BCC204 - Teoria dos Grafos

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

Conteúdo

Fonte

Este material é baseado no livro

- Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.

Licença

Caminho Mais Curto – Grafo Não Ponderado

O caminho mais curto entre os vértices v e w de um determinado grafo não ponderado é aquele que possui o menor número de arestas entre os referidos vértices.

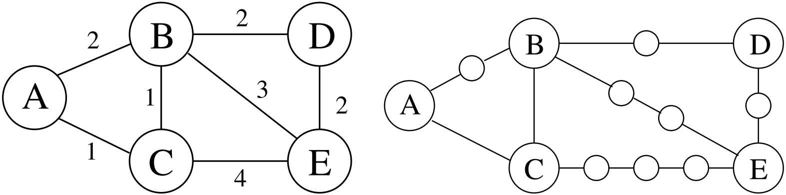
Pode ser obtido pela aplicação da BFS.

Caminho Mais Curto – Grafo Ponderado

O caminho mais curto entre os vértices v e w de um determinado grafo ponderado é aquele cuja soma dos pesos das arestas possui o menor valor possível dentre todos os caminhos existentes entre os referidos vértices.

Claramente, em grafos ponderados, o menor caminho pode não ser aquele com menor número de arestas.

Usando BFS em Grafos Ponderados

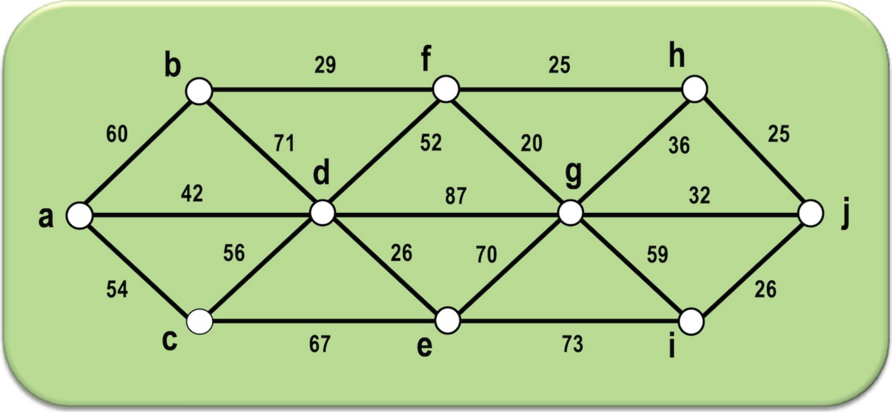


Complexidade

Em um grafo ponderado, se o peso das arestas for inteiro e limitado por um número k, então a complexidade é limitada por $O(km)$.

Rápido e Rasteiro! – *Quick and Dirty*!

A cada instante, selecione a aresta de menor peso.



Algoritmo de Dijkstra

Princípio

O algoritmo, proposto em 1959, rotula os vértices durante a exploração de um grafo (orientado ou não), para encontrar o menor caminho entre um vértice de origem e todos os demais vértices

- Grafos ponderados somente com pesos positivos;
- Estruturalmente semelhante à BFS
  - Calcula a menor distância do vértice inicial aos seus vizinhos;
  - Calcula a menor distância dos vizinhos do vértice inicial aos seus próprios vizinhos;
  - E assim sucessivamente...
  - Noção de camadas;
  - Atualiza as distâncias sempre que descobre uma menor.
- Pode ser provado por indução!

Terminologia

- Um vértice é dito fechado caso o caminho mínimo da origem até ele já tenha sido calculado;
- Caso contrário, o vértice é considerado aberto;
- F: Conjunto de vértices fechados;
- A: Conjunto de vértices abertos;
- N: Conjunto de vértices vizinhos ao vértice atual;
- $dt[i]$: Vetor que armazena a distância entre o vértice de origem e o vértice i;
- $rot[i]$: Vetor que armazena o índice do vértice anterior ao vértice i, no caminho cuja distância está armazenada em $dt[i]$;
- $\backslash$: subtração em conjuntos.

