BCC204 - Teoria dos Grafos

Marco Antonio M. Carvalho

(baseado nas notas de aula do prof. Haroldo Gambini Santos)
Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

Conteúdo

Fonte

Este material é baseado no livro

- Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.

Licença

Coloração de Vértices

Definição

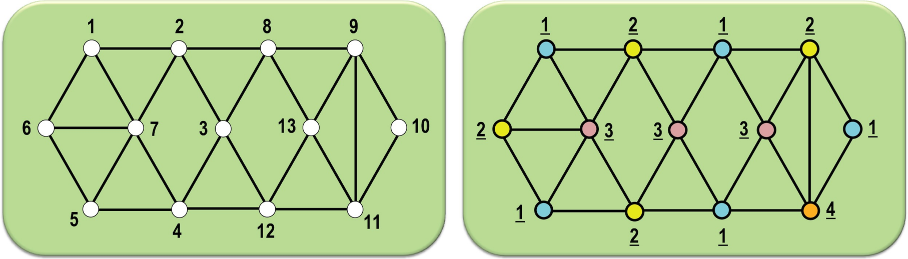
O problema de coloração de vértices, consiste em atribuir cores aos vértices de um grafo de maneira que vértices adjacentes possuam cores diferentes, denominada coloração própria.

O número mínimo de cores para colorir um grafo G é o seu número cromático ou $\chi(G)$.

Note que isto equivale a particionar o grafo no menor número de conjuntos independentes (não necessariamente máximos). Portanto, determinar o número cromático de um grafo é um problema **NP-Difícil**.

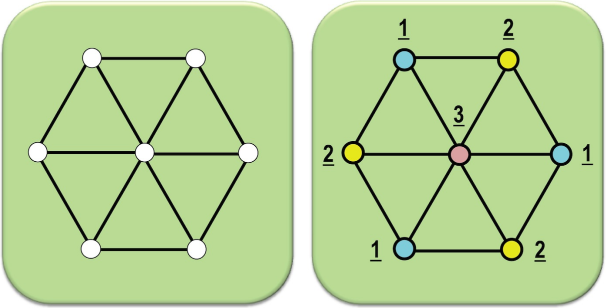
Com efeito, não é possível criar um algoritmo em tempo determinístico polinomial que produza uma solução aproximada com menos de $2\chi(G)$, a menos que P=NP.

Coloração de Vértices – Exemplo



Grafo G e uma 4-coloração (cores enumeradas).

Coloração de Vértices – Exemplo



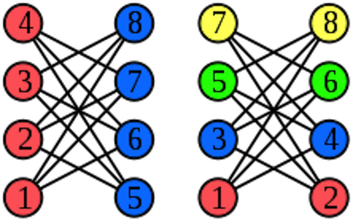
Grafo G e a coloração ótima, $\chi(G) = 3$.

Algoritmo Guloso

- Passo 1 Considere os vértices do grafo em uma ordem $v_i, \ldots, v_n$;
- Passo 2 Identifique as cores com índices, adicionando mais cores quando necessário;
- Passo 3 Atribua ao vértice v_i a cor de menor índice não utilizada por nenhum de seus vizinhos.

Algoritmo Guloso

Note que este algoritmo depende da ordem em que os vértices são considerados. É possível que uma determinada ordem de vértices leve a uma solução ótima.



Aplicações

Programação de Horários

No problema de programação de horários, dadas as matrículas dos alunos em disciplinas, é necessário determinar os horários das disciplinas para que os alunos assistam às aulas sem que haja conflito de horários.

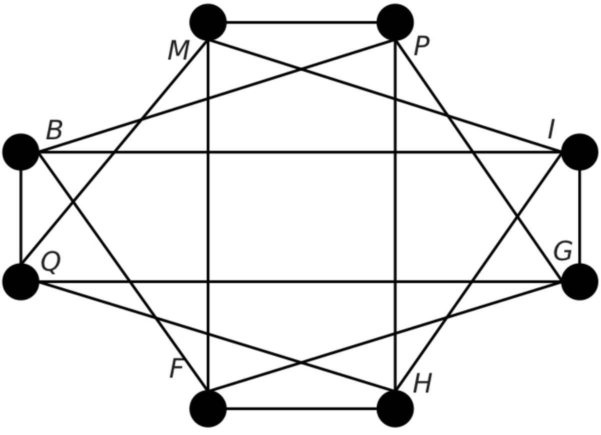
No grafo, os vértices representam disciplinas e aquelas com alunos em comum são adjacentes.

