Centro de Investigación en Matemáticas A.C.
Métodos Numéricos(2019)

Tarea 17 - Integración Numérica

Marco Antonio Esquivel Basaldua (MCMESQ)

En este reporte se presentan los métodos de Integración usando las fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes que son: le regla del Trapezoide, la regla de Simpson 1/3, la regla de Simpson 3/8, la regla de Boole y la regla de Weddle.

La implementación de los métodos antes mencionados se lleva a cabo de la siguiente manera:

- Se despliega un menú de funciones, $f(x)$, a partir de la cual se calcula la integral. La función elegida corre a cargo del usuario. Las opciones disponibles y sus respectivos intervalos ,$[a, b]$, son:
    - $f(x) = 2 + x$ en el intervalo $[-10, 10]$
    - $f(x) = x^2 - 5$ en el intervalo $[-10, 10]$
    - $f(x) = sin(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$
    - $f(x) = x^2(5x - 3) - 2x^4 + 4x - 5$ en el intervalo $[-2, 4]$
    - $f(x) = sin(x + 1/2)$ en el intervalo $[0, 4\pi]$
    - $f(x) = e^{-x^2}$ en el intervalo $[1, 2]$
- Se pide el valor de m que es la cantidad de subintervalos a dividir el intervalo para aproximar el càlculo de la integral. Dependiendo del método con el que se esté trabajando m solo puede tomar ciertos valores, siendo estos:
    - Para la regla del Trapezoide: m puede tomar cualquier número Natural.
    - Para la regla de Simpson 1/3: m debe ser múltiple de 2.
    - Para la regla de Simpson 3/8: m debe ser múltiple de 3.
    - Para la regla de Boole: m debe ser múltiple de 4.
    - Para la regla de Weddle: m debe ser múltiple de 6.

  Debido a que para todos los métodos, excepto para el método del Trapezoide, m no puede tomar cualquier valor, antes de desarrollar el método de integración, m es ajustada, si así se requiere, hacia el próximo valor múltiple de 2, 3, 4 o 6 de acuerdo al método a desarrollar.
- Los puntos en los que se va a dividir el intervalo de integración están equiespaciados en el eje x, por lo que el espacio entre x_i y x_{i+1} se calcula como:
$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{x_n - x_0}{m}$$
- Se calcula la aproximación a la integral dada la función elegida, al método elegido y al valor de m.
- Para cada método se incluye también su tiempo de ejecución.

Regla del Trapezoide

Suponiendo que solo se tengan como valores de x_i a $x_0 = a$ y $x_1 = b$, siguiendo la regla del Trapezoide la integral se puede calcular como:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$$

Cuando se tiene un intervalo $[a, b]$ dividido en m subintervalos de igual tamaño con $a = x_0$ y $b = x_m$, el espacio entre las variables de x se calcula como:

$$h = \frac{x_m - x_0}{m}$$

y la integral se puede calcular como:

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_m) + 2\,[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{m-1})]]$$

Interpretación Geométrica

Cuando se tiene $x_0 = a$ y $x_1 = b$, este método aproxima la función con una linea recta que une $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$. Entonces la integral $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$ que es el área bajo la curva de $f(x)$ en $[x_0, x_1]$ es aproximada por el área bajo la linea recta que une $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ en $[x_0, x_1]$, como se muestra en la figura 1.

