

Control I

Tarea 9. Observadores de Estado
Saturday 25th April, 2020

Marco Antonio Esquivel Basaldua

Se tiene el sistema cuya función de transferencia es

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{(s+0.5)(s+0.1)(s+5)} = \frac{2}{s^3 + 5.6s^2 + 3.05s + 0.25}$$

El polinomio característico $a(s)$ es

$$a(s) = s^3 + 5.6s^2 + 3.05s + 0.25$$

La representación en variables de estado se calcula de la siguiente manera.

Se multiplica por el valor $\frac{Z(s)}{Z(s)}$ la función de transferencia con lo que no se altera su valor y se separan las expresiones de numerador y denominador.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^3 + 5.6s^2 + 3.05s + 0.25} \frac{Z(s)}{Z(s)}$$

$$Y(s) = 2Z(s)$$

$$U(s) = Z(s)s^3 + 5.6Z(s)s^2 + 3.05Z(s)s + 0.25Z(s)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace en $Y(s)$ y $U(s)$ se obtiene

$$y(t) = 2z(t)$$

$$u(t) = \ddot{z}(t) + 5.6\dot{z}(t) + 3.05z(t) + 0.25z(t)$$

$$\ddot{z}(t) = u(t) - 5.6\dot{z}(t) - 3.05z(t) - 0.25z(t)$$

Se define el vector \mathbf{x}

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{bmatrix}$$

Se obtiene la representación en variables de estado

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \ddot{z}(t) \\ \dddot{z}(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ u(t) - 5.6x_3 - 3.05x_2 - 0.25x_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.25 & -3.05 & -5.6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= 2x_1 \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

A partir de la representación en variables de estado se definen las matrices A, B y C.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.25 & -3.05 & -5.6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I. DISEÑO DEL OBSERVADOR EN LAZO ABIERTO

Para el diseño de un observador se requiere que el sistema sea completamente observable. Recordamos que un sistema es observable si su matriz de observabilidad es de rango completo. En este caso ya que la matriz de observabilidad es cuadrada, es suficiente con comprobar que su determinante sea diferente a cero.

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\det(\mathcal{O}) = 8 \neq 0$$

Adicionalmente se calcula la matriz de controlabilidad del sistema y se comprueba que es controlable obteniendo su determinante y comprobando que se trata de una matriz no singular.

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5.6 \\ 1 & -5.6 & 28.31 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\det(\mathcal{C}) = -1 \neq 0$$

El observador en lazo abierto genera un vector de estados estimados a partir de una estimación inicial del estado y de la siguiente expresión.

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + Bu$$

Esta duplicación resulta en un diagrama de bloques como la que se muestra en la figura 1.

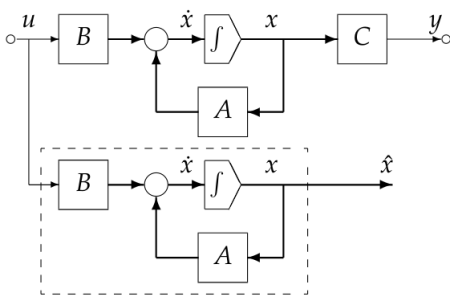


Figura 1. Observador en lazo abierto.

Para un observador cuya condición inicial es igual a la condición inicial del sistema real, $\mathbf{x}(0) = \hat{\mathbf{x}}(0)$, y al cual no se aplica una entrada de control, es decir $u(t) = 0$, se obtienen los siguientes resultados, con la condición inicial dada para un tiempo de 0 a 60 segundos. De manera adicional, se incluyen los resultados obtenidos para la salida real del sistema.

$$\mathbf{x}(0) = \hat{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

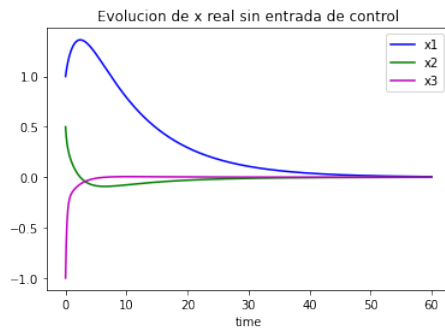


Figura 2. Evolución del vector de estados \mathbf{x} .

