Centro de Investigación en Matemáticas A.C.
Métodos Numéricos(2019)

Tarea 16 - Interpolación, Operadores de Newton

Marco Antonio Esquivel Basaldua (MCMESQ)

El objetivo de la Interpolación es obtener un polinomio de aproximación para un conjunto dado de puntos discretos. La Interpolación construye un polinomio $P(x)$ de menor grado posible que pase por el conjunto dado de puntos, $(x_i, y_i), i = 0, 1, \ldots, n$. Este polinomio es conocido como Polinomio de Interpolación. El polinomio de Interpolación puede ser usado para la obtención de nuevos puntos partiendo del conocimiento del conjunto discreto de puntos dados; es usado en ingeniería y algunas ciencias en las que frecuentemente se dispone de un cierto número de puntos que se obtienen por muestreo en un experimento y se pretende construir una función que los ajuste, así como es utilizado para aproximar una función complicada por otra más simple.

En este reporte se presentan los métodos de Interpolación de Diferencias hacia adelante de Gregory-Newton, Diferencias hacia atrás de Gregory-Newton, Diferencias centradas hacia adelante de Gauss, Diferencias centradas hacia atrás de Gauss y el método de Stirling. Estos métodos mencionados se aplican cuando los puntos de Interpolación están equiespaciados en el eje x. Aunque a partir de un conjunto de puntos, un polinomio de menor grado posible, menor o igual a n, que pase por todos ellos es único, es decir que si se aplica cualquiera de los métodos antes mencionados, se obtiene el mismo polinomio, la forma de construirlo es distinta e involucra distintas implicaciones numéricas que se discutirán en este reporte.

La implementación de los métodos antes mencionados se lleva a cabo de la siguiente manera:

- En un archivo de texto llamado "Enter points.txt" se encuentran los valores de $(n+1)$, que es el total de puntos que se van a utilizar para realizar la Interpolación, como segundo valor se lee el valor x_0, y como tercer valor se lee x_n. Se debe recordar que los puntos en el eje x estàn equiespaciados por lo que todos los puntos son obtenidos a partir de los tres valores existentes en el archivo de texto. El espacio entre x_i y x_{i+1} se calcula como:

$$h = \frac{x_n - x_0}{n - 1}$$

- Se despliega un menú de funciones, $f(x)$, que servirán para encontrar los puntos de Interpolación $(x_i, y_i) = (x_i, f(x_i))$. La función elegida corre a cargo del usuario y esta será la función a la que el polinomio $P(x)$ se aproximará. Las opciones disponibles y sus respectivos intervalos son:
  - $f(x) = 2 + x$ en el intervalo $[-10, 10]$
  - $f(x) = x^2 - 5$ en el intervalo $[-10, 10]$
  - $f(x) = sin(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$
  - $f(x) = x^2(5x - 3) - 2x^4 + 4x - 5$ en el intervalo $[-2, 4]$

Debido a que cada opción está definida sobre un intervalo distinto, el usuario debe verificar que los valores dentro del archivo "Enter points.txt" estén dentro de el intervalo dado para la función, $f(x)$, con la que se desee trabajar.

- Se calcula y se genera una gráfica que contiene las funciones $f(x)$, $P(x)$ así como los puntos de Interpolación $(x_i, f(x_i)) = (x_i, P(x_i))$ para su visualización y comparación.
- Se incluye un análisis del error entre la función $f(x)$ y el polinomio $P(x)$, dado por:

$$error = \frac{\sum_{j=0}^{m} |P(x_j) - f(x_j)|}{m}$$

para un valor de muestras m y donde las x_j, $j = 0, 1, \ldots m$ están equiespaciadas.

- Para cada método se incluye también su tiempo de ejecución.

