

BCC204 - Teoria dos Grafos

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto



1 Algoritmo de Bellman-Ford

Fonte

Este material é baseado no livro

- ▶ Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.

Licença

Este material está licenciado sob a Creative Commons BY-NC-SA 4.0. Isto significa que o material pode ser compartilhado e adaptado, desde que seja atribuído o devido crédito, que o material não seja utilizado de forma comercial e que o material resultante seja distribuído de acordo com a mesma licença.

Arestas de Peso Negativo

Para além das distâncias geográficas, caminhos mais curtos podem modelar diversas outras situações reais, incluindo aquelas que para serem modeladas necessitam de arestas cujo peso é negativo:

- ▶ Movimentações financeiras, nas quais é possível obter lucro ou prejuízo, principalmente quando há utilização de câmbio;
- ▶ Um taxista que recebe mais dinheiro do que gasta com combustível a cada viagem: se o táxi roda vazio, ele gasta mais do que recebe;
- ▶ Um entregador que necessita atravessar um pedágio e pode acabar pagando mais do que recebe para entregar encomendas;
- ▶ A energia gerada e consumida durante uma reação química.

Ford-Moore-Bellman?

Alguns autores denominam o algoritmo de *Ford-Moore-Bellman*, em homenagem a outros três autores que propuseram o mesmo algoritmo em anos diferentes:

- ▶ Lester Ford (1956);
- ▶ Edward Moore (1957);
- ▶ Richard Bellman (1958).

Princípio

Calcula caminhos mais curtos via programação dinâmica *bottom-up*.

Ao invés de fechar um vértice por iteração, como o algoritmo de Dijkstra, examina todos os vértices de um grafo **orientado** por iteração até que atualizações não sejam possíveis.

Em um grafo com n vértices, qualquer caminho possui no máximo $n - 1$ arestas, portanto, cada vértice é examinado no máximo $n - 1$ vezes.

Com esta estratégia, é possível calcular caminhos mínimos em grafos com arestas de **peso negativo**.

Assim como o algoritmo de *Dijkstra*, baseia-se no princípio de relaxação: uma aproximação da distância da origem até cada vértice é gradualmente atualizada por valores mais precisos até que a solução ótima seja atingida.

Princípio

Se, em alguma iteração do algoritmo os caminhos até cada um dos vértices permanecerem inalterados, não haverá atualizações nas próximas iterações e o algoritmo pode terminar.

Entretanto, se houver atualizações na última iteração do algoritmo, é sinal de que há pelo menos um ciclo negativo no grafo, dado que algum caminho terá n arestas ou mais.

Terminologia

- ▶ $\Gamma^-(i)$: Conjunto de vértices antecessores do vértice atual;
- ▶ $dt[i]$: Vetor que armazena a distância entre o vértice de origem e o vértice i ;
- ▶ $rot[i]$: Vetor que armazena o índice do vértice anterior ao vértice i , no caminho cuja distância está armazenada em $dt[i]$;
- ▶ $altera$: variável *booleana* que indica se houve alguma atualização na iteração atual.

Algoritmo de Bellman-Ford

Entrada: Grafo $G = (V, E)$ e matriz de pesos $D = \{d_{ij}\}$ para todos os arcos (i, j)