Algoritmo de Dijkstra

Entrada: Grafo $G = (V, E)$ e matriz de pesos D=$\{d_{ij}\}$ para todas as arestas $\{i, j\}$

```
dt[1] ← 0; //considerando o vértice 1 como o inicial
rot[1] ← 0;
para i ← 2 até n faça
    dt[i] ← ∞;
    rot[i] ← 0;
A ← V;
F ← ∅;
enquanto F ≠ V faça
    v ← elemento de A, tal que dt[v] é o mínimo dentre os elementos de A;
    F ← F ∪ {v};
    A ← A \ {v};
    N ← N \ F; //conjunto de vizinhos do vértice v menos os vértices já fechados
    para u ∈ N faça
        se dt[v]+d_vu < dt[u] então
            dt[u] ← dt[v]+d_vu;
            rot[u] ← v;
```

Algoritmo de Dijkstra

Complexidade

- O laço **enquanto** da linha 8 é repetido $O(n)$ vezes;
- Usando estruturas simples, examinar o conjunto A no pior caso pode exigir $O(n)$ comparações;
- Caso o conjunto N seja grande, pode ser necessário atualizar $O(n)$ vértices.
- Logo, em uma implementação simples, a complexidade é $O(n^2)$.

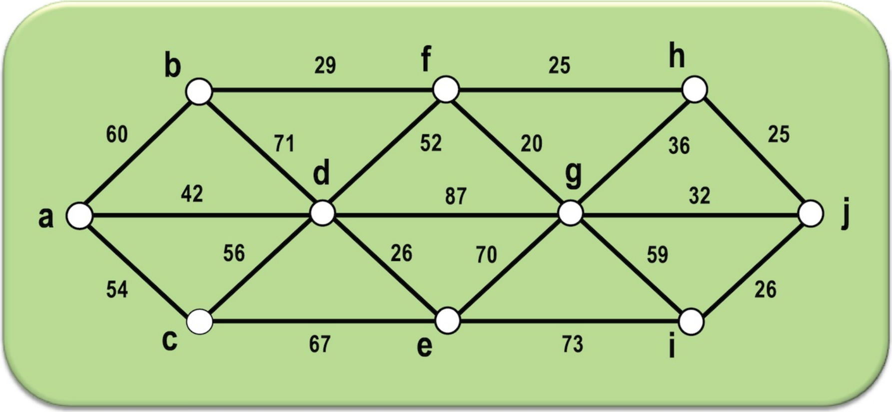
Alternativa

Se utilizarmos um *heap* e listas de adjacências para representar o grafo, a complexidade cai para $O((n+m)\log m)$, porque determinar o menor elemento e atualizar o *heap* pode ser feito em tempo logarítmico.

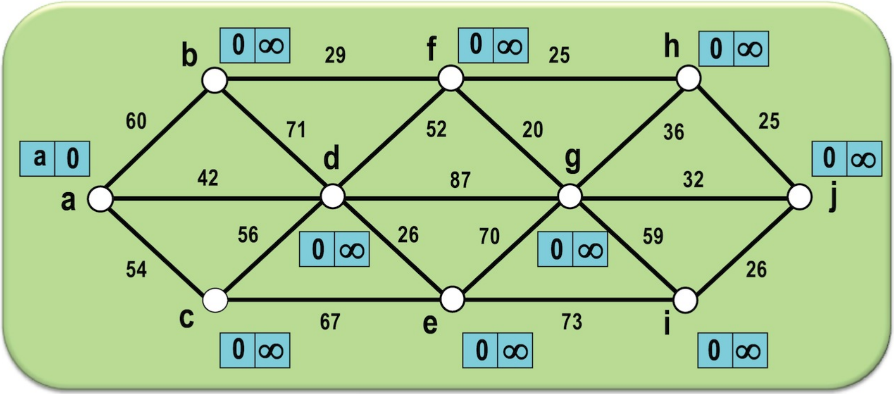
Recorde

A melhor implementação do algoritmo, do ano 2000, possui complexidade $O(n \log \log m)$.

Dijkstra – Exemplo

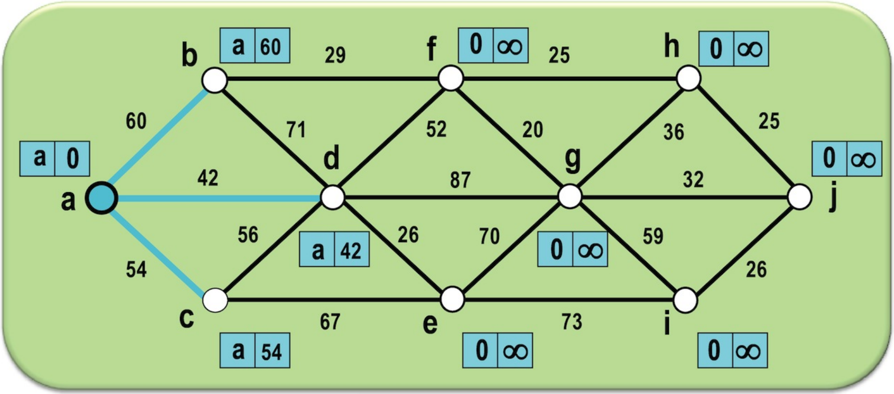


Grafo G. O vértice inicial será 'a'.



