

BCC204 - Teoria dos Grafos

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto



Conteúdo

- 1 Introdução
- 2 Exemplos
- 3 Histórico
- 4 Terminologia
- 5 Topologia

Fonte

Este material é baseado no livro

- Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.

Licença

Este material está licenciado sob a Creative Commons BY-NC-SA 4.0. Isto significa que o material pode ser compartilhado e adaptado, desde que seja atribuído o devido crédito, que o material não seja utilizado de forma comercial e que o material resultante seja distribuído de acordo com a mesma licença.

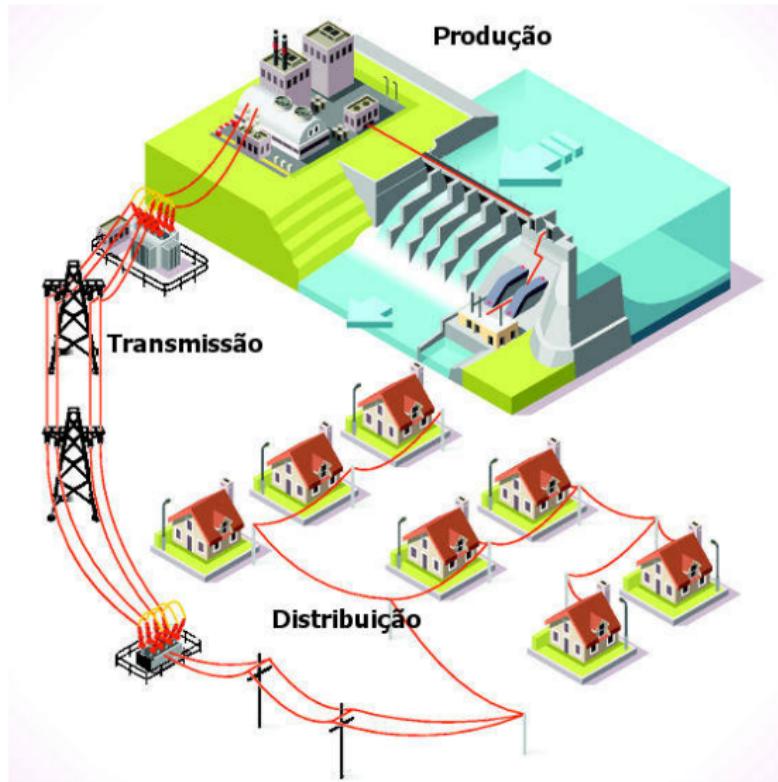
Introdução



Edsger Dijkstra:

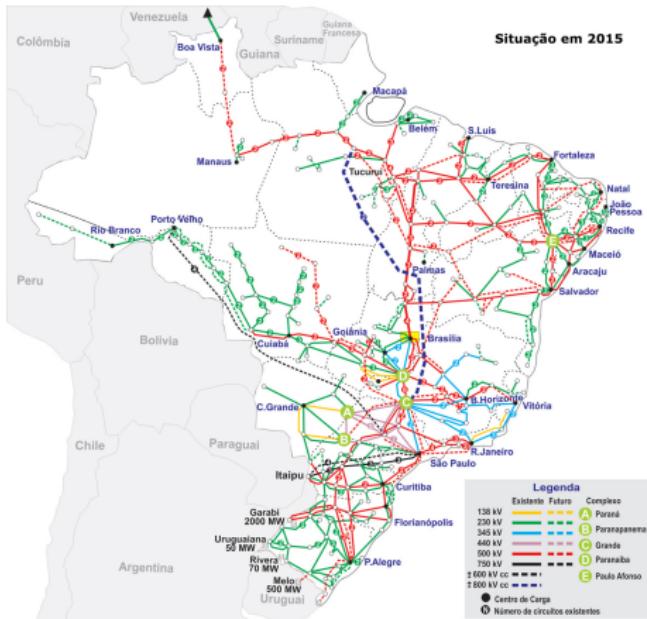
“A Ciência da computação tem tanto a ver com o computador como a Astronomia com o telescópio, a Biologia com o microscópio, ou a Química com os tubos de ensaio. A Ciência não estuda ferramentas, mas o que fazemos e o que descobrimos com elas.”