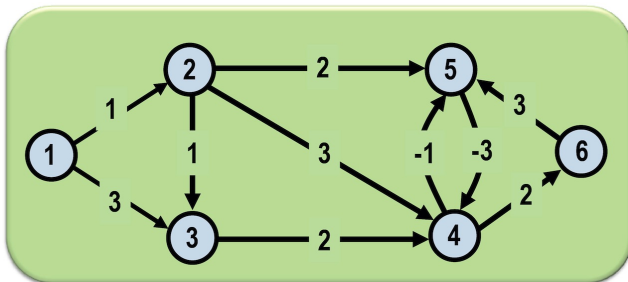
```
1  $dt[1] \leftarrow 0$ ;  $rot[1] \leftarrow \infty$ ; //considerando o vértice 1 como o inicial
2 para  $i \leftarrow 2$  até  $n$  faça
3     se  $\exists (1, i) \in E$  então  $rot[i] \leftarrow 1$ ;  $dt[i] \leftarrow d_{1i}$ ;
4     senão  $rot[i] \leftarrow 0$ ;  $dt[i] \leftarrow \infty$ ;
5 fim
6 para  $k \leftarrow 1$  até  $n-1$  faça
7     altera  $\leftarrow$  falso;
8     para  $i \leftarrow 2$  até  $n$  faça
9         para  $j \in \Gamma^-(i)$  faça
10             se  $dt[i] > dt[j] + d_{ji}$  então
11                  $dt[i] \leftarrow dt[j] + d_{ji}$ ;
12                  $rot[i] \leftarrow j$ ;
13                 altera  $\leftarrow$  verdadeiro; //indica que houve alteração
14             fim
15         fim
16     fim
17     se altera = falso então  $k \leftarrow n$ ;
18 fim
```

Ciclos de Custo Negativo

Bellman-Ford – Detecção

Em caminhos sem ciclos, o caminho mais longo consiste em $n - 1$ arestas, ou iterações no laço principal do algoritmo.

Se na iteração n do algoritmo alguma atualização de distâncias for feita é detectado o ciclo.



Exemplo de ciclo negativo entre os vértices 4 e 5.

Complexidade 1

- ▶ Após a inicialização, o laço **para** da linha 6 é repetido por no máximo $n-1$ vezes;
- ▶ Em cada iteração, são calculados caminhos com k arestas entre a origem e os demais vértices do grafo;
- ▶ Para cada um dos $n-1$ vértices, todos seus antecessores são examinados;
- ▶ O vértice original não é atualizado, logo, $n-2$ antecessores são analisados no máximo;
- ▶ Logo, em uma implementação simples, a complexidade é $O(n^3)$.

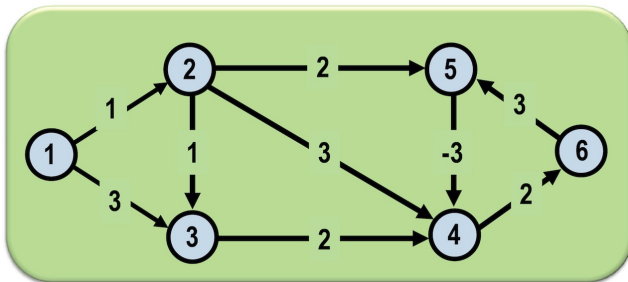
Complexidade 2

Em 1970, Jin Yen^a propôs uma implementação deste método de complexidade $O(nm)$ no pior caso:

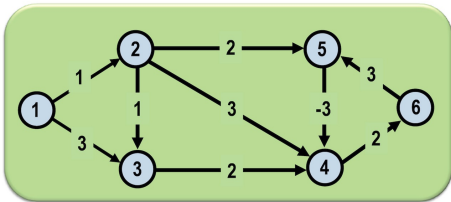
- 1 Se $dt[v]$ não se alterar desde a última vez em que Γ^+ foi examinado, então não é necessário examinar seus arcos de saída novamente;
- 2 O comprimento do laço externo é reduzido de $n - 1$ para $n/2$ através de uma ordenação linear de vértices e posterior partição dos mesmos.

^aYen, Jin Y. (1970). "An algorithm for finding shortest routes from all source nodes to a given destination in general networks". Quarterly of Applied Mathematics 27: 526–530.

Exemplo



Exemplo

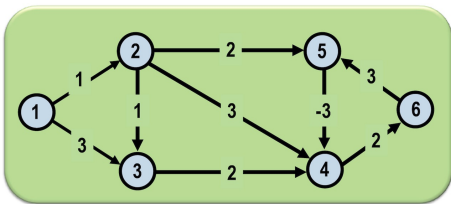


<i>dt</i>				
2	3	4	5	6
1	3	∞	∞	∞

<i>rot</i>				
2	3	4	5	6
1	1	0	0	0

Vetores após a inicialização do algoritmo.

