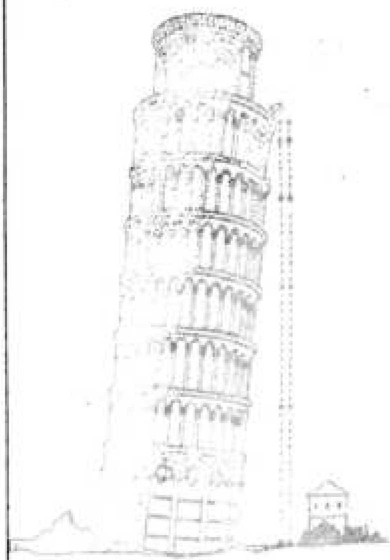
Colección Compendios Académicos UNI

Física

Lumbreras Editores

Colección Compendios Académicos UNI

Física



Juan Infante Carrascal
Víctor Canchos López
Iván Becerra Tello
Fernando de la Cruz Echaccaya
Charles Paucar Damas
José Mateo Torres
Francisco Haro Sánchez

Lumbreras
Editores

Índice

Presentación

La realidad de la educación en el Perú es hoy algo preocupante. Los distintos esfuerzos provenientes del Gobierno no se ven reflejados en avances significativos en este aspecto. Las políticas educativas nos muestran resultados negativos desde hace ya muchos años, y es poco lo que los estudios y las propuestas han logrado mejorar en las condiciones del sistema educativo; peor aún, permiten las desigualdades a nivel socioeconómico en las zonas rurales más alejadas del país; es decir, los estudiantes reciben una educación de baja calidad y en condiciones precarias.

En este contexto, los esfuerzos por aportar al desarrollo de la cultura y la educación en el país serán siempre valorados. Es así que, conscientes de esta realidad, la Asociación Fondo de Investigadores y Editores (Afined), a través de su sello Lumbreras Editores, tiene como uno de sus objetivos contribuir al desarrollo de la educación; ello se cristaliza a través del aporte de los profesores del Instituto de Ciencias y Humanidades, quienes han sistematizado los materiales de manera didáctica gracias a su amplia experiencia docente que garantizan un contenido de calidad y, sobre todo, siempre accesible a los sectores populares, sumado a la presencia de nuestro sello editorial en distintos puntos del territorio nacional.

En esta ocasión presentamos el libro *Física*, perteneciente a la colección Compendios Académicos UNI, publicación dirigida al estudiante preuniversitario, que constituye una herramienta útil para reforzar sus conocimientos gracias al trabajo teórico-práctico así como a los problemas resueltos y propuestos mostrados por niveles, que permiten una mejor comprensión del tema. Este libro se constituye en material de consulta no solo para alumnos, sino también para docentes, tanto de los últimos años del nivel escolar como preuniversitario.

Finalmente, nuestra institución reafirma su compromiso con la educación y la cultura del país, contribuyendo en la elaboración de libros de calidad, además de promover el trabajo de investigación, que nos permite acceder a una educación científica y humanista; todo ello siempre al servicio de los sectores más amplios de nuestra sociedad.

Análisis dimensional

Capítulo I

OBJETIVOS

- Relacionar las magnitudes físicas derivadas con las fundamentales.
- Expresar la ecuación dimensional de las principales magnitudes físicas.
- Aplicar las principales reglas para validar dimensionalmente una fórmula física.

1. Magnitudes físicas

Son todas aquellas propiedades o características que presenta la materia y que pueden ser medibles.

1.1. CLASIFICACIÓN

1.1.1. Por su origen

a. Magnitudes fundamentales

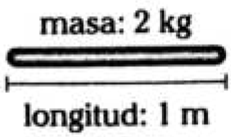
Son aquellas que sirven como base para la formación de nuevas magnitudes.

Ejemplos: la longitud, la masa y el tiempo

b. Magnitudes derivadas

Son aquellas que se obtienen a partir de la combinación de las magnitudes fundamentales.

Ejemplo: la densidad lineal de masa (μ)



$$\boxed{\mu = \frac{\text{masa}}{\text{longitud}}}$$

$$\rightarrow \quad \mu = \frac{2\ \text{kg}}{1\ \text{m}} = 2\ \text{kg/m}$$

1.1.2. Por su naturaleza

a. Magnitudes escalares

Son aquellas cuya medida se expresa correctamente con un número real y una unidad de medida.

Ejemplos

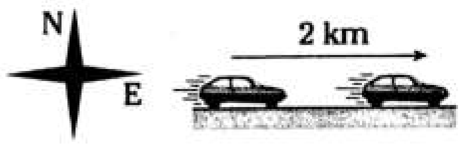
- El terreno tiene un área de $120\ \text{m}^2$.
- La temperatura en la Antártida es $-20\ °\text{C}$.

b. Magnitudes vectoriales

Son aquellas cuya medida se expresa correctamente con un número positivo, una unidad de medida y una dirección.

Ejemplo

El auto se desplaza 2 km hacia el este.



1.2. MAGNITUDES FUNDAMENTALES EN EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES DE MEDIDA

Nombre de la magnitud	Símbolo dimensional	Unidad de medida	Símbolo de la unidad de medida
Longitud	L	metro	m
Masa	M	kilogramo	kg
Tiempo	T	segundo	s
Temperatura	θ	kelvin	K
Intensidad de corriente	I	amperio	A
Intensidad luminosa	J	candela	cd
Cantidad de sustancia	N	mol	mol

1.3. ECUACIÓN DIMENSIONAL

Consiste en establecer la relación correcta entre las magnitudes derivadas y las fundamentales, así como validar a nivel dimensional las fórmulas o ecuaciones que relacionan las magnitudes físicas que intervienen en un determinado fenómeno.

Notación

Sea A el símbolo dimensional de una magnitud física derivada. Entonces se denota así: $[A]$ y se lee "ecuación dimensional de A". Se debe expresar en función de las magnitudes fundamentales.

$$[A]=L^{x}M^{y}T^{z}I^{w}$$

símbolos dimensionales de magnitudes físicas fundamentales

Además, x; y; z; w son exponentes, es decir, son números reales.

OBSERVACIÓN

- Toda expresión numérica o medida angular no presenta dimensiones físicas, en consecuencia

$$\boxed{\begin{bmatrix}\text{Número o}\\ \text{medida angular}\end{bmatrix}=1}$$

La ecuación dimensional de una expresión numérica o medida angular es la unidad.

Ejemplos

$[\sqrt{2}+\sqrt{5}]=1$ $\qquad [\cos^2\theta+\tan\alpha]=1$

$[\text{sen}\,53°]=1$ $\qquad [e^{x^2+1}]=1$

$[\pi^2+\log 25]=1$

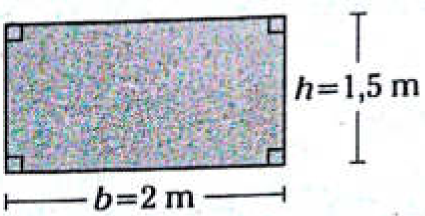
- Para lograr establecer la ecuación dimensional de una magnitud, es necesario que se logre establecer la relación que existe entre esta magnitud y otras que también participan en un determinado fenómeno.
De estas últimas se debe conocer sus ecuaciones dimensionales.

Aplicación 1

Determine la ecuación dimensional del área: [área].

Resolución

Como un aspecto previo, es conocido que



$$\text{área}=b\times h$$
$$\text{área}=(2\text{ m})\times(1{,}5\text{ m})$$
$$\text{área}=3\text{ m}^2$$

Ahora realicemos un análisis, tan solo, de las dimensiones. Para esto nos basamos en la relación ya establecida

$$\text{área}=b\times h$$

y aplicamos el operador de la ecuación dimensional a cada miembro de la ecuación.

$$[\text{área}]=[b\times h]=[b]\cdot[h]$$

Ambas son longitudes, entonces $[b]=L$ y $[h]=L$.

Reemplazamos.

$$[\text{área}]=L\cdot L \;\rightarrow\; [\text{área}]=L^2$$

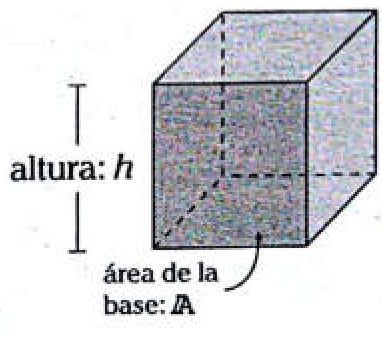
Este resultado significa que las dimensiones del área se expresan como dimensiones de la longitud elevada al cuadrado.

Aplicación 2

Determine la ecuación dimensional del volumen: [volumen].

Resolución

Como aspecto previo, es conocido que el volumen de un paralelepípedo se calcula así:



$$\boxed{\text{volumen}=\mathbb{A}\cdot h}$$

Aplicamos el operador [ ] en ambos miembros de la ecuación.

$$[\text{volumen}]=[\mathbb{A}\cdot h]=[A]\cdot[h]$$

Sabemos que

$$[\mathbb{A}]=L^2 \text{ y } [h]=L$$

$\rightarrow \quad [\text{volumen}]=L^2\cdot L$

$\therefore \quad [\text{volumen}]=L^3$

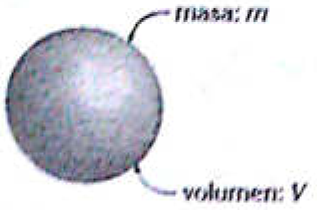
Aplicación 3

Determine la ecuación dimensional de la densidad: [densidad].

Resolución

Como aspecto previo debemos conocer que la densidad de un cuerpo nos expresa qué cantidad de masa se encuentra contenida en un determinado volumen.

$$\boxed{\text{densidad} = \frac{m}{V}}$$



Aplicamos el operador [ ] en ambos miembros de la ecuación.

$$[\text{densidad}] = \left[\frac{m}{V}\right]$$

Aplicamos las reglas del álgebra.

$$[\text{densidad}] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{M}{L^3}$$

La ecuación dimensional debe expresarse en una sola línea.

$$\therefore \quad [\text{densidad}] = M \cdot L^{-3}$$

1.4. ECUACIONES DIMENSIONALES DE LAS PRINCIPALES MAGNITUDES DERIVADAS Y SUS UNIDADES DE MEDIDA

Nombre	Símbolo	Ecuación dimensional	Unidad de medida
velocidad	v	$[V]=L\cdot T^{-1}$	$m\cdot s^{-1}$
aceleración	a	$[a]=L\cdot T^{-2}$	$m\cdot s^{-2}$
fuerza	F	$[F]=M\cdot L\cdot T^{-2}$	$kg\cdot m\cdot s^{-2}$: newton (N)
trabajo	W	$[W]=M\cdot L^2\cdot T^{-2}$	$kg\cdot m^2\cdot s^{-2}$: joule (J)
energía	E	$[E]=M\cdot L^2\cdot T^{-2}$	$kg\cdot m^2\cdot s^{-2}$: joule (J)
potencia	P	$[P]=M\cdot L^2\cdot T^{-3}$	$kg\cdot m^2\cdot s^{-3}$: watts (W)
cantidad de movimiento	p	$[p]=M\cdot L\cdot T^{-1}$	$kg\cdot m\cdot s^{-1}=N\cdot s$
presión	P	$[P]=M\cdot L^{-1}\cdot T^{-2}$	$kg\cdot m^{-1}\cdot s^{-2}$: pascal (Pa)

1.5. PRINCIPIO DE HOMOGENEIDAD

Establece lo siguiente: sean A, B y C símbolos dimensionales de magnitudes físicas que se relacionan mediante la siguiente ecuación:

$$\boxed{A=\alpha B\pm\beta C}$$

donde α y β son expresiones numéricas.

Si la ecuación mencionada es dimensionalmente correcta, entonces se debe verificar que

$$\boxed{[A]=[B]=[C]}$$

Esto significa que los términos de la ecuación que se suman o restan deben tener las mismas dimensiones

Problema N.° 1

Sobre un cuerpo actúa una fuerza que depende de la velocidad (v) de acuerdo a la expresión $F=-Kv^2$. Determine la ecuación dimensional de la constante K.

Resolución

Nos piden $[K]$.

Partimos de la ecuación dada y aplicamos [ ] a ambos miembros de la ecuación.

$$[F]=[-Kv^2]$$

Aplicamos las reglas del álgebra.

$$[F]=[-1][K][v^2]=[-1]\cdot[K][v]^2 \qquad (*)$$

Por propiedad, sabemos que

$$\underbrace{[-1]}_{\text{expresión numérica}}=1$$

Además, de la tabla se conoce que

$$[F]=MLT^{-2} \text{ y } [v]=LT^{-1}$$

Reemplazamos en la expresión (*).

$$MLT^{-2}=(1)[K]\cdot(LT^{-1})^2$$

$$ML\cancel{T^{-2}}=[K]\cdot L^2\cdot \cancel{T^{-2}}$$

$$\rightarrow \quad [K]=M\cdot\frac{L^1}{L^2}$$

$$\therefore \quad [K]=ML^{-1}$$

Problema N.° 2

Dada la siguiente ecuación dimensionalmente homogénea, determine las dimensiones de y si A es altura y t es tiempo. $(A>Z)$.

$$y=AB\left(\sqrt{A^2-Z^2}\right)\text{sen}(Bt)$$

Resolución

Nos piden $[y]$.

Aplicamos [ ] en ambos miembros de la ecuación.

$$[y]=\left[AB\left(\sqrt{A^2-Z^2}\right)\text{sen}(Bt)\right]$$

$$[y]=[A][B]\left[\sqrt{A^2-Z^2}\right][\text{sen}(Bt)] \qquad \text{(I)}$$

Como A es altura

$$\rightarrow \quad [A]=L \qquad \text{(II)}$$

Además como A^2-Z^2 es homogénea, entonces A^2 y Z^2 tienen las mismas dimensiones.

Luego

$$\left[A^2-Z^2\right]=[A]^2=L^2 \qquad \text{(III)}$$

Por otro lado, sen(Bt) es un número.

$$\rightarrow \quad [\text{sen}(Bt)]=1 \qquad \text{(IV)}$$

(Bt) es un ángulo.

$$[Bt]=1 \rightarrow [B]=\frac{1}{T}=T^{-1} \qquad \text{(V)}$$

Reemplazamos los resultados parciales (II), (III), (IV) y (V) en (I).

$$[y]=L\cdot T^{-1}\cdot\sqrt{L^2}\cdot(1)$$

$$\therefore \quad [y]=L^2T^{-1}$$

Problema N.° 3

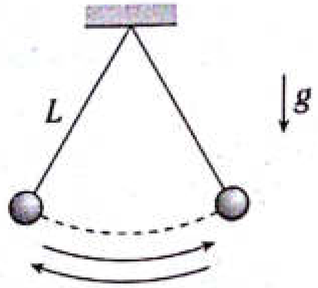
El tiempo que demora una pequeña esfera para realizar una oscilación completa, atada a una cuerda de longitud L, se obtiene mediante la siguiente ecuación: $t=n\ell^x\cdot g^y$, donde n es un número real y g es la aceleración de la gravedad. Si se sabe que la ecuación dada es dimensionalmente correcta, determine $x\cdot y$.

Resolución

Se trata de un instrumento denominado "péndulo simple" y según el enunciado se verifica

$$t=n\ell^x g^y$$

Nos piden $x\cdot y$.



Como la ecuación dada es dimensionalmente correcta, entonces

$$[t]=\left[n\cdot\ell^x\cdot g^y\right]=[n]\cdot\left[\ell^x\right]\cdot\left[g^y\right]$$

$$\rightarrow\ [t]=[n]\cdot[\ell]^x\cdot[g]^y \qquad \text{(I)}$$

donde

- t: tiempo $\rightarrow$ $[t]=T$
- ℓ: longitud $\rightarrow$ $[\ell]=L$
- g: aceleración $\rightarrow$ $[g]=L\cdot T^{-2}$
- n: número $\rightarrow$ $[n]=1$

(II)

Reemplazando los resultados parciales de (II) en la ecuación (I).

$$T=(1)\cdot L^x\cdot\left(L\cdot T^{-2}\right)^y=L^x\cdot L^y\cdot T^{-2y}$$

$$\rightarrow\ T=L^{x+y}\cdot T^{-2y}$$

Acomodamos la expresión y aplicamos las reglas del álgebra.

$$L^0\cdot T^1=L^{x+y}\cdot T^{-2y}$$

Los exponentes de bases iguales también deben ser iguales.

$$0=x+y\ \rightarrow\ x=-y$$

$$1=-2y\ \rightarrow\ y=-\frac{1}{2} \qquad \text{(III)}$$

Reemplazamos (III) en (II).

$$x=-\left(-\frac{1}{2}\right)\ \rightarrow\ \frac{1}{2} \qquad \text{(IV)}$$

Finalmente reemplazamos (III) y (IV) en lo pedido.

$$x\cdot y=\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\quad x\cdot y=-\frac{1}{4}$$

Problema N.º 4

En la ecuación $e^{\alpha x^{-1}yz}=\alpha$, z es una densidad volumétrica de masa. Si el producto $x\cdot y$ tiene unidades de masa, calcule la dimensión de x.

UNI 2006-I

Resolución

Nos piden calcular $[x]$. Para ello debemos partir de la ecuación dada.

$$e^{\alpha x^{-1}\cdot y\cdot z}=\alpha$$

donde e se denomina base de logaritmo neperiano y su valor es e=2,718...

Luego

$$\underbrace{e}_{\text{número}}{}^{\overbrace{\alpha x^{-1}\cdot y\cdot z}^{\text{exponente}}}=\underbrace{\alpha}_{\text{número}}$$

Analizamos el exponente.

$$\underset{\downarrow\ \text{número}}{\alpha}\cdot\underbrace{x^{-1}\cdot y\cdot z}_{\text{número}}=\text{número}$$

$$\rightarrow\ x^{-1}\cdot y\cdot z=\text{número}$$

Aplicamos [ ] en ambos miembros de la ecuación.

$$\left[x^{-1}\cdot y\cdot z\right]=[\text{número}]$$

$$\rightarrow\ [x^{-1}]\cdot[y]\cdot[z]=1 \qquad \text{(I)}$$

Por condición del ejercicio, z es densidad.

$$\rightarrow\ [z]=\left[\frac{\text{masa}}{\text{volumen}}\right]\rightarrow [z]=M\cdot L^{-3} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I).

$$[x^{-1}][y]\cdot ML^{-3}=1$$

$$[x^{-1}]\cdot[y]=M^{-1}\cdot L^{3} \qquad \text{(III)}$$

Por otro lado, nos plantean en el ejercicio que $x\cdot y$ es masa.

$$\rightarrow\ [x\cdot y]=M$$

$$[x]\cdot[y]=M \qquad \text{(IV)}$$

Como nos piden $[x]$, entonces dividimos (IV) entre (III).

$$\frac{[x]\cdot\cancel{[y]}}{[x]^{-1}\cdot\cancel{[y]}}=\frac{M}{M^{-1}\cdot L^{3}}\ \rightarrow\ [x]^2=M^2\cdot L^{-3}$$

Elevamos 1/2 en cada miembro de la ecuación.

$$\left([x]^2\right)^{1/2}=\left(M^2\cdot L^{-3}\right)^{1/2}$$

$$\therefore\ [x]=M\cdot L^{-3/2}$$

Problema N.° 5

Un líquido en movimiento satisface la siguiente ecuación:

$$P_1+\rho\frac{v^x}{2}+\rho gh^y=P_2$$

donde P_2 es la presión, ρ es la densidad volumétrica, h es la altura y v es la rapidez.

Determine $x+y$. ($g=9{,}81$ m/s^2).

Resolución

De la ecuación dada, determinamos las ecuaciones dimensionales de las magnitudes que intervienen.

- P_2: presión $\rightarrow [P_2]=\left[\dfrac{\text{fuerza}}{\text{área}}\right]=ML^{-1}\cdot T^{-2}$
- ρ: densidad $\rightarrow [\rho]=M\cdot L^{-3}$
- h: altura $\rightarrow [h]=L$
- v: rapidez $\rightarrow [v]=LT^{-1}$
- g: aceleración de la gravedad $\rightarrow [g]=LT^{-2}$

Como la ecuación

$$P_1+\rho\frac{v^x}{2}+\rho gh^y=P_2$$

es dimensionalmente correcta, entonces

$$[P_1]=\left[\frac{\rho v^x}{2}\right]=\left[\rho gh^y\right]=[P_2]$$

(II)

(I)

De la igualdad (I)

$$\left[\frac{\rho\cdot v^x}{2}\right]=[P_2]$$

$$\rightarrow\ \frac{[\rho]\cdot[v]^x}{\underbrace{[2]}_{1}}=[P_2]$$

Reemplazamos las ecuaciones dimensionales.

$$\left(M\cdot L^{-3}\right)\cdot\left(L\cdot T^{-1}\right)^{x}=M\cdot L^{-1}\cdot T^{-2}$$

$$\rightarrow\quad M\cdot L^{-3}\cdot L^{x}\cdot T^{-x}=ML^{-1}\cdot T^{-2}$$

$$-x=-2\ \rightarrow\ x=2\qquad\text{(III)}$$

De la igualdad (II)

$$\left[\rho g h^{y}\right]=\left[P_2\right]$$

$$\rightarrow\quad [\rho]\cdot[g]\cdot[h]^{y}=\left[P_2\right]$$

Reemplazamos las ecuaciones dimensionales.

$$\left(M\cdot L^{-3}\right)\left(L\cdot T^{-2}\right)L^{y}=M\cdot L^{-1}\cdot T^{-2}$$

$$\rightarrow\quad M\cdot L^{-2+y}\cdot T^{-2}=M\cdot L^{-1}\cdot T^{-2}$$

$$-2+y=-1\ \rightarrow\ y=1\qquad\text{(IV)}$$

Finalmente, nos piden $x+y$.

De las expresiones (III) y (IV)

$$x+y=2+1$$

$$\therefore\quad x+y=3$$

Problema N.° 6

La velocidad del sonido en un gas depende de la presión (P) del gas y de la densidad (D) del mismo. Determine mediante el análisis dimensional la fórmula de la velocidad del sonido en cualquier gas. (K: constante adimensional).

Resolución

De acuerdo a lo enunciado

velocidad del sonido (υ) $\xrightarrow{\text{depende}}$ presión del gas (P)
densidad del gas (D)

Pero no se conoce en forma precisa el grado de la dependencia entre las magnitudes. Entonces, en forma general podemos establecer la siguiente relación:

$$\upsilon=K\cdot P^{x}\cdot D^{y}\qquad\text{(I)}$$

donde K es una constante adimensional.

Para determinar los valores de x e y, debemos considerar que la ecuación (I) es dimensionalmente correcta.

$$[\upsilon]=\left[KP^{x}D^{y}\right]=[K]\cdot\left[P^{x}\right]\cdot\left[D^{y}\right]$$

$$[\upsilon]=[K][P]^{x}\cdot[D]^{y}\qquad\text{(II)}$$

Las magnitudes que intervienen presentan las siguientes ecuaciones dimensionales:

- υ es velocidad $\rightarrow$ $[\upsilon]=L\cdot T^{-1}$
- K es adimensional $\rightarrow$ $[K]=1$
- P es presión $\rightarrow$ $[P]=M\cdot L^{-1}T^{-2}$
- D es densidad $\rightarrow$ $[D]=M\cdot L^{-3}$

Reemplazamos las ecuaciones dimensionales en la ecuación (II).

$$L\cdot T^{-1}=(1)\cdot\left(M\cdot L^{-1}\cdot T^{-2}\right)^{x}\cdot\left(M\cdot L^{-3}\right)^{y}$$

$$\underbrace{L\cdot T^{-1}}=M^{x}\cdot L^{-x}\cdot T^{-2x}\cdot M^{y}\cdot L^{-3y}$$

$$M^{0}\cdot L^{1}\cdot T^{-1}=M^{x+y}\cdot L^{-x-3y}\cdot T^{-2x}$$

$$-1=-2x\ \rightarrow\ x=\frac{1}{2}$$

$$0=x+y\ \rightarrow\ y=-x\ \rightarrow\ y=-\frac{1}{2}$$

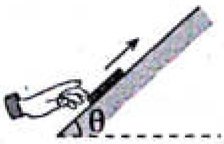
Finalmente reemplazamos en (I).

$$\upsilon=KP^{1/2}\cdot D^{-1/2}=K\left(\frac{P}{D}\right)^{1/2}$$

$$\therefore\quad \upsilon=K\cdot\sqrt{\frac{P}{D}}$$

NIVEL BÁSICO

1. Una moneda es lanzada sobre un plano inclinado tal como se muestra, además, la fuerza resultante que experimenta se expresa como $F=mB(\text{sen}\theta+x\cos\theta)$. Determine $[B]$.



m: masa de la moneda

A) LT^2
B) T^{-2}
C) L^2
D) LT^{-2}
E) LT^{-1}

2. Una canica escapa del borde de un edificio y la altura a la cual se encuentra, luego de un tiempo t, se determina mediante la siguiente ecuación: $H=A-Bt^2$. Determine $[A\cdot B]$.

A) $L\cdot T$ B) $L^2\cdot T^2$ C) $L\cdot T^{-1}$
D) $L^2\cdot T^{-2}$ E) $L^3\cdot T$

3. Un avión en vuelo no cae debido a que experimenta una fuerza sobre sus alas denominada fuerza de sustentación, y se evalúa de la siguiente forma:

$$F=\frac{1}{2}\rho^x\cdot v^y\cdot \mathbb{A}\cdot C$$

donde ρ es la densidad del aire, v es la rapidez del avión, $\mathbb{A}$ el área de las alas y C es una constante adimensional. Si la ecuación es dimensionalmente correcta, determine $x+y$.

A) -1 B) 2 C) 3
D) -2 E) 4

4. Una cuerda de longitud L se sujeta de sus extremos a dos paredes y se tensa con una fuerza F. Si se hace vibrar la cuerda, se observa que se forman unas figuras conocidas como armónicas, donde la frecuencia de vibración de los armónicos es

$$f=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{K}}$$

Si n es el número del armónico, halle $[K]$.

A) ML^{-3} B) LT^{-1} C) $ML^{-1}\cdot T$
D) $M\cdot L^{-1}$ E) $M\cdot L$

5. La energía mecánica asociada a su oscilador armónico se determina de la siguiente forma:

$$E=\frac{1}{2}B\cdot x^2+\frac{1}{2}C\cdot v^{\alpha}$$

donde x es la posición del bloque y v es su velocidad. Determine $\left[B\cdot C^{\alpha}\right]$ si la ecuación dada es dimensionalmente correcta.

A) $LM^2\cdot T^{-2}$ B) $M^2\cdot T^{-2}$ C) MLT^{-2}
D) $M\cdot T^{-2}$ E) $M^3\cdot T^{-2}$

6. La fuerza que experimenta una partícula electrizada con $+q$ en el interior de un campo electromagnético se expresa de la siguiente forma:

$$F=\left((Bqv)^2+(Eq)^2\right)^{1/2}$$

donde v es la velocidad de la partícula e $I=\frac{q}{t}$ es la intensidad de corriente. Determine $[E\cdot B]$.

A) M^2LI^{-3} B) $M^2LI^{-2}T^{-5}$ C) $MLI^{-2}T^{-3}$
D) I^2T^{-5} E) $MLI^{-2}T^{-3}$

7. La potencia útil de una turbina se expresa mediante la siguiente fórmula:

$$P=n\rho_{H_2O}^{x}\cdot Q^y g^z\cdot h$$

donde ρ_{H_2O} es la densidad del agua,

$Q=\dfrac{\text{volumen de agua}}{\text{tiempo}}$ es el caudal; g es la aceleración de la gravedad; h es la altura, y n es la eficiencia de la turbina.

Determine $x\cdot y+\dfrac{z}{y}$.

A) -1 B) 2 C) 4
D) 3 E) -2

8. Un bloque unido a un resorte se mueve sobre una superficie horizontal áspera realizando un movimiento oscilatorio amortiguado, donde su posición queda determinada por la siguiente ecuación:

$x=Ae^{-\alpha t}\text{sen}(\beta t+\theta)$

Si la ecuación es dimensionalmente correcta, determine $[A\cdot\alpha\cdot\beta]^{[\theta]}$.

Considere lo siguiente:

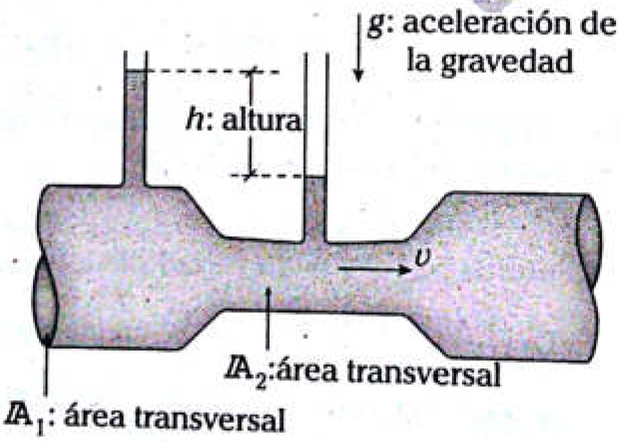
- x, entonces, se mide en metros.
- t, entonces, se mide en segundos.
- e=2,718, entonces, es base de logaritmos neperianos.

A) L^2 B) T^{-2} C) $L^4\cdot T^{-4}$

D) $L^2\cdot T^{-2}$ E) $L\cdot T^{-2}$

NIVEL INTERMEDIO

9. Se tiene un dispositivo conocido como el contador de Venturi, mediante el cual se puede determinar la velocidad de un líquido que pasa por una sección transversal estrecha, tal como se muestra en el gráfico.



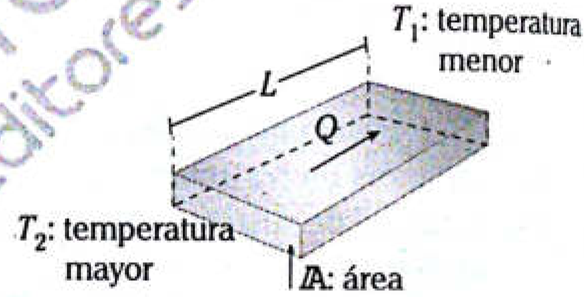
$$v=A_1\cdot\sqrt{\frac{2g^x h^y}{A_2^z-A_1^2}}$$

Si la ecuación es dimensionalmente correcta, determine $\dfrac{x+y}{z}$.

A) $\dfrac{1}{2}$ B) 3 C) –1

D) 1 E) 2

10. Cuando se tienen dos zonas a diferentes temperaturas, fluye energía en forma de calor (Q) de la zona de mayor temperatura hacia la zona de menor temperatura. Si entre las zonas se ubica una barra metálica de sección transversal cuya área es A y longitud de la barra L se determina que el flujo de calor se obtiene mediante la siguiente fórmula:



$$\frac{Q}{t}=K_m(T_2-T_1)\frac{A}{L}$$

donde t es el tiempo y K_m es una constante que depende de las propiedades del material. Si las magnitudes se expresan en el sistema internacional, determine las unidades de K_m.

A) $\text{kg}\cdot\text{ms}^3$ B) $\dfrac{\text{kg}\cdot\text{s}^2}{K}$ C) $\dfrac{\text{kg}\cdot\text{s}^3}{mK}$

D) $\dfrac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^3\cdot K}$ E) $\dfrac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}\cdot K}$

11. Uno de los resultados que consolidó la teoría general de la relatividad anunciada por Albert Einstein fue el corrimiento del perihelio del planeta Mercurio; según la teoría el eje mayor de la órbita del planeta Mercurio gira alrededor del sol en el sentido del movimiento del planeta un ángulo determinado por la siguiente expresión:

$$\theta=\frac{24\pi^3 a^2}{K^x c^2\left(1-e^2\right)}$$

donde a es la longitud del semieje mayor de la elipse, c es la velocidad y e es la excentricidad de la elipse. Si la ecuación dada es dimensionalmente correcta, determine

$$\left[\frac{K\cdot a^x}{c}\right]$$

A) $L^2\cdot T^2$ B) L^2 C) T

D) $T\cdot L^2$ E) $T^2\cdot L$

12. Uno de los últimos avances científicos es el estudio de los agujeros negros desarrollado por el inglés Stephen Hawking, quien descubre que un agujero negro debe irradiar energía como si fuera un cuerpo caliente, obteniendo la siguiente ecuación:

$$T_H=\frac{h^x c^y}{16\pi^2 G M^w K^z}$$

donde

- T_H: temperatura del agujero negro
- M: masa del agujero negro
- $h=6{,}62\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$ (constante de Planck)
- $G=6{,}67\times10^{-11}\ \dfrac{N\times\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}$ (constante gravitacional)
- $K=1{,}38\times10^{-23}\ \mathrm{J/K}$ (constante Boltzman)
- $c=3\times10^8\ \mathrm{m/s}$ (velocidad de la luz)

Si la ecuación es dimensionalmente correcta, determine $\dfrac{x+w}{y-z}$.

A) $\dfrac{1}{2}$ B) 2 C) 1

D) $\dfrac{3}{2}$ E) -1

Análisis vectorial

Capítulo II

OBJETIVOS

- Reconocer las características y las principales propiedades de un vector, así como sus principales formas de representación.
- Realizar operaciones con vectores mediante diversos métodos para obtener el vector resultante.
- Conocer el producto escalar y vectorial, así como su interpretación geométrica.

1. ¿Qué es un vector?

Es un elemento matemático que permite representar las magnitudes vectoriales. Una magnitud vectorial expresa su medida mediante un número, una unidad de medida y una dirección.

Notación

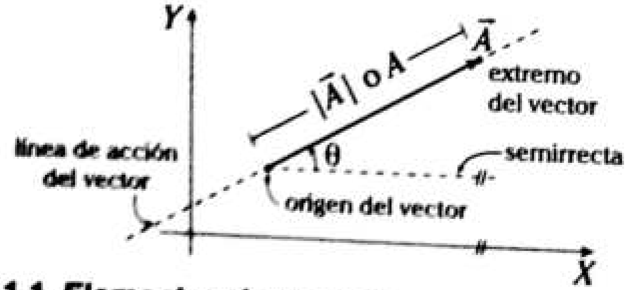
$\vec{A}$ o $\overline{A}$, que se lee 'vector A'.

2. Representación de un vector

Existen muchas formas de representar un vector. Para ello vamos a trabajar primero con un vector ubicado sobre el plano cartesiano XY.

2.1. REPRESENTACIÓN EN FORMA GRÁFICA

Un vector se representa como un segmento de recta orientado o simplemente una flecha.



2.1.1. Elementos de un vector

a. Módulo ($|\vec{A}|$ o A)

Es también llamado magnitud del vector y representa el tamaño del vector. Se expresa mediante un número positivo y acompañado de su respectiva unidad de medida.

Ejemplos

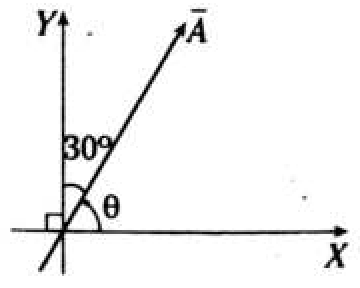
- $|\vec{A}| = 20$ N
- $B = 10$ m/s

b. Dirección (θ)

Es aquel ángulo que se forma a partir de una semirrecta paralela al eje X y pasa por el origen del vector, en sentido antihorario hasta interceptar al vector.

Ejemplo

Determinemos la dirección de $\overline{A}$.



$$\theta + 30° = 90°$$

$$\therefore \quad \theta = 60°$$

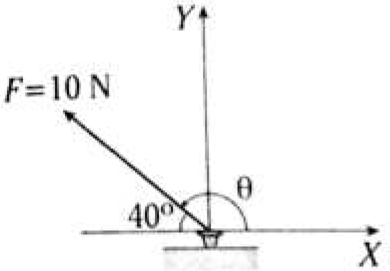
2.2. REPRESENTACIÓN EN FORMA POLAR

Un vector se representa como un par ordenado, en donde la primera componente es el módulo del vector y la segunda componente su dirección.

$$\boxed{\vec{A} = (A; \theta)}$$

Ejemplo

Determinemos la representación polar de $\vec{F}$.



Del gráfico

$$\theta + 40^\circ = 180^\circ$$

$$\theta = 140^\circ$$

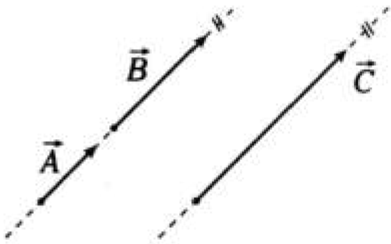
Por definición

$$\vec{F} = (F; \theta)$$

$$\therefore \quad \vec{F} = (10\ \text{N}; 140^\circ)$$

2.2.1. Vectores colineales y paralelos

Dos vectores son colineales si se ubican sobre la misma línea de acción, y son paralelos si se ubican sobre líneas de acción paralelas.

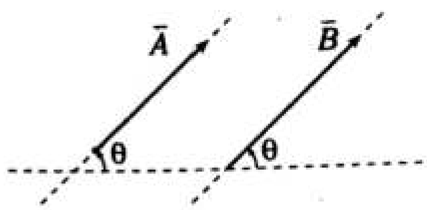


- $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son colineales.
- $\vec{A}$ y $\vec{C}$ son paralelos.

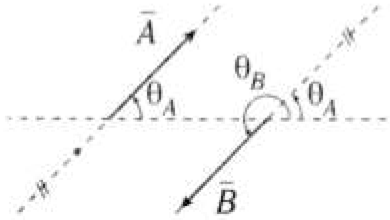
Propiedad

Si dos vectores son colineales o paralelos, se cumple que presentan la misma dirección o la diferencia de sus direcciones es 180°.

Igual dirección



Dirección opuesta



$$\boxed{\theta_B - \theta_A = 180^\circ}$$

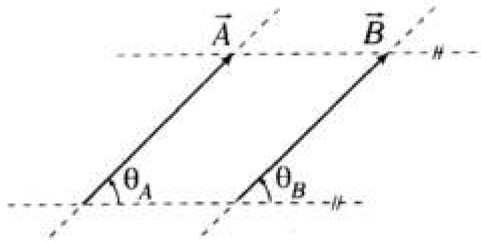
2.2.2. Vectores iguales

Dos vectores $(\vec{A}\ \text{y}\ \vec{B})$ son iguales si presentan el mismo módulo y la misma dirección.

Si $\vec{A} = \vec{B}$, entonces

$$\boxed{\begin{cases} |\vec{A}| = |\vec{B}| \\ \theta_A = \theta_B \end{cases}}$$

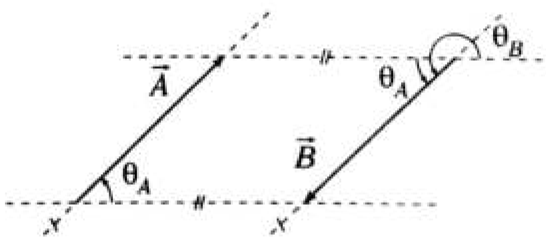
Representación gráfica



2.2.3. Vectores opuestos

Dos vectores $(\vec{A}\ \text{y}\ \vec{B})$ son opuestos si presentan igual módulo y se ubican sobre una misma recta o paralelas, pero con orientaciones contrarias.

Representación gráfica



Si $\vec{B}$ es el opuesto de $\vec{A}$, entonces

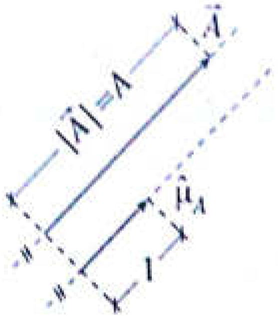
$$\boxed{\vec{B} = -\vec{A}}$$

y se cumple que $\boxed{\begin{matrix} |\vec{A}| = |\vec{B}| \\ \theta_B - \theta_A = 180^\circ \end{matrix}}$

2.2.4. Vector unitario $(\vec{\mu}$ o $\hat{\mu})$

Se define al vector unitario de $\vec{A}$, cuya notación es $\hat{\mu}_A$, como aquel vector que presenta la misma dirección de $\vec{A}$, pero su módulo es la unidad.

Representación gráfica



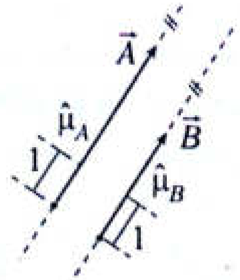
$$\boxed{|\hat{\mu}_A| = \mu_A = 1}$$

Además

$$\boxed{\vec{\mu}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \rightarrow \begin{cases} \vec{A} = |\vec{A}|\cdot\hat{\mu}_A \\ \vec{A} = A\cdot\hat{\mu}_A \end{cases}}$$

Propiedad

Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ los vectores que presentan la misma dirección. Entonces comparten el mismo vector unitario y, en consecuencia, ambos vectores son directamente proporcionales a sus respectivos módulos.



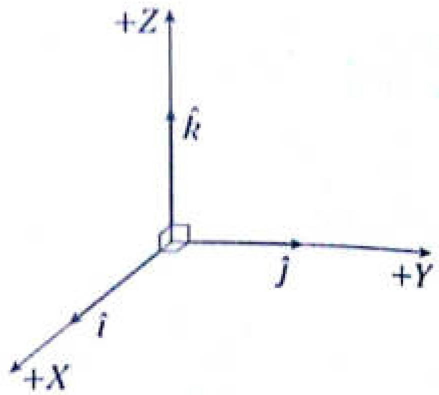
Se observa que

$$\hat{\mu}_A = \hat{\mu}_B$$

$$\boxed{\frac{\vec{A}}{A} = \frac{\vec{B}}{B}}$$

2.2.5. Vectores unitarios asociados al sistema de coordenadas tridimensional *XYZ*

Son aquellos vectores asociados a los semiejes positivos del sistema de coordenadas tridimensional, tal como se muestra en el gráfico siguiente:



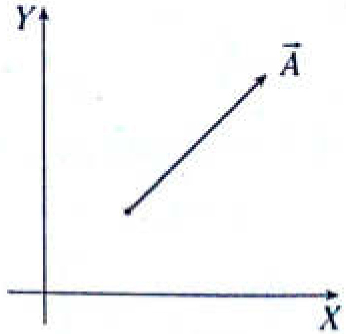
$$\boxed{|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1}$$

2.3. REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DE UN VECTOR

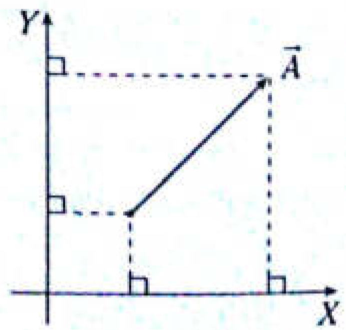
Caso 1

En dos dimensiones.

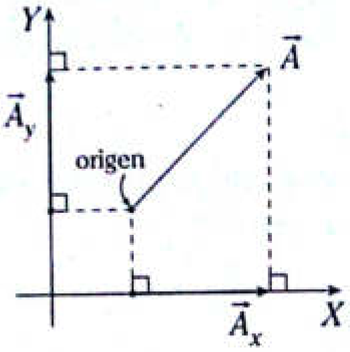
Todo vector que se encuentra en el plano *XY* se puede representar como un par ordenado, donde las componentes del par ordenado son vectores colineales a los ejes *X* e *Y*.



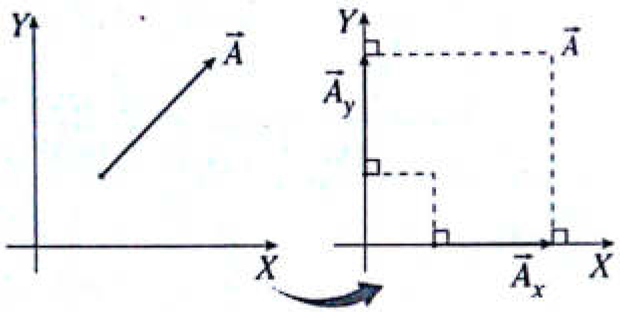
Para determinar las componentes del vector se trazan perpendiculares desde el origen y extremo del vector dado hacia los ejes *X* e *Y*.



Sobre los pies de las perpendiculares se trazan dos vectores, de tal forma que las perpendiculares que parten del origen del vector $\vec{A}$ generan el origen de los vectores componentes.



Finalmente, el $\vec{A}$ queda reemplazado por sus componentes. A este procedimiento se le denomina descomposición rectangular de un vector.



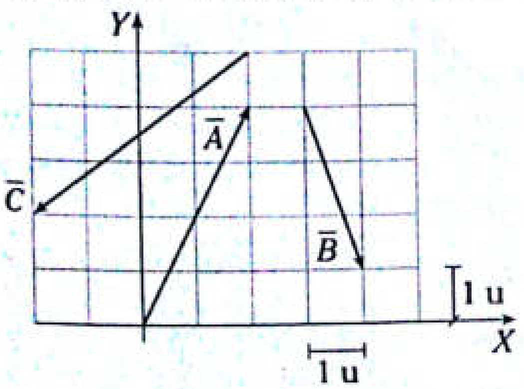
$$\boxed{\vec{A}=\left(\vec{A}_x;\vec{A}_y\right)=\vec{A}_x+\vec{A}_y}$$

Empleamos los vectores unitarios asociados a los ejes *x* e *y*.

$$\boxed{\vec{A}=A_x\hat{\imath}+A_y\hat{\jmath}}$$

Aplicación 1

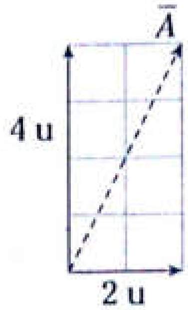
En la siguiente cuadrícula se muestran los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$. Exprese los vectores en forma analítica.



Resolución

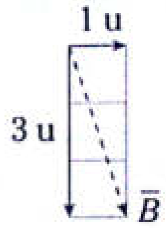
Para poder expresar los vectores en su forma analítica, debemos descomponer cada uno de los vectores.

- **Vector A**



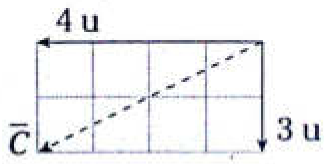
$$\vec{A}=(+2;+4)\text{ u}$$
$$\vee$$
$$\vec{A}=(2\hat{\imath}+4\hat{\jmath})\text{ u}$$

- **Vector B**



$$\vec{B}=(+1;-3)\text{ u}$$
$$\vee$$
$$\vec{B}=(\hat{\imath}-3\hat{\jmath})\text{ u}$$

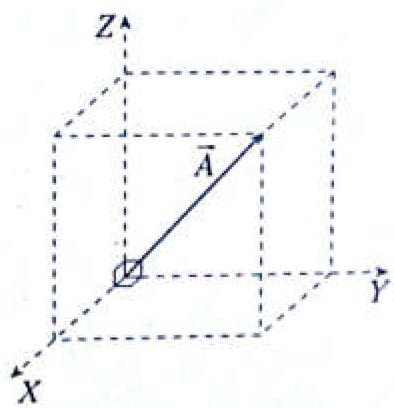
- **Vector C**



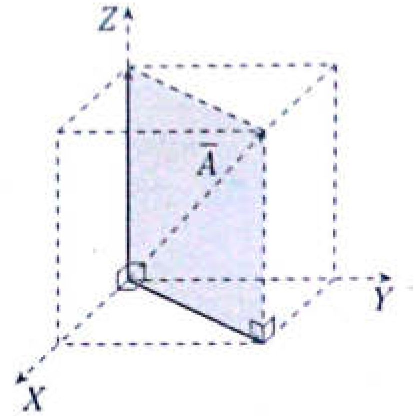
$$\vec{C}=(-4;-3)\text{u}$$
$$\vee$$
$$\vec{C}=(-4\hat{\imath}-3\hat{\jmath})\text{u}$$

Caso 2

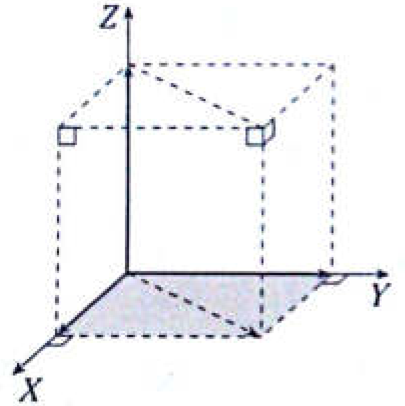
En tres dimensiones



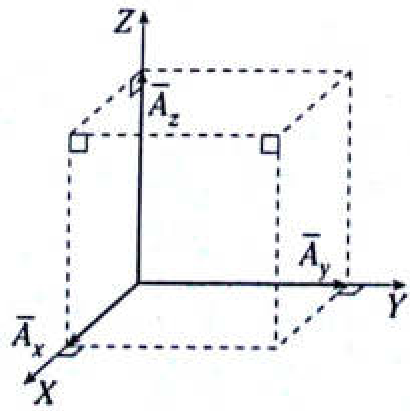
El vector $\vec{A}$ se ubica en el sistema de coordenadas XYZ y, para determinar sus componentes rectangulares, se trazan perpendiculares desde el extremo del vector hacia el eje Z y hacia el plano XY.



Seguidamente, la componente que se encuentra en el plano XY también se descompone.



Finalmente, el vector $\vec{A}$ presenta tres componentes, las cuales son colineales a los ejes X, Y y Z.



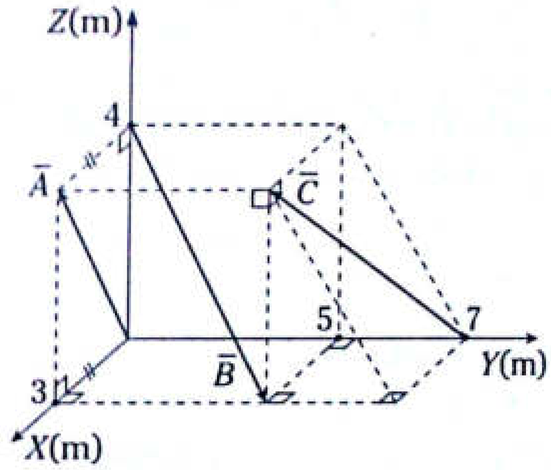
$$\boxed{\vec{A}=(\bar{A}_x;\bar{A}_y;\bar{A}_z)}$$

También se emplean los vectores unitarios asociados a los ejes X, Y, Z.

$$\boxed{\vec{A}=A_x\hat{\imath}+A_y\hat{\jmath}+A_z\hat{k}}$$

Aplicación 2

Exprese en forma analítica los vectores mostrados en el gráfico adjunto.

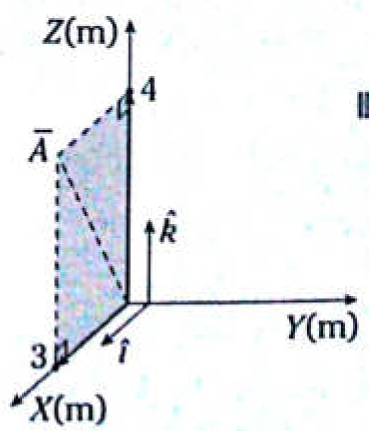


Resolución

Para ello debemos realizar la descomposición rectangular de cada uno de los vectores sobre el sistema de coordenadas XYZ.

- Para $\vec{A}$

  Como no tiene componente en Y, entonces $AY=0$.

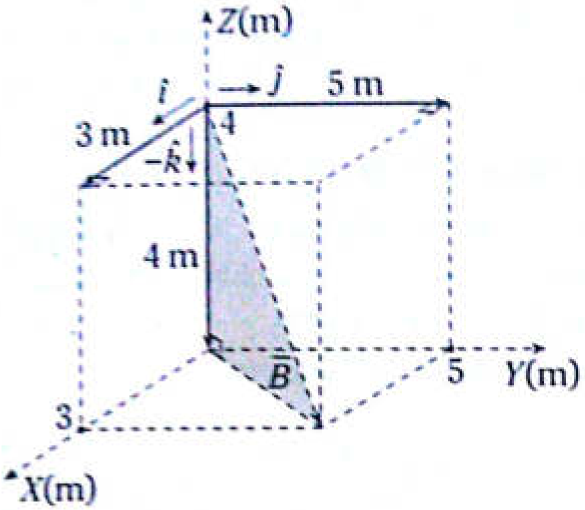


$\Rightarrow$ $\vec{A}=(3;0;4)(\text{m})$

$\vee$

$\vec{A}=(3\hat{\imath}+4\hat{k})(\text{m})$

- Para $\vec{B}$

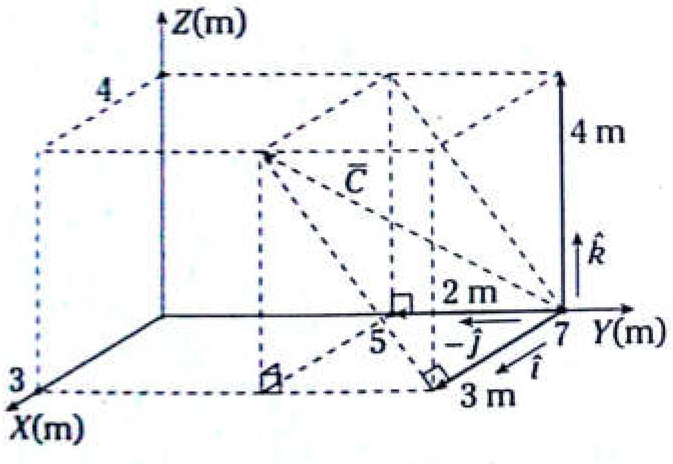


$$\vec{B}=(3\hat{\imath}+5\hat{\jmath}-4\hat{k})(\text{m})$$

$$\vee$$

$$\vec{B}=(3;5;-4)(\text{m})$$

- Para $\vec{C}$



$$\vec{C}=(3\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+4\hat{k})(\text{m})$$

$$\vee$$

$$\vec{C}=(3;-2;4)(\text{m})$$

3. Vector resultante $(\vec{R})$

Dado un conjunto de vectores $(\vec{A}, \vec{B}$ y $\vec{C})$, los cuales representan magnitudes de la misma naturaleza, se define el vector resultante $(\vec{R})$ como aquel que reemplaza a los otros vectores y produce el mismo efecto físico.

$$\boxed{\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}$$

NOTA

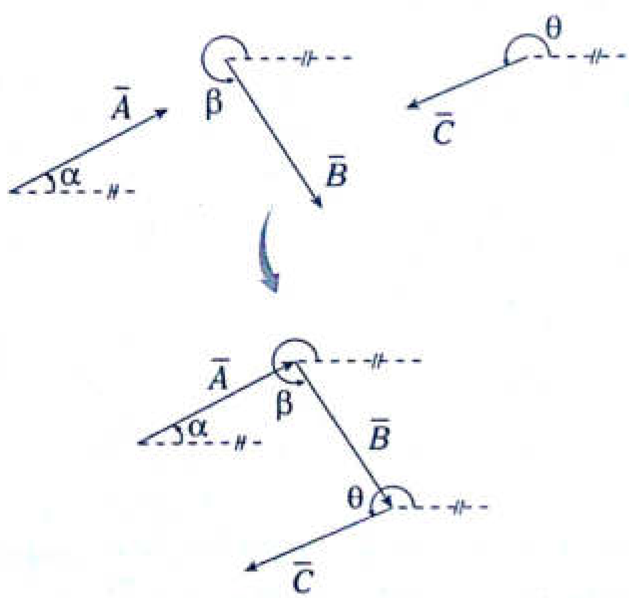
Sumar vectores no es lo mismo que sumar números, debido a que un vector posee módulo y dirección. En ese sentido, se aplican dos métodos generales para sumar vectores: el método del polígono y el método analítico.

3.1. MÉTODO DEL POLÍGONO

Es un método gráfico, el cual consiste en realizar los siguientes pasos:

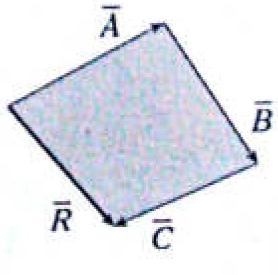
Paso 1

Los vectores se van a trasladar (manteniendo el mismo módulo y dirección), de tal manera que se deben colocar uno a continuación de otro y haciendo que coincidan el extremo de un vector con el origen del siguiente vector y así sucesivamente.



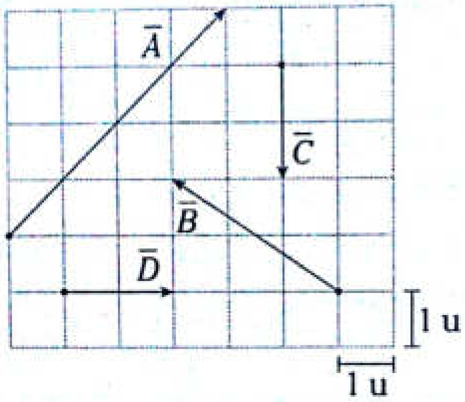
Paso 2

El vector resultante $(\vec{R})$ se obtiene uniendo el origen del primer vector con el extremo del último vector, y orientado del primero hacia el último.



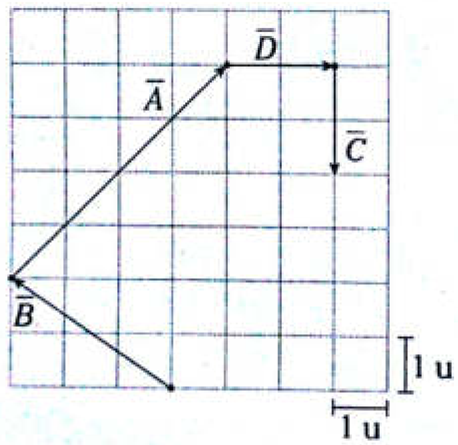
Aplicación 3

Se muestra un conjunto de vectores $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ y $\overline{D}$. Determine el vector resultante.

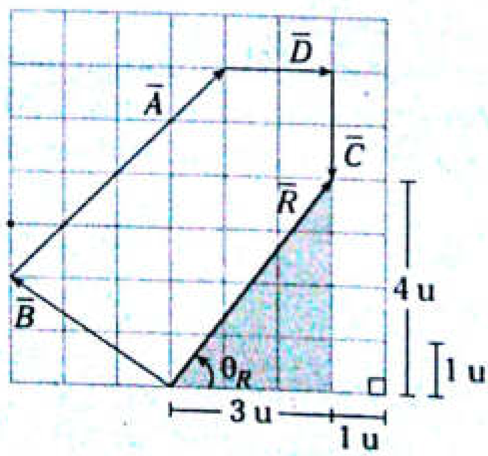


Resolución

Se trasladan los vectores ubicándolos uno a continuación de otro. Se sugiere evitar que los vectores se crucen, con el objetivo de que el gráfico resulte lo menos engorroso posible.



Ahora unimos el origen de $\vec{B}$ con el extremo de $\vec{C}$ para obtener el vector resultante ($\vec{R}$).



Del ⊿ notable de 53° y 37°, se deduce, como

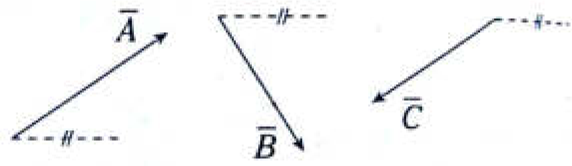
$$\theta_R = 53^o$$

$$\rightarrow \quad R = 5\ \text{u}$$

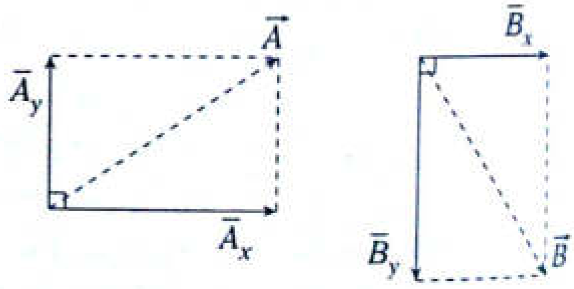
3.2. MÉTODO ANALÍTICO

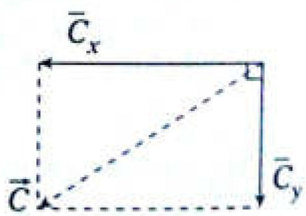
Es un método algebraico, el cual consiste en expresar cada vector en su forma analítica, es decir, como pares ordenados.

Sean $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ los vectores.



Se realiza la descomposición rectangular de cada vector.





Seguidamente, representamos los vectores en su forma analítica y sumamos.

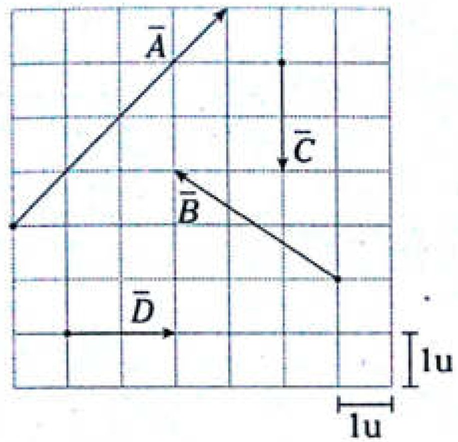
$$\begin{array}{r} \vec{A} = (\overline{A}_x; \overline{A}_y) \\ \vec{B} = (\overline{B}_x; \overline{B}_y) \\ \vec{C} = (\overline{C}_x; \overline{C}_y) \end{array} \Bigg\downarrow \; +$$

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (\underbrace{\overline{A}_x + \overline{B}_x + \overline{C}_x}_{\overline{R}_x}; \underbrace{\overline{A}_y + \overline{B}_y + \overline{C}_y}_{\overline{R}_y}) \quad (\vec{C})$$

$$\vec{R} = (\overline{R}_x; \overline{R}_y)$$

Aplicación 4

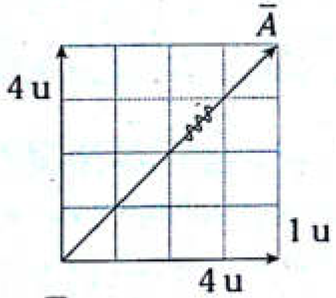
Se muestra un conjunto de vectores $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ y $\overline{D}$. Determine el vector resultante.



Resolución

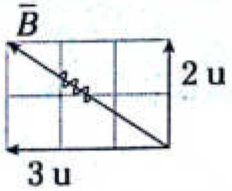
Se expresa cada vector en su forma analítica.

- Para $\overline{A}$



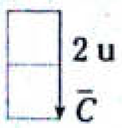
$\rightarrow\ \overline{A}=(4;4)$ u

- Para $\overline{B}$



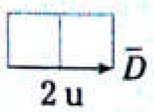
$\rightarrow\ \overline{B}=(-3;2)$ u

- Para $\overline{C}$



$\rightarrow\ \overline{C}=(0;-2)$ u

- Para $\overline{D}$



$\rightarrow\ \overline{D}=(2;0)$ u

Pero se define

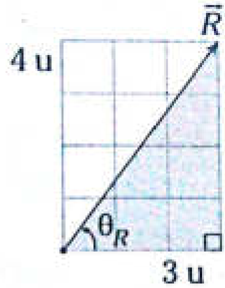
$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$$

$$\rightarrow\ \vec{R}=(4;4)+(-3;2)+(0;-2)+(2;0)$$

$$\vec{R}=(4-3+0+2;4+2-2+0)$$

$$\vec{R}=(3;4)\text{ u}$$

Representación gráfica



En el $\triangle$

$$R=\sqrt{3^2+4^2}$$

$$\therefore\ R=5\text{ u}$$

Además

$$\theta_R=53^\circ$$

NOTA

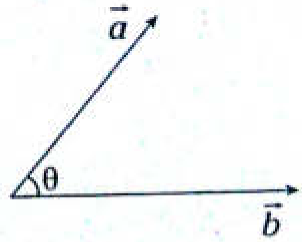
En las aplicaciones desarrolladas se han aplicado dos enfoques diferentes: el método del polígono y el método analítico, llegando en ambos casos al mismo resultado. Entonces podemos concluir que ambos métodos son equivalentes.

3.3. MÉTODO DEL PARALELOGRAMO

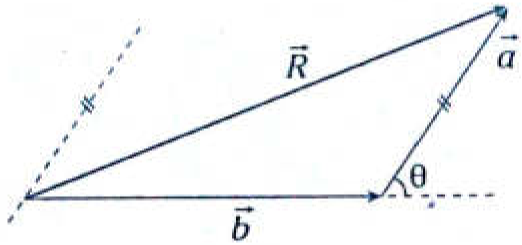
Es un caso particular del método del polígono y se emplea cuando se va a determinar la resultante entre dos vectores y se conoce el ángulo formado entre ellos.

Ejemplo

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ los vectores.

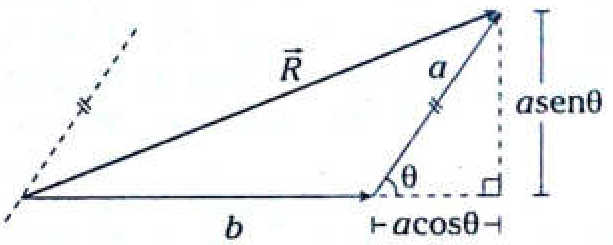


Si aplicamos el método del polígono, trasladamos al vector $\vec{a}$ en forma paralela, de tal forma que su origen coincida con el extremo del $\vec{b}$.



donde $\vec{R}$ es el vector resultante entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Para determinar su módulo, aprovechamos θ y formamos un triángulo rectángulo.



En el triángulo rectángulo mayor aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$R^2=(b+a\cos\theta)^2+(a\,\text{sen}\,\theta)^2$$

$$\rightarrow\quad R^2=b^2+2ab\cos\theta+a^2\cos^2\theta+a^2\text{sen}^2\theta$$

$$R^2=b^2+2ab\cos\theta+a^2(\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta)$$

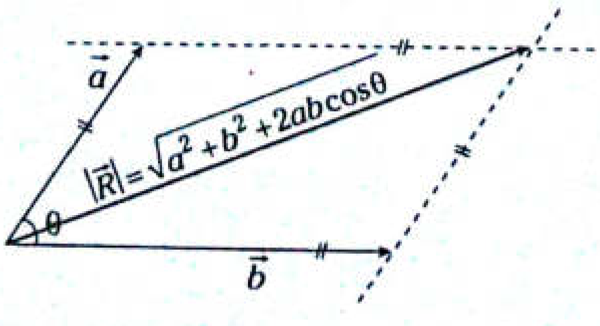
Por la identidad trigonométrica

$$\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\rightarrow\quad R^2=b^2+2ab\cos\theta+a^2$$

$$\boxed{R=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}}$$

Finalmente

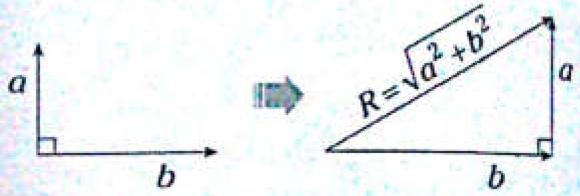


NOTA

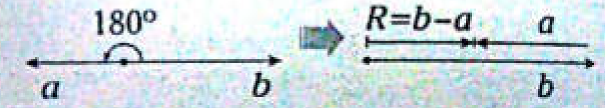
El módulo de $\vec{R}$ depende del ángulo θ formado entre los vectores. Entonces se cumple lo siguiente:

- Cuando $\theta=0°$

- Cuando $\theta=90°$



- Cuando $\theta=180°$



Conclusión

Dependiendo del ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, el módulo $\vec{R}$ toma diferentes valores, pero todos ellos se encuentran en un intervalo.

$$\boxed{\begin{gathered}\underbrace{R_{\text{mín}}}\le R\le\underbrace{R_{\text{máx}}}\\ b-a\le R\le b+a\end{gathered}}$$

donde $b>a$.

Comentario

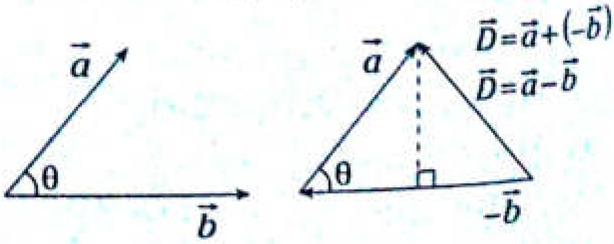
También se define la diferencia entre dos vectores ($\vec{a}$ y $\vec{b}$) como

$$\vec{D}=\vec{a}-\vec{b}$$

que se puede expresar como la resultante entre un vector y el opuesto de otro vector dado.

$$\rightarrow\quad \vec{D}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

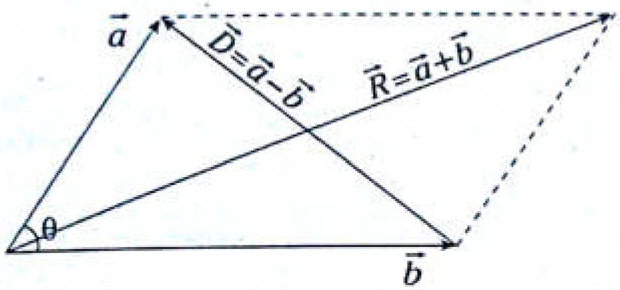
Por el método del polígono tendremos



Formando el triángulo rectángulo se deduce

$$\boxed{D=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}}$$

Finalmente



4. Producto de vectores

Dados dos vectores $(\vec{a}$ y $\vec{b})$, se puede realizar la operación producto de dos formas: producto escalar y producto vectorial.

4.1. PRODUCTO ESCALAR

Dados dos vectores $(\vec{a}$ y $\vec{b})$

$$\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$$
$$\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$$

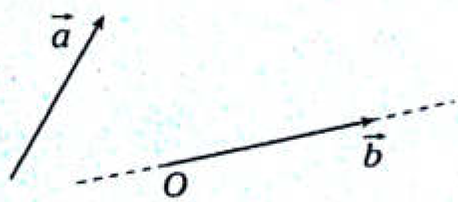
donde se denota el producto escalar como $\vec{a}\cdot\vec{b}$.
Se define

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}$$

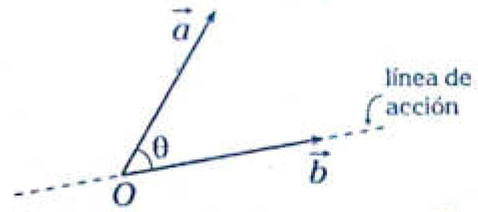
El resultado es un escalar (número real).

Interpretación geométrica

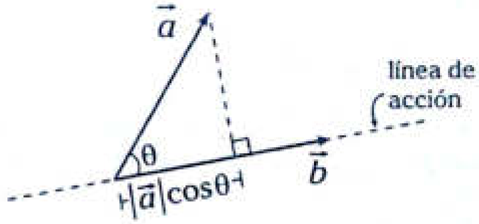
Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no colineales.



Se traslada el vector $\vec{a}$ de tal forma que su origen coincida con el origen del vector $\vec{b}$.



Trazamos la proyección del vector $\vec{a}$ sobre la línea de acción de $\vec{b}$.

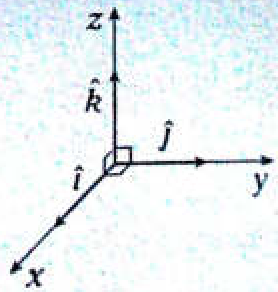


Se interpreta el producto escalar como el producto del módulo de un vector por la proyección de un segundo vector sobre la línea de acción del primero, es decir

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta}$$

Observación

En el caso de los vectores unitarios $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$



$$\hat{i}\cdot\hat{j}=\underbrace{(\hat{i})}_{1}\underbrace{(\hat{j})}_{1}\underbrace{\cos 90^\circ}_{0}=0$$

De igual forma

$$\hat{i}\cdot\hat{k}=0$$
$$\hat{j}\cdot\hat{k}=0$$

Además

$$\hat{i}\cdot\hat{i}=|\hat{i}|\cdot|\hat{i}|\cos 0^\circ=1$$

De igual forma

$$\hat{j}\cdot\hat{j}=1$$
$$\hat{k}\cdot\hat{k}=1$$

Aplicación 5

Dados los vectores

$$\vec{a}=(3;-4) \text{ y } \vec{b}=-2\hat{\imath}+\hat{\jmath}$$

determine $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Resolución

Expresamos $\vec{b}$ como un par ordenado.

$$\vec{b}=(-2;1)$$

Por definición

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(3;-4)\cdot(-2;1)$$

$$\rightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot(-2)+(-4)\cdot(1)=-6-4$$

$$\therefore \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=-10$$

4.2. PRODUCTO VECTORIAL

Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, donde

$$\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$$

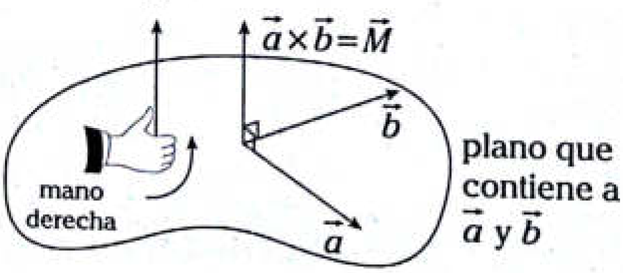
$$\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$$

se denota el producto vectorial como $\vec{a}\times\vec{b}$.

Se define

$$\underbrace{\vec{a}\times\vec{b}}_{\vec{M}=}=\left(\underbrace{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}}_{(M_x};\underbrace{-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}}_{M_y};\underbrace{\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}}_{M_z)}\right)$$

El resultado es un vector que al representarlo resulta ser perpendicular al plano formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Para determinar su dirección, se emplea la regla de la mano derecha.



OBSERVACIÓN

$$\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}=m\cdot q-p\cdot n$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=(3)(1)-(2)(-1)$$

$$=3+2$$

$$=5$$

Aplicación 6

Dados los vectores

$$\vec{a}=(2;-2;1)$$

$$\vec{b}=(1;3;-1)$$

determine el producto vectorial de ambos vectores.

Resolución

Determinemos $\vec{a}\times\vec{b}$.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right)$$

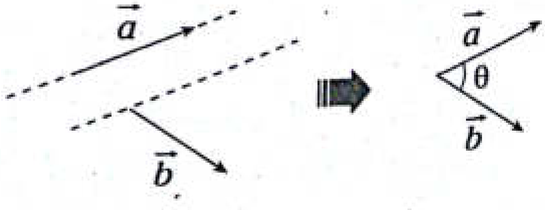
$$\vec{a}\times\vec{b}=((-2)(-1)-(3)(1);-[(2)(-1)-(1)(1)];(2)(3)-(1)(-2))$$

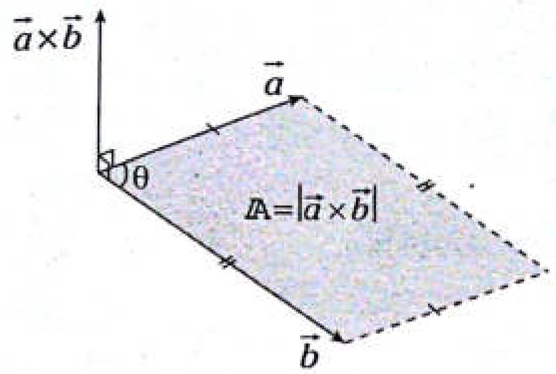
$$\vec{a}\times\vec{b}=(2-3;-(-2-1);6+2)$$

$$\therefore \quad \vec{a}\times\vec{b}=(-1;3;8)$$

Interpretación geométrica

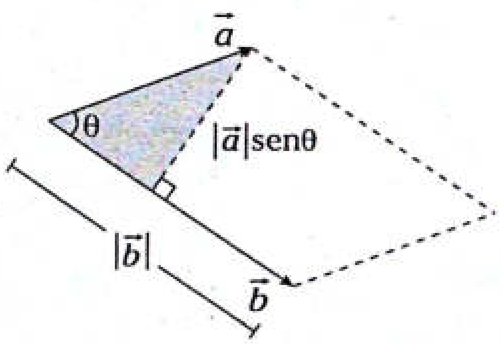
Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, tal como se muestra





El módulo del producto vectorial $\vec{a}\times\vec{b}$ representa el área del paralelogramo formado con los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Por otro lado



$$\mathbb{A}_{\square}=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\,\text{sen}\,\theta$$

Entonces

$$\boxed{|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\text{sen}\,\theta}$$

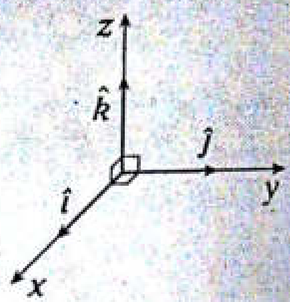
OBSERVACIÓN

En el caso de los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$

$\hat{\imath}=(1;0;0)$

$\hat{\jmath}=(0;1;0)$

$\hat{k}=(0;0;1)$



$$\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=\left(\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\right)$$

$\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=(0;0;1)=\hat{k}$

$\rightarrow$ $\boxed{\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}}$

De igual manera

$\hat{\jmath}\times\hat{k}=\hat{\imath}$

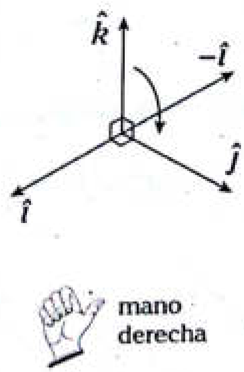
$\hat{k}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath}$

En forma práctica se aplica la regla de la mano derecha.

Giramos los cuatro dedos de la mano derecha del primer vector unitario al segundo y el dedo pulgar nos señala el vector resultante.

Ejemplo

Determinemos $\hat{k}\times\hat{\jmath}$.



$\hat{k}\times\hat{\jmath}=-\hat{\imath}$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema N.° 1

Sean los vectores

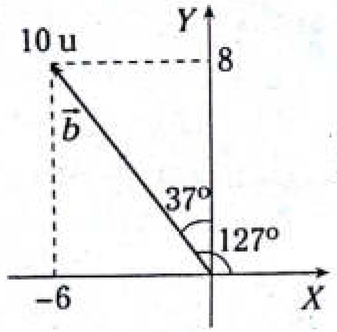
$\vec{a}=(m+3;3n-1)$

$\vec{b}=(10\text{ u};127°)$

Si ambos vectores son iguales, determine $m\times n$.

Resolución

Se puede apreciar que el vector $\vec{a}$ está representado en forma analítica; mientras que $\vec{b}$, en forma polar. Entonces expresemos a $\vec{b}$ también en su forma analítica.



$\Rightarrow$ $\vec{b}=(-6;8)$

Y por condición del problema $\vec{a}=\vec{b}$

$\rightarrow\quad (m+3;3n-1)=(-6;8)$

$m+3=-6 \;\wedge\; 3n-1=8$

$\rightarrow\quad m=-9 \qquad\rightarrow\quad n=3$

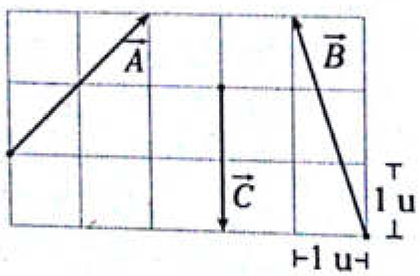
Finalmente, nos piden

$m\times n=(-9)(3)$

$\therefore\quad m\times n=-27$

Problema N.° 2

En el siguiente sistema de vectores que se muestra, determine el vector unitario de $\dfrac{\vec{A}}{2}-2\vec{B}-\vec{C}$



Resolución

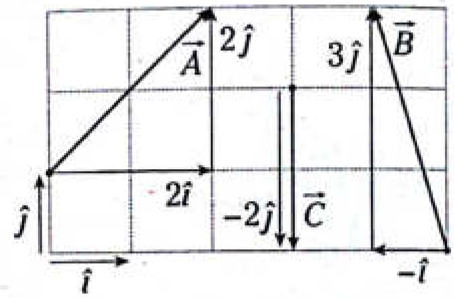
Si denotamos

$$\frac{\vec{A}}{2}-2\vec{B}-\vec{C}=\vec{R}$$

entonces nos piden

$$\hat{\mu}_{\vec{R}}=\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} \qquad \text{(I)}$$

Expresemos los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ en términos de los vectores unitarios cartesianos.



De la figura

$\vec{A}=2\hat{i}+2\hat{j}$

$\vec{B}=-\hat{i}+3\hat{j}$

$\vec{C}=-2\hat{j}$

Pero como

$$\vec{R}=\frac{\vec{A}}{2}-2\vec{B}-\vec{C}$$

$$\rightarrow\quad R=\frac{1}{2}(2\hat{i}+2\hat{j})-2(-\hat{i}+3\hat{j})-(-2\hat{j})$$

$$R=\underbrace{\hat{i}+\hat{j}+2\hat{i}}-6\hat{j}+2\hat{j}$$

$$\vec{R}=3\hat{i}-3\hat{j} \qquad \text{(II)}$$

Además

$$|\vec{R}|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2} \qquad \text{(III)}$$

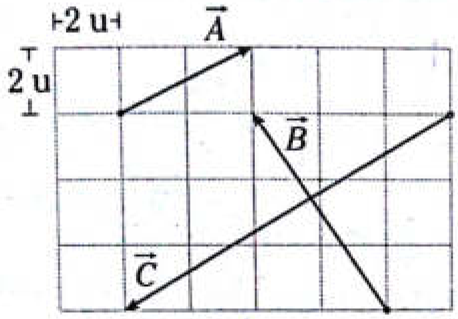
Reemplazamos (II) y (III) en (I).

$$\hat{\mu}_{\vec{R}}=\frac{3\hat{i}-3\hat{j}}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i}-\hat{j})$$

$$\therefore\quad \hat{\mu}_{\vec{R}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$$

Problema N.° 3

Determine el vector $\vec{x}$ que debemos agregar al conjunto de vectores, de tal manera que la resultante sea $(-5; 7)$.



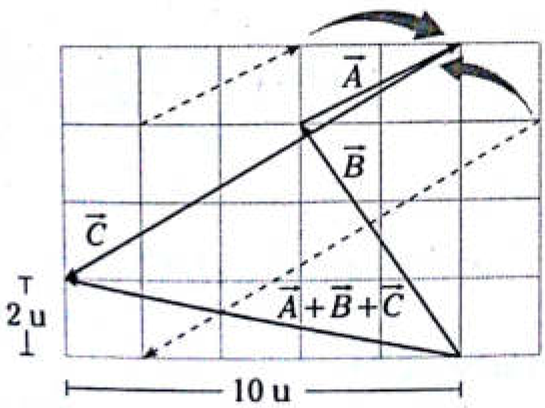
Resolución

Nos piden un vector $\vec{x}$, de tal forma que al agregarle los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ se obtiene

$$\vec{x}+\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=\underbrace{\vec{R}}$$

$$\vec{x}+\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=(-5;7) \qquad \text{(I)}$$

Aprovechemos el gráfico para determinar $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$, para ello se trasladan los vectores y se ubican uno a continuación de otro.



Uniendo el origen del primero con el extremo del último, se determina la resultante de $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$.

$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=(-10;2) \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I).

$$\vec{x}+(-10;2)=(-5;7)$$

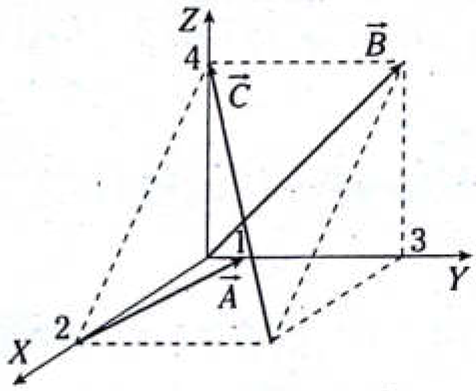
$$\rightarrow \quad \vec{x}=(-5;7)-(-10;2)$$

$$\vec{x}=(-5+10;7-2)$$

$$\therefore \quad \vec{x}=(5;5)$$

Problema N.° 4

Determine el vector unitario de la resultante.



Resolución

Si consideramos a $\vec{R}$ como la resultante de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$

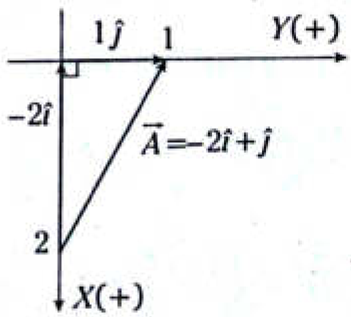
$$\rightarrow \quad \vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} \qquad \text{(I)}$$

Nos piden

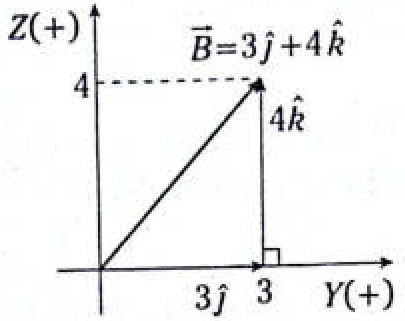
$$\hat{\mu}=\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} \qquad \text{(II)}$$

Ahora expresamos los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ en su forma analítica.

- Para $\vec{A}$

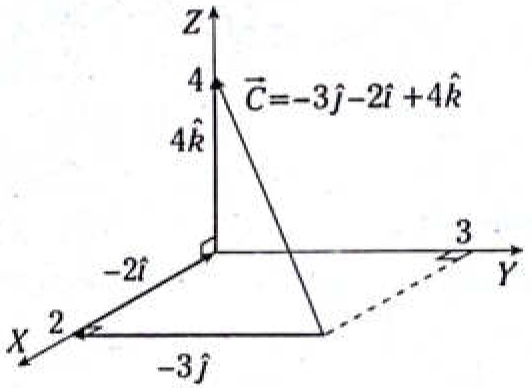


- Para $\vec{B}$



- Para $\vec{C}$

  Por el método del polígono



Reemplazamos $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ en (I).

$$\vec{R}=(-2\hat{\imath}+\hat{\jmath})+(3\hat{\jmath}+4\hat{k})+(-3\hat{\jmath}-2\hat{\imath}+4\hat{k})$$

$$\vec{R}=-4\hat{\imath}+\hat{\jmath}+8\hat{k} \qquad \text{(III)}$$

$$\rightarrow \quad |\vec{R}|=\sqrt{(-4)^2+1^2+8^2}=\sqrt{81}$$

$$|\vec{R}|=9 \qquad \text{(IV)}$$

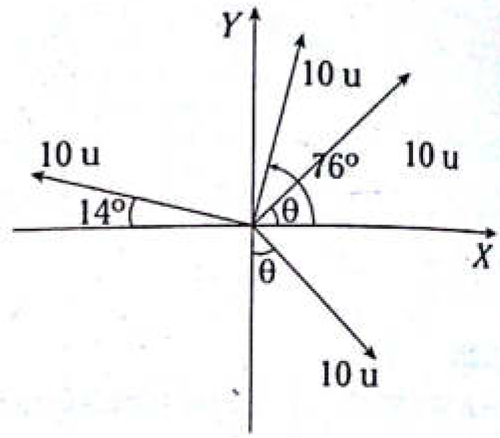
Reemplazamos (III) y (IV) en (II).

$$\hat{\mu}=\frac{-4\hat{\imath}+\hat{\jmath}+8\hat{k}}{9}$$

$$\therefore \quad \hat{\mu}=\left(-\frac{4}{9}\hat{\imath}+\left(\frac{1}{9}\right)\hat{\jmath}+\left(\frac{8}{9}\right)\hat{k}\right)$$

Problema N.º 5

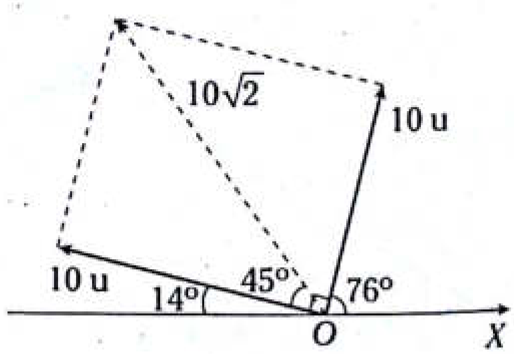
Dado el conjunto de vectores mostrados en el gráfico, determine el módulo del vector resultante y la medida del ángulo θ si se sabe que la dirección de la resultante es 61°.



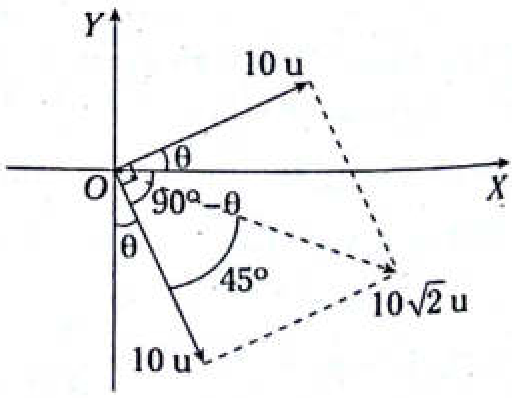
Resolución

Sea $\vec{R}$ la resultante de los vectores dados. No es conveniente realizar una descomposición rectangular de los vectores porque los ángulos que forman con los ejes no son conocidos.

Si agrupamos de a dos

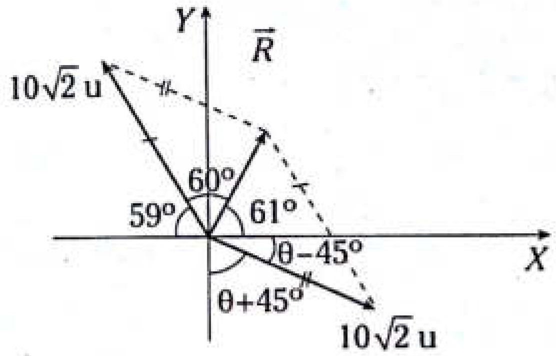


Ahora los otros dos

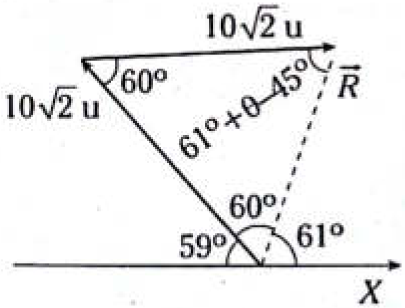


En consecuencia, en vez de trabajar con cuatro vectores, tenemos dos vectores. Aplicando el método del paralelogramo, determinamos $\vec{R}$.

Por condición, $\theta_R = 61°$.



Del gráfico



Como el triángulo formado es equilátero

$\rightarrow \ |\vec{R}| = 10\sqrt{2}$ u

Luego

$$61° + \theta - 45° = 60°$$

$$\theta + 16° = 60°$$

$$\therefore \quad \theta = 44°$$

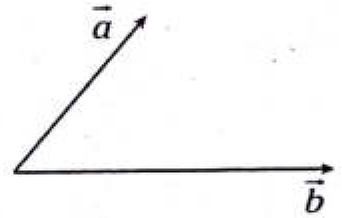
Problema N.° 6

Se tienen dos vectores ($\vec{a}$ y $\vec{b}$), de tal manera que la suma de ambos vectores es perpendicular a su diferencia. Determine

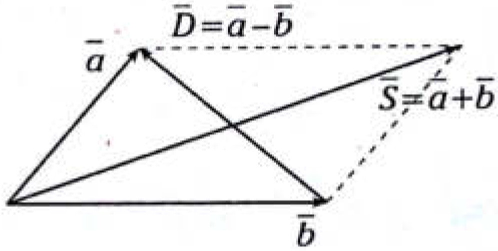
$$\frac{|\vec{a}| + 3|\vec{b}|}{2|\vec{b}| - |\vec{a}|}$$

Resolución

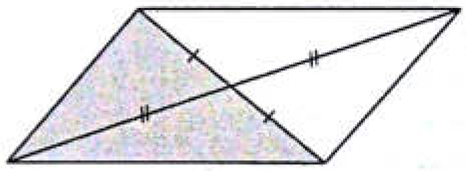
Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ los vectores representados tal como se muestra.



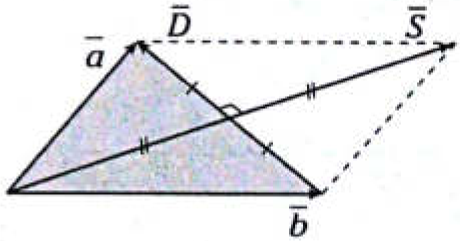
Ahora representemos la suma y la diferencia de ambos vectores.



Pero por la propiedad del paralelogramo al trazar las diagonales, estas se cortan en sus puntos medios.



Además, por condición del problema, el vector suma es perpendicular a la diferencia.



En consecuencia, el triángulo sombreado es isósceles, entonces $|\vec{a}| = |\vec{b}| = m$.

Nos piden

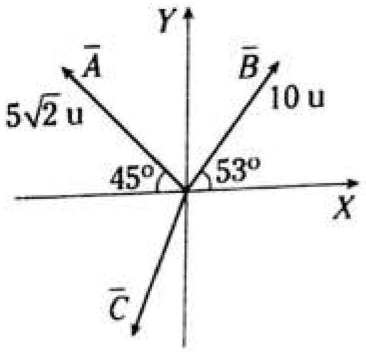
$$\frac{|\vec{a}| + 3|\vec{b}|}{2|\vec{b}| - |\vec{a}|} = \frac{m + 3m}{2m - m} = \frac{4m}{m}$$

$$\therefore \quad \frac{|\vec{a}| + 3|\vec{b}|}{2|\vec{b}| - |\vec{a}|} = 4$$

Problema N.° 7

En el siguiente sistema de vectores mostrados, la resultante es nula. Determine

$$\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{B}\cdot\vec{C}}{\vec{A}\cdot\vec{C}}$$

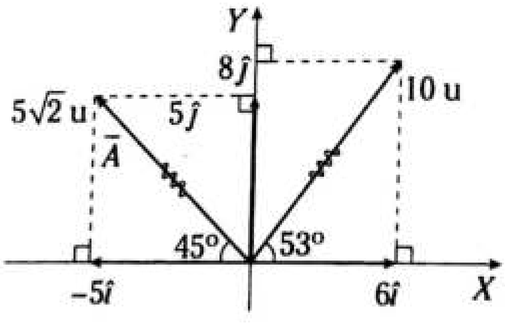


Resolución

Nos piden

$$\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{B}\cdot\vec{C}}{\vec{A}\cdot\vec{C}}=P \qquad \text{(I)}$$

Entonces expresemos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en su forma analítica y luego, determinemos $\vec{C}$ para, finalmente, hallar los productos escalares.



Luego

$$\bar{A}=-5\hat{\imath}+5\hat{\jmath} \quad \wedge \quad \bar{B}=6\hat{\imath}+8\hat{\jmath}$$

Ahora, como nos plantean que la resultante es nula, entonces

$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$$

$$\rightarrow \quad \vec{0}=(-5\hat{\imath}+5\hat{\jmath})+(6\hat{\imath}+8\hat{\jmath})+\vec{C}$$

$$\vec{0}=(\hat{\imath}+13\hat{\jmath})+\vec{C}$$

$$\rightarrow \quad \vec{C}=-\hat{\imath}-13\hat{\jmath}$$

Aplicamos productos escalares.

- $\vec{A}\cdot\vec{B}=(-5\hat{\imath}+5\hat{\jmath})(6\hat{\imath}+8\hat{\jmath})$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=-30+40 \;\rightarrow\; \vec{A}\cdot\vec{B}=10 \qquad \text{(II)}$$

- $\vec{B}\cdot\vec{C}=(6\hat{\imath}+8\hat{\jmath})(-\hat{\imath}-13\hat{\jmath})$

$$\vec{B}\cdot\vec{C}=-6+104$$

$$\rightarrow \quad \vec{B}\cdot\vec{C}=98 \qquad \text{(III)}$$

- $\vec{A}\cdot\vec{C}=(-5\hat{\imath}+5\hat{\jmath})\cdot(-\hat{\imath}-13\hat{\jmath})$

$$\vec{A}\cdot\vec{C}=5-65$$

$$\rightarrow \quad \vec{A}\cdot\vec{C}=-60 \qquad \text{(IV)}$$

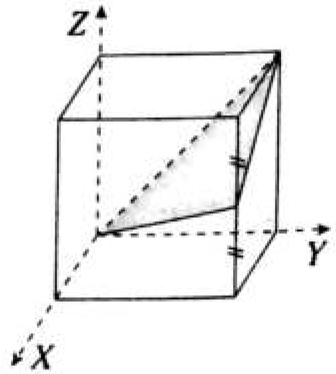
Finalmente reemplazamos (II), (III) y (IV) en (I).

$$P=\frac{10+98}{-60}=-\frac{108}{60}$$

$$\therefore \quad P=-\frac{9}{5}$$

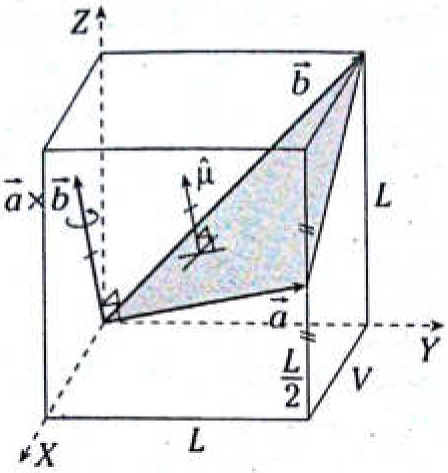
Problema N.° 8

Se tiene un hexaedro regular. Determine el vector unitario que es perpendicular a la región sombreada.



Resolución

Nos piden el vector unitario ($\hat{\mu}$) que sea $\perp$ a la región sombreada. Si consideramos dos vectores que se encuentran en dicha región, entonces el producto vectorial tiene que ser $\perp$ a la región formada por ambos vectores.

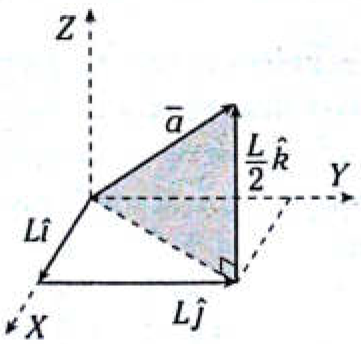


Por la definición de vector unitario

$$\hat{\mu}=\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} \qquad \text{(I)}$$

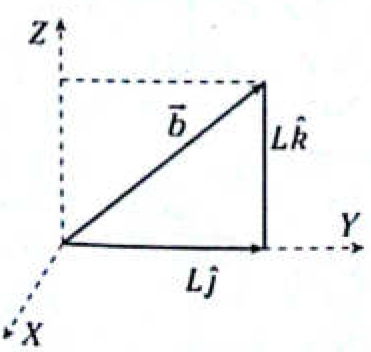
De la figura, se determina $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$.

Para el vector $\vec{a}$



$$\vec{a}=L\hat{\imath}+L\hat{\jmath}+\frac{L}{2}\hat{k}$$

Ahora expresamos el vector $\vec{b}$ en terminos de vectores unitarios.



$$\vec{b}=L\hat{\jmath}+L\hat{k}$$

Ahora determinemos $\vec{a}\times\vec{b}$.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ L & L & \frac{L}{2}\\ 0 & L & L\end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}L & \frac{L}{2}\\ L & L\end{vmatrix};-\begin{vmatrix}L & \frac{L}{2}\\ 0 & L\end{vmatrix};\begin{vmatrix}L & L\\ 0 & L\end{vmatrix}\right)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(L^2-\frac{L^2}{2};-L^2;L^2\right)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\frac{L^2}{2};-L^2;L^2\right)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=L^2\left(\frac{1}{2}\hat{\imath}-\hat{\jmath}+\hat{k}\right) \qquad \text{(II)}$$

Además

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=L^2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2+1^2}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=L^2\sqrt{\frac{1}{4}+2}=L^2\sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{3}{2}L^2 \qquad \text{(III)}$$

Reemplazamos (II) y (III) en (I).

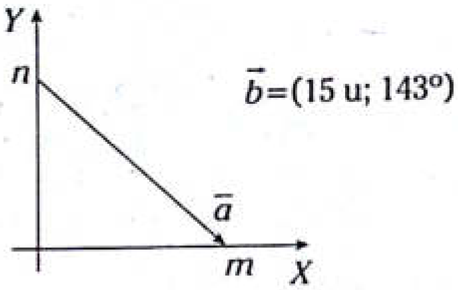
$$\hat{\mu}=\frac{\cancel{L^2}\left(\frac{1}{2}\hat{\imath}-\hat{\jmath}+\hat{k}\right)}{\frac{3}{2}\cancel{L^2}}$$

$$\therefore \quad \hat{\mu}=\frac{1}{3}\hat{\imath}-\frac{2}{3}\hat{\jmath}+\frac{2}{3}\hat{k}$$

Problemas Propuestos

NIVEL BÁSICO

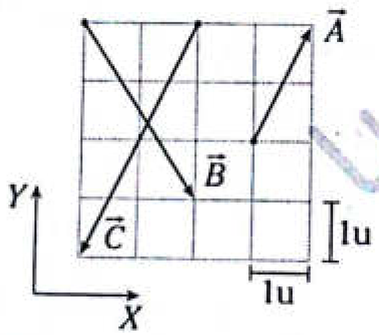
1. Dados dos vectores $(\vec{a}\text{ y }\vec{b})$ representados, determine $m\cdot n$ si se sabe que los vectores son opuestos.



A) 59 B) −108 C) 108
D) −60 E) 120

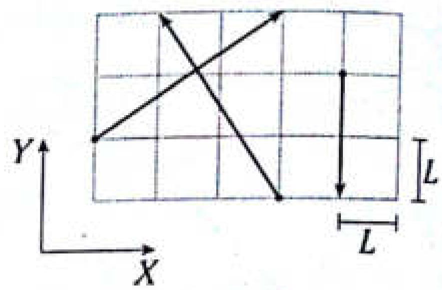
2. Se tiene un conjunto de vectores: $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$, sobre una región formada con celdas de lado igual a 1 u. Determine el vector

$2\vec{A}-\vec{B}+\dfrac{\vec{C}}{2}$



A) $3\hat{\imath}-5\hat{\jmath}$
B) $-\hat{\imath}+5\hat{\jmath}$
C) $\hat{\imath}-5\hat{\jmath}$
D) $\hat{\imath}-3\hat{\jmath}$
E) $5\hat{\jmath}$

3. En el siguiente sistema de vectores que se muestra en el gráfico adjunto, determine el vector unitario de la resultante.



A) $\dfrac{1}{\sqrt{10}}\hat{\imath}+\dfrac{3}{\sqrt{10}}\hat{\jmath}$

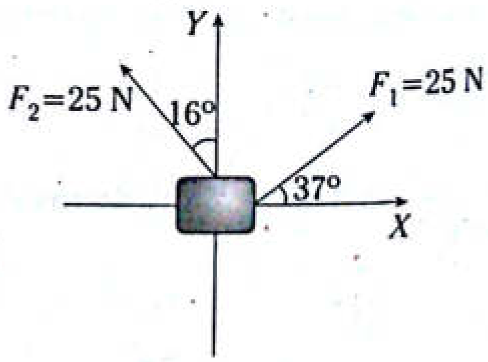
B) $\hat{\imath}+3\hat{\jmath}$

C) $-\hat{\imath}-3\hat{\jmath}$

D) $-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\hat{\imath}-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\hat{\jmath}$

E) $\dfrac{3}{\sqrt{10}}\hat{\imath}-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\hat{\jmath}$

4. Sobre un bloque actúan las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, tal como se muestra en el gráfico. Determine la fuerza $\vec{F}_3$ que debe actuar sobre el bloque de tal manera que la resultante de fuerzas sea nula.



A) $13\hat{\imath}+39\hat{\jmath}$

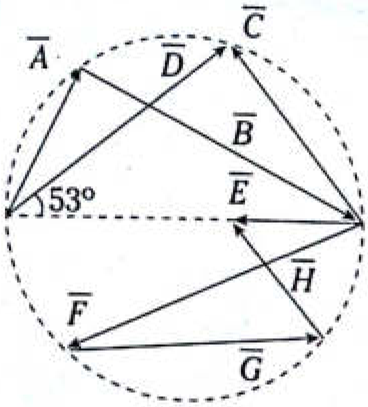
B) $13\sqrt{10}\,\hat{\jmath}$

C) $-13\hat{\imath}-39\hat{\jmath}$

D) $13\sqrt{10}\,\hat{\imath}$

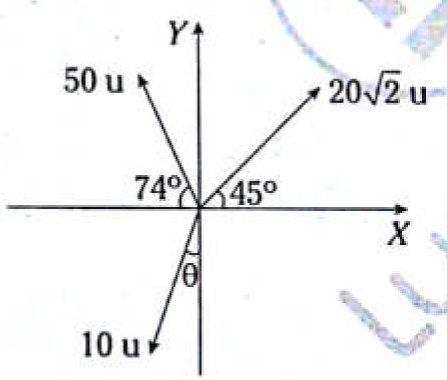
E) $13\hat{\imath}-39\hat{\jmath}$

5. Dado el siguiente conjunto de vectores, determine el módulo del vector resultante si $|\vec{D}| = 15$ u y $|\vec{E}| = 4$ u.



A) 13 u
B) 10 u
C) 25 u
D) 50 u
E) 26 u

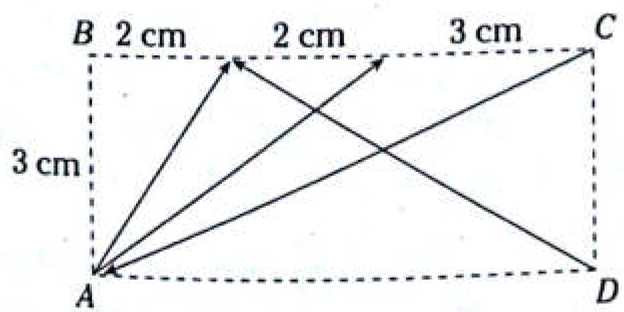
6. En el siguiente conjunto de vectores, determine el módulo de la resultante sabiendo que se encuentra sobre el eje Y.



A) 58 u
B) 75 u
C) 68 u
D) 60 u
E) Falta θ.

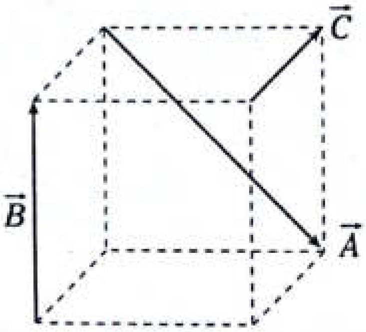
NIVEL INTERMEDIO

7. Se muestra un conjunto de vectores. Determine el módulo del vector resultante.



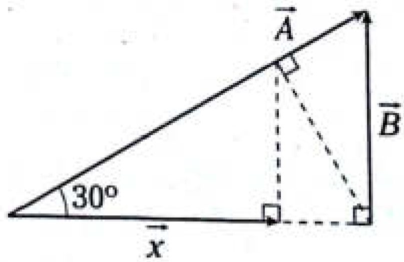
A) 10 cm
B) $5\sqrt{3}$ cm
C) $4\sqrt{2}$ cm
D) 5 cm
E) $6\sqrt{2}$ cm

8. Los vectores se encuentran sobre el cubo de 2 cm de arista. Determine el módulo del vector resultante.



A) $\sqrt{5}$ cm
B) 3 cm
C) $2\sqrt{2}$ cm
D) $3\sqrt{2}$ cm
E) 2 cm

9. A partir del gráfico, determine el vector $\vec{x}$ en función de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.



A) $\dfrac{(\vec{A}+\vec{B})}{3}$

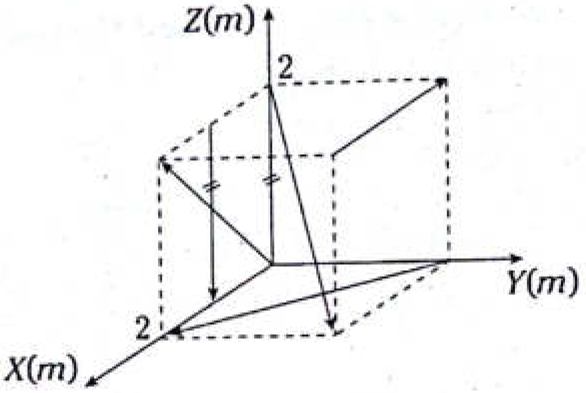
B) $\dfrac{3}{4}(\vec{A}-\vec{B})$

C) $\dfrac{2}{3}(\vec{A}-\vec{B})$

D) $\dfrac{(\vec{A}+\vec{B})}{2}$

E) $\dfrac{5}{2}(\vec{A}-\vec{B})$

10. En el siguiente conjunto de vectores que se muestra, se conoce que la resultante no presenta componente en el eje Y. Determine el módulo de la resultante.

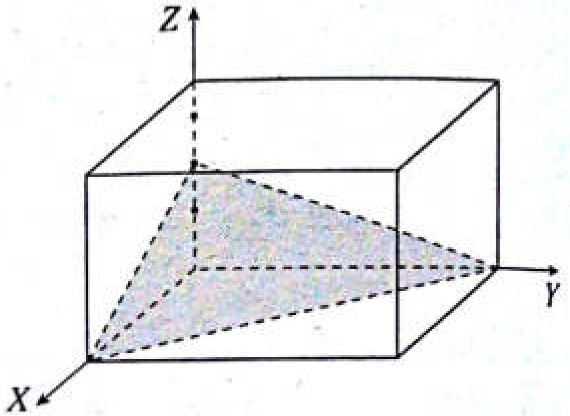


A) $2\sqrt{10}$ m B) 10 m C) $2\sqrt{5}$ m
D) 8 m E) 4 m

11. Se tiene dos vectores ($\vec{A}$ y $\vec{B}$) que son paralelos a los vectores $2\hat{\imath}+5\hat{\jmath}$ y $7\hat{\imath}-4\hat{\jmath}$, respectivamente. Determine $\vec{A}\cdot\vec{B}$ si $2\vec{A}-\vec{B}=-2\hat{\imath}+38\hat{\jmath}$.

A) −36 B) 18 C) 52
D) −72 E) 36

12. Determine aquel vector cuyo módulo es $5\sqrt{6}$ u y es perpendicular a la región sombreada en el hexaedro regular.



A) $5\hat{\imath}-5\hat{\jmath}+10\hat{k}$
B) $5\hat{\imath}-10\hat{\jmath}+10\hat{k}$
C) $5\hat{\imath}+5\hat{\jmath}+10\hat{k}$
D) $5\hat{\imath}+5\hat{\jmath}-10\hat{k}$
E) $10\hat{\imath}+10\hat{\jmath}+5\hat{k}$

Cinemática de una partícula en una dimensión

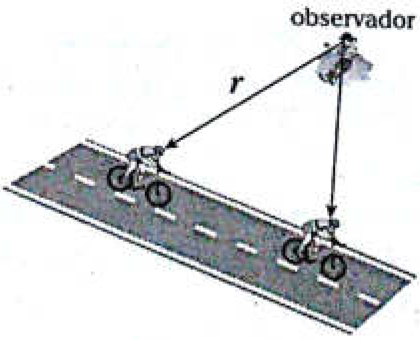
Capítulo III

Objetivos

- Describir matemáticamente el movimiento mecánico y sus elementos.
- Estudiar los principales movimientos rectilíneos.
- Aplicar ecuaciones escalares y vectoriales para los movimientos rectilíneos.

1. Definición de cinemática

Es la parte de la física que describe el movimiento mecánico de los cuerpos sin prestar atención a las causas que dan inicio o modifican el movimiento.

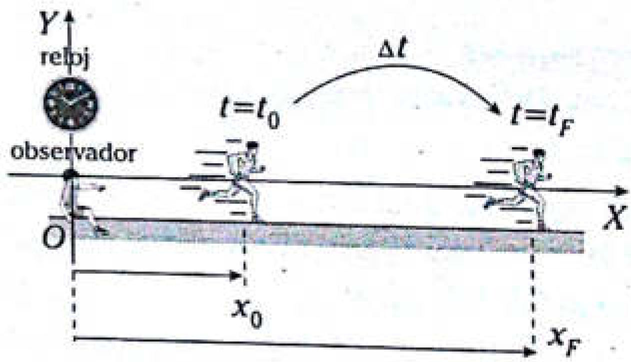


Para el observador, el ciclista va cambiando continuamente de posición, es decir, experimenta movimiento mecánico.

1.1. SISTEMA DE REFERENCIA

Está conformado por los siguientes elementos:

- Cuerpo de referencia (observador)
- Instrumento para medir el paso del tiempo (reloj)
- Sistema de ejes coordenados



donde

- $\vec{x}_0$: posición inicial
- $\vec{x}_F$: posición final
- t_0: instante de tiempo inicial (cuando se decide iniciar el control o análisis del movimiento)
- t_F: instante de tiempo final
- $\Delta t = t_F - t_0$: intervalo de tiempo

Nota

El observador siempre se ubica en el origen del sistema de coordenadas.

1.2. MOVIMIENTO MECÁNICO

Es aquel fenómeno que consiste en el cambio continuo de posición de un cuerpo con respecto a otro. A este último se le denomina cuerpo de referencia.

1.3. ELEMENTOS DEL MOVIMIENTO MECÁNICO

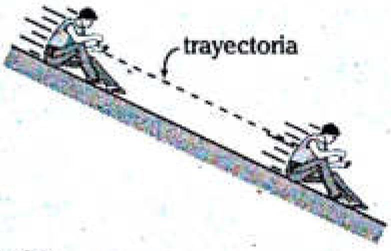
Nos permiten describir el movimiento mecánico, estos elementos son los siguientes:

Móvil

Es el cuerpo o partícula que realiza el movimiento mecánico.

Trayectoria

Es la línea que resulta de unir todas las posiciones por donde pasó el móvil.

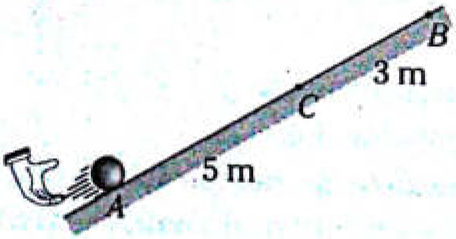


Recorrido (e)

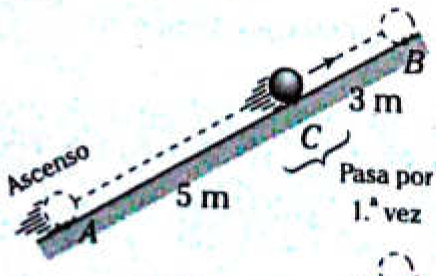
Es la longitud de la trayectoria.

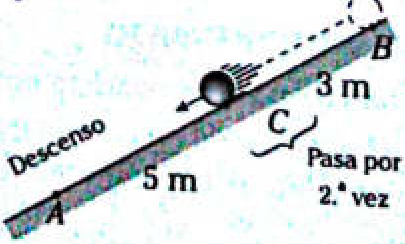
Ejemplo

Si la esfera se lanza en A y solo sube hasta B, calculamos el recorrido desde A hasta que pasa por segunda vez por C.



Para ello, dibujamos la trayectoria.



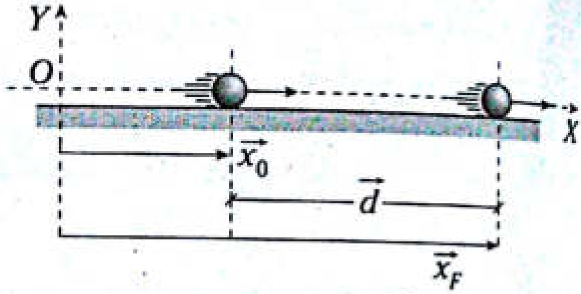


Notamos del gráfico anterior:

$$e_{AC}=L_{AB}+L_{BC}$$
$$e_{AC}=(5+3)+3$$
$$e_{AC}=11\text{ m}$$

Desplazamiento ($\vec{d}$)

Es un vector que mide el cambio de posición del móvil.



Del gráfico, se observa que $\vec{x}_F$ es la resultante entre $\vec{x}_0$ y $\vec{d}$.

$$\vec{x}_0+\vec{d}=\vec{x}_F$$

$$\boxed{\vec{d}=\vec{x}_F-\vec{x}_0}$$

$$\boxed{\vec{d}=\Delta\vec{x}}$$ (desplazamiento o cambio de posición)

Distancia (d)

Viene a ser el módulo del desplazamiento, es decir, la longitud del segmento que une la posición inicial y final.

$$\boxed{d=|\vec{d}|}$$

En el ejemplo de recorrido, 1 d_{AC}=5 m, que es menor al recorrido de 11 m.

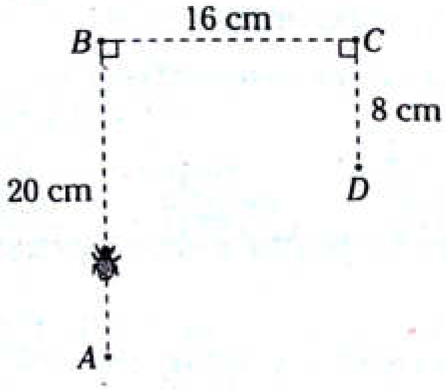
OBSERVACIÓN

En todo movimiento se verifica que el recorrido es mayor o igual a la distancia.

$$\boxed{e\geq d}$$

Aplicación 1

Un escarabajo se mueve desde A hasta D siguiendo la trayectoria mostrada. Halle el recorrido y la distancia.



Resolución

Sabemos que el recorrido es igual a la longitud de la trayectoria.

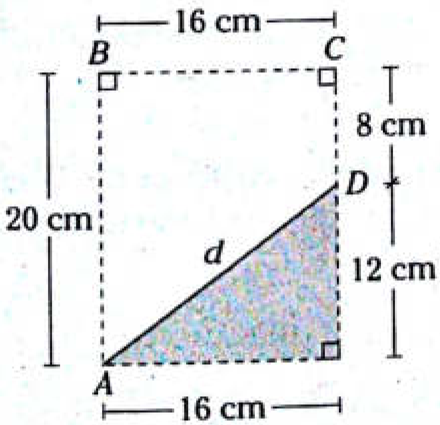
$e=AB+BC+CD$

Reemplazamos.

$e=20+16+8$

$\therefore \quad e=44$ cm

Para hallar la distancia, debemos trazar un segmento rectilíneo desde el inicio al final.



En el ⊿, aplicamos el teorema de Pitágoras.

$d=\sqrt{12^2+16^2}$

$\therefore \quad d=20$ cm

2. Relatividad del movimiento mecánico

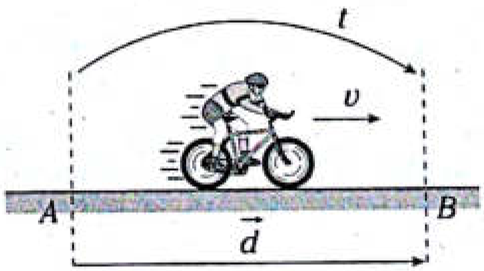
Observamos.

Respecto a Hugo, Luis no cambia de posición, es decir, no se mueve. En cambio, respecto a Paco, Luis se mueve con el camión.

Como el movimiento mecánico de un cuerpo depende de quién lo observa, se dice que es relativo.

Velocidad $(\vec{v})$

Es el vector que mide con qué ritmo el móvil va cambiando de posición.



$\boxed{\vec{v}=\frac{\vec{d}}{t}}$ su módulo se denomina rapidez: $\boxed{v=\frac{d}{t}}$

Unidad de medida: m/s; km/h; cm/s

NOTA

$1\frac{km}{h} <> \frac{5}{18}$ m/s

Aplicación 2

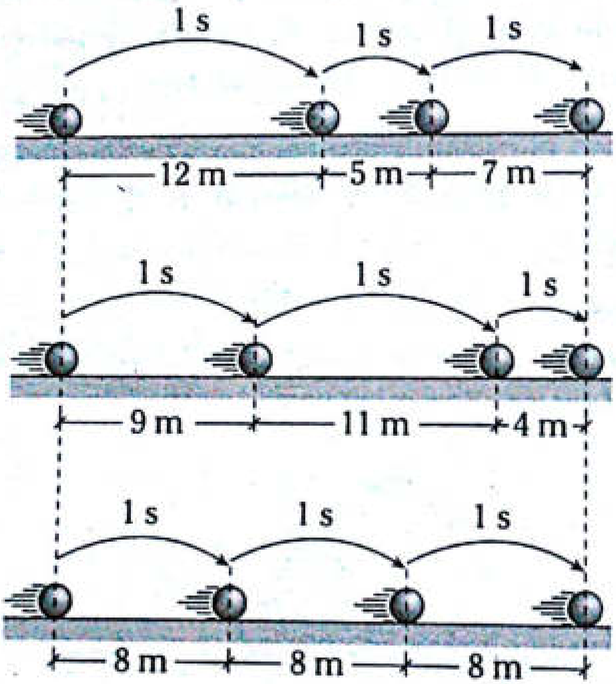
Ahora, medimos el tiempo y la distancia que recorre un móvil, obteniendo los siguientes datos: $d=24$ m y $t=3$ s

$$\rightarrow \quad v=\frac{d}{t}=\frac{24\text{ m}}{3\text{ s}}$$

$$\therefore \quad v=8\text{ m/s}$$

¿Cuál es el significado?

Veamos qué puede suceder durante los 3 s.



En los dos primeros casos, segundo a segundo, durante los 3 s no realizan distancias regulares, por lo cual en 1 s adicional no se puede precisar la distancia; mientras que en el tercer caso, en cada segundo, la distancia es 8 m, pero si dejamos pasar 1 s más y si el movimiento conserva sus características, entonces la distancia será 8 m. A continuación, desarrollaremos el análisis del movimiento del tercer caso.

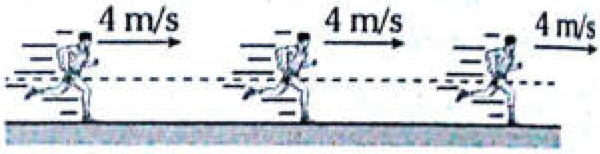
3. Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

Es el único movimiento en el cual la velocidad es constante.

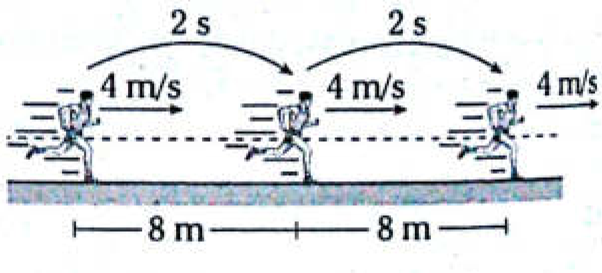
3.1. CARACTERÍSTICAS

- La trayectoria es rectilínea.

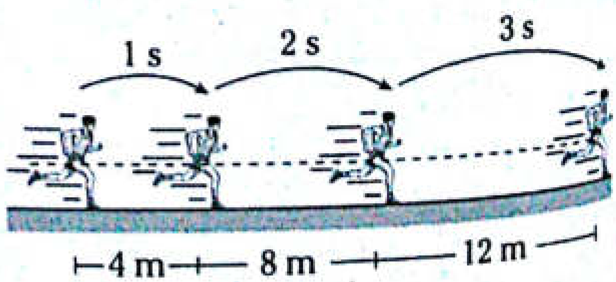
- El módulo y la dirección de la velocidad se mantienen constantes.



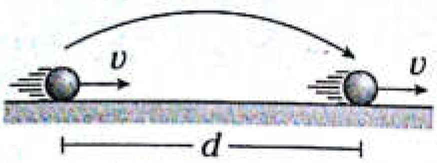
- En intervalos de tiempos iguales, los recorridos son iguales.



- Los recorridos son directamente proporcionales a los tiempos transcurridos.



3.2. ECUACIÓN DEL MRU



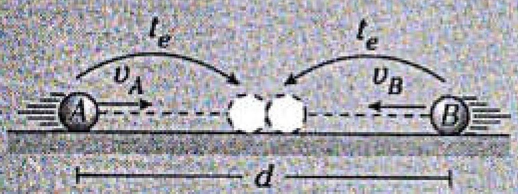
Se verifica que

$$\boxed{d=v\cdot t}$$

NOTA

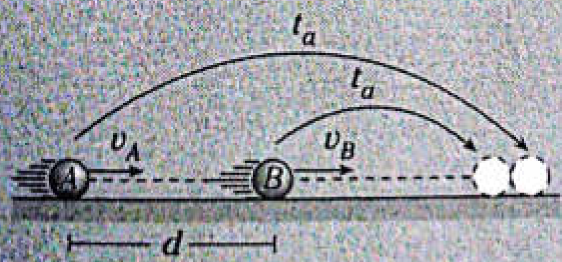
Para el MRU se verifica lo siguiente:

- Tiempo de encuentro (t_e)



$$t_e=\frac{d}{v_A+v_B}$$

- Tiempo de alcance (t_a)

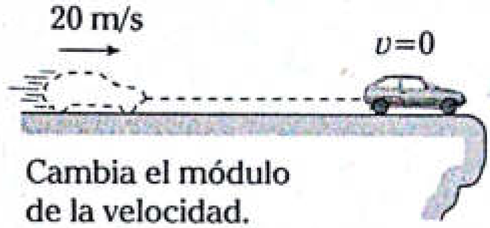


$$t_a=\frac{d}{v_A-v_B}\ ;\ v_A>v_B$$

4. Aceleración ($\vec{a}$)

Sabemos que durante su movimiento, un móvil puede cambiar su velocidad en módulo, dirección o ambos aspectos.

Por ejemplo

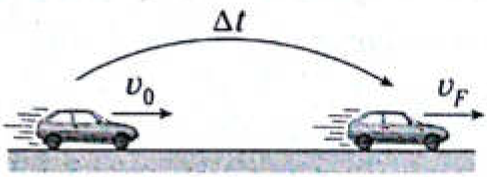


Cambia el módulo de la velocidad.

Cambia la dirección de la velocidad.

Para el estudio de este fenómeno se emplea una magnitud física vectorial denominada aceleración ($\vec{a}$), la cual nos expresa el ritmo de cambio de la velocidad.

Matemáticamente



$$\vec{a}=\frac{\vec{v}_F-\vec{v}_0}{\Delta t}$$

$$\vec{a}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

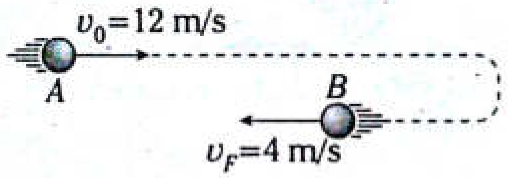
donde

- $\vec{v}_0$: velocidad inicial
- $\vec{v}_F$: velocidad final
- $\Delta\vec{v}$: variación o cambio de la velocidad
- Δt: intervalo de tiempo o tiempo transcurrido

Unidad de medida: $\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Aplicación 3

Una partícula se mueve como se muestra. Halle su aceleración si el tiempo que le toma ir desde *A* hacia *B* es 4 s.



Resolución

Por definición

$$\vec{a}=\frac{\vec{v}_F-\vec{v}_0}{\Delta t} \qquad (*)$$

Para vectores horizontales se considera que los signos + y – indican dirección, hacia la derecha y hacia la izquierda, respectivamente.

En (*)

$$\vec{a}=\frac{-4-(+12)}{4}$$

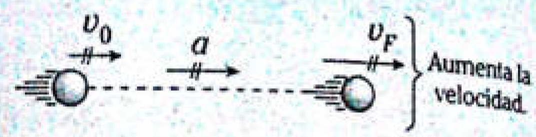
$$\rightarrow \quad \vec{a}=-\frac{16}{4}$$

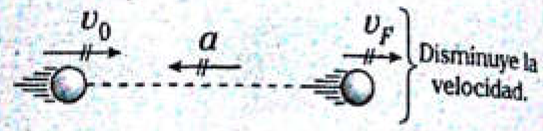
$$\therefore \quad \vec{a}=-4 \text{ m/s}^2$$

El signo – indica que el vector $\vec{a}$ es horizontal y apunta hacia la izquierda.

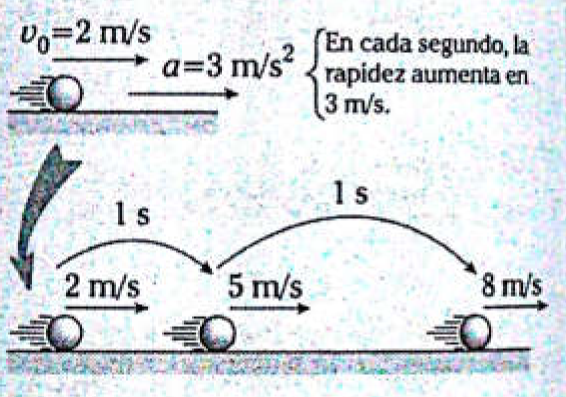
Observación

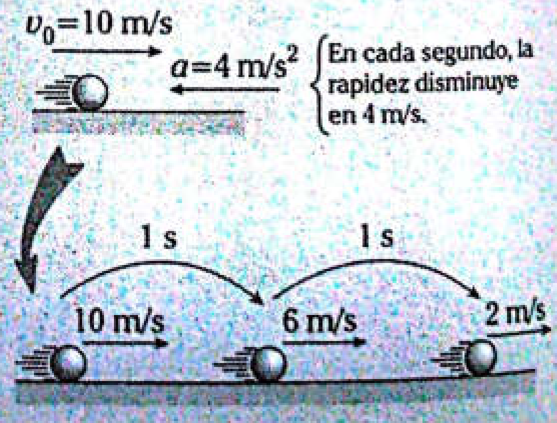
1. En un movimiento rectilíneo, la velocidad y la aceleración son paralelas.





2. En un movimiento rectilíneo con aceleración constante, el valor numérico de la aceleración indica el cambio de rapidez por unidad de tiempo.





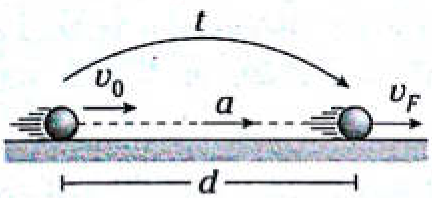
5. Movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV)

Es aquel movimiento mecánico que desarrolla un cuerpo describiendo una trayectoria rectilínea y experimentando una aceleración constante.

5.1. CARACTERÍSTICAS

- La trayectoria es rectilínea.
- La aceleración $(\vec{a})$ es constante, en módulo y dirección.
- En intervalos de tiempos iguales, los cambios de velocidad son iguales.

5.2. ECUACIONES DEL MRUV



$$\boxed{v_F = v_0 \pm at}$$

$$\boxed{d = \left(\frac{v_0 + v_F}{2}\right) \cdot t}$$

$$\boxed{v_F^2 = v_0^2 \pm 2ad}$$

$$\boxed{d = v_0 \cdot t \pm \frac{at^2}{2}}$$

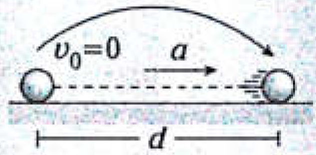
donde

- v_0: rapidez inicial
- v_F: rapidez final
- d: distancia
- a: aceleración
- t: intervalo de tiempo
- (+): cuando su rapidez aumenta
- (–): cuando su rapidez disminuye

Observación

1. Si un cuerpo inicia un MRUV desde el reposo, en el primer segundo de su movimiento su recorrido es numéricamente igual a la mitad del valor de la aceleración (a).

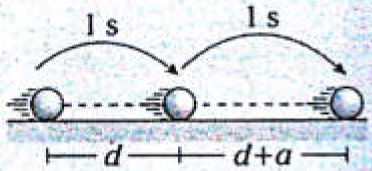
   1 s: primer segundo

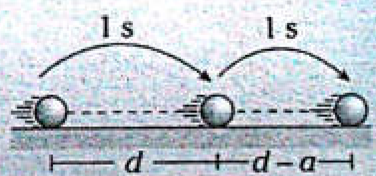
   $$\boxed{d = \frac{a}{2}}$$

2. La diferencia de los recorridos de dos segundos consecutivos es igual al valor de la aceleración (a).

   Si la rapidez va aumentando

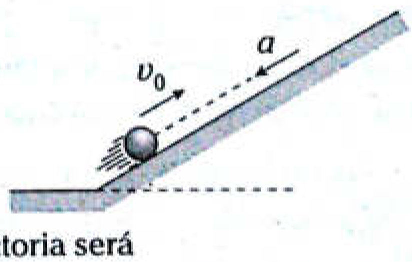
   

   Si la rapidez va disminuyendo

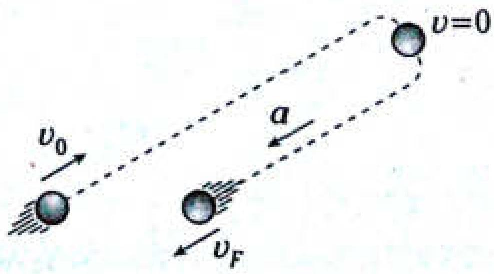
   

5.3. ECUACIONES VECTORIALES DEL MRUV

Consideremos que una pequeña esfera se lanza hacia arriba sobre un plano inclinado de manera que realiza un MRUV.



