

Control II

Tarea 3. Control por realimentación de estados de un sistema no lineal MIMO Wednesday 9th September, 2020

Marco Antonio Esquivel Basaldua

El modelo del robot móvil con ruedas de manejo diferencial de la figura 1 se expresa en la ecuación (1) donde (x_p, y_p) representa la posición de un punto desplazado una distancia l desde el centro de rotación del robot (x, y) .

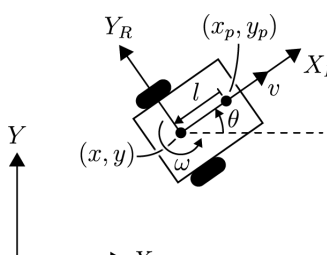
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (1)$$


Figura 1. Robot de manejo diferencial.

La salida de este sistema es el punto (x_p, y_p) representado por la ecuación (2).

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + l\cos(\theta) \\ y + l\sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (2)$$

El sistema representado por las ecuaciones (1) y (2) corresponde a un sistema afín de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= h(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\ g(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ h(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} x + l\cos(\theta) \\ y + l\sin(\theta) \end{bmatrix} \\ \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \end{aligned}$$

I. CONTROL COMPLETO DE TRACKING MEDIANTE DERIVADAS DE LIE

Para el problema de tracking necesitamos definir el vector de error a partir del vector de salida \mathbf{y} y el vector de referencia \mathbf{y}^r

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{y}^r$$

Tomando la derivada en el tiempo obtenemos

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}^r \quad (3)$$

donde, usando la regla de la cadena y la definición de la derivada de Lie, definimos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \\ &= \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\mathbf{u}) \\ &= \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ &= L_f h + L_g h \mathbf{u} \end{aligned}$$

Reemplazando esta expresión en (3) obtenemos

$$\dot{\mathbf{e}} = L_f h + L_g h \mathbf{u} - \dot{\mathbf{y}}^r \quad (4)$$

Donde despejando \mathbf{u} y reemplazando $\dot{\mathbf{e}}$ por la dinámica deseada $\dot{\mathbf{e}} = -k\mathbf{e}$

$$\mathbf{u} = (L_g h)^{-1} (\dot{\mathbf{y}}^r - L_f h - k\mathbf{e}) \quad (5)$$

A partir de los valores de el problema planteado se obtiene

$$L_f h = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} L_g h &= \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} g(\mathbf{x}) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l\sin(\theta) \\ 0 & 1 & l\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -l\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & l\cos(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (L_g h)^{-1} &= \frac{1}{l\cos^2(\theta) + l\sin^2(\theta)} \begin{bmatrix} l\cos(\theta) & l\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{l} \begin{bmatrix} l\cos(\theta) & l\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} l\cos(\theta) & l\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_p^r - k_1(x_p - x_p^r) \\ \dot{y}_p^r - k_2(y_p - y_p^r) \end{bmatrix} \quad (6)$$

II. ESTABILIZACIÓN DE LAS SALIDAS AL ORIGEN

Se simula mediante un script de MatLab la estabilización de las salidas del sistema al origen, considerando como salidas las expresiones de la ecuación (2). A continuación se presentan los resultados para las siguientes tres condiciones iniciales distintas

$$x_1 = [3 \ 3 \ 0]^T$$

$$x_2 = [-5 \ 1 \ \pi]^T$$

$$x_3 = [-1 \ 5 \ \pi/4]^T$$

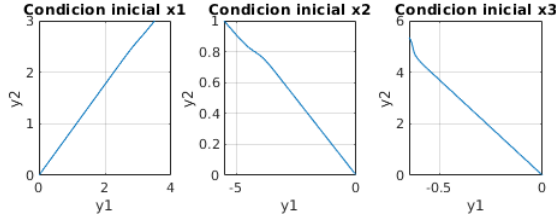


Figura 2. Gráficas de ambas salidas a partir de cada condición inicial.