Diferencias hacia adelante de Gregory-Newton

Sea $y = f(x)$ una función real evaluada en el intervalo $I = [a, b]$ y sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(n+1)$ puntos equidistantes en el intervalo I, entonces existe un único polinomio de Interpolación $P(x)$ de grado menor o igual a n tal que $(x_i, f(x_i)) = (x_i, P(x_i))$ para $i = 0, 1..., n$. El espacio entre dos valores consecutivos de x , h, se calcula como:

$$\begin{gathered} h = x_{i+1} - x_i \\ \Rightarrow x_i = x_0 + ih; \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{gathered}$$

Usando el polinomio de Newton de las Diferencias divididas:

$$\begin{gathered} P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \end{gathered}$$

y la relacion de las diferencias hacia adelante y las diferencisa divididas:

$$\begin{gathered} f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m] = \frac{1}{m!h^m}\Delta^m f(x_0); \\ m = 1, 2, \ldots, n \end{gathered}$$

Se obtiene la forma del polinomio de Newton de las diferencias hacia adelante:

$$\begin{gathered} P_n(x) = f(x_0) + \frac{1}{h}\Delta f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!h^2}\Delta^2 f(x_0)(x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ + \frac{1}{n!h^n}\Delta^n f(x_0)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \end{gathered}$$

Tomando $x = x_0 + sh$ se puede escribir la fórmula anterior como:

$$P_n(x) = f(x_0) + \Delta f(x_0)(s) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}(s)(s-1) + \ldots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!}(s)(s-1)\ldots(s-n+1)$$

Cabe mencionar que la tabla para los puntos para las diferencias hacia adelante son dadas en la tabla 1.

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3
x_0	$f(x_0)$			
		$\Delta f(x_0)$		
x_1	$f(x_1)$		$\Delta^2 f(x_0)$	
		$\Delta f(x_1)$		$\Delta^3 f(x_0)$
x_2	$f(x_2)$		$\Delta^2 f(x_1)$	$\vdots$
		$\Delta f(x_2)$	$\vdots$	
x_3	$f(x_3)$	$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$			

Tabla 1. Diferencias hacia adelante de Newton.

Implementación del algoritmo

Para mostrar una prueba de la implementación del algoritmo se usará $f(x) = sin(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ usando como información para la Interpolación $(n+1) = 5$, $x_0 = -1$ y $x_n = 3$. Este caso es usado igualmente para ejemplificar los otros métodos para posteriormente realizar una comparativa entre los tres métodos.

Al ejecutar el algoritmo se obtiene la gráfica mostrada en la figura 1 donde se pueden apreciar la función $f(x)$, el polinomio de Interpolación $P(x)$ y los puntos de Interpolación $(x_i, f(x_i)) = (x_i, P(x_i))$, $i = 0, 1, 2, 3$. El tiempo tomado para generar los resultados es de 0.55 milisegundos y el polinomio presenta una medida de error de 0.511153.