Su trayectoria será



Como se ve en una parte de la trayectoria, la rapidez disminuye y luego, en otra parte, esta aumenta. Por lo cual, las ecuaciones que hemos planteado en el MRUV (ecuaciones escalares del MRUV) no se pueden usar para analizar este movimiento de inicio a fin. Pero se verifica que sí se puede analizar este movimiento con el uso de las ecuaciones vectoriales del MRUV.

$$\vec{v}_F = \vec{v}_0 + \vec{a}\cdot t$$

$$\vec{d} = \left(\frac{\vec{v}_0 + \vec{v}_F}{2}\right)\cdot t$$

$$\vec{d} = \vec{v}_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot\vec{a}\cdot t^2$$

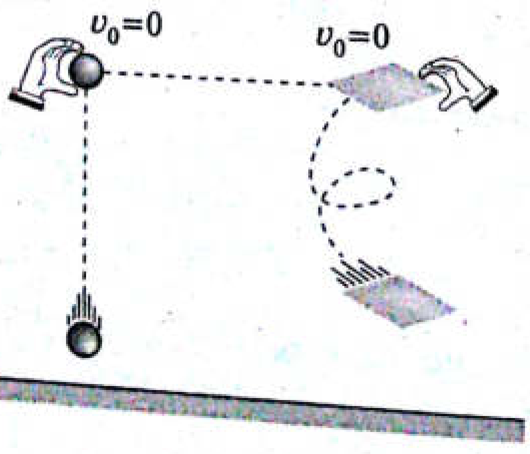
A cada vector, $\vec{v}_0$, $\vec{v}_F$, $\vec{d}$ y $\vec{a}$, se le asocia un signo + o – para indicar la dirección. Como todos estos vectores son paralelos, se considera positiva la dirección de uno de ellos y negativa, la dirección opuesta.

6. Caída libre y movimiento vertical de caída libre (MVCL)

Al soltar desde una misma altura y en forma simultánea una pequeña esfera de metal y una hoja de papel, se verifica que la esfera llega primero al piso. ¿Por qué? Si su respuesta es porque la esfera pesa más, este tema nos hará ver que a veces el sentido común nos puede engañar.

6.1. CAÍDA LIBRE

Soltamos de una misma altura, y en forma simultánea, una esfera de metal y una hoja de papel.



La esfera desciende describiendo una trayectoria rectilínea y llega primero al piso; mientras que la hoja de papel también desciende pero describiendo una trayectoria curvilínea y empleando mayor tiempo en llegar al piso.

¿Por qué ocurren estas diferencias?

Se deben a la presencia del aire. El aire ofrece una resistencia (oposición) sobre el papel en movimiento y el efecto es el retardo del movimiento y la realización de una trayectoria curvilínea.

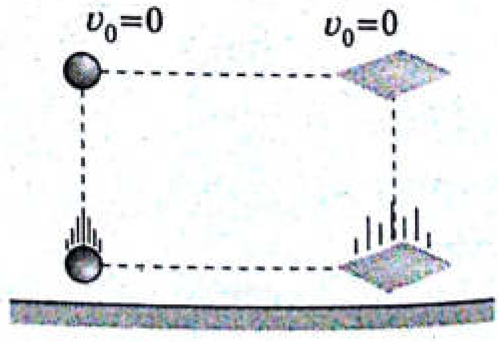
La resistencia del aire también actúa sobre la esfera en movimiento, pero su efecto es menor debido a su forma geométrica.

¿Qué sucede si despreciamos la resistencia del aire?

Sería como quitar el aire de la región donde se mueven los cuerpos, entonces estaríamos asumiendo que los cuerpos se mueven en el vacío.

Al existir un vacío, el movimiento que experimentan los cuerpos se debe solo a la atracción terrestre, entonces decimos que los cuerpos experimentan un movimiento de caída libre.

En caída libre, la esfera de metal y la hoja de papel que estamos analizando describen una trayectoria rectilínea y, además, llegan al piso simultáneamente.

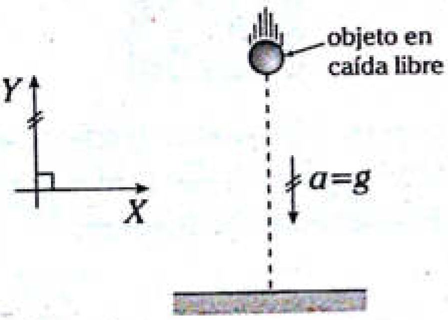


Conclusión

Un cuerpo está en caída libre si su movimiento se debe solo a la atracción terrestre.

> **NOTA**
> No se puede evitar la resistencia del aire. Pero para monedas, canicas, piedras, etc., en movimiento, la resistencia del aire es despreciable. Entonces al lanzar o soltar estos objetos, se les puede considerar en caída libre.

Se verifica que todo cuerpo en caída libre, sin importar su masa, presenta la misma aceleración. Esta aceleración se conoce como aceleración de la gravedad $(\vec{g})$.



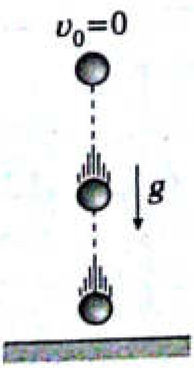
$$\boxed{\vec{g}=-9{,}81\hat{\jmath}\ \mathrm{m/s^2}}$$

Se puede considerar, en forma práctica, que

$$\boxed{\vec{g}=10\ \mathrm{m/s^2}\ (\downarrow)}$$

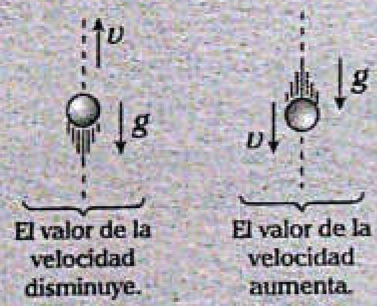
6.2. MOVIMIENTO VERTICAL DE CAÍDA LIBRE (MVCL)

Es aquel movimiento mecánico donde el cuerpo que lo experimenta está en caída libre y describe una trayectoria rectilínea y vertical.

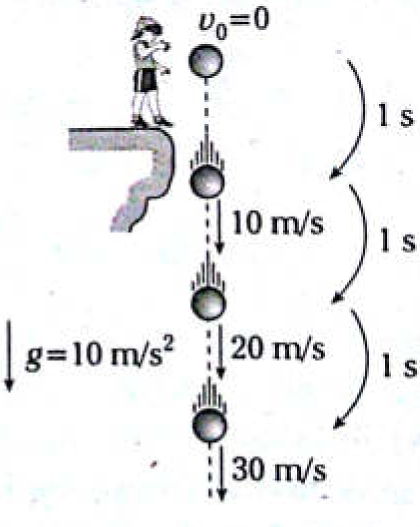


Si durante su movimiento, la altura a la que se encuentra el cuerpo es muy pequeña comparada con el radio de la tierra R_T ($R_T \approx 6400$ km), entonces $\vec{g}$ se considera que es constante. Así que el MVCL es un movimiento rectilíneo y con aceleración constante, o sea, es un MRUV.

Así que todas las características y ecuaciones que se cumplen para el MRUV son también válidas en el MVCL.

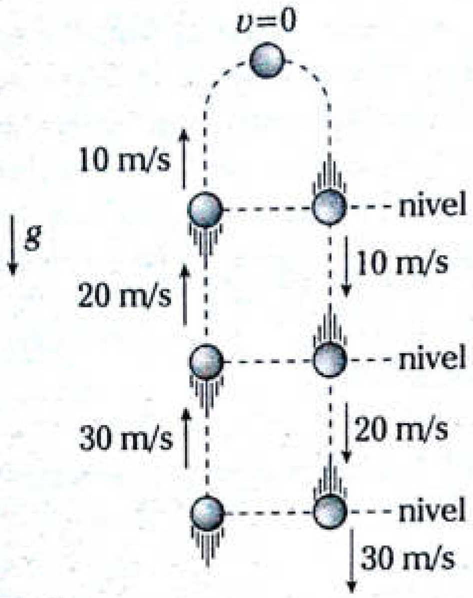
> **OBSERVACIÓN**
> Si un cuerpo asciende, el valor de su velocidad disminuye; si desciende, su rapidez aumenta.
>
> 
>

Con respecto a la velocidad, se observa lo siguiente:



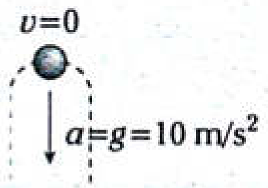
Cada segundo, la velocidad cambia en 10 m/s (el valor de $\vec{g}$).

Además



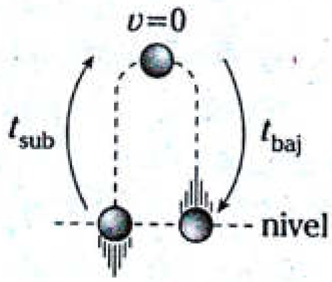
Para cada nivel, la rapidez de subida y de bajada son iguales.

Debe notar que cuando un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba y alcanza su altura máxima; en ese instante su velocidad es nula, pero no su aceleración.



Características

1. Respecto al tiempo se verifica



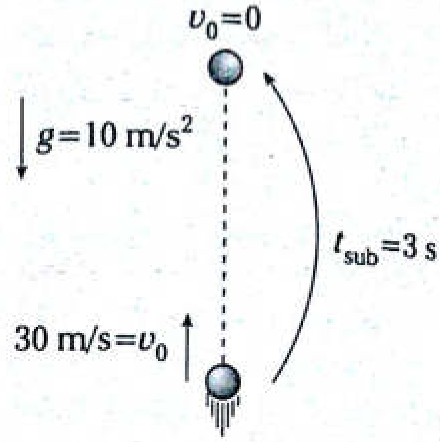
donde

- t_{sub}: tiempo de subida
- t_{baj}: tiempo de bajada

Para un cierto nivel, el tiempo de subida y el de bajada son iguales.

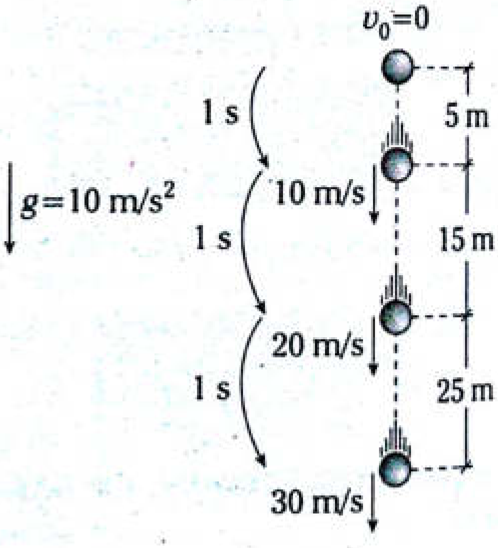
$$\boxed{t_{sub}=t_{baj}}$$

Además

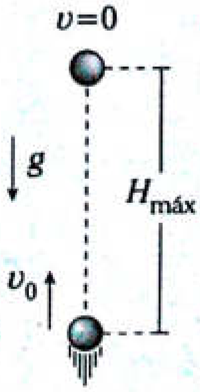


$$\boxed{t_{sub}=\frac{v_0}{g}}$$

2. Si un cuerpo se suelta desde cierta altura, se verifica, para los recorridos que hace segundo a segundo, lo siguiente:



3. La altura máxima ($H_{máx}$) que alcanza un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba se obtiene de la siguiente expresión:



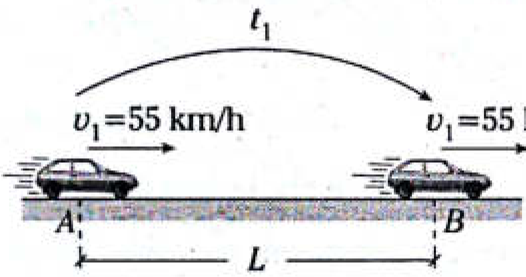
$$\boxed{H_{máx}=\frac{v_0^2}{2g}}$$

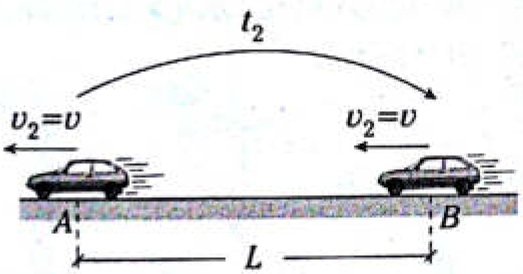
Problema N.° 1

Sobre una pista rectilínea se encuentran dos puntos (*A* y *B*) separados *L* kilómetros. Un auto va de *A* hasta *B* con una rapidez constante de 55 km/h; al llegar a *B*, inmediatamente regresa con rapidez v. Si consideramos la ida y la vuelta, para que la rapidez promedio (rapidez media) sea de 49,5 km/h, indique el valor de v, en km/h.

Resolución

Grafiquemos.





Por dato

$$v_m=49{,}5 \text{ km/h}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\text{recorrido}}{\text{tiempo}}=49{,}5$$

$$\frac{2L}{t_1+t_2}=49{,}5 \qquad \text{(I)}$$

Para el movimiento de *A* hasta *B* (MRU)

$$d_1=v_1t_1$$

$$L=55t_1$$

$$\rightarrow \quad t_1=\frac{L}{55} \qquad \text{(II)}$$

Para el movimiento de *B* hasta *A* (MRU)

$$d_2=v_2t_2$$

$$L=vt_2$$

$$\rightarrow \quad t_2=\frac{L}{v} \qquad \text{(III)}$$

Reemplazamos (II) y (III) en (I).

$$\frac{2L}{\frac{L}{55}+\frac{L}{v}}=49{,}5$$

$$\rightarrow \quad \frac{2L}{\frac{vL+55L}{55v}}=49{,}5$$

$$\frac{2\cancel{L}\cdot 55v}{(v+55)\cancel{L}}=49{,}5$$

$$\rightarrow \quad 2\cdot 55\cdot v=49{,}5(v+55)$$

$$2\cdot 55\cdot v=49{,}5v+49{,}5\cdot 55$$

$$(110-49{,}5)v=49{,}5\cdot 55$$

$$\rightarrow \quad v=\frac{49{,}5\cdot 55}{60{,}5}$$

$$\therefore \quad v=45 \text{ km/h}$$

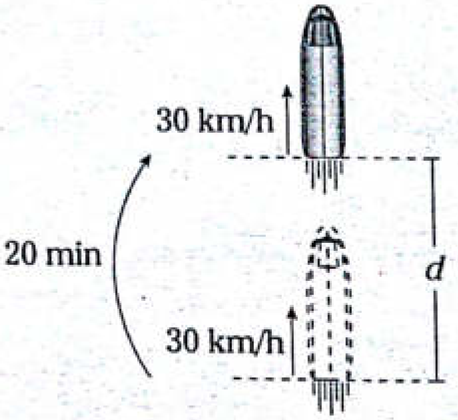
Problema N.° 2

Sale un tren hacia el norte con velocidad de 30 km/h; luego de 20 min sale otro también hacia el norte y con la misma velocidad. ¿Con qué velocidad, en km/h, debe moverse un tren que viaja de norte a sur para que demore 12 min desde que se encuentra con el primer tren hasta que se encuentra con el segundo?

Resolución

Grafiquemos según la información.

Primer tren que se dirige hacia el norte.



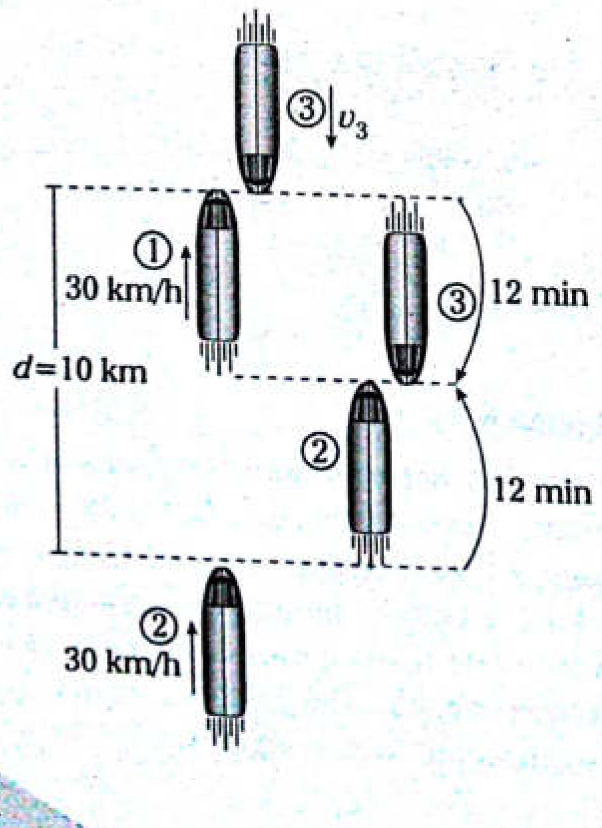
Del MRU

$$d=vt=\left(30\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)\times(20\text{ min})$$

pero 1 h <> 60 min

$$\rightarrow\quad d=30\frac{\text{km}}{60\ \cancel{\text{min}}}\times 20\ \cancel{\text{min}}\quad\rightarrow\quad d=10\text{ km}$$

Luego, como el segundo tren tiene la misma velocidad, la distancia entre estos dos se mantiene constante. Consideremos al tercer tren que se dirige de norte a sur.



Nos piden v_3.

Se observa que el tercer tren se cruza con el primer tren y tarda 12 min en cruzarse con el segundo tren, entonces

$$t=12\text{ min}=t_{\text{encuentro}}$$

$$12\text{ min}\times\frac{1\text{ h}}{60\text{ min}}=\frac{d}{v_3+v_2}$$

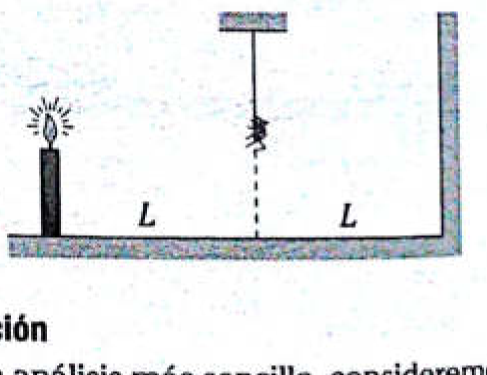
$$\frac{1}{5}=\frac{10}{v_3+30}$$

$$v_3+30=50$$

$$\therefore\quad v_3=20\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Problema N.° 3

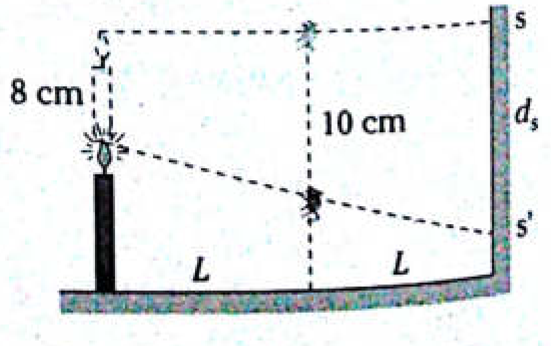
Se muestra una vela que se consume a razón de 8 cm/min y una araña que desciende realizando un MRU con 10 cm/min. Calcule la rapidez de su sombra en la pared.



Resolución

Para un análisis más sencillo, consideremos que transcurre 1 min, con lo cual la vela desciende 8 cm y la araña 10 cm.

Colocamos los datos.



Notamos que se forma un trapecio y los 10 cm se calcula como base media.

$$10=\frac{8+d_s}{2}$$

$\rightarrow \quad d_s=12$ cm

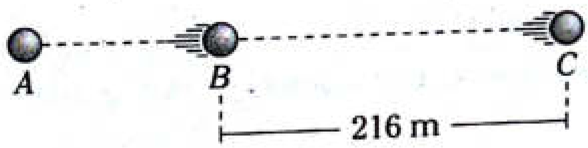
Nos piden

$$v_s=\frac{d_s}{t}$$

$$\therefore \quad v_s=\frac{12\text{ cm}}{1\text{ min}}=12\text{ cm/min}$$

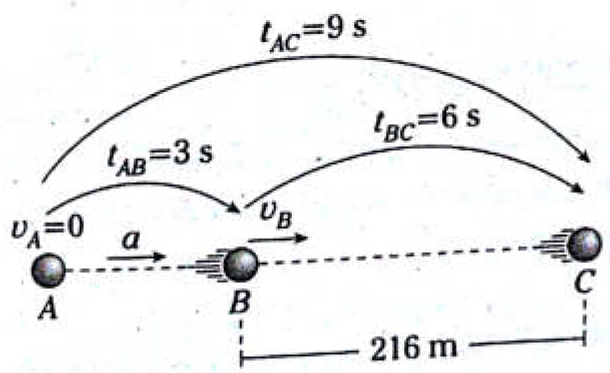
Problema N.° 4

Una partícula realiza un MRUV como se muestra. Si su velocidad en A es nula y los tiempos desde A hasta B y desde B hasta C son 3 s y 6 s, respectivamente, halle su rapidez en B.



Resolución

Colocamos los datos.



Nos piden v_B.

Analizamos el gráfico en el tramo AB.

$$v_F=v_0+at$$

$$\rightarrow \quad v_B=v_A+at_{AB}$$

Reemplazamos.

$$v_B=0+a\cdot 3$$

$$\rightarrow \quad v_B=3a \qquad \text{(I)}$$

Para determinar v_B se requiere conocer la aceleración $(\vec{a})$, para ello vamos a emplear el dato del gráfico.

$$d_{AC}=d_{AB}+\underbrace{d_{BC}}$$

$$d_{AC}=d_{AB}+216\ldots(\alpha)$$

En el tramo AB

$$d=v_0t+\frac{at^2}{2}$$

$$\rightarrow \quad d_{AB}=0\cdot t_{AB}+\frac{at^2{}_{AB}}{2}$$

$$d_{AB}=\frac{a(3)^2}{2}$$

$$\rightarrow \quad d_{AB}=\frac{9a}{2} \qquad \text{(II)}$$

En el tramo AC

$$d=v_0t+\frac{at^2}{2}$$

$$\rightarrow \quad d_{AC}=0t_{AC}+\frac{at^2{}_{AC}}{2}$$

$$d_{AC}=\frac{a(9)^2}{2}=\frac{81a}{2} \qquad \text{(III)}$$

Reemplazamos (II) y (III) en (α).

$$\frac{81a}{2}=9\frac{a}{2}+216$$

$$\frac{72a}{2}=216$$

$$\rightarrow \quad a=6\text{ m/s}^2$$

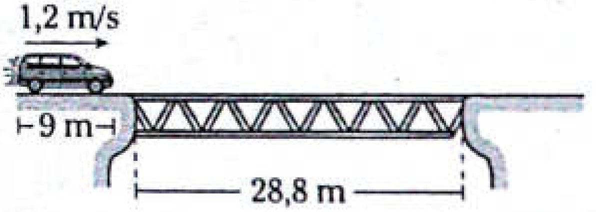
En (I)

$$v_B=3\times 6$$

$$\therefore \quad v_B=18\text{ m/s}$$

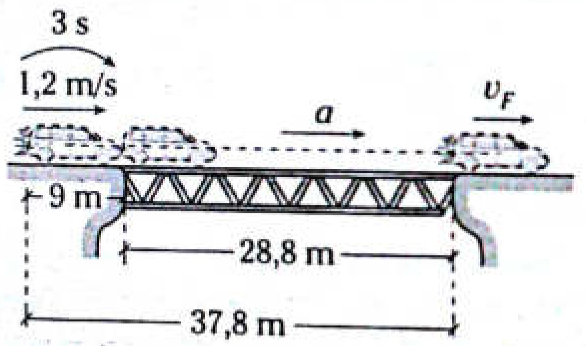
Problema N.° 5

La camioneta mostrada realiza un MRUV. A partir del instante mostrado, demora 3 s en ingresar completamente al puente. Determine su rapidez al terminar de cruzar el puente.



Resolución

Colocamos los datos.



Nos piden v_F.

En el tramo desde que empieza a ingresar al puente hasta que termina de salir de este tenemos que

$$v_F^2=v_0^2+2ad$$

Reemplazamos.

$$v_F^2=1{,}2^2+2a(37{,}8)$$

$$\rightarrow\quad v_F^2=1{,}44+75{,}6a \qquad \text{(I)}$$

En el tramo desde que empieza a ingresar al puente hasta que termina de ingresar a este tenemos que

$$d=v_0t+\frac{at^2}{2}$$

Reemplazamos.

$$9=1{,}2\times 3+\frac{a3^2}{2}$$

$$5{,}4=\frac{9}{2}a \rightarrow 10{,}8=9a$$

$$\rightarrow\quad a=1{,}2\ \text{m/s}^2 \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I).

$$v_F^2=1{,}44+75{,}6(1{,}2)$$

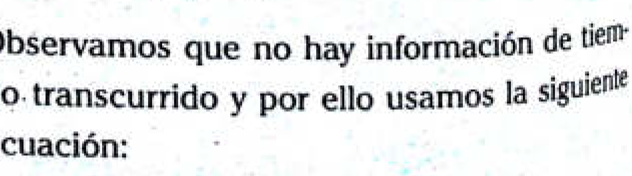
$$\therefore\quad v_F=9{,}6\ \text{m/s}$$

Problema N.° 6

Un móvil inicia su movimiento con aceleración constante de 6 m/s^2 durante cierto tiempo para luego desacelerar con 8 m/s^2 hasta detenerse. Calcule su máxima velocidad si el recorrido total es 2100 m.

Resolución

Graficamos las dos etapas.



Nos piden $v_{\text{máx}}=v_B$.

Observamos que no hay información de tiempo transcurrido y por ello usamos la siguiente ecuación:

$$v_F{}^2=v_0{}^2\pm 2ad$$

$$A\rightarrow B:\ v_B^2=0+2\cdot 6\cdot d_1 \rightarrow d_1=\frac{v_B^2}{12}$$

$$B\rightarrow C:\ 0=v_B^2-2\cdot 8\cdot d_2 \rightarrow d_2=\frac{v_B^2}{16}$$

Además

$$d_1+d_2=2100$$

$$\rightarrow \quad \frac{v_B^2}{12}+\frac{v_B^2}{16}=2100$$

$$\frac{7v_B^2}{48}=2100$$

$\therefore \quad v_B=120$ m/s (es máxima)

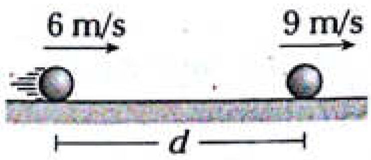
Problema N.º 7

Se muestran dos móviles: A con MRU y B con MRUV. Calcule la mínima distancia entre los móviles.

Resolución

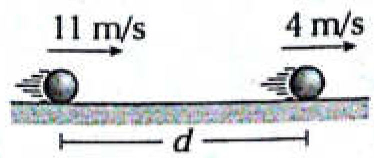
Recordemos que

- Si el móvil que se encuentra detrás presenta menor velocidad que el móvil de adelante, la separación entre ellos aumenta.



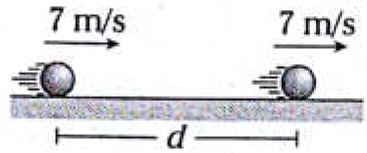
d: aumenta

- Si el móvil que se encuentra detrás presenta mayor velocidad que el móvil que se encuentra adelante, la separación entre ellos disminuye.



d: disminuye

- Si la velocidad de ambos móviles es la misma, entonces la separación entre ellos no cambia.



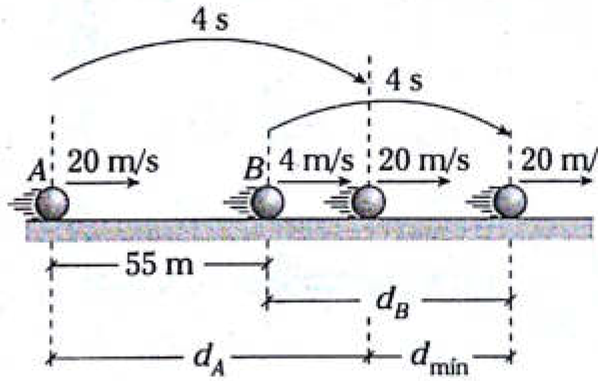
d: no cambia

Para nuestro caso, el móvil A es más rápido que B, entonces se le acerca. Pero a su vez B acelera y en algún momento será más rápido que A, y por estar delante la separación crecerá. Así es que la menor separación entre ellos ocurre en el instante en que

$$v_A=v_B \rightarrow 20=v_0+at$$

$$20=4+4t \rightarrow t=4 \text{ s}$$

Entonces la distancia entre A y B será mínima luego de 4 s.



Nos piden $d_{\text{mín}}$.

Del gráfico, establecemos la siguiente relación entre los segmentos:

$$\underbrace{d_A} + d_{\text{mín}} = 55 + \underbrace{d_B}$$

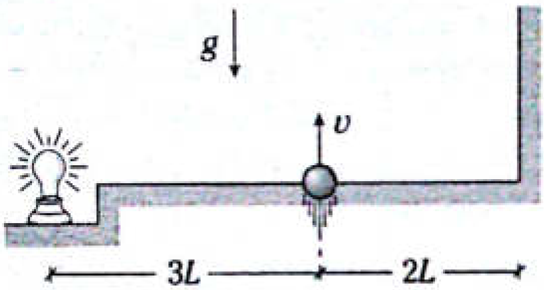
$$20(4) + d_{\text{mín}} = 55+\left(\frac{4+20}{2}\right)4$$

$$80 + d_{\text{mín}} = 55+48$$

$\therefore \quad d_{\text{mín}}=23$ m

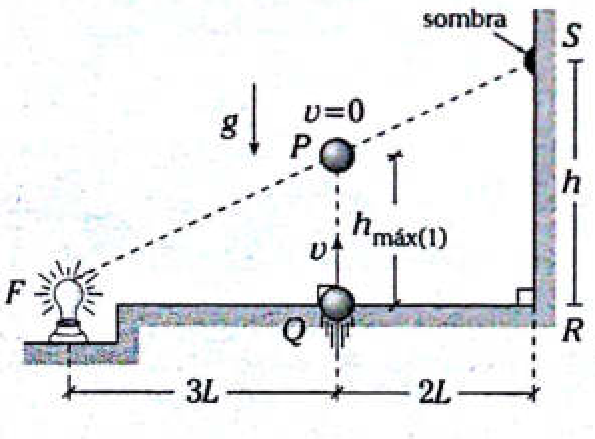
Problema N.° 8

Un proyectil es lanzado desde el piso verticalmente hacia arriba, como se muestra en el gráfico, y la altura máxima que alcanza su sombra en la pared es h. Si el proyectil se lanzara con el triple de rapidez, la altura máxima que alcanzaría su sombra en la pared sería H. Halle H/h.



Resolución

Para el primer caso



Se observan dos triángulos rectángulos semejantes, donde se cumple que los lados que se oponen a ángulos iguales son proporcionales.

$$\triangle FSR \sim \triangle FPQ$$

$$\frac{h}{5L} = \frac{h_{máx(1)}}{3L}$$

$$\rightarrow \quad h = \frac{5h_{máx(1)}}{3} \qquad \text{(I)}$$

Sabemos que

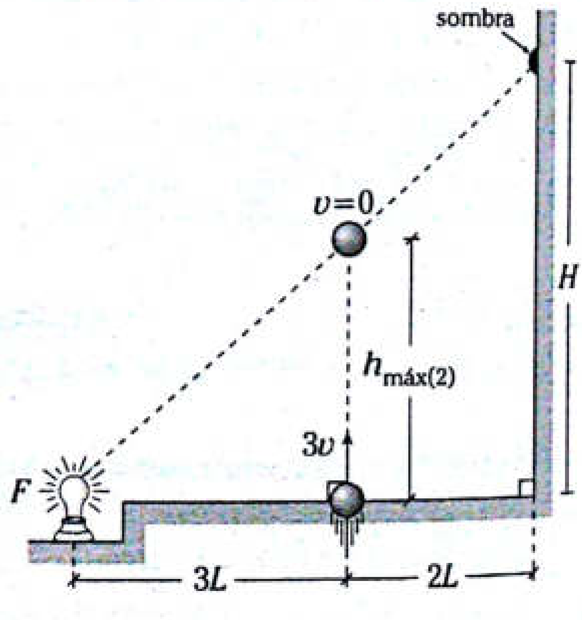
$$h_{máx(1)} = \frac{v^2}{2g} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I).

$$h = \frac{5}{3} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

$$\rightarrow \quad h = \frac{5}{6} \cdot \frac{v^2}{g}$$

Para el segundo caso



Se observan dos triángulos rectángulos semejantes, similar al caso anterior.

$$\frac{H}{5L} = \frac{h_{máx(2)}}{3L}$$

$$\rightarrow \quad h = \frac{5}{3} h_{máx(2)} \qquad \text{(III)}$$

Sabemos que

$$h_{\,máx(2)} = \frac{(3v)^2}{2g} \qquad \text{(IV)}$$

Reemplazamos (IV) en (III).

$$H=\frac{5}{3}\cdot\frac{9v^2}{2g}$$

$$\rightarrow\quad H=\frac{15}{2}\cdot\frac{v^2}{g}$$

Nos piden

$$\frac{H}{h}=\frac{\frac{15}{2}\cdot\frac{v^2}{g}}{\frac{5}{6}\cdot\frac{v^2}{g}}=\frac{\overset{3}{\cancel{15}}\cdot\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot\underset{1}{\cancel{5}}}$$

$$\therefore\quad \frac{H}{h}=9$$

Problema N.º 9

Se muestra una partícula que realiza un MVCL. Luego de 3 s desde que se lanzó, calcule a qué distancia de P se encuentra el punto de lanzamiento. (g=10 m/s^2).

Resolución

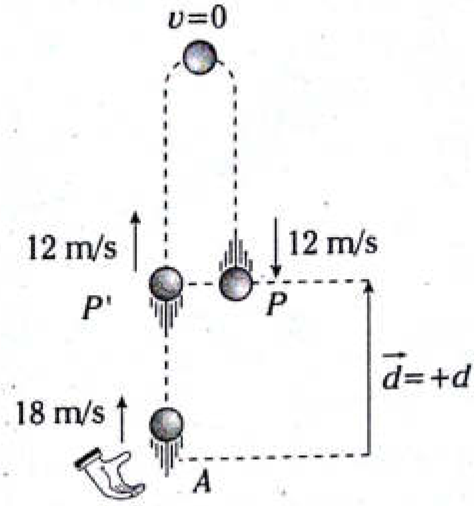
Como en 3 s la velocidad cambia, entonces

$$30\text{ m/s}=\begin{pmatrix}\text{lo que}\\\text{disminuye}\\\text{al subir}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{lo que}\\\text{aumenta}\\\text{al bajar}\end{pmatrix}$$

$$30=v_{\text{lanza}}+12$$

$$\rightarrow\quad v_{\text{lanza}}=18\text{ m/s}$$

Graficamos.



Podemos aplicar entre A y P'.

$$v_F^2=v_0^2-2gd$$

$$12^2=18^2-2\cdot10d$$

$$144=324-20d$$

$$\rightarrow\quad d=9\text{ m}$$

Otra forma

También podemos aplicar la ecuación vectorial.

$$\vec{d}=\left(\frac{\vec{v}_0+\vec{v}_F}{2}\right)t$$

$$+d=\frac{[(+18)+(-12)]}{2}3$$

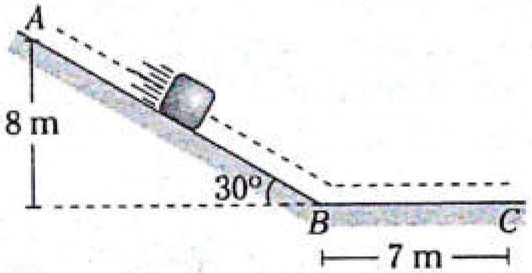
$$=\frac{6}{2}\times3$$

$$\therefore\quad d=9\text{ m}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

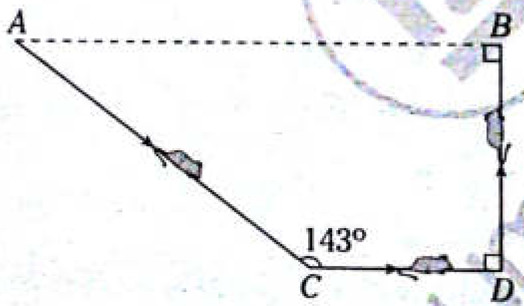
NIVEL BÁSICO

1. Un pequeño bloque realiza su movimiento en la trayectoria *ABC*. Calcule su recorrido.



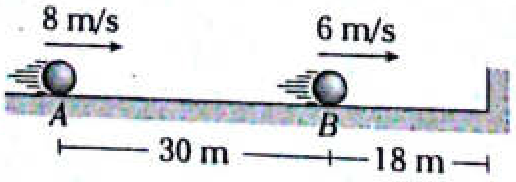
A) 8 m   B) 7 m   C) 15 m
D) 23 m   E) 22 m

2. Se muestra la trayectoria seguida por un roedor. Calcule *e*/*d*, donde *e* y *d* son el recorrido y la distancia, respectivamente, desde *A* hasta *B*. (*CD*=*DB*).



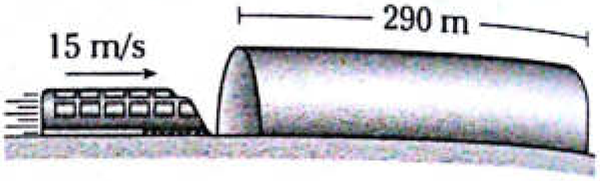
A) 1   B) $\frac{11}{7}$ C) $\frac{7}{14}$
D) $\frac{14}{11}$ E) $\frac{8}{5}$

3. Para los móviles que realizan un MRU, calcule la separación entre ellos en el instante que *B* impacta en el muro.



A) 18 m   B) 15 m   C) 24 m
D) 11 m   E) 12 m

4. Para el tren de 110 m de longitud, calcule el tiempo en que no es posible verlo. Considere un MRU para el tren.

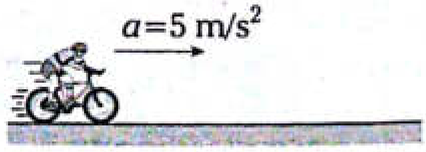


A) 12 s   B) 10 s   C) 14 s
D) 11 s   E) 15 s

5. Para dos móviles *A* y *B*, que se mueven sobre la misma línea realizando un MRU, calcule $\frac{t_1}{t_2}$, donde t_1 es el tiempo de encuentro y t_2 es el tiempo de alcance; ambos para la misma separación inicial. ($v_A=3v_B$).

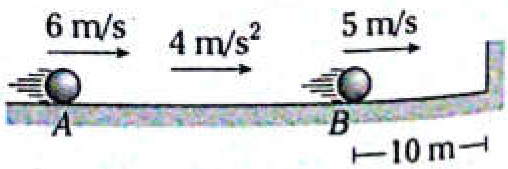
A) 2   B) $\frac{1}{2}$ C) 3
D) $\frac{1}{3}$ E) 4

6. Si el móvil que realiza un MRUV recorre 20 m y logra triplicar su rapidez, calcule su rapidez final.



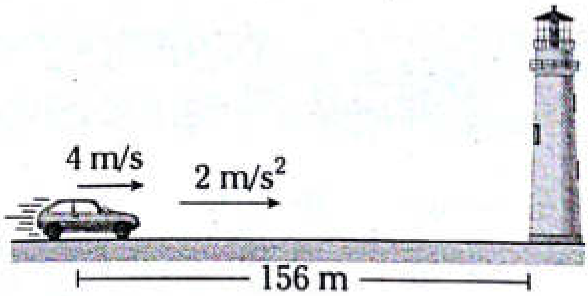
A) 5 m/s   B) 10 m/s   C) 15 m/s
D) 20 m/s   E) 25 m/s

7. En el siguiente gráfico se muestran dos móviles: *A* realiza un MRUV y *B* realiza un MRU. Calcule la rapidez de *A* cuando *B* choque con el muro.



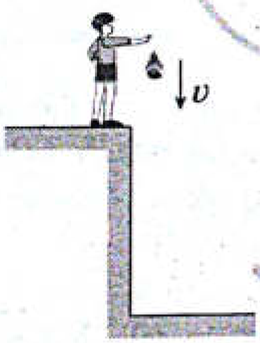
A) 6 m/s   B) 11 m/s   C) 14 m/s
D) 9 m/s   E) 16 m/s

8. En el gráfico, el móvil desarrolla un MRUV. ¿Luego de cuánto tiempo se encuentra a 100 m de la cima del faro de 80 m de altura?



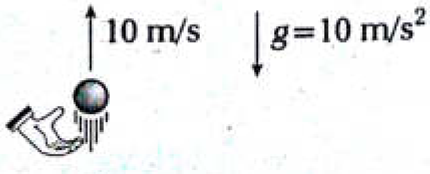
A) 8 s B) 7 s C) 6 s
D) 5 s E) 3 s

9. Se muestra a un niño que lanza desde la azotea una piedra con 6 m/s e impacta en el piso luego de 2 s. Calcule la altura del edificio. ($g=10\ m/s^2$)



A) 20 m B) 32 m C) 18 m
D) 21 m E) 14 m

10. Para la esfera que se lanza en MVCL, calcule a qué distancia se encuentra luego de 3 s respecto al lugar de lanzamiento.



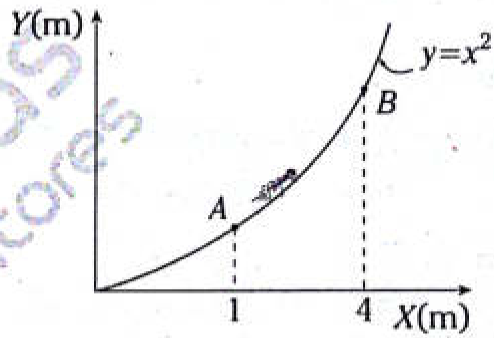
A) 10 m B) 5 m C) 15 m
D) 8 m E) 7 m

NIVEL INTERMEDIO

11. Para una partícula que realiza movimiento circunferencial de radio 2,91 m, calcule el cociente entre el recorrido y el módulo del desplazamiento para media vuelta.

A) π B) $\frac{\pi}{2}$ C) 2π
D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{7}$

12. Una hormiga se mueve en la trayectoria mostrada. Calcule el desplazamiento entre *A* y *B*.

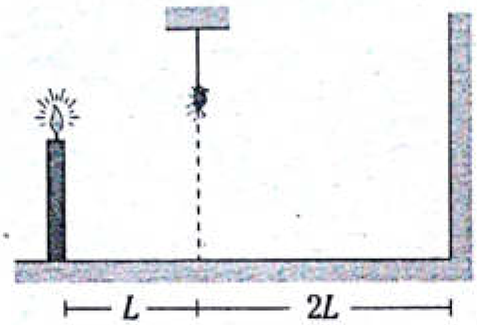


A) (3; 14) m
B) (4; 13) m
C) (3; 15) m
D) (8; 5) m
E) (5; 8) m

13. Se muestran dos vías paralelas: sobre una, un tren realiza un MRU con 24 m/s; y en otra, un ciclista con 4 m/s. Si el tren tapa al ciclista durante 3,5 s, calcule la longitud del tren.

A) 70 m B) 80 m C) 300 m
D) 350 m E) 410 m

14. Se muestra una vela que se consume a razón de 6 cm/min y un insecto que asciende realizando un MRU con 9 cm/min. Calcule la velocidad de su sombra.



A) $12\ \dfrac{\text{cm}}{\text{min}}$

B) $15\ \dfrac{\text{cm}}{\text{min}}$

C) $11\ \dfrac{\text{cm}}{\text{min}}$

D) $39\ \dfrac{\text{cm}}{\text{min}}$

E) $7\ \dfrac{\text{cm}}{\text{min}}$

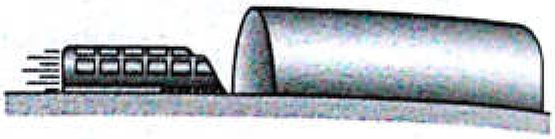
15. Un bote se impulsa con sus motores con una velocidad de 10 m/s de forma perpendicular al cause de un río de 120 m de ancho y cuyas aguas corren a 6 m/s. ¿Cuánto arrastra al bote el río, cuando termina de cruzarlo?

A) 100 m B) 80 m C) 72 m
D) 60 m E) 40 m

16. Un móvil parte del reposo con aceleración constante de 8 m/s^2 para luego desacelerar con 4 m/s^2 y emplea en total 9 s hasta detenerse. Calcule la máxima rapidez del móvil.

A) 12 m/s B) 7 m/s C) 24 m/s
D) 14 m/s E) 10 m/s

17. Se muestra un tren que ingresa al túnel con 10 m/s y al terminar su ingreso presenta una rapidez de 20 m/s con aceleración constante de 3 m/s^2. Calcule su longitud.



A) 50 m B) 60 m C) 80 m
D) 70 m E) 20 m

18. Se tiene un móvil que realiza un MRUV. Si al duplicar su rapidez recorre d_1 y, seguidamente, vuelve a duplicar su rapidez, recorriendo d_2, calcule $\dfrac{d_1}{d_2}$.

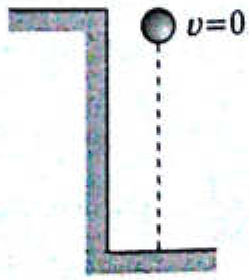
A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{1}{4}$

D) $\dfrac{3}{7}$ E) $\dfrac{8}{11}$

19. Para una partícula que realiza un MVCL, calcule su rapidez de lanzamiento si en el tercer y séptimo segundo realiza el mismo recorrido. ($g=10$ m/s^2).

A) 40 m/s B) 45 m/s C) 35 m/s
D) 25 m/s E) 10 m/s

20. La partícula que se suelta recorre 17 m en el último segundo de su caída libre. Calcule el tiempo que estuvo en MVCL. ($g=10$ m/s^2).



A) 3 s B) 2,2 s C) 3,1 s
D) 3,8 s E) 4,1 s

Cinemática de una partícula en dos dimensiones

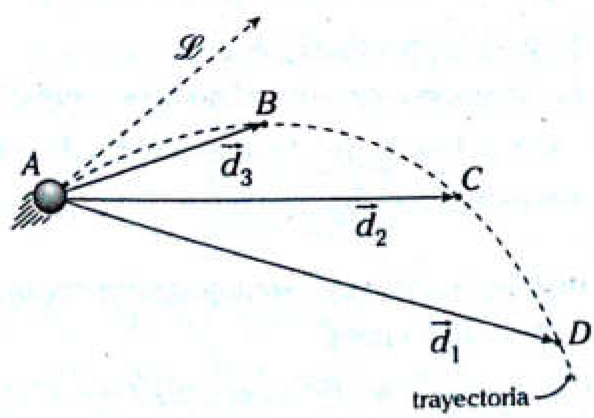
Capítulo IV

Objetivos

- Distinguir las características que presenta el movimiento en dos dimensiones, empleando los conceptos de posición, velocidad y aceleración.
- Aplicar las ecuaciones para el movimiento parabólico de caída libre y el movimiento circunferencial.
- Conocer el método por análisis del movimiento relativo de los cuerpos.

1. Velocidad instantánea

Al examinar el movimiento que describe un cuerpo, notamos que la velocidad media no da una información precisa del movimiento a lo largo del trayecto, debido a ello debemos de considerar tramos cada vez más pequeños.



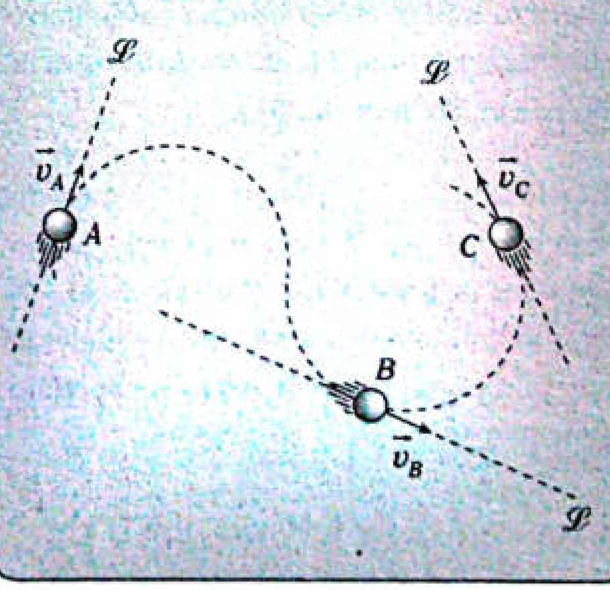
Por lo tanto, la velocidad instantánea en A se calcula así:

$$\boxed{\vec{v}_A = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{d}}{\Delta t}}$$

Es decir, la $\vec{v}_m$ se calcula para un Δt muy pequeño, que es muy próximo a cero.

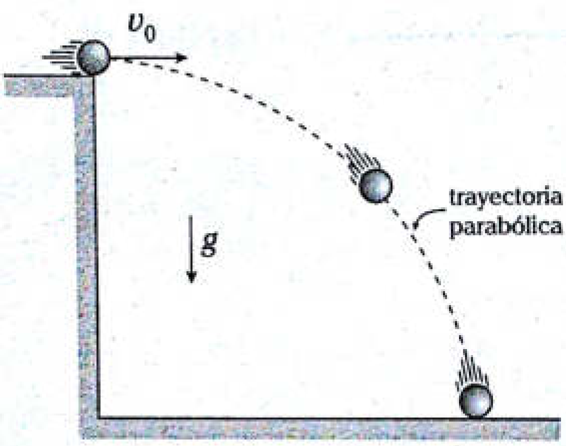
Nota

La dirección de $\mathscr{L}$ es tangente a la trayectoria, por lo cual la velocidad instantánea es tangente a la trayectoria en cada punto.

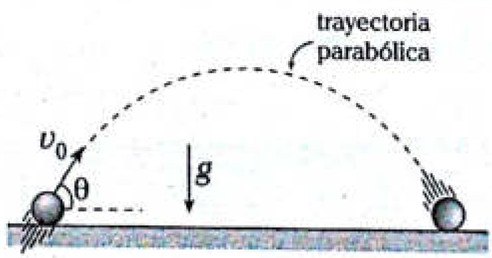


2. Movimiento parabólico de caída libre (MPCL)

Para un cuerpo que se lanza horizontalmente se tiene

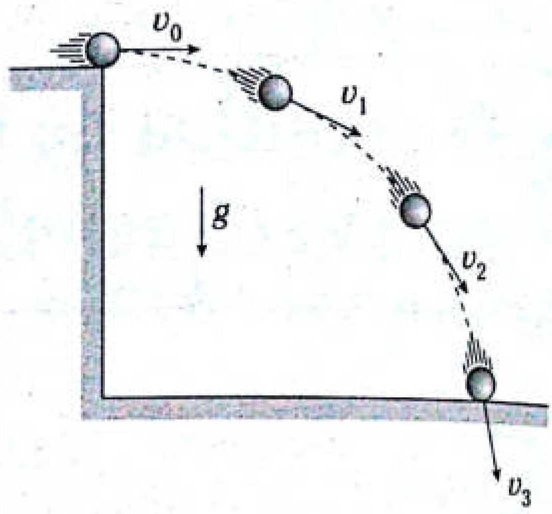


Para un cuerpo que se lanza desde el piso con un cierto ángulo de elevación se tiene

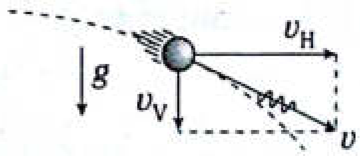


En ambos casos se desprecia la resistencia del aire por lo que el móvil está en caída libre. En ambos casos, el móvil realiza movimiento parabólico de caída libre (MPCL).

El movimiento es curvilíneo, por lo cual debemos recordar que la velocidad del cuerpo es tangente a la trayectoria. Por otro lado, como es un movimiento de caída libre, la aceleración que experimenta el cuerpo es la aceleración de la gravedad ($\vec{g}$).



Describir el movimiento del cuerpo a lo largo de su trayectoria parabólica no es tan sencillo, entonces para facilitar su descripción se sugiere descomponer la velocidad del cuerpo en dos componentes: una componente horizontal (v_H) y otra vertical (v_V).



Luego, se cumple lo siguiente:

- La componente horizontal de la velocidad (v_H) se mantiene constante.
- La componente vertical de la velocidad (v_V) varía debido a que la aceleración de la gravedad ($\vec{g}$) es vertical.

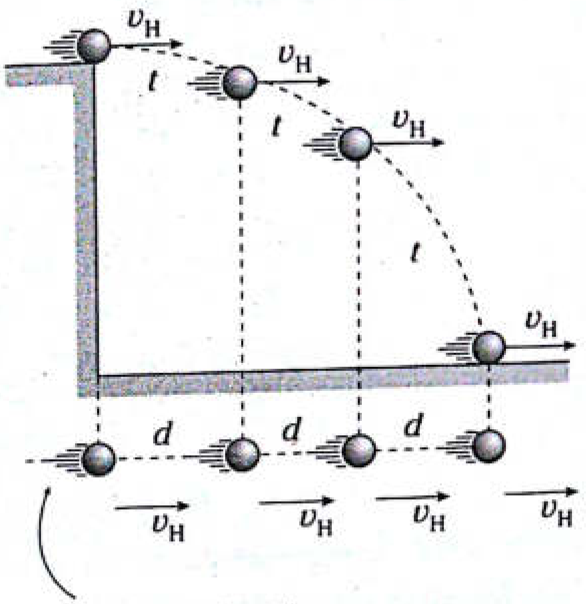
2.1. PROYECCIÓN DEL MOVIMIENTO PARABÓLICO DE CAÍDA LIBRE

La descomposición de la velocidad nos permite analizar el movimiento parabólico del cuerpo en dos direcciones. Para ello realizamos la proyección de este movimiento en la horizontal y en la vertical.

2.1.1. Proyección horizontal

Como la componente horizontal de la velocidad (v_H) se mantiene constante, entonces la proyección horizontal del movimiento parabólico es un movimiento rectilíneo uniforme (MRU) y se verifican sus características.

En intervalos de tiempos iguales, el valor de los desplazamientos horizontales es el mismo.



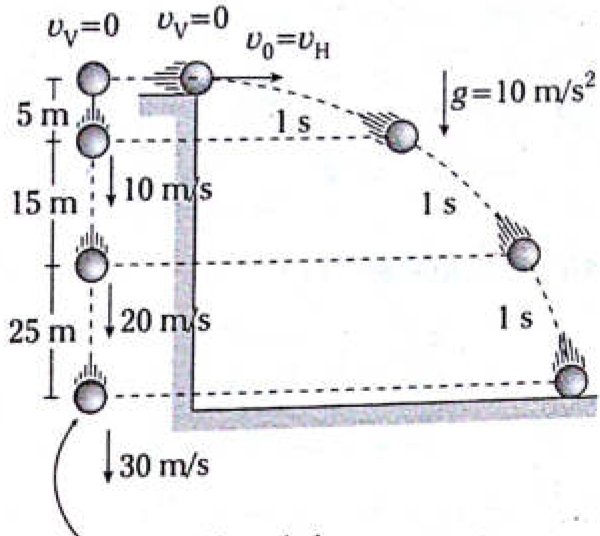
La proyección horizontal del MPCL es un MRU.

Para el cálculo del valor del desplazamiento horizontal

$$\boxed{d_H = v_H \cdot t}$$

2.1.2. Proyección vertical

Debido a que el cuerpo experimenta una aceleración constante, que es la aceleración de la gravedad ($\vec{g}$), la proyección vertical de este movimiento es un movimiento vertical de caída libre (MVCL) y se verifican sus características.



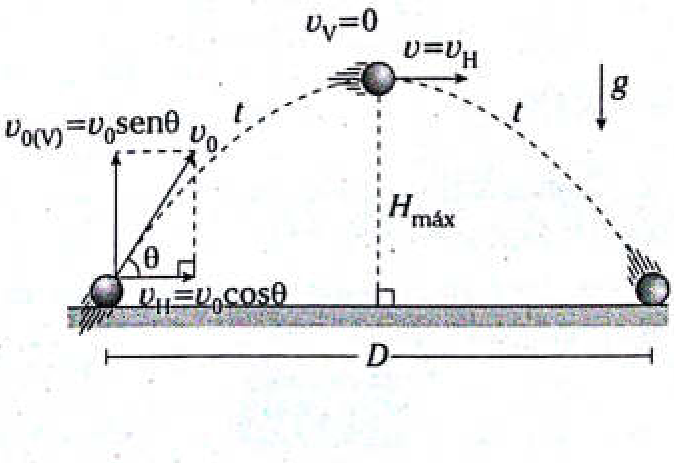
La proyección vertical del MPCL es un MVCL.

En conclusión, para facilitar el estudio de un MPCL, se realiza la descomposición de la velocidad del cuerpo en dos componentes (horizontal y en la vertical) y luego se proyecta el movimiento en la horizontal y en la vertical. La proyección horizontal es un MRU y la proyección vertical es un MVCL.

3. Lanzamiento de un proyectil

Un proyectil es lanzado desde el piso con un ángulo de elevación θ.

A continuación, analizamos este movimiento.



Se cumple

$$t_{sub}=t_{baj}=t \qquad t=\frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

Sea t_v el tiempo de vuelo.

$$t_v=2t=\frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

Sea D el alcance horizontal máximo.

$$D=v_H \cdot t_V$$

Es decir

$$D=\frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{g}$$

$$D=\frac{v_0^2 \operatorname{sen}2\theta}{g}$$

Sea $H_{máx}$ la altura máxima.

$$H_{máx}=\frac{v_{0(V)}^2}{2g}$$

Es decir

$$H_{máx}=\frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$

Se cumple

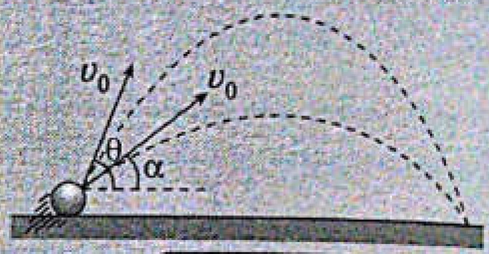
$$\frac{H_{máx}}{D}=\frac{\tan\theta}{4}$$

Observemos que la rapidez es mínima cuando se alcanza la altura máxima.

$$v_{mín}=v_H$$

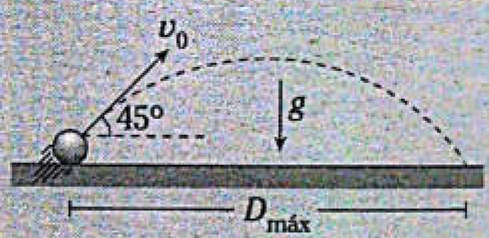
Observación

Si dos proyectiles se lanzan con la misma rapidez, pero con ángulos de elevación distinto, tal que estos son complementarios; sus alcances horizontales son iguales.



$$\alpha+\theta=90°$$

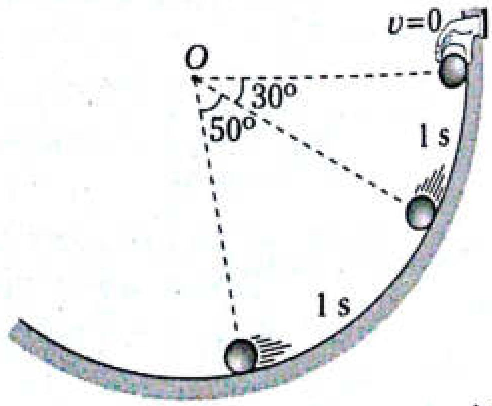
El alcance horizontal máximo se obtiene cuando el ángulo de lanzamiento es 45°.



$$D_{máx}=\frac{v_0^2}{g}$$

4. Movimiento circunferencial

Se muestra una rampa circunferencial y una canica que se abandona.



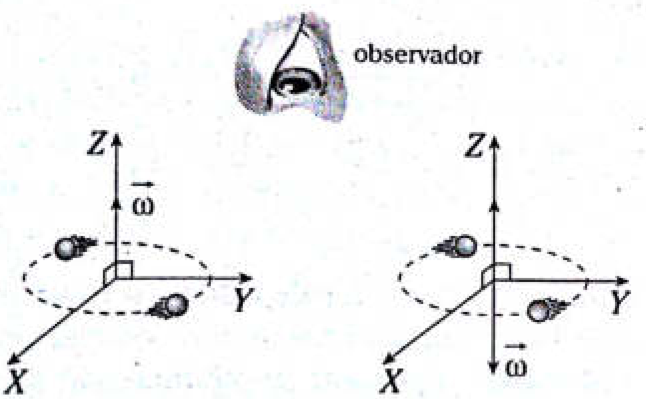
Podemos notar que la canica en su movimiento describe una circunferencia y cada vez es más veloz y que el radio de su trayectoria barre cada vez ángulos mayores.

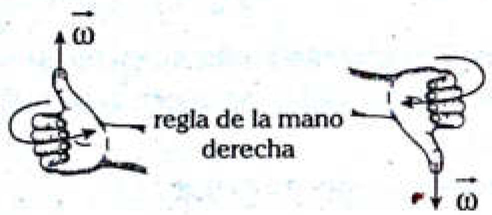
Para describir este movimiento vamos a definir lo siguiente:

4.1. VELOCIDAD ANGULAR $(\vec{\omega})$

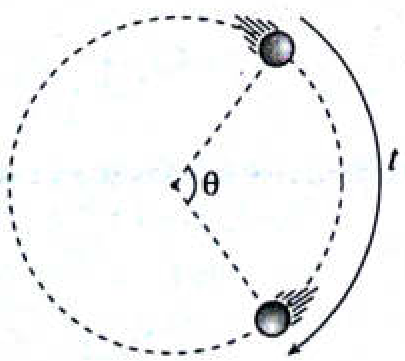
Es un vector que mide qué tan rápido el radio de la circunferencia va barriendo ángulos.

- Para su dirección, $\vec{\omega}$ es perpendicular al plano del movimiento.





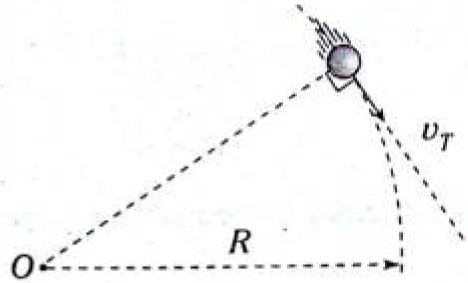
  - $\vec{\omega}$ es (+) cuando el movimiento circunferencial se desarrolla en sentido antihorario.
  - $\vec{\omega}$ es (–) cuando el movimiento circunferencial se desarrolla en sentido horario.
- Para su módulo



$$\boxed{\omega = |\vec{\omega}| = \frac{\theta}{t}} \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) \text{ (rapidez angular media)}$$

4.2. VELOCIDAD LINEAL O TANGENCIAL $(\vec{v}_T)$

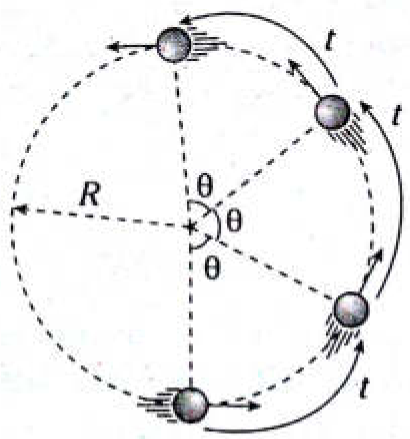
Es una magnitud vectorial que nos expresa el ritmo de cambio de posición. Siempre se representa tangente a la trayectoria.



Al igual que en el movimiento rectilíneo, este cálculo es para la velocidad angular media; pero para describir un movimiento instante tras instante, debemos conocer la velocidad en cada instante.

5. Movimiento circunferencial uniforme (MCU)

Es el único movimiento circunferencial donde la velocidad angular es constante.



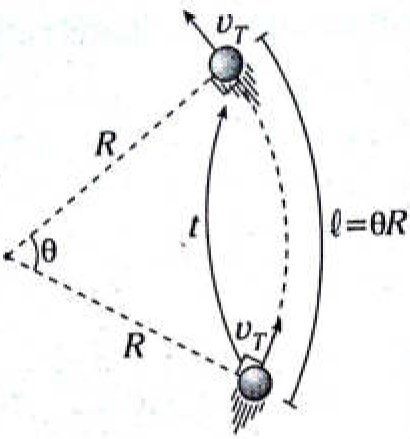
Se cumple lo siguiente:

- En tiempos iguales, los ángulos barridos son iguales.
- Los ángulos barridos son directamente proporcionales al tiempo transcurrido, tal que

$$\frac{\theta}{t} = \frac{2\theta}{2t} = \frac{3\theta}{3t} = \omega$$

Entonces

$$\boxed{\theta = \omega \cdot t}$$



Se define la rapidez tangencial (v_T) o lineal como

$$v_T = \frac{\ell}{t}$$

$$\rightarrow \quad v_T = \frac{\theta R}{t}; \text{ pero } \omega = \frac{\theta}{t}$$

Entonces

$$\boxed{v_T = \omega R}$$

Esto define la relación entre la rapidez angular y tangencial.

OBSERVACIÓN

Como en el MCU la $\vec{\omega}$ es constante, se toma iguales tiempos por cada vuelta. Dicho tiempo se denomina periodo (T).

$$\boxed{\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}}$$

Si dejamos transcurrir un tiempo prolongado, contaremos un cierto número de vueltas; y ello permite definir la frecuencia (f).

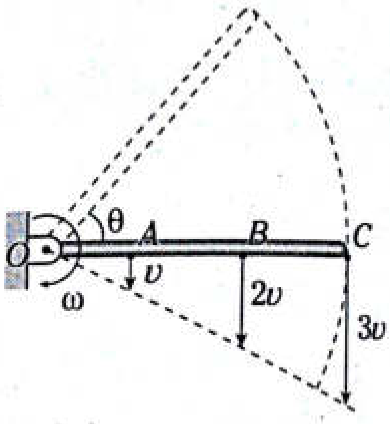
$$\boxed{f = \frac{\text{n.º de vueltas}}{\text{tiempo}} = \frac{1}{T}\,(\text{Hz})}$$

Si se da una vuelta, el tiempo es el periodo.

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

La frecuencia es la inversa del periodo.

Cuando una barra o disco esté rotando, se cumple lo siguiente:



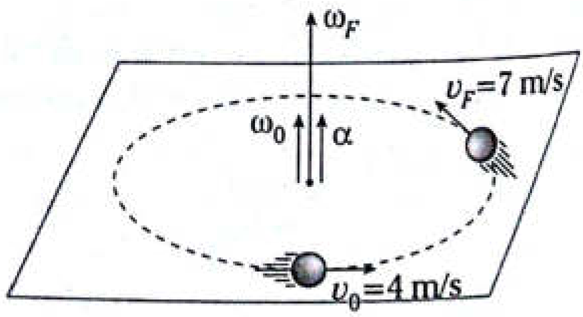
Para los puntos A, B y C, se tiene la misma velocidad angular, pero diferente velocidad tangencial debido a que sus trayectorias son de diferente radio.

Entonces la velocidad tangencial es directamente proporcional al radio de la circunferencia.

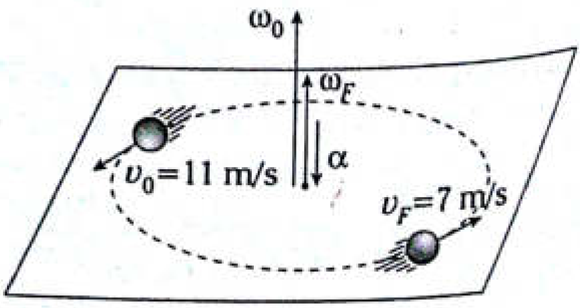
6. Aceleración angular ($\vec{\alpha}$)

Es una magnitud vectorial que mide qué tan rápido va cambiando la velocidad angular.

Cuando aumenta la velocidad angular



Cuando disminuye la velocidad angular



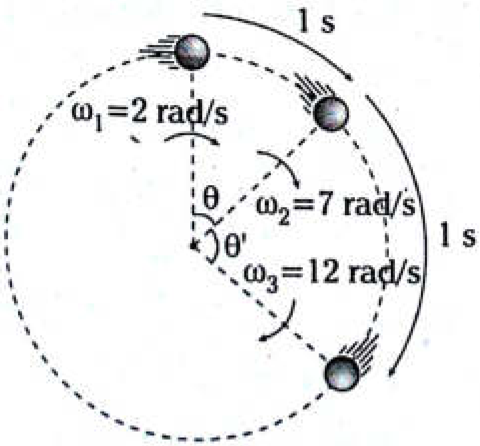
Se cumple

$$\boxed{\vec{\alpha}=\left(\frac{\text{cambio de velocidad angular}}{\text{tiempo}}\right)=\frac{\vec{\omega}_F-\vec{\omega}_0}{t}}\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)$$

Al igual que en el movimiento rectilíneo, así se calcula el valor medio de la aceleración angular; pero para tener bien definido un movimiento, se debe conocer en cada instante la aceleración angular y con ello la velocidad angular, con lo cual también el ángulo barrido.

7. Movimiento circunferencial uniformemente variado (MCUV)

Es aquel movimiento en trayectoria circunferencial en el que la aceleración angular es constante, es decir, la velocidad angular cambia gradualmente o uniformemente con el tiempo.



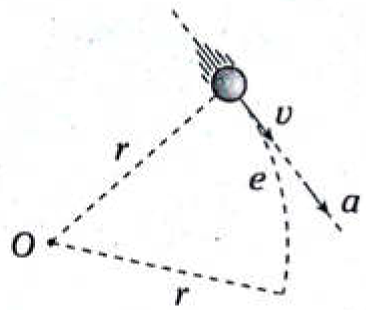
Como vemos, en cada segundo la velocidad angular aumenta en 5 rad/s, entonces

$$\alpha=5\ \text{rad/s}^2$$

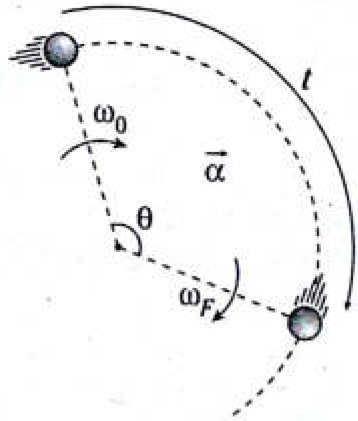
Además

$$\theta'>\theta$$

En la trayectoria circunferencial, a la velocidad se le denomina velocidad tangencial y a la aceleración, aceleración tangencial.



Las ecuaciones del MCUV son las siguientes:



$$\boxed{\theta=\left(\frac{\omega_0+\omega_F}{2}\right)\cdot t}$$

$$\boxed{v_F=\omega_0\pm\alpha\cdot t}$$

$$\boxed{\theta=\omega_0 t\pm\frac{\alpha\cdot t^2}{2}}$$

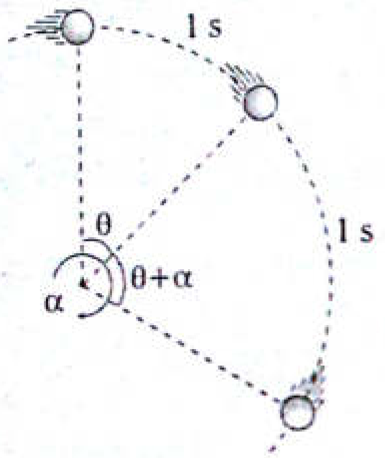
$$\boxed{\omega_F^2=\omega_0^2\pm 2\alpha\cdot\theta}$$

- (+) cuando ω aumenta.
- (–) cuando ω disminuye.

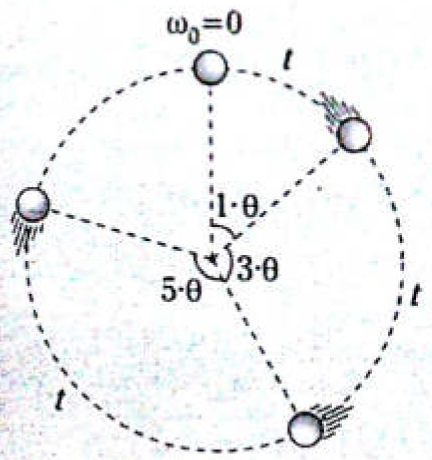
Observación

Nos basaremos según nuestros conocimientos sobre el MRUV.

1. Para segundos consecutivos



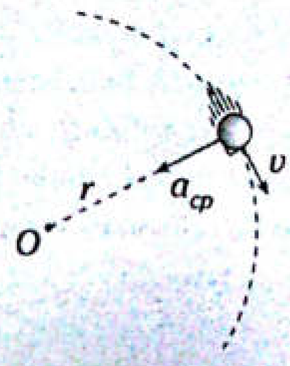
2. Para tiempos iguales desde iniciado el movimiento (número de Galileo)



Si $t = 1$ s

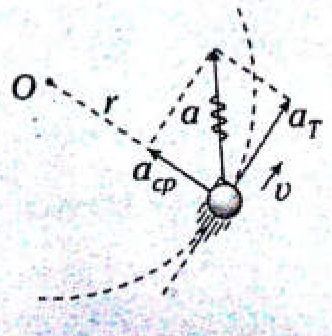
$\rightarrow \theta = \dfrac{\alpha}{2}$

3. En todo movimiento circunferencial hay una aceleración que mide qué tan rápido va cambiando la dirección de la velocidad, esta se denomina aceleración centrípeta $(\vec{a}_{cp})$.



$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

En un MCU, esta sería la $\vec{a}_{\text{total}}$, pero en un MCUV, sería una componente de la $\vec{a}_{\text{total}}$ al igual que la aceleración tangencial $(\vec{a}_{\text{total}})$.



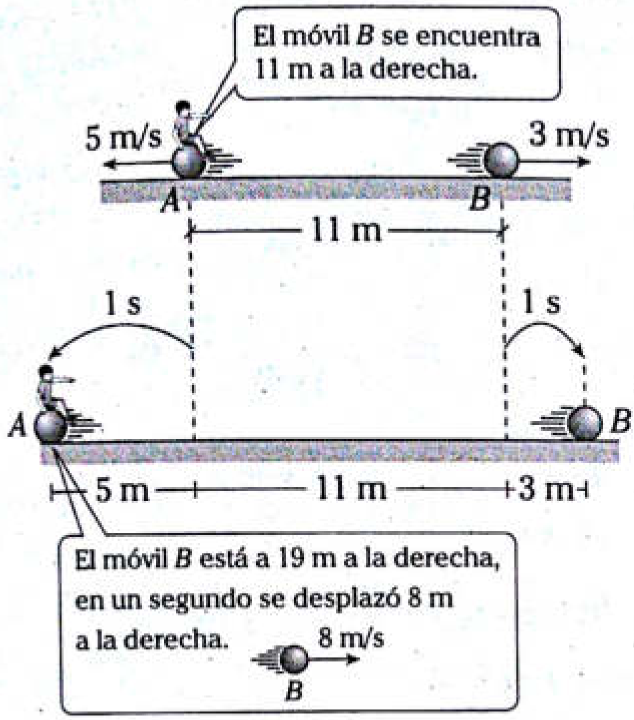
Aceleración total o instantánea.

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_T^2}$$

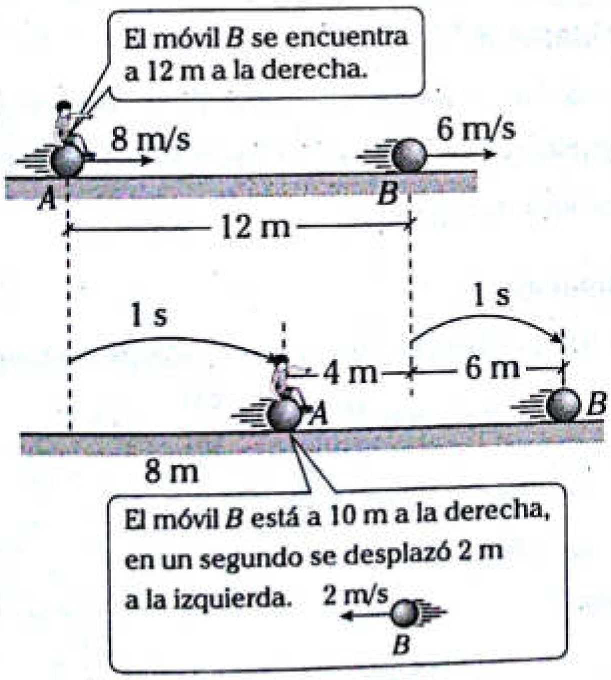
8. Movimiento relativo

Como es sabido, el movimiento mecánico es relativo. Observemos ahora dos móviles que realizan MRU.

Caso 1



Caso 2



Notemos que el observador ubicado en *A* describe el movimiento de *B* diferente a un observador en tierra. Entonces al ubicar un observador en *A*, la velocidad de *A* es cero y la velocidad de *B* se calcula del siguiente modo:

$$\boxed{\vec{v}_{B/A}=\vec{v}_B-\vec{v}_A}$$

donde

- $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$: velocidades de *A* y *B* respecto de la tierra.
- $\vec{v}_{A/B}$: velocidad de *B* registrada por un observador en *A*.

  Se lee velocidad de *B* respecto de *A*'.

Para los casos analizados, tenemos que

en el caso 1

$$\vec{v}_{B/A}=\vec{v}_B-\vec{v}_A$$

$$\vec{v}_{B/A}=(+3)-(-5)$$

$$\therefore \quad \vec{v}_{B/A}=+8\text{ m/s}$$

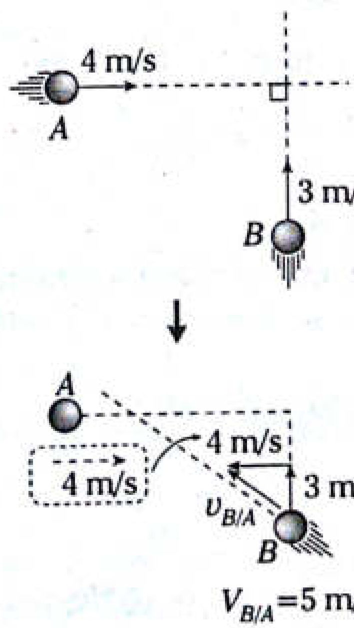
en el caso 2

$$\vec{v}_{B/A}=\vec{v}_B-\vec{v}_A$$

$$\vec{v}_{B/A}=(+6)-(+8)$$

$$\therefore \quad \vec{v}_{B/A}=-2\text{ m/s}$$

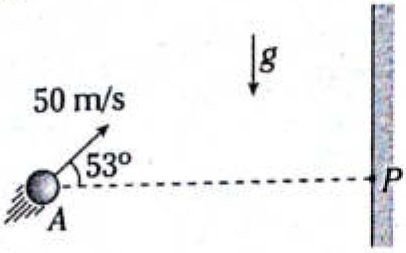
Este procedimiento también se usa cuando las velocidades no son paralelas.



Problemas Resueltos

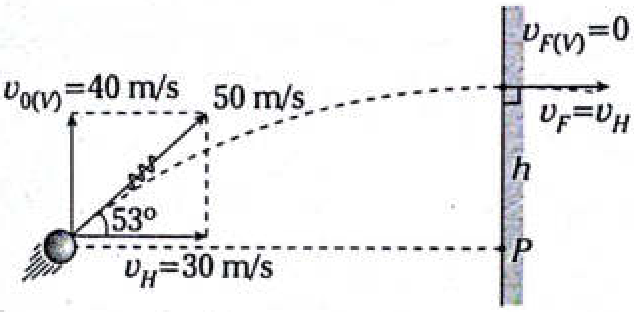
Problema N.° 1

La canica lanzada en A impacta frontalmente con el muro. Calcule a qué altura de P se da el impacto. (g=10 m/s^2).



Resolución

Como el impacto se da de forma frontal, es decir, perpendicularmente a la pared, significa que $v_{F(V)}=0$



Además, no conocemos el tiempo empleado, y por ello aplicamos en la vertical aquella ecuación donde no figura el tiempo.

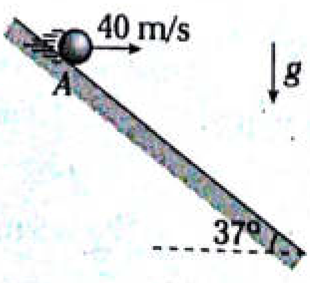
$$v_F^2=v_0^2-2gd$$

$$\rightarrow \quad 0=40^2-2\cdot 10\cdot h \quad \rightarrow \quad 1600=20h$$

$$\therefore \quad h=80\text{ m}$$

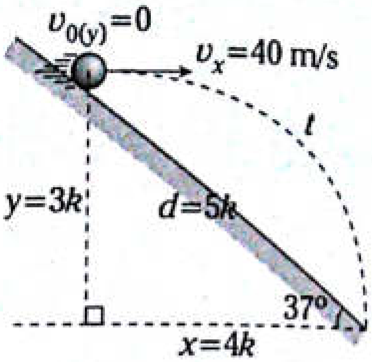
Problema N.° 2

Para el MPCL que se muestra, determine a qué distancia de A se da el impacto. (g=10 m/s^2).



Resolución

Describimos la trayectoria.



De la figura

- $4k=x=v_x\cdot t \;\rightarrow\; 4k=40\cdot t$

  $\rightarrow\; k=10t$

- $3k=y=\cancel{v_{y0}t}+\dfrac{gt^2}{2} \;\rightarrow\; 3\cdot 10t=\dfrac{10t^2}{2}$

  $\rightarrow\; t=6\text{ s}$

- $d=5k \;\rightarrow\; d=5\cdot 10\cdot t \;\rightarrow\; d=50\cdot 6$

  $\therefore\; d=300\text{ m}$

Problema N.° 3

Si una partícula describe un MCU con una frecuencia de 360 RPM y $\dfrac{20}{\pi}$ cm de radio, calcule la velocidad tangencial.

Resolución

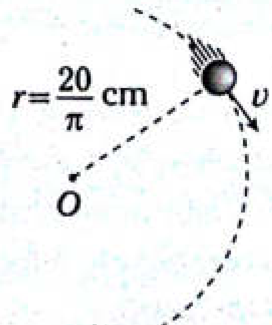
Si 1 RPM es una revolución por minuto, entonces

$$360\text{ RPM}=360\,\frac{\text{vueltas}}{\text{minuto}}=\frac{360}{60}=6\text{ Hz}$$

$$\omega=2\pi F \;\rightarrow\; \omega=2\pi\times 6$$

$$\omega=12\pi\text{ rad/s}$$

Luego



$$v=\omega\cdot r$$

$$\rightarrow\; v=12\pi\times\frac{20}{\pi}$$

$$\rightarrow\; v=240\text{ cm/s}$$

$$\therefore\; v=2{,}4\text{ m/s}$$

Problema N.° 4

Para un MCU, donde en cada segundo se barre un cuadrante, calcule el radio de la circunferencia si la aceleración es $2\pi^2$ m/s^2.

Resolución

En el MCU solo hay $\vec{a}_{cp}$, pues ω = cte. y $\vec{a}_T = 0$.

Para un cuadrante

$$\theta = \frac{\pi}{2}\text{ rad}$$

$$\rightarrow \quad a = a_{cp} \quad \rightarrow \quad a = \omega^2 \cdot r$$

$$a = \left(\frac{\theta}{t}\right)^2 \cdot r \quad \rightarrow \quad a = \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{1}\right)^2 \cdot r$$

$$2\pi^2 = \frac{\pi^2}{4} \cdot r$$

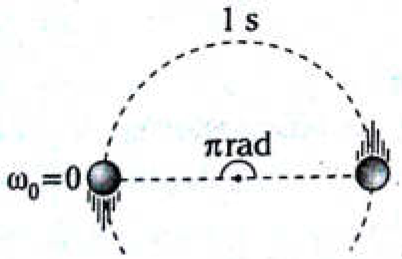
$$\therefore \quad r = 8\text{ m}$$

Problema N.° 5

Si una partícula que inicia su movimiento con MCUV da media vuelta en el primer segundo, calcule la aceleración angular.

Resolución

Graficamos la trayectoria.



Por tratarse del primer segundo, se cumple que

$$\theta = \frac{\alpha}{2}$$

$$\rightarrow \quad \pi = \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \quad \alpha = 2\pi\text{ rad/s}^2$$

Problema N.° 6

Las hélices de un ventilador varían su velocidad angular de π rad/s uniformemente hasta 7π rad/s en 5 s. Calcule el número de vueltas de las hélices en este tiempo.

Resolución

De manera similar que en el MRUV, notamos que no nos piden la aceleración angular ni tampoco es un dato, por ello, debemos aplicar lo siguiente:

$$\theta = \left(\frac{\omega_F + \omega_0}{2}\right) \cdot t$$

$$\theta = \left(\frac{7\pi + \pi}{2}\right) \cdot 5$$

$$\rightarrow \quad \theta = 20\pi\text{ rad}$$

Como cada vuelta es 2π rad

$$\rightarrow \quad 2\pi \cdot N = 20\pi$$

$$\therefore \quad N = 10\text{ vueltas}$$

Problema N.° 7

Una partícula parte del reposo para realizar MCUV con $\alpha = \pi$ rad/s^2. ¿Después de cuántos segundos dicha partícula dará 4 vueltas?

Resolución

Como es un MCUV donde se desconoce la ω_F, aplicamos

$$\theta = \omega_0 t \pm \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$\Big\downarrow \text{4 vueltas}$$

$$4 \times 2\pi = 0 + \frac{\pi \cdot t^2}{2} \quad \rightarrow \quad 8\pi = \frac{\pi t^2}{2}$$

$$t^2 = 16$$

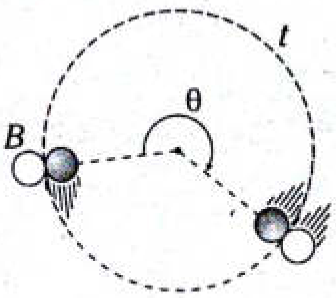
$$\therefore \quad t = 4\text{ s}$$

Problema N.° 8

Dos partículas (*A* y *B*) desarrollan MCU y MCUV con $\vec{\omega}_A = -\frac{\pi}{3}\hat{k}$ rad/s y $\vec{\omega}_{B_0} = 0$, $\vec{\alpha}_B = -\frac{\pi}{12}\hat{k}$ rad/s^2. Si parten del mismo punto, halle el desplazamiento angular hasta el primer encuentro.

Resolución

Como $\vec{\omega}_A$ y $\vec{\alpha}_B$ son negativos, el movimiento de ambos es horario.



Como parten del mismo punto y se vuelven a encontrar, entonces los ángulos barridos son iguales.

$$\theta = \theta_B = \theta_A$$

$$\downarrow \text{MCUV} \qquad \downarrow \text{MCV}$$

$$\omega_{0B}t + \frac{\alpha_B t^2}{2} = \omega_A \cdot t$$

$$\frac{\pi}{12} \times \frac{t^2}{2} = \frac{\pi}{3} \cdot t$$

$\rightarrow \quad t = 8$ s

El desplazamiento angular de A es

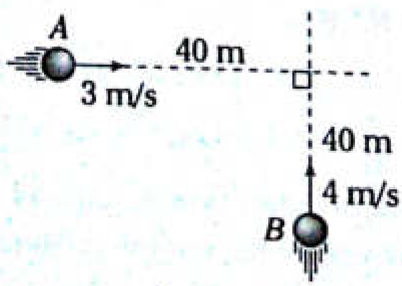
$$\theta = \omega_A \cdot t$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \cdot 8$$

$\therefore \quad \theta = \dfrac{8}{3}\pi$ rad

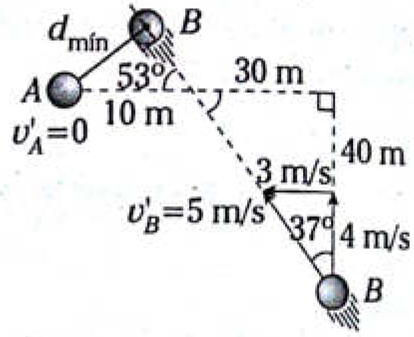
Problema N.° 9

Para las partículas que realizan MRU, calcule la mínima separación entre ellas.



Resolución

Analizamos el movimiento de B respecto de A.

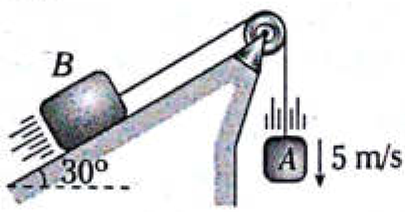


Observamos que la trayectoria que A registra para B es una recta oblicua. Es fácil notar que la mínima distancia se da cuando B pasa por la perpendicular desde A.

$\therefore \quad d_{mín} = 8$ m

Problema N.° 10

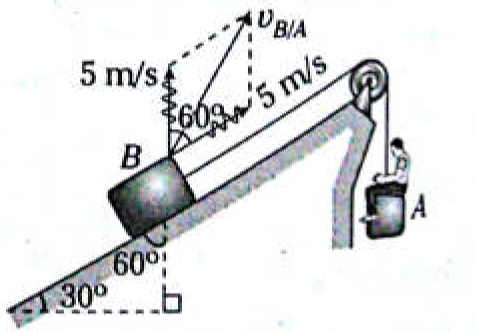
Se muestran dos bloques unidos por una cuerda inextensible. Calcule la velocidad relativa de B respecto de A.



Resolución

Ubicamos un observador en A, y calculamos geométricamente la velocidad relativa de B respecto de A.

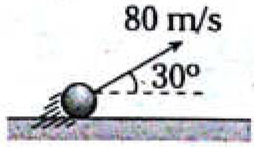
$$\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B + (-\vec{v}_A)$$



Como la cuerda es inextensible, los bloques presentan igual rapidez. Por lo tanto, al aplicar el método geométrico tenemos $v_{B/A} = 5\sqrt{3}$ m/s.

NIVEL BÁSICO

1. Se muestra una partícula que desarrollará MPCL. Calcule el tiempo de vuelo. $(g = 10\ \text{m/s}^2)$

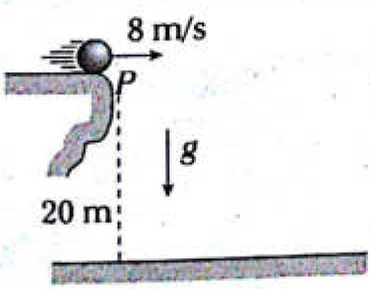


A) 8 s B) 3 s C) 4 s
D) 16 s E) 11 s

2. Para el movimiento parabólico que se muestra, determine el módulo de su velocidad luego de 1 s. $(g = 10\ \text{m/s}^2)$.

A) 40 m/s B) $30\sqrt{2}$ m/s C) 30 m/s
D) 20 m/s E) 10 m/s

3. Para el MPCL que describe la canica desde *P*, calcule el tiempo que emplea hasta impactar en el piso. $(g = 10\ \text{m/s}^2)$.

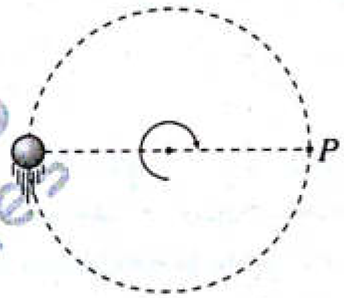


A) 3 s B) 2 s C) 4 s
D) 5 s E) 7 s

4. En un movimiento circunferencial uniforme, el radio es $\frac{3}{\pi}$ cm y la velocidad tangencial, 12 cm/s. Calcule la frecuencia de este movimiento.

A) 2 Hz B) 3 Hz C) 5 Hz
D) 6 Hz E) 8 Hz

5. Se muestra un MCU. Calcule luego de cuántos segundos la partícula pasa por *P* por segunda vez. $\left(\omega = \frac{2\pi}{7}\ \text{rad/s}\right)$.



A) 6,5 s B) 4,8 s C) 7,9 s
D) 10,5 s E) 11,7 s

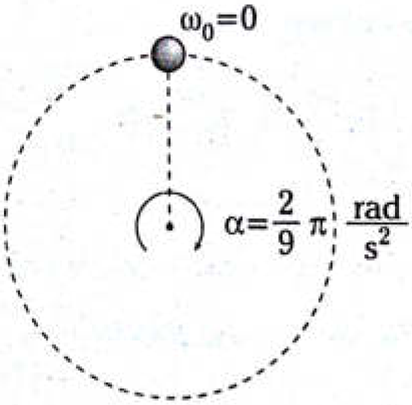
6. Para un MCUV, donde $\omega_0 = \pi$ rad/s y $\alpha = \frac{\pi\ \text{rad}}{\text{s}^2}$, determine el número de vueltas luego de 4 s del movimiento acelerado.

A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 6

7. En un MCUV, se duplica la rapidez angular al completar 1 vuelta. Calcule la rapidez angular inicial. $(\alpha = 3\pi\ \text{rad/s}^2)$.

A) 2π rad/s B) 5π rad/s C) 7 rad/s
D) 8π rad/s E) 5 rad/s

8. Para la partícula que se muestra, hay MCUV. Calcule luego de cuánto tiempo logra dar 2 vueltas.

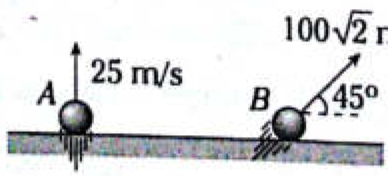


A) 1 s B) 2 s C) 3 s
D) 6 s E) 5 s

9. Si las hélices de un ventilador presentan una velocidad angular constante de 6π rad/s y de pronto se corta la electricidad y va frenando uniformemente con $\alpha=\pi$ rad/s^2, calcule luego de cuántos segundos se detiene.

A) 3 s B) 4 s C) 9 s
D) 7 s E) 6 s

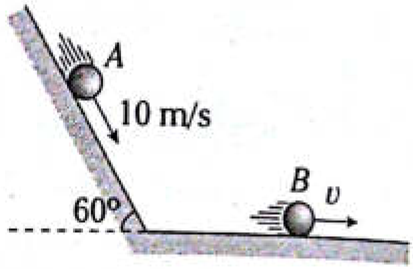
10. Para el instante mostrado, determine el módulo de la velocidad de A respecto de B.



A) 75 m/s B) 125 m/s C) 100 m/s
D) 70 m/s E) 28 m/s

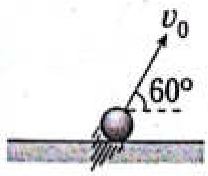
NIVEL INTERMEDIO

11. Para el instante mostrado, el módulo de la velocidad relativa de A respecto de B es $5\sqrt{3}$ m/s. Calcule el módulo de la velocidad de B en este instante.



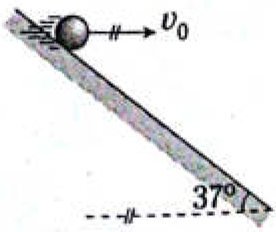
A) 5 m/s B) 7 m/s C) 8 m/s
D) 10 m/s E) 4 m/s

12. Si la partícula que realiza MPCL logra presentar una mínima rapidez de 8 m/s, calcule la magnitud de velocidad de lanzamiento. ($g=10$ m/s^2)



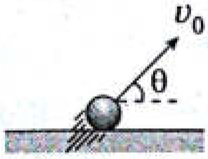
A) 16 m/s B) 11 m/s C) 13 m/s
D) 7 m/s E) 14 m/s

13. De acuerdo al gráfico, pasan 3 s para que la partícula impacte en el plano inclinado luego del lanzamiento. Calcule la magnitud de velocidad inicial. ($g=10$ m/s^2).



A) 20 m/s B) 10 m/s C) 30 m/s
D) 40 m/s E) 50 m/s

14. Si el alcance horizontal y la altura máxima son iguales para un MPCL, calcule $\tan\theta$.

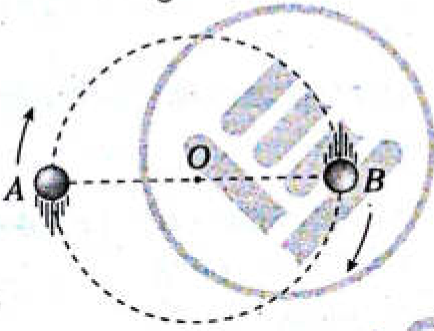


A) 6 B) 3 C) 2
D) 1 E) 4

15. En el gráfico, se muestran dos partículas que realizan MCU. Calcule luego de cuánto tiempo estas partículas chocan.

Datos: $\omega_A = \frac{\pi}{2}$ rad/s; $\omega_B = \frac{\pi}{3}$ rad/s

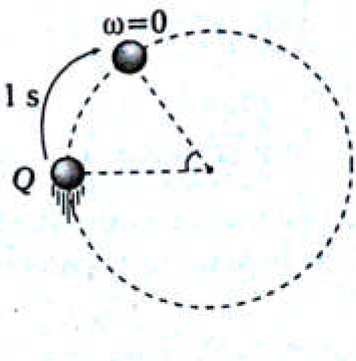
A) 1,3 s
B) 6 s
C) 1,2 s
D) 3,1 s
E) 1,9 s



16. Para una rueda que rota con 600 RPM con un radio de 40 cm, calcule la velocidad tangencial de un punto periférico de la rueda.

A) 48π m/s B) 70π m/s C) 60π m/s
D) 8π m/s E) 80π m/s

17. Para un MCUV, la rapidez angular se reduce en $\frac{\pi}{6}$ rad/s por cada 1 s. Calcule el desplazamiento angular luego de 1 s de pasar por Q.

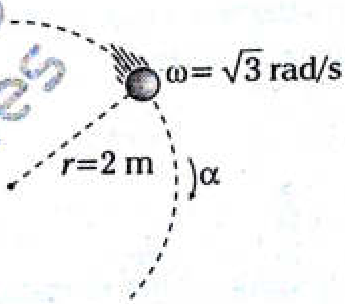


A) $\frac{\pi}{4}$ rad B) $\frac{\pi}{12}$ rad C) $\frac{8\pi}{11}$ rad
D) $\frac{7\pi}{24}$ rad E) $\frac{\pi}{6}$ rad

18. Cuando una partícula inicia un MCUV desde el reposo, da media vuelta en el primer segundo. Luego de qué tiempo dará 4 vueltas más, a partir del primer segundo.

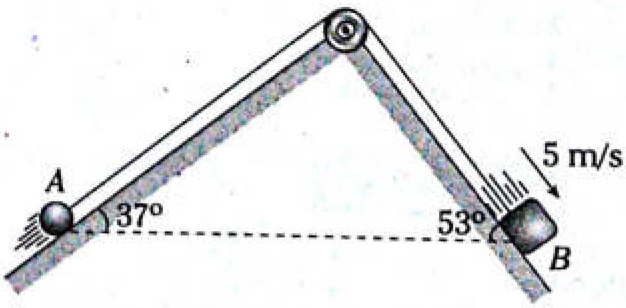
A) 1 s B) 2 s C) 3 s
D) 8 s E) 11 s

19. Para el instante mostrado, calcule la aceleración de la partícula que realiza MCUV. $(\alpha = 4\ \text{rad/s}^2)$



A) 6 m/s^2 B) 8 m/s^2 C) 10 m/s^2
D) 7 m/s^2 E) 9 m/s^2

20. Para el instante mostrado, calcule el módulo de la velocidad con que A se aproxima a B.



A) 1 m/s B) 2 m/s C) 3 m/s
D) $5\sqrt{2}$ m/s E) 4 m/s

Gráficas del movimiento

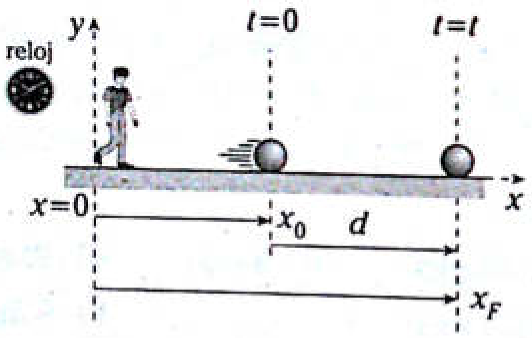
Capítulo V

OBJETIVOS

- Identificar y emplear los elementos de una gráfica, como la pendiente, el área y el punto para representar las magnitudes cinemáticas.
- Distinguir entre las diferentes gráficas para la solución de problemas.
- Sistematizar la información obtenida de las magnitudes cinemáticas del movimiento mecánico mediante gráficas.

1. Ecuaciones del movimiento

Veamos una partícula que se mueve en trayectoria rectilínea sobre el eje x.



Respecto del observador, el cual controla el movimiento de la partícula, podemos notar que

$$\vec{x}_0 + \vec{d} = \underbrace{\vec{x}_F}_{\text{posición final o simplemente posición}}$$

$$\boxed{\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{d}}$$

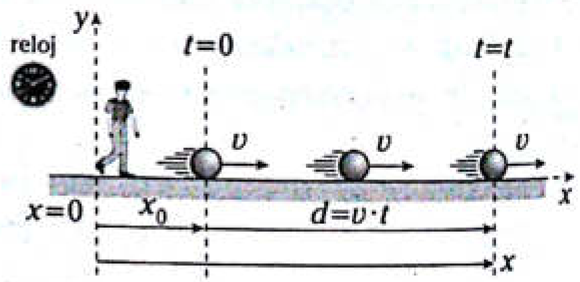
donde

- $\vec{x}_0$: posición inicial
- $\vec{d}$: desplazamiento

El $\vec{d}$ depende del tipo de movimiento que realiza el móvil.

1.1. ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (MRU)

Tenemos



entonces

$$\boxed{\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}.\,t}$$

además

$$\boxed{\vec{v} = \text{constante}}$$

y

$$\boxed{\vec{a} = \text{cero}}$$

Estas son las ecuaciones que definen cinemáticamente el movimiento de la partícula.

Aplicación 1

Si la posición de un móvil está definida por $\vec{x}=6+4t$, calcule el recorrido para $\Delta t=3\,s$.

Resolución

La ecuación $\vec{x}=6+4t$ corresponde a un MRU donde +6 m es la posición inicial y 4 m/s es la velocidad, además

$e=d$

$e=v\times t$
 └→ tiempo transcurrido ($t=\Delta t=3$ s)

$e=4\times 3$

$\therefore\ e=12\,\text{m}$

1.2. GRÁFICAS DEL MRU

1.2.1. Gráfica posición vs. tiempo ($\vec{x}$ vs. t)

Dadas las siguientes ecuaciones del movimiento :

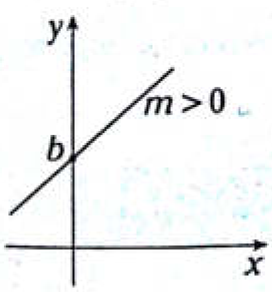
- $\vec{x}_A=6+4t$
- $\vec{x}_B=20-5t$

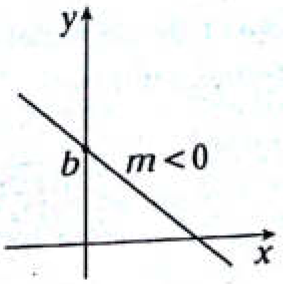
Tienen la forma

$\boxed{y=mx+b}$ ecuación de la recta

donde

- m es la pendiente y se define como
  $m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
- b es intercepto de la gráfica con el eje y o el valor de y cuando $x=0$.





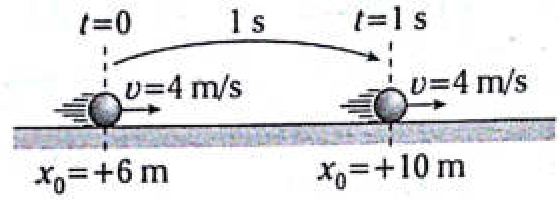
Para nuestro caso, la ecuación del movimiento es

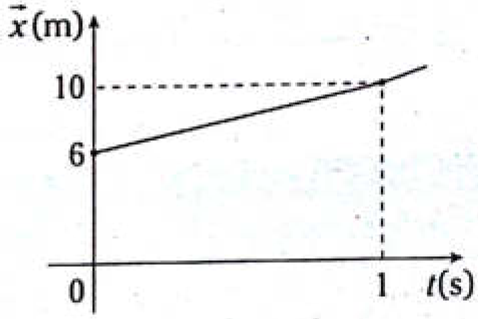
$$\vec{x}=\underbrace{\vec{x}_0}_{\substack{\text{intercepto de}\\ \text{la gráfica}}}+\underbrace{\vec{v}}_{\substack{\text{pendiente de}\\ \text{la gráfica}}}\cdot t$$

Ejemplos

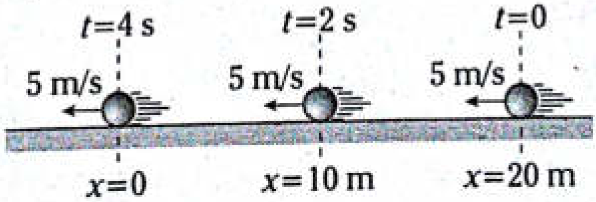
Para las ecuaciones de movimiento planteadas realice la representación del movimiento y construya la gráfica $\vec{x}$ vs. t.

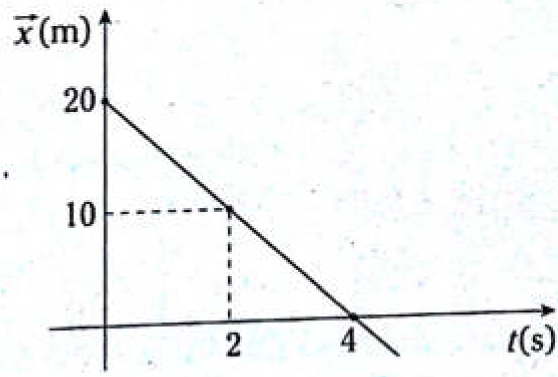
- $\vec{x}_A=6+4t$





- $\vec{x}_B=20-5t$





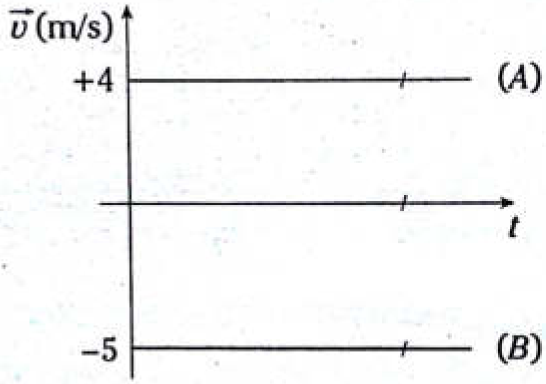
1.2.2. Gráfica velocidad vs. tiempo ($\vec{v}$ vs. t)

Como la $\vec{v}$=cte., su representación es una línea recta horizontal.

Ejemplo

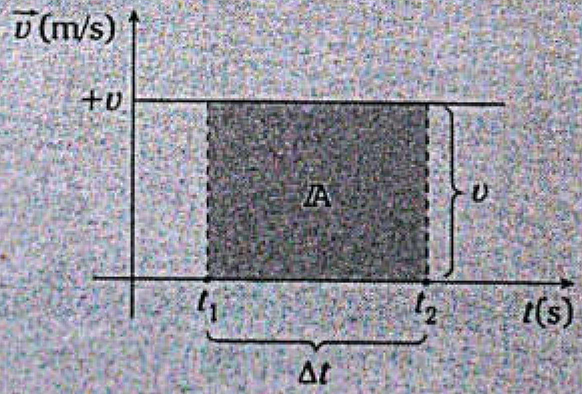
Representa la gráfica $\vec{v}$ vs. t de las partículas del caso anterior.

$\vec{v}_A=+4$ m/s; $\vec{v}_B=-5$ m/s



Observación

Para la gráfica $\vec{v}$ es t



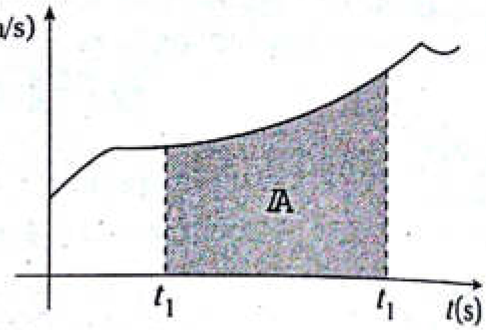
Por ser MRU

$$e=d=\underbrace{v\cdot\Delta t}$$

En la gráfica, este producto representa el área de la región sombreada.

$$\boxed{d=\text{área}_{\square}}$$

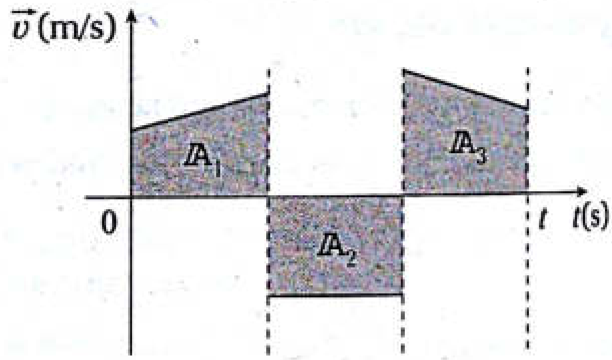
En general



En el intervalo de $t\in\langle t_1;t_2\rangle$

$$\boxed{d=\mathbb{A}_{\triangle}}$$

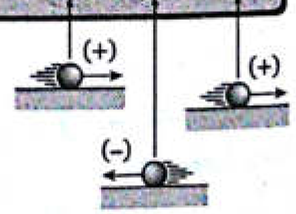
también



De 0 a t.

Para determinar la distancia debemos sumar las áreas.

$$\boxed{d=\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_2+\mathbb{A}_3}$$

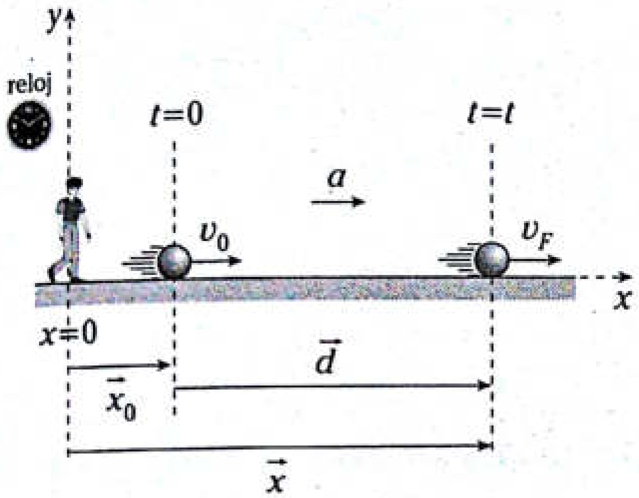


Para el recorrido debemos tomar en cuenta solo el valor, entonces

$$\boxed{e=|\mathbb{A}_1|+|\mathbb{A}_2|+|\mathbb{A}_3|}$$

1.3. ECUACIÓN DEL MRUV

Tenemos



Sabemos

$$\vec{d}=\vec{v}\cdot t+\frac{\vec{a}t^2}{2}\ \wedge\ \vec{d}=\vec{x}-\vec{x}_0$$

Entonces

$$\boxed{\vec{x}=\vec{x}_0+\vec{v}_0 t+\frac{\vec{a}}{2}\cdot t^2}$$

Además

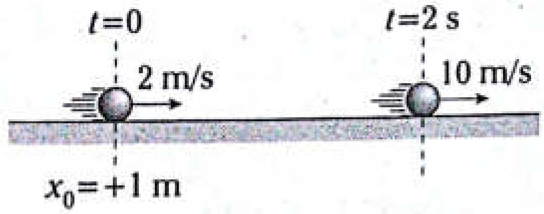
$$\boxed{\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}\cdot t}$$

$$\boxed{\vec{a}=\text{constante}}$$

Estas son las ecuaciones que definen cinemáticamente el movimiento de la partícula.

Aplicación 2

Una partícula desarrolla un MRUV, y la descripción de su movimiento es tal como se muestra. Determine la ecuación de su movimiento.



Resolución

La ecuación del movimiento es

$$\vec{x}=\vec{x}_0+\vec{v}_0 t+\frac{\vec{a}t^2}{2} \qquad (*)$$

En $t=0$ se observa que $\vec{x}_0=+1$ m y $\vec{v}_0=+2$ m/s.

Además

$$\vec{v}_F=\vec{v}_0+\vec{a}t$$

$$\rightarrow\ +10=+2+\vec{a}(2)$$

$$\vec{a}=+4\ \text{m/s}^2$$

Reemplazamos en (*).

$$\vec{x}=1+2t+\left(\frac{4}{2}\right)t^2$$

$$\therefore\ \vec{x}=1+2t+2t^2$$

1.4. GRÁFICAS DEL MRUV

1.4.1. Gráfica posición vs. tiempo ($\vec{x}$ vs. t)

Dada la siguiente ecuación del movimiento

$$\vec{x}=10+8t-2t^2$$

Tiene la siguiente forma general:

$$\boxed{y=a_0+a_1x+a_2x^2}$$

Polinomio de 2.° grado o ecuación de la parábola

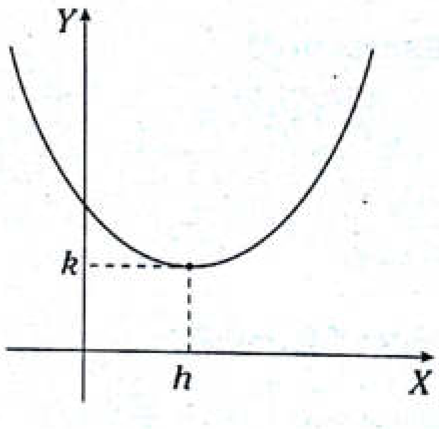
donde

- a_0 es el valor de Y cuando $x=0$, es decir, el intercepto de la parábola con el eje y.
  En nuestro caso viene a ser la posición para $t=0$: $\vec{x}_0$ (posición inicial).
- a_1 es el coeficiente del término lineal; en nuestro caso es la velocidad inicial: $\vec{v}_0$.
- a_2 es el coeficiente del término cuadrático.
  En nuestro caso es $\left(\dfrac{\vec{a}}{2}\right)$ la mitad de la aceleración.

Para graficar la parábola se debe ubicar su vértice, entonces

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2=a_2(x-h)^2+k$$

El punto $(h; k)$ es el vértice de la parábola.



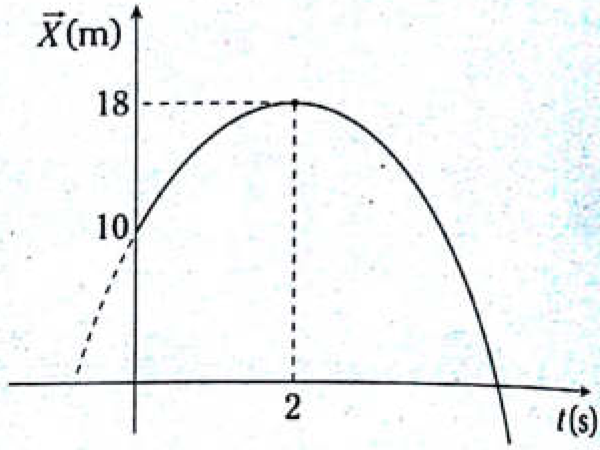
Si $a_2>0$, la parábola se abre hacia arriba.
Si $a_2<0$, la parábola se abre hacia abajo.

Para nuestro ejemplo, le damos la forma completando cuadrados.

$$\vec{x}=10+8t-2t^2=-2\left(t^2-2t(2)+2^2-9\right)$$

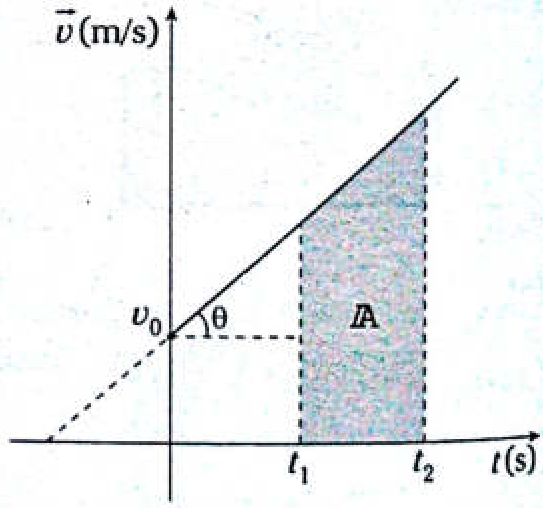
$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{parábola}\\ \text{abierta}\\ \text{hacia abajo}}}{\vec{x}=-2}\underbrace{(t-2)^2+18}_{\text{vértice: }(2;\,18)}$$

Graficamos.



1.4.2. Gráfica velocidad vs. tiempo ($\vec{v}$ vs. t)

En el MRUV, la ecuación de la velocidad es $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t$; como se puede apreciar depende linealmente del tiempo, por lo tanto, la gráfica es la siguiente:



donde

- $\vec{a}=\tan\theta$ (pendiente de la recta)

Además, el área de la región encerrada representa la distancia recorrida.

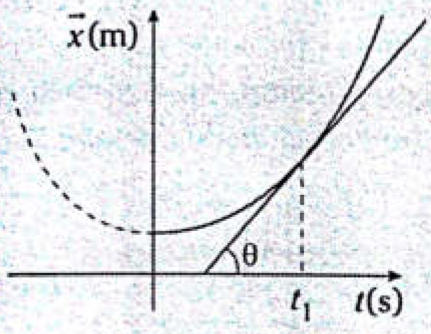
$$\boxed{A_{\square}=d_{t(1)-t(2)}}$$

OBSERVACIÓN

Para identificar la velocidad en cierto instante t usando la gráfica, se debe trazar una recta tangente a la gráfica (parábola) y determinar la pendiente de dicha recta tangente que corta a la gráfica en el instante t.

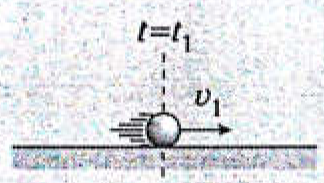
Veamos algunos casos:

I.

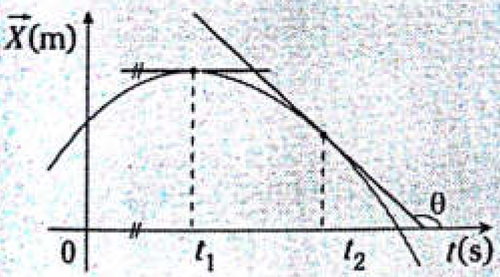


En $t=t_1$, $\vec{v}_1=\tan\theta>0$ (θ: agudo)

Representa el movimiento.



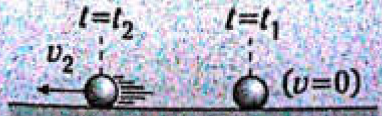
II.



En $t=t_1$, la recta tangente es horizontal, lo cual significa que la pendiente y la $\vec{v}$ en dicho instante es cero.

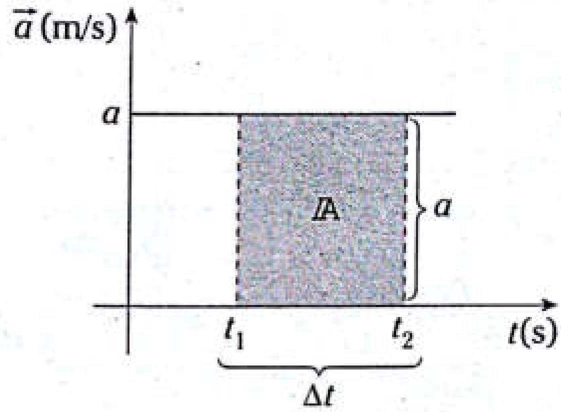
En $t=t_2$, $\vec{v}_2=\tan\theta<0$ (θ: obtuso).

En la trayectoria



1.4.3. Gráfica aceleración vs. tiempo ($\vec{a}$ vs. t)

En el MRUV, la aceleración permanece constante, en consecuencia, la gráfica $\vec{a}$ vs. t es una recta horizontal, tal como se muestra a continuación.



Del MRUV

$$\vec{v}_F=\vec{v}_0+\vec{a}t$$
$$\vec{v}_F-\vec{v}_0=\vec{a}\cdot t$$
$$\Delta\vec{v}=\vec{a}.t$$

De la gráfica

$$\boxed{\mathbb{A}=+a\times\Delta t}$$

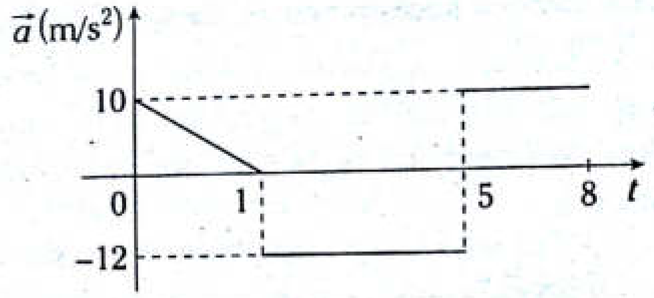
En consecuencia

$$\boxed{\left|\Delta\vec{v}\right|=\text{área}}$$

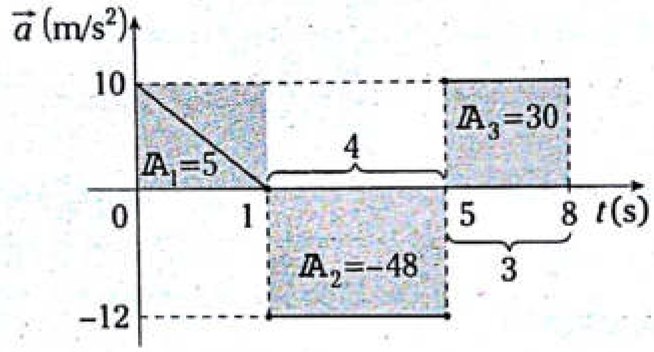
Debemos tener presente que la $\vec{v}$ y $\vec{a}$ son vectores, y el área se toma como positivo (+) cuando está por encima del eje t y negativo (–) cuando está por debajo de dicho eje.

Aplicación 3

Para el móvil mostrado se tiene la siguiente gráfica, calcule su $\vec{v}$ en t=8 s.



Resolución



Planteamos

$$\Delta\vec{v}=\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_2+\mathbb{A}_3$$

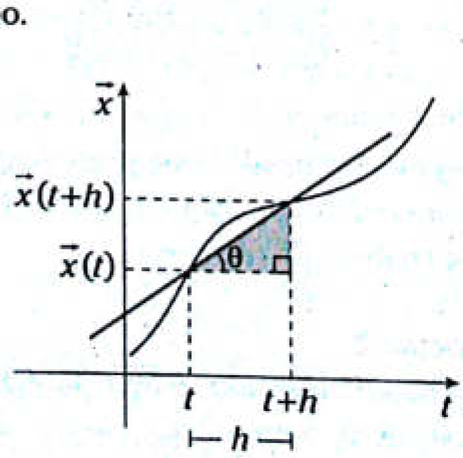
$$\vec{v}_F-\vec{v}_0=5+(-48)+30$$

$$\vec{v}_F-5=-13$$

$\therefore\quad \vec{v}_F=-8$ m/s

Comentarios adicionales

1. La posición de un móvil que realiza movimiento rectilíneo depende únicamente del tiempo.



$$\tan\theta=\frac{\vec{x}_{(t+h)}-\vec{x}_{(t)}}{h}=\vec{v}_m$$

Cuando h se aproxima a cero, la $\vec{v}_m$ se convierte en una $\vec{v}$ instantánea.

$$\boxed{\vec{v}_{(t)}=\lim_{n\to 0}\frac{\vec{x}(t+h)-\vec{x}(t)}{h}}$$

Esto siempre que h sea muy próximo a cero. La última operación se denomina derivada de la posición respecto al tiempo y se escribe de la siguiente manera:

$$\boxed{\vec{v}=\frac{d}{dt}\cdot\vec{x}}$$

donde

$dt=h\ \to\ 0$ y $d\vec{x}=\vec{x}(t+h)-\vec{x}(t)$

Ejemplo

Si $\vec{x}=3t^2$, sabemos que $\vec{x}=0+0t+\frac{6t^2}{2}$

luego $\vec{x}_0=0$; $\vec{v}_0=0$ y $\vec{a}=+6$

$\to\quad \vec{v}=0+6t$

$\therefore\quad \vec{v}=6t$

Ahora, aplicamos la derivada.

$$\vec{v}=\frac{d}{dt}\cdot\vec{x}=\frac{d3t^2}{dt}$$

$$=\frac{3(t+h)^2-3t^2}{h}$$

$$=\frac{3}{h}\left(t^2+h^2+2th-t^2\right)$$

$$=3\frac{\left(2th+h^2\right)}{h}$$

$$\vec{v}=6t+h$$

Como $h\to 0$ (tiende a cero)

$$\vec{v}=6t$$

Podemos notar que es el mismo resultado encontrado antes.

En general, para polinomios $\vec{x} = bt^n$ donde $b \neq 0$ y es una constante, además n es un número real

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = b \cdot n \cdot t^{n-1}$$

Aplicación 4

Si la posición de un móvil viene dada por

$$\vec{x} = 3t + 4t^2 + t^3,$$

calcule la ecuación de la velocidad.

Resolución

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(3t) + \frac{d}{dt}(4t^2) + \frac{dt^3}{dt}$$

$$\vec{v} = 3t^{1-1} + 4 \times 2 \times t^{2-1} + 3 \cdot t^{3-1}$$

$$\therefore \quad \vec{v} = 3 + 8t + 3t^2$$

NOTA

$\frac{d}{dt}(\text{cte}) = 0$, ya que la derivada evalúa la rapidez con que se da la variación y la constante no varía.

2. Para un MRUV sabemos

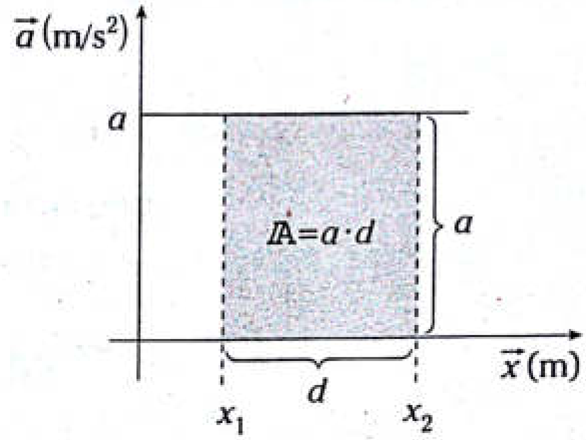
$$v_F^2 = v_0^2 \pm 2ad$$

donde

$$d = |\Delta \vec{x}|$$

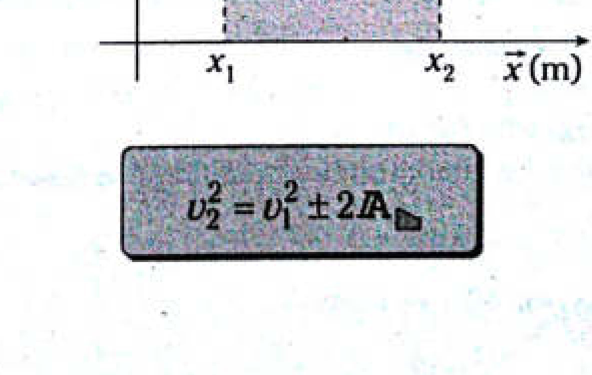
Construyamos la gráfica

$\vec{a}$ vs. posición x



$$v_2^2 = v_1^2 \pm 2 \text{ área}$$

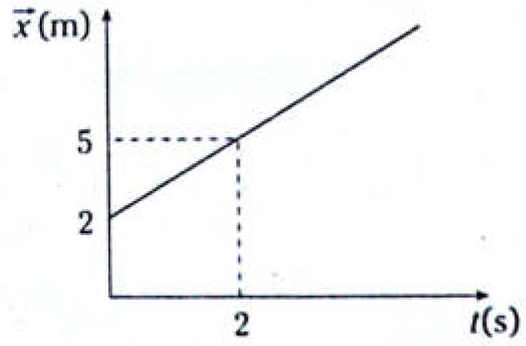
Esto se generaliza para cuando la $\vec{a}$ no sea constante y se colocará (+) o (–) dependiendo de la dirección de la $\vec{v}_0$ comparada con la de la $\vec{a}$ variable.



$$v_2^2 = v_1^2 \pm 2A$$

Problema N.° 1

Para un móvil que realiza MRU se tiene su gráfica $\vec{x}$ vs. t. Calcule su posición para t=6 s.



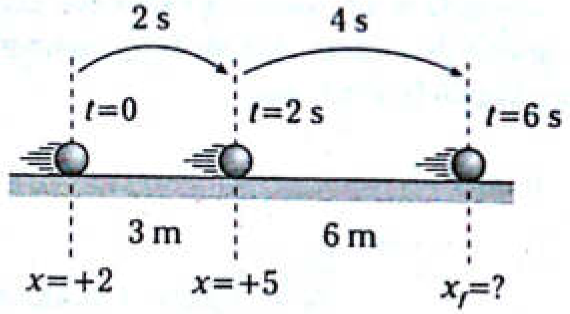
Resolución

Primera forma

Sobre la trayectoria

$t=0 \rightarrow \vec{x}=+2\,\text{m}$

$t=2\,\text{s} \rightarrow \vec{x}=+5\,\text{m}$



Notamos que el tiempo se duplica y por ser MRU la distancia también se debe duplicar, por ello

$\vec{x}_F=+11\,\text{m}$

Segunda forma

Se debe encontrar la ecuación de la posición.

$$\vec{x}=\vec{x}_0+\vec{v}t \qquad (*)$$

En t=0: $+2=\vec{x}_0+\vec{v}\cdot 0$

$$\vec{x}=+2$$

En t=2 s: $+5=\vec{x}_0+\vec{v}\cdot 2$

$$+5=+2+2\vec{v}$$

$$\vec{v}=+1{,}5\ \text{m/s}$$

Reemplazamos en (*).

$$\vec{x}=2+1{,}5t$$

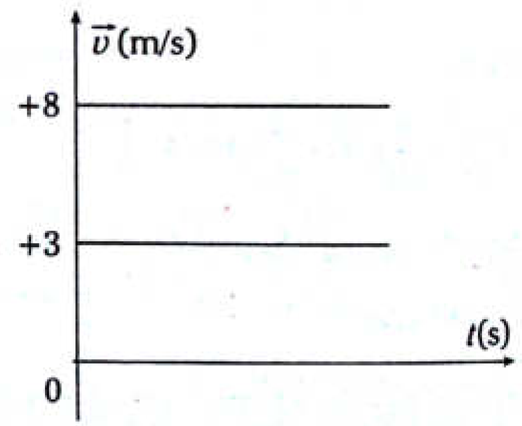
Reemplazamos en t=6 s.

$$\vec{x}=2+1{,}5(6)$$

$$\therefore\quad \vec{x}=+11\text{m}$$

Problema N.° 2

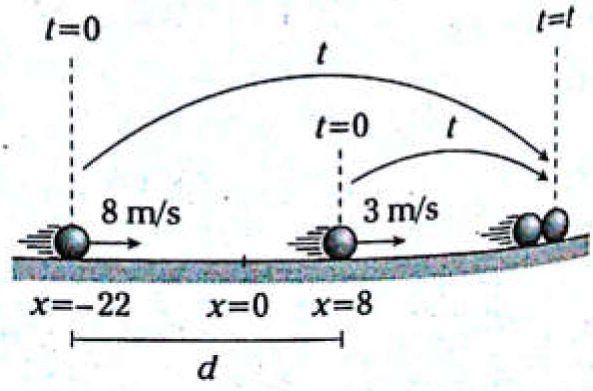
Para dos móviles que realizan MRU se sabe que sus posiciones iniciales son x=+8 m y x=−22 m. Si se muestran sus gráficas $\vec{v}$ vs. t, calcule el instante en que chocan.