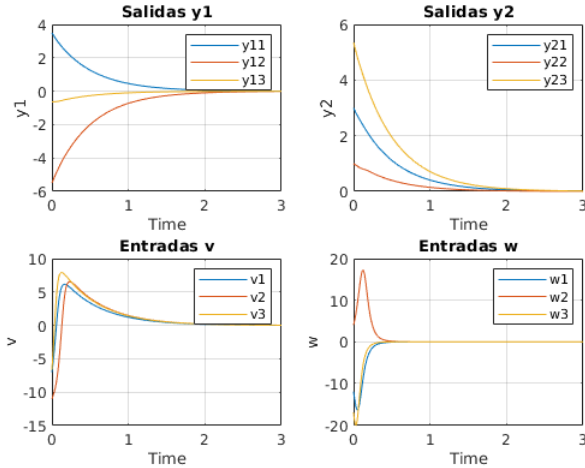


Figura 3. Cada una de las salidas y valores de los controles con respecto del tiempo.

Adicional a las gráficas generadas, se desarrolló un script que permite observar en forma de animación la evolución del comportamiento del sistema a lo largo del tiempo. A continuación se muestran las trayectorias seguidas por el robot en el espacio bidimensional a partir de cada condición inicial.

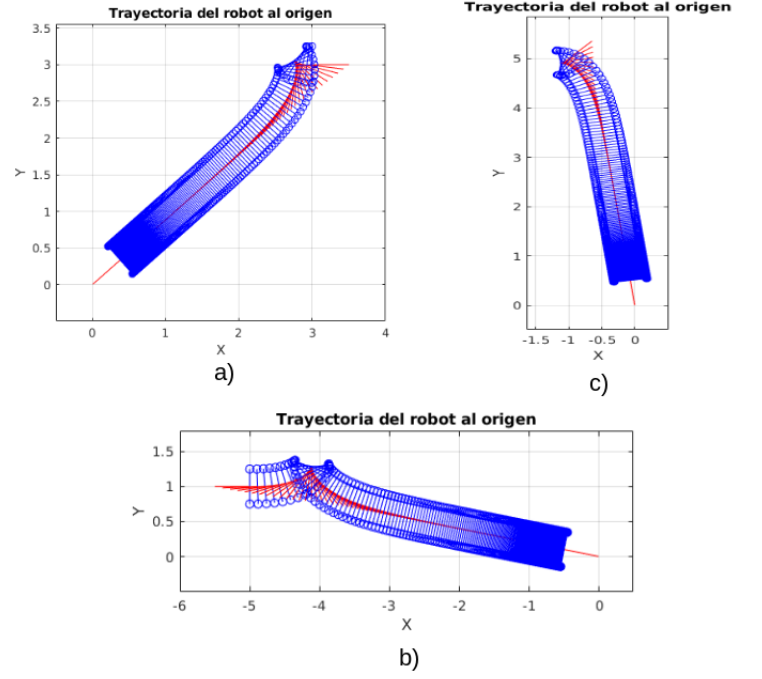


Figura 4. Trayectorias descritas por el robot a partir de las condiciones iniciales x_1 , x_2 y x_3 en a), b) y c) respectivamente.

III. ESTABILIZACIÓN AL ORIGEN POR EXTENSIÓN DINÁMICA

La extensión dinámica consiste en agregar una dinámica adicional de tal forma que el sistema se vuelva de mayor orden procurando que una nueva entrada se retarde en aparecer cuando se derivan las salidas. En este caso se agrega como nueva ecuación de estado al sistema

$$\dot{v} = \mu$$

Aplicando la linealización entrada salida (LES) al sistema extendido se obtiene

$$z_{11} = x$$

$$\dot{z}_{11} = \dot{x} = v \cos(\theta) = z_{12}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_{12} &= \dot{v} \cos(\theta) - v \dot{\theta} \sin(\theta) \\ &= \mu \cos(\theta) - \omega v \sin(\theta) \end{aligned}$$

Ya que fue necesario derivar dos veces la salida para la aparición de las entradas μ y ω se concluye que el grado relativo asociado a la salida x es igual a 2.

$$z_{21} = y$$

$$\dot{z}_{21} = \dot{y} = v \sin(\theta) = z_{22}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_{22} &= \dot{v} \sin(\theta) + \dot{\theta} v \cos(\theta) \\ &= \mu \sin(\theta) + \omega v \cos(\theta) \end{aligned}$$

Ya que fue necesario derivar dos veces la salida para la aparición de las entradas μ y ω se concluye que el grado relativo asociado a la salida y es igual a 2, logrando un grado relativo igual a 4 para todo el sistema.