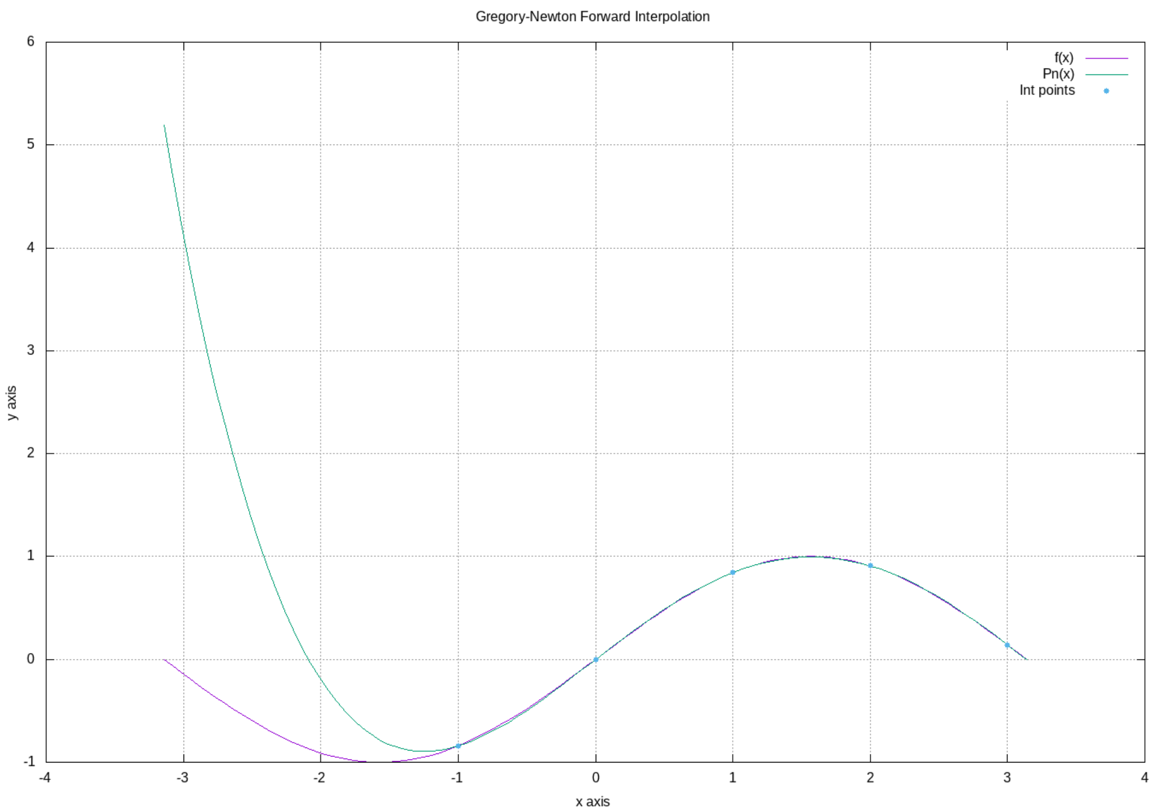

Figura 1. Polinomio de interpolación usando el método de Diferencias hacia adelante de Gregory-Newton

Diferencias hacia atrás de Gregory-Newton

La fórmula de las diferencias hacia atrás de Gregory-Newton está dada por:

$$P_n(x) = f(x_n) + \nabla f(x_n)(s) + \frac{1}{2!}\nabla^2 f(x_n)(s)(s+1) + \frac{1}{3!}\nabla^3 f(x_n)(s)(s+1)(s+2) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{n!}\nabla^n f(x_n)(s)(s+1)(s+2)\ldots(s+n-1)$$

Usando $s = \frac{x - x_n}{h}$, se obtiene:

$$P_n(x) = f(x_n) + \frac{1}{h}\nabla f(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2!h^2}\nabla^2 f(x_n)(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{n!h^n}\nabla^n f(x_n)(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1)$$

La tabla para los puntos para las diferencias hacia atrás son dadas en la tabla 2.

x	$f(x)$	∇	∇^2	∇^3
$\vdots$	$\vdots$			
x_{n-3}	$f(x_{n-3})$	$\vdots$		
		$\nabla f(x_{n-2})$	$\vdots$	
x_{n-2}	$f(x_{n-2})$		$\nabla^2 f(x_{n-1})$	$\vdots$
		$\nabla f(x_{n-1})$		$\nabla^3 f(x_n)$
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$		$\nabla^2 f(x_n)$	
		$\nabla f(x_n)$		
x_n	$f(x_n)$			

Tabla 2. Diferencias hacia atrás de Newton.

Implementación del Algoritmo

Para mostrar una prueba de la implementación del algoritmo se usará $f(x) = sin(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ usando como información para la Interpolación $(n+1) = 5$, $x_0 = -1$ y $x_n = 3$. Este caso es usado igualmente para ejemplificar los otros métodos para posteriormente realizar una comparativa entre los tres métodos.

Al ejecutar el algoritmo se obtiene la gráfica mostrada en la figura 2 donde se pueden apreciar la función $f(x)$, el polinomio de Interpolación $P(x)$ y los puntos de Interpolación $(x_i, f(x_i)) = (x_i, P(x_i))$, $i = 0, 1, 2, 3$. El tiempo tomado para generar los resultados es de 0.582 milisegundos y el polinomio presenta una medida de error de 0.511153.