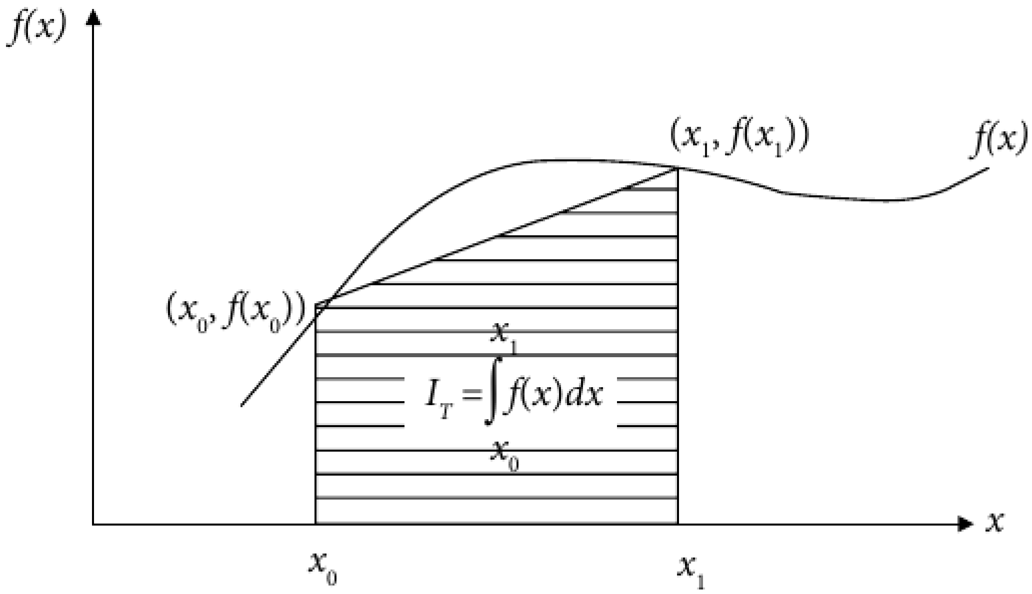

Figura 1. Integración por el método del Trapezoide

Cuando se divide el intervalo $[a, b]$ en m subintervalos, se aproxima la función $f(x)$ con lineas rectas uniendo los puntos finales de cada subintervalo, en seguida se suma el área bajo cada trapezoide como una aproximación de la la integral $\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx$, como se muestra en la figura 2.

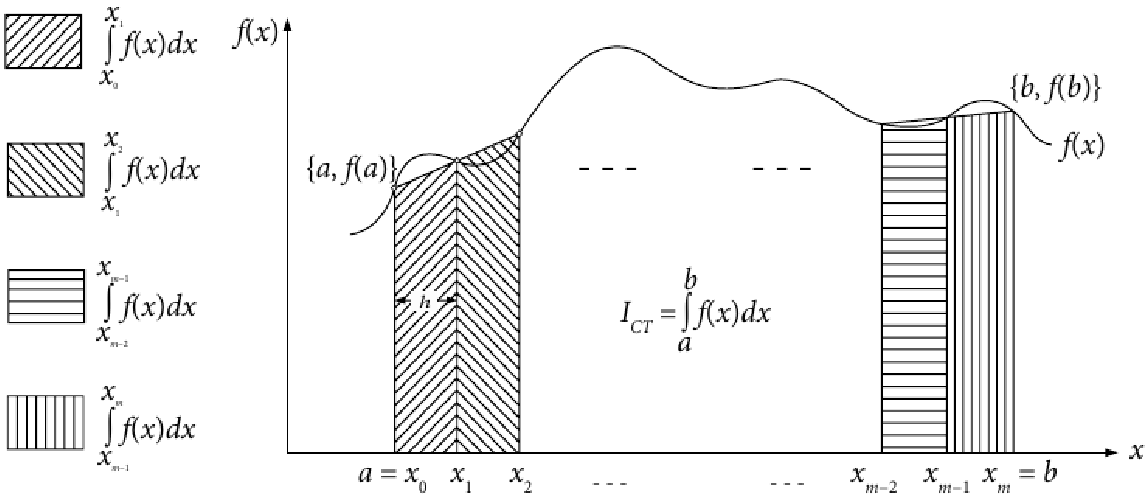

Figura 2. Integración compuesta por el método del Trapezoide

Algoritmo

Dados los valores de x_0, h y m:

- `integ = 0`
- `Para i = 0:m`
  - `x_i = x_0+i*h`
  - `Si i=0 o i=m, entonces integ = integ + f(x_i)/2`
  - `Sino, integ = integ + f(x_i)`
- `integ = integ * h`
- `Regresa el valor integ`

