

Maio 2022/23



OTIMIZAÇÃO HEURÍSTICA

Trabalho Individual I

Docentes:

Professora Doutora Anabela Ribeiro Dias da Costa

Professora Doutora Mafalda Coutinho de Ponte

Professora Doutora Maria João Sacadura Fonseca Calado de Carvalho e Cortinhal

Licenciatura em Ciência de Dados

Turma: CDB1

Marco Delgado Esperança nº 110451

Índice

Introdução	2
Respostas às questões	2
Conclusão	17
Bibliografia	18
Anexos	19



Introdução

A otimização heurística é uma área da ciência da computação que se dedica ao desenvolvimento de algoritmos e técnicas de pesquisa para encontrar soluções eficientes para problemas complexos. Neste trabalho, pretende-se aplicar técnicas de otimização heurística para ajudar um departamento de operações de uma confeitaria a determinar o nível de produção para três novos doces (D1, D2 e D3) que serão lançados no mercado.



A produção adequada dos novos produtos é essencial para o sucesso do negócio, já que um nível de produção insuficiente pode resultar em perda de vendas, enquanto um nível excessivo pode levar a desperdício e redução de lucros. Por isso, o uso de técnicas de otimização heurística pode ajudar a encontrar a produção ideal para cada produto, tendo em conta diversos fatores, como a procura do mercado, a disponibilidade de recursos e os custos de produção. No final deste trabalho, espera-se apresentarem-se soluções que permitam à confeitaria conciliar da melhor forma possível as metas estabelecidas e responder de forma eficiente às exigências do mercado.

Respostas às questões

a) Formulação do problema em Programação Linear

Para formular o modelo em Programação Linear Por Metas (PLM) é necessário definir as variáveis de decisão que representam a produção de cada doce, ou seja, a quantidade de milhares de quilogramas de cada doce a ser produzida. Assim seja:

- x_1 : quantidade de milhares de quilograma do doce D1 a ser produzida
- x_2 : quantidade de milhares de quilograma do doce D2 a ser produzida
- x_3 : quantidade de milhares de quilograma do doce D3 a ser produzida

O modelo PLM pode ser definido da seguinte forma:

$$\min P = \underset{\substack{\uparrow \\ P_1^-}}{5} * \frac{d_1^-}{125} + \underset{\substack{\uparrow \\ P_2^-}}{\frac{10}{5}} * \frac{d_2^-}{60} + \underset{\substack{\uparrow \\ P_2^+}}{\frac{4}{5}} * \frac{d_2^+}{60} + \underset{\substack{\uparrow \\ P_3^+}}{5} * \frac{d_3^+}{55}$$

com $d_1^-, d_2^-, d_2^+, d_3^+ \geq 0$.

Sujeito às seguintes restrições (S.a.) :

- Produção máxima de D1: $x_1 \leq 6$
 - Produção mínima de D2: $x_2 \geq 2$
 - Produção mínima de D3: $x_3 \geq 1$
 - Lucro mínimo: $12x_1 + 9x_2 + 5x_3 \geq 125$
 - Mão de obra: $5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 60$
 - Investimento máximo: $5x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 55$
- } Metas

Explicação dos termos:

$$5 * \frac{d_1^-}{125}$$

onde d_1^- representa o desvio relativamente ao nível de aspiração do lucro, multiplicado pela correspondente penalização por cada milhar de euros abaixo desse nível.

$$\frac{10}{5} * \frac{d_2^-}{60}$$

onde d_2^- representa o desvio do número de trabalhadores abaixo do nível pretendido dividido pelo número de trabalhadores alvo que é 60, sendo multiplicado pela sua correspondente penalização, em que, por cada 5 trabalhadores, penaliza-se 10 pontos por ficar abaixo, daí o peso 10/5.

$$\frac{4}{5} * \frac{d_2^+}{60}$$

onde d_2^+ representa o desvio do número de trabalhadores acima do nível pretendido dividido pelo número de trabalhadores alvo que é 60, sendo multiplicado pela sua correspondente penalização, em que, por cada 5 trabalhadores, penaliza-se 4 pontos por ficar acima, daí o peso 4/5.

$$5 * \frac{d_3^+}{55}$$

onde d_3^+ representa o desvio do nível de aspiração do investimento de capital acima do nível pretendido, dividido pelo investimento máximo que é 55, sendo multiplicado pela sua correspondente penalização de 5 pontos por cada milhar de euros acima do nível de aspiração.

b) Resolução do problema formulado em a) e interpretação da solução obtida, nomeadamente, no que às metas diz respeito

Com o objetivo de minimizar a soma das penalizações, é desejável alcançar o valor mais baixo possível para o valor ótimo da função objetivo.

O output encontra-se na figura 1 dos Anexos.