D.A.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Mat.	•							•				•			•	
Port.	•			•							•					•
Inglês						•	•			•					•	
Geo.				•	•		•		•				•			
Hist.			•							•		•		•		•
Fís.			•		•								•			
Qui.		•						•	•		•			•		
Bio.		•				•										

Tabela indicando os alunos matriculados por disciplina.

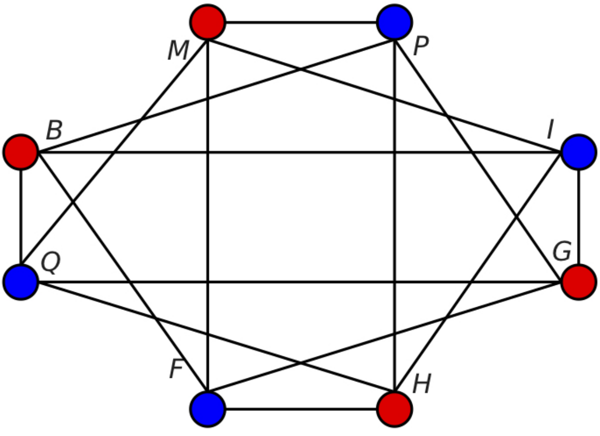
Aplicações

Programação de Horários



Aplicações

Programação de Horários



Alocação de Registradores

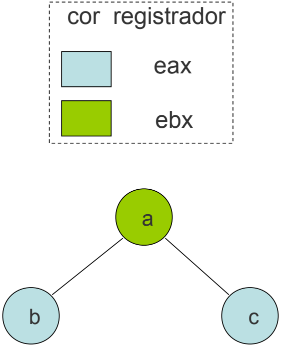
Uma das técnicas para otimização de códigos compilados é a alocação de registradores, na qual as variáveis mais frequentemente usadas são mantidas nos registradores mais rápidos (note que comumente há mais variáveis do que registradores).

Normalmente, nem todas as variáveis estão **ativas** ao mesmo tempo, portanto, é possível atribuir mais que uma variável a cada registrador, porém, duas variáveis ativas ao mesmo tempo não podem ser atribuídas ao mesmo registrador.

Podemos modelar este problema como um grafo de interferência, no qual os vértices representam as variáveis e arestas os conectam caso as respectivas variáveis sejam necessárias ao mesmo tempo. Se o grafo puder ser colorido com k cores, então as variáveis podem ser armazenadas em k registradores.

Aplicações

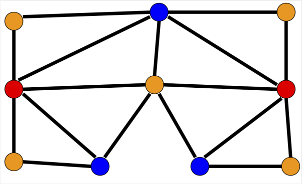
Instruções	**Variáveis Ativas**
	a
$b = a + 2$	
	a, b
$c = b * b$	
	a, c
$b = c + 1$	
	a, b
return $b * a$	



Uma variável é considerada **ativa** caso possa potencialmente ser lida antes da próxima operação de escrita.

O Problema da Interferência

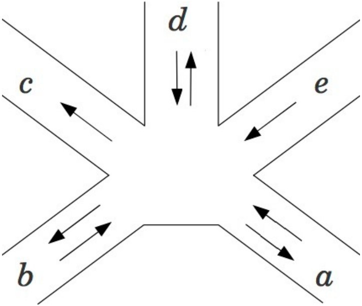
- Um roteador *wi-fi* pode interferir no sinal de outros roteadores próximos;
- Nesse caso, devem ser selecionadas frequências ou canais diferentes;
- O número de canais é limitado;
- É possível construir uma rede sem interferência com k canais?
- Basta criar um grafo em que cada vértice é um roteador, adicionando adjacências caso os roteadores possam interferir no sinal um do outro.



