

# BCC204 - Teoria dos Grafos

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação  
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas  
Universidade Federal de Ouro Preto



- 1 Conjuntos Independentes
- 2 Cliques
- 3 Relação entre Conjuntos Independentes e Cliques
- 4 Conjuntos Dominantes
- 5 Relação entre Conjuntos Dominantes e Conjuntos Independentes

## Fonte

Este material é baseado no livro

- ▶ Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.

## Licença

Este material está licenciado sob a Creative Commons BY-NC-SA 4.0. Isto significa que o material pode ser compartilhado e adaptado, desde que seja atribuído o devido crédito, que o material não seja utilizado de forma comercial e que o material resultante seja distribuído de acordo com a mesma licença.

# Subconjuntos de Vértices

## Introdução

A detecção de subconjuntos de vértices ou arestas com determinadas propriedades definem problemas em teoria dos grafos úteis na modelagem de problemas práticos do dia-a-dia.

Durante a modelagem, é necessário que se estabeleça uma correspondência entre vértices, arestas e os elementos do problema a ser modelado.

Por fim, é necessário associar a estrutura buscada no problema em grafos e a solução do problema real.

Veremos três tipos de subconjuntos de vértices: conjuntos independentes, cliques e conjuntos dominantes.

## Subconjunto Maximal

Um subconjunto  $G_s$  de um conjunto  $G$  é dito maximal em relação a uma propriedade  $\tau$  se não for um subconjunto de nenhum outro subconjunto de  $G$  que também possua a propriedade  $\tau$ .

Maximal deve ser distinto de *máximo*: maximal é referente à uma condição de pertinência, máximo é referente à cardinalidade.

## Subconjunto Minimal

Um subconjunto  $G_s$  de um conjunto  $G$  é dito minimal em relação a uma propriedade  $\tau$  se não for um superconjunto de nenhum outro subconjunto de  $G$  que também possua a propriedade  $\tau$ .

Minimal deve ser distinto de *mínimo*: minimal é referente à uma condição de pertinência, mínimo é referente à cardinalidade.

# Alocação de Exames de Final de Curso

## Problema

Deseja-se alocar o **maior número de exame finais** em um **mesmo horário**.

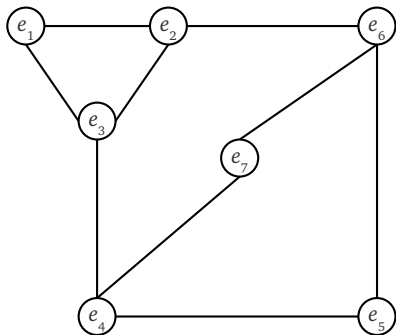
Essa alocação não deve, no entanto, impossibilitar que algum aluno realize o exame, ou seja, se dois exames possuem algum aluno em comum os mesmos devem estar em períodos diferentes.

## Modelo

**Vértices:** Exames;

**Arestas:** Indicam que dois exames possuem algum alunos em comum.

# Alocação de Exames de Final de Curso



Selecione o maior conjunto de exames finais que pode ser realizado no mesmo horário.

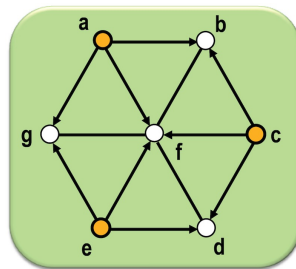
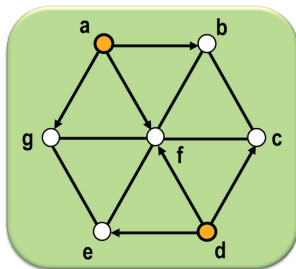
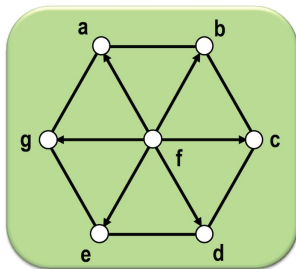
# Conjuntos Independentes

## Definição

Um **conjunto independente** (ou **conjunto de estabilidade**) de um grafo  $G$  é um subconjunto de vértices no qual não existam dois vértices adjacentes.

O **número de independência**  $\alpha(G)$  é a cardinalidade do conjunto independente máximo.

Determinar o número de independência de um grafo é um problema **NP-Difícil**.



