BCC204 - Teoria dos Grafos

Marco Antonio M. Carvalho

(baseado nas notas de aula do prof. Haroldo Gambini Santos)
Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

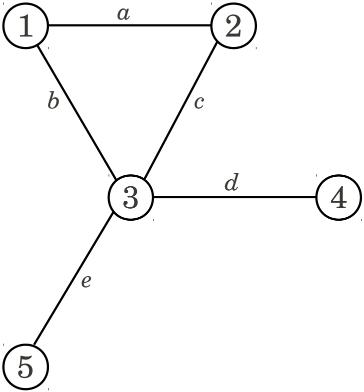
Conteúdo

Fonte

Este material é baseado no livro

- Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.

Licença



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

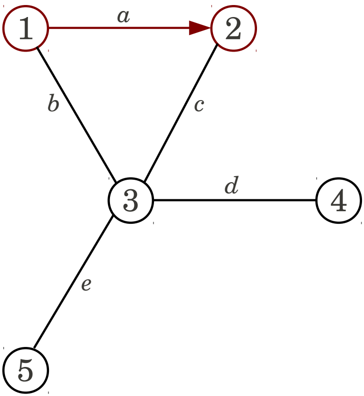
Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice (não necessariamente os mesmos).

Ex.: 1 - a - 2 - c - 3 - d - 4 - d - 3 - e - 5
ou: 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

- Aberto : quando inicia e acaba em vértices diferentes (o caso acima).
- Fechado : quando inicia e acaba no mesmo vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1.



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

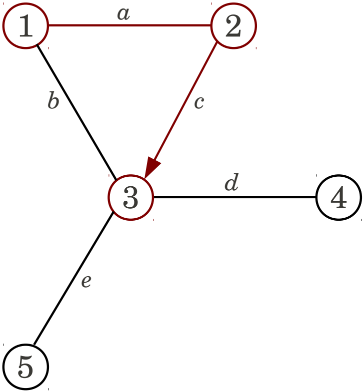
Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice (não necessariamente os mesmos).

Ex.: 1 - a - 2 - c - 3 - d - 4 - d - 3 - e - 5

ou: 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

- **Aberto** : quando inicia e acaba em vértices diferentes (o caso acima).
- **Fechado** : quando inicia e acaba no mesmo vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1.



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice (não necessariamente os mesmos).

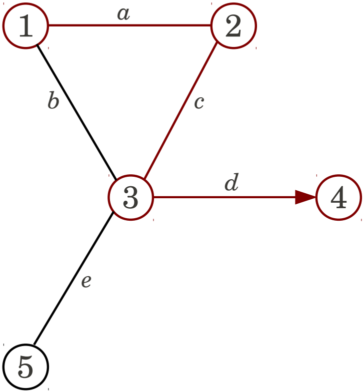
Ex.: 1 - *a* - 2 - *c* - 3 - *d* - 4 - *d* - 3 - *e* - 5

ou: 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

- Aberto : quando inicia e acaba em vértices diferentes (o caso acima).
- Fechado : quando inicia e acaba no mesmo vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1.

Definições



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice (não necessariamente os mesmos).

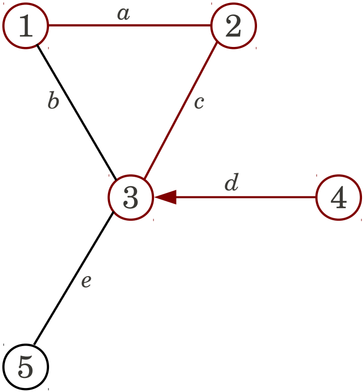
Ex.: 1 - a - 2 - c - 3 - d - 4 - d - 3 - e - 5

ou: 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

- **Aberto** : quando inicia e acaba em vértices diferentes (o caso acima).
- **Fechado** : quando inicia e acaba no mesmo vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1.

Definições



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

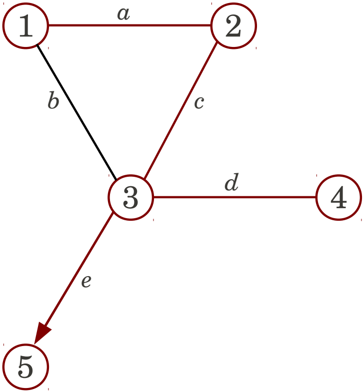
Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice (não necessariamente os mesmos).

Ex.: 1 - *a* - 2 - *c* - 3 - *d* - 4 - *d* - 3 - *e* - 5

ou: 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

- **Aberto** : quando inicia e acaba em vértices diferentes (o caso acima).
- **Fechado** : quando inicia e acaba no mesmo vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1.