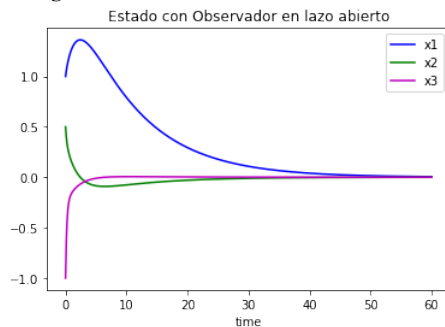


Figura 3. Evolución del vector estimado $\hat{\mathbf{x}}$.

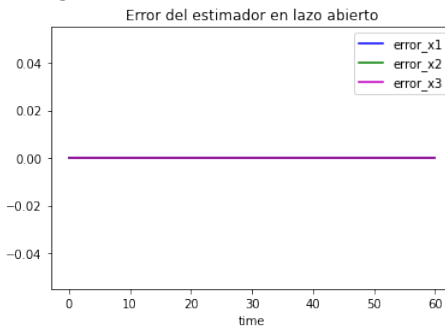


Figura 4. Error generado entre los vectores \mathbf{x} y $\hat{\mathbf{x}}$.

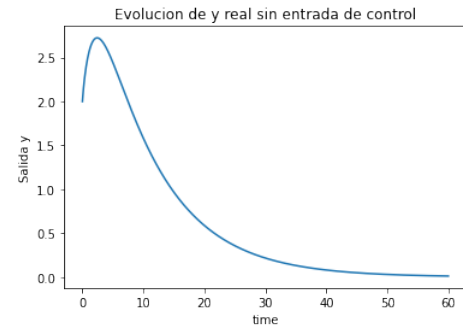


Figura 5. Evolución de la salida y .

Los valores generados para el vector de estimaciones $\hat{\mathbf{x}}$ son exactamente iguales a los valores en el vector de estados \mathbf{x} , ya que, al tener la misma condición inicial, la ecuación diferencial que genera la evolución de los valores es exactamente la misma.

Cabe señalar que el tiempo de establecimiento del sistema, cuando los valores del vector de estados y de la salida son igualados a cero, es poco menor a los 50 segundos.

Supongamos ahora que la condición inicial en el estimador es ligeramente distinta a la condición inicial en el sistema real. En este caso se considera

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} 1.6 \\ 0.8 \\ -0.87 \end{bmatrix}$$

Se obtienen los siguientes resultados para el mismo lapso de tiempo anterior.

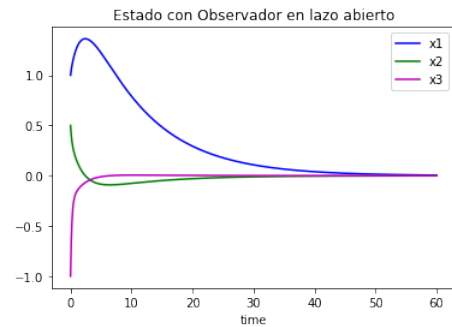


Figura 6. Evolución del vector estimado $\hat{\mathbf{x}}$.

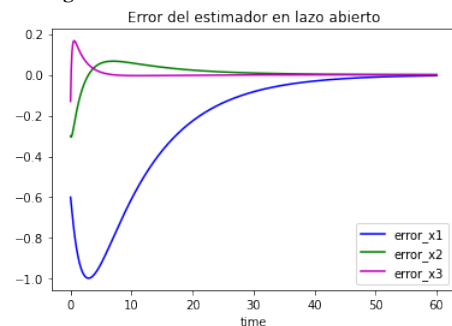


Figura 7. Error generado entre los vectores \mathbf{x} y $\hat{\mathbf{x}}$.

Se puede observar que, ya que no se trabaja con la misma condición inicial, existe inicialmente un error entre el estado real y el estado estimado, sin embargo el error tiende a cero a medida que la dinámica del sistema avanza, igualando los

valores reales del estado en un tiempo aproximado de 50 segundos.