Regla de Simpson 1/3

Suponiendo que solo se tengan como valores de x_i a $x_0 = a$, $x_1 = \frac{b-a}{2}$ y $x_2 = b$, siguiendo la regla de Simpson 1/3 la integral se puede calcular como:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Cuando se tiene un intervalo $[a, b]$ dividido en m, múltiple de 2, subintervalos de igual tamaño con $a = x_0$ y $b = x_m$, el espacio entre las variables de x se calcula como:

$$h = \frac{x_m - x_0}{m}$$

y la integral se puede calcular como:

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + f(x_m) + 2\left[f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{m-2})\right] + 4\left[f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{m-1})\right]]$$

Interpretación Geométrica

Cuando se tienen $x_0 = a$, $x_1 = \frac{b-a}{2}$ y $x_2 = b$, la función $f(x)$ es aproximada con una parábola que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$. Entonces la integral $\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx$ que es el área bajo la curva de $f(x)$ en $[x_0, x_1]$ es aproximada por el area bajo la curva de esta parábola, como se muestra en la figura 3.

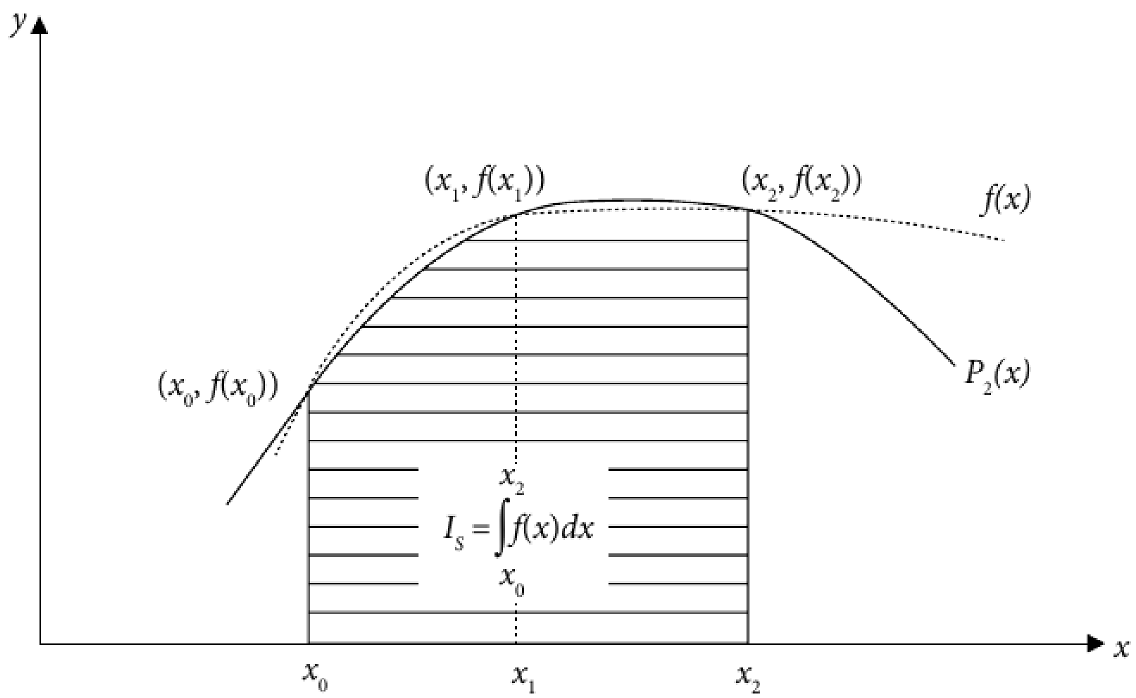

Figura 3. Integración por el método de Simpson 1/3.

Cuando se divide el intervalo $[a, b]$ en m subintervalos, se aproxima la función $f(x)$ con parabolas en los subintervalos (x_0, x_2), (x_2, x_4), ..., (x_{m-2}, x_m), y se calcula la integral como la suma del area bajo la curva de todas estas parabolas, como lo muestra la figura 4.