El sistema en las variables z resulta como sigue.

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{z}_{11} \\ \dot{z}_{12} \\ \dot{z}_{21} \\ \dot{z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{12} \\ \mu \cos(\theta) - \omega v \sin(\theta) \\ z_{22} \\ \mu \sin(\theta) + \omega v \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{12} \\ \mu \cos(\theta) - \omega z_{22} \\ z_{22} \\ \mu \sin(\theta) + \omega z_{12} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} z_{12} \\ 0 \\ z_{22} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cos(\theta) & -z_{22} \\ 0 & 0 \\ \sin(\theta) & z_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \omega \end{bmatrix} \quad (7)$$

A partir de esta expresión se obtiene la matriz

$$G_r = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -v \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & v \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -z_{22} \\ \sin(\theta) & z_{12} \end{bmatrix}$$

y se definen los controles del sistema como

$$\begin{bmatrix} \mu \\ \omega \end{bmatrix} = G_r^{-1} \begin{bmatrix} -k_1 z_{11} - k_2 z_{12} \\ -k_3 z_{21} - k_4 z_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Una vez calculados los valores del vector \mathbf{z} es posible determinar los valores de los estados x , y , θ como

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ z_{21} \\ z_{22} \end{bmatrix}$$

$$x = z_{11}$$

$$y = z_{21}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{z_{12}}{z_{22}}\right)$$

Usando las mismas condiciones iniciales, x_1 , x_2 , x_3 que en la sección II se aplica la estabilización por extensión dinámica obteniendo los siguientes resultados.

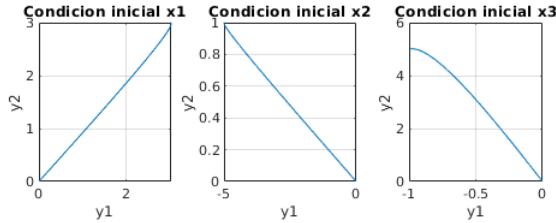


Figura 5. Gráficas de ambas salidas a partir de cada condición inicial.

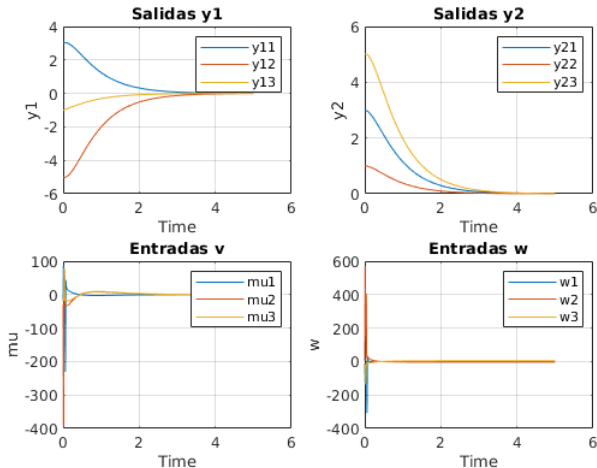


Figura 6. Cada una de las salidas y valores de los controles con respecto del tiempo.

De igual manera que en la implementación de la sección II, se lleva a cabo la animación para la visualización de los resultados. A continuación se presenta la trayectoria descrita por el robot para cada una de las condiciones iniciales.