Interpretação dos resultados



O **valor ótimo** é, aproximadamente, 1.3359, que é difícil de interpretar pois trata-se da soma de desvios de diferentes naturezas, pelo que como se pretende um valor baixo, podemos concluir que é aceitável.

Quanto à **solução ótima** obtiveram-se os seguintes resultados:

- **X1 = 6.0:** são produzidos 6000 kg de doces D1, que é igual ao valor máximo de produção deste doce permitido (produção_D1 = 0.0)
- **X2 = 3.4:** são produzidos 3400 kg de doces D2, que está 1400 kg acima do valor mínimo exigido (produção_D2 = 1.4)
- **X3 = 1.0:** são produzidos 1000 kg de doces D3, que é igual ao valor mínimo de produção solicitado (produção_D3 = 0.0)

- **dm1 = 17.4 > 0:** o lucro a longo prazo é de 125000 - 17400, isto é, 107600 euros, ou seja, não é alcançado o valor da meta do lucro do longo prazo, pois, encontra-se abaixo 17400 euros (dm1=17.4) do valor mínimo exigido (lucro de pelo menos 125 mil euros).
- **dm2 = 19.2 > 0:** a mão de obra é de 60-19.2 (dm2=19.2), isto é, 40.8, o que corresponde a cerca de 40 empregados, não respeitando a meta do número de funcionários ser 60
- **dM2 = 0.0:** não há qualquer penalização de por cada 5 trabalhadores, 4 pontos por ultrapassar o valor de referência.
- **dM3 = 0.0:** não há qualquer penalização de 5 pontos por cada milhar de euros acima do nível de aspiração do investimento de capital.

c) Duas propostas alternativas à solução obtida em b)

i) *Alternativa 1*

Como primeiro método alternativo, definiu-se outro tipo de função objetivo, designado por **Objetivo MiniMax**, a qual é utilizada quando se pretende minimizar o desvio máximo de qualquer meta.

Formulação do problema

Temos que: $P_1^- = 5$, $P_2^- = \frac{10}{5}$, $P_2^+ = \frac{4}{5}$, $P_3^+ = 5$

$$\min \max Z = \left\{ 5 * \frac{d_1^-}{125}, \frac{10}{5} * \frac{d_2^-}{60}, \frac{4}{5} * \frac{d_2^+}{60}, 5 * \frac{d_3^+}{55} \right\}$$

$$\min Z = Q$$

$$\text{s.a. } x_1 \leq 6$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_3 \geq 1$$

$$12x_1 + 9x_2 + 5x_3 + d_1^- \geq 125$$

$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + d_2^+ - d_2^- = 60$$

$$5x_1 + 5x_2 + 8x_3 - d_3^+ \leq 55$$

$$P_1^- * \frac{d_1^-}{125} \leq Q$$

$$P_2^- * \frac{d_2^-}{60} \leq Q$$

$$P_2^+ * \frac{d_2^+}{60} \leq Q$$

$$P_3^+ * \frac{d_3^+}{55} \leq Q$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$d_1^-, d_2^-, d_2^+, d_3^+ \geq 0$$

$$Q \geq 0$$

O output pode ser encontrado na figura 2 dos anexos.

Interpretação dos resultados

O **valor ótimo** é, aproximadamente, 0.5412, que é difícil de interpretar pois trata-se da soma de desvios de diferentes naturezas. No entanto, pretende-se um valor baixo, pois, pretende-se minimizar o desvio máximo de todas as metas, o que podemos concluir que foi atingido.

Quanto à **solução ótima** obtiveram-se os seguintes resultados:

- **X1 = 6.0:** são produzidos 6000 kg de doces D1, que é igual ao valor máximo de produção deste doce permitido (produção_D1 = 0.0)

- **X2 = 3.4253898**: são produzidos cerca de 3425 kg de doces D2, que está cerca de 1400 kg acima do valor mínimo exigido (produção_D2 = 1.4253898)
- **X3 = 1.7282851**: são produzidos cerca de 1728 kg de doces D3, que é cerca de 0.7 kg superior ao valor mínimo de produção solicitado (produção_D3 = 0.7282850999999999)
- **dm1 = 17.4 > 0**: o lucro a longo prazo é de 125000 - 13.530067, isto é, aproximadamente, 124986 euros, ou seja, não é alcançado o valor da meta do lucro do longo prazo, pois, encontra-se abaixo cerca de 13530 euros (dm1=13.530067) do valor mínimo exigido (lucro de pelo menos 125 mil euros).
- **dm2 = 16.23608 > 0**: a mão de obra é de 60-16.23608 (dm2=16.23608), isto é, 43.76, o que corresponde a cerca de 43 empregados, não respeitando a meta do número de funcionários ser 60.
- **dm2 = 0.0**: não há qualquer penalização de por cada 5 trabalhadores, 4 pontos por ultrapassar o valor de referência.
- **dm3 = 5.9532294**: há penalização de 5 pontos por cada milhar de euros acima do nível de aspiração do investimento de capital.