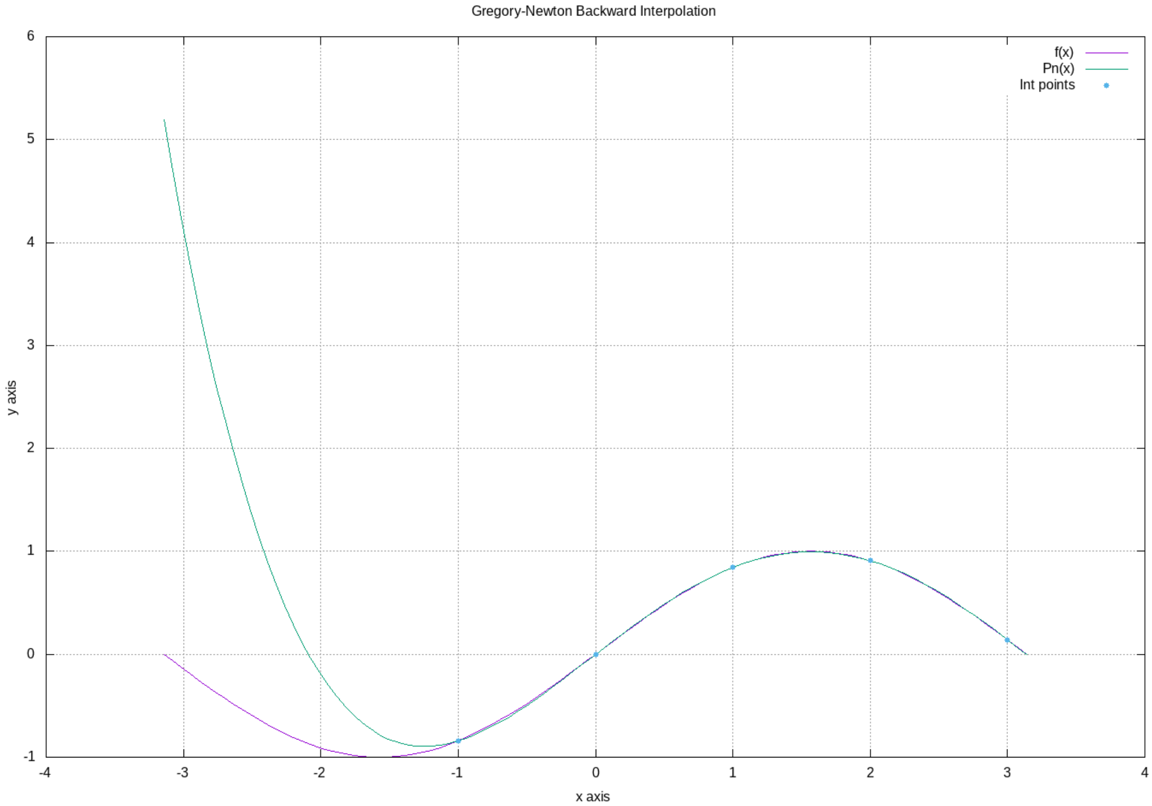

Figura 2. Polinomio de interpolación usando el método de Diferencias hacia atrás de Gregory-Newton

Diferencias centradas hacia adelante de Gauss

A partir de la forma del polinomio de Interpolación de las Diferencias hacia adelante de Newton se obtiene la fórmula del polinomio de Interpolación de las Diferencias centradas hacia adelante de Gauss:

$$P_n(x) = f(x_0) + \delta f(x_{1/2})(s) + \frac{\delta^2 f(x_0)}{2!}(s)(s-1) + \frac{\delta^3 f(x_{1/2})}{3!}(s+1)(s)(s-1)$$
$$+ \frac{\delta^4 f(x_0)}{4!}(s+1)(s)(s-1)(s-2) + \frac{\delta^5 f(x_{1/2})}{5!}(s+2)(s+1)(s)(s-1)(s-2) + \ldots$$

La tabla para las diferencias centradas es:

x	$f(x)$	δ	δ^2	δ^3
$\vdots$	$\vdots$			
x_{-2}	$f(x_{-2})$	$\vdots$		
		$\delta f(x_{-3/2})$	$\vdots$	
x_{-1}	$f(x_{-1})$		$\delta^2 f(x_{-1})$	$\vdots$
		$\delta f(x_{-1/2})$		$\delta^3 f(x_{-1/2})$
x_0	$f(x_0)$		$\delta^2 f(x_0)$	
		$\delta f(x_{1/2})$		$\delta^3 f(x_{1/2})$
x_1	$f(x_1)$		$\delta^2 f(x_1)$	$\vdots$
		$\delta f(x_{3/2})$	$\vdots$	
x_2	$f(x_2)$	$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$			

Tabla 3. Diferencias centradas de Newton.