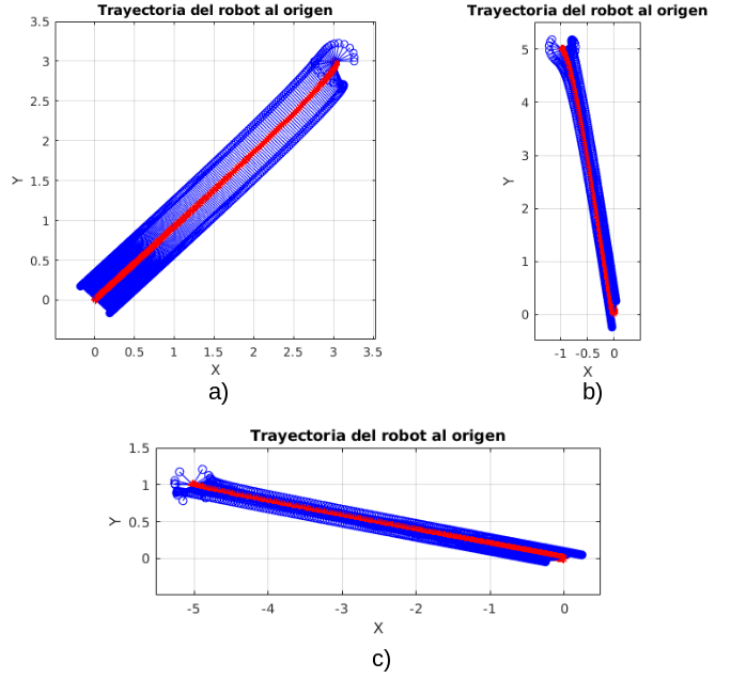


Figura 7. Trayectorias descritas por el robot a partir de las condiciones iniciales x_1 , x_2 y x_3 en a), b) y c) respectivamente.

IV. SEGUIMIENTO DE LÍNEA RECTA

Siguiendo con las expresiones desarrolladas en la sección I, se aplica una ley de control para que el punto desplazado una distancia l del centro de rotación del robot siga una línea recta iniciando desde la ubicación de dicho punto dadas las condiciones iniciales del robot Y_0 y terminando en un punto Y_f en \mathbb{R}^2 en un tiempo τ . En las simulaciones mostradas en este documento se proponen $Y_f = [1, -3]^\top$ y $\tau = 3$ segundos.

Para lograr que el robot lleguen en el tiempo especificado a la posición Y_f se realiza una parametrización de la recta de la siguiente manera.

$$\begin{cases} x_p^r = x_0 + pa \\ y_p^r = y_0 + pb \end{cases} \quad (9)$$

Donde $[x_p^r, y_p^r]^\top$ representa la posición deseada en el plano cartesiano a lo largo del tiempo t .

$$p = \frac{t}{\tau}$$

$$a = x_f - x_0$$

$$b = y_f - y_0$$

Siendo

$$Y_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$Y_f = \begin{bmatrix} x_f \\ y_f \end{bmatrix}$$

Adicionalmente se calcula

$$\dot{x}_p^r = \frac{a}{\tau}$$

$$\dot{y}_p^r = \frac{b}{\tau}$$

Por lo que la ley de control se calcula a partir de la ecuación (6). Retomando los valores de las condiciones iniciales x_1 , x_2 , x_3 de las secciones II y III se obtienen los siguientes resultados.

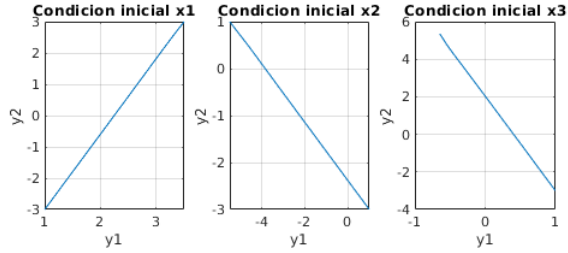


Figura 8. Gráficas de ambas salidas a partir de cada condición inicial.

