BCC204 - Teoria dos Grafos

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

Conteúdo

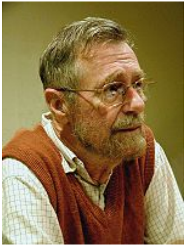
Fonte

Este material é baseado no livro

- Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.

Licença

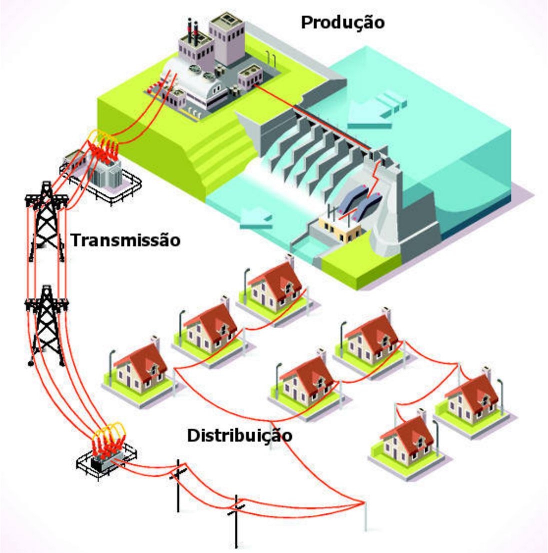
Instrodução



Edsger Dijkstra:

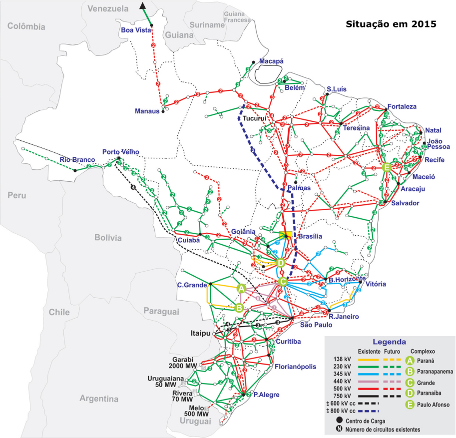
"A Ciência da computação tem tanto a ver com o computador como a Astronomia com o telescópio, a Biologia com o microscópio, ou a Química com os tubos de ensaio. A Ciência não estuda ferramentas, mas o que fazemos e o que descobrimos com elas."

Exemplos



Rede de distribuição de energia elétrica. Fonte: Brasil Escola.

Exemplos



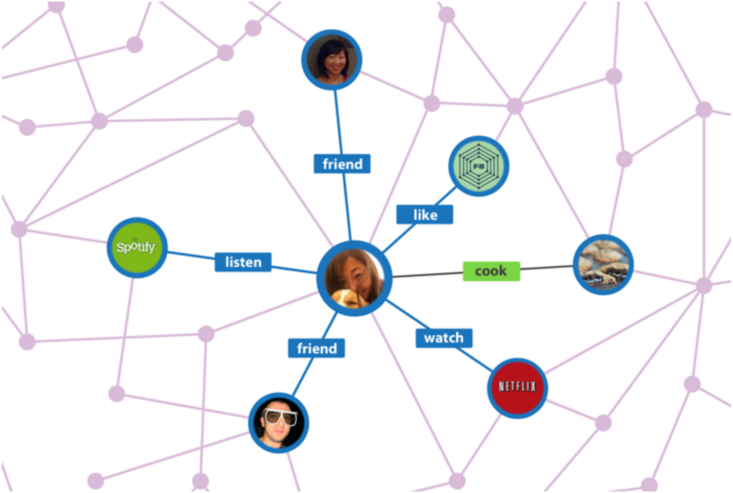
Rede de distribuição de energia elétrica. Fonte: ANEEL.

Logística de produtos. Fonte: TecnoTri.