Rotulação após a primeira iteração do algoritmo.
O primeiro número é $rot[i]$ e o segundo, $dt[i]$.
Os vértices de F serão marcados em azul.

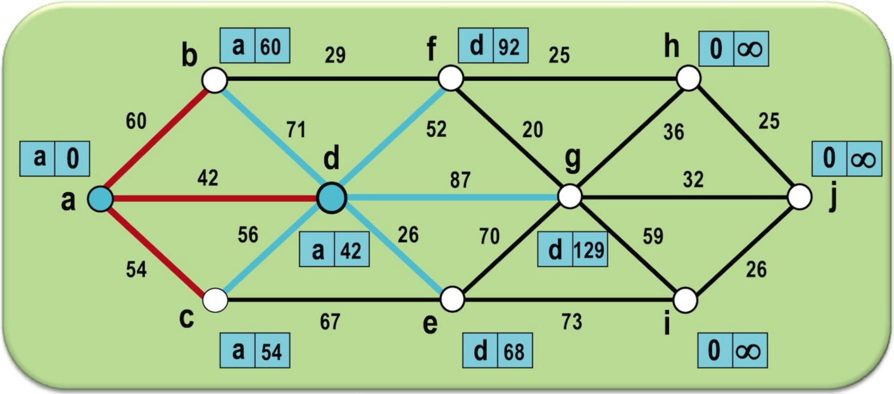
Dijkstra – Exemplo



Exame do vértice a.

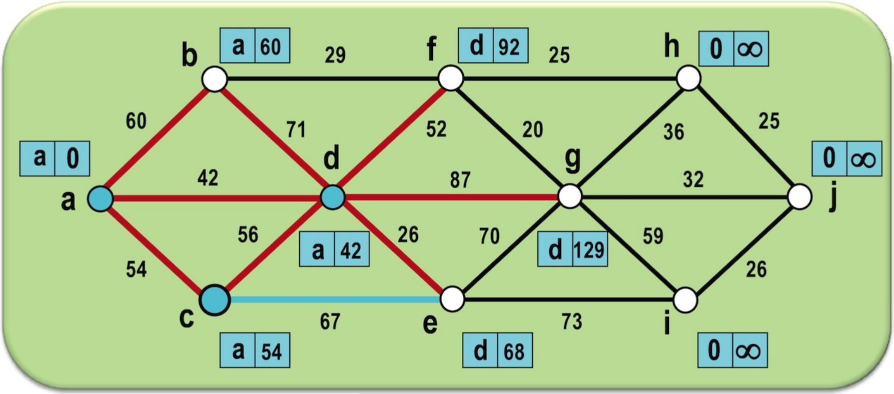
$rot[b]$, $dt[b]$, $rot[c]$, $dt[c]$, $rot[d]$ e $dt[d]$ atualizados.

Dijkstra – Exemplo



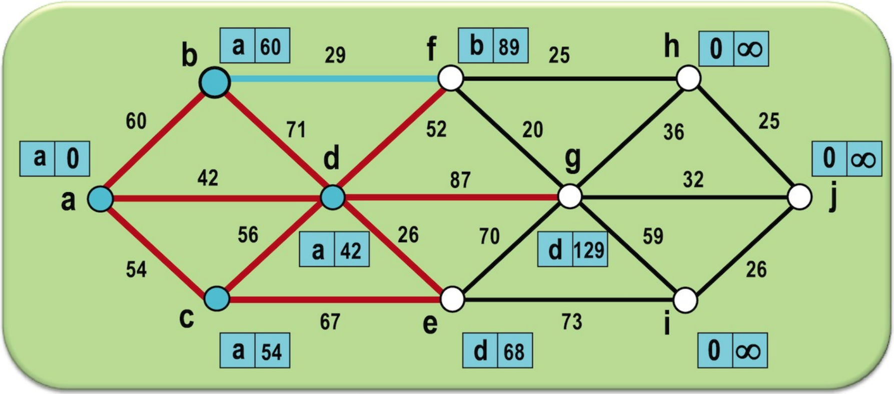
Exame do vértice d.

$rot[e]$, $dt[e]$, $rot[f]$, $dt[f]$, $rot[g]$ e $dt[g]$ atualizados.



