível haver grafos com $m \leq 3n - 6$ que não sejam planares?



Grafo de Petersen e $K_{3,3}$.

A Fórmula de Euler

Casos Especiais

O grafo bipartido completo $K_{3,3}$ possui todas as regiões de grau 4, logo:

$$2m^{a} \geq 4f\text{, ou } f \leq \frac{2}{4}m$$

Isolando f na fórmula de Euler, temos que f=2+m-n. Substituindo f na equação anterior, temos:

$$2 + m - n \leq \frac{2}{4}m$$

Multiplicando por 2 para eliminar a fração e isolando m temos:

$$4 + 2m - 2n \leq m$$
$$m \leq 2n - 4$$

Como o $K_{3,3}$ possui 6 vértices e 9 arestas, temos que $9 \leq 8$, o que é uma contradição.

[a] $2m$: soma dos graus das faces

Casos Especiais

O grafo bipartido completo $K_{3,3}$ possui todas as regiões de grau 4, logo:

$$2m^{a} \geq 4f, \text{ ou } f \leq \frac{2}{4}m$$

Isolando f na fórmula de Euler, temos que f=2+m-n. Substituindo f na equação anterior, temos:

$$2 + m - n \leq \frac{2}{4}m$$

Multiplicando por 2 para eliminar a fração e isolando m temos:

$$4 + 2m - 2n \leq m$$
$$m \leq 2n - 4$$

Como o $K_{3,3}$ possui 6 vértices e 9 arestas, temos que $9 \leq 8$, o que é uma contradição.

[a] $2m$: soma dos graus das faces

A Fórmula de Euler

Casos Especiais

O grafo bipartido completo $K_{3,3}$ possui todas as regiões de grau 4, logo:

$$2m^{a} \geq 4f, \text{ ou } f \leq \frac{2}{4}m$$

Isolando f na fórmula de Euler, temos que f=2+m-n. Substituindo f na equação anterior, temos:

$$2 + m - n \leq \frac{2}{4}m$$

Multiplicando por 2 para eliminar a fração e isolando m temos:

$$4 + 2m - 2n \leq m$$
$$m \leq 2n - 4$$

Como o $K_{3,3}$ possui 6 vértices e 9 arestas, temos que $9 \leq 8$, o que é uma contradição.

[a] $2m$: soma dos graus das faces

A Fórmula de Euler

Casos Especiais

O grafo bipartido completo $K_{3,3}$ possui todas as regiões de grau 4, logo:

$$2m^a \geq 4f, \text{ ou } f \leq \frac{2}{4}m$$

Isolando f na fórmula de Euler, temos que f=2+m-n. Substituindo f na equação anterior, temos:

$$2 + m - n \leq \frac{2}{4}m$$

Multiplicando por 2 para eliminar a fração e isolando m temos:

$$4 + 2m - 2n \leq m$$
$$m \leq 2n - 4$$

Como o $K_{3,3}$ possui 6 vértices e 9 arestas, temos que $9 \leq 8$, o que é uma contradição.

[a] $2m$: soma dos graus das faces

A Fórmula de Euler

Casos Especiais

O **grafo de Petersen** possui todas as regiões de grau 5, logo:

$$2m^{a} \geq 5f\text{, ou } f \leq \frac{2}{5}m$$

Isolando f na fórmula de Euler, temos que f=2+m-n. Substituindo f na equação anterior, temos:

$$2 + m - n \leq \frac{2}{5}m$$

Multiplicando por 5 para eliminar a fração e isolando m temos:

$$10 + 5m - 5n \leq 2m$$
$$3m \leq 5n - 10$$

Como o grafo de Petersen possui 10 vértices e 15 arestas, temos que $45 \leq 40$, o que é uma contradição.

[a] $2m$: soma dos graus das faces

A Fórmula de Euler

Casos Especiais

O **grafo de Petersen** possui todas as regiões de grau 5, logo:

$$2m^{a} \geq 5f, \text{ ou } f \leq \frac{2}{5}m$$

Isolando f na fórmula de Euler, temos que f=2+m-n. Substituindo f na equação anterior, temos:

$$2 + m - n \leq \frac{2}{5}m$$

Multiplicando por 5 para eliminar a fração e isolando m temos:

$$10 + 5m - 5n \leq 2m$$
$$3m \leq 5n - 10$$

Como o grafo de Petersen possui 10 vértices e 15 arestas, temos que $45 \leq 40$, o que é uma contradição.

[a] $2m$: soma dos graus das faces

A Fórmula de Euler

Casos Especiais

O **grafo de Petersen** possui todas as regiões de grau 5, logo:

$$2m^{a} \geq 5f\text{, ou } f \leq \frac{2}{5}m$$

Isolando f na fórmula de Euler, temos que f=2+m-n. Substituindo f na equação anterior, temos:

$$2 + m - n \leq \frac{2}{5}m$$

Multiplicando por 5 para eliminar a fração e isolando m temos:

$$10 + 5m - 5n \leq 2m$$
$$3m \leq 5n - 10$$

Como o grafo de Petersen possui 10 vértices e 15 arestas, temos que $45 \leq 40$, o que é uma contradição.