Trânsito

Um cruzamento de trânsito pode ser modelado em um grafo, no qual os vértices representam o fluxo de uma rua para outra.

Dois vértices são ligados por arestas caso os respectivos fluxos não possam estar ativos ao mesmo tempo.

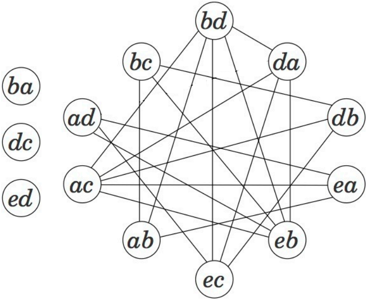


Aplicações

Trânsito

Um cruzamento de trânsito pode ser modelado em um grafo, no qual os vértices representam o fluxo de uma rua para outra.

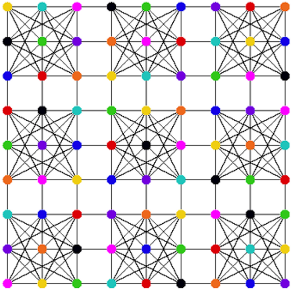
Dois vértices são ligados por arestas caso os respectivos fluxos não possam estar ativos ao mesmo tempo.



Sudoku

Resolver uma instância do **Sudoku** equivale a encontrar uma 9-coloração em um grafo específico de 81 vértices.

Os vértices representam as posições da matriz e os conflitos entre estas posições são indicados pelas adjacências.



$\chi(G)$: Algumas Propriedades

$\chi(G) = 1$ se e somente se G é completamente desconexo.

$\chi(G) = 2$ se G é bipartido.

$\chi(G) = n$ se G é um grafo completo de ordem n.

$\chi(G) \geq \omega(G)$ número clique.

$\chi(G) \leq \Delta(G)^1 + 1$ Teorema de Vizing.

$\chi(G) \leq 4$ para qualquer grafo planar: o Teorema das Quatro Cores.

[1] $\Delta(G)$: grau máximo em G

$\chi(G) = 1$ se e somente se G é completamente desconexo.

$\chi(G) = 2$ se G é bipartido.

$\chi(G) = n$ se G é um grafo completo de ordem n.

$\chi(G) \geq \omega(G)$ número clique.

$\chi(G) \leq \Delta(G)$[1] $+ 1$ Teorema de Vizing.

$\chi(G) \leq 4$ para qualquer grafo planar: o Teorema das Quatro Cores.

[1] $\Delta(G)$: grau máximo em G

$\chi(G)$: Algumas Propriedades

$\chi(G) = 1$ se e somente se G é completamente desconexo.

$\chi(G) = 2$ se G é bipartido.

$\chi(G) = n$ se G é um grafo completo de ordem n.

$\chi(G) \geq \omega(G)$ número clique.

$\chi(G) \leq \Delta(G)$[1] $+ 1$ Teorema de Vizing.

$\chi(G) \leq 4$ para qualquer grafo planar: o Teorema das Quatro Cores.

[1] $\Delta(G)$: grau máximo em G

$\chi(G)$: Algumas Propriedades

$\chi(G) = 1$ se e somente se G é completamente desconexo.

$\chi(G) = 2$ se G é bipartido.

$\chi(G) = n$ se G é um grafo completo de ordem n.

$\chi(G) \geq \omega(G)$ número clique.

$\chi(G) \leq \Delta(G)$[1] $+ 1$ Teorema de Vizing.

$\chi(G) \leq 4$ para qualquer grafo planar: o Teorema das Quatro Cores.

[1] $\Delta(G)$: grau máximo em G

$\chi(G)$: Algumas Propriedades

$\chi(G) = 1$ se e somente se G é completamente desconexo.

$\chi(G) = 2$ se G é bipartido.

$\chi(G) = n$ se G é um grafo completo de ordem n.

$\chi(G) \geq \omega(G)$ número clique.

$\chi(G) \leq \Delta(G)^1 + 1$ Teorema de Vizing.

$\chi(G) \leq 4$ para qualquer grafo planar: o Teorema das Quatro Cores.

