

Control I

Tarea 11. Identificación de Sistemas
Tuesday 26th May, 2020

Marco Antonio Esquivel Basaldua

A partir de las mediciones de la respuesta de un sistema, éstas se pueden representar mediante ecuaciones de acuerdo al orden del sistema que se desee modelar como

$$\begin{aligned} y(n) &= f^T(n)\theta + e(n) \\ y(n+1) &= f^T(n+1)\theta + e(n+1) \\ &\vdots \\ y(N) &= f^T(N)\theta + e(N) \end{aligned}$$

donde

$$f^T(t) = [y(k-1) \quad \dots \quad y(k-n) \quad u(k-1) \quad \dots \quad u(k-n)]$$

$$\theta = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n]^T$$

De forma matricial, este caso general se escribe como (siendo N el número de datos adquiridos menos 1).

$$\mathbf{y}(N) = \mathbf{F}(N)\theta + \mathbf{e}(N) \quad (1)$$

Donde

$$\mathbf{y}(N) = \begin{bmatrix} y(n) \\ y(n+1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}_{(N-n+1) \times 1}$$

$$\mathbf{F}(N) = \begin{bmatrix} f^T(n) \\ f^T(n+1) \\ \vdots \\ f^T(N) \end{bmatrix}_{(N-n+1) \times 2}$$

$$\mathbf{e}(N) = \begin{bmatrix} e(n) \\ e(n+1) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix}_{(N-n+1) \times 1}$$

Viendo el problema de identificación como un problema de optimización, se puede definir una función de costo a partir de la cual se defina la ecuación que minimice el error encontrado en las mediciones.

La función de costo cuadrática que asegura la existencia de un único punto mínimo es la siguiente

$$J(\theta) = \sum_{k=n}^N e^2(k) = \mathbf{e}^T(N)\mathbf{e}(N) \quad (2)$$

Despejando $\mathbf{e}(N)$ de (1) y reemplazando en (2) se obtiene

$$\begin{aligned} J(\theta) &= [\mathbf{y}(N) - \mathbf{F}(N)\theta]^T [\mathbf{y}(N) - \mathbf{F}(N)\theta] \\ &= [\mathbf{y}^T(N) - \theta^T \mathbf{F}^T(N)] [\mathbf{y}(N) - \mathbf{F}(N)\theta] \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{y}(N) - \mathbf{y}^T \mathbf{F}(N)\theta - \theta^T \mathbf{F}^T \mathbf{y}(N) + \theta^T \mathbf{F}^T \mathbf{F}(N)\theta \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{y}(N) - 2\theta^T \mathbf{F}^T \mathbf{y}(N) + \theta^T \mathbf{F}^T \mathbf{F}(N)\theta \end{aligned}$$

Recordando que se trata de una función de costo cuadrática, encontrar el vector θ que minimiza la función se realiza calculando la primer derivada de $J(\theta)$ e igualando a cero de la siguiente manera.

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = -2\mathbf{F}(N)^T \mathbf{y}(N) + 2\mathbf{F}^T(N)\mathbf{F}(N)\theta = 0$$

Despejando θ se obtiene

$$\theta = (\mathbf{F}^T(N)\mathbf{F}(N))^{-1} \mathbf{F}^T(N)\mathbf{y}(N) \quad (3)$$

I. EJEMPLO DE IDENTIFICACIÓN

Sea un filtro digital causal, cuyas secuencias de entrada y salida en el tiempo ha sido la siguiente:

kT	U(kT)	Y(kT)
0	0	0
1	1	0.2
2	1	0.6
3	1	1.25
4	1	1.13
5	1	0.917
6	1	1.1
7	1	1.01
8	1	0.98
9	1	1

encontrar el modelo ARMAX que mejor representa el comportamiento del filtro.