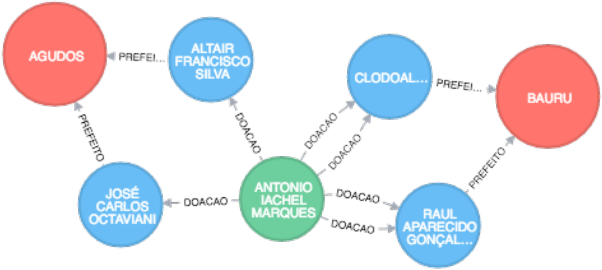
Rede de gasodutos. Fonte: AMVAP.

Rede de gasodutos. Fonte: GasNet.

Grafos

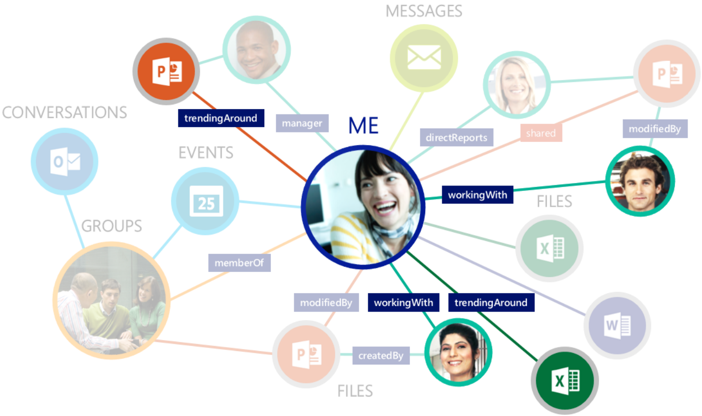


Facebook Graph Search.



Fonte: Curiosidades do Financiamento de Campanha nas Eleições 2016
`https://bit.ly/2HvXr5j`

Grafos



Fonte: Office graph – How does Office Delve know what's relevant to me?
https://bit.ly/2TAfsoj

Fonte: Office graph – How does Office Delve know what's relevant to me?
`https://bit.ly/2TAfsoj`

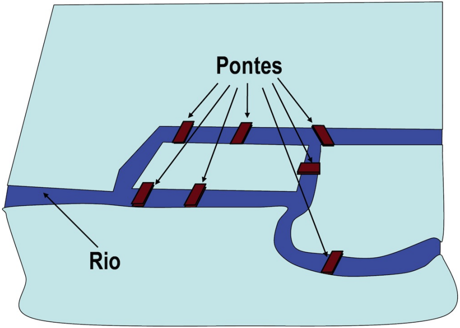
Mapa do metrô de Lisboa

Histórico

Um grafo é uma estrutura de abstração muito útil na representação e solução de problemas computacionais, por representarem relações de interdependência entre elementos de um conjunto.

O primeiro registro de uso data de 1736, por Euler.

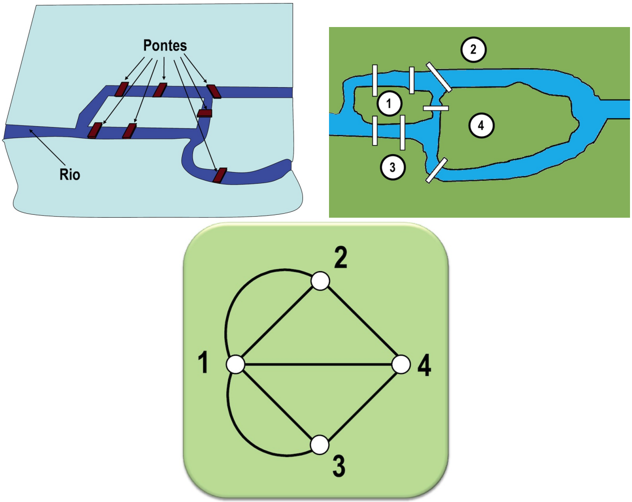
O problema era encontrar um caminho circular por Königsberg (atual Kaliningrado) usando cada uma das pontes sobre o rio Pregel (ou Pregolya, Pregola) exatamente uma vez.



1736: Euler e as Pontes de Königsberg

Partindo de uma das margens, pode-se encontrar um percurso que passe somente **uma vez em cada ponte** e retorne ao ponto de partida?