Exemplos



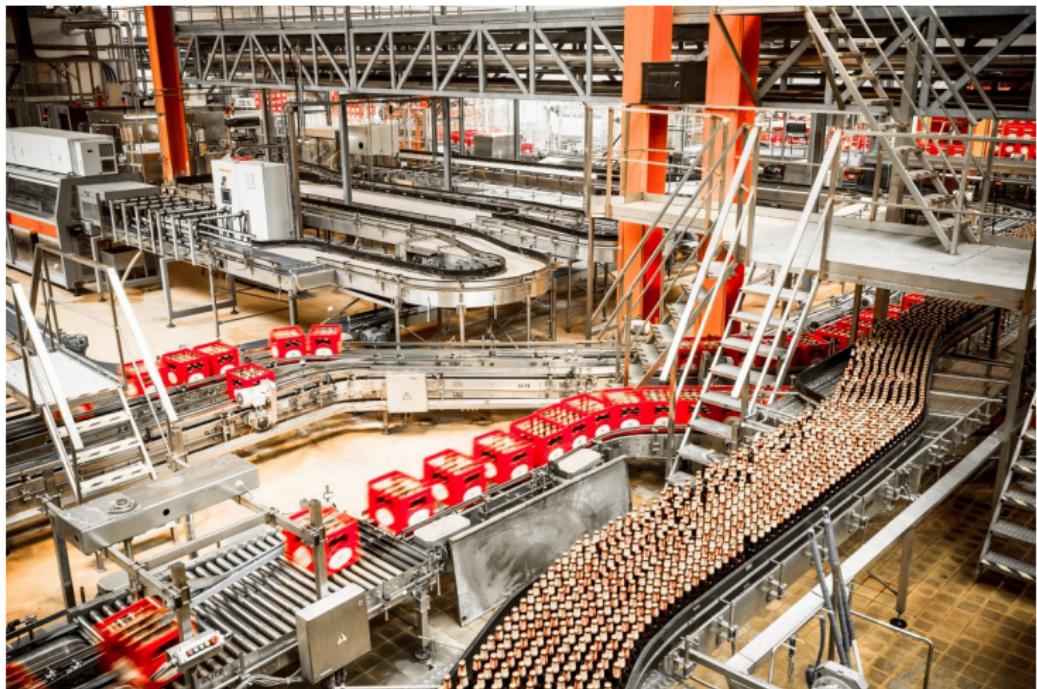
Rede de distribuição de energia elétrica. Fonte: Brasil Escola.

Exemplos



Rede de distribuição de energia elétrica. Fonte: ANEEL.

Exemplos



Logística de produtos. Fonte: TecnoTri.