Implementación del Algoritmo

Para mostrar una prueba de la implementación del algoritmo se usará $f(x) = sin(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ usando como información para la Interpolación $(n+1) = 5$, $x_0 = -1$ y $x_n = 3$. Este caso es usado igualmente para ejemplificar los otros métodos para posteriormente realizar una comparativa entre los tres métodos.

Al ejecutar el algoritmo se obtiene la gráfica mostrada en la figura 2 donde se pueden apreciar la función $f(x)$, el polinomio de Interpolación $P(x)$ y los puntos de Interpolación $(x_i, f(x_i)) = (x_i, P(x_i))$, $i = 0, 1, 2, 3$. El tiempo tomado para generar los resultados es de 0.555 milisegundos y el polinomio presenta una medida de error de 0.511153.

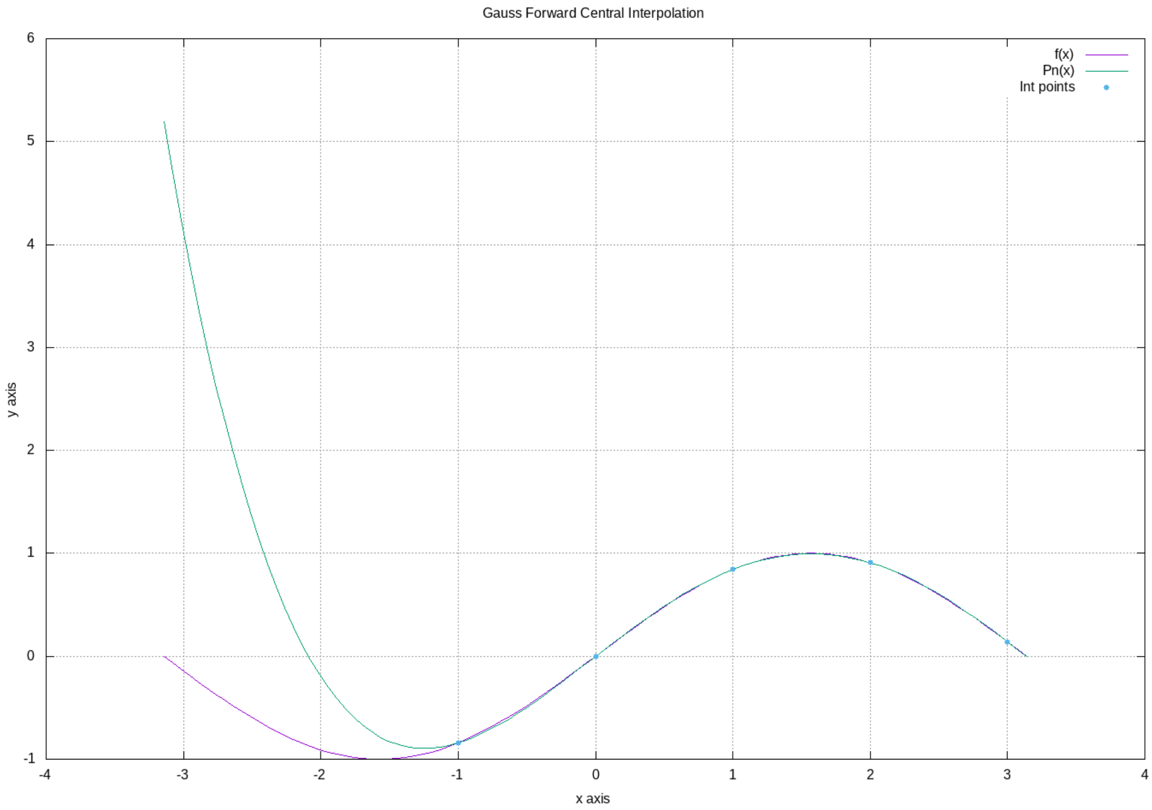

Figura 3. Polinomio de interpolación usando el método de Diferencias centradas hacia adelante de Gauss