Modelo de primer orden

Se inicia proponiendo un sistema de primer orden como modelo para el sistema

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1}{z - a_1}$$

Aplicando la transformada z inversa

$$(z - a_1)Y(z) = b_1 U(z)$$

$$zY(z) - a_1 Y(z) = b_1 U(z)$$

$$y(k) - a_1 y(k-1) = b_1 u(k-1)$$

$$y(k) = a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1) \quad (4)$$

Siendo $N = 9$ se construye el sistema $\mathbf{y}(9)$

$$\mathbf{y}_1(9) = \begin{bmatrix} y(0) & u(0) \\ y(1) & u(1) \\ \vdots & \vdots \\ y(8) & u(8) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(9) \end{bmatrix}$$

Para la cual

$$\mathbf{F}(9) = \begin{bmatrix} y(0) & u(0) \\ y(1) & u(1) \\ \vdots & \vdots \\ y(8) & u(8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.2 & 1 \\ 0.6 & 1 \\ 1.25 & 1 \\ 1.13 & 1 \\ 0.917 & 1 \\ 1.1 & 1 \\ 1.01 & 1 \\ 0.98 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

Aplicando la fórmula obtenida en (3) se obtiene los valores de $\boldsymbol{\theta}_1$

$$\boldsymbol{\theta}_1 = \begin{bmatrix} 0.286 \\ 0.7414 \end{bmatrix}$$

Con lo que la función de transferencia en el dominio z toma la forma

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.7414}{z - 0.286}$$

A partir de los parámetros calculados se obtiene la tabla para el modelo de primer orden. Los resultados se muestran igualmente en la figura 1, se debe notar que para el modelo generado se tienen únicamente 9 mediciones ya que no es posible generar las lecturas del instante 0. Sin embargo sabiendo que la entrada de control y la salida en los instantes donde $kT < 0$, se establece que $y_1(0) = 0$.

kT	Y(kT)
1	0
2	0.7986
3	0.913
4	1.0989
5	1.0646
6	1.0037
7	1.056
8	1.0303
9	1.0217

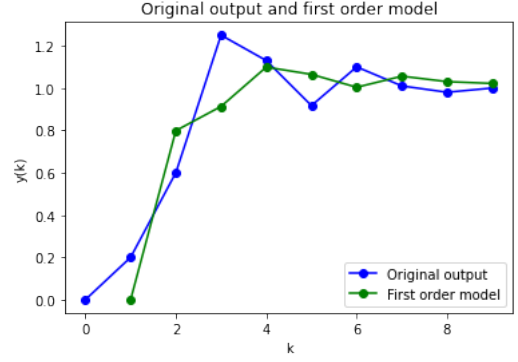


Figura 1. Comparación de las medidas originales y las generadas con el modelo de primer orden.

Modelo de segundo orden Como una alternativa de identificación, se propone un modelo de segundo orden.

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 - a_1 z - a_2}$$

Aplicando la transformada z inversa

$$(z^2 - a_1 z - a_2)Y(z) = (b_1 z + b_2)U(z)$$

$$z^2 Y(z) - a_1 z Y(z) - a_2 Y(z) = b_1 z U(z) + b_2 U(z)$$

$$y(k) - a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2)$$

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) \quad (5)$$

De forma matricial para el sistema generado se tiene

$$\mathbf{y}_2(8) = \begin{bmatrix} y(1) & y(0) & u(1) & u(0) \\ y(2) & y(1) & u(2) & u(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y(8) & y(7) & u(8) & u(7) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(2) \\ e(3) \\ \vdots \\ e(9) \end{bmatrix}$$

de donde se establece

$$\mathbf{F}(8) = \begin{bmatrix} y(1) & y(0) & u(1) & u(0) \\ y(2) & y(1) & u(2) & u(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y(8) & y(7) & u(8) & u(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0.2 & 1 & 1 \\ 1.25 & 0.6 & 1 & 1 \\ 1.13 & 1.25 & 1 & 1 \\ 0.917 & 1.13 & 1 & 1 \\ 1.1 & 0.917 & 1 & 1 \\ 1.01 & 1.1 & 1 & 1 \\ 0.98 & 1.01 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Aplicando la fórmula obtenida en (3) se obtiene los valores

$$\boldsymbol{\theta}_1 = \begin{bmatrix} -0.7359 \\ 0.205 \\ 1.3002 \\ 0.2981 \end{bmatrix}$$

A partir de estos valores se obtiene del modelo los valores de salida que se muestran en la siguiente tabla y cuya comparación con la salida original se muestra en la figura 2. La función de transferencia para este modelo es la siguiente.