ii.i) Alternativa 2.1

Para a segunda alternativa, utilizei a mesma formulação da b), mas com pesos diferentes. Considerei os pesos:

$$P_1^- = 3, P_2^- = 1, P_2^+ = 2, P_3^+ = 1$$

Decidi atribuir o peso 3 para a penalização respeitante ao desvio do lucro (P_1^-), uma vez que considero o lucro o objetivo mais importante a alcançar, pois é efetivamente aquilo que mantém e fortalece uma empresa, daí ser o maior peso que atribua para um desvio face à meta traçada.

Quanto à penalização do número de empregados abaixo do nível de referência (P_2^-) considerei de apenas 1, enquanto para acima do nível de referência (P_2^+) considerei 2, pois considero mais problemático para uma organização devido ao custo elevado de pessoal e acima da expectativa estabelecida; ineficiência operacional devido a possíveis problemas de coordenação, comunicação e colaboração, o que pode pôr em causa a capacidade de a empresa tomar decisões rapidamente; por fim, problemas de espaços e recursos, pois uma equipa grande pode exigir mais espaço e recursos.

Relativamente à penalização do investimento acima do valor máximo definido (P_3^+), considerei de apenas 1, já que, muitas vezes, uma flexibilização do valor do investimento permite obter maiores lucros a longo prazo.

O output encontra-se na figura 3 dos anexos.

Interpretação dos resultados

O **valor ótimo** é, aproximadamente, 0.6797, que é difícil de interpretar pois trata-se da soma de desvios de diferentes naturezas, pelo que como se pretende um valor baixo, podemos concluir que é aceitável.

Quanto à **solução ótima** obtiveram-se os seguintes resultados:

- **X1 = 6.0**: são produzidos 6000 kg de doces D1, que é igual ao valor máximo de produção deste doce permitido (produção_D1 = 0.0)
 - **X2 = 2.3846154**: são produzidos cerca de 2385 kg de doces D2, que está cerca de 1400 kg acima do valor mínimo exigido (produção_D2 = 0.38461539999999994)
 - **X3 = 6.3076923**: são produzidos cerca de 6308 kg de doces D3, que é cerca de 5300 kg superior ao valor mínimo de produção solicitado (produção_D3 = 5.3076923)
-
- **dm1 = 0.0**: a meta do lucro de longo prazo foi cumprida em rigor
 - **dm2 = 0.0; dM2 = 0.0**: a meta do nível de mão de obra atingida, ou seja, conseguiu-se o objetivo de ter 60 empregados
 - **dM3 = 0.0**: o valor do investimento foi igual ao valor máximo definido, pelo que não apresenta qualquer desvio.

ii.ii) Alternativa 2.2

Para uma variante da segunda alternativa, utilizei a mesma formulação da b), mas com pesos diferentes. Considerei os pesos:

$$P_1^- = 3, P_2^- = 2, P_2^+ = 2, P_3^+ = 3$$

Decidi atribuir o peso 3 para a penalização respeitante ao desvio do lucro (P_1^-) pelo mesmo motivo explicado anteriormente na alternativa 2.1.

Quanto à penalização do número de empregados, decidi considerar o mesmo peso tanto para o desvio como estando abaixo do nível de referência (P_2^-), como para peso quando o desvio está acima (P_2^+), pois um número abaixo de empregados pode ser eficiente para um nível de operacionalidade razoável.

Relativamente à penalização do investimento acima do valor máximo definido (P_3^+), considerei de 3, pois muitas vezes esse valor não é flexível e é um sério entrave à realização de projetos.

O output encontra-se na figura 4 dos anexos.

Interpretação dos resultados

O **valor ótimo** é, aproximadamente, 1.038, que é difícil de interpretar pois trata-se da soma de desvios de diferentes naturezas, pelo que como se pretende um valor baixo, podemos concluir que é aceitável.