Resolución

De la gráfica $\vec{v}$ vs. t las dos velocidades son (+), lo cual significa que los móviles se dirigen hacia la derecha, entonces se trata de un tiempo de alcance.

Sobre la trayectoria, el más veloz debe estar atrás.



Aplicamos

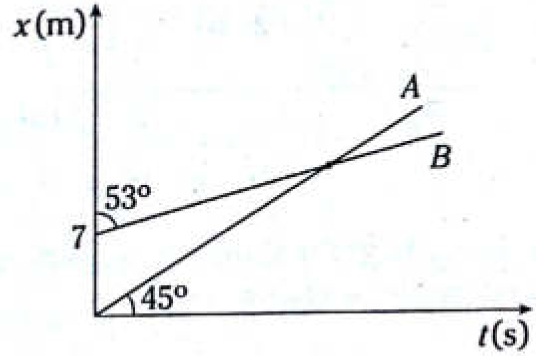
$$t=\frac{d}{v_1-v_2}=\frac{30}{8-3}$$

$$t=\frac{30}{5}$$

$\therefore\quad t=6\,\text{s}$

Problema N.º 3

Se muestra la gráfica $\vec{x}$ vs. t para dos móviles. Calcule en qué instante se cruzan.

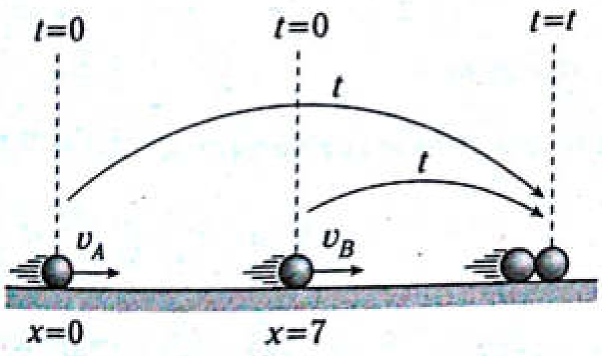


Resolución

Primera forma

Para que se produzca el cruce de los móviles, deben pasar por la misma posición.

Ubicamos a los móviles sobre la trayectoria.



Sabemos que la $\vec{v}$ se calcula como la pendiente de la recta en la gráfica $\vec{x}$ vs. t.

$$\vec{v}_A=\tan\theta_A$$

$$=\tan 45° \rightarrow \vec{v}_A=+1\,\text{m/s}$$

$$\vec{v}_B=\tan\theta_B=\tan 37°$$

$$\vec{v}_B=+\frac{3}{4}\,\text{m/s}$$

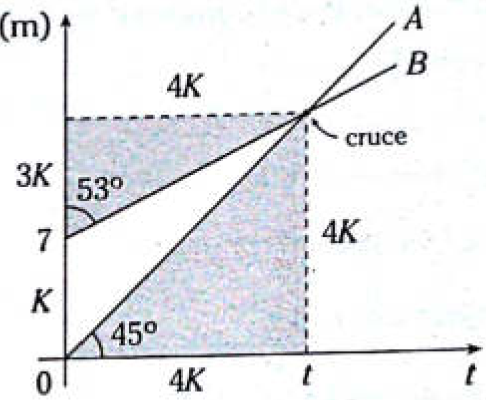
Luego

$$t_a=\frac{d}{v_A-v_B} \quad\rightarrow\quad t=\frac{7}{1-\dfrac{3}{4}}$$

$\therefore\quad t=28\,\text{s}$

Segunda forma

En la gráfica, trabajamos la geometría.



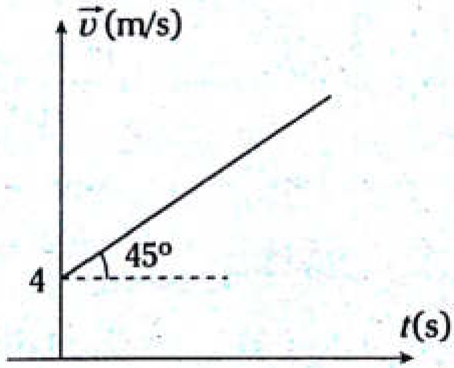
Notamos

- En el eje x: $k=7$
- en el eje t: $t=4k$

$\therefore\quad t=4\times 7=28\,\text{s}$

Problema N.º 4

Para un móvil que realiza MRUV, se tiene la gráfica $\vec{v}$ vs. t. Si su $\vec{x}_0=-8\,\text{m}$, calcule su posición en $t=4\,\text{s}$.



Resolución

De la ecuación de la posición, tenemos

$$\vec{x}=\vec{x}_0+\vec{v}_0t+\vec{a}\frac{t^2}{2} \qquad (*)$$

Del enunciado

$\vec{x}_0=-8$ m

$\vec{v}_0$: es el intercepto de la gráfica con el eje vertical, entonces

$\vec{v}_0=+4$ m/s

$\vec{a}$: es la pendiente de la gráfica $\vec{v}$ vs. t, entonces

$\vec{a}=\tan 45°$

$\vec{a}=+1$ m/s^2

Reemplazamos en (*).

$$\vec{x}=-8+4t+\frac{t^2}{2}$$

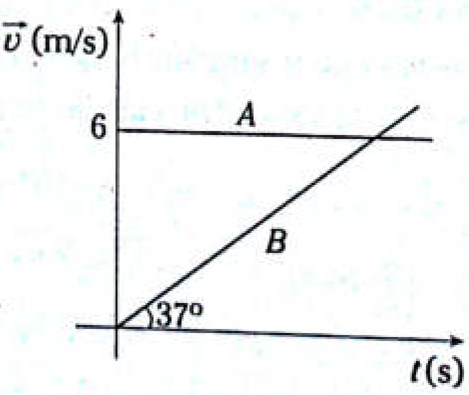
Reemplazamos $t=4$ s.

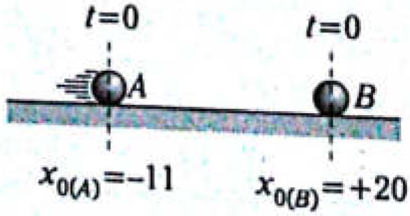
$$\vec{x}=-8+4\times 4+\frac{4^2}{2}$$

$$\therefore \quad \vec{x}=+16\,\text{m}$$

Problema N.° 5

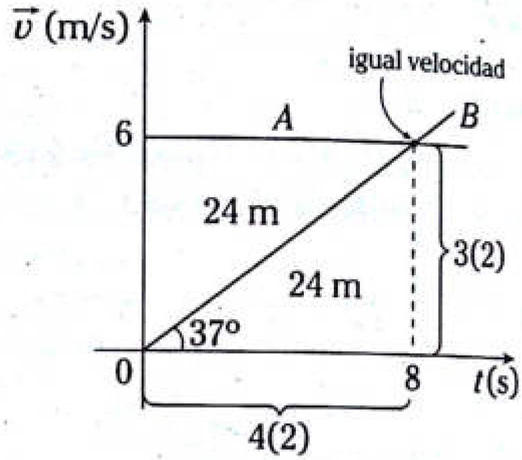
Se muestra la gráfica $\vec{v}$ vs. t para dos móviles que se mueven en vías paralelas al eje x, y muy próximos entre sí. Determine la separación entre los móviles cuando sus velocidades sean iguales.





Resolución

Notamos que A realiza MRU y B, MRUV. Ubicándolos en la trayectoria y en la gráfica, podemos determinar el recorrido de cada móvil hasta que sus velocidades sean iguales.



Examinando la gráfica, ambos móviles alcanzan igual rapidez en $t=8$ s.

De la gráfica

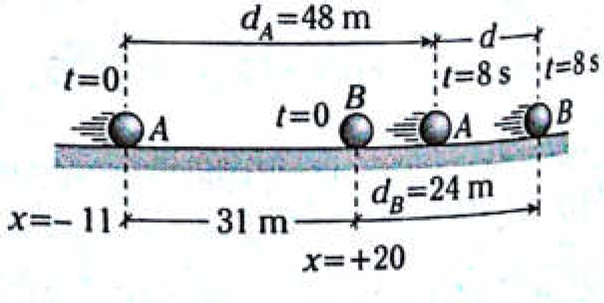
$d_A=\mathbb{A}_{\square}=8\times 6$

$d_A=48$ m

$d_B=\mathbb{A}_{\triangle}=\dfrac{8\times 6}{2}$

$d_B=24$ m

Representamos los movimientos.



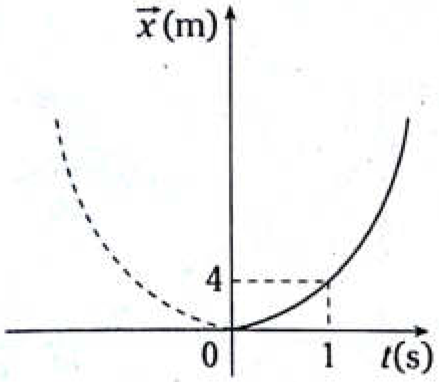
Relacionamos los segmentos del gráfico.

$$48+d=31+24$$

$$\therefore \quad d=7 \text{ m}$$

Problema N.° 6

Se muestra la gráfica $\vec{x}$ vs. t para un móvil que realiza MRUV, calcule su posición en t=3.



Resolución

Nos piden $\vec{x}$ (t=3 s).

Como se trata de un MRUV, su ecuación del movimiento es

$$\vec{x}=\vec{x}_0+\vec{v}_0t+\frac{\vec{a}t^2}{2} \qquad (*)$$

Observamos la gráfica en t=0.

$\vec{x}_0$=0 y en este punto se ubica el vértice de la parábola

$\vec{v}_0$=0

Reemplazamos en (*).

$$\vec{x}=0+0t+\frac{\vec{a}t^2}{2}=\frac{\vec{a}t^2}{2}$$

Además, para t=1 s, la $\vec{x}_{(t=1)}$=4.

$$\rightarrow\ 4=\frac{\vec{a}(1)^2}{2}\ \rightarrow\ \vec{a}=+8\ \text{m/s}^2$$

En consecuencia

$$\vec{x}=\frac{8t^2}{2}$$

$\vec{x}=4t^2$ (ecuación del movimiento)

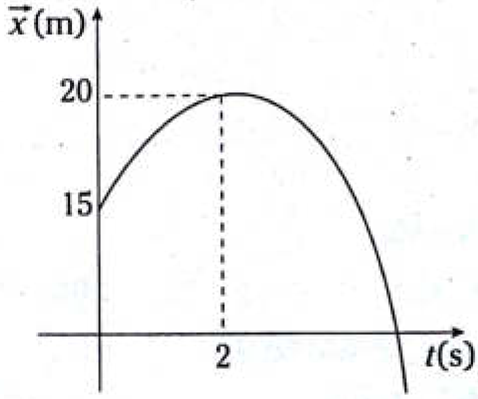
Reemplazamos t=3 s.

$$\vec{x}=4\cdot 3^2$$

$$\therefore\ \vec{x}=36\ \text{m}$$

Problema N.° 7

Para un móvil que realiza MRUV, se tiene la siguiente gráfica $\vec{x}$ vs. t. ¿En qué instante pasa por el origen de coordenadas?



Resolución

Nos piden en qué instante $\vec{x}$=0.

Planteamos la ecuación general de la posición para MRUV.

$$\vec{x}=\vec{x}_0+\vec{v}_0t+\frac{\vec{a}\cdot t^2}{2} \qquad (I)$$

A partir de la gráfica podemos plantear en t=0 s

$$15=\vec{x}_0+\vec{v}_0(0)+\frac{\vec{a}\cdot 0^2}{2}$$

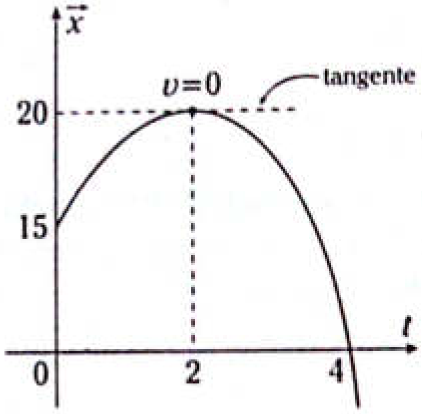
$\vec{x}_0$=+15 m

en t=2 s

$$20=15+\vec{v}_0\cdot 2+\vec{a}\cdot\frac{2^2}{2}$$

$$5=2\vec{v}_0+2\vec{a} \qquad (II)$$

Nos faltaría una ecuación para determinar $\vec{v}_0$ y $\vec{a}$, podemos aprovechar el vértice de la parábola.



$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t$$

en $t=2$ s

$$\rightarrow \quad 0=\vec{v}_0+\vec{a}(2)$$

$$2\vec{a}=-\vec{v}_0 \qquad \text{(III)}$$

Reemplazamos (III) en (II).

$$5=2\vec{v}_0+\left(-\vec{v}_0\right)$$

$$\vec{v}_0=+5 \text{ m/s}$$

En (III)

$$2\vec{a}=-5$$

$$\vec{a}=-\frac{5}{2} \text{ m/s}^2$$

Finalmente en (I).

$$\vec{x}=15+5t-\frac{5t^2}{4}$$

Para determinar el instante en que pasa por el origen de coordenadas, entonces $\vec{x}=0$.

$$0=15+5t-\frac{5}{4}t^2$$

$$0=3+t-\frac{t^2}{4}$$

multiplicamos por 4

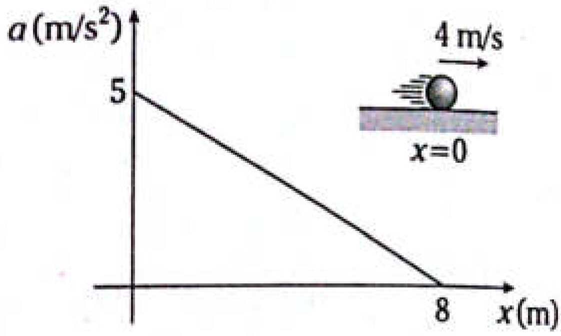
$$t^2-4t-12=0$$

$$\begin{matrix} t & -6 \\ t & 2 \end{matrix} \Rightarrow (t-6)(t+2)=0$$

$$\therefore \quad t=6 \text{ s}$$

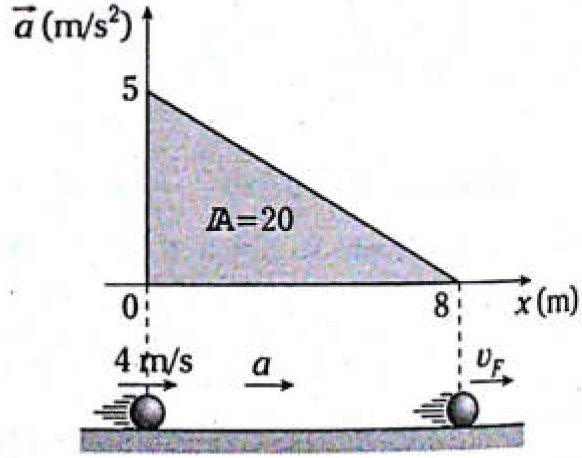
Problema N.° 8

Para el móvil que se muestra, se tiene la gráfica $\vec{a}$ vs. $\vec{x}$. Calcule su rapidez cuando pase por $x=8$ m.



Resolución

Como la $\vec{v}_0$ y $\vec{a}$ son (+), significa que la $\vec{v}$ va aumentando.



Aplicamos

$$v_F^2=v_0^2\pm 2\underbrace{ad}_{\text{área}}$$

$$v_F^2=4^2+2\cdot 20$$

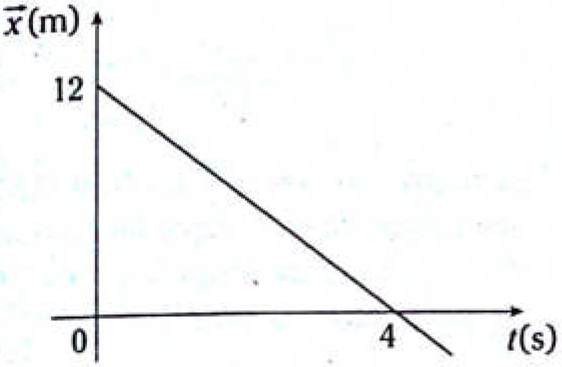
$$v_F^2=16+40$$

$$v_F^2=56$$

$$\therefore \quad v_F=2\sqrt{14} \text{ m/s}$$

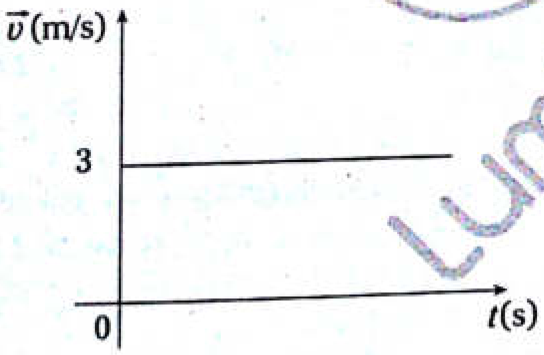
NIVEL BÁSICO

1. Se muestra la gráfica $\vec{x}$ vs. t para un móvil. Determine su velocidad en m/s.



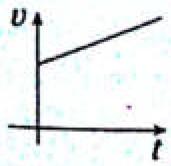
A) $-3\hat{\imath}$ B) $3\hat{\imath}$ C) $6\hat{\imath}$
D) $-6\hat{\imath}$ E) $4\hat{\imath}$

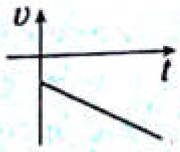
2. Si la posición inicial de un móvil que se mueve sobre el eje x es $\vec{x}_0$–10 m, calcule su posición en t=5 s.

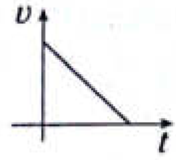


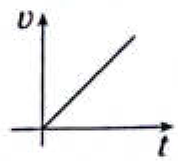
A) +5 m B) +10 m C) –5 m
D) +8 m E) +11 m

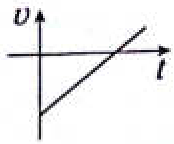
3. Para un MRUV tenemos que su posición es
$\vec{x} = 6 + 8t - 3t^2$
Indique cuál de las gráficas representa mejor la $\vec{v}$ vs. t.

A) 

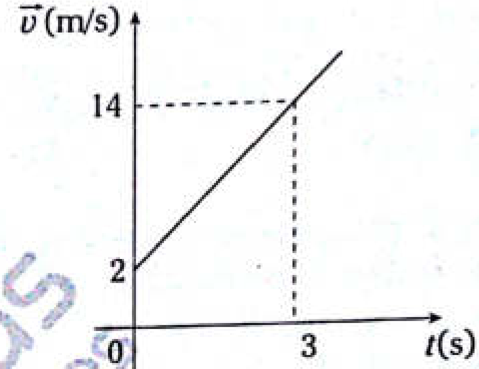
B) 

C) 

D) 

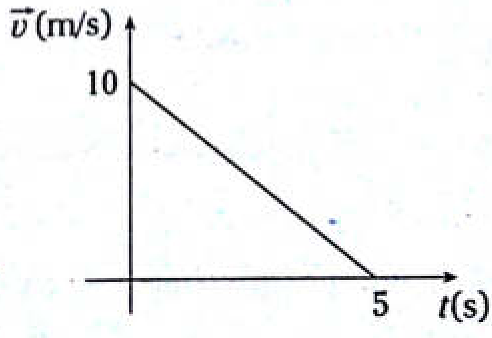
E) 

4. Se muestra la gráfica $\vec{v}$ vs. t para un MRUV. Calcule el módulo de su aceleración.



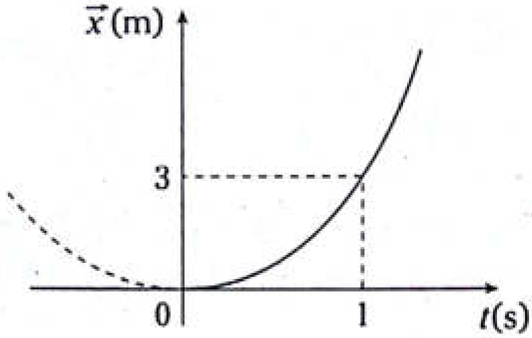
A) 3 m/s^2 B) 4 m/s^2 C) 5 m/s^2
D) 6 m/s^2 E) 1 m/s^2

5. Se muestra la gráfica $\vec{v}$ vs. t para un MRUV, a partir de ello, determine la ecuación de la posición respecto al tiempo $(\vec{x}_0 = +6\text{ m})$.



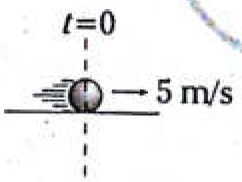
A) $\vec{x} = 6 + 10t - 2t^2$
B) $\vec{x} = 6 - 10t + t^2$
C) $\vec{x} = 6 + 10t - t^2$
D) $\vec{x} = 6 + 5t + 2t^2$
E) $\vec{x} = 6 - 5t - t^2$

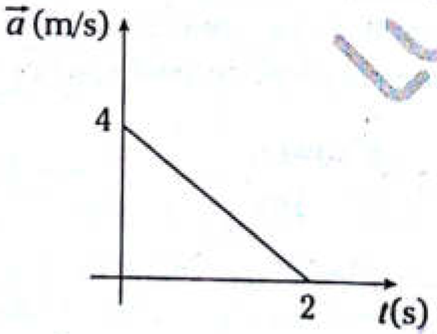
6. Se muestra la gráfica posición versus tiempo para un MRUV. Calcule la aceleración del móvil.



A) $6\ m/s^2$ B) $3\ m/s^2$ C) $1{,}5\ m/s^2$
D) $4\ m/s^2$ E) $9\ m/s^2$

7. Para un móvil con movimiento rectilíneo, determine su velocidad en t=2 s, para ello se muestra la gráfica $\vec{a}$ vs. t.

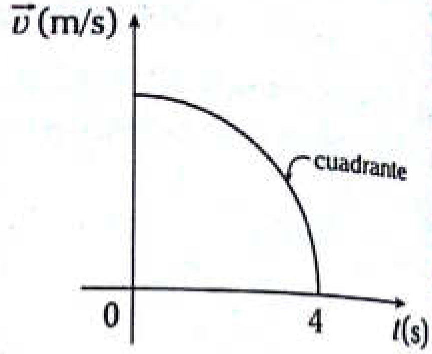




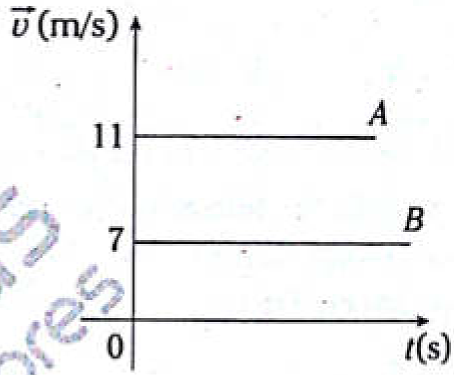
A) 4 m/s B) 9 m/s C) 7m/s
D) 3m/s E) 5m/s

8. Para un cuerpo que se mueve en línea recta, se cumple que su velocidad varía con el tiempo según la gráfica. Calcule su recorrido desde t=0 hasta t=4 s.

A) 4πm
B) 6πm
C) 7πm
D) 9πm
E) 10πm

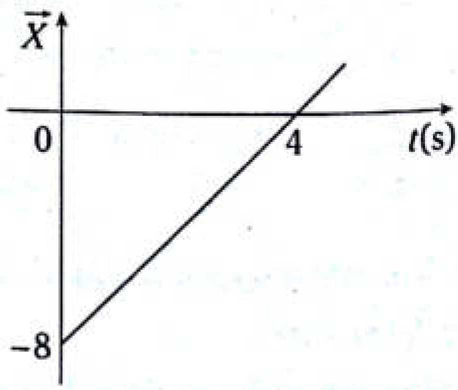


9. Para dos móviles que realizan MRU sobre una misma línea y separados inicialmente 20 m, se muestra la gráfica $\vec{v}$ vs. t. Calcule en qué instante chocan.



A) 5 s B) 4 s C) 8 s
D) 6 s E) 3 s

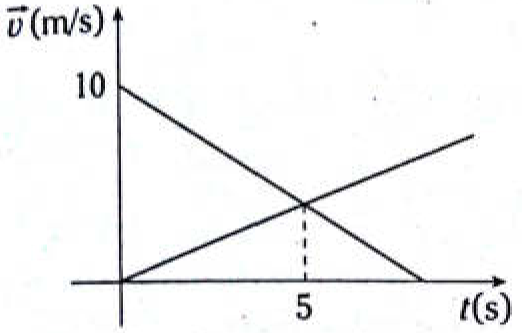
10. De acuerdo a la gráfica $\vec{x}$ vs. t, determine la ecuación de la posición respecto al tiempo.



A) $\vec{x}=8-2t$
B) $\vec{x}=-8-3t$
C) $\vec{x}=-8+4t$
D) $\vec{x}=-8-2t$
E) $\vec{x}=-8+2t$

NIVEL INTERMEDIO

11. Se muestra la gráfica $\vec{v}$ vs. t para dos móviles separados inicialmente 100 m. Calcule la mínima separación que existe entre ellos.

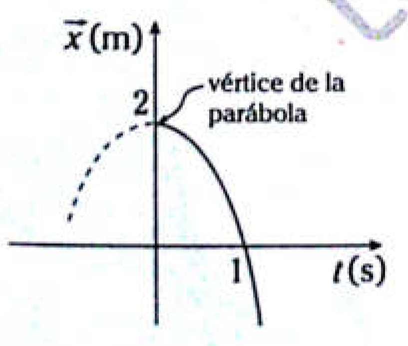


A) 50 m B) 60 m C) 70 m
D) 75 m E) 24 m

12. Si la posición de un móvil viene dado por $\vec{x}=6-8t+3t^2$, ¿en qué instante la velocidad es +22 m/s?

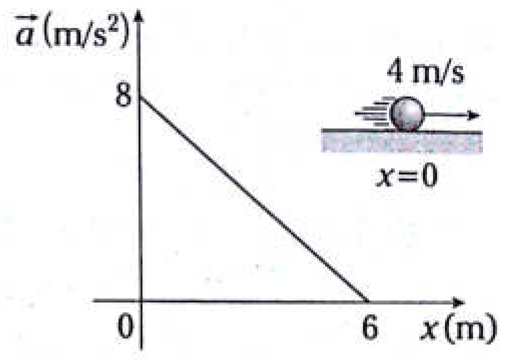
A) 6 s B) 3 s C) 4 s
D) 5 s E) 9 s

13. Para un MRUV se tiene la grafica $\vec{x}$ vs. t. Calcule la velocidad en t=3 s.



A) −8 m/s B) −10 m/s C) −6 m/s
D) +1 m/s E) −12 m/s

14. En un movimiento rectilíneo, la aceleración depende de la posición según la siguiente gráfica. Calcule la velocidad en x=6 m.

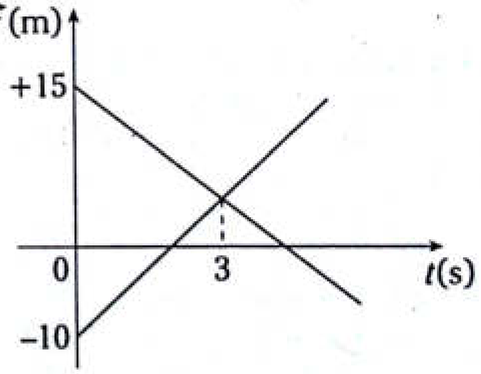


A) 8 m/s B) 7 m/s C) 5 m/s
D) 3 m/s E) 11 m/s

15. Si la aceleración de una partícula que realiza movimiento rectilíneo es $\vec{a}=4+2t$, calcule la variación de la velocidad desde t=0 hasta t=2 s.

A) 11 m/s B) 10 m/s C) 12 m/s
D) 9 m/s E) 4 m/s

16. Para dos móviles que realizan MRU, se tienen su gráficas $\vec{x}$ vs. t. Determine en qué instante la separación entre ellos será 100 m.

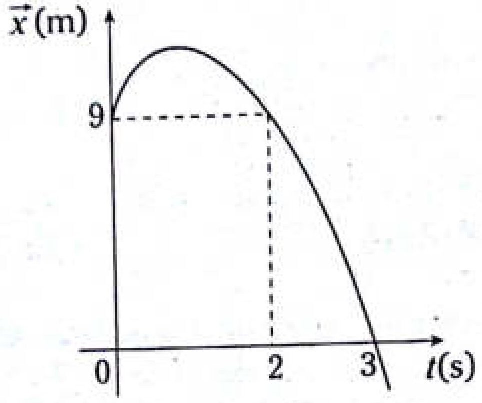


A) 12 s B) 15 s C) 10 s
D) 8 s E) 11 s

17. Las ecuaciones de la posición para dos móviles viene dado por $\vec{x}_A=-10+2t$ y $\vec{x}_B=40-3t$. ¿En qué instante equidistan del origen de coordenadas?

A) 20 s B) 10 s C) 30 s
D) 14 s E) 12 s

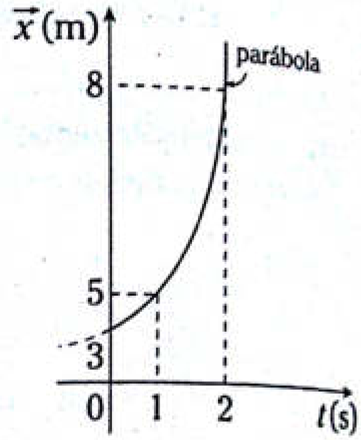
18. Se muestra la gráfica $\vec{x}$ vs. t para un MRUV. Calcule la posición más alejada del origen de coordenadas.



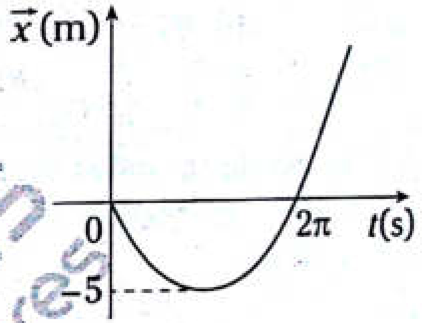
A) 12 m
B) 10 m
C) 15 m
D) 14 m
E) 18 m

19. De la gráfica $\vec{x}$ vs. t, determine el módulo de la aceleración del móvil

A) $2\ m/s^2$
B) $3\ m/s^2$
C) $1\ m/s^2$
D) $6\ m/s^2$
E) $4\ m/s^2$



20. Para un móvil que realiza MRUV, se tiene la siguiente gráfica. Calcule su recorrido desde $t=0$ hasta $t=4\pi$ s.



A) 55 m
B) 30 m
C) 40 m
D) 80 m
E) 50 m

Estática

Capítulo VI

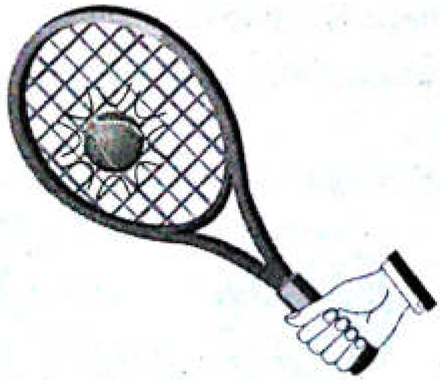
OBJETIVOS
- Conocer los conceptos de interacción, fuerza y momento de una fuerza.
- Realizar el diagrama de cuerpo libre (DCL) de un cuerpo o sistema.
- Establecer las condiciones para el equilibrio mecánico.

1. Nociones previas

Para poder comprender las leyes de equilibrio, es necesario desarrollar algunos conceptos previos, como son la interacción y la fuerza.

1.1. INTERACCIÓN

Es la acción mutua que ejercen dos cuerpos. Para comprender este concepto consideramos el siguiente acontecimiento: Una pelota de tenis golpea a una raqueta, como se muestra en el gráfico.



Se puede observar que, debido al impacto entre la pelota y la raqueta, ambos cuerpos experimentan los siguientes cambios:

- La pelota deforma la malla de la raqueta. A esto se le denomina la acción de la pelota sobre la raqueta.
- La raqueta cambia la dirección del movimiento de la pelota, y esto representa la acción de la raqueta sobre la pelota.

A esta acción mutua entre la pelota y la raqueta se le denomina interacción.

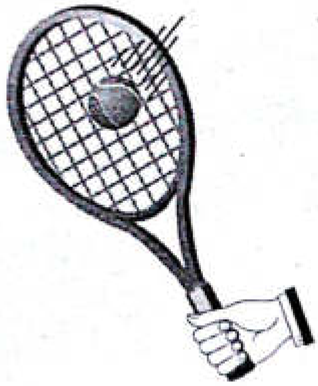
Representación
Para representar la interacción, se realiza una separación imaginaria de los cuerpos.

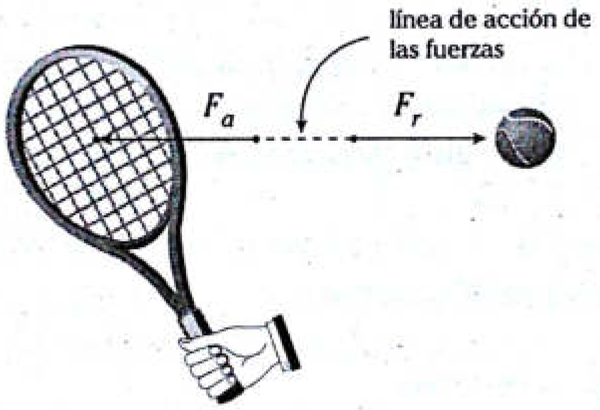
1.2. FUERZA

Es una magnitud vectorial que mide la acción de un cuerpo sobre otro cuerpo.
Su unidad de medida en el sistema internacional de unidades es el newton (N).

Representación de la interacción por medio de fuerzas

Se realiza una separación imaginaria entre los puntos de contacto de los cuerpos.





donde

- $\vec{F}_a$: fuerza de acción (fuerza que ejerce la pelota a la raqueta)
- $\vec{F}_r$: fuerza de reacción (fuerza que ejerce la raqueta a la pelota)

2. Tercera ley de Newton

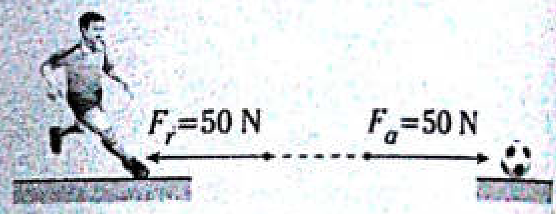
En toda interacción siempre existen dos fuerzas, fuerza de acción $(\vec{F}_a)$ y fuerza de reacción $(\vec{F}_r)$, con las siguientes características:

- Son colineales.
- Actúan sobre cuerpos diferentes.
- Tienen direcciones opuestas.
- Tienen el mismo módulo (valor).

$$\boxed{F_a = F_r}$$

IMPORTANTE

Que las fuerzas de acción y reacción presenten el mismo módulo no significa que sean iguales; por ejemplo, cuando un jugador da un puntapié a una pelota.



Si expresamos las fuerzas por medio de los vectores unitarios, tenemos que

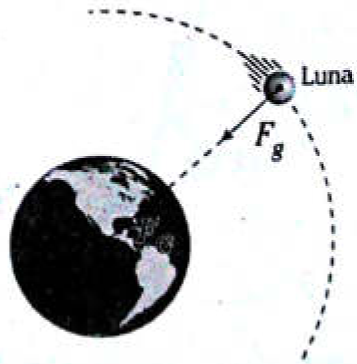
$$\left.\begin{aligned}\vec{F}_a &= +50\hat{\imath}\,(\mathrm{N})\\ \vec{F}_r &= -50\hat{\imath}\,(\mathrm{N})\end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\vec{F}_a = -\vec{F}_r}$$

3. Fuerzas usuales en mecánica

Son aquellas fuerzas que empleamos comúnmente en mecánica.

3.1. FUERZA DE GRAVEDAD $(\vec{F}_g)$

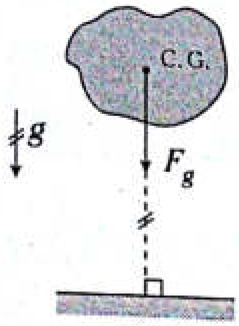
Es aquella fuerza con la cual la Tierra atrae a todos los cuerpos que se encuentran en sus inmediaciones. Esta fuerza está concentrada en un punto denominado centro de gravedad (C.G.) y se dirige hacia el centro de la Tierra.



donde

- $\vec{F}_g$: fuerza de gravedad
- $\vec{F}_G$: fuerza gravitacional

En las cercanías a la superficie terrestre, tenemos que



$$\boxed{F_g = m \cdot g}$$

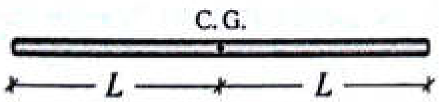
donde

- m: masa del cuerpo, en kilogramos (kg)
- g: aceleración de la gravedad (m/s^2)

Centro de gravedad para cuerpos homogéneos
Se considera un cuerpo homogéneo a aquel cuya masa se distribuye uniformemente en todas sus dimensiones. Para estos casos, el centro de gravedad ocupa el mismo lugar del centro geométrico.

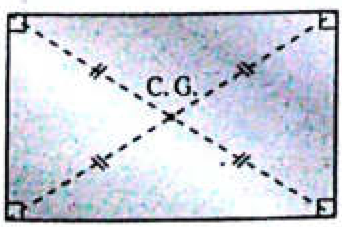
Ejemplos

1. Barra homogénea



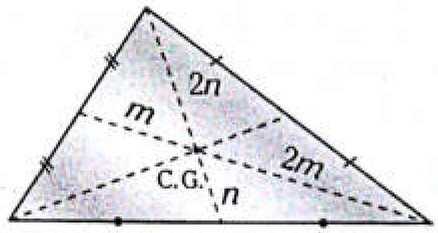
El centro de gravedad es el punto medio de la barra.

2. Placa rectangular homogénea



El centro de gravedad se ubica en la intersección de las diagonales.

3. Placa triangular homogénea



El centro de gravedad se ubica en la intersección de las medianas (baricentro).

4. Esfera homogénea

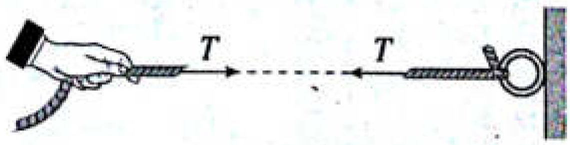
El centro de gravedad se ubica en el centro de la esfera.

3.2. FUERZA DE TENSIÓN $(\vec{T})$

Es aquella fuerza que surge en el interior de los hilos, cuerdas, cables, etc., y se manifiesta como una "resistencia" que estos cuerpos ofrecen a ser estirados.

Ejemplo
Una cuerda es atada a una argolla empotrada en la pared y es jalada del otro extremo.

Para representar la fuerza de tensión, debemos considerar que se trata de una cuerda ideal, es decir, no se estira y su masa se desprecia.

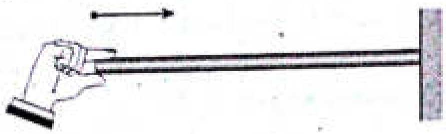


De esta manera, notamos que la fuerza de tensión $(\vec{T})$ se opone al estiramiento de la misma. Como es una cuerda ideal, la tensión a lo largo de ella mantiene el mismo módulo.

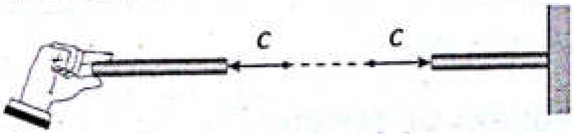
3.3. FUERZA DE COMPRESIÓN $(\vec{C})$

Es una fuerza interna que surge en los cuerpos rígidos y se manifiesta como una resistencia a ser comprimidos.

Ejemplo
Una barra se encuentra apoyada en una pared y es empujada contra ella.



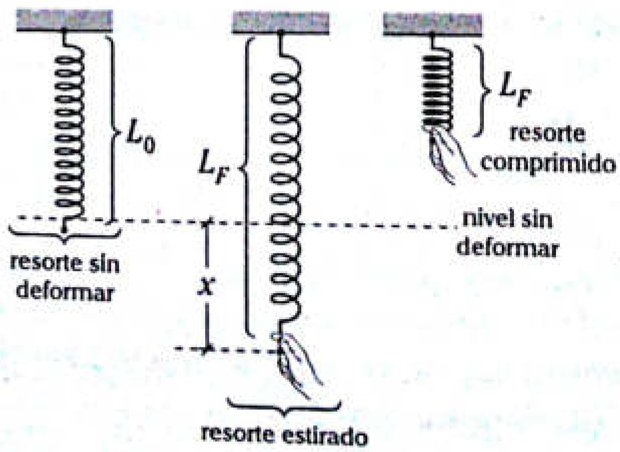
Para representar la fuerza de compresión $(\vec{C})$, debemos realizar un corte imaginario y separar dos tramos, así:



3.4. FUERZA ELÁSTICA $(\vec{F}_E)$

Es una fuerza que surge en aquellos cuerpos que poseen un elevado grado de elasticidad; por ejemplo, ligas, resortes, barras de goma, etc. Mediante esta propiedad, estos cuerpos, al ser deformados (estirados o comprimidos), tratan de volver a su forma original. La fuerza con la cual los cuerpos tienden a recuperar su forma original se denomina fuerza elástica $(\vec{F}_E)$.

Ejemplo
Examinemos el caso de un resorte; uno de sus extremos está unido al techo, y al otro extremo le aplicamos una fuerza.



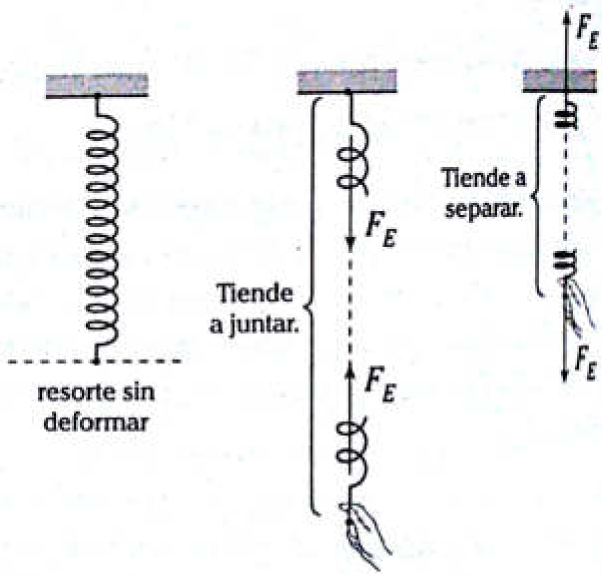
Cuando el resorte se encuentra estirado o comprimido, experimenta una deformación longitudinal (x) que se determina de la siguiente manera:

$$\boxed{x = |L_F - L_0|}$$

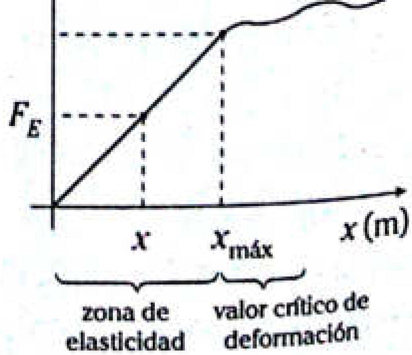
donde

- L_F: longitud final del resorte
- L_0: longitud natural del resorte

Para graficar la fuerza elástica, se realiza un corte imaginario al resorte y se toma en cuenta la tendencia que posee el cuerpo elástico por regresar a su estado natural.



Además, el inglés Robert Hooke demostró experimentalmente que el módulo de la fuerza elástica (F_E) cambia con la deformación longitudinal (x).



En la zona de elasticidad se cumple que

$$\boxed{F_E \text{ DP } x}$$

$\rightarrow \dfrac{F_E}{x} = \text{cte. de rigidez } (K)$

$$\boxed{F_E = Kx} \quad \text{(ley de Hooke)}$$

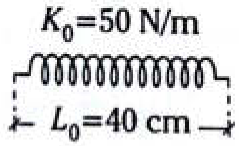
donde K se mide en N/m.

IMPORTANTE

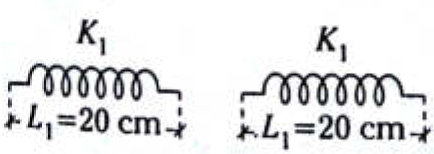
La constante de rigidez (K) depende de las propiedades elásticas del cuerpo (mientras más rígido sea el cuerpo, K toma mayor valor) y de la longitud del cuerpo. Al reducir la longitud del resorte, se hace más difícil estirarlo; entonces K aumenta.

Ejemplo

Al resorte mostrado a continuación, lo dividimos en dos partes de igual tamaño y determinamos la constante de rigidez de una de las partes.



Luego, cortamos el resorte en dos porciones de igual tamaño.



Se cumple lo siguiente:

$$\boxed{K \text{ IP } L \rightarrow K \cdot L = \text{cte.}}$$

$\rightarrow K_0 \cdot L_0 = K_1 \cdot L_1$

Reemplazamos.

$$50(40) = K_1(20)$$

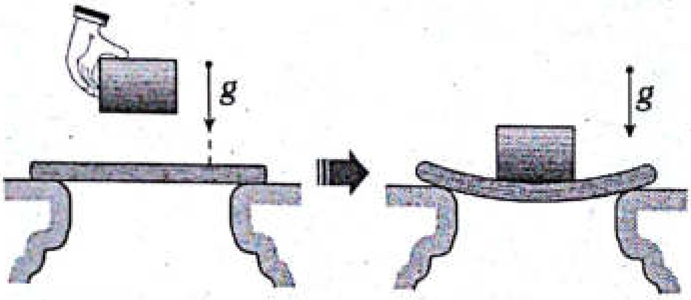
$\therefore \quad K_1 = 100$ N/m

3.5. FUERZA POR CONTACTO

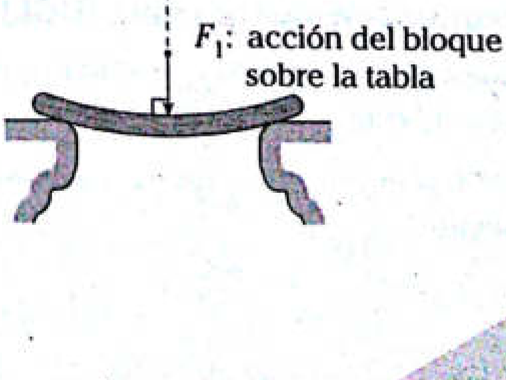
Es la fuerza que surge debido al contacto físico entre las superficies de dos cuerpos.

Ejemplo

Un ladrillo se ubica sobre una tabla.



Debido a que la Tierra atrae al bloque hacia abajo, este dobla la tabla y, a su vez, la tabla impide que el bloque descienda neutralizando la acción de la fuerza de gravedad. Para graficar las fuerzas entre las superficies, se realiza una separación imaginaria.



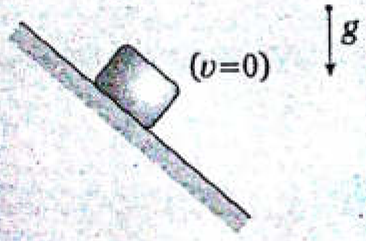
NOTA

Cuando las fuerzas por contacto actúan en forma perpendicular sobre las superficies en contacto, se les denomina fuerza normal $(\vec{F}_N \text{ o } \vec{N})$.

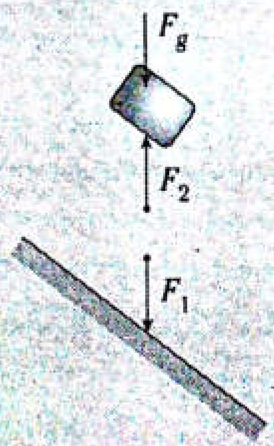
No siempre la fuerza por contacto actúa en forma perpendicular a las superficies.

Ejemplo

Cuando colocamos un bloque sobre un plano inclinado y este no desliza.



Al realizar una separación imaginaria entre las superficies en contacto.



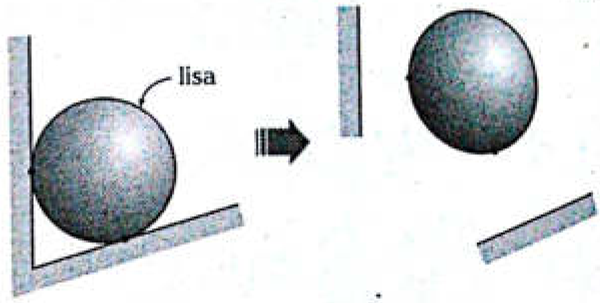
Como el bloque no se mueve, la fuerza por contacto $\vec{F}_2$ neutraliza la acción de la $\vec{F}_g$; es por este motivo que actúan en la misma vertical.

4. Diagrama de cuerpo libre (DCL)

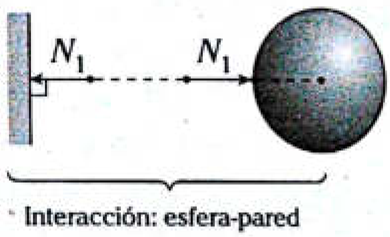
Es el gráfico de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo o sistema.

Para realizar el DCL, se sugiere el siguiente procedimiento:

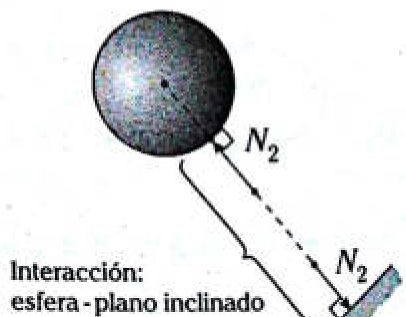
1. Aislar el cuerpo del cual se quiere su DCL. Para ello se realizan separaciones imaginarias.



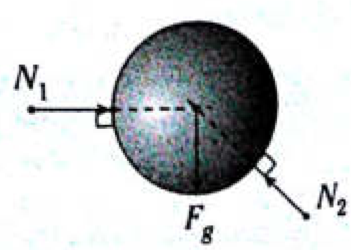
2. Se determina el número de fuerzas que se van a graficar en el DCL. Esto se obtiene analizando las interacciones entre el cuerpo y lo que lo rodea.



Ambas superficies están en contacto, pero como la esfera es lisa, las fuerzas se grafican en una línea perpendicular a las superficies (ampliaremos este aspecto más adelante).



3. Se realiza el gráfico de todas las fuerzas que actúan en un mismo cuerpo.



5. Equilibrio de traslación

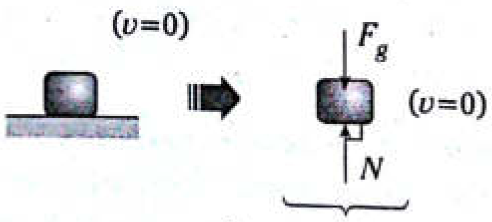
Es un estado mecánico de movimiento, que presenta un cuerpo. Puede ser equilibrio estático o equilibrio cinético.

5.1. EQUILIBRIO ESTÁTICO

Es aquel estado en el cual el cuerpo no presenta movimiento mecánico, es decir, se encuentra en reposo.

Ejemplo

DCL



Para que el cuerpo no cambie su estado de reposo, las fuerzas deben neutralizarse: $F_g=N$.

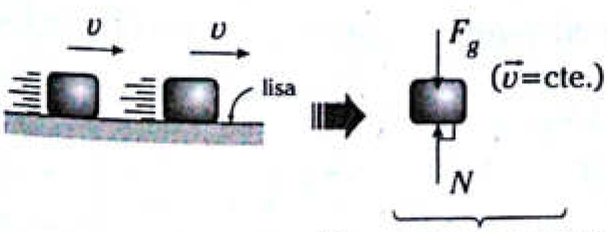
$\therefore\ \vec{F}_{\text{resultante}}=\vec{0}$

5.2. EQUILIBRIO CINÉTICO

Es aquel estado en el cual el cuerpo se traslada manteniendo la misma velocidad, es decir, experimenta MRU.

Ejemplo

DCL



Para que el cuerpo mantenga la misma velocidad, las fuerzas deben anularse entre sí (equilibrarse): $F_g=N$.

$\therefore\ \vec{F}_{\text{resultante}}=\vec{0}$

6. Primera condición de equilibrio mecánico

Si un cuerpo se encuentra en reposo o se traslada con MRU, entonces presenta equilibrio de traslación.

Se cumple

$$\boxed{\vec{F}_{\text{resultante}}=\vec{0}}$$

Forma analítica

A partir del DCL, se deben tener todas las fuerzas sobre dos ejes que sean perpendiculares.

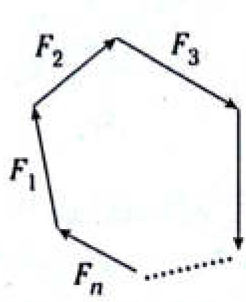
Si es necesario, se recurre a la descomposición o agrupación de fuerzas.

$$\boxed{\sum F_X(\rightarrow)=\sum F_X(\leftarrow)}$$

$$\boxed{\sum F_Y(\uparrow)=\sum F_Y(\downarrow)}$$

Forma gráfica

A partir del DCL, se trasladan las fuerzas y se ubican una a continuación de otra, tomando en cuenta que el extremo de una fuerza debe coincidir con el origen de la siguiente fuerza.



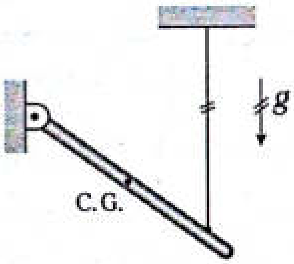
un polígono

> **IMPORTANTE**
> Un caso particular del equilibrio mecánico ocurre cuando sobre el cuerpo solo actúan tres fuerzas y este se encuentra en reposo. Entonces se cumple que al realizar el DCL, las tres fuerzas son paralelas o concurrentes.

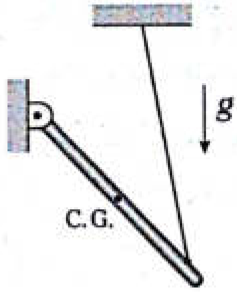
Aplicación 1

Realice el DCL de la barra para dos posiciones diferentes.

a.



b.

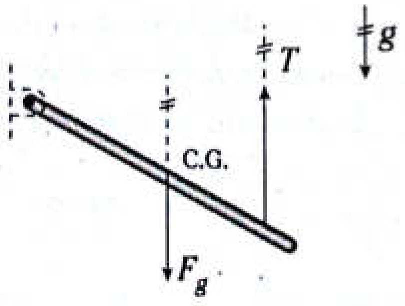


Resolución

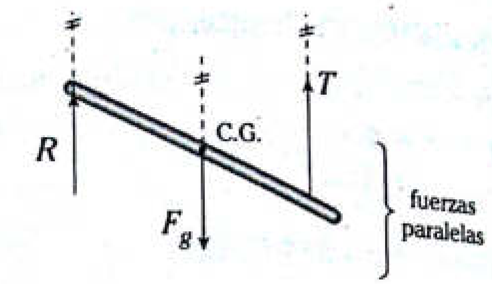
Al realizar el DCL de un cuerpo, se debe iniciar por el gráfico de aquellas fuerzas cuya dirección y punto de aplicación son conocidos por las condiciones que plantea el problema.

En este caso, iniciaremos el gráfico por la $\vec{F}_g$, luego la tensión $(\vec{T})$ y, finalmente, analizaremos el comportamiento de la $\vec{R}$ en a y b.

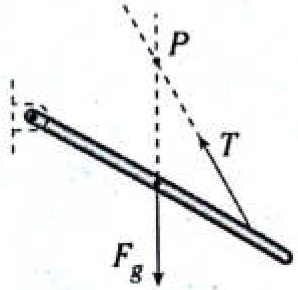
a. Realizamos el DCL de la barra.



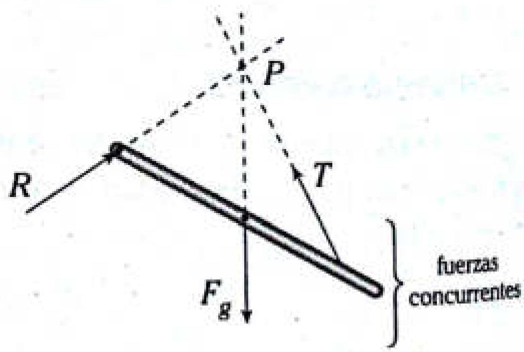
Como la $\vec{F}_g$ es paralela a la $\vec{T}$, en consecuencia, la $\vec{R}$ necesariamente debe ser paralela a las otras dos, y para impedir que la barra caiga, debe dirigirse hacia arriba.



b. Realizamos el DCL de la barra.

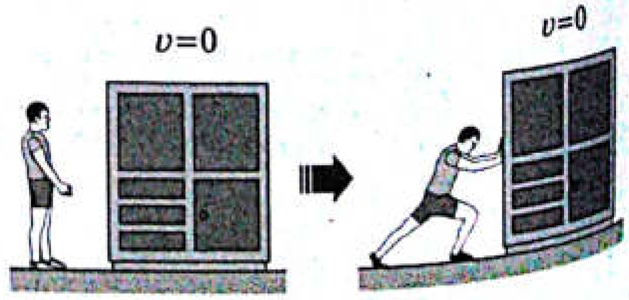


Las líneas de acción de la $\vec{F}_g$ y la $\vec{T}$ se intersecan en un punto P denominado punto de concurrencia. Para que la barra se encuentre en equilibrio, la línea de acción que contiene a $\vec{R}$ necesariamente debe pasar por el punto P.

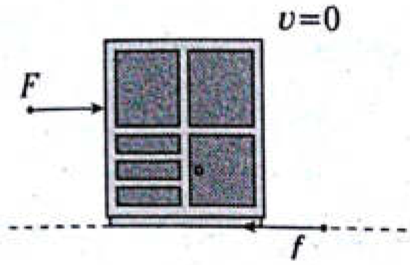


7. Fuerza de rozamiento $(\vec{f})$

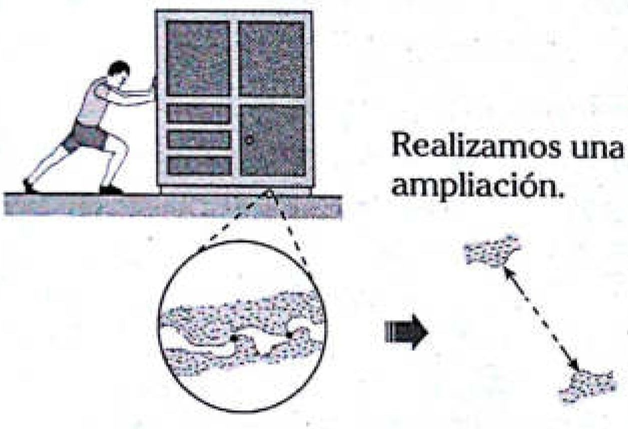
Consideremos el siguiente acontecimiento: Se desea trasladar de una habitación a otra un ropero completamente lleno de ropa. Pero al empujarlo se observa que el ropero no avanza.



Entonces deducimos que debe actuar otra fuerza que se opone a que el ropero se deslice. A esta fuerza se le denomina fuerza de rozamiento o fricción $(\vec{f})$ y debe surgir debido a la interacción del ropero con el piso.



Pero ¿cuál es la naturaleza de esta fuerza? Para dar respuesta a esta pregunta, examinemos con mayor detalle las superficies en contacto.

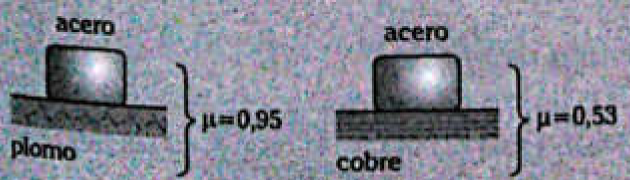


Notamos que las superficies en contacto presentan irregularidades, también llamadas asperezas, y cuando una de las superficies intenta deslizarse respecto de la otra, surgen entre sí pequeñas fuerzas en los puntos de contacto que van a dar origen a la fuerza de rozamiento.

IMPORTANTE

Para poder caracterizar el grado de aspereza entre dos superficies en contacto, se emplea una cantidad adimensional denominada coeficiente de rozamiento (μ).

Ejemplos



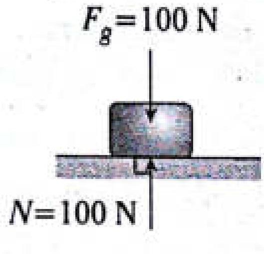
7.1. FUERZA DE ROZAMIENTO ESTÁTICO (f_S)

Esta fuerza surge entre dos superficies ásperas cuando una de ellas **intenta deslizarse** con respecto a la otra, pero no lo logra debido a la acción de la fuerza de rozamiento estático (f_S) y siempre actúa "oponiéndose" a este posible deslizamiento.

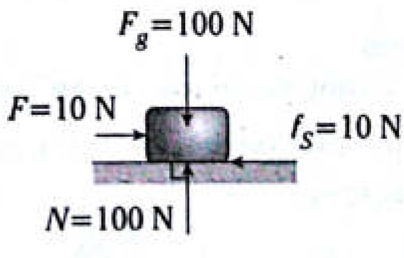
Ejemplo

Consideremos que un bloque de 10 kg se encuentra sobre una superficie horizontal áspera y de pronto se le intenta poner en movimiento aplicando una fuerza $\vec{F}$ horizontal, cuyo módulo se incrementa gradualmente. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.

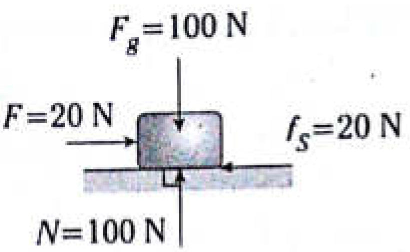
- Inicialmente, el bloque solo está apoyado en la superficie y no surge la fuerza de rozamiento.



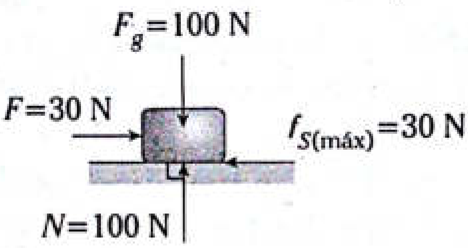
- Le aplicamos al bloque una fuerza horizontal de 10 N, pero el bloque no se mueve; esto se debe a que surge la fuerza de rozamiento estático (f_S), también de 10 N, que se opone al deslizamiento del bloque.



- Ahora le aplicamos al bloque una fuerza horizontal de 20 N, pero el bloque continúa en reposo; esto debido a que la fuerza de rozamiento estático (f_S) ha incrementado su valor también a 20 N.



- Aplicamos una fuerza horizontal de 30 N y notamos que el bloque está a punto de deslizar (movimiento inminente); en este caso, la fuerza de rozamiento estático toma su valor máximo $\left(f_{S(\text{máx})}\right)$, que en nuestro caso es de 30 N.

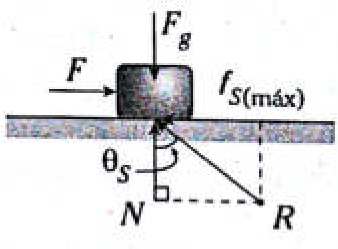


Conclusiones

- La $\vec{f}_S$ puede tomar diversos valores, pero todos estos valores se encuentran en un intervalo.

$$0 \le f_S \le f_{S(\text{máx})}$$

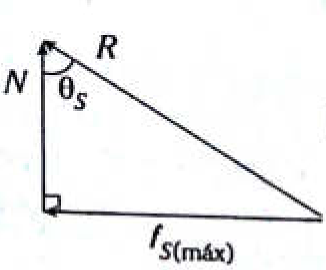
- La $\vec{f}_S$ toma su máximo valor en el instante en que el cuerpo se encuentra a punto de deslizar.



donde

- θ_S: ángulo de rozamiento estático
- R: reacción del piso sobre el bloque

De la figura



$$\tan\theta_S = \frac{f_{S(\text{máx})}}{N}$$

- El coeficiente de rozamiento estático (μ_S) es numéricamente igual a la tangente del ángulo de rozamiento estático (θ_S).

$$\rightarrow\ \tan\theta_S = \mu_S = \frac{f_{S(\text{máx})}}{N}$$

En consecuencia

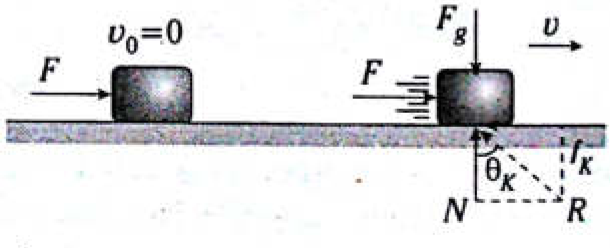
$$\boxed{f_{S(\text{máx})} = \mu_S \cdot N}$$

7.2. FUERZA DE ROZAMIENTO CINÉTICO (f_K)

Esta fuerza surge entre dos superficies ásperas cuando una de ellas se **desliza** con respecto a la otra. La fuerza de rozamiento cinético siempre actúa en oposición al deslizamiento que se da entre las superficies.

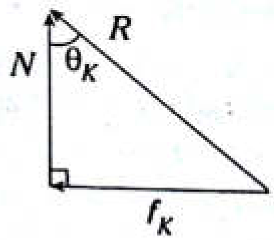
Ejemplo

Consideremos el bloque del caso anterior, pero esta vez lo empujamos con una fuerza horizontal $F > 30$ N.



donde θ_K es el ángulo de rozamiento cinético.

Del gráfico



$$\underbrace{\tan\theta_K}_{\substack{\text{coeficiente de} \\ \text{razonamiento} \\ \text{cinético } (\mu_K)}} = \frac{f_K}{N}$$

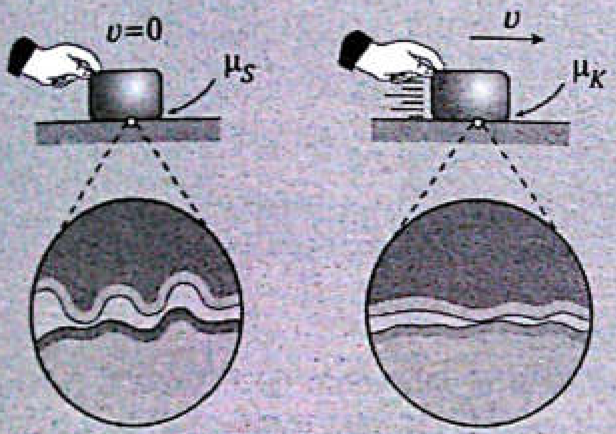
$$\rightarrow\ \tan\theta_K = \mu_K = \frac{f_K}{N}$$

En consecuencia

$$\boxed{f_K = \mu_K \cdot N}$$

Importante

Entre dos superficies que se encuentran en contacto, se tienen dos coeficientes de rozamiento. El primero mide el grado de aspereza cuando las superficies no se deslizan, y el segundo mide el grado de aspereza cuando una de las superficies se desliza con respecto a la otra.



Para que las superficies puedan deslizarse, una respecto a la otra, algunos obstáculos deben quebrarse suavizando las superficies, es decir, reduciendo el grado de asperezas.
En consecuencia

$$\boxed{\mu_S > \mu_K}$$

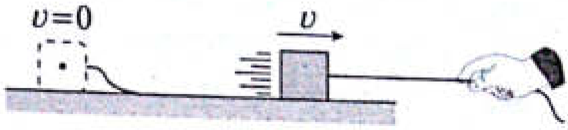
Observación

El valor del μ que se empleará en los problemas va a depender del estado de movimiento en la que se encuentran las superficies en contacto; es decir, si una superficie se encuentra a punto de deslizarse con respecto a la otra, se emplea el μ_S y, si logra deslizarse, se empleará el μ_K.

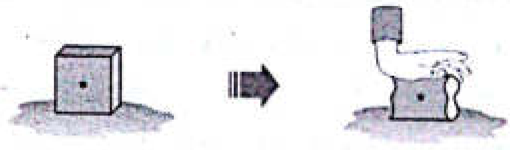
8. Momento de una fuerza $\left(\vec{M}_O^F\right)$

Hemos podido observar que una fuerza, al actuar sobre un cuerpo, puede producir diversos efectos, tales como los siguientes:

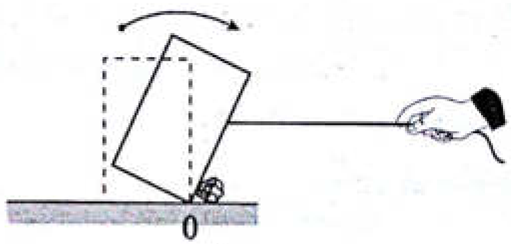
- Alterar su movimiento de traslación.



- Alterar su forma (deformarlos).



- Producir movimiento de rotación.



Nota

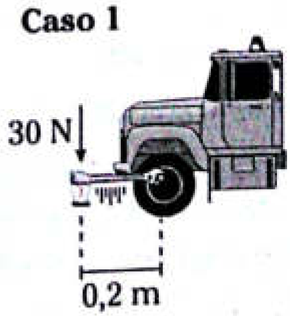
Todos los puntos del bloque giran describiendo circunferencias en torno al punto 0. Entonces se dice que el bloque presenta un movimiento de rotación.

Este último efecto es el que vamos a examinar en este capítulo, ya que lo encontramos en varios acontecimientos de la vida diaria.

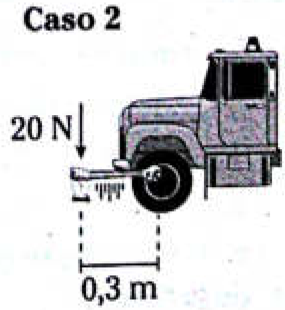
Veamos los siguientes casos:

Un joven intenta aflojar las tuercas de la rueda de un automóvil.

Caso 1



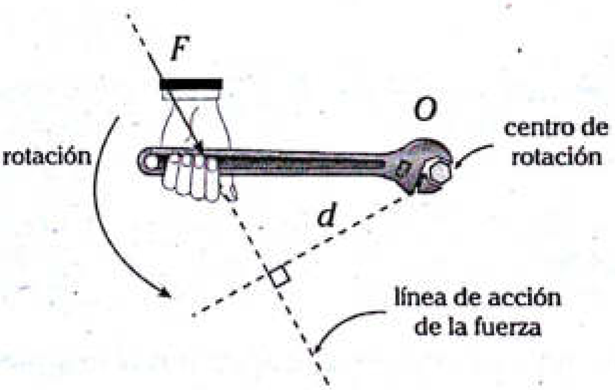
Caso 2



Examinamos el caso 1, donde el joven, al aplicar una fuerza a la llave, origina el efecto de rotación y, de esta manera, puede aflojar los pernos; pero en el caso 2, el joven aplica la fuerza en el extremo de la llave y produce el mismo efecto de rotación con un menor esfuerzo.

En consecuencia, para producir el efecto de rotación, va a depender de la fuerza que se ejerce y a qué distancia del centro de rotación aplicamos la fuerza, todo ello se caracteriza mediante una magnitud física conocida como **momento de una fuerza** $\left(\vec{M}_O^F\right)$, la cual nos expresa la intensidad con que una fuerza tiende a generar rotación en un cuerpo con respecto a un punto denominado centro de momentos.

Matemáticamente



$$\boxed{\vec{M}_O^F = F \cdot d}$$

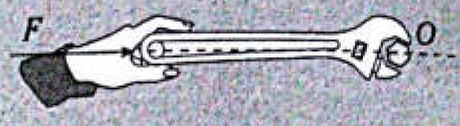
Unidad: (N·m)

donde

- O: centro de momentos o rotación
- F: módulo de la fuerza aplicada en N
- d: brazo de la fuerza, es aquella distancia que parte del centro de momentos y llega en forma perpendicular a la línea de acción de la fuerza.

NOTA

Cuando aplicamos una fuerza de tal manera que su línea de acción pasa por el centro de momentos, no se produce rotación.

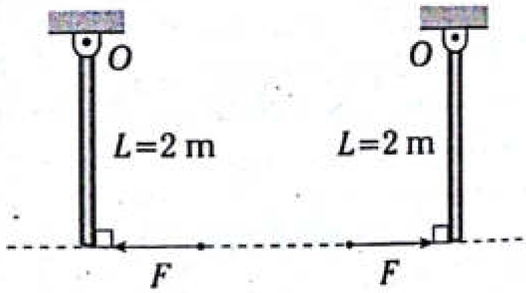


Entonces

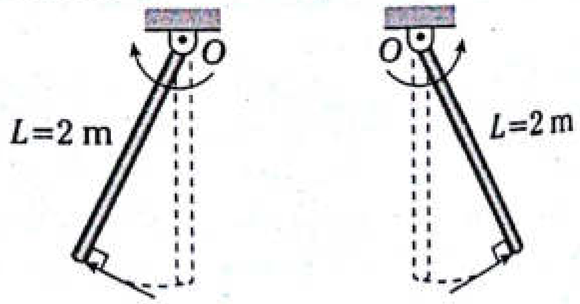
$$\boxed{\vec{M}_O^F = O}$$

Aplicación 2

Determine el momento de F(F=10 N) con respecto al punto O en los siguientes casos:



Resolución



$\underbrace{F=10\text{ N}}$

Produce un efecto de rotación en sentido horario.

$$\vec{M}_O^F = F \cdot L$$

$$\rightarrow \vec{M}_O^F = 10 \times 2$$

$$\vec{M}_O^F = 20\text{ N} \times \text{m}$$

$\underbrace{F=10\text{ N}}$

Produce un efecto de rotación en sentido antihorario.

$$\vec{M}_O^F = F \cdot L$$

$$\rightarrow \vec{M}_O^F = 10 \times 2$$

$$\vec{M}_O^F = 20\text{ N} \times \text{m}$$

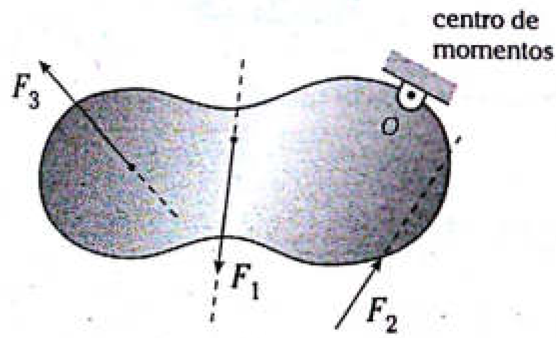
Como estos resultados no toman en cuenta la diferencia en los sentidos de la rotación, se establece la siguiente convención:

$$\underbrace{\boxed{\overrightarrow{M}_O^{F} = -20\ \text{N}\times\text{m}}}_{\text{efecto de rotación en sentido horario}} \qquad \underbrace{\boxed{\overrightarrow{M}_O^{F} = +20\ \text{N}\times\text{m}}}_{\text{efecto de rotación en sentido antihorario}}$$

: (–)   : (+)

8.1. MOMENTO RESULTANTE $\left(\overrightarrow{M}_O^{\text{res}}\right)$

Considere que sobre un cuerpo actúan varias fuerzas, tal como se muestra en el gráfico.



Cada uno de ellos genera un efecto de rotación en el cuerpo con respecto al punto O.
Se define el momento resultante respecto de $O\left(\overrightarrow{M}_O^{\text{res}}\right)$ como la suma de todos los momentos con respecto al centro de momentos.

$$\boxed{\overrightarrow{M}_O^{\text{res}} = \overrightarrow{M}_O^{F}1 + \overrightarrow{M}_O^{F}2 + \overrightarrow{M}_O^{F}3}$$

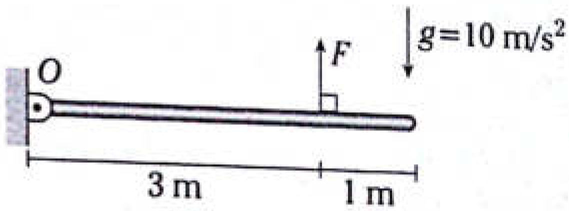
En general

$$\overrightarrow{M}_O^{\text{res}} = \sum \overrightarrow{M}_O^{F}$$

Aplicación 3

Una barra homogénea de 3 kg y 4 m de longitud se encuentra en posición horizontal, en el instante que se muestra. Determine el momento resultante sobre la barra con respecto al punto O para dos valores diferentes de F.

a. F=21 N
b. F=19 N

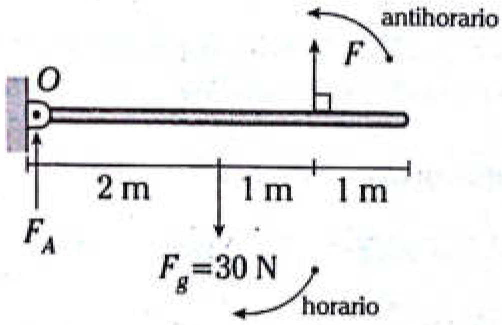


Resolución

Sabemos

$$\boxed{\overrightarrow{M}_O^{\text{res}} = \sum \overrightarrow{M}_O^{F}}$$

Calculemos los momentos con respecto al punto O. Para ello graficamos las fuerzas.



NOTA

Como la línea de acción de F_A pasa por el centro de momentos (O), el brazo de la fuerza F_A es nulo.

$\rightarrow M_O^{F_A} = 0$

a. Para F=21 N

$M_O^{F} = +21(3)$ $M_O^{F_g} = -30(2)$

$M_O^{F} = +63\ \text{N}\cdot\text{m}$ $M_O^{F_g} = -60\ \text{N}\cdot\text{m}$

Luego

$\overrightarrow{M}_O^{\text{res}} = M_O^{F} + M_O^{F_g}$

$\overrightarrow{M}_O^{\text{res}} = +63 - 60$

$\overrightarrow{M}_O^{\text{res}} = +3\ \text{N}\cdot\text{m}$

Este resultado nos indica que la barra inicia su movimiento de rotación en sentido antihorario.

b. Para $F=19$ N

$M_O^F\circlearrowleft=+19(3)$ $\qquad$ $M_O^{F_g}\circlearrowright=-30(2)$

$M_O^F\circlearrowleft=57\ \text{N}\cdot\text{m}$ $\qquad$ $M_O^{F_g}\circlearrowright=-60\ \text{N}\cdot\text{m}$

Luego

$\overrightarrow{M}_O^{\text{res}}=M_O^F\circlearrowleft+M_O^{F_g}\circlearrowright$

$\overrightarrow{M}_O^{\text{res}}=+57-60$

$\overrightarrow{M}_O^{\text{res}}=-3\ \text{N}\cdot\text{m}$

Este resultado nos indica que la barra inicia su movimiento de rotación en sentido horario.

Pero ¿qué ocurre si $F=20$ N?

$M_O^F\circlearrowleft=+20(3)$ $\qquad$ $M_O^{F_g}\circlearrowright=-30(2)$

$M_O^F\circlearrowleft=+60\ \text{N}\times\text{m}$ $\qquad$ $M_O^{F_g}\circlearrowright=-60\ \text{N}\times\text{m}$

Luego

$\overrightarrow{M}_O^{\text{res}}=M_O^F\circlearrowleft+M_O^{F_g}\circlearrowright$

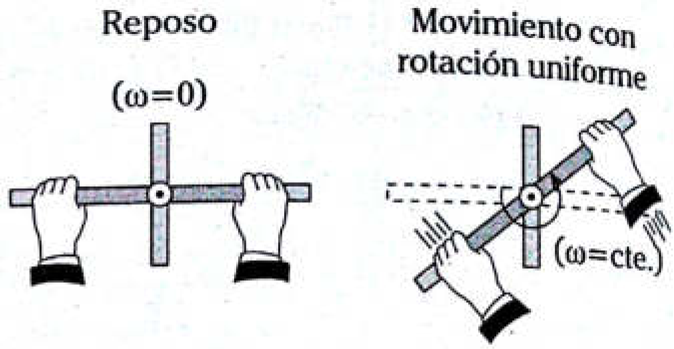
$\overrightarrow{M}_O^{\text{res}}=+60-60$

$\therefore\ \overrightarrow{M}_O^{\text{res}}=0$

Este resultado indica que la barra no inicia su movimiento de rotación; por ello se encuentra en un estado de equilibrio denominado equilibrio de rotación.

8.2. SEGUNDA CONDICIÓN PARA EL EQUILIBRIO MECÁNICO

Es aquel estado mecánico en el cual un cuerpo se encuentra en reposo ($\omega=0$) o con movimiento de rotación uniforme (ω=cte.).



Podemos observar que en ambos casos el cuerpo no experimenta cambios en su estado mecánico de rotación (reposo o movimiento con rotación uniforme), debido a ello se cumple

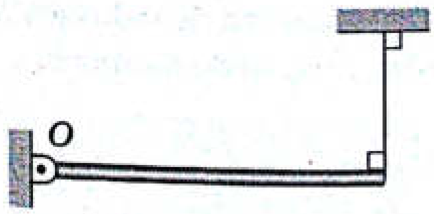
$$\boxed{\overrightarrow{M}_O^{\text{res}}=0}$$

o también se puede plantear

$$\boxed{\Sigma M_O\circlearrowright=\Sigma M_O\circlearrowleft}$$

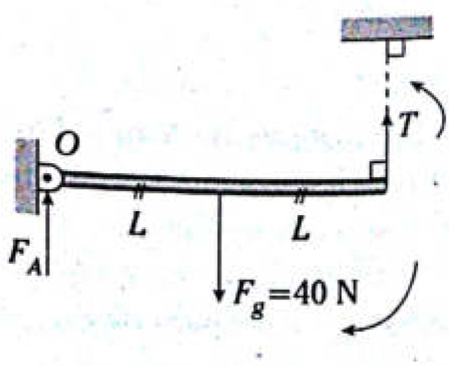
Aplicación 4

Si la barra homogénea de 4 kg se encuentra en posición horizontal, determine el módulo de la tensión en el cable. ($g=10\ \text{m/s}^2$).



Resolución

Graficamos las fuerzas sobre la barra.



Como la barra se encuentra en reposo, presenta equilibrio de rotación y se cumple

$$\boxed{\Sigma M_O\circlearrowright = \Sigma M_O\circlearrowleft}$$

Pero en el problema, F_A no es conocido; entonces eliminamos su efecto tomando momentos con respecto al punto O.

$$M_O^{F_g}\circlearrowright = M_O^{T}\circlearrowleft$$

$$\rightarrow F_g\cdot\cancel{l} = T(2\cancel{l})$$

$$40 = 2T$$

$$\therefore\ T = 20\text{ N}$$

NOTA

Si un cuerpo se encuentra en reposo, entonces presenta equilibrio de rotación. Para aplicar la segunda condición de equilibrio, se sugiere elegir el centro de momentos en aquel lugar por donde concurra la mayor cantidad de fuerzas que son desconocidas y no se van a determinar.

Con esta elección, se logra eliminar el momento de fuerzas desconocidas y se reduce el número de incógnitas.

9. Equilibrio mecánico

Es aquel estado mecánico en el cual se encuentra un cuerpo presentando equilibrio de rotación y traslación.
En consecuencia, si un cuerpo presenta equilibrio mecánico se cumplen

$$\boxed{F_R = 0} \wedge \boxed{\overrightarrow{M}_O^{\text{res}} = 0}$$

Los casos que se presentan son los siguientes:

a. Reposo

$$\begin{cases}\vec{v} = \vec{0}\\ \vec{\omega} = \vec{0}\end{cases}$$

b. Movimiento de traslación pura uniforme

$$\begin{cases}\vec{v} = \text{cte.}\\ \vec{\omega} = 0\end{cases}$$

c. Movimiento de rotación pura uniforme

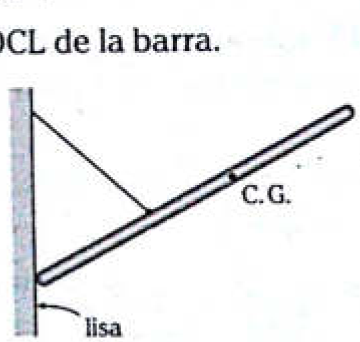
$$\begin{cases}\vec{v} = 0\\ \vec{\omega} = \text{cte.}\end{cases}$$

d. Movimiento de traslación uniforme con rotación uniforme

$$\begin{cases}\vec{v} = \text{cte.}\\ \vec{\omega} = \text{cte.}\end{cases}$$

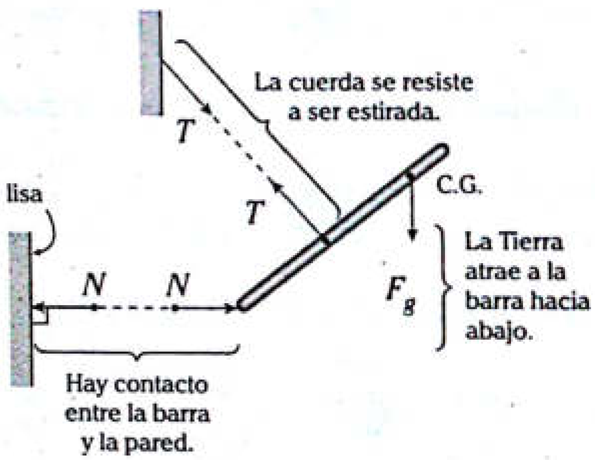
Problema N.° 1

Realice el DCL de la barra.

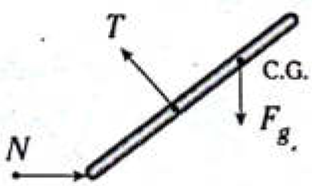


Resolución

Para realizar el DCL de la barra, se le aísla de los demás cuerpos y se analizan las interacciones.

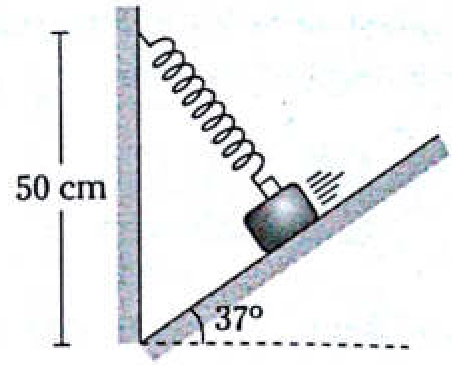


Finalmente, el DCL de la barra es



Problema N.° 2

Un bloque de 2,5 kg desciende sobre un plano inclinado liso, tal como se muestra en el gráfico. Si se encuentra unido a un resorte cuya longitud natural es 60 cm y K=80 N/m, determine el DCL del bloque y la suma de las magnitudes del peso del bloque y la fuerza elástica. (g=10 m/s^2).



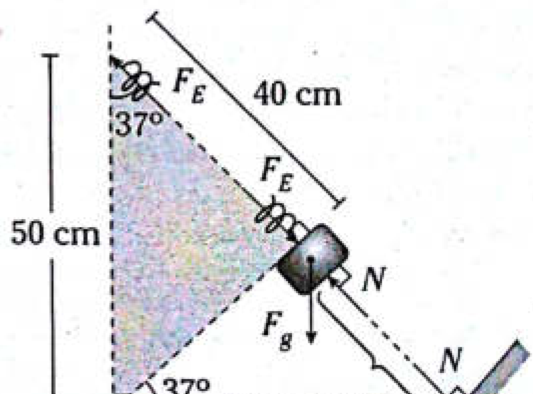
Resolución

Para realizar el DCL del bloque, debemos separarlo de los demás cuerpos y analizar las interacciones.

Como la longitud natural del resorte es 60 cm y en este instante mide 40 cm, entonces está comprimido.

x=20 cm

El resorte tiende a separar sus partes.



Luego, el DCL del bloque es

También nos piden $F_g + F_E$.

donde

$$F_g = m \cdot g = (2{,}5)(10)$$

$$\rightarrow \; F_g = 25\ \text{N}$$

Además

$$F_E = KX \;\; \text{y} \;\; X = 20\ \text{cm} = 0{,}2\ \text{m}$$

$$\rightarrow \; F_E = (80)(0{,}2)$$

$$F_E = 16\ \text{N}$$

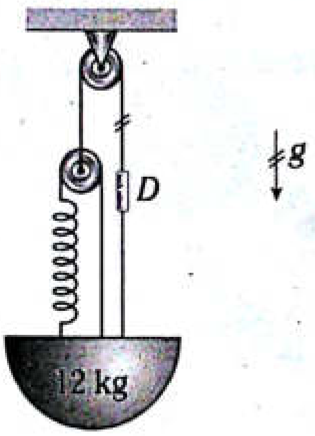
Luego

$$F_g + F_E = 25 + 16$$

$$\therefore \; F_g + F_E = 41\ \text{N}$$

Problema N.° 3

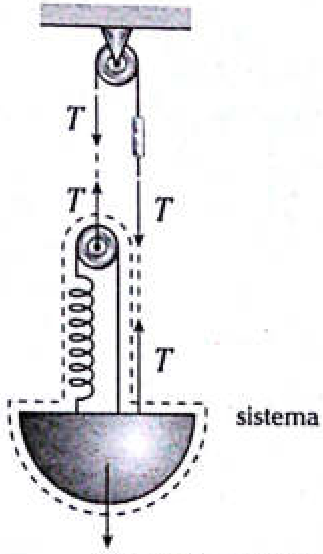
Si el sistema que se muestra se encuentra en equilibrio, determine la lectura del dinamómetro. Considere poleas ideales. $(g = 10\ \text{m/s}^2)$.



Resolución

Nos piden la lectura del dinamómetro, es decir, la tensión del cable que sostiene.

Realizamos el DCL y, para simplificar el análisis, podemos considerar un sistema conformado por la polea móvil, el bloque semiesférico con el cable y el resorte.



$F_g = mg = 120\ \text{N}$

Aplicamos la primera condición de equilibrio en el sistema.

$$\sum F(\uparrow) = \sum F(\downarrow)$$

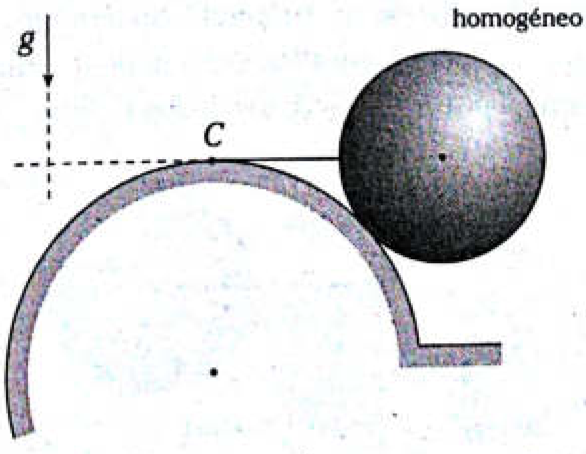
Reemplazamos.

$$T + T = 120$$

$$\therefore \; T = 60\ \text{N}$$

Problema N.° 4

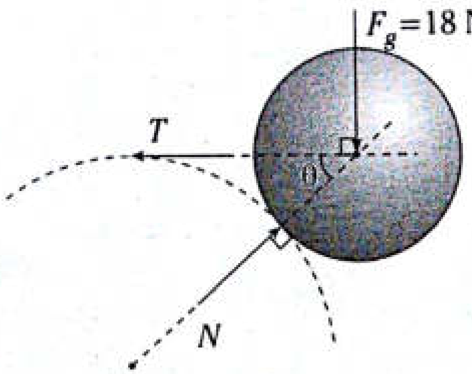
La esfera lisa de 1,8 kg y 20 cm de radio se apoya sobre una superficie cilíndrica de 30 cm de radio. Determine la magnitud de la fuerza de tensión si C es punto de tangencia. $(g = 10\ \text{m/s}^2)$.



Resolución

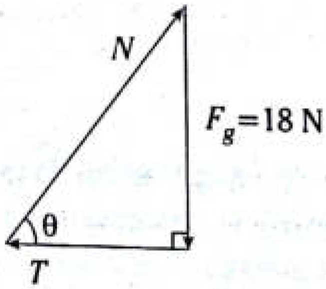
Nos piden la tensión.

Para ello realizamos el DCL de la esfera.

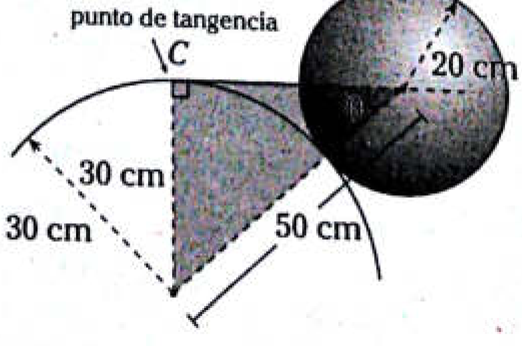


Como se trata de una esfera lisa y homogénea, la fuerza $\vec{N}$ y la $\vec{F}_g$ concurren en el centro de la esfera, en consecuencia, la línea de acción de $\vec{T}$ debe pasar por el centro.

Del equilibrio de fuerzas $(\vec{F}_R=\vec{0})$ con las tres fuerzas, se puede formar un triángulo de fuerzas.



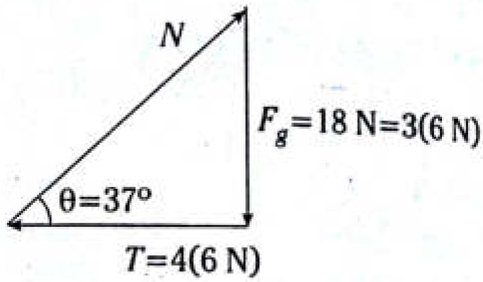
Como se trata de un triángulo rectángulo, debemos conocer la medida del ángulo θ y ello se obtiene a partir de los datos de los radios.



El triángulo sombreado es notable de 37° y 53°.

$\rightarrow \quad \theta=37°$

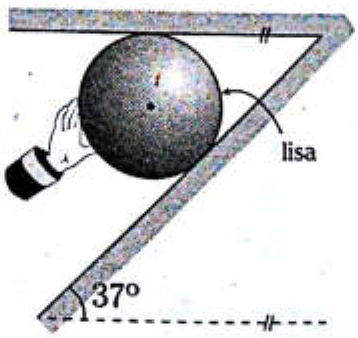
Luego, en el triángulo de fuerzas



$\therefore \quad T=24\text{ N}$

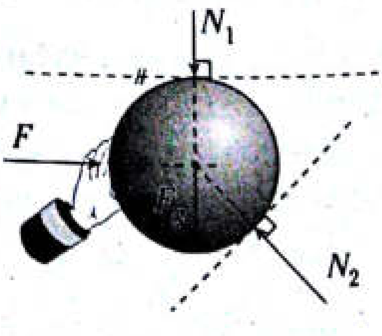
Problema N.° 5

Una esfera homogénea de 10 kg se mantiene en equilibrio, tal como se muestra en la gráfica. Determine el menor valor de la fuerza horizontal que debe ejercer la persona, de tal forma que no se pierda el equilibrio. $(g=10\text{ m/s}^2)$.

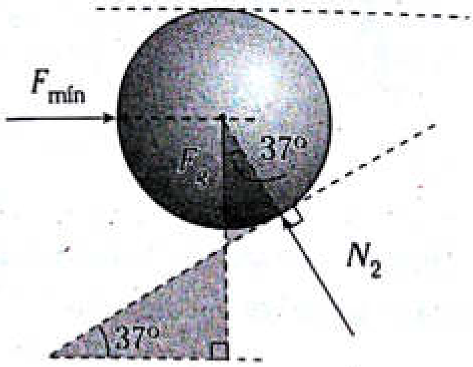


Resolución

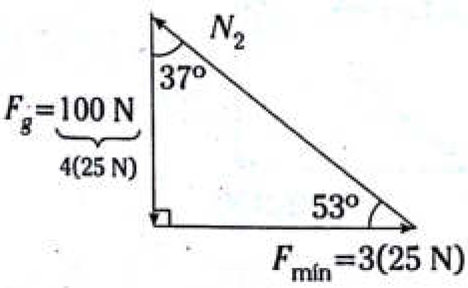
Para poder examinar el comportamiento de las fuerzas, realizamos el DCL de la esfera.



Como nos piden el valor de $\vec{F}$ mínimo, gradualmente vamos reduciendo $\vec{F}$ y esto genera que la esfera tienda a descender presionando cada vez menos al techo, es por ello que disminuye N_1. Para que F sea mínimo, la esfera prácticamente ha tenido que perder contacto con el techo, es decir, $N_1=0$.



Del equilibrio de fuerzas, podemos formar un triángulo de fuerzas.

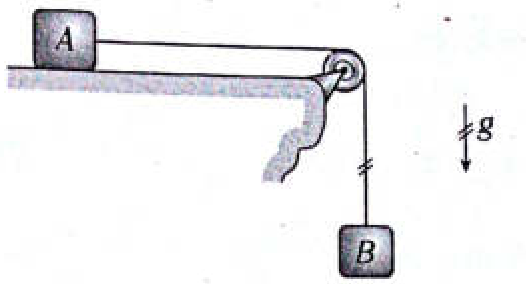


$\therefore \quad F_{mín}=75\text{ N}$

Problema N.° 6

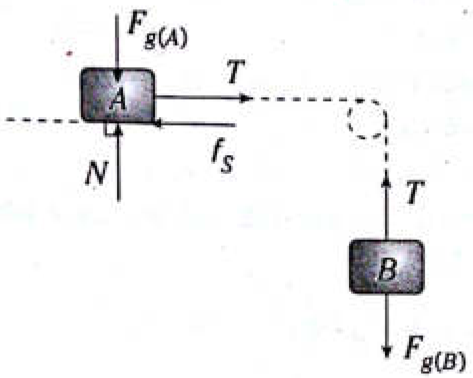
Si el sistema que se muestra se encuentra en equilibrio, determine la fuerza que ejerce el piso al bloque A.

Datos: $m_A=4$ kg; $m_B=3$ kg; $g=10$ m/s^2

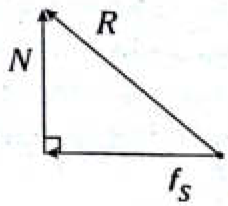


Resolución

Realicemos el DCL de cada uno de los bloques.



Entonces la fuerza que ejerce el piso $(\vec{R})$ sobre el bloque A es



$$\rightarrow \quad R=\sqrt{N^2+f_S^2} \qquad \text{(I)}$$

Ahora, analicemos el equilibrio en cada uno de los bloques.

- Bloque A

$$\sum F(\uparrow)=\sum F(\downarrow)$$

$$\rightarrow N=F_{g(A)}=m_A \cdot g$$

$$N=4(10) \rightarrow N=40\text{ N} \qquad \text{(II)}$$

Además

$$\sum F(\rightarrow)=\sum F(\leftarrow)$$

$$\rightarrow\ T=f_S \qquad \text{(III)}$$

- Bloque B

$$\sum F(\uparrow)=\sum F(\downarrow)$$

$$T=F_{g(B)}=m_B\cdot g$$

$$T=3(10)\ \rightarrow\ T=30\ \text{N} \qquad \text{(IV)}$$

Reemplazamos (IV) en (III).

$$f_S=30\ \text{N} \qquad \text{(V)}$$

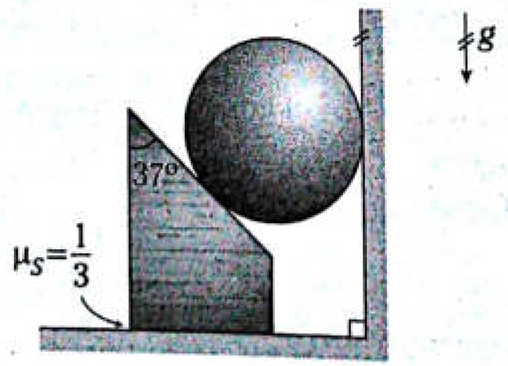
Finalmente, reemplazamos los resultados (II) y (V) en (I).

$$R=\sqrt{(40)^2+(30)^2}$$

$$\therefore\ R=50\ \text{N}$$

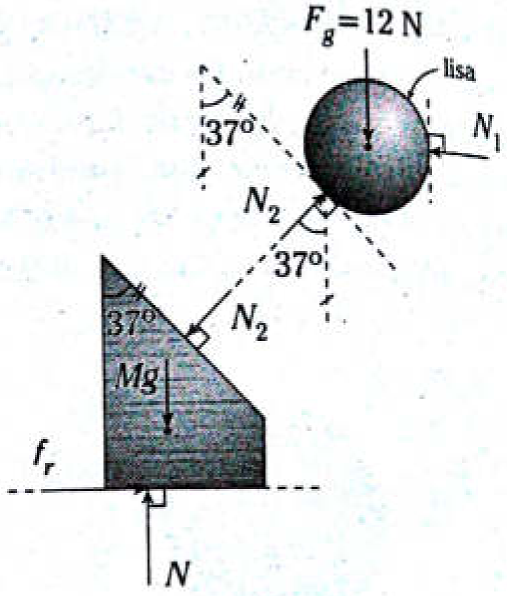
Problema N.° 7

Una esfera lisa de 12 kg se encuentra sobre un tronco de cuña, tal como se muestra en la gráfica. ¿Cuál será el menor valor de la masa del tronco, de tal manera que el sistema no pierda el equilibrio? $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



Resolución

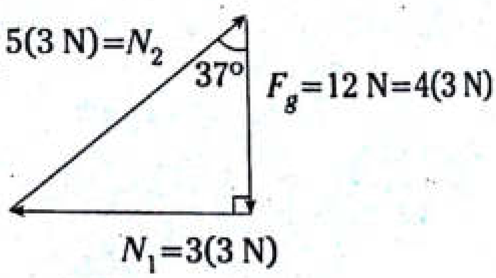
Como nos piden $M_{\text{mín}}$ del tronco para que no se pierda el equilibrio, entonces examinemos el equilibrio de cada uno de los cuerpos.



El tronco tiende a deslizarse hacia la izquierda. Entonces la $\vec{f}_r$ se dirige a la derecha.

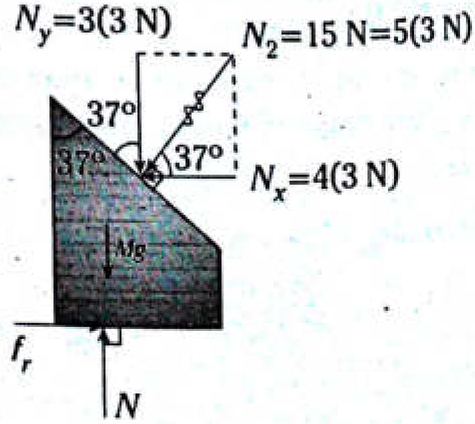
En la esfera

Del equilibrio, la fuerza resultante es 0, entonces podemos formar un triángulo de fuerzas.



Del triángulo notable de 37° y 53° se deduce que $N_1=9$ N y $N_2=15$ N.

En el tronco de cuña



En la vertical

$$\sum F_y(\uparrow)=\sum F_y(\downarrow)$$

$$N=N_y+Mg$$

$$N=9+10M \qquad \text{(I)}$$

Como nos piden la $M_{\text{mín}}$ del tronco, entonces la N también es mínima. Esto implica que el tronco ejerce la menor presión al piso para mantenerse en equilibrio, entonces se encuentra a punto de deslizar y la fuerza de rozamiento que actúa es la $f_{s(\text{máx})}$.

$$\rightarrow \quad f_r=f_{s(\text{máx})}$$

$$f_r=\mu_S\cdot N_{\text{mín}}$$

De (I)

$$f_r=\mu_S(9+10M_{\text{mín}}) \qquad \text{(II)}$$

En la horizontal

$$\sum F_x(\rightarrow)=\sum F_x(\leftarrow)$$

$$\rightarrow \quad f_r=N_x$$

De (II)

$$\mu_S(9+10M_{\text{mín}})=12$$

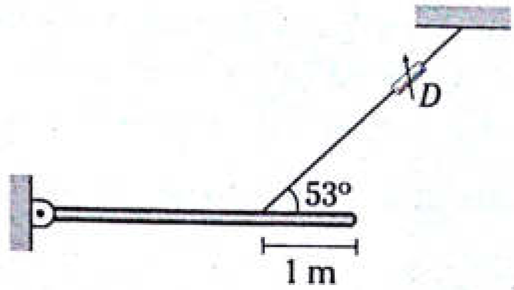
$$\rightarrow \quad \frac{1}{3}(9+10M_{\text{mín}})=12$$

$$9+10M_{\text{mín}}=36$$

$$\therefore \quad M_{\text{mín}}=2{,}7\ \text{kg}$$

Problema N.° 8

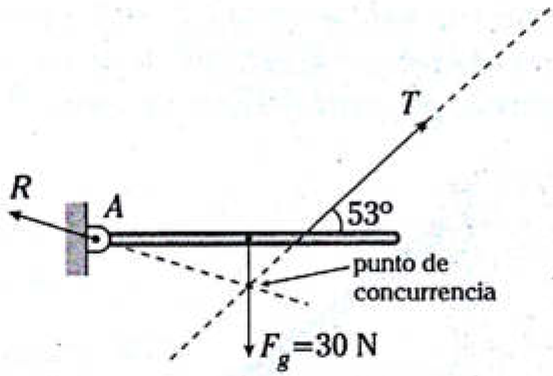
Si la barra homogénea de 3 kg y 4 m de longitud se encuentra en reposo en posición horizontal, determine la lectura del dinamómetro. $(g=10\ \text{m/s}^2)$



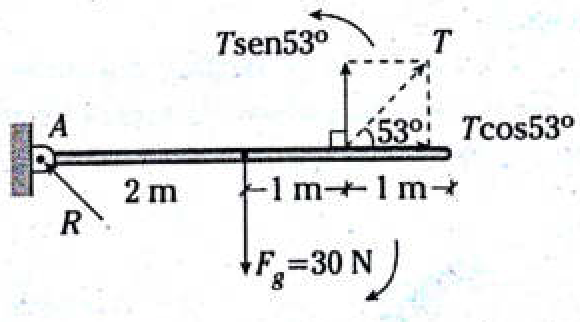
Resolución

Nos piden la lectura del dinamómetro y esto viene a ser el módulo de la tensión (T) en el cable que sostiene el dinamómetro.

Realicemos el DCL de la barra homogénea.



Descomponemos la fuerza de tensión.



Aplicamos la segunda condición de equilibrio, tomando como centro de momentos el punto A.

La componente $T\cos 53°$ y la fuerza $\vec{R}$ no producen momento porque su línea de acción pasa por A. Luego, tenemos lo siguiente:

$$\underbrace{\sum M_A \curvearrowright}_{M_A^{F_g}} = \underbrace{\sum M_A \curvearrowleft}_{M_A^{T\text{sen}53°}}$$

$$\underbrace{M_A^{F_g}}_{(30)\times(2)} = M_A^{T\text{sen}53°}$$

$$(30)\times(2) = (T\text{sen}53°)\times(3)$$

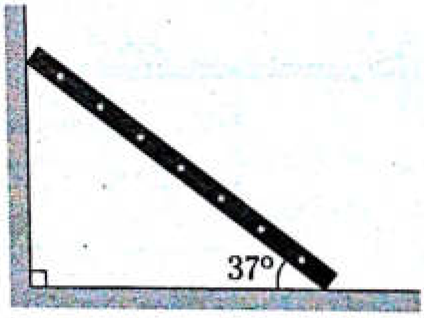
$$20 = T\times\frac{4}{5}$$

$$\rightarrow \quad T = 25\ \text{N}$$

Por lo tanto, la lectura del dinamómetro es 25 N.

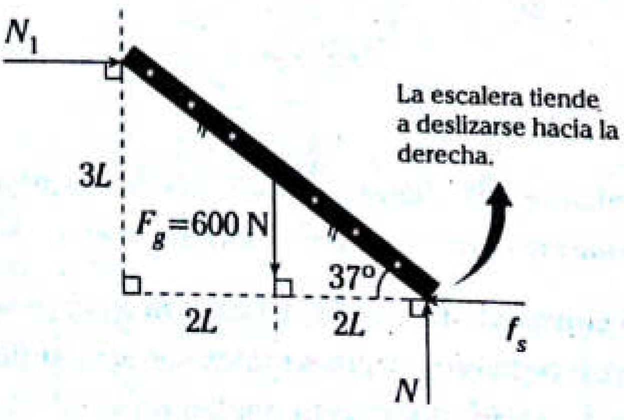
Problema N.º 9

Si la escalera homogénea de 60 kg se encuentra en reposo, apoyada sobre una pared lisa y un piso rugoso, determine el módulo de la fuerza de rozamiento por parte del piso. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.

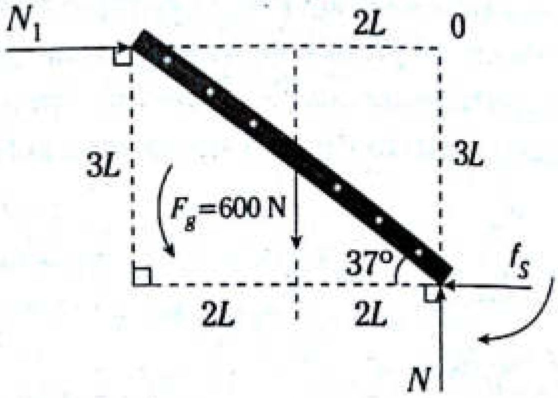


Resolución

Como la escalera no se desliza, por parte del piso actúa sobre la escalera la fuerza de rozamiento f_s. Realicemos el DCL de la escalera.



Se puede apreciar que el triángulo es notable, entonces se conoce relación de distancias. Podemos aplicar la segunda condición de equilibrio para determinar la f_S, pero debemos anular el momento producido por $\vec{N}$ y $\vec{N}_1$; esto se consigue considerando el centro de momentos en aquel punto por donde concurran ambas fuerzas (punto 0).



Aplicamos la segunda condición de equilibrio respecto de O.

$$\underbrace{\sum M_0 \curvearrowright}_{M_0^{f_S}} = \underbrace{\sum M_0 \curvearrowleft}_{M_0^{F_g}}$$

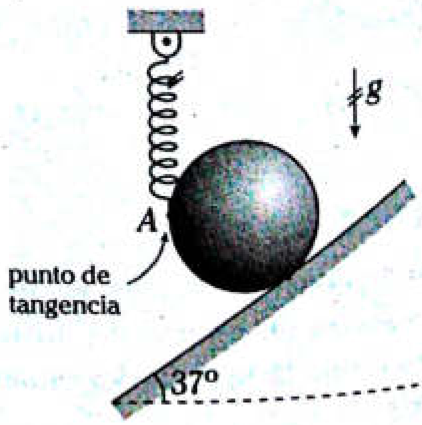
$$\underbrace{M_0^{f_S}}_{f_S\times 3L} = \underbrace{M_0^{F_g}}_{600\times 2L}$$

$$f_S\times 3L = 600\times 2L$$

$$\therefore \quad f_S = 400\ \text{N}$$

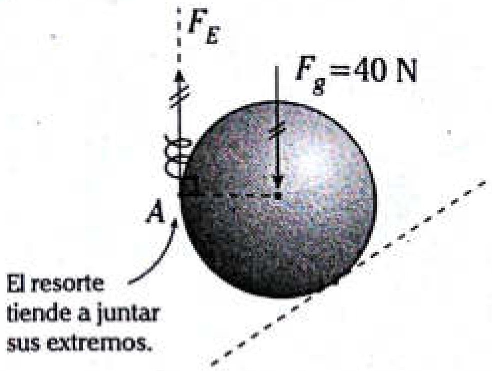
Problema N.º 10

Si la esfera homogénea de 4 kg se encuentra en equilibrio, determine el módulo de la fuerza que le ejerce el plano inclinado. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.

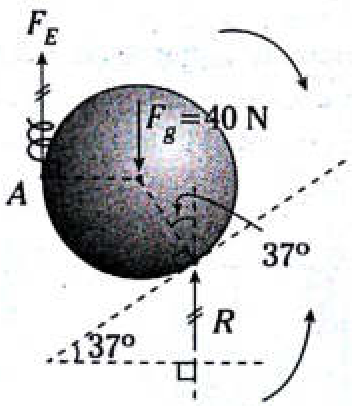


Resolución

Realizamos el DCL y empezamos graficando las fuerzas, cuya dirección y punto de aplicación se encuentran definidos.



Como la $\vec{F}_g$ y $\vec{F}_E$ son paralelas, entonces la fuerza $\vec{R}$ que ejerce el plano inclinado necesariamente es paralela a las otras dos.

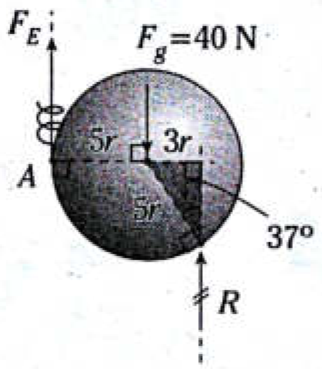


Como la $\vec{F}_E$ no se conoce, entonces apliquemos la segunda condición de equilibrio tomando como centro de momentos el punto A.

$$\sum M_A \circlearrowright = \sum M_A \circlearrowleft$$

$$\rightarrow \quad M_A^{F_g} = M_A^{\text{res}}$$

Si consideramos que el radio de la esfera es $5r$, entonces



Del gráfico

$$F_g(5r) = R(8r)$$

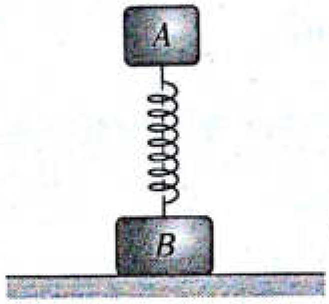
$$\rightarrow \quad 40(5) = 8R$$

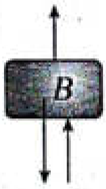
$$\therefore \quad R = 25 \text{ N}$$

Problemas Propuestos

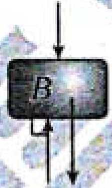
NIVEL BÁSICO

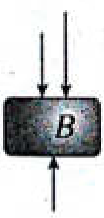
1. Identifique el gráfico que represente el DCL del bloque *B* si ambos bloques se encuentran en reposo.

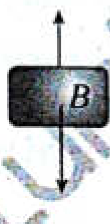


A) 

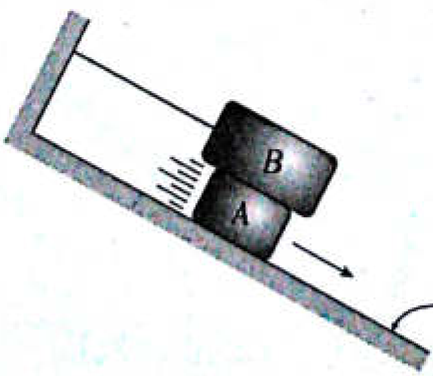
B) 

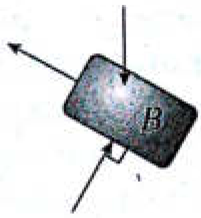
C) 

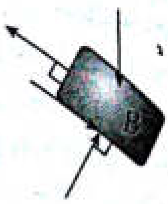
D) 

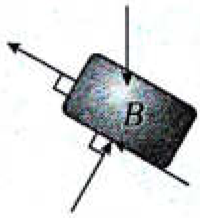
E) 

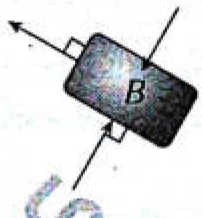
2. En el sistema mostrado, el bloque *A* se desliza a velocidad constante. Determine el DCL del bloque *B*.



A) 

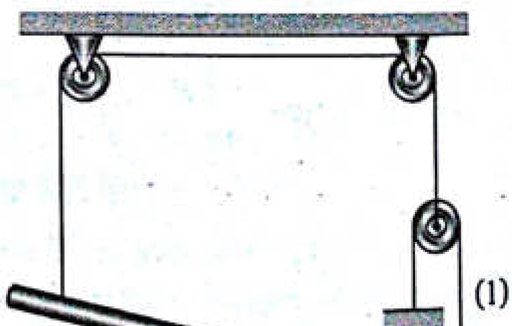
B) 

C) 

D) 

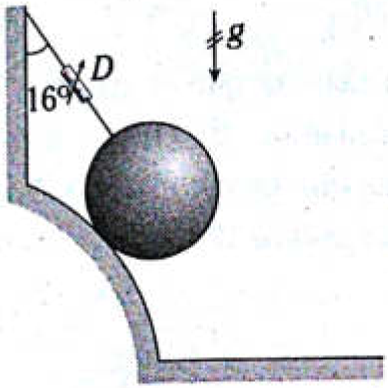
E) 

3. Se muestra una barra de 6,5 kg en reposo y un conjunto de poleas, cada una de 0,5 kg. Determine la tensión en la cuerda 1. (g=10 m/s^2)



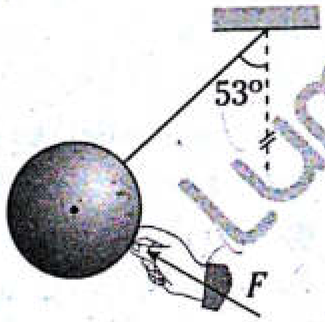
A) 10 N
B) 20 N
C) 30 N
D) 15 N
E) 25 N

4. La esfera homogénea de 3,1 kg se encuentra en equilibrio. Si el dinamómetro (D) indica 25 N, determine el módulo de la fuerza que ejerce la superficie cilíndrica lisa. (g=10 m/s^2)



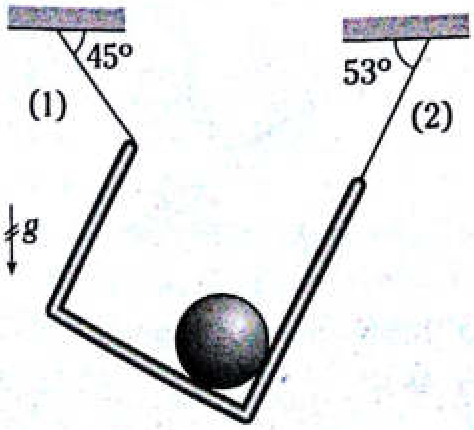
A) $7\sqrt{2}$ N B) 14 N C) 6 N
D) 15 N E) 24 N

5. Para mantener en equilibrio a una esfera homogénea de 10 kg en la posición mostrada, una persona ejerce una fuerza F a la esfera. Determine el mínimo valor de F. (g=10 m/s^2).



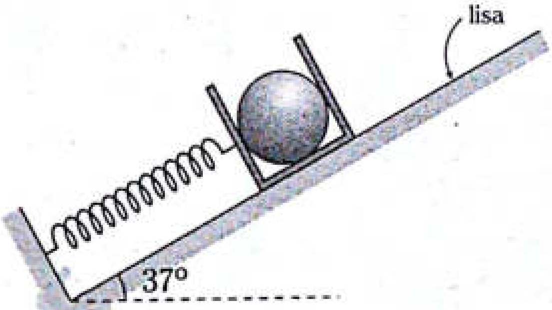
A) 60 N
B) 100 N
C) 85 N
D) 50 N
E) 80 N

6. Si el sistema mostrado se encuentra en equilibrio, determine la relación que existe entre los módulos de las tensiones en las cuerdas 1 y 2.



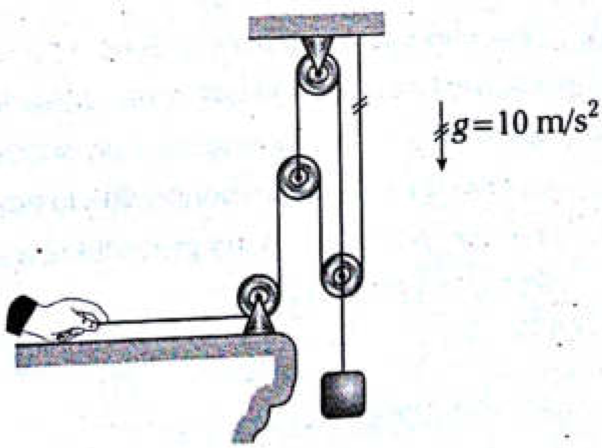
A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$
D) $\dfrac{3}{5}\sqrt{2}$ E) $\dfrac{2}{5}\sqrt{2}$

7. Una esfera de 8 kg se encuentra en el interior de una caja, la cual se encuentra unida a un resorte de rigidez k=200 N/m. Si en el estado de equilibrio el resorte se encuentra deformado 30 cm, determine la masa de la caja. (g=10 m/s^2)



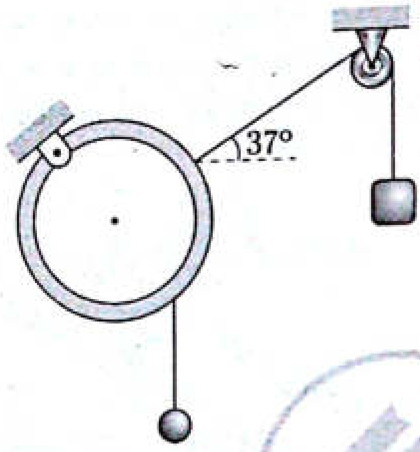
A) 2 kg B) 3 kg C) 5 kg
D) 4 kg E) 1 kg

8. Para lograr sostener un bloque de 20 kg mediante un conjunto de poleas ideales, ¿cuál será el módulo de la fuerza que el joven debería aplicar?



A) 100 N
B) 80 N
C) 30 N
D) 50 N
E) 75 N

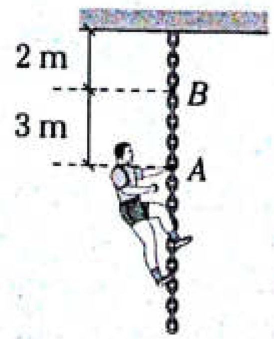
9. En el gráfico se muestra un anillo, una esfera y un bloque, cuyas masas son 8 kg, 2 kg y 10 kg, respectivamente. Si el sistema se mantiene en equilibrio, determine el módulo de la fuerza que ejerce la articulación al anillo. $(g=10\ \text{m/s}^2)$



A) $80\sqrt{3}$ N
B) $40\sqrt{3}$ N
C) 40 N
D) $40\sqrt{5}$ N
E) 80 N

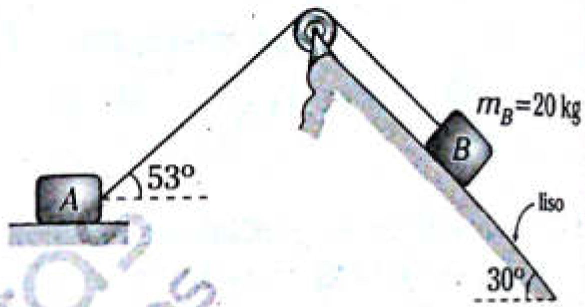
NIVEL INTERMEDIO

10. Una cadena homogénea tiene una distribución lineal de 0,5 kg/m y una longitud de 10 m. Determine la tensión que soporta la cadena en A y en B sabiendo que la persona que cuelga de la cadena presenta una masa de 45 kg. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



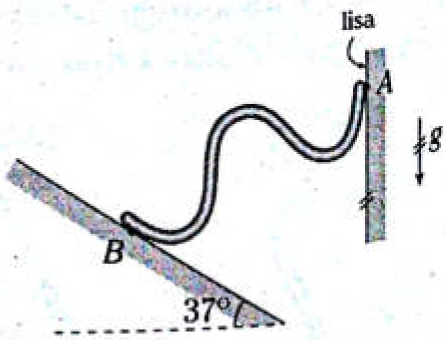
A) T_A=475 N y T_B=475 N
B) T_A=450 N y T_B=490 N
C) T_A=450 N y T_B=450 N
D) T_A=475 N y T_B=490 N
E) T_A=480 N y T_B=500 N

11. Si el sistema que se muestra se encuentra en equilibrio, determine el módulo de la fuerza que ejerce el piso sobre el bloque A, cuya masa es 12,5 kg. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



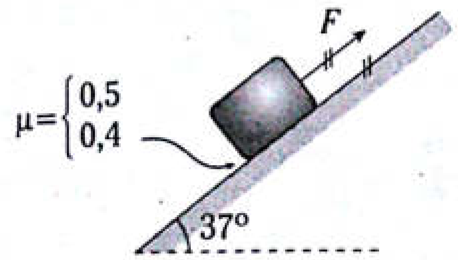
A) 75 N
B) 60 N
C) 45 N
D) 105 N
E) 90 N

12. La armadura de 3 kg permanece en reposo. Determine la suma de los módulos de las reacciones normales en A y en B sabiendo que en B la fuerza de rozamiento presenta un módulo de 30 N. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



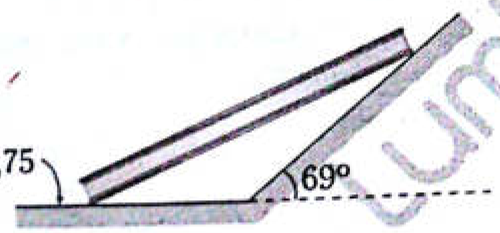
A) 120 N
B) 100 N
C) 60 N
D) 48 N
E) 80 N

13. Si el bloque de 5 kg se encuentra en equilibrio, determine entre qué valores se debe encontrar el módulo de $\vec{F}$ para que el bloque no pierda el equilibrio. $(g=10 \text{ m/s}^2)$.



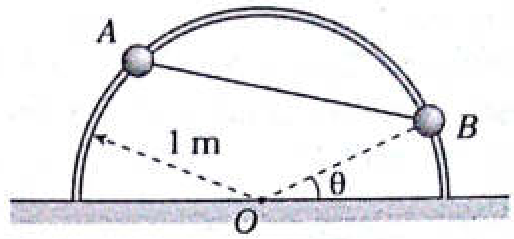
A) $15 \text{ N} \leq F \leq 30 \text{ N}$
B) $10 \text{ N} \leq F \leq 50 \text{ N}$
C) $10 \text{ N} < F < 50 \text{ N}$
D) $0 \text{ N} \leq F \leq 50 \text{ N}$
E) $10 \text{ N} \leq F \leq 30 \text{ N}$

14. Se muestra una viga de 4 kg a punto de deslizarse. Determine el módulo de la fuerza que ejerce la superficie inclinada lisa sobre la viga. $(g=10 \text{ m/s}^2)$.



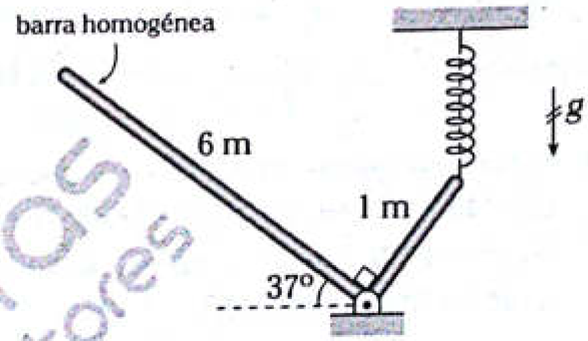
A) 30 N
B) 16 N
C) 48 N
D) 25 N
E) 24 N

15. Se tiene un semiaro empotrado al piso. En él se encuentran dos esferas huecas *A* y *B* unidas por un cable cuya longitud es $\sqrt{2}$ m. Sabiendo que $m_B=3m_A$, determine la medida del ángulo θ para que el sistema se encuentre en estado de equilibrio. Desprecie el rozamiento.



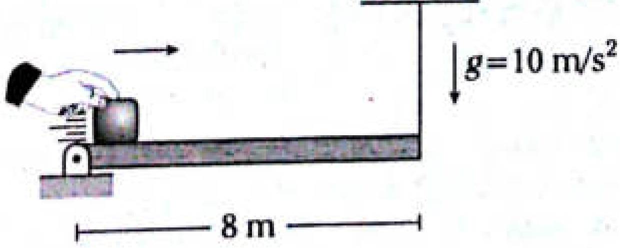
A) 8°
B) 30°
C) 23°
D) 26°
E) 18,5°

16. Si la barra de 14 kg se encuentra en equilibrio, determine la deformación del resorte, cuya constante de rigidez es 9400 N/m. $(g=10 \text{ m/s}^2)$



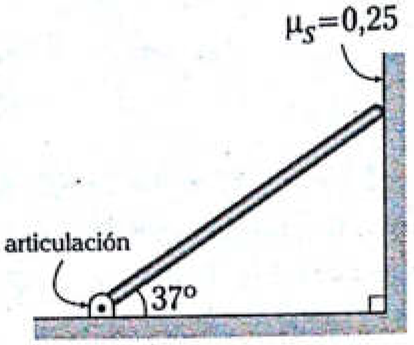
A) 8 cm
B) 10 cm
C) 5 cm
D) 7 cm
E) 12 cm

17. Un bloque de 32 kg se lanza con una rapidez de 0,5 m/s sobre una tabla homogénea de 30 kg. Si el cable que sostiene a la tabla soporta como máximo una tensión de 350 N, determine al cabo de qué tiempo el cable se rompe. Desprecie la fricción.



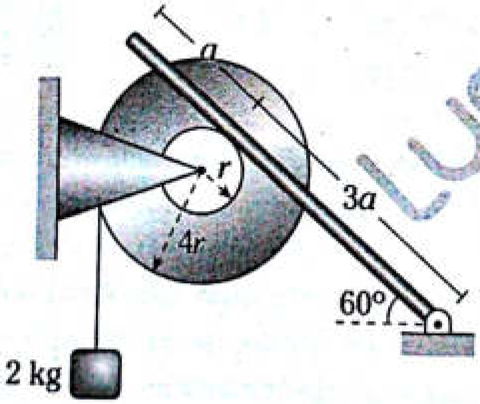
A) 10 s
B) 5 s
C) 20 s
D) 4 s
E) 8 s

18. Una barra homogénea de 3 kg se mantiene en reposo. Determine el módulo de la fuerza que ejerce la articulación a la barra. (g=10 m/s^2)



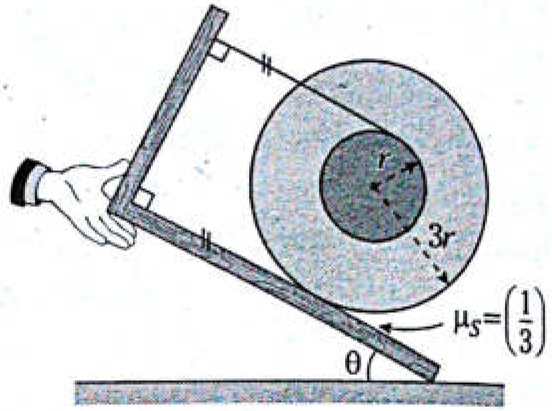
A) 40 N B) 70 N C) $10\sqrt{13}$ N
D) $5\sqrt{2}$ N E) 50 N

19. El sistema que se muestra se encuentra en equilibrio. Determine la masa de la barra homogénea si la polea homogénea se encuentra a punto de rotar. (μ_S=0,5).



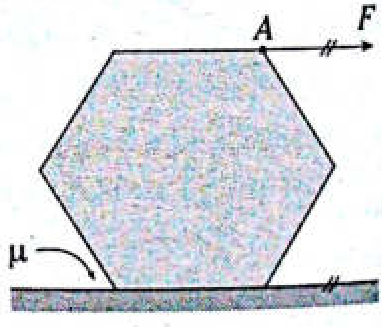
A) 12 kg B) 24 kg C) 40 kg
D) 48 kg E) 64 kg

20. Un carrete se encuentra en reposo sobre una tabla. Si de pronto la tabla se va inclinando lentamente, determine el máximo ángulo θ, de tal manera que el carrete no pierda el equilibrio.