[a] $2m$: soma dos graus das faces

Casos Especiais

O **grafo de Petersen** possui todas as regiões de grau 5, logo:

$$2m^{a} \geq 5f\text{, ou } f \leq \frac{2}{5}m$$

Isolando f na fórmula de Euler, temos que f=2+m-n. Substituindo f na equação anterior, temos:

$$2 + m - n \leq \frac{2}{5}m$$

Multiplicando por 5 para eliminar a fração e isolando m temos:

$$10 + 5m - 5n \leq 2m$$
$$3m \leq 5n - 10$$

Como o grafo de Petersen possui 10 vértices e 15 arestas, temos que $45 \leq 40$, o que é uma contradição.

[a] $2m$: soma dos graus das faces

Redução Elementar

Em um grafo G podemos, com segurança, contrair todos os vértices de grau 2 sem afetar sua planaridade. Esse processo é chamado de redução elementar.

Depois dessa operação, o grafo resultante H é:

1. Uma única aresta;
2. Um grafo completo com 4 vértices; ou
3. Um grafo com $n \geq 5$ e $m \geq 7$.

Se H estiver nas condições 1 ou 2 ele é **planar**, senão, continua-se a investigação.

Redução Elementar

Em um grafo G podemos, com segurança, contrair todos os vértices de grau 2 sem afetar sua planaridade. Esse processo é chamado de redução elementar.

Depois dessa operação, o grafo resultante H é:

1. Uma única aresta;
2. Um grafo completo com 4 vértices; ou
3. Um grafo com $n \geq 5$ e $m \geq 7$.

Se H estiver nas condições 1 ou 2 ele é **planar**, senão, continua-se a investigação.

Redução Elementar

Em um grafo G podemos, com segurança, contrair todos os vértices de grau 2 sem afetar sua planaridade. Esse processo é chamado de redução elementar.

Depois dessa operação, o grafo resultante H é:

1. Uma única aresta;
2. Um grafo completo com 4 vértices; ou
3. Um grafo com $n \geq 5$ e $m \geq 7$.

Se H estiver nas condições 1 ou 2 ele é **planar**, senão, continua-se a investigação.

Redução Elementar

Em um grafo G podemos, com segurança, contrair todos os vértices de grau 2 sem afetar sua planaridade. Esse processo é chamado de redução elementar.

Depois dessa operação, o grafo resultante H é:

1. Uma única aresta;
2. Um grafo completo com 4 vértices; ou
3. Um grafo com $n \geq 5$ e $m \geq 7$.

Se H estiver nas condições 1 ou 2 ele é **planar**, senão, continua-se a investigação.

Redução Elementar

Em um grafo G podemos, com segurança, contrair todos os vértices de grau 2 sem afetar sua planaridade. Esse processo é chamado de redução elementar.

Depois dessa operação, o grafo resultante H é:

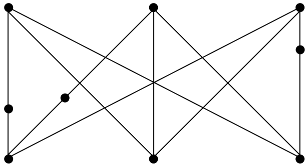
1. Uma única aresta;
2. Um grafo completo com 4 vértices; ou
3. Um grafo com $n \geq 5$ e $m \geq 7$.

Se H estiver nas condições 1 ou 2 ele é **planar**, senão, continua-se a investigação.

Homeomorfismo

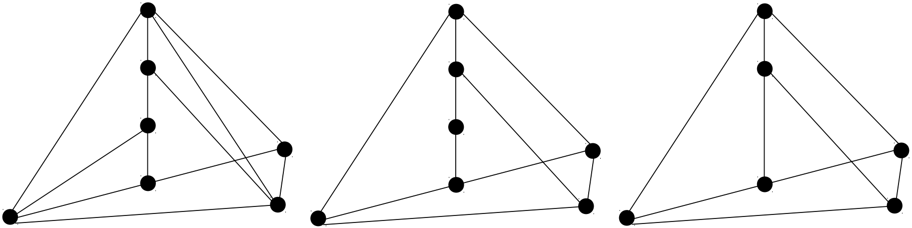
Dizemos que um grafo H é homeomorfo a G se H puder ser obtido de G pela inserção de vértices de grau 2 em pontos intermediários de suas arestas.

De outro modo: dois grafos G_1 e G_2 são homeomorfos se os grafos H_1 e H_2 obtidos a partir da redução elementar de G_1 e G_2, respectivamente, forem isomorfos.



Teorema de Kuratowski, 1930

Um grafo é planar se e somente se nenhum de seus subgrafos for homeomorfo ao K_5 ou a $K_{3,3}$.



G, subgrafo de G e contração do subgrafo.

Isomorfismo e Complexidade

O algoritmo intuitivo para testes de isomorfismo consiste em analisar as permutações de linhas e colunas de matrizes de equivalência, em busca de uma relação um-para-um, ou seja, $O(n!)$.

Em 9 de janeiro de 2017, Lászó Babai, da Universidade de Chicago, anunciou um algoritmo quasipolinomial[a] para o teste de isomorfismo![b]

[a]Mais lento que polinomial, mas significativamente mais rápido que exponencial.

[b]`https://jeremykun.com/2015/11/12/a-quasipolynomial-time-algorithm-for-graph-isomorphism-the-details/`

Seja G um grafo não dirigido com n vértices e $C(G)$ o seu complemento.

- Se $n < 8$, então G ou $C(G)$ é planar;
- Se $n > 8$, então G ou $C(G)$ é não planar;
- Se $n = 8$, nada pode ser dito.

Dúvidas?