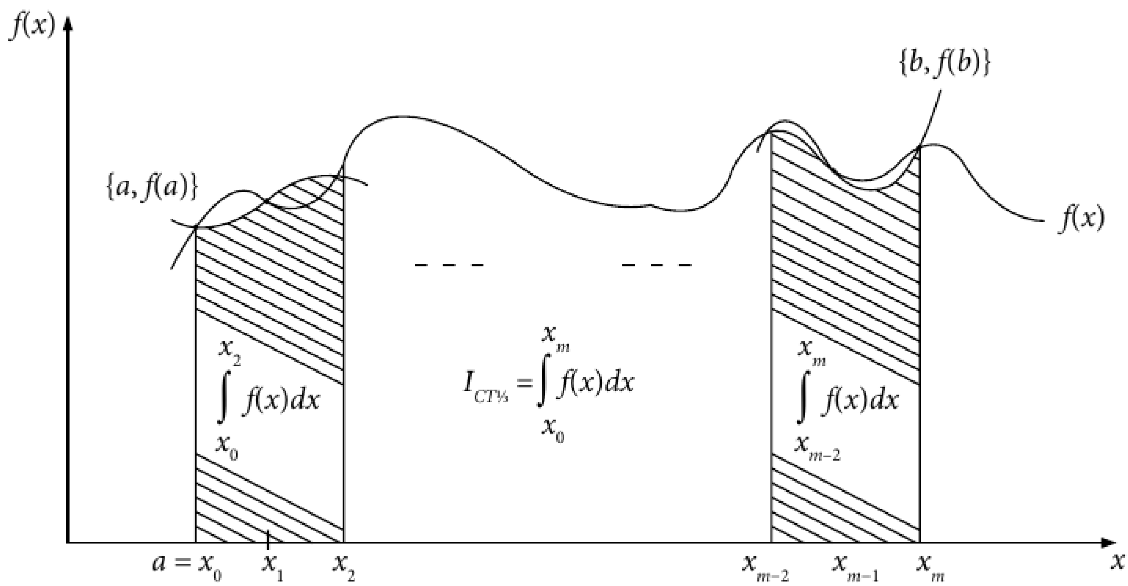

Figura 4. Integración compuesta por el método de Simpson 1/3.

Algoritmo

Dados los valores de x_0, h y m:

- `integ = 0`
- `Para i = 0:m`
  - `x_i = x_0 + i*h`
  - `Si i=0 o i=m, entonces integ = integ + f(x_i)`
  - `Sino, si i es divisible entre dos, integ = integ + 2*f(x_i)`
  - `Sino, integ = integ + 4*f(x_i)`

- `integ = integ * (h/3)`
- `Regresa el valor de integ`

Regla de Simpson 3/8

Teniendo cuatro puntos, x_0, x_1, x_2, x_3, igualmente espaciados en el intervalo $[a, b]$, la regla de Simpson 3/8 da como fórmula para la aproximación de la integral de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ la siguiente:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

Teniendo una función $f(x)$ dividida en m, donde m es múltiple de 3, intervalos igualmente espaciados se tiene la siguiente fórmula para el cálculo de la aproximación de la integral.

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}[f(x_0) + f(x_m) + 3\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_4) + f(x_5)...+f(x_{m-2}) + f(x_{m-1})\right] \\ + 2\left[f(x_3) + f(x_6)+...+f(x_{m-3})\right]]$$

Interpretación Geométrica

En este método se aproxima la integral $\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx$ como el área bajo el polinomio de grado 3 que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ y $(x_3, f(x_3))$. De igual forma para la integral $\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx$, ésta se calcula como la suma de las áreas de los polinomios de grado tres que pasan por cada conjunto de 4 puntos en el intervalo $[a, b]$.

