

Control II

Tarea 6. Geometría de dos vistas
5 de octubre de 2020

Marco Antonio Esquivel Basaldua

5 de octubre de 2020

1. Cálculo de homografía

A partir del programa provisto en Matlab (`calculoH.m`) que permite calcular puntos correspondientes en dos imágenes y la visualización de la homografía calculada mediante la transferencia de puntos desde la imagen uno a la imagen dos se determinó el sistema de ecuaciones que define la matriz H de la homografía a partir de la expresión:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1x'_1 & -y_1x'_1 & -x'_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -x_1y'_1 & -y_1y'_1 & -y'_1 \\ x_4 & y_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_4x'_4 & -y_4x'_4 & -x'_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & y_4 & 1 & -x_4y'_4 & -y_4y'_4 & -y'_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{bmatrix} = 0 \quad (1)$$

$Ah = 0$

Donde (x_i, y_i) corresponde a un punto en la imagen uno, y (x'_i, y'_i) es el punto correspondiente a (x_i, y_i) en la imagen 2.

El cálculo de la matriz H se obtiene a partir de de la solución del sistema en (1) haciendo uso de la descomposición de valores singulares de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{h} &= 0 \\ [\mathbf{u}, \mathbf{s}, \mathbf{v}] &= \text{svd}(\mathbf{A}) \\ \mathbf{h} &= \mathbf{v}(:, 9) \end{aligned} \quad (2)$$

A continuación se muestran los resultados obtenidos para la homografía calculada para el marco de la estantería en la escena. La matriz generada es probada con puntos sobre el mismo marco (coplanares a los utilizados para el cálculo de la misma) y fuera de éste.



a)



b)

Figura 1.1 Puntos coplanares en la primer escena *a)* y sus respectivos puntos correspondientes en la segunda imagen *b)*.



a)

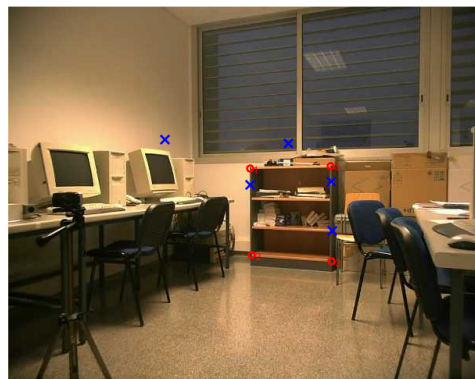


b)

Figura 1.2 Del lado izquierdo *a)* son seleccionados puntos sobre el marco de la estantería que son coplanares a los usados para el cálculo de la homografía y sus respectivas correspondencias en la segunda imagen *b)*.



a)



b)

Figura 1.3 Además de los puntos de prueba en la figura 1.2 se agregan puntos que no son coplanares a los usados con anterioridad. comparando *a* y *b* se observa que no existe correspondencia.

2. Cálculo de la geometría epipolar

A partir del programa provisto en Matlab (`calculoF.m`) que permite calcular puntos correspondientes en dos imágenes y la visualización de la geometría epipolar calculada mediante la transferencia de puntos desde la imagen uno a la imagen dos se determinó el sistema de ecuaciones que define la matriz F a partir de la expresión:

$$\begin{bmatrix} x'_1 x_1 & x'_1 y_1 & x'_1 & y'_1 x_1 & y'_1 y_1 & y'_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x'_n x_n & x'_n y_n & x'_n & y'_n x_n & y'_n y_n & y'_n & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \\ f_{31} \\ f_{32} \\ f_{33} \end{bmatrix} = 0 \quad (3)$$

$$Af = 0$$

Donde (x_i, y_i) corresponde a un punto en la imagen uno, y (x'_i, y'_i) es el punto correspondiente a (x_i, y_i) en la imagen 2. Además $n \geq 8$.