Grafo e conjuntos independentes de exemplo, o segundo com  $\alpha(G) = 3$ .

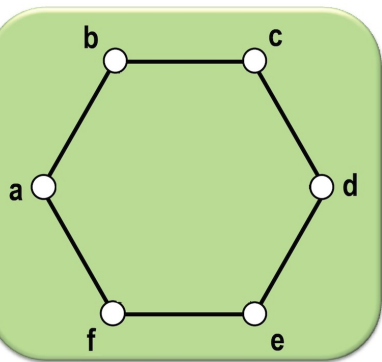


# Construção de um Conjunto Independente Máximo

## Algoritmo Guloso Simples

- 1 Selecione o próximo vértice (ordem lexicográfica ou de menor grau) ainda não considerado;
- 2 Se este vértice não possuir conflitos com vértices já adicionados, inclua-o no conjunto;
- 3 Remova as arestas deste vértice e os seus vértices vizinhos do grafo original;
- 4 Se houverem vértices ainda não considerados volte para 1.

# Execução de Exemplo I



Execução considerando os vértices em ordem alfabética:

*a* : OK

*b* : removido

*c* : OK

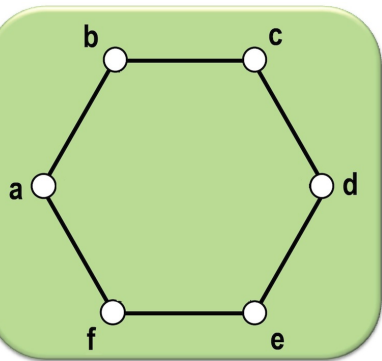
*d* : removido

*e* : OK

*f* : removido

Conjunto independente  $S = \{a, c, e\}$ ,  $|S| = 3$

# Execução de Exemplo I



Execução considerando os vértices em ordem alfabética:

*a* : OK

*b* : removido

*c* : OK

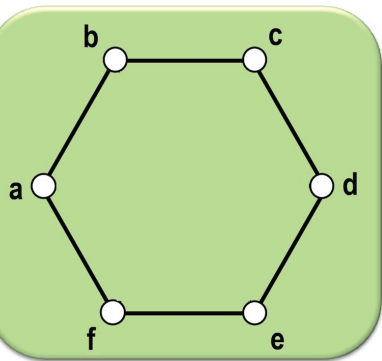
*d* : removido

*e* : OK

*f* : removido

Conjunto independente  $S = \{a, c, e\}$ ,  $|S| = 3$

# Execução de Exemplo I



Execução considerando os vértices em ordem alfabética:

*a* : OK

*b* : removido

*c* : OK

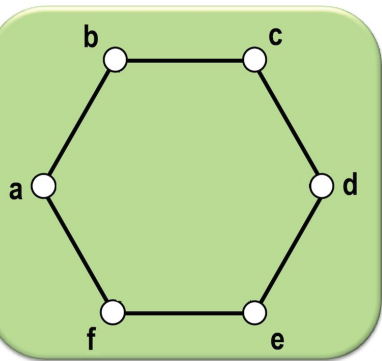
*d* : removido

*e* : OK

*f* : removido

Conjunto independente  $S = \{a, c, e\}$ ,  $|S| = 3$

# Execução de Exemplo I



Execução considerando os vértices em ordem alfabética:

*a* : OK

*b* : removido

*c* : OK

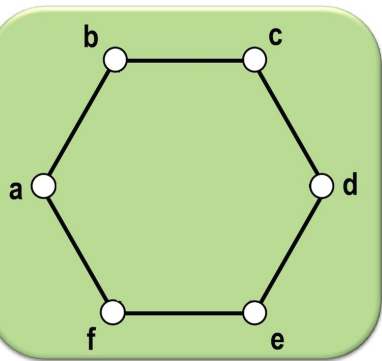
*d* : removido

*e* : OK

*f* : removido

Conjunto independente  $S = \{a, c, e\}$ ,  $|S| = 3$

# Execução de Exemplo I



Execução considerando os vértices em ordem alfabética:

*a* : OK

*b* : removido

*c* : OK

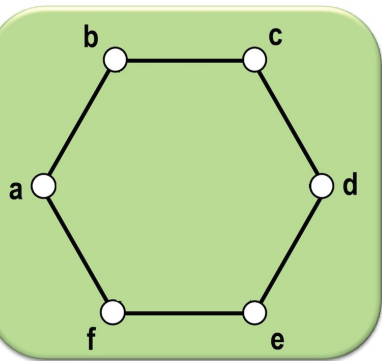
*d* : removido

*e* : OK

*f* : removido

Conjunto independente  $S = \{a, c, e\}$ ,  $|S| = 3$

# Execução de Exemplo I



Execução considerando os vértices em ordem alfabética:

*a* : OK

*b* : removido

*c* : OK

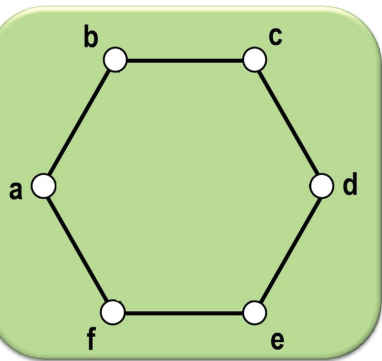
*d* : removido

*e* : OK

*f* : removido

Conjunto independente  $S = \{a, c, e\}$ ,  $|S| = 3$

# Execução de Exemplo I



Execução considerando os vértices em ordem alfabética:

*a* : OK

*d* : removido

*b* : removido

*e* : OK

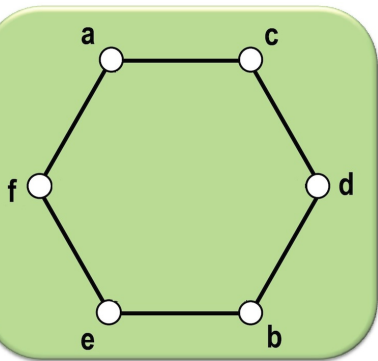
*c* : OK

*f* : removido

Conjunto independente  $S = \{a, c, e\}$ ,  $|S| = 3$



## Execução de Exemplo II



Mesmo grafo, rótulos diferentes:

*a* : OK

*d* : removido

*b* : OK

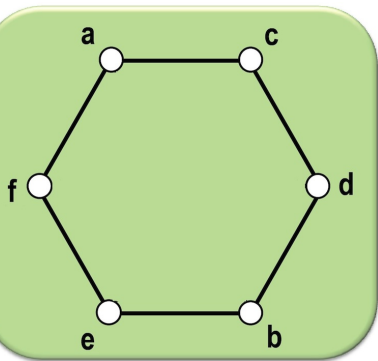
*e* : removido

*c* : removido

*f* : removido

Conjunto independente  $S = \{a, b\}$ ,  $|S| = 2$

## Execução de Exemplo II



Mesmo grafo, rótulos diferentes:

*a* : OK

*d* : removido

*b* : OK

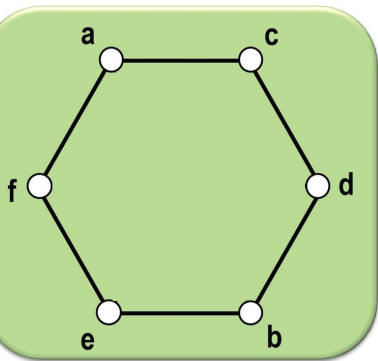
*e* : removido

*c* : removido

*f* : removido

Conjunto independente  $S = \{a, b\}$ ,  $|S| = 2$

## Execução de Exemplo II



Mesmo grafo, rótulos diferentes:

*a* : OK

*d* : removido

*b* : OK

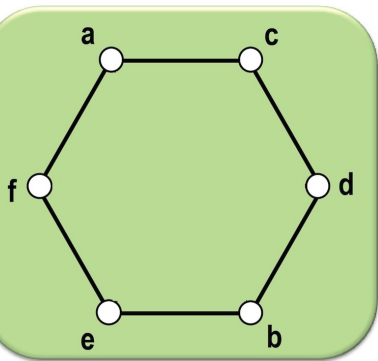
*e* : removido

*c* : removido

*f* : removido

Conjunto independente  $S = \{a, b\}$ ,  $|S| = 2$

## Execução de Exemplo II



Mesmo grafo, rótulos diferentes:

*a* : OK

*b* : OK

*c* : removido

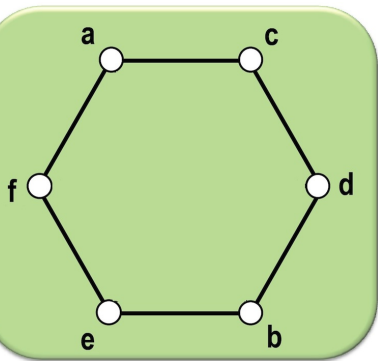
*d* : removido

*e* : removido

*f* : removido

Conjunto independente  $S = \{a, b\}$ ,  $|S| = 2$

## Execução de Exemplo II



Mesmo grafo, rótulos diferentes:

*a* : OK

*b* : OK

*c* : removido

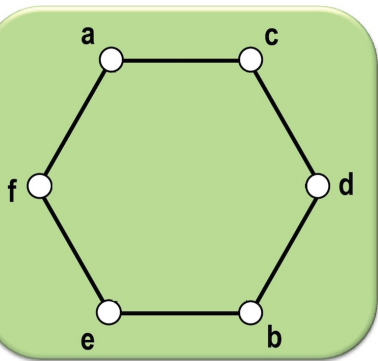
*d* : removido

*e* : removido

*f* : removido

Conjunto independente  $S = \{a, b\}$ ,  $|S| = 2$

## Execução de Exemplo II



Mesmo grafo, rótulos diferentes:

*a* : OK

*d* : removido

*b* : OK

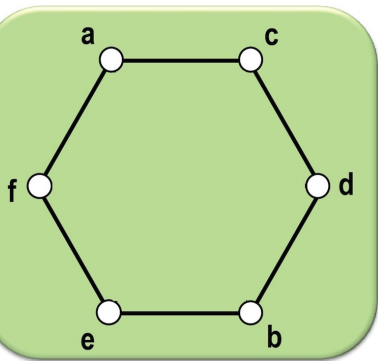
*e* : removido

*c* : removido

*f* : removido

Conjunto independente  $S = \{a, b\}$ ,  $|S| = 2$

## Execução de Exemplo II



Mesmo grafo, rótulos diferentes:

$a$  : OK

$d$  : removido

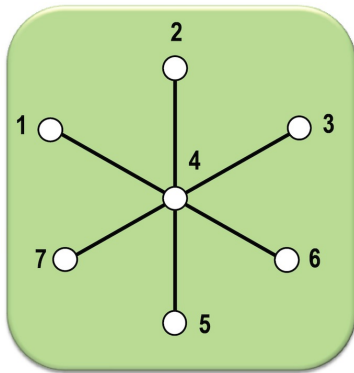
$b$  : OK

$e$  : removido

$c$  : removido

$f$  : removido

Conjunto independente  $S = \{a, b\}$ ,  $|S| = 2$



## Conjunto Independente Maximal

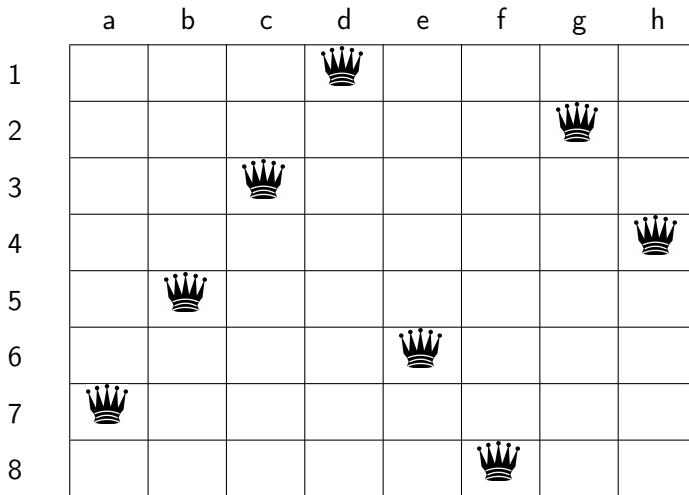
Suponha que o algoritmo comece sua execução pelo vértice 4. Teríamos  $S = \{4\}$  e  $|S| = 1$ .

Este **não é** o conjunto independente **máximo**, mas não podemos adicionar nenhum outro vértice sem desfazer escolhas já feitas.

Denominamos o mesmo de conjunto independente **maximal**.