Pontes de Königsberg - O Grafo



Plano de Königsberg, modelo e grafo associado.

Definição Formal

Grafo $G = (V, A)$

- Conjunto V com n vértices (também chamados nós) $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- Conjunto A com m arestas ou arcos $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

Definição Formal

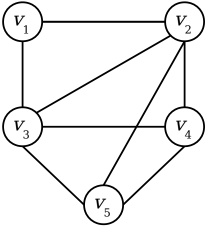
$$\text{Grafo } G = (V, A)$$

- Conjunto V com n vértices (também chamados nós) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
- Conjunto A com m arestas ou arcos $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$

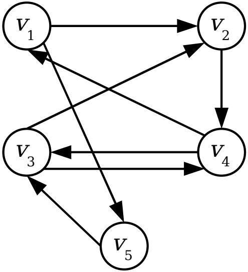
Definição Formal

$$\text{Grafo } G = (V, A)$$

- Conjunto V com n vértices (também chamados nós)
  $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
- Conjunto A com m arestas ou arcos
  $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$



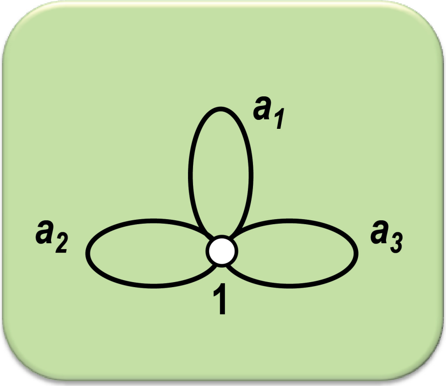
- Ligações expressas em **Arestas** —
- Se o vértice *a* está ligado a *b*, a recíproca é verdadeira;
- Cada aresta é representada por um conjunto $\{v_1, v_2\}$, indicando os dois vértices envolvidos.



- Ligações expressas em **Arcos** $\rightarrow$
- Cada arco é representada por um par ordenado (v_1, v_2), indicando os dois vértices envolvidos.

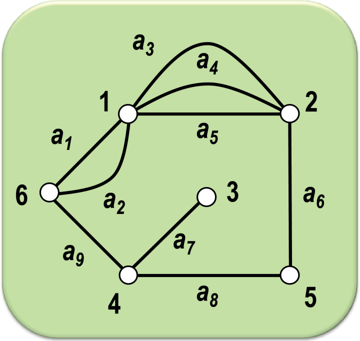
Laço

Uma aresta cujas duas extremidades incidem em um mesmo vértice.



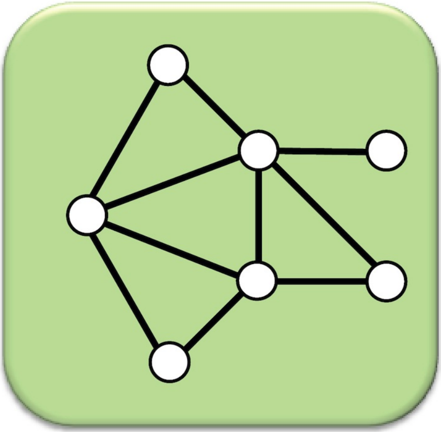
Arestas Paralelas

Mais de uma aresta associada ao mesmo par de vértices.



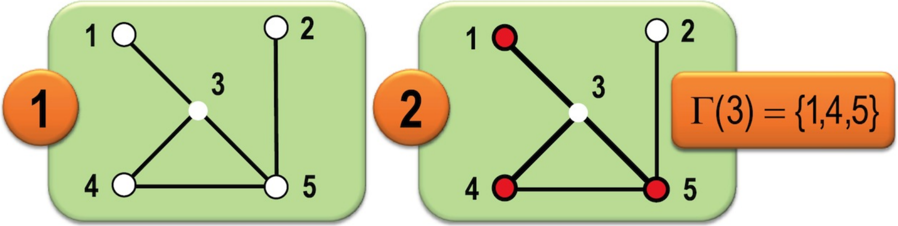
Grafo simples

Grafo que não possui laços e nem arestas paralelas.



