BCC204 - Teoria dos Grafos

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto

decom
departamento de computação

Conteúdo

1. Conjuntos Independentes
2. Cliques
3. Relação entre Conjuntos Independentes e Cliques
4. Conjuntos Dominantes
5. Relação entre Conjuntos Dominantes e Conjuntos Independentes

Fonte

Este material é baseado no livro

- Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.

Licença

Subconjuntos de Vértices

Introdução

A detecção de subconjuntos de vértices ou arestas com determinadas propriedades definem problemas em teoria dos grafos úteis na modelagem de problemas práticos do dia-a-dia.

Durante a modelagem, é necessário que se estabeleça uma correspondência entre vértices, arestas e os elementos do problema a ser modelado.

Por fim, é necessário associar a estrutura buscada no problema em grafos e a solução do problema real.

Veremos três tipos de subconjuntos de vértices: conjuntos independentes, cliques e conjuntos dominantes.

Definições

Subconjunto Maximal

Um subconjunto G_s de um conjunto G é dito maximal em relação a uma propriedade τ se não for um subconjunto de nenhum outro subconjunto de G que também possua a propriedade τ.

Maximal deve ser distinto de *máximo*: maximal é referente à uma condição de pertinência, máximo é referente à cardinalidade.

Subconjunto Minimal

Um subconjunto G_s de um conjunto G é dito minimal em relação a uma propriedade τ se não for um superconjunto de nenhum outro subconjunto de G que também possua a propriedade τ.

Minimal deve ser distinto de *mínimo*: minimal é referente à uma condição de pertinência, mínimo é referente à cardinalidade.

Alocação de Exames de Final de Curso

Problema

Deseja-se alocar o **maior número de exames finais** em um **mesmo horário**.

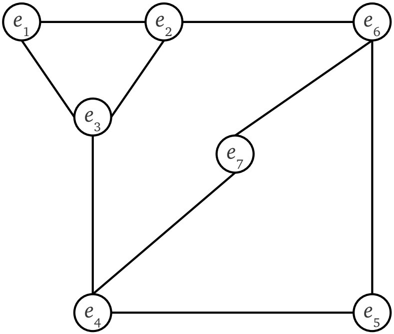
Essa alocação não deve, no entanto, impossibilitar que algum aluno realize o exame, ou seja, se dois exames possuem algum aluno em comum os mesmos devem estar em períodos diferentes.

Modelo

Vértices: Exames;

Arestas: Indicam que dois exames possuem algum aluno em comum.

Alocação de Exames de Final de Curso



Selecione o maior conjunto de exames finais que pode ser realizado no mesmo horário.

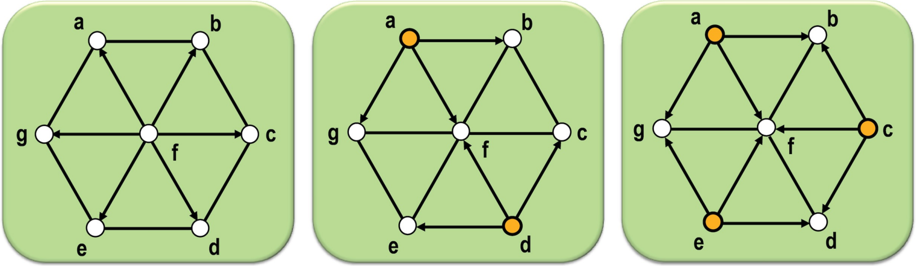
Conjuntos Independentes

Definição

Um conjunto independente (ou conjunto de estabilidade) de um grafo G é um subconjunto de vértices no qual não existam dois vértices adjacentes.

O número de independência $\alpha(G)$ é a cardinalidade do conjunto independente máximo.

Determinar o número de independência de um grafo é um problema **NP-Difícil.**



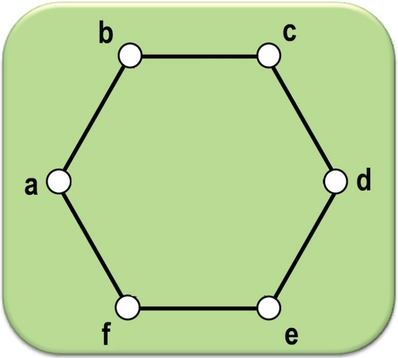
Grafo e conjuntos independentes de exemplo, o segundo com $\alpha(G) = 3$.