II. OBSERVADOR EN LAZO CERRADO

Se usa el valor $y(t)$ para mejorar el diseño del observador introduciendo una corrección proporcional al error de estimación de la salida. Este error se calcula como

$$\tilde{y}(t) = y(t) - \hat{y}(t) = C\mathbf{x}(t) - C\hat{\mathbf{x}}(t) = C\tilde{\mathbf{x}}(t)$$

Se agrega en el diseño de la figura 1 la señal de corrección $L(y(t) - C\hat{\mathbf{x}}(t))$, donde L es una matriz $n \times 1$ de ganancias constantes. El resultado se muestra en la figura 8.

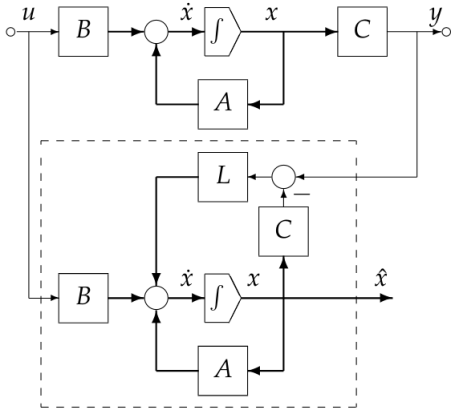


Figura 8. Observador en lazo cerrado.

El valor estimado del vector de estados es entonces

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + Bu(t) + L[y(t) - C\hat{\mathbf{x}}(t)]$$

A. Observador en lazo cerrado aplicado al sistema en lazo abierto

Siguiendo con el sistema presentado en la sección I, se desea implementar un observador en lazo cerrado para la estimación del vector de estados en lazo abierto considerando que el estimador tiene diferentes condiciones iniciales que el sistema original y al cual no se aplica una señal de entrada de control.

Un paso fundamental es el cálculo del vector de ganancias L para lo cual se necesita determinar primeramente el polinomio característico deseado para el observador. Conociendo de antemano el polinomio característico del sistema original, se requiere un observador más rápido que el propio sistema por lo que los polos deseados en el observador se obtendrán al multiplicar por un factor de 5 los polos del sistema original. El polinomio deseado es entonces:

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (s + 0.25)(s + 0.5)(s + 25) \\ &= s^3 + 25.75s^2 + 18.875s + 3.125\end{aligned}$$

A partir del diagrama de bloques de la figura 8, se obtiene que el polinomio característico del observador se define como

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= \det[sI - (A - LC)] \\ &= s^3 + (5.6 + 2L_1)s^2 + (3.05 + 11.2L_1 + 2L_2)s \\ &\quad + 0.25 + 6.1L_1 + 11.2L_2 + 2L_3\end{aligned}$$

Al comparar ambas expresiones de $\alpha(s)$ se establece que

$$5.6 + 2L_1 = 25.75$$

$$3.05 + 11.2L_1 + 2L_2 = 18.875$$

$$0.25 + 6.1L_1 + 11.2L_2 + 2L_3 = 3.125$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtienen los valores para cada elemento dentro del vector de ganancias L .

$$L_1 = 10.075$$

$$L_2 = -48.507$$

$$L_3 = 242.351$$

En simulación se utiliza la función de ackerman para encontrar estos valores.

$$L = \text{acker}(A^T, C^T, [-0.25, -0.5, -25])^T$$

Para un vector inicial en el sistema real definido como

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

y un vector inicial para el observador estimado como en la implementación anterior

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} 1.6 \\ 0.8 \\ -0.87 \end{bmatrix}$$

se obtienen los siguientes resultados. Se recuerda que los valores reales del estado se presentan en la figura 2.

Estado con Observador en lazo cerrado, condicion inicial con ligeras perturbaciones

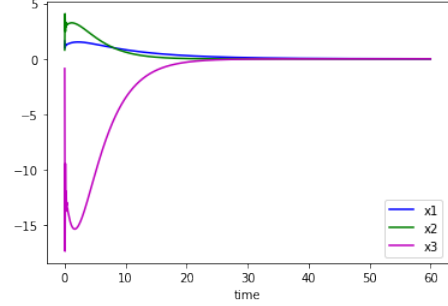


Figura 9. Evolución del vector estimado $\hat{\mathbf{x}}$ en lazo cerrado.