8

Quanto à **solução ótima** obtiveram-se os seguintes resultados:

- **X1 = 6.0**: são produzidos 6000 kg de doces D1, que é igual ao valor máximo de produção deste doce permitido (produção_D1 = 0.0)
- **X2 = 5.3333333**: são produzidos cerca de 5333 kg de doces D2, que está cerca de 3300 kg acima do valor mínimo exigido (produção_D2 = 3.3333332999999996)
- **X3 = 1.0**: são produzidos 1000 kg de doces D3, que é igual ao valor mínimo de produção solicitado (produção_D3 = 0.0)
- **dm1 = 0.0**: a meta do lucro de longo prazo foi cumprida em rigor
- **dm2 = 15.3333333**: a mão de obra é de 60-15.3 (dm2=15.3), isto é, 44.7, o que corresponde a cerca de 44 empregados, não respeitando a meta do número de funcionários ser 60
- **dm2 = 0.0**: não há qualquer penalização de por cada 5 trabalhadores, 4 pontos por ultrapassar o valor de referência.
- **dm3 = 9.6666667**: há penalização de 5 pontos por cada milhar de euros acima do nível de aspiração do investimento de capital.

d) Comparação de planos de produção e averiguação da existência de planos de produção dominados

Modelos	Lucro (milhares €)	Mão de obra	Investimento (milhares €)
1 - b)	107.60	40.8	55
2 - c) MiniMax	111.47	43.76	60.95
3 - c) *	125	60	92.38
4 - c)**	124.99	44.66	64.66

Notas: * - $P_1^- = 3$, $P_2^- = 1$, $P_2^+ = 2$, $P_3^+ = 1$

** - $P_1^- = 3$, $P_2^- = 2$, $P_2^+ = 2$, $P_3^+ = 3$

Podemos observar que o plano de produção obtido em c) com o modelo 3 tem o maior lucro (125) e que está alinhado com o valor mínimo em milhares de euros do lucro pretendido, enquanto o plano de produção obtido em b) com o modelo 1 tem o menor lucro (107.60). Em termos de mão de obra, o plano de produção obtido em c) com o modelo 3 está alinhado com a mão de obra requerida (60), enquanto o plano de produção obtido em b) com o modelo 1 requer o menor uso de mão de obra (40.8 – 40 trabalhadores). Em relação ao investimento, o plano de produção obtido em c) com o

modelo 3 requer o maior investimento (92.38), enquanto o plano de produção obtido em b) com o modelo 1 requer o menor investimento (55), que está alinhado com o valor máximo do investimento requerido em milhares de euros.

Um plano de produção diz-se dominado se é melhor em, pelo menos, um dos objetivos e não é pior no outro objetivo.

Cada plano de produção representa um compromisso entre as três metas definidas pela direção da Confeitaria. A partir desses resultados, podemos concluir que não há planos de produção dominados, ou seja, não há soluções que possam ser melhoradas em pelo menos um objetivo sem piorar em outro objetivo.

e) Programação de Metas Preemptiva

A direção da Confeitaria reavaliou as prioridades das três metas e decidiu dar uma prioridade muito elevada à meta de mão de obra, bem como à meta de investimento de capital. A meta de angariar mais de 55 milhões de euros para investimento de capital foi considerada extremamente difícil de ser alcançada.

Como se estabelece uma hierarquia de níveis de prioridade, trata-se de **Programação por Metas Preemptiva**.

Formulação do problema (antes das alterações dos valores de referência)

$$Lex \min Z = \left\{ \frac{P_3^+ * d_3^+}{55} + \frac{P_2^+ * d_2^+}{60} + \frac{P_2^- * d_2^-}{60}, \frac{P_1^- * d_1^-}{125} \right\}$$

Primeiro nível

$$\min P = P_2^- * \frac{d_2^-}{60} + P_2^+ * \frac{d_2^+}{60} + P_3^+ * \frac{d_3^+}{55}$$

$$\text{s.a. } x_1 \leq 6$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_3 \geq 1$$

$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - d_2^+ + d_2^- = 60$$

$$5x_1 + 5x_2 + 8x_3 - d_3^+ \leq 55$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$d_2^-, d_2^+, d_3^+ \geq 0$$

A formulação das prioridades de 2º nível será escrita posteriormente após o ajuste dos níveis de aspiração da formulação das prioridades de 1º nível.

Nível de prioridade 1 (pesos iniciais, antes das alterações dos valores de referência)

Para a primeira solução irei utilizar os presos pré-estabelecidos anteriormente na alínea a).

O output encontra-se na figura 5 dos Anexos.

Interpretação dos resultados

10

O **valor ótimo** é, aproximadamente, 0.616, que é difícil de interpretar pois trata-se da soma de desvios de diferentes naturezas, pelo que como se pretende um valor baixo, podemos concluir que é aceitável.

Quanto à **solução ótima** obtiveram-se os seguintes resultados:

- **X1 = 6.0:** são produzidos 6000 kg de doces D1, que é igual ao valor máximo de produção deste doce permitido ($\text{produção_D1} = 0.0$)
- **X2 = 2.0:** são produzidos cerca de 2000 kg de doces D2, que está alinhado com o valor mínimo exigido ($\text{produção_D2} = 0.0$)
- **X3 = 1.875:** são produzidos 1875 kg de doces D3, que é superior 875 kg ao valor mínimo de produção solicitado ($\text{produção_D3} = 0.875$)
- **dm2 = 18.5:** a mão de obra é de 60-18.5 ($\text{dm2}=18.5$), isto é, 41.5, o que corresponde a cerca de 41 empregados, não respeitando a meta do número de funcionários ser 60
- **dM2 = 0.0:** não há qualquer penalização de por cada 5 trabalhadores, 4 pontos por ultrapassar o valor de referência.
- **dM3 = 0.0:** não há qualquer penalização de 5 pontos por cada milhar de euros acima do nível de aspiração do investimento de capital.