[1] $\Delta(G)$: grau máximo em G

$\chi(G)$: Algumas Propriedades

$\chi(G) = 1$ se e somente se G é completamente desconexo.

$\chi(G) = 2$ se G é bipartido.

$\chi(G) = n$ se G é um grafo completo de ordem n.

$\chi(G) \geq \omega(G)$ número clique.

$\chi(G) \leq \Delta(G)^1 + 1$ Teorema de Vizing.

$\chi(G) \leq 4$ para qualquer grafo planar: o Teorema das Quatro Cores.

[1] $\Delta(G)$: grau máximo em G

Coloração de Mapas

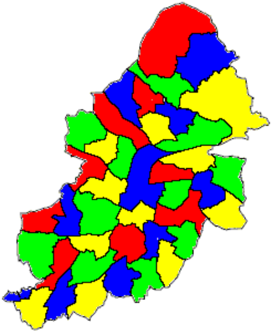
Pergunta

Considere um mapa político de qualquer tamanho e com um número qualquer de divisões.

Quantas cores são necessárias para colorir o mapa de modo que não existam dois vizinhos com a mesma cor?

$\rightarrow$

Coloração de Mapas



Conjectura

Uma proposição que é consistente com dados conhecidos, mas nunca foi verificada ou mostrada ser falsa. Sinônimo de hipótese.

Teorema

Afirmação que pode ser provada como verdadeira através de outras afirmações já demonstradas, como outros teoremas, juntamente com afirmações anteriormente aceitas, como *axiomas*.

O processo de demonstrar que um teorema está correto é chamado de prova.

Definição

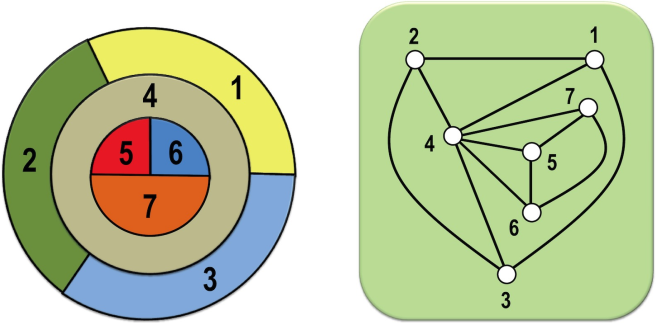
Conjecturado por Francis Guthrie em 1852.

"Um mapa desenhado em um plano pode ser colorido utilizando-se, no máximo, quatro cores, de forma que regiões que possuam uma fronteira em comum recebem sempre cores distintas."

Sem perda de generalidade, é possível representar o problema de coloração de mapas através de um grafo em que cada área é representada por um vértice, havendo uma aresta entre os vértices que representam países vizinhos.

Como as áreas do mapa estão localizadas no plano, não é possível que arestas se cruzem. Logo, o grafo deve ser planar.

O Teorema das 4 Cores



Exemplo de mapa e grafo planar associado.

O Teorema das 4 Cores

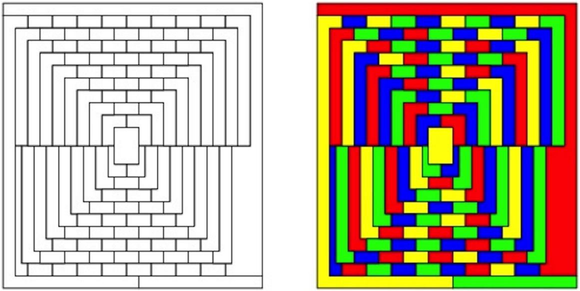
Provas

A prova do teorema das 4 cores possui um histórico de provas e contraprovas falhas.

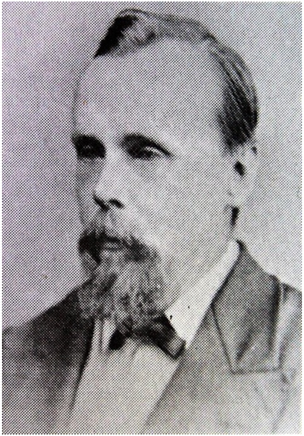
O *New York Times*, em 1977, se recusou a noticiar a prova correta feita por Appel e Haken, com medo de que fosse mais uma prova falha.

