

# Control I

Tarea 8. Control por Realimentación de Estado  
Thursday 9<sup>th</sup> April, 2020

Marco Antonio Esquivel Basaldua

Se tiene el sistema cuya función de transferencia es

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{(s+0.5)(s+0.1)(s-5)}$$

$$= \frac{2}{s^3 - 4.4s^2 - 2.95s - 0.25}$$

y cuya representación en variables de estado se calcula de la siguiente manera.

Se multiplica por el valor  $\frac{Z(s)}{Z(s)}$  la función de transferencia con lo que no se altera su valor y se separan las expresiones de numerador y denominador.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^3 - 4.4s^2 - 2.95s - 0.25} \frac{Z(s)}{Z(s)}$$

$$Y(s) = 2Z(s)$$

$$U(s) = Z(s)s^3 - 4.4Z(s)s^2 - 2.95Z(s)s - 0.25Z(s)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace en  $Y(s)$  y  $U(s)$  se obtiene

$$y(t) = 2z(t)$$

$$u(t) = \ddot{z}(t) - 4.4\dot{z}(t) - 2.95z(t) - 0.25z(t)$$

$$\ddot{z}(t) = u(t) + 4.4\dot{z}(t) + 2.95z(t) + 0.25z(t)$$

Se define el vector  $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \ddot{z}(t) \\ \dddot{z}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ u(t) + 4.4x_3 + 2.95x_2 + 0.25x_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.25 & 2.95 & 4.4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = 2x_1$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

A partir de la representación en variables de estado se definen las matrices A, B y C.

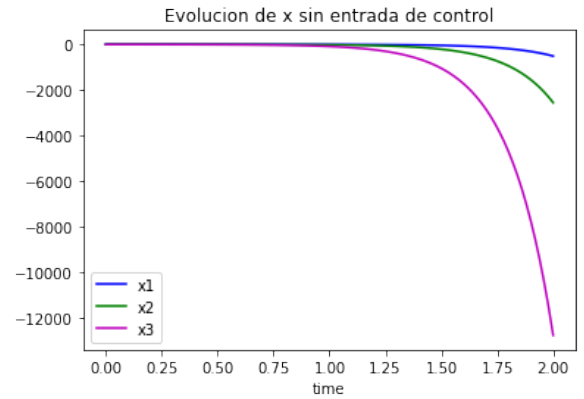
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.25 & 2.95 & 4.4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

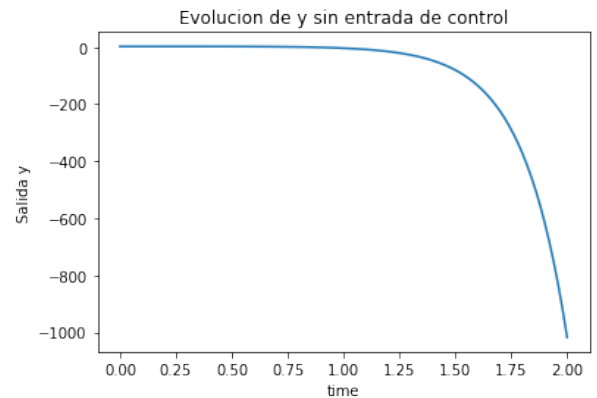
$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## I. SIMULACIÓN DEL SISTEMA CON $u(t) = 0$

A partir del vector inicial  $\mathbf{x}(0) = [1, 0.5, -1]^T$  se genera la respuesta del sistema el cual se muestra en la figura 1 para la evolución de cada variable dentro del vector  $\mathbf{x}(t)$ , y en la figura 2 para la evolución de la salida  $y(t)$ . Estas gráficas se muestran para un tiempo de cero a 2 segundos.