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice (não necessariamente os mesmos).

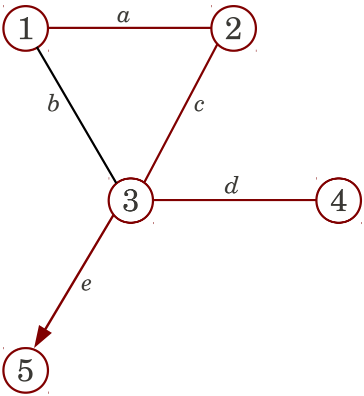
Ex.: 1 - a - 2 - c - 3 - d - 4 - d - 3 - e - 5

ou: 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

- **Aberto** : quando inicia e acaba em vértices diferentes (o caso acima).
- **Fechado** : quando inicia e acaba no mesmo vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1.

Definições



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

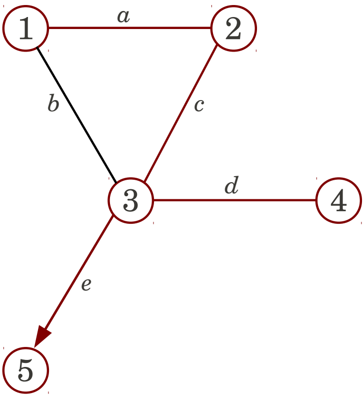
Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice (não necessariamente os mesmos).

Ex.: 1 - *a* - 2 - *c* - 3 - *d* - 4 - *d* - 3 - *e* - 5
ou: 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

Aberto : quando inicia e acaba em vértices diferentes (o caso acima).

Fechado : quando inicia e acaba no mesmo vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1.



Passeio

Um passeio é uma sequência finita de vértices e arestas.

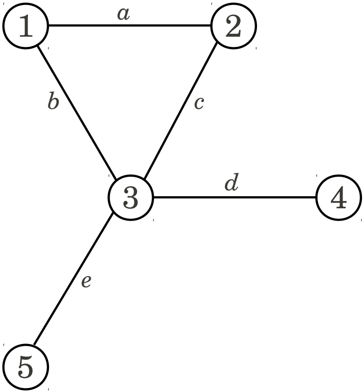
Cada vértice da sequência é incidente a aresta que o precede e a aresta seguinte.

Essa sequência deve acabar e iniciar em um vértice (não necessariamente os mesmos).

Ex.: 1 - *a* - 2 - *c* - 3 - *d* - 4 - *d* - 3 - *e* - 5
ou: 1 - 2 - 3 - 4 - 3 - 5

O passeio pode ser:

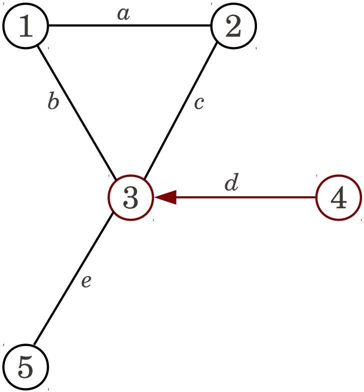
- **Aberto** : quando inicia e acaba em vértices diferentes (o caso acima).
- **Fechado** : quando inicia e acaba no mesmo vértice. Ex.: 1-2-3-4-3-5-3-1.



Cadeia

Um passeio que não repete arestas.

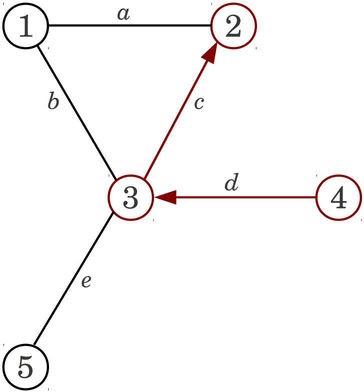
Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5



Cadeia

Um passeio que não repete arestas.

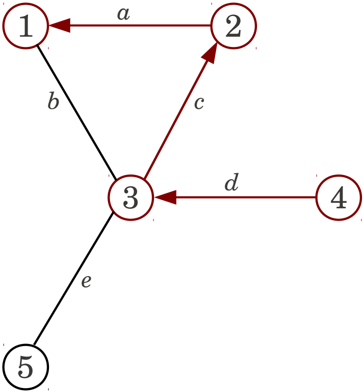
Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5



Cadeia

Um passeio que não repete arestas.