De fato, algumas provas só foram desmentidas depois de mais de uma década sendo aceitas.

O Teorema das 4 Cores



Mapa de Gardner com 110 regiões, proposto em 1 de abril de 1975 como ~~uma pegadinha~~ um contra-exemplo para o Teorema das 4 Cores.

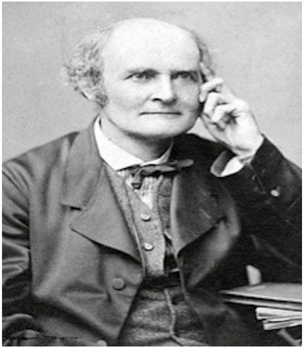


Francis Guthrie

- Matemático (depois botânico);
- Aluno do De Morgan;
- 1852: conjecturou o Teorema das 4 Cores e iniciou a discussão.
- A discussão levou à prova de... nada (pelo menos por 124 anos).

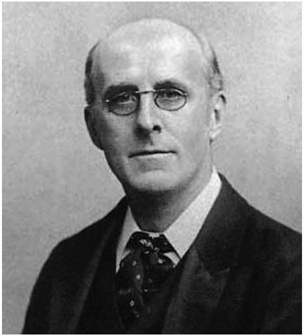
Augustus De Morgan

- Matemático e Lógico;
- Criou o termo "indução matemática";
- Criou as leis de "De Morgan";
- etc...
- Promoveu o Teorema das 4 Cores na comunidade científica.



Arthur Cayley

- Matemático;
- Contribuiu para a criação da *Escola Britânica Moderna de Matemática Pura*;
- Criou a Teoria de Grupos;
- etc...
- Escreveu o primeiro artigo sobre o Teorema das 4 Cores, atribuindo a conjectura a De Morgan.

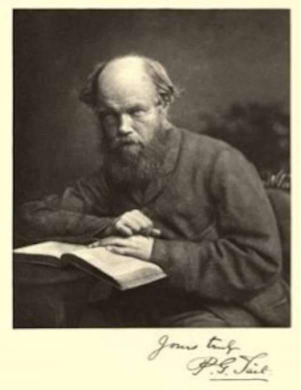


Alfred Bray Kempe

- Orientado de Cayley;
- Criou as "Cadeias Kempe" (*Kempe Chains*);
- 1879: Kempe publica uma prova do Teorema das 4 Cores na revista *Nature*;
- Torna-se famoso e cavaleiro do Império Britânico em 1912.

Percy Heawood

- Matemático;
- Dedicou sua carreira ao estudo do Teorema das 4 Cores;
- 11 anos após a publicação, desmentiu a prova de Kempe;
- Propôs o Teorema das 5 Cores, usando o conceito de *Cadeias Kempe*.



Peter Tait

- Físico-Matemático;
- Propôs a Conjectura de Tait, na teoria dos grafos, em 1884...
- Embora importante, a Conjectura de Tait foi desmentida em 1946...
- “Provou” o Teorema das 4 Cores em 1880.

Julius Petersen

- Matemático;
- Contribuições fundamentais para a teoria dos grafos moderna;
- 11 anos após a publicação, desmentiu a prova de Tait;
- Em 1898, criou o "grafo de Petersen" como resposta a outro teorema de Tait.

Heinrich Heesch

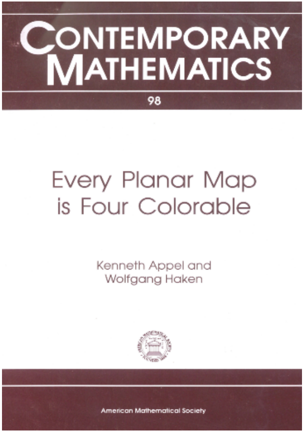
- Matemático;
- Nas décadas de 60 e 70, desenvolveu métodos computacionais para buscar uma prova para o teorema...
- ... mas não provou, por falta de supercomputadores.