Exemplos



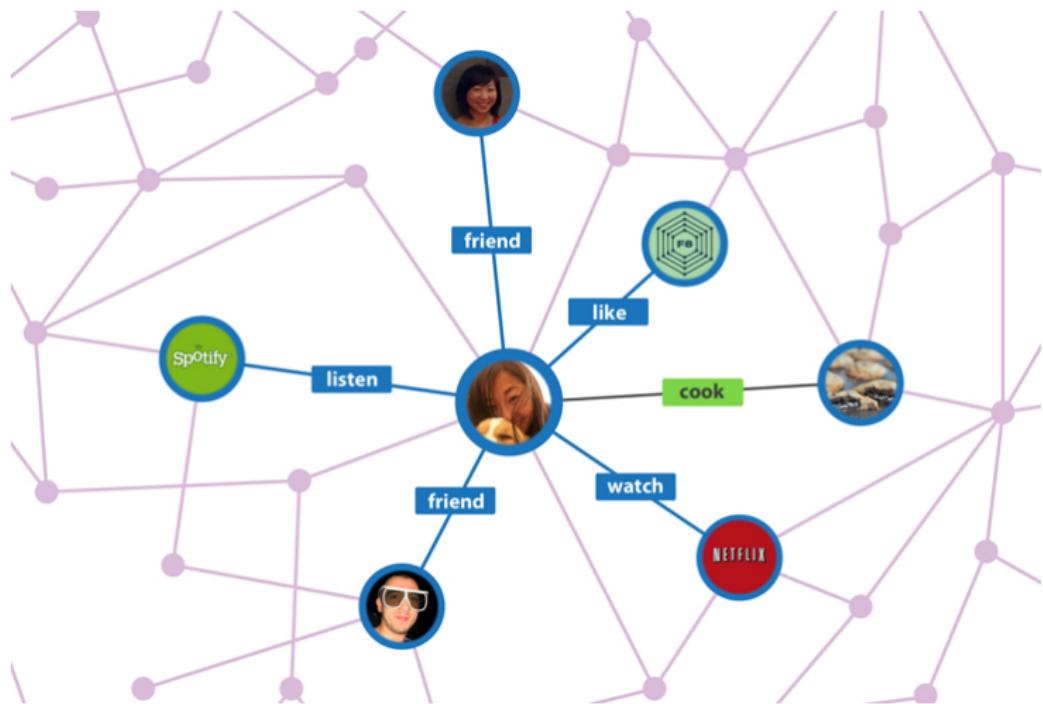
Rede de gasodutos. Fonte: AMVAP.

Exemplos



Rede de gasodutos. Fonte: GasNet.

Grafos



Facebook Graph Search.

Grafos



Fonte: Curiosidades do Financiamento de Campanha nas Eleições 2016
<https://bit.ly/2HvXr5j>

Grafos



Fonte: Office graph – How does Office Delve know what's relevant to me?
<https://bit.ly/2TAfsoj>

Grafos



Fonte: Office graph – How does Office Delve know what's relevant to me?

<https://bit.ly/2TAfsoj>

Grafos



Mapa do metrô de Lisboa

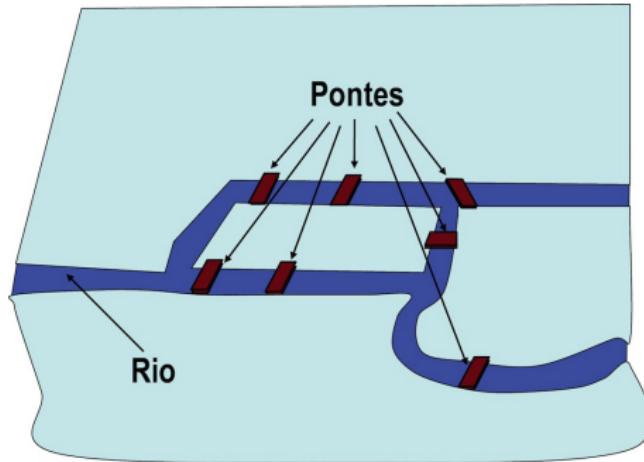
Histórico

Um grafo é uma estrutura de abstração muito útil na representação e solução de problemas computacionais, por representarem relações de interdependência entre elementos de um conjunto.

O primeiro registro de uso data de 1736, por Euler.

O problema era encontrar um caminho circular por Königsberg (atual Kaliningrado) usando cada uma das pontes sobre o rio Pregel (ou Pregolya, Pregola) exatamente uma vez.