A) 49° B) 8° C) 37°
D) 53° E) 63°

21. Se tiene un cuerpo homogéneo que tiene la forma de un hexágono regular y cuya masa es 1,73 kg. Determine el módulo de la mayor fuerza horizontal que se le debe ejercer en el vértice A, de tal forma que el hexágono se logre trasladar sin experimentar rotación. (g=10 m/s^2)



A) 15 N B) $\sqrt{3}$ N C) 5 N
D) 10 N E) $5\sqrt{3}$ N

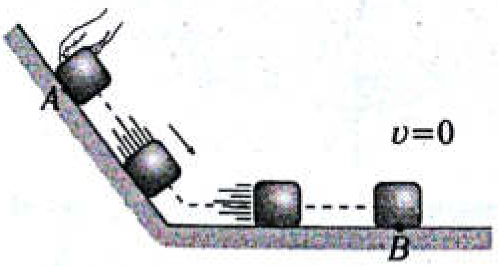
Dinámica

Capítulo VII

OBJETIVOS
- Comprender los conceptos de inercia y masa.
- Analizar las causas que generan los cambios de velocidad de un cuerpo.
- Aplicar la primera y segunda ley de Newton para los movimientos rectilíneo y circunferencial.

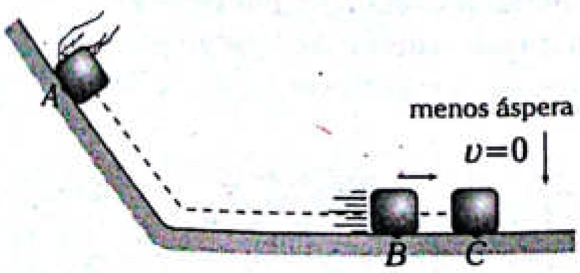
1. Inercia

Este concepto fue desarrollado por Galileo Galilei y para poder comprenderlo vamos a examinar el siguiente acontecimiento: Un bloque es abandonado sobre un plano inclinado, este desliza para luego ingresar a un plano horizontal áspero.



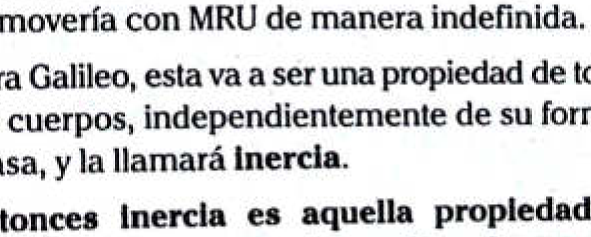
A medida que el cuerpo avanza sobre el plano horizontal, va perdiendo velocidad. Hasta que finalmente se detiene.

Seguidamente, Galileo va a suavizar la superficie, esta era una rampa de madera, y luego repite la experiencia "abandonando el bloque en el mismo lugar".



El bloque se detiene, pero no en el mismo lugar, sino que avanza un mayor tramo. Entonces Galileo concluye: "A medida que se reduce la aspereza en la superficie, el bloque avanza tramos cada vez más largos".

Finalmente, Galileo plantea una innovación, lo que llamamos un "experimento mental": "¿Cómo se movería el bloque si el plano horizontal fuera infinito y no ofreciera ninguna resistencia al deslizamiento del bloque, es decir, una superficie lisa?".

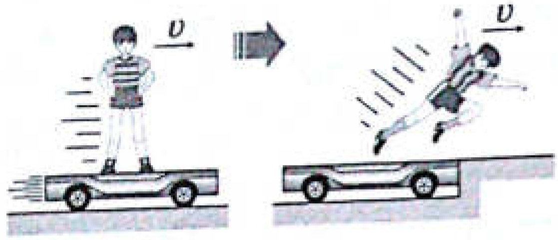


El bloque no tendría que perder velocidad, es decir, se movería con MRU de manera indefinida.

Para Galileo, esta va a ser una propiedad de todos los cuerpos, independientemente de su forma y masa, y la llamará **inercia**.

Entonces inercia es aquella propiedad de todos los cuerpos por la cual tienden a mantener la misma velocidad, es decir, tanto el módulo como la dirección de la velocidad tienden a mantenerse constantes.

Para comprender cómo se manifiesta la inercia, examinemos el siguiente caso:

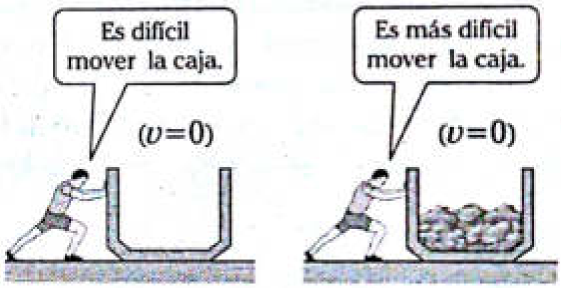


La plataforma y el joven se mueven juntos; luego el obstáculo interrumpe el movimiento de la plataforma, mientras que el cuerpo del joven, por inercia, tiende a seguir avanzando.

En conclusión, la inercia se manifiesta en los cuerpos como una resistencia que estos ofrecen al cambio de su estado de movimiento, es decir, al cambio de su velocidad.

¿Cómo cuantificamos la inercia en los cuerpos? Para entender ello examinemos el siguiente acontecimiento:

Intentemos poner en movimiento una caja vacía lisa hecha de madera y luego intentemos moverla cuando se encuentra llena de piedras.



Al agregar piedras a la caja vacía, se hace más difícil moverla que cuando estaba vacía, a pesar de que es lisa, es decir, la caja con piedras tiene más inercia que la caja vacía.

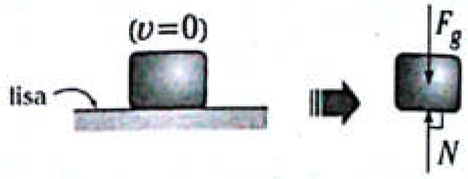
Entonces para medir la inercia de los cuerpos, introducimos una magnitud física escalar llamada **masa**, cuya unidad de medida es el kilogramo (kg).

2. Primera ley de Newton

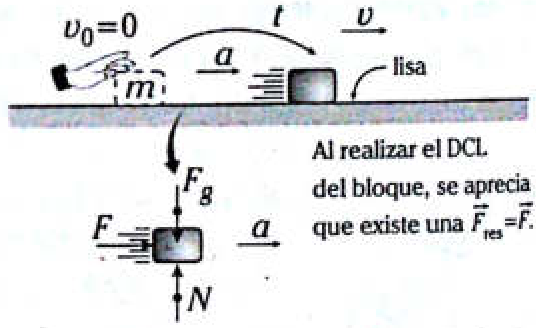
Establece lo siguiente: todo cuerpo tiende a mantenerse en su estado de movimiento natural, en reposo o movimiento rectilíneo uniforme, a menos que agentes externos lo obliguen a salir de dicho estado de movimiento.

3. Segunda ley de Newton

Establece lo siguiente: si un cuerpo experimenta la acción de agentes externos (fuerzas) y como resultado existe una fuerza neta o también llamada fuerza resultante ($\vec{F}_{res}$), esta es la causa para que el cuerpo experimente cambios en su velocidad, es decir, experimenta una aceleración ($\vec{a}$).



Al realizar el DCL del bloque, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo se equilibran, es decir, la $F_{res}=0$ y por su inercia, el bloque continuará manteniéndose en dicho estado. De pronto, aplicamos una fuerza al bloque para sacarlo de dicho estado.



Al realizar el DCL del bloque, se aprecia que existe una $\vec{F}_{res}=\vec{F}$.

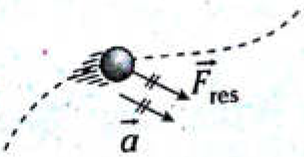
Experimentalmente se verifica lo siguiente:

$$\boxed{\vec{a}=\frac{\vec{F}_{res}}{m}}$$ (segunda ley de Newton)

donde

- a en m/s^2
- F_{res} en N
- m en kg

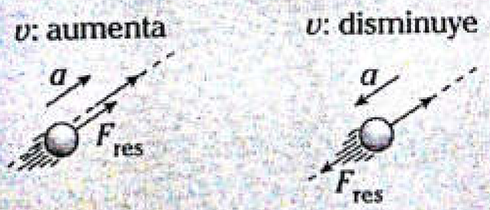
Además, $\vec{F}_{res}$ es la causa para que el cuerpo experimente una aceleración ($\vec{a}$) y ambas presentan la misma dirección independientemente de la trayectoria que describa el cuerpo.



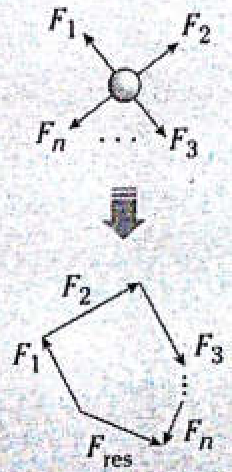
OBSERVACIÓN

1. Si un cuerpo se mueve en línea recta y experimenta aceleración, entonces se presentan tan solo dos posibilidades:

Para que esto ocurra, sobre la partícula debe actuar una $\vec{F}_{res}$ que presenta la misma dirección que la $\vec{a}$.



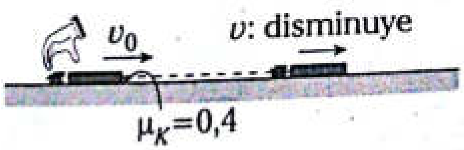
2. Si sobre un cuerpo actúan varias fuerzas y están bien definidos sus módulos y direcciones, entonces podríamos determinar la $\vec{F}_{res}$ empleando el método del polígono.



Aplicación 1

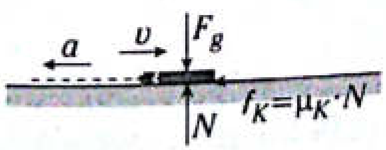
Una moneda se lanza sobre una superficie horizontal rugosa ($_K$=0,4). Determine la aceleración que experimenta la moneda. (g=10 m/s^2).

Resolución



A medida que avanza el bloque su velocidad disminuye, entonces desacelera.

Como nos pide a, realizamos el DCL.



De la segunda ley

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}_{res}}{m} \rightarrow a=\frac{f_K}{m}=\frac{\mu_K N}{m} \qquad \text{(I)}$$

En la vertical

$$F(\uparrow)=F(\downarrow) \rightarrow N=F_g=mg \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I).

$$a=\frac{\mu_K \cancel{m} g}{\cancel{m}} \rightarrow \boxed{a=\ _K g}$$

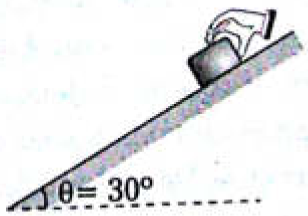
Pero

$$_K=0,4 \rightarrow a=0,4(10)$$

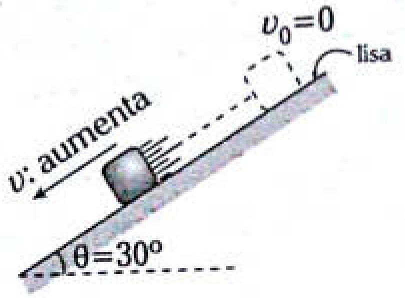
$\therefore \quad a=4$ m/s^2

Aplicación 2

Un bloque es abandonado sobre un plano inclinado liso, tal como se muestra. Determine el módulo de su aceleración. (g=10 m/s^2).

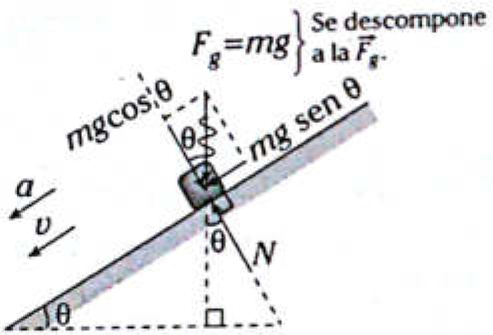


Resolución



Luego de abandonar el bloque, este se desliza aumentando su $\vec{v}$; entonces acelera.

Realicemos el DCL del bloque.



Aplicamos la segunda ley de Newton.

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}_{\text{res}}}{m} \rightarrow a=\frac{mg\,\text{sen}\,\theta}{m}$$

$$\boxed{a=g\,\text{sen}\,\theta}$$

Como

$\theta=30° \rightarrow a=10\text{sen}30°$

$\therefore\ a=5\ \text{m/s}^2$

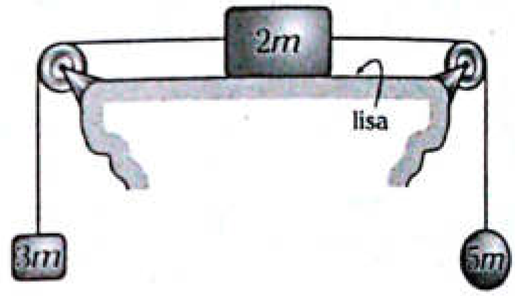
4. Aceleración de un sistema

Si un conjunto de cuerpos se traslada, experimentando todos el mismo módulo de aceleración; entonces podemos considerarlos como un solo cuerpo o sistema y determinar la aceleración tomando en cuenta solo a las **fuerzas externas** al sistema. De la siguiente forma:

$$\boxed{a_{\text{sist.}}=\frac{\sum F\left(\begin{matrix}\text{a favor}\\ \text{de } \vec{a}\end{matrix}\right)-\sum F\left(\begin{matrix}\text{en contra}\\ \text{de } \vec{a}\end{matrix}\right)}{m_{\text{sist.}}}}$$

Aplicación 3

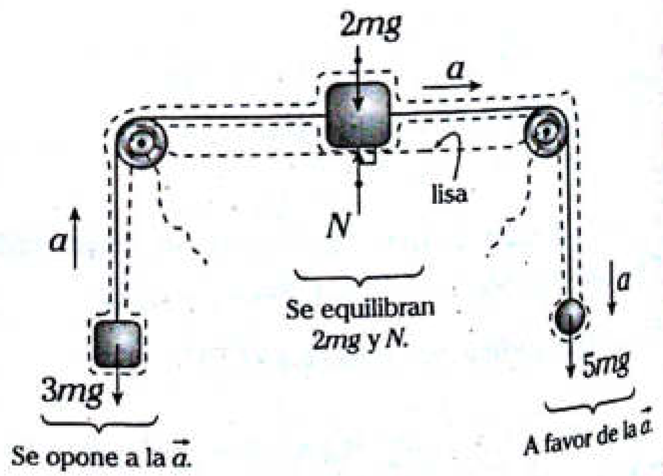
Si el siguiente conjunto de cuerpos es abandonado, determine la aceleración que experimentan. ($g=10$ m/s)



Resolución

Al abandonar los cuerpos, estos se trasladan realizando el mismo recorrido en un mismo intervalo de tiempo; por lo tanto, presentan en cada instante la misma rapidez y aceleración.

Vamos a considerar a los tres cuerpos y las cuerdas como un solo cuerpo, es decir, un sistema.



Al realizar el DCL sobre el sistema, no se toma en cuenta las fuerzas entre los cuerpos que forman el sistema (por ejemplo la fuerza de tensión en las cuerdas), solo se consideran fuerzas que otros cuerpos ejercen al sistema.

Por la segunda ley de Newton

$$a=\frac{\sum F\begin{pmatrix}\text{a favor}\\ \text{de } \vec{a}\end{pmatrix}-\sum F\begin{pmatrix}\text{en contra}\\ \text{de } \vec{a}\end{pmatrix}}{m_{\text{sistema}}}$$

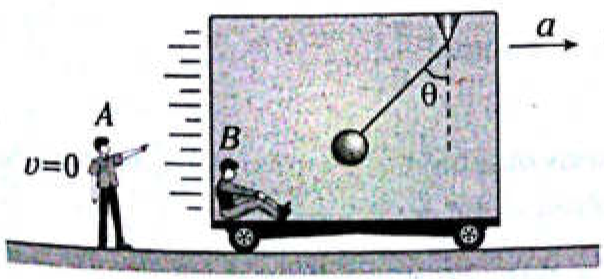
$$a=\frac{5mg-3mg}{(5m+2m+3m)}=\frac{2\cancel{m}g}{10\cancel{m}}$$

$$\therefore\quad a=\frac{2(10)}{10}\ \rightarrow\ a=2\ \text{m/s}^2$$

5. Sistema de referencia no inercial (S.R.N.I.)

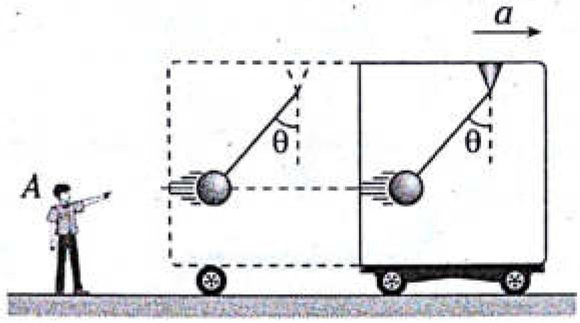
Las leyes de Newton son aplicables únicamente para aquellos observadores que se encuentran ligados a sistemas de referencia que se encuentran en reposo o se trasladan con velocidad constante (MRU) respecto a la Tierra. A estos sistemas de referencia se les denomina sistema de referencia inercial (S.R.I.) y en consecuencia, para sistemas de referencia acelerados respecto a la tierra, no se verifican las leyes de Newton, a estos sistemas de referencia se le denomina no inerciales (S.R.N.I.).

Consideremos el siguiente acontecimiento:



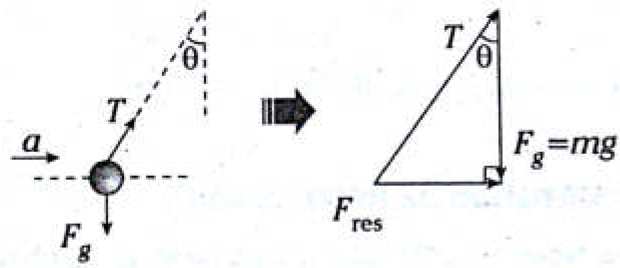
Un coche se traslada en forma acelerada, llevando en su interior una esfera atada a una cuerda y que no se mueve respecto al coche. Vamos a determinar la medida del ángulo θ que se desvía el cable respecto a la vertical, pero partiendo del análisis de los observadores A y B.

El observador A se encuentra en reposo con respecto a la Tierra, por lo tanto, forma parte de un sistema de referencia inercial. Él observa que la esfera se traslada horizontalmente junto con el coche.



Ambos presentan la misma aceleración, entonces podemos aplicar la segunda ley de Newton.

Cálculo de la $\vec{F}_{\text{res}}$



Del gráfico

$$F_{\text{res}}=mg\tan\theta$$

En consecuencia

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}_{\text{res}}}{m}\ \rightarrow\ a=\frac{mg\tan\theta}{m}$$

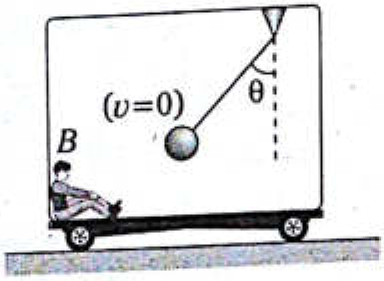
$$a=g\tan\theta$$

$$\rightarrow\quad \tan\theta=\frac{a}{g}$$

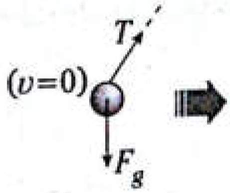
$$\therefore\quad \theta=\arctan\left(\frac{a}{g}\right)$$

El observador B forma parte de un sistema de referencia que acelera, es decir; un sistema de referencia no inercial.

Él observa que la esfera no se mueve, es decir, se encuentra en reposo y por lo tanto debe encontrarse en equilibrio.



Si realizamos el DCL



Se aprecia que las fuerzas no se equilibran.

¡No se cumplen las leyes de Newton!

5.1. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

Para resolver este tipo de problemas, vamos a tomar en cuenta dos métodos.

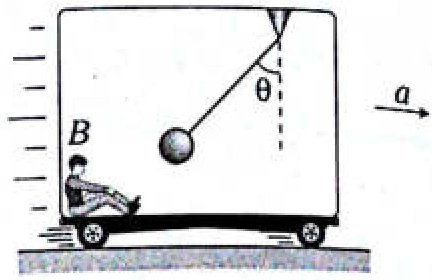
5.1.1. Fuerza de inercia o inercial

La fuerza de inercia $(\vec{F}_I)$ es una fuerza imaginaria, es decir, no surge como resultado de una interacción; pero al representarla actuando sobre el cuerpo, se logran verificar la primera y segunda ley de Newton para el observador no inercial. Esta fuerza se representa actuando en el centro de masa del cuerpo y es colineal con la $\vec{a}_{\text{sist}}$, pero orientada en forma opuesta.

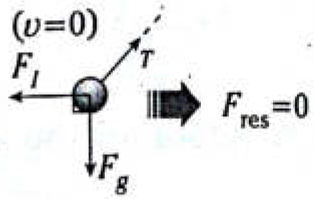
Se cumple

$$\boxed{\vec{F}_I = m(-\vec{a}_{\text{sist}})}$$

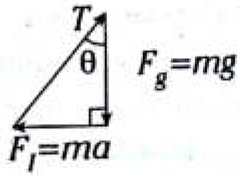
En nuestro ejemplo



Para B



La esfera se encuentra en "equilibrio", entonces con las tres fuerzas podemos formar un triángulo por el método del polígono.



Del gráfico

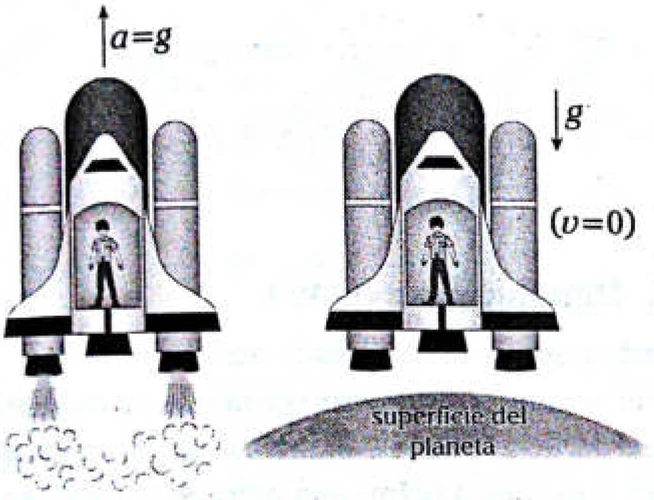
$$\tan\theta = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}$$

$$\therefore \quad \theta = \arctan\left(\frac{a}{g}\right)$$

Hemos obtenido el mismo resultado al que llegó el observador A.

5.1.2. Gravedad efectiva

Se basa en el principio de equivalencia de la gravedad, descubierto por Albert Einstein, el cual nos plantea el siguiente experimento: si nos encontramos en el interior de una cabina, la cual se encuentra completamente cerrada y en algún lugar del espacio donde no interactúa con otros cuerpos, y de pronto acelera con una $a=g$, entonces no tendríamos ninguna forma de darnos cuenta si la cabina se encuentra acelerando en el espacio exterior o nos encontramos en la superficie de un planeta sometidos a la aceleración de la gravedad (g).

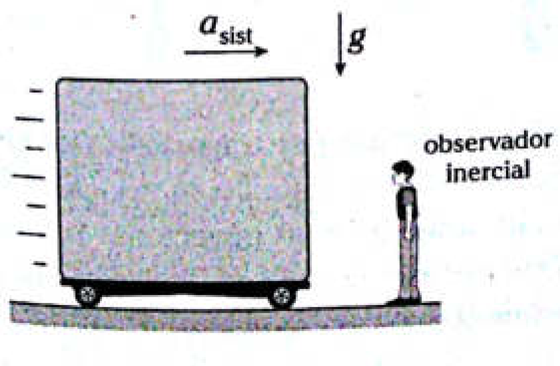


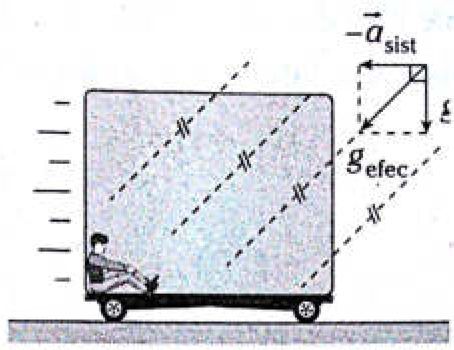
Entonces la $\vec{a}_{sist}$ es equivalente a la $\vec{g}$ para un observador que se ubica en el interior.

$$\boxed{\vec{g}=-\vec{a}_{sist}}$$

En general, si un observador se encuentra en el interior de una cabina que acelera con $\vec{a}_{sist}$ y en la superficie de un planeta con aceleración de gravedad $\vec{g}$. Para el observador, la gravedad efectiva es

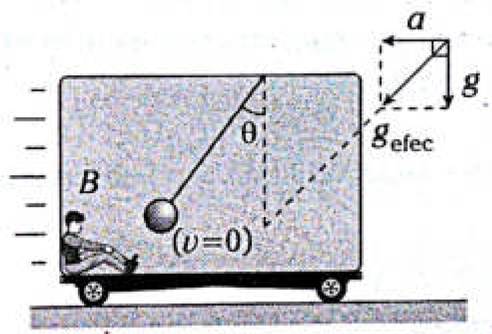
$$\boxed{\vec{g}_{efec}=\vec{g}-\vec{a}_{sist}}$$



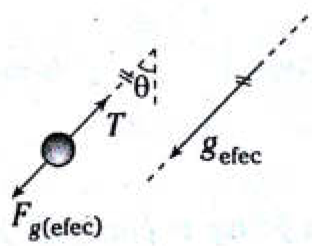


Para el observador en el interior de la cabina, la gravedad es el $\vec{g}_{efec}$ y las líneas paralelas serían las verticales.

Para el ejemplo



El observador B nota que la esfera no se mueve, entonces se encuentra en equilibrio.



En consecuencia, el cable se debe ubicar en posición paralela a la línea que contiene a la $\vec{g}_{efec}$.

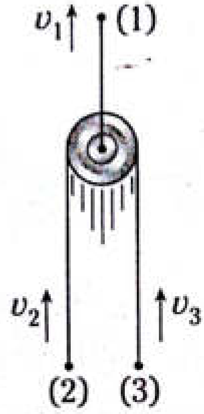
Luego

$$\tan\theta=\frac{a}{g}$$

$$\therefore \quad \theta=\arctan\left(\frac{a}{g}\right)$$

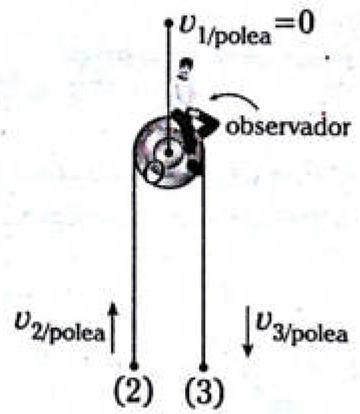
6. Polea móvil

Es aquella polea cuyo centro se traslada.



Si queremos encontrar una relación entre estas tres velocidades, será más sencillo examinar los movimientos desde el interior de la polea ya que tan solo se observará el movimiento de dos puntos y no de tres.

Ubicamos imaginariamente un observador en *O*.



Respecto a la polea, el punto (2) y el punto (3) recorren las mismas distancias en el mismo intervalo de tiempo, en consecuencia, presentan la misma rapidez; pero se mueven con orientaciones opuestas.

Luego

$$\underbrace{\vec{v}_{2/polea}} = \underbrace{-\vec{v}_{3/polea}}$$

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_{polea} = -\left(\vec{v}_3 - \vec{v}_{polea}\right)$$

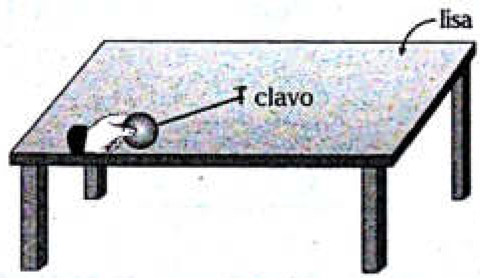
$$\boxed{\vec{v}_{polea} = \frac{\vec{v}_2 + \vec{v}_3}{2} = \vec{v}_1}$$

Esta misma relación se obtiene con las aceleraciones.

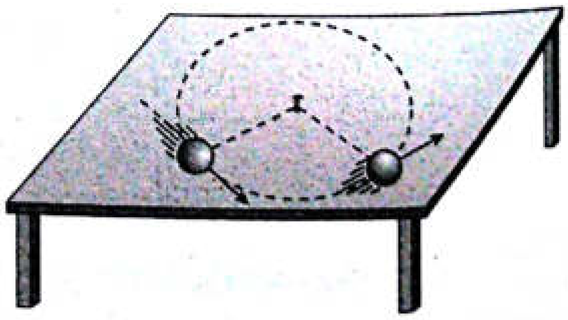
$$\boxed{\vec{a}_1 = \frac{\vec{a}_2 + \vec{a}_3}{2} = \vec{a}_{polea}}$$

7. Dinámica curvilínea

Consideremos el siguiente acontecimiento: Una pequeña esfera se encuentra atada a una cuerda, la cual se encuentra atada a su otro extremo a un clavo y sobre una mesa horizontal lisa.



Luego de lanzar la esfera, estudiemos el movimiento que esta desarrolla.

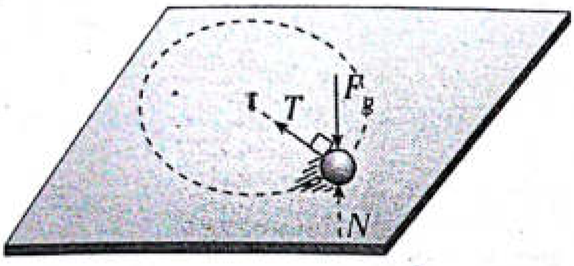


La esfera describe por trayectoria una circunferencia y en todo instante su velocidad se representa tangente a su trayectoria. Se observa que la velocidad cambia de dirección, entonces experimenta una aceleración.

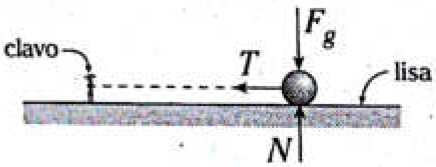
De la segunda ley de Newton

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}_{res}}{m}$$

Examinemos las fuerzas que actúan sobre la esfera.

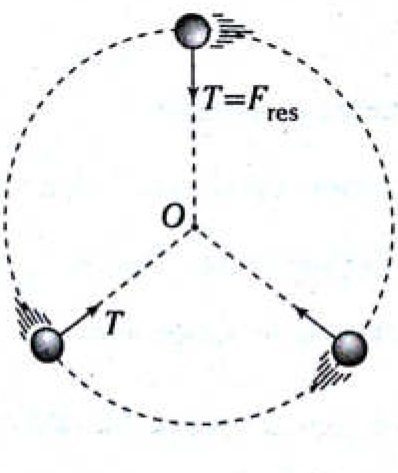


Para una mejor comprensión, empleamos una vista desde el borde de la mesa.

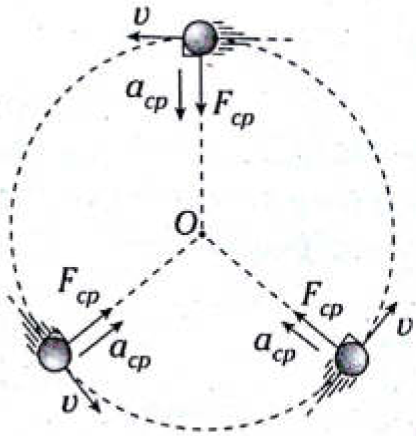


En la vertical, las fuerzas se equilibran; mientras que en la horizontal, la $\vec{T}$ hace el papel de $\vec{F}_{res}$.

Al realizar una vista superior



En todo instante, la $\vec{F}_{res}$ se dirige hacia el centro de la circunferencia (*O*), es por ello que se le denomina fuerza centrípeta $(\vec{F}_{cp})$. Y de la segunda ley de Newton, esta fuerza genera una aceleración que tiene la misma dirección, es decir, también se dirige hacia el centro de la circunferencia.

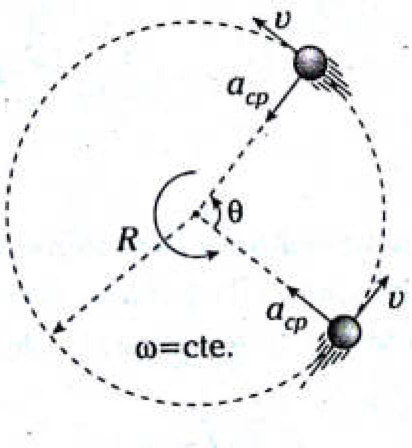


Luego

$$\boxed{\vec{a}_{cp}=\frac{\vec{F}_{cp}}{m}}$$

La $\vec{a}_{cp}$ no se encuentra a favor ni en contra de la $\vec{v}$, es por ello que su módulo no se altera, tan solo, su dirección, entonces el movimiento que desarrolla la esfera es un MCU.

Recordemos lo aprendido en cinemática para el MCU.



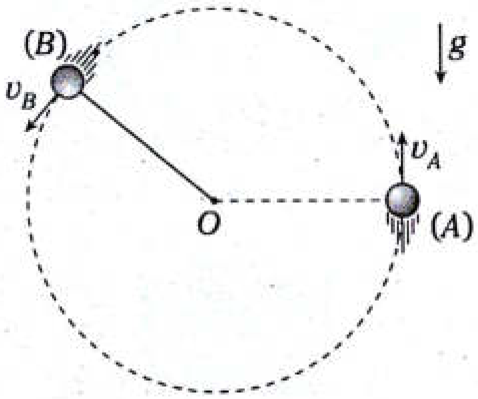
$$\boxed{a_{cp}=\frac{v^2}{R}=\omega^2\cdot R}$$

Además

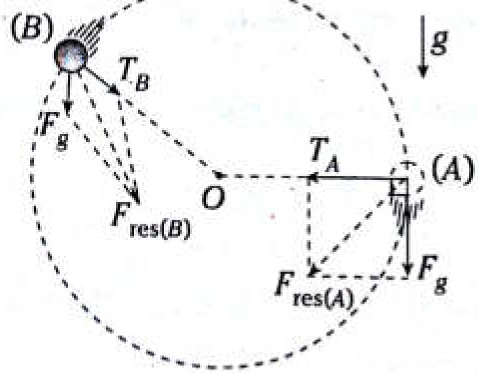
$$\boxed{v = \omega R} \qquad \boxed{\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T}}$$

donde T es el periodo.

Ahora examinemos un caso más general: una esfera se encuentra atada a una cuerda y girando en un plano vertical.



Realizamos el DCL de la partícula en las posiciones A y B, para determinar la $\vec{F}_{res}$.

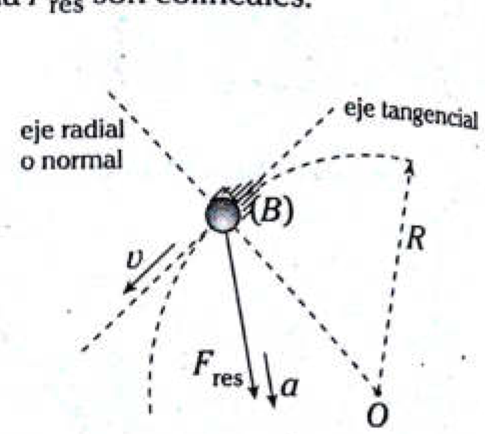


Como se puede apreciar en todo instante, existe una $\vec{F}_{res}$, pero no se dirige hacia el centro de la circunferencia; y de la segunda ley de Newton

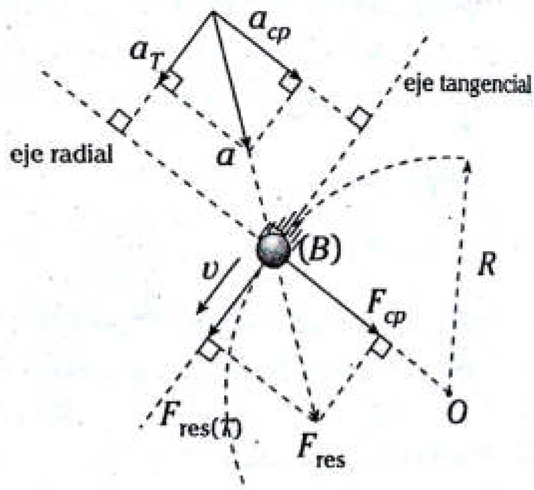
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{res}}{m}$$

misma dirección

Examinando una posición cualquiera, tal como B, la $\vec{a}$ y la $\vec{F}_{res}$ son colineales.



Descomponiendo a la $\vec{F}_{res}$ y $\vec{a}$ en los ejes normal y tangencial.



donde

- $\vec{F}_{cp}$: fuerza centrípeta
- $\vec{F}_{res(T)}$: fuerza resultante tangencial
- $\vec{a}_{cp}$: aceleración centrípeta
- $\vec{a}_T$: aceleración tangencial

Aplicamos la segunda ley de Newton en cada eje.

En el eje radial

$$\boxed{\vec{a}_{cp} = \frac{\vec{F}_{res}}{m}}$$

Debemos tomar en cuenta las siguientes observaciones:

- La $\vec{a}_{cp}$ y $\vec{F}_{cp}$ siempre se dirigen hacia el centro de la circunferencia.
- La $\vec{a}_{cp}$ se encarga de medir el ritmo con que cambia la dirección de la velocidad.
- De la cinemática circunferencial

$$\boxed{a_{cp}=\frac{v^2}{R}=\omega^2\cdot R}$$

En el eje tangencial

$$\boxed{\vec{a}_T=\frac{\vec{F}_{res(T)}}{m}}$$

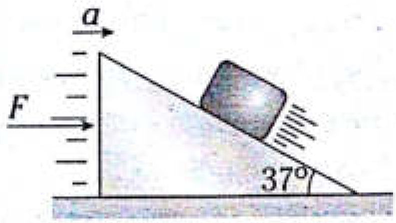
Debemos tomar en cuenta las siguientes observaciones:

- La $\vec{a}_T$ y $\vec{F}_{res(T)}$ son colineales al eje tangente, es decir, colineal con la velocidad ($\vec{v}$).
- La $\vec{a}_T$ nos expresa a qué ritmo cambia el módulo de la velocidad.
- De la cinemática circunferencial

$$\boxed{a_T=\frac{v_F-v_0}{\Delta t}} \text{ para el MCUV}$$

Problema N.° 1

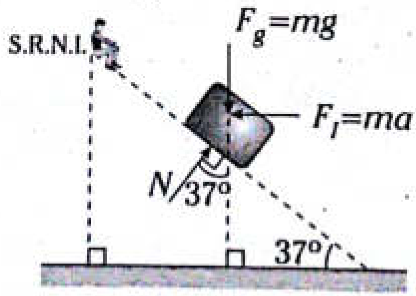
Si el bloque asciende con velocidad constante respecto de la cuña, determine el módulo de la aceleración de la cuña. Desprecie todo rozamiento y $g=10$ m/s^2.



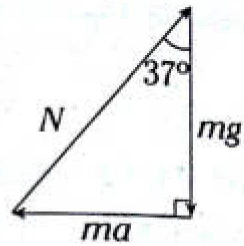
Resolución

Nos piden la aceleración de la cuña (a) y como podemos apreciar, a medida que la cuña se traslada, el bloque asciende sobre ella; entonces para reducir la complejidad de estudiar el movimiento de dos cuerpos en forma simultánea, ubiquemos nuestro sistema de referencia sobre la cuña; pero como esta acelera, se trata de un S.R. no inercial; y como el bloque sube a velocidad constante respecto de la cuña, entonces se encuentra en equilibrio respecto de ella; finalmente, se cumple $\vec{F}_{res}=\vec{0}$.

Realicemos el DCL del bloque.



Con las tres fuerzas podemos formar un triángulo de fuerzas.



$$\tan 37° = \frac{ma}{mg}$$

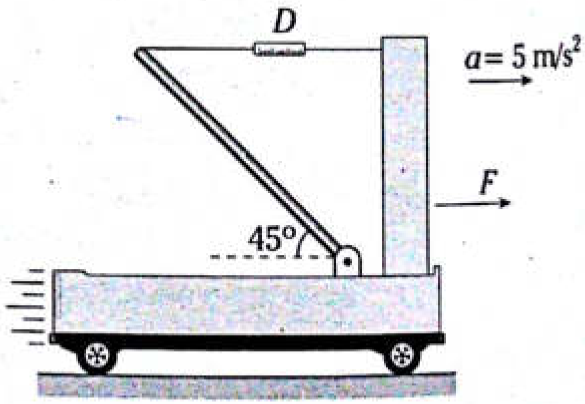
$$a = g\underbrace{\tan 37°}$$

$$a = 10 \times \left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\therefore \quad a = 7{,}5 \text{ m/s}^2$$

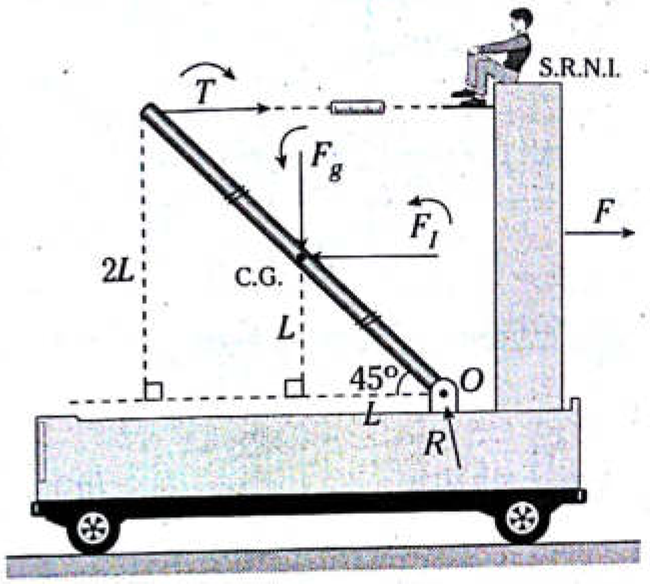
Problema N.° 2

Un carrito se traslada con una aceleración de 5 m/s^2, transportando una barra homogénea de 10 kg, tal como se muestra en el gráfico adjunto. Determine la lectura del dinamómetro. ($g=10$ m/s^2)



Resolución

La lectura del dinamómetro nos indica el módulo de la tensión en el cable. Por otro lado, la barra no se mueve con respecto al carrito, entonces podemos aplicar las condiciones de equilibrio, pero tomando en cuenta que el carrito está acelerando y, por lo tanto, representa un S.R.N.I. Al graficar las fuerzas que actúan sobre la barra, debemos considerar la $\vec{F}_I$ que actúa en el centro de masa que coincide con su centro de gravedad (C. G.).



De la segunda condición de equilibrio, con respecto a la articulación O

$$\underbrace{\sum M_0 \curvearrowright}=\underbrace{\sum M_0 \curvearrowleft}$$

$$M_0^T = M_0^{F_I} + M_0^{F_g}$$

$$T \times (2\cancel{L}) = \underbrace{F_I} \times (\cancel{L}) + \underbrace{F_g} \times (\cancel{L})$$

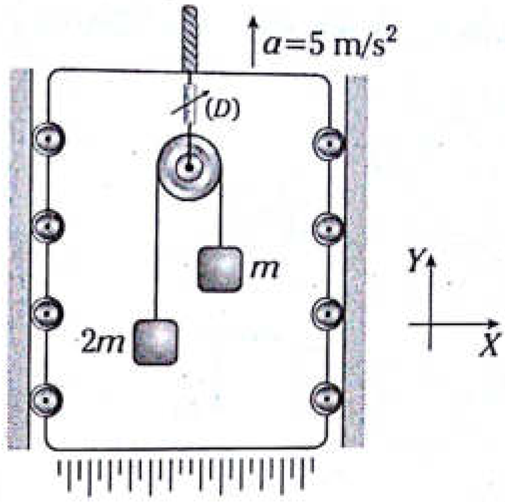
$$2T = ma + mg$$

$$2T = 10(5) + 10(10)$$

$\therefore \quad T = 75$ N

Problema N.° 3

Si el ascensor que se muestra asciende verticalmente con 5 m/s^2, determine la lectura del dinamómetro. (m=2 kg; g=10 m/s^2).



Resolución

Nos piden la lectura del dinamómetro, es decir, el módulo de la tensión en el cable que sostiene a la polea.

Para reducir la complejidad, examinemos el movimiento de los cuerpos desde el interior de la cabina que acelera.

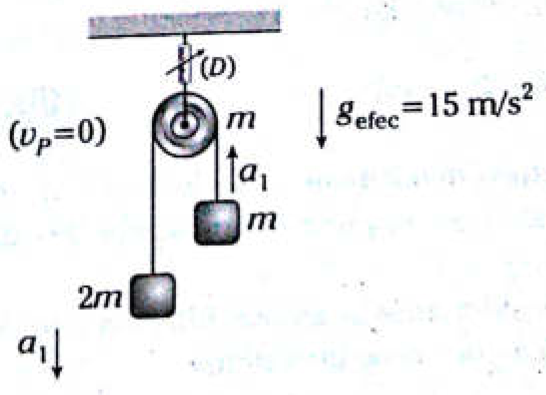
Al hacer este cambio, todos los cuerpos son afectados por una aceleración de gravedad conocida como gravedad efectiva, donde

$$\vec{g}_{\text{efec}} = \underbrace{\vec{g}} - \underbrace{\vec{a}_{\text{sist}}}$$

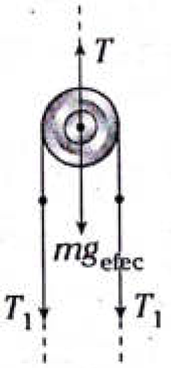
$$\vec{g}_{\text{efec}} = (-10\,\hat{j}) - (+5\,\hat{j})$$

$$\vec{g}_{\text{efec}} = -15\,\hat{j}\,(\text{m/s}^2)$$

Desde el interior de la cabina



Como la polea no se mueve, entonces la $\vec{F}_{res}=\vec{0}$.

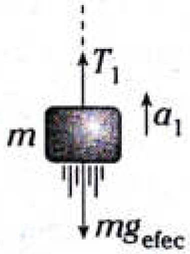


$$\underbrace{\sum F(\uparrow)}=\underbrace{\sum F(\downarrow)}$$

$$T = 2T_1 + mg_{efec}$$

$$T = 2T_1 + 2(15) \qquad \text{(I)}$$

Sobre el bloque de masa m



De la segunda ley de Newton

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_{res}}{m}$$

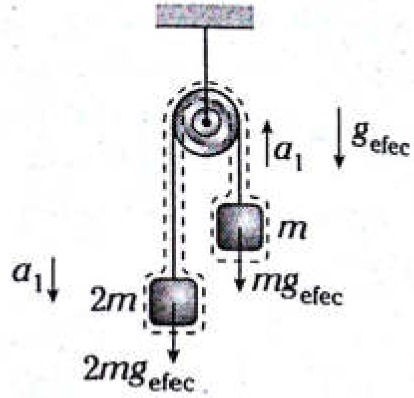
$$a_1 = \frac{T_1 - mg_{efec}}{m}$$

$$\rightarrow \quad T_1 = m(a_1 + g_{efec})$$

$$T_1 = 2(a_1 + 15) \qquad \text{(II)}$$

Debemos determinar la aceleración a_1, que es la misma que experimentan ambos bloques.

Si consideramos a ambos bloques y la cuerda que los une como un sistema



$$a_1 = \frac{\sum F\left(\begin{smallmatrix}\text{a favor}\\ \text{de } a_1\end{smallmatrix}\right) - \sum F\left(\begin{smallmatrix}\text{en contra}\\ \text{de } a_1\end{smallmatrix}\right)}{m_{sist.}}$$

$$a_1 = \frac{2mg_{efec} - mg_{efec}}{m+2m} = \frac{g_{efec}}{3}$$

$$a_1 = \frac{15}{3} = 5 \text{ m/s}^2 \qquad \text{(III)}$$

Reemplazamos (III) en (II).

$$T_1 = 2(5+15) = 40 \text{ N} \qquad \text{(IV)}$$

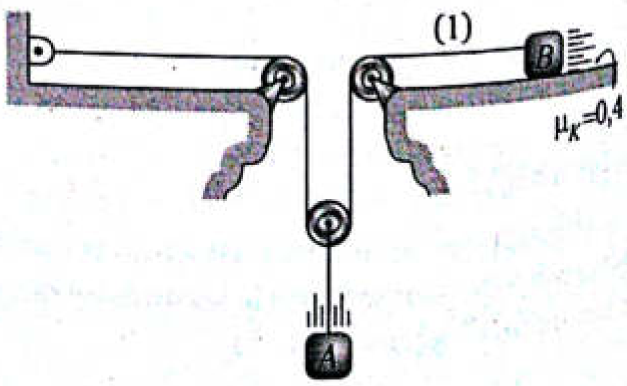
Finalmente, reemplazamos (IV) en (I).

$$T = 2(40) + 2(15)$$

$$\therefore \quad T = 110 \text{ N}$$

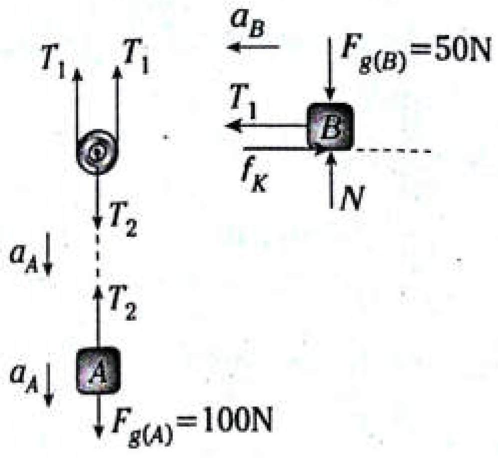
Problema N.° 4

Si las poleas son ideales, determine el módulo de la fuerza de tensión en la cuerda (1). ($m_A=2m_B=10$ kg; $g=10$ m/s^2)



Resolución

Nos piden la tensión en la cuerda (1), para ello realizamos el DCL de los cuerpos.



Sobre B, de la segunda ley de Newton

$$\vec{a}_B=\frac{\vec{F}_{res(B)}}{m_B}$$

$$a_B=\frac{T_1-f_K}{m_B}=\frac{T_1-\mu_K\times N}{m_B}$$

$$\rightarrow\ m_Ba_B=T_1-\mu_K\times N \qquad \text{(I)}$$

En la vertical

$$\underbrace{\sum F(\uparrow)}=\sum F(\downarrow)$$

$$N=F_{g(B)}$$

$$N=50\text{ N} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I).

$$5a_B=T_1-(0{,}4)(50)$$

$$5a_B=T_1-20 \qquad (\alpha)$$

Sobre la polea móvil, de la segunda ley

$$\vec{F}_{res}=m_p\vec{a}_A$$

Como es ideal, $m_p=0$

$$\rightarrow\ \vec{F}_{res}\equiv 0$$

$$\rightarrow\ \underbrace{\sum F(\uparrow)}=\sum F(\downarrow)$$

$$2T_1=T_2 \qquad \text{(III)}$$

Sobre A, de la segunda ley de Newton

$$\vec{a}_A=\frac{\vec{F}_{res(A)}}{m_A}$$

$$a_A=\frac{F_{g(A)}-T_2}{m_A}$$

$$m_Aa_A=F_{g(A)}-T_2$$

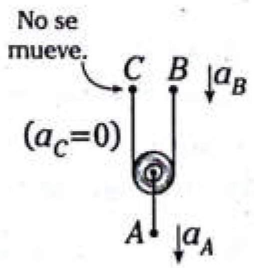
$$10a_A=100-T_2 \qquad \text{(IV)}$$

Reemplazamos (III) en (IV).

$$10a_A=100-2T_1$$

$$5a_A=50-T_1 \qquad (\beta)$$

Por otro lado, en la polea móvil



$$\vec{a}_A=\frac{\vec{a}_B+\vec{a}_C}{2}$$

$$\rightarrow\ a_A=\frac{a_B+0}{2}$$

$$a_A=\frac{a_B}{2} \qquad (*)$$

Finalmente, despejamos a_A y a_B de las expresiones (α) y (β) y los reemplazamos en (*).

$$\left(\frac{50-T_1}{5}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{T_1-20}{5}\right]$$

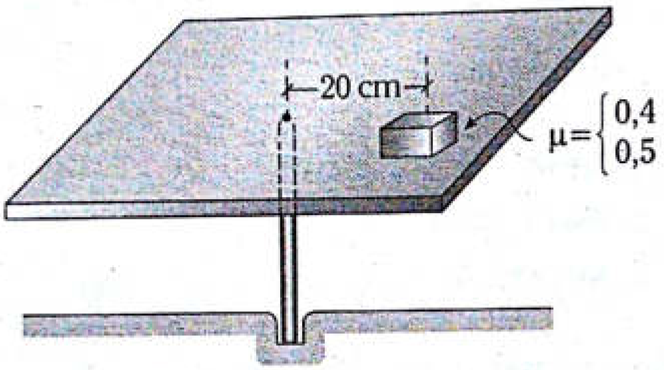
$$100-2T_1=T_1-20$$

$$3T_1=120$$

$$\therefore\ T_1=40\text{ N}$$

Problema N.° 5

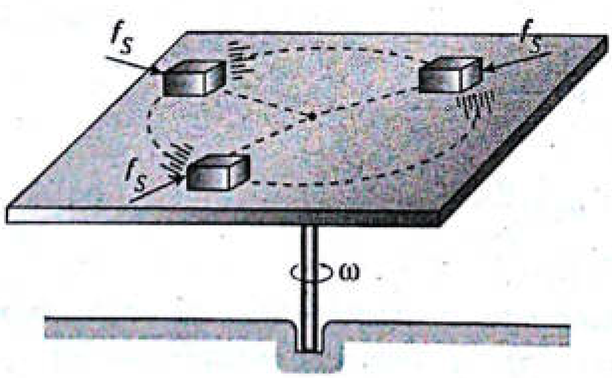
Se tiene un pequeño bloque sobre una mesa tal como se muestra. Si esta comienza a girar e incrementando su rapidez angular lentamente, ¿cuál será la máxima rapidez angular de tal manera que el bloque no resbale? ($g=10$ m/s^2).



Resolución

Al ir girando la mesa, el bloque va adquiriendo velocidad y por su inercia tiende a moverse en línea recta; pero la mesa lo obliga a moverse junto con ella, describiendo por trayectoria una circunferencia.

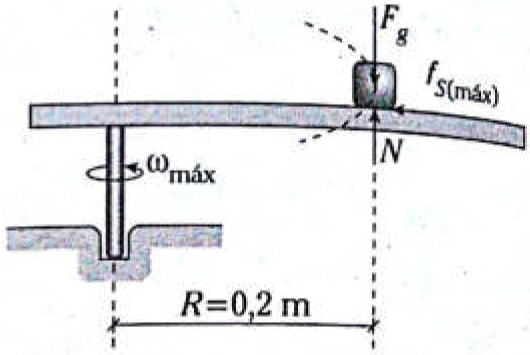
Para evitar que escape, debe actuar la f_S dirigida hacia el centro.



Al ir aumentando ω, se incrementa la tendencia por resbalar; en consecuencia, también aumenta la f_S.

Entonces la ω toma su máximo valor en el instante en el que el bloque se encuentre a punto de deslizar y actúa la $f_{S(\text{máx})}$.

Realizamos el DCL en una vista frontal.



De la segunda ley de Newton

$$\underbrace{\vec{a}_{cp}} = \frac{\vec{F}_{cp}}{\underbrace{m}}$$

$$\omega_{\text{máx}}^2 \cdot R = \frac{f_{S(\text{máx})}}{m}$$

$$\omega_{\text{máx}}^2 \cdot R = \frac{\mu_S \cdot N}{m} \qquad \text{(I)}$$

En la vertical, las fuerzas se equilibran

$$F_g = N \rightarrow N = mg \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I).

$$\omega_{\text{máx}}^2 \cdot R = \frac{\mu_S(\cancel{m}g)}{\cancel{m}}$$

$$\omega_{\text{máx}}^2 = \frac{\mu_S \cdot g}{R} \rightarrow \omega_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{\mu_S \cdot g}{R}}$$

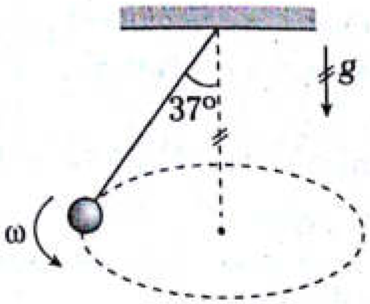
Reemplazamos los datos.

$$\omega_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{0,5(10)}{0,2}}$$

$$\therefore \quad \omega_{\text{máx}} = 5 \text{ rad/s}$$

Problema N.° 6

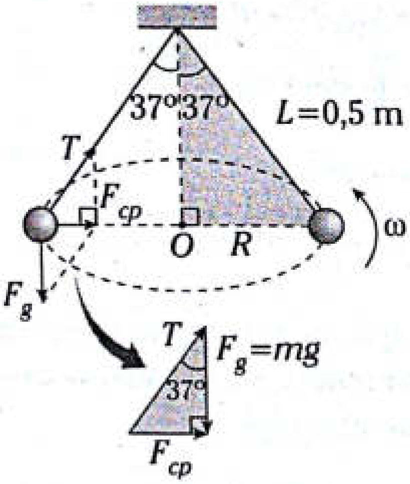
Se muestra un péndulo cónico, en el cual la cuerda de 50 cm de longitud siempre forma un ángulo de 37° con la vertical. Determine la rapidez angular de la esfera. ($g=10$ m/s^2).



Resolución

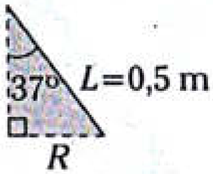
Nos piden ω y como la esfera desarrolla un MCU, experimenta un a_{cp}; entonces se verifica

$$a_{cp}=\omega^2\cdot R \qquad \text{(I)}$$



Del gráfico, en el triángulo recto notable de 37° y 53°

$$R=0{,}3\text{ m} \qquad \text{(II)}$$



Segunda ley

$$\vec{a}_{cp}=\frac{\vec{F}_{cp}}{m} \qquad \text{(III)}$$

Del método del polígono y del triángulo rectángulo

$$F_{cp}=mg\tan 37°$$

En (III)

$$a_{cp}=\frac{mg}{m}\tan 37°$$

$$a_{cp}=g\tan 37°=10\times\frac{3}{4}$$

$$a_{cp}=7{,}5\text{ m/s}^2 \qquad \text{(IV)}$$

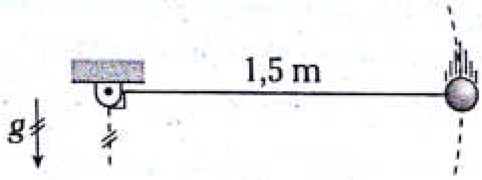
Finalmente, reemplazamos (II) y (IV) en (I).

$$7{,}5=\omega^2(0{,}3)$$

$$\therefore \quad \omega=5\text{ rad/s}$$

Problema N.° 7

Se observa una esfera de 4 kg que describe un movimiento circunferencial. Si en el instante mostrado el módulo de la fuerza resultante es 50 N, determine su rapidez angular en dicho instante. (g=10 m/s^2).



Resolución

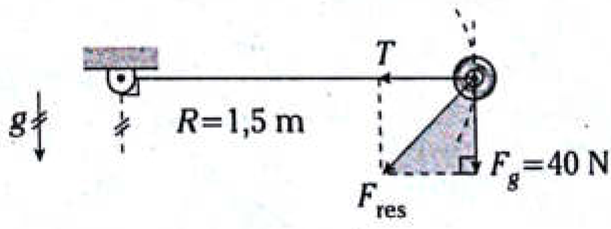
Nos piden ω y se conoce que

$$a_{cp}=\omega^2\cdot R \qquad \text{(I)}$$

Además, de la segunda ley de Newton para el movimiento circunferencial

$$\vec{a}_{cp}=\frac{\vec{F}_{cp}}{m} \qquad \text{(II)}$$

Examinemos las fuerzas.



Por condición del problema, $F_{res}=50$ N.

En el ⊿

$$T=\sqrt{(50)^2-(40)^2}$$

$$\underbrace{T}=30\text{ N}$$

$$F_{cp}=30\text{ N} \qquad \text{(III)}$$

Reemplazamos (III) en (II).

$$a_{cp}=\frac{30}{4} \rightarrow a_{cp}=7{,}5 \text{ m/s}^2$$

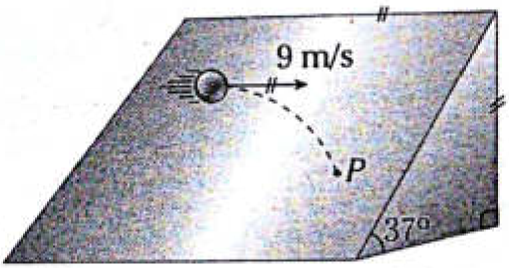
Finalmente, en (I)

$$7{,}5=\omega^2(1{,}5)$$

$$\therefore \quad \omega=\sqrt{5} \text{ rad/s}$$

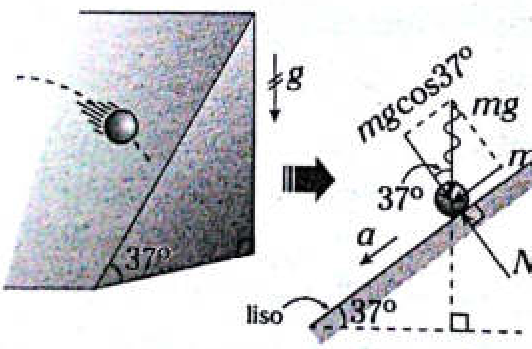
Problema N.° 8

Sobre un plano inclinado liso, se lanza una canica con una rapidez de 9 m/s tal como se muestra. Si luego de 2 s pasa por el punto P, determine su radio de curvatura en dicho instante. ($g=10$ m/s^2).



Resolución

Al lanzar la canica por el plano inclinado, esta es afectada por una componente de la $\vec{F}_g$.



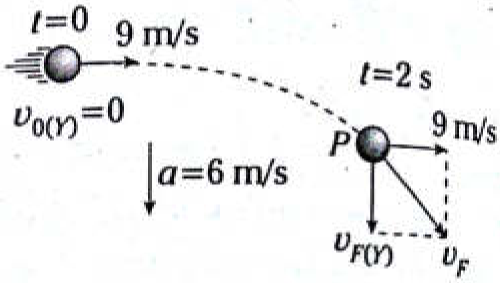
De la segunda ley de Newton

$$a=\frac{F_{res}}{m} \rightarrow a=\frac{\cancel{m}g\,\text{sen}37°}{\cancel{m}}$$

$$a=g\,\text{sen}37°=10\times\frac{3}{5}=6 \text{ m/s}^2$$

El movimiento de la partícula es parabólico con una $a=6$ m/s^2 sobre el plano inclinado.

Vista superior



En el eje Y, MRUV

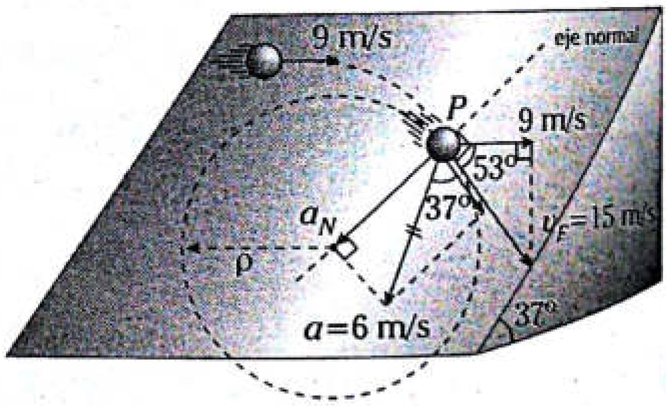
$$v_{F(Y)}=\cancelto{0}{v_{0(Y)}}+at$$

$$v_{F(Y)}=6(2)=12 \text{ m/s}$$

En el instante $t=2$ s

$$v_F=\sqrt{9^2+12^2}=15 \text{ m/s}$$

Como la trayectoria es curva, se puede inscribir una circunferencia y a su radio se le denomina radio de curvatura (ρ).



Del movimiento circunferencial

$$\underbrace{a_N}=\frac{(v_F)^2}{\rho}$$

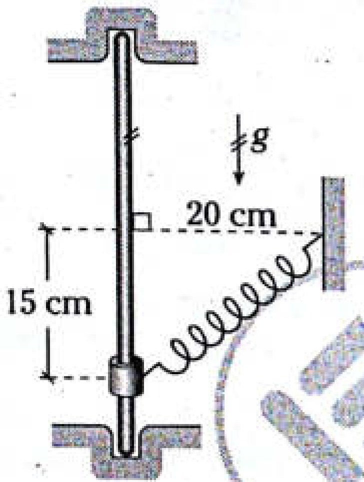
$$a\,\text{sen}37°=\frac{(v_F)^2}{\rho} \rightarrow \rho=\frac{(v_F)^2}{a\,\text{sen}37°}$$

$$\rho=\frac{(15)^2}{6\left(\frac{3}{5}\right)}$$

$$\therefore \quad \rho=62{,}5 \text{ m}$$

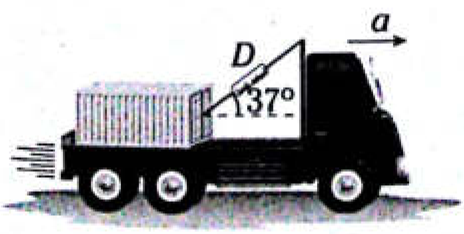
NIVEL BÁSICO

1. El collarín de 2 kg puede deslizarse por una guía vertical lisa. Determine el módulo de la aceleración que experimenta el collarín en el instante mostrado si la longitud natural del resorte es 15 cm y su constante de rigidez es 500 N/m. (g=10 m/s^2).



A) 3 m/s^2
B) 2,5 m/s^2
C) 8 m/s^2
D) 5 m/s^2
E) 15 m/s^2

2. Un camión traslada un contenedor de 500 kg, tal como se muestra. Si el dinamómetro indica 1250 N, determine la aceleración del camión.

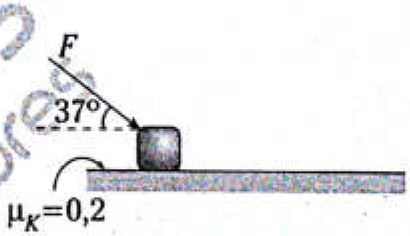


A) 4 m/s^2 B) 2 m/s^2 C) 2,5 m/s^2
D) 5 m/s^2 E) 3 m/s^2

3. Un joven de 60 kg se encuentra dentro de un ascensor y se coloca sobre una balanza. Determine la lectura de la balanza si el ascensor asciende con 1,5 m/s^2. (g=10 m/s^2)

A) 720 N
B) 690 N
C) 510 N
D) 600 N
E) 400 N

4. El bloque de 10 kg parte del reposo mediante la aplicación de la fuerza $\vec{F}$ cuyo módulo es 50 N, tal como se muestra. Determine la distancia que recorre al cabo de 4 s. (g=10 m/s^2)

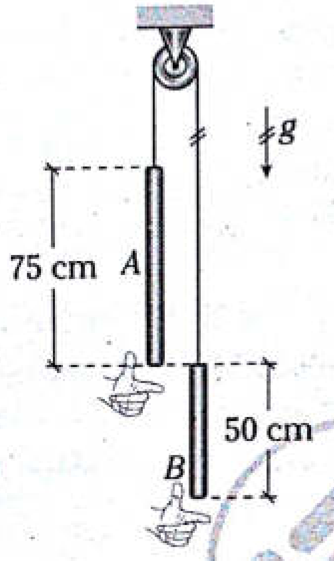


A) 20 m B) 15 m C) 8 m
D) 11,2 m E) 12,5 m

5. Se tiene dos cuerpos A y B cuyas masas son m y $3m$ respectivamente. Si sobre A se le aplica una fuerza de 100 N, tal como se muestra en el gráfico, determine la magnitud de fuerza que B le ejerce al bloque A. Desprecie la fricción. (m=10 kg; g=10 m/s^2)

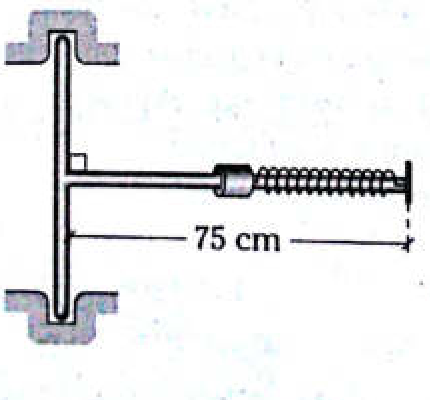
A) 125 N B) 100 N C) 75 N
D) 90 N E) 50 N

6. Se muestra un sistema formado por dos barras A y B cuyas masas son $3m$ y m respectivamente. Si el sistema es abandonado, ¿qué tiempo tardarán en cruzarse completamente? ($g=10$ m/s^2)



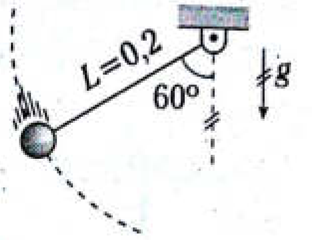
A) 4 s B) $\sqrt{2}$ s C) 2 s
D) 1 s E) 0,7 s

7. Un collarín liso de 2 kg se encuentra unido a un resorte de 30 cm de longitud y $K=20$ N/cm. Si la estructura comienza a girar lentamente y va incrementando su rapidez angular, determine la deformación del resorte cuando $\omega=10$ rad/s.



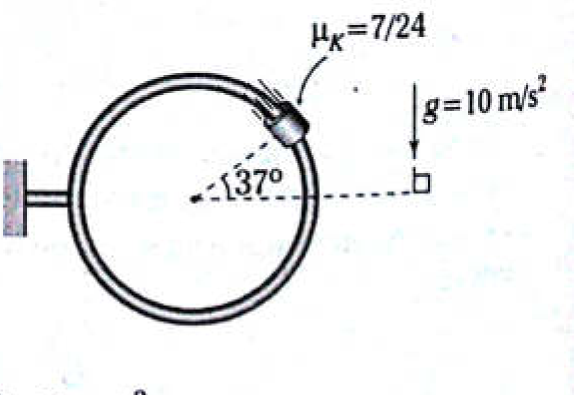
A) 15 cm B) 2 cm C) 8 cm
D) 5 cm E) 10 cm

8. Una pequeña esfera realiza un movimiento circunferencial en un plano vertical. Si en el instante mostrado la tensión en la cuerda presenta el mismo módulo que la fuerza de gravedad, determine la rapidez de la esfera y su aceleración. ($g=10$ m/s^2).



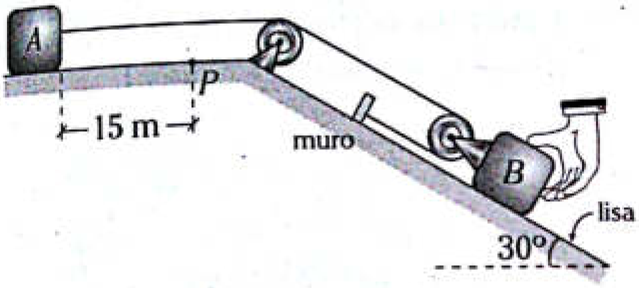
A) 1 m/s; 4 m/s^2
B) 2 m/s; 5 m/s^2
C) 1 m/s; 10 m/s^2
D) 2 m/s; 10 m/s^2
E) 5 m/s; $10\sqrt{3}$ m/s^2

9. Un collarín desliza sobre un alambre que tiene la forma de un aro. En el instante mostrado, determine la aceleración del collarín sabiendo que forma un ángulo de 26,5° con la vertical.



A) 20 m/s^2
B) $4\sqrt{5}$ m/s^2
C) $15\sqrt{5}$ m/s^2
D) 15 m/s^2
E) $3\sqrt{5}$ m/s^2

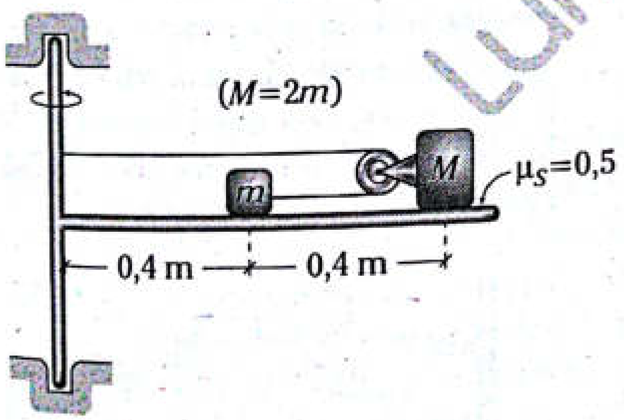
10. Al dejar en libertad al sistema, determine cuánto tiempo tarda el bloque A en pasar por el punto P. Considere poleas ideales. ($m_B=2m_A$; $g=10\ m/s^2$).



A) 2 s
B) 1,5 s
C) 3 s
D) 6 s
E) 4 s

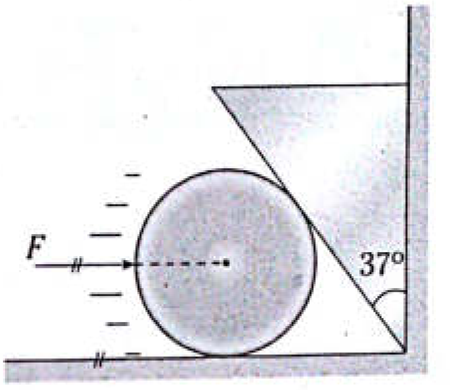
NIVEL INTERMEDIO

11. En el sistema que se muestra, la plataforma va incrementando su rapidez lentamente. Determine hasta qué rapidez angular debe rotar la plataforma, de tal manera que los bloques no deslicen. Considere que la polea es ideal. ($g=10\ m/s^2$).



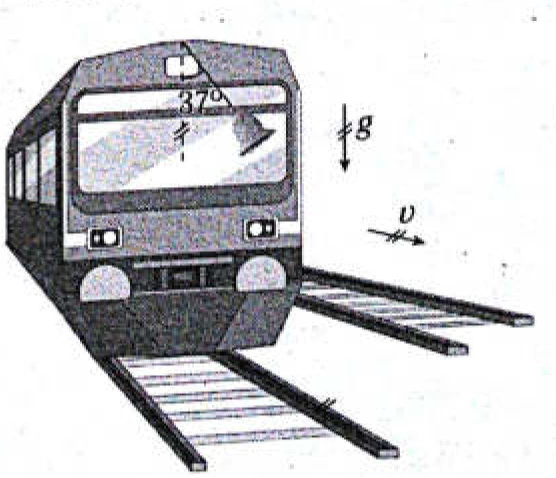
A) 3 rad/s
B) 2 rad/s
C) 2,5 rad/s
D) 4 rad/s
E) 5 rad/s

12. Un cilindro homogéneo de 6 kg es empujado por medio de una fuerza horizontal cuyo módulo es 80 N, tal como se muestra en el gráfico adjunto. Determine con qué aceleración asciende la cuña de 3 kg. Considere superficies lisas. ($g=10\ m/s^2$).



A) $2,5\ m/s^2$
B) $3\ m/s^2$
C) $5,5\ m/s^2$
D) $8\ m/s^2$
E) $4,7\ m/s^2$

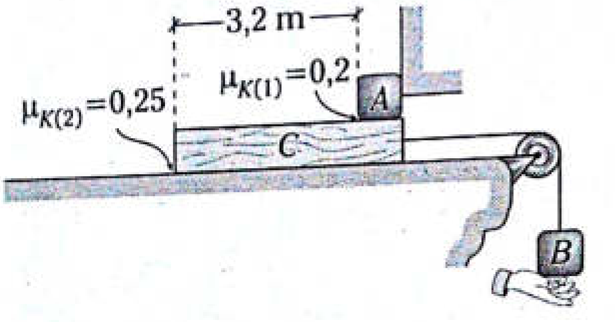
13. Un tranvía avanza a rapidez constante en una pista curva, donde su radio de curvatura es 120 m. Si en el interior se encuentra una lámpara que no se mueve con respecto al tranvía, determine la rapidez de este. ($g=10\ m/s^2$)



A) 15 m/s
B) 30 m/s
C) 18 m/s
D) 20 m/s
E) 12 m/s

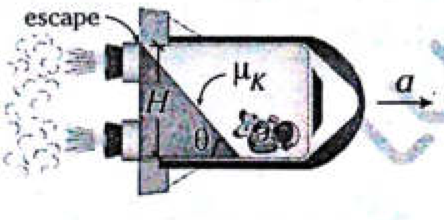
14. Si el sistema que se muestra es abandonado, ¿al cabo de qué tiempo el bloque A abandona el tablón?

Considere $m_A = \frac{m_B}{2} = \frac{m_C}{3}$; ($g$=10 m/s^2).



A) 2 s
B) 1,5 s
C) 3 s
D) 2,5 s
E) 1,8 s

15. Una nave espacial navega fuera del alcance de la atracción gravitacional de algún planeta o estrella y con una aceleración a. Si un astronauta se deja en libertad sobre una rampa, tal como se muestra; ¿al cabo de qué tiempo abandona la nave?



A) $\sqrt{\frac{2H}{\mu a}}$

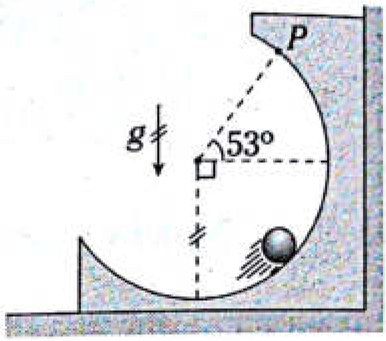
B) $\sqrt{\frac{2H}{a}\left(\frac{\cos\theta}{1-\mu\,\text{sen}\,\theta}\right)}$

C) $\sqrt{\frac{2H}{a}\left(\frac{\sec\theta}{\text{sen}\,\theta-\mu\cos\theta}\right)}$

D) $\sqrt{\frac{H}{a}\tan\theta}$

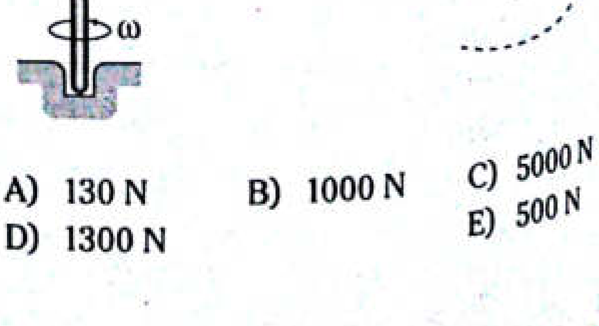
E) $\sqrt{\frac{2H}{a}\left(\frac{\csc\theta}{\cos\theta-\mu\,\text{sen}\,\theta}\right)}$

16. Una pequeña esfera de 0,5 kg se mueve en el interior de un dique que presenta una cavidad esférica interna de 1 m de radio. Determine con qué rapidez pasa el punto P, sabiendo que el dique de 4 kg se encontrará a punto de perder contacto con el piso. Desprecie la fricción. (g=10 m/s^2).



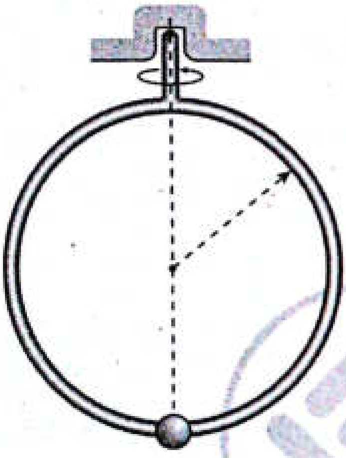
A) $6\sqrt{3}$ m/s
B) 6 m/s
C) $2\sqrt{6}$ m/s
D) 4 m/s
E) 8 m/s

17. Un niño de 50 kg se encuentra en el juego mecánico de la silla voladora. Si la estructura está rotando con una rapidez constante de 2 rad/s, determine el módulo de la fuerza que el joven ejerce sobre el asiento. (g=10 m/s^2)



A) 130 N
B) 1000 N
C) 5000 N
D) 1300 N
E) 500 N

18. Se tiene un alambre que tiene la forma de una circunferencia cuyo radio es 1,73 m. Si en el alambre se encuentra una pequeña esfera lisa, determine hasta qué rapidez angular se debe incrementar el eje de rotación del alambre, de tal manera que la fuerza que ejerce el alambre a la esfera sea el doble de su fuerza de gravedad. ($g=10$ m/s^2).



A) 10 rad/s

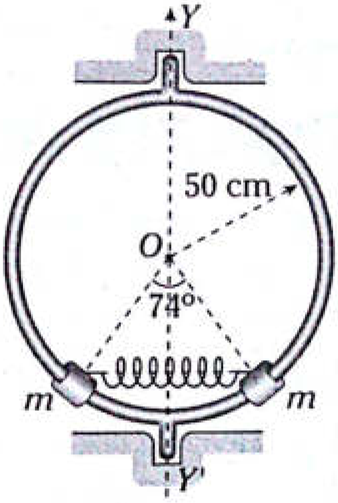
B) 2 rad/s

C) $\sqrt{3}$ rad/s

D) $3\sqrt{3}$ rad/s

E) $\sqrt{10}$ rad/s

19. En un alambre liso que tiene la forma de una circunferencia de 50 cm de radio, se encuentran dos pequeños collarines iguales y unidos mediante un resorte de K=9 N/cm y longitud natural igual a 80 cm. Si el sistema se encuentra en equilibrio y luego comienza a rotar lentamente con respecto al eje YY', determine hasta qué rapidez angular se debe incrementar, de tal forma que el resorte se encuentre sin deformar. ($g=10$ m/s^2).



A) 10 rad/s

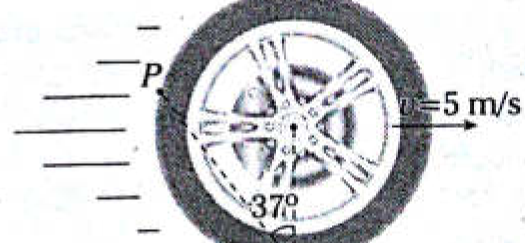
B) $10\sqrt{3}$ rad/s

C) $10\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ rad/s

D) 8 rad/s

E) 12 rad/s

20. La rueda de una llanta se encuentra rodando uniformemente sin resbalar y en el instante mostrado, un trozo de barro se desprende del punto P. Determine el radio de curvatura de la trayectoria descrita por el barro en el preciso instante en que se desprende de la rueda. ($g=10$ m/s^2).



A) 8 m
B) 4 m
C) 6 m
D) 12 m
E) 10 m

Trabajo mecánico y energía

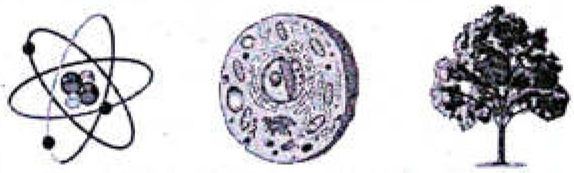
Capítulo VIII

Objetivos

- Determinar la cantidad de trabajo mecánico en diversas situaciones.
- Evaluar la energía mecánica de un cuerpo o sistema.
- Resolver situaciones mecánicas aplicando la ley de conservación de la energía mecánica o la relación entre trabajo y energía.

1. Materia

Es todo lo que existe independientemente de la conciencia del hombre. Por ejemplo, las partículas subatómicas, los átomos, la célula, los árboles, los seres vivos, los planetas, las galaxias, etc.



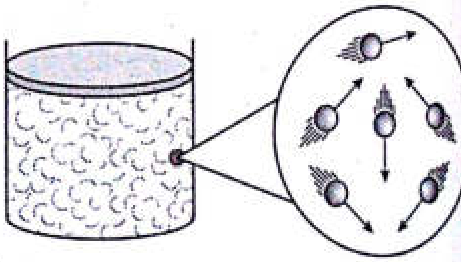
2. Movimiento

Se concibe el movimiento como la **propiedad principal** que presenta la materia y, en su concepto más amplio, esto significa **cambio** o **transformación**.

Ejemplos

- Movimiento mecánico: cambio de posición

- Movimiento térmico: cambio de posición de las moléculas en forma caótica



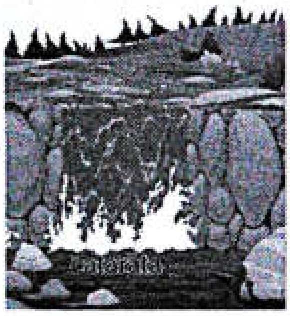
Debido a que la materia presenta diversas formas de movimiento, surge la necesidad de clasificarlas y cuantificarlas; para esto empleamos una magnitud física escalar llamada **energía**, la cual nos expresa la medida de las diversas formas de movimiento que presenta la materia. Su unidad de medida en el SI es el **joule** (J).

Asimismo, debido a que existen diversas formas de movimiento en la naturaleza, se asocia un nombre a la energía.

Ejemplos

- La energía eólica es la energía asociada a las corrientes de aire.

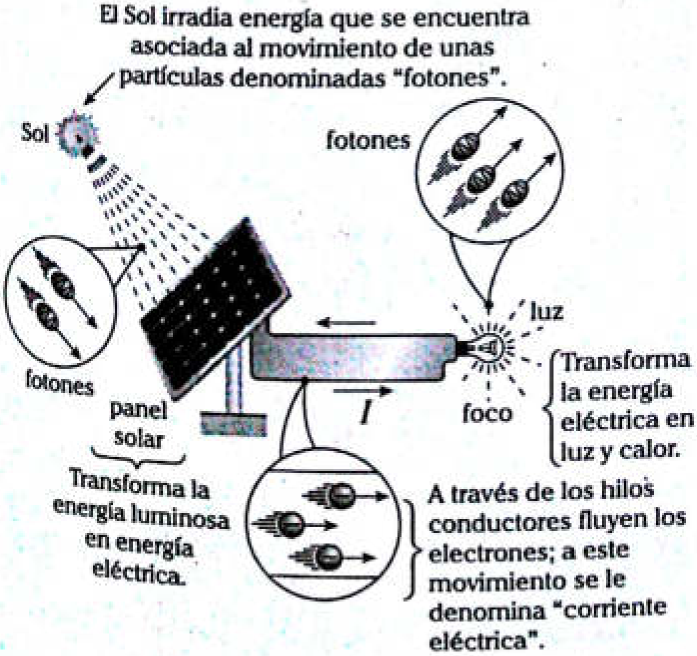
- La energía hidráulica es la energía asociada al movimiento de las corrientes de agua.



3. Conservación de la energía

Uno de los descubrimientos más importantes de la física es la **ley de conservación de la energía**, según la cual algunas formas de movimiento de la materia se transforman en otras.

Ejemplo



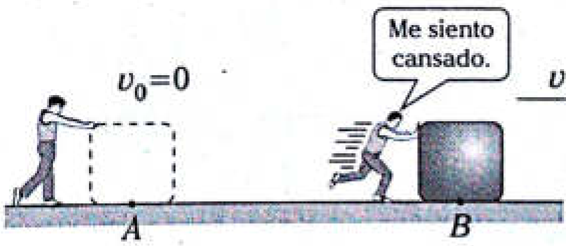
En consecuencia, lo que hemos descrito es la transformación de la energía.

$$\text{energía solar} \longrightarrow \text{energía eléctrica} \longrightarrow \text{energía luminosa}$$

Desde mediados del siglo XIX, se realizaron experimentos bastante meticulosos y precisos mediante los cuales se logró demostrar que, en todo proceso, la cantidad total de energía en sus diversas formas **no cambia**; es decir, se **conserva**. En todo proceso, la energía de un sistema no se crea ni se destruye, tan solo se transforma, y es posible que una parte de la energía del sistema sea transferida a otro sistema y viceversa, pero la cantidad total de energía permanece inalterable. A esto se le denomina **ley de conservación de la energía.**

4. Trabajo mecánico

Consideremos el siguiente acontecimiento: "Una persona debe poner en movimiento un bloque que inicialmente se encuentra en *A*, y lo debe hacer pasar por *B*; en todo momento aplica una fuerza constante horizontal".



Realicemos un estudio energético.

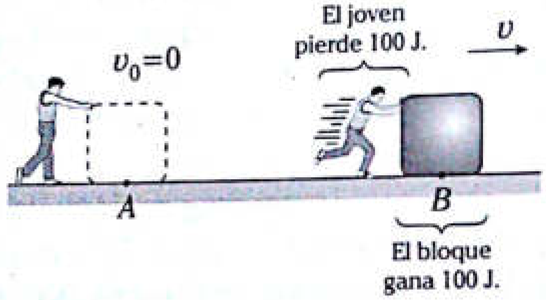
- **Para el bloque**: Ha ganado movimiento mecánico porque ha incrementado su velocidad, entonces ha **ganado energía**.
- **Para el joven**: Debido al esfuerzo realizado, ha consumido parte de la energía interna que poseía en *A*; es decir, el joven ha **perdido energía**.

Si aplicamos la ley general de conservación de la energía, podemos plantear la siguiente fórmula:

$$\boxed{E^{\text{ganada}} = E^{\text{perdida}}}$$

Entonces, durante este proceso, el joven le transfiere movimiento mecánico al bloque; es decir, le **transfiere energía mecánica**. En esto consiste el **trabajo mecánico**, ya que es el proceso mediante el cual un cuerpo le transfiere energía mecánica a otro.

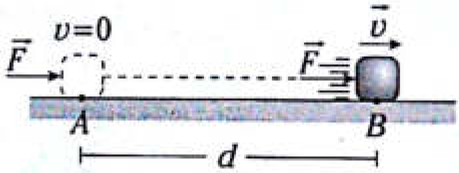
Ejemplo



Como el joven le transfiere 100 J de energía al bloque, entonces

$$\boxed{W_{A\to B}^{\text{joven}}=100\text{ J}}$$

Además, si el joven aplica al bloque una fuerza constante $(\vec{F})$, tal como se muestra



matemáticamente sería

$$\boxed{W_{AB}^{F}=F\cdot d}$$

unidad en el SI: joule

Nm < > joule (J)

donde

- W_{AB}^{F}: cantidad de trabajo desarrollado mediante la fuerza $\vec{F}$
- F: módulo de la fuerza aplicada
- d: distancia colineal a $\vec{F}$

Equivalencia

1 megajoule (1 MJ) < > 10^6 J

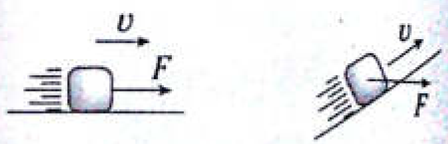
1 kilojoule (1 kJ) < > 10^3 J

1 milijoule (1 mJ) < > 10^{-3} J

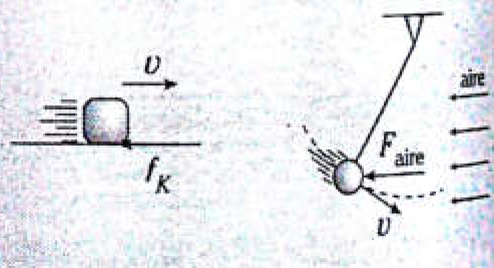
1 microjoule (1 μJ) < > 10^{-6} J

OBSERVACIÓN

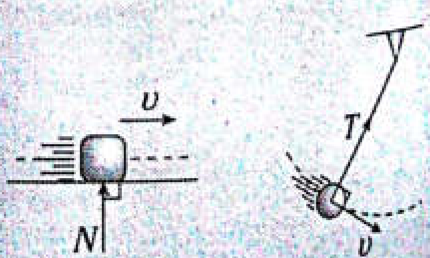
- Si la fuerza que aplicamos se encuentra en la misma dirección de la velocidad o desplazamiento del cuerpo, se considera que W^F es **positivo**.



- Si la fuerza que aplicamos se encuentra en orientación opuesta a la velocidad o desplazamiento del cuerpo, se considera que W^F es **negativo**.



- Si una fuerza actúa en una dirección perpendicular a la velocidad, entonces $W^f=0$.

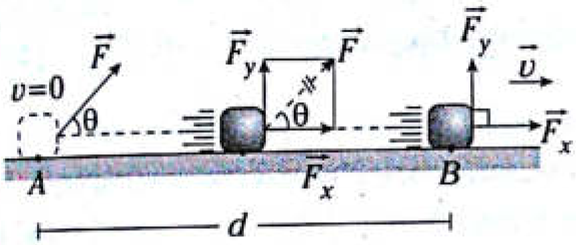


4.1. CASOS PARA EL CÁLCULO DE LA CANTIDAD DE TRABAJO MECÁNICO

4.1.1. Cuando una fuerza constante no es colineal al movimiento

En este caso, es recomendable descomponer la fuerza en una componente colineal y otra perpendicular al movimiento; por lo tanto, el trabajo total realizado será la suma de trabajos de dichas componentes.

Ejemplo



$$\rightarrow \quad W_{AB}^{F} = W_{AB}^{F_x} + W_{AB}^{F_y}$$

Como $\vec{F}_y$ es perpendicular a la dirección del movimiento, su trabajo es nulo; por consiguiente, el trabajo de $\vec{F}$ estará dado solamente por su componente colineal al movimiento. Entonces

$$W_{AB}^{F} = W_{AB}^{F_x} = F_x \cdot d$$

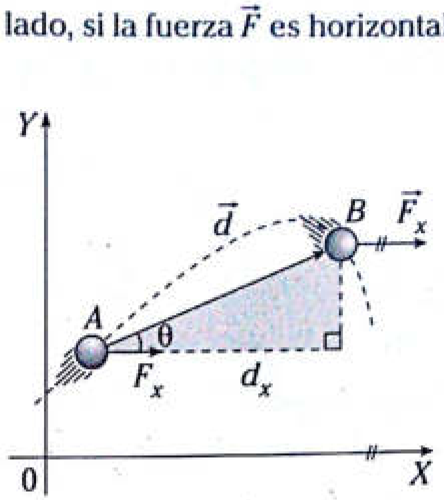
pero $F_x = F\cos\theta$.

$$\boxed{W_{AB}^{F} = F \cdot d \cdot \cos\theta} \text{ (forma general)}$$

Esta es la forma general de cómo se calcula la cantidad de trabajo realizado mediante una fuerza constante en un tramo. Esto se deduce a partir del producto escalar entre los vectores $\vec{F}$ y $\vec{d}$ (fuerza y desplazamiento, respectivamente).

$$\boxed{W^{F} = Fd\cos\theta = \underbrace{\vec{F}\cdot\vec{d}}_{\text{producto escalar}}}$$

Por otro lado, si la fuerza $\vec{F}$ es horizontal $(\vec{F}_x)$



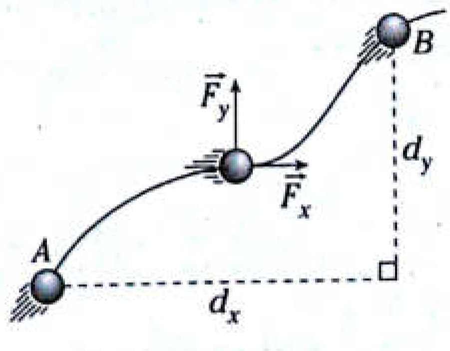
$$W_{AB}^{F} = \vec{F}\cdot\vec{d} = \underbrace{Fd\cos\theta}_{d_x}$$

$$\boxed{W_{AB}^{F} = F_x \cdot d_x}$$

Análogamente, se puede determinar para el caso que la fuerza sea vertical $\vec{F}_y$. Luego

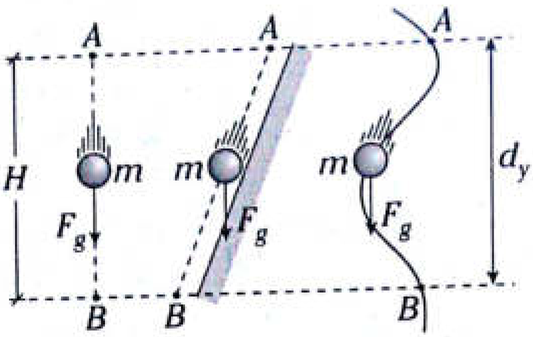
$$\boxed{W_{AB}^{F_y} = F_y \cdot d_y}$$

Así concluimos que si $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$ son constantes



$$\boxed{W_{AB}^{F_x} = +F_x \cdot d_x} \quad \wedge \quad \boxed{W_{AB}^{F_y} = +F_y \cdot d_y}$$

Un caso particular de una fuerza constante es la fuerza de gravedad; por lo tanto, notaremos que



Como la fuerza de gravedad es vertical, entonces

$$W_{AB}^{F_g}=F_g\cdot d_y$$

$$\boxed{W_{AB}^{F_g}=mgH}$$

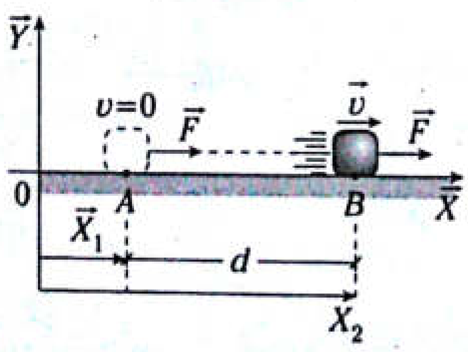
Observación

El trabajo de la fuerza de gravedad es independiente de la trayectoria, solo depende del valor de dicha fuerza y la altura desde la posición inicial hasta la posición final.

Cuando sube: W^{F_g} (–)

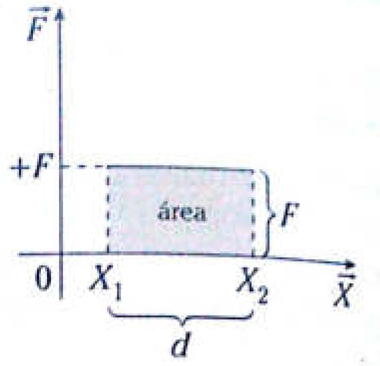
Cuando baja: W^{F_g} (+)

Ahora veamos el cálculo del W_{AB}^{F} por medio de una gráfica: $\vec{F}$ vs. $\vec{x}$.



$$W_{AB}^{F}=F\cdot d=F(x_2-x_1) \qquad (*)$$

Construyendo la gráfica $\vec{F}$ vs. $\vec{x}$, tenemos



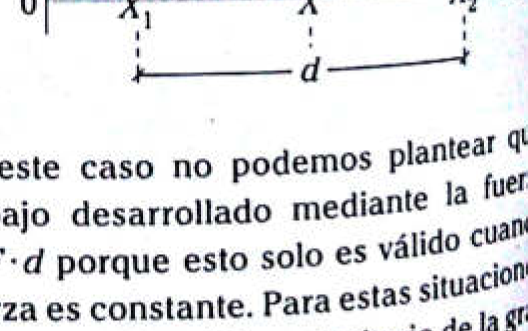
Si calculamos el área debajo de la gráfica obtenemos

$$\text{área}_{\square}=F(x_2-x_1)$$

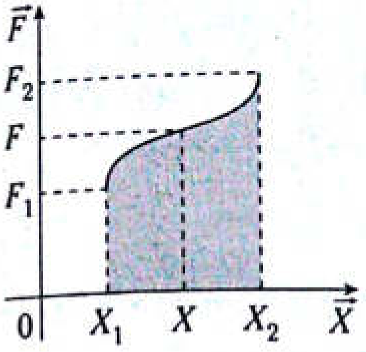
pero de la expresión (*) notamos que esto es el trabajo desarrollado mediante la fuerza $\vec{F}$.

$$\boxed{W_{AB}^{F}=\text{área}_{\square}}$$

4.1.2. Para una fuerza de módulo variable y colineal al movimiento



En este caso no podemos plantear que el trabajo desarrollado mediante la fuerza $\vec{F}$ es $F\cdot d$ porque esto solo es válido cuando la fuerza es constante. Para estas situaciones es recomendable utilizar el criterio de la gráfica $\vec{F}$ vs. $\vec{x}$ (fuerza versus posición). Luego tenemos que

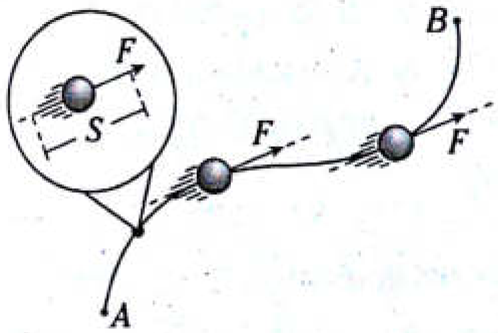


Recordamos que el área bajo la gráfica nos representa el trabajo realizado mediante la fuerza.

$$\boxed{W^F_{1\to 2} = \text{área}_{1\to 2}}$$

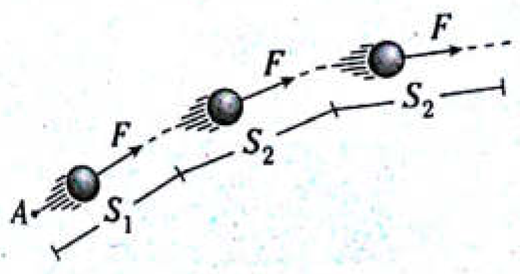
donde $W^F_{1\text{-}2}$ es la cantidad de trabajo de la fuerza $\vec{F}$ desde $\vec{x}_1$ hasta $\vec{x}_2$.

4.1.3. Cuando una fuerza es de módulo constante y en todo instante tangente a la trayectoria



Podemos dividir toda la trayectoria $\widehat{AB}$ en pequeñísimos tramos: S_1, S_2, S_3, ...; de tal manera que dichos tramos sean prácticamente rectilíneos y colineales a la fuerza tangente, entonces podríamos utilizar el criterio del trabajo de una fuerza constante colineal al movimiento.

Ampliando dichos tramos, tenemos



El trabajo realizado mediante $\vec{F}$ en el tramo $\widehat{AB}$ sería la suma de los pequeños trabajos en cada tramo.

$$W^F_{AB} = F\cdot S_1 + F\cdot S_2 + F\cdot S_3 + \ldots + F\cdot S_n$$

$$W^F_{AB} = F\left(S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n\right)$$

La suma de la longitudes de los pequeños tramos es la longitud total de la trayectoria desde A hasta B, o sea, es el recorrido e_{AB}.

Luego

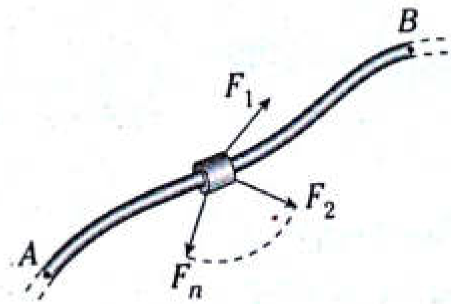
$$\boxed{W^F_{AB} = F\cdot e_{AB}}$$

5. Trabajo neto o total ($W^{\text{neto}}_{A\to B}$)

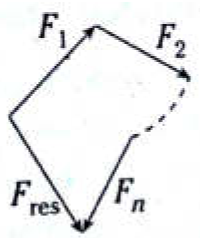
Si un cuerpo es trasladado desde un punto A hasta otro B y sobre él actúan varias fuerzas, además cada una de ellas realiza trabajo mecánico, se define

$$W^{\text{neto}}_{A\to B} = W^{F_1}_{A\to B} + W^{F_2}_{A\to B} + \ldots + W^{F_n}_{A\to B}$$

$$\boxed{W^{\text{neto}}_{A\to B} = \sum_{i=1}^{n} W^{F_i}_{A\to B}}$$



Si las fuerzas son constantes, entonces



$$\boxed{W^{\text{neto}}_{A\to B} = W^{F_{\text{res}}}_{A\to B} = \vec{F}_{\text{res}}\cdot\vec{d}_{AB}}$$

NOTA

Si el cuerpo se traslada con MRU, entonces presenta equilibrio de traslación: $F_{res}=0$.

$$\boxed{W^{neto}=0}$$

6. Energía mecánica (E_M)

Es aquella forma de energía que se le asocia a un cuerpo o sistema de cuerpos. Se encuentra conformada por tres formas distintas de energía:

- energía cinética (E_C o E_K)
- energía potencial gravitatoria (E_{PG})
- energía potencial elástica (E_{PE})

$$\boxed{E_M=E_C+E_{PG}+E_{PE}}$$

6.1. ENERGÍA CINÉTICA (E_C)

Es aquella forma de energía que se asocia a un cuerpo en virtud de su movimiento mecánico.

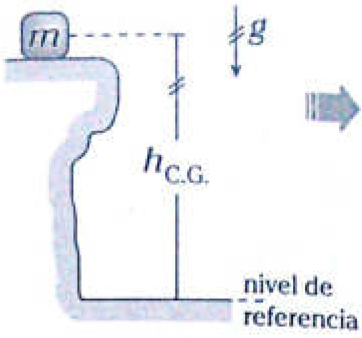
$$\boxed{E_C=\frac{mv^2}{2}}$$

donde

- m: masa (en kg)
- v: rapidez (en m/s)

6.2. ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA (E_{PG})

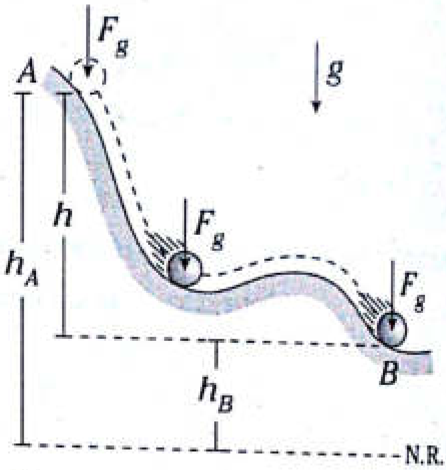
Es aquella forma de energía que se asocia a un cuerpo o sistema en virtud a la posición que ocupa con respecto a la Tierra. Para ello, es necesario elegir un nivel que nos sirva de referencia y así poder medir la posición de su centro de gravedad (C.G.).



$$\boxed{E_{PG}=mgh_{C.G.}}$$

Importante

El trabajo de la $\vec{F}_g$ se puede determinar con la variación en la E_{PG}.



Como la $\vec{F}g$ es constante, entonces

$$W_{A\to B}^{F_g}=+F_g\cdot h=+mgh \quad \text{(I)}$$

Además, del gráfico

$$h=h_A-h_B \quad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I).

$$W_{A\to B}^{F_g}=+mg(h_A-h_B)=mgh_A-mgh_B$$

$$W_{A\to B}^{F_g}=E_{PG}^A-E_{PG}^B$$

Pero también

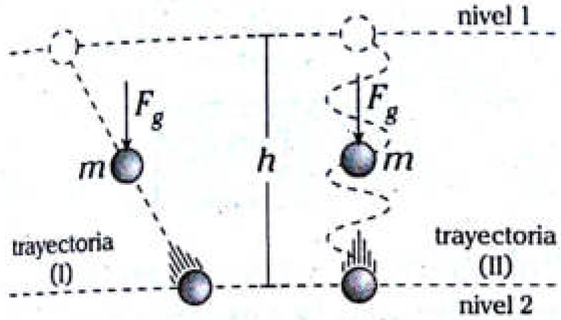
$$E_{PG}^A-E_{PG}^B=-\underbrace{\left(E_{PG}^B-E_{PG}^A\right)}$$

$$E_{PG}^A-E_{PG}^B=-\Delta E_{PG}$$

Finalmente

$$\boxed{W_{A\to B}^{F_g}=-\Delta E_{PG}}$$

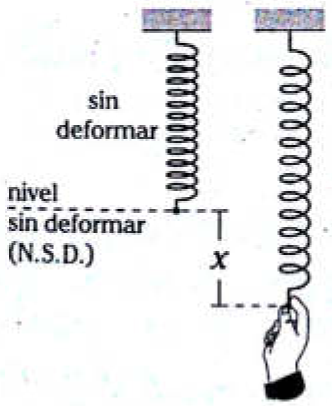
El $W_{A\rightarrow B}^{F_g}$ no depende de la trayectoria, tan solo de la posición inicial y final. Cuando una fuerza presenta esta característica, se denomina **fuerza conservativa.**



$$\boxed{W_{\text{tramo I}}^{F_g} = W_{\text{tramo II}}^{F_g}}$$

6.3. ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA (E_{PE})

Es aquella forma de energía que se asocia a los cuerpos elásticos, en virtud a los cambios en su longitud con respecto a su longitud natural.



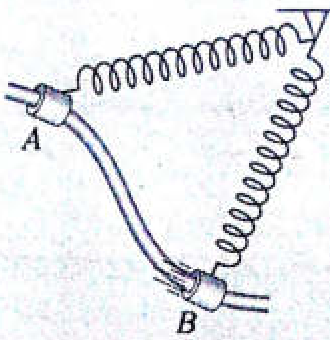
$$\boxed{E_{PE} = \frac{Kx^2}{2}}$$

donde

- K: constante de rigidez (N/m)
- x: deformación longitudinal (m)

OBSERVACIÓN

Como en el caso de la $\vec{F}_g$, la $\vec{F}_E$ presenta el mismo comportamiento en relación con su trabajo mecánico, es decir, el W^{F_E} es independiente de su trayectoria, tan solo depende de su posición inicial y final. Esto implica que la $\vec{F}_E$ también es considerada una **fuerza conservativa**.

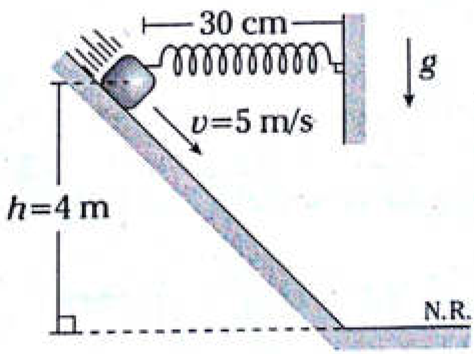


$$W_{A\rightarrow B}^{F_E} = E_{PE}^{A} - E_{PE}^{B}$$

$$\boxed{W_{A\rightarrow B}^{F_E} = -\Delta E_{PE}}$$

7. Energía mecánica de un sistema

Dado el siguiente conjunto de cuerpos: Un bloque de 2 kg está unido a un resorte de K=200 N/m y longitud natural igual a 50 cm. (g=10 m/s^2).



Evaluamos la E_M de cada cuerpo.

- $E_M^{\text{bloque}} = \underbrace{E_C} + \underbrace{E_{PG}}$

$$E_M^{\text{bloque}} = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

$$E_M^{\text{bloque}} = \frac{(2)(5)^2}{2} + (2)(10)(4)$$

$$E_M^{\text{bloque}} = 105 \text{ J}$$

- $E_M^{\text{resorte}} = E_{PE} = \dfrac{Kx^2}{2}$

donde

$x = L_0 - L_F = 50\text{ cm} - 30\text{ cm}$

$x = 20\text{ cm} = 0{,}2\text{ m}$

Luego

$$E_M^{\text{resorte}} = \frac{(200)(0{,}2)^2}{2}$$

$$E_M^{\text{resorte}} = 4\text{ J}$$

Finalmente, si consideramos al bloque con el resorte como un sistema, entonces

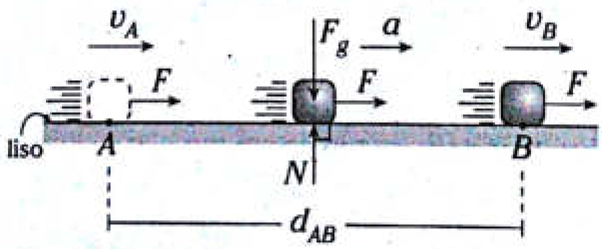
$$E_M^{\text{sistema}} = E_M^{\text{bloque}} + E_M^{\text{resorte}}$$

$$E_M^{\text{sistema}} = 105 + 4$$

$$\therefore\ E_M^{\text{sistema}} = 109\text{ J}$$

8. Teorema del trabajo neto y la variación de la energía cinética

Consideremos el siguiente acontecimiento: Un bloque de masa m es jalado mediante una fuerza horizontal constante, tal como se muestra en el gráfico adjunto.



De la segunda ley de Newton

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{res}}}{m} \qquad \text{(I)}$$

Si $\vec{F}$ es constante, entonces la $\vec{a}$ también es constante.

Se trata de un MRUV.

$$\upsilon_B^2 = \upsilon_A^2 + 2ad_{AB} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (I) en (II).

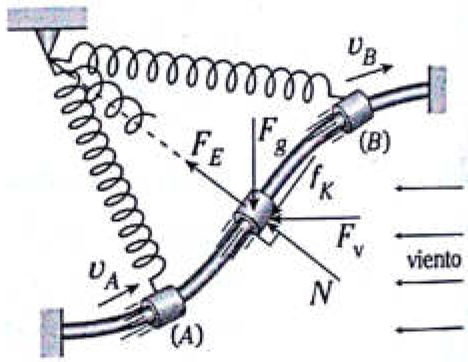
$$\upsilon_B^2 = \upsilon_A^2 + 2\left(\frac{F_{\text{res}}}{m}\right)\cdot d_{AB}$$

$$\underbrace{\frac{m}{2}\upsilon_B^2}_{E_C^B} - \underbrace{\frac{m}{2}\upsilon_A^2}_{E_C^A} = \underbrace{F_{\text{res}}\cdot d_{AB}}_{W_{A\to B}^{\text{neto}}}$$

$$\boxed{W_{A\to B}^{\text{neto}} = \Delta E_C}$$

9. Trabajo de fuerzas no conservativas y la variación de la energía mecánica

Consideremos el siguiente acontecimiento:



De la relación entre W_{AB}^{neto} y la variación de E_C

$$\underbrace{W_{A\to B}^{\text{neto}}} = E_C^B - E_C^A$$

$$W_{A\to B}^{F_g} + W_{A\to B}^{F_E} + W_{A\to B}^{f_K} + W_{A\to B}^{F_v} + W_{A\to B}^{N} =$$

$$= E_C^B - E_C^A \qquad \text{(I)}$$

Pero recordemos que la $\vec{F}_g$ y $\vec{F}_E$ son consideradas **fuerzas conservativas** y se verifica que

$$\left.\begin{aligned} W_{A\to B}^{F_g} &= E_{PG}^A - E_{PG}^B \\ W_{A\to B}^{F_E} &= E_{PE}^A - E_{PE}^B \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I).

$$E_{PG}^A - E_{PG}^B + E_{PE}^A - E_{PE}^B + W_{A\to B}^{f_K} + W_{A\to B}^{F_v} + W_{A\to B}^{N} = E_C^B - E_C^A$$

Como solo se considera la $\vec{F}_g$ y la $\vec{F}_E$ como fuerzas conservativas, a las otras fuerzas se les denomina fuerzas no conservativas (FNC).

Luego

$$\underbrace{W_{A\to B}^{f_K}+W_{A\to B}^{F_v}+W_{A\to B}^{N}}_{W\text{ de F.N.C}}=E_C^B+E_{PG}^B+E_{PE}^B-$$

$$-E_C^A-E_{PG}^A-E_{PE}^A$$

$$W_{A\to B}^{\text{FNC}}=\underbrace{\left(E_C^B+E_{PG}^B+E_{PE}^B\right)}-\underbrace{\left(E_C^A+E_{PG}^A+E_{PE}^A\right)}$$

$$W_{A\to B}^{\text{FNC}}=\quad E_M^B\quad-\quad E_M^A$$

$$\boxed{W_{A\to B}^{\text{FNC}}=\Delta E_M}$$

El W de las FNC alteran la E_M, es decir, generan una variación.

Pero, ¿qué ocurriría si el W^{FNC} es igual a cero, es decir, tan solo realizan W las fuerzas conservativas (FC)?

$$0=E_M^B-E_M^A$$

$$\boxed{E_M^A=E_M^B}\ \left(\begin{array}{c}\text{conservación de la}\\ \text{energía mecánica}\end{array}\right)$$

Conclusión

Si sobre un cuerpo o sistema tan solo realizan trabajo mecánico las fuerzas conservativas (FC), entonces la **energía mecánica** durante dicho proceso se conserva.

10. Potencia (*P*)

Es una magnitud física escalar que nos expresa la rapidez con la cual un cuerpo transfiere energía.

Matemáticamente

$$\boxed{P=\frac{E^{\text{transferida}}}{t}=\frac{W}{t}}$$

unidad:

$\frac{\text{J}}{\text{s}}=\text{watts (W)}$

Ejemplo

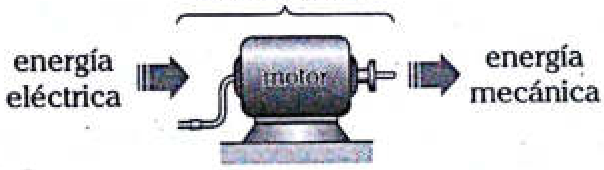
Si un motor realiza un trabajo de 1000 J en 5 s, entonces su potencia será

$$P=\frac{W}{t}=\frac{1000\ \text{J}}{5\ \text{s}}\ \rightarrow\ P=200\ \text{W}$$

lo cual significa que realiza un trabajo de 200 J por cada segundo.

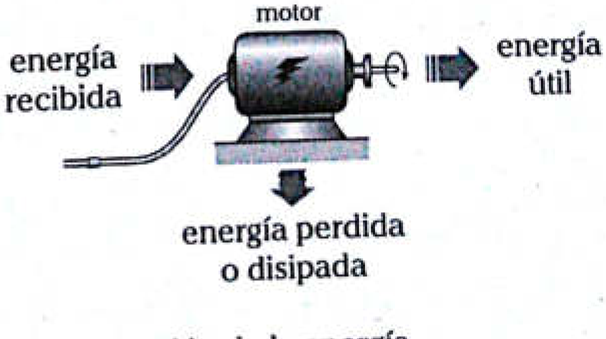
Cuando el motor realiza trabajo sobre el bloque, le transfiere energía, por lo que la potencia se puede entender como la rapidez con la cual se transmite energía.

Sin embargo, es necesario notar que el motor no solo entrega energía, sino que transforma la energía que recibe. Para este caso



¿Toda la energía recibida es transformada en energía mecánica?

No, porque durante su funcionamiento las piezas del motor, al estar en contacto y rozando unas con otras, disipan la energía, haciendo que parte de la energía mecánica se transforme en calor (*Q*).



Por conservación de la energía

$$\boxed{E_{\text{recibida}}=E_{\text{útil}}+E_{\text{perdida}}}$$

Para poder caracterizar a una máquina, se emplea un parámetro denominado **eficiencia** (η), que nos permite relacionar la energía útil que produce una máquina o sistema con respecto a la energía recibida.

$$\boxed{\eta=\frac{E_{\text{útil}}}{E_{\text{recibida}}}}$$

Sin embargo

$$E_{\text{útil}}=E_{\text{recibida}}-E_{\text{perdida}}$$

$$\boxed{\eta=1-\frac{E_{\text{perdida}}}{E_{\text{recibida}}}}$$

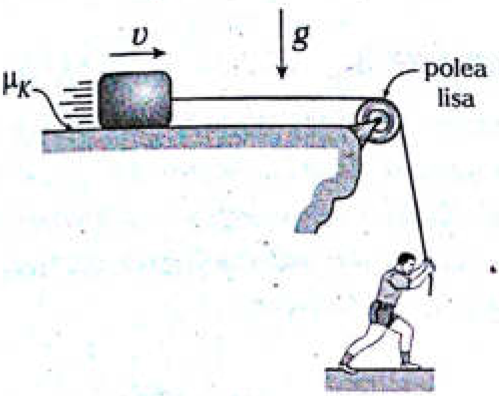
$$\boxed{\eta<1}$$

Por otro lado, estas transferencias de energía se realizan en una Δt; en consecuencia, la eficiencia (η) también se puede expresar en términos de potencia.

$$\boxed{\eta=\frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{recibida}}}=1-\frac{P_{\text{perdida}}}{P_{\text{recibida}}}}$$

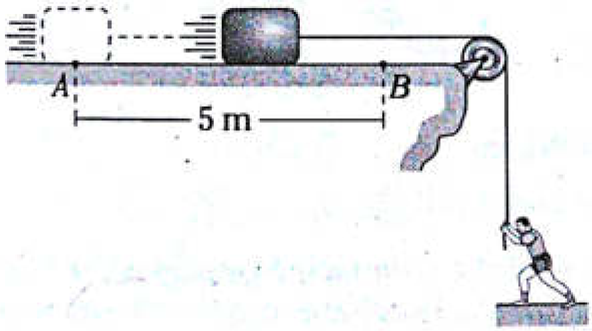
Problema N.° 1

El bloque de 50 kg es llevado sobre el plano horizontal rugoso (μ_K=0,2) mediante la cuerda. Determine la cantidad de trabajo neto que se desarrolla sobre el bloque para un tramo de 5 m. Considere que la persona ejerce una fuerza constante de 400 N. (g=10 m/s^2).

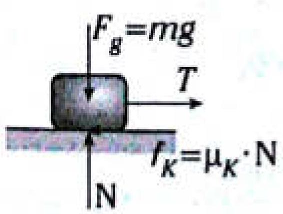


Resolución

De acuerdo al enunciado, nos piden $W_{A\to B}^{\text{neto}}$.



Realizamos el DCL del bloque.



Las fuerzas que actúan sobre el bloque son constantes de $A\to B$, entonces

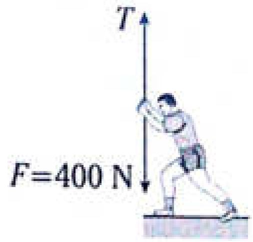
$$W_{A\to B}^{\text{neto}}=+F_{\text{res}}\cdot d_{AB} \qquad \text{(I)}$$

Como el bloque se traslada horizontalmente

$$F_{\text{res}}=T-f_K$$

En las manos del joven

$$T=F=400\text{ N}$$



Luego

$$F_{\text{res}}=400-\mu_K\cdot N \qquad \text{(II)}$$

Del equilibrio en la vertical

$$F(\uparrow)=F(\downarrow) \quad \rightarrow \quad N=F_g$$

$$N=mg=50(10)=500\text{ N} \qquad \text{(III)}$$

Reemplazamos (III) en (II).

$$F_{\text{res}}=400-0{,}2(500)$$

$$F_{\text{res}}=300\text{ N}$$

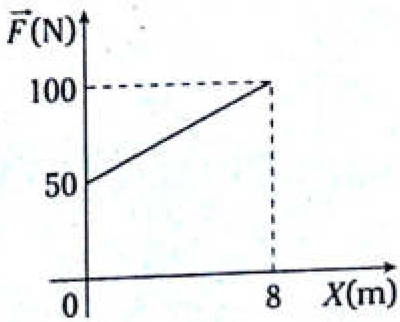
Finalmente, en (I)

$$W_{A\to B}^{\text{neto}}=+300(5)$$

$$\therefore \quad W_{A\to B}^{\text{neto}}=+1500\text{ J}$$

Problema N.° 2

Un bloque de 10 kg se encuentra en reposo en x=0 sobre una superficie horizontal. Si se le ejerce una fuerza horizontal $\vec{F}$ que varía según la gráfica, determine la cantidad de trabajo que realiza $\vec{F}$ hasta el instante en que la aceleración del bloque es 5 m/s^2. (μ_K=0,5; g=10 m/s^2).



Resolución

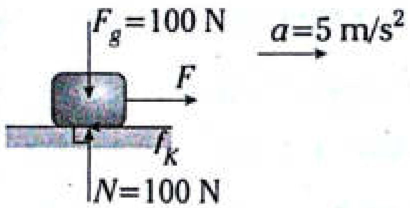
De acuerdo al enunciado, sobre el bloque de 10 kg actúa una fuerza horizontal cuyo módulo se va incrementando, hasta que en algún instante su aceleración es de 5 m/s^2.

Nos piden

$$W^F_{\substack{x=0\\x_p}}$$

donde x_p es la posición en la que se verifica que a=5 m/s^2.

Realizamos el DCL.



De la segunda ley

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}_{\text{res}}}{m}$$

$$F-f_K=ma$$

$$F-\mu_K N=ma$$

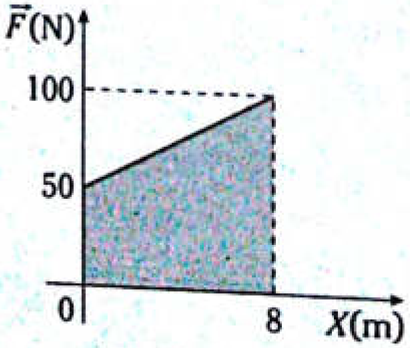
$$F-0{,}5(100)=10(5)$$

$$F=100\ \text{N}$$

De acuerdo a la gráfica

F=100 N en x_p=8 m

Entonces debemos determinar $W^F_{\substack{x=0\\x=8\,\text{m}}}$.



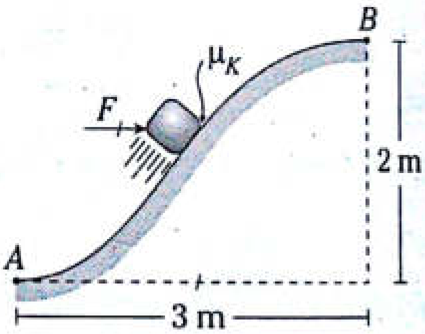
$$W^F_{\substack{x=0\\x_p}}=\text{área}$$

$$W^F_{\substack{x=0\\x_p}}=\left(\frac{100+50}{2}\right)(8)$$

$$\therefore\quad W^F_{\substack{x=0\\x=8\,\text{m}}}=+600\ \text{J}$$

Problema N.º 3

Un bloque de 5 kg es trasladado lentamente mediante una fuerza horizontal constante de módulo 100 N. Determine la cantidad de trabajo desarrollado mediante la fuerza de rozamiento entre A y B. (g=10 m/s^2).



Resolución

Nos piden el $W^{f_K}_{AB}$.

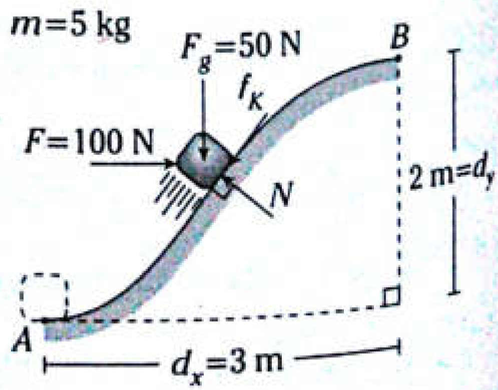
De acuerdo al enunciado, el bloque se traslada lentamente, esto implica que $v\approx 0$. Entonces, se puede considerar que el cuerpo presenta equilibrio de traslación.

$\rightarrow\quad F_{\text{res}}=0$

En consecuencia

$$W^{\text{neto}}_{AB}=0 \qquad (*)$$

Realizamos el DCL.



En (*)

$$\underbrace{W_{AB}^{F}} + \underbrace{W_{AB}^{F_g}} + \underbrace{W_{AB}^{N}} + W_{AB}^{f_K} = 0$$

$$+F\cdot d_x + \left(-F_g\cdot d_y\right) + 0 + W_{AB}^{f_K} = 0$$

$$+100(3) - 50(2) + W_{AB}^{f_K} = 0$$

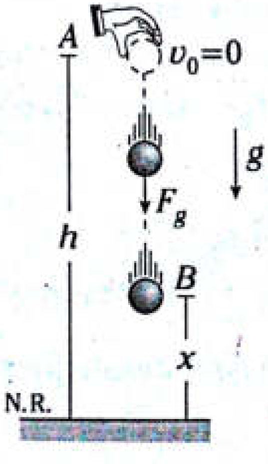
$$\therefore\ W_{AB}^{f_K} = -200\ \text{J}$$

Problema N.° 4

Una esfera se suelta desde una altura h respecto del piso y experimenta un MVCL. ¿A qué altura del mismo la energía cinética y potencial están en la relación de 2 a 1?

Resolución

Nos piden x.



Se sabe que

$$\frac{E_C^B}{E_{PG}^B} = \frac{2}{1}$$

$$\rightarrow\ E_C^B = 2E_{PG}^B \qquad \text{(I)}$$

Además, a medida que la esfera desciende, la única fuerza que actúa es la $\vec{F}_g$, por ser una fuerza **conservativa**, su W no altera la E_M.

$$\underbrace{E_{M_A}} = \underbrace{E_{M_B}}$$

$$E_{PG}^A + \cancel{E_C^A}^{\,0} = E_{PG}^B + E_C^B$$

$$E_{PG}^A = E_{PG}^B + E_C^B \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (I) en (II).

$$\underbrace{E_{PG}^A} = \underbrace{E_{PG}^B + 2E_{PG}^B}$$

$$mgh = 3mgx$$

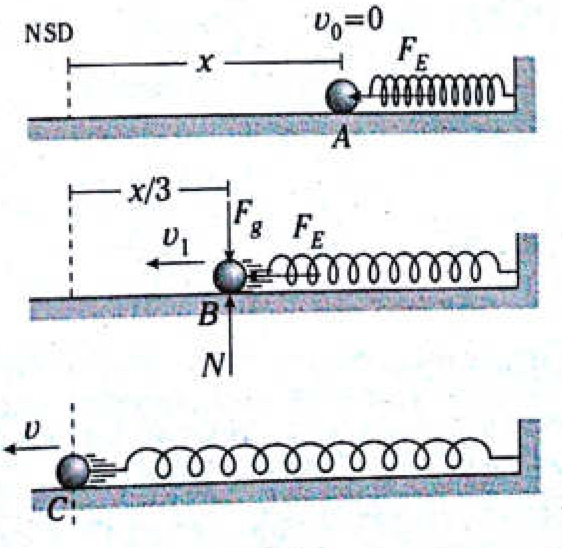
$$\therefore\ x = \frac{h}{3}$$

Problema N.° 5

En el gráfico mostrado, al soltar una esfera lisa, esta adquiere una rapidez v cuando el resorte logra recuperar su longitud natural. ¿Qué rapidez presenta la esfera cuando el resorte está aún deformado $\frac{x}{3}$?

Resolución

Al abandonar la esfera, el resorte la empuja debido a que tiende a recuperar su longitud natural.



Nos piden v_1.

Sabemos que, cuando pasa por C, su rapidez es v. Si consideramos a la esfera y al resorte como un sistema, se observa que en todo momento la única fuerza que desarrolla W es la $\vec{F}_E$ y por ser **conservativa** se verifica que $E_{M(\text{sist.})}$ se **conserva**.

$$\rightarrow \quad \underbrace{E_M^A}_{} = \quad \underbrace{E_M^B}_{} \quad = \underbrace{E_M^C}_{}$$

$$\underbrace{E_{PE}^A}_{} = \quad E_C^B + E_{PE}^B \quad = \underbrace{E_C^C}_{}$$

$$\frac{Kx^2}{2} = \underbrace{\frac{mv_1^2}{2} + \frac{K}{2}\left(\frac{x}{3}\right)^2}_{} = \underbrace{\frac{mv^2}{2}}_{}$$

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{1}{9}\left[\frac{Kx^2}{2}\right] \qquad \text{(I)}$$

Además

$$\frac{Kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I).

$$\frac{\cancel{m}v_1^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{m}v^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} - \frac{1}{9}\left[\frac{\cancel{m}v^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}\right]$$

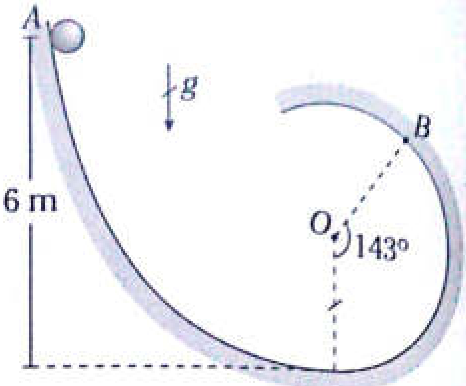
$$v_1^2 = v^2 - \frac{v^2}{9}$$

$$v_1^2 = \frac{8v^2}{9}$$

$$\therefore \quad v_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\, v$$

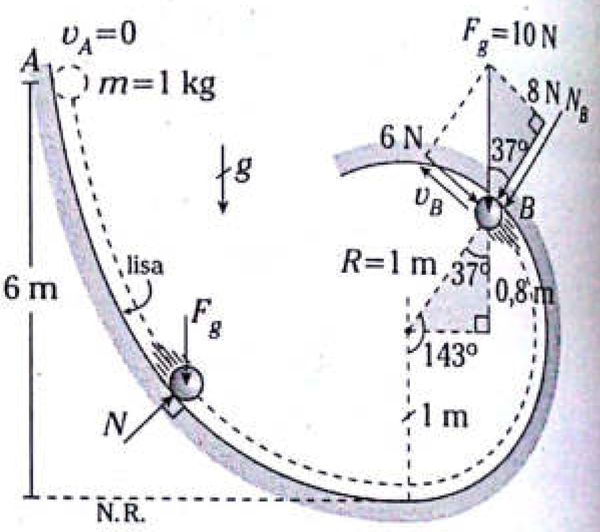
Problema N.° 6

Se suelta una pequeña esfera de 1 kg en A, de modo que desciende por la rampa lisa y conecta a un rizo de 1 m de radio. Determine el módulo de fuerza que la superficie ejerce a la esfera cuando pase por B. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



Resolución

Nos piden N_B.