Diferencias centradas hacia atrás de Gauss

A partir de la forma del polinomio de Interpolación de las Diferencias hacia adelante de Newton se obtiene la fórmula del polinomio de Interpolación de las Diferencias centradas hacia atrás de Gauss:

$$P_n(x) = f(x_0) + \delta f(x_{-1/2})(s) + \frac{\delta^2 f(x_0)}{2!}(s)(s-1) + \frac{\delta^3 f(x_{-1/2})}{3!}(s+1)(s)(s-1)$$
$$+ \frac{\delta^4 f(x_0)}{4!}(s+1)(s)(s-1)(s-2) + \frac{\delta^5 f(x_{-1/2})}{5!}(s+2)(s+1)(s)(s-1)(s-2) + ..$$

La tabla usada para las diferencias centradas es mostrada en la tabla 3. Cabe mencionar que esta es la misma que para el método de las Diferencias hacia adelante de Gauss.

Implementación del Algoritmo

Para mostrar una prueba de la implementación del algoritmo se usará $f(x) = sin(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ usando como información para la Interpolación $(n+1) = 5$, $x_0 = -1$ y $x_n = 3$. Este caso es usado igualmente para ejemplificar los otros métodos para posteriormente realizar una comparativa entre los tres métodos.

Al ejecutar el algoritmo se obtiene la gráfica mostrada en la figura 2 donde se pueden apreciar la función $f(x)$, el polinomio de Interpolación $P(x)$ y los puntos de Interpolación $(x_i, f(x_i)) = (x_i, P(x_i))$, $i = 0, 1, 2, 3$. El tiempo tomado para generar los resultados es de 0.525 milisegundos y el polinomio presenta una medida de error de 0.511153.