Construção de um Conjunto Independente Máximo

Algoritmo Guloso Simples

1. Selecione o próximo vértice (ordem lexicográfica ou de menor grau) ainda não considerado;
2. Se este vértice não possuir conflitos com vértices já adicionados, inclua-o no conjunto;
3. Remova as arestas deste vértice e os seus vértices vizinhos do grafo original;
4. Se houverem vértices ainda não considerados volte para 1.

Execução de Exemplo I

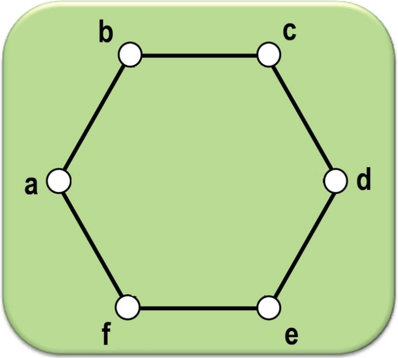


Execução considerando os vértices em ordem alfabética:

a : OK	d : removido
b : removido	e : OK
c : OK	f : removido

Conjunto independente $S = \{a, c, e\}$, $|S| = 3$

Execução de Exemplo I

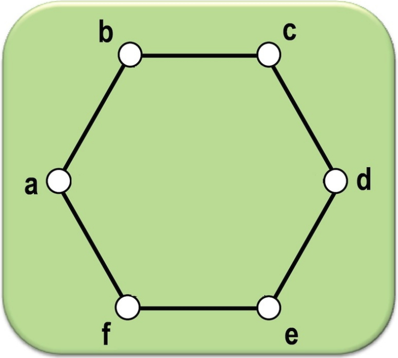


Execução considerando os vértices em ordem alfabética:

a : OK
b : removido
c : OK
d : removido
e : OK
f : removido

Conjunto independente $S = \{a, c, e\}$, $|S| = 3$

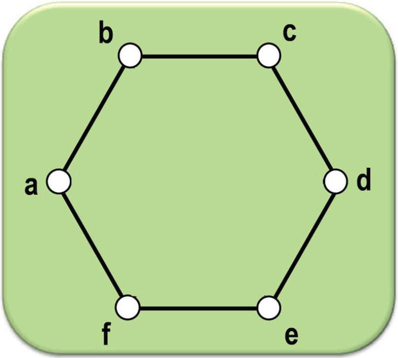
Execução de Exemplo I



Execução considerando os vértices em ordem alfabética:

a : OK
b : removido
c : OK
d : removido
e : OK
f : removido

Conjunto independente $S = \{a, c, e\}$, $|S| = 3$

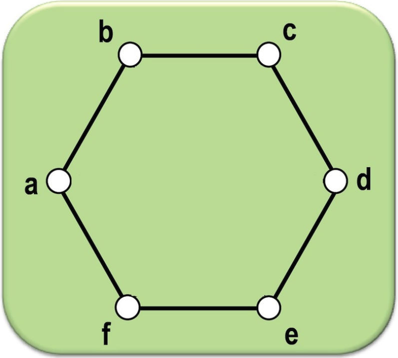


Execução considerando os vértices em ordem alfabética:

a : OK	d : removido
b : removido	e : OK
c : OK	f : removido

Conjunto independente $S = \{a, c, e\}$, $|S| = 3$

Execução de Exemplo I

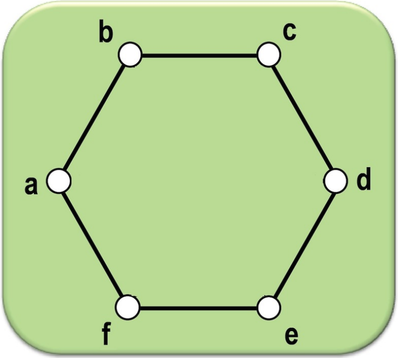


Execução considerando os vértices em ordem alfabética:

a : OK
b : removido
c : OK
d : removido
e : OK
f : removido

Conjunto independente $S = \{a, c, e\}$, $|S| = 3$

Execução de Exemplo I

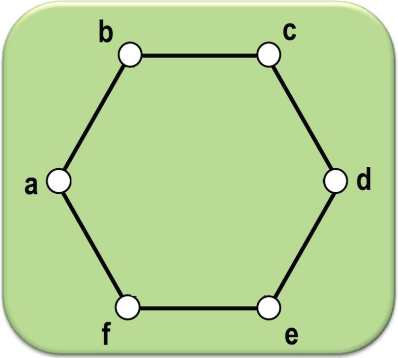


Execução considerando os vértices em ordem alfabética:

a : OK	d : removido
b : removido	e : OK
c : OK	f : removido

Conjunto independente $S = \{a, c, e\}$, $|S| = 3$

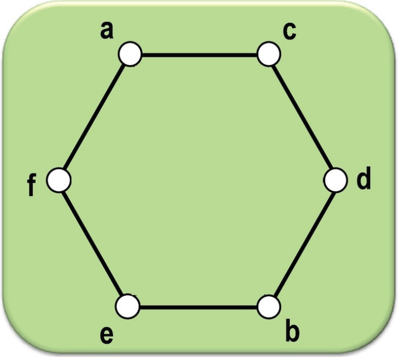
Execução de Exemplo I



Execução considerando os vértices em ordem alfabética:

a : OK	d : removido
b : removido	e : OK
c : OK	f : removido

Conjunto independente $S = \{a, c, e\}$, $|S| = 3$

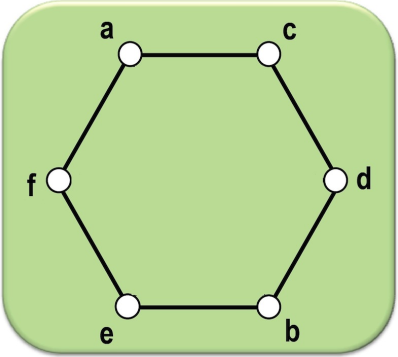


Mesmo grafo, rótulos diferentes:

a : OK
b : OK
c : removido
d : removido
e : removido
f : removido

Conjunto independente $S = \{a, b\}$, $|S| = 2$

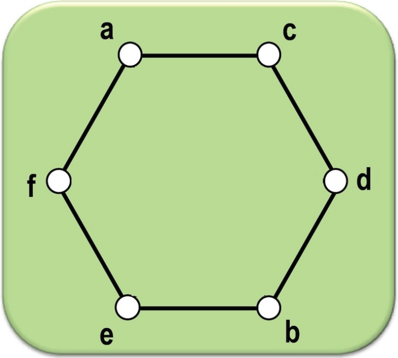
Execução de Exemplo II



Mesmo grafo, rótulos diferentes:

a : OK		d : removido	
b : OK		e : removido	
c : removido		f : removido	

Conjunto independente $S = \{a, b\}$, $|S| = 2$

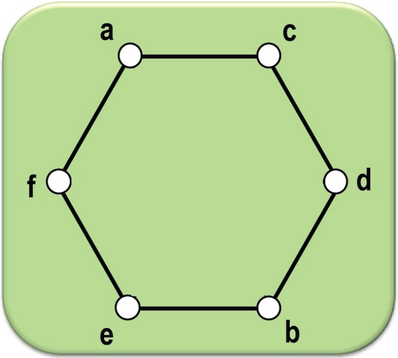


Mesmo grafo, rótulos diferentes:

a : OK	d : removido
b : OK	e : removido
c : removido	f : removido

Conjunto independente $S = \{a, b\}$, $|S| = 2$

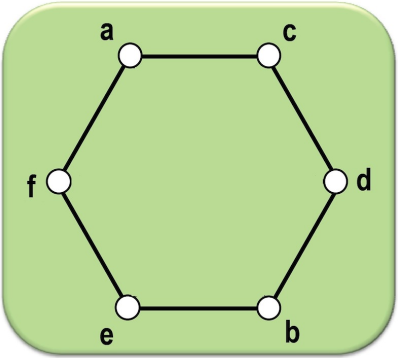
Execução de Exemplo II



Mesmo grafo, rótulos diferentes:

a : OK		d : removido	
b : OK		e : removido	
c : removido		f : removido	

Conjunto independente $S = \{a, b\}$, $|S| = 2$

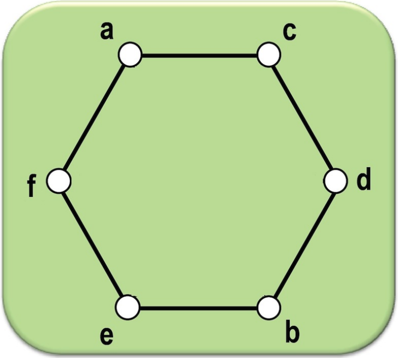


Mesmo grafo, rótulos diferentes:

a : OK
b : OK
c : removido
d : removido
e : removido
f : removido

Conjunto independente $S = \{a, b\}$, $|S| = 2$

Execução de Exemplo II

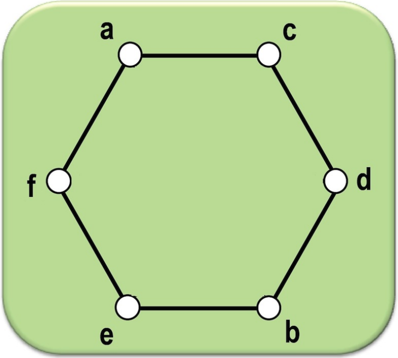


Mesmo grafo, rótulos diferentes:

a : OK	d : removido
b : OK	e : removido
c : removido	f : removido

Conjunto independente $S = \{a, b\}$, $|S| = 2$

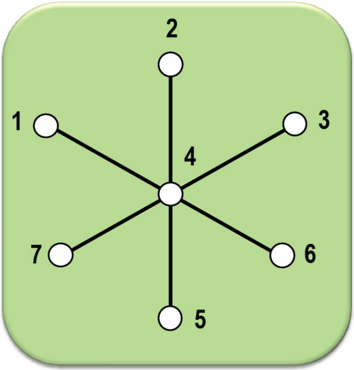
Execução de Exemplo II



Mesmo grafo, rótulos diferentes:

a : OK	d : removido
b : OK	e : removido
c : removido	f : removido

Conjunto independente $S = \{a, b\}$, $|S| = 2$



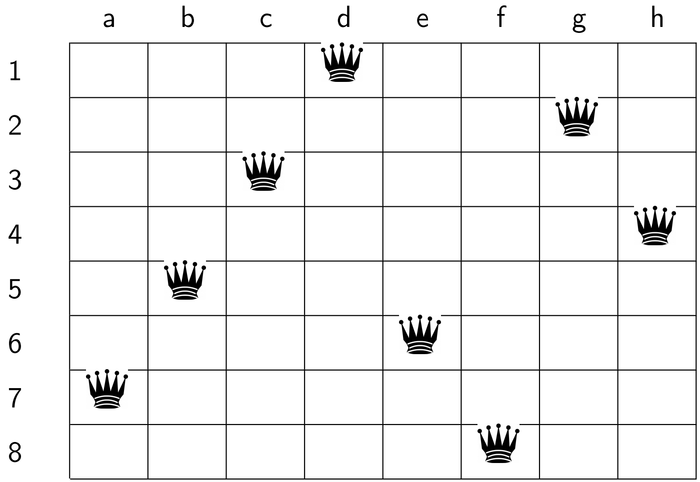
Conjunto Independente Maximal

Suponha que o algoritmo comece sua execução pelo vértice 4. Teríamos $S = \{4\}$ e $|S| = 1$.

Este não é o conjunto independente **máximo**, mas não podemos adicionar nenhum outro vértice sem desfazer escolhas já feitas.

Denominamos o mesmo de conjunto independente maximal.

8-Rainhas - Como Modelar como Conjunto Independente Máximo?