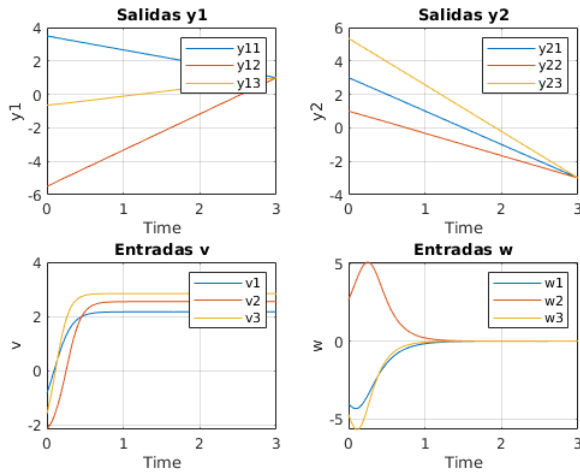


Figura 9. Cada una de las salidas y valores de los controles con respecto del tiempo.

Una vez más se implanta una animación mostrando la evolución del sistema. A continuación se presentan los resultados.

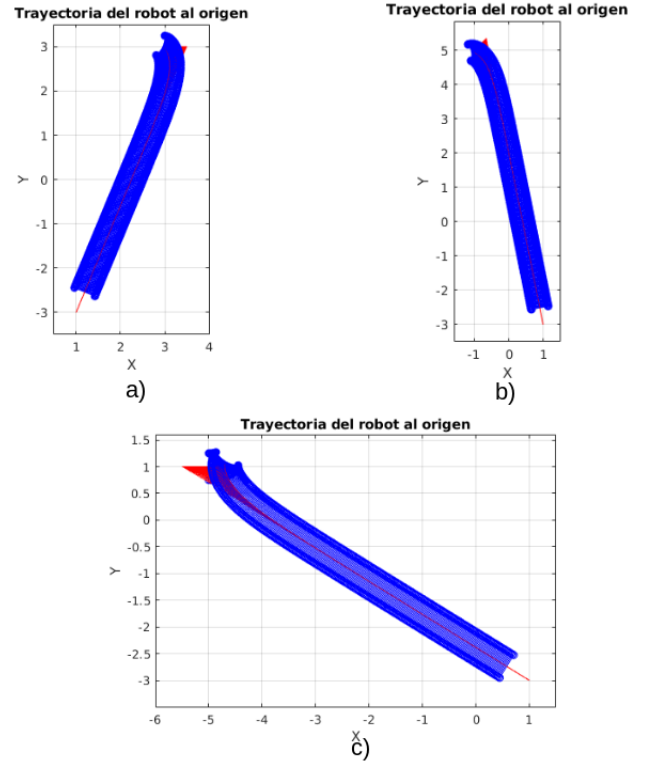


Figura 10. Trayectorias descritas por el robot a partir de las condiciones iniciales x_1 , x_2 y x_3 en a), b) y c) respectivamente.

V. SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS

Una vez llevado a cabo el seguimiento de una línea recta parametrizada en el tiempo se busca el seguimiento de una curva paramétrica de características más interesantes. Se propone el seguimiento de la curva descrita por las curvas paramétricas

$$\begin{aligned} x_p^r(t) &= 10\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right) + 5\sin\left(\frac{\pi t}{10}\right) \\ y_p^r(t) &= 10\sin\left(\frac{\pi t}{10}\right) - 5\cos\left(\frac{\pi t}{10}\right) + 5 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_p^r(t) &= -2\pi\sin\left(\frac{\pi t}{5}\right) + \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{10}\right) \\ \dot{y}_p^r(t) &= \pi\cos\left(\frac{\pi t}{10}\right) + \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{10}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

Usando estas expresiones en la ley de control expresada en la ecuación (6) se obtienen los siguientes resultados, usando las condiciones iniciales de las secciones anteriores y un tiempo de ejecución de 20 segundos.