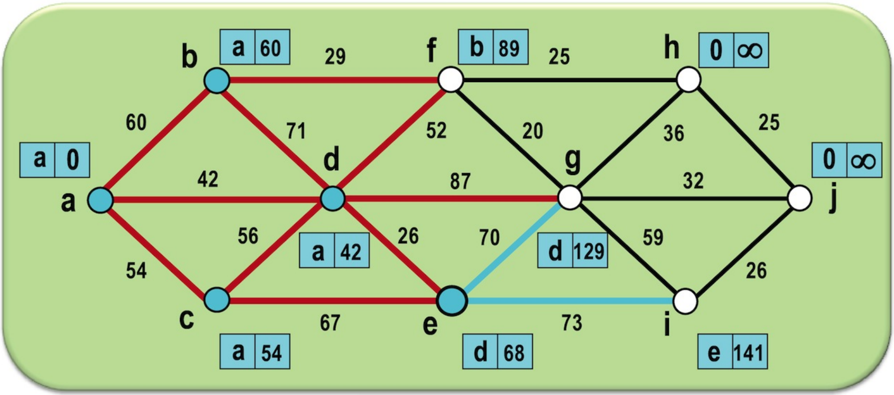
Exame do vértice *c*.

rot[*e*] e *dt*[*e*] não são atualizados.

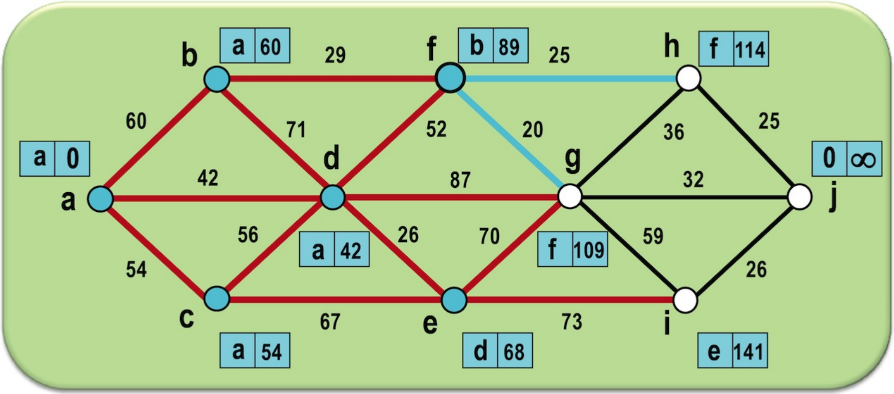


Exame do vértice b.
$rot[f]$ e $dt[f]$ são atualizados.

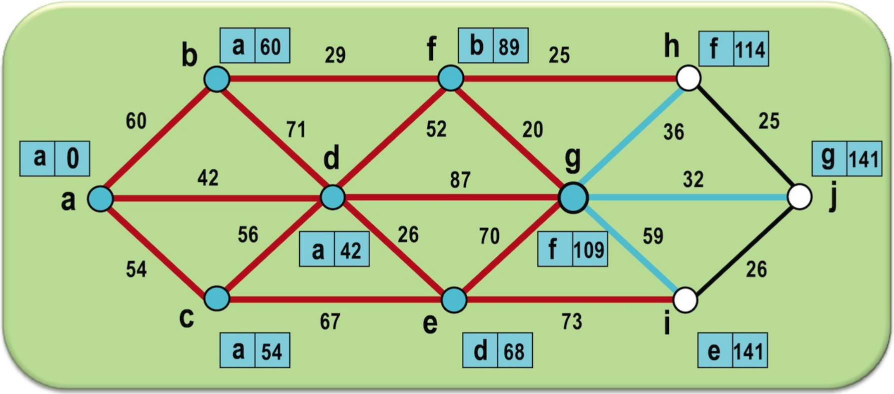
Dijkstra – Exemplo



Exame do vértice *e*.
Apenas $rot[i]$ e $dt[i]$ são atualizados.