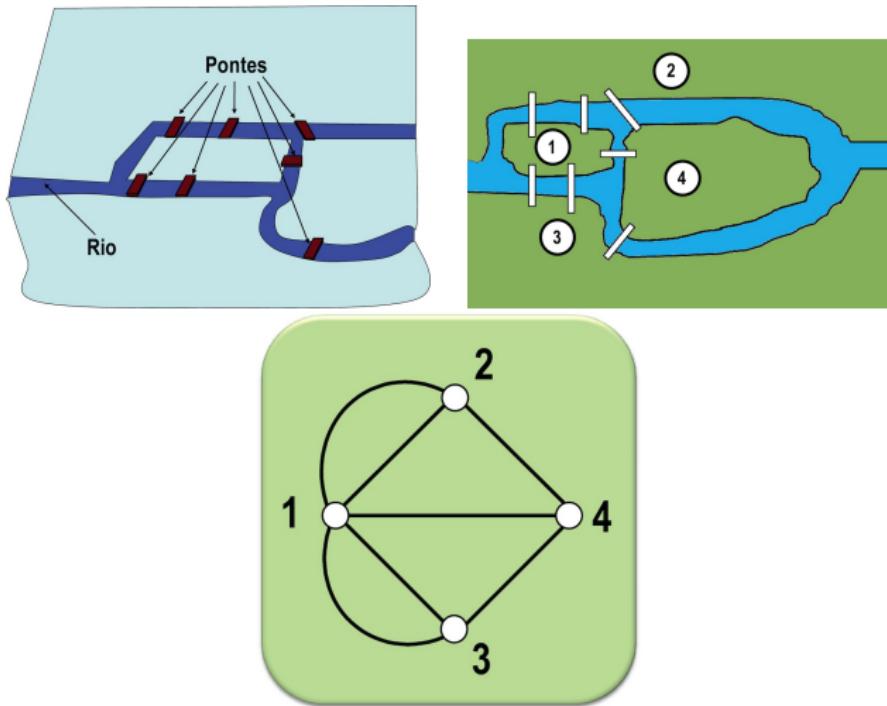
Histórico



1736: Euler e as Pontes de Königsberg

Partindo de uma das margens, pode-se encontrar um percurso que passe somente **uma vez em cada ponte** e retorne ao ponto de partida?

Pontes de Königsberg - O Grafo



Plano de Königsberg, modelo e grafo associado.

Definição Formal

$$\text{Grafo } G = (V, A)$$

- ▶ Conjunto V com n vértices (também chamados nós)
 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- ▶ Conjunto A com m arestas ou arcos
 $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

Definição Formal

$$\text{Grafo } G = (V, A)$$

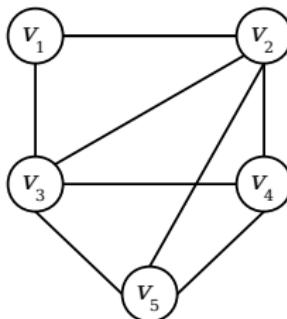
- ▶ Conjunto V com n vértices (também chamados nós)
 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- ▶ Conjunto A com m arestas ou arcos
 $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

Definição Formal

Grafo $G = (V, A)$

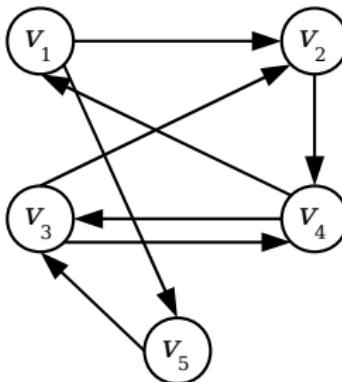
- ▶ Conjunto V com n vértices (também chamados nós)
 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- ▶ Conjunto A com m arestas ou arcos
 $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

GND - Grafo Não Direcionado



- ▶ Ligações expressas em **Arestas** —
- ▶ Se o vértice a está ligado a b , a recíproca é verdadeira;
- ▶ Cada aresta é representada por um **conjunto** $\{v_1, v_2\}$, indicando os dois vértices envolvidos.