Al pasar por el rizo, desarrolla un movimiento circunferencial.

Segunda ley en el eje radial

$$\underbrace{\vec{a}_{cp}}_{} = \frac{\vec{F}_{cp}}{\underbrace{m}_{}}$$

$$\frac{v_B^2}{R} = \frac{N_B + 8}{m}$$

$$\frac{v_B^2}{(1)} = \frac{N_B + 8}{(1)} \qquad \text{(I)}$$

Para determinar la v_B, podemos emplear conceptos de energía, ya que se relaciona con su E_C.

Analizando las fuerzas que actúan sobre la esfera ($\vec{F}_g$ y $\vec{N}$), se observa que solo realiza W la $\vec{F}_g$, ya que la $\vec{N}$ es perpendicular a la trayectoria; entonces la E_M se conserva.

$$\underbrace{E_M^A} = \underbrace{E_M^B}$$

$$\underbrace{E_{PG}^A} + \cancel{E_C^A}^{0} = \underbrace{E_{PG}^B} + E_C^B$$

$$\cancel{m}g(6) = \cancel{m}g(1+0{,}8) + \frac{\cancel{m}v_B^2}{2}$$

$$60 = 18 + \frac{v_B^2}{2}$$

$$42 = \frac{v_B^2}{2} \rightarrow v_B^2 = 84 \qquad \text{(II)}$$

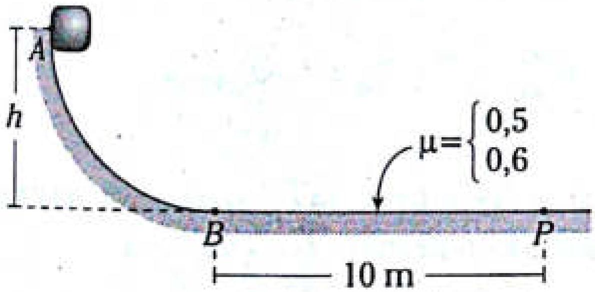
Reemplazamos (II) en (I).

$$84 = N_B + 8$$

$$\therefore\ N_B = 76\ \text{N}$$

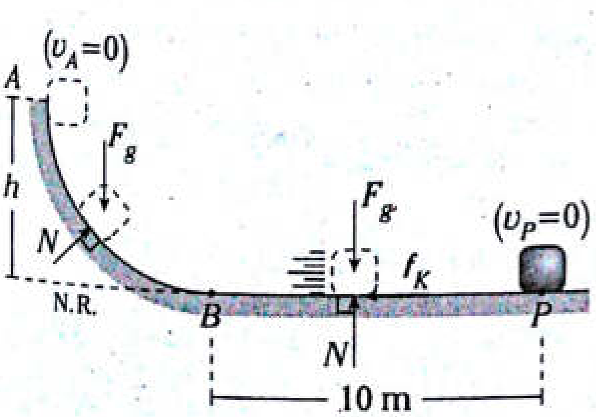
Problema N.° 7

Si un bloque es liberado en A, se observa que este se detiene en P. Determine la altura h si el tramo AB es liso y BP, rugoso.



Resolución

Nos piden h.



Examinando las fuerzas que actúan sobre el bloque y que realizan W, se puede plantear lo siguiente:

$$\underbrace{W_{A\to P}^{\text{FNC}}} = \cancel{E_{M(P)}}^{0} - E_{M(A)}$$

$$\underbrace{W_{B\to P}^{f_K}} = 0 - E_{PG}^A$$

$$-f_K \cdot d_{BP} = -mgh$$

$$\mu_K N d_{BP} = mgh \qquad \text{(I)}$$

En el tramo $B \rightarrow P$, en la vertical

$$F(\uparrow) = F(\downarrow) \rightarrow N = mg \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I).

$$\mu_K \cancel{mg} d_{BP} = \cancel{mg} h$$

$$h = \mu_K \cdot d_{BP}$$

$$h = 0{,}5(10)$$

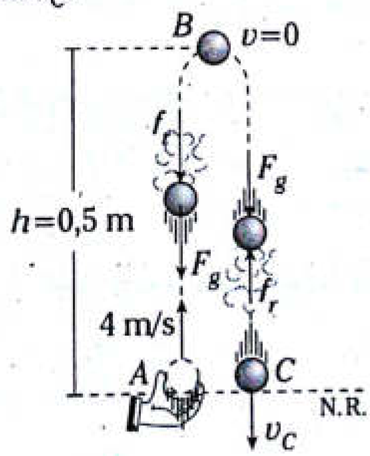
$$\therefore\ h = 5\ \text{m}$$

Problema N.° 8

Se lanza verticalmente hacia arriba un objeto de 1 kg con una rapidez de 4 m/s y la fuerza de resistencia del aire actúa durante todo su movimiento con un módulo constante haciendo que solo ascienda 0,5 m. ¿Con qué rapidez llega al punto de lanzamiento? (g=10 m/s^2).

Resolución

Nos piden la v_C.



Luego de lanzar el objeto y debido a la resistencia del aire, el cuerpo pierde energía mecánica.

Como la $\vec{F}_r$ mantiene el módulo constante y el recorrido es el mismo en el ascenso y descenso, entonces

$$W_{\text{ascenso}}^{F_r} = W_{\text{descenso}}^{F_r}$$

Además, por tratarse de la única fuerza no conservativa que realiza W

$$\rightarrow \quad \underbrace{\Delta E_{M(\text{ascenso})}} = \underbrace{\Delta E_{M(\text{descenso})}}$$

$$\underbrace{E_{M(B)}} - \underbrace{E_{M(A)}} = \underbrace{E_{M(C)}} - \underbrace{E_{M(B)}}$$

$$\cancel{m}gh - \frac{\cancel{m}v_A^2}{2} = \frac{\cancel{m}v_C^2}{2} - \cancel{m}gh$$

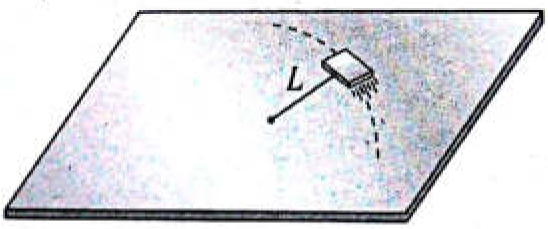
$$10(0,5) - \frac{4^2}{2} = \frac{v_C^2}{2} - 10(0,5)$$

$$2 = \frac{v_C^2}{2}$$

$$\therefore \quad v_C = 2 \text{ m/s}$$

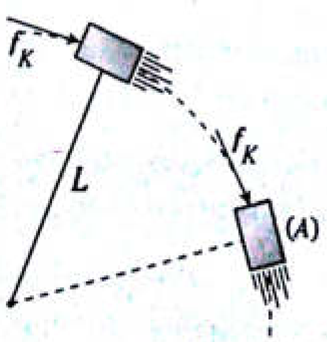
Problema N.° 9

Un bloque pequeño atado a un hilo es lanzado sobre una superficie horizontal rugosa con 10 m/s. Si se detiene luego de dar 2,5 vueltas, determine el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie. $\left(g=10 \text{ m/s}^2;\ L=\dfrac{2}{\pi}\text{ m}\right)$.



Resolución

Nos piden μ_K.

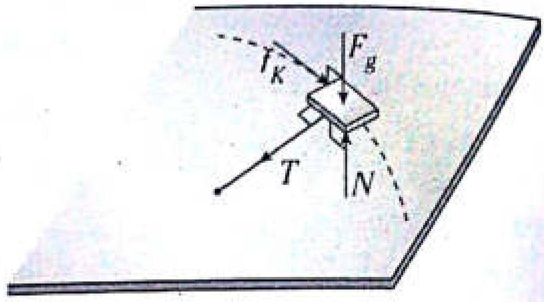


Luego de lanzar el bloque en A, este va perdiendo velocidad debido a la acción de la f_K.

Se conoce

$$f_K = \mu_K \cdot N \qquad (*)$$

Analizamos las fuerzas que actúan sobre el bloque.



La única fuerza que realiza W es la $\vec{f}_K$ y, por ser no conservativa, se plantea que

$$\underbrace{W^{\text{FNC}}} = E_{M(F)} - E_{M(0)}$$

$$W^{f_K}_{\substack{\text{todo el}\\ \text{recorrido}}} = \cancelto{0}{E_{M(F)}} - E_{M(0)}$$

En todo el recorrido, la $\vec{f}_K$ es tangente al trayecto y su módulo se mantiene constante.

$$\rightarrow \quad -f_K \cdot e_{\left(\substack{\text{2 vueltas}\\ \text{y media}}\right)} = -\frac{mv_0^2}{2}$$

De (*)

$$\mu_K \cdot N \cdot 2{,}5[2\pi L] = \frac{mv_0^2}{2}$$

Del equilibrio en la vertical

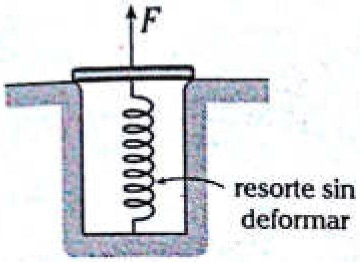
$$N = mg$$

$$\rightarrow \quad \mu_K \cdot (\cancel{m}g)5\cancel{\pi}\left(\frac{2}{\cancel{\pi}}\right) = \frac{\cancel{m}(10)^2}{2}$$

$$\therefore \quad \mu_K = 0{,}5$$

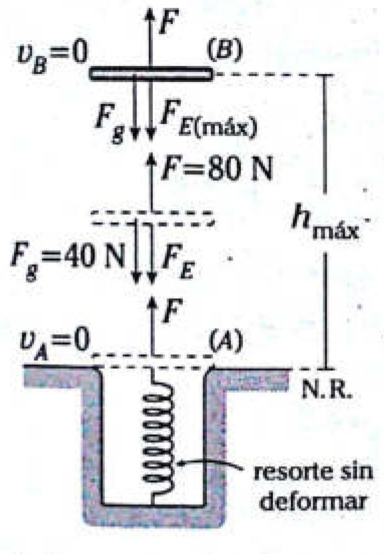
Problema N.º 10

Una placa metálica de 4 kg tiene soldada en su parte inferior un resorte de K=200 N/m. Si se ejerce una fuerza constante F=80 N, tal como se indica, ¿qué máxima altura ascenderá dicha placa? (g=10 m/s^2).



Resolución

Nos piden $h_{máx}$.



Como $F > F_g$, la placa asciende en forma acelerada, pero a su vez el resorte se estira y aumenta la $\vec{F}_E$. En algún momento la placa comienza a desacelerar hasta llegar a la posición B, donde v_B=0.

Podemos plantear lo siguiente:

$$\underbrace{W^{FNC}_{A\to B}} = \underbrace{E_{M(B)}} - \cancel{E_{M(A)}}^{\,0}$$

$$\underbrace{W^{FNC}_{A\to B}} = E^B_{PG} + E^B_{PE};\ (x = h_{máx})$$

$$+F\cdot \cancel{h}_{máx} = mg\cancel{h}_{máx} + \frac{Kh^2_{máx}}{2}$$

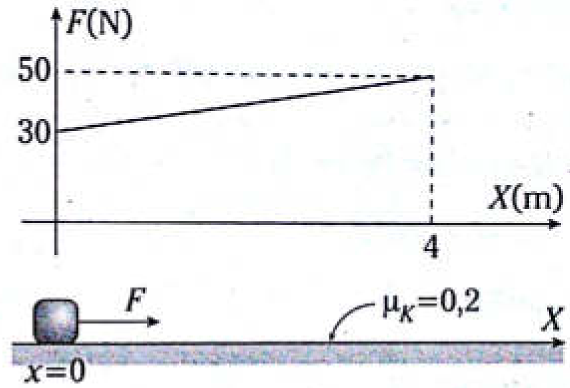
$$80 = 4(10) + \frac{200}{2}h_{máx}$$

$$40 = 100h_{máx}$$

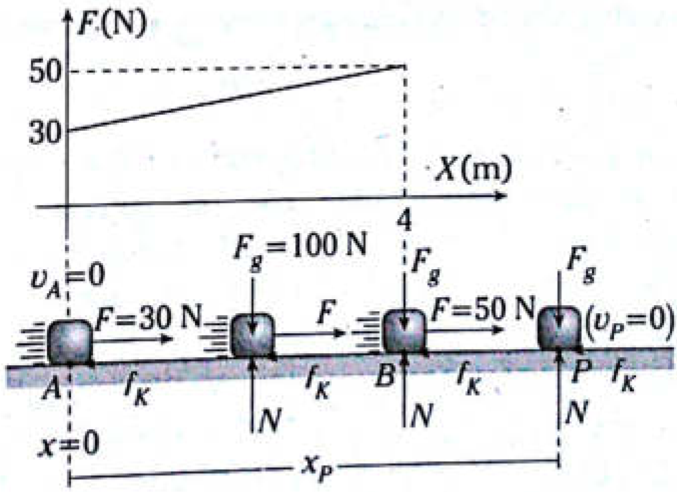
$$\therefore\ h_{máx} = 0{,}4\ \text{m}$$

Problema N.º 11

Un cuerpo de 10 kg inicia su movimiento en x=0 debido a la acción de la fuerza $\vec{F}$ cuyo módulo cambia con la posición $\vec{x}$ de acuerdo al gráfico. Determine en qué posición se detiene el cuerpo si $\vec{F}$ deja de actuar en x=4 m. (g=10 m/s^2).



Resolución



Nos piden x_P.

Sabemos que en P el bloque se detiene.

Analizando las fuerzas, las únicas que realizan W son la fuerza $\vec{F}_{var}$ y la $\vec{f}_K$; ambas son **fuerzas no conservativas**.

$$\rightarrow \quad W_{A\rightarrow P}^{FNC}=\cancelto{0}{E_{M(P)}}-\cancelto{0}{E_{M(A)}}$$

$$W_{A\rightarrow B}^{F_{var}}+W_{A\rightarrow P}^{f_K}=0$$

$$+\text{área}_{\substack{x=0\ x=4}}-f_K\cdot x_P=0$$

$$+\left(\frac{50+30}{2}\right)(4)-\mu_K\cdot N\cdot x_P=0$$

$$160=0{,}2Nx_P \qquad \text{(I)}$$

Durante el recorrido, en la vertical las fuerzas se equilibran.

$$F(\uparrow)=F(\downarrow) \rightarrow N=mg=100\text{ N} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I).

$$160=0{,}2(100)x_P$$

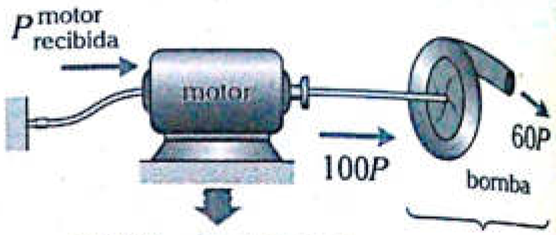
$$\therefore \quad x_P=8\text{ m}$$

Problema N.° 12

Un motor eléctrico está conectado en serie a una bomba de agua de 60% de eficiencia. Determine la eficiencia del sistema motor-bomba si la energía perdida del motor es el 20% de la energía que entrega a la bomba a través de su eje de transmisión.

Resolución

De acuerdo al enunciado



$$P_{perdida}^{motor}=20\%(100P)$$

$$P_{perdida}^{motor}=20P$$

$$\eta_{bomba}=60\%$$

$$P_{útil}^{bomba}=60P$$

$$P_{recibida}^{bomba}=100P$$

Nos piden $\eta_{sistema}$.

$$\rightarrow \quad \eta=\frac{P_{útil}^{sistema}}{P_{recibida}^{sistema}}=\frac{P_{útil}^{bomba}}{P_{recibida}^{motor}}$$

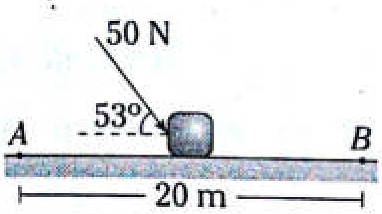
$$\eta=\frac{60P}{20P+100P}=\frac{60P}{120P}$$

$$\therefore \quad \eta_{sistema}=0{,}5$$

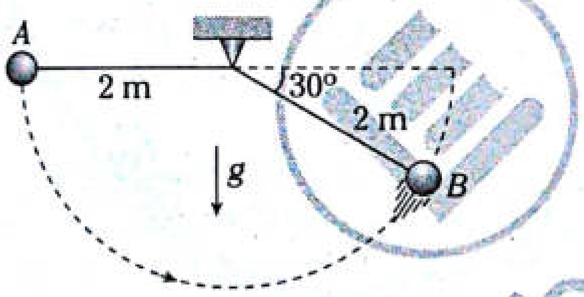
NIVEL BÁSICO

1. Si el bloque se mueve con velocidad constante, determine la cantidad de trabajo realizado mediante la fuerza de rozamiento de A hacia B.

A) −800 J
B) +800 J
C) −1000 J
D) +1000 J
E) −600 J

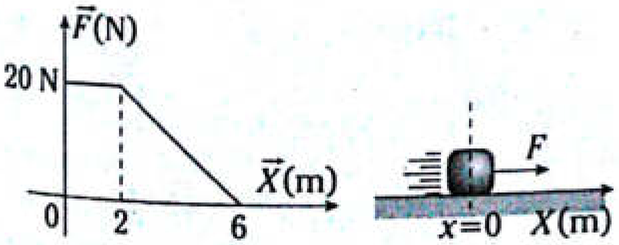


2. Determine el trabajo neto realizado sobre la esfera de 1 kg desde la posición A, donde se le suelta, hasta la posición B. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



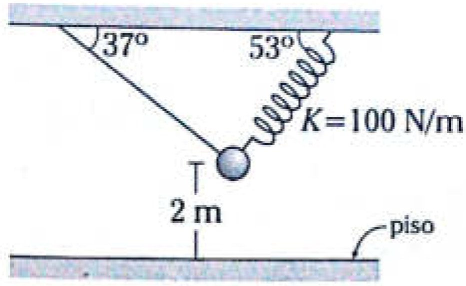
A) +10 J
B) −10 J
C) 20 J
D) −20 J
E) +40 J

3. Sobre el bloque actúa una fuerza que varía con la posición, según muestra la gráfica. Determine la cantidad de trabajo realizado mediante dicha fuerza desde $x=0$ hasta la posición en que la aceleración del bloque sea cero. El módulo de la fuerza de rozamiento entre el bloque y el piso es de 10 N.



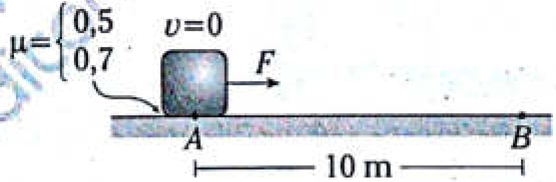
A) 40 J
B) 50 J
C) 70 J
D) 80 J
E) 60 J

4. En el gráfico mostrado, determine la energía mecánica del sistema formado por la esfera de 2 kg y el resorte, respecto del piso. Considere el sistema en equilibrio. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



A) 28 J
B) 48 J
C) 41,28 J
D) 50 J
E) 58 J

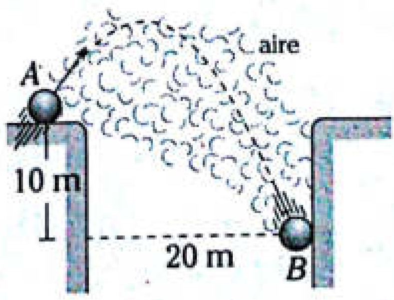
5. Al bloque de 2 kg, en reposo, se le ejerce una fuerza horizontal constante que origina el movimiento del bloque con las justas. Determine la rapidez del bloque al pasar por B. $(g=10\ \text{m/s}^2)$



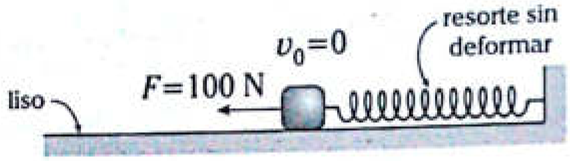
A) 5 m/s
B) 15 m/s
C) 25 m/s
D) $2\sqrt{10}$ m/s
E) $\sqrt{10}$ m/s

6. Se lanza una esfera de 1 kg en A con una rapidez de 8 m/s. Si llega a impactar con la pared en B con el doble de su rapidez inicial, tal como se muestra, determine la cantidad de trabajo realizado por la fuerza de resistencia del aire sobre la esfera en dicho tramo. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.

A) −4 J
B) −8 J
C) −12 J
D) −16 J
E) −20 J

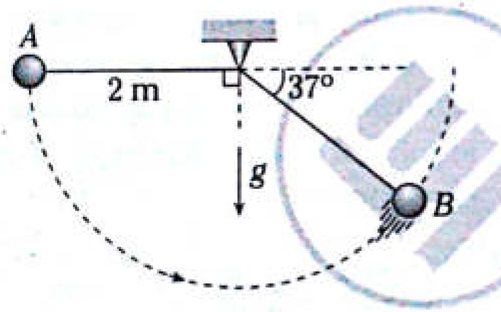


7. Determine la cantidad de trabajo neto realizado sobre el bloque cuando es arrastrado 0,5 m a partir de su posición de equilibrio. La fuerza $\vec{F}$ es constante. (K=200 N/m).



A) +50 J B) +25 J C) +125 J
D) +75 J E) −50 J

8. Una esfera de 1 kg es abandonada en la posición A. Determine el módulo de la fuerza de tensión al pasar por B. (g=10 m/s^2).



A) 20 N B) 18 N C) 36 N
D) 9 N E) 15 N

9. La mano de una persona ejerce una fuerza de 100 N hacia la derecha sobre la esfera de 0,25 kg para mantenerla en equilibrio. Si se retira la mano, determine la altura máxima que alcanza la esfera luego de escapar de la tubería lisa. (K=400 N/m; g=10 m/s^2).

A) 2,5 m B) 1,5 m C) 1,8 m
D) 3,6 m E) 2 m

10. ¿Cuál es la potencia de un motor que eleva 50 kg de agua por minuto a una altura de 6 m?

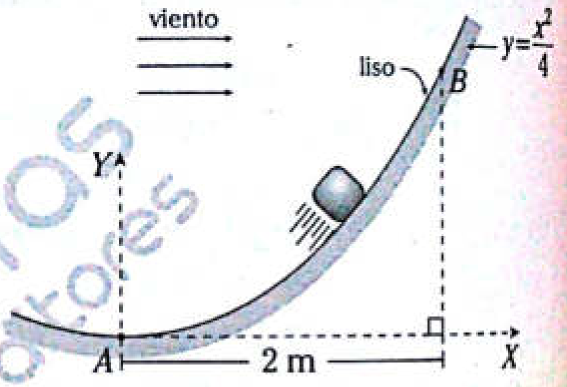
A) 47 W B) 48 W C) 49 W
D) 43 W E) 50 W

11. ¿Qué potencia se le entrega a una máquina de 60 % de eficiencia, si pierde 1600 J de energía cada 2 minutos?

A) 1000 W B) 2000 W C) 3000 W
D) 4000 W E) 5000 W

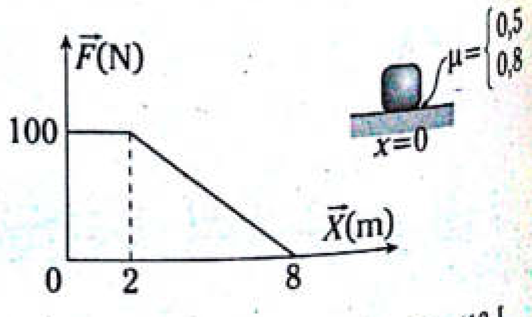
NIVEL INTERMEDIO

12. Un bloque de 300 g es elevado mediante el viento que le ejerce una fuerza horizontal constante de 8 N. Determine la cantidad de trabajo neto sobre el bloque desde A hasta B. (g=10 m/s^2)



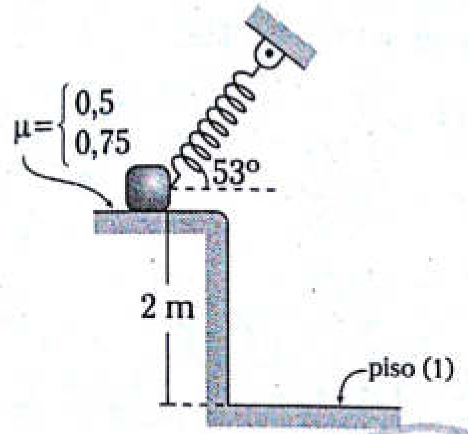
A) 10 J B) 12 J C) 13 J
D) 15 J E) 16 J

13. A un bloque de 10 kg, que se encuentra en reposo en x=0, se aplica una fuerza horizontal, cuyo comportamiento con respecto a la posición se muestra en la gráfica. Determine el trabajo neto hasta el instante en que alcanza su máxima rapidez. (g=10 m/s^2).



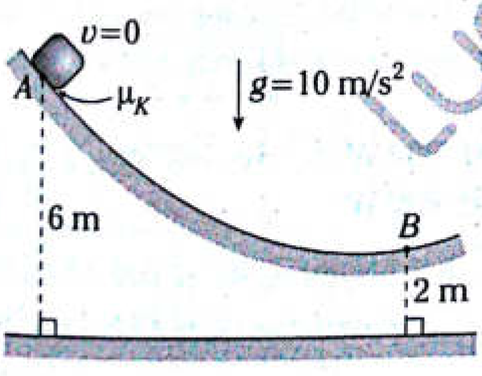
A) 100 J B) 175 J C) 410 J
D) 225 J E) 675 J

14. El bloque de 4 kg de masa se encuentra unido a un resorte de $K=100$ N/m y a punto de resbalar. Determine la energía mecánica del sistema bloque-resorte, respecto del piso (1). ($g=10$ m/s^2)



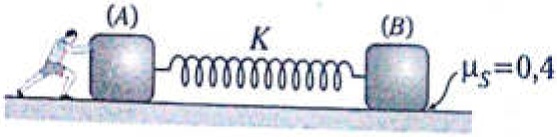
A) 80 J B) 83,125 J C) 80,1 J
D) 81 J E) 85 J

15. Se abandona el bloque de 4 kg en A. Si cuando pasa por B lo hace con 2 m/s, determine el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento desde A hasta B.



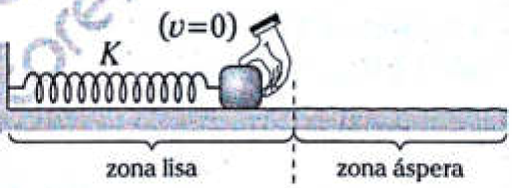
A) −140 J B) −160 J C) −132 J
D) −152 J E) −126 J

16. El gráfico nos muestra dos bloques unidos mediante un resorte inicialmente sin deformar y de rigidez $K=800$ N/m. Si una persona empuja al bloque A con la intención de poner en movimiento al bloque B, determine la cantidad de trabajo necesario que desarrolla la persona hasta que logra su objetivo.
Considere al bloque A liso.
($m_B=20$ kg; $g=10$ m/s^2)



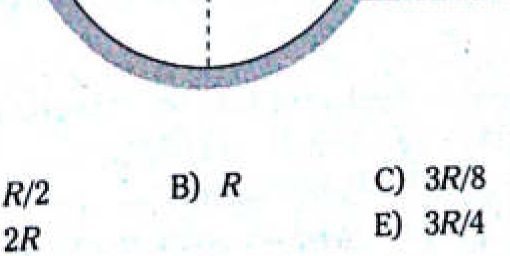
A) 1 J B) 2 J C) 3 J
D) 4 J E) 5 J

17. El resorte unido con el bloque está comprimido una longitud x. Si el bloque es soltado logrando recorrer sobre la superficie áspera una distancia máxima de 10 cm, ¿cuánto más lograría recorrer el bloque sobre la superficie áspera si se triplica la deformación en el resorte?



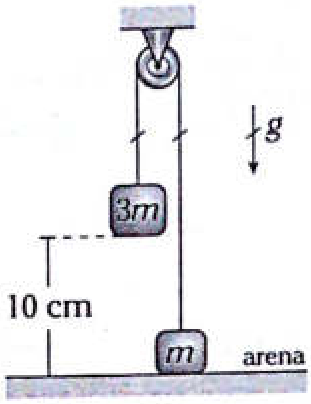
A) 30 cm B) 40 cm C) 90 cm
D) 15 cm E) 45 cm

18. Una pequeña esfera es abandonada en A sobre una superficie cilíndrica lisa. Determine la altura máxima luego de escapar de la superficie.



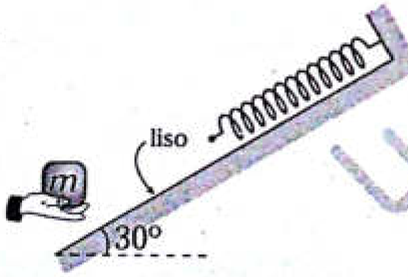
A) $R/2$ B) R C) $3R/8$
D) $2R$ E) $3R/4$

19. Si el sistema se suelta en la posición mostrada, determine la altura máxima que logra alcanzar el bloque de masa m con respecto de la arena. ($g=10$ m/s^2).



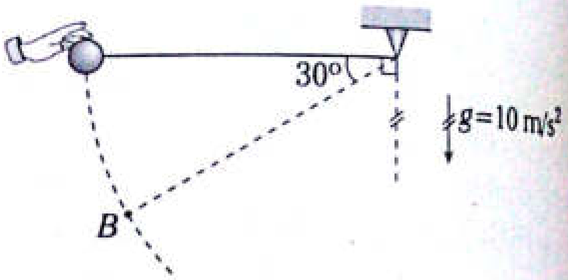
A) 18 cm B) 20 cm C) 15 cm
D) 16 cm E) 22 cm

20. ¿Qué máxima rapidez podrá adquirir el bloque de 1 kg luego de unirlo al extremo libre del resorte ideal y abandonarlo?
(K=100 N/m; g=10 m/s^2)



A) 2 m/s B) 3 m/s C) 0,5 m/s
D) 1 m/s E) 1,5 m/s

21. Se muestra el instante en que se abandona una esfera. ¿Cuánto será el módulo de su aceleración cuando pase por B? Desprecie la resistencia del aire.



A) $5\sqrt{7}$ m/s^2
B) 5 m/s^2
C) 10 m/s^2
D) $5\sqrt{3}$ m/s^2
E) $\sqrt{7}$ m/s^2

22. Un grupo electrógeno de 0,8 de eficiencia alimenta a 2 motores de 0,9 y 0,7 de eficiencia en los cuales las potencias útiles son de 900 W y 700 W, respectivamente. Determine la potencia perdida por el sistema.

A) 900 W B) 300 W C) 400 W
D) 800 W E) 500 W

Impulso y cantidad de movimiento

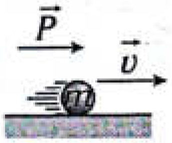
Capítulo IX

OBJETIVOS

- Estudiar nuevas magnitudes físicas que midan de manera vectorial el movimiento mecánico y la transferencia de dicho movimiento mecánico.
- Reconocer las diversas aplicaciones que tiene el principio de conservación de la cantidad de movimiento.
- Entender las colisiones y sus formas de clasificación.

1. Cantidad de movimiento ($\vec{P}$)

Es una magnitud que expresa la medida vectorial del movimiento mecánico de traslación.



unidad: kg·m/s

$$\boxed{\vec{P}=m\vec{v}}$$

donde

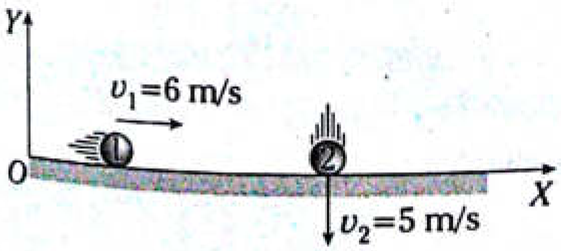
- m: masa (kg)
- $\vec{v}$: velocidad (m/s)

Tenga en cuenta que la dirección de $\vec{P}$ y $\vec{v}$ son iguales, ambos vectores son colineales.

Aplicación 1

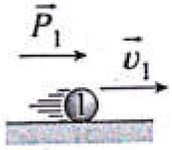
Determine la cantidad de movimiento de cada esfera.

m_1=3 kg; m_2=4 kg



Resolución

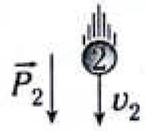
Analizamos el movimiento de la primera esfera.



$$\vec{P}_1=m_1\vec{v}_1=3\cdot(+6\hat{\imath})$$

$$\vec{P}_1=+\underbrace{18\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}_{\text{módulo}}(+\hat{\imath})$$

Analizamos el movimiento de la segunda esfera.

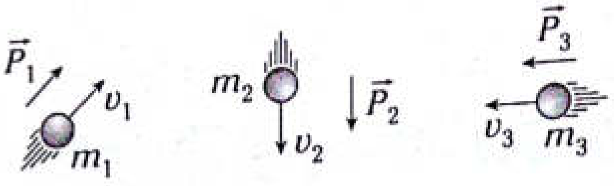


$$\vec{P}_2=m_2\vec{v}_2=4\cdot(-5\hat{\jmath})$$

$$\vec{P}_2=\underbrace{20\ \text{kg}\cdot\text{m/s}}_{\text{módulo}}(-\hat{\jmath})$$

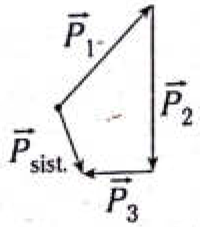
2. Cantidad de movimiento de un sistema ($\vec{P}_{\text{sist.}}$)

Para un conjunto de cuerpos que interactúan entre sí, la cantidad de movimiento del sistema se expresa como la suma (vectorial) de la cantidad de movimiento de cada uno de los cuerpos.



$$\vec{P}_{sist.} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3$$

Gráficamente.

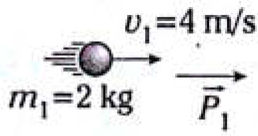


Aplicación 2

Dado el sistema de cuerpos que se muestra, determine la cantidad de movimiento del sistema.

Resolución

En este caso, como existen diversas direcciones, usaremos los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ para precisar la dirección de cada vector.

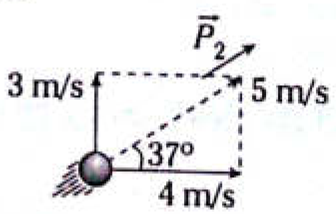


Luego

$$\vec{P}_1 = m_1\vec{v}_1 = 2(+4\hat{\imath})$$

$$\vec{P}_1 = +8\hat{\imath}\ \text{kg·m/s}$$

Gráficamente.



Luego

$$\vec{P}_2 = m_2\vec{v}_2 = 4(4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})$$

$$\vec{P}_2 = (16\hat{\imath} + 12\hat{\jmath})\text{kg·m/s}$$

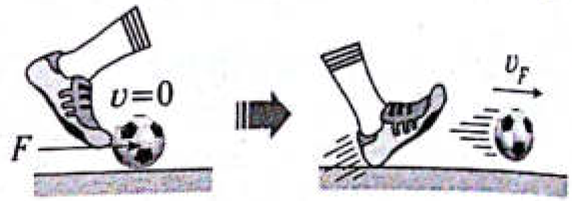
Finalmente para el sistema

$$\vec{P}_{sist.} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 8\hat{\imath} + (16\hat{\imath} + 12\hat{\jmath})$$

$$\therefore \quad \vec{P}_{sist.} = (24\hat{\imath} + 12\hat{\jmath})\ \text{kg·m/s}$$

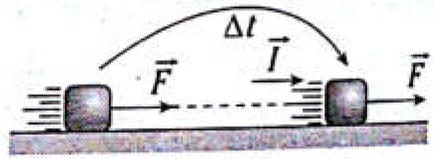
3. Impulso ($\vec{I}$)

Examinamos la siguiente situación:



Luego de patear el balón, este adquiere velocidad; es decir, cantidad de movimiento. Esto se debe a la acción de una fuerza en un cierto tiempo, o sea, debido a un impulso.

El impulso es la medida vectorial de la transferencia de movimiento mecánico.

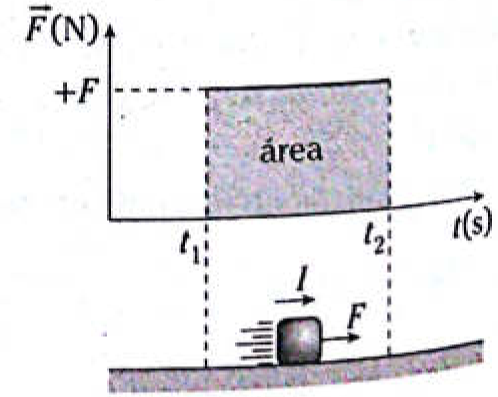


Para una fuerza constante $\vec{F}$, se cumple

$$\boxed{\vec{I} = \vec{F}\cdot\Delta t} \quad \text{unidad: N·s}$$

Tenga en cuenta que $\vec{F}$ y $\vec{I}$ siempre tienen la misma dirección.

Gráficamente

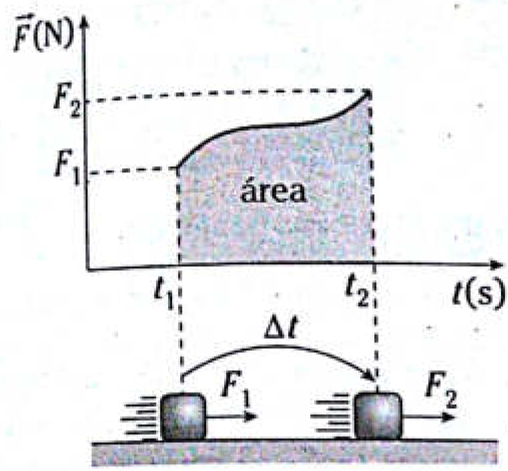


$$\text{área} = F(t_2 - t_1)$$

$$\text{área} = F \times \Delta t$$

$$\boxed{\text{área} = \vec{I}}$$

Para el caso de que la fuerza tenga módulo variable.



$$\boxed{\text{área} = \vec{I}}$$

En forma general, el área bajo la gráfica $\vec{F}$ vs. t nos expresa impulso.

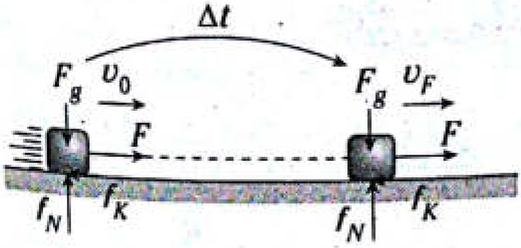
Observación

Por lo general, si sobre un cuerpo actúan varias fuerzas, entonces hallaremos un impulso resultante: $\vec{I}_{res}$ sumando los impulsos de todas las fuerzas.

$$\boxed{\vec{I}_{res} = \sum \vec{I}}$$

4. Relación entre el impulso y la cantidad de movimiento

Examinemos el caso de un bloque moviéndose, tal como se muestra a continuación:



Por la segunda ley de Newton

$$\vec{F}_R = m \times \vec{a} \qquad (*)$$

donde

$$a = \frac{\vec{v}_F - \vec{v}_0}{\Delta t}$$

En (*)

$$\vec{F}_R = m\left(\frac{\vec{v}_F - \vec{v}_0}{\Delta t}\right)$$

Despejamos.

$$\underbrace{\vec{F}_R \cdot \Delta t}_{\vec{I}_{res}} = \underbrace{m\vec{v}_F}_{\vec{P}_F} - \underbrace{m\vec{v}_0}_{\vec{P}_0}$$

$$\boxed{\vec{I}_{res} = \Delta \vec{P}}$$

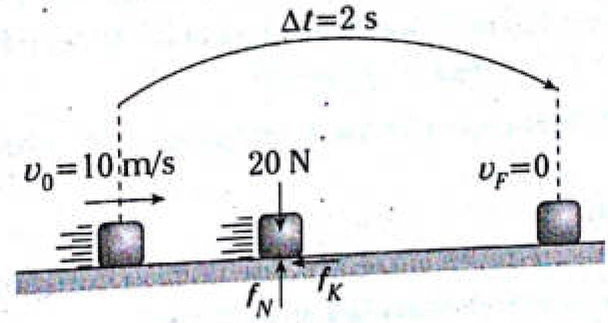
Esta expresión matemática nos indica que todo impulso resultante genera cambios en la cantidad de movimiento y que además se podría calcular el impulso de una fuerza sin necesidad de conocer directamente la fuerza sino tan solo la velocidad final y la inicial.

Aplicación 3

Se lanza un bloque de 2 kg sobre un piso horizontal con 10 m/s y notamos que se detiene luego de 2 s. ¿Qué valor de coeficiente cinético hay entre el bloque y el piso? ($g = 10$ m/s^2).

Resolución

Graficamos la situación.



Al lanzar el bloque, este avanza por inercia; pero, debido al impulso del rozamiento, la cantidad de movimiento del bloque disminuye hasta detenerse.

Aplicamos

$$\underbrace{\vec{I}_{f_K}} = \vec{P}_f - \vec{P}_0$$

$$-f_K \times \Delta t = \cancel{m}\overset{0}{v_f} - 2(10) \qquad (*)$$

$$f_K = \mu_K f_N = \mu_K(20)$$

Reemplazamos en (*).

$$-\mu_K(20) \times 2 = -20$$

$$\therefore \quad \mu_K = 0{,}5$$

5. Conservación de la cantidad de movimiento

Demostraremos la ley de la conservación a partir de la relación entre el impulso resultante $(\vec{I}_{res})$ y la cantidad de movimiento.

$$\vec{I}_{res} = \vec{P}_F - \vec{P}_0$$

$$\rightarrow \quad \vec{F}_{res} \cdot \Delta t = \vec{P}_F - \vec{P}_0 \qquad (*)$$

Ahora, si luego de hacer un diagrama de fuerzas sobre un cuerpo o sistema se determina que la fuerza resultante es nula $(\vec{F}_{res} = \vec{0})$ en (*).

$$\vec{0} = \vec{P}_F - \vec{P}_0$$

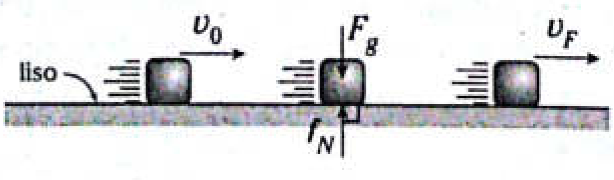
$$\rightarrow \quad \vec{P}_0 = \vec{P}_F$$

Esta relación nos dice que la cantidad de movimiento inicial y final es igual; es decir, la cantidad de movimiento se conserva.

A continuación, veamos algunos casos especiales.

Caso 1

Si un cuerpo es lanzado sobre un piso horizontal liso, ¿qué movimiento experimenta?



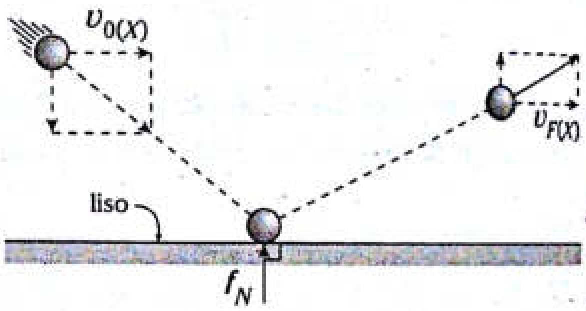
Como $F_g = F_N$, entonces la $F_{res} = 0$, por ello se cumple la conservación de la cantidad de movimiento.

$$\boxed{\vec{P}_0 = \vec{P}_F \rightarrow \vec{v}_0 = \vec{v}_F}$$

Por lo tanto, el cuerpo tiene MRU.

Caso 2

Se puede aplicar la conservación de la cantidad de movimiento en una determinada dirección donde no exista fuerza resultante.



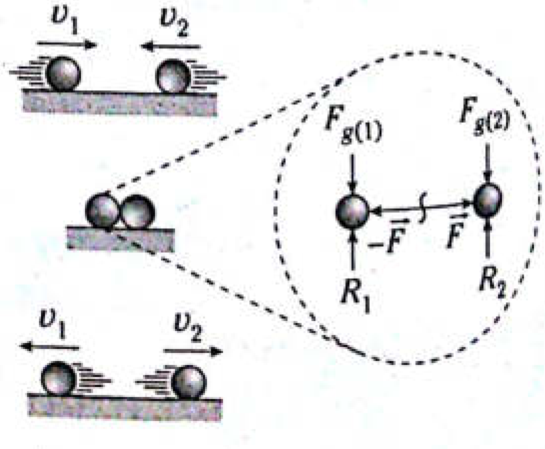
Como en dirección horizontal no hay fuerza resultante, se cumple

$$\vec{P}_{0X} = \vec{P}_{FX} \rightarrow m\vec{v}_{0X} = m\vec{v}_{FX}$$

$$\boxed{v_{0X} = v_{FX}}$$

Caso 3

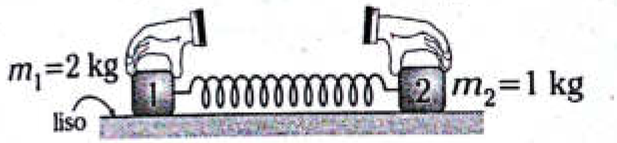
Para el caso de un sistema conformado por dos cuerpos; por ejemplo, el caso de choques.



A las fuerzas de acción $(\vec{F})$ y reacción $(-\vec{F})$ se les llama fuerzas internas. Para el sistema, no se toman en cuenta; en consecuencia, la resultante es cero. Por ello se conserva la cantidad de movimiento.

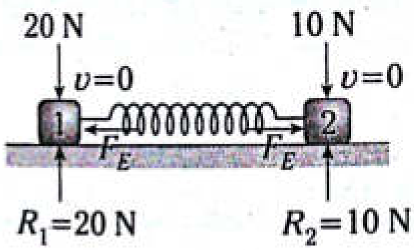
Aplicación 4

Se muestra un sistema de dos bloques unidos por un resorte que está comprimido. Si luego se suelta desde el reposo, ¿qué rapidez tendrá el bloque 1 cuando el bloque 2 presente 4 m/s?



Resolución

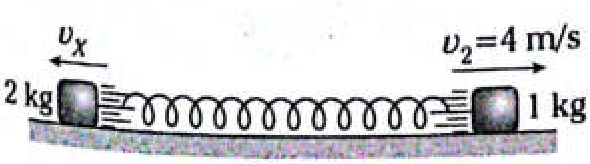
Luego de soltar los bloques, notamos que sobre el sistema no hay resultante, pues la fuerza elástica es una fuerza interna al sistema.



Como no existe fuerza resultante

$$\vec{P}_0^{\text{sist.}} = \vec{P}_F^{\text{sist.}} \qquad (*)$$

Observamos el resorte luego de un cierto tiempo.



Al inicio

$$\vec{P}_0^{\text{sist.}} = 0 \quad \text{(Los bloques están en reposo).}$$

Al final

$$\vec{P}_F^{\text{sist.}} = m_1\vec{v}_X + m_2\vec{v}_2 = 2(-v_X) + 1(+4) = -2v_X + 4$$

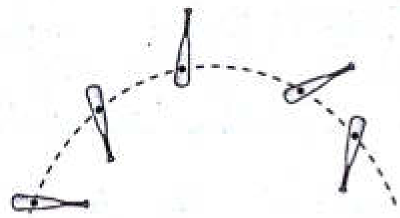
Reemplazamos en (*).

$$0 = -2v_X + 4 \;\rightarrow\; v_X = 2 \text{ m/s}$$

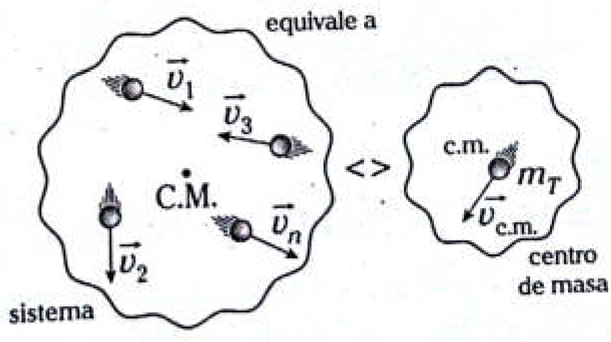
6. Centro de masa (C.M.)

Si lanzamos un bate de béisbol, notamos que su trayectoria es una curva muy complicada. Sin embargo, si examinamos un punto específico del bate, notamos que este describe una parábola.

Este punto es el centro de masa.



El centro de masa es aquel punto geométrico donde se considera concentrada la masa de un sistema. En consecuencia, examinar al sistema es equivalente a examinar su centro de masa (C.M.); ambos presentan la misma cantidad de movimiento.

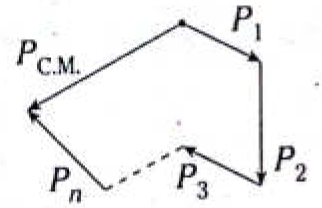


Por ser sistemas equivalentes

$$\underbrace{\vec{P}_{\text{sist.}}} = \vec{P}_{\text{C.M.}}$$

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ldots + \vec{P}_n = \vec{P}_{\text{C.M.}}$$

En forma gráfica



6.1. VELOCIDAD DEL CENTRO DE MASA $(\vec{v}_{C.M.})$

Partimos de la relación

$$\vec{P}_{C.M.} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + ... + \vec{P}_n$$

$$m_T\vec{v}_{C.M.} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n$$

$$\boxed{\vec{v}_{C.M.} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}}$$

donde $m_T = m_1 + m_2 + ... m_n$.

6.2. POSICIÓN DEL CENTRO DE MASA $(\vec{r}_{C.M.})$

Si conocemos la posición de cada partícula del sistema, podemos determinar la posición $(\vec{r})$ de su centro de masa.

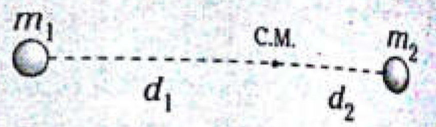
$$\boxed{\vec{r}_{C.M.} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}}$$

donde

- n: número de partículas del sistema
- $\vec{r}_{C.M.}$: vector posición del centro de masa del sistema (C.M.) respecto al origen de un sistema de coordenadas
- $\vec{r}_1; \vec{r}_2; ...; \vec{r}_n$: posiciones de cada partícula respecto al origen de coordenadas
- $m_1, m_2, ..., m_n$: masas del sistema

OBSERVACIÓN

- Un sistema de dos cuerpos de C.M. está en la línea que une los centros de los cuerpos y a una distancia que es inversamente proporcional a las masas.



Se cumple

$$\boxed{m_1d_1 = m_2d_2}$$

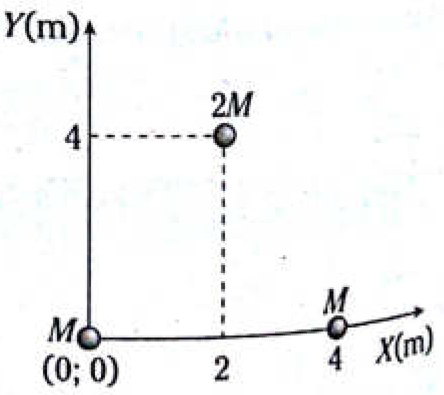
- En un plano de dos dimensiones se puede plantear la posición del C.M. por componente.

$$\boxed{\vec{X}_{C.M.} = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2 + ... + m_n\vec{x}_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}}$$

$$\boxed{\vec{Y}_{C.M.} = \frac{m_1\vec{y}_1 + m_2\vec{y}_2 + ... + m_n\vec{y}_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}}$$

Aplicación 5

Para el sistema de partículas mostrado, calcule la posición del centro de masa.



Resolución

Usamos la expresión para el cálculo de $\vec{X}_{C.M.}$ y $\vec{Y}_{C.M.}$

$$\vec{X}_{C.M.}=\frac{M(0)+2M(2)+M(4)}{M+2M+M}$$

$$\vec{X}_{C.M.}=2\,\text{m}$$

$$\vec{Y}_{C.M.}=\frac{M(0)+2M(4)+M(0)}{M+2M+M}$$

$$\vec{Y}_{C.M.}=2\,\text{m}$$

Nos piden la posición del C.M.

$$\vec{r}_{C.M.}=\left(\vec{x}_{C.M.};\vec{y}_{C.M.}\right)=(2;\ 2)\,\text{m}$$

Aplicación 6

Se tiene un bote de 200 kg y una persona de 50 kg reposando en uno de sus extremos. Si la persona decide irse al otro extremo del bote, ¿qué distancia avanzará el bote? Desprecie la resistencia de fricción del agua y considere que el bote tiene 3 m de longitud.

Resolución

Sobre el sistema bote-persona no hay fuerza resultante, ya que no hay fricción del agua, entonces se conservará la cantidad de movimiento del sistema.

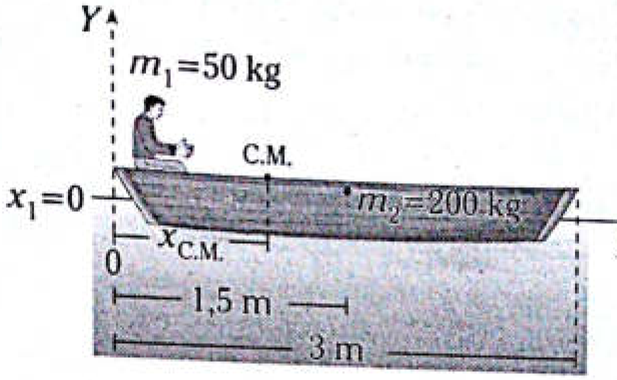
Según el enunciado, al inicio la persona y el bote están en reposo, por lo que el C.M. del sistema se quedará en reposo en todo instante (así la persona y el bote se muevan para cualquier lado). Por ello aplicamos

$$\vec{x}_{0(C.M.)}=\vec{x}_{F\,(C.M.)} \qquad \text{(I)}$$

donde

$$\vec{x}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

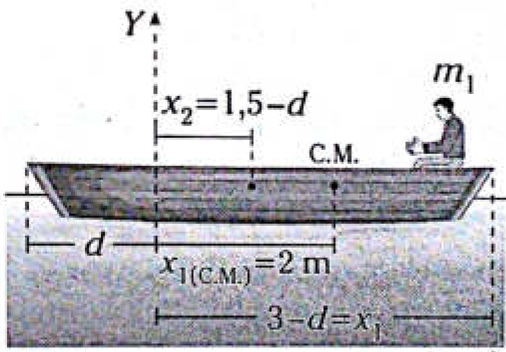
Asociamos un sistema de coordenadas.



Tenemos que

$$\vec{x}_{0_{C.M.}}=\frac{50(0)+200(1,5)}{50+200}=2 \qquad \text{(II)}$$

Luego, cuando la persona se desplaza hacia el otro extremo.



$$\vec{x}_{F_{C.M.}}=\frac{50(3-d)+200(1,5-d)}{200+50} \qquad \text{(III)}$$

Reemplazamos (II) y (III) en (I).

$$2=\frac{50(3-d)+200(1,5-d)}{250}$$

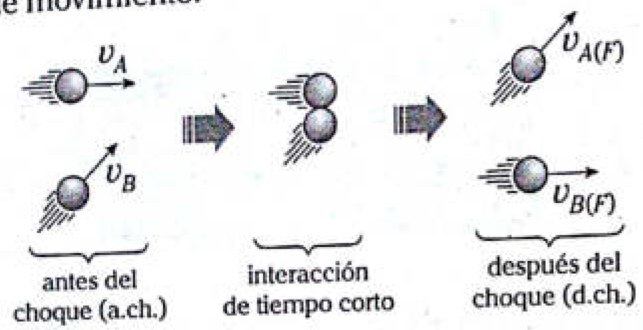
Efectuamos.

$$d=0,6\ \text{m}=60\ \text{cm}$$

Por lo tanto, el bote se desplaza 60 cm a la izquierda.

7. Choques o colisiones

Un choque es la interacción violenta de dos cuerpos que origina variación en sus cantidades de movimiento.



Las fuerzas que surgen como resultado del choque son tan intensas y la duración del eventos es tan corto ($\Delta t \approx 0$) que cualquier impulso externo se puede despreciar. Por lo tanto, sobre el sistema, la cantidad de movimiento se conserva.

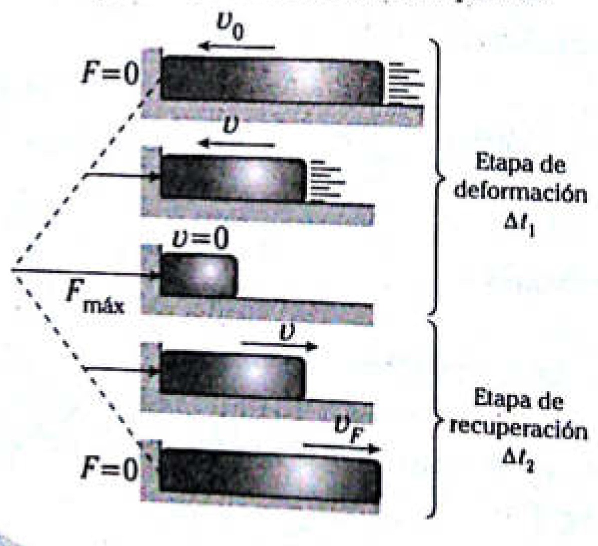
Es decir

$$\underbrace{\vec{P}^{\,\text{sist.}}_{\text{a. ch.}}}_{\substack{\text{cantidad de}\\ \text{movimiento}\\ \text{del sistema antes}\\ \text{del choque}}} = \underbrace{\vec{P}^{\,\text{sist.}}_{\text{d. ch.}}}_{\substack{\text{cantidad de}\\ \text{movimiento}\\ \text{del sistema después}\\ \text{del choque}}}$$

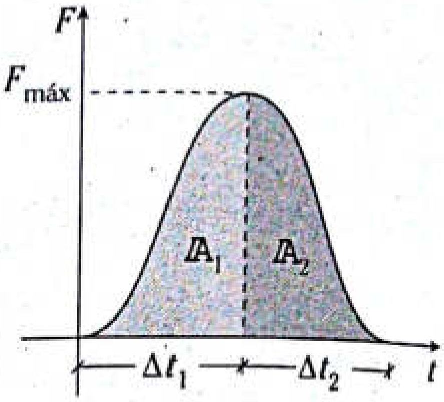
7.1. ANÁLISIS DE UN CHOQUE

En todo choque los cuerpos se deforman y luego, dependiendo de sus propiedades elásticas, se recuperan. Por ello en un choque existen dos etapas: la etapa de deformación y la etapa de recuperación.

A continuación, observemos el ejemplo de una barra de goma que choca con una pared.



Graficamos la fuerza que ejerce la pared en función del tiempo.



donde

- Δt_1: tiempo de deformación
- Δt_2: tiempo de recuperación

7.2. COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN (e)

Es un factor adimensional que nos permite comparar el impulso de recuperación con respecto al de deformación.

$$\boxed{e=\frac{A_2}{A_1}=\frac{I^{\text{rec}}}{I^{\text{def}}}}$$

donde

- $A_1=I^{\text{def}}$: impulso de deformación
- $A_2=I^{\text{rec}}$: impulso de recuperación

7.3. CLASIFICACIÓN DE LOS CHOQUES SEGÚN EL COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN

7.3.1. Choque elástico (e=1)

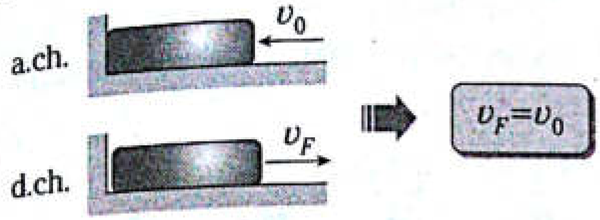
El cuerpo luego del choque se recupera totalmente y no se pierde energía en forma de calor, es decir,

$$I^{\text{def}}=I^{\text{rec}}$$

Se cumple

$$\boxed{e=\frac{I^{\text{rec}}}{I^{\text{def}}}=1}$$

Además, en todo choque elástico la energía mecánica se conserva.



7.3.2. Choque inelástico ($0 < e < 1$)

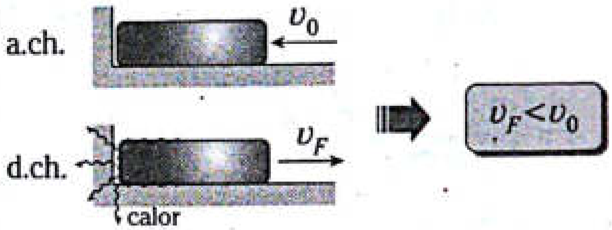
El cuerpo no logra recuperarse completamente; es decir

$$I^{\text{rec}} < I^{\text{def}}$$

Se cumple

$$\boxed{0 < e < 1}$$

También en todo choque inelástico se pierde energía en forma de calor; esto quiere decir que la energía mecánica final es menor que la inicial.



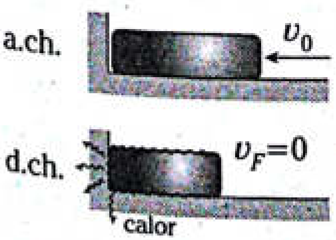
7.3.3. Choque plástico o completamente inelástico

El cuerpo no experimenta una etapa de recuperación y queda completamente deformado; es decir, $I^{\text{rec}}=0$.

Se cumple

$$\boxed{e=0}$$

El choque plástico se caracteriza porque no hay rebote de los cuerpos luego de la colisión.

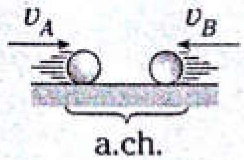


¡Los cuerpos se pegan!

NOTA

El choque plástico entre dos cuerpos móviles se realiza en dos casos.

Antes del choque



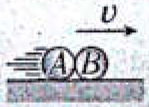
Luego del choque

Caso 1

$v_A=0$ $v_B=0$

Ambos cuerpos quedan en reposo.

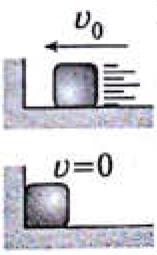
Caso 2



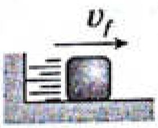
Los cuerpos se mueven juntos.

Caso 1

Observemos el caso de un móvil que choca con la pared.



$$\left.\begin{aligned} \vec{I}^{\text{def}} &= \vec{P}_f - \vec{P}_0 \\ \vec{I}^{\text{def}} &= 0 - m\vec{v}_0 = -m(-v_0) = mv_0 \end{aligned}\right.$$



$$\left.\begin{aligned} \vec{I}^{\text{rec}} &= \vec{P}_f - \vec{P}_0 \\ \vec{I}^{\text{rec}} &= m\vec{v}_F - 0 = mv_F \end{aligned}\right.$$

$$e = \frac{|I^{\text{def}}|}{|I^{\text{rec}}|} = \frac{\cancel{m}v_F}{\cancel{m}v_0}$$

Entonces

$$\boxed{e = \frac{v_F}{v_0}}$$

Se cumple

$$\boxed{v_F = ev_0}$$

Caso 2

Observemos el caso de dos esferas que chocan frontalmente.

En este caso el e se determina tomando en cuenta la velocidad relativa entre los cuerpos, antes y después del choque.

$$\boxed{e=\frac{|\vec{v}_2{}'-\vec{v}_1{}'|}{|\vec{v}_2-\vec{v}_1|}=\frac{|\vec{v}_{R(\text{d. ch.})}|}{|\vec{v}_{R(\text{a. ch.})}|}}$$

donde

- $|\vec{v}_{R(\text{d. ch.})}|$: módulo de la velocidad relativa después del choque
- $|\vec{v}_{R(\text{a. ch.})}|$: módulo de la velocidad relativa antes del choque

Ejemplos

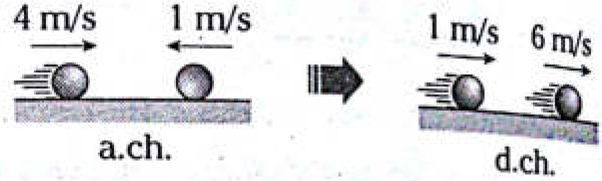
En los siguientes casos, determinaremos el (e) y estableceremos el tipo de choque.

a.

$$e=\frac{|-3-(-1)|}{|+2-(+6)|}=\frac{2}{8}=0,25$$

Como $e<1$, entonces el choque es inelástico.

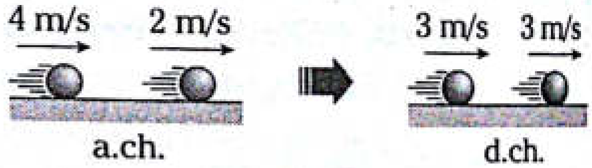
b.



$$e=\frac{|+6-(+1)|}{|-1-(+4)|}=\frac{5}{5}=1$$

Como $e=1$, entonces el choque es elástico.

c.

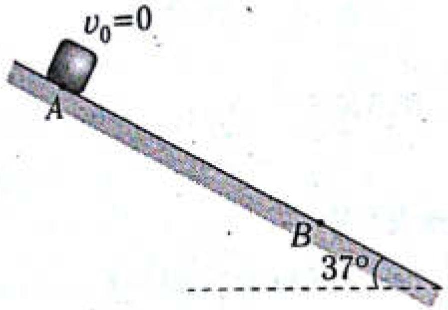


$$e=\frac{|+3-(+3)|}{|2-(+4)|}=\frac{0}{2}=0$$

Como $e=0$, entonces el choque es completamente inelástico o plástico.

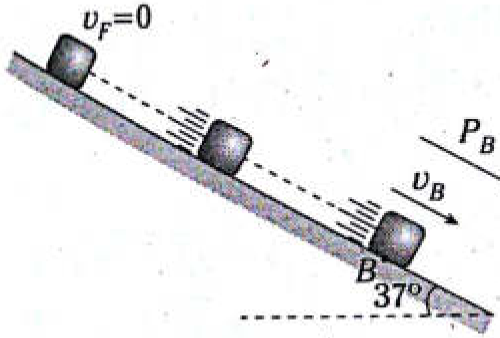
Problema N.º 1

Se suelta un bloque de 5 kg sobre un plano liso. ¿Cuál es la magnitud de su cantidad de movimiento cuando pasa por B?
(d_{AB}=3 m; g=10 m/s^2)



Resolución

Nos piden P_B.



> **Importante**
> En dinámica aprendimos que la aceleración en un plano liso se calcula así:
>
> $$\boxed{a=g\text{sen}\theta}$$

Entonces, necesitamos conocer la velocidad en B, para ello aplicamos

$$v_B^2=\cancel{v_A^2}+2ad_{AB} \qquad (*)$$

Tenemos que

$$a=g\text{sen}\theta$$

$$\rightarrow \quad a=10\times\text{sen}(37)=6\text{ m/s}^2$$

Reemplazamos en (*).

$$v_B^2=0+2\times6\times3$$

$$\rightarrow \quad v_B=6\text{ m/s}$$

Luego

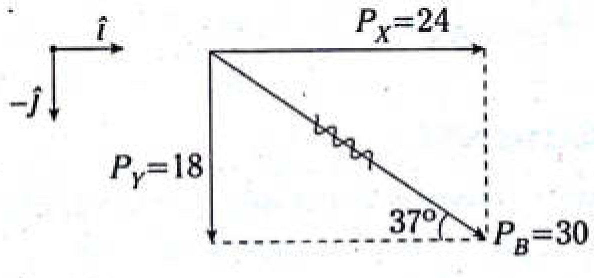
$$P_B=mv_B=5\times6=30$$

$$P_B=30\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

> **Observación**
> Este valor obtenido representa el módulo de la cantidad de movimiento.
>
> $$P_B=|\vec{P}_B|=30\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Pero, ¿cómo expresamos la cantidad de movimiento vectorialmente?

Para este caso, aprovechamos que conocemos la dirección de $\vec{P}_B$.



Finalmente

$$\vec{P}_B=(24\hat{\imath}-18\hat{\jmath})\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Problema N.º 2

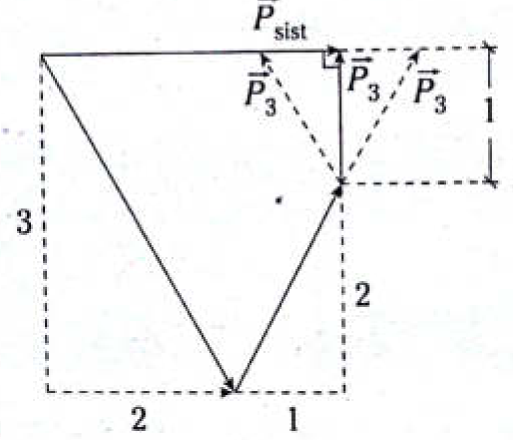
Tres partículas de 0,5 kg tienen velocidades de $\vec{v}_1=(4\hat{\imath}-6\hat{\jmath})$ m/s; $\vec{v}_2=(2\hat{\imath}+4\hat{\jmath})$ m/s y $\vec{v}_B$. ¿Cuál es el menor módulo de la cantidad de movimiento de la tercera partícula si se sabe que el sistema presenta cantidad de movimiento en el eje X?

Resolución

Según los datos, resolvemos el problema en forma vectorial mediante el método del polígono, teniendo en cuenta que $\vec{P}_{\text{sist.}}$ está en el eje X; es decir, es horizontal.

- $\vec{P}_1 = m\vec{v}_1 = 0{,}5(4\hat{\imath} - 6\hat{\jmath}) = (2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath})$ kg·m/s
- $\vec{P}_2 = m\vec{v}_2 = 0{,}5(2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}) = (\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})$ kg·m/s

Gráficamente.



Notamos que $\vec{P}_3$ es mínimo cuando es perpendicular al vector $\vec{P}_{sist.}$

Por lo tanto, se deduce de la gráfica que

$\vec{P}_3$=1 kg·m/s

Problema N.º 3

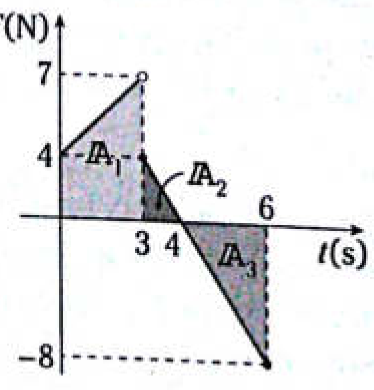
Sobre un cuerpo actúa una fuerza variable $\vec{F}$ cuya regla de correspondencia es

$$F = \begin{cases} t+4;\ 0 \le t < 3 \\ -4t+16;\ 3 \le t \le 6 \end{cases}$$

determine el módulo del impulso debido a la fuerza $\vec{F}$.

Resolución

Graficamos $\vec{F} - t$.



El impulso de la fuerza $(\vec{F})$ en el intervalo $t \in [0; 9]$ s es igual al área bajo la gráfica.

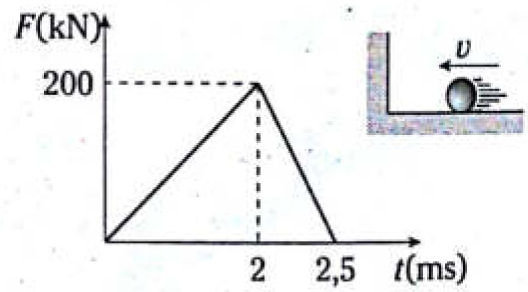
$$|\vec{I}| = A_1 + A_2 + A_3$$

$$|\vec{I}| = +\left(\frac{4+7}{2}\right)3 + \frac{4\times1}{2} + \frac{(-8)\times2}{2}$$

$$\therefore\ |\vec{I}| = 10{,}5\ \text{N}\cdot\text{s}$$

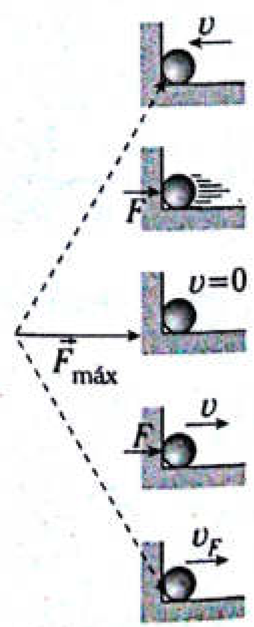
Problema N.º 4

El módulo de la fuerza que la pared ejerce a la esfera varía con el tiempo según la gráfica mostrada. Determine el valor de la fuerza media que ejerce la pared sobre la esfera.

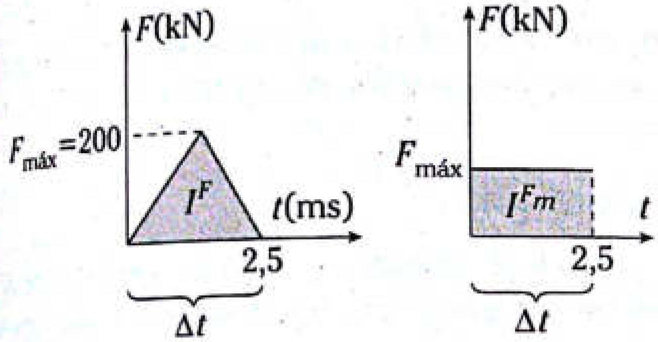


Resolución

Nos piden la fuerza media (F_M).



Al momento de chocar con la pared, la esfera experimenta una fuerza de módulo variable. ¿Qué es la fuerza media? La fuerza media es aquella fuerza de módulo constante que en el mismo tiempo ejercerá el mismo impulso que la fuerza variable.



Igualamos los impulsos.

$$\overbrace{I^F}^{\substack{\text{impulso de la}\\ \text{fuerza variable}}} = \overbrace{I^{F_M}}^{\substack{\text{impulso de la}\\ \text{fuerza media}}}$$

$$\frac{F_{\text{máx}}\cdot \cancel{\Delta t}}{2}=F_M\cdot \cancel{\Delta t}$$

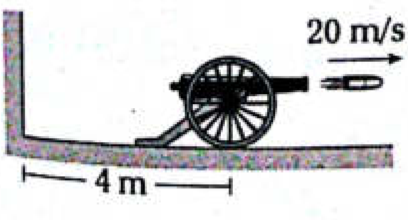
$$\frac{F_{\text{máx}}}{2}=F_M=\frac{200}{2}\,(\text{kN})$$

$\therefore \quad F_M=100\text{ kN}$

Problema N.° 5

Se muestra un cañón que dispara balas de 4 kg con una rapidez de 20 m/s. Determine el peso del cañón para que después de 10 s de haber disparado una bala, el cañón choque con la pared. Desprecie todo rozamiento.

$(g=9{,}8\text{ m/s}^2)$



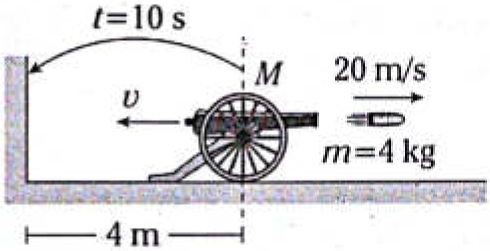
Resolución

Nos piden la fuerza de gravedad del cañón (F_g).

Aplicamos

$$F_g=Mg=M(9{,}8) \qquad \text{(I)}$$

Ahora hallemos la masa del cañón teniendo presente que horizontalmente antes y después del disparo la cantidad de movimiento del sistema (cañón-bala) se conserva debido a que la F_{res} sobre el sistema es nula.



$$\vec{P}^{\text{sist.}}_{\substack{\text{antes}\\ \text{del disparo}}}=\vec{P}^{\text{sist.}}_{\substack{\text{después}\\ \text{del disparo}}}$$

$$m(0)+M(0)=M(-v)+m(20)$$

$$M=\frac{4(20)}{v}=\frac{80}{v} \qquad \text{(II)}$$

Luego del disparo, el cañón se dirige hacia la pared con MRU (pues el piso es liso) donde su velocidad v se calcula así:

$$v=\frac{d}{t}=\frac{4}{10}=0{,}4\text{ m/s}$$

En (II)

$$M=\frac{80}{0{,}4}=200\text{ kg}$$

En (I)

$$F_g=200\times 9{,}8$$

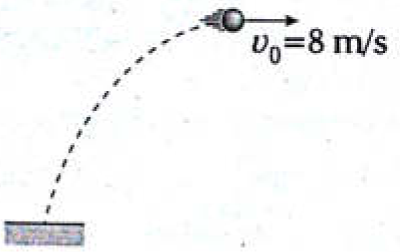
$\therefore \quad F_g=1960\text{ N}$

Problema N.° 6

En la parte más alta de su trayectoria, un proyectil se está moviendo con 8 m/s y explota dividiéndose en dos fragmentos de igual masa. Si inmediatamente luego de la explosión uno de los fragmentos presenta 4 m/s pero en dirección contraria a la que tenía el proyectil, ¿qué magnitud tiene la velocidad del otro fragmento en aquel instante?

Resolución

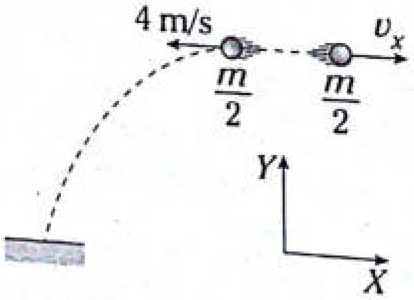
Según el enunciado, inicialmente el proyectil tiene una rapidez de v_0=8 m/s en su altura máxima.



Por ser un movimiento parabólico de caída libre, sobre el proyectil solo actúa la fuerza de gravedad.

Luego, en todo instante, la cantidad de movimiento del proyectil en dirección horizontal, antes y después de fragmentarse, permanece constante.

Entonces, al fragmentarse el proyectil, se obtiene lo siguiente:



Luego

$$\vec{P}_{0(\text{eje } X)}=\vec{P}_{f(\text{eje } X)}$$

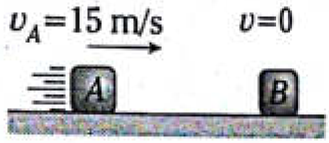
$$m(+8)=\frac{m}{2}(-4)+\frac{m}{2}(\vec{v}_X)$$

$$\therefore\quad \vec{v}_X=+20\text{ m/s}$$

El signo (+) nos indica que el segundo fragmento se dirige en ese instante a la derecha.

Problema N.° 7

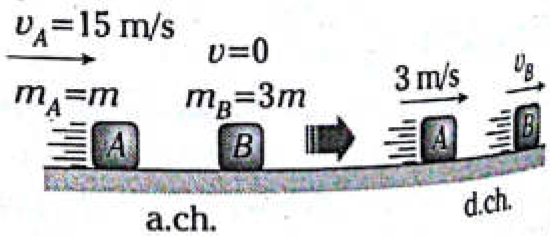
El bloque A desliza sobre una superficie horizontal lisa e impacta con el bloque B que está en reposo. Si luego del choque el bloque A adquiere 3 m/s conservando su dirección, determine el coeficiente de restitución (e). Considere m_B=3m_A.



Resolución

Nos piden e.

Para hallar e necesitamos conocer previamente con qué velocidad se mueve B.



Recordemos que en todo choque se conserva la cantidad de movimiento, entonces

$$\vec{P}^{\text{sist.}}_{0_{\text{a. ch.}}}=\vec{P}^{\text{sist.}}_{F_{\text{d. ch.}}}$$

$$\cancel{m}(15)+3\cancel{m}(0)=\cancel{m}(3)+3\cancel{m}(\vec{v}_B)$$

$$\rightarrow\quad 4\text{ m/s}=\vec{v}_B$$

Ahora ya podemos hallar e.

$$e=\frac{\left|\vec{\upsilon}_{R(\text{d. ch.})}\right|}{\left|\vec{\upsilon}_{R(\text{a. ch.})}\right|}=\frac{|4-3|}{|0-15|}=\frac{1}{15}$$

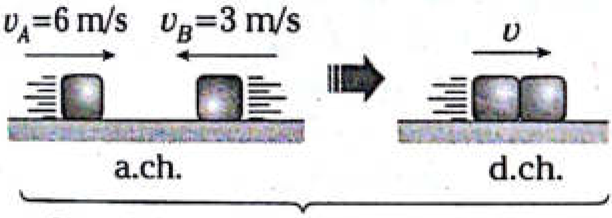
$$\therefore\quad e=\frac{1}{15}$$

Problema N.° 8

Dos bloques idénticos cuya masa es 2 kg se desplazan en sentidos contrarios sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Uno de ellos se desplaza con 3 m/s y el otro con 6 m/s. Si el choque es completamente inelástico, ¿qué energía cinética se pierde luego del choque?

Resolución

Nos piden la energía cinética que se pierde luego del choque $\left(E_{C(\text{pierde})}\right)$.



Como el choque es completamente inelástico, entonces luego del impacto quedan adheridos.

Se sabe que en todo choque se conserva la cantidad de movimiento del sistema.

$$\vec{P}^{\,\text{sist.}}_{\text{a. ch.}}=\vec{P}^{\,\text{sist.}}_{\text{d. ch.}}$$

$$2(+6)+2(-3)=(2+2)\vec{\upsilon}$$

$$\rightarrow\quad \vec{\upsilon}=+1{,}5\text{ m/s}$$

Luego

$$E_{C_{\text{pierde}}}=E_{C_{\text{a. ch.}}}-E_{C_{\text{d. ch.}}}\qquad(*)$$

donde

$$E_{C_{\text{a. ch.}}}=\frac{1}{2}\times 2(6)^2+\frac{1}{2}\times 2(3)^2=45\text{ J}$$

$$E_{C_{\text{d. ch.}}}=\frac{1}{2}\times 4\times 1{,}5^2=4{,}5\text{ J}$$

Reemplazamos en (*).

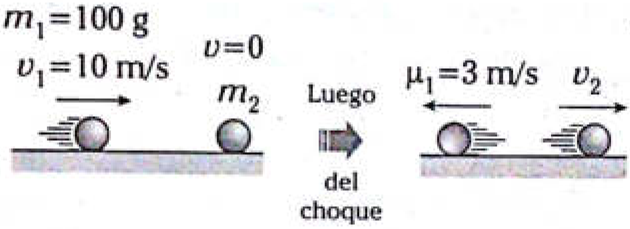
$$E_{C_{\text{pierde}}}=40{,}5\text{ J}$$

Problema N.° 9

Una esfera de 100 g de masa que se mueve con una rapidez de 10 m/s choca frontal y elásticamente con otra esfera que está en reposo. Si luego del choque la esfera que llega rebota hacia atrás con 3 m/s, ¿qué rapidez adquiere la esfera que estaba en reposo y qué masa presenta?

Resolución

Hallamos υ_2.



Por condición, el choque que experimentan las esferas es elástico; por ello e=1.

Entonces

$$e=\frac{\left|\upsilon_{R(\text{d. ch.})}\right|}{\left|\upsilon_{R(\text{a. ch.})}\right|}$$

$$1=\frac{3+\upsilon_2}{10}\quad\rightarrow\quad \upsilon_2=7\text{ m/s}$$

Además, en todo choque, para el sistema se conserva la cantidad de movimiento.

Calculamos.

$$\vec{P}^{\,\text{sist.}}_{\text{a. ch.}}=\vec{P}^{\,\text{sist.}}_{\text{d. ch.}}$$

$$m_1\vec{\upsilon}_1+m_2(0)=m_1\vec{\mu}_1+m_2\vec{\upsilon}_2$$

$$0{,}1(10)+0=0{,}1(-3)+m_2(7)$$

$$m_2=0{,}186\text{ kg}$$

$$\therefore\quad m_2=186\text{ g}$$

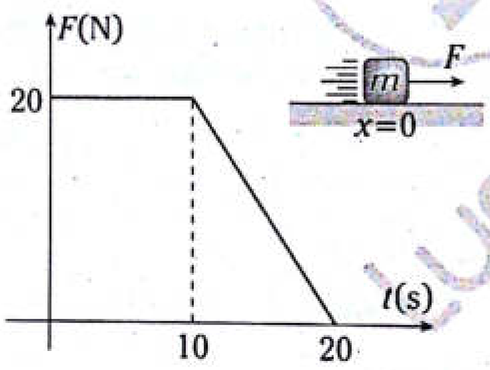
PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. Una pelota de 200 g se suelta desde cierta altura con respecto del piso y al impactar experimenta un impulso neto de 0,8 N·s. Si el contacto duró 0,01 s, determine la magnitud de la fuerza media del piso sobre la pelota. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.

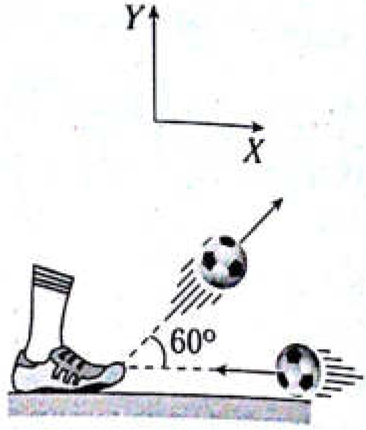
A) 60 N B) 70 N C) 78 N
D) 82 N E) 90 N

2. Se muestra la variación en módulo de una fuerza que actúa sobre un bloque que se desliza sobre un piso con coeficiente de rozamiento $\mu_K=0{,}4$. Determine el impulso resultante sobre el bloque hasta el instante en que su aceleración sea nula.
$(g=10\ \text{m/s}^2;\ m=2\ \text{kg})$



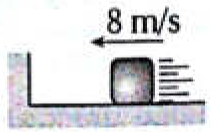
A) 412 N·s
B) 320 N·s
C) 156 N·s
D) 100 N·s
E) 180 N·s

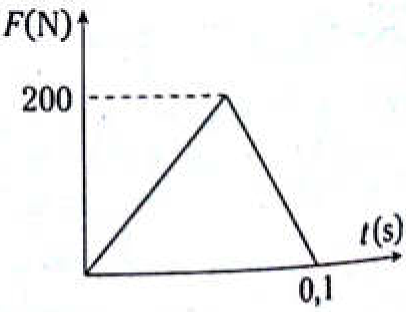
3. Un jugador de fútbol recibe una pelota (m=500 g) con una velocidad de $-20\hat{\imath}$ m/s y dándole un puntapié le cambia de dirección, manteniendo su rapidez de 20 m/s, tal como se muestra en el gráfico. ¿Qué magnitud (en N·s) tuvo el impulso que recibió la pelota?



A) 10
B) $10\sqrt{3}$
C) $5\sqrt{3}$
D) 20
E) $20\sqrt{3}$

4. El bloque de 1 kg desliza sobre el piso horizontal liso y choca contra la pared. Determine la rapidez del bloque luego del choque si la fuerza que ejerce la pared sobre el bloque varía respecto al tiempo, tal como se muestra en el gráfico, además, determine la energía disipada debido al choque.





A) 18 m/s; 30 J
B) 2 m/s; 30 J
C) 6 m/s; 40 J
D) 10 m/s; 50 J
E) 2 m/s; 25 J

5. Un proyectil arrojado desde el suelo llega a su punto más alto de su trayectoria parabólica con una velocidad v_0 y explota en dos fragmentos, teniendo el fragmento más grande el triple de masa que el otro. Si inmediatamente después de la explosión el fragmento más pequeño tiene una velocidad de $0,5v_0$ y se mueve en dirección contraria al que tenía el proyectil, ¿qué magnitud tiene la velocidad del otro fragmento en el instante de la explosión?

A) v_0 B) $1,5v_0$ C) $3v_0$
D) $2v_0$ E) $2,5v_0$

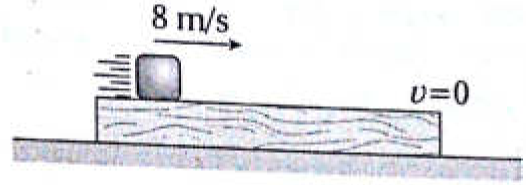
6. Un bebé de 30 kg de masa descansa sobre un coche de 40 kg que desliza sobre una superficie lisa con 5 m/s. ¿Qué rapidez experimenta el coche si el bebé empieza a correr con una velocidad de 2 m/s en dirección contraria al coche?

A) 6 m/s B) 8,5 m/s C) 10,25 m/s
D) 12 m/s E) 14,75 m/s

7. Un tronco de madera de 800 g está unido a un resorte de rigidez K=100 N/m sin deformar y en reposo. Determine con qué rapidez se debe incrustar un proyectil de 200 g de masa para que el resorte experimente una máxima deformación de 10 cm.

A) 1 m/s
B) 1,5 m/s
C) 2,5 m/s
D) 3 m/s
E) 5 m/s

8. Consideremos una tabla de 6 kg de masa en reposo sobre un piso liso. Si encima de ella lanzamos un bloque de 2 kg de masa con 8 m/s, ¿qué cantidad de energía se transforma en calor debido al rozamiento que existe entre el bloque y la tabla? Considere que el bloque no llega a salirse de la tabla.

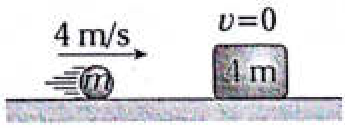


A) 30 J B) 36 J C) 40 J
D) 42 J E) 48 J

9. Tres partículas (A, B y C) de 1 kg, 2 kg y 3 kg, respectivamente, se encuentran sobre el eje X. Si A y C están ubicadas en x=1 m y x=3 m, además el centro de masa del sistema está en $x=\frac{13}{6}$ m, determine la posición, en metros, de la partícula B.

A) 1,2 B) 1,5 C) 1,8
D) 1,9 E) 2,5

10. La esfera choca frontal e inelásticamente con un bloque en reposo. Si e=0,25, determine el impulso en N·s que le ejerce el bloque a la esfera cuando ocurre el impacto. (m=100 g).

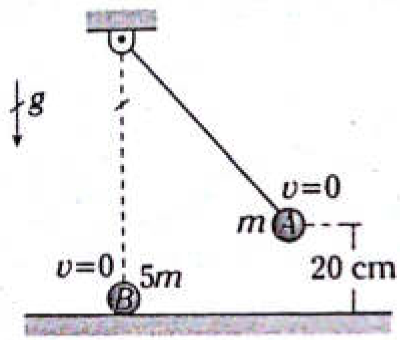


A) 0,2 B) 0,25 C) 0,33
D) 0,4 E) 0,6

11. Determine la relación de las masas que presentan dos cuerpos que colisionan frontalmente si uno de ellos estaba en reposo antes del choque y luego presentan la misma rapidez. Considere e=0,25.

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{5}$
D) $\frac{2}{7}$ E) $\frac{3}{5}$

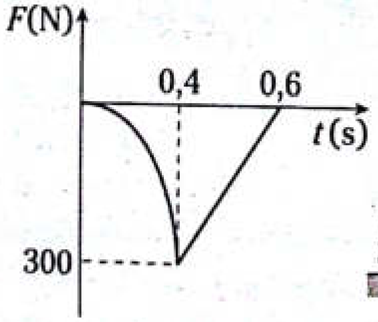
12. Se suelta una esfera A, tal como muestra en la figura, chocando luego con otra esfera B que permanece en reposo. Si luego de la colisión la esfera A logra rebotar y elevarse 5 cm, ¿qué coeficiente de restitución presenta el choque? $(g=10\ \text{m/s}^2)$.

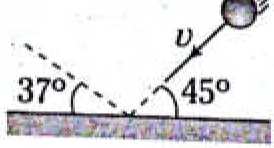


A) 0,4 B) 0,5 C) 0,8
D) 0,85 E) 0,9

NIVEL INTERMEDIO

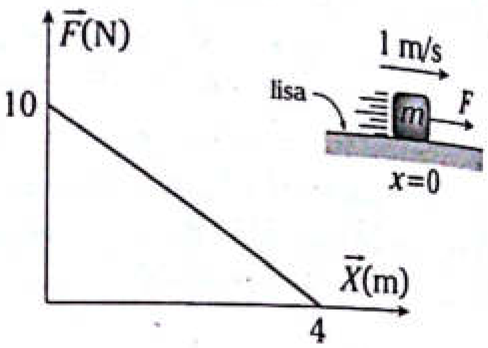
13. La figura muestra el instante en que una pelota de 200 g choca y rebota contra la baranda de una mesa de billar. Si la fuerza que la baranda le ejerce a la pelota varía con el tiempo según la gráfica adjunta, determine v. Considere que las superficies son lisas.





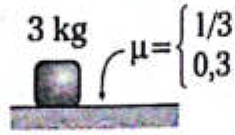
A) 270 m/s
B) 282,84 m/s
C) 275,6 m/s
D) 295,78 m/s
E) 312,58 m/s

14. La gráfica muestra la magnitud de la fuerza que actúa sobre un cuerpo. Determine el módulo de la cantidad de movimiento en la posición $\vec{x}=+2m$; $m=2$ kg.



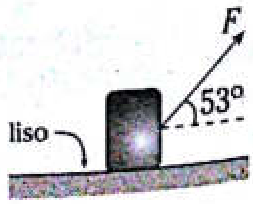
A) 6 kg·m/s B) 8 kg·m/s C) 10 kg·m/s
D) 12 kg·m/s E) 16 kg·m/s

15. Sobre un bloque en reposo empieza a actuar una fuerza que depende del tiempo según $F=(4+6t)\hat{\imath}$ N, t en segundos. ¿Qué rapidez adquiere el bloque al cabo de 4 s? $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



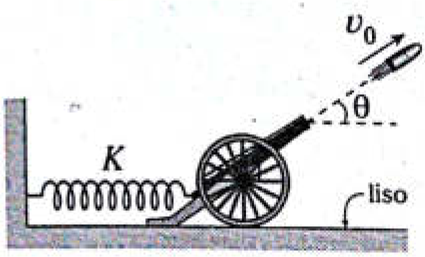
A) 10 m/s B) 8 m/s C) 0
D) 15 m/s E) 20 m/s

16. El bloque de 4 kg se encuentra en reposo y es sometido a una fuerza $F=10t$ (con unidades en el SI). Determine qué rapidez presenta el bloque en el instante en que pierde contacto con el piso. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



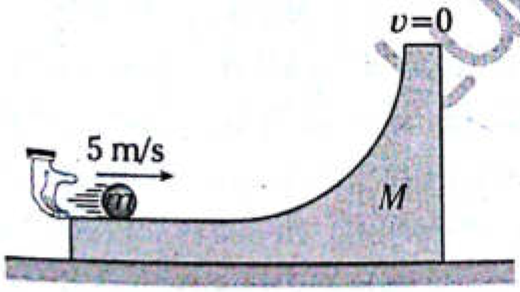
A) 18,75 m/s B) 20 m/s C) 21 m/s
D) 21,5 m/s E) 22,8 m/s

17. Un cañón de 800 kg dispara una bala de 10 kg con una rapidez de 100 m/s de tal manera que el proyectil logre su máximo alcance. Si el cañón está unido a un resorte, tal como se muestra, determine la máxima deformación en el resorte luego de disparar la bala. (K=100 N/m)



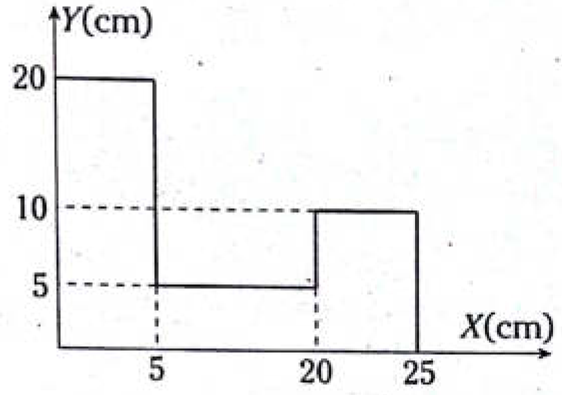
A) 1,5 m B) 2,5 m C) 3,54 m
D) 4,05 m E) 4,25 m

18. Sobre un bloque de masa M=4 m que reposa sobre un piso liso se lanza una esfera con 5 m/s de rapidez. Determine la máxima altura que logra elevarse la esfera respecto a su nivel inicial luego de separarse del bloque. Desprecie todo rozamiento.
(g=10 m/s^2)



A) 0,8 m B) 1 m C) 1,2 m
D) 1,4 m E) 2 m

19. Una placa delgada y uniforme posee la forma y dimensiones que se muestran en la figura.



Determine las coordenadas X e Y del centro de masa de la placa y dé como resultado la suma de dichas coordenadas, en cm.

A) 20,2 B) 18,25 C) 17,5
D) 16,67 E) 24,4

20. Una esferita se suelta desde una altura de 50 cm respecto de un piso rígido. Si se considera el coeficiente de restitución entre la esferita y el piso de 0,4, ¿a qué altura se eleva la esferita después del primer choque con el piso?

A) 5 cm B) 8 cm C) 10 cm
D) 12 cm E) 15 cm

Gravitación

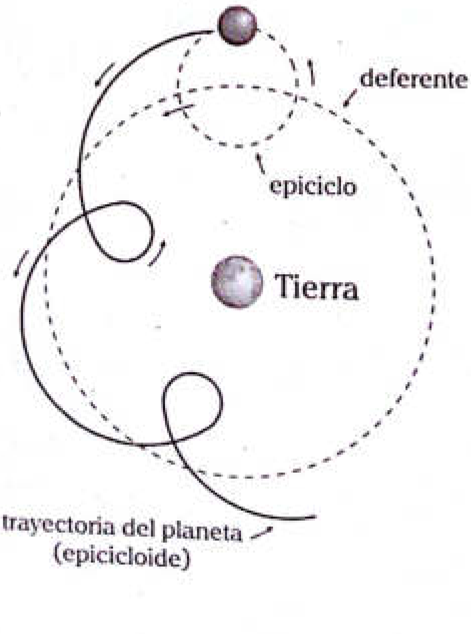
Capítulo X

Objetivos

- Conocer y aplicar las leyes de Kepler y las leyes de Newton sobre el movimiento de satélites y planetas.
- Entender al campo gravitatorio como medio material transmisor de las interacciones gravitatorias.
- Conocer la forma de representar el campo gravitatorio, así como las magnitudes que permiten medirlo.

1. Teorías geocéntrica y heliocéntrica

Las primeras teorías basadas en la hipótesis hecha por Aristóteles y desarrollada por Ptolomeo (siglo II d. n. e.) consideraban a la Tierra como el centro del universo (sistema geocéntrico), lo cual hacía que describir el movimiento de los cuerpos celestes fuese sumamente complicado, por ejemplo se ilustra el movimiento de un planeta respecto de la Tierra:



Esta teoría con el tiempo sufrió ciertas modificaciones, pero aún tenía serias limitaciones para explicar una serie de fenómenos que se observaban.

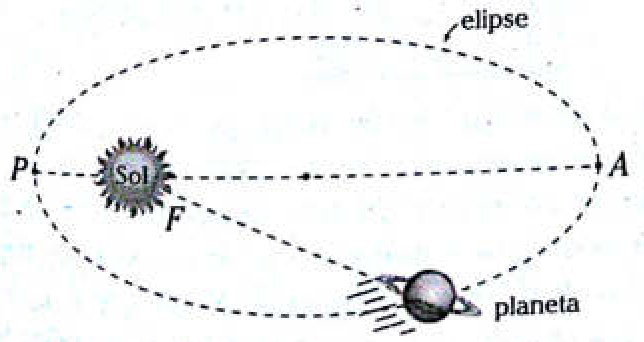
Fue a mediado del siglo XV, que un joven estudiante polaco Nicolás Copérnico tuvo la audacia de proponer una teoría en la cual se considera al Sol como el centro de nuestro sistema, y los demás planetas, incluida la Tierra, orbitando alrededor de él. La teoría de Copérnico no era del todo satisfactoria, ya que él solo aceptaba como trayectoria para los planetas una circunferencia y eso hacía que su teoría tuviera limitaciones. No obstante estableció las bases para que luego Johannes Kepler descubriera las tres leyes del movimiento planetario, apoyándose en las observaciones de Thycho Brahe, y posteriormente para que Isaac Newton descubriera la ley de la gravitación, la cual junto con sus tres leyes del movimiento permiten explicar el funcionamiento del universo.

2. Leyes de Kepler

Antes de que Newton descubriera la ley de gravitación (1687), 69 años antes, Johannes Kepler ya había descubierto tres leyes relacionadas con la cinemática del movimiento planetario, basándose en las observaciones de Thicho Brahe quien, antes de Kepler, durante veinte años observando el cielo por las noches, sin uso de telescopios (aún no se inventaban), pudo determinar las posiciones de los diferentes planetas con respecto al fondo de las estrellas, que él consideraba fijas.

2.1. PRIMERA LEY (DE LAS ÓRBITAS)

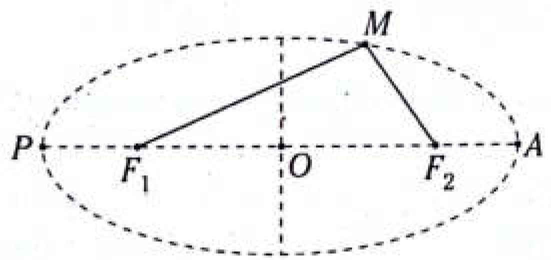
Tomando como referencia al Sol, Kepler comenzó trabajando con el esquema planteado por Copérnico, pensando que los planetas se movían en trayectorias circunferenciales y movimientos en epiciclos, pero encontró que los datos de las observaciones lo situaban fuera del esquema que había establecido Copérnico, lo que lo llevó a concluir que los planetas no describían una órbita circunferencial alrededor del Sol. Tras ocho años de continua labor ensayando otras formas para las órbitas encontró que: "Los planetas describen órbitas elípticas, las cuales tienen al Sol en uno de sus focos".



donde

- F: foco de la elipse
- P: perihelio (punto más cercano al Sol)
- A: afelio (punto más alejado del Sol)

Debemos tener en cuenta que el Sol, con su gran masa, constituye prácticamente el centro de masa del sistema planetario. Respecto a la elipse, esta es una curva que contiene a todos los puntos de un plano, cuyas distancias a dos puntos fijos del plano (llamados focos) dan una suma constante, tal como se muestra:



donde

- F_1 y F_2: focos de la elipse
- O: centro de la elipse (equidista de los focos)

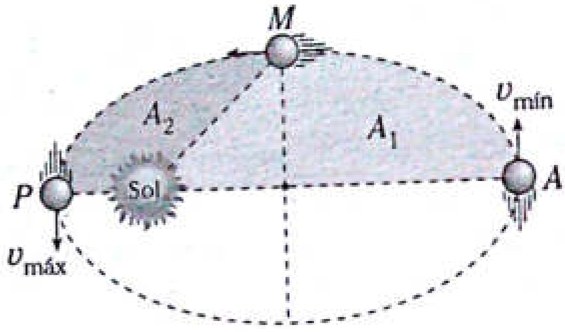
Sea M cualquier punto de la elipse, se cumple que la suma de las distancias de este a los focos señalados siempre es constante.

$$\boxed{MF_1 + MF_2 = \text{cte.}}$$

A mayor distancia entre los focos de la elipse esta es más alargada (más excéntrica), a menor distancia es más redondeada (menos excéntrica). Si los focos coinciden, la elipse se convierte en una circunferencia. La circunferencia es un caso particular de la elipse. Hay orbitas casi circunferenciales como el de la Luna en torno a la Tierra, o de los planetas más cercanos al Sol, incluida la Tierra.

2.2. SEGUNDA LEY (DE LAS ÁREAS)

Analizando los datos de Brahe, Kepler también descubrió que la velocidad de los planetas no es constante; es mayor cuando están próximos al Sol (perihelio) que cuando se mueven por las zonas más alejadas (afelio). En el caso de la Tierra, su rapidez máxima y mínima son las siguientes:



$v_{máx}$=32 km/s ; $v_{mín}$=28 km/s

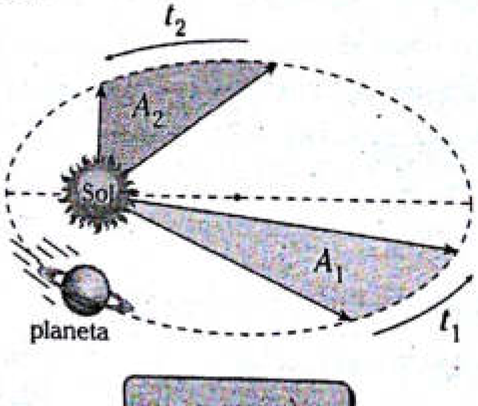
Por ello, el tiempo que demora un planeta en ir de A hasta M es mayor que el tiempo que demora en ir de M hasta P, aunque en los dos tramos los recorridos son iguales. Sin embargo, si consideramos el segmento que une al Sol con el planeta (radio vector), este barre más área en el tramo que demora más tiempo ($A_1 > A_2$). Es decir, a mayor área barrida más tiempo transcurrido.

Siguiendo esta observación Kepler logra descubrir que

$$\begin{pmatrix}\text{área barrida por}\\ \text{el radio vector}\end{pmatrix} \text{ DP } \begin{pmatrix}\text{tiempo}\\ \text{empleado}\end{pmatrix}$$

En consecuencia, el radio vector que une al Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

En general



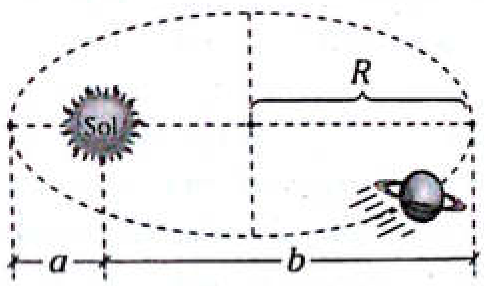
$$\boxed{\frac{A_1}{t_1}=\frac{A_2}{t_2}}$$

Note que si $t_1=t_2$

$\rightarrow$ $A_1=A_2$

2.3. TERCERA LEY (DE LOS PERIODOS)

Kepler descubrió su tercera ley nueve años después de descubrir la primera y segunda ley, esto es entendible dado que una simple comparación de los datos astronómicos no induce a esta ley, aunque la comparación de los datos indicaba que los planetas más alejados (con mayor radio de giro) tienen un mayor periodo orbital (tiempo que emplea en dar una vuelta alrededor del Sol), no es fácil notar cómo estos se relacionan. Luego de una serie de pacientes y constantes intentos, Kepler logró descubrir que para cualquier planeta, el cociente de dividir el cuadrado de su período orbital entre el cubo de su radio medio es una constante.



donde R es semieje mayor de la elipse o radio medio.

$$\boxed{R=\frac{a+b}{2}}$$

Entonces

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3}=k=\text{cte.}}$$ T: periodo orbital

Para sistemas donde la masa de la estrella es muy superior a la de los planetas que lo orbitan, la constante (k) solo depende de la masa de la estrella como el caso de nuestro sistema solar. Aplicando las leyes de Newton y la ley de la gravitación, que estudiaremos más adelante, se demuestra que

$$k=\frac{4\pi^2}{GM_{Sol}}=2{,}989\times10^{-19}\ \text{s}^2/\text{m}^3$$

donde G es constante de gravitación.

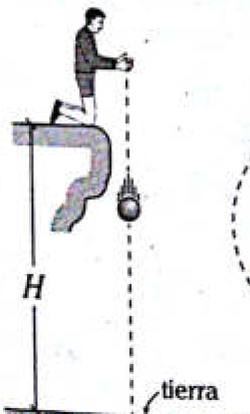
Para el caso de dos planetas que orbitan alrededor del Sol, con radios medios R_A y R_B, se tendrá

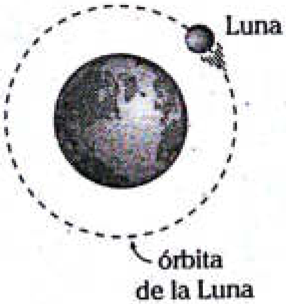
$$\frac{T_A^2}{R_A^3}=\frac{T_B^2}{R_B^3}=k$$

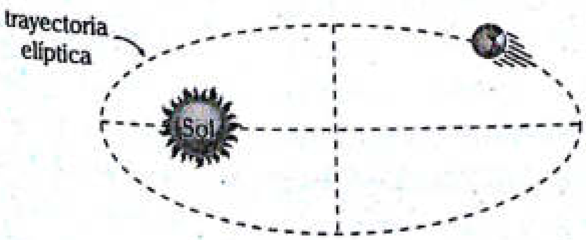
Esta ley también es válida para satélites que orbitan alrededor de un planeta. En ese caso la constante (k) depende de la masa del planeta.

3. Ley universal de la gravitación

El concepto de gravedad se conoció antes que Newton estableciera la ley de la gravitación; por ejemplo, Galileo ya había estudiado la caída de los cuerpos. El gran acierto de Newton fue establecer que los cuerpos que se precipitan a tierra, la Luna orbitando alrededor de la Tierra, los planetas moviéndose alrededor del Sol, son todas manifestaciones de una atracción universal que experimentan los cuerpos. Extendió el concepto de gravedad a todo el universo.

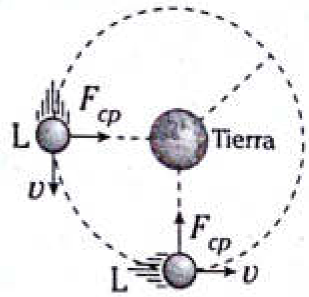






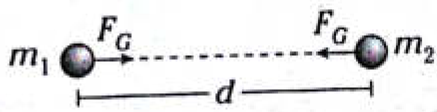
Todos estos fenómenos se rigen por la misma ley.

Newton estudió el movimiento de la Luna en torno a la Tierra aplicando sus tres leyes del movimiento.



Además, encontró que las aceleraciones están en proporción inversa con el cuadrado de las distancias medidas desde el centro de la Tierra. Con eso comprobó que las fuerzas de atracción en ambos casos son de la misma naturaleza y son ejercidas por la Tierra y obedecen a la misma ley del cuadrado de la distancia. Además, de acuerdo con su segunda ley, esa fuerza de atracción es igual al producto de la masa por la aceleración, por lo que estableció que la fuerza de atracción también depende de la masa y, por último, de acuerdo con su tercera ley esa atracción es recíproca. Generalizando estos resultados planteó que dos cuerpos debido a sus masas experimentan una atracción mutua, a la que llamó **interacción gravitatoria**. La fuerza de atracción que se ejercen la denominó **fuerza gravitatoria** $(\vec{F}_G)$ tal que el módulo de la fuerza gravitatoria entre dos partículas es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

Según esto



$$F_G=\frac{Gm_1m_2}{d^2}$$

donde

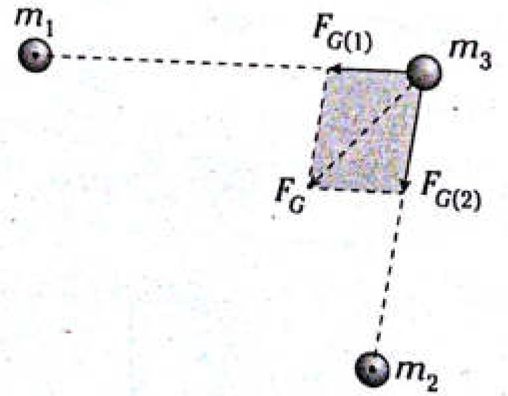
- m_1 y m_2: masas (kg)
- d: distancia (m: metros)
- G: constante de gravitación universal
  $G=6{,}67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$

$\rightarrow$ F_G: en newton (N)

La ley de la gravitación es válida para partículas, es decir, para cuerpos cuyas dimensiones sean pequeñas comparadas con las distancias que las separa. La distancia se mide entre sus centros de masa. Esto es aplicable a la Tierra y la Luna o al Sol y cualquier planeta que lo orbita. También se aplica a la Tierra y cualquier objeto de dimensiones y masa muy pequeñas comparadas con ella; por ejemplo, un auto, un avión o un satélite artificial.

4. Principio de superposición para la ley de la gravitación

Un objeto entre la Tierra y la Luna puede experimentar simultáneamente las atracciones gravitatorias de ambos. En ese caso, la fuerza gravitatoria que experimenta el objeto es la resultante de las fuerzas gravitatorias que la Tierra y la Luna ejercen por separado (principio de superposición). Esto se puede generalizar para cualquier sistema de partículas separadas en el espacio (distribución discreta) como el que se muestra:



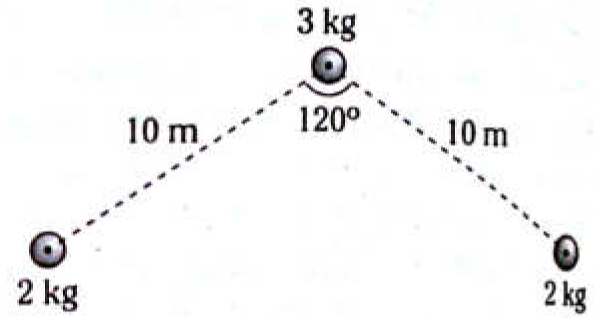
Vectorialmente, se verifica

$$\boxed{\vec{F}_G=\vec{F}_{G(1)}+\vec{F}_{G(2)}}$$

donde $\vec{F}_G$ es la fuerza gravitatoria resultante.

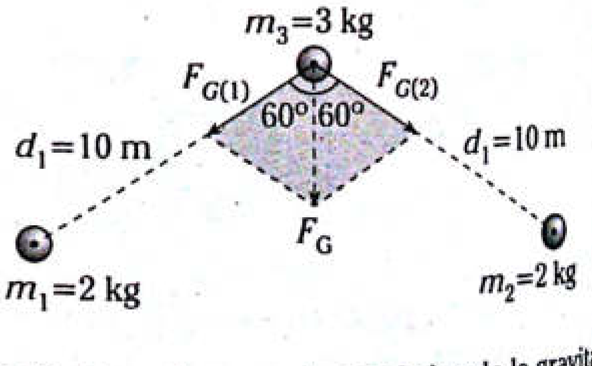
Aplicación 2

En el instante mostrado, determine el módulo de la fuerza gravitatoria que experimenta la partícula de 3 kg.



Resolución

Graficamos las fuerzas gravitatorias que las partículas de 2 kg ejercen a la partícula de 3 kg y graficamos la fuerza gravitatoria resultante $(\vec{F}_G)$ aplicando el método del paralelogramo.



En este caso, de acuerdo con la ley de la gravitación, los módulos de $\vec{F}_{G(1)}$ y de $\vec{F}_{G(2)}$ son iguales porque se tiene iguales masas e iguales distancias. Además es conocido que con el ángulo de 120° y módulos iguales, el módulo de la fuerza gravitatoria resultante es igual al módulo de una de ellas.

$\rightarrow\quad F_G=F_{G(1)}=F_{G(2)}$

Aplicamos la ley de la gravitación para m_1 y m_3.

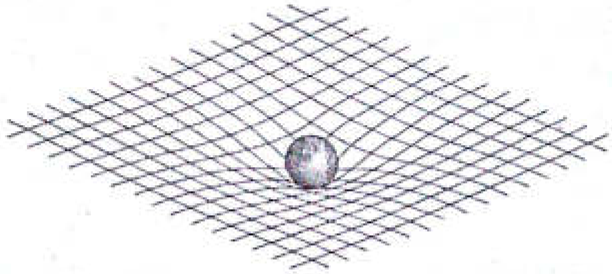
$$F_G = G\frac{m_1 m_3}{d_1^2}$$

$$F_G = \frac{6,67\times10^{-11}\times2\times3}{10^2}$$

$$F_G = 40,02\times10^{-13}\ \text{N}$$

5. Campo gravitatorio

La fuerza gravitatoria surge sin que exista contacto entre los cuerpos. El Sol y la Tierra están separados aproximadamente 150 millones de kilómetros y aun así, la fuerza gravitatoria que ejerce el Sol mantiene a la Tierra orbitando alrededor de él. ¿Cómo se explica esta acción a distancia? Es necesario un agente transmisor de estas acciones entre dos cuerpos que interactúan sin contacto. Así como dos objetos que flotan en reposo en el agua de un tanque, si movemos uno de ellos, el otro luego de un tiempo también se moverá, en este caso el agua es el agente transmisor de esta acción de un objeto hacia el otro; la transmisión de la acción implica una alteración del estado de reposo del agua. Análogamente, el espacio en la que se encuentran dos cuerpos como el Sol y la Tierra es el agente transmisor de las acciones que ambos se ejercen, de alguna forma el espacio se altera por la presencia de estas dos masas y esa alteración permite su interacción. Actualmente la teoría de la relatividad de Albert Einstein explica esta atracción gravitatoria como una consecuencia natural de la deformación del espacio-tiempo debido a una masa. Las masas le dan forma al espacio-tiempo y esa forma determina el movimiento de esas masas. A esa deformación del espacio que hace posible la interacción gravitatoria entre dos cuerpos, se denomina campo gravitatorio.

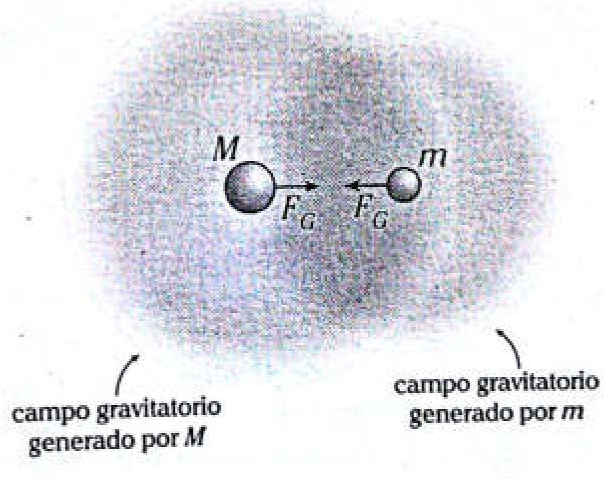


Analogía bidimensional de la distorsión del espacio-tiempo debido a un objeto de gran masa

Actualmente, el conocimiento de las propiedades del espacio es limitado, está en estudio, algunas son medibles. Se sabe que el espacio contiene una forma de materia no visible con propiedades diferentes a la materia sustancial (sólido, líquido o gas). Por ello, el campo gravitatorio al ser una deformación del espacio tiene base material.

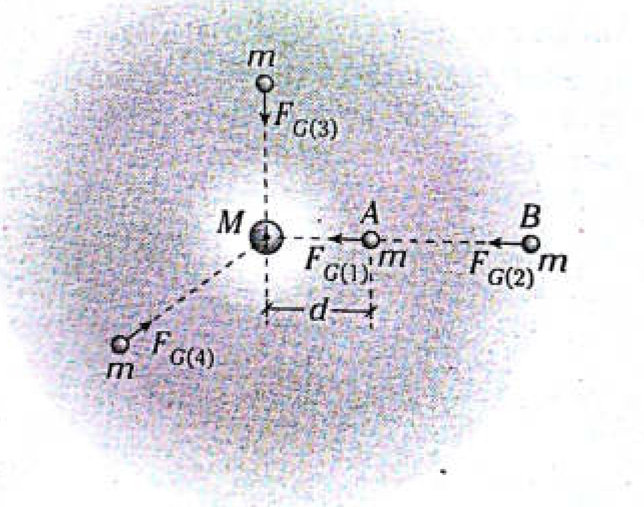
5.1. INTENSIDAD DE CAMPO GRAVITATORIO

Un cuerpo debido a su masa M modifica el espacio, generando a su alrededor un campo gravitatorio, el cual se percibe por la acción sobre otra masa m.



Igualmente la masa m genera en torno suyo un campo gravitatorio, el cual se percibe por su acción sobre la masa M. Observe que las masas no interactúan directamente, lo hacen a través de sus campos gravitatorios, es decir, los campos son los que actúan directamente sobre las masas, por ello se dice que los campos son los que ejercen fuerzas sobre las masas. Así como en el ejemplo de los dos objetos que flotan en el agua, la acción del uno sobre el otro se transmite a través del agua y es el agua el que actúa directamente sobre el otro. Así el campo gravitatorio de M ejerce una fuerza gravitatoria a m, y el campo gravitatorio de m lo ejerce sobre M.

En el espacio que rodea a M y m existe un campo resultante. El campo de uno distorsiona el campo del otro. Para estudiar solo al campo de M es necesario que la masa m sea pequeña comparada con M, para que no distorsione mucho al campo de M. Por ejemplo, esto ocurre cuando estudiamos el campo gravitatorio del Sol, la masa total de todos los planetas que lo orbitan es mucho menor que su masa. Llamaremos a m la masa de prueba, la cual ubicamos en diferentes puntos alrededor de M, tal como se muestra:



El campo gravitatorio de M ejerce a m fuerzas de diferentes intensidades de acuerdo a su distancia respecto de M; más cerca a M el campo actúa con más intensidad. Para un punto específico (A), donde la distancia d es grande comparada con las dimensiones de las masas, se tiene

$$F_{G(1)} = G\frac{Mm}{d^2}$$

Siendo G, M y d constantes, la fuerza gravitatoria solo depende del valor de m, es decir,

$$F_{G(1)} \text{ D.P. } m$$

El cociente es una constante propia del punto A; esta constante no solo tiene un valor, también tiene una dirección igual a la dirección de la fuerza gravitatoria en ese punto. Para otro punto B, se tiene otra constante y así para cada punto. En algunos puntos pueden coincidir en valor pero no en dirección. Esa constante viene a ser entonces una **magnitud vectorial** que caracteriza a cada punto del espacio donde existe un campo gravitatorio y se denomina **intensidad de campo gravitatorio** $(\vec{g})$; se define como

$$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m}}$$

donde las unidades son

- $\vec{F}_G$: en Newton (N)
- m: en kilogramos (kg)
- $\vec{g}$: en N/kg < > m/s^2

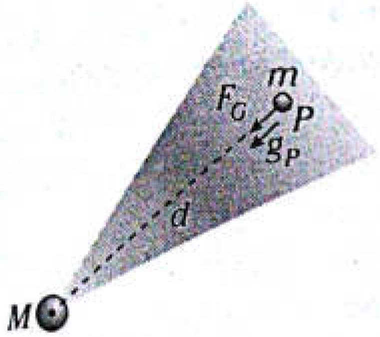
Las unidades de $\vec{g}$ tienen un doble significado:

- En un punto, el valor o módulo de $\vec{g}$ nos indica la fuerza por unidad de masa que el campo gravitatorio ejercerá a una masa de prueba colocada en ese punto.
- También nos indica la aceleración que el campo gravitatorio causará a una masa de prueba abandonada en dicho punto. Es lo que ya conocíamos como **aceleración de la gravedad**.

De la definición, se tiene que en cualquier punto del espacio

$$\boxed{\vec{F}_G = m\vec{g}}$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton, si la $\vec{F}_G$ es una fuerza resultante para la masa m, esta experimentará una aceleración igual a $\vec{g}$. Esto también significa que $\vec{g}$ y $\vec{F}_G$ siempre tienen igual dirección, como se muestra:



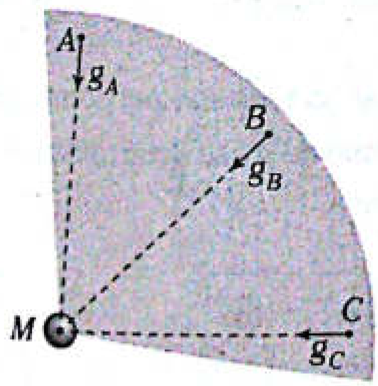
Para la posición P, la fuerza gravitatoria es

$$F_G = G\frac{Mm}{d^2}$$

Por definición, el módulo de $\vec{g}_P$ es

$$g_P = \frac{F_G}{m} = \frac{G\frac{M\cancel{m}}{d^2}}{\cancel{m}} \rightarrow \boxed{g_P = G\frac{M}{d^2}}$$

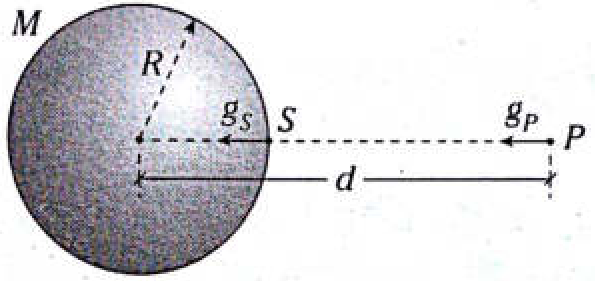
Este resultado nos indica que la intensidad de campo gravitatorio $(\vec{g})$ en un punto del espacio es independiente de la masa de prueba que se coloque en dicho punto. De esta forma a cada punto del espacio, donde exista un campo gravitatorio, le asignamos una intensidad de campo gravitatorio sin necesidad de ubicar una masa de prueba, tal como se muestra.



Las intensidades de campo se grafican en las rectas radiales que une a los puntos con el *CM* de la masa *M*. Son vectores entrantes a *M*.

La relación anterior para la intensidad de campo salió de la ley de gravitación, por lo cual es válida solo para distancias grandes comparadas con la dimensión de la masa *M*, es decir, para partículas.

Sin embargo, esa relación también se puede aplicar a cuerpos esféricos homogéneos como el que se muestra a continuación:



Se comprueba mediante el cálculo integral:

$$\boxed{g_P = G\frac{M}{d^2}}$$

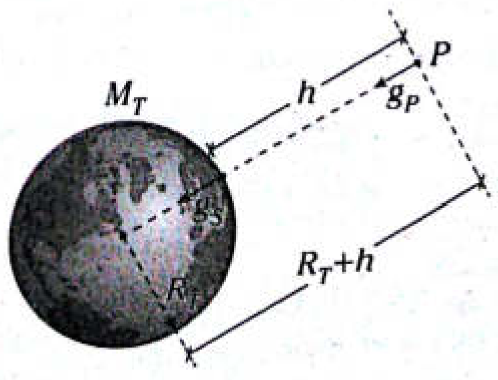
Esta relación sugiere que toda la masa de la esfera homogénea está concentrada en su centro y que el campo gravitatorio exterior a ella es semejante al de una partícula de igual masa ubicada en su centro.

En la superficie de la esfera: $d=R$, se tiene

$$\boxed{g_S = G\frac{M}{R^2}}$$

Como se nota, d se mide a partir del centro de la esfera.

Por ejemplo, si consideramos a la Tierra un cuerpo esférico y homogéneo



A una altura h sobre la superficie, se tendrá

$$g_P = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2}$$

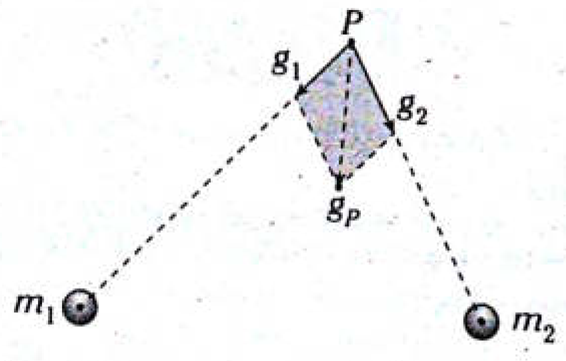
En las inmediaciones de la superficie terrestre ($h << R_T$), tendremos

$$g_S = \frac{GM_T}{R_T^{\,2}} = \frac{(6{,}67\times10^{-11})(6\times10^{24})}{(6{,}4\times10^{6})^2} = 9{,}8\ \text{m/s}^2$$

La intensidad de campo gravitatorio es igual a la aceleración de la gravedad para cuerpos que experimentan caída libre cerca de la superficie de la Tierra.

6. Principio de superposición

Si en el espacio hay dos o más partículas separadas (distribución discreta), donde ninguna de sus masas es despreciable, la intensidad de campo en un punto es la resultante de las intensidades de campo que cada partícula por separado origina en dicho punto, es decir, las intensidades de campo se superponen (se suman vectorialmente). Por ejemplo



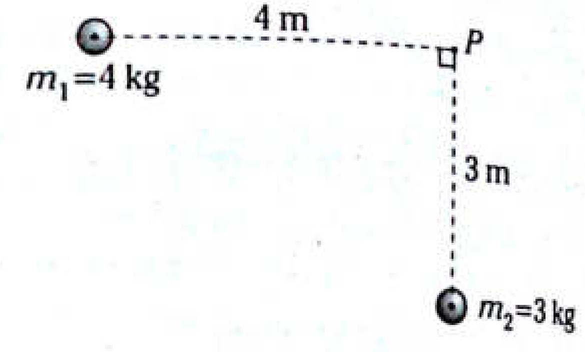
Vectorialmente, se verifica

$$\boxed{\vec{g}_P = \vec{g}_1 + \vec{g}_2}$$

donde $\vec{g}_P$ representa la intensidad de campo gravitatorio resultante en el punto P.

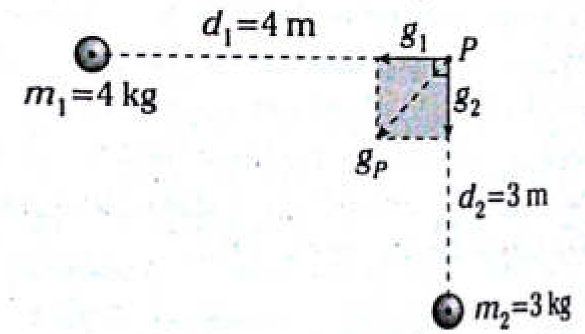
Aplicación 3

Dado el siguiente sistema de partículas, determine el módulo de la intensidad de campo gravitatorio en P en el instante mostrado.



Resolución

Graficamos la intensidad de campo de cada partícula en el punto P y graficamos la intensidad de campo resultante, aplicando el método del paralelogramo.



En este caso $\vec{g}_1$ y $\vec{g}_2$ son perpendiculares por lo que el módulo de $\vec{g}_P$ se determina con el teorema de Pitágoras

$$g_P = \sqrt{(g_1)^2 + (g_2)^2} \qquad \text{(I)}$$

Los módulos de $\vec{g}_1$ y $\vec{g}_2$ se determinan aplicando la relación de la intensidad de campo gravitatorio

$$g_1 = G\frac{m_1}{(d_1)^2} = G\frac{4}{4^2} = \frac{G}{4}$$

$$g_2 = G\frac{m_2}{(d_2)^2} = G\frac{3}{3^2} = \frac{G}{3}$$

Reemplazamos en (I).

$$g_P = \sqrt{\left(\frac{G}{4}\right)^2 + \left(\frac{G}{3}\right)^2} \rightarrow g_P = \frac{5G}{12}$$

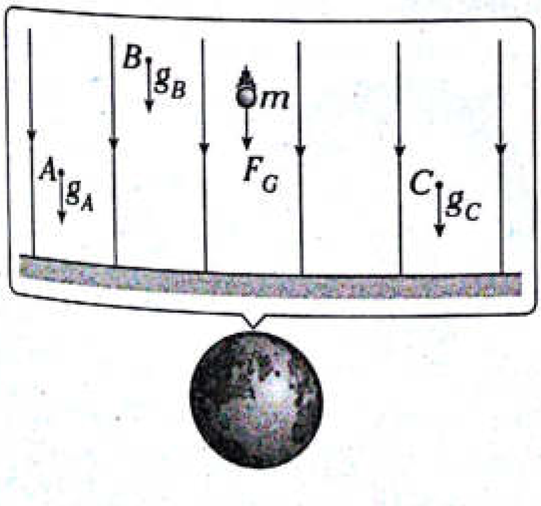
Reemplazando $G=6{,}67\times10^{-11}\ \mathrm{N{\cdot}m^2/kg^2}$, se tiene

$$g_P = \frac{5(6{,}67\times10^{-11})}{12} = 2{,}78\times10^{-11}\ \mathrm{m/s^2}$$

7. Campos gravitatorios

7.1. CAMPO GRAVITATORIO HOMOGÉNEO

En general la intensidad de campo gravitatorio varía para cada punto del espacio; sin embargo, al considerar regiones pequeñas del espacio como las que están cercanas a la superficie terrestre, donde la altura es pequeña comparado con el radio de la Tierra ($h << R_T$), la intensidad de campo de la Tierra no cambia de manera apreciable y se puede considerar constante, en módulo y dirección, en todos los puntos de esa región. El módulo ya se determinó anteriormente como 9,8 m/s^2. En esas regiones las líneas de fuerza, que son radiales, llegan paralelas a la superficie terrestre e igualmente distanciadas, como se muestra:



Se tiene $\vec{g}_A = \vec{g}_B = \vec{g}_C = \vec{g} = \text{cte}$.