**Figura 1.** Evolución del vector  $\mathbf{x}$



**Figura 2.** Evolución de la salida  $y$

Se puede observar que al no aplicar una entrada de control  $u(t)$  los valores, tanto del vector  $\mathbf{x}$  como de la salida  $y$ , divergen. Esto quiere decir que el sistema es inestable lo cual se puede explicar de forma analítica tomando en cuenta los polos del sistema los cuales son

$$p = [-0.5, -0.1, 5]$$

en los que uno de ellos es un valor real positivo.

## II. ESTABILIDAD DEL SISTEMA

Para que el sistema sea estabilizable mediante la realimentación de estados, éste debe ser controlable y observable, lo cual quiere decir que todos los estados pueden ser medidos y modificados a lo largo del tiempo.

La matriz de controlabilidad  $\mathcal{C}$  del sistema es

$$\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4.4 \\ 1 & 4.4 & 22.31 \end{bmatrix}$$

cuyo determinante es

$$\det(\mathcal{C}) = -1$$

Por lo que se concluye que la matriz es controlable.

La matriz de observabilidad  $\mathcal{O}$  del sistema es

$$\mathcal{O} = [C \ CA \ CA^2]^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

cuto determinante es

$$\det(\mathcal{O}) = 8$$

Lo cual indica que el sistema es observable.

Con estos dos criterios cumplidos se puede decir que el sistema es estabilizable.

## III. DISEÑO DE UN CONTROLADOR POR REALIMENTACIÓN DE ESTADO

La matriz  $\mathbf{K}$  de realimentación en variables de estado y el control  $u$  se definen como

$$\mathbf{K} = [k_1 \ k_2 \ k_3]$$

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

Entonces el sistema en lazo cerrado es

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} \\ &= \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.25 & 2.95 & 4.4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \right) \mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.25 - k_1 & 2.95 - k_2 & 4.4 - k_3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

El polinomio característico es entonces

$$\begin{aligned} a(s) &= \det(sI - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})) \\ &= \det \left( \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -0.25 + k_1 & -2.95 + k_2 & s - 4.4 + k_3 \end{bmatrix} \right) \\ &= s^2(s - 4.4 + k_3) - 0.25 + k_1 + s(-2.95 + k_2) \\ &= s^3 + (-4.4 + k_3)s^2 + (-2.95 + k_2)s - 0.25 + k_1 \end{aligned}$$

Se desea diseñar un sistema con un factor de amortiguamiento de  $\zeta = 0.5$  y un tiempo de asentamiento de 2 segundos.

Para un criterio en tiempo de asentamiento del 2% se tiene la fórmula

$$\begin{aligned} t_s &= \frac{4}{\zeta\omega_n} \\ &= \frac{4}{0.5\omega_n} = 2 \end{aligned}$$

Por tanto

$$\omega_n = \frac{4}{0.5(2)} = 4$$

Para un sistema de tercer orden cuyo polinomio característico está dado por

$$\alpha(s) = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + p_3)$$

Donde  $p_3$  es un polo arbitrariamente pequeño colocado de tal forma que sus efectos se desvanezcan rápidamente en el tiempo.

Para valores  $\zeta = 0.5$ ,  $\omega_n = 4$  y  $p_3 = 10$ , polinomio característico deseado  $\alpha(s)$  es

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= (s^2 + 4s + 16)(s + 10) \\ &= s^3 + 14s^2 + 56s + 160 \end{aligned}$$

Comparando los polinomios  $a(s)$  y  $\alpha(s)$  se obtienen las relaciones

$$14 = -4.4 + k_3$$

$$56 = -2.95 + k_2$$

$$160 = -0.25 + k_1$$

Por tanto

$$k_1 = 160 + 0.25 = 160.25$$

$$k_2 = 56 + 2.95 = 58.95$$

$$k_3 = 14 + 4.4 = 18.4$$

Otra alternativa para el cálculo de la matriz  $\mathbf{K}$  es usar la fórmula de Ackerman.