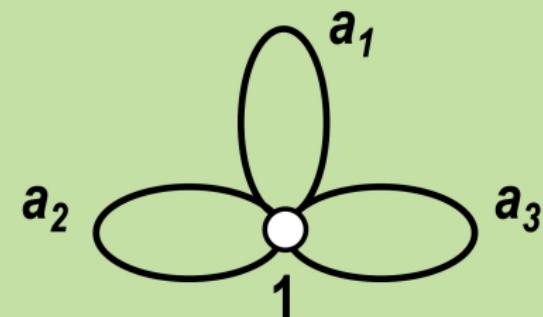
GD - Grafo Direcionado



- ▶ Ligações expressas em **Arcos** →
- ▶ Cada arco é representada por um **par ordenado** (v_1, v_2) , indicando os dois vértices envolvidos.

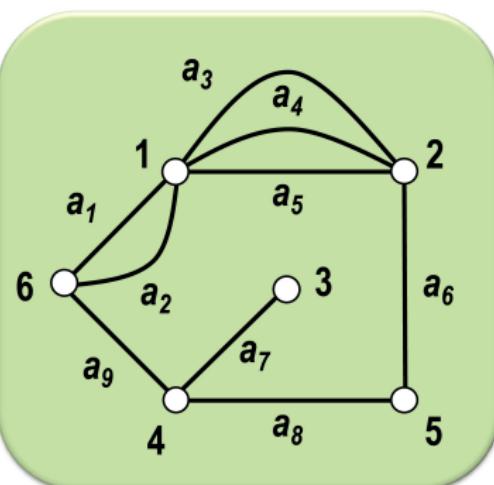
Laço

Uma aresta cujas duas extremidades incidem em um mesmo vértice.



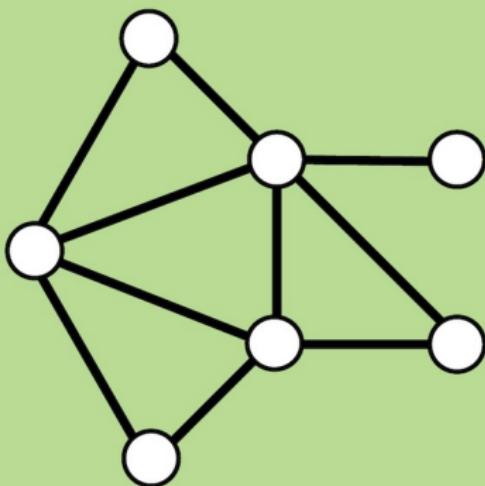
Arestas Paralelas

Mais de uma aresta associada ao mesmo par de vértices.



Grafo simples

Grafo que não possui laços e nem arestas paralelas.

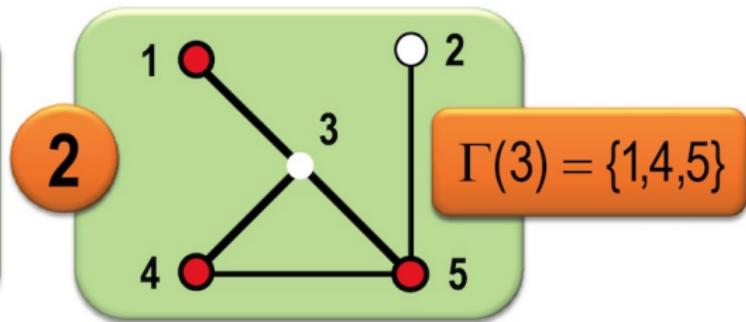
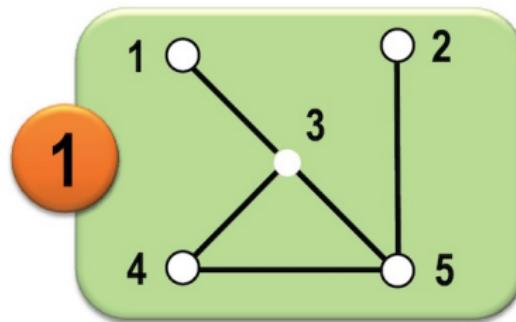


Terminologia

Vértices Adjacentes

Vértices que são os pontos finais de uma mesma aresta.