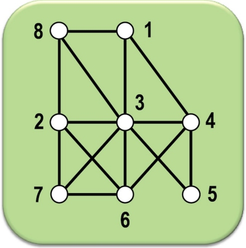
Cliques

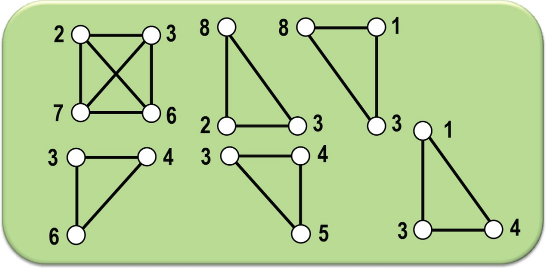
Definição

Dado um grafo $G=(V, A)$, uma clique é um subconjunto $V' \subseteq V$ que induz um subgrafo completo, ou seja, um subconjunto de vértices no qual todos são adjacentes entre si.

O número clique $\omega(G)$ é a cardinalidade da clique máxima.

Determinar o número clique de um grafo é um problema **NP-Difícil.**





Grafo e cliques de exemplo.

Construção de uma Clique Máxima

Algoritmo Guloso Simples

1. Selecione o vértice (ordem lexicográfica ou de maior grau) ainda não considerado;
2. Adicione este vértice e todos os seus vértices vizinhos à clique;
3. Remova do grafo original os vértices que não são adjacentes ao vértice selecionado;
4. Remova da clique os vértices que não são adjacentes a todos os demais.

Encontrar o ***conjunto independente máximo*** em um grafo é equivalente a encontrar o ***clique máximo*** em seu grafo complemento?

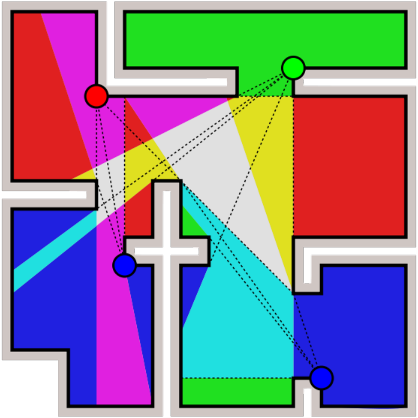
Conjuntos Dominantes

Câmeras de Vigilância

Deseja-se instalar um número mínimo de câmeras que cubram todos os pontos que devem ser vigiados. Em quais pontos instalaremos as câmeras?

Projetos Luminotécnicos

Deseja-se instalar um número mínimo de pontos de luz que iluminem um conjunto específico de pontos. Em quais locais instalaremos os pontos de luz?



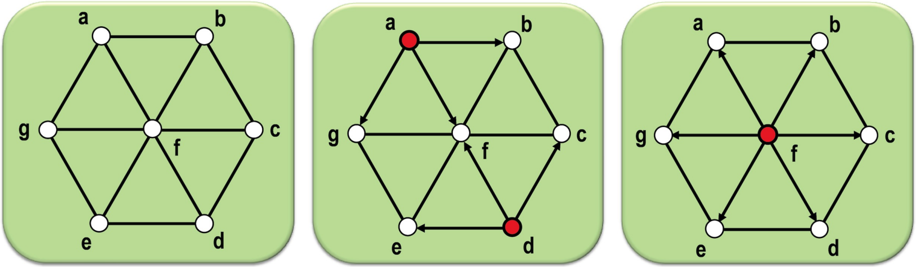
Quatro câmeras/pontos de luz são necessários para cobrir toda a área.
A interseção de coberturas dá origem a outras cores.

Conjuntos Dominantes

Definição

Um conjunto dominante é um subconjunto de vértices tal que todo vértice do grafo está no conjunto ou é adjacente a um de seus vértices.

O número de dominação $\gamma(G)$ é a cardinalidade do menor conjunto dominante de G.



Grafo e conjuntos dominantes de exemplo, o segundo com $\gamma(G) = 1$.