O Teorema das Quatro Cores

Kenneth Appel e Wolfgang Haken

- Matemáticos;
- Em 1976, utilizaram as idéias de Heesch para provar computacionalmente o teorema;
- Também utilizaram as *Cadeias de Kempe*;
- A prova por computador demorou centenas de horas – foram 1.936 casos resolvidos!
- A prova foi recebida com controvérsia – nunca uma prova de teorema tão importante havia sido feita por computador;
- Em 1989, lançaram o livro "*Every Planar Map is Four-Colorable*", contendo a prova completa e detalhada – com um suplemento de 400 páginas.

O Teorema das Quatro Cores



Crítica

"Uma boa prova matemática é como um poema.
Esta é uma lista telefônica!"

O Teorema das Quatro Cores

Benjamin Werner e Georges Gonthier

- Matemáticos;
- Em 2008 (156 anos depois), formalizaram a prova do Teorema das Quatro Cores;
- Utilizaram um provador de teoremas iterativo (*Coq*);
- É considerada a verificação definitiva, considerada confiável.

Introdução

Embora a prova de Kempe para o Teorema das 4 Cores tenha sido falha, o conceito de Cadeias de Kempe (ou *Kempe Chains*) foi crucial para a prova do teorema por Appel e Haken.

A idéia também possui vasta utilidade na teoria dos grafos, por exemplo, na prova do Teorema de Vizing.

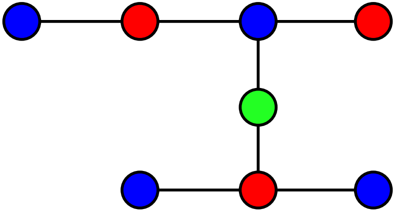
Alguns métodos para solução de problemas que podem ser modelados como sendo uma coloração de grafos utilizam este conceito.

Definição

Considere um grafo G cujos vértices foram coloridos e duas cores, a e b.

Seja $H(a, b)$ um subgrafo conexo maximal[a] de G contendo vértices coloridos apenas com as cores a e b. $H(a, b)$ é chamada uma Cadeia de Kempe.

[a] Ou seja, não é possível adicionar nenhum outro vértice das cores a ou b.



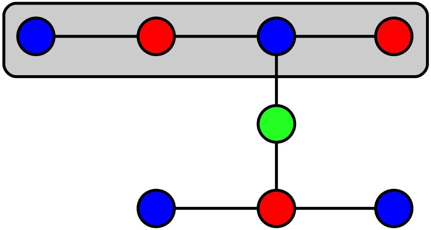
Cadeias de Kempe

Definição

Considere um grafo G cujos vértices foram coloridos e duas cores, a e b.

Seja $H(a, b)$ um subgrafo conexo maximal[a] de G contendo vértices coloridos apenas com as cores a e b. $H(a, b)$ é chamada uma Cadeia de Kempe.

[a] Ou seja, não é possível adicionar nenhum outro vértice das cores a ou b.

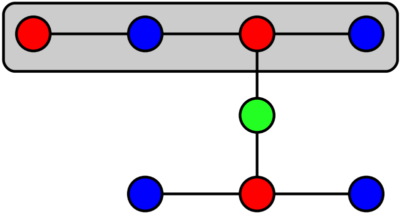


Cadeias de Kempe

Troca de Cores

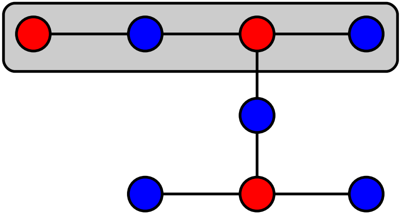
A troca de cores entre os vértices de $H(a, b)$ é uma transformação sempre possível que resulta em uma nova coloração. Por definição, não há em $H(a, b)$ dois vértices que possam causar um conflito de cores.

Kempe falhou em sua prova do Teorema das 4 Cores quando realizou trocas de cores em várias cadeias Kempe ao mesmo tempo. No entanto, realizar trocas de cores em cadeias Kempe isoladamente é seguro.



Troca de Cores

Na tentativa de diminuir o número de cores de uma coloração de vértices, as trocas em cadeias Kempe podem ser aplicadas sistematicamente, reorganizando a coloração dos vértices e tornando desnecessárias as cores adicionais.



Dúvidas?