El cálculo de la matriz F se obtiene a partir de la solución del sistema en (3) haciendo uso de la descomposición de valores singulares de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} Af &= 0 \\ [\mathbf{u}, \mathbf{s}, \mathbf{v}] &= \text{svd}(\mathbf{f}) \\ \mathbf{f} &= \mathbf{v}(:, 9) \end{aligned} \quad (4)$$

Sin embargo se debe limitar el rango de la matriz F a 2 para que esta sea singular, es decir se debe obtener F' a partir de F que minimice $\|F - F'\|$, sujeto a $\det(F') = 0$. Esto nuevamente con la ayuda de la descomposición de valores singulares.

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}, \mathbf{s}, \mathbf{v}] &= \text{svd}(\mathbf{F}) \\ \mathbf{F}' &= \mathbf{u} \text{diad}(q, r, 0) \mathbf{v}^\top \end{aligned} \quad (5)$$

Donde $s = \text{diag}(q, r, t)$ con $q \geq r \geq t$.

A continuación se muestran los resultados obtenidos para las mismas imágenes usadas en el caso de la homografía. Se muestran los puntos seleccionados para el cálculo de la matriz F , 12 puntos en este caso, y las líneas epipolares generadas, en la imagen dos, a partir de la selección de puntos prueba en la imagen 1.



a)

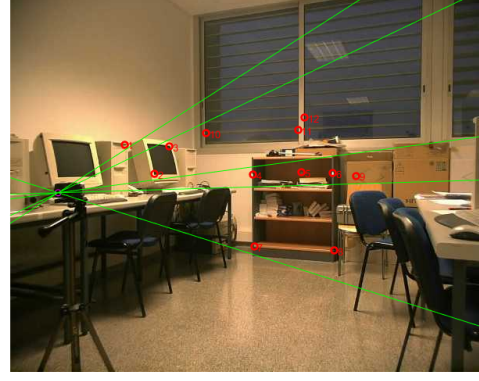


b)

Figura 2.1 Puntos en la primer escena a) y sus respectivos puntos correspondientes en la segunda imagen b).



a)



b)

Figura 2.2 Del lado izquierdo a) son seleccionados puntos de prueba y sus respectivas líneas epipolares son visualizadas en la segunda imagen b). La intersección de estas líneas es marcada por un círculo magenta el cual corresponde al epipolo en esta segunda imagen.

El epipolo en la imagen dos, que corresponde a la proyección visible de la cámara 1 en la imagen de la cámara dos, se puede calcular mediante la propiedad

$$\mathbf{F}^\top \mathbf{e}_2 = 0$$

Donde \mathbf{e}_2 se calcula obteniendo el espacio nulo normalizado de \mathbf{F}^\top , en este caso se obtiene

$$\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 61,31 \\ 247,31 \end{bmatrix}$$

Otra forma de calcular \mathbf{e}_2 es a partir de las intersecciones de las líneas epipolares en la segunda imagen. En este caso se obtiene los resultados muy similares a los anteriores

$$\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 61,63 \\ 251,26 \end{bmatrix}$$

3. Algoritmos de descomposición de restricciones geométricas

3.1. Descomposición de una matriz homográfica

Se describe un método simple para obtener la orientación relativa de dos cámaras calibradas a partir de una escena desconocida pero planar (para 4 o más puntos coplanares en 3D). El procedimiento está basado en la descomposición de valores singulares (SVD) de la homografía \mathbf{H} . Como pasa con métodos basados en planos, se obtienen dos posibles soluciones para la orientación.

Sea $\mathbf{H} = \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{H}' \mathbf{K}_1$ donde \mathbf{H}' es una homografía sin calibrar y \mathbf{K}_i son dos matrices de calibración para las cámaras. El signo de \mathbf{H} se debe escoger de tal forma que $\mathbf{x}_2^\top \mathbf{H} \mathbf{x}_1 > 0$ para dos puntos correspondientes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$. Sea $\mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^\top$ la descomposición SVD de \mathbf{H} , donde \mathbf{U} y \mathbf{V} son matrices de rotación de 3×3 y $\mathbf{S} = \text{diag}(s_1, s_2, s_3)$ es una matriz positiva diagonal $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq 0$. Las columnas de \mathbf{U} y \mathbf{V} se denotan como u_1, u_2, u_3 y v_1, v_2, v_3 .

