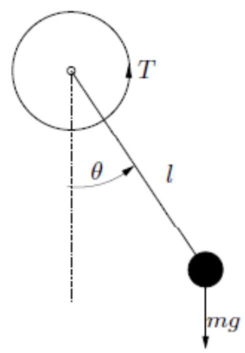
Control I

Tarea 3. Representación en variables de estado

Marco Antonio Esquivel Basaldua

12 de marzo de 2020

Se considera el sistema del péndulo simple mostrado en la figura donde la ecuación de movimiento para la masa en la dirección tangencial está dada por la segunda le de Newton como:



$$ml\ddot{\theta} = -mgsin\theta - kl\dot{\theta} + T$$

Donde T es el torque de entrada y k es la constante de amortiguamiento rotacional.

1. Sistema en el espacio de estados considerando la entrada T

La salida del sistema y es el ángulo θ por lo que se expresa el sistema en variables de estado $\mathbf{q}$ como:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{q}, T) := \dot{\mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{-mgsin\theta - kl\dot{\theta} + T}{ml} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y &= \theta \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}
\end{aligned}
$$

2. Puntos de equilibrio sin considerar la entrada T

Sin considerar la entrada T el sistema en espacio de estados se escribe como:

$$f(\mathbf{q}) := \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{-mgsin\theta - kl\dot{\theta}}{ml} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{gsin\theta}{l} - \frac{k\dot{\theta}}{m} \end{bmatrix}$$

Un punto de equilibrio se define como el punto tal que:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0$$

En este caso existen puntos de equilibrio en los pares $\mathbf{q}$ que cumplan con la condición

$$f(\mathbf{q}) := \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{-mgsin\theta - kl\dot{\theta}}{ml} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Se tiene que

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta} &= 0 \\
\frac{-mgsin\theta - kl\dot{\theta}}{ml} &= 0
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
\begin{aligned}
\frac{-mgsin\theta - kl(0)}{ml} &= 0 \\
\frac{-mgsin\theta}{ml} &= 0 \\
-mgsin\theta &= 0 \\
sin\theta = 0 \rightarrow \theta &= 0, \pi
\end{aligned}
$$

Existen dos puntos de equilibrio en el sistema, $\mathbf{q}_{e1}$, $\mathbf{q}_{e2}$.

$$\mathbf{q}_{e1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_{e1} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Linerización al rededor de los puntos de equilibrio

Dada la linearización al rededor del punto de interés $\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{u}}$, como:

$$\mathbf{z} = f(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{u}}) + \left.\frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}}}} (\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}) + \left.\frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}}}} (\mathbf{u} - \overline{\mathbf{u}})$$

Se lineariza al rededor del punto de equilibrio $\mathbf{q}_{e1}$ sin tomar en cuanta la entrada T.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{z}_{e1} &= f(\mathbf{q}_{e1}) + \left.\frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_{e1}} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_{e1}) \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{gcos\theta}{l} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}_{\substack{\theta = 0 \\ \dot{\theta} = 0}} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{g\theta}{l} - \frac{k\dot{\theta}}{m} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Seleariza al rededor del punto de equilibrio $\mathbf{q}_{e2}$ sin tomar en cuanta la entrada T.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{z}_{e2} &= f(\mathbf{q}_{e2}) + \left.\frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_{e2}} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_{e2}) \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{gcos\theta}{l} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}_{\substack{\theta = \pi \\ \dot{\theta} = 0}} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{g\theta}{l} - \frac{k\dot{\theta}}{m} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

4. Funciones de transferencia

El sistema leiarizado al rededor del punto de equilibrio $\mathbf{q}_{e1}$ considerando la entrada de torque T se escribe como

$$
\mathbf{z}_{e1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \mathbf{q} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{bmatrix} T
$$

$$
y_{e1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}
$$

Por lo que se tiene las matrices

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

La función de transferencia está dada por

$$
G(s) = \mathbf{C}(s\boldsymbol{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}
$$

Por tanto

$$
G(s) = \frac{1}{mls^2 + kls + gm}
$$

Para el punto de equilibrio $\mathbf{q}_{e2}$ se tienen las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

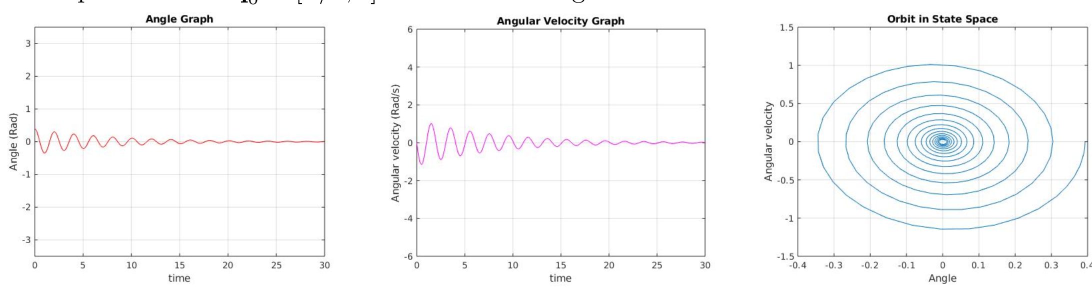
Por lo que su función de transferencia es

$$G(s) = \frac{1}{mls^2 + kls - gm}$$

5. Simulaciones

Se realiza la simulación del sistema para puntos iniciales cercanos a los puntos de equilibrio. Para ello se establecen valores predeterminados de la longitud de la barra del péndulo, $l = 1m$, una masa de $m = 2kg$ y un coeficiente de amortiguamiento de $k = 0{,}25$. Se muestran los resultados obtnenidos para la simulación del sistema durante 30 segundos.

Para el punto inicial $\mathbf{q}_0 = [\pi/8, 0]^T$ se tienen los siguientes resultados.



Para el punto inicial $\mathbf{q}_0 = [-15\pi/16, 0]^T$ se tienen los siguientes resultados.