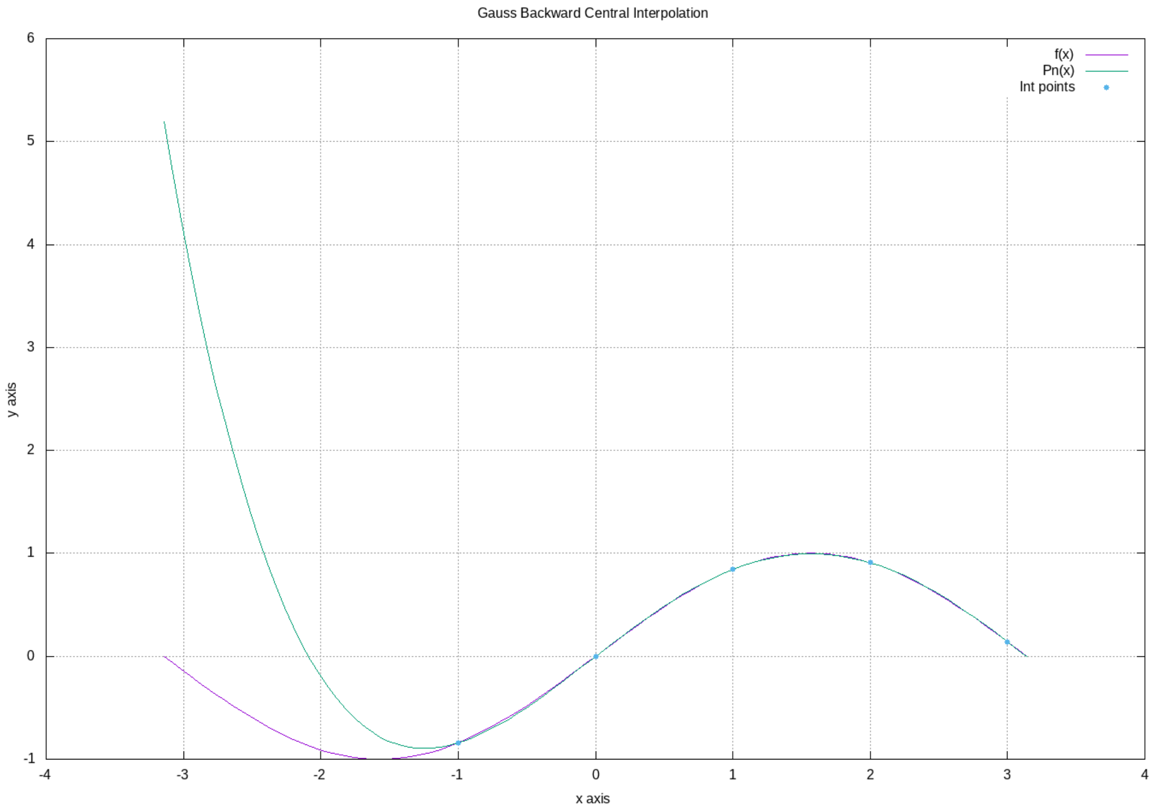

Figura 4. Polinomio de interpolación usando el método de Diferencias centradas hacia atrás de Gauss

Método de Stirling

Al calcular el promedio entre los métodos de las diferencias centradas hacia adelante y hacia atrás de Gauss se obtiene la forma de las diferencias centradas de Stirling. Esta forma de Stirling es:

$$P_n(x) = f(x_0) + (s)\left[\frac{\delta f(x_{1/2}) + \delta f(x_{-1/2})}{2}\right] + \frac{s^2}{2!}\delta^2 f(x_0)$$
$$+ \frac{s(s^2-1)}{3!}\left[\frac{\delta^3 f(x_{1/2}) + \delta^3 f(x_{-1/2})}{2}\right] + \frac{s^2(s^2-1)}{4!}\delta^4 f(x_0)$$
$$+ \frac{s(s^2-1)(s^2-2^2)}{5!}\left[\frac{\delta^5 f(x_{1/2}) + \delta^5 f(x_{-1/2})}{2}\right] + \dots$$

Las diferencias centradas son obtenidas a partir de la tabla 3, al igual que para los métodos de las diferencias centradas hacia adelante y hacia atrás de Gauss.

Implementación del Algoritmo

Para mostrar una prueba de la implementación del algoritmo se usará $f(x) = sin(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ usando como información para la Interpolación $(n+1) = 5$, $x_0 = -1$ y $x_n = 3$. Este caso es usado igualmente para ejemplificar los otros métodos para posteriormente realizar una comparativa entre los tres métodos.

Al ejecutar el algoritmo se obtiene la gráfica mostrada en la figura 2 donde se pueden apreciar la función $f(x)$, el polinomio de Interpolación $P(x)$ y los puntos de Interpolación $(x_i, f(x_i)) = (x_i, P(x_i))$, $i = 0, 1, 2, 3$. El tiempo tomado para generar los resultados es de 0.637 milisegundos y el polinomio presenta una medida de error de 0.511153.