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1.3002z + 0.2891}{z^2 + 0.7359z - 0.205}$$

kT	Y(kT)
1	0
2	0.503
3	1.153
4	1.1977
5	0.8013
6	1.0229
7	1.155
8	0.9767
9	1.0804

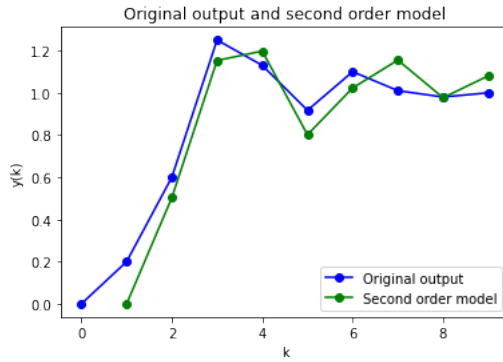


Figura 2. Comparación de las medidas originales y las generadas con el modelo de segundo orden.

Modelo de tercer orden

Como una alternativa más, se propone un sistema de tercer orden como modelo del sistema original.

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1z^2 + b_2z + b_3}{z^3 - a_1z^2 - a_2z - a_3}$$

Aplicando la transformada z inversa

$$\begin{aligned} (z^3 - a_1z^2 - a_2z - a_3)Y(z) &= (b_1z^2 + b_2z + b_3)U(z) \\ z^3Y(z) - a_1z^2Y(z) - a_2zY(z) - a_3Y(z) &= b_1z^2U(z) + b_2zU(z) + b_3U(z) \\ y(k) - a_1y(k-1) - a_2y(k-2) - a_3y(k-3) &= b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + b_3u(k-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(k) &= a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + a_3y(k-3) \\ &\quad + b_1u(k-1) + b_2u(k-2) + b_3u(k-3) \end{aligned}$$

De forma matricial se tiene

$$\mathbf{y}_3(7) = \begin{bmatrix} y(2) & y(1) & y(0) & u(2) & u(1) & u(0) \\ y(3) & y(2) & y(1) & u(3) & u(2) & u(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y(8) & y(7) & y(6) & u(8) & u(7) & u(6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(3) \\ e(4) \\ \vdots \\ e(9) \end{bmatrix}$$

De donde se establece

$$\mathbf{F}(7) = \begin{bmatrix} y(2) & y(1) & y(0) & u(2) & u(1) & u(0) \\ y(3) & y(2) & y(1) & u(3) & u(2) & u(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y(8) & y(7) & y(6) & u(8) & u(7) & u(6) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta}_3 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Aplicando la fórmula obtenida en (3) se obtienen los valores

$$\boldsymbol{\theta}_3 = \begin{bmatrix} 0.2829 \\ 0.3276 \\ 0.0058 \\ 1.719 \\ -0.8242 \\ -0.5314 \end{bmatrix}$$

La función de transferencia resulta entonces como

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1.719z^2 - 0.8242z - 0.5314}{z^3 - 0.2829z^2 - 0.3276z - 0.0058}$$

Los valores de este modelo y su comparación se muestran en la siguiente tabla y en la figura 3.

kT	Y(kT)
1	0
2	0
3	1.25
4	1.13
5	0.9147
6	1.096
7	1.0002
8	0.9815
9	1.0147

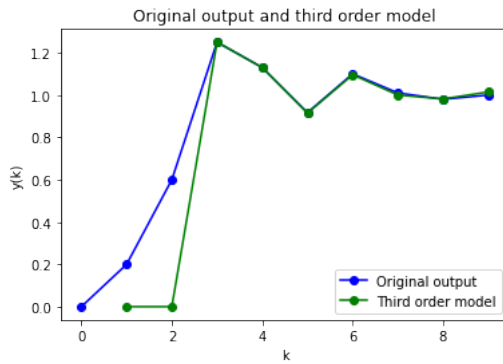


Figura 3. Comparación de las medidas originales y las generadas con el modelo de tercer orden.

