

Robótica II

Tarea 6. Aplicación del Principio Máximo de Pontryagin

Marco Antonio Esquivel Basaldua

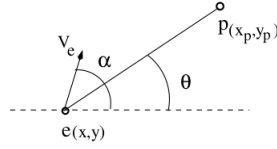
14 de noviembre de 2020

En el modelado del problema de persecución evasión descrito en [1], en el que un perseguidor requiere mantener vigilancia sobre un evasor en un ambiente con obstáculos poligonales (figura 1), se formula la trayectoria óptima de escape para el evasor basándose en una formulación teórica de juegos. Usando el principio del mínimo se propone un algoritmo de *shooting* para encontrar estas trayectorias.

En este documento se presenta de forma resumida (ya que ya se han visto con detalle en las clases de Robótica II) el modelo del problema y la aplicación del principio máximo de Pontryagin a éste para el caso de encontrar la trayectoria óptima para el evasor. De igual forma se presentan los resultados de aplicar el algoritmo de *shooting*, programado en MatLab, bajo distintas condiciones iniciales del problema.

1. Modelado

Para que el evasor mantenga bajo vigilancia al evasor se requiere que ambos agentes se encuentren separados una distancia L y que no exista un obstáculo que ocuya la visibilidad o, de manera equivalente, que rompa la barra de longitud L trazada del evasor al perseguidor. Visto como un juego de persecución-evasión, el evasor necesita formular la trayectoria óptima para escapar del evasor.



La posición del evasor se expresa mediante los valores (x, y) con respecto a un marco de referencia global. La posición del perseguidor está dada por:

$$\begin{aligned} x_p &= x + L \cos(\theta) \\ y_p &= y + L \sin(\theta) \end{aligned} \quad (1)$$

el vector de velocidad del evasor tiene los componentes:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V_e \cos(\alpha) \\ \dot{y} &= V_e \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (2)$$

Derivando (1) con respecto al tiempo para encontrar los componentes del vector de velocidad para el perseguidor, se obtiene;

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= \dot{x} - L \sin(\theta) \dot{\theta} \\ \dot{y}_p &= \dot{y} + L \cos(\theta) \dot{\theta} \end{aligned} \quad (3)$$

Sustituyendo (2) en (3) obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= V_e \cos(\alpha) - L \sin(\theta) \dot{\theta} \\ \dot{y}_p &= V_e \sin(\alpha) + L \cos(\theta) \dot{\theta} \end{aligned} \quad (4)$$

A partir de la norma L_2 del vector velocidad del perseguidor, y después de algunas manipulaciones algebraíca, se obtiene:

$$L^2\dot{\theta}^2 + 2LV_e\sin(\alpha - \theta)\dot{\theta} + V_e^2 - V_p^2 = 0 \quad (5)$$

Aplicando la fórmula general para resolver (5) para $\dot{\theta}$ obtenemos:

$$\dot{\theta} = \frac{V_p}{L} \left(-\rho\sin(\alpha - \theta) \pm \sqrt{1 - \rho^2\cos^2(\alpha - \theta)} \right) \quad (6)$$

donde

$$\rho = \frac{V_e}{V_p}$$

2. Problema de Control Óptimo

En la formulación del control óptimo, es conveniente considerar a x como la variable independiente, en lugar del tiempo t , y parametrizar el control α con respecto a x ya que el evasor se mueve desde $x = 0$ a $x' = x_e$ (figura 2).

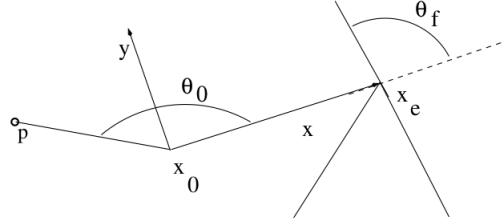


Figura 2. Marco de referencia definido con respecto a la posición inicial del evasor.

Esto nos lleva a una descripción del sistema en la que el estado de la barra está dado por $\zeta(y, \theta)$ y la ecuación de transición de estados se expresa como:

$$\frac{d\zeta}{dx} = f(\zeta, \alpha) \quad (7)$$

Cada elemento en (7) se expresa como

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\alpha) = f_1(\zeta, \alpha) \quad (8)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{-\rho\sin(\alpha - \theta) \pm \sqrt{1 - \rho^2\cos^2(\alpha - \theta)}}{L\rho\cos(\alpha)} = f_2(\zeta, \alpha) \quad (9)$$

La función de costo se define como

$$J = \int_{x_0}^{x_e} \frac{d\theta}{dx} dx = \int_{x_0}^{x_e} f_2(\zeta, \alpha) dx \quad (10)$$