En el sistema de coordenadas de la primera cámara, sea el plano 3D $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 1/\zeta$ donde \mathbf{n} es la normal del plano. $\zeta = 1/z$ es la inversa de la distancia al plano. En el sistema de coordenadas de la primera cámara, la matriz de proyección $\mathbf{P}_1 = (\mathbf{I}_{3 \times 3} | \mathbf{0})$ es de 3×4 . La matriz de proyección de la segunda cámara es $\mathbf{P}_2 = \mathbf{R}(\mathbf{I}_{3 \times 3} | -\mathbf{t})$ donde \mathbf{t} es la translación intra-cámara y \mathbf{R} es la rotación intra-cámara. La homografía desde la imagen 1 a la imagen 2 es $\mathbf{H} = \mathbf{R} \mathbf{H}_1$ donde $\mathbf{H}_1 = \mathbf{I}_{3 \times 3} - \zeta \mathbf{t} \mathbf{n}^\top$.

Para un punto \mathbf{x} en el plano

$$\mathbf{H} \mathbf{x} = \mathbf{R}(\mathbf{x} - \zeta \mathbf{t} \mathbf{n}^\top \mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{t}) \sim \mathbf{P}_2 \mathbf{x}$$

ya que

$$\zeta \mathbf{n}^\top \mathbf{x} = 1$$

Únicamente $\zeta \mathbf{t} \mathbf{n}^\top$ se puede recuperar, por eso se normaliza $\|\mathbf{t}\| = \|\mathbf{n}\| = 1$.

Las descomposiciones SVD de $\mathbf{H} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}$ y $\mathbf{H}_1 = \mathbf{U}_1 \mathbf{S} \mathbf{V}$ son idénticas hasta un factor de \mathbf{R} : $\mathbf{U} = \mathbf{R} \mathbf{U}_1$. \mathbf{H}_1 deja el producto cruz $\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$ invariante. Si los valores singulares son distintos, $\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$ corresponde a un vector singular. La normalización correcta de \mathbf{H} es

$$\mathbf{H} := \mathbf{H}/s_2, \quad \mathbf{S} := \mathbf{S}/s_2$$

reemplazando (s_1, s_2, s_3) por $(s_1/s_2, 1, s_3/s_2)$.

Dado que $\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$ corresponde a \mathbf{v}_2 en la imagen 1, el subespacio $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ se debe expandir por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, es decir

$$\mathbf{n} = \beta \mathbf{v}_1 - \alpha \mathbf{v}_3$$

$$\mathbf{n} \wedge (\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}) \sim \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_3$$

para algunos $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

cualquier dirección ortogonal a \mathbf{n} no cambia de norma por \mathbf{H} o \mathbf{H}_1 , entonces

$$(\alpha s_1)^2 + (\beta s_3)^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$(\alpha, \beta) \sim (\pm \sqrt{1 - s_3^2}, \pm \sqrt{s_1^2 - 1})$$

El argumento a la izquierda muestra que

$$\mathbf{R} \mathbf{t} = -(\beta \mathbf{u}_1 + \alpha \mathbf{u}_3)$$

Ya que \mathbf{t} es un vector propio de \mathbf{H}_1 con valor propio $1 - \zeta \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}$, se tiene que $\mathbf{H} \mathbf{t} = (1 - \zeta \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{R} \mathbf{t}$, entonces

$$\mathbf{t} \sim \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{R} \mathbf{t}) \sim \beta/s_1 \mathbf{v}_1 + \alpha/s_3 \mathbf{v}_3$$

$$\zeta = s_1 - s_3$$

El resto de los vectores singulares de \mathbf{H}_1 se pueden obtener como $\mathbf{u}'_2 = \mathbf{v}_2$ y requiriendo que \mathbf{t} sea un vector propio de \mathbf{H}_1 , $\mathbf{u}'_1 = \gamma \mathbf{v}_1 + \delta \mathbf{v}_3$, $\mathbf{u}_3 = \delta \mathbf{v}_1 - \gamma \mathbf{v}_3$, con $(\gamma, \delta) = (1 + s_1 s_3, \pm \alpha \beta)$ entonces