Error del estimador en lazo cerrado

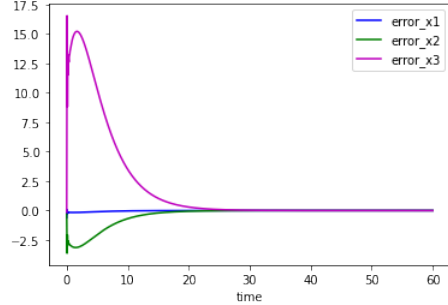


Figura 10. Error generado entre los vectores \mathbf{x} y $\hat{\mathbf{x}}$.

Se puede observar que el error $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ llega al valor 0, es decir que ya no existe diferencia entre los valores reales y estimados, en un tiempo de alrededor de 25 segundos. Este tiempo de establecimiento es menor que el

que se obtiene en el observador en lazo abierto.

Adicionalmente se incluyen los resultados de la salida estimada y el error obtenido en relación a la salida real. Se recuerda que los resultados reales de la salida se presentan en la figura 5.

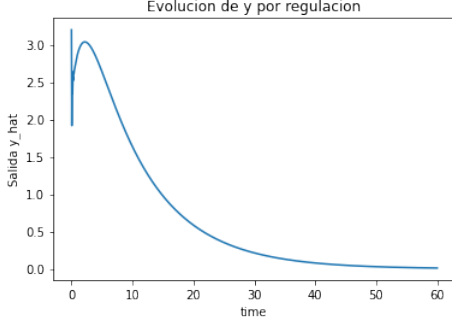


Figura 11. Evolución de la salida estimada \hat{y} en lazo cerrado.

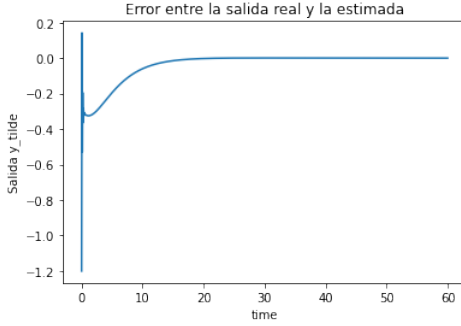


Figura 12. Error generado entre la salida real y y la salida estimada \hat{y} .

III. EL PROBLEMA DE REGULACIÓN

Se desea resolver el problema de regulación con las especificaciones dadas en la tarea anterior en la que se solicitaba un factor de amortiguamiento de 0.5 y un tiempo de asentamiento de 2 segundos. Tal como se especificó, los polos del sistema deseado son

$$s_1 = -2 + 3.4641i$$

$$s_2 = -2 - 3.4641i$$

$$s_3 = -10$$

Se realizará una comparativa entre los resultados obtenidos ante una realimentación del estado real y ante una realimentación del estado estimado para una entrada tipo escalón unitario.

Inicialmente se calculan los vectores de ganancias tanto para el controlador K como para el observador L utilizando la fórmula de ackerman en simulación. Se debe recordar que el observador debe ser más rápido que el controlador, por lo que los polos del observador se obtienen al multiplicar por un valor de 5 los polos deseados en el controlador. Los resultados obtenidos son

$$K = [159.75, 52.95, 8.4]$$

$$L = [32.2, 518.15, 7000]^T$$

Las condiciones iniciales para el sistema real como para el estimador serán los vectores $\mathbf{x}(0)$ y $\hat{\mathbf{x}}(0)$ que se han venido utilizando en las secciones anteriores. Los resultados obtenidos para el vector de estados se muestran a continuación.

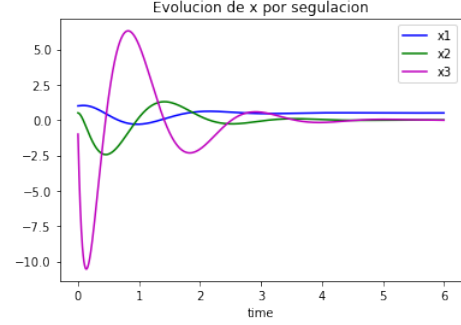


Figura 13. Vector de estado real en el problema de regulación.