Conjunto Dominante

Mais definições

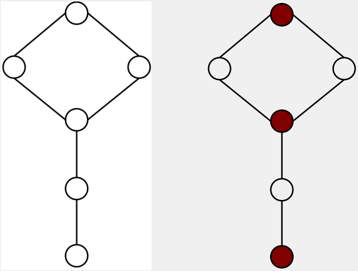
- Determinar o conjunto dominante mínimo em um grafo sem características particulares é um problema **NP-Difícil**;
- Um conjunto dominante minimal é aquele que não pode ser diminuído;
- Uma conjunto dominante mínimo é aquele de menor cardinalidade possível em um grafo.

Um Algoritmo Heurístico para Determinar $\gamma(G)$

Algoritmo Guloso

Selecionar em sequência os vértices com ***maior grau*** (que cobrem uma quantidade maior de vértices), até que se obtenha um conjunto dominante.

Funciona sempre?

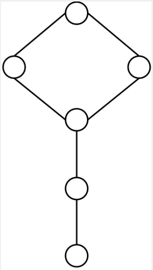


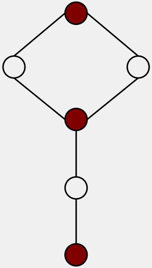
Um Algoritmo Heurístico para Determinar $\gamma(G)$

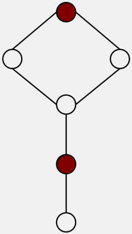
Algoritmo Guloso

Selecionar em sequência os vértices com ***maior grau*** (que cobrem uma quantidade maior de vértices), até que se obtenha um conjunto dominante.

Funciona sempre?







NÃO : $\gamma(G) = 2$

Conjuntos Dominantes

Teorema

Se $S \in V$ é um conjunto dominante minimal de um grafo conexo $G = (V, E)$, então $V \setminus S$ também é um conjunto dominante.

Demonstração

Pelas condições do teorema, todos os vértices de $V \setminus S$ também são adjacentes a um vértice de S.

Pela minimalidade, todo vértice v de S também é adjacente a algum vértice de $V \setminus S$, senão $S \setminus \{v\}$ seria também dominante. Logo, $V \setminus S$ também é dominante.

Implicação

Limite máximo de $\frac{n}{2}$ elementos no conjunto dominante mínimo.

Conjuntos Dominantes

Teorema

Se $S \in V$ é um conjunto dominante minimal de um grafo conexo $G = (V, E)$, então $V \setminus S$ também é um conjunto dominante.

Demonstração

Pelas condições do teorema, todos os vértices de $V \setminus S$ também são adjacentes a um vértice de S.

Pela minimalidade, todo vértice v de S também é adjacente a algum vértice de $V \setminus S$, senão $S \setminus \{v\}$ seria também dominante. Logo, $V \setminus S$ também é dominante.

Implicação

Limite máximo de $\frac{n}{2}$ elementos no conjunto dominante mínimo.

Teorema

Se $S \in V$ é um conjunto dominante minimal de um grafo conexo $G = (V, E)$, então $V \setminus S$ também é um conjunto dominante.

Demonstração

Pelas condições do teorema, todos os vértices de $V \setminus S$ também são adjacentes a um vértice de S.

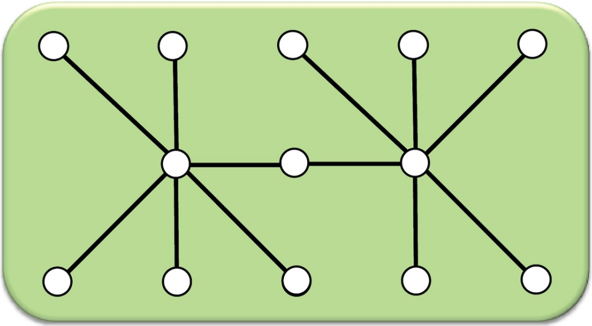
Pela minimalidade, todo vértice v de S também é adjacente a algum vértice de $V \setminus S$, senão $S \setminus \{v\}$ seria também dominante. Logo, $V \setminus S$ também é dominante.

Implicação

Limite máximo de $\frac{n}{2}$ elementos no conjunto dominante mínimo.

Observação

- Um conjunto independente maximal é sempre dominante;
- Um conjunto dominante mínimo pode não ser independente.



Dúvidas?