Assim, vamos reformular a meta para o número de funcionários ser 41.

Nível de prioridade 1 (pesos iniciais, depois das alterações dos valores de referência)

Reformulação do problema

Em seguida, apresenta-se a reformulação do problema para o novo nível de referência para o número de trabalhadores (41).

$$\min P = P_2^- * \frac{d_2^-}{60} + P_2^+ * \frac{d_2^+}{60} + P_3^+ * \frac{d_3^+}{55}$$

$$\text{s.a. } x_1 \leq 6$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_3 \geq 1$$

$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - d_2^+ + d_2^- = 41$$

$$5x_1 + 5x_2 + 8x_3 - d_3^+ \leq 55$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$d_2^-, d_2^+, d_3^+ \geq 0$$

O output encontra-se na figura 6 dos Anexos.

Interpretação dos resultados

O **valor ótimo** é, 0.0, pelo que se conclui que conciliou-se na perfeição a conjugação das penalizações das diferentes metas, não havendo qualquer uma.

Quanto à **solução ótima** obtiveram-se os seguintes resultados:

- **X1 = 6.0:** são produzidos 6000 kg de doces D1, que é igual ao valor máximo de produção deste doce permitido (produção_D1 = 0.0)
- **X2 = 2.0:** são produzidos cerca de 2000 kg de doces D2, que está alinhado com o valor mínimo exigido (produção_D2 = 0.0)
- **X3 = 1.75:** são produzidos 1750 kg de doces D3, que é superior 750 kg ao valor mínimo de produção solicitado (produção_D3 = 0.0)
- **dm2 = 0.0:** não há qualquer penalização de por cada 5 trabalhadores, 10 pontos por estar abaixo do valor de referência.
- **dM2 = 0.0:** não há qualquer penalização de por cada 5 trabalhadores, 4 pontos por ultrapassar o valor de referência.
- **dM3 = 0.0:** não há qualquer penalização de 5 pontos por cada milhar de euros acima do nível de aspiração do investimento de capital.

Assim, é de realçar apenas a produção de 750 kg do doce 3 acima do valor mínimo de produção solicitado.

Nível de prioridade 2 (pesos iniciais, antes das alterações dos valores de referência)

O output encontra-se na figura 7 dos Anexos.

Interpretação dos resultados

12

O **valor ótimo** é 0.79, que é difícil de interpretar pois trata-se da soma de desvios de diferentes naturezas, pelo que como se pretende um valor baixo, podemos concluir que é aceitável.

Quanto à **solução ótima** obtiveram-se os seguintes resultados:

- **X1 = 6.0**: são produzidos 6000 kg de doces D1, que é igual ao valor máximo de produção deste doce permitido (produção_D1 = 0.0)
- **X2 = 3.0**: são produzidos 3000 kg de doces D2, que está 1000 kg acima do valor mínimo exigido (produção_D2 = 1.0)
- **X3 = 1.25**: são produzidos 1250 kg de doces D3, que é superior 250 kg ao valor mínimo de produção solicitado (produção_D3 = 0.25)
- **dm1 = 19.75**: o lucro mínimo é de 125 000 - 19750 (dm1=19.75), isto é, 105 250 milhares de euros, não respeitando a meta do lucro mínimo de longo prazo ser de 125 mil euros.

Assim, vamos reformular a meta para o lucro mínimo de longo prazo ser de 105 250 euros.

Nível de prioridade 2 (pesos iniciais, depois das alterações dos valores de referência)

Reformulação do problema

Em seguida, apresenta-se a reformulação do problema para o novo lucro mínimo de longo prazo de 105 250 euros.

$$\min P = P_1^- * \frac{d_1^-}{125}$$

$$\text{s.a. } x_1 \leq 6$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_3 \geq 1$$

$$12x_1 + 9x_2 + 5x_3 + d_1^- \geq 105.25$$

$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 41$$

$$5x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 55$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$d_1^- \geq 0$$

O output encontra-se na figura 8 dos Anexos.

Interpretação dos resultados

O **valor ótimo** é, 0.0, pelo que se conclui que conciliou-se na perfeição a conjugação das penalizações das diferentes metas, não havendo qualquer uma.

