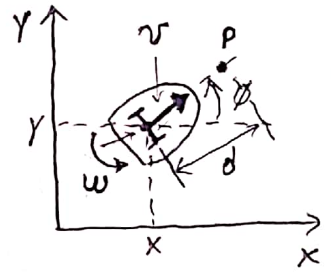
Ejemplo linealización caso MIMO

ROBOT DE MANEJO DIFERENCIAL:



Entradas de control → $v\ (m/s)$, $\omega\ (\frac{rad}{s})$

$$u = V = \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Estado (configuración)

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \phi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Salidas: posición del robot

MODELO CINEMÁTICO: $y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= v\cos\phi \\ \dot{y} &= v\sin\phi \\ \dot{\phi} &= \omega \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 \\ \sin\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sistema afín}$$

$$\dot{x} = \cancel{f(x)}^{0} + g(x)u$$

Sistema estable: si $u = 0$, Todo el espacio de estados ~~son~~ son puntos de equilibrio.

$Y_1 = X$ Control del punto de rotación del robot.

$\dot{Y}_1 = \dot{X} = v\cos\phi$ ①

Para la salida $Y_1 \Rightarrow G.R. = 1$

$Y_2 = Y$

$\dot{Y}_2 = \dot{Y} = v\sin\phi$ ②

Para la salida $Y_2 \Rightarrow G.R. = 1$

Vector de grado rel. $\{1, 1\}$

$\therefore$ GR cos estas salidas $= \underline{2}$ /

De ① y ②:

$$\left.\begin{aligned} \dot{Y}_1 &= v\cos\phi \\ \dot{Y}_2 &= v\sin\phi \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\phi & 0 \\ \sin\phi & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de desacoplamiento}} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}$$

Dado que el caso general para un sistema de la forma

$$\dot{y} = F(x) + G(x)u, \quad y \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^m, F \in \mathbb{R}^m, G \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

$$u = G^{-1}(x)(-F(x) + v)$$

Necesitamos invertir G pero en el ejemplo no es invertible.

<u>No se puede</u> controlar el punto (x, y)

Control de un punto desplazado: (p) → Conocemos d

$$\left.\begin{aligned} X_p &= X + d\cos\phi \\ Y_p &= Y + d\sin\phi \end{aligned}\right\} \text{Nuevas salidas a controlar}$$

$$e_1 = X_p - X_p^r$$

$$e_2 = Y_p - Y_p^r$$

$$\dot{e}_1 = \dot{X}_p - \dot{X}_p^r = \dot{X} - d\dot{\phi}\sin\phi - \dot{X}_p^r = v\cos\phi - d\omega\sin\phi - \dot{X}_p^r \quad ⊗$$

$$\dot{e}_2 = \dot{Y}_p - \dot{Y}_p^r = \dot{Y} + d\dot{\phi}\cos\phi - \dot{Y}_p^r = v\sin\phi + d\omega\cos\phi - \dot{Y}_p^r$$

Vector de grado relativo $\{1, 1\}$

$\therefore$ $\underline{G.R. = 2}$ /

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\phi & -d\sin\phi \\ \sin\phi & d\cos\phi \end{pmatrix}}_{G(x)} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{X}_p^r \\ \dot{Y}_p^r \end{pmatrix}; \quad \det(G(x)) = d\cos^2\phi + d\sin^2\phi = d$$

$\therefore$ $G(x)$ es investible y las salidas se pueden desacoplar.

$\dot{e} = G(x)u - \dot{p}^r \Rightarrow$ Dinámica deseada: $\dot{e} = -ke \Rightarrow$ Asintóticamente estable.

$$\dot{e}_1 = -k_1 e_1$$

$$\dot{e}_2 = -k_2 e_2$$

$u = G^{-1}(x)(\dot{p}^r + v)$, donde $v = -ke$

$$G^{-1}(x) = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} d\cos\phi & d\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} v_1 &= -k_1 e_1 \\ v_2 &= -k_2 e_2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} d\cos\phi & d\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k_1 e_1 + \dot{X}_p^r \\ -k_2 e_2 + \dot{Y}_p^r \end{pmatrix}$$

$$v = -k_1 e_1\cos\phi + \dot{X}_p^r\cos\phi - k_2 e_2\sin\phi + \dot{Y}_p^r\sin\phi$$

$$\omega = \frac{1}{d}\left(-k_1 e_1\sin\phi + \dot{X}_p^r\sin\phi - k_2 e_2\cos\phi + \dot{Y}_p^r\cos\phi\right)$$

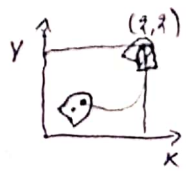
Dinámica cero: $\dot{\phi} = \omega$

¿Estabilidad de dinámica cero?

ω siempre está acotada $\therefore$ $\dot{\phi}$ = acotada

Cuando la referencia es constante

$\dot{\phi} = \omega = 0$ / $\Rightarrow$ Solución de $\dot{\phi} = 0 \Rightarrow \phi$ = costante /



Usando derivadas de Lie:

$$e_1 = x + d\cos\phi - X_p^r$$

$$h_1(x) = x + d\cos\phi; \quad f(x) = 0$$

$$g_1(x) = (\cos\phi \ \ \sin\phi \ \ 0)^T; \quad g_2(x) = (0, 0, 1)^T$$

$$e_2 = y - d\sin\phi - \dot{Y}_p^r \Rightarrow h_2(x) = y - d\sin\phi$$

$$L_f h_1(x) = 0; \quad L_{g_1} h_1(x) = \frac{\partial h_1}{\partial x} g_1 = (1 \ \ 0 \ \ -d\sin\phi) * \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L_{g_1} h_1(x) = \cos\phi$$

$$L_{g_2} h_1(x) = \frac{\partial h_1}{\partial x} g_2 = (1 \ \ 0 \ \ -d\sin\phi)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -d\sin\phi$$

$$\dot{e}_1 = \cancel{L_f h_1}^{0} + L_{g_1} h_1 v + L_{g_2} h_1 \omega - \dot{X}_p^r$$

$$\dot{e}_1 = v\cos\phi - d\sin\phi\,\omega - \dot{X}_p^r \quad ⊗$$