3. Aplicación del Principio Máximo de Pontryagin (PMP)

Recordamos que en el PMP se necesita determinar el Hamiltoniano del sistema

$$H(x, u, \lambda, t) = L(x, u, t) + \lambda^\top, \dot{x} \quad (11)$$

Si (x^*, u^*) forma una trayectoria de control óptima, entonces existe λ^* tal que

$$\lambda^* = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (12)$$

y el control óptimo está dado por

$$u^* = \arg \min_u H(x^*, u, \lambda^*, t) \quad (13)$$

En nuestro caso, el Hamiltoniano está dado por

$$\begin{aligned}
H(x, u, \lambda, t) &= \frac{d\theta}{dx} + [\lambda_1 \quad \lambda_2] \begin{bmatrix} f_1(\zeta, \alpha) \\ f_2(\zeta, \alpha) \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1 \tan(\alpha) + (1 + \lambda_2) \frac{-\rho \sin(\alpha - \theta) \pm \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2(\alpha - \theta)}}{L \rho \cos(\alpha)}
\end{aligned} \tag{14}$$

A partir del cual determinamos las expresiones para (12)

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{\partial H}{\partial y} \\ -\frac{\partial H}{\partial \theta} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -(1 + \lambda_2) \frac{\cos(\alpha - \theta)}{L \cos(\alpha)} \left(1 - \frac{\rho \sin(\alpha - \theta)}{\sqrt{1 - \rho^2 \cos^2(\alpha - \theta)}} \right) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{15}$$

4. Algoritmo de *Shooting*

1. Elegir valores iniciales para los multiplicadores de Lagrange.
2. Sea $j \leftarrow 0$, $\theta(0) \leftarrow \theta$, $y(0) \leftarrow 0$, $x(0) \leftarrow 0$.
3. Escoger $\alpha(j)$ que minimiza el Hamiltoniano

$$\alpha(j) = \arg \min_{\alpha} H(\zeta^*(j), \alpha, \lambda^*, x(j))$$

4. Integrar la ecuación de estados para determinar $\zeta(j+1)$

$$\begin{aligned}
y(j+1) &\leftarrow y(j) + f_1(\zeta(j), \alpha(j)) \Delta x \\
\theta(j+1) &\leftarrow \theta(j) + f_2(\zeta(j), \alpha(j)) \Delta x
\end{aligned}$$

5. Integrar la ecuación adjunta para λ_2 para determinar $\lambda_2(j+1)$
6. $x(j+1) \leftarrow x(j) + \Delta x$
7. Si $y(j)$ y $y(j+1)$ tienen diferente signo, entonces el sistema ha cruzado el eje x . Si $|x(j+1) - x_e| < \epsilon$, entonces la trayectoria óptima está dada por $\alpha(0), \dots, \alpha(j)$.
8. Si $y(j)$ y $y(j+1)$ tienen diferente signo pero $|x(j+1) - x_e| > \epsilon$, entonces se han eludido las condiciones de frontera. En este caso, se ajustan los valores iniciales para λ y se va al paso 2.
9. Si $y(j)$ y $y(j+1)$ tienen el mismo signo, entonces no se ha cruzado el eje x y se continua iterando: $j \leftarrow j+1$, se va al paso 3.

Aplicando el algoritmo de *shooting* en MatLab para dos condiciones iniciales propuestas en [1] se obtienen los siguientes resultados.

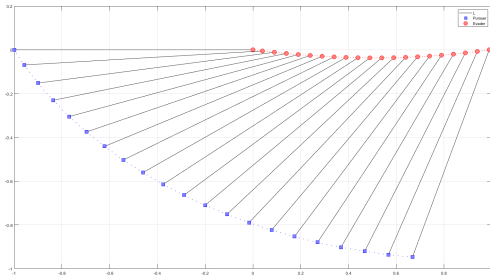


Figura 3. Resultados para las condiciones iniciales $\rho = 2$, $L = 1$, $x_e = 1$, $\theta_0 = \pi$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0,41$.

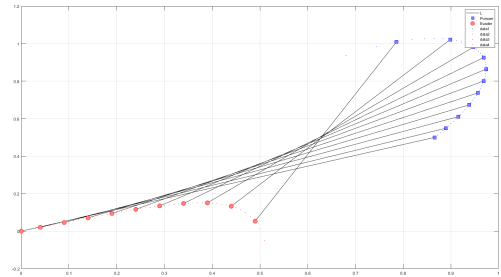


Figura 4. Resultados para las condiciones iniciales $\rho = 1,2$, $L = 1$, $x_e = 0,5$, $\theta_0 = \pi/6$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0,608$.

Referencias

- [1] R. Murrieta-Cid, T. Muppirala, A. Sarmiento, S. Bhattacharya and S. Hutchinson, "Surveillance Strategies for a Pursuer with Finite Sensor Range". *Int. J. of Robotics Research*, vol. 26, No. 3, pages 233-253, 2007.