Quanto à **solução ótima** obtiveram-se os seguintes resultados:

- **X1 = 6.0:** são produzidos 6000 kg de doces D1, que é igual ao valor máximo de produção deste doce permitido (produção_D1 = 0.0)
- **X2 = 3.0:** são produzidos cerca de 3000 kg de doces D2, que está acima 1000 kg do valor mínimo exigido (produção_D2 = 1.0)
- **X3 = 1.25:** são produzidos 1250 kg de doces D3, que é superior 250 kg ao valor mínimo de produção solicitado (produção_D3 = 0.25)
- **dm1 = 0.0:** não há qualquer penalização de 5 pontos por cada milhar de euros abaixo do nível de aspiração do lucro;

Assim, é de realçar apenas a produção de 1000 kg do doce 2 acima do valor mínimo esperado e de 250 kg do doce 3 acima do valor mínimo de produção solicitado.

$$P_1^- = 5, P_2^- = 5, P_2^+ = 3, P_3^+ = 2$$

Nível de prioridade 1 (pesos alterados, antes das alterações dos valores de referência)

A formulação do problema para as metas de prioridade de nível 1 é a mesma para os pesos iniciais.

O output encontra-se na figura 9 dos Anexos.

Interpretação dos resultados

O **valor ótimo** é, aproximadamente, 1.345 que é difícil de interpretar pois trata-se da soma de desvios de diferentes naturezas, pelo que como se pretende um valor baixo, podemos concluir que é aceitável.

14

Quanto à **solução ótima** obtiveram-se os seguintes resultados:

- **X1 = 6.0:** são produzidos 6000 kg de doces D1, que é igual ao valor máximo de produção deste doce permitido (produção_D1 = 0.0)
- **X2 = 2.0:** são produzidos 2000 kg de doces D2, que está alinhado com o valor mínimo exigido (produção_D2 = 0.0)
- **X3 = 6.5:** são produzidos 6500 kg de doces D3, que é superior 5500 kg ao valor mínimo de produção solicitado (produção_D3 = 5.5)
- **dm2 = 0.0:** não há qualquer penalização de por cada 5 trabalhadores, 10 pontos por ultrapassar o nível de referência.
- **dM2 = 0.0:** não há qualquer penalização de por cada 5 trabalhadores, 4 pontos por ultrapassar o valor de referência.
- **dM3 = 37.0:** o nível de investimento requerido está 37 mil euros acima do valor máximo de investimento que é de 55 mil euros, o que significa que se está a exigir 92 mil euros de investimento.

Assim, vamos reformular a meta para o valor máximo do investimento ser de 92 000 euros.

Nível de prioridade 1 (pesos alterados, depois das alterações dos valores de referência)

Reformulação do problema

Em seguida, apresenta-se a reformulação do problema para o valor máximo do investimento ser de 92 000 euros.

O output encontra-se na figura 10 dos Anexos.

Interpretação dos resultados

O **valor ótimo** é, 0.0, pelo que se conclui que conciliou-se na perfeição a conjugação das penalizações das diferentes metas, não havendo qualquer uma.

Quanto à **solução ótima** obtiveram-se os seguintes resultados:

- **X1 = 6.0:** são produzidos 6000 kg de doces D1, que é igual ao valor máximo de produção deste doce permitido (produção_D1 = 0.0)
- **X2 = 2.0:** são produzidos 2000 kg de doces D2, que está alinhado com o valor mínimo exigido (produção_D2 = 0.0)
- **X3 = 6.5:** são produzidos 6500 kg de doces D3, que é superior 5500 kg ao valor mínimo de produção solicitado (produção_D3 = 5.5)

- **dm2 = 0.0:** não há qualquer penalização de por cada 5 trabalhadores, 10 pontos por ultrapassar o nível de referência.
- **dM2 = 0.0:** não há qualquer penalização de por cada 5 trabalhadores, 4 pontos por ultrapassar o valor de referência.
- **dM3 = 0.0:** não há qualquer penalização de 5 pontos por cada milhar de euros acima do nível de aspiração do investimento de capital.

Assim, é de realçar a produção de 5500 kg do doce 2 acima do valor mínimo e a necessidade de uma flexibilidade significativa do valor máximo do investimento.

Nível de prioridade 2 (pesos alterados, antes das alterações dos valores de referência)

O output encontra-se na figura 11 dos Anexos.

Interpretação dos resultados

O **valor ótimo** é, 0.1, pelo que se conclui que conciliou-se quase na perfeição a conjugação das penalizações das diferentes metas, não havendo qualquer uma.