Exemplo



$$i=2, \Gamma^-(i)=\{1\};$$

$$\triangleright j=1, dt[1]+d_{12} = 1$$

$$dt$$

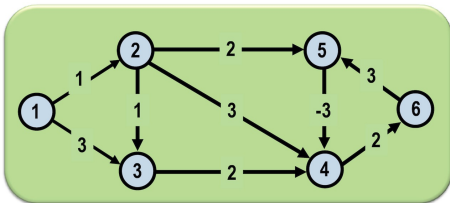
2	3	4	5	6
1	3	∞	∞	∞

$$rot$$

2	3	4	5	6
1	1	0	0	0

Iteração $k=1$ (continua...)

Exemplo



$$i=3, \Gamma^-(i)=\{1, 2\};$$

$$\triangleright j=1, dt[1]+d_{13} = 3$$

$$\triangleright j=2, dt[2]+d_{23} = \mathbf{2}$$

$$dt$$

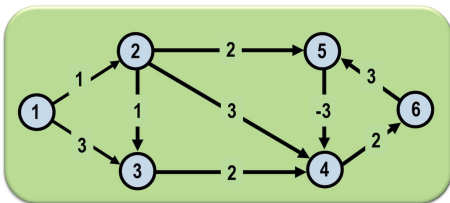
2	3	4	5	6
1	2	∞	∞	∞

$$rot$$

2	3	4	5	6
1	2	0	0	0

Iteração $k=1$ (continua...)

Exemplo



$i=4$, $\Gamma^-(i)=\{2, 3, 5\}$;

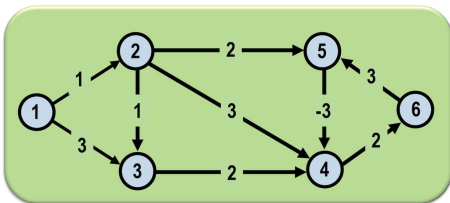
- ▶ $j=2$, $dt[2]+d_{24} = 4$
- ▶ $j=3$, $dt[3]+d_{34} = 4$
- ▶ $j=5$, $dt[5]+d_{54} = \infty$

dt				
2	3	4	5	6
1	2	4	∞	∞

rot				
2	3	4	5	6
1	2	2	0	0

Iteração $k=1$ (continua...)

Exemplo



$i=5, \Gamma^-(i)=\{2, 6\};$

► $j=2, dt[2]+d_{25} = 3$

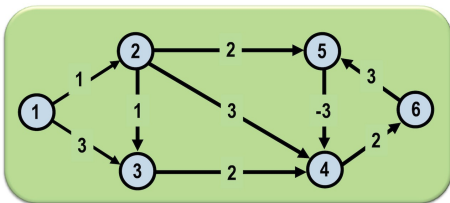
► $j=6, dt[6]+d_{65} = \infty$

<i>dt</i>				
2	3	4	5	6
1	2	4	3	∞

<i>rot</i>				
2	3	4	5	6
1	2	2	2	0

Iteração $k=1$ (continua...)

Exemplo



$$i=6, \Gamma^-(i)=\{4\};$$

$$\triangleright j=4, dt[4]+d_{46} = 6$$

$$dt$$

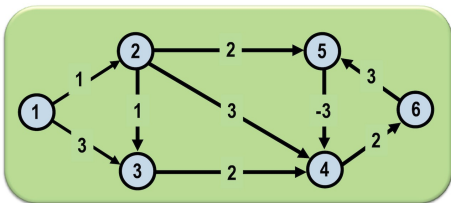
2	3	4	5	6
1	2	4	3	6

$$rot$$

2	3	4	5	6
1	2	2	2	4

Iteração $k=1$ (final)