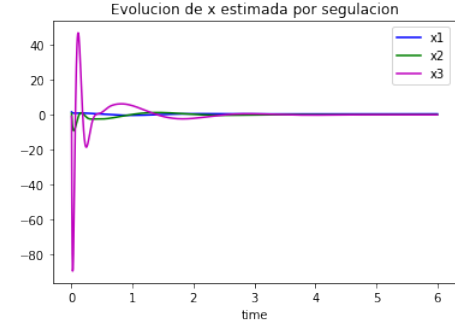


Figura 14. Vector de estado estimado en el problema de regulación.

El error que se obtiene entre $\mathbf{x}(t)$ y $\hat{\mathbf{x}}(t)$ se muestra a continuación.

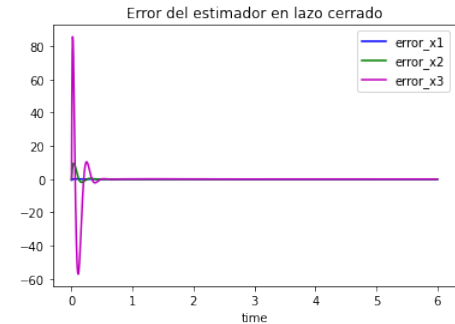


Figura 15. Error entre $\mathbf{x}(t)$ y $\hat{\mathbf{x}}(t)$.

Se observa que el error entre los estados rápidamente llega a cero, en un tiempo menor a 1 segundo, con lo que los estados estimados igualan a los estados reales.

De forma adicional se incluyen las gráficas de la salida real y la salida estimada.

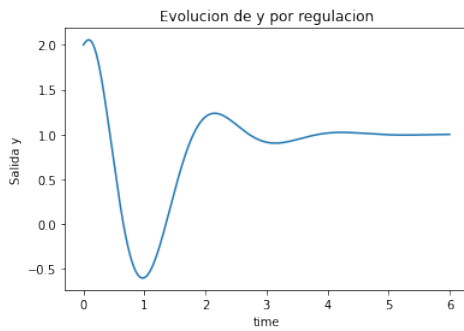


Figura 16. Salida real en el problema de regulación.

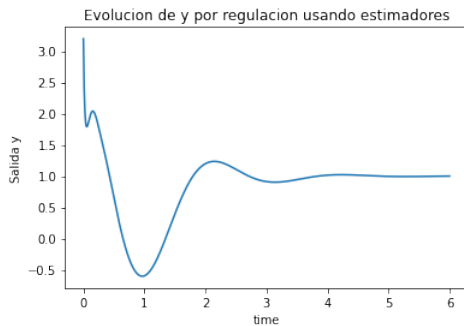


Figura 17. Salida estimada en el problema de regulación.

Aunque en un principio se dijo que se requiere un sistema con un tiempo de asentamiento de 2 segundos, en este caso el establecimiento de la salida en el valor del escalón unitario se da aproximadamente a los 3.5 segundos. Esto es debido a que las condiciones iniciales en el sistema no parten del reposo por lo que el tiempo de establecimiento se comienza a medir desde el segundo 1.5 aproximadamente que es cuando la salida inicia en cero y comienza a acercarse al valor unitario. Se puede apreciar la similitud entre las gráficas y a manera de dar más información se tiene que el máximo sobreimpulso en la salida real es de 0.23604 mientras que en la salida estimada es de 0.23605 con lo que se obtiene una buena estimación. Adicionalmente se incluye la gráfica de error $\hat{y}(t)$.

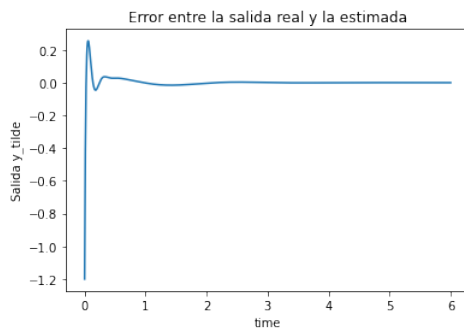


Figura 18. Error entre $y(t)$ y $\hat{y}(t)$.

El error entre la salida real y la estimada, es llevado a cero en un tiempo de alrededor de un segundo.

Aplicando la regulación por realimentación de estados se logra un tiempo de establecimiento mucho menor que el que le tomaba al sistema en lazo abierto ya que bajó de más de 50 segundos a tan solo 2 segundos, incluso usando una realimentación estimada.