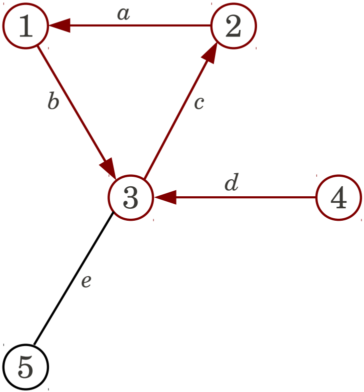
Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5



Cadeia

Um passeio que não repete arestas.

Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5

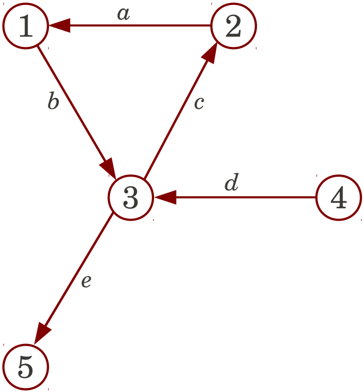


Cadeia

Um passeio que não repete arestas.

Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5

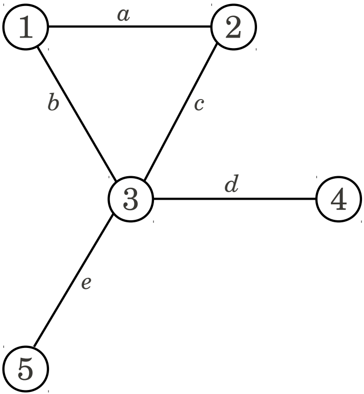
Definições



Cadeia

Um passeio que não repete arestas.

Ex.: 4 - 3 - 2 - 1 - 3 - 5



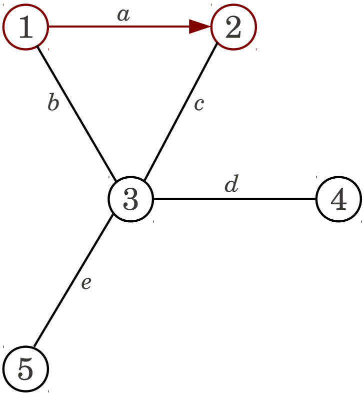
Caminho

Uma cadeia sem repetição de vértices.

Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

- **Aberto**: quando inicia e acaba em vértices diferentes (o caso acima).
- **Fechado**: quando inicia e acaba no mesmo vértice. Ex.: 1-2-3-1.
- **Comprimento**: o comprimento de um caminho é o número de arestas que o mesmo inclui.

Definições



Caminho

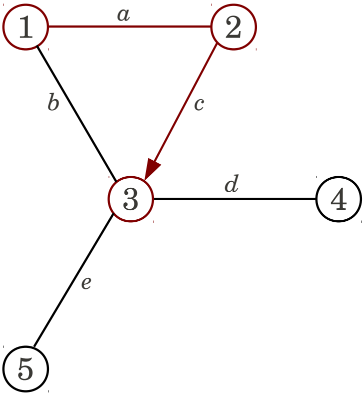
Uma cadeia sem repetição de vértices.

Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

Aberto : quando inicia e acaba em vértices diferentes (o caso acima).

Fechado : quando inicia e acaba no mesmo vértice. Ex.: 1-2-3-1.

Comprimento : o comprimento de um caminho é o número de arestas que o mesmo inclui.



Caminho

Uma cadeia sem repetição de vértices.

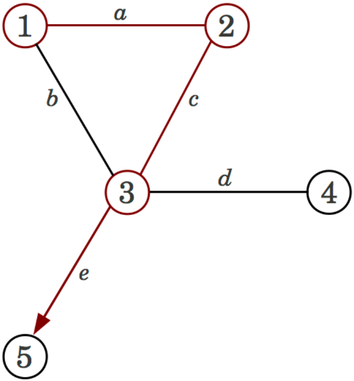
Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

Aberto : quando inicia e acaba em vértices diferentes (o caso acima).

Fechado : quando inicia e acaba no mesmo vértice. Ex.: 1-2-3-1.

Comprimento : o comprimento de um caminho é o número de arestas que o mesmo inclui.

Definições



Caminho

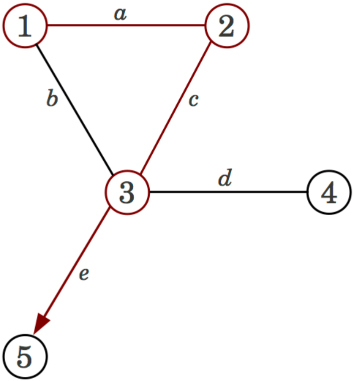
Uma cadeia sem repetição de vértices.

Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

Aberto : quando inicia e acaba em vértices diferentes (o caso acima).

Fechado : quando inicia e acaba no mesmo vértice. Ex.: 1-2-3-1.

Comprimento : o comprimento de um caminho é o número de arestas que o mesmo inclui.



Caminho

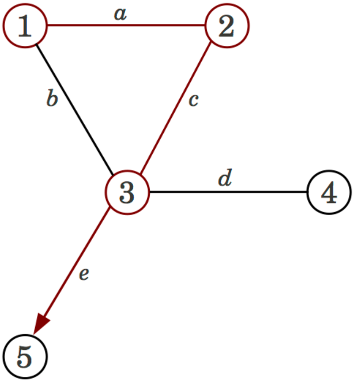
Uma cadeia sem repetição de vértices.

Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

Aberto : quando inicia e acaba em vértices diferentes (o caso acima).

Fechado : quando inicia e acaba no mesmo vértice. Ex.: 1-2-3-1.

Comprimento : o comprimento de um caminho é o número de arestas que o mesmo inclui.



Caminho

Uma cadeia sem repetição de vértices.

Ex.: 1 - 2 - 3 - 5

Aberto: quando inicia e acaba em vértices diferentes (o caso acima).

Fechado: quando inicia e acaba no mesmo vértice. Ex.: 1-2-3-1.

Comprimento: o comprimento de um caminho é o número de arestas que o mesmo inclui.

Sumarizando...

Passeio

Sequência finita de vértices e arestas.

Cadeia

Um passeio que não repete arestas.

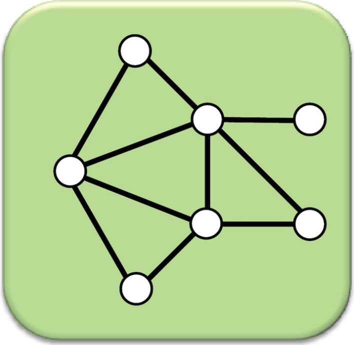
Caminho

Uma cadeia sem repetição de vértices.

Relembrando...

Grafo Conexo

Um grafo é dito conexo se para todo par de vértices i e j existe pelo menos um caminho entre i e j.



Exemplos

1. Dê um exemplo de um grafo conexo G cuja remoção de qualquer aresta torna G desconexo.
2. Quantas arestas possui um grafo com estas características?
3. Qual é o limite mínimo e máximo de arestas em um grafo simples conectado?

Teorema 1

Se um grafo possui exatamente 2 vértices de grau ímpar, existe um caminho entre esses dois vértices.

Teorema 2

O número mínimo de arestas de um grafo simples com n vértices e k componentes é $n - k$.

Teorema 3

Um grafo simples com n vértices e k componentes possui no máximo $(n - k)(n - k + 1)/2$ arestas (caso trivial).

Teorema 1

Se um grafo possui exatamente 2 vértices de grau ímpar, existe um caminho entre esses dois vértices.

Teorema 2

O número mínimo de arestas de um grafo simples com n vértices e k componentes é $n - k$.

Teorema 3

Um grafo simples com n vértices e k componentes possui no máximo $(n-k)(n-k+1)/2$ arestas (caso trivial).

Caminhos e Circuitos

Teorema 1

Se um grafo possui exatamente 2 vértices de grau ímpar, existe um caminho entre esses dois vértices.

Teorema 2

O número mínimo de arestas de um grafo simples com n vértices e k componentes é $n - k$.

Teorema 3

Um grafo simples com n vértices e k componentes possui no máximo $(n-k)(n-k+1)/2$ arestas (caso trivial).

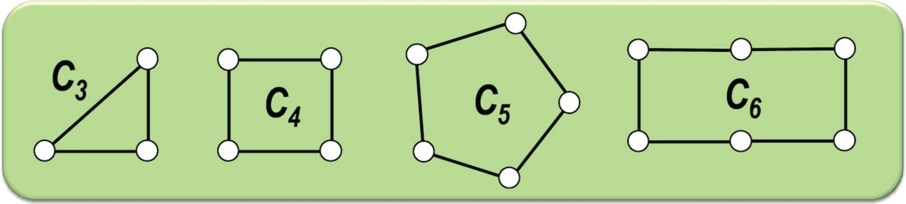
Ciclos

Definição

Um ciclo é um caminho fechado.