A função $\Gamma(i)$ retorna o conjunto de vértices adjacentes ao vértice i .



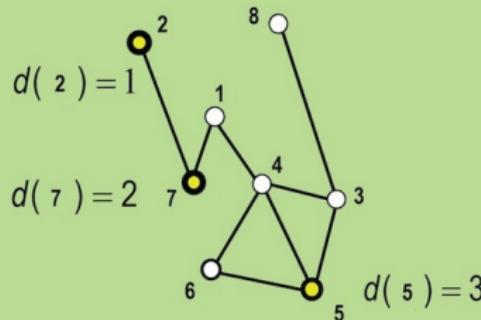
Terminologia

Grau de um Vértice

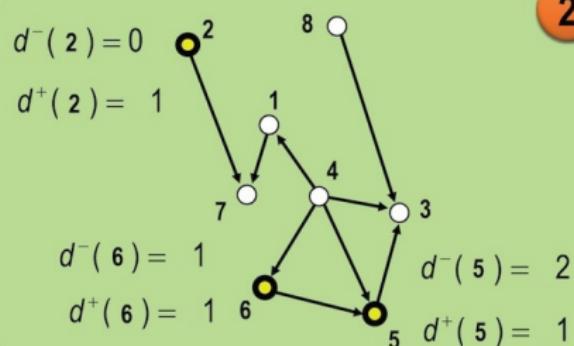
O **grau** ($d(i)$) de um vértice i em um grafo não direcionado é igual o número de arestas incidentes a i .

O **grau de entrada** ($d^-(i)$) de um vértice i em um grafo direcionado é igual o número de arestas que entram em i .

O **grau de saída** ($d^+(i)$) de um vértice i em um grafo direcionado é igual o número de arestas que saem de i .



1



2

Teorema do Aperto de Mãos (*Handshaking lemma*)

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G .

$$\sum_{i=1}^n d(i) = 2m$$

Corolário

O número de vértices de grau ímpar em um GND é par.

Teorema do Aperto de Mãos (*Handshaking lemma*)

A soma dos graus de todos os vértices de um GND G é duas vezes o número de arestas de G .

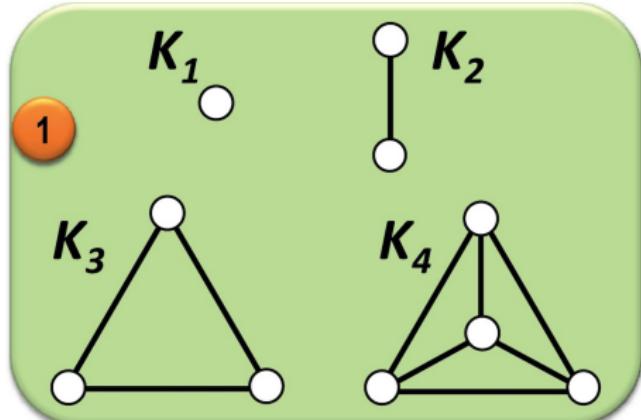
$$\sum_{i=1}^n d(i) = 2m$$

Corolário

O número de vértices de grau ímpar em um GND é par.

Grafo Completo

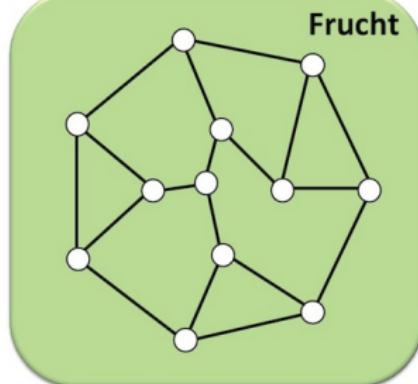
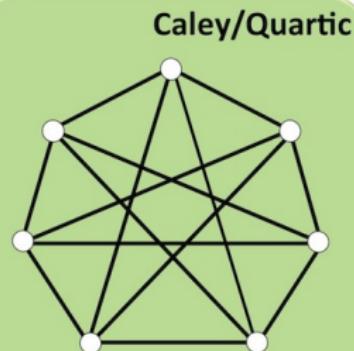
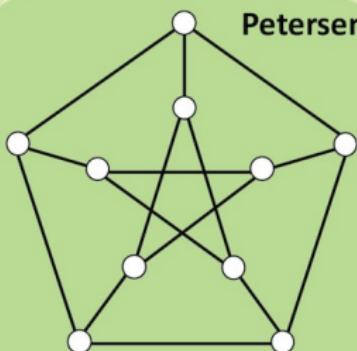
Um grafo completo com n vértices, denominado K_n é um grafo simples contendo exatamente uma aresta para cada par de vértices distintos.



