Centro de Investigación en Matemáticas A.C.
Métodos Numéricos(2019)

Tarea 18 - Integracion Numérica

Marco Antonio Esquivel Basaldua (MCMESQ)

Un método de cuadratura es una aproximación de una integral definida de una función $f(x)$ que selecciona puntos x_i en la evaluación del intervalo de integración y lo multiplica por un coeficiente de peso λ_i para cada valor de x_i.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\ dx = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

A diferencia de las reglas de cuadratura de Newton-Cotes en las que el valor de las x_i son conocidas y están dadas por $x_i = x_0 + ih$, donde $h = \frac{x_n - x_0}{n}$, en la cuadratura de Gauss se seleccionan estos puntos de manera óptima construida para dar el resultado de un polinomio de grado menor o igual a $2n+1$. Por lo que se puede obtener mayor precisión al utilizar estas fórmulas. El dominio de tal cuadratura por regla es de [-1,1], dada por:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Usando el método de Gauss-Legendre λ_i está dado por:

$$\lambda_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)[P_n'(x_i)]^2}$$

donde P_n son los polinomios de Legendre en el intervalo $[-1, 1]$.

Se presenta una lista de de coeficientes λ_i y puntos x_i para $n = 0, \ldots, 4$:

Number of points $(n+1)$	Points (xi)	Weights (λ_i)	Gauss–Legendre formula $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$
1	0	2	$= 2f(0)$
2	$\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$	1	$= f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$
3	0	$\frac{8}{9}$	$= \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$	
4	$\pm\sqrt{\frac{3-2\sqrt{6/5}}{7}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$	$= \frac{18+\sqrt{30}}{36} f\left(\sqrt{\frac{3-2\sqrt{6/5}}{7}}\right) + \frac{18+\sqrt{30}}{36} f\left(-\sqrt{\frac{3-2\sqrt{6/5}}{7}}\right) + \frac{18-\sqrt{30}}{36} f\left(\sqrt{\frac{3+2\sqrt{6/5}}{7}}\right) + \frac{18-\sqrt{30}}{36} f\left(-\sqrt{\frac{3+2\sqrt{6/5}}{7}}\right)$
	$\pm\sqrt{\frac{3+2\sqrt{6/5}}{7}}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$	
5	0	$\frac{128}{225}$	$= \frac{322+13\sqrt{70}}{900} f\left(-\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}}\right) + \frac{322+13\sqrt{70}}{900} f\left(\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}}\right) + \frac{128}{225} f(0) + \frac{322-13\sqrt{70}}{900} f\left(-\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}}\right) + \frac{322-13\sqrt{70}}{900} f\left(\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}}\right)$
	$-\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$	
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$	

Fuente: Gupta, Rajesh Kumar. "Numerical Methods, Fundamentals and Applications". Cambridge University Press, 2019.

Los cambios de intervalos van de $[-1,1]$ después de aplicar la cuadratura de Gauss:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right) dx$$

Aplicando la aproximación:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}\right)$$

En este reporte se presentan los métodos de Integración usando las fórmulas de Gauss-Legendre a partir de la cuadratura de Gauss para $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Se ejemplifican estas fórmulas para la integración de las funciones:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$$
$$\int_1^2 \sqrt{1+cos^2 x}\,dx$$

para $n = 0, 1, 2, 3, 4$

El valor de las integrales con una exactitud de 6 decimales es:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \approx 1.570796$$
$$\int_1^2 \sqrt{1+cos^2 x}\,dx \approx 1.040246$$

Se incluye una comparativa de las integrales de estas funciones con las reglas por la cuadratura de Newton-Cotes (regla del Trapezoide, regla de Simpson 1/3, Simpson 3/8, la regla de Boole y la regla de Weddle).

Un punto (n = 0)

Al calcular el valor de ambas integrales para $n = 0$ usando la cuadratura de Newton-Cotes y la cuadratura de Gauss-Legendre se obtiene:

Integral	Newton-Cotes (regla del Trapezoide)	Gauss-Legendre
$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$	1	2
Error	0.570796	0.429204
$\int_1^2 \sqrt{1+cos^2 x}\,dx$	1.109881	1.002499
Error	0.069635	0.037747

Dos puntos (n = 1)

Al calcular el valor de ambas integrales para $n = 1$ usando la cuadratura de Newton-Cotes y la cuadratura de Gauss-Legendre se obtiene:

Integral	Newton-Cotes (regla Simpson 1/3)	Gauss-Legendre
$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$	1.666667	1.5
Error	0.095871	0.070796
$\int_{1}^{2} \sqrt{1 + cos^2 x}\, dx$	1.038293	1.041583
Error	0.001953	0.001337

Tres puntos (n = 2)

Al calcular el valor de ambas integrales para $n = 2$ usando la cuadratura de Newton-Cotes y la cuadratura de Gauss-Legendre se obtiene:

Integral	Newton-Cotes (regla Simpson 3/8)	Gauss-Legendre
$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$	1.6	1.583333
Error	0.029204	0.012537
$\int_{1}^{2} \sqrt{1 + cos^2 x}\, dx$	1.03942	1.040205
Error	0.000826	0.000041

Cuatro puntos (n = 3)

Al calcular el valor de ambas integrales para $n = 3$ usando la cuadratura de Newton-Cotes y la cuadratura de Gauss-Legendre se obtiene:

Integral	Newton-Cotes (regla de Boole)	Gauss-Legendre
$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$	1.56	1.568627
Error	0.010796	0.002169
$\int_{1}^{2} \sqrt{1 + cos^2 x}\, dx$	1.040287	1.040248
Error	0.000041	0.000002

Cinco puntos (n=4)

Al calcular el valor de ambas integrales para $n = 4$ usando la cuadratura de Newton-Cotes y la cuadratura de Gauss-Legendre se obtiene:

Integral	**Newton-Cotes (regla de Weddle)**	**Gauss-Legendre**
$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$	1.572308	1.571171
Error	0.001512	0.00375
$\int_{1}^{2} \sqrt{1 + cos^2 x}\, dx$	1.040247	1.040246
Error	0.000001	0.0

Se puede observar que la integración por la cuadratura de Gauss es mejor que la realizada por la cuadratura de Newton-Cotes. Se aprecia que el error, en el caso de los métodos de Gauss-Legendre es más cercana a cero que el error generado por las integraciones de la cuadratura de Newton -Cotes.

En esta tarea se incluye, ademàs de los programas para cada uno de los valores de n solicitados, un programa que los incluye a todos, solo es necesario que el usuario ingrese el valor de n por la consola una vez que éste sea solicitado. A manera de completar la comparativa con las reglas usadas en la Tarea 17 usando la cuadratura de Newton-Cotes se incluye el caso para 5 puntos, donde $n = 4$, que corresponde, en Newton-Cotes, a la regla de Weddle.