Quanto à **solução ótima** obtiveram-se os seguintes resultados:

- **X1 = 6.0:** são produzidos 6000 kg de doces D1, que é igual ao valor máximo de produção deste doce permitido (produção_D1 = 0.0)
- **X2 = 2.0:** são produzidos 2000 kg de doces D2, que está alinhado com o valor mínimo exigido (produção_D2 = 0.0)
- **X3 = 6.5:** são produzidos 6500 kg de doces D3, que é superior 5500 kg ao valor mínimo de produção solicitado (produção_D3 = 5.5)

- **dm1 = 2.5:** o lucro mínimo a longo prazo é de 125 000 - 2500 (dm1 = 2.5), isto é, 100 000 euros, não respeitando a meta do lucro mínimo de longo prazo ser de 125 mil euros.

Nível de prioridade 2 (pesos alterados, depois das alterações dos valores de referência)

Reformulação do problema

Em seguida, apresenta-se a reformulação do problema para um lucro mínimo de 100 000 euros.

$$\min P = P_1^- * \frac{d_1^-}{125}$$

$$\text{s.a. } x_1 \leq 6$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_3 \geq 1$$

$$12x_1 + 9x_2 + 5x_3 + d_1^- \geq 100$$

$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 60$$

$$5x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 92$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$d_1^- \geq 0$$

O output encontra-se na figura 12 dos Anexos.

Interpretação dos resultados

O **valor ótimo** é, 0.0, pelo que se conclui que conciliou-se na perfeição a conjugação das penalizações das diferentes metas, não havendo qualquer uma.

Quanto à **solução ótima** obtiveram-se os seguintes resultados:

- **X1 = 6.0:** são produzidos 6000 kg de doces D1, que é igual ao valor máximo de produção deste doce permitido (produção_D1 = 0.0)
- **X2 = 2.0:** são produzidos 2000 kg de doces D2, que está alinhado com o valor mínimo exigido (produção_D2 = 0.0)
- **X3 = 6.5:** são produzidos 6500 kg de doces D3, que é superior 5500 kg ao valor mínimo de produção solicitado (produção_D3 = 5.5)

- **dm1 = 0.0:** não há qualquer penalização de 5 pontos por cada milhar de euros abaixo do nível de aspiração do lucro;

Assim, é de realçar apenas as produções acima do valor mínimos de referência para os doces 2 e 3. Como o valor anterior da função objetivo era de 0.1, esta alteração poderia nem ter sido feita.

17

Comparação entre as duas soluções da e)

Enquanto na primeira solução é necessário flexibilizar o número de empregados, na segunda é necessário flexibilizar significativamente o investimento, sendo também as espetativas de lucro reformuladas inferior à da primeira solução, pelo que seria recomendável escolher a solução com os pesos iniciais.

Conclusão

Em suma, a aplicação de técnicas de otimização heurística pode ajudar a confeitaria a determinar a produção ideal para os novos doces, permitindo conciliar as metas estabelecidas com as exigências do mercado. Através da análise de diversos fatores (apesar de alguns não contemplados neste problema), como a procura do mercado, a disponibilidade de recursos e os custos de produção, é possível encontrar soluções eficientes e eficazes que maximizem os lucros e minimizem os desperdícios. Além disso, a utilização de técnicas de otimização heurística permite uma abordagem mais sistemática e racional para lidar com problemas complexos, resultando em decisões mais informadas e precisas. Assim, a aplicação de técnicas de otimização heurística pode ser uma valiosa ferramenta para a confeitaria enfrentar os desafios do mercado e alcançar o sucesso nos seus negócios.

Bibliografia

- Burke, E. K.; Kendall, G. (Eds.) (2014).
- Search Methodologies: Introductory Tutorials in Optimization and Decision Support, 2 nd edition, Springer.
- Siarry, P. (Ed.) (2016). Metaheuristics, Springer.
- Ehrgott, M. (2005). Multicriteria Optimization, 2nd edition, Springer.
- Ragsdale, C.T. (2017). Spreadsheet Modeling and Decision Analysis: A Practical Introduction to Business Analytics. 8th Ed. Cengage Learning.
- Documentos de apoio fornecidos pela equipa docente.

Anexos

```
objective: 1.3359999999999999
x1: 6.0
x2: 3.4
x3: 1.0
dm1: 17.4
dm2: 19.2
dM2: 0.0
dM3: 0.0
produção_D1: 0.0
produção_D2: 1.4
produção_D3: 0.0
Lucro_a_longo_prazo: -3.552713678800501e-15
Mão_de_obra: 0.0
Investimento: 0.0
```

Figura 1 - Output do resultados do modelo formulado em a)

```
objective: 0.54120267
x1: 6.0
x2: 3.4253898
x3: 1.7282851
dm1: 13.530067
dm2: 16.23608
dM2: 0.0
dM3: 5.9532294
Q: 0.54120267
produção_D1: 0.0
produção_D2: 1.4253898
produção_D3: 0.7282850999999999
Lucro_a_longo_prazo: 7.000000028511977e-07
Mão_de_obra: 0.0
Investimento: 3.9999999934536845e-07
Restricao_dm1_lucro: 1.0000000050247593e-08
Restricao_dm2_trabalhadores: -0.54120267
Restricao_dm3_investimento: -3.3333332760676626e-09
Restrição_dm3_investimento: 2.727272740976616e-09
```