Algoritmo

Dados los valores de x_0, h y m:

- `integ = 0`
- `Para i = 0:m`
    - `x_i = x_0 + i*h`
    - `Si i=0 o i=m, entonces integ = integ + f(x_i)`
    - `Sino, si i es divisible entre 3, integ = integ + 2*f(x_i)`
    - `Sino, integ = integ + 3*f(x_i)`
- `integ = integ * (3*h/8)`
- `Regresa el valor de integ`

Regla de Boole

De forma similar a las expresiones anteriores, para la integral de $\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx$, se tiene por la regla de Boole:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{2h}{45}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)]$$

Para una subdivisión del intervalo $[a, b]$ en subintervalos igualmente espaciados, la integral $\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx$ se calcula como:

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx \approx \frac{2h}{45}[7[f(x_0)+f(x_m)] + 32[f(x_1)+f(x_3)+f(x_5)+\ldots+f(x_{m-3})+f(x_{m-1})]$$
$$+12[f(x_2)+f(x_6)+f(x_{10})+\ldots+f(x_{m-6})+f(x_{m-2})]$$
$$+14[f(x_4)+f(x_8)+f(x_{12})+\ldots+f(x_{m-8})+f(x_{m-4})]]$$

Geométricamente las integrales se aproximan calculando y sumando las áreas debajo de un polinomio de grado 4.

Algoritmo

Dados los valores de x_0, h y m:

- `integ = 0`
- `Para i = 0:m`
  - `x_i = x_0 + i*h`
  - `Si i=0 o i=m, entonces integ = integ + 7*f(x_i)`
  - `Sino, si i es impar, integ = integ + 32*f(x_i)`
  - `Sino, si i es divisible entre 4, integ = integ + 14*f(x_i)`
  - `Sino, integ = integ + 12*f(x_i)`
- `integ = integ * (2*h/45)`
- `Regresa el valor de integ`

Regla de Weddle

La regla de Weddle aproxima la integral cuando se tiene el intervalo $[a, b]$ dividido en 6 espacios igualmente espaciados, en ese caso se calcula la integral como el area bajo la curva de un polinomio de grado 6 de la siguiente manera:

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)dx \approx \frac{h}{140}[41f(x_0)+216f(x_1)+27f(x_2)+272f(x_3)+27f(x_4)+216f(x_5)+41f(x_6)]$$

Algoritmo

Dados los valores de x_0, h y m:

- `integ = 0`
- `m = m/6`
- `Para i = 0:(m-1)`
  - `integ = integ + ((3*h/10)*(f_x(x_0) + f_x(x_0+2*h) + 5*f_x(x_0+h)+ 6*f_x(x_0+3*h)+ f_x(x_0+4*h)+ 5*f_x(x_0+5*h)+f_x(x_0+6*h)))`
  - `x_0 = x_0 + 6*h`
- `Regresa el valor de integ`

Comparativa Entre las Reglas

Para comparar las reglas antes mencionadas, se utilizará como ejemplo la integración de la función $sin(x + 1/2)$ en el intervalo $[0, 4\pi]$, con valores para $m = 20, 100, 1000$.

El valor exacto de la integral se calcula como:

$$\int_0^{4\pi} sin(x+1/2)dx = [-cos(x+1/2)]_0^{4\pi}$$
$$= cos(1/2) - cos(4\pi + 1/2)$$
$$= cos(1/2) - cos(1/2) = 0$$

En la siguiente tabla se compara el valor obtenido para la integral de la función para los distintos valore de m, se incluye también el tiempo de ejecución de cada algoritmo.

Regla	$m = 20$	$m = 100$	$m = 1000$
Trapezoide	-4.92022e-06	-5.08205e-06	-5.08868e-06
Simpson 1/3	-5.09337e-06	-5.08875e-06	-5.08875e-06
Simpson 3/8	-5.09766e-06	-5.08876e-06	-5.08875e-06
Boole	-5.08792e-06	-5.08875e-06	-5.08875e-06
Weddle	-5.08861e-06	-5.08875e-06	-5.08875e-06

Aunque el valor exacto de la integral es 0, se puede apreciar que al implementar las distintas reglas se tiene un resultado distinto a cero, dicho resultado puede ser interpretado como el error de cálculo de la integral. Este error se debe a que se trabaja con polinomios para aproximar una función que no es polinomial por lo que no se coincide exactamente con la función. Una razón más para justificar este error es pensar en la exactitud del tipo de variables , `double` en este caso, que se usa en los programas ya que al calcular h se debe hacer una división de un número relativamente chico sobre uno relativamente grande.