Exemplo



$$i=2, \Gamma^-(i)=\{1\};$$

$$\triangleright j=1, dt[1]+d_{12} = 1$$

$$dt$$

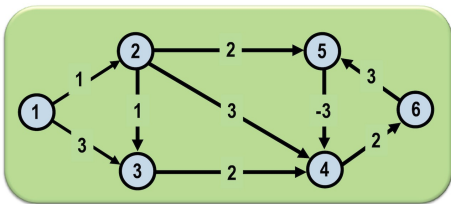
2	3	4	5	6
1	2	4	3	6

$$rot$$

2	3	4	5	6
1	2	2	2	4

Iteração $k=2$ (continua...)

Exemplo



$i=3, \Gamma^-(i)=\{1, 2\};$

▶ $j=1, dt[1]+d_{13} = 3$

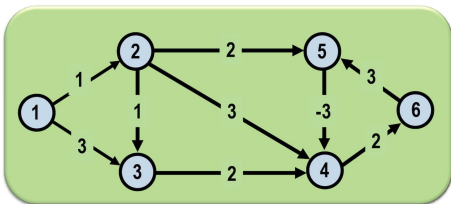
▶ $j=2, dt[2]+d_{23} = 2$

<i>dt</i>				
2	3	4	5	6
1	2	4	3	6

<i>rot</i>				
2	3	4	5	6
1	2	2	2	4

Iteração $k=2$ (continua...)

Exemplo



$i=4, \Gamma^-(i)=\{2, 3, 5\};$

► $j=2, dt[2]+d_{24} = 4$

► $j=3, dt[3]+d_{34} = 4$

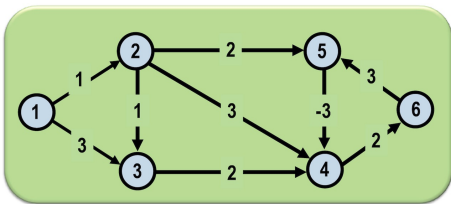
► $j=5, dt[5]+d_{54} = 0$

dt				
2	3	4	5	6
1	2	0	3	6

rot				
2	3	4	5	6
1	2	5	2	4

Iteração $k=2$ (continua...)

Exemplo



$i=5, \Gamma^-(i)=\{2, 6\};$

► $j=2, dt[2]+d_{25} = 3$

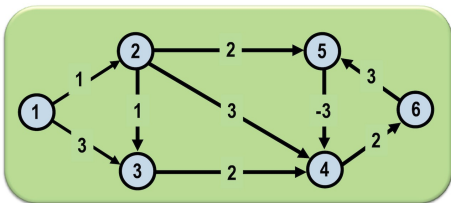
► $j=6, dt[6]+d_{65} = 9$

dt				
2	3	4	5	6
1	2	0	3	6

rot				
2	3	4	5	6
1	2	5	2	4

Iteração $k=2$ (continua...)

Exemplo



$$i=6, \Gamma^-(i)=\{4\};$$

$$\triangleright j=4, dt[4]+d_{46} = 2$$

$$dt$$

2	3	4	5	6
1	2	0	3	2

$$rot$$

2	3	4	5	6
1	2	5	2	4

Iteração $k=2$ (final)

Final

Na próxima iteração, em que $k=3$, nenhuma alteração é realizada, e com isto, o algoritmo termina!

Algoritmo de Bellman-Ford

Aplicação

Uma das aplicações do algoritmo é em protocolos de roteamento em redes de dados.

O algoritmo é distribuído entre os nós da rede, de maneira que cada nó calcula sua distância em relação aos demais, compartilhando seu resultado para uso pelos outros nós.

Entretanto, o algoritmo possui dificuldades relacionadas a escalabilidade e tolerância a falhas em nós da rede.

Além disso, quaisquer modificações na topologia da rede demoram a serem refletidas pelo algoritmo, dado que a atualização das distâncias é gradual.

Dúvidas?