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \mathcal{C}^{-1} \alpha(A)$$

Para este problema se tiene

$$\mathcal{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -2.95 & -4.4 & 1 \\ -4.4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha(A) = A^3 + 14A^2 + 56A + 160I$$

En simulación se usa la función *acker* para la cual se especifican los siguientes polos deseados

$$s_1 = -\zeta\omega_n + \sqrt{\zeta^2 - 1} = -0.5(4) + \sqrt{0.5^2 - 1} = -2 + 3.4641i$$

$$s_2 = -\zeta\omega_n - \sqrt{\zeta^2 - 1} = -0.5(4) - \sqrt{0.5^2 - 1} = -2 - 3.4641i$$

$$s_3 = 10$$

#### IV. SIMULACIÓN DEL SISTEMA EN LAZO CERRADO

Una vez calculados los valores para el vector  $\mathbf{K}$  se realiza la simulación del sistema a partir del vector inicial dado en la sección I,  $\mathbf{x}(0) = [1, 0.5, -1]^T$ . Se obtienen los siguientes resultados.

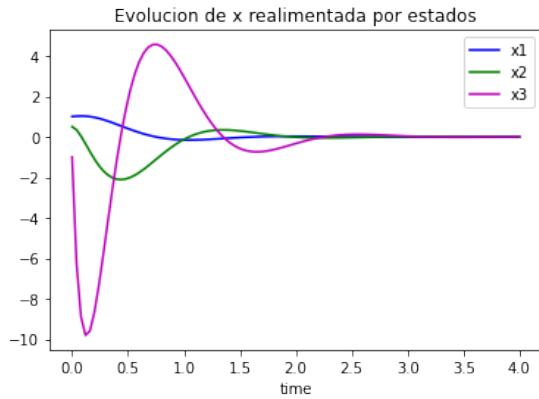


Figura 3. Evolución del vector  $\mathbf{x}$  al aplicar un control por realimentación.

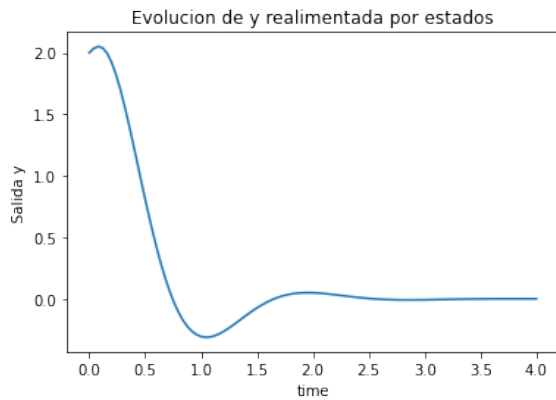


Figura 4. Evolución de la salida  $y$  al aplicar un control por realimentación.

Se observa que, a diferencia del sistema sin realimentación, se logra estabilizar el sistema cumpliendo con el requerimiento de establecimiento en 2 segundos.

#### V. RESPUESTA A UNA ENTRADA ESCALÓN UNITARIO

Se introduce una entrada de referencia escalón unitario, por lo que el sistema realimentado se expresa de la forma mostrada en la figura 5.

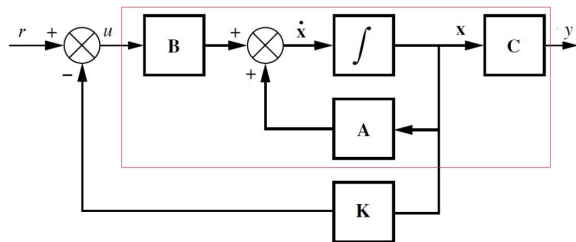


Figura 5. Diagrama de bloques de un sistema realimentado por estado con entrada de referencia.

A partir del reposo, es decir  $\mathbf{x}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$  y  $y(0) = 0$ , se simula el comportamiento del sistema con una entrada escalón unitario  $r = 1$ . Los resultados se muestran en las figuras 6 y 7.