## 8-Rainhas - Como Modelar como Conjunto Independente Máximo?

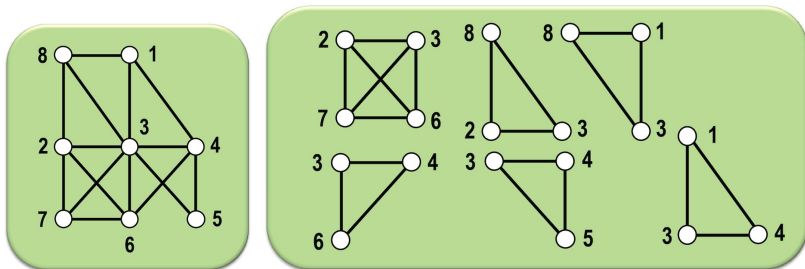


## Definição

Dado um grafo  $G=(V, A)$ , uma **clique** é um subconjunto  $V' \subseteq V$  que induz um subgrafo completo, ou seja, um subconjunto de vértices no qual todos são adjacentes entre si.

O **número clique**  $\omega(G)$  é a cardinalidade da clique máxima.

Determinar o número clique de um grafo é um problema **NP-Difícil**.



Grafo e cliques de exemplo.

# Construção de uma Clique Máxima

## Algoritmo Guloso Simples

- 1 Selecione o vértice (ordem lexicográfica ou de maior grau) ainda não considerado;
- 2 Adicione este vértice e todos os seus vértices vizinhos à clique;
- 3 Remova do grafo original os vértices que não são adjacentes ao vértice selecionado;
- 4 Remova da clique os vértices que não são adjacentes a todos os demais.

# Relação entre Conjuntos Independentes e Cliques

Encontrar o *conjunto independente máximo* em um grafo é equivalente a encontrar o *clique máximo* em seu grafo complemento?

# Conjuntos Dominantes

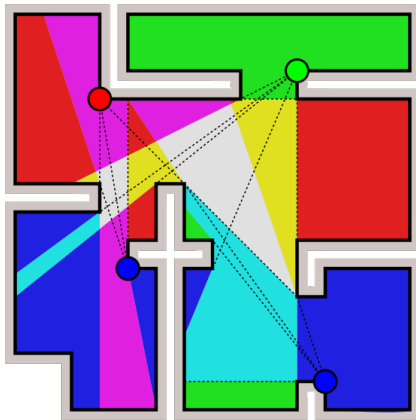
## Câmeras de Vigilância

Deseja-se instalar um número mínimo de câmeras que cubram todos os pontos que devem ser vigiados. Em quais pontos instalaremos as câmeras?

## Projetos Luminotécnicos

Deseja-se instalar um número mínimo de pontos de luz que iluminem um conjunto específico de pontos. Em quais locais instalaremos os pontos de luz?

# Conjuntos Dominantes



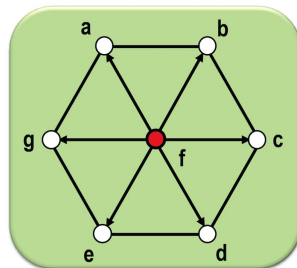
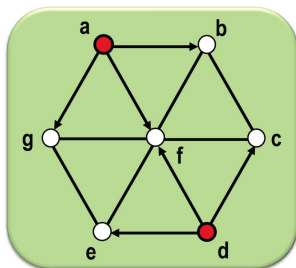
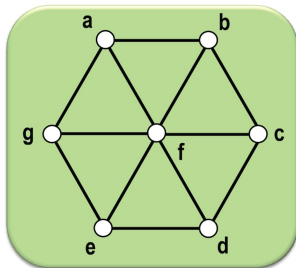
Quatro câmeras/pontos de luz são necessários para cobrir toda a área.  
A interseção de coberturas dá origem a outras cores.

# Conjuntos Dominantes

## Definição

Um **conjunto dominante** é um subconjunto de vértices tal que todo vértice do grafo está no conjunto ou é adjacente a um de seus vértices.

O **número de dominação**  $\gamma(G)$  é a cardinalidade do menor conjunto dominante de  $G$ .



Grafo e conjuntos dominantes de exemplo, o segundo com  $\gamma(G) = 1$ .

## Mais definições

- ▶ Determinar o conjunto dominante mínimo em um grafo sem características particulares é um problema **NP-Difícil**;
- ▶ Um conjunto dominante **minimal** é aquele que não pode ser diminuído;
- ▶ Um conjunto dominante **mínimo** é aquele de menor cardinalidade possível em um grafo.

