2023_09_13

September 13, 2023

Siano $N1 \sim (\mu_1, \sigma_1)$ e sia $N2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$, dove f_1(x) e f_2(x) sono le rispettive funzioni di densità di probabilità mentre F_1(x) e F_2(x) le rispettive funzioni di ripartizione

1. Traccia il grafico qualitativamente su carta $\mu_1 = 1, \sigma_1 = 0.5, \mu_2 = 4, \sigma_2 = 0.2$,
2. Con $c \in \mathbb{R}$, trovare i valori di c per cui la funzione di densità $f(x) = c(f_1(x) + f_2(x))$ è tale. Esprimere successivamente $f(x)$ in funzione di $f_1(x)$ e $f_2(x)$

Dare la definizione di funzione di densità (integra a 1 etc...)

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(f_1(x) + f_2(x))\ dx = c\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\ fx + c\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\ dx =$$

Sapendo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\ dx = 1 \text{ come } \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\ dx = 1$$

Allora

$$c + c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

Esprimiamo $f(x)$ in funzione di $f_1(x)$ e $f_2(x)$ e abbiamo

$$f_(x) = \frac{1}{2}(f_1(x) + f_2(x))$$

3. Calcolare il valore della di ripartizione di $f(x)$, esprimendola in funzione di $F_1(x) e F_2(x)$

$$F_(x) = \frac{1}{2}(F_1(x) + F_2(x))$$

4. Disegnare i grafici di $f_1(x), f_2(x), F_1(x), F_2(x)$ evidenziando tutte le informazioni importanti

Sapendo d'ora in avanti che X è una variabile aleatoria che segue una distribuzione definita dalla funzione di densità

5. Calcolare il valore atteso di X sapendo dei parametri introdotti nei punti precedenti

Sapendo che X è la somma di due variabili aleatorie che seguono la distribuzione gaussiana, sappiamo che la somma è anch'essa una variabile aleatoria gaussiana con valore atteso pari alla somma dei valori attesi e varianza pari alla somma delle varianza.

$$E(X) = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$$

1 Esercizio 2

Consideriamo una popolazione distribuita come la variabile aleatoria X descritta nell'Esercizio 1.3, per la quale il **solo parametro** μ_1 è incongito. Per $n \in \mathbb{N}$ fissato, con $n > 3$, siano $X_1, ..., X_n$ delle variaibli aleatorie che descrivono un campione estratto da questa popolazione. In tutto l'esercizio μ indicherà il valore atteso della popolazione, $a \in \mathbb{R}$ sarà un valore **noto** e $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

1. La variabile aleaotira $T = a\overline{X} - \frac{X_3}{4}$ è uno stimatore? Giustificate la risposta.

Sì, perché tutto è uno stimatore di tutto

2. Se la risposta alla domanda precedente è affermativa, determinate il valore di $a \in \mathbb{R}$ che rende T uno stimatore non distorto per μ

$$E(T) = aE(X) - \frac{1}{4}E(X)$$

Per $a = \frac{5}{4}$ si ha che lo stimatore T è non distorto

3. Determinate, in funzione di $\overline{X}$, uno stimatore S che risulti non distorto per il parametro μ_1

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$$

Quindi

$$\mu_1 = 2 \cdot E(\overline{X}) - \mu_2 \Rightarrow S = 2\overline{X} - \mu_2$$

4. Calcolate la varianza dello stimatore S proposto al punto precedente

$$\text{Var}(S) = \text{Var}(2\overline{X} - \mu_2) = \frac{4 \cdot \text{Var}(X)}{n}$$

5. Verificate se lo stimatore S proposto al punto 3 goda della proprietà di consistenza in media quadraticarispetto a μ_1

$$MSE = \text{Var}(S) = \frac{4 \cdot \text{Var}(X)}{n}$$

Calcoliamo ora il limite

$$\lim_{n \to +\infty} MSE = \lim_{n \to +\infty} \frac{4 \cdot \text{Var}(X)}{n} = 0$$

6.Fissato $\epsilon > 0$, apllicando il teorema centrale del limite esprimete in funzione di ϵ, n ed eventuali altre quantità ignote la probabilità dell'evento che si verifica quando l'errore (in valore assoluto) che si compie usando S per stimare μ_1 è minore o uguale a ϵ giustificando i vostri passaggi.

$$P\left(\mid S - \mu_1 \mid \leq \epsilon\right)$$

Data la probabilità, andiamo ad applicare la standardizzazione su S applicando il teorema centrale del limite per aprossimare una serie di variabili aleatorie a una normale standard:

$$\frac{S-\mu_1}{\frac{2\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}{\sqrt{n}}} \approx Z \sim N(0,1)$$

e quindi possiamo riscrivere

$$P\left(\left|\frac{S-\mu_1}{\frac{2\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}{\sqrt{n}}}\right| \leq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{2\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right) \approx P\left(|Z| \leq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{2\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right) =$$

$$= P\left(-\frac{\epsilon\sqrt{n}}{2\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} \leq Z \leq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{2\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right) =$$

$$P\left(\frac{\epsilon\sqrt{n}}{2\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right) - P\left(-\frac{\epsilon\sqrt{n}}{2\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\sigma\right) =$$

applichiamo la scomposizione della funzione $\Phi(X)$:

$$\Phi\left(\frac{\epsilon\sqrt{n}}{2\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right) - \Phi\left(-\frac{\epsilon\sqrt{n}}{2\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right) =$$

$$\Phi\left(\frac{\epsilon\sqrt{n}}{2\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{\epsilon\sqrt{n}}{2\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right)\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{\epsilon\sqrt{n}}{2\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right) - 1$$