Figura 2 - Output do resultados do modelo MiniMax

```
objective: 0.6797202727272726
x1: 6.0
x2: 2.3846154
x3: 6.3076923
dm1: 0.0
dm2: 0.0
dM2: 0.0
dM3: 37.384615
produção_D1: 0.0
produção_D2: 0.38461539999999994
produção_D3: 5.3076923
Lucro_a_longo_prazo: 1.0000000116860974e-07
Mão_de_obra: 0.0
Investimento: 4.0000000467443897e-07
```

Figura 3 - Output do resultados do modelo formulado em a), mas com pesos diferentes

```
objective: 1.0383838290909089
x1: 6.0
x2: 5.3333333
x3: 1.0
dm1: 0.0
dm2: 15.333333
dM2: 0.0
dM3: 9.6666667
produção_D1: 0.0
produção_D2: 3.3333332999999996
produção_D3: 0.0
Lucro_a_longo_prazo: -3.0000000350582923e-07
Mão_de_obra: -4.000000011217253e-07
Investimento: -2.0000000233721948e-07
```

Figura 4 - Output do resultados do modelo formulado em a), mas com pesos diferentes (versão 2)

```
objective: 0.6166666666666667
x1: 6.0
x2: 2.0
x3: 1.875
dm2: 18.5
dM2: 0.0
dM3: 0.0
produção_D1: 0.0
produção_D2: 0.0
produção_D3: 0.875
Mão_de_obra: 0.0
Investimento: 0.0
```

Figura 5 - Output para o nível de prioridade 1 (pesos iniciais, antes das alterações dos valores de referência)

```
objective: 0.0
x1: 6.0
x2: 2.0
x3: 1.75
dm2: 0.0
dM2: 0.0
dM3: 0.0
produção_D1: 0.0
produção_D2: 0.0
produção_D3: 0.75
Mão_de_obra: 0.0
Investimento: -1.0
```

Figura 6 - Output para o nível de prioridade 1 (pesos iniciais, depois das alterações dos valores de referência)

```

objective: 0.79
x1: 6.0
x2: 3.0
x3: 1.25
dm1: 19.75
produção_D1: 0.0
produção_D2: 1.0
produção_D3: 0.25
Lucro_a_longo_prazo: 0.0
Mão_deobra: 0.0
Investimento: 0.0

```

Figura 7 - Output para o nível de prioridade 2 (pesos iniciais, antes das alterações dos valores de referência)

```

objective: 0.0
x1: 6.0
x2: 3.0
x3: 1.25
dm1: 0.0
produção_D1: 0.0
produção_D2: 1.0
produção_D3: 0.25
Lucro_a_longo_prazo: 0.0
Mão_deobra: 0.0
Investimento: 0.0

```

Figura 8 - Output para o nível de prioridade 2 (pesos iniciais, depois das alterações dos valores de referência)

```

objective: 1.3454545454545455
x1: 6.0
x2: 2.0
x3: 6.5
dm2: 0.0
dM2: 0.0
dM3: 37.0
produção_D1: 0.0
produção_D2: 0.0
produção_D3: 5.5
Mão_deobra: 0.0
Investimento: 0.0

```

Figura 9 - Output para o nível de prioridade 1 (pesos alterados, antes das alterações dos valores de referência)

```

objective: 0.0
x1: 6.0
x2: 2.0
x3: 6.5
dm2: 0.0
dM2: 0.0
dM3: 0.0
produção_D1: 0.0
produção_D2: 0.0
produção_D3: 5.5
Mão_deobra: 0.0
Investimento: 0.0

```

Figura 10 - Output para o nível de prioridade 1 (pesos alterados, depois das alterações dos valores de referência)

```

objective: 0.1
x1: 6.0
x2: 2.0
x3: 6.5
dm1: 2.5
produção_D1: 0.0
produção_D2: 0.0
produção_D3: 5.5
Lucro_a_longo_prazo: 0.0
Mão_deobra: 0.0
Investimento: 0.0

```

Figura 11 - Output para o nível de prioridade 2 (pesos alterados, antes das alterações dos valores de referência)

```

objective: 0.0
x1: 6.0
x2: 2.0
x3: 6.5
dm1: 0.0
produção_D1: 0.0
produção_D2: 0.0
produção_D3: 5.5
Lucro_a_longo_prazo: 22.5
Mão_deobra: 0.0
Investimento: 0.0

```

Figura 12 - Output para o nível de prioridade 2 (pesos alterados, depois das alterações dos valores de referência)