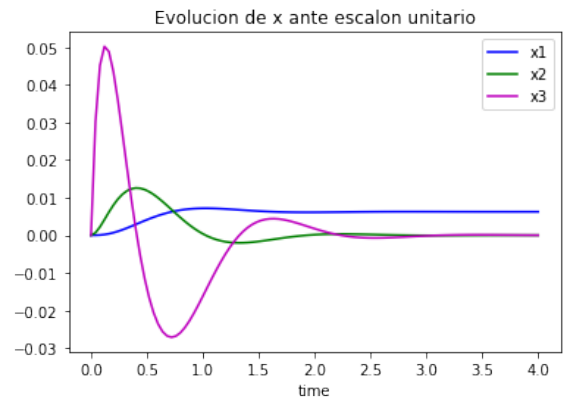


Figura 6. Evolución del vector  $\mathbf{x}$  al aplicar un control por realimentación y una entrada escalón unitario.

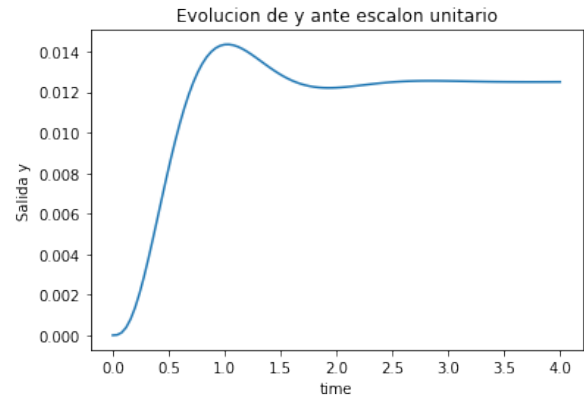


Figura 7. Evolución de la salida  $y$  al aplicar un control por realimentación y una entrada escalón unitario.

La función de transferencia para el sistema con realimentación por variables de estado es

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= C[sI - (A - BK)]^{-1}B \\ &= \frac{2}{s^3 + 14s^2 + 56s + 160} \end{aligned}$$

A partir de la función de transferencia se puede observar que la realimentación por estados permite modificar la ubicación de los polos pero sin alterar el valor de los ceros del sistema.

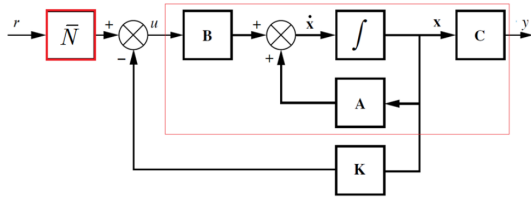
Se calcula el valor de la salida en estado estacionario  $y_{ss}$  aplicando el teorema del valor final para  $R(s) = 1/s$

$$\begin{aligned} y_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{s^3 + 14s^2 + 56s + 160} \\ &= \frac{1}{80} = 0.0125 \end{aligned}$$

El error en estado estacionario es entonces

$$e_{ss} = 1 - y_{ss} = 0.9875$$

Debido a que el error en estado estacionario es enorme se aplica una ganancia de entrada para eliminarlo. A esta ganancia se le denomina  $\bar{N}$  con lo que se obtiene el diagrama de bloques para este sistema mostrado en la figura 8.



**Figura 8.** Diagrama de bloques de un sistema realimentado por estado con entrada de referencia y precompensación.

La función de transferencia para este sistema es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \bar{N}C[sI - (A - BK)]^{-1}B$$

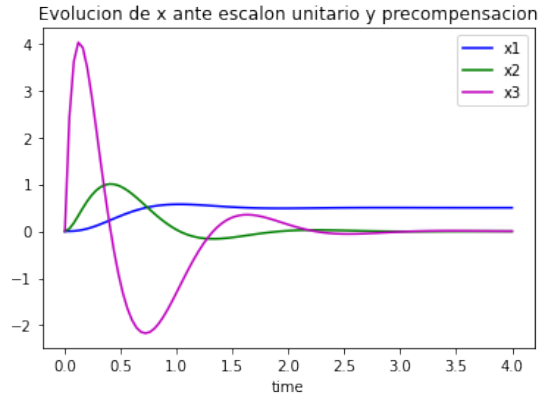
Para una entrada de referencia tipo escalón unitario, se desea que el valor de la salida en estado estacionario sea  $y_{ss} = 1$ . A partir del teorema del valor final para una entrada escalón unitario  $R(s) = 1/s$ , se calcula el valor de  $\bar{N}$ .