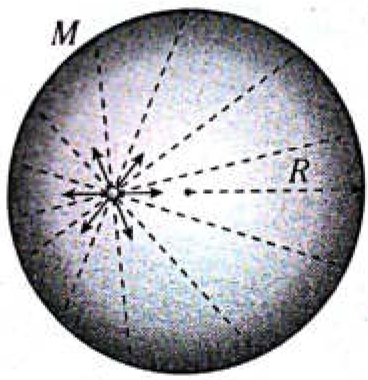
Por ello se dice que el campo gravitatorio con esa forma de líneas es homogéneo o uniforme.

La fuerza gravitatoria $(\vec{F}_G)$ que experimenta una masa de prueba m en el campo homogéneo es constante en módulo y dirección, ya que, por definición, $\vec{F}_G = m\vec{g}$.

Este tipo de campo gravitatorio es el que se ha estado considerando de forma implícita en la mayoría de temas de física.

7.2. CAMPO GRAVITATORIO EN EL INTERIOR DE UNA ESFERA HOMOGÉNEA HUECA

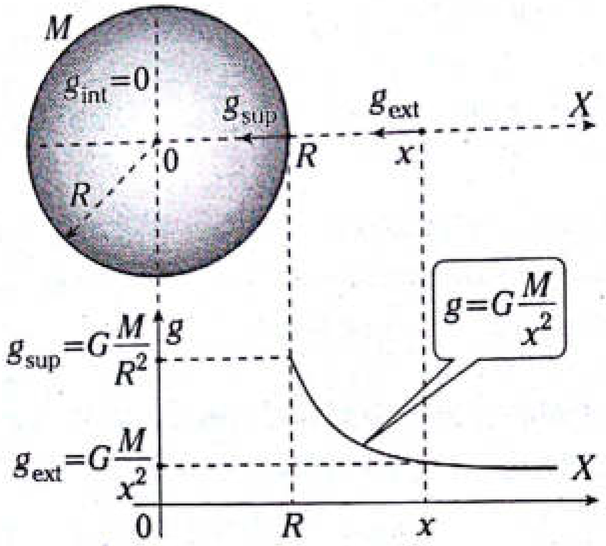
En el interior de una esfera homogénea hueca no hay masa, toda su masa está en su superficie. Una partícula dentro de ella estaría rodeada de toda esa masa, cada pequeña porción de masa de la esfera la atraería hacia su lado y de acuerdo con el principio de superposición la fuerza gravitatoria sobre la partícula sería la fuerza resultante de todas esas fuerzas, tal como se muestra



Se demuestra que estas fuerzas se anulan entre sí, es decir, la fuerza gravitatoria resultante sobre la partícula es nula.

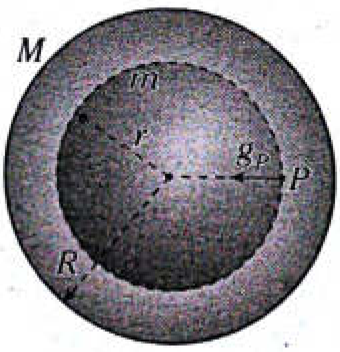
Por lo tanto, la intensidad de campo gravitatorio en puntos interiores a un cascarón esférico también es nula.

El cascarón presenta una intensidad de campo gravitatorio a partir de su superficie hacia afuera. La forma como varía depende del cuadrado de la distancia al centro, como ya se explicó anteriormente. La siguiente gráfica muestra como varía el módulo de la intensidad de campo gravitatorio a lo largo del eje X positivo.



7.3. CAMPO GRAVITATORIO EN UNA ESFERA HOMOGÉNEA COMPACTA

Ocurre algo diferente en el interior de una esfera homogénea y compacta de masa M y radio R.



El punto P a la distancia r del centro es un punto superficial de la esfera de radio r, por lo que en este punto hay una intensidad de campo gravitatorio diferente de cero debido a esa esfera. Sin embargo, el punto P al ser un punto interior a la masa restante, que es un cascarón de espesor $(R-r)$ su intensidad de campo es nula debido a ese cascarón. En consecuencia, la intensidad de campo del punto P es

$$g_P=G\frac{m}{r^2} \qquad (*)$$

donde m es la masa de la esfera de radio r.

Si la esfera es homogénea la masa m es directamente proporcional a su volumen. Como el volumen de una esfera depende de su radio al cubo, se tiene

$$\frac{m}{r^3}=\frac{M}{R^3} \rightarrow m=\frac{Mr^3}{R^3}$$

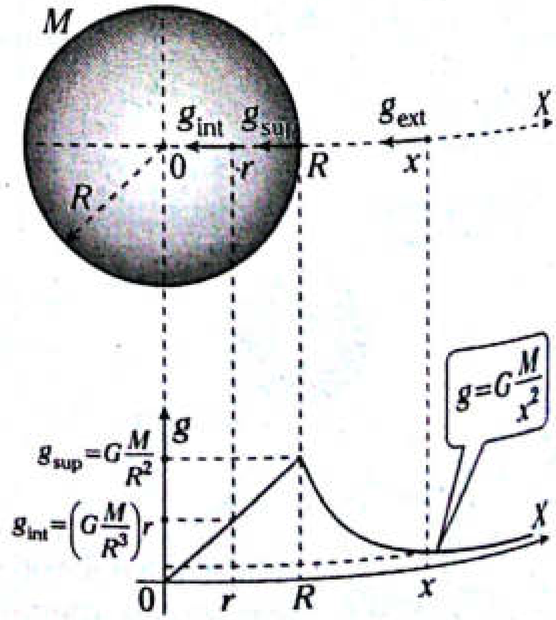
Reemplazamos en (*).

$$g_P=\frac{G}{r^2}\left(\frac{Mr^3}{R^3}\right) \rightarrow \boxed{g_P=\left(\frac{GM}{R^3}\right)r}$$

El término entre paréntesis es constante, por lo que g_P aumenta linealmente con la distancia r desde el centro.

- En el centro, $r=0$: $g_P=0$
- En la superficie, $r=R$: $g_P=G\frac{M}{R^2}$

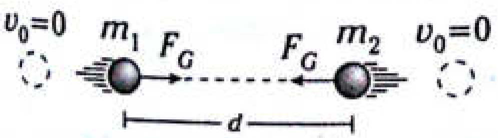
Para puntos externos a la esfera compacta la intensidad de campo varía de igual forma a como varía en una esfera hueca. La siguiente gráfica muestra como varía el módulo de la intensidad de campo gravitatorio a lo largo del eje X positivo.



8. Energía potencial gravitatoria

En el tema de trabajo y energía se estudió la energía potencial gravitatoria (E_{PG}), la cual tenía un cuerpo en virtud de su capacidad para transferir movimiento debido a su interacción gravitatoria con la Tierra y a su altura medida respecto de un nivel de referencia (N.R.). Se vio que mientras el cuerpo está más separado de la Tierra (más altura) tiene más energía potencial gravitatoria. Esto mismo se puede generalizar para la interacción gravitatoria entre dos partículas. Debido a su atracción gravitatoria, para separar las dos partículas es necesario realizar trabajo mecánico y gastar energía, la cual necesariamente es ganada por el sistema de partículas o por los campos gravitatorios generados por ellas. Recordar que los campos gravitatorios son resultado de la deformación del espacio debido a las masas de las partículas y esta deformación cambia si las separamos, en este cambio de la forma del espacio se almacena energía, así como un resorte lo almacena al deformarse. A esta energía almacenada en el campo gravitatorio se denomina **energía potencial gravitatoria (E_{PG}).**

Esta energía puede ser liberada y transformarse en energía cinética cuando soltamos las partículas, tal como se muestra:



La atracción gravitatoria entre las partículas hace que aceleren y ganen energía cinética, esto demuestra que el sistema pierde otra forma de energía, que en este caso es la energía potencial gravitatoria (E_{PG}). Esta energía depende de las masas de las partículas y de su distancia de separación.

$$\boxed{E_{PG}^{\text{sistema}} = \frac{-Gm_1m_2}{d}}$$

Unidades:

- m_1 y m_2 en kg
- d en metros (m)

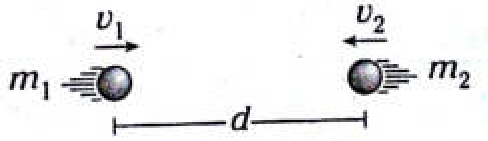
→ la E_{PG} en joule (J)

Observe que para una distancia d bastante grande (en el infinito), la $E_{PG} \approx 0$, esto se toma como nivel de referencia (N.R.). También observe que la E_{PG} es negativa, esto denota el carácter netamente atractivo de la interacción gravitatoria. El signo menos también nos hace ver que la E_{PG} aumenta con la distancia y se hace menos negativa, hasta que en el infinito se aproxima a su valor máximo que es cero.

9. Velocidades cósmicas

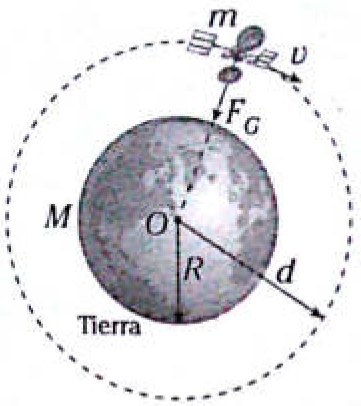
Dado que en el espacio solo se manifiestan fuerzas gravitatorias entre los cuerpos, la energía mecánica (E_M) de cualquier sistema aislado se conserva.

Para un sistema aislado de dos partículas



$$E_{M(\text{sist})} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2\right)}_{E_{C(\text{sist})}} + \underbrace{\left(-G\frac{m_1m_2}{d}\right)}_{E_{PG(\text{sist})}}$$

Si una de las partículas tiene una masa mucho mayor que la otra, se puede analizar el movimiento de la partícula de menor masa respecto de la de mayor masa, que la consideramos en reposo. Por ejemplo, la Tierra y un satélite artificial.



Los satélites artificiales pueden orbitar en trayectorias circunferenciales alrededor de la Tierra, tal que el centro de su trayectoria es prácticamente el centro de la Tierra. La E_M del sistema Tierra- satélite, sin considerar el movimiento de rotación de la Tierra es

$$E_{M(\text{sist})} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{d} \qquad \text{(I)}$$

Si el satélite se mueve en una órbita circunferencial, la fuerza gravitatoria es una fuerza centrípeta. Aplicando la segunda ley de Newton y la ley de la gravitación, se tiene

$$F_G = m.a_{cp}$$

$$G\frac{Mm}{d^2} = m\frac{v^2}{d}$$

$$mv^2 = G\frac{Mm}{d} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I).

$$\boxed{E_{M(\text{sist})} = -\frac{1}{2}\left(\frac{GMm}{d}\right)}$$

Indica que la energía mecánica es negativa. Este resultado se puede generalizar, recordando que una circunferencia es un caso particular de la elipse.

Todas las órbitas elípticas (cerradas) tienen una E_M negativa ($E_M < 0$), esto significa que la energía cinética dada al satélite no es suficiente para que venza la atracción gravitatoria de la Tierra y se aleje al infinito. La velocidad de lanzamiento del satélite para que orbite elípticamente se denomina **primera velocidad cósmica**. De la relación (II) se obtiene el valor de esta velocidad:

$$\boxed{v = \sqrt{G\frac{M}{d}} = \sqrt{gd}}$$

Donde g es el módulo de la intensidad de campo gravitatorio a la distancia d del centro de la Tierra.

Si la E_M es positiva ($E_M > 0$) el satélite puede vencer la atracción de la Tierra, llegar al infinito y tener aun energía cinética. La trayectoria es una curva abierta, y se puede demostrar que es una hipérbola.

Si la E_M es cero (E_M=0), la energía cinética del satélite alcanza a las justas para llegar al infinito, es decir, en el infinito llega al reposo (v=0). La órbita es también abierta, pero ahora es una parábola.

La velocidad de lanzamiento de un satélite para que se aleje definitivamente de la Tierra, describiendo trayectorias parabólicas o hiperbólicas, se denomina **segunda velocidad cósmica**; para esto la E_M en el instante del lanzamiento tiene que ser mayor o igual a cero ($E_M \geq 0$).

De la relación (I), se cumple

$$E_{M(sist)}=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{d}\geq 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2\geq G\frac{Mm}{d}$$

$$v\geq\sqrt{\frac{2GM}{d}}$$

$$\boxed{v\geq\sqrt{2gd}}$$

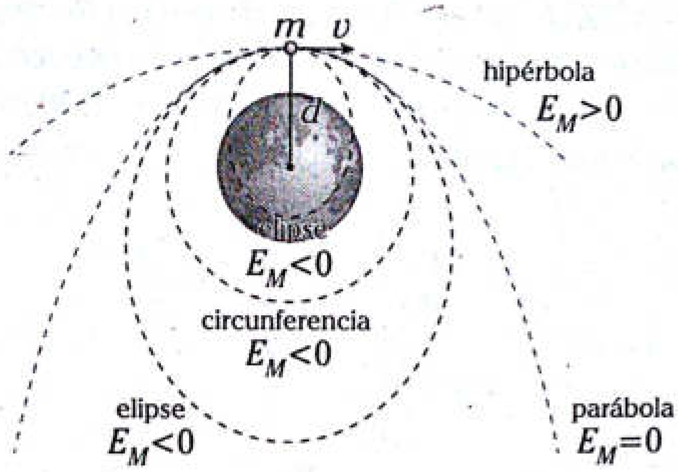
Para una trayectoria parabólica

$$v=\sqrt{2gd}$$

Para una trayectoria hiperbólica

$$v>\sqrt{2gd}$$

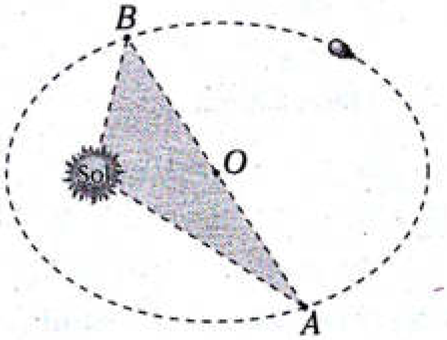
La siguiente figura muestra los tres casos posibles.



Hay una **tercera velocidad cósmica** que corresponde a la velocidad de lanzamiento, para lo cual el satélite abandona el sistema planetario solar, es decir, vence la atracción terrestre y solar. La trayectoria es también una hipérbola.

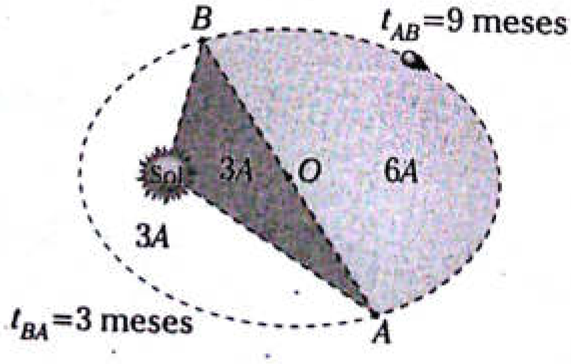
Problema N.º 1

En la gráfica, el periodo del planeta es de 12 meses. Cuando va de A hacia B lo hace en 9 meses. Determine qué porcentaje es el área sombreada respecto del área total de la elipse. Considere que O es el centro de la elipse.



Resolución

De acuerdo con la segunda ley de Kepler, las áreas barridas por el radio vector están en proporción directa con los tiempos transcurridos en barrerlas. Consideremos que por cada mes se barre un área A. En un periodo de 12 meses se barre un área 12 A. El segmento AB divide por la mitad a la elipse, ya que O es su punto medio; por lo cual cada mitad tiene un área de 6 A. Entonces, las áreas barridas quedan según se muestra a continuación:



$$\mathbb{A}_{\text{sombreada}}=3\,A$$

Comparamos el área total de la elipse.

$$\frac{\mathbb{A}_{\text{sombreada}}}{\mathbb{A}_{\text{total}}}=\frac{3\cancel{A}}{12\cancel{A}} \rightarrow \frac{\mathbb{A}_{\text{sombreada}}}{\mathbb{A}_{\text{total}}}=\frac{1}{4}$$

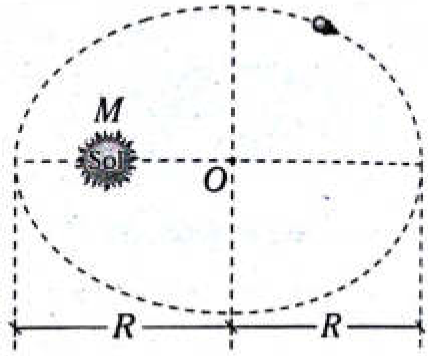
$\therefore\ \mathbb{A}_{\text{sombreada}}=25\%\,\mathbb{A}_{\text{total}}$

Problema N.º 2

Si utilizamos el periodo de la Tierra (1 año), el radio medio de su órbita ($1{,}5\times10^{11}$ m) y el valor de $G=6{,}67\times10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$, calcule aproximadamente la masa del Sol.

Resolución

Gráficamente.



Utilizamos la tercera ley de Kepler. la cual relaciona el periodo, el radio medio y la masa del Sol.

$$\rightarrow \quad \frac{T^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{GM}=\text{cte.}$$

donde R es el radio medio; y M, la masa del Sol.

Despejamos la masa del Sol.

$$M=\frac{4\pi^2R^3}{GT^2} \qquad (*)$$

De acuerdo a los datos tenemos

- $R=1{,}5\times10^{11}$ m
- $G=6{,}67\times10^{-11}$
- $\pi=3{,}14$
- $T=1\text{ año}=360\ \cancel{\text{días}}\left(\frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}}\right)\left(\frac{3600\text{ s}}{1\ \cancel{\text{h}}}\right)$

$T=31\,104\,000$ s

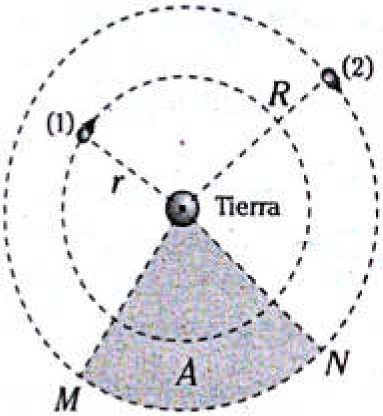
Reemplazamos en (*).

$$M=\frac{4(3{,}14)^2(1{,}5\times10^{11})^3}{(6{,}67\times10^{-11})(31\,104\,000)^2}$$

$\therefore\ M=2{,}06\times10^{30}$ kg

Problema N.º 3

El gráfico muestra un sistema planetario de dos planetas que orbitan circunferencialmente en torno a una estrella. Se sabe que el periodo del planeta (1) es de 2 años, y que el planeta (2) tarda en ir de M hasta N 4 años. Determine el área encerrada por la trayectoria del planeta (2) en términos del área sombreada A. ($R=4r$).



Resolución

Aplicando la segunda ley de Kepler para el planeta (2), siendo A_T el área encerrada por su trayectoria y su periodo T_2, se tiene

$$\frac{A_T}{T_2}=\frac{A}{t_{MN}}$$

Por dato, el $t_{MN}=4$ años, reemplazando y despejando A_T se tiene

$$A_T=\left(\frac{T_2}{4}\right)A \qquad (*)$$

Como se tiene el periodo del planeta (1) y la relación de radios, el periodo T_2 se puede determinar con la tercera ley de Kepler.

$$\frac{(T_2)^2}{R^3}=\frac{(T_1)^2}{r^3}$$

Por datos, $T_1=2$ años y $R=4r$. Reemplazamos

$$\frac{(T_2)^2}{64\,\cancel{r^3}}=\frac{2^2}{\cancel{r^3}} \rightarrow T_2=16 \text{ años}$$

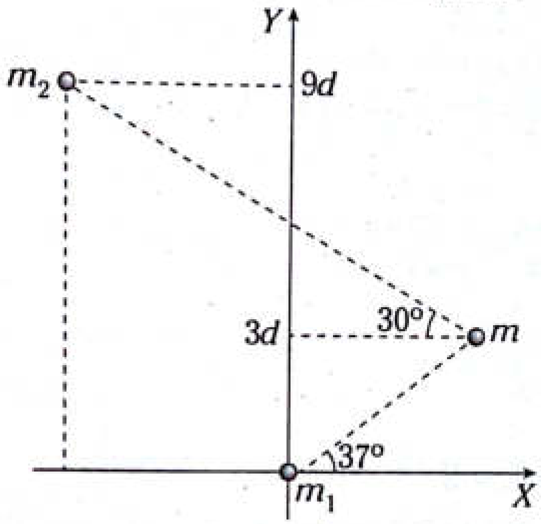
Reemplazamos en (*).

$$A_T=\left(\frac{16}{4}\right)A$$

$$\therefore\ A_T=4A$$

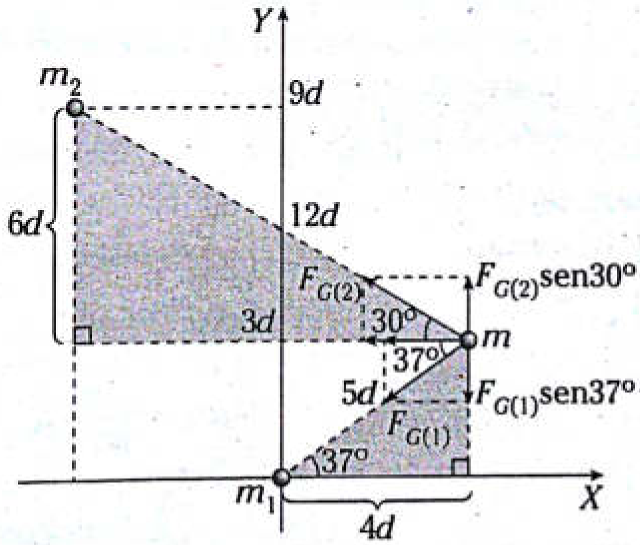
Problema N° 4

En la figura se muestran dos estrellas de masas m_1 y m_2, y un satélite de masa m. Determine la relación aproximada de m_1/m_2 si se sabe que la resultante de las fuerzas que ejercen las estrellas sobre el satélite es paralela al eje X.



Resolución

Cada estrella m_1 y m_2 le ejerce al satélite m una fuerza gravitatoria $\vec{F}_{G(1)}$ y $\vec{F}_{G(2)}$, respectivamente.



Por condición del problema, la resultante de estas fuerzas está en la dirección paralela al eje X, entonces al descomponerlas, las componentes paralelas al eje Y tienen que ser de igual módulo; luego, al sumar las componentes paralelas al eje X nos dará una resultante paralela al eje X.

$$\rightarrow\ F_{G(1)}\,\text{sen}\,37° = F_{G(2)}\,\text{sen}\,30°$$

Aplicando la ley de la gravitación, expresamos las fuerzas en términos de las masas y las distancias. Las distancias se determinan de los triángulos rectángulos notables que se forman.

$$\cancel{G}\frac{m_1\cancel{m}}{(5\cancel{d})^2}\operatorname{sen}37^\circ=\cancel{G}\frac{m_2\cancel{m}}{(12\cancel{d})^2}\operatorname{sen}30^\circ$$

$$\frac{m_1}{25}\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{m_2}{144}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{25\times 5}{144\times 2\times 3}$$

$$\therefore\quad \frac{m_1}{m_2}=0{,}14$$

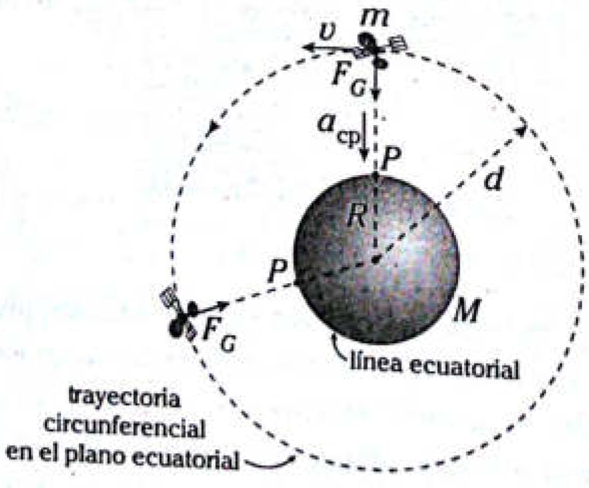
Problema N.º 5

Un satélite artificial es enviado al espacio para registrar las condiciones meteorológicas de un determinado lugar. ¿A qué distancia del centro de la Tierra debe orbitar? Considere

- ω: rapidez angular de la Tierra
- g: módulo de aceleración de la gravedad en la superficie terrestre
- R: radio de la Tierra

Resolución

Gráficamente



Para que un satélite artificial pueda registrar las condiciones meteorológicas de un determinado lugar de la Tierra (punto P), debe permanecer siempre a la misma distancia de ese lugar, es decir, para un observador en la Tierra el satélite no debe moverse (satélite geoestacionario). Dado que la Tierra tiene un movimiento de rotación uniforme con una rapidez angular ω, el satélite geoestacionario debe girar a la misma rapidez angular que la Tierra y en el plano ecuatorial.

La fuerza gravitatoria $(\vec{F}_G)$ que la Tierra ejerce al satélite actúa como fuerza centrípeta.

Aplicamos la segunda ley de Newton.

$$F_G=ma_{cp}$$

$$\rightarrow\quad F_G=m(\omega^2 d)$$

Aplicamos la ley de gravitación.

$$G\frac{\cancel{m}M}{d^2}=\cancel{m}(\omega^2 d)$$

Despejamos la distancia d.

$$d=\sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}$$

La respuesta debe estar en términos del módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie (g) y del radio terrestre (R); el producto GM no es dato. Para ello recordemos que en la superficie

$$g=G\frac{M}{R^2}\ \rightarrow\ \boxed{GM=gR^2}$$

Reemplazamos.

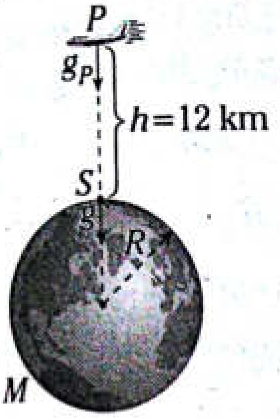
$$d=\sqrt[3]{\frac{gR^2}{\omega^2}}$$

Problema N.º 6

¿En cuánto se reduce, aproximadamente, la aceleración de la gravedad en un avión que vuela a una altura de 12 km comparada con la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra? Dé la respuesta en m/s^2. (Radio de la Tierra = 6370 km; g=9,81 m/s^2).

Resolución

Gráficamente,



La aceleración de la gravedad es menor en el punto P que en la superficie, ya que esta disminuye con la distancia al centro de la Tierra.

Nos piden $g-g_P$.

Del dato, en la superficie, g=9,81 m/s^2

En el punto P

$$g_P = G\frac{M}{(R+h)^2}$$

En el problema anterior se demostró que el producto GM es igual a gR^2. Reemplazamos

$$g_P = \frac{gR^2}{(R+h)^2} = g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

Reemplazamos los datos.

$$g_P = 9{,}81\left(\frac{6370\times \cancel{10}^3}{6370\times \cancel{10}^3 + 12\times \cancel{10}^3}\right)^2 = 9{,}77\,\text{m/s}^2$$

Finalmente, reemplazamos en lo que nos piden.

$g-g_P$=9,81−9,77

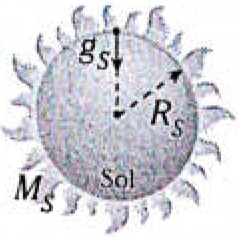
∴ $g-g_P$=0,04

Problema N.° 7

Calcule aproximadamente el valor de la aceleración de la gravedad solar en su superficie si el radio del Sol es 110 veces el radio de la Tierra y su masa es 330 000 veces la masa de la Tierra. (g=9,81 m/s^2)

Resolución

Gráficamente,



El módulo de la intensidad de campo gravitatorio (g_S) en la superficie del Sol es la siguiente:

$$g_S = G\frac{M_S}{R_S^2}$$

Por datos:

M_S=330 000 M

R_S=110 R

Donde M y R son la masa y radio de la Tierra. Reemplazamos.

$$g_S = G\frac{330\,000\,M}{(110\,R)^2}$$

$$g_S = \frac{300}{11}\left(G\frac{M}{R^2}\right)$$

El término entre paréntesis es el módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre (g=9,81 m/s^2)

Reemplazamos.

$$g_S = \left(\frac{300}{11}\right)(9{,}81)$$

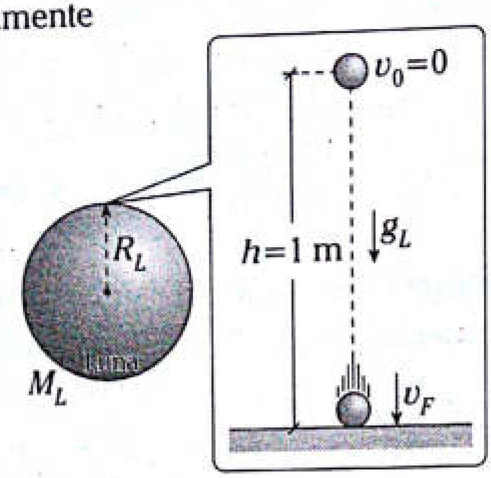
∴ g_S=267,5 m/s^2

Problema N.° 8

Un objeto pequeño, partiendo del reposo, cae desde una altura de 1 m sobre la superficie de la Luna. Calcule la velocidad final con la cual el objeto llega a la superficie de la Luna si la masa de esta es 0,01255 veces la masa de la Tierra y el radio promedio de la Luna es 0,27300 veces el radio promedio de la Tierra. Considere que la aceleración de la gravedad terrestre es 9,81 m/s^2.

Resolución

Gráficamente



Un cuerpo que cae en la Luna experimenta solo la fuerza gravitatoria de la Luna. Esto significa que está en caída libre, por lo que la aceleración que experimenta es igual a la aceleración de la gravedad $(\vec{g}_L)$ que produce la Luna. Como el cuerpo cae cerca de la superficie, a 1 m (mucho menor que el radio lunar), la aceleración de la gravedad es constante y su módulo es el siguiente:

$$g_L = G\frac{M_L}{R_L^2}$$

Según los datos

- $M_L=0{,}01255\,M_T$
- $R_L=0{,}27300\,R_T$

donde M_T y R_T son la masa y el radio de la Tierra.

Reemplazamos los datos.

$$g_L = G\frac{0{,}01255\,M_T}{(0{,}27300\,R_T)^2}$$

$$g_L = 0{,}16839\left(G\frac{M_T}{R_T^2}\right)$$

El término entre paréntesis es el módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre (g) el cual es dato: $g=9{,}81$ m/s^2.

Reemplazamos.

$$g_L=0{,}16839(9{,}81)$$

$$g_L=1{,}6519\ \text{m/s}^2$$

El cuerpo experimenta un movimiento de caída libre con la aceleración $\vec{g}_L$. Aplicando una ecuación del MRUV determinamos la rapidez con la cual llega a la superficie.

$$(v_F)^2 = \cancel{v_0^2} + 2ad$$

$$(v_F)^2 = 2g_Lh$$

$$\rightarrow\quad (v_F)^2 = 2(1{,}6519)(1)$$

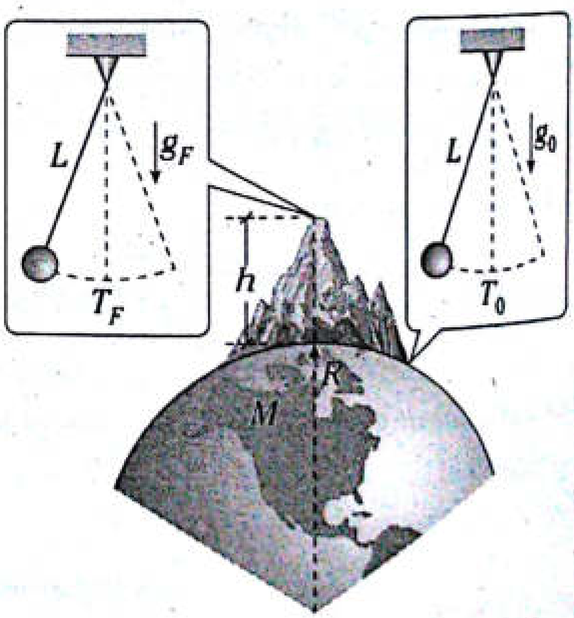
$$\therefore\quad v_F=1{,}82\ \text{m/s}^2$$

Problema N.° 9

Un péndulo simple se lleva a la punta de una montaña, observándose que su periodo aumenta en 0,02% respecto a su valor en la superficie terrestre. Determine la altura de la montaña respecto a la superficie terrestre. Considere que el radio terrestre es $R=6400$ km.

Resolución

Gráficamente



El periodo de un péndulo simple depende de su longitud y de la aceleración de la gravedad, según la relación

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

En el caso del problema, el péndulo se traslada de la superficie terrestre a la punta de una montaña. No varía su longitud pero el periodo varía porque varía la intensidad del campo gravitatorio $(\vec{g})$, dado que

$$g=G\frac{M}{d^2}$$

Donde d es la distancia desde el centro de la Tierra.

Reemplazamos en la relación del periodo.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{\left(G\frac{M}{d^2}\right)}} \rightarrow T=\underbrace{\left(2\pi\sqrt{\frac{L}{GM}}\right)}_{\text{constante}}d$$

El término entre paréntesis es una constante, por lo que el periodo (T) y la distancia (d) varían en igual proporción. Si el periodo aumenta en 0,02% respecto a su valor en la superficie terrestre, también la distancia aumenta en igual porcentaje respecto a la distancia en la superficie terrestre.

En la superficie de la Tierra: $d_0=R$

En la punta de la montaña: $d_F=R+h$

El aumento en la distancia es h. Como la distancia inicial es R, se tiene

$h=0{,}02\%\,R$

$h=0{,}02\%(6400 \text{ km})$

$\therefore\ h=1280 \text{ m}$

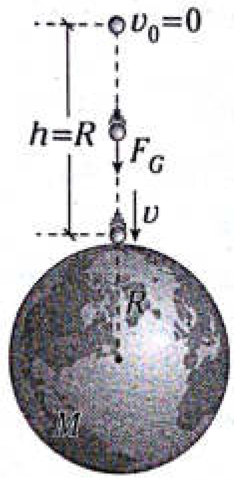
Problema N.° 10

Un cuerpo es soltado desde una altura equivalente al radio terrestre. ¿Con qué rapidez el cuerpo impactará en la superficie terrestre? Desprecie la fricción de la atmósfera. Dé la respuesta en términos de R y g. Considere

- R: radio terrestre
- g: módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre

Resolución

La Tierra se considera en reposo y respecto de ella el cuerpo cae aumentando su rapidez por la atracción terrestre.



Despreciando la fricción de la atmósfera, la única fuerza que actúa en el sistema cuerpo - Tierra es la fuerza gravitatoria por lo que la energía mecánica del sistema se conserva.

$$E_{M(0)}=E_{M(F)}$$

La $E_{M(0)}$ es donde soltamos al cuerpo. En ese instante solo hay energía potencial gravitatoria con una distancia igual a $2R$, por ello, se tiene

$$E_{M(0)}=-G\frac{Mm}{2R}$$

La $E_{M(F)}$ es en el instante que el cuerpo llega a la superficie de la Tierra con la rapidez v, el cuerpo tiene energía cinética y energía potencial gravitatoria con una distancia igual a R, por ello

$$E_{M(F)}=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{R}$$

Igualamos las dos energías.

$$-G\frac{M\cancel{m}}{2R}=\frac{1}{2}\cancel{m}v^2-G\frac{M\cancel{m}}{R}$$

Despejamos la rapidez v.

$$v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

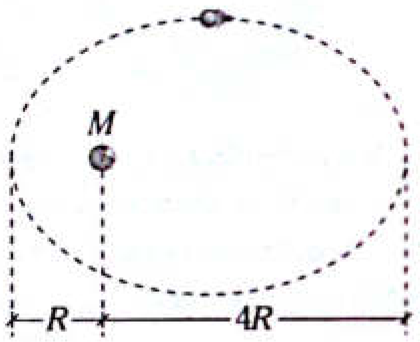
La respuesta debe quedar en términos de g y R, para ello recordemos que en el problema N.º 5 se demostró que el producto GM es igual a gR^2.

$$v=\sqrt{\frac{gR^2}{R}}$$

$$\therefore \quad v=\sqrt{gR}$$

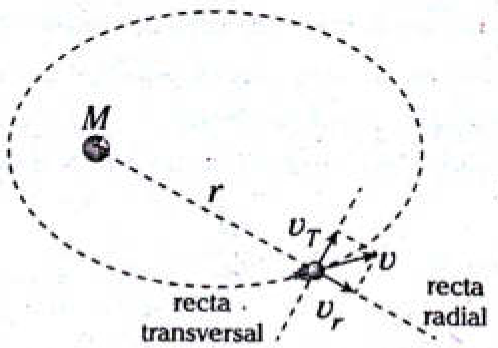
Problema N.º 11

Un planeta describe la trayectoria mostrada. Calcule su rapidez en el afelio.



Resolución

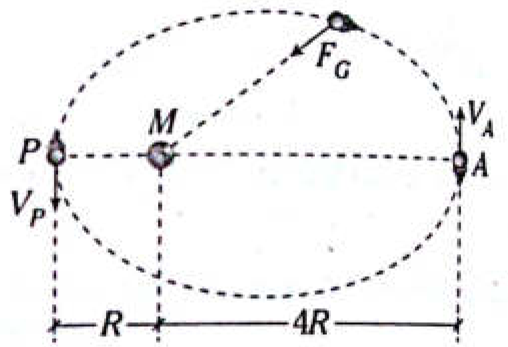
Hay una propiedad que se deduce a partir de la conservación de una magnitud denominada "cantidad de movimiento angular", que no se trata en este compendio; sin embargo, es necesario conocer la propiedad.



En cualquier punto de la trayectoria del planeta, la velocidad se puede descomponer en una velocidad radial $\vec{v}_r$ (en la recta radial) y una velocidad transversal $\vec{v}_T$ (en la recta transversal), tal que "el producto del módulo del radio vector (r) por la rapidez transversal (v_T) es una constante en todo el movimiento del planeta". Es decir

$$rv_T=\text{cte}.$$

Aplicamos esta propiedad al problema. Se tiene para los puntos del afelio y perihelio



Como $\vec{v}_P$ y $\vec{v}_A$ son velocidades transversales

$$\cancel{R}\ v_P=4\cancel{R}\ v_A$$

$$\rightarrow \quad v_P=4v_A \qquad \text{(I)}$$

Además, dado que en el sistema estrella-planeta solo actúa la fuerza gravitatoria, la energía mecánica del sistema se conserva, por ello mientras del afelio al perihelio el planeta gana energía cinética, a la vez el sistema pierde energía potencial gravitatoria, ya que disminuye la distancia entre el planeta y la estrella.

Igualamos las energías mecánicas en el afelio y perihelio.

$$E_{M(A)}=E_{M(P)}$$

$$(E_C+E_{PG})_{\text{afelio}}=(E_C+E_{PG})_{\text{perihelio}}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}(v_A)^2-G\frac{M\cancel{m}}{4R}=\frac{1}{2}\cancel{m}(v_P)^2-G\frac{M\cancel{m}}{R} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (I) en (II).

$$\frac{1}{2}(v_A)^2-\frac{1}{4}\left(G\frac{M}{R}\right)=8(v_A)^2-\left(G\frac{M}{R}\right)$$

$$\therefore \quad v_A=\sqrt{\frac{GM}{10R}}$$

NIVEL BÁSICO

1. Dados los siguientes enunciados con respecto a las leyes de Kepler, señale los enunciados correctos.
   I. La Tierra describe una órbita elíptica con el Sol en el centro de la elipse.
   II. El vector que va del Sol a la Tierra barre áreas iguales en tiempos iguales.
   III. El cubo del periodo de las órbitas de los planetas son proporcionales al cuadrado de sus radios medios.

   A) solo I B) solo II C) solo III
   D) I y III E) II y III

2. Una de las lunas de Júpiter, Ío, describe una órbita de radio medio $4{,}22\times10^8$ m y un periodo de $1{,}53\times10^5$ s. Calcule el radio medio, en metros, de otra de las lunas de Júpiter, Calisto, cuyo periodo es de $1{,}44\times10^6$ s.
   Dato: $(88{,}56)^{1/3}\approx4{,}45$

   A) $2{,}34\times10^7$
   B) $4{,}42\times10^8$
   C) $1{,}87\times10^9$
   D) $5{,}62\times10^{10}$
   E) $1{,}33\times10^{11}$

3. La magnitud de la fuerza de atracción gravitatoria entre dos partículas de masas m_1 y m_2 ($m_1>m_2$), separadas 20 cm es $1{,}0\times10^{-8}$ N. Si $m_1+m_2=5$ kg, calcule aproximadamente el cociente m_1/m_2.
   ($G=6{,}67\times10^{-11}$ $\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$)

   A) 1,1 B) 1,3 C) 1,5
   D) 2,5 E) 4,0

4. La distancia entre la Tierra y la Luna es d, entre sus centros. ¿A qué distancia del centro de la Tierra se debe ubicar un cuerpo de masa m para que se quede en reposo? Considere que la masa de la Tierra es aproximadamente 81 veces la masa de la Luna.

   A) $(0{,}09)d$ B) $(0{,}10)d$ C) $(0{,}12)d$
   D) $(0{,}16)d$ E) $(0{,}20)d$

5. ¿A qué altura respecto de la superficie terrestre el peso de una persona se hará la cuarta parte de su valor en la superficie? (R: radio terrestre)

   A) R B) $R/2$ C) $R/3$
   D) $R/4$ E) $2R$

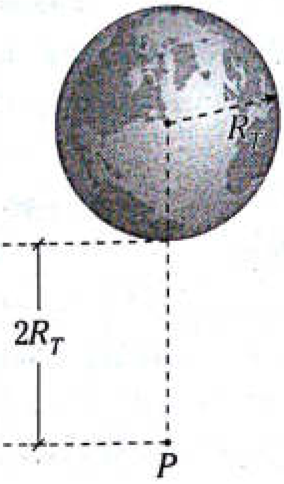
6. Si el radio de la Tierra es $R=6400$ km y en su superficie $g=10$ m/s^2, determine la rapidez de un satélite artificial que orbita circunferencialmente a la Tierra a una altura R respecto de su superficie.

   A) $\sqrt{2}$ km/s
   B) $2\sqrt{2}$ km/s
   C) $4\sqrt{2}$ km/s
   D) $5\sqrt{2}$ km/s
   E) $10\sqrt{2}$ km/s

7. Halle aproximadamente la altura h sobre la superficie de la Tierra, donde la aceleración de la gravedad es 1 m/s^2. Considere que el radio de la Tierra es R. ($g=9{,}81$ m/s^2).

   A) 2,1 R B) 4,4 R C) 6,2 R
   D) 8,7 R E) 12,1 R

8. Si el módulo de la aceleración de la gravedad cerca de la superficie de la Tierra es g_0, calcule la aceleración de la gravedad en P.



A) $g_0/2$ B) $g_0/3$ C) $g_0/5$
D) $g_0/6$ E) $g_0/9$

9. El periodo de un péndulo simple sobre la superficie de la Tierra es de 2,0 s. Calcule el periodo del mismo péndulo ubicado a una altura sobre la superficie de la Tierra, igual al radio de la Tierra.

A) 0,5 s B) 1,0 s C) 3,0 s
D) 4,0 s E) 5,0 s

10. Un péndulo simple en la Tierra bate segundos. Si dicho péndulo es llevado a un planeta que presenta 16 veces la masa de la Tierra y una densidad que es el doble de la densidad de la Tierra, ¿cuál es el nuevo periodo del péndulo?

A) 0,5 s
B) 1,0 s
C) 1,2 s
D) 1,5 s
E) 1,6 s

11. Calcule la mínima rapidez v que se debe dar a una partícula de masa m para que no regrese al planeta de radio R y masa M.

A) $\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$ B) $\sqrt{\dfrac{GM}{2R}}$ C) $\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$

D) $\sqrt{\dfrac{2GM}{3R}}$ E) $\sqrt{\dfrac{3GM}{2R}}$

NIVEL INTERMEDIO

12. Un escritor de ciencia ficción especula que la Tierra tiene un segundo satélite natural de igual masa que la Luna (Luna 2), y cuya órbita tiene un radio igual a la mitad del radio de la órbita de la Luna. Considerando que la Luna tiene un periodo de 28 días y que las lunas no interactúan, halle aproximadamente el periodo de la Luna 2, en días.

A) 4,2 B) 5,6 C) 8,4
D) 9,9 E) 12,6

13. Un satélite gira circunferencialmente en torno a la Tierra a una altura igual al radio terrestre (R). Calcule el periodo del satélite. Considere que en la superficie de la Tierra es $g=\pi^2$ m/s^2.

A) $\sqrt{2R}$ B) $4\sqrt{R}$ C) $4\sqrt{2R}$
D) $2\sqrt{R}$ E) $2\sqrt{2R}$

14. Sobre la superficie de un planeta, la aceleración de la gravedad es g_1, y a una altura h sobre la superficie es g_2. Halle el radio del planeta en función de la información dada.

A) $\dfrac{h}{\sqrt{\dfrac{g_2}{g_1}}-1}$

B) $\dfrac{h}{\sqrt{\dfrac{g_1}{g_2}}-1}$

C) $\dfrac{g_1 h}{g_1-g_2}$

D) $\dfrac{(g_1-g_2)h}{g_1}$

E) $\left(\sqrt{\dfrac{g_2}{g_1}}-1\right)h$

15. Supongamos que la masa de un planeta x es 300 veces la masa de la Tierra y que el peso de un objeto en la superficie de la Tierra es la tercera parte de su peso en la superficie del planeta x. Si d_x es el diámetro del planeta x y d_t es el diámetro de la Tierra, determine a qué es igual d_x/d_t.

A) $3\sqrt{10}$ B) $\sqrt{10}$ C) 10

D) $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ E) $\sqrt{\dfrac{10}{6}}$

16. Considere dos planetas A y B, de masas M_A y M_B y radios R_A y R_B, respectivamente. Se sabe que $M_B=2M_A$ y que la aceleración de la gravedad sobre la superficie de ambos planetas es la misma. Calcule R_B/R_A.

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3}$ E) 4

17. En una estación espacial, orbitando a poco más de 600 km de altura, llevaron un reloj de péndulo, pero notaron que se estaba atrasando. ¿Qué deberían hacer para evitar el atraso?

I. reducir la masa del péndulo
II. reducir la longitud del péndulo
III. aumentar la altura de la órbita de la estación

A) solo II B) solo I C) II y III

D) I y III E) solo III

18. Supongamos que el radio de la Tierra se reduce a la mitad, manteniendo su densidad promedio constante. Bajo esas condiciones, calcule el nuevo peso P' de un hombre de peso P en condiciones normales.

A) $2P$ B) P C) $P/2$

D) $P/4$ E) $P/8$

19. Un péndulo simple tiene un periodo de 1,5 s sobre la superficie de la Tierra. Cuando se le pone a oscilar en la superficie de otro planeta, el periodo resulta ser de 0,75 s. Si la masa de este planeta es 100 veces la masa de la Tierra, halle el cociente entre el radio del planeta y el radio de la Tierra (R_P/R_T).

A) 2 B) 3 C) 5

D) 7 E) 9

20. Calcule la energía mecánica del sistema formado por el planeta y el satélite de masa m y rapidez constante v si está orbitando circunferencialmente alrededor del planeta.

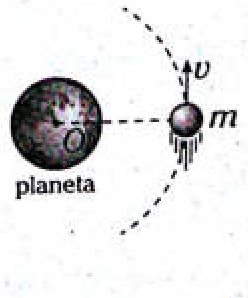
A) $-\dfrac{1}{2}mv^2$

B) $-mv^2$

C) 0

D) mv^2

E) $2mv^2$



Oscilaciones

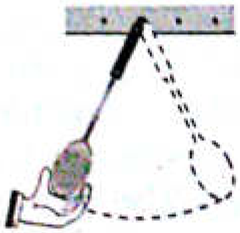
Capítulo XI

Objetivos

- Describir y resolver las ecuaciones del movimiento de un oscilador armónico.
- Utilizar adecuadamente la segunda ley de Newton y la conservación de la energía mecánica en osciladores y péndulos armónicos.
- Analizar el movimiento de un péndulo simple y sus aplicaciones.

1. Conceptos previos

Las oscilaciones las vemos en diversas situaciones, por ejemplo, cuando abandonamos un cucharón al colgarlo de un gancho.

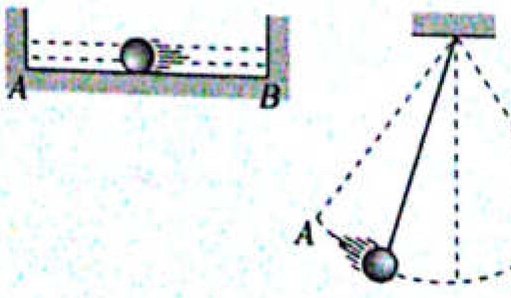


Para describir este tipo de movimientos, debemos conocer algunos aspectos previos.

1.1. MOVIMIENTO OSCILATORIO

Es aquel movimiento que se desarrolla sobre la misma trayectoria en ida y vuelta.

Ejemplos



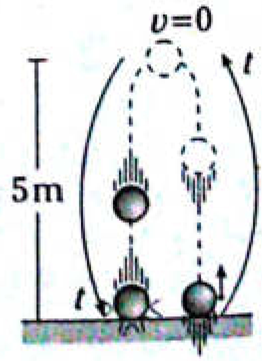
donde

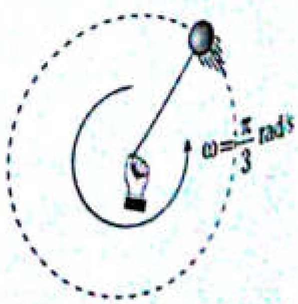
- A y B: extremos de oscilación
- $A \rightarrow B$ o $B \rightarrow A$: media oscilación u oscilación simple
- $A \rightarrow B \rightarrow A$: oscilación completa o, simplemente, oscilación

1.2. MOVIMIENTO PERIÓDICO

Es aquel movimiento repetitivo que se realiza en tiempos iguales, al que se denomina periodo (T).

Ejemplos





Choques elásticos

Por MVCL, t=1 s.

$\rightarrow$ T=2 s

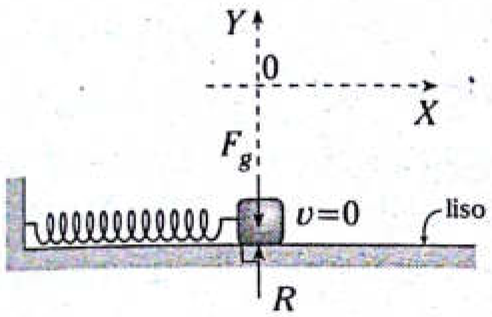
MCU

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{3}$$

$\rightarrow$ T=6 s

2. Oscilador armónico

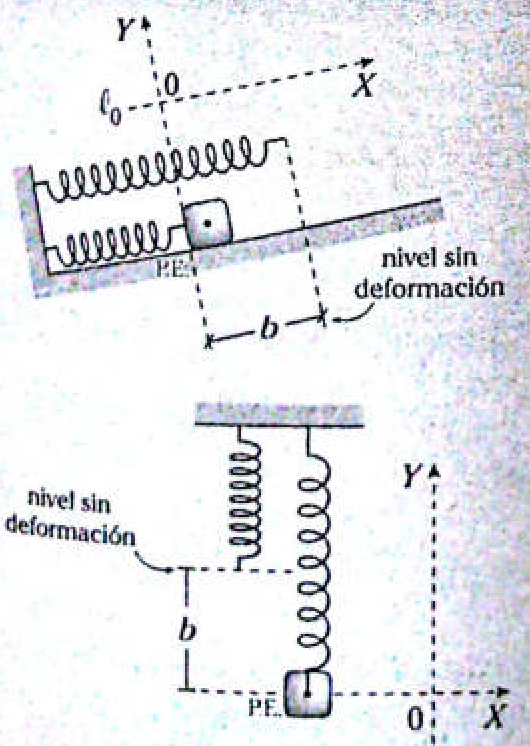
Es el sistema conformado por un resorte ideal y una masa puntual, libre de rozamiento.



Aquella posición donde la fuerza resultante es nula $(\vec{F}_{res}=0)$ se denomina posición de equilibrio (P.E.). En dicha posición se ubica el origen del sistema de coordenadas para analizar el movimiento que realiza el bloque.

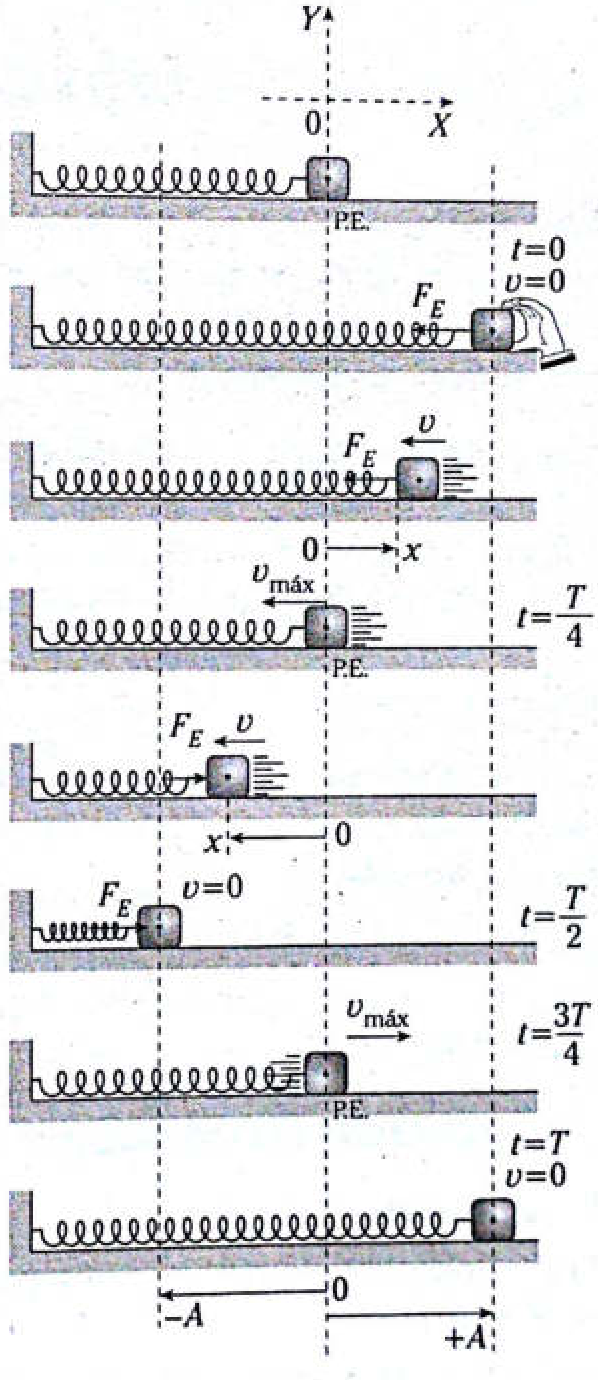
OBSERVACIÓN

El oscilador puede estar sobre un plano inclinado o incluso en un plano vertical.



donde b es la deformación del resorte en la P.E.

2.1. ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO QUE REALIZA EL OSCILADOR ARMÓNICO



Al desplazar el bloque hacia la derecha y luego abandonarlo, tenemos que

$$\vec{F}_{res}\neq 0$$

$$\vec{F}_{res}=\vec{F}_E$$

$$\boxed{\vec{F}_{res}=-K\vec{x}}$$

Solo en el oscilador horizontal, el módulo del vector posición coincide con la deformación del resorte.

El signo menos (–) expresa que la $\vec{F}_{res}$ tiende a hacer retornar el bloque a la P.E., por ello se denomina fuerza recuperadora.

Al abandonar el bloque, el sistema tiene energía, y el valor que toma $|\vec{x}|$ en ese instante es máximo y se denomina amplitud (A).

Cuando el bloque está en movimiento, vemos que es acelerado por la $\vec{F}_E$, que coincide con la $\vec{F}_{res}$ y tiene módulo variable hasta que, al pasar por la P.E., la $\vec{F}_{res}=0$. Por lo tanto, el bloque deja de acelerar (incrementa su rapidez) presentando su máxima velocidad.

Al continuar, el bloque es desacelerado, alejándose hacia la izquierda, como máximo, una longitud igual a la amplitud.

Todo lo acontecido de izquierda a derecha sucederá igual de regreso, debido a que la $\vec{F}_{res}$ en cada punto será igual.

2.2. CARACTERÍSTICAS DEL MOVIMIENTO

2.2.1. Por cinemática

- El movimiento se desarrolla en trayectoria rectilínea.
- El movimiento es oscilatorio y se realiza entre dos extremos que son

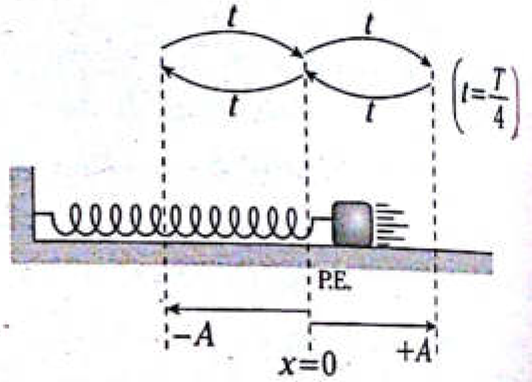
  $\vec{x}=+A$ y $\vec{x}=-A$

  A: amplitud de las oscilaciones

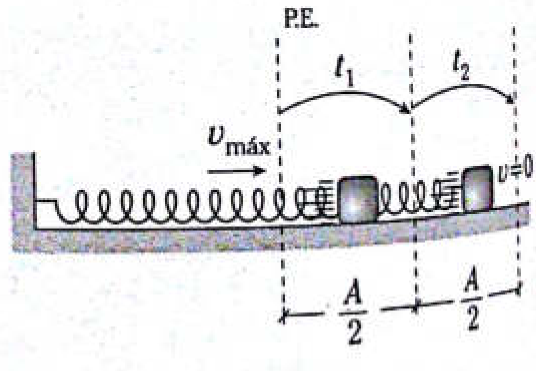
  Una oscilación es ida y vuelta, por lo tanto en cada oscilación el recorrido es

$$\boxed{e=4A}$$

- El movimiento es periódico, es decir, emplea iguales tiempos al completar cada oscilación. Y como el movimiento tiene las mismas características en la ida como en la vuelta, desde $\vec{x}=+A$ hasta $\vec{x}=-A$, se da media oscilación en un tiempo de $t=\frac{T}{2}$ (medio periodo); y desde $\vec{x}=\pm A$ hasta $\vec{x}=0$ o viceversa, se trata de un cuarto de oscilación en un tiempo de $t=\frac{T}{4}$ (un cuarto de periodo).



La distribución de tiempo a la mitad o cuarta parte del periodo se realiza por la simetría entre las posiciones $\vec{x}=0$, $\vec{x}=+A$ y $\vec{x}=-A$, por ello es falso lo siguiente:



$$t_1=t_2=\frac{T}{8} \text{ (falso)}$$

$$t_1<t_2 \text{ (verdad)}$$

Próximo a la P.E., la velocidad es mayor que cerca de los extremos de oscilación; por ello, al recorrer iguales tramos entre estos dos puntos $\left(\frac{A}{2}\right)$, se emplea menos tiempo cerca de la P.E.

2.2.2. Por dinámica

El bloque de oscilador realiza un movimiento que está gobernado por una $\vec{F}_{res}$ que es DP a la posición $\vec{x}$.

$$\boxed{\vec{F}_{res} = -K\vec{x}}$$

donde

- K: constante positiva que, al tener un resorte, coincide con la constante de rigidez del resorte.
- Si aplicamos la segunda ley de Newton, entonces

$$\underbrace{\vec{F}_{res}} = m\vec{a}$$

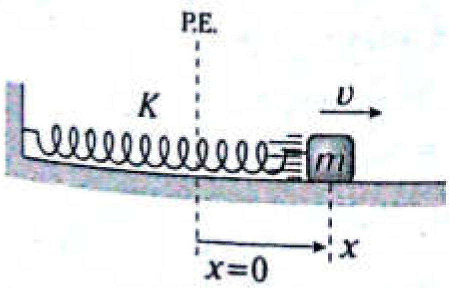
$$-K\vec{x} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = -\left(\frac{K}{m}\right)\vec{x}$$

Lo cual significa que el módulo de la $\vec{a}$ es DP al $|\vec{x}|$, que es la que describimos para la proyección del MCU; por lo tanto, usaremos la proyección del MCU para el análisis cinemático de oscilador armónico.

2.2.3. Por energía

Por ser un sistema libre de rozamiento, la energía mecánica se conserva.

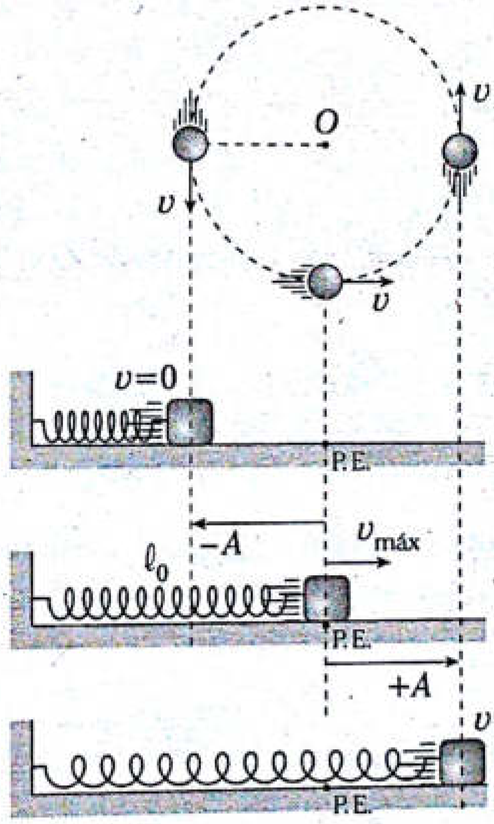


$$\boxed{E_M = E_C + E_{PE} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Kx^2}{2}}$$

- Si la E_C disminuye, entonces la E_{PE} aumenta.
- Si la E_C aumenta, entonces la E_{PE} disminuye.

Usando el MCU tenemos lo siguiente:

- radio$_{(MCU)}$=amplitud (A)
- El MCU debe ser en sentido antihorario.



E_C	E_{PE}
O	máx
máx	O
O	máx

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow \quad E_{C(máx)} = \dfrac{m \cdot v_{máx}^2}{2} \\ \rightarrow \quad E_{PE(máx)} = \dfrac{K \cdot A^2}{2} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{son iguales a}} E_M^{sist.}$$

Para el valor de la $E_M^{sist.}$ podemos usar

$$E_M^{sist.} = \frac{m \cdot v_{máx}^2}{2} = \frac{KA^2}{2} = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{Kx^2}{2}$$

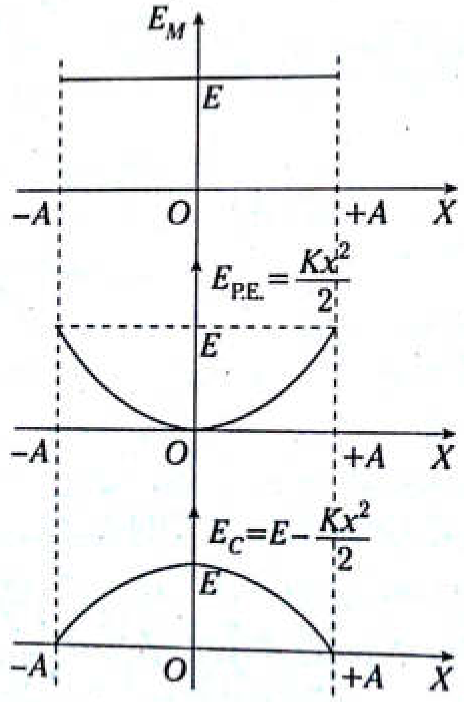
Con esto podemos entender el siguiente cuadro:

Posición $\vec{x}$	E_C	E_{PE}	$E_C^{\text{sist.}}$
O	E	O	E
$\pm A$	O	E	E
$\frac{A}{2}$	$\frac{3}{4}E$	$\frac{1}{4}E$	E
$\frac{2}{3}A$	$\frac{5}{9}E$	$\frac{4}{9}E$	E
$\frac{A}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}E$	$\frac{1}{2}E$	E

Si conocemos la posición $\vec{x}$ en función a una fracción de la amplitud (A), entonces la E_{PE} será dicha fracción al cuadrado multiplicado por la $E_M^{\text{sist.}}$.

$$\vec{x}=\pm nA \;\rightarrow\; E_{PE}=n^2E_M^{\text{sist.}}$$

Ahora elaboramos la gráfica E_M, E_{PE} y E_C versus la posición del bloque que está confinado entre $-A$ y $+A$.

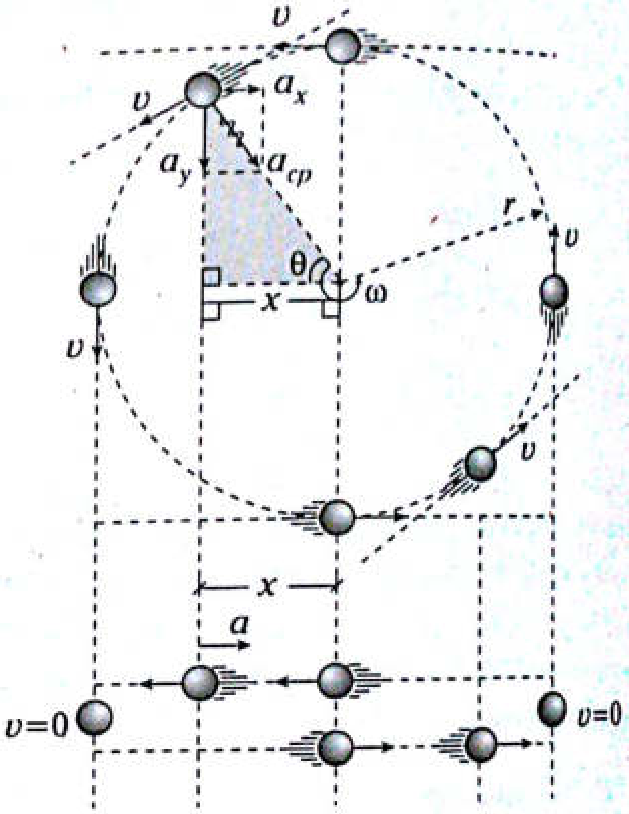


Conclusión

Aquel movimiento que tiene las características anteriormente descritas se denomina movimiento armónico simple (MAS).

3. Proyección del MCU

Para hacer la descripción cinemática del movimiento del oscilador armónico, nos basaremos en el MCU, pues su proyección tendrá similitud.



Notamos que la proyección o sombra del MCU desarrolla movimiento

- rectilíneo.
- oscilatorio.
- periódico.

Además, tenemos que para la $\vec{a}$ de la proyección

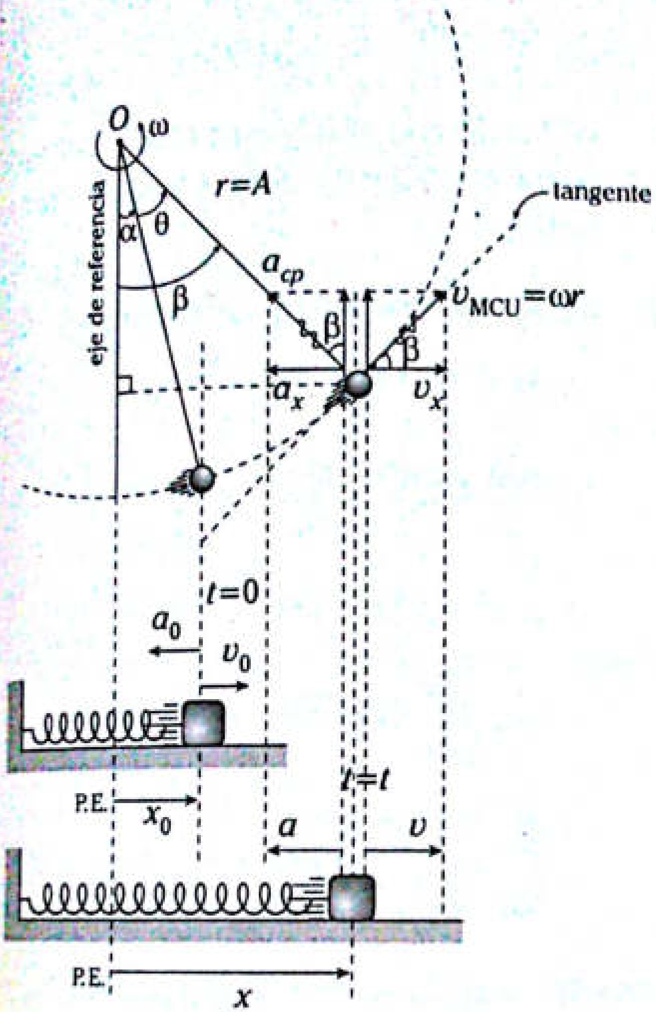
$$a=a_x=a_{cp}\cdot\underline{\cos\theta}$$

$$a=\omega^2\cdot r\cdot\left(\frac{x}{r}\right)$$

$$\rightarrow\; a=\omega^2\cdot x$$

Entonces entre el módulo de la $\vec{a}$ y x hay una relación directamente proporcional.

4. Ecuaciones vectoriales para el MAS



Para la posición tenemos

$$x = A\operatorname{sen}\beta \text{ y } \beta = \alpha + \theta$$

Como la partícula que gira realiza un MCU con una rapidez angular ω

$$\rightarrow \quad \omega = \frac{\theta}{t} \quad \rightarrow \quad \theta = \omega \cdot t$$

Luego

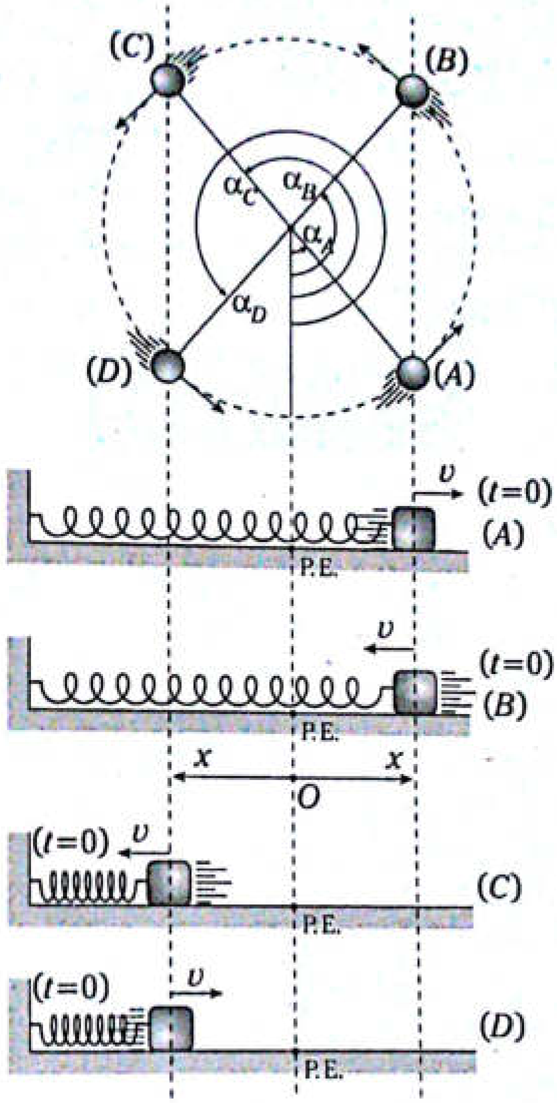
$$\boxed{\vec{x} = A\operatorname{sen}(\omega t + \alpha)}$$

donde

- ω: frecuencia cíclica
- α: fase inicial, se determina conociendo las condiciones iniciales, es decir, $\vec{x}$ y $\vec{v}_0$.

Ejemplo

Para determinar α



- A y D tienen igual $\vec{v}$, pero diferente posición al igual que B y C.
- A y B pasan por la misma posición, pero tienen diferentes velocidades (solo en dirección) al igual que C y D.

Para la velocidad tenemos

$$v = v_{MCU} \cdot \cos\beta$$

$$\boxed{\vec{v} = \omega \cdot A\cos(\omega t + \alpha)}$$

Notamos que el máximo valor de la velocidad en un MAS viene dado por

$$\boxed{v_{\text{máx.}}=\omega A}$$

Coincide con la rapidez constante del MCU.

Para la aceleración tenemos

$$a=a_{cp}\cdot\text{sen}\beta$$

$$\boxed{\vec{a}=-\omega^2\cdot A\text{sen}(\omega t+\alpha)}$$

Como $\vec{x}=A\text{sen}(\omega t+\alpha)$

$$\boxed{\vec{a}=-\omega^2\cdot\vec{x}}$$

de las características dinámicas

$$-\frac{K}{m}\vec{x}=-\omega^2\cdot\vec{x}$$

$$\rightarrow \boxed{\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}} \text{ (frecuencia cíclica)}$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}} \text{ (periodo del MAS)}$$

Además, notamos que el máximo valor de la aceleración en un MAS viene dado por

$$\boxed{a_{\text{máx}}=\omega^2\cdot A}$$

Coincide con el módulo de la $\vec{a}_{cp}$ del MCU.

Observaciones

1. Para la frecuencia cíclica podemos usar $\omega=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{K}{m}}=\frac{\theta}{t}$, esto último analizando el ángulo que el radio del MCU barre conforme el bloque que realiza MAS cambia de posición.

2. De la conservación de E_M en el MAS

$$E_M=E_C+E_{P_E}$$

$$\frac{KA^2}{2}=\frac{mV^2}{2}+\frac{Kx^2}{2}$$

$$mV^2=K\left(A^2-x^2\right)$$

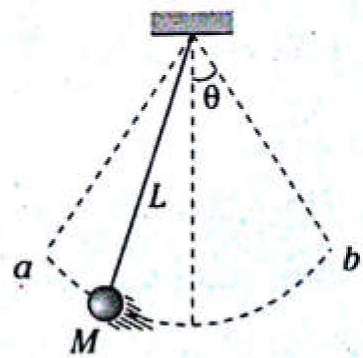
$$V=\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot\sqrt{A^2-x^2}$$

$$\rightarrow \boxed{V=\omega\sqrt{A^2-x^2}}$$

Relación entre la rapidez V y la posición x.

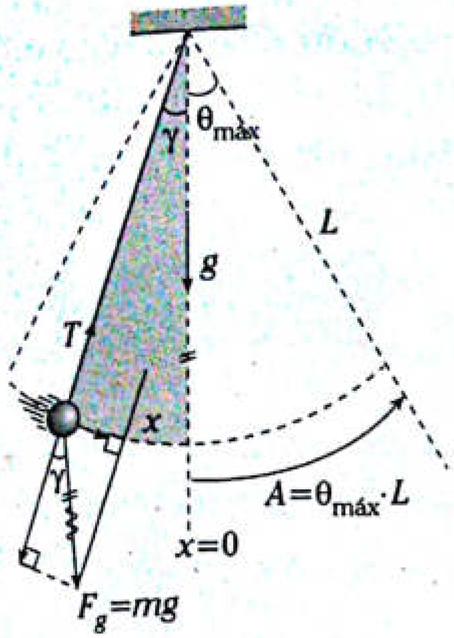
5. Aplicación del MAS al movimiento de un péndulo simple

Un péndulo simple es un sistema conformado por una cuerda ideal y una masa puntual y libre de todo rozamiento.



Siempre que el ángulo θ sea pequeño, $\theta<10°$, el arco $\widehat{ab}$ tiende a ser próximo a una recta.

Análisis de fuerzas



Al descomponer la $\vec{F}_g$, tenemos que la resultante a lo largo de la trayectoria es

$$F_R^{\text{tangencial}} = mg\,\text{sen}\,\gamma$$

Como γ es pequeño, entonces sen$\gamma=\gamma$.

$$F_R^{\text{tangencial}} = mg\gamma \qquad (*)$$

Para el arco sombreado

$$x = L\gamma \;\rightarrow\; \gamma = \frac{x}{L}$$

Reemplazamos en (*).

$$\vec{F}_{\text{res}} = mg\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$\vec{F}_{\text{res}} = \underbrace{\left(\frac{mg}{L}\right)}x = \text{cte}\cdot x$$

Por lo tanto, la $\vec{F}_{\text{res}}$ sobre la partícula que oscila con la cuerda es DP a la posición x (x es un arco que se aproxima a ser una recta). Por ello, podemos aplicar las ecuaciones del MAS.

$$\rightarrow\; T = 2\pi\sqrt{\frac{\text{m}}{\text{cte}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{\cancel{m}}{1}}{\frac{\cancel{m}g}{L}}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

donde

- T: periodo de oscilación del péndulo (s)
- L: longitud de la cuerda (m)
- g: aceleración de la gravedad local (m/s^2)

En las proximidades de la superficie terrestre, g=9,8 m/s^2 y se puede aproximar a $\pi^2\cdot\text{m/s}^2$.

$$\rightarrow\; T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\pi^2}} = 2\sqrt{L}$$

Observación

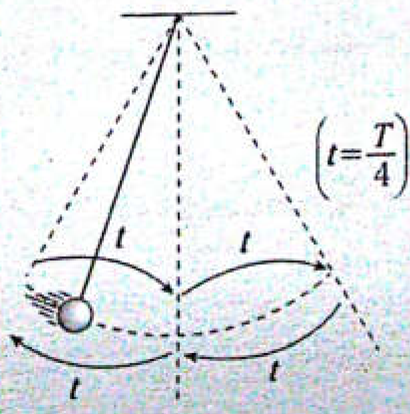
1. Se denomina que un péndulo bate-segundos a aquel que tiene 2 s de periodo, es decir, 1 s en la ida y 1 s en la vuelta. Si dicho péndulo oscila en las proximidades de la superficie terrestre, entonces

   $T = 2\sqrt{L}$

   $2 = 2\sqrt{L}$

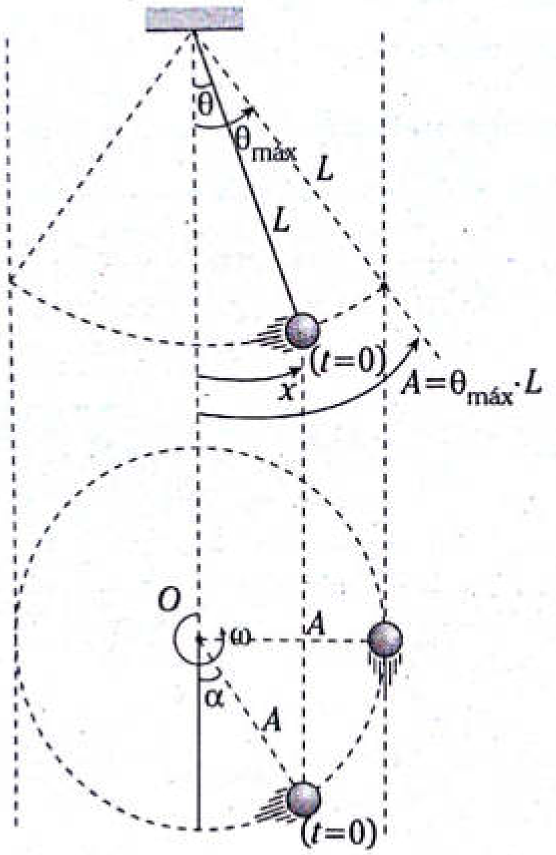
   $\therefore\; L$=1 m

2. Este tipo de péndulo se usa para los relojes, ya que en cada oscilación simple emplea 1 s.
   Al igual que en el MAS, en cada oscilación se puede hacer una partición del periodo.



6. Ecuaciones del movimiento del péndulo simple

Debido a que el movimiento del péndulo simple se aproxima a un MAS. sus ecuaciones son similares y se obtienen a partir de la proyección de un MCU.



Sabemos del MAS

$$\vec{x}=-A\text{sen}(\omega t+\alpha)$$

$$\theta\cdot L=\theta_{máx}\cdot L\,\text{sen}(\omega t+\alpha)$$

$$\boxed{\theta=\theta_{máx}\,\text{sen}(\omega t+\alpha)}$$

Para la máxima rapidez

$$v_{máx}=\omega\cdot A \;\text{ y }\; \omega=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{g}{L}}$$

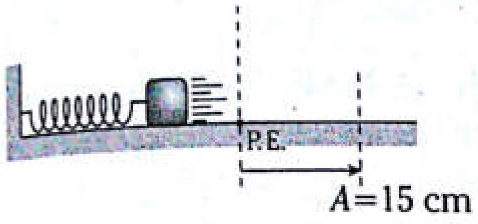
$$v_{máx}=\omega\cdot\theta_{máx}\cdot L$$

$$v_{máx}=\sqrt{\frac{g}{L}}\cdot\theta_{máx}\cdot L$$

$$\boxed{v_{máx}=\sqrt{g\cdot L}\cdot\theta_{máx}}$$

Problema N.° 1

Se muestra un oscilador que realiza MAS. Si recorre 9 m en 12 s, calcule su periodo de oscilación.



Resolución

Debemos recordar que en cada oscilación el bloque recorre

$e=4A$

$e=4\times 15$ cm

$e=60$ cm

Planteamos

$e_{total}=\mathrm{N}\cdot e$

$9\ \mathrm{m}=\mathrm{N}\cdot 0{,}6\ \mathrm{m}$

$\mathrm{N}=15$

Luego, al recorrer 9 m, se realizaron 15 oscilaciones; los cuales tomarán un tiempo ($t=15T$).

Por dato

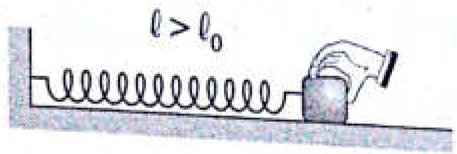
$t=12{,}5$

$15t=12$

$\therefore\ t=0{,}8$ s

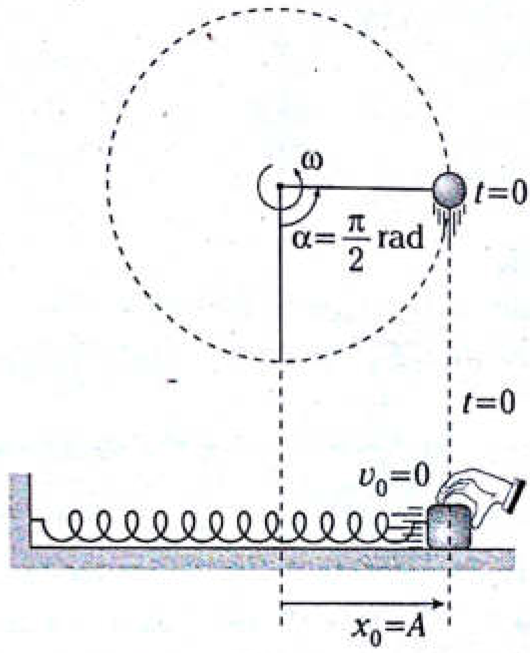
Problema N.° 2

El bloque de 2 kg será soltado y realizará MAS. Determine la ecuación de su posición. Considere $K=50$ N/m y $E_M^{\text{sist.}}=\dfrac{1}{4}$ J.



Resolución

Como el resorte mide más que su longitud natural (ℓ_0), significa que su estado está estirado. Usamos el MCU.



Planteamos

$$\vec{x}=A\mathrm{sen}(\omega t+\alpha)$$

ω: del MCU; α: $\dfrac{\pi}{2}$ rad

$$\sqrt{\frac{K}{m}}=\sqrt{\frac{50}{2}}=5\ \text{rad/s}$$

Por energía

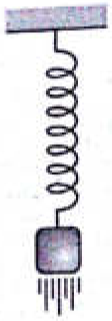
$$E_M^{\text{sist.}}=\frac{K\cdot A^2}{2}\ \rightarrow\ \frac{1}{4}=\frac{50\cdot A^2}{2}$$

$$\frac{1}{100}=A^2\ \rightarrow\ A=0{,}1\ \mathrm{m}$$

$$\therefore\ \vec{x}=0{,}1\mathrm{sen}\left(5t+\frac{\pi}{2}\right)(\mathrm{m})$$

Problema N.° 3

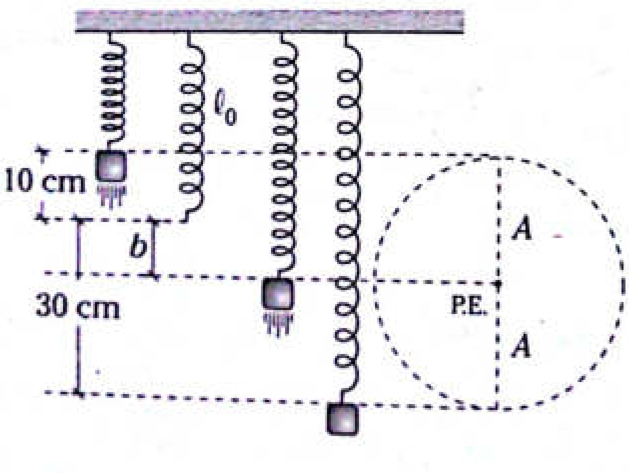
El oscilador que se muestra hace que las deformaciones máximas del resorte sean 10 cm y 30 cm. Determine la masa del bloque si el resorte es de K=200 N/m. $(g=10\text{ m/s}^2)$.



Resolución

Para determinar la masa, podemos aplicar conservación de la $E_M^{\text{sist.}}$ o la ecuación de la frecuencia cíclica $\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}=\frac{2\pi}{T}$, pero no conocemos el periodo. Por ello, debemos notar lo siguiente:

Tenemos los datos de K y las deformaciones, es decir, la $\vec{F}_E$ y la masa se relacionan con la $\vec{F}_g$, y en la P.E. estas se equilibran. El MAS es simétrico respecto a la P.E., por ello nos valemos del MCU.



Notamos

$$10+b=30-b=\text{amplitud}$$

$$b=10\text{ cm}$$

En la P.E.

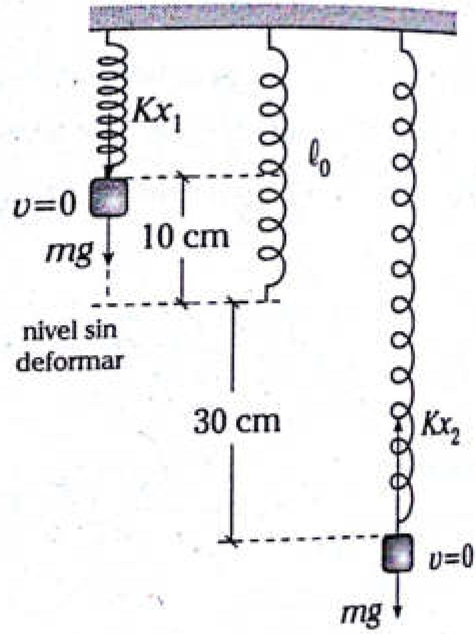
$$F_R=0$$

$$Kb=mg$$

$$200\cdot 0{,}1=m\cdot 10$$

$$\therefore\ m=2\text{ kg}$$

También, podríamos hacer uso de que, en los extremos de oscilación, la $\vec{F}_{\text{res}}$ toma su máximo módulo.



Igualamos los módulos de las $\vec{F}_{\text{res}}$.

$$mg+Kx_1=Kx_2-mg$$

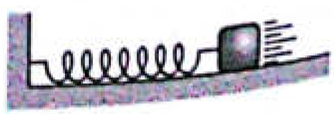
$$K(x_2-x_1)=2mg$$

$$200(0{,}3-0{,}1)=2m\cdot 10$$

$$\therefore\ m=2\text{ kg}$$

Problema N.° 4

Para un oscilador armónico, donde la amplitud es de 81 cm, determine la elongación del resorte cuando se verifique $\frac{E_C}{E_{PE}}=\frac{7}{2}$, donde E_C es la energía cinética del bloque y E_{PE}, la energía potencial elástica del resorte.



Resolución

Como tenemos el dato de la amplitud y nos piden la elongación (x), usaremos para la $E_M^{\text{sist.}}$ la siguiente ecuación:

$$E_M=\frac{KA^2}{2}$$

Del dato

$$\frac{E_C}{E_{PE}}=\frac{7E}{2E} \rightarrow E_C+E_{PE}=E_M^{\text{sist.}}=9E$$

Así

$$9E=\frac{K\cdot A^2}{2} \wedge E_{PE}=2E$$

$$9\cdot\frac{E_{PE}}{2}=\frac{KA^2}{2} \rightarrow 9\cdot\frac{Kx^2}{2}=KA^2$$

$$x^2=\frac{2}{9}A^2 \rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{3}A$$

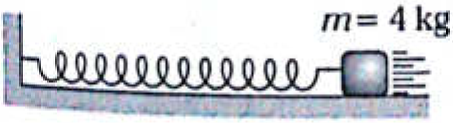
Reemplazamos.

$$x=\frac{\sqrt{2}}{3}(81\text{ cm})$$

$$\therefore\ x=27\sqrt{2}\text{ cm}$$

Problema N.° 5

Se muestra un oscilador para el cual su posición viene dada por $\vec{x}=0{,}3\,\text{sen}\left(10t+\frac{\pi}{8}\right)(\text{m})$. Calcule la $E_M^{\text{sist.}}$.



Resolución

Para determinar la $E_M^{\text{sist.}}$ tenemos

$$E_M^{\text{sist.}} \rightarrow \begin{cases} E_C+E_{PE} \\ \dfrac{mv_{\text{máx}}^2}{2} \\ \dfrac{KA^2}{2} \end{cases}$$

Como conocemos la masa, buscaremos la máxima rapidez.

De

$$\vec{x}=0{,}3\,\text{sen}\left(10t+\frac{\pi}{8}\right)(\text{m})$$

$$A=0{,}3\text{ m}$$

$$\omega=10\text{ rad/s}$$

$$\rightarrow\ v_{\text{máx}}=\omega A=10\cdot 0{,}3=3\text{ m/s}$$

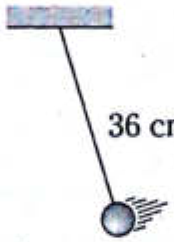
Reemplazamos.

$$E_M^{\text{sist.}}=\frac{mv_{\text{máx}}^2}{2}=\frac{4\cdot 3^2}{2}$$

$$\therefore\ E_M^{\text{sist.}}=18\text{ J}$$

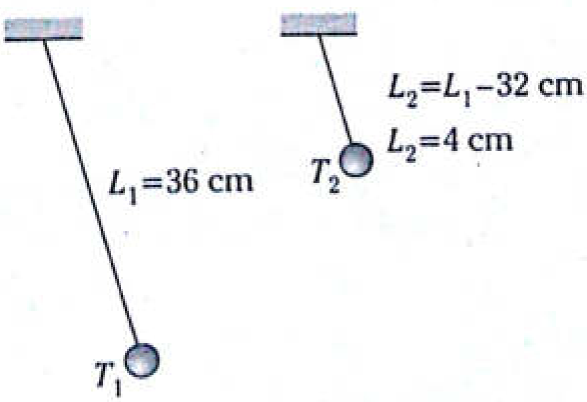
Problema N.° 6

Se muestra un péndulo simple. ¿Qué ocurre con su periodo de oscilación cuando su longitud se recorta en 32 cm? ($g=10$ m/s^2).



Resolución

Graficamos ambos casos.



Notamos que entre las longitudes hay una relación de 9 a 1.

Aplicamos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow \frac{T}{\sqrt{L}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} = \text{cte}$$

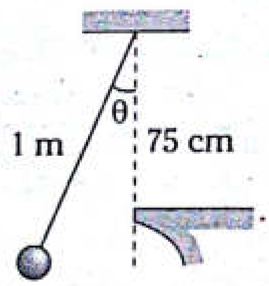
$$\rightarrow \quad \frac{T_1}{\sqrt{L_1}} = \frac{T_2}{\sqrt{L_2}} \rightarrow \frac{T_1}{\sqrt{36}} = \frac{T_2}{\sqrt{4}}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = 3$$

Por lo tanto, el periodo se reduce a la tercera parte.

Problema N.º 7

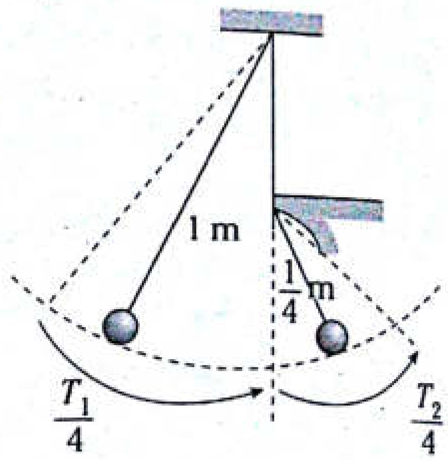
Se muestra un péndulo simple interrumpido por un borde; en estas condiciones, calcule el periodo de las oscilaciones del péndulo.
$(g=\pi^2\ \text{m/s}^2;\ \theta < 10°)$



Resolución

Debemos notar que, antes del borde, la longitud del péndulo es 1 m y se trata de un batesegundos. Luego, solo acompaña en la oscilación una longitud de 25 cm, es decir, $\frac{1}{4}$ m.

Graficamos.



El periodo del péndulo viene a ser

$$T = 2\left(\frac{T_1}{4} + \frac{T_2}{4}\right)$$

$$T = (T_1 + T_2)\frac{1}{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2}\right)\frac{1}{2}$$

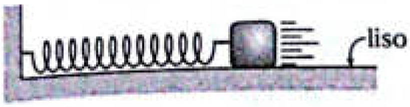
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\pi^2}}\left(\sqrt{1} + \sqrt{\frac{1}{4}}\right)\frac{1}{2}$$

$$T = 2\left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}$$

$\therefore \quad T=1{,}5$ s

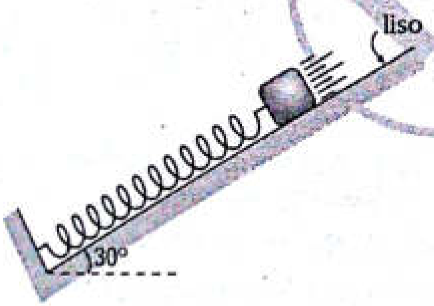
NIVEL BÁSICO

1. Para el oscilador que se muestra, el resorte presenta longitudes máxima y mínima de 27 cm y 20 cm. Calcule el recorrido del bloque en 4 oscilaciones.



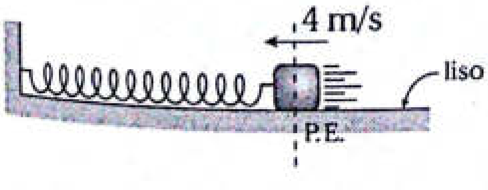
A) 56 cm B) 112 cm C) 28 cm
D) 13 cm E) 21 cm

2. Para el bloque que se muestra, su máxima rapidez es 2 m/s y su máxima aceleración, π m/s^2. Calcule el periodo de las oscilaciones.



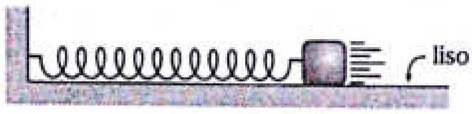
A) 3 s B) 4 s C) 5 s
D) 2 s E) 1 s

3. Desde el instante mostrado, determine la ecuación de la posición para el oscilador si su amplitud es 20 cm.



A) $\vec{x}=0{,}2\,\text{sen}(20t)$ m
B) $\vec{x}=0{,}1\,\text{sen}(10t+\pi)$ m
C) $\vec{x}=0{,}2\,\text{sen}(20t+\pi)$ m
D) $\vec{x}=0{,}2\,\text{sen}(10t+\pi)$ m
E) $\vec{x}=0{,}1\,\text{sen}\left(8t+\frac{\pi}{2}\right)$ m

4. Para el oscilador que se muestra, su recorrido en 4 oscilaciones es 10 cm. Sabiendo que el periodo de las oscilaciones es 0,1 π s, calcule su máxima rapidez.

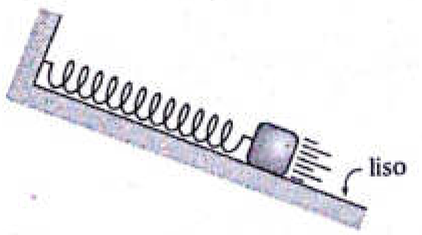


A) 0,325 m/s
B) 0,275 m/s
C) 0,112 m/s
D) 0,125 m/s
E) 0,512 m/s

5. Si la posición de un MAS viene dada por $\vec{x}=0{,}3\,\text{sen}(\pi t)$ m, calcule el recorrido que realiza el oscilador en 2 s.

A) 1,6 m B) 1,8 m C) 2,6 m
D) 1,9 m E) 1,2 m

6. La ecuación de la aceleración de un móvil respecto al tiempo viene dado por $\vec{a}=-4\text{sen}(2t)$. Calcule la máxima rapidez del bloque.

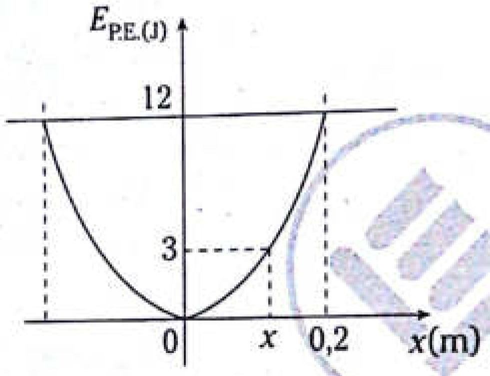


A) 2 m/s B) 1 m/s C) $\frac{1}{2}$ m/s
D) 4 m/s E) 6 m/s

7. Si una energía mecánica del oscilador es 50 J, calcule la energía cinética cuando la posición sea $x=+\frac{A}{\sqrt{5}}$.

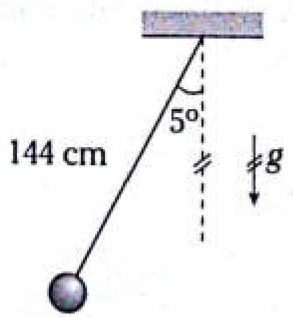
A) 20 J
B) 40 J
C) 30 J
D) $5\sqrt{5}$ J
E) $10\sqrt{5}$ J

8. Se muestra la gráfica energía potencial elástica versus la posición para un MAS. Determine x.



A) 6 cm
B) 5 cm
C) 10 cm
D) 9 cm
E) 14 cm

9. Para el péndulo que se muestra, calcule el tiempo que emplea en dar 10 oscilaciones. $(g=\pi^2\ \text{m/s}^2)$



A) 12 s
B) 18 s
C) 15 s
D) 24 s
E) 10 s

10. En un péndulo simple, si la longitud de la cuerda se cuadruplica y la aceleración de la gravedad se reduce a la novena parte, ¿qué sucede con el periodo de las oscilaciones?

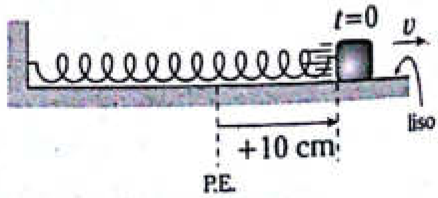
A) Se duplica.
B) Se triplica
C) Se quintuplica.
D) Se conserva.
E) Se sextuplica.

NIVEL INTERMEDIO

11. Si el periodo de oscilación para un MAS es de 6 s, calcule el menor tiempo que transcurre desde que pasa por las posiciones $0{,}5A$ y $-0{,}5\sqrt{2}A$. (A: amplitud).

A) 2,5 s
B) 3,25 s
C) 1,25 s
D) 6 s
E) 5 s

12. Se muestra un oscilador que recorre 50 cm en 4 s a partir del instante mostrado. Calcule la ecuación de su posición en unidades del sistema internacional. (A=20 cm).

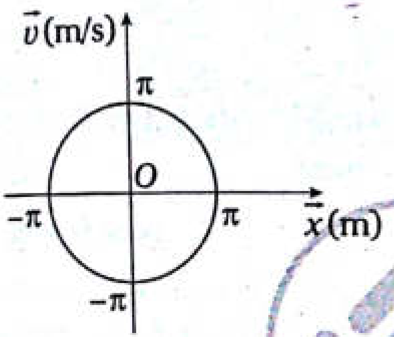


A) $\vec{x}=0{,}2\text{sen}(4t+3)$ (cm)
B) $\vec{x}=0{,}1\text{sen}(\pi t)$ (cm)
C) $\vec{x}=0{,}2\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{3}\right)$(m)
D) $\vec{x}=0{,}2\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{6}\right)$(m)
E) $\vec{x}=0{,}2\text{sen}(\pi t+\pi)$ (m)

13. Para un MAS, su máxima rapidez y aceleración son $\sqrt{5}$ m/s y 2 m/s^2. Calcule la amplitud de las oscilaciones que se realizan.

A) 2,5 m B) 2 m C) 3 m
D) 3,5 m E) 4,5 m

14. Se muestra la gráfica velocidad versus posición. Calcule luego de cuánto tiempo se realizan 7 oscilaciones.



A) 40 s B) 38 s C) 49 s
D) 44 s E) 35 s

15. Si a un péndulo le aumentamos su longitud 1,6 m, su periodo se triplica. Calcule su longitud inicial.

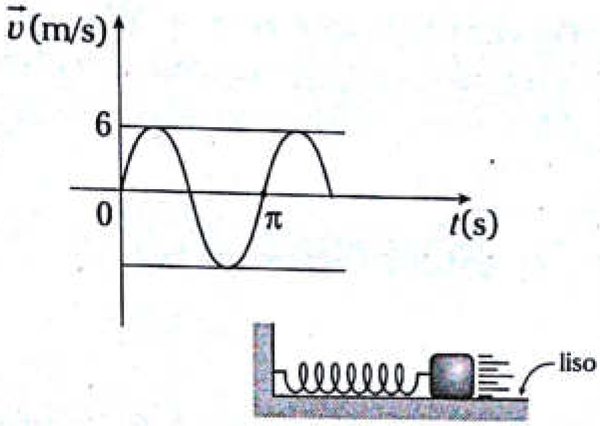
A) 30 cm B) 20 cm C) 40 cm
D) 16 cm E) 80 cm

16. Para un MAS, en cierta posición, la energía cinética es n veces la energía potencial elástica. Calcule dicha posición en función de n y la amplitud (A).

A) $\dfrac{A}{\sqrt{n+1}}$ B) $\dfrac{A}{n}$ C) $\dfrac{A}{\sqrt{n}}$

D) $\dfrac{A}{2n}$ E) $\dfrac{A}{\sqrt{n+2}}$

17. Se muestra la gráfica velocidad versus tiempo para el bloque que realiza MAS. Determine la ecuación de la posición.



A) $\vec{x}=3\text{sen}(2t)$ m

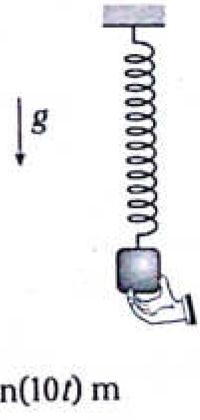
B) $\vec{x}=2\text{sen}(3t)$ m

C) $\vec{x}=3\text{sen}\left(2t+\dfrac{3\pi}{2}\right)$ m

D) $\vec{x}=2\text{sen}\left(2t+\dfrac{\pi}{2}\right)$ m

E) $\vec{x}=3\text{sen}\left(2t+\dfrac{\pi}{2}\right)$ m

18. Se muestra un bloque de 4 kg atado a un resorte de 100 N/m que se encuentra sin deformar desde que se suelta. Determine la ecuación de su posición en unidades del SI. ($g=10$ m/s^2)



A) $\vec{y}=0{,}3\text{sen}(10t)$ m

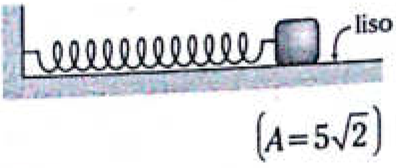
B) $\vec{y}=0{,}6\text{sen}(2t+\pi)$ m

C) $\vec{y}=0{,}4\text{sen}\left(5\pi t+\dfrac{\pi}{2}\right)$ m

D) $\vec{y}=0{,}2\text{sen}(5t)$ m

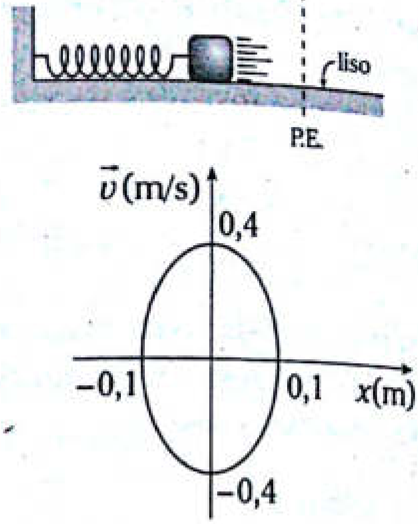
E) $\vec{y}=0{,}4\text{sen}\left(5t+\dfrac{3\pi}{2}\right)$ m

19. Por cada oscilación para un MAS, calcule el recorrido en el que la energía cinética es mayor que la energía potencial elástica.



A) 10 cm
B) 20 cm
C) 15 cm
D) 40 cm
E) 5 cm

20. Se muestra la gráfica velocidad versus posición para un MAS. Calcule el máximo módulo de la aceleración del bloque.



A) $0{,}9\ m/s^2$
B) $0{,}3\ m/s^2$
C) $1{,}7\ m/s^2$
D) $1{,}3\ m/s^2$
E) $1{,}6\ m/s^2$

Ondas mecánicas

Capítulo XII

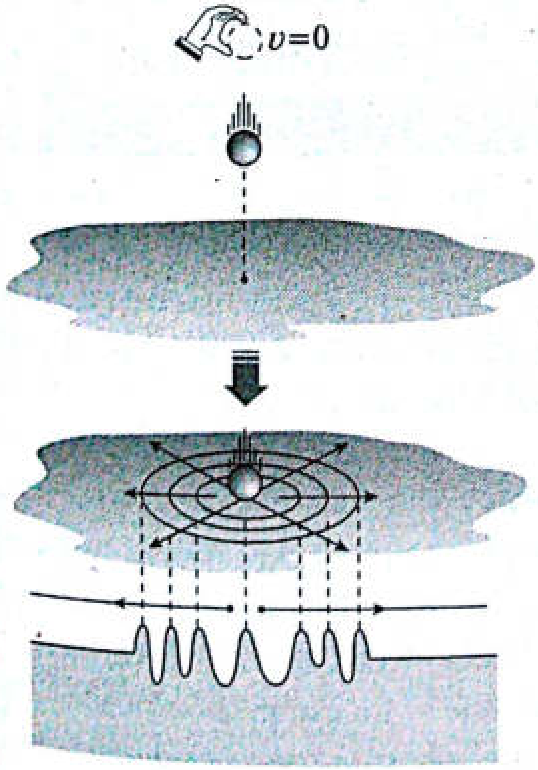
Objetivos

- Reconocer las características de las ondas mecánicas.
- Conocer los tipos de ondas mecánicas.
- Aplicar las propiedades y ecuaciones de las ondas mecánicas en diversas situaciones.

1. Onda mecánica

Fenómeno físico en el que una perturbación se propaga en toda la extensión de un medio elástico a través de movimientos oscilatorios.

Por ejemplo qué sucede cuando una esfera cae sobre la superficie del agua tranquila.



La esfera que se suelta presenta energía mecánica que será transferida al agua.

La esfera, al impactar en la superficie del agua, la perturba; es decir, altera su tranquilidad. Dicha perturbación es transmitida a otras partículas del agua que rodean el lugar de impacto y se propagan en todas las direcciones de la extensión del agua.

La propagación se da gracias a que en la superficie del agua se manifiestan propiedades elásticas que tienden a hacer retornar al equilibrio a las partículas del agua.

La energía se va transfiriendo desde el foco donde se da el impacto hacia toda la superficie del agua, haciendo que las partículas oscilen. A mayor distancia del foco hay más partículas que son alcanzadas por la perturbación y, por ello, oscilan con menor amplitud que las primeras.

1.1. CLASIFICACIÓN DE LAS ONDAS

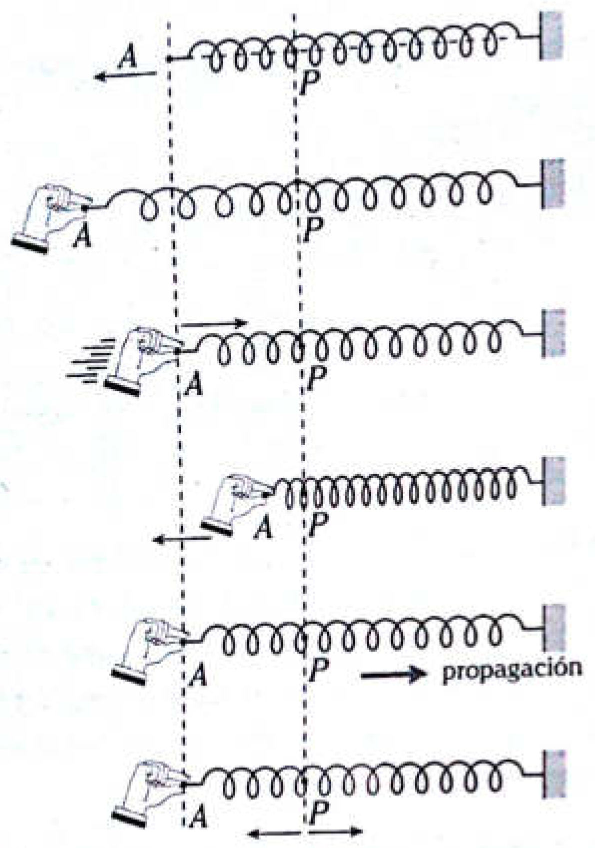
Según la dirección de propagación, las ondas pueden clasificarse en ondas longitudinales y ondas transversales.

1.1.1. Ondas longitudinales

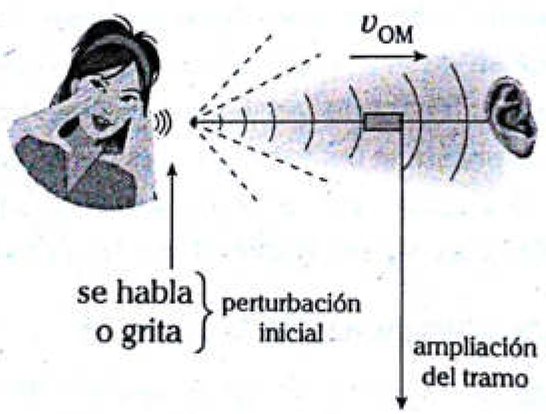
Ocurre cuando las partículas oscilan en dirección paralela a la dirección de propagación de la onda mecánica.

Ejemplos

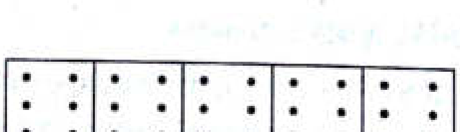
1. Oscilaciones en un resorte



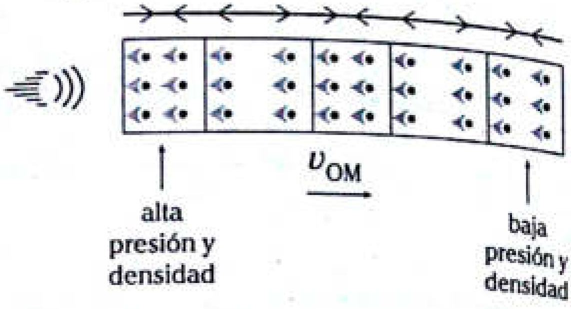
2. El sonido



Al inicio la presión y densidad es la misma en toda la región



luego



Notamos que en el medio sustancial se dan compresiones y expansiones intercaladas, producto de que la perturbación se va propagando.

Observación

Estas ondas se producen en sólidos, líquidos y gases; de manera que a mayor densidad, las partículas del medio se encuentran más juntas y la perturbación se propaga en menor tiempo.

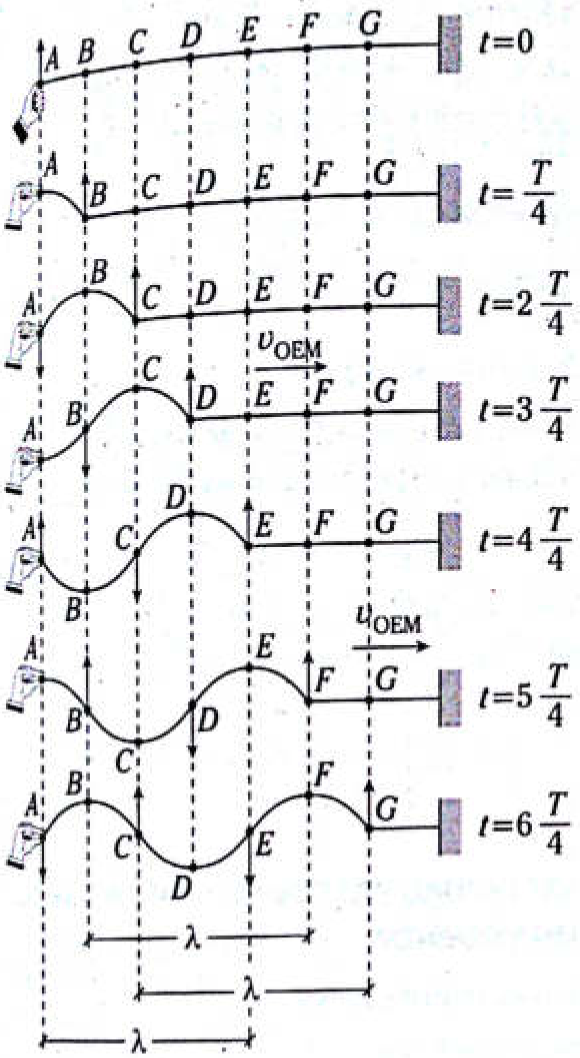
$$v_{OM}^{\text{sólido}} > v_{OM}^{\text{líquido}} > v_{OM}^{\text{gas}}$$

1.1.2. Ondas transversales

Ocurre cuando las partículas del medio oscilan perpendicularmente a la dirección de propagación de la onda mecánica.

Ejemplo

Se tiene una cuerda tensa atada de uno de sus extremos, mientras el otro extremo se hace oscilar. Sobre dicha cuerda se ubican puntos y las figuras que se muestran corresponden a las formas que adopta la cuerda en distintos instantes de tiempo, donde T es el periodo de oscilación del extremo de la cuerda (punto A).



longitud de onda, corresponde a la separación entre dos puntos consecutivos que tienen la misma velocidad.

Notamos que la perturbación se inicia oscilando hacia arriba; así, todas las partículas al ser alcanzadas por dicha perturbación dan inicio a su movimiento oscilatorio de la misma manera. La silueta o perfil que va tomando la cuerda es de crestas y valles intercalados.

Cuando la partícula A realiza una oscilación, transcurre un periodo (T) y se forma una cresta y un valle, además, la última partícula alcanzada por la onda E tendrá en adelante la misma posición vertical y velocidad que A, por lo que A y E se denominan partículas que oscilan en fase. Al continuar la propagación de la onda, B y F también oscilan en fase al igual que C y G.

OBSERVACIÓN

Estas ondas solo se producen en los sólidos y, aproximadamente, en la superficie de los líquidos debido a que requieren que el medio sustancial se oponga a los esfuerzos de corte o cizallamiento.

1.2. ELEMENTOS DE LA ONDA MECÁNICA

1.2.1. Longitud de onda (λ)

- Es la longitud que contiene a una cresta y a un valle.
- Es la distancia que cubre la onda en un tiempo de un periodo.
- Es la distancia de separación entre dos puntos consecutivos que se encuentran en fase.

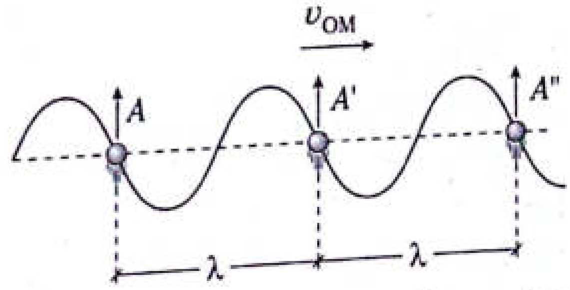
$$\boxed{v_{OM} = \frac{d}{t} = \frac{\lambda}{T}}$$

donde

- v_{OM}: velocidad de propagación de la onda mecánica

Sabemos que

frecuencia: $f = \frac{1}{T}$ $\boxed{v_{OM} = \lambda \cdot f}$



A, A' y A'' son partículas que oscilan en fase; es decir, presentará la misma velocidad y posición en el mismo instante.

1.2.2. Periodo (T)

- Es el tiempo que emplea la onda en propagarse una longitud de onda (λ).
- Es el tiempo en que todas las partículas realizan una oscilación.

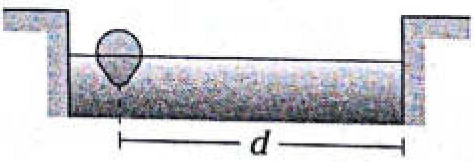
NOTA

Entre N (número de oscilaciones), el periodo y la longitud de onda hay una relación muy importante.

$$\text{Se dan } N \text{ oscilaciones} \begin{cases} \text{Se recorre} \\ d = N \cdot \lambda \\ \text{Transcurre} \\ t = N \cdot T \end{cases}$$

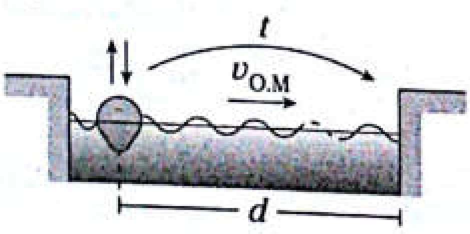
Aplicación

La boya inicia su oscilación y cuando la onda alcanza la orilla opuesta, se cuentan 12 longitudes de ondas. Si la f=0,5 Hz, ¿después de cuánto tiempo la perturbación alcanza la otra orilla?



Resolución

Gráficamente



Por dato

$d=12\lambda$

$\rightarrow$ $t=12T$

$t=12\cdot\dfrac{1}{f}$

$t=12\cdot\dfrac{1}{0,5}$

$\therefore$ $t=24$ s

Otra forma

$d=v_{O.M}\cdot t$

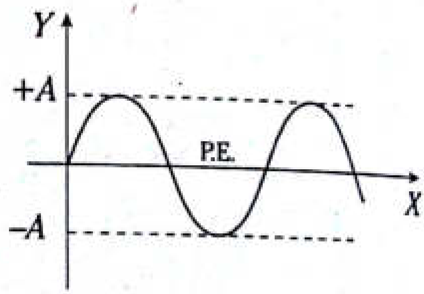
$12\cancel{\lambda}=\cancel{\lambda}\cdot f\cdot t$

$12=0,5t$

$\therefore$ $t=24$ s

1.2.3. Amplitud (*A*)

- Es el máximo alejamiento de las partículas oscilantes respecto a la posición de equilibrio.



1.3. VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DE UNA ONDA EN UNA CUERDA

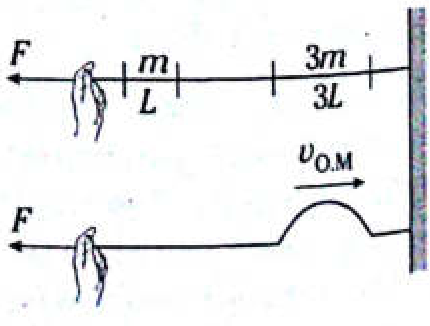
Para una cuerda tensa

μ: densidad lineal

$$\boxed{\mu=\frac{\text{masa}}{\text{longitud}}=\frac{M}{L}\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}}\right)}$$

donde μ mide la masa por unidad de longitud.

Cuando se genera una onda transversal, se verifica para la rapidez de propagación.



$$\boxed{v_{O.M}=\sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

donde

- F se relaciona con la elasticidad.
- μ se relaciona con la inercia del medio.

Esta ecuación nos refleja que la rapidez de propagación de la onda depende de las propiedades del medio.

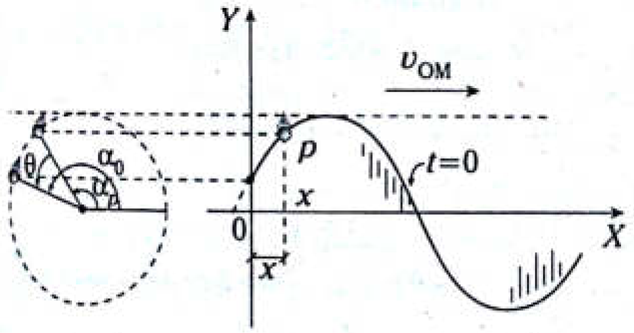
1.4. FUNCIÓN DE ONDA $\vec{y}_{(x;t)}$

Es una ecuación que define el movimiento oscilatorio para cada partícula con posición de equilibrio $t = x$.

Plantearemos la función de onda para cuando las partículas realicen MAS, por lo cual se denomina onda sinusoidal.

Deriva de la fracción trigonométrica: seno

Para una onda que se propaga hacia la derecha



Para la partícula p que es una partícula genérica

$$\vec{y}_P = A\text{sen}(\omega t + \alpha_p) \qquad (*)$$

La fase inicial de p (α_p) la vamos a relacionar con α (fase inicial de la partícula que oscila con P.E. $x=0$, es decir, en el origen de coordenadas).

Luego

$$\alpha_0 = \alpha_p + \theta$$

$$\alpha_0 > \alpha_p$$

Debido a que la onda se propaga hacia la derecha, primero oscila O y luego de un tiempo t' en el que la onda recorre x, tenemos que

$$x = v_{OM} \cdot t'$$

$$\rightarrow x = (\lambda \cdot f)t'$$

recién lo hace idénticamente a O, la partícula p.

Entonces

$$\alpha_0 = \alpha_p + \omega \cdot t' = \alpha_p + (2\pi f)\left(\frac{x}{\lambda f}\right)$$

$$\alpha_0 = \alpha_p + \frac{2\pi x}{\lambda}$$

$$\therefore \quad \alpha_p = \alpha_0 - \frac{2\pi x}{\lambda}$$

Reemplazamos en (*).

$$\vec{y}_p = A\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha_0 - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$\boxed{\vec{y}_{(x;t)} = A\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t \mp \frac{2\pi x}{\lambda} + \alpha_0\right)}$$

Además

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{(frecuencia cíclica)}$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{(número de onda)}$$

Entonces la función de onda $(\vec{y})$ también se expresa así:

$$\boxed{\vec{y}_{(x;t)} = A\text{sen}(\omega t \pm Kx + \mu_0)}$$

donde

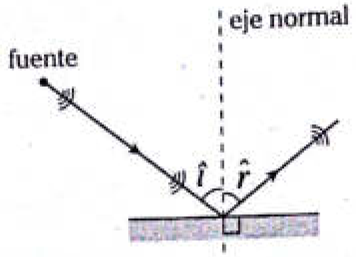
- (–): cuando la onda viaja hacia la derecha.
- (+): cuando la onda viaja hacia la izquierda.

1.5. FENÓMENOS ONDULATORIOS

1.5.1. Reflexión

Cuando la perturbación u onda cambia la dirección de propagación al incidir en un obstáculo y continúa en el mismo medio.

- Para ondas longitudinales

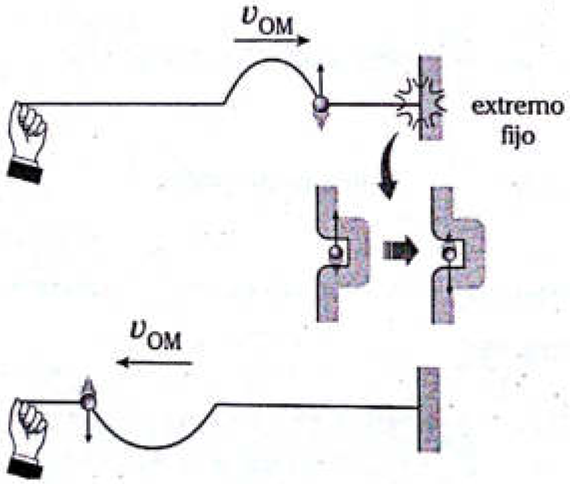


Se verifica

$$\boxed{\hat{\imath}=\hat{r}}$$

donde
- $\hat{\imath}$: ángulo de incidencia
- $\hat{r}$: ángulo de reflexión

- Para ondas transversales

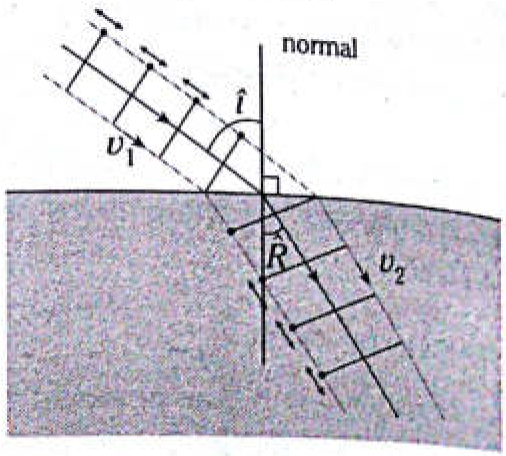


Cuando el extremo está libre, la partícula que encabeza la onda al llegar al obstáculo ya no transfiere su movimiento hacia la derecha, sino hacia la izquierda sin invertir la dirección de la oscilación y, por ello, el perfil se conserva.

1.5.2. Refracción

Cuando la perturbación u onda pasa a propagarse en otro medio, cambia la rapidez de propagación, pero no cambia la frecuencia de oscilación.

- Para ondas longitudinales

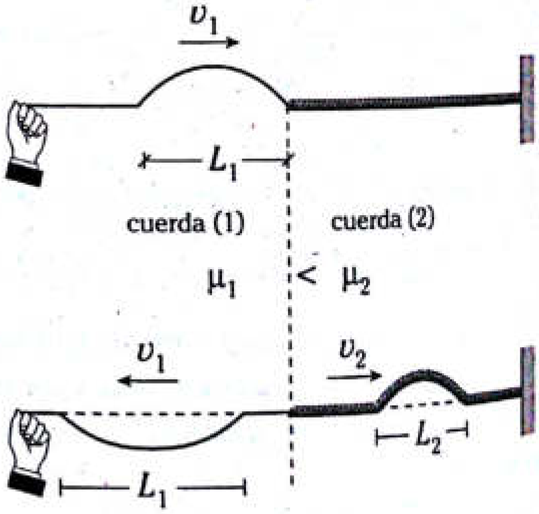


Se verifica

$$\boxed{\frac{v_1}{v_2}=\frac{\operatorname{sen}\hat{\imath}}{\operatorname{sen}\hat{R}}}$$

donde
- $\hat{\imath}$: ángulo de incidencia
- $\hat{R}$: ángulo de refracción

- Para ondas transversales



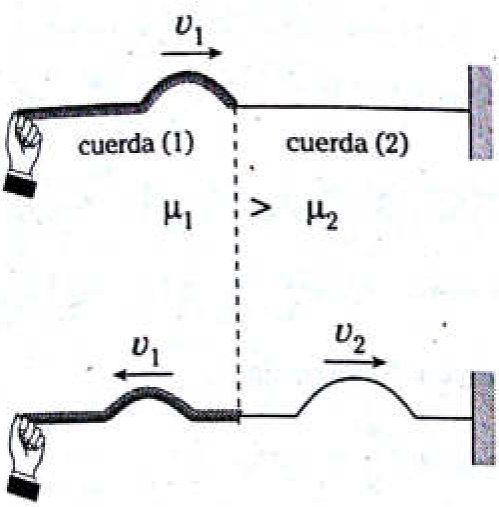
Como vemos, la fuerza de tensión a lo largo de ambas cuerdas es igual.

$$v=\lambda\cdot f=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$$

Por lo que, en la cuerda de mayor densidad lineal, la longitud de onda es menor.

Por lo tanto, en el gráfico anterior, la onda reflejada invierte su perfil por ser de menor densidad.

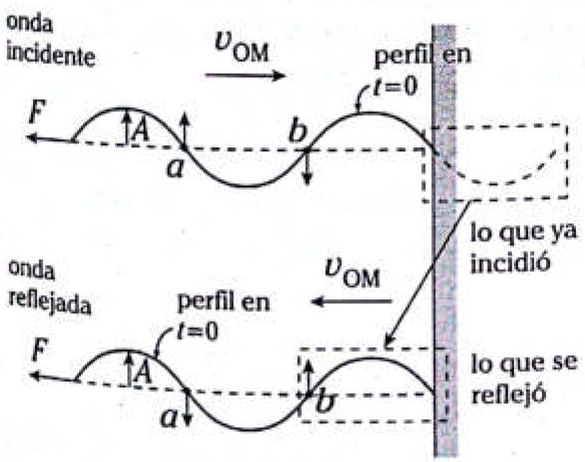


En el gráfico, la onda reflejada no invierte su perfil por ser de mayor densidad.

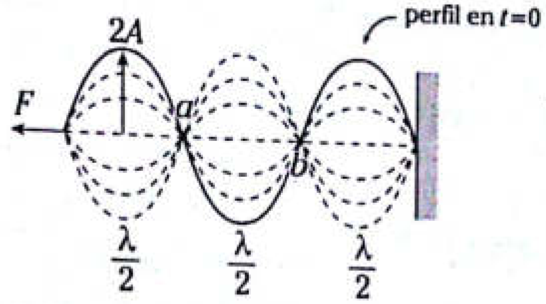
1.6. ONDAS ESTACIONARIAS

Es el resultado de la interferencia de dos ondas tal que el perfil del medio tiene un patrón estable. Dichas ondas deben tener igual amplitud, frecuencia y longitud de onda; además, deben propagarse en direcciones opuestas.

Esto se puede conseguir con una onda incidente y reflejada.



Ambas ondas se propagan de manera simultánea en el mismo medio y generan el siguiente perfil:



Se forman vientres que miden media longitud de onda.

Como la onda transporta energía y cantidad de movimiento, los puntos a y b no se moverán, ya que reciben impulsos de direcciones opuestas, por ello se les denomina nodos o nudos.

Así, tenemos las funciones de onda

- $\vec{y}_1 = A\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{x} + \pi\right)$
- $\vec{y}_2 = A\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi x}{x}\right)$

Para la onda incidente y la onda reflejada luego en la interferencia

$$\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$$

Desarrollamos por trigonometría.

$$\boxed{\vec{y} = 2A\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}$$

donde

$$A_p = 2A\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

es la amplitud de la partícula que oscila con posición de equilibrio $x=x$.