Vértices Adjacentes

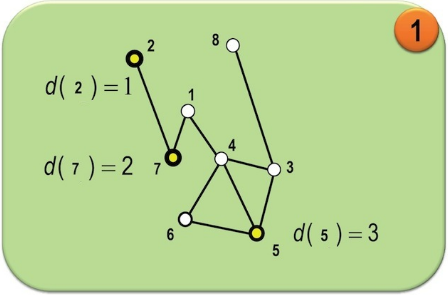
Vértices que são os pontos finais de uma mesma aresta.
A função $\Gamma(i)$ retorna o conjunto de vértices adjacentes ao vértice i.

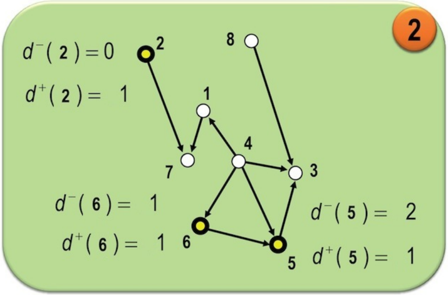


Terminologia

Grau de um Vértice

O grau ($d(i)$) de um vértice i em um grafo não direcionado é igual o número de arestas incidentes a i.
O grau de entrada ($d^{-}(i)$) de um vértice i em um grafo direcionado é igual o número de arestas que entram em i.
O grau de saída ($d^{+}(i)$) de um vértice i em um grafo direcionado é igual o número de arestas que saem de i.





Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G.

$$\sum_{i=1}^{n} d(i) = 2m$$

Corolário

O número de vértices de grau ímpar em um GND é par.

Teorema do Aperto de Mãos *Handshaking*

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G.

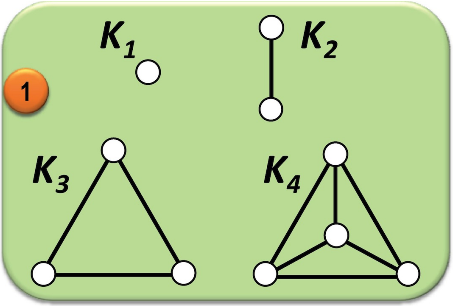
$$\sum_{i=1}^{n} d(i) = 2m$$

Corolário

O número de vértices de grau ímpar em um GND é par.

Grafo Completo

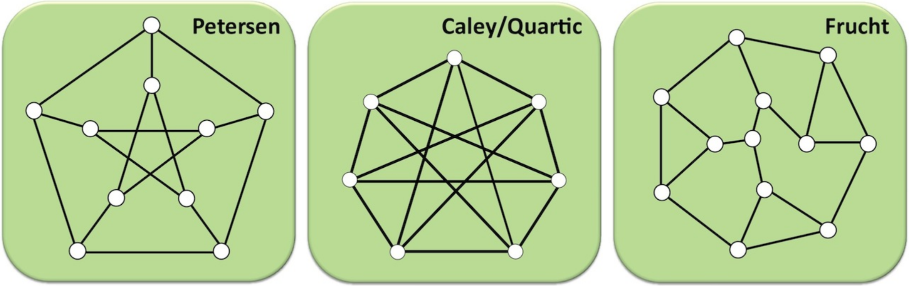
Um grafo completo com n vértices, denominado K_n é um grafo simples contendo exatamente uma aresta para cada par de vértices distintos.



Topologia

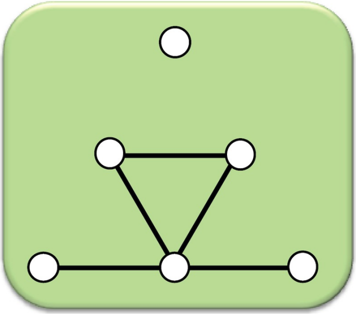
Grafo Regular

Grafo no qual todos os vértices possuem o mesmo grau.
Obs: qualquer grafo completo é regular.