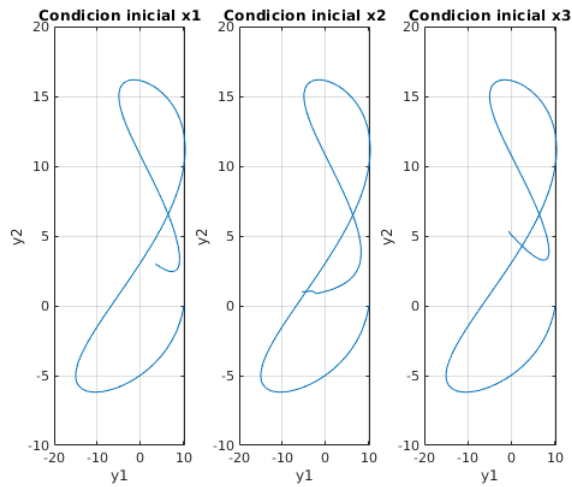


Figura 11. Gráficas de ambas salidas a partir de cada condición inicial.

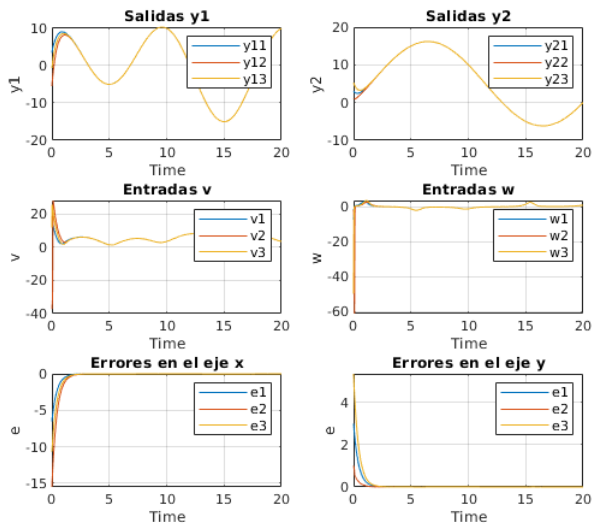
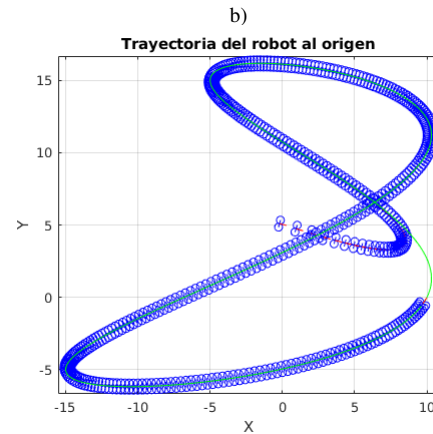
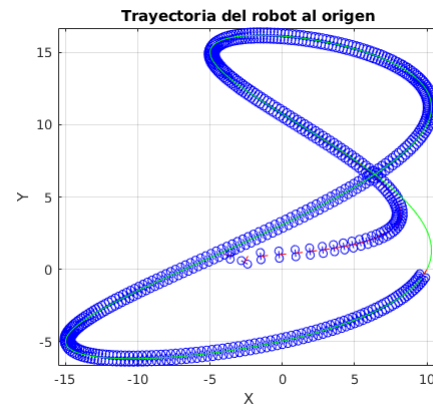


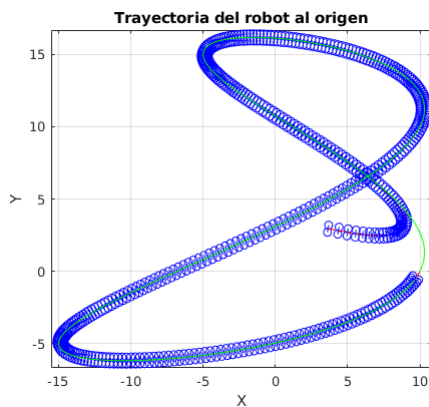
Figura 12. Cada una de las salidas, valores de los controles y errores con respecto del tiempo.

Las trayectorias descritas en el espacio bidimensional se aprecian en las siguientes figuras. Cabe destacar que es posible correr las animaciones que muestran la evolución del comportamiento del sistema.



c)

Figura 13. Trayectorias descritas por el robot a partir de las condiciones iniciales x_1 , x_2 y x_3 en a), b) y c) respectivamente.



a)