II. ANÁLISIS DEL ERROR Y ELECCIÓN DEL MEJOR MODELO

La medida del error en cada uno de los modelos propuestos se toma a partir de su función de costo. De esta manera, se tiene:

$$J(\theta_1) = 0.2302$$

$$J(\theta_2) = 0.1102$$

$$J(\theta_3) = 0.4003$$

Se puede observar que el menor error se produce con el modelo de segundo orden. Analizando las gráficas de las figuras 1, 2 y 3, se observa que los puntos generados con el modelo de tercer orden se acercan más a los puntos del sistema original, sin embargo, debido a que se necesita de los valores de la salida generada y de la entrada aplicada en dos instantes de tiempo anteriores, se pierde gran parte de las mediciones en el tiempo transitorio, fundamental en la descripción de un sistema.

III. IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS EN SOFTWARE

Existen varias técnicas para obtener el modelo dinámico de un sistema a partir de pruebas experimentales, sin embargo el uso de herramientas en Software que resultan útiles para identificar modelos a partir de datos sin necesidad de ser expertos en la manera en que se calculan los valores. Una de estas herramientas es el Toolbox de Identificación de Systems (System Identification Toolbox) de MatLab. Se puede cargar información en el dominio del tiempo o de la frecuencia para identificar funciones de transferencia, modelos de proceso, y modelos en espacio de estados en tiempo continuo o discreto. También se provee de algoritmos para la estimación de parámetros embebidos en línea.

Este toolbox utiliza técnicas de identificación como máxima verosimilitud, minimización predicción-error, e identificación de sistemas en subespacio. Para representar la dinámica de sistemas no lineales, se pueden estimar modelos Hammerstein-Wiener y modelos no lineales ARX con redes wavelet, partición de árbol y redes no lineales sigmoidales.

La aplicación de identificación de sistemas permite importar los datos para la estimación lineal y no lineal de una manera interactiva (figura 4). Ésta a su vez se puede procesar con

operaciones de filtrado, re-muestreo e incluso de reconstrucción de información faltante.

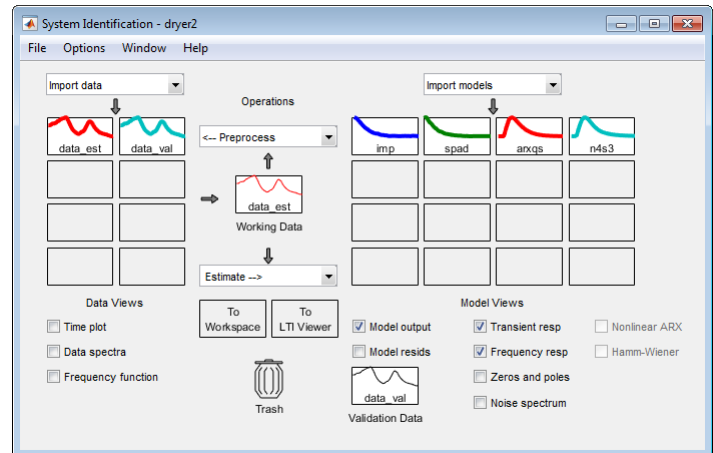


Figura 4. Ventana para importar datos y procesamiento de los mismos en el toolbox de identificación de sistemas.

El toolbox permite comparar modelos identificados, analizar sus propiedades, calcular sus niveles de confianza, y validar los modelos dados los conjuntos de datos. Se puede obtener la función de transferencia al indicarle al toolbox la cantidad de polos y ceros deseados, así como el modelo en variables de estado al proveer al sistema el orden del sistema resultante. También es importante indicar si la identificación del sistema se desea hacer en tiempo continuo o en tiempo discreto (figura 5).

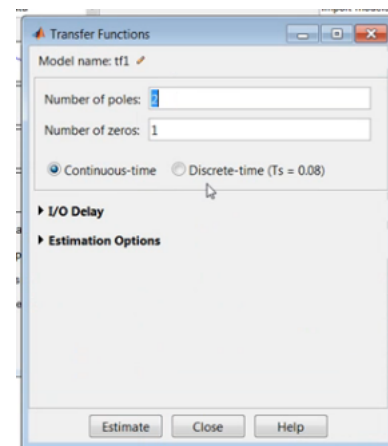


Figura 5. Ventana para estimar el modelos por función de transferencia. Se debe indicar el número de polos y ceros deseados.

Existen otras opciones para las estimación de modelos como lo son: modelos de proceso, modelos polinomiales, modelos no lineales, modelos espectrales, y modelos de correlación.