IV. ESQUEMA CONTROLADOR-OBSERVADOR

Siguiendo con las condiciones iniciales dadas anteriormente, se genera un sistema de acuerdo al esquema de controlador-observador como se muestra en la figura 19. Adicionalmente, para usar el vector de ganancias K antes calculada, se premultiplica la referencia de entrada r por un factor \bar{N} para eliminar el error en estado estacionario, que se calcula como

$$\bar{N} = -\frac{1}{C[A - BK]^{-1}B}$$

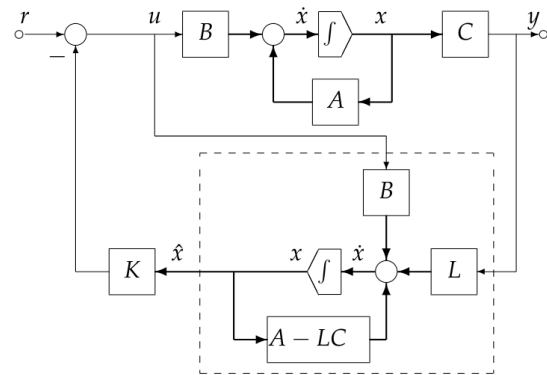


Figura 19. Esquema Controlador-Observador.

Se presentan dos versiones para la implementación. La primera de ellas usando un observador "rápido" en el que sus polos están ubicados cinco veces más alejados que los polos en el controlador. En la segunda implementación se usa un observador "lento" cuyos polos están ubicados en los mismos valores que los polos en el controlador.

Observador rápido

Los resultados para un observador rápido se muestran a continuación.

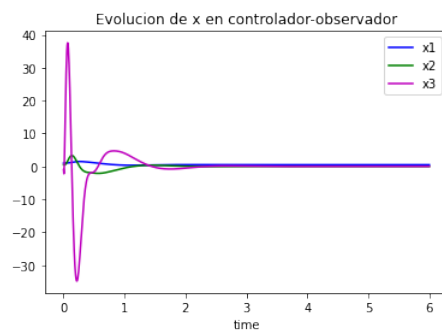


Figura 20. Vector de estados real en el esquema controlador-observador.

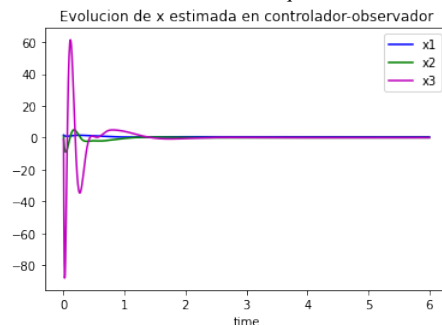


Figura 21. Vector de estados estimado en el esquema controlador-observador.



Figura 22. Salida real en el esquema controlador-observador.

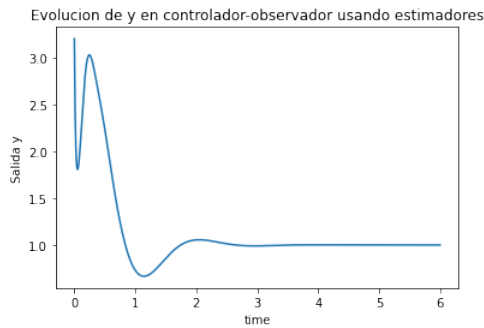


Figura 23. Salida estimada en el esquema controlador-observador.

Los errores generados con este observador se presentan a continuación.

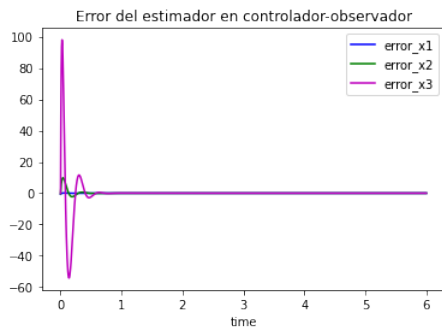


Figura 24. Error entre el vector de estados real y el estimado.