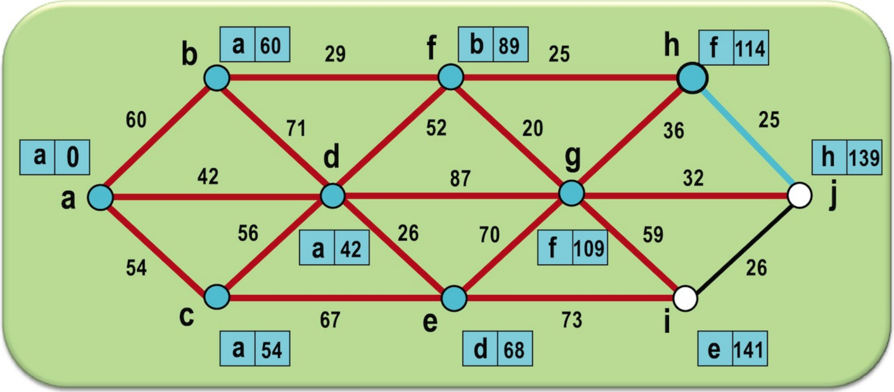
Exame do vértice f.
$rot[g]$, $dt[g]$, $rot[h]$ e $dt[h]$ atualizados.



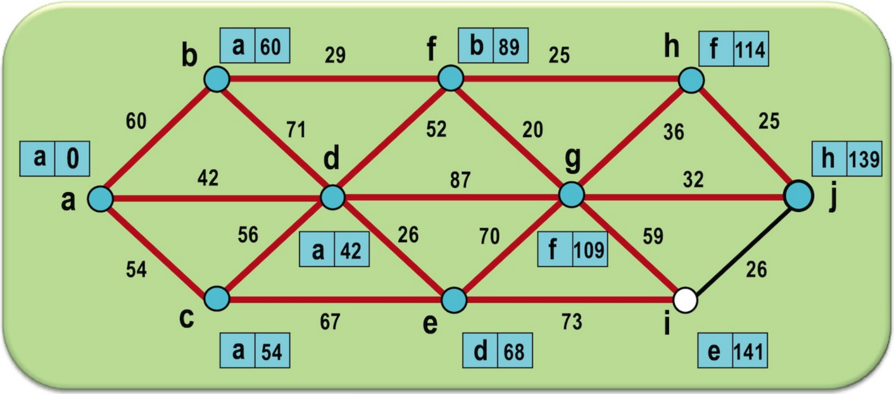
Exame do vértice g.

Apenas $rot[j]$ e $dt[j]$ são atualizados, pois os outros caminhos são mais curtos.

Dijkstra – Exemplo

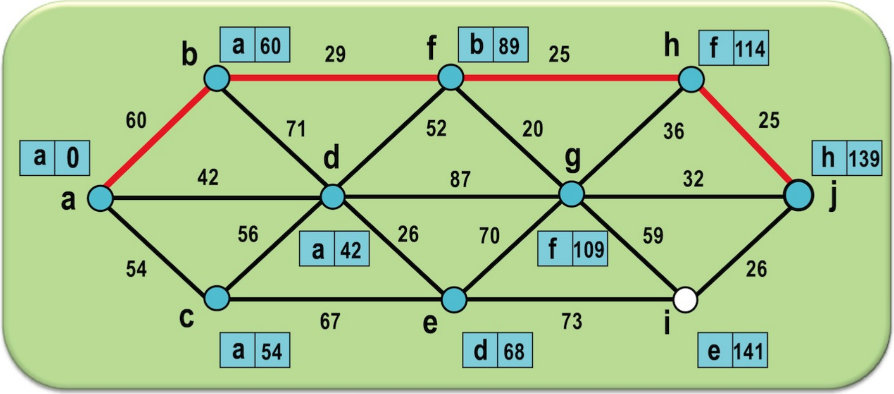


Exame do vértice h.
$rot[j]$ e $dt[j]$ são atualizados, pois o novo caminho é mais curto.



Exame do vértice j.
Nenhuma atualização.

Dijkstra – Exemplo



Caminho mais curto entre a e j.

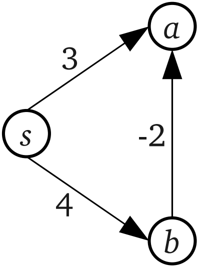
Crítica

O algoritmo é incapaz de calcular os caminhos mínimos caso existam arestas com custo negativo.

O algoritmo só calcula os caminhos mínimos a partir de uma única origem.

Para calcular os caminhos mínimos de todos os vértices para todos os vértices, o algoritmo deve ser executado uma vez para cada vértice do grafo, com complexidade total $O(n^3)$ na implementação simples.

Dijkstra - Limitação



- As instâncias devem obedecer à *desigualdade triangular*.
- No algoritmo, qualquer caminho de s para outro vértice v deve passar apenas por **vértices mais próximos** de s.
- No exemplo, o caminho mais curto entre s e a passa por b, que é mais distante do que a!

Dúvidas?