Para los nodos, $A_p=0$.

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = k\pi \rightarrow x = k\frac{\lambda}{2}$$

$k=0; 1; 2; 3; ...$

Para los antinodos o puntos medios de los vientres, se tiene la máxima amplitud.

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$$

$k = 0; 1; 2; 3; ...$

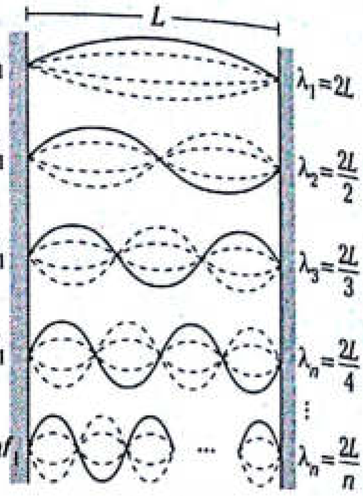
A continuación, veamos los diferentes modos de oscilación o números de armónicos.

Recordemos lo siguiente:

$$v_{OM} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \lambda \cdot f$$

Si trabajamos sobre la misma cuerda, la rapidez es constante.

Entonces a mayor frecuencia, los vientres tienen menor longitud y se formarán muchos más en la misma cuerda.



Aplicamos la fórmula.

$$v_{OM} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \lambda_n \cdot f_n$$

donde

$n=1$

$$\sqrt{\frac{F}{\mu}} = 2Lf_1 \rightarrow \boxed{f_1 = \frac{1}{2L}\cdot\sqrt{\frac{F}{\mu}}} \left(\begin{array}{c}\text{frecuencia del}\\ 1.^{\text{er}}\text{ armónico}\end{array}\right)$$

Calculamos la frecuencia fundamental correspondiente al $n_{\text{ésimo}}$ armónico.

$$\sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{2L}{n}\cdot f_n \rightarrow \boxed{f_n = \frac{n}{2L}\cdot\sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

La frecuencia para el enésimo armónico es directamente proporcional al número de vientres o número de armónicos.

Para los nodos, $A_p=0$.

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = k\pi \rightarrow x = k\frac{\lambda}{2}$$

$$k=0; 1; 2; 3; ...$$

Para los antinodos o puntos medios de los vientres, se tiene la máxima amplitud.

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$$

$$k=0; 1; 2; 3; ...$$

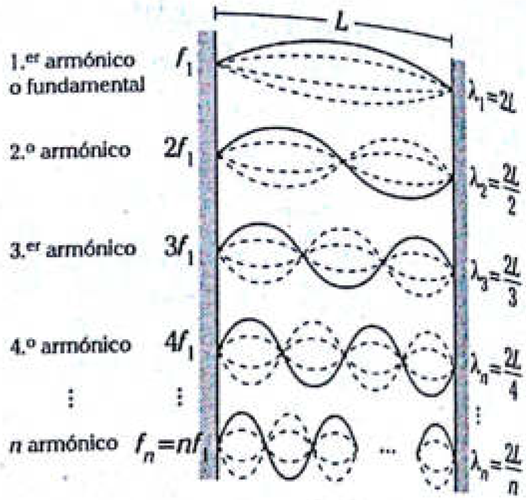
A continuación, veamos los diferentes modos de oscilación o números de armónicos.

Recordemos lo siguiente:

$$v_{OM} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \lambda \cdot f$$

Si trabajamos sobre la misma cuerda, la rapidez es constante.

Entonces a mayor frecuencia, los vientres tienen menor longitud y se formarán muchos más en la misma cuerda.



Aplicamos la fórmula.

$$v_{OM} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \lambda_n \cdot f_n$$

donde

$n=1$

$$\sqrt{\frac{F}{\mu}} = 2Lf_1 \rightarrow \boxed{f_1 = \frac{1}{2L}\cdot\sqrt{\frac{F}{\mu}}} \left(\begin{array}{c}\text{frecuencia del}\\ 1.^{\text{er}}\text{ armónico}\end{array}\right)$$

Calculamos la frecuencia fundamental correspondiente al $n_{\text{ésimo}}$ armónico.

$$\sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{2L}{n}\cdot f_n \rightarrow \boxed{f_n = \frac{n}{2L}\cdot\sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

La frecuencia para el enésimo armónico es directamente proporcional al número de vientres o número de armónicos.

Problema N.° 1

Dada la siguiente función de onda:

$\vec{y}=0{,}1\text{sen}(0{,}03t-0{,}003x)$

donde y, x y t están en el SI, calcule la rapidez de propagación de la onda mecánica.

Resolución

Sea la forma general de la función de onda

$$\vec{y}=A\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t-\frac{2\pi}{\lambda}\cdot x\right)$$

Sabemos que

$$v_{OM}=\frac{\lambda}{T}=\frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}}$$

Colocamos 2π para poder usar los coeficientes de t y x en la función de onda y no despejar λ y T.

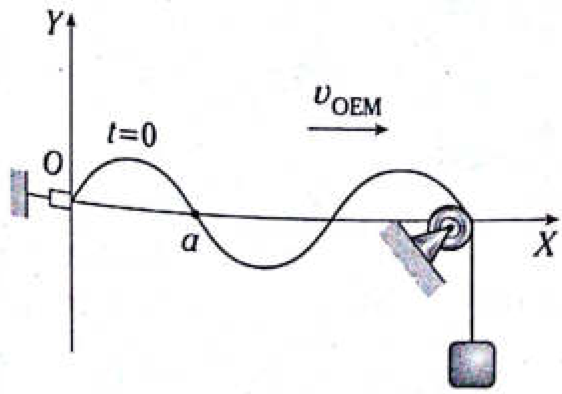
Reemplazamos.

$$v_{OM}=\frac{0{,}03}{0{,}003}$$

$\therefore\ v_{OM}=10\text{ m/s}$

Problema N.° 2

Para la cuerda tensa se pide calcular la rapidez de la partícula a luego de 2π s desde el instante mostrado. Considere $\vec{y}=0{,}2\text{sen}(5t-\pi x)\cdot\text{m}$



Resolución

Observamos que a en $t=0$ pasa por la P.E., es decir presenta su $v_{\text{máx}}$, luego de 2π s se quiere calcular su rapidez.

De la función de onda

$$\vec{y}=\underbrace{0{,}2}_{A=0{,}2\text{ m}}\text{sen}(\underbrace{5}_{\omega=5\text{ rad/s}}t-\underbrace{\pi}_{K=\pi(\text{m}^{-1})}x)(m)$$

Comparamos este tiempo con el periodo.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=5$$

$$\rightarrow\ T=\frac{2\pi}{5}$$

$$2\pi=N\cdot T$$

$$2\pi=N\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\rightarrow\ N=5$$

Es decir, a realiza 5 oscilaciones y vuelve a pasar por la P.E. con una rapidez máxima.

$$v_a^{(t=2\pi\text{ s})}=v_{\text{máx}}$$

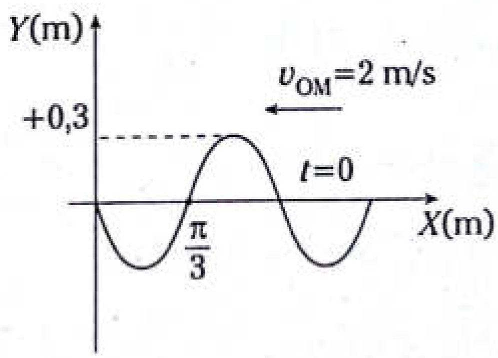
$$v_a^{(t=2\pi\text{ s})}=\omega A$$

$$v_a^{(t=2\pi\text{ s})}=5\times 0{,}2$$

$$\therefore\ v_a^{(t=2\pi\text{ s})}=1\text{ m/s}$$

Problema N.° 3

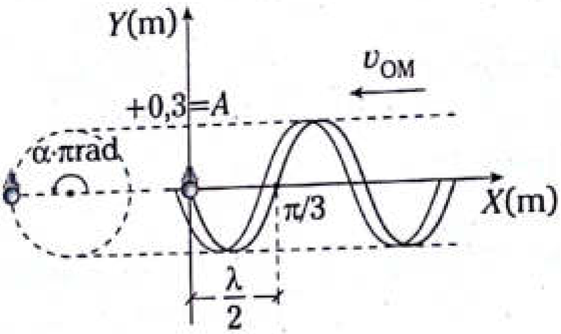
En la gráfica, se muestra el perfil de una onda sinusoidal. Determine su función de onda.



Resolución

> **Recuerde**
> La función de onda $\vec{y}$ se expresa como
> $\vec{y} = A\text{sen}(\omega t \pm Kx + \alpha_0)$
> $\vec{y} = A\text{sen}\left(\left(\frac{2\pi}{T}\right)t \pm \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)x + \alpha_0\right)$

Para definir la fase inicial de la onda debemos usar el MCU.



$$\vec{y} = A\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t \pm \frac{2\pi x}{\lambda} + \alpha_0\right) \quad (*)$$

$A \rightarrow 0{,}3$ m; $\pm \rightarrow +$; $\alpha_0 \rightarrow \pi$ rad; $\frac{2\pi x}{\lambda} \rightarrow \frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{3}$

$$\lambda = \frac{2\pi}{3}\,\text{m}$$

Como $v_{OM} = \frac{\lambda}{T}$

$$2 = \frac{\frac{2\pi}{3}}{T} \rightarrow T = \frac{\pi}{3}\,\text{s}$$

Reemplazamos en (*).

$$\vec{y} = 0{,}3\text{sen}(6t + 3x + \pi)\,\text{m}$$

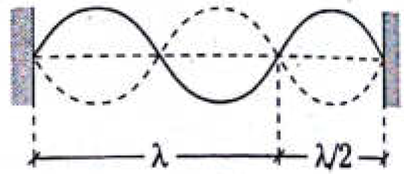
Problema N.º 4

En una cuerda de 5 m de longitud se cuentan dos nudos. Calcule la densidad lineal de la cuerda si la frecuencia fundamental es 5 Hz. Considere 40 N para la tensión en la cuerda.

Resolución

Debido a que hay dos nudos, se forman 3 vientres y se trata del tercer armónico.

$$f = 3f_1 \rightarrow f = 3(5) = 15\,\text{Hz}$$



$$L = \lambda + \frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda = \frac{2L}{3}$$

Aplicamos la fórmula.

$$v_{OM} = \lambda \cdot f$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{2\cdot(5)}{3}\cdot(15)$$

$$\sqrt{\frac{40}{\mu}} = 50$$

$$\frac{40}{\mu} = 2500$$

$$\therefore \mu = 0{,}016\,\text{kg/m}$$

Problema N.° 5

Para una onda estacionaria, su función de onda es $\vec{y}=0{,}6\,\mathrm{sen}(\pi x)\cos(10t)$ m. Calcule la máxima rapidez de la partícula que oscila alrededor de $x=\frac{1}{6}$ m.

Resolución

A partir de la función de onda y la posición de la partícula, definimos la ecuación del movimiento para la partícula p.

$$\vec{y}_p=\underbrace{0{,}6\,\mathrm{sen}\left(\pi\cdot\frac{1}{6}\right)}\cos(10t)$$

$$\vec{y}_p=0{,}6\cdot\frac{1}{2}\cos(10t)=0{,}3\cos(10t)$$

Como la partícula p realiza un MAS, se verifica

$$\vec{y}_p=0{,}3\cos(10t)=A\cos(\omega t)$$

Calculamos la máxima rapidez para p.

$$v_{\text{máx}}=\omega\cdot A$$

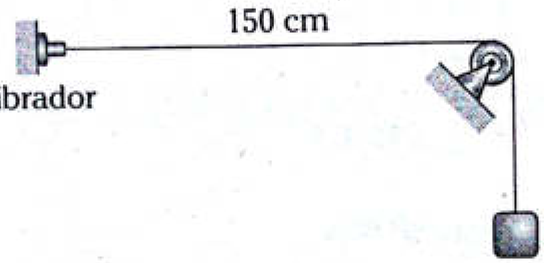
$$v_{\text{máx}}=10\cdot 0{,}3$$

$$\therefore\quad v_{\text{máx}}=3\ \text{m/s}$$

Problemas Propuestos

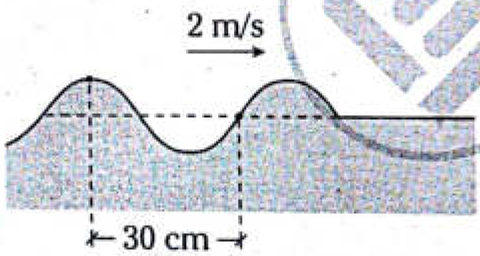
NIVEL BÁSICO

1. Se muestra una cuerda tensa y un vibrador que iniciará su movimiento con 5 Hz de frecuencia. Si cuando toda la cuerda está oscilando se cuentan 7 crestas y 8 valles, calcule la rapidez de propagación de la onda.



A) 1 m/s B) 2 m/s C) 5 m/s
D) 7 m/s E) 9 m/s

2. Se muestra una onda mecánica transversal. Calcule la frecuencia de las oscilaciones.



A) 7 Hz B) 8 Hz C) 5 Hz
D) 9 Hz E) 1 Hz

3. Dada la siguiente función de onda:
$\vec{y}=1{,}2\,\text{sen}\,2\pi(0{,}8t-0{,}2x)$
donde x se mide en metros, calcule el número de longitudes de onda que se pueden contar en una extensión de 45 m.

A) 6 B) 5 C) 7
D) 8 E) 9

4. Sea la siguiente función de onda:
$$\vec{y}=2{,}5\,\text{sen}\left(\pi t+\frac{\pi}{2}x\right)$$
Calcule el número de oscilaciones que realizan las partículas del medio en 1 min.

A) 30 B) 60 C) 20
D) 8 E) 15

5. Cuando una onda sonora se propaga en un medio (1) viaja a 300 m/s, y en otro medio (2) lo hace a 400 m/s. Si la longitud de onda en el primer medio es 12 cm, calcule la longitud de onda en el segundo medio.

A) 9 cm B) 12 cm C) 16 cm
D) 8 cm E) 10 cm

6. En una onda estacionaria, su frecuencia en el octavo armónico es 160 Hz. Calcule su frecuencia fundamental.

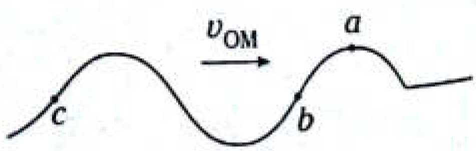
A) 20 Hz B) 60 Hz C) 160 Hz
D) 100 Hz E) 30 Hz

7. En una cuerda de 2,5 m, se observa que cada vientre de la onda estacionaria mide 50 cm. ¿En qué armónico oscila la cuerda?

A) 3.^{er} B) 5.º C) 7.º
D) 2.º E) 9.º

NIVEL INTERMEDIO

8. Dado el siguiente perfil de la onda mecánica transversal, indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda.



I. La partícula a no presenta rapidez.
II. b y c son partículas que oscilan en fase.
III. La velocidad de la partícula b está en la dirección $(+\hat{j})$.

A) FVF B) VVV C) FFF
D) FFV E) VVF

9. Dada la cuerda de densidad lineal 0,8 kg/m, calcule la rapidez de propagación de la onda mecánica transversal que produce el vibrador de 24 Hz de frecuencia.
($h \approx 0$; $g = 10\ m/s^2$)

A) 6 m/s
B) 8 m/s
C) 10 m/s
D) 5 m/s
E) 4 m/s

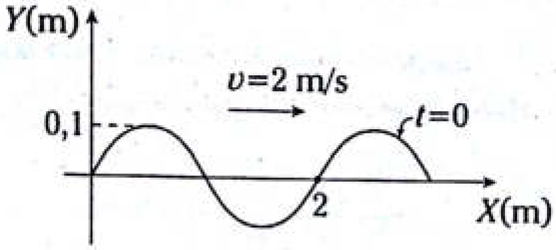
10. Respecto a las ondas mecánicas, indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda.
I. En las ondas longitudinales se producen zonas de compresión y expansión, es por ello que se denominan ondas de presión.
II. Las ondas transversales se producen por fuerzas internas que se oponen a la cizalladura.
III. La tensión superficial en los líquidos permite la propagación de ondas transversales.

A) VVV
B) FFF
C) VVF
D) VFF
E) FFV

11. Dada una onda mecánica transversal, se tiene la siguiente función de onda:
$\vec{y} = 0{,}8\,\text{sen}\left(\pi t - \frac{\pi}{3}x\right)(\text{m})$
Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda.
I. Entre dos puntos que oscilan en fase, la distancia puede ser 18 m.
II. La velocidad de propagación de la onda es $-3\hat{i}$ (m/s).
III. El periodo de oscilación de las partículas es 2 s.

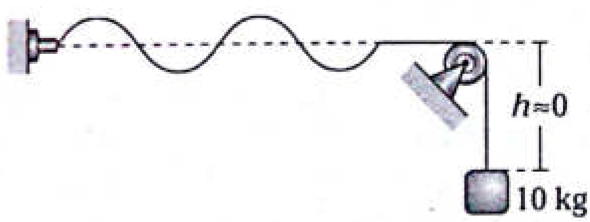
A) VFV
B) FFV
C) VVV
D) FFF
E) VVF

12. Se muestra el perfil de una onda transversal, determine la función de la onda.



A) $\vec{y} = 0{,}2\,\text{sen}\,\pi(2t - x + 1)$ m
B) $\vec{y} = 0{,}1\,\text{sen}\,\pi(t + x + 1)$ m
C) $\vec{y} = 0{,}1\,\text{sen}\,2\pi\left(t - x + \frac{1}{3}\right)$ m
D) $\vec{y} = 0{,}1\,\text{sen}\,2\pi\left(t - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$ m
E) $\vec{y} = 0{,}1\,\text{sen}(2\pi(t - x + 1))$ m

13. Dada la siguiente función de onda:
$\vec{y} = 0{,}7\,\text{sen}\,\pi(2t - 0{,}1x)$
para una onda transversal, calcule la densidad lineal de la cuerda. ($g=10\ m/s^2$).

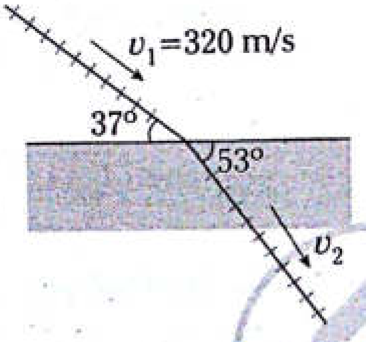


A) 0,12 kg/m
B) 0,29 kg/m
C) 0,25 kg/m
D) 0,17 kg/m
E) 0,11 kg/m

14. En la refracción del sonido, su rapidez de propagación se reduce a un 80%. ¿En qué porcentaje varía la longitud de onda?

A) 80%
B) 30%
C) 0%
D) 20%
E) 35%

15. Se muestra el perfil de una onda sonora al refractarse. Calcule υ_2.



A) 240 m/s
B) 180 m/s
C) 410 m/s
D) 420 m/s
E) 290 m/s

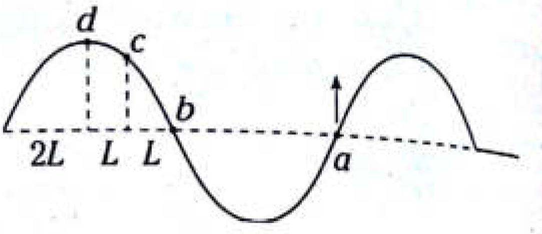
16. En una cuerda se cuentan 4 vientres cuando se establece una onda estacionaria, y si la tensión en la cuerda se cuadriplica, se cuentan 8 vientres. ¿Cuál es la nueva frecuencia? Considere para el primer caso una frecuencia de 25 Hz.

A) 50 Hz
B) 100 Hz
C) 200 Hz
D) 80 Hz
E) 120 Hz

17. Dada una onda estacionaria, se tiene la siguiente función de onda:
$\vec{y} = 2{,}1\,\text{sen}\,\pi t\cos\pi x$
Calcule en qué armónico se presenta la onda si la cuerda es de 8 m de longitud.

A) 8.°
B) 7.°
C) 6.°
D) 4.°
E) 3.°

18. Dado el perfil de onda adjunto, indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda.



I. La onda se propaga hacia la derecha.
II. Para las partículas b y c se cumple $\dfrac{\upsilon_b}{\upsilon_c} = \sqrt{2}$
III. La partícula c está descendiendo.

A) FVV
B) VFF
C) VVV
D) FFF
E) VVF

19. Dada una onda mecánica transversal, se tiene la siguiente función de onda:

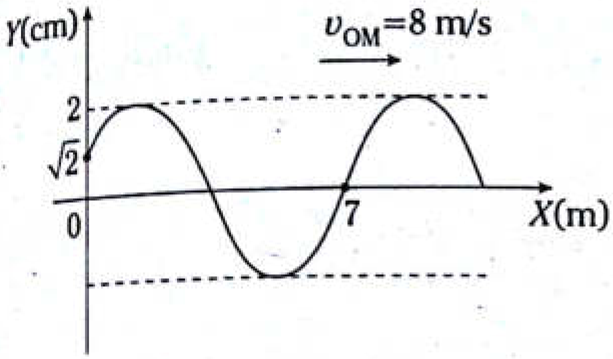
$\vec{y} = 0{,}8\,\text{sen}(10t + 2x + \pi)(\text{m})$.

Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

I. Las partículas alcanzan una máxima rapidez de 8 m/s.
II. Para 2 partículas separadas a lo largo del eje X una distancia $\dfrac{\pi}{3}$ m, la diferencia de fase es $\dfrac{2\pi}{3}$ rad.
III. La velocidad de propagación de la onda mecánica es $-5\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\hat{\imath}$.

A) VVF
B) FFV
C) VVV
D) FFF
E) FVV

20. Se muestra el perfil de una onda transversal en $t=0$. Determine la función de onda que corresponda.



A) $\vec{y}=0{,}02\,\text{sen}\,2\pi\left(t-8x+\dfrac{1}{8}\right)$ m

B) $\vec{y}=0{,}02\,\text{sen}\,2\pi(8t+x+1)$ m

C) $\vec{y}=0{,}02\,\text{sen}\,2\pi\left(t-\dfrac{x}{8}+\dfrac{3}{8}\right)$ m

D) $\vec{y}=0{,}02\,\text{sen}\,2\pi\left(t-x+\dfrac{3}{8}\right)$ m

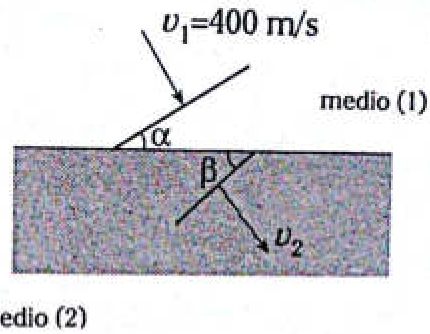
E) $\vec{y}=0{,}02\,\text{sen}\,2\pi\left(8t-x+\dfrac{3}{8}\right)$ m

21. Cuando se da la refracción de la onda desde la cuerda (1) a la (2), la longitud de onda se reduce a la tercera parte. Calcule la densidad lineal de la cuerda (2). ($\mu_1=0{,}36$ kg/m).

A) 3,24 kg/m
B) 0,09 kg/m
C) 0,04 kg/m
D) 0,29 kg/m
E) 1,44 kg/m

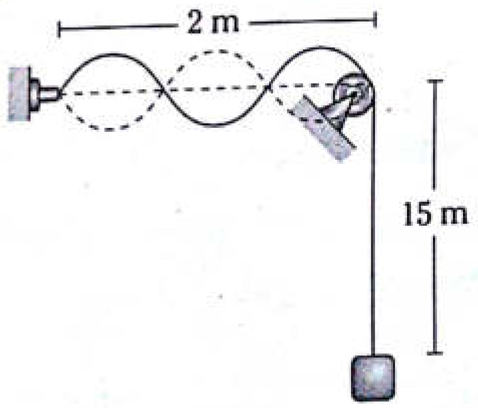
22. Se muestra el frente de onda antes y después de la refracción. Calcule υ_2.

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta}=\frac{4}{5}$$



A) 300 m/s B) 400 m/s C) 500 m/s
D) 375 m/s E) 320 m/s

23. Se muestra una cuerda tensa donde se ha establecido una onda estacionaria. Si se sabe que la frecuencia fundamental es 10 Hz, determine la masa del bloque. Considere cuerda de densidad lineal de 0,04 kg/m.



A) 6,4 kg B) 5,8 kg C) 4,0 kg
D) 3,4 kg E) 2,1 kg

Estática de fluidos

Capítulo XIII

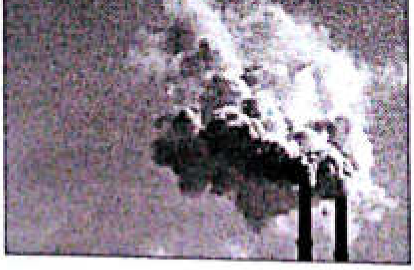
Objetivos

- Comprender el concepto de presión y presión hidrostática, así como su importancia en el análisis sobre cuerpos en equilibrio mecánico.
- Reconocer, graficar y calcular la fuerza de empuje como parte de la interacción del líquido en reposo sobre un cuerpo sumergido en este.
- Aplicar el principio de Pascal para el desarrollo de los problemas.

1. Fluidos

Un fluido es una sustancia en fase líquida o gaseosa, cuyas moléculas presentan una fuerza de atracción débil comparada con los sólidos; por ello, las moléculas tienen mayor movilidad y así pueden ocupar y adoptar la forma del recipiente que la contiene, la movilidad se debe a que las moléculas pueden resbalar una sobre otra al estar sometidas a fuerzas externas; es decir, la sustancia fluye.

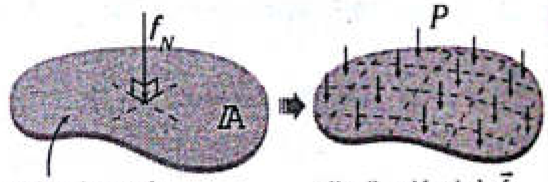
agua potable



dióxido de azufre

2. Presión

Es aquella magnitud física que nos permite cuantificar la acción de distribuir una fuerza perpendicular a una superficie por cada unidad de área.



área sobre la cual actúa la $\vec{f}_N$

distribución de la $\vec{f}_N$ por unidad de área

$$\boxed{P=\frac{f_N}{\mathbb{A}}}$$

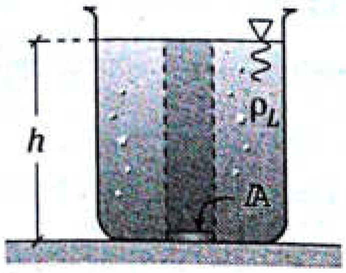
unidad: $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ <> Pascal (Pa)

3. Presión hidrostática

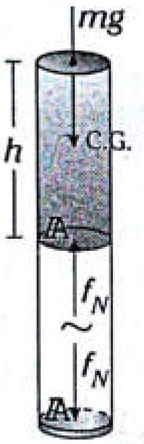
Es la presión que ejerce los líquidos en reposo; por ejemplo, el agua contenida en una pecera y el agua que almacena Sedapal en tanques grandes ubicados a determinada altura.

La presión del agua en las tuberías de Sedapal permite la salida de agua en nuestros hogares.

Consideremos un recipiente que contiene un líquido en reposo. Luego colocamos cuidadosamente una moneda en el fondo del recipiente. Podemos notar que por encima de la superficie de la moneda existe una columna de líquido que la presiona al apoyarse en ella contra la base del recipiente.



Ahora hagamos una separación imaginaria entre la columna de líquido y la moneda.



Finalmente, la presión de la columna de líquido sobre la moneda será

$$P_H = \frac{f_N}{A} \qquad (*)$$

Para el equilibrio mecánico de la columna de líquido, se tiene

$$\sum F(\uparrow) = \sum F(\downarrow)$$

$$f_N = mg$$

donde m es la masa de la columna del líquido por encima de la moneda.

En (*)

$$P_H = \frac{mg}{A} = \frac{\rho_{\text{líq}} \cdot V_{\text{líq}} \cdot g}{A}$$

$$P_H = \rho_{\text{líq}} \cdot \frac{h \cdot A \cdot g}{A}$$

Luego, obtenemos

$$\boxed{P_H = \rho_{\text{líq}} \cdot h \cdot g}$$

donde

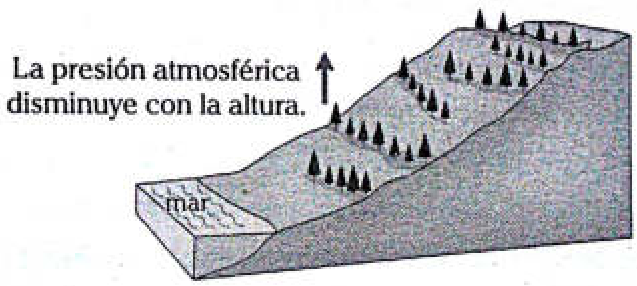
- $\rho_{\text{líq}}$: densidad del líquido (kg/m^3)
- h : profundidad (m)
- P_H : presión hidrostática (Pa)

NOTA

La presión hidrostática aumenta con la profundidad h.

4. Presión atmosférica

La presión atmosférica es la fuerza por unidad de área que ejerce el aire sobre la superficie terrestre.



La presión atmosférica normalizada (1 atmósfera) fue definida como igual a 101,3 kPa. Sin embargo, a partir de 1982, la IUPAC recomendó que si se trata de especificar las propiedades físicas de las sustancias, la presión normalizada debería definirse como exactamente 100 kPa.

Cuando se desea calcular la **presión absoluta** o **total** a una profundidad h de la superficie de un líquido, debemos sumar la presión atmosférica.

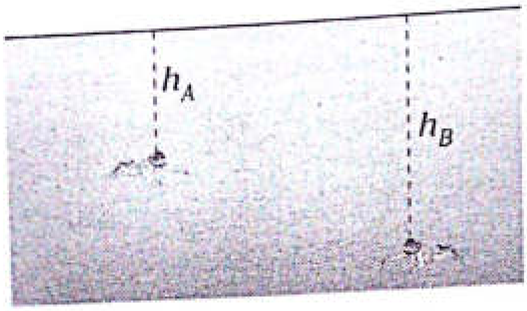
$$\boxed{P_{\text{absoluta}} = P_{\text{hidrostática}} + P_{\text{atmosférica}}}$$

A nivel del mar

$$P_{\text{atmosférica}} = 1 \text{ atm} = 100 \text{ kPa}$$

4.1. PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE LA HIDROSTÁTICA

Consideremos dos buzos sumergidos a dos profundidades distintas.



Presión absoluta a la profundidad h_A

$$P_A = P_{\text{hidrostática}} + P_{\text{atmosférica}}$$

$$P_A = \rho_L g h_A + P_{\text{atmosférica}} \qquad \text{(I)}$$

Presión absoluta a la profundidad h_B

$$P_B = P_{\text{hidrostática}} + P_{\text{atmosférica}}$$

$$P_B = \rho_L g h_B + P_{\text{atmosférica}} \qquad \text{(II)}$$

Restamos (II) y (I).

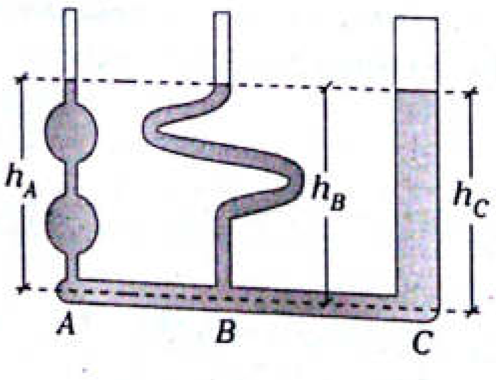
$$P_B - P_A = \rho_L g h_B - \rho_L g h_A$$

$$\boxed{P_B - P_A = \rho_L g (h_B - h_A)}$$

Por lo tanto, la diferencia de presiones entre dos puntos de un mismo líquido depende de la diferencia de profundidades.

4.2. VASOS COMUNICANTES

Si los puntos se encuentran a la misma profundidad, las presiones son iguales.



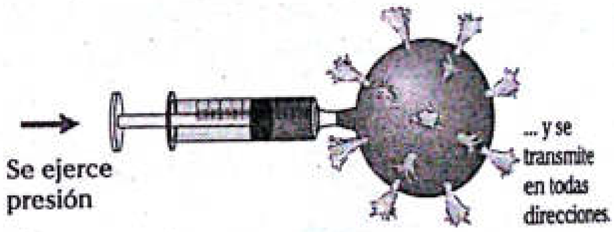
La recta inferior trazada que pasa por A, B y C se denomina recta isóbara, y se cumple que las presiones absolutas son iguales.

$$\boxed{P_A = P_B = P_C}$$

5. Principio de Pascal

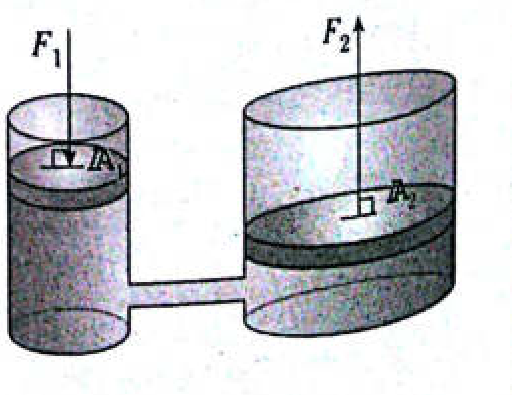
El físico francés Blaise Pascal enunció lo siguiente:

"La presión ejercida sobre un fluido incompresible y en equilibrio dentro de un recipiente de paredes indeformables se transmite con igual intensidad en todas las direcciones y en todos los puntos del fluido"



5.1. APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE PASCAL EN LA PRENSA HIDRÁULICA

La prensa hidráulica es un dispositivo conformado por vasos comunicantes impulsados por pistones de diferentes áreas $(\mathbb{A}_2 > \mathbb{A}_1)$ que, mediante una pequeña fuerza sobre el pistón de menor área, permite obtener una fuerza mayor en el pistón de mayor área.



La fuerza F_1 aplicada al pistón de área $\mathbb{A}_1$ ejerce una presión adicional, este incremento de la presión se transmite hacia el pistón de área $\mathbb{A}_2$, tal que se cumple

$$\Delta P_1 = \Delta P_2$$

$$\frac{F_1}{\mathbb{A}_1} = \frac{F_2}{\mathbb{A}_2}$$

$$\boxed{F_2 = \frac{\mathbb{A}_2}{\mathbb{A}_1} F_1}$$

Como

$$\mathbb{A}_2 > \mathbb{A}_1 \rightarrow F_2 > F_1$$

Esto significa que la prensa hidráulica aumentó la fuerza aplicada.

OBSERVACIÓN

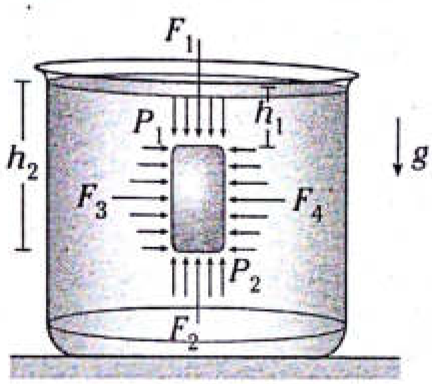
Este mecanismo se utiliza en los gatos hidráulicos para elevar cargas pesadas como autos, en ascensores, en brazos y frenos hidráulicos, etc.

6. Empuje hidrostático

Con algo de práctica podemos flotar con relativa facilidad en la superficie del agua de una piscina o con ayuda de unos flotadores. ¿Cómo explicamos este hecho?

Esto se debe a que el líquido en reposo ejerce una fuerza hacia arriba denominada **empuje**, evitando que nos hundamos, tal como ocurre con un bloque de hielo, un corcho o un barco.

Para un mejor entendimiento y detalle, examinemos la interacción de un líquido en reposo sobre un bloque en forma de paralelepípedo, que está sumergido completamente en este.



Las fuerzas que actúan sobre las caras laterales se anulan, por efecto de estas fuerzas el cuerpo solo se comprime. Pero las fuerzas que actúan sobre las caras superior e inferior del cuerpo no son iguales.

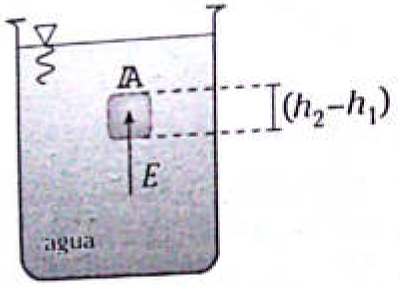
- $F_1 = P_1 \mathbb{A}$
- $F_2 = P_2 \mathbb{A}$

Como

$$P_2 > P_1 \rightarrow F_2 > F_1$$

Debido a esto, el cuerpo es empujado hacia arriba con una fuerza resultante $F_2 - F_1$, denominada empuje del líquido $(E_{\text{líq}})$.

El efecto resultante del líquido sobre el cuerpo nos queda así:



$$E_{\text{líq}}=F_2-F_1$$

$$E_{\text{líq}}=P_2A-P_1A=(P_2-P_1)A$$

$$E_{\text{líq}}=\rho_{\text{líq}}\cdot g(h_2-h_1)A$$

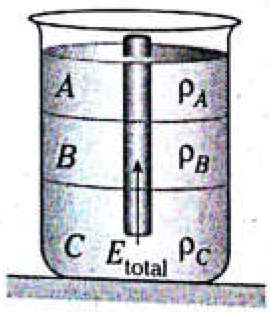
$$\rightarrow \boxed{E_{\text{líq}}=\rho_{\text{líq}}\cdot g\cdot V}$$

donde

- V : volumen sumergido (m^3) que puede ser una parte del volumen o el total del volumen del cuerpo
- $\rho_{\text{líq}}$: densidad del líquido (kg/m^3)
- g : aceleración de la gravedad (m/s^2)

6.1. CONSIDERACIONES

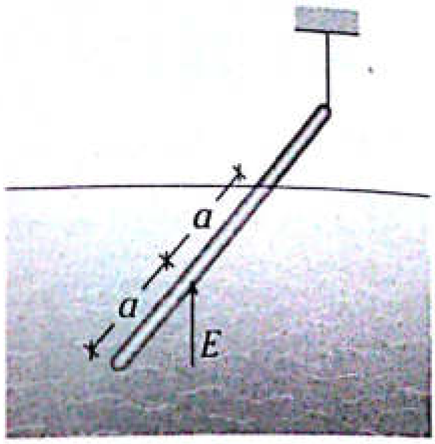
- Si un cuerpo está sumergido en dos o más líquidos de distintas densidades, entonces experimenta fuerzas de empuje por parte de cada líquido.



$$\rho_A < \rho_B < \rho_C$$

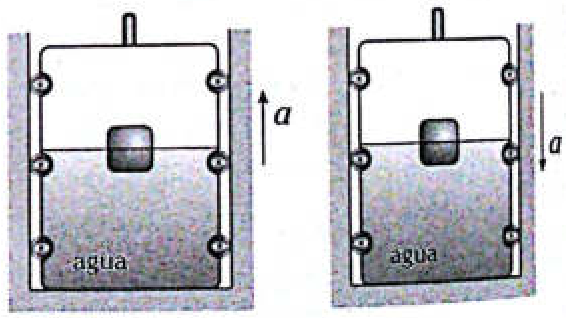
$$\rightarrow E_{\text{total}}=E_A+E_B+E_C$$

- La fuerza de empuje actúa en el centro geométrico del volumen que está sumergido, sea el cuerpo homogéneo o no lo sea.



- Consideremos un recipiente que contiene un líquido y este acelera; por ejemplo, en un ascensor.

Observemos los siguientes casos:

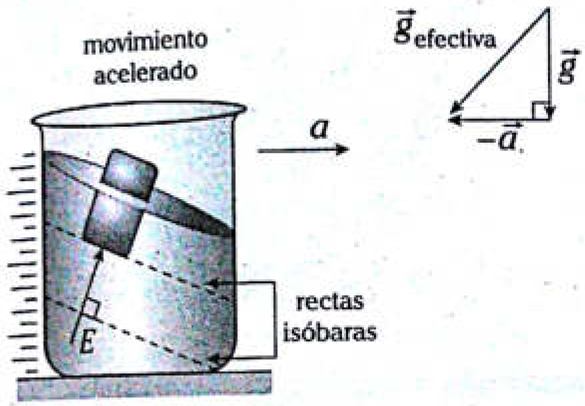


- Si el ascensor asciende acelerando con a, entonces la gravedad efectiva es $g_{\text{efectiva}}=g+a$
- Si el ascensor desciende acelerando con a, entonces la gravedad efectiva es $g_{\text{efectiva}}=g-a$

Así el empuje sobre el cuerpo sumergido, respecto del nivel de referencia del ascensor, se calcula así:

$$\boxed{E=\rho_{\text{líq}}\cdot g_{\text{efectiva}}\cdot V_{\text{sum}}}$$

- Si el recipiente que contiene el líquido acelera horizontalmente, entonces el nivel del líquido se ubica diagonalmente haciendo que las rectas isóbaras sean paralelas a ese nivel, y el empuje sea perpendicular a las isóbaras.

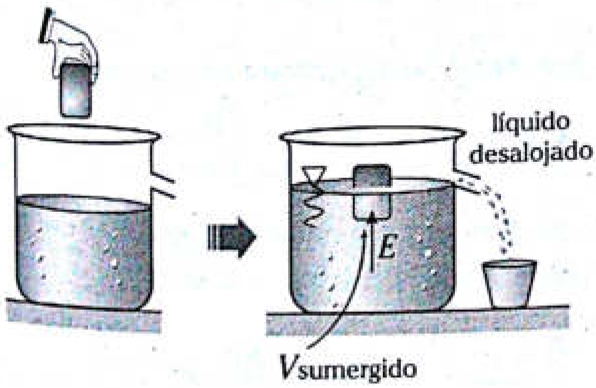


donde

$$g_{efectiva}=\sqrt{g^2+a^2}$$

7. Principio de Arquímedes

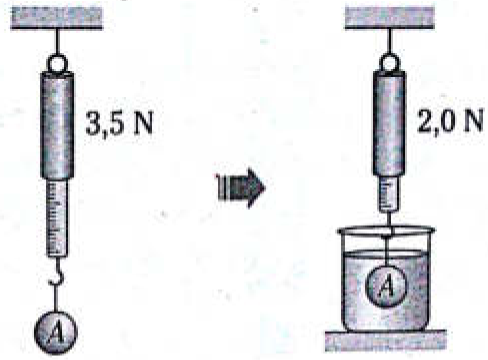
El principio de Arquímedes afirma que un cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido en reposo experimenta un empuje vertical y hacia arriba igual al peso del volumen del líquido desalojado.



$\boxed{E\text{=peso del líquido desalojado}}$

8. Peso aparente

Cuando un cuerpo se encuentra sumergido totalmente en un líquido y deseamos medir su peso, nos resulta que este es menor que estando fuera del líquido, es decir, da la apariencia que es más ligero. ¿Por qué?



cuerpo pesado en aire > cuerpo pesado en agua (peso aparente)

Este hecho se da porque al sumergir el cuerpo en el líquido, este ejerce una fuerza hacia arriba (empuje) que resta al peso real y hace que la medición sea menor que el peso real en aire.

DCL de la esfera sumergida en el líquido

Para el equilibrio de la esfera, se cumple

$$\sum F(\uparrow)=\sum F(\downarrow)$$

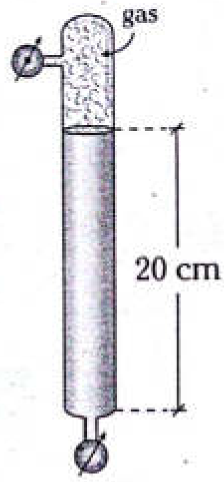
$\rightarrow$ peso aparente $+E$=peso

Despejamos.

$\boxed{\text{peso aparente=peso}-E}$

Problema N.º 1

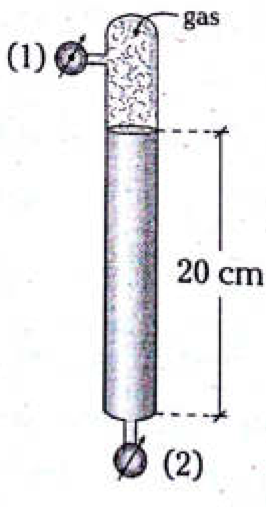
Si las lecturas de los barómetros difieren en 2 kPa, determine la densidad del líquido en el tubo. (g=10 m/s^2)



Resolución

Según el gráfico, la presión del gas es medida por el barómetro (1).

$\rightarrow \quad P_1=P_{gas}$



El barómetro (2) mide la suma de presión del gas y la hidrostática.

$$P_2=\underbrace{P_{gas}}+P_{hid}$$

$$P_2=P_1+\rho_{líq}\cdot g\cdot h$$

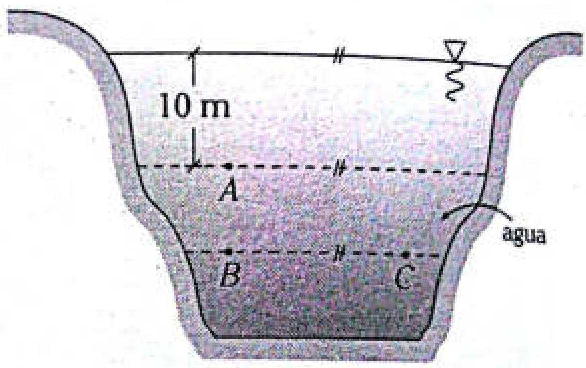
$$\underbrace{P_2-P_1}_{2\text{ kPa}}=\rho_{líq}\cdot g\cdot h$$

$$2\times10^3=\rho_{líq}\times10\times0{,}2$$

$$\therefore \quad \rho_{líq}=1000\text{ kg/m}^3$$

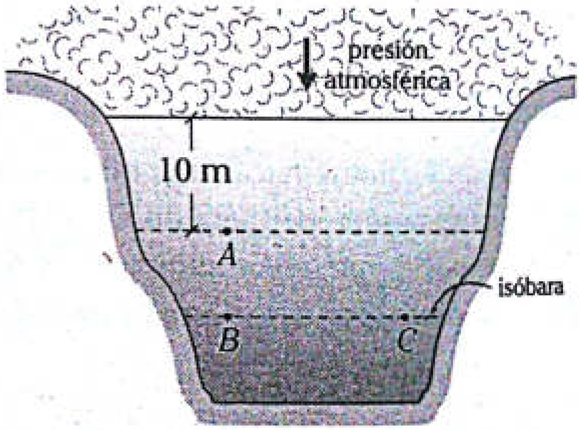
Problema N.º 2

Si la diferencia de presiones entre B y A es de 3 atm, determine la presión total en el punto C. (P_{atm}=10^5 Pa; g=10 m/s^2; 1 atm=10^5 Pa)



Resolución

Analizamos.



En la recta isóbara inferior se cumple

$$P_{abs(B)}=P_{abs(C)}$$

Luego, por el principio fundamental de la hidrostática, entre A y B se cumple

$$\underbrace{P_{abs(B)}}-P_{abs(A)}=3\text{ atm}$$

$$\rightarrow \quad P_{abs(C)}-\left(P_{atm}+\rho_{agua}\cdot g\cdot h\right)=3\times10^5$$

$$P_{abs(C)}-\left(10^5+10^3\times10\times10\right)=3\times10^5$$

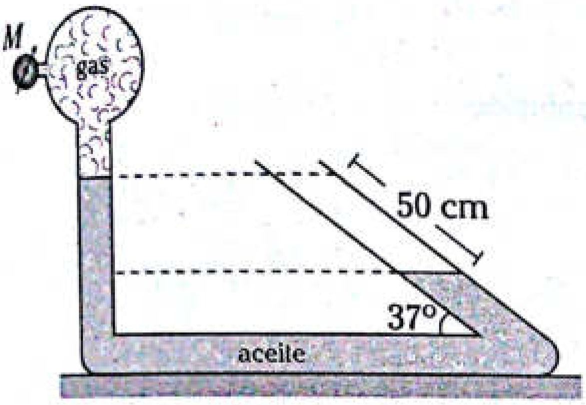
$$P_{abs(C)}-\left(2\times10^5\right)=3\times10^5$$

$$\therefore \quad P_{abs(C)}=5\times10^5\text{ Pa}$$

Problema N.° 3

Determine cuánto registra el manómetro (M) si la densidad del aceite es 800 kg/m^3.

$(P_{atm}=10^5 \text{ Pa}; g=10 \text{ m/s}^2)$

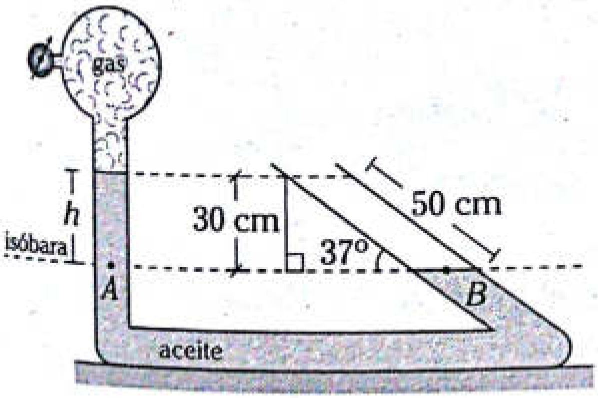


Resolución

La presión manométrica se calcula así:

$$P_{man}=P_{(gas)}-P_{atm} \qquad \text{(I)}$$

Trazamos la recta isóbara, tal como se muestra.



Se cumple

$$P_{abs(A)}=P_{abs(B)}$$

$$P_{gas}+\rho_{aceite}\cdot g\cdot h=P_{atm}$$

$$P_{gas}-P_{atm}=-\rho_{aceite}\cdot g\cdot h \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (I) en (II).

$$P_{man}=-800\times 10\times 0{,}3$$

$$P_{man}=-2400 \text{ Pa}$$

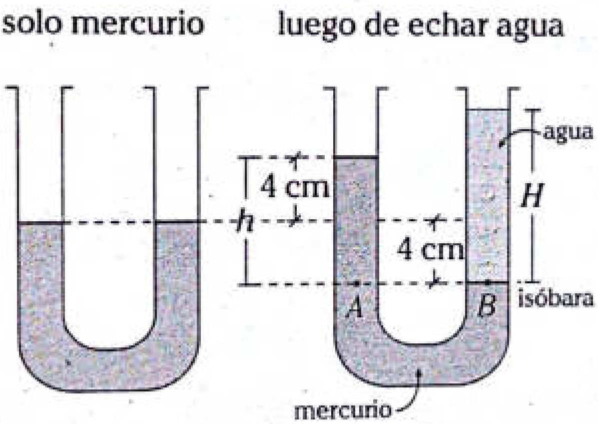
$$\therefore \quad P_{man}=-2{,}4 \text{ kPa}$$

Problema N.° 4

Un tubo en U, de sección transversal constante, contiene mercurio. ¿Qué altura de agua se debe verter lentamente en una rama para que en el equilibrio el mercurio en la otra rama se eleve 4 cm? $(\rho_{Hg}=13{,}6 \text{ g/cm}^3; \rho_{H_2O}=1 \text{ g/cm}^3)$.

Resolución

Graficamos.



Al echar agua por la rama derecha, esta presiona al mercurio y desciende, de este modo, en la otra rama el mercurio se eleva.

Como el tubo es de sección uniforme, entonces si un nivel se eleva 4 cm, el otro nivel desciende 4 cm.

En la recta isóbara, se cumple

$$P_{abs(A)}=P_{abs(B)}$$

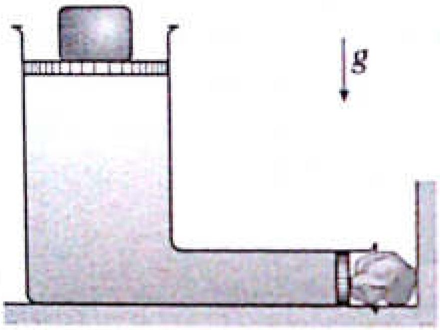
$$\cancel{P_{atm}}+\rho_{Hg}\cdot g\cdot h=\cancel{P_{atm}}+\rho_{agua}\cdot g\cdot H$$

$$13{,}6\times \cancel{g}\times 8=1\times \cancel{g}\times H$$

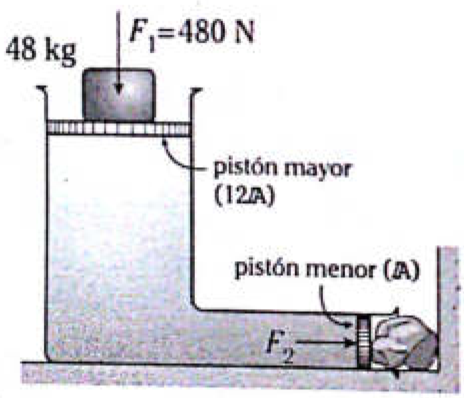
$$\therefore \quad H=108{,}8 \text{ cm}$$

Problema N.º 5

Un recipiente contiene aceite, y los pistones del recipiente están en la relación de 1 a 12. Si al colocar un objeto de 48 kg en el pistón mayor se nota que el pistón menor presionó a la roca y logra rajarla, calcule el incremento de la fuerza que aplica el pistón menor a la roca luego de colocar el objeto de 48 kg. (g=10 m/s^2).



Resolución



donde F_2 es el incremento de la fuerza que ejerce el pistón a la roca.

Por el principio de Pascal

$$\Delta P_{(1)}=\Delta P_{(2)}$$

$$\frac{F_1}{A_1}=\frac{F_2}{A_2}$$

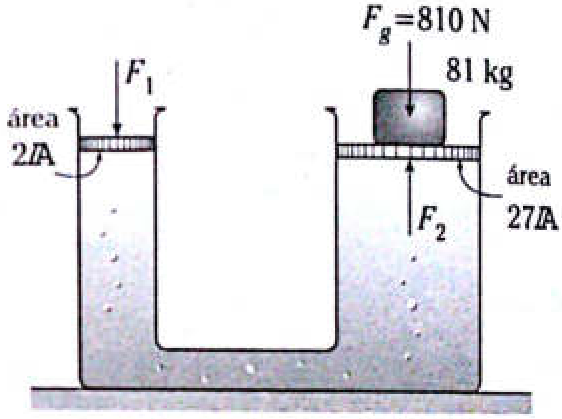
$$\frac{480}{12\cancel{A}}=\frac{F_2}{\cancel{A}}$$

$\therefore \quad F_2=40$ N

Problema N.º 6

En una prensa hidráulica cuyos pistones tienen áreas que están en la relación de 2 a 27, ¿cuánta fuerza es necesario aplicar al pistón de menor área para mantener en reposo a un cuerpo de 81 kg en el pistón de mayor área? (g=10 m/s^2)

Resolución



Al aplicar la fuerza F_1, el líquido empuja hacia arriba con una fuerza incrementada en F_2, la cual debe equilibrar al peso del cuerpo; por ello

$$F_2=F_{g(\text{cuerpo})}$$

$$F_2=810 \text{ N}$$

Por el principio de Pascal, en cada pistón se cumple

$$\Delta P_{(1)}=\Delta P_{(2)}$$

$$\frac{F_1}{2\cancel{A}}=\frac{F_2}{27\cancel{A}}$$

$$\frac{F_1}{2}=\frac{810}{27}$$

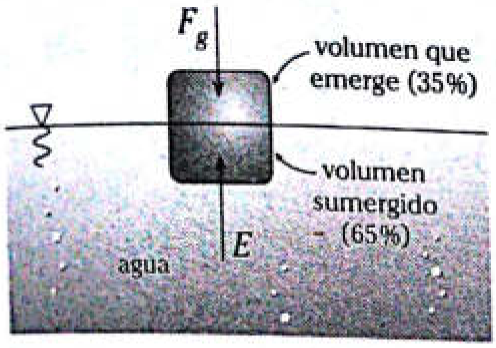
$\therefore \quad F_1=60$ N

Problema N.° 7

Un bloque flota en agua con el 35% de su volumen fuera de esta. ¿Cuál es la densidad del bloque? (ρ_{agua}=1 g/cm^3; g=10 m/s^2).

Resolución

Realizamos el DCL del bloque.



Para el equilibrio del bloque, se cumple

$$F_g=E$$

$$\rightarrow \quad m\cdot \cancel{g}=\rho_{agua}\cancel{g}V_{sum}$$

$$m=\rho_{agua}\times 65\%V$$

$$\frac{m}{V}=\rho_{agua}\times 65\%$$

$$\rho_{bloque}=1000\times 0{,}65$$

$$\therefore \quad \rho_{bloque}=650 \text{ kg/m}^3$$

Problema N.° 8

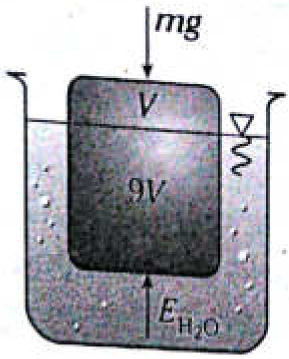
En un recipiente con agua se encuentra flotando un cuerpo sólido uniforme con el 90% de su volumen dentro del agua. Al recipiente se le agrega lentamente aceite hasta que el cuerpo queda totalmente sumergido, quedando el 20% del cuerpo dentro del agua. Calcule la densidad del aceite (en kg/m^3).

UNI 2017 - I

Resolución

Graficamos.

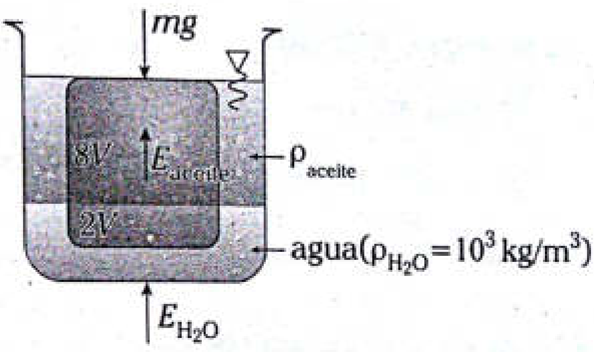
- Antes de echar aceite



$$F_g=E_{H_2O}$$

$$mg=\rho_{H_2O}\cdot g(9V) \qquad \text{(I)}$$

- Después de echar aceite



$$F_g=E_{H_2O}+E_{aceite}$$

$$mg=\rho_{H_2O}\cdot g(2V)+\rho_{aceite}\cdot g(8V) \qquad \text{(II)}$$

De (I) en (II), tenemos

$$\rho_{H_2O}\cdot g(9V)=\rho_{H_2O}\cdot g(2V)+\rho_{aceite}\cdot g(8V)$$

$$\rightarrow \quad \frac{7}{8}\rho_{H_2O}=\rho_{aceite}$$

$$\therefore \quad \rho_{aceite}=875 \text{ kg/m}^3$$

Problema N.° 9

Un objeto de 4 kg es sumergido completamente en agua y luego se mide su peso, el cual es 30 N. Determine la densidad del objeto.

$(\rho_{agua}=1000\ kg/m^3;\ g=10\ m/s^2)$

Resolución

Si el objeto es de 4 kg, su peso medido fuera del agua es 40 N. Al sumergirlo en agua se hace menos pesado debido al empuje que actúa sobre él; por ello, tiene un peso aparente, y este vale 30 N.

Se sabe que

$$(\text{peso aparente})=(\text{peso en aire})-E$$

$$30=40-E$$

$$\rightarrow\quad E=10\ N$$

Calculamos el empuje.

$$E=\rho_{agua}\cdot g\cdot V_{sum}$$

$$\cancel{10}=1000\times\cancel{10}\times V_{sum}$$

$$V_{sum}=10^{-3}\ m^3$$

Hallamos la densidad del objeto.

$$\rho_{objeto}=\frac{m}{V}$$

$$\rho_{objeto}=\frac{4\ kg}{10^{-3}\ m^3}$$

$$\therefore\quad \rho_{objeto}=4000\ kg/m^3$$

Problema N.° 10

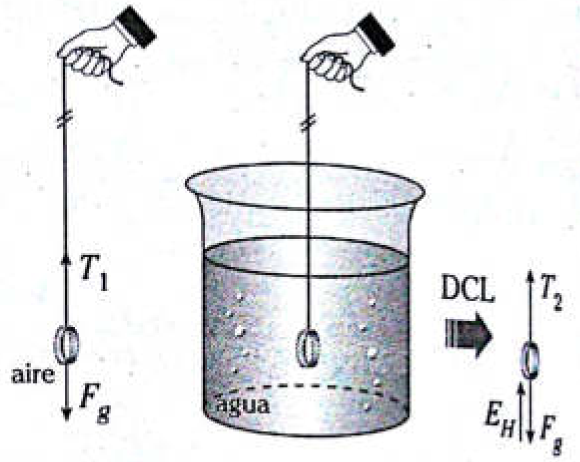
Al sumergirse en agua un anillo de cierto material, este tiene el 90% del peso que tiene en el aire. Calcule la razón de la densidad del anillo con respecto a la del agua.

Densidad del agua$=10^3$ kg/m^3

UNI 2015 - II

Resolución

Realizamos el DCL en aire y en agua.



Al decir "peso", se están refiriendo a lo que indicaría un instrumento; por ejemplo, el dinamómetro. Por lo tanto, el peso es igual a la tensión.

Entonces, en el aire

$$T_1=F_g=mg$$

Cuando el anillo se sumerge en el agua, la lectura del dinamómetro (peso aparente) disminuye por efecto del empuje hidrostático (E_H).

$$\underbrace{\text{Peso aparente}}_{90\%\ \text{Peso}}=\text{Peso}-E$$

$$E=\text{Peso}-90\%\text{Peso}$$

$$\rho_{agua}\cancel{g}V=10\%(m\cancel{g})$$

$$\rho_{agua}=\frac{1}{10}\left(\frac{m}{V}\right)$$

$$\rho_{agua}=\frac{1}{10}\rho_{anillo}$$

$$\therefore\quad \frac{\rho_{anillo}}{\rho_{agua}}=10$$

NIVEL BÁSICO

1. Si un líquido de 2 L de volumen es llevado a una balanza y esta indica 1,8 kg, calcule la densidad del líquido, en kg/m^3.
Considere $1\ L=10^{-3}\ m^3$.

A) 800 B) 450 C) 900
D) 600 E) 500

2. Una tapa de gaseosa tiene un diámetro de 2,8 cm. Si la presión atmosférica es de 10^5 Pa, calcule la fuerza que ejerce la atmósfera a la superficie de la tapa.
Considere $\pi=3,14$.

A) 61,5 N B) 56,4 N C) 48,6 N
D) 72,2 N E) 80,5 N

3. Una persona de 60 kg compra un sillón individual de base cuadrada, de 60 cm de lado y de 10 kg de masa. Si una tarde la persona se sienta en el sillón para ver su programa de TV, calcule la presión que ejerce el sillón al piso horizontal. Considere que toda la superficie horizontal del sillón está en contacto con el piso. $(g=10\ m/s^2)$.

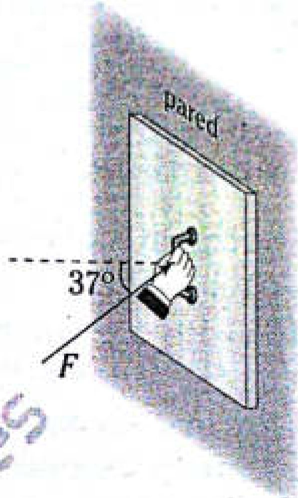
A) 1250 Pa
B) 1660 Pa
C) 2460 Pa
D) 2122 Pa
E) 1944 Pa

4. Un estudiante de ingeniería se compra una *laptop* y entre las especificaciones técnicas de su equipo dice lo siguiente:
- peso (kg)=2,19
- dimensiones (cm)=2,41×38,40×25,45

Considerando $g=10\ m/s^2$, calcule la presión que ejerce la *laptop* sobre el escritorio de trabajo del estudiante.

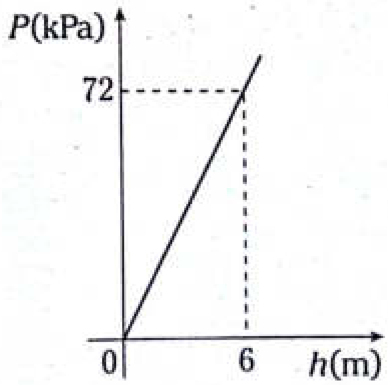
A) 142 Pa B) 224 Pa C) 261 Pa
D) 168 Pa E) 354 Pa

5. Un albañil de construcción tarrajea una pared con arena fina. Si su herramienta de trabajo tiene una superficie de 15 cm×20 cm, y este aplica una fuerza $F=50$ N, tal como se muestra, calcule la presión que ejerce su herramienta de trabajo a la pared.



A) 1333 Pa B) 1000 Pa C) 1667 Pa
D) 2144 Pa E) 2443 Pa

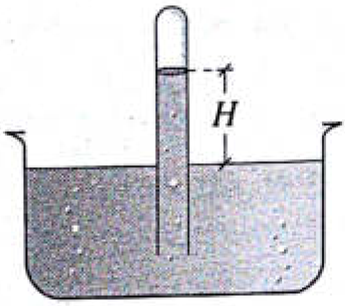
6. La gráfica muestra la presión hidrostática en función de la profundidad. Determine la densidad del líquido, en kg/m^3.
$(g=10\ m/s^2)$



A) 800 B) 900 C) 1000
D) 1200 E) 1500

7. Calcule aproximadamente la altura H, en metros, que alcanzará el agua en un tubo de Torricelli si la presión exterior es de 2 atm. ($1\ \text{atm}=1{,}013\times10^5\ \text{Nm}^{-2}$; densidad del agua$=1000\ \text{kg m}^{-3}$; $g=9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$)

A) 5,25
B) 10,35
C) 20,65
D) 30,65
E) 40,75

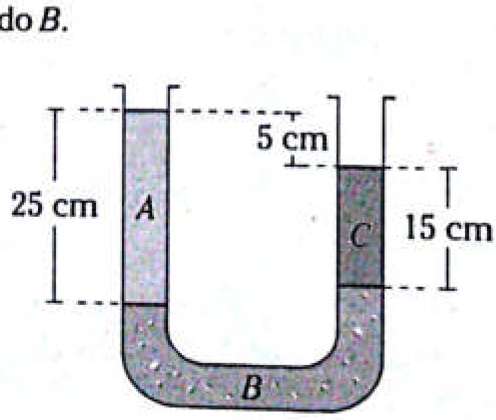


UNI 2014 - I

8. Cuando un líquido A, de densidad $1{,}5\ \text{g/cm}^3$, se vierte en un recipiente la presión hidrostática en el fondo del recipiente es 0,2 atm. Si en lugar de A se vierte otro líquido B hasta la misma altura que A, entonces la presión hidrostática en el fondo resulta ser de 0,5 atm. Calcule la densidad del líquido B, en g/cm^3. ($1\ \text{atm}=10^5\ \text{Pa}$; $g=10\ \text{m/s}^2$).

A) 3,00　　B) 2,75　　C) 3,25
D) 2,25　　E) 3,75

9. En un tubo en U se tienen tres líquidos no miscibles (A, B y C). Si $\rho_A=500\ \text{kg/m}^3$ y $\rho_C=300\ \text{kg/m}^3$, determine la densidad del líquido B.



A) $1600\ \text{kg/m}^3$
B) $2200\ \text{kg/m}^3$
C) $800\ \text{kg/m}^3$
D) $2400\ \text{kg/m}^3$
E) $200\ \text{kg/m}^3$

10. En un edificio, se sabe que la presión en la tubería de agua se debe a la altura a la que se encuentra el tanque de agua en la azotea respecto a uno de los pisos del edificio. Si en el 5.º piso la presión es P_0 y en el 2.º piso es $P_0+88{,}2$, calcule la altura entre el 2.º y 5.º piso del edificio. Considere que las presiones están en 10^3 Pa, además $\rho_{\text{agua}}=1000\ \text{kg/m}^3$ y $g=9{,}8\ \text{m/s}^2$.

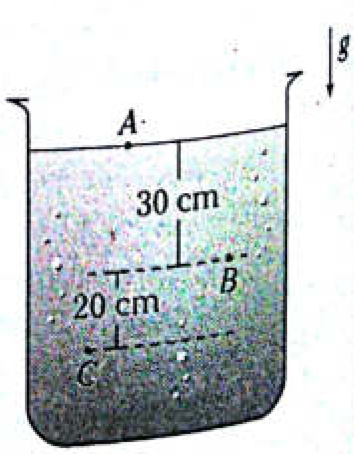
A) 5 m　　B) 9 m　　C) 6 m
D) 8 m　　E) 10 m

11. Una piscina para adultos está completamente llena de agua. Si la relación de presiones hidrostáticas entre el fondo y un punto ubicado a 2 m de altura del fondo es de 5 a 1, calcule la profundidad de la piscina.

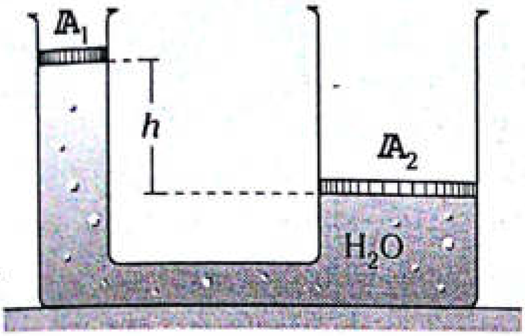
A) 2,2 m　　B) 3,0 m　　C) 2,0 m
D) 2,5 m　　E) 1,5 m

12. Un recipiente contiene un líquido desconocido. Si la diferencia de presiones absolutas entre B y A es de 2,4 kPa, calcule la diferencia de presiones absolutas entre C y B. Considere $g=9{,}81\ \text{m/s}^2$.

A) 2,2 kPa
B) 2,0 kPa
C) 1,8 kPa
D) 1,2 kPa
E) 1,6 kPa

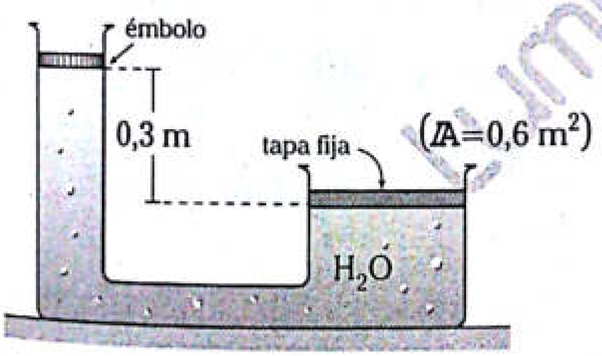


13. Los émbolos de áreas $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$ $(\mathbb{A}_2=200\,\mathbb{A}_1)$ se encuentran en reposo. Si sobre el émbolo de área $\mathbb{A}_2$ se ubica un bloque de 2 kN, determine el módulo de la fuerza vertical que se debe ejercer en el émbolo de área $\mathbb{A}_1$ para mantener el reposo en el nivel inicial mostrado.



A) 10 N B) 2 N C) 8 N
D) 200 N E) 100 N

14. Indique en cuánto se incrementa la fuerza que el agua ejerce a la tapa fija del recipiente que se muestra, luego de colocar un bloque de 5 kg sobre el émbolo de 0,2 m^2 de sección. $(g=10\text{ m/s}^2)$.



A) 200 N B) 250 N C) 100 N
D) 50 N E) 150 N

NIVEL INTERMEDIO

15. Un objeto flota en agua con el 60% de su volumen fuera de esta. Determine la densidad del objeto, en kg/m^3. $(\rho_{agua}=1000\text{ kg/m}^3)$.

A) 600 B) 400 C) 800
D) 200 E) 500

16. Un bloque cúbico de 30 cm de arista flota en agua con 2/3 de su volumen sumergido en el agua. Determine la fuerza vertical hacia abajo que debe aplicarse al bloque para sumergirlo completamente y mantenerlo en reposo. $(\rho_{agua}=1000\text{ kg/m}^3;\ g=10\text{ m/s}^2)$.

A) 100 N B) 120 N C) 60 N
D) 90 N E) 180 N

17. Un trozo de madera flota en agua con 1/5 de su volumen sumergido en este líquido. Si dicho trozo se pusiera en aceite y quedara flotando, ¿qué fracción de su volumen queda sumergido? Considere $\rho_{agua}=1000\text{ kg/m}^3$ y $\rho_{aceite}=800\text{ kg/m}^3$.

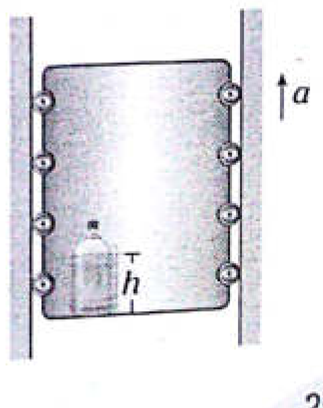
A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4
D) 1/5 E) 1/6

18. Halle el peso aparente, en newton, de 1 kg de aluminio sumergido en agua salada de densidad 1020 kg/m^3. Considere que la densidad del aluminio es 2700 kg/m^3 y $g=10\text{ m/s}^2$.

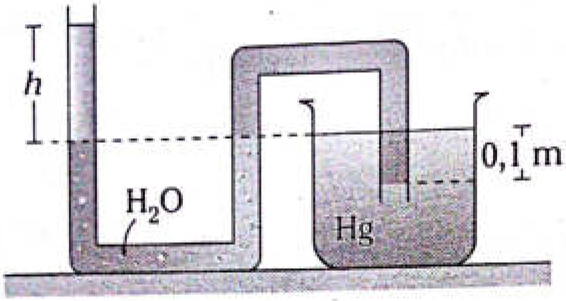
A) 4,23 B) 6,23 C) 8,23
D) 7,23 E) 5,23

19. Una joven lleva un bidón con agua $(\rho=1000\text{ kg/m}^3)$ a su departamento ubicado en el cuarto piso, para ello usa el ascensor colocando el bidón en la base de este. Si el ascensor sube con aceleración de 1,5 m/s^2, ¿en cuánto varía la presión hidrostática en el fondo del bidón? $(h=30\text{ cm};\ g=10\text{ m/s}^2)$

A) 0,45 kPa
B) 0,35 kPa
C) 0,25 kPa
D) 0,15 kPa
E) 0,75 kPa

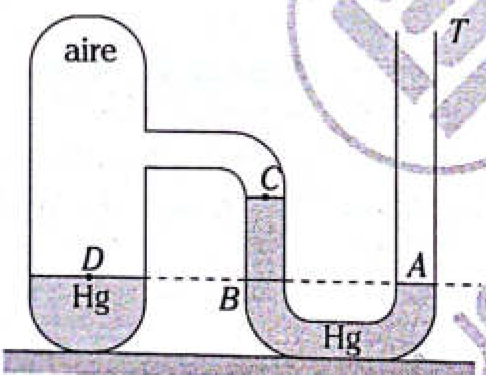


20. Determine el valor de h si los líquidos se encuentran en reposo. $(\rho_{Hg}=13{,}6\ g/cm^3;$ $g=10\ m/s^2;\ \rho_{H_2O}=1000\ kg/m^3)$.



A) 0,13 m B) 0,12 m C) 1,26 m
D) 1,36 m E) 1,13 m

21. La figura muestra un sistema que contiene aire y mercurio. El sistema está abierto solo por el tubo T.



Indique las proposiciones correctas.

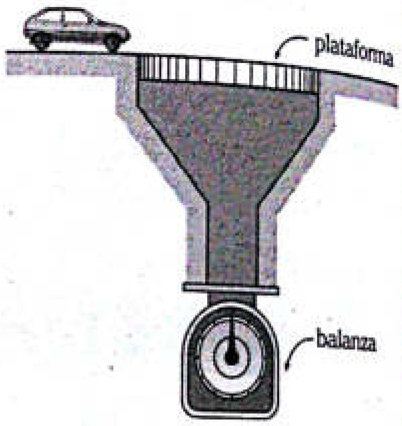
I. Las presiones en A, B y D son iguales.
II. La presión en D es mayor que la presión en A.
III. La presión en D es igual a la presión en C.

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) II y III

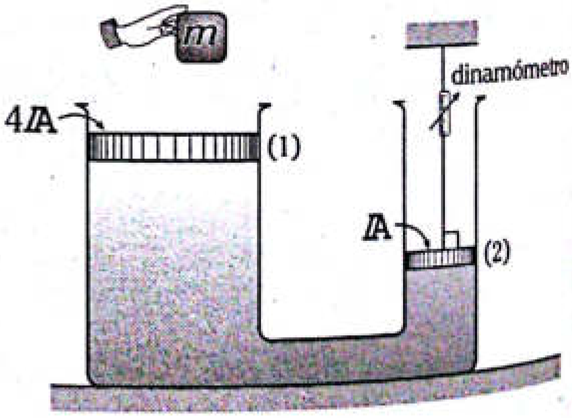
UNI 2014-II

22. Si el auto de 1000 kg sube a la plataforma de 50 m^2, determine la nueva lectura de la balanza. Considere que inicialmente la balanza registraba 500 N.
$(A_{balanza}=1\ m^2;\ g=10\ m/s^2)$

A) 800 N
B) 900 N
C) 300 N
D) 1500 N
E) 700 N



23. El sistema mostrado está en reposo y el dinamómetro registra una tensión de módulo T. Si luego de colocar un bloque de masa m sobre el émbolo (1), la lectura del dinamómetro disminuye en 20 N, determine m. Considere que los émbolos son lisos.
$(g=10\ m/s^2)$



A) 9 kg B) 8 kg C) 7 kg
D) 6 kg E) 5 kg

Fenómenos térmicos

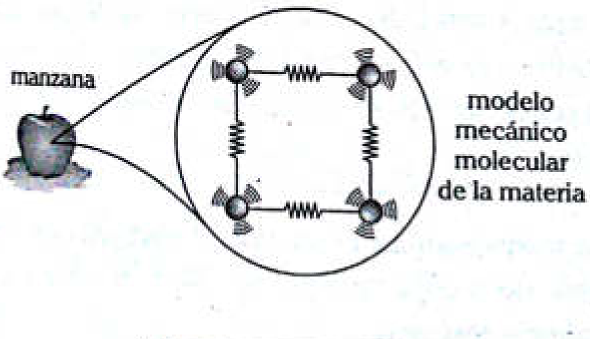
Capítulo XIV

OBJETIVOS
- Conocer y diferenciar los conceptos de energía interna y calor.
- Entender las formas de propagación de calor.
- Identificar los fenómenos originados en las sustancias como consecuencia del calor, así como aplicar las leyes que gobiernan dichos fenómenos.

1. Energía interna (*U*)

Es la energía asociada al movimiento o agitación molecular y a las interacciones atractivas que entre ellas se establece.

Gráficamente



$$U = \sum E_C + \sum E_P$$

donde

- $\sum E_C$: energía cinética asociada a todas las moléculas que componen un cuerpo
- $\sum E_P$: energía potencial asociada a la interacción atractiva entre todas las moléculas del cuerpo

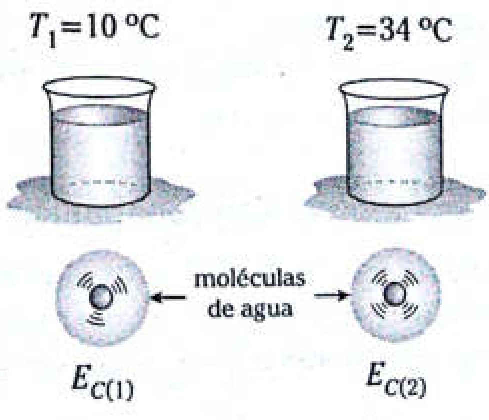
OBSERVACIÓN

El cálculo de la energía interna de un cuerpo es casi imposible por el elevado número de moléculas, el cual es múltiplo del número de Avogadro, y su constante variación en posición y velocidad, pero hay formas aproximadas de encontrar esta energía.

2. Temperatura (*T*)

Es la magnitud física escalar que mide el grado de agitación molecular. Está relacionada con la energía cinética molecular.

Ejemplo



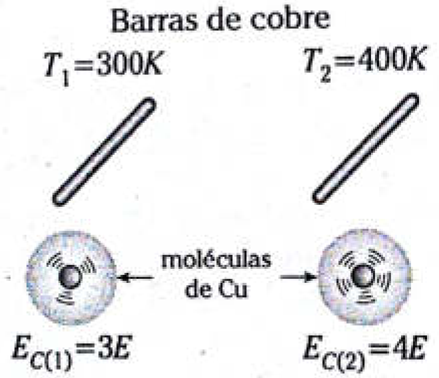
En el segundo recipiente (T_2=34 °C), las moléculas de agua están más agitadas.

OBSERVACIÓN

La escala absoluta o escala Kelvin está determinada por la siguiente igualdad:

$$T_{(\text{en Kelvin})}=273+T_{(\text{en Celsius})}$$

La relación entre temperatura y energía cinética promedio de las moléculas es proporcional.



Para todo cuerpo se verifica lo siguiente:

$\sum E_C$ es directamente proporcional a la temperatura absoluta, entonces

$$\boxed{\sum E_C = KT}$$

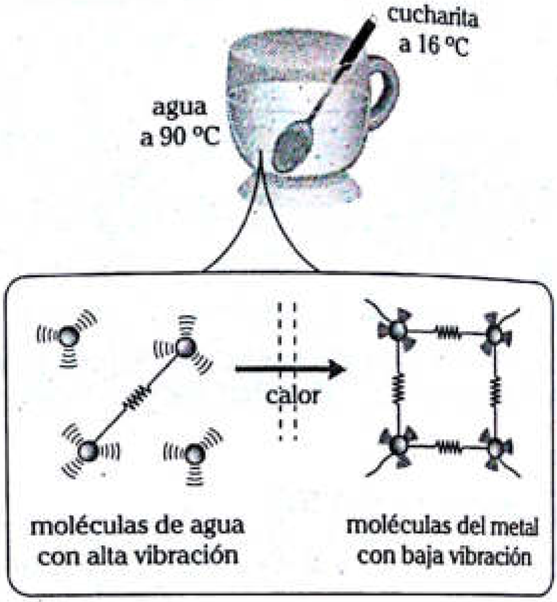
donde K es una constante que depende del cuerpo que se analice.

Esto lo veremos con más detalle en el siguiente capítulo de termodinámica.

3. Calor y formas de propagación

Hablamos de calor como la energía interna que se transfiere de un cuerpo a otro, de manera espontánea debido a la diferencia de sus temperaturas.

Por ello, es un error decir que un cuerpo tiene calor. Los cuerpos poseen energía interna y esta puede variar por diversos mecanismos, uno de ellos es a través del calor. Veamos.



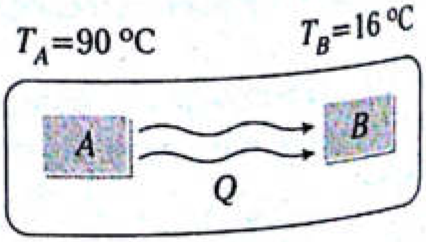
Al dejar por cierto tiempo a la cucharita dentro del agua, esta incrementa su temperatura debido al aumento de su energía interna.

En esta interacción, de manera espontánea, se transfiere energía a nivel de las moléculas, mientras que entre los cuerpos hay diferencia de temperaturas.

Esta transferencia cesa cuando ya no hay diferencia de temperaturas, es decir, se alcanza el equilibrio térmico.

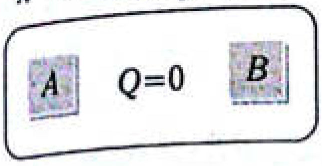
Si consideramos al agua y a la cucharita como un sistema aislado térmicamente, solo habrá transferencia de energía entre ellos.

Esquematizamos.

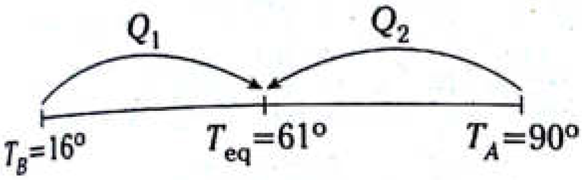


Luego en el equilibrio térmico

$$T_A' = T_B' = \begin{matrix}\text{temperatura}\\ \text{de equilibrio}\end{matrix} = 61\ °C$$



Este resultado se simplifica al usar el diagrama lineal de temperaturas que es una recta numérica.



donde

- Q_2: calor que A va perdiendo hasta el equilibrio térmico.
- Q_1: calor que B gana hasta el equilibrio térmico.

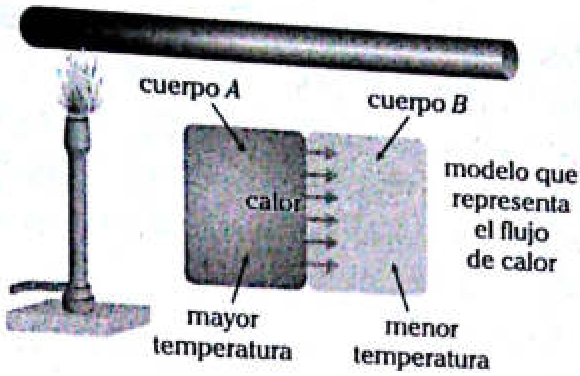
Se cumple

$$\boxed{\underbrace{Q_{\text{ganado}}}_{\substack{\text{mayor energía}\\ \text{interna para } B}} = \underbrace{Q_{\text{perdido}}}_{\substack{\text{menor energía}\\ \text{interna para } A}}}$$

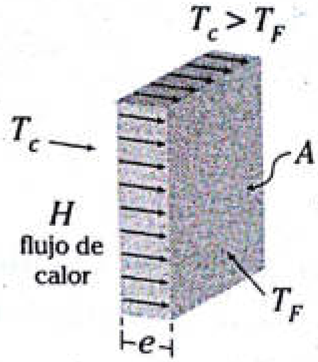
Ahora veamos las formas de transferencias de calor.

3.1. CONDUCCIÓN DE CALOR

Supongamos una barra metálica en la llama de un mechero. A medida que un extremo de la barra se calienta, la energía cinética de las moléculas que lo constituyen aumenta, de manera que estas vibran más que sus vecinas y transfieren esta energía a ellas. Por tanto, la transmisión de calor por conducción no implica movimiento de la materia a lo largo del cuerpo.



Dependiendo del material del que esté hecho el cuerpo, el calor se puede conducir con mayor o menor rapidez, esto se cuantifica con una constante denominada conductividad térmica.



$$\boxed{\frac{\Delta Q}{\Delta t} = kA\frac{T_c - T_f}{e}\ \text{(watt)}}$$

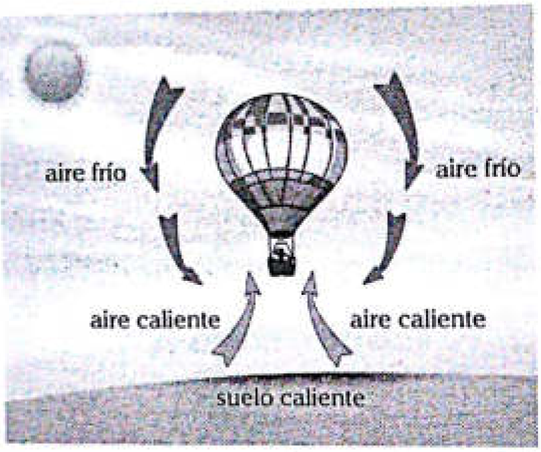
donde

- ΔQ: calor transferido en el intervalo de tiempo Δt
- T_c: temperatura del foco caliente
- T_f: temperatura del foco frío
- A: área transversal
- e: espesor de la lámina
- k: constante de conductividad térmica

3.2. CONVECCIÓN DEL CALOR

La convección es la transferencia de energía interna, en fluidos, desde zonas con mayor temperatura a zonas con menor temperatura.

Cuando se presenta la convección, las moléculas con más energía chocan con aquellas que presentan menos, y así se transfiere la energía. Cuando ocurre la convección, las moléculas que tienen más energía se trasladan de un lugar a otro.



3.3. RADIACIÓN DEL CALOR

La transmisión del calor que se lleva a cabo sin medio alguno recibe el nombre de radiación. El calor que recibes de una fogata se transfiere, principalmente, por radiación. La radiación consiste en la transmisión de ondas electromagnéticas, como son las ondas infrarrojas y la luz visible. Estas ondas viajan por el espacio de manera que no requieren de un medio material para desplazarse. La radiación infrarroja es la responsable principal del calentamiento de nuestro planeta.

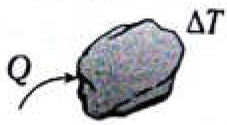
4. Efectos de la transferencia del calor

4.1. CAMBIO DE TEMPERATURA

Veamos cómo se da el cambio de temperatura de los cuerpos.

4.1.1. Para un cuerpo

El cambio o variación de temperatura es directamente proporcional al calor transferido.



$$\frac{Q}{\Delta T}=\text{cte.}\begin{cases}\text{Depende del cuerpo;}\\ \text{se denomina capaci-}\\ \text{dad calorífica } (C).\end{cases}$$

$$\boxed{Q=C\Delta T}$$

donde

- Q: en calorías o Joule (1 J=0,24 cal)
- ΔT: en °C o Kelvin
- C: en $\frac{\text{cal}}{°\text{C}}$; $\frac{\text{J}}{\text{K}}$

Ejemplo

Si la capacidad calorífica de un cuerpo es 25 cal/°C significa que por cada 25 cal de calor transferido, el cuerpo cambia su temperatura en 1 °C.

4.1.2. Para una muestra de cierta sustancia

El efecto en la temperatura es directamente proporcional al calor transferido e inversamente proporcional a la masa del cuerpo.

$$\frac{Q}{M\Delta T}=\text{cte.}\begin{cases}\text{Depende del tipo de}\\ \text{sustancia del cuerpo;}\\ \text{se denomina calor}\\ \text{específico } (C_e).\end{cases}$$

$$\boxed{Q=MC_e\Delta T}$$

La masa se puede medir en gramos (g) o kilogramos (kg) y el calor específico podrá expresarse así:

$$C_e \begin{cases} \dfrac{\text{J}}{\text{kg °C}} \\ \dfrac{\text{cal}}{\text{g °C}} \end{cases}$$

Ejemplo

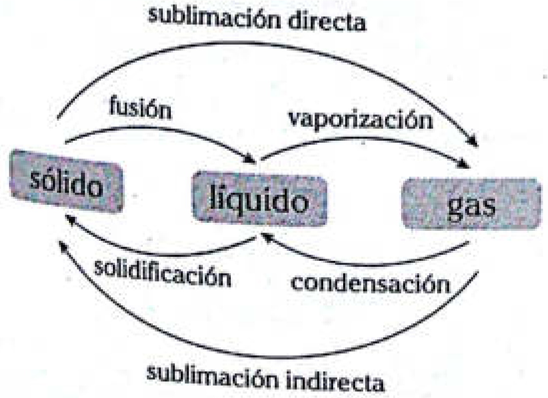
Para el agua su calor específico es 1 cal/g °C, lo cual significa que cada gramo de agua requiere de 1 cal para que su temperatura varíe en 1 °C.

4.2. CAMBIO DE FASE

Primero definamos qué es la fase termodinámica de una sustancia. Es la manera externa como se presenta un cuerpo, es decir, la forma física que depende del arreglo o interacciones moleculares, así tenemos vibración molecular e interacción atractiva entre moléculas.

El cambio de fase viene a ser aquel fenómeno donde hay un cambio en la forma física de un cuerpo debido a la transferencia de calor.

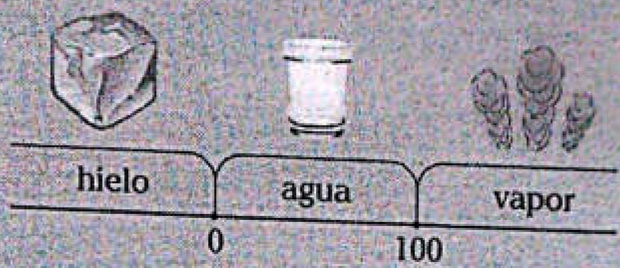
Tenemos los siguientes cambios de fase:



OBSERVACIÓN

La fase termodinámica de una sustancia depende de la temperatura a la que se encuentra y la presión externa; por ello, para el agua tenemos a presión constante de una atmósfera a nivel del mar.

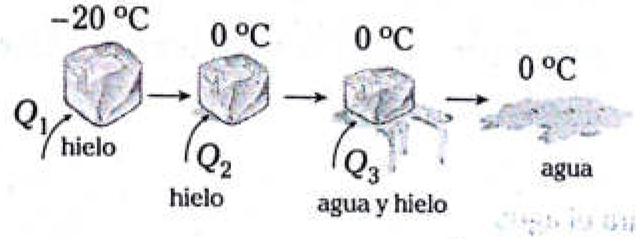
P_{ext}=1 atm



Hay temperaturas (para el agua a nivel del mar 0 °C y 100 °C) a partir de las cuales se da el cambio de fase que viene a ser un cambio cualitativo sin que se dé variación de la temperatura.

Veamos el caso del agua.

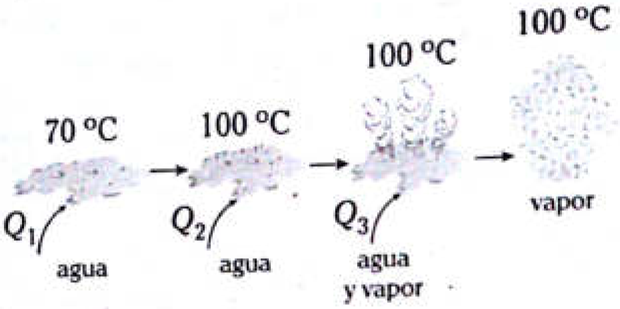
Gráficamente



donde

- Q_1: genera ΔT de todo el hielo
- Q_2: genera cambio de fase de una parte del hielo sin que varíe la temperatura
- Q_3: genera cambio de fase (fusión) del hielo restante sin que el agua varíe aún la temperatura

Durante todo el cambio de fase, la temperatura se mantiene constante en un valor, denominado temperatura de saturación.



donde

- Q_1: genera ΔT en toda el agua
- Q_2 y Q_3: generan cambio de fase de manera progresiva en el agua

Al calor Q_2 y Q_3 se le denomina calor de transformación y se calcula así:

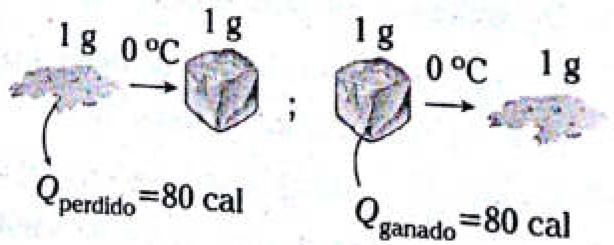
$$\boxed{Q_T = M^* L}$$

donde

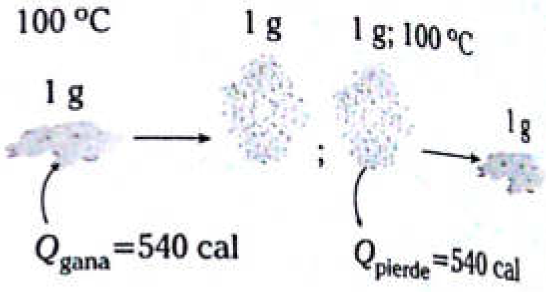
- M^*: masa que logra cambiar de fase
- L: calor latente, viene a ser el calor que requiere cada unidad de masa para su cambio de fase. L en $\dfrac{\text{cal}}{\text{g}}$; $\dfrac{\text{J}}{\text{kg}}$

Para el agua

- $L_{\text{fusión}} = L_{\text{solidificación}} = 80$ cal/g



- $L_{\text{vaporización}} = L_{\text{condensación}} = 540$ cal/g

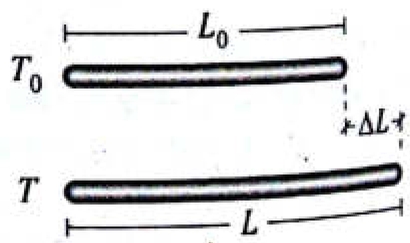


4.3. DILATACIÓN

La dilatación o expansión térmica se presenta cuando a un material sólido, líquido o gaseoso se le incrementa la temperatura. Casi todos los materiales se expanden cuando se aumenta la temperatura y, por el contrario, se contraen cuando esta disminuye.

4.3.1. Dilatación lineal

Ocurre cuando se incrementa la temperatura de un sólido y este cambia en una sola dimensión. Imagínate que tienes una barra como la de la figura, con una longitud inicial L_0 a una temperatura inicial T_0. Al aumentar la temperatura, la barra va a tener una longitud L, de manera que su dilatación va a ser ΔL. Esta dilatación es directamente proporcional a la variación de temperatura ΔT y a la longitud inicial de la barra L_0.



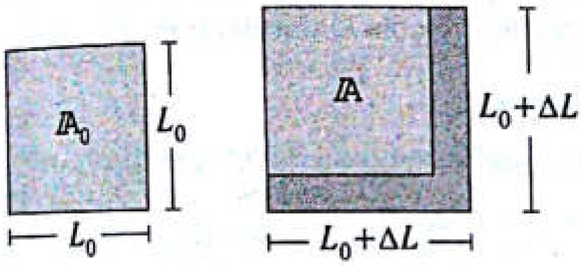
Esta proporcionalidad se expresa mediante la ecuación

$$\boxed{\Delta L = L_0 \alpha \Delta T}$$

En donde α, que es la constante de proporcionalidad, se denomina coeficiente de dilatación lineal. Este coeficiente es específico para cada material y su unidad de medida es $(^{o}C^{-1})$.

4.3.2. Dilatación superficial

En el caso de láminas y placas ocurre la dilatación superficial, que resulta de un aumento en el área debido a un incremento de la temperatura. Considera el área de dilatación de una placa como la de la figura, que tiene un área inicial $\mathbb{A}_0$ a una temperatura inicial T_0. Al aumentar la temperatura, se presenta una dilatación $\Delta\mathbb{A}$ en su superficie.



Esta relación matemática se expresa como

$$\Delta\mathbb{A}=\mathbb{A}_0\cdot 2\alpha\cdot\Delta T=\mathbb{A}_0\beta\Delta T$$

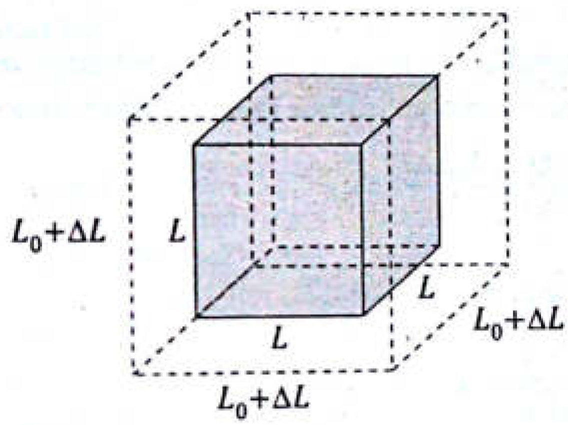
El término 2α corresponde al coeficiente de dilatación en las dos dimensiones de la placa. Donde $\beta=2\alpha$.

4.3.3. Dilatación volumétrica

Cuando se varía la temperatura de un cuerpo, todas sus dimensiones se modifican, es decir, su volumen cambia. Casi todos los cuerpos aumentan su volumen cuando se incrementa la temperatura. Por similitud con la dilatación lineal, la variación del volumen ΔV que experimenta un sólido o un fluido de volumen inicial V_0, cuando su temperatura se incrementa un ΔT, se puede obtener con la siguiente ecuación:

$$\Delta V=V_0\gamma\Delta T$$

En donde γ es el coeficiente de dilatación volumétrica, además, $\gamma=3\alpha$.



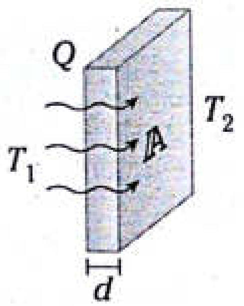
Problema N.° 1

Para una placa de vidrio de sección transversal 0,3 m^2 y espesor 2 mm el flujo de calor es 5 kW. Calcule la diferencia de temperaturas entre sus caras. (K=1,2 W/m °C).

Resolución

Nos piden $T_1-T_2=\Delta T$.

Esquema del vidrio



Para hallar el cambio o variación de temperatura de un cuerpo aplicamos la siguiente ecuación:

$$\frac{Q}{\Delta t}=\frac{K\mathbb{A}\Delta T}{d}$$

$$5\times10^3=\frac{1{,}2\times0{,}3\Delta T}{2\times10^{-3}}$$

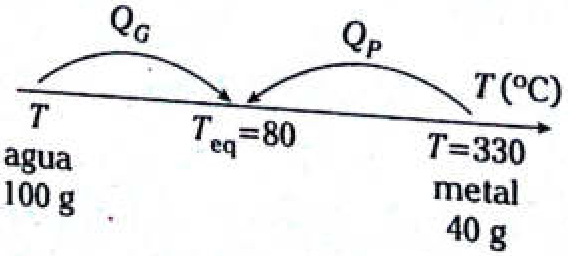
$\therefore\quad \Delta T=27{,}8$ °C

Problema N.° 2

En un recipiente de capacidad calorífica despreciable se tienen 100 g de agua y se introduce un metal de 40 g a 330 °C (C_e=0,02 cal/g °C) alcanzando el equilibrio térmico a 80 °C. Calcule la temperatura inicial del agua.

Resolución

Usamos el diagrama lineal de temperaturas.



Por la conservación de la energía

$$Q_G=Q_P$$

$$M_{agua}C_{e(agua)}\Delta T=M_{metal}C_{e(metal)}\Delta T$$

$$100\times1(80-T)=40\times0{,}02\times250$$

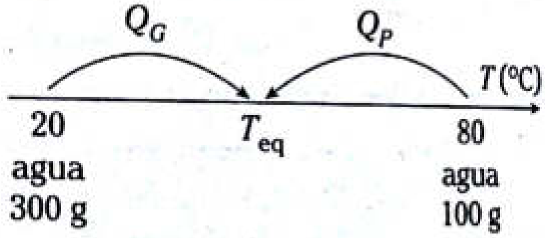
$\therefore\quad T=78$ °C

Problema N.° 3

Dos muestras de agua de 100 g y 300 g a temperaturas de 80 °C y 20 °C, respectivamente, se mezclan en un recipiente de capacidad calorífica despreciable. Calcule la temperatura de equilibrio.

Resolución

En el diagrama lineal de temperaturas



Por la conservación de la energía

$$Q_G=Q_P$$

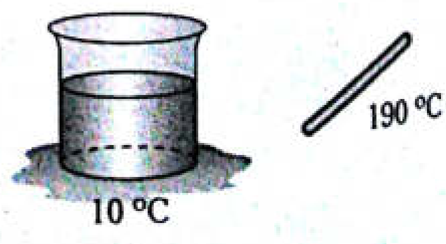
$$M_{agua(1)}C_{e(agua)}\Delta T_1=M_{agua}C_{e(agua)}\Delta T_2$$

$$300\times1(T_{eq}-20)=100\times1(80-T_{eq})$$

$\therefore\quad T_{eq}=35$ °C

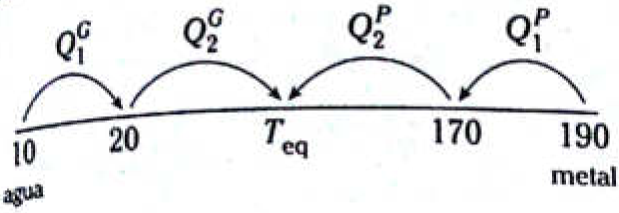
Problema N.° 4

Se muestra un recipiente con agua y un metal. Si cuando se ponen en contacto y el agua está a 20 °C el metal está a 170 °C. Calcule la temperatura de equilibrio. ($C_{recipiente}=0$).



Resolución

Elaboramos el diagrama de temperaturas.



Así tenemos

- $Q_1^G = Q_1^P$

$M_{agua} C_{e(agua)} \Delta T = M_{metal} \cdot C_{e(metal)} \Delta T$

$M_{agua} \cdot 1 \cdot 10 = M_{metal} \cdot C_{e(metal)} \cdot 20$

$M_{agua} = M_{metal} C_{e(metal)} \cdot 2$

- $Q_2^G = Q_2^P$

$\underbrace{M_{agua}} C_{e(agua)} \Delta T = M_{metal} C_{e(metal)} \Delta T'$

$(\cancel{M_{metal}} \cdot \cancel{C_{e(metal)}} \cdot 2) 1 \cdot (T_{eq} - 20) = \cancel{M_{metal}}\ \cancel{C_{e(metal)}} (170 - T_{eq})$

$2T_{eq} - 40 = 170 - T_{eq}$

$3T_{eq} = 210$

$\therefore\ T_{eq} = 70\ °C$

Problema N.° 5

A una muestra de 100 g de agua a 20 °C se le transfiere 13,4 kcal. Calcule la cantidad de agua que hay al final.

Resolución

Sabemos que tenemos agua solo hasta 100 °C, ya que luego se inicia el cambio de fase.

Para llevar al agua de 20 °C a 100 °C.

$Q_1 = MC_e \Delta T$

$Q_1 = 100 \times 1 \times 80 \quad \rightarrow \quad Q_1 = 8\ \text{kcal}$

Como se le transfirió 13,4 kcal, faltan 5,4 kcal que genera cambio de fase (vaporización).

$Q = M^* L$

$5400 = M^* 540$

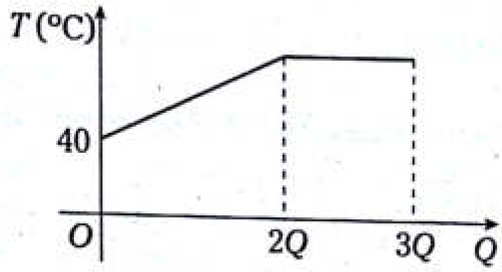
$M^* = 10\ \text{g}$

Se vaporizan solo 10 g de agua, de los 100 g que había.

Por lo tanto, quedan 90 g de agua a 100 °C al final.

Problema N.° 6

Se muestra la gráfica T vs. Q para cierta cantidad de agua. Calcule el porcentaje de vapor que hay al final.



Resolución

Al inicio hay agua a 40 °C hasta que alcanza los 100 °C.

$Q_G = MC_e \Delta T \quad \rightarrow \quad 2Q = M \times 1 \times \Delta T$

$2Q = M \cdot 60$

$Q = M \cdot 30$

Luego de $2Q$ hasta $3Q$ se da la vaporización de cierta parte del agua (M^*).

$Q_T = M^* L$

$Q = M^* L$

$M \cdot 30 = M^* 540$

$M^* = \dfrac{M}{18}$; masa del vapor

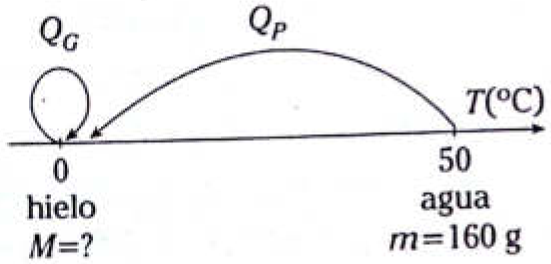
$\therefore\ M^* = 5{,}6\% M$

Problema N.° 7

Se tiene 160 g de agua a 50 °C. ¿Qué cantidad de hielo se requiere para que en el equilibrio a 0 °C solo tengamos agua? $\left(T_0^{\text{hielo}} = 0\ °C\right)$.

Resolución

Del diagrama lineal de temperaturas



Por la conservación de la energía

$$Q_G=Q_P$$

$$ML_F=mCe_{(\text{agua})}\Delta T \rightarrow M\cdot 80=160\cdot 1\cdot 50$$

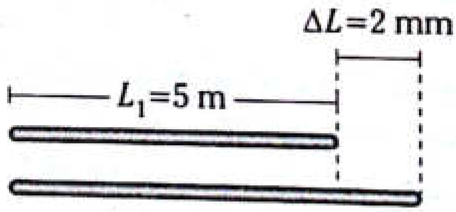
$\therefore\quad M=100$ g

Problema N.° 8

Una barra de un metal se dilata 2 mm cuando su temperatura varía en 200 °C. Calcule su coeficiente de dilatación lineal si su longitud inicial es 5 m.

Resolución

Tenemos



Aplicamos la ecuación de dilatación lineal.

$$\Delta L=L_0\alpha\Delta T$$

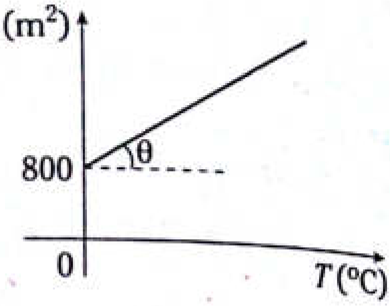
$$2\times 10^{-3}=5\times\alpha\times 200$$

$\therefore\quad \alpha=2\times 10^{-6}\ °C^{-1}$

Problema N.° 9

Para una placa se tiene que su área varía con su temperatura, según la siguiente gráfica. Calcule el coeficiente de dilatación superficial.

$$\left(\tan\theta=\frac{5}{4}\right)$$



Resolución

Sabemos que

$$\tan\theta=\frac{\Delta A}{\Delta T}\ \wedge\ \Delta A=A\cdot\beta\Delta T$$

$$\rightarrow\quad \tan\theta=A\cdot\beta$$

$$\frac{5}{4}=800\cdot\beta$$

$\therefore\quad \beta=1{,}56\times 10^{-3}\ °C^{-1}$

Problema N.° 10

Encuentre una expresión para la densidad de un cuerpo de coeficiente de dilatación volumétrica γ que a la temperatura T_0 tiene densidad ρ_0, en función a la variación de la temperatura (ΔT).

Resolución

Sabemos que la densidad se expresa así

$$\rho=\frac{M}{V}\qquad\text{(I)}$$

$$\rho_0=\frac{M}{V_0}$$

La masa del cuerpo no cambia, solo su volumen, entonces

$$\Delta V=V_0\gamma\Delta T$$

$$V-V_0=V_0\gamma\Delta T$$

$$V=V_0(1+\gamma\Delta T)$$

Reemplazamos en (I).

$$\rho=\frac{M}{V_0(1+\gamma\Delta T)}\ \rightarrow\ \rho=\left(\frac{M}{V_0}\right)\cdot\frac{1}{1+\gamma\Delta T}$$

$$\therefore\quad \rho=\rho_0\cdot\frac{1}{1+\gamma\Delta T}$$

NIVEL BÁSICO

1. Para 10 g de una sustancia se tiene que la energía cinética de todas sus moléculas es $\sum E_C = 20$ J y de las energías potenciales, $\sum E_P = -35$ J. Calcule la energía interna de dicha sustancia.

A) –15 J
B) 10 J
C) 55 J
D) 20 J
E) 35 J

2. Si un cuerpo está a 76 °C, exprese esta temperatura en la escala Kelvin.

A) 292
B) 349
C) 381
D) 256
E) 34

3. Para un gas ideal a 20 °C su energía interna es 150 J. Si esta energía se duplica, ¿a qué temperatura estará el gas ideal?

A) 25 °C
B) 40 °C
C) 313 °C
D) 298 °C
E) 412 °C

4. Un cuerpo inicialmente tiene una energía interna de –120 J y luego tiene –100 J. Indique si su temperatura aumenta o disminuye y el calor que se le transfirió.

A) aumentó; +20 J
B) disminuyó; –20 J
C) aumentó; +100 J
D) disminuyó; –100 J
E) disminuyó; –80 J

5. La capacidad calorífica de un cuerpo es 25 cal/°C. Calcule el calor que gana si su temperatura varía en 3 °C.

A) 25 cal
B) 50 cal
C) 75 cal
D) 100 cal
E) 110 cal

6. A dos cuerpos de 7,7 g cada uno cuyos calores específicos son 2 cal/g°C y 6 cal/g °C se le transfiere igual cantidad de calor. Si el primero cambia su temperatura en 12 °C, calcule el cambio de temperatura del segundo cuerpo.

A) 36 °C
B) 12 °C
C) 24 °C
D) 4 °C
E) 6 °C

7. En un recipiente de capacidad calorífica despreciable se ponen en contacto térmico dos cuerpos de la misma masa y de calores específicos: 0,8 cal/g °C y 0,6 cal/g °C, cuyas temperaturas iniciales son 24 °C y 94 °C, respectivamente. Calcule la temperatura de equilibrio térmico.

A) 54 °C
B) 64 °C
C) 70 °C
D) 80 °C
E) 21 °C

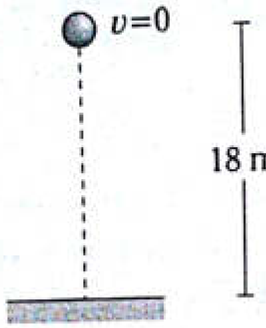
8. En un recipiente de capacidad calorífica despreciable se tiene 120 g de agua a 20 °C. Si al introducir una esfera metálica la temperatura de equilibrio es 90 °C, calcule la temperatura inicial de la esfera.
(C_{esfera}=70 cal/°C).

A) 100 °C
B) 120 °C
C) 150 °C
D) 80 °C
E) 210 °C

9. Dos esferas del mismo material se ponen en contacto estando a temperaturas iniciales de 10 °C y 80 °C, para luego alcanzar el equilibrio térmico a 70 °C. Calcule la relación de masas de las esferas.

A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{1}{3}$
C) $\frac{1}{5}$
D) $\frac{1}{6}$
E) $\frac{1}{7}$

25. La esfera que se muestra luego del rebote alcanza una altura de 6 m. Si solo el 80% del calor disipado es absorbido por la esfera, calcule su temperatura luego del primer rebote si su temperatura inicial es 20 °C. (g=10 m/s^2; C_e=15 J/kg°C)

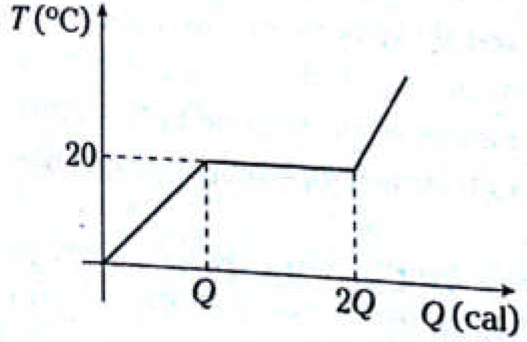


A) 26,4 °C B) 32,9 °C C) 33,8 °C
D) 38,1 °C E) 29,8 °C

26. En un recipiente equivalente en agua a 28 g, se tienen 72 g de agua a 20 °C. Se introduce un metal de capacidad calorífica 20 cal/°C, y alcanzan el equilibrio cuando el agua duplica su temperatura inicial. Calcule la temperatura inicial del metal.

A) 120 °C B) 140 °C C) 130 °C
D) 150 °C E) 180 °C

27. Se muestra la gráfica temperatura vs. calor para un cuerpo inicialmente en fase líquida. Calcule el calor latente de fusión. ($C_{e(\text{líquido})}$=0,8 cal/g°C)



A) 16 cal/g B) 24 cal/g C) 31 cal/g
D) 8 cal/g E) 11 cal/g

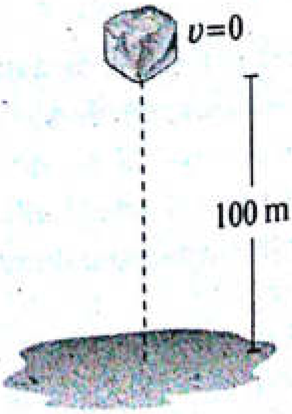
28. Un bloque de hielo a −20 °C recibe 680 cal. Calcule la cantidad de agua que se obtiene al final. (m_{hielo}=20 g).

A) 2 g B) 5 g C) 7 g
D) 6 g E) 9 g

29. En un recipiente de capacidad calorífica despreciable se tienen 5 g de vapor a 100 °C. Determine la cantidad de agua a 46 °C que se debe verter para obtener agua a 100 °C.

A) 30 g B) 50 g C) 40 g
D) 20 g E) 19 g

30. En un recipiente de capacidad calorífica despreciable y aislado se tiene 400 g de hielo. Si luego del impacto no rebota, calcule la cantidad de hielo que se funde. Desprecie la masa del recipiente y considere que el hielo absorbe todo el calor disipado. (g=10 m/s^2; T_0=0 °C)



A) 1,2 g B) 2,8 g C) 3,0 g
D) 0,8 g E) 2,4 g

Termodinámica

Capítulo XV

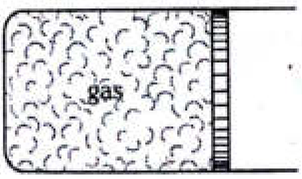
OBJETIVOS

- Conocer las características de los procesos termodinámicos.
- Aplicar las leyes de la termodinámica en los procesos y ciclos termodinámicos así como en las máquinas térmicas.
- Estudiar el ciclo de Carnot.

1. Conceptos previos

1.1. SISTEMA TERMODINÁMICO

El gas es el sistema, y las paredes internas del recipiente (cilindro) y del émbolo son la frontera con el medio externo.



Para este sistema aplicamos leyes físicas y medimos parámetros como

- presión
- volumen
- temperatura
- números de moles
- energía interna

1.2. ESTADO TERMODINÁMICO

Está definido por los parámetros macroscópicos independientes, estos vienen a ser la presión (P), el volumen (V) y la temperatura (T).
Estos parámetros se relacionan en la ecuación universal de estados.

$$\boxed{PV=nRT}$$

donde

- n: número de moles
- R: constante universal de los gases

1.3. ENERGÍA INTERNA PARA UN GAS IDEAL

Como sabemos, la energía interna de un cuerpo o sistema está dada por

$$U=\Sigma E_C+\Sigma E_P$$

Como en el gas ideal no hay interacción entre moléculas, tenemos

$$\Sigma E_P=0$$

Por ello

$$\boxed{U_{\text{gas ideal}}=\Sigma E_C}$$

Por lo tanto, la energía interna de un gas ideal depende directamente de la temperatura absoluta.

$$\boxed{U_{\text{gas ideal}}=KT}$$

donde

- T: temperatura del gas, en kelvin
- K: constante que depende del gas

Tipo de gas	Valor de K
monoatómico	$\frac{3}{2}nR$
diatómico	$\frac{5}{2}nR$

- n: número de moles
- R: constante universal de los gases

$$\left(R = 8{,}314\,\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}\right)$$

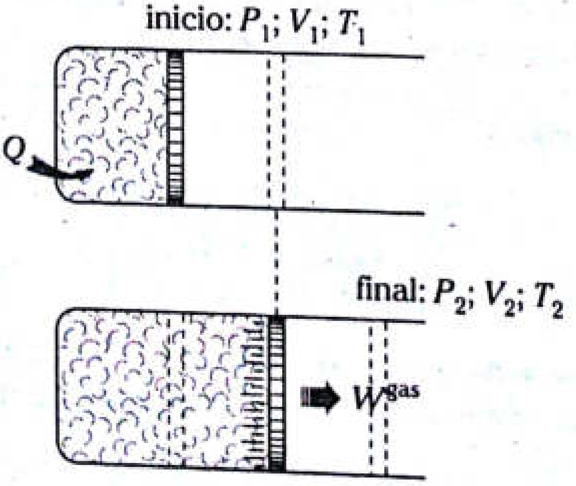
2. Primera ley de la termodinámica

Existen dos formas en como un sistema interactúa con el sistema termodinámico:

- A través de la transferencia de calor.
- Realizando trabajo mecánico.

Y, se debe aplicar un balance de energía.

Veamos.



Podemos plantear

$$\overset{\text{energía que se le transfiere}}{Q} = \overset{\text{energía que pasa a acumular}}{\Delta U} + \overset{\text{energía que utiliza contra el medio externo}}{W^{gas}}$$

donde

- Q: calor que gana o pierde el gas. Se coloca (+) cuando gana y (–) cuando pierde.
- ΔU: variación de la energía interna del gas ($\Delta U = U_f - U_0$). Si aumenta la temperatura ΔU es (+) y si disminuye ΔU es (–).
- W^{gas}: trabajo mecánico que realiza el gas. Si el gas se expande, el trabajo es (+); y si es comprimido, el trabajo es (–).

3. Procesos termodinámicos

Un proceso termodinámico es una secuencia de estados termodinámicos por los que pasa un gas y se registra mediante gráficas.

P vs. V

T vs. V

P vs. T

Nosotros conoceremos los procesos restringidos que son aquellos donde alguno de los parámetros permanece constante.

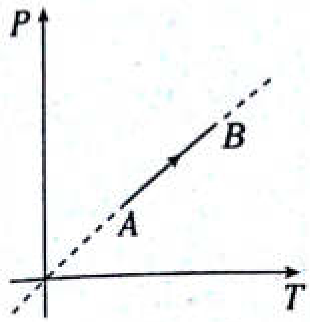
3.1. PROCESO ISOVOLUMÉTRICO

También llamado isométrico o isócoro, es aquel donde el volumen del gas permanece constante.

$\rightarrow$ $PV = nRT$

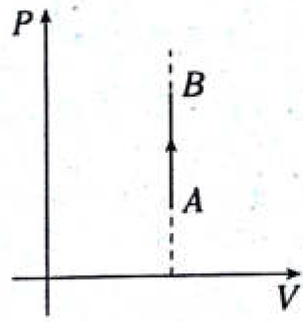
$$\frac{P}{T} = \frac{nR}{V} = \text{cte.}$$

Por lo tanto, así como la temperatura, también la energía interna del gas ideal es directamente proporcional. Al graficar P vs. T obtenemos



Notamos que en el proceso $A \rightarrow B$ el gas eleva su temperatura.

Si graficamos P vs. V tenemos



Debido a que no hay variación en el volumen, se tiene que

$$\boxed{W^{gas}=0}$$

Aplicamos la primera ley de la termodinámica.

$$Q=\Delta U+W^{gas}$$

Por lo tanto

$$\boxed{Q=\Delta U}$$

Ahora, se plantea para el caso de un gas ideal

$$\boxed{Q=nc_V\cdot\Delta T}$$

donde

- n: número de moles (mol)
- ΔT: variación de temperatura (Kelvin)
- c_V: calor específico molar a volumen constante

$$\left(\frac{\text{Joule}}{\text{mol}\cdot\text{Kelvin}}\right)$$

- gas monoatómico: $c_V=\frac{3}{2}R$
- gas diatómico: $c_V=\frac{5}{2}R$

3.2. PROCESO ISOBÁRICO

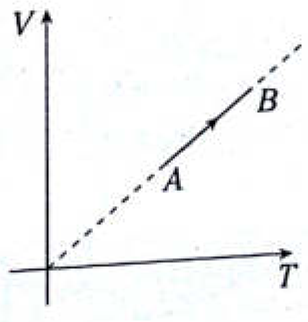
Es aquel proceso donde permanece constante la presión del gas.

$$\rightarrow \quad PV=nRT$$

$$\frac{V}{T}=\frac{nR}{P}=\text{cte.}$$

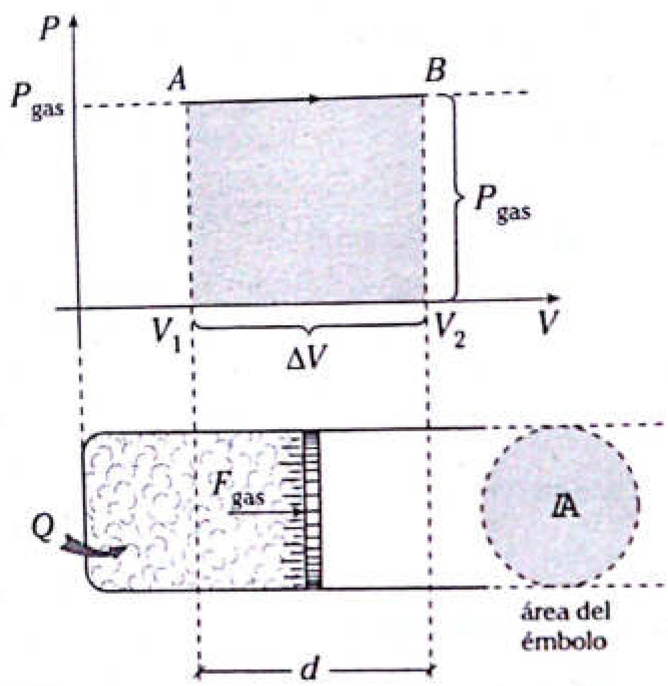
Por lo tanto, el volumen del gas es directamente proporcional a la temperatura absoluta del gas.

Al graficar V vs. T, tenemos



Notamos que en el proceso $A \rightarrow B$ aumenta la temperatura.

Si graficamos P vs. V, obtenemos



Calculemos el trabajo que realiza el gas.

$$W^{gas}=F_{gas}\cdot d \qquad (*)$$

La $\vec{F}_{gas}$ es constante por ser proceso isobárico.

$$F_{gas}=P_{gas}\cdot \mathbb{A}$$

En (*)

$$W^{gas}=P_{gas}\cdot \mathbb{A}d$$

Notamos que

$$\mathbb{A}d=\text{variación del volumen}=V_2-V_1$$

$$\Delta V=\mathbb{A}d$$

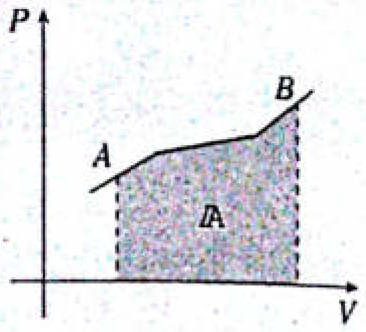
Por lo tanto

$$\boxed{W^{gas}=P_{gas}\cdot \Delta V}$$

Matemáticamente, este último producto lo vemos como el área bajo la gráfica P vs. V.

Observación

En general, para cualquier proceso termodinámico



Proceso $A \to B$

$$\boxed{W^{gas}=\mathbb{A}}$$

En este caso también planteamos

$$Q=nC_P\cdot \Delta T$$

donde C_P es el calor específico a presión constante.

Aplicamos la primera ley de la termodinámica.

$$Q=\Delta U+W^{gas}$$

$$nC_P\cdot \Delta T=nC_V\cdot \Delta T+P_{gas}\Delta V$$

pero

$$P\cdot \Delta V=nR\Delta T$$

Reemplazamos.

$$nC_P\cdot \Delta T=nC_V\cdot \Delta T+nR\Delta T$$

Por lo tanto, $\boxed{C_P=C_V+R}$; esto se cumple para cualquier proceso.

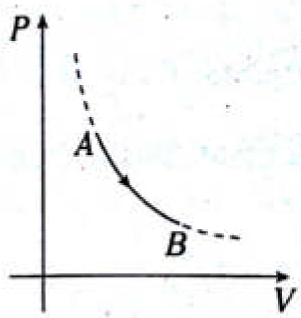
3.3. PROCESO ISOTÉRMICO

Es aquel donde la temperatura permanece constante.

$\rightarrow \quad PV = nRT = \text{constante}$

Por lo tanto, la presión del gas varía inversamente proporcional con su volumen.

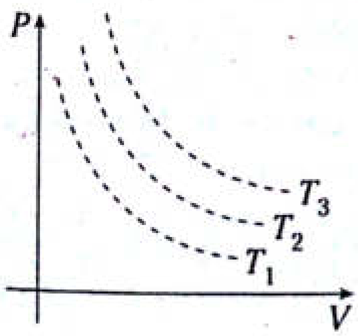
Realizamos la gráfica P vs. V y será una hipérbola.



- La gráfica pertenece a una curva denominada isoterma.
- Para una misma cantidad de gas, mayor será la temperatura cuanto mayor sea el producto $P \cdot V$.

Para la gráfica tenemos

$$T_3 > T_2 > T_1$$



Como la temperatura no varía, se cumple

$$\boxed{\Delta U = 0}$$

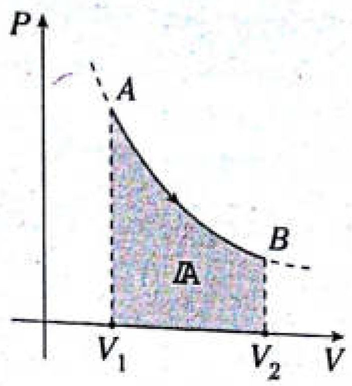
Aplicamos la primera ley de la termodinámica.

$$Q = \cancelto{0}{\Delta U} + W^{gas}$$

Por lo tanto

$$\boxed{Q = W^{gas}}$$

Se verifica



$$\boxed{W^{gas}_{A\rightarrow B} = \mathbb{A} = PVLn\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$$

3.4. PROCESO ADIABÁTICO

Es aquel proceso en el que no hay transferencia de calor, el gas no cede ni gana calor.

$$\boxed{Q = 0}$$

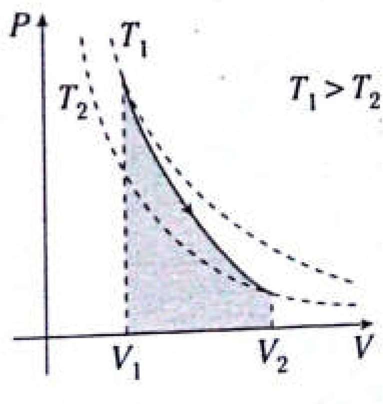
De la primera ley de la termodinámica.

$$\Delta U + W^{gas} = 0$$

$$\boxed{W^{gas} = -\Delta U}$$

Esto se lee: el gas realiza trabajo mecánico a costa de su propia energía interna.

La gráfica P vs. V tiene la siguiente forma:



Vemos que en el proceso de expansión se reduce la temperatura.

OBSERVACIÓN

- La ecuación que describe este proceso es

$$\boxed{P \cdot V^{\gamma} = \text{cte.}}$$

donde γ es el coeficiente adiabático, llamado también coeficiente politrópico.

$$\boxed{\gamma = \frac{C_P}{C_V}}$$

- Para el trabajo realizado por el gas, tenemos

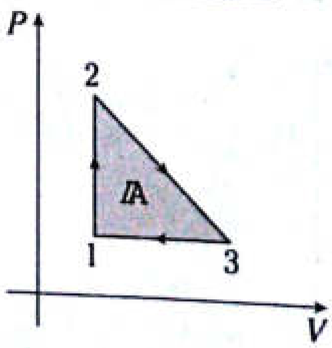
$$\boxed{W^{\text{gas}} = \frac{P_2 \cdot V_2 - P_1 \cdot V_1}{1-\gamma} = \frac{nR\Delta T}{1-\gamma}}$$

4. Ciclo termodinámico

Es una secuencia de procesos termodinámicos en el que el gas (sustancia de trabajo) vuelve a sus condiciones iniciales.

Existen distintos tipos de ciclos, y en los ciclos representados en una gráfica P vs. V, se cumple

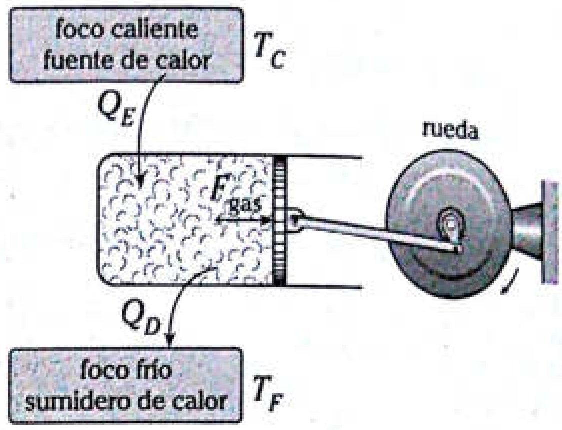
$$\boxed{W_{\text{gas}}^{\text{ciclo}} = \mathbb{A}}$$



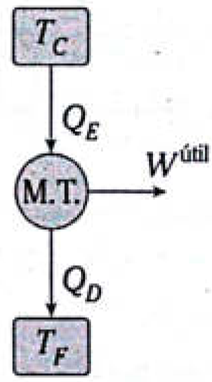
5. Máquinas térmicas

Son dispositivos que desarrollan trabajo mecánico a partir de la energía calorífica de manera cíclica.