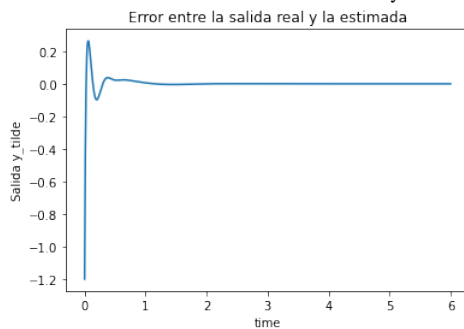


Figura 25. Error entre la salida real y la salida estimada.

Observador lento

Los resultados para un observador lento se muestran a continuación.

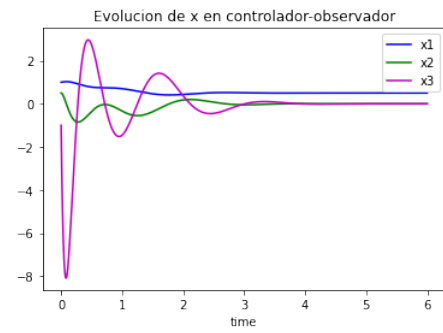


Figura 26. Vector de estados real en el esquema controlador-observador.

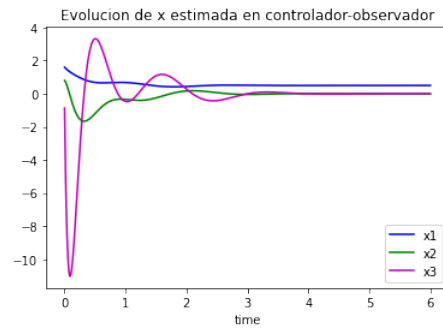


Figura 27. Vector de estados estimado en el esquema controlador-observador.

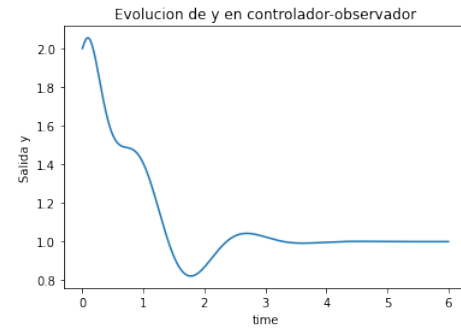


Figura 28. Salida real en el esquema controlador-observador.

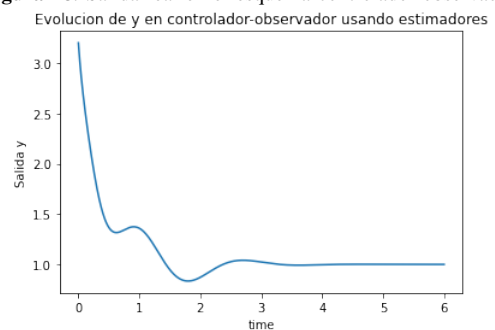


Figura 29. Salida estimada en el esquema controlador-observador.

Los errores generados con este observador se presentan a continuación.

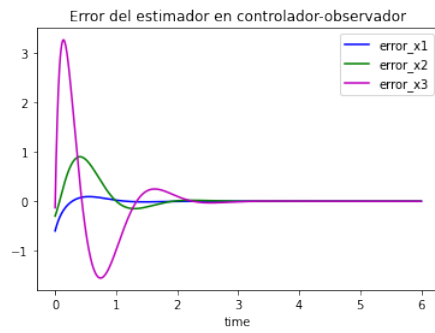


Figura 30. Error entre el vector de estados real y el estimado.

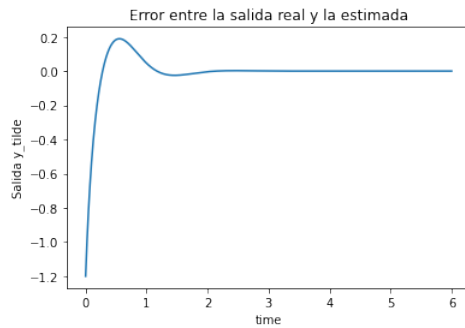


Figura 31. Error entre la salida real y la salida estimada.

La diferencia entre el observador rápido y el lento, reside en el tiempo que le toma al error llegar a cero. Mientras que para el observador rápido se llega a cero en un tiempo menor a un segundo, para el observador lento se toma poco menos de 2 segundos.