Grafo Regular

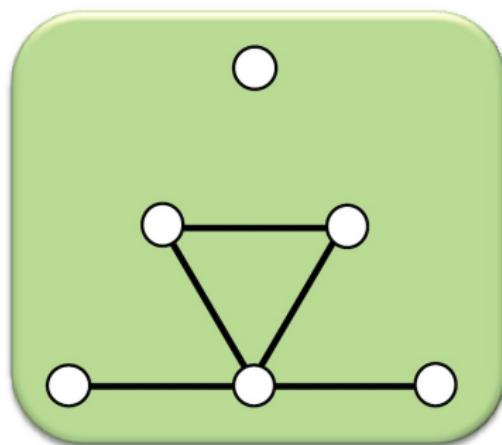
Grafo no qual todos os vértices possuem o mesmo grau.

Obs: qualquer grafo completo é regular.



Vértice Isolado

Vértice com nenhuma aresta incidente.

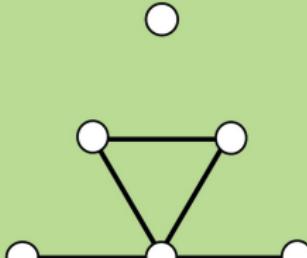
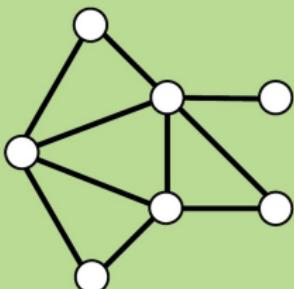


Grafo Conexo

Para todo par de vértices i e j de G existe pelo menos um caminho entre i e j .

Grafo Desconexo

Consiste de 2 ou mais grafos conexos, chamados de **componentes**.

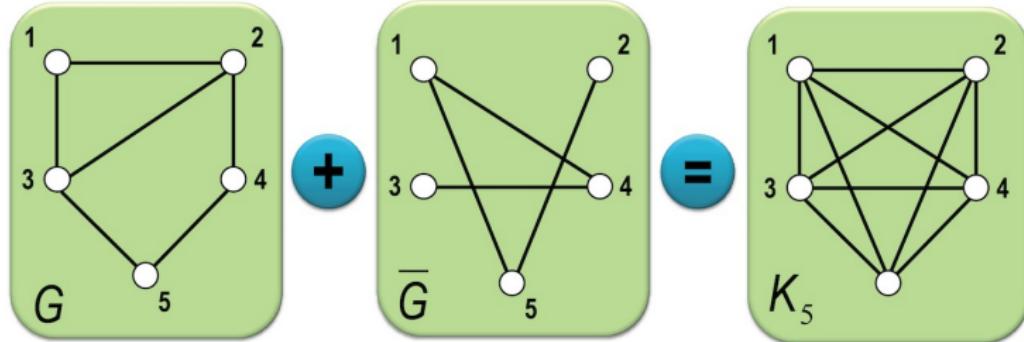


Grafo Complemento

Definição

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples não direcionado, o **complemento** de G , \overline{G} (ou $C(G)$), é um grafo formado da seguinte maneira:

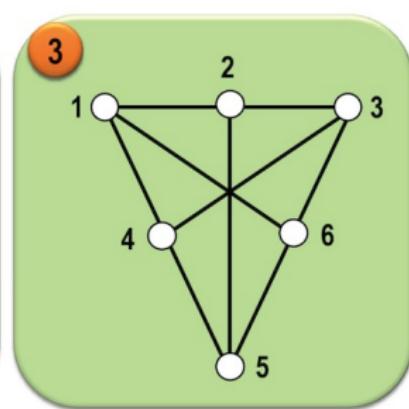
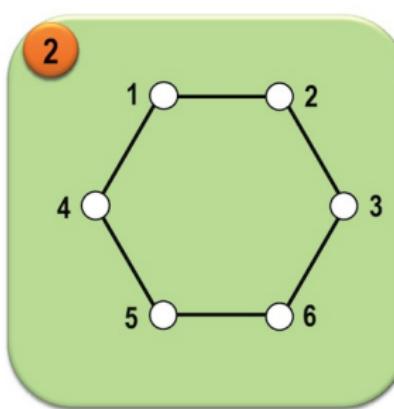
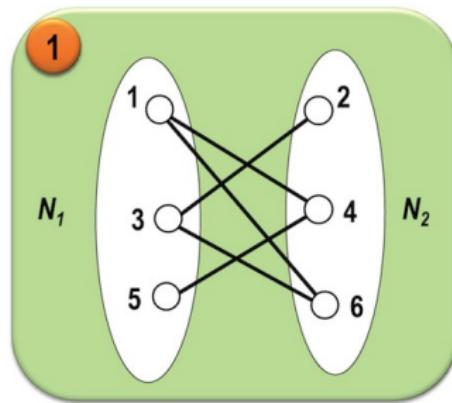
- ▶ Os vértices de \overline{G} são todos os vértices de G ;
- ▶ As arestas de \overline{G} são exatamente as arestas que faltam em G para formarmos um grafo completo.



Grafo Bipartido

Definição

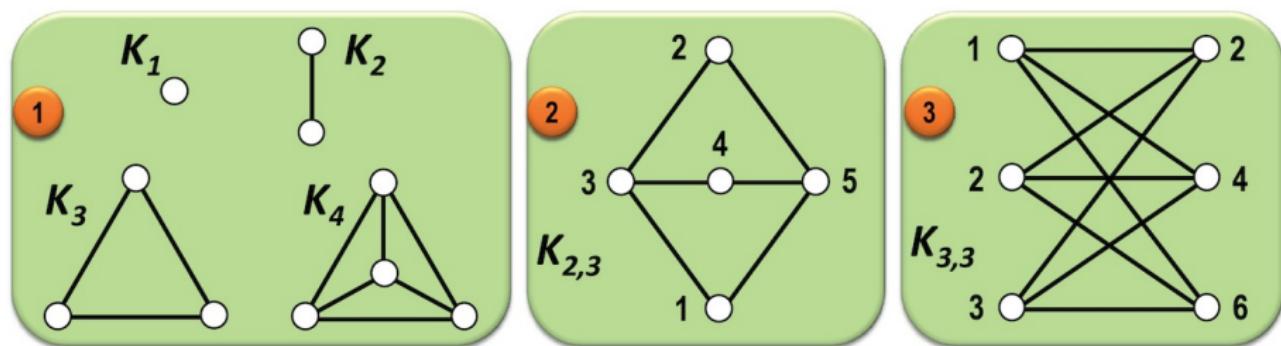
Um grafo é **bipartido** se o conjunto de vértices V pode ser partitionado em 2 subconjuntos V_1 e V_2 tal que todas as arestas do grafo são incidentes a um vértice de V_1 e a um vértice de V_2 .



Grafo Bipartido Completo

Definição

Um grafo bipartido é **completo** ($K_{|V_1|, |V_2|}$) se cada vértice do subconjunto V_1 é adjacente a todos os vértices do subconjunto V_2 e vice-versa.



Exemplo de grafos completos (1) e bipartidos completos (2 e 3).

Dúvidas?