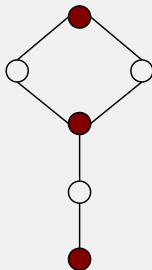
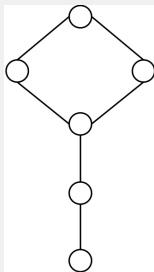


# Um Algoritmo Heurístico para Determinar $\gamma(G)$

## Algoritmo Guloso

Selecionar em sequência os vértices com **maior grau** (que cobrem uma quantidade maior de vértices), até que se obtenha um conjunto dominante.

## Funciona sempre?

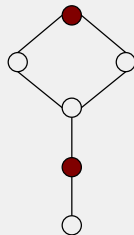
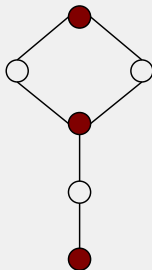
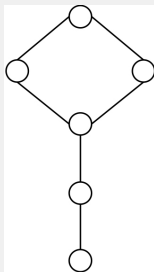


# Um Algoritmo Heurístico para Determinar $\gamma(G)$

## Algoritmo Guloso

Selecionar em sequência os vértices com **maior grau** (que cobrem uma quantidade maior de vértices), até que se obtenha um conjunto dominante.

## Funciona sempre?



NÃO :  $\gamma(G) = 2$

# Conjuntos Dominantes

## Teorema

Se  $S \subseteq V$  é um conjunto dominante minimal de um grafo conexo  $G = (V, E)$ , então  $V \setminus S$  também é um conjunto dominante.

## Demonstração

Pelas condições do teorema, todos os vértices de  $V \setminus S$  também são adjacentes a um vértice de  $S$ .

Pela minimalidade, todo vértice  $v$  de  $S$  também é adjacente a algum vértice de  $V \setminus S$ , senão  $S \setminus \{v\}$  seria também dominante. Logo,  $V \setminus S$  também é dominante.

## Implicação

Limite máximo de  $\frac{n}{2}$  elementos no conjunto dominante mínimo.

# Conjuntos Dominantes

## Teorema

Se  $S \in V$  é um conjunto dominante minimal de um grafo conexo  $G = (V, E)$ , então  $V \setminus S$  também é um conjunto dominante.

## Demonstração

Pelas condições do teorema, todos os vértices de  $V \setminus S$  também são adjacentes a um vértice de  $S$ .

Pela minimalidade, todo vértice  $v$  de  $S$  também é adjacente a algum vértice de  $V \setminus S$ , senão  $S \setminus \{v\}$  seria também dominante. Logo,  $V \setminus S$  também é dominante.

## Implicação

Limite máximo de  $\frac{n}{2}$  elementos no conjunto dominante mínimo.

# Conjuntos Dominantes

## Teorema

Se  $S \in V$  é um conjunto dominante minimal de um grafo conexo  $G = (V, E)$ , então  $V \setminus S$  também é um conjunto dominante.

## Demonstração

Pelas condições do teorema, todos os vértices de  $V \setminus S$  também são adjacentes a um vértice de  $S$ .

Pela minimalidade, todo vértice  $v$  de  $S$  também é adjacente a algum vértice de  $V \setminus S$ , senão  $S \setminus \{v\}$  seria também dominante. Logo,  $V \setminus S$  também é dominante.

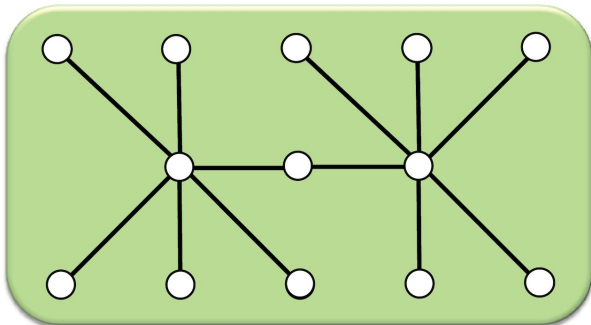
## Implicação

Limite máximo de  $\frac{n}{2}$  elementos no conjunto dominante mínimo.

# Relação entre Conjuntos Dominantes e Conjuntos Independentes

## Observação

- ▶ Um conjunto independente maximal **é sempre** dominante;
- ▶ Um conjunto dominante mínimo **pode não ser** independente.



# Dúvidas?