$$\begin{aligned} y_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \bar{N}C[sI - (A - BK)]^{-1}B \\ &= -\bar{N}C[A - BK]^{-1}B = 1 \end{aligned}$$

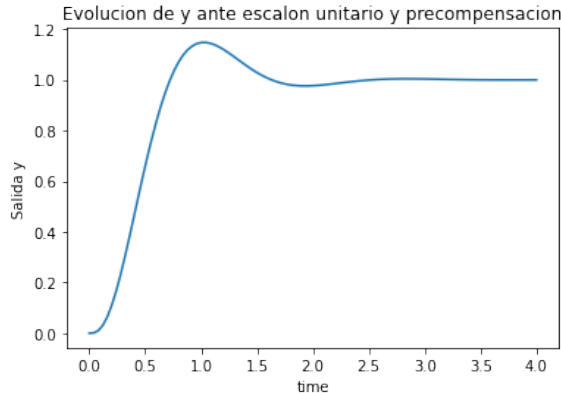
Por tanto

$$\begin{aligned} \bar{N} &= -\frac{1}{C[A - BK]^{-1}B} \\ &= 80 \end{aligned}$$

A partir de esta modificación se realiza la simulación obteniendo los resultados que se muestran en las figuras 9 y 10.



**Figura 9.** Evolución del vector  $\mathbf{x}$  al aplicar un control por realimentación y una ganancia de precompensación a la entrada escalón unitario.



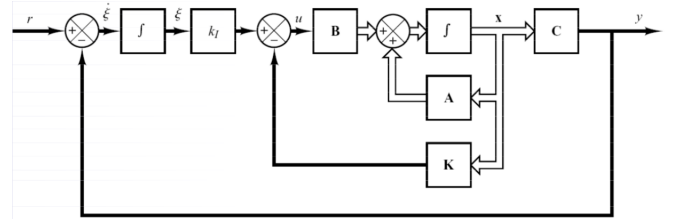
**Figura 10.** Evolución de la salida  $y$  al aplicar un control por realimentación y una ganancia de precompensación a la entrada escalón unitario.

Se observa que las figuras 9 y 10 presentan la misma forma que las figuras 6 y 7 pero escaladas de forma que la salida  $y$  alcanza el valor de referencia en el tiempo establecido de 2 segundos.

El valor del máximo sobreimpulso en este caso es del 14.7%.

## VI. CONTROL POR REGULACIÓN

Los sistemas de control implementados hasta ahora, no presentan una realimentación de la salida  $y(t)$ . En el problema de regulación se aplica una realimentación de la salida obteniendo, para los sistemas de tipo cero el cual es el caso para el sistema estudiado, el diagrama de bloques mostrado en la figura 11.



**Figura 11.** Diagrama de bloques del problema de regulación para un sistema de tipo 0.

A partir del diagrama de bloques de la figura 11 se obtienen las siguientes ecuaciones.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x} + K_I \xi$$

$$\dot{\xi} = r(t) - y(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace a cada una de ellas se obtiene

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \quad (1)$$

$$Y(s) = CX(s) \quad (2)$$

$$U(s) = -\mathbf{K}X(s) + K_I \Xi(s) \quad (3)$$

$$s\Xi(s) = R(s) - Y(s) \quad (4)$$

Se despeja  $X(s)$  de (1) y se sustituye en (2).