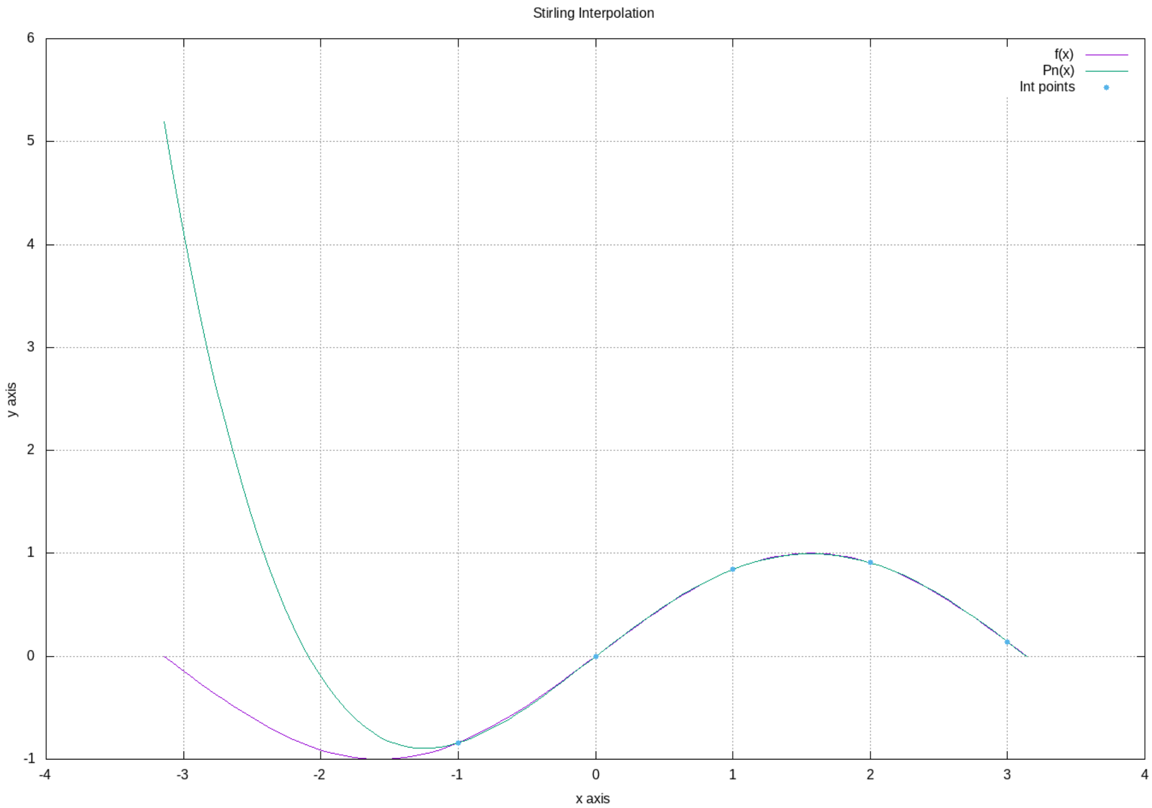

Figura 4. Polinomio de interpolación usando el método de Stirling

Observaciones

El método de Stirling utilizado en esta implementación es efectivo cuando el valor de $(n+1)$ es impar, ya que para encontrar los promedios de las diferencias centradas se necesita de tener un número impar de puntos y así asegurar la obtención de un punto centrado en la tabla.

Comparativa Entre los Métodos

A continuación se presenta una tabla comparativa entre los métodos descritos anteriormente. En esta tabla se compara el tiempo tomado por cada algoritmo y su tiempo de ejecución para las funciones presentadas en la introducción de este documento tomando los mismos puntos por función para cada uno de los métodos. El tiempo de ejecución mostrado en la tabla corresponde al tiempo llevado a cabo solo por el algoritmo en cuestión y no por todo el programa.

Comparativa	Gregory-Newton hacia adelante	Gregory-Newton hacia atrás	Gauss hacia adelante	Gauss hacia atrás	Stirling
$f(x) = 2 + x$ Para: $(n+1) = 5, x_0 = -1, x_n = 3$					
Tiempo de ejecución (milisegundos)	1.454	1.035	0.923	0.929	1.086
Error	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$f(x) = x^2 + 5$ Para: $(n+1) = 5, x_0 = -1, x_n = 3$					
Tiempo de ejecución (milisegundos)	1.089	1.459	1.065	0.994	1.19
Error	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$f(x) = sin(x)$ Para: $(n+1) = 5, x_0 = -1, x_n = 3$					
Tiempo de ejecución (milisegundos)	0.55	0.582	0.555	0.525	0.637
Error	0.511153	0.511153	0.511153	0.511153	0.511153
$f(x) = x^2(5x-3) - 2x^4 + 4x - 5$ Para: $(n+1) = 5, x_0 = -1, x_n = 3$					
Tiempo de ejecución (milisegundos)	0.513	0.569	0.543	0.520	1.242
Error	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Como se puede apreciar en la tabla cuando se trabaja con un número de puntos mayor al grado de la función de la que se obtienen las coordenadas $(x_i, f(x_i))$ se obtiene un valor de error igual a cero, es decir, el polinomio ajustado $P(x)$, coincide con la función $f(x)$, solo variando el tiempo de ejecución de un algoritmo a otro. Cuando este caso no se presenta, ya sea que se trabaje con un número de puntos menor o igual al grado de la función $f(x)$ o se trabaje con una función que no sea polinomial, existe una medida de error mayor a cero.

También se puede notar que el error entre todos los métodos es siempre el mismo, pero varia el tiempo de ejecución entre ambos algoritmos siendo el tiempo de ejecución de los algoritmos de Gauss en general menor.