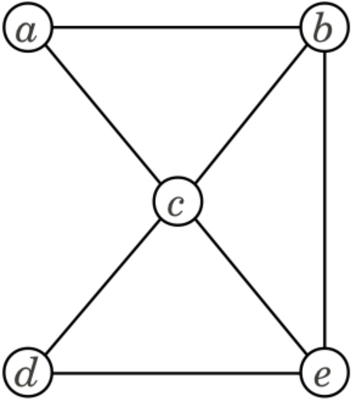
Alguns autores, utilizam o termo *circuito* para o caso de grafos orientados.

Grafo Ciclo: Um grafo ciclo C_n é um grafo com n vértices formado por apenas um ciclo passando por todos os vértices.



Exemplos

Quantos grafos ciclos (não isomorfos) são subgrafos do grafo abaixo?



Relembrando...

Passeio

Sequência finita de vértices e arestas.

Cadeia

Um passeio que não repete arestas.

Caminho

Uma cadeia sem repetição de vértices.

Alcançabilidade

Definição

Um vértice w é alcançável a partir do vértice v se houver um caminho entre w e v.

Definição

O conjunto de vértices alcançáveis a partir de v é, portanto, formado pelos sucessores de v, os sucessores dos sucessores e assim por diante.

Definição

Um vértice w é alcançável a partir do vértice v se houver um caminho entre w e v.

Definição

O conjunto de vértices alcançáveis a partir de v é, portanto, formado pelos sucessores de v, os sucessores dos sucessores e assim por diante.

Alcançabilidade

Transitividade

Se w é alcançável a partir de v;
e se x é alcançável de w;
então x é alcançável a partir de v.

Transitividade

A relação de alcançabilidade é transitiva.

Alcançabilidade

Transitividade

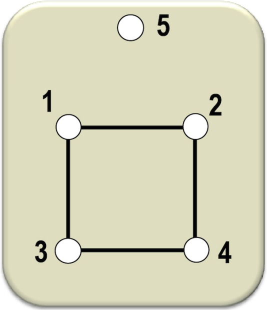
Se w é alcançável a partir de v;
e se x é alcançável de w;
então x é alcançável a partir de v.

Transitividade

A relação de alcançabilidade é transitiva.

Definição

O Fecho Transitivo de um vértice v, denotado por $\hat{\Gamma}(v)$, é o conjunto dos vértices de um grafo alcançáveis a partir de v.



$\hat{\Gamma}(1) = \{2, 3, 4\}$
$\hat{\Gamma}(5) = \{\}$

Fecho Transitivo Direto

O Fecho Transitivo Direto de um vértice v, denotado por $\hat{\Gamma}^{+}(v)$, é o conjunto dos vértices de um grafo alcançáveis a partir de v.

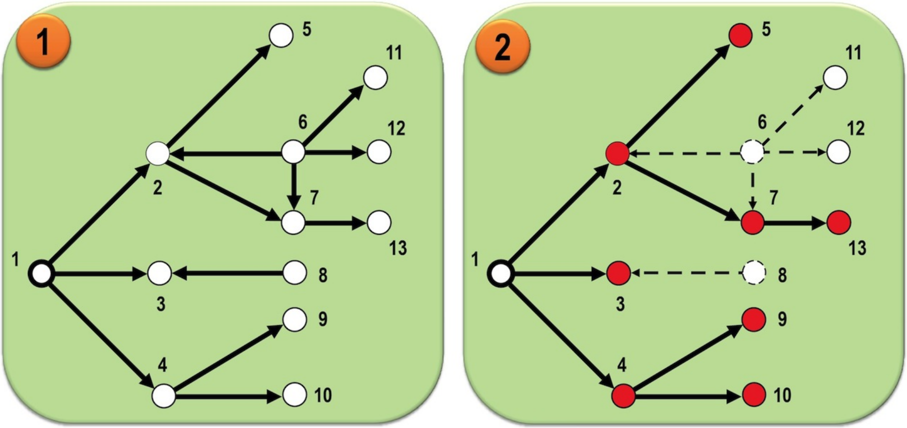
Os vértices em $\hat{\Gamma}^{+}(v)$ são chamados de descendentes ou sucessores de v.

Fecho Transitivo Indireto

O Fecho Transitivo Indireto de um vértice v, denotado por $\hat{\Gamma}^{-}(v)$, é o conjunto dos vértices de um grafo a partir dos quais v é alcançável.

Os vértices em $\hat{\Gamma}^{-}(v)$ são chamados de ascendentes ou antecessores de v.

Fecho Transitivo Direto e Indireto



$\hat{\Gamma}^{+}(1) = \{2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 13\}$
$\hat{\Gamma}^{-}(10) = \{1, 4\}$

Dúvidas?