Vértice Isolado

Vértice com nenhuma aresta incidente.

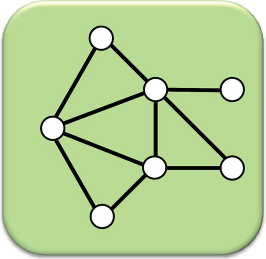


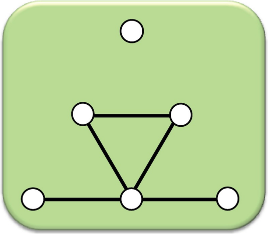
Grafo Conexo

Para todo par de vértices i e j de G existe pelo menos um caminho entre i e j.

Grafo Desconexo

Consiste de 2 ou mais grafos conexos, chamados de componentes.



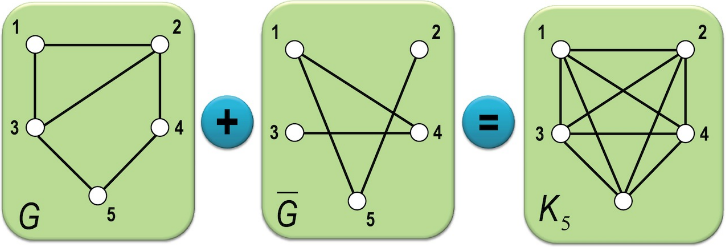


Grafo Complemento

Definição

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples não direcionado, o complemento de G, $\overline{G}$ (ou $C(G)$), é um grafo formado da seguinte maneira:

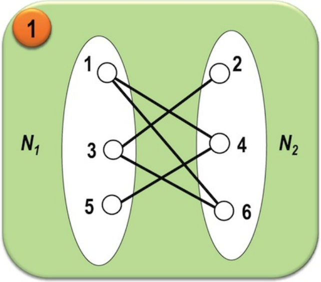
- Os vértices de $\overline{G}$ são todos os vértices de G;
- As arestas de $\overline{G}$ são exatamente as arestas que faltam em G para formarmos um grafo completo.

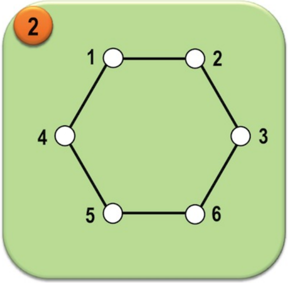


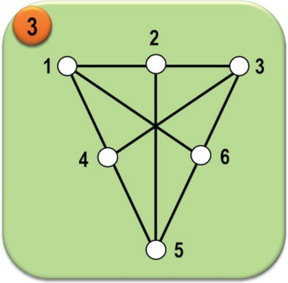
Grafo Bipartido

Definição

Um grafo é bipartido se o conjunto de vértices V pode ser particionado em 2 subconjuntos V_1 e V_2 tal que todas as arestas do grafo são incidentes a um vértice de V_1 e a um vértice de V_2.



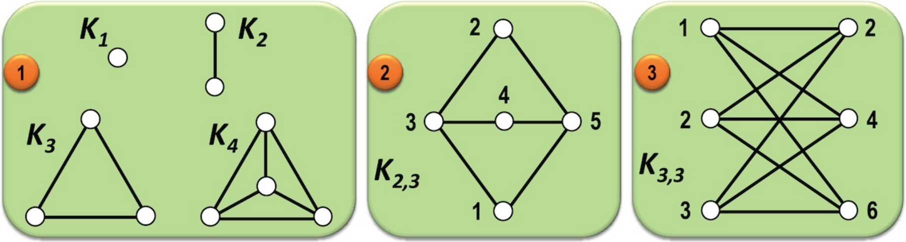




Grafo Bipartido Completo

Definição

Um grafo bipartido é completo ($K_{|V_1|,|V_2|}$) se cada vértice do subconjunto V_1 é adjacente a todos os vértices do subconjunto V_2 e vice-versa.



Exemplo de grafos completos (1) e bipartidos completos (2 e 3).

Dúvidas?