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s)$$

Se despeja  $U(s)$  de esta última expresión.

$$U(s) = \frac{1}{C(sI - A)^{-1}BU(s)}Y(s)$$

Se reemplaza  $U(s)$  y  $X(s)$  en (3).

$$\begin{aligned} \frac{1}{C(sI - A)^{-1}BU(s)}Y(s) &= \\ &= -\mathbf{K}(sI - A)^{-1}B \frac{1}{C(sI - A)^{-1}BU(s)}Y(s) + K_I \Xi(s) \end{aligned}$$

Se despeja  $\Xi(s)$  de esta última expresión.

$$\Xi(s) = \frac{1 + \mathbf{K}(sI - A)^{-1}B}{K_I C(sI - A)^{-1}B}Y(s)$$

Se reemplaza  $\Xi(s)$  en (4).

$$\frac{s(1 + \mathbf{K}(sI - A)^{-1}B)}{K_I C(sI - A)^{-1}B} Y(s) = R(s) - Y(s)$$

$$\left[ \frac{s(1 + \mathbf{K}(sI - A)^{-1}B)}{K_I C(sI - A)^{-1}B} + 1 \right] Y(s) = R(s)$$

$$\frac{s(1 + \mathbf{K}(sI - A)^{-1}B) + K_I C(sI - A)^{-1}B}{K_I C(sI - A)^{-1}B} Y(s) = R(s)$$

Por tanto la función de transferencia es

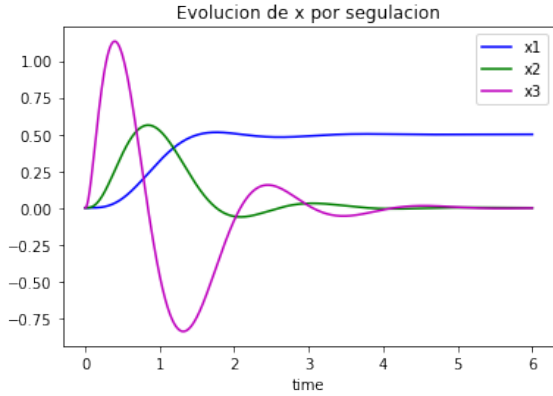
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_I C(sI - A)^{-1}B}{s(1 + \mathbf{K}(sI - A)^{-1}B) + K_I C(sI - A)^{-1}B}$$

Para una entrada escalón unitario,  $R(s) = 1/s$ , el valor de la salida en estado estacionario,  $y_{ss}$  se calcula como:

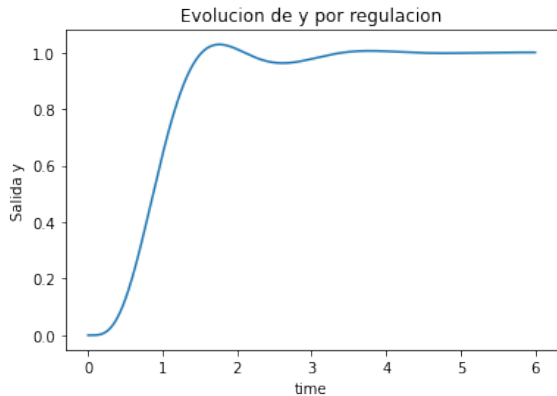
$$\begin{aligned} y_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_I C(sI - A)^{-1}B}{s(1 + \mathbf{K}(sI - A)^{-1}B) + K_I C(sI - A)^{-1}B} \\ &= \frac{K_I C A^{-1}B}{K_I C A^{-1}B} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Con lo que se comprueba que se elimina el error en estado estacionario.

Para un valor de  $K_I = 90$  se logra un máximo sobreimpulso del 2% conservando el tiempo de establecimiento de 2 segundos. En las figuras 12 y 13 se muestra la evolución de las variables de estado,  $\mathbf{x}$ , y de la salida,  $y$ , para un tiempo de 4 segundos.



**Figura 9.** Evolución del vector  $\mathbf{x}$  ante el problema de regulación.



**Figura 10.** Evolución de la salida  $y$  ante el problema de regulación.