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{U}_1^\top = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \gamma & 0 & \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ \delta & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Para un ejemplo con las siguientes especificaciones se tiene

$$\theta = \frac{p^i}{6}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8660 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0,8660 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\zeta = 0,5$$

Calculando la matriz de homografía \mathbf{H} como

$$\mathbf{h} = \mathbf{R} - \zeta \mathbf{R} \mathbf{t} \mathbf{n}^\top$$

Aplicando el algoritmo antes descrito con la ayuda de la función `homog_to_Rt.m` se obtienen los siguientes dos resultados

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0,8660 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0,8660 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} 0,2425 \\ 0 \\ 0,9701 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} -0,2646 & 0 & 0,9643 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,9643 & 0 & -0,2646 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} -0,3799 \\ 0 \\ 0,9250 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} -0,8053 \\ 0 \\ 0,5929 \end{bmatrix}$$

Se observa que la matriz de rotación \mathbf{R}_1 concuerda con la matriz usada en el cálculo de \mathbf{R} mientras que, tomando el vector \mathbf{t}_1 se ve que éste coincide con el vector unitario de \mathbf{t} es decir

$$\mathbf{t}_1 = \hat{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{t}}{|\mathbf{t}|}$$

3.2. Descomposición de una matriz esencial

Dada una matriz esencial \mathbf{E} determinada a partir de las imágenes de dos cámaras, se puede usar esta información para determinar la rotación y traslación entre el sistema de coordenadas de ambas cámaras.

El siguiente método para determinar \mathbf{R} y \mathbf{t} está basado en la descomposición de valores singulares SVD:

$$\mathbf{E} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^\top$$

donde \mathbf{U} y \mathbf{V} son matrices ortogonales de 3×3 y \mathbf{S} es matriz diagonal de la forma

$$\mathbf{S} = \text{diag}(s, s, 0)$$

Las entradas en la diagonal de \mathbf{S} son los valores singulares de \mathbf{E} que, de acuerdo a las restricciones internas de la matriz esencial, consiste de dos valores idénticos y un cero. Se define

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ donde, } \mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se determinan las matrices \mathbf{R} y \mathbf{t} como

$$\begin{aligned} [\mathbf{t}]_\times &= \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{S}\mathbf{U}^\top \\ \mathbf{R} &= \mathbf{U}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{V}^\top \end{aligned}$$

También es posible de cambiar \mathbf{W} por \mathbf{W}^{-1} en la derivación de \mathbf{R} y \mathbf{t} obteniendo dos sets de posibles soluciones.

Usando las mismas matrices \mathbf{R} y \mathbf{t} que en la descomposición homográfica, se calcula la matriz esencial $\mathbf{E} = \mathbf{R}[\mathbf{t}]_\times$. Aplicando el método antes descrito con la ayuda de la función `Essential_to_Rt.m` se obtienen los valores:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0,8660 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0,8660 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} -3,9641 \\ 0 \\ -1,1340 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} -0,5288 & 0 & 0,8487 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0,8487 & 0 & 0,5288 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Se observa que \mathbf{R}_1 coincide con la matriz de rotación usada para el cálculo de la matriz esencial, así como el vector \mathbf{t}_2 .

Nota: El archivo `Get_R_and_t.m` se implementan las funciones `homog_to_Rt.m` y `Essential_to_Rt.m` con las mismas matrices \mathbf{R} y \mathbf{t} .