Veamos el funcionamiento de la máquina térmica.



5.1. ESQUEMA SIMPLIFICADO DE LA MÁQUINA TÉRMICA



El gas se expande y comprime, realiza ciclos; para ello absorbe calor de un foco caliente. Parte de esta energía lo transforma en trabajo útil, y el resto de energía se disipa a un sumidero de menor temperatura.

En cada ciclo

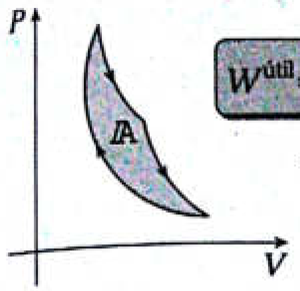
- no hay variación de la energía interna del gas.

$$U_f^{\text{gas}} = U_0^{\text{gas}} \rightarrow \boxed{\Delta U^{\text{gas}} = 0}$$

- hacemos un balance de energía.

$$\boxed{Q_E = Q_D + W^{\text{útil}}}$$

donde $W^{\text{útil}}$ es el trabajo útil realizado por el gas que en la gráfica P vs. V coincide con la diferencia de área en la expansión y compresión.



NOTA

No existe ciclo donde el Q_D sea cero, lo cual es equivalente a decir que el Q_E no se transforma al 100% en $W^{útil}$.

5.2. EFICIENCIA DE UNA MÁQUINA TÉRMICA (η)

Se define por la siguiente relación:

$$\eta = \frac{W^{útil}}{Q_E} \times 100\%$$

Como

$W^{útil} = Q_E - Q_D$ se obtiene

$$\eta = \left(1 - \frac{Q_D}{Q_E}\right) \times 100\%$$

donde $\eta < 100\%$.

¿SABIA QUE...?

El ciclo termodinámico se realiza entre las isotermas del foco caliente y del foco frío, lo cual es necesario para que en una etapa exista calor ganado por el gas y otra donde haya calor perdido.

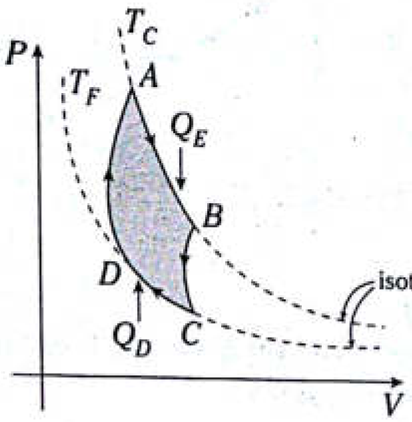
6. Ciclo de Carnot

Es aquel ciclo ideal donde los procesos que sigue el gas dan la máxima eficiencia sin llegar al 100% trabajando dentro de los límites de temperatura.

Este ciclo está conformado por

- dos procesos isotérmicos de expansión y compresión, desarrollados a las temperaturas de ambos focos.
- dos procesos adiabáticos de expansión y compresión.

En la gráfica, tenemos



donde

- $A \rightarrow B$: expansión isotérmica
- $B \rightarrow C$: expansión adiabática, donde el gas se enfría y se hace algo de trabajo adicional.
- $C \rightarrow D$: comprensión isotérmica
- $D \rightarrow A$: comprensión adiabática, donde sin disipar calor se calienta al gas.

En el ciclo de Carnot se cumple la relación de Kelvin, donde el calor entregado y el disipado son proporcionales a las temperaturas (en kelvin) de los focos caliente y frío, respectivamente.

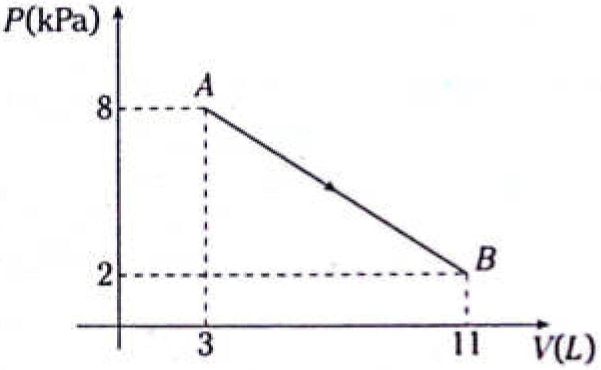
$$\frac{Q_D}{Q_E} = \frac{T_F}{T_C}$$

Con lo cual la eficiencia del ciclo de Carnot (máxima eficiencia posible) viene dada por

$$\eta = \left(1 - \frac{T_F}{T_C}\right) \times 100\%$$

Problema N.° 1

Se muestra un proceso termodinámico para un gas ideal. Calcule la energía interna en el estado B si en el estado A es de 480 J.



Resolución

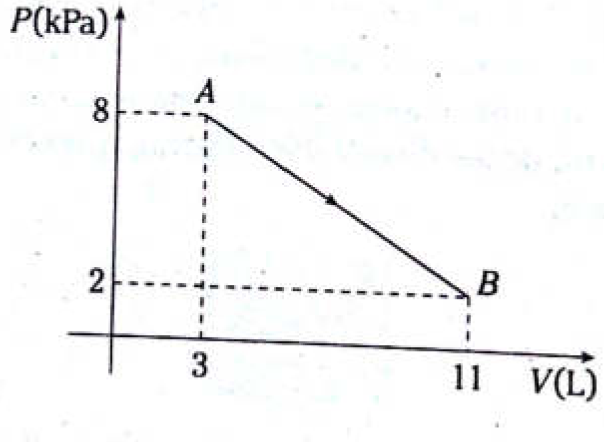
Sabemos que para un gas ideal, la energía interna es proporcional a T.

$$U_{gas} \text{ D.P. } T \text{ (en kelvin)}$$

Entonces

$$\frac{U_A}{U_B}=\frac{T_A}{T_B}$$

De la gráfica



De la ecuación de los gases ideales

$$\frac{P_A \cdot V_A}{P_B \cdot V_B}=\frac{nRT_A}{nRT_B}$$

$$\frac{8\times 3}{2\times 11}=\frac{T_A}{T_B}$$

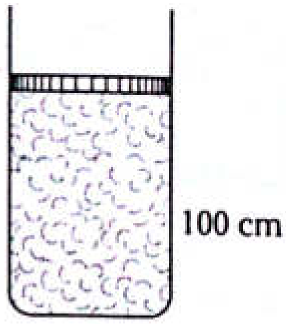
$$\frac{24}{22}=\frac{U_A}{U_B}$$

$$\frac{24}{22}=\frac{480}{U_B}$$

$$\therefore \quad U_B=440 \text{ J}$$

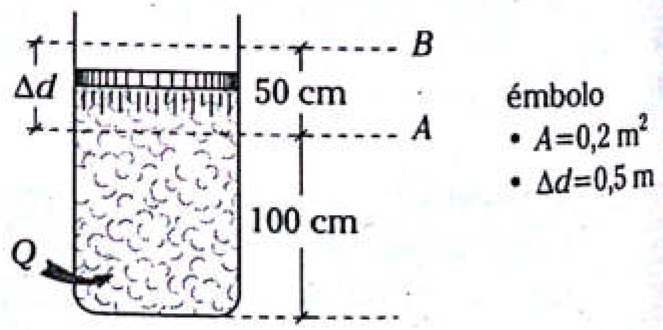
Problema N.° 2

Se muestra un gas encerrado al que se le transfiere calor para que el émbolo de $0{,}20 \text{ m}^2$ se desplace 50 cm de forma lenta. Si inicialmente la energía interna del gas es 300 J, calcule cuánto calor se transfiere. Considere el émbolo de masa despreciable.



Resolución

Veamos el esquema.



Como el émbolo es de masa despreciable y se mueve lentamente, la presión del gas es constante e igual a la atmosférica.

$$P_{gas}=1 \text{ atm}=10^5 \text{ Pa}$$

De los gases ideales

$$\frac{\cancel{P_0} \cdot V_0}{\cancel{P_f} \cdot V_F}=\frac{\cancel{nR}T_0}{\cancel{nR}T_F}$$

$$\frac{\cancel{A}\times 100}{\cancel{A}\times 150}=\frac{T_0}{T_F}$$

$$\frac{100}{150}=\frac{U_0}{U_F}$$

$$\frac{100}{150}=\frac{300}{U_F}$$

$$U_F=450\text{ J}$$

Ahora

$$\Delta U=U_F-U_0=450-300$$

$$\Delta U=150\text{ J}$$

De la primera ley de la termodinámica

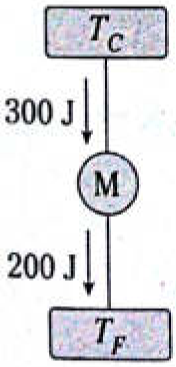
$$Q=\Delta U+P_{\text{gas}}\cdot\Delta V$$

$$Q=150+10^5[0{,}2\times 0{,}5]$$

$$\therefore\ Q=10{,}15\text{ kJ}$$

Problema N.° 3

Se muestra el esquema simplificado de una máquina térmica. Calcule su eficiencia y la potencia que desarrolla si la frecuencia de funcionamiento es 20 Hz.



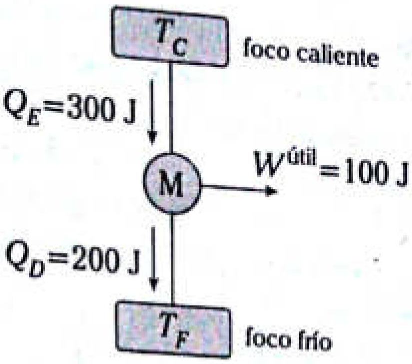
Resolución

Completamos el esquema aplicando

$$Q_E=Q_D+W^{\text{útil}}$$

$$300=200+W^{\text{útil}}$$

$$\rightarrow\ W^{\text{útil}}=100\text{ J}$$



Cálculo de la eficiencia

$$\eta=\frac{W^{\text{útil}}}{Q_E}\times 100\%$$

$$\rightarrow\ \eta=\frac{100}{300}\times 100\%$$

$$\therefore\ \eta=33{,}3\%$$

Cálculo de la potencia

$$P=\frac{W^{\text{útil}}}{T};\ (T:\text{periodo})$$

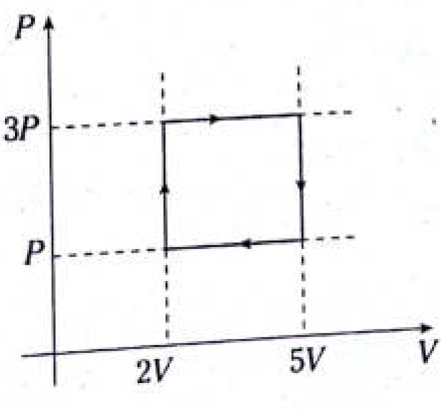
$$P=W^{\text{útil}}\cdot f;\ (f\text{: frecuencia})$$

$$\rightarrow\ P=100\times 20$$

$$\therefore\ P=2\text{ kW}$$

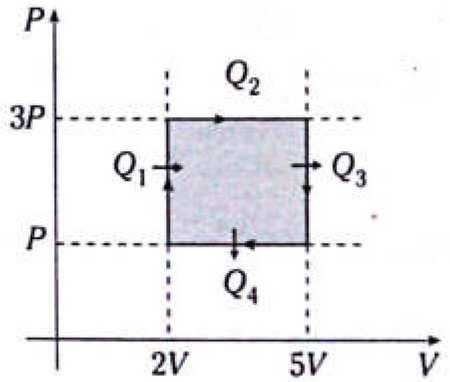
Problema N.° 4

Se muestra un ciclo termodinámico para un gas ideal diatómico. Calcule la eficiencia del ciclo.



Resolución

De los cuatro procesos tenemos que de dos a dos gana y pierde calor.



Calculemos

$W^{\text{útil}}$ y Q_E

- $W^{\text{útil}}$=área=$2P\times 3V$

  $W^{\text{útil}}=6PV$

- $Q_E=Q_1+Q_2$

  $Q_E=nc_V\cdot\Delta T_1+nc_P\cdot\Delta T_2$

Por ser gas diatómico

$$c_V=\frac{5}{2}R \quad \text{y} \quad c_P=\frac{7}{2}R$$

$$\rightarrow \quad Q_E=n\frac{5}{2}R\Delta T_1+n\frac{7}{2}R\Delta T_2 \qquad (*)$$

Ahora

$$PV=nRT$$

$$\rightarrow \quad \Delta(PV)=nR\Delta T$$

En (*)

$$Q_E=\frac{5}{2}\Delta(PV)_1+\frac{7}{2}\Delta(PV)_2$$

$$Q_E=\frac{5}{2}(6PV-2PV)+\frac{7}{2}(15PV-6PV)$$

$$Q_E=10PV+\frac{63}{2}PV$$

$$Q_E=\frac{83}{2}PV$$

Finalmente, calculamos la eficiencia.

$$\eta=\frac{W^{\text{útil}}}{Q_E}\times 100\%$$

$$\eta=\frac{6PV}{\frac{83}{2}PV}\times 100\%$$

$$\eta=\frac{12}{83}\times 100\%$$

$$\therefore \quad \eta=14{,}5\%$$

Problema N.° 5

Una máquina térmica que trabaja bajo el ciclo de Carnot presenta una eficiencia de 60%. Calcule la temperatura del foco frío si del foco caliente es 700 K.

Resolución

La eficiencia al seguir el ciclo de Carnot viene dada por

$$\eta=\left(1-\frac{T_F}{T_C}\right)\times 100\%$$

$$0\%=\left(1-\frac{T_F}{700}\right)\times 100\%$$

$$\frac{6}{10}=1-\frac{T_F}{700}$$

$$\frac{4}{10}=\frac{T_F}{700}$$

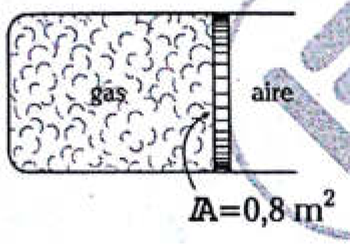
$$\therefore \quad T_F=280\text{ K}$$

NIVEL BÁSICO

1. Un gas ideal se encuentra en un recipiente con una energía interna de 500 J. Si la presión se duplica y el volumen se reduce a la quinta parte, calcule la variación de la energía interna.

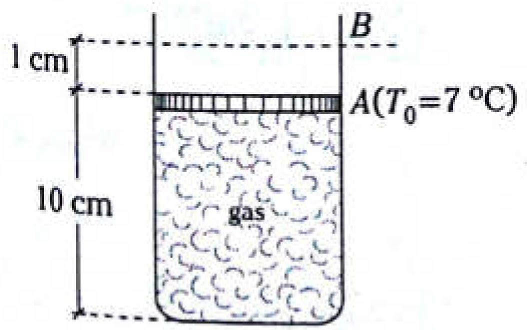
A) 300 J B) 200 J C) −200 J
D) −300 J E) 100 J

2. Se muestra un recipiente con un gas ideal que al transferirle lentamente 100 kJ de calor, el émbolo se desplaza 20 cm. Calcule en este proceso la variación en la energía interna. ($P_{atm}=10^5\cdot$Pa)



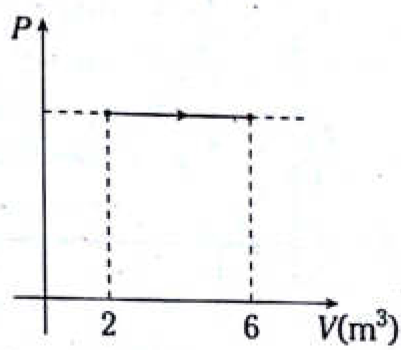
A) 84 kJ B) 70 kJ C) 25 kJ
D) 16 kJ E) 0 kJ

3. Para el recipiente mostrado, mientras se le transfiere calor se expande lentamente. Calcule la temperatura cuando el émbolo pase por *B*.



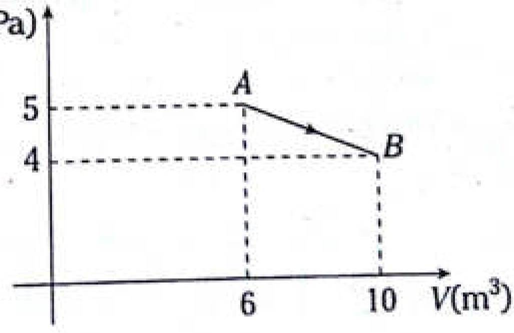
A) 30 °C B) 32 °C C) 35 °C
D) 40 °C E) 25 °C

4. Un gas ideal está contenido en un recipiente y su volumen varía como muestra la gráfica *P* vs. *V*. Si el calor transferido en dicho proceso fue de 500 kJ y la variación de la energía interna del gas fue de 300 kJ, determine la presión del gas en dicho proceso.



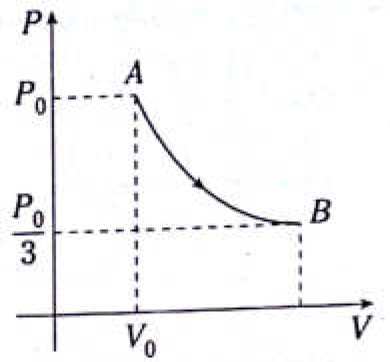
A) 50 kPa
B) 70 kPa
C) 80 kPa
D) 100 kPa
E) 200 kPa

5. Para un gas ideal se muestra la gráfica *P* vs. *V*. Determine la variación de temperatura del gas en el proceso *AB*. (T_A=27 °C).



A) −100 °C
B) 100 °C
C) 127 °C
D) −73 °C
E) −50 °C

6. El diagrama mostrado en la gráfica P vs. V corresponde a un proceso isotérmico. Determine el calor absorbido por el gas en el proceso $A \rightarrow B$.



A) $\frac{P_0V_0}{5}Ln2$

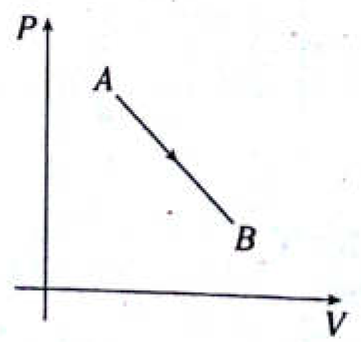
B) P_0V_0Ln3

C) P_0V_0Ln5

D) P_0V_0Ln7

E) $\frac{P_0V_0}{2}Ln3$

7. Se muestra la gráfica P vs. V para un gas ideal para el proceso $A \rightarrow B$. Indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) respecto a las siguientes proposiciones.



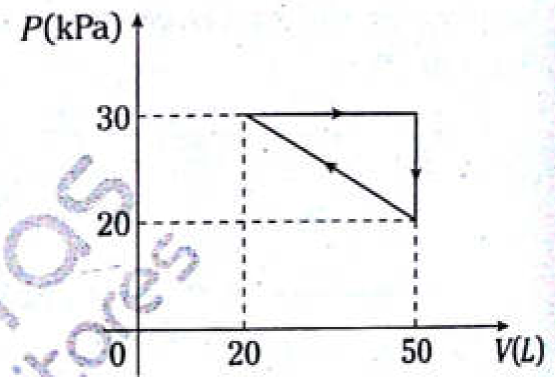
I. Necesariamente la temperatura del gas disminuye.

II. El calor transferido puede ser igual al trabajo realizado por el gas.

III. La temperatura en A y B pueden ser iguales.

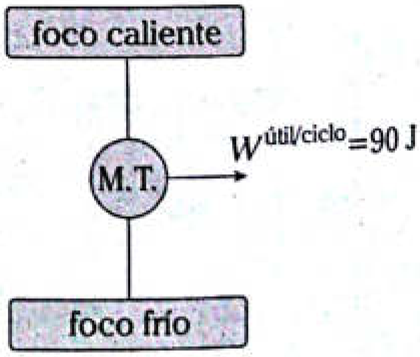
A) FVV B) VFF C) VVV
D) FFF E) FFV

8. Se muestra un ciclo termodinámico para un gas dentro de una máquina térmica. Si por cada ciclo se le entrega 250 J de calor, determine la eficiencia de la máquina.



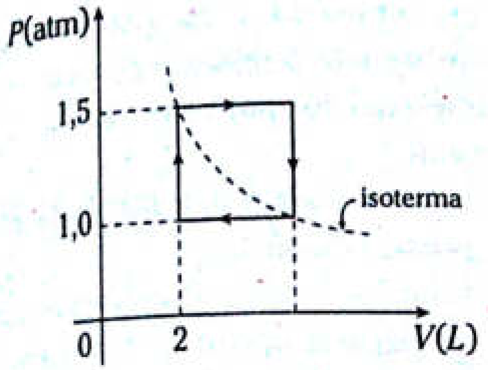
A) 20% B) 60% C) 80%
D) 70% E) 50%

9. Se muestra el esquema de una máquina térmica cuya eficiencia es 30%. Calcule el calor que se disipa en 3 ciclos.



A) 210 J B) 20 J C) 420 J
D) 630 J E) 700 J

10. En la gráfica P vs. V se muestra un ciclo termodinámico. Calcule el trabajo útil por ciclo. (1 atm=10^5 Pa).

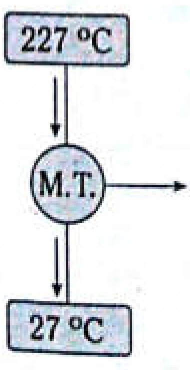


A) 30 J B) 60 J C) 90 J
D) 100 J E) 50 J

11. En una máquina térmica el gas desarrolla el ciclo de Carnot con una temperatura de 127 °C para el foco caliente y 27 °C para el foco frío. Calcule su eficiencia.

A) 75% B) 50% C) 25%
D) 100% E) 60%

12. En el esquema de una máquina térmica que sigue el ciclo de Carnot se muestran las temperaturas de los focos caliente y frío. Determine la eficiencia de dicha máquina.



A) 20% B) 30% C) 40%
D) 60% E) 29%

13. Para una máquina térmica que sigue el ciclo de Carnot su eficiencia es 40%. ¿Cómo varía la eficiencia si la temperatura del foco caliente se triplica y la del foco frío se duplica?

A) Disminuye al 20%.
B) Aumenta al 60%.
C) Disminuye al 30%.
D) Aumenta al 50%.
E) Disminuye al 25%.

14. Un gas ideal se encuentra encerrado en un recipiente de 8,31 m^3 soportando una presión de 1,2 kPa y una temperatura de 400 K. ¿Cuántos moles de gas se encuentran en el recipiente?

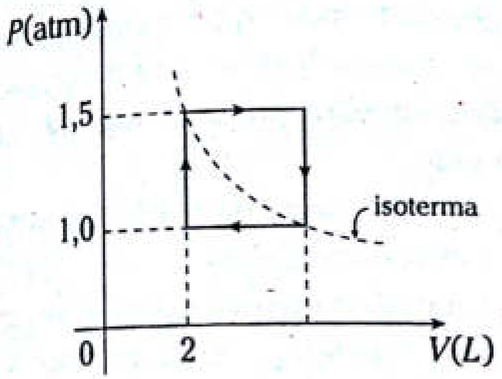
A) 2,0 mol B) 3,0 mol C) 5,0 mol
D) 6,0 mol E) 1,0 mol

15. De acuerdo al modelo cinético de los gases ideales, la presión ejercida por un gas ideal sobre las paredes del recipiente que lo contiene, se debe fundamentalmente

I. al número elevado de moléculas contenidas en el recipiente.
II. a las colisiones elásticas entre las moléculas del gas.
III. a las colisiones elásticas de las moléculas del gas contra las paredes del recipiente que los contiene.

A) solo I
B) solo II
C) solo III
D) I y II
E) I, II y III

10. En la gráfica P vs. V se muestra un ciclo termodinámico. Calcule el trabajo útil por ciclo. (1 atm=10^5 Pa).

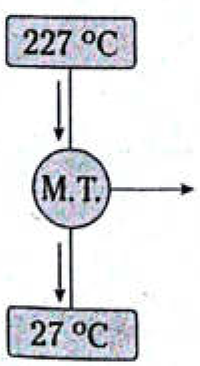


A) 30 J B) 60 J C) 90 J
D) 100 J E) 50 J

11. En una máquina térmica el gas desarrolla el ciclo de Carnot con una temperatura de 127 °C para el foco caliente y 27 °C para el foco frío. Calcule su eficiencia.

A) 75% B) 50% C) 25%
D) 100% E) 60%

12. En el esquema de una máquina térmica que sigue el ciclo de Carnot se muestran las temperaturas de los focos caliente y frío. Determine la eficiencia de dicha máquina.



A) 20% B) 30% C) 40%
D) 60% E) 29%

13. Para una máquina térmica que sigue el ciclo de Carnot su eficiencia es 40%. ¿Cómo varía la eficiencia si la temperatura del foco caliente se triplica y la del foco frío se duplica?

A) Disminuye al 20%.
B) Aumenta al 60%.
C) Disminuye al 30%.
D) Aumenta al 50%.
E) Disminuye al 25%.

14. Un gas ideal se encuentra encerrado en un recipiente de 8,31 m^3 soportando una presión de 1,2 kPa y una temperatura de 400 K. ¿Cuántos moles de gas se encuentran en el recipiente?

A) 2,0 mol B) 3,0 mol C) 5,0 mol
D) 6,0 mol E) 1,0 mol

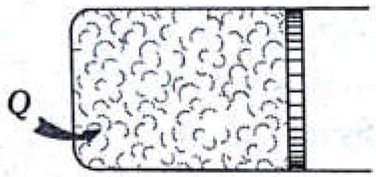
15. De acuerdo al modelo cinético de los gases ideales, la presión ejercida por un gas ideal sobre las paredes del recipiente que lo contiene, se debe fundamentalmente

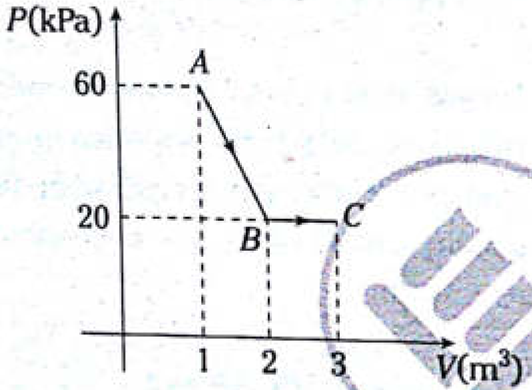
I. al número elevado de moléculas contenidas en el recipiente.
II. a las colisiones elásticas entre las moléculas del gas.
III. a las colisiones elásticas de las moléculas del gas contra las paredes del recipiente que los contiene.

A) solo I
B) solo II
C) solo III
D) I y II
E) I, II y III

NIVEL INTERMEDIO

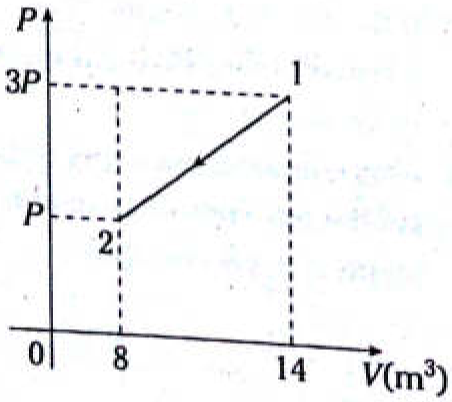
16. Al recipiente mostrado se le transfiere calor y la presión del gas varía tal como muestra la gráfica *P* vs. *V*. Calcule el trabajo realizado en el proceso *ABC*.





A) 20 kJ
B) 30 kJ
C) 40 kJ
D) 60 kJ
E) 50 kJ

17. Calcule el valor de la presión en el estado 1 si se sabe que el trabajo realizado por el gas ideal en el proceso $1\rightarrow2$ es de -60 kJ.



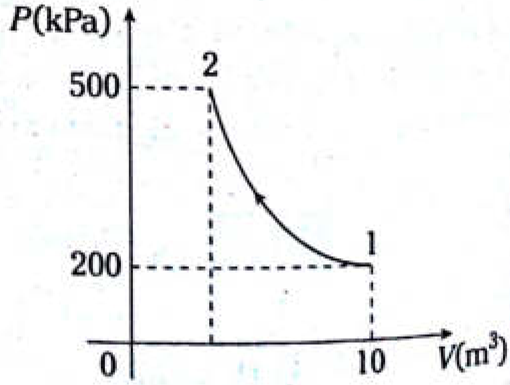
A) 5 kPa
B) 10 kPa
C) 15 kPa
D) 20 kPa
E) 25 kPa

18. El gas contenido en un recipiente hermético se somete a diferentes procesos. Identifique aquellos procesos descritos correctamente.

I. Durante una expansión isotérmica la presión disminuye.
II. Cuando comprimimos isobáricamente un gas la temperatura disminuye.
III. Si calentamos isométricamente un gas, la presión aumenta.

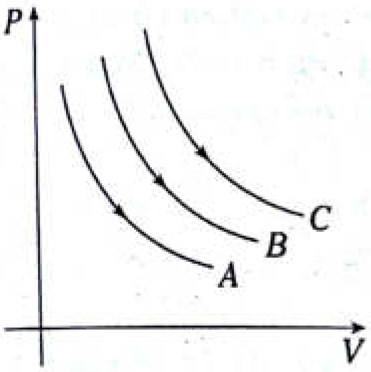
A) solo I
B) solo II
C) solo III
D) I y II
E) I, II y III

19. El gas ideal contenido en un recipiente hermético se somete al proceso isotérmico $1\rightarrow2$ tal como se representa en la gráfica *P* vs. *V*. Calcule el volumen en el estado 2.



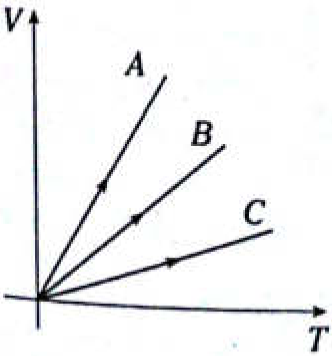
A) $1{,}0\ m^3$
B) $2{,}0\ m^3$
C) $3{,}0\ m^3$
D) $4{,}0\ m^3$
E) $5{,}0\ m^3$

20. El gas ideal contenido en un recipiente hermético se somete a tres procesos isotérmicos, tal como se representa en la gráfica *P* vs. *V*. ¿Cuál es la relación correcta entre las temperaturas?



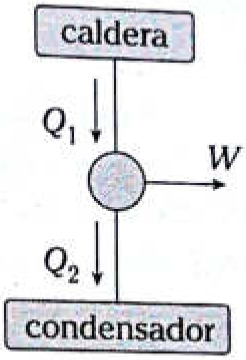
A) $T_A > T_B = T_C$
B) $T_A = T_B = T_C$
C) $T_A < T_B < T_C$
D) $T_A = T_B > T_C$
E) $T_A > T_B > T_C$

21. El gas ideal contenido en un recipiente hermético se somete a tres procesos isobáricos, tal como se representa en la figura. ¿En qué relación se encuentra sus presiones?



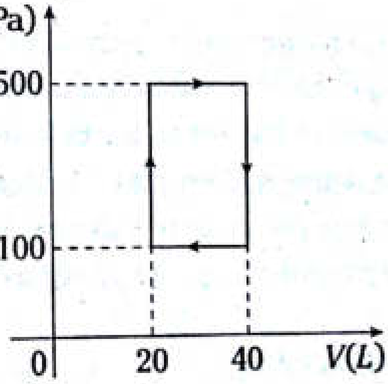
A) $P_A < P_B < P_C$
B) $P_A = P_B < P_C$
C) $P_A > P_B > P_C$
D) $P_A > P_B = P_C$
E) $P_A = P_B = P_C$

22. En la figura se muestra un esquema simplificado de una máquina térmica. Si en cada ciclo W=300 J y Q_2=700 J, ¿cuál es la eficiencia de la máquina?



A) 10% B) 20% C) 30%
D) 40% E) 50%

23. Si una máquina térmica desarrolla el ciclo mostrado en el gráfico a razón de 30 ciclos/min; determine su potencia.



A) 80 W B) 40 W C) 8,0 W
D) 4,0 W E) 2,0 W

24. Una máquina térmica recibe la misma cantidad de calor en 3 ciclos a la liberada en 10 ciclos. Calcule la eficiencia de esta máquina.

A) 30% B) 60% C) 70%
D) 80% E) 50%

25. ¿Cuál es la eficiencia de una máquina térmica que desarrolla un ciclo de Carnot entre las temperaturas T_1=27 °C y T_2=227 °C?

A) 10%
B) 20%
C) 30%
D) 40%
E) 50%

26. Una máquina térmica que sigue el ciclo de Carnot recibe 300 kJ por ciclo y libera 200 kJ. Si la temperatura del foco caliente es 177 °C, calcule la temperatura del foco frío.

A) 77 °C
B) 85 °C
C) 27 °C
D) 108 °C
E) 41 °C

27. Una máquina térmica trabaja entre focos a temperaturas de 500 K y 200 K. Indique qué eficiencia no podría desarrollar.

A) 41%
B) 31%
C) 51%
D) 21%
E) 70%

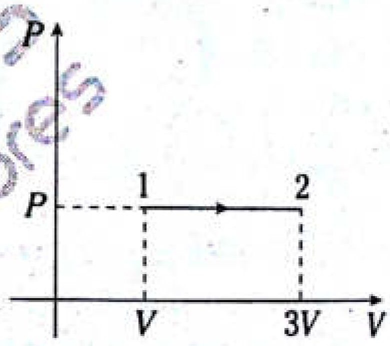
28. En un recipiente de paredes rígidas se tiene un gas ideal a una temperatura de 50 °C. Se calienta el sistema hasta que su temperatura aumenta en 100 °C. Despreciando el cambio de volumen del recipiente es correcto afirmar que la presión del gas

A) se duplica.
B) se triplica.
C) se reduce a la mitad.
D) se reduce a la tercera parte.
E) aumenta pero hasta menos del doble de su valor inicial.

29. Al elevar en 1,00 K la temperatura de un gas ideal a volumen constante, la presión aumentó en 0,200%. ¿A qué temperatura inicial se encontraba el gas?

A) 600 K
B) 550 K
C) 490 K
D) 450 K
E) 500 K

30. Determine el calor que absorbe un gas ideal monoatómico en el proceso de 1→2. Sugerencia, usar: $U=3\,PV/2$.



A) 5 *PV*
B) 6 *PV*
C) 7 *PV*
D) 8 *PV*
E) 9 *PV*

Electrostática

Capítulo XVI

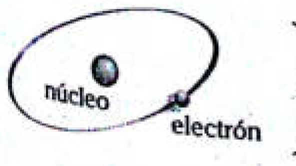
OBJETIVOS

- Poner en práctica las leyes de la electrostática para explicar el comportamiento de las partículas electrizadas.
- Aprender el concepto de campo eléctrico, sus propiedades y las magnitudes que lo caracterizan.
- Estudiar las interacciones entre cuerpos electrizados en equilibrio electrostático.

1. Carga eléctrica

Los estudios sobre la estructura de la sustancia han determinado que la composición de esta se da por moléculas, y estas a su vez por átomos unidos entre sí por fuerzas eléctricas. Al desarrollarse la teoría atómica, se logra establecer que el átomo está compuesto por partículas fundamentales llamadas protones, neutrones (ambas están en el núcleo atómico) y electrones (alrededor del núcleo conformando la nube electrónica). Estas partículas fundamentales están unidas por fuerzas entre ellas, de carácter eléctrico entre los electrones y protones, y de carácter nuclear entre los protones y neutrones. A esta propiedad que tienen los electrones y protones de interactuar se denomina carga eléctrica.

El electrón orbita alrededor del núcleo debido a la atracción eléctrica que tiene con el protón. La fuerza entre ellos se denomina **fuerza eléctrica** ($\vec{F}_{EL}$).



Esquema simple del átomo de hidrógeno (modelo clásico)

1.1. CUERPO ELECTRIZADO

Un cuerpo se encuentra electrizado cuando contiene diferentes cantidades de electrones (e^-) y protones (p^+). En caso contrario, se dice que es eléctricamente neutro.

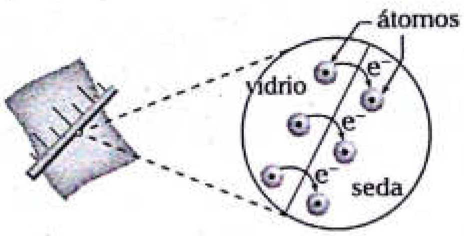
Un átomo neutro tiene igual cantidad de electrones y protones. Su cantidad de protones permanece constante, y se electriza cuando varía su cantidad de electrones.

Todo cuerpo en estado natural, generalmente, es eléctricamente neutro, ya que contiene igual cantidad de electrones y protones, de modo que no ejerce fuerzas eléctricas al exterior (la carga eléctrica no se exterioriza). Pero si de alguna manera hacemos que el cuerpo gane o pierda electrones (originando en él un desequilibrio electrónico), la carga eléctrica se exterioriza, es decir, el cuerpo se electriza. Una forma de variar la cantidad de electrones en un cuerpo consiste en frotarlo con otro cuerpo.

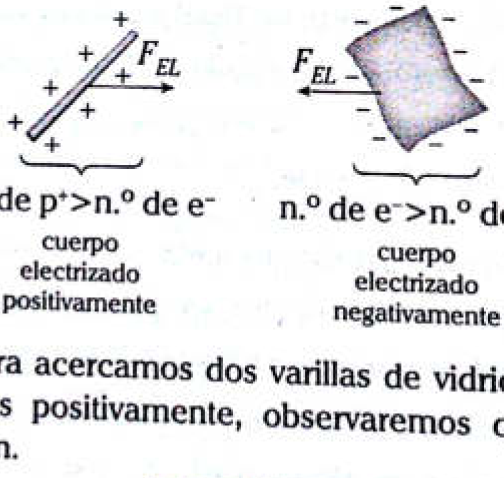
Ejemplo

Tenemos una varilla de vidrio y un paño de seda eléctricamente neutros.

Frotamos ambos objetos y observamos que ocurre una transferencia de electrones de la varilla de vidrio al paño de seda.



Al separarlos ligeramente, notaremos que se atraen. Esa es la fuerza eléctrica de atracción entre electrones y protones que ahora se manifiesta externamente entre los dos cuerpos debido al exceso de protones en la varilla de vidrio y al exceso de electrones en el paño de seda.



Si ahora acercamos dos varillas de vidrio electrizadas positivamente, observaremos que se repelen.

Igualmente, si acercamos dos paños de seda electrizados negativamente, también se repelerán.

Con esta convención de signos para los cuerpos electrizados, se puede enunciar la siguiente ley: **Los cuerpos electrizados con signos opuestos se atraen; y con signos iguales, se repelen.**

Las fuerzas de atracción y de repulsión eléctrica cumplen con la tercera ley de Newton: son colineales, de igual módulo y de direcciones opuestas en cada cuerpo.

1.2. CANTIDAD DE CARGA ELÉCTRICA (Q O q)

Es una magnitud escalar que nos expresa, a escala macroscópica, el grado de electrización de un cuerpo, el cual depende del número de electrones en exceso o en defecto que tiene. La cantidad de carga eléctrica es negativa si en el cuerpo hay un exceso de electrones; y positiva, si hay un defecto de electrones. Su unidad en el SI es el coulomb (C).

La cantidad de carga eléctrica de un electrón es

$$\boxed{q_e=-1{,}6\times10^{-19}\ \text{C}}$$

El electrón es la partícula estable más pequeña que tiene la menor cantidad de carga eléctrica. No se ha encontrado aún partículas estables con una cantidad de carga eléctrica menor que la del electrón y tampoco es posible fraccionar al electrón. La electrización de cuerpos sólidos y las cantidades de carga eléctrica que adquieren son posible gracias a la relativa facilidad de algunos electrones para salir de un cuerpo y pasar a otro en comparación con los protones, que están confinados en los núcleos de cada átomo y no pueden transferirse fácilmente de un cuerpo a otro. Por ello, en el proceso de electrización de un cuerpo, este solo puede adquirir una cantidad de carga eléctrica (Q) que sea un número entero de veces (n) la cantidad de carga del electrón (q_e).

Q

cuerpo electrizado

$$\boxed{Q=\pm n|q_e|}$$

Ley de la cuantización de la carga eléctrica

donde n es la cantidad de electrones en exceso o defecto del cuerpo electrizado.

En cuanto a los signos, se usa

- (+) cuando hay defecto de electrones (cuerpo electrizado positivamente).
- (-) cuando hay exceso de electrones (cuerpo electrizado negativamente).

Nota

Equivalencias

1 milicoulomb=1 mC=10^{-3} C

1 microcoulomb=1 μC=10^{-6} C

1 nanocoulomb=1 nC=10^{-9} C

1.3. CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE CARGA ELÉCTRICA

Así como hay un principio de conservación de la energía, también hay un principio de conservación de la cantidad de carga eléctrica.

Consideremos dos cuerpos electrizados, A y B, aislados de otros cuerpos. Estos tienen inicialmente cantidades de carga q_1 y q_2, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{cc} q_1 & q_2 \\ \text{A} & \text{B} \end{array}\right\} Q_{\text{sist.(inicial)}}=q_1+q_2$$

Entre ellos ocurre un intercambio de n electrones que corresponden a una cantidad de carga q.

$$\left.\text{A} \xrightarrow[q]{n\,e} \text{B}\right\} q=n\,q_e$$

Entonces, A pierde una cantidad de carga q, que B gana. Así, las cantidades de carga final de cada cuerpo son (q_1-q) y (q_2+q), respectivamente.

$$\left.\begin{array}{cc} q_1-q & q_2+q \\ \text{A} & \text{B} \end{array}\right\} Q_{\text{sist.(final)}}=q_1+q_2$$

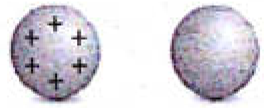
La cantidad de carga de cada cuerpo varía, pero la cantidad de carga del sistema se mantiene constante.

$$\underbrace{Q_{\text{sist.(final)}}} = \underbrace{Q_{\text{sist.(inicial)}}}$$

$$\boxed{\sum q_{\text{final}} = \sum q_{\text{inicial}}}$$

2. Cuerpos conductores y cuerpos aislantes

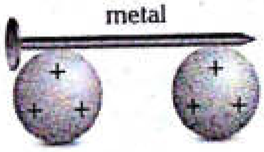
Supongamos que tenemos dos esferas de metal, una electrizada positivamente y la otra eléctricamente neutra.



electrizada neutra

Si colocamos un objeto de metal, como un clavo de hierro, que toque ambas esferas, la que está neutra se electrizará inmediatamente.

metal



Si, en lugar de un clavo, vinculamos las dos esferas con una varilla de madera o una pieza de caucho, la esfera neutra no se electrizará.

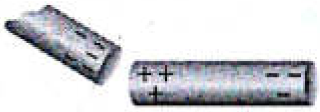
madera

Los materiales como el clavo de hierro se llaman conductores eléctricos, mientras que la madera o el caucho son no conductores, aislantes eléctricos o dieléctricos.

Por otro lado, en un buen conductor, los electrones más alejados del núcleo de cualquiera de sus átomos son atraídos muy débilmente y pueden moverse en forma más o menos libre dentro del conductor (aunque no pueden abandonar el conductor fácilmente), por lo que se les conoce como **electrones libres** o **electrones de conducción**.

Cuando un cuerpo electrizado de forma positiva se acerca o toca un material conductor, los electrones libres del conductor son atraídos por este cuerpo electrizado positivamente y se mueven muy rápido hacia él.

Por el contrario, cuando un objeto electrizado negativamente se acerca a un material conductor, los electrones libres se mueven de manera rápida alejándose del cuerpo electrizado negativamente.



En un semiconductor hay mucho menos electrones libres, mientras que en un aislante casi no hay electrones libres.

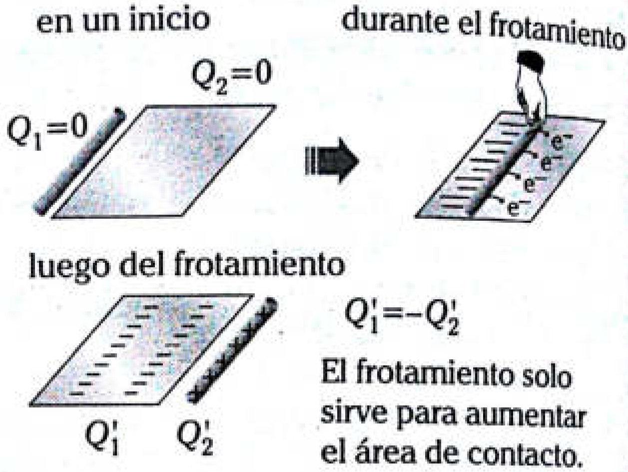
3. Formas de electrizar un cuerpo

Electrizar un cuerpo significa conseguir que un cuerpo inicialmente neutro deje de serlo. De acuerdo con esto, existen tres formas básicas de electrizar un cuerpo.

3.1. POR CONTACTO

El simple contacto entre dos cuerpos de materiales diferentes y eléctricamente neutros puede producir electrización en ambos, según sea la mayor o menor facilidad que tenga cada uno para perder electrones. Es decir, no es necesario el frotamiento; pero al frotar se renuevan continuamente los puntos de contacto por donde se transfieren los electrones, lo que tiene el mismo efecto que si aumentáramos la superficie real de contacto.

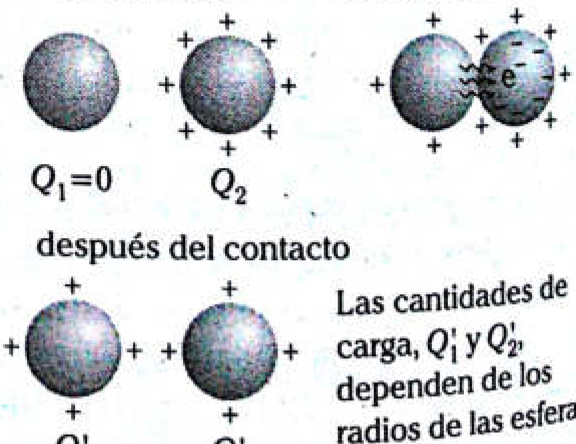
Después de que el intercambio de electrones ha tenido lugar y los dos cuerpos se separan, puede ocurrir que, si uno de los cuerpos es conductor, las partículas electrizadas en exceso se distribuyan uniformemente por toda su superficie debido a la repulsión eléctrica entre ellas; o, si uno de los cuerpos es aislante, las partículas electrizadas en exceso permanezcan en los puntos de la superficie donde ha tenido lugar la transferencia de electrones.



El frotamiento solo sirve para aumentar el área de contacto.

También está el caso de un cuerpo eléctricamente neutro que se electriza al tomar contacto momentáneo o se frota con un cuerpo electrizado. Sucede que uno pierde electrones; y el otro, los gana. El cuerpo neutro adquirirá una cantidad de carga de igual signo que el otro.

En el caso de que los dos cuerpos sean conductores eléctricos y uno de ellos esté electrizado, no es necesario el frotamiento. El simple contacto producirá un movimiento de electrones libres de uno al otro, tal como ocurre con las siguientes esferas conductoras.

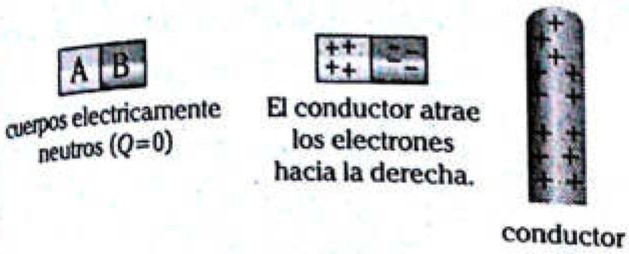


Las cantidades de carga, Q_1' y Q_2', dependen de los radios de las esferas.

Si las esferas son idénticas, la transferencia de electrones termina cuando ambas adquieren igual cantidad de carga.

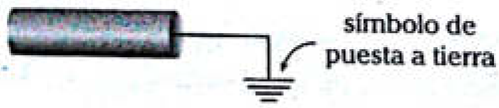
3.2. POR INDUCCIÓN

Consiste en acercar un cuerpo electrizado (inductor) a dos cuerpos conductores eléctricos en contacto.



Al separar los cuerpos, A y B quedan electrizados.

Otra forma de electrizar por inducción a un conductor es conectarlo con un alambre conductor hacia tierra, como se muestra en el gráfico.

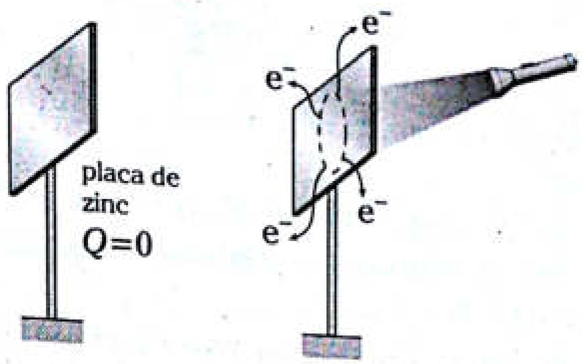


La tierra es un cuerpo conductor de grandes dimensiones, fácilmente acepta o cede electrones; así que actúa como un reservorio de electrones. Si un objeto electrizado negativamente se acerca al conductor conectado a tierra, los electrones libres en el conductor serán repelidos y pasarán a la tierra.

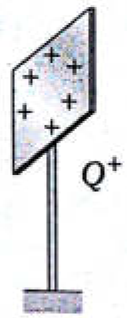
El conductor queda electrizado positivamente. Si lo desconectamos de la tierra, el conductor permanecerá electrizado positivamente.

3.3. POR RADIACIÓN

Consiste en iluminar un cuerpo metálico con luz de alta frecuencia, lo que causa el desprendimiento de electrones (efecto fotoeléctrico).

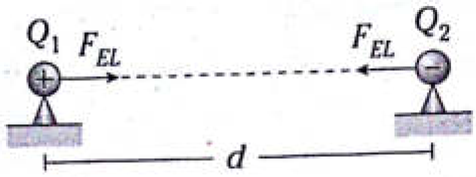


Finalmente, la placa queda con un defecto de electrones.



4. Ley de Coulomb

El hecho de que partículas electrizadas con igual signo se rechacen y con signos diferentes se atraigan fue estudiado cuantitativamente por el científico francés Charles Agustín Coulomb mediante una balanza de torsión muy sensible, parecida a la que utilizó Cavendish en sus estudios de la fuerza gravitacional. A partir de sus trabajos surgió el enunciado de una ley que se conoce con el nombre de su descubridor: "Dos partículas electrizadas en el vacío se ejercen mutuamente una fuerza atractiva o repulsiva (fuerza eléctrica), cuyo módulo es proporcional a los valores absolutos de sus cantidades de carga eléctrica e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa".



$$F_{EL}=K\frac{|Q_1||Q_2|}{d^2}$$

donde

- $|Q_1|$ y $|Q_2|$: valor absoluto de las cantidades de carga de las partículas. Se mide en coulomb (C).
- d: distancia entre las partículas. Se mide en metros (m).
- K: constante eléctrica o de Coulomb. Se mide en $N\cdot m^2/C^2$.

Además K, en forma experimental, se ha determinado para el vacío

$$K=9\times 10\left(\frac{N\cdot m^2}{C^2}\right)$$

El valor de la fuerza eléctrica se ve afectado si las partículas son llevadas a un medio dieléctrico.

$$F'_{EL}=\frac{F_{EL}}{\varepsilon}$$

donde

- F'_{EL}: módulo de la fuerza eléctrica en el medio dieléctrico
- F_{EL}: módulo de la fuerza eléctrica en el aire o vacío
- ε: permitividad eléctrica relativa del medio o constante dieléctrica (caracteriza las propiedades dieléctricas del medio)

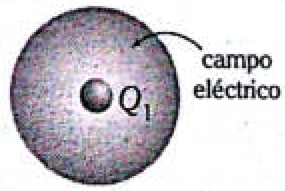
Se supone que el medio es ilimitado y homogéneo, es decir, que sus propiedades son iguales en todo su volumen. Para el vacío, ε se considera igual a la unidad.

Veamos algunas constantes dieléctricas.

Medio	ε
aire	1
aceite	4,6
vidrio (pírex)	5,6
agua (20 °C)	80
papel	3,7
porcelana	7

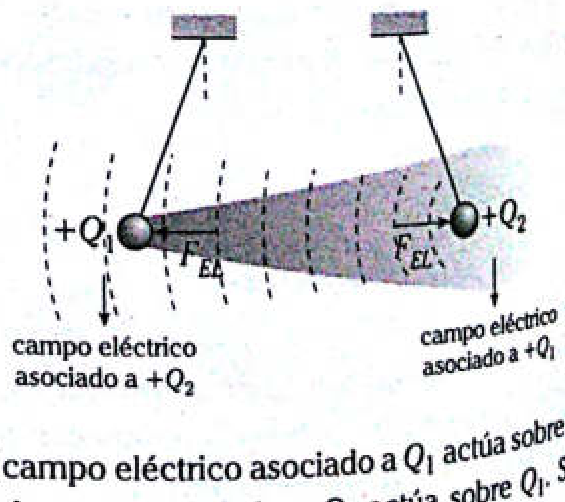
5. Campo eléctrico

El campo eléctrico es una forma de existencia de la materia asociado a todo cuerpo electrizado y es responsable de las interacciones eléctricas con otros cuerpos electrizados.



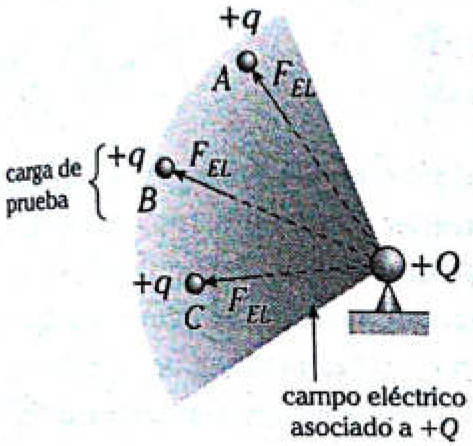
Se debe tener en cuenta que todo cuerpo electrizado en reposo es asociado a un campo eléctrico (denominado también **campo electrostático**).

Ahora describamos cómo se lleva a cabo la repulsión eléctrica de dos pequeñas esferas electrizadas.



El campo eléctrico asociado a Q_1 actúa sobre Q_2 y el campo asociado a Q_2 actúa sobre Q_1. Son los campos eléctricos de cada partícula los que ejercen la fuerza eléctrica a la otra partícula.

Para advertir la presencia de un campo eléctrico en cierta región del espacio, se utiliza una partícula electrizada positivamente (partícula de prueba). Si experimenta repulsión o atracción, entonces en dicha región existe un campo eléctrico.



Si la partícula de prueba, al ser colocada en A, B o C, experimenta una fuerza eléctrica (de repulsión), entonces en A, B y C existe un campo eléctrico asociado a $+Q$.

La cantidad de carga (q) de la partícula de prueba debe ser pequeña ($q \ll Q$) de tal manera que su campo eléctrico no distorsione el campo eléctrico que se quiere analizar (en nuestro caso al campo asociado a $+Q$).

5.1. INTENSIDAD DE CAMPO ELÉCTRICO ($\vec{E}$)

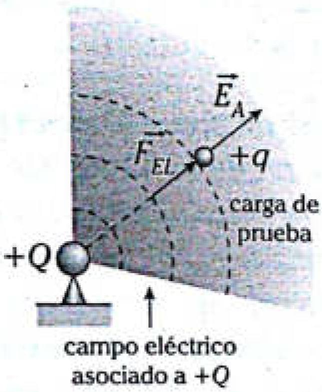
Como el campo eléctrico se manifiesta sobre una partícula electrizada, colocada en algún punto del campo, ejerciéndole una fuerza intensa o débil, entonces decimos que el campo en dicho punto es también intenso o débil; además, dicha fuerza puede tener una u otra dirección. Por ello, para indicar cómo actúa el campo eléctrico en un punto, introducimos una magnitud denominada intensidad de campo eléctrico ($\vec{E}$), la cual caracteriza vectorialmente a cada punto de una región donde se ha establecido un campo eléctrico.

La intensidad de campo eléctrico en un punto se define vectorialmente como

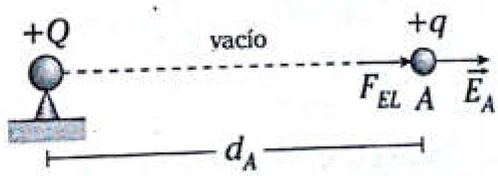
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}_{EL}}{q}}$$

unidad: $\left(\frac{\text{N}}{\text{C}}\right)$

La unidad de $\vec{E}$ significa que, en un punto, el módulo de la intensidad de campo indica la fuerza eléctrica, por una unidad de carga, que el campo eléctrico ejercerá a una partícula electrizada de prueba colocada en ese punto.



La definición (I) también nos indica que, para una partícula de prueba (con cantidad de carga positiva), la dirección de $\vec{E}$ es igual a la de la fuerza eléctrica ($\vec{F}_{EL}$) aplicada a dicha partícula, tal como se muestra.



De (I) consideramos los módulos.

$$E_A = \frac{F_{EL}}{q} \qquad \text{(II)}$$

Por la ley de Coulomb, planteamos que

$$F_{EL} = K\frac{|Q||q|}{d_A^2}$$

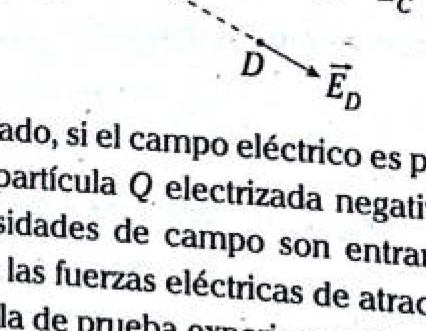
Reemplazamos en (II).

$$E_A=\frac{\dfrac{K|Q||\cancel{q}|}{d_A^2}}{|\cancel{q}|}=\frac{K|Q|}{d_A^2}$$

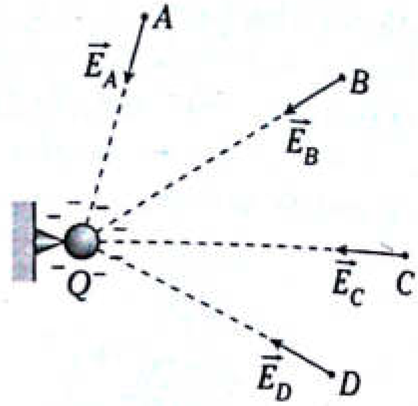
$$\boxed{E_A=K\frac{|Q|}{d_A^2}}$$

Esta expresión indica que el módulo de la intensidad de campo eléctrico (E_A) en un punto no depende de la partícula de prueba, sino de la cantidad de carga (Q) del cuerpo que establece el campo y de la distancia (d).

La partícula de prueba solo nos sirve para definir la dirección de la intensidad de campo, dado que para esta partícula las direcciones de $\vec{E}$ y $\vec{F}_{EL}$ coinciden. Así, se tiene que, para el campo eléctrico producido por una partícula Q electrizada positivamente, las intensidades de campo son salientes a Q, igual que las direcciones de las fuerzas eléctricas de repulsión que la partícula de prueba experimentaría al ser ubicada consecutivamente en los puntos A, B, C y D.



Por otro lado, si el campo eléctrico es producido por una partícula Q electrizada negativamente, las intensidades de campo son entrantes a Q, igual que las fuerzas eléctricas de atracción que la partícula de prueba experimentaría al ser ubicada en los puntos A, B, C y D.

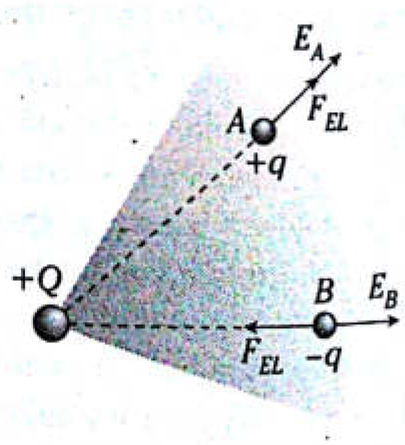


Si se conoce en un punto del campo eléctrico su intensidad respectiva (módulo y dirección), se puede determinar el módulo y la dirección de la fuerza eléctrica que el campo ejercerá a una partícula electrizada ubicada en dicho punto, ya que de la definición de la intensidad del campo eléctrico se tiene

$$\boxed{\vec{F}_{EL}=q\vec{E}}$$

Esta relación nos permite determinar la fuerza eléctrica sobre una partícula sin recurrir a la ley de Coulomb, además, se deduce que

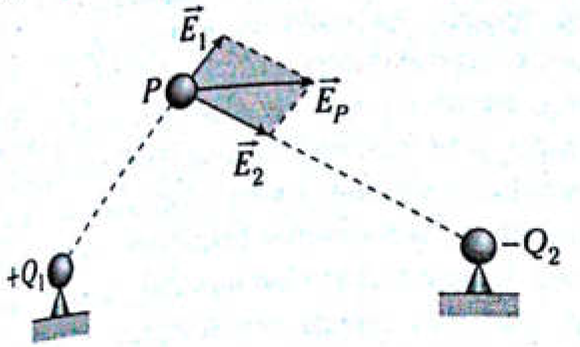
- si $q>0$; entonces $\vec{E}$ y $\vec{F}_{EL}$ tienen igual dirección.
- si $q<0$; entonces $\vec{E}$ y $\vec{F}_{EL}$ tienen direcciones opuestas.



5.1.1. Principio de superposición

Establece que el campo eléctrico ($\vec{E}$) en un punto se determina sumando (vectorialmente) las intensidades de cada una de las partículas.

Ejemplo



La $(\vec{E})$ en P, según el principio de superposición, se calcula así:

$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$ (suma vectorial)

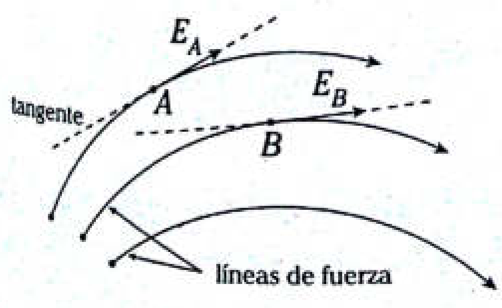
Para el caso de más partículas o cuerpos electrizados

$$\boxed{\vec{E}=\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i}$$

5.2 LÍNEAS DE FUERZA DEL CAMPO ELÉCTRICO

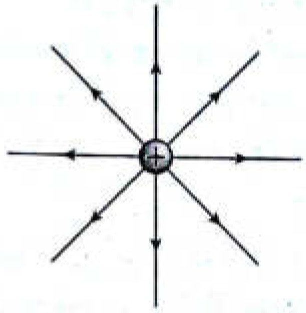
En el siglo XIX, el físico Michael Faraday introdujo el concepto de líneas de fuerzas con la intención de describir y representar geométricamente a los campos eléctricos mediante diagramas más simples. Tengamos presente que las líneas de fuerzas son solo líneas imaginarias que nos representan intuitivamente al campo; se trazan (dibujan) de tal modo que la intensidad de campo eléctrico $(\vec{E})$ sea tangente, en cada punto, a dicha línea y que coincida con la dirección de $(\vec{E})$.

Ejemplo

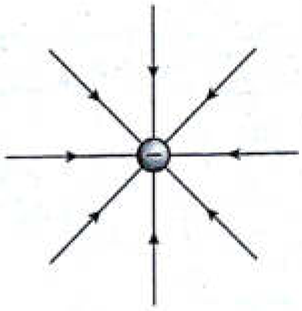


5.2.1. Representación de algunos campos eléctricos

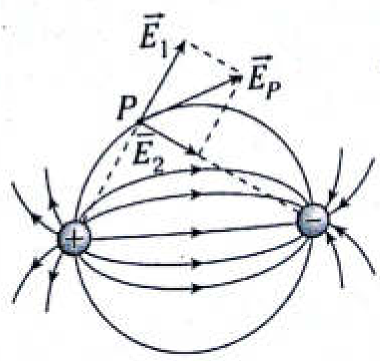
En una partícula electrizada positivamente, encontramos líneas de fuerza salientes.



Mientras que en una partícula electrizada negativamente, encontramos líneas de fuerza entrantes.



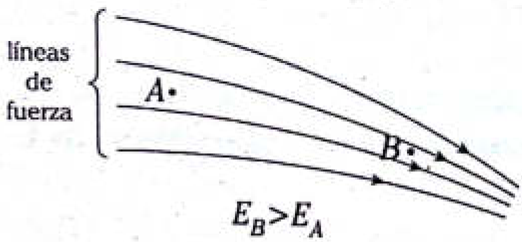
En un dipolo eléctrico, $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ son las intensidades de campo de las partículas electrizadas positiva y negativa, respectivamente, y $\vec{E}_P$ es la intensidad de campo resultante, la cual es tangente a la línea de fuerza en el punto P.



5.2.2. Características

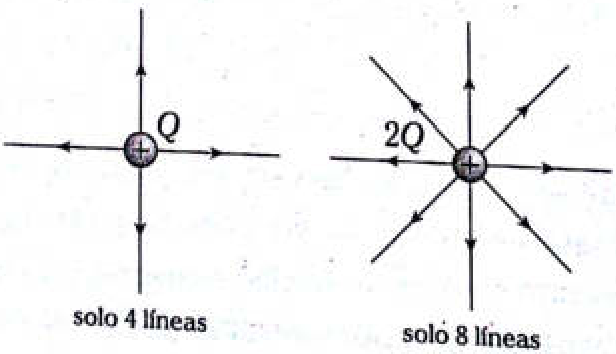
- Las líneas de fuerza son líneas continuas que empiezan en los cuerpos electrizados positivos y terminan en los negativos.
- Las líneas de fuerza no son cerradas para los campos electrostáticos.
- La densidad de líneas de fuerza es proporcional al valor de $\vec{E}$, es decir, las líneas están más juntas donde mayor es $\vec{E}$.

Ejemplo

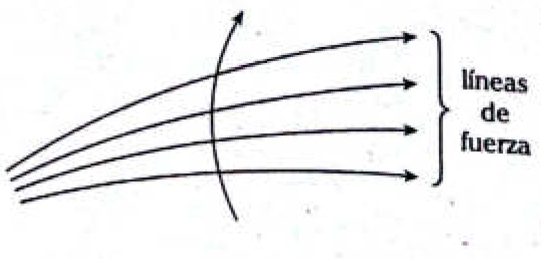


- El número de líneas alrededor de los cuerpos electrizados es proporcional al valor de la cantidad de carga (Q).

Ejemplo

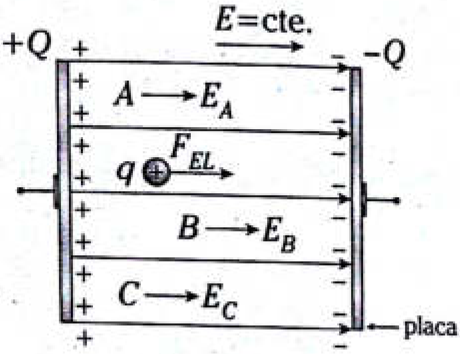


- Las líneas de fuerza no se cortan, ya que su intersección significaría la ausencia de una única dirección del $\vec{E}$ en el punto de intersección; por ejemplo, no es posible el siguiente diagrama:



5.3. CAMPO ELÉCTRICO HOMOGÉNEO

A un campo eléctrico se le considera homogéneo cuando, en cada punto de una región, la intensidad del campo eléctrico ($\vec{E}$) es igual. Las líneas de fuerza que representan a este tipo de campo deben ser rectas paralelas (para que la dirección de $\vec{E}$ sea igual en todos los puntos) e igualmente distanciadas (para que el módulo de $\vec{E}$ sea igual en todos los puntos). Esto se consigue con dos placas conductoras electrizadas con signos opuestos, tal como se muestra.



Entonces se tiene que

$$\vec{E}_A=\vec{E}_B=\vec{E}_C=\vec{E}$$

Además, si colocamos una partícula electrizada al interior del campo, esta experimenta una fuerza eléctrica resultante ($\vec{F}_{EL}$) debido a todas las fuerzas eléctricas que las partículas electrizadas de las dos placas le ejercen. Esta fuerza no se evalúa directamente con la ley de Coulomb, ya que es una resultante. En este caso, para no recurrir a esta ley, aplicamos la siguiente relación:

$$\vec{F}_{EL}=q\vec{E}$$

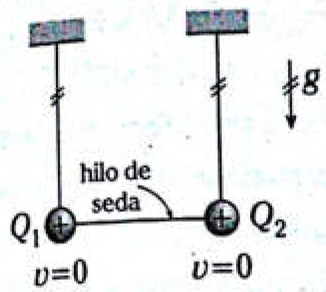
La $\vec{F}_{EL}$ es paralela a las líneas de fuerza. Considerando solo su módulo, se tiene

$$\boxed{F_{EL}=|q|E}$$

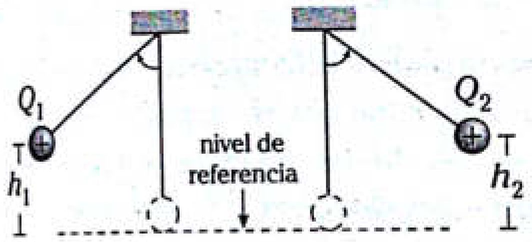
Si la partícula electrizada es negativa, la dirección de la $\vec{F}_{EL}$ es opuesta al $\vec{E}$.

6. Energía potencial eléctrica (*U*)

Consideremos dos pequeñas esferas electrizadas que se encuentran suspendidas por hilos de seda, tal como se muestra.



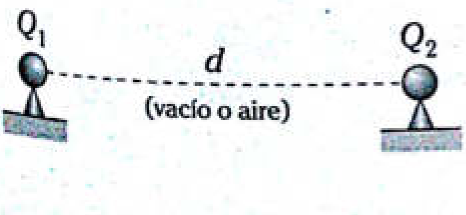
Al cortar el hilo, el sistema alcanza la siguiente situación:



Se deduce que las pequeñas esferas adquieren energía potencial gravitatoria (E_{PG}) respecto del nivel de referencia.

Del principio de conservación y transformación de la energía se sabe que una forma de energía no aparece o desaparece sin dejar rastro, sino que se transforma en otra forma de energía. Para nuestro ejemplo, la energía potencial gravitatoria que adquieren las esferas proviene de otra forma de energía que tenían en un inicio y que se transformó en energía potencial gravitatoria. Como el ascenso de las esferas se debe a la repulsión eléctrica, concluimos que la energía que tienen en un inicio se debe a la interacción eléctrica; por ello, la denominamos energía potencial eléctrica (*U*).

En general, sea un sistema formado por dos partículas electrizadas.



La energía potencial eléctrica se determina como

$$\boxed{U=\frac{KQ_1Q_2}{d}}$$

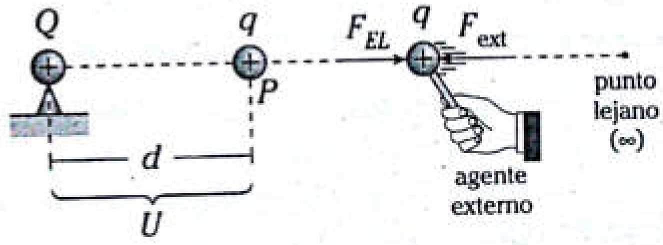
donde las unidades (SI) son

- Q_1 y Q_2: en coulomb (C)
- d: en metros (m)
- U: en joule (J)

- Si las partículas electrizadas son de igual signo, la energía potencial eléctrica es positiva, lo cual también significa que la interacción eléctrica es de repulsión.
- Si las partículas electrizadas son de signos opuestos, la energía potencial es negativa y la interacción eléctrica es de atracción.

7. Potencial eléctrico

La energía potencial eléctrica siempre corresponde a un sistema formado por dos o más partículas electrizadas.



Para dos partículas electrizadas, si consideramos fijas a una de ellas, por ejemplo a Q, asociamos toda la energía del sistema a la otra (en este caso a q). Entonces se deduce que el cuerpo o partícula adquiere una energía potencial debido a su interacción eléctrica con la otra partícula, donde

$$\boxed{U=K\frac{Qq}{d}}$$

Si en el punto P se hubiera colocado una partícula electrizada con $2q$, $3q$, $4q$, etc., notaríamos que la energía que adquiere dicha partícula es proporcional a su cantidad de carga eléctrica.

$$U \text{ (DP) } q$$

$$\rightarrow \quad \frac{U}{q} = \text{cte.} = V_P$$

La constante de proporcionalidad (V_P) se denomina **potencial eléctrico** del punto considerado.

$$\boxed{V_P = \frac{U}{q}}$$

donde la unidad de medida del potencial eléctrico, en el SI, es el voltio (V).

$$\boxed{1\,\text{V} = \frac{1\,\text{joule}}{1\,\text{coulomb}} = 1\frac{\text{J}}{\text{C}}}$$

Luego, $V_P = 1$ V indica que, al ubicar en P una partícula electrizada con la unidad de carga (1 C), adquiere una energía potencial eléctrica de 1 J.

Con el potencial eléctrico podemos determinar la cantidad de energía potencial eléctrica que adquiere una partícula electrizada ubicada en un punto del campo eléctrico.

De la relación del potencial eléctrico, se tiene

$$\boxed{U = qV_P}$$

además

$$V_P = \frac{U}{q} = \frac{K\frac{Q\cancel{q}}{d}}{\cancel{q}}$$

Por lo tanto

$$\boxed{V_P = K\frac{Q}{d}}$$

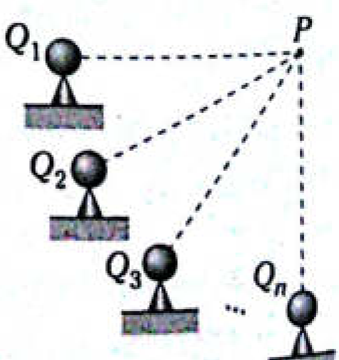
De la última expresión, notamos que el potencial eléctrico en un punto del campo eléctrico no depende de la cantidad de carga (q) de la partícula ubicada en dicho punto, sino de la cantidad de carga (Q) del cuerpo que establece el campo y la distancia (d). Por ello, se plantea que el potencial eléctrico (V) en un punto es una magnitud escalar que caracteriza energéticamente un punto del campo eléctrico, su valor nos indica la cantidad de energía (U) por cada unidad de carga eléctrica que adquirirá una partícula electrizada al ubicarse en dicho punto.

Así como para el cálculo de la U se considera el signo de la cantidad de carga de las partículas, para el cálculo del potencial eléctrico también debemos considerarlo.

Por lo tanto

- si $Q > 0 \quad \rightarrow \quad V_P > 0$
- si $Q < 0 \quad \rightarrow \quad V_P < 0$

El potencial eléctrico puede ser positivo o negativo. El signo no indica dirección; dado que el potencial eléctrico está relacionado con la energía es una magnitud escalar. Por lo mismo, el potencial eléctrico, debido a varias partículas electrizadas (distribución discreta), se determina considerando el principio de superposición.



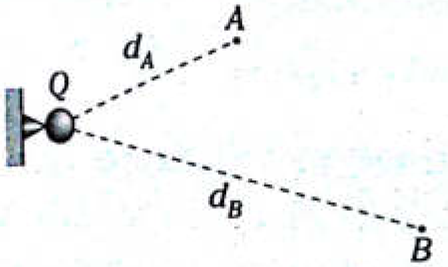
Dado que es una magnitud escalar

$V_P=V_1+V_2+V_3+...+V_n$ (suma escalar)

$$\boxed{V_P=K\frac{Q_1}{d_1}+K\frac{Q_2}{d_2}+K\frac{Q_3}{d_3}+...+K\frac{Q_n}{d_n}}$$

7.1. SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

Consideremos el campo eléctrico establecido por una partícula electrizada con cantidad de carga $Q > 0$.



Para los puntos A y B, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} V_A=\dfrac{KQ}{d_A} \\ V_B=\dfrac{KQ}{d_B} \end{array}\right\} \begin{array}{l} d_A<d_B \\ V_A>V_B \end{array}$$

donde A tiene mayor potencial eléctrico que B.

Si $d_A=d_B$, se cumple que $V_A=V_B$, es decir, todos los puntos que están a igual distancia de una partícula electrizada tendrán igual potencial eléctrico.

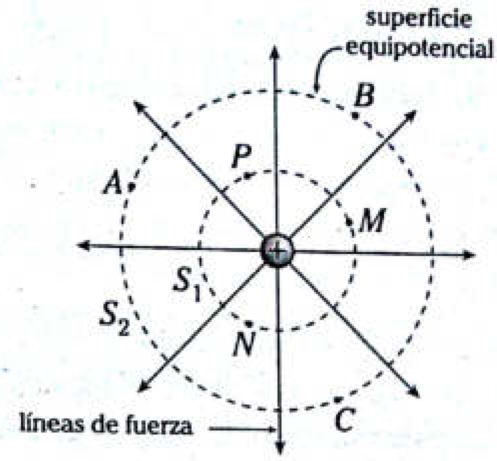
Todos los puntos de un campo eléctrico que tienen igual potencial eléctrico forman una superficie llamada superficie equipotencial.

Las líneas de fuerzas nos permiten describir y representar a un campo electrostático, asimismo, las superficies equipotenciales nos permitirán hacer algo similar.

Para una partícula electrizada, las superficies equipotenciales son esferas concéntricas, que tienen como centro a dicha partícula, ya que todos los puntos de una esfera están a igual distancia de la partícula.

Ejemplo

Sean las superficies equipotenciales S_1 y S_2.



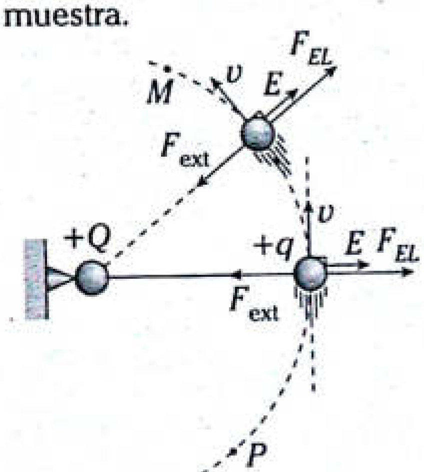
En la superficie S_1

$$V_P=V_M=V_N$$

En la superficie S_2

$$V_A=V_B=V_C$$

Con un agente externo desplazamos una partícula electrizada $(+q)$ sobre una superficie equipotencial desde un punto P hasta un punto M, tal como se muestra.



Dada la trayectoria de la partícula (por una esfera), la $\vec{F}_{EL}$ es perpendicular a la velocidad $(\vec{v})$ de la partícula en cualquier posición. Esto significa que el trabajo del campo eléctrico es cero, es decir,

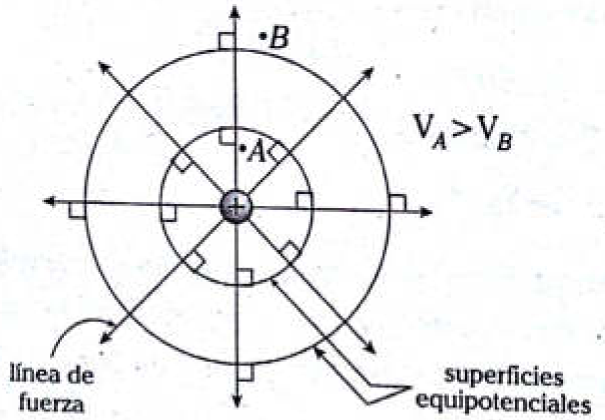
$$W_{P\to M}^{F_{EL}}=0$$

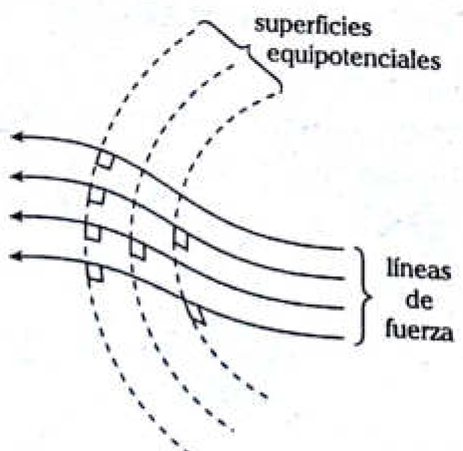
Este resultado se puede generalizar para cualquier tipo de campo eléctrico. **El trabajo del campo eléctrico por una superficie equipotencial es siempre cero.**

Lo anterior implica que la $\vec{F}_{EL}$ siempre es perpendicular a dicha superficie y, por ende, también lo son la intensidad de campo eléctrico $(\vec{E})$ y las líneas de fuerza, ya que estas tienen la misma dirección que $\vec{E}$ en cualquier punto.

La relación de perpendicularidad entre las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales se verifica para cualquier campo eléctrico.

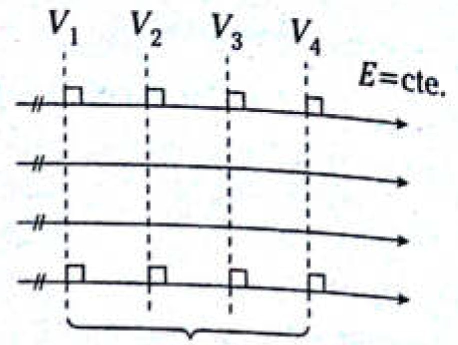
Ejemplo





Del primer gráfico se deduce que las líneas de fuerza apuntan a las zonas donde el potencial eléctrico disminuye.

Todo lo anterior nos lleva a concluir que, para un **campo eléctrico homogéneo,** las superficies equipotenciales son planos paralelos.



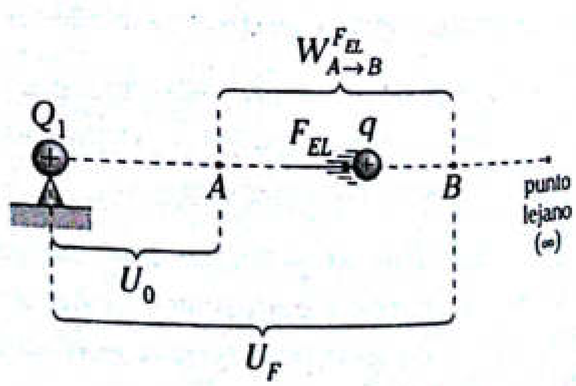
Representan planos equipotenciales.

Recordemos que el potencial eléctrico disminuye en la dirección de las líneas de fuerza, entonces se verifica que

$$V_1 > V_2 > V_3 > V_4$$

7.2. DIFERENCIA DE POTENCIAL ELÉCTRICO

Generalmente, en el estudio de los fenómenos eléctricos no cobra relevancia el potencial eléctrico en un punto de un campo eléctrico, sino tan solo la diferencia de potencial entre dos puntos de dicho campo, que es lo que más se utiliza en la práctica. Para nuestro posterior estudio, lo vamos a relacionar principalmente con el trabajo realizado por el campo eléctrico ($W^{F_{EL}}$) entre dichos puntos. Consideremos lo siguiente (despreciando efectos gravitatorios):



Según la relación

$$W^{\text{neto}}=\Delta E_C$$

se tiene entonces

$$W^{F_{EL}}_{A\to B} = \Delta E_C \qquad (*)$$

De acuerdo con el principio de conservación de la energía, el aumento de E_C es igual a la pérdida de otra forma de energía, en este caso, energía potencial eléctrica (U), por consiguiente

$$U_{(\text{pérdida})}=E_{C(\text{ganada})}$$

$$U_0-U_F=E_{C(F)}-E_{C(0)}$$

$$U_0-U_F=\Delta E_C$$

Igualamos con (*).

$$W_{A\to B}^{F_{EL}}=U_0-U_F$$

Como $U=qV$, se tiene entonces

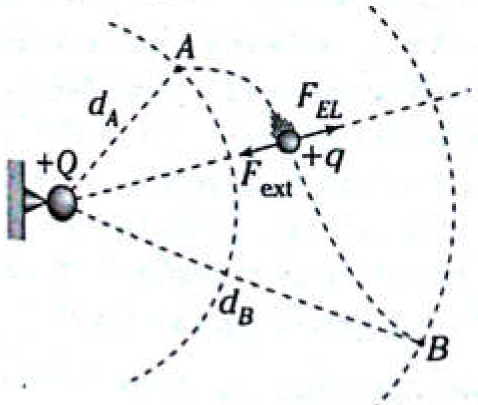
$$W_{A\to B}^{F_{EL}}=qV_A-qV_B$$

Por lo tanto

$$\boxed{W_{A\to B}^{F_{EL}}=q(V_A-V_B)=qV_{AB}}$$

donde q es la cantidad de carga de la partícula que se traslada.

A partir de esto se deduce que el trabajo de la fuerza eléctrica (trabajo del campo) solo depende del potencial inicial (en A) y del potencial final (en B), por lo tanto, no depende de la trayectoria seguida por la partícula.



Generalmente, para mover la partícula por una trayectoria cualquiera, es necesaria la ayuda de un agente externo. En ese caso, de la relación

$$W^{\text{neto}}=\Delta E_C$$

Despreciando efectos gravitatorios, se tiene que

$$\boxed{W_{A\to B}^{F_{EL}}+W_{A\to B}^{F_{ext}}=\Delta E_C}$$

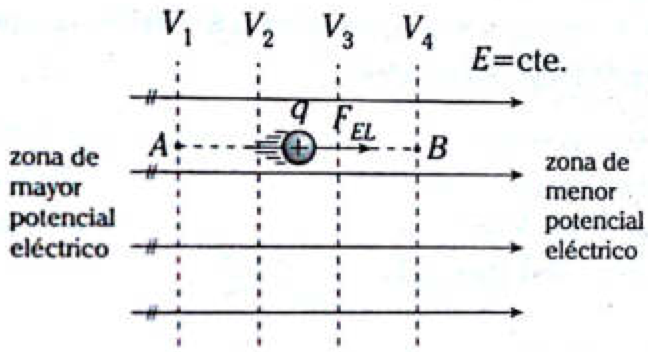
Si además consideramos a la fuerza de gravedad ($\vec{F}_g$), se tiene que

$$\boxed{W_{A\to B}^{F_g}+W_{A\to B}^{F_{EL}}+W_{A\to B}^{F_{ext}}=\Delta E_C}$$

Recordemos que los trabajos del campo gravitatorio ($\vec{F}_g$) y del campo eléctrico ($\vec{F}_{EL}$) no dependen de la trayectoria.

7.3. DIFERENCIA DE POTENCIAL EN UN CAMPO ELÉCTRICO HOMOGÉNEO

Veamos el caso de un campo eléctrico homogéneo.



Del gráfico, se observa que el campo eléctrico desarrolla trabajo, desde A hasta B, para desplazar una pequeña esfera con cantidad de carga positiva (q), el cual se puede evaluar de dos formas:

Como la $\vec{F}_{EL}$ es constante

$$W_{A\to B}^{F_{EL}}=F_{EL}\times d_{AB}$$

$$=(qE)d_{AB}$$

De forma general

$$W_{A\to B}^{F_{EL}}=q(V_A-V_B)$$

Igualamos ambas expresiones.

$$(\cancel{q}E)d_{AB}=\cancel{q}(V_A-V_B)$$

$$\boxed{E=\frac{V_A-V_B}{d_{AB}}}$$

La expresión anterior nos da la relación que existe entre la intensidad del campo eléctrico ($\vec{E}$) y la diferencia de potencial (V_A-V_B) entre dos puntos, A y B, en un campo eléctrico homogéneo.

Se debe tener presente que las líneas de fuerza son paralelas a la distancia entre las superficies equipotenciales que pasan por A y B (d_{AB}).

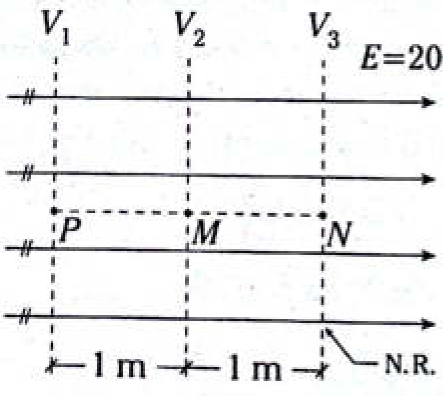
Consideramos las siguientes unidades:

- V_A-V_B: en voltios (V)
- d_{AB}: en metros (m)
- $\vec{E}$: en voltio/metro (V/m)

Ejemplo
Si en un campo homogéneo la E=200 V/m, ¿qué significado físico tiene?

Usando la relación anterior, se deduce que entre dos puntos del campo, separados una distancia (paralela a las líneas de fuerza) de 1 m, su diferencia de potencial es de 200 V.

Graficamos.



Se deduce que

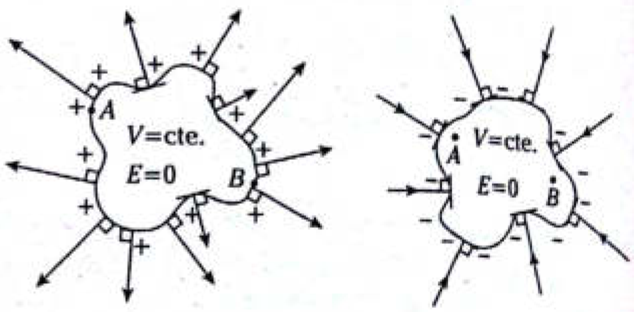
$$V_P-V_M=200\text{ V} \;;\; V_M-V_N=200\text{ V}$$

Si a V_3 se elige como nivel de referencia ($V_3=0$), entonces se verifica que

$$V_2=200\text{ V} \;;\; V_1=400\text{ V}$$

8. Equilibrio electrostático

Es aquel estado de un cuerpo donde las partículas electrizadas excedentes que contiene se mantienen en reposo una respecto de otras.

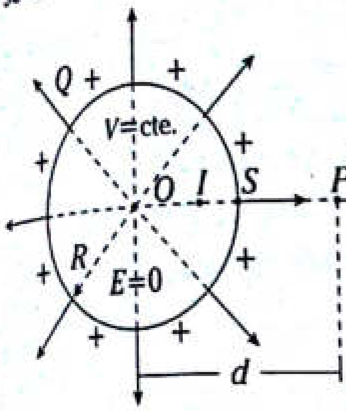


En los conductores eléctricos, las partículas electrizadas excedentes se alejan lo máximo posible por la repulsión eléctrica entre ellas, distribuyéndose en la superficie del conductor.

Terminada la distribución superficial, las partículas electrizadas excedentes se mantienen en reposo unas respecto de otras, es decir, el conductor llega al equilibrio electrostático. En estas condiciones,

- todos los puntos del conductor están a igual potencial eléctrico, porque si existiera una diferencia de potencial entre dos puntos (A y B), se manifestaría el campo eléctrico con líneas de fuerza (de mayor a menor potencial eléctrico) y las partículas electrizadas se movilizarían entre dichos puntos, lo cual no ocurre porque el conductor está en equilibrio electrostático. Todo el volumen del conductor es equipotencial.
- al no existir líneas de fuerza dentro del conductor, la intensidad de campo eléctrico es nula en el interior (E=0).
- el campo solo se manifiesta externamente al conductor, tal que las líneas de fuerza entran o salen perpendicularmente a la superficie del conductor, dado que es una superficie equipotencial.

Si aplicamos lo anterior a una esfera conductora, se tiene



$V_P=K\dfrac{Q}{d}$ (escala)

$E_P=K\dfrac{|Q|}{d^2}$ (vectorial)

En el interior de la esfera, la intensidad de campo es nula ($E=0$), no hay líneas de fuerza y el potencial eléctrico es constante en todo su volumen.

→ $V_0=V_{\text{interior}}=V_{\text{superficie}}$

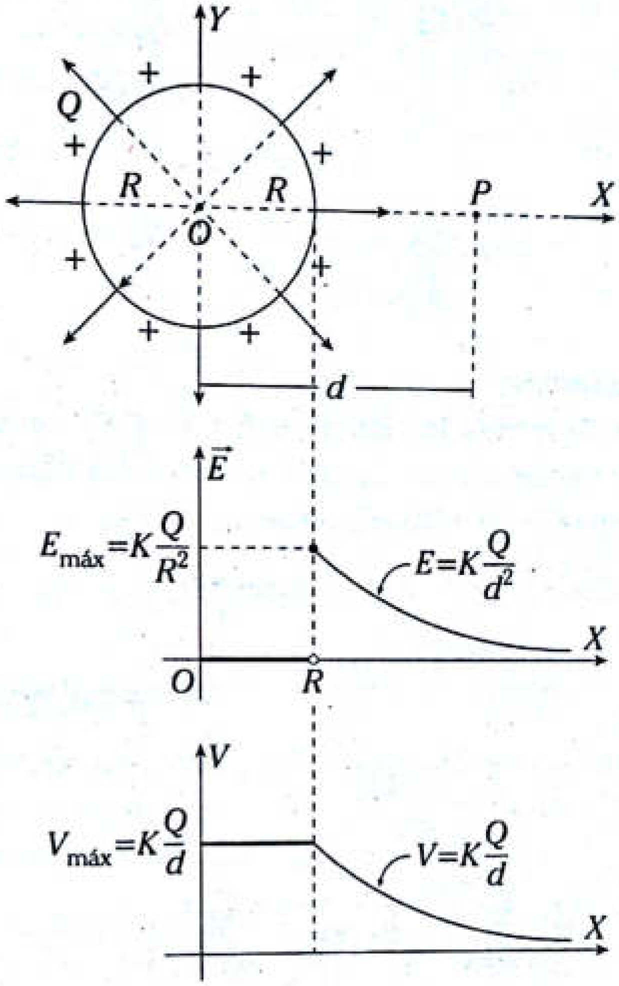
$$\boxed{V_0=V_I=V_S=K\frac{Q}{R}}$$

En el exterior, el campo eléctrico es igual al campo que se genera al concentrarse toda la cantidad de carga de la esfera en su centro.

→ $E_P=K\dfrac{|Q|}{d^2}$

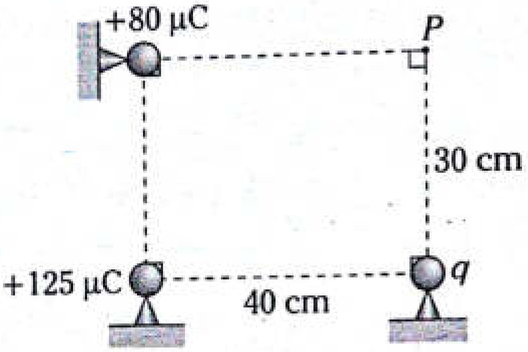
$V_P=K\dfrac{Q}{d}$

A continuación, se muestran las gráficas de la variación de la intensidad de campo eléctrico ($\vec{E}$) y el potencial eléctrico (V) con la posición, a lo largo del eje X positivo, para una esfera conductora electrizada positivamente y en equilibrio electrostático.



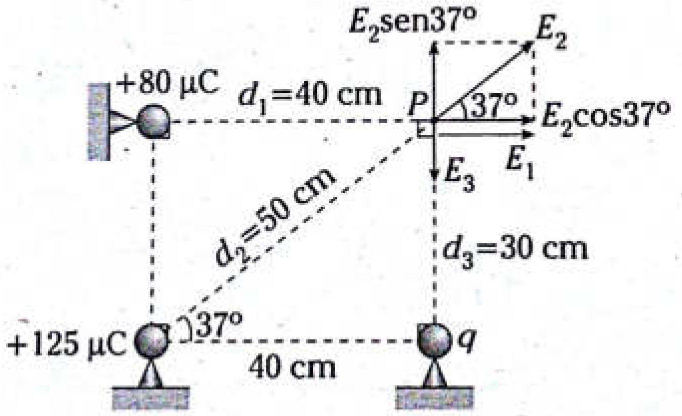
Problema N.º 1

Determine la cantidad de carga q y el módulo de la intensidad de campo eléctrico en el punto P según el sistema de partículas mostrado si se sabe que dicha intensidad es horizontal.



Resolución

Grafiquemos las intensidades $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ correspondientes a los campos de las partículas de +80 μC y de +125 μC, respectivamente.



Por condición del problema, la intensidad de campo en el punto P debe ser horizontal, es decir, la intensidad de campo en la vertical debe ser nula. Para ello, si descomponemos $\vec{E}_2$, tal como se muestra, su componente vertical debe ser anulada por otra en dirección contraria, en este caso $\vec{E}_3$, que necesariamente debe pertenecer al campo de q.

$\vec{E}_3$ es entrante a q, por ello esta partícula debe ser negativa.

Como ya se ha deducido

$$E_3=E_2\text{sen}37°$$

E_2 y E_3 se determinan con la relación

$$E=K\frac{|Q|}{d^2} \qquad (*)$$

$$\rightarrow \quad \cancel{K}\frac{|q|}{\left(3\times\cancel{10^{-1}}\right)^2}=\cancel{K}\frac{\cancel{125}\times10^{-6}}{\left(\cancel{5}\times\cancel{10^{-1}}\right)^2}\left(\frac{3}{\cancel{5}}\right)$$

Resolvemos.

$$|q|=27\times10^{-6}\ \text{C}$$

$$|q|=27\ \mu\text{C}$$

Como ya se deducio que q es negativo

$$q=-27\ \mu\text{C}$$

Determinamos la intensidad de campo en P; dado que las intensidades en la vertical se anulan, entonces

$$E_P=E_1+E_2\cos37°$$

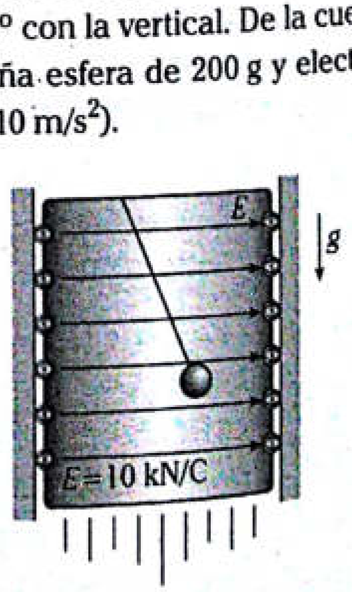
Aplicamos la relación (*).

$$E_P=9\times10^9\frac{80\times10^{-6}}{\left(4\times10^{-1}\right)^2}+9\times10^9\frac{125\times10^{-6}}{\left(5\times10^{-1}\right)^2}\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\therefore \quad E_P=81\times10^5\ \text{N/C}$$

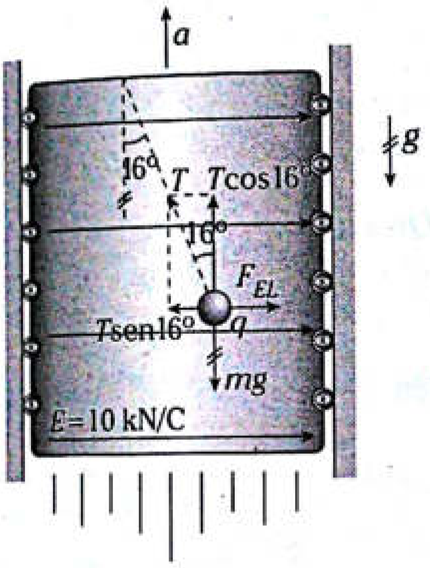
Problema N.º 2

Determine la aceleración con la que asciende el ascensor si la cuerda forma un ángulo constante de 16° con la vertical. De la cuerda cuelga una pequeña esfera de 200 g y electrizada con 70 μC. (g=10 m/s^2).



Resolución

Si la cuerda forma un ángulo constante con la vertical, significa que la esfera se encuentra en reposo respecto del ascensor, pero en movimiento vertical hacia arriba respecto de la tierra y acelerando, igual que el ascensor. Por lo cual, se tiene que verificar, para la esfera, que la fuerza resultante en esa dirección es diferente de cero.



La esfera experimenta tres fuerzas. En particular, la fuerza eléctrica ($\vec{F}_{EL}$) del campo homogéneo tiene igual dirección que las líneas del campo eléctrico por estar electrizada positivamente y se determina como

$$F_{EL}=|q|E$$

Reemplazamos los datos.

$$F_{EL}=70\times10^{-6}\ \text{C}\times10\times10^{3}\ \text{N/C}$$

$$F_{EL}=0{,}7\ \text{N}$$

Dado que, en la horizontal, la esfera no experimenta movimiento

$$T\text{sen}16^\circ=F_{EL}$$

$$T\times\frac{7}{25}=0{,}7\ \text{N}$$

$$T=2{,}5\ \text{N}$$

En la vertical

- $T\cos16^\circ=2{,}5\ \text{N}\times\dfrac{24}{25}=2{,}4\ \text{N}$
- $mg=0{,}2\ \text{kg}\times10\ \text{m/s}^2=2\ \text{N}$

Esto verifica por qué hay una fuerza resultante hacia arriba y, por consiguiente, una aceleración en esa dirección.

Aplicamos la segunda ley de Newton.

$$a=\frac{F_R}{m}$$

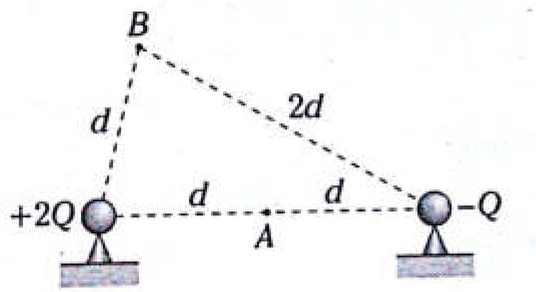
$$a=\frac{T\cos16^\circ-mg}{m}$$

$$a=\frac{2{,}4\ \text{N}-2\ \text{N}}{0{,}2\ \text{kg}}$$

$$\therefore\quad a=2\ \text{m/s}^2$$

Problema N.° 3

Para el sistema de partículas mostrado, si el potencial eléctrico en el punto A es 90 V, determine el potencial eléctrico en el punto B.



Resolución

El potencial eléctrico en un punto es la suma de potenciales de los campos de cada partícula, en este caso de $+2Q$ y $-Q$. En consecuencia, en el punto B

$$V_B=V_{(+2Q)}+V_{(-Q)}$$

Cada potencial se determina por la relación

$$V = K\frac{Q}{d} \qquad \text{(I)}$$

$$\rightarrow \quad V_B = K\frac{(2Q)}{d} + K\frac{(-Q)}{2d}$$

$$V_B = 2\left(K\frac{Q}{d}\right) - \frac{1}{2}\left(K\frac{Q}{d}\right)$$

$$V_B = \frac{3}{2}\left(K\frac{Q}{d}\right) \qquad \text{(II)}$$

Por condición del problema, en el punto A

$$\overbrace{V_{(+2Q)} + V_{(-Q)}}^{V_A=90\ \text{V}} = 90\ \text{V}$$

Aplicamos la relación (I).

$$K\frac{(2Q)}{d} + K\frac{(-Q)}{d} = 90\ \text{V}$$

$$2\left(K\frac{Q}{d}\right) - \left(K\frac{Q}{d}\right) = 90\ \text{V}$$

Restamos.

$$K\frac{Q}{d} = 90\ \text{V}$$

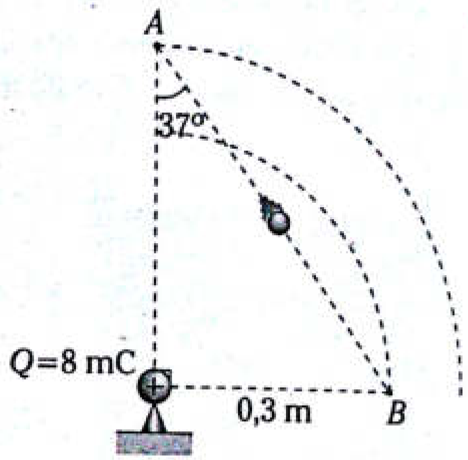
Reemplazamos en la relación (II).

$$V_B = \frac{3}{2}(90\ \text{V})$$

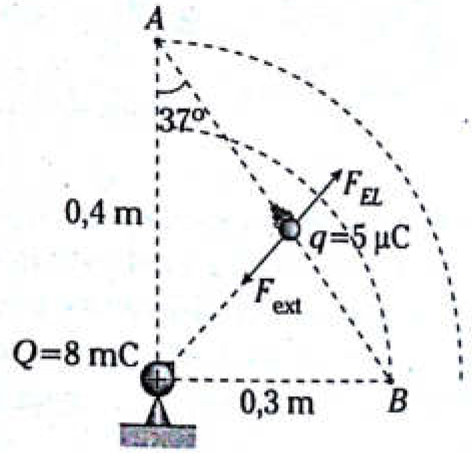
$$\therefore \quad V_B = 135\ \text{V}$$

Problema N.º 4

Determine el trabajo de un agente externo que traslada lentamente una partícula electrizada con 5 μC desde el punto A hasta B por la trayectoria rectilínea mostrada.



Resolución



Para trasladar la partícula q en forma rectilínea de A hacia B es necesario de una fuerza externa ($\vec{F}_{ext}$).

Si la partícula debe llevarse lentamente, entonces

$$F_{ext} = F_{EL}$$

En consecuencia

$$\boxed{W_{A\rightarrow B}^{F_{ext}} = -W_{A\rightarrow B}^{F_{EL}}} \qquad (*)$$

El signo negativo indica que si una fuerza realiza trabajo a favor del movimiento (trabajo positivo), la otra realiza trabajo en contra del movimiento (trabajo negativo). Con ello, basta con determinar el trabajo de campo para luego determinar el trabajo del agente externo.

$$W_{A\to B}^{F_{EL}}=q(V_A-V_B)$$

donde

$$V_A=K\frac{Q}{d_A}=9\times10^9\frac{8\times10^{-3}}{4\times10^{-1}}=180\times10^{-6}\text{ V}$$

$$V_B=K\frac{Q}{d_B}=9\times10^9\frac{8\times10^{-3}}{3\times10^{-1}}=240\times10^{-6}\text{ V}$$

Reemplazamos.

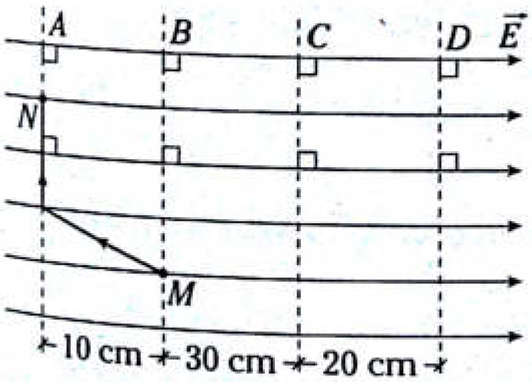
$$W_{A\to B}^{F_{EL}}=5\times10^{-6}(180\times10^{-6}-240\times10^{-6})$$
$$=-300\text{ J}$$

Luego, reemplazamos en (*).

$$\therefore\quad W_{A\to B}^{F_{ext}}=+300\text{ J}$$

Problema N.° 5

En cierta región del espacio se establece un campo eléctrico homogéneo, tal como muestra en el gráfico. Si el trabajo del campo sobre una partícula electrizada con $-2\ \mu C$ al ser trasladada desde M hasta N por la trayectoria indicada es de $100\ \mu J$, determine la diferencia de potencial entre B y C.



Resolución

En un campo eléctrico homogéneo, la diferencia de potencial entre dos equipotenciales está en proporción directa con la distancia entre ellas. Según lo anterior, del gráfico se tiene

$$V_B-V_C=3(V_N-V_M)\qquad(*)$$

Recuerde que el potencial eléctrico disminuye en el sentido de las líneas de fuerza.

Para que la partícula sea trasladada por la trayectoria mostrada, es necesario un agente externo, sin embargo, el trabajo del campo eléctrico no depende de la trayectoria.

Por dato

$$W_{M\to N}^{F_{EL}}=+100\ \mu\text{J}$$
$$\rightarrow\quad q(V_M-V_N)=+100\ \mu\text{J}$$

donde

$$q=-2\ \mu\text{C}=-2\times10^{-6}\text{ C}$$

Reemplazamos.

$$-2\times\cancel{10^{-6}}\text{ C}(V_M-V_N)=+100\times\cancel{10^{-6}}\text{ J}$$
$$V_M-V_N=-50\text{ V}$$
$$\rightarrow\quad V_N-V_M=50\text{ V}$$

Finalmente, reemplazamos en (*).

$$\therefore\quad V_B-V_C=150\text{ V}$$

Problema N.° 6

Dos esferas conductoras, de radios r y R ($R=2r$), se encuentran en equilibrio electrostático con cantidades de carga de $+16\ \mu C$ y $-4\ \mu C$, respectivamente, alejadas entre sí una distancia d ($d>>R$). Determine las cantidades de carga final que tendrá cada esfera tiempo después de conectarlas mediante un alambre conductor.

Resolución

Al inicio

$Q_{2(0)}=-4\ \mu C$

$Q_{1(0)}=+16\ \mu C$

$V_{A(0)}=K\dfrac{Q_{1(0)}}{r}>0$

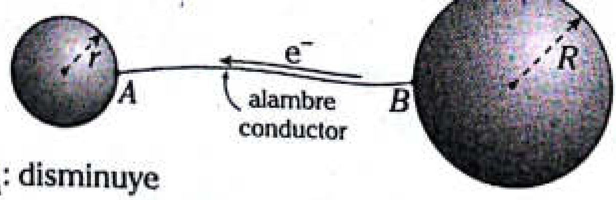
$V_{B(0)}=K\dfrac{Q_{2(0)}}{R}<0$

$V_{A(0)}>V_{B(0)}$

Dado que las esferas están muy separadas, sus potenciales son independientes. En esta situación inicial, entre los puntos A y B hay una diferencia de potencial. Si los conectamos con un alambre conductor, se establece un flujo de electrones libres (cantidad de carga negativa) en el sentido de menor a mayor potencial eléctrico ($B \rightarrow A$). Es decir, la esfera más grande con cantidad de carga negativa transfiere sus electrones en exceso a la otra esfera.

Q_2: aumenta

Q_1: disminuye



V_A: disminuye

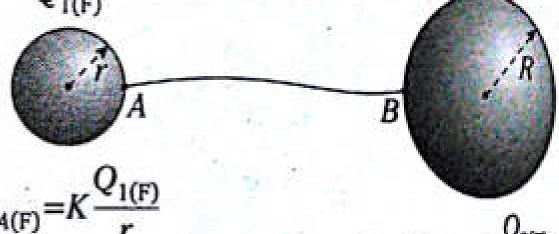
V_B: aumenta

El flujo continúa mientras exista una diferencia de potencial entre A y B. Como estos potenciales van cambiando, ya que varían sus cantidades de carga (Q_1 y Q_2), en poco tiempo sus potenciales se igualan y termina el flujo de electrones y las esferas llegarán a un nuevo equilibrio electrostático, pero con cantidades de carga diferentes a las iniciales.

Finalmente

$Q_{2(F)}$

$Q_{1(F)}$



$V_{A(F)}=K\dfrac{Q_{1(F)}}{r}$

$V_{B(F)}=K\dfrac{Q_{2(F)}}{R}$

$V_{A(F)}=V_{B(F)}$

De la igualdad de potenciales, se tiene que

$$K\frac{Q_{1(F)}}{r}=K\frac{Q_{2(F)}}{R}$$

Como $R=2r$

$$\frac{Q_{1(F)}}{Q_{2(F)}}=\frac{1}{2} \qquad \text{(I)}$$

Además, para el sistema, la cantidad de carga total se conserva.

$$\sum q_{(\text{finales})}=\sum q_{(\text{iniciales})}$$

$$\rightarrow \quad Q_{1(F)}+Q_{2(F)}=Q_{1(0)}+Q_{2(0)}$$

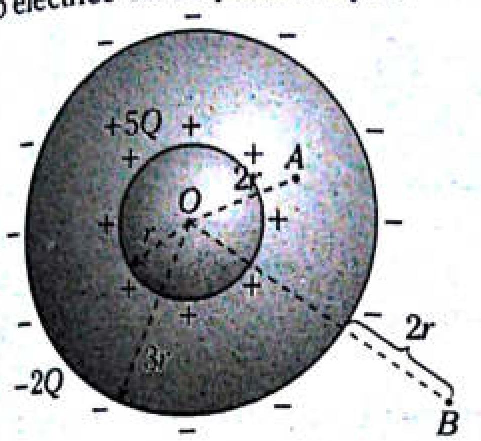
$$Q_{1(F)}+Q_{2(F)}=+12\ \mu C \qquad \text{(II)}$$

Por lo tanto, de las relaciones (I) y (II)

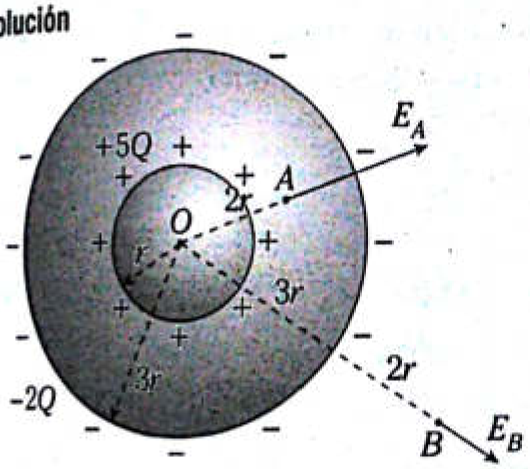
$$Q_{1(F)}=+4\ \mu C \ \wedge\ Q_{2(F)}=+8\ \mu C$$

Problema N.° 7

Se muestran dos cascarones metálicos concéntricos de paredes muy delgadas. ¿En qué relación están los módulos de las intensidades de campo eléctrico en los puntos A y B?



Resolución



El punto A es un punto interior al cascarón más grande, por lo que la intensidad de campo eléctrico respecto a este es nula.

Como el punto A es exterior al cascarón más pequeño, el módulo de la intensidad de campo eléctrico resultante en A es

$$E_A = K\frac{5Q}{4r^2}$$

El punto B es un punto exterior a los dos cascarones, por lo que podemos concentrar la carga total de los cascarones en el centro (O) y evaluar el módulo de la intensidad de campo eléctrico en B, como el caso de una partícula.

$$E_B = K\frac{3Q}{25r^2}$$

Dividimos E_A y E_B.

$$\therefore \quad \frac{E_A}{E_B} = \frac{125}{12} \approx 10,4$$

Problemas Propuestos

NIVEL BÁSICO

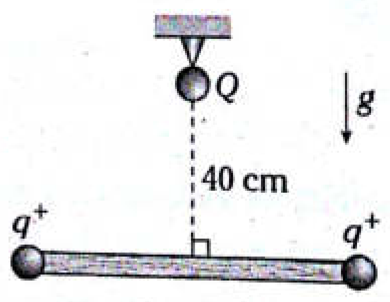
1. Dos esferas metálicas de diferentes radios pero de igual cantidad de carga eléctrica positiva se ponen en contacto. Al respecto, indique las afirmaciones correctas.
   I. Pasan electrones de la esfera grande a la esfera pequeña.
   II. No hay flujo de electrones porque las dos esferas tienen igual cantidad de carga.
   III. La esfera de mayor radio gana electrones.

   A) solo I B) solo II C) solo III
   D) I y III E) ninguna

2. Dos esferas conductoras de radios iguales (menores a 1 cm) y con cantidades de carga de +8 nC y −40 nC, respectivamente, se ponen en contacto y posteriormente se las separa 3 cm. Determine el módulo de la fuerza eléctrica entre ellas. ($K=9\times10^9$ N/m^2).

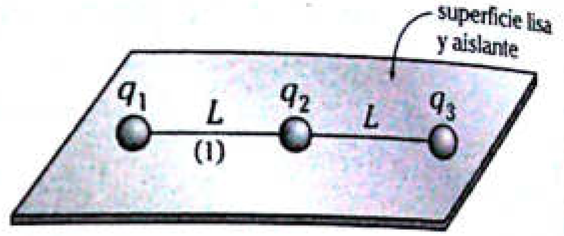
   A) 256 mN B) 2,56 N C) 2,16 mN
   D) 2,56 μN E) 2,56 mN

3. Una barra de madera homogénea de 2,88 kg y 60 cm de longitud tiene empotrada en sus extremos dos esferas pequeñas metálicas cargadas con $q=10$ μC. Si la barra se encuentra en equilibrio en la posición mostrada, determine la cantidad de carga Q. ($g=10$ m/s^2)



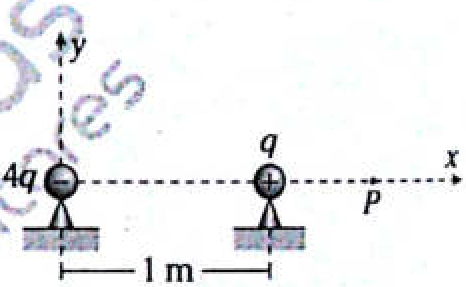
   A) +50 μC B) +10 μC C) −10 μC
   D) −50 μC E) −5 μC

4. Se tienen tres esferitas electrizadas dispuestas tal como se muestra. Determine la tensión del hilo 1. ($q_1=q_2=q_3=2$ μC; $L=60$ cm).



   A) 0,125 N B) 0,25 N C) 0,3 N
   D) 0,4 N E) 0,5 N

5. Determine la coordenada x del punto P, en el SI, en el cual la intensidad del campo eléctrico asociado a las partículas electrizadas es $-4q$, y q es nula.

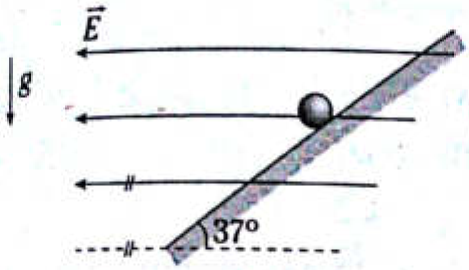


   A) $x=+1,2$ m
   B) $x=+1,5$ m
   C) $x=+1,8$ m
   D) $x=+2$ m
   E) $x=+2,5$ m

6. Tres partículas, q_1, q_2 y q_3, están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero. Para que el campo eléctrico sea nulo, en el baricentro del triángulo, ¿cuál será la relación entre las cargas?

   A) $q_1=2q_2=q_3$
   B) $q_1=q_2=2q_3$
   C) $q_1=q_2=q_3$
   D) $2q_1=q_2=q_3$
   E) $2q_1=q_2=3q_3$

7. Una pequeña esfera de 0,4 kg y electrizada con −5 μC se mantiene en reposo sobre un plano inclinado liso y aislante, tal como se muestra. Determine el módulo de la intensidad de campo eléctrico. ($g=10$ m/s^2).



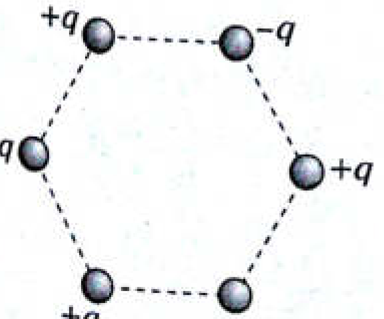
A) 8×10^5 N/C
B) 6×10^5 N/C
C) 3×10^4 N/C
D) 4×10^3 N/C
E) 5×10^6 N/C

8. Determine la energía potencial eléctrica del sistema formado por cuatro partículas electrizadas con igual cantidad de carga q ubicadas en los vértices de un tetraedro regular de arista L.

A) $\dfrac{4Kq^2}{L}$ B) $\dfrac{6Kq^2}{L^2}$ C) $\dfrac{2Kq^2}{L}$

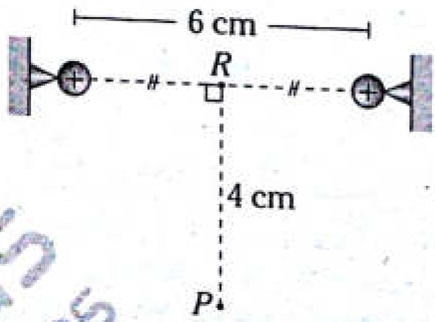
D) $\dfrac{3Kq^2}{L}$ E) $\dfrac{6Kq^2}{L}$

9. Tres partículas electrizadas positivas $(+q)$ y tres negativas $(-q)$ se ubican en los vértices de un hexágono regular de lado a, tal como se indica en el gráfico. ¿Qué trabajo es necesario realizar para traer una partícula con $-2q$ desde un punto muy distante y colocarla en el centro del hexágono? ($K=q^2/4\pi\varepsilon_0$).



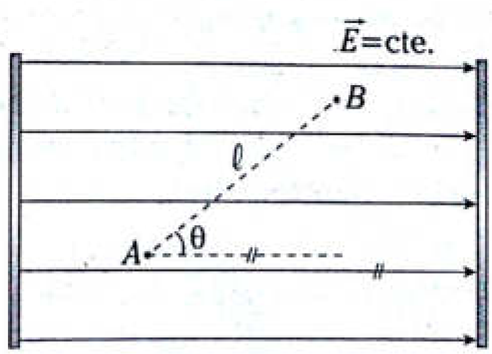
A) $-2\sqrt{3}K$ B) $-2\sqrt{2}K$ C) $-K$
D) $2K$ E) 0

10. Se tiene dos partículas idénticas y electrizadas con igual cantidad de carga y separadas 6 cm sobre un plano liso. Determine el trabajo realizado por el campo eléctrico al llevar una partícula de +3 μC desde P hasta R si el potencial eléctrico en P es de 6 kV.



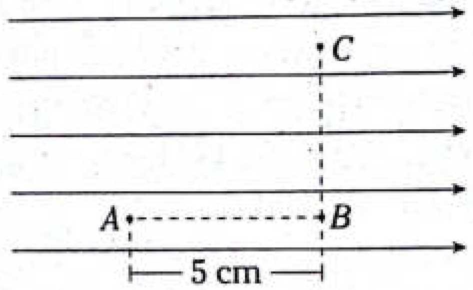
A) +9 mJ B) −9 mJ C) +12 mJ
D) −12 mJ E) −15 mJ

11. En la siguiente figura, determine la diferencia de potencial entre los puntos A y B. Considere que el campo eléctrico es uniforme en toda la región.
($\theta=37°$; $\ell=5$ mm; $E=10^3$ N/C)



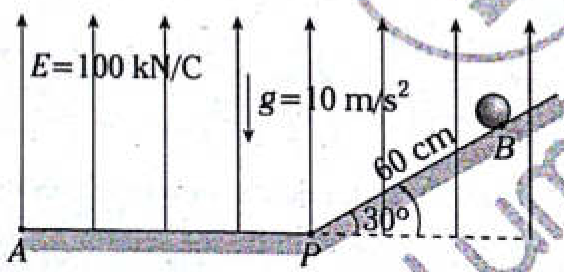
A) 5 J/C B) 3 J/C C) 0
D) 4 J/C E) N.A.

12. Calcule el trabajo que debe efectuar un agente externo para trasladar lentamente una partícula electrizada de 500 μC desde C hasta A, según la trayectoria indicada, si se sabe que la intensidad de campo eléctrico tiene un módulo de 2×10^5 V/m.



A) +1 J
B) +2 J
C) +5 J
D) −5 J
E) −2 J

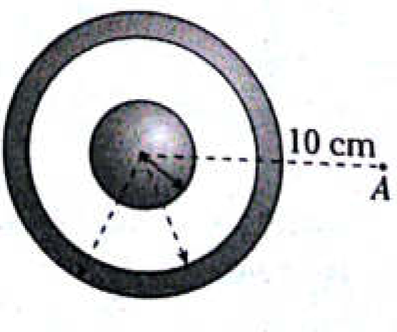
13. Una partícula electrizada con −10 μC y de 200 g es soltada en la posición B. Determine la rapidez de la partícula en la posición A. Considere la superficie lisa y no conductora.



A) 2 m/s
B) 3 m/s
C) 4 m/s
D) 5 m/s
E) 6 m/s

14. Se tiene una esfera conductora de radio 0,3 m, electrizada con $Q=5\times10^{-9}$ C, que se encuentra rodeada por un casquete esférico metálico, descargado de radio interior 0,6 m y radio exterior 0,9 m. Determine el potencial eléctrico en A.

A) 45 V
B) 40 V
C) 50 V
D) 35 V
E) 20 V



15. Un conductor aislado tiene una cantidad de carga total de +10 μC. Si dentro del conductor hay una cavidad en la cual se ubica una partícula electrizada con +3 μC, determine la cantidad de carga en la pared de la cavidad.

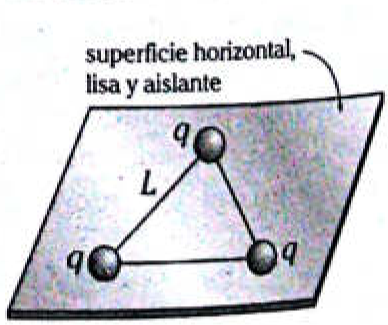
A) 0
B) +7 μC
C) −7 μC
D) −3 μC
E) +3 μC

NIVEL INTERMEDIO

16. Se tiene tres esferas conductoras idénticas, con cantidades de carga $Q_1=+20$ μC, $Q_2=-10$ μC y $Q_3=+8$ μC. Si las tres esferas se ponen en contacto simultáneamente, ¿qué sucede con la cantidad de carga de la segunda esfera?

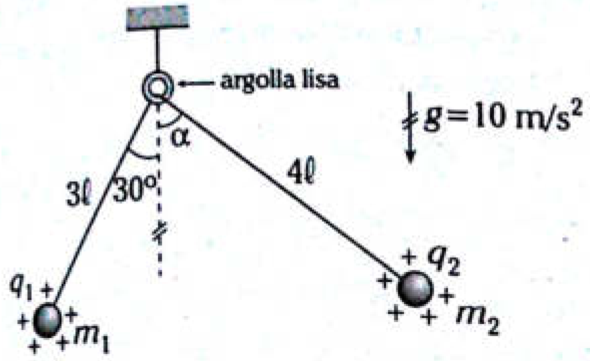
A) Gana 16 μC.
B) Pierde 28 μC.
C) Gana 12 μC.
D) Gana 19 μC.
E) Pierde 12 μC.

17. A continuación, se muestra tres esferitas electrizadas, unidas dos a dos por un hilo aislante de igual longitud. Determine la tensión de los hilos.



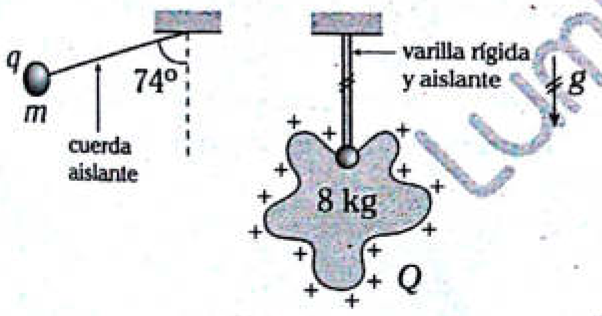
A) $K\dfrac{q^2}{3L^2}$
B) $K\dfrac{q^2}{L^2}$
C) $2\dfrac{Kq^2}{L^2}$
D) $\sqrt{2}\dfrac{Kq^2}{L^2}$
E) $K\dfrac{q^2}{2L^2}$

18. El sistema muestra dos partículas de masas m_1 y m_2 y electrizadas. Si se encuentran en equilibrio mediante una cuerda aislante, determine α. ($3m_1=4m_2$).



A) 37° B) 45° C) 53°
D) 60° E) 30°

19. La gráfica muestra una esfera de dimensiones despreciables y cantidad de carga q=8 mC en equilibrio. Si la cuerda está tensada con 0,1 N, determine el valor de la fuerza eléctrica que se manifiesta en el cuerpo electrizado con Q. (m=10 g; g=10 m/s^2).

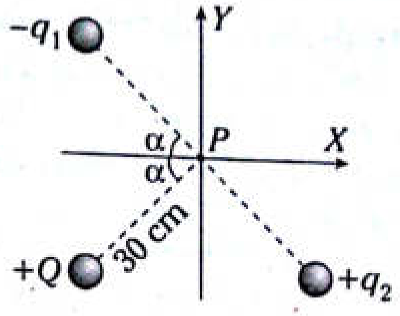


A) 0,48 N B) 0,10 N C) 0,12 N
D) 0,81 N E) 0,096 N

20. Dos partículas electrizadas fijas, la primera con +1,5 μC y la segunda con +6 μC, están separadas 30 cm. ¿A cuántos centímetros de la primera la intensidad de campo eléctrico será nulo?

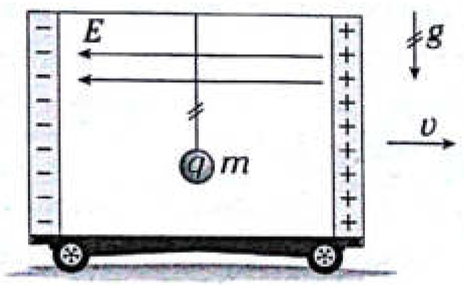
A) 5 cm B) 10 cm C) 15 cm
D) 20 cm E) 25 cm

21. Para el sistema mostrado, determine el valor de α si la intensidad del campo eléctrico resultante en P es $+12\times10^4\,\hat{j}$ N/C. (Q=1 μC).



A) 30° B) 37° C) 53°
D) 60° E) 74°

22. Una esfera pequeña de masa m y cantidad de carga q está suspendida del techo de un coche en movimiento horizontal. En el interior del coche hay un campo eléctrico homogéneo de módulo E, tal como muestra el gráfico.

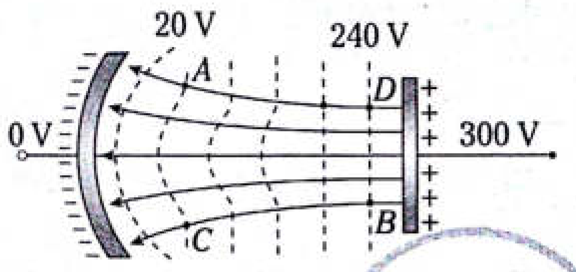


Si la cuerda aislante que sostiene la esfera se mantiene vertical, indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F).

I. El coche se mueve con velocidad constante.
II. Si q es negativa, el coche acelera.
III. El módulo de la aceleración del coche es $|q|E/m$.

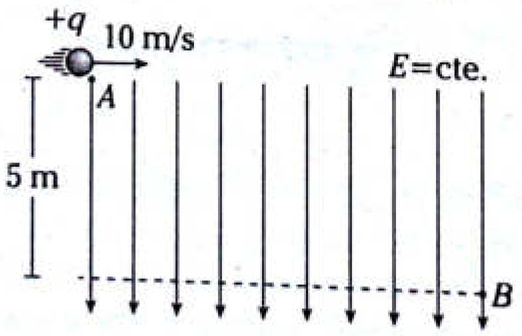
A) FVV B) FFV C) FVF
D) VVV E) FFF

23. La gráfica muestra el campo eléctrico establecido entre los electrodos; y las líneas punteadas representan superficies equipotenciales. Si la partícula $q=-2\ \mu C$ es trasladada rectilíneamente desde A hasta B y el campo realiza un trabajo de 0,36 mJ, determine la diferencia de potencial entre C y D. (Desprecie efectos gravitatorios).



A) -60 V B) 180 V C) -180 V
D) 90 V E) 240 V

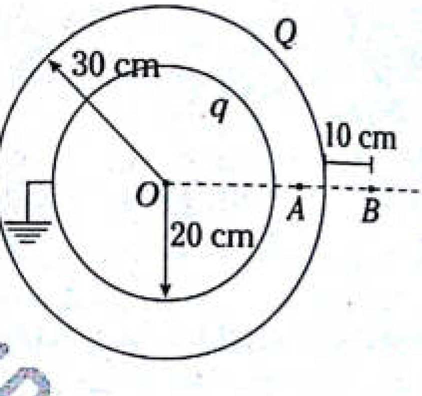
24. Si la esfera electrizada de masa 10 g ingresa en un campo eléctrico homogéneo y sale en B con una rapidez de $20\sqrt{2}$ m/s , determine la diferencia de potencial entre A y B, y el módulo de la intensidad de campo eléctrico. (Desprecie efectos gravitatorios; $q=5$ mC).



A) 600 V; 120 N/C
B) 700 V; 140 N/C
C) 250 V; 120 N/C
D) 500 V; 100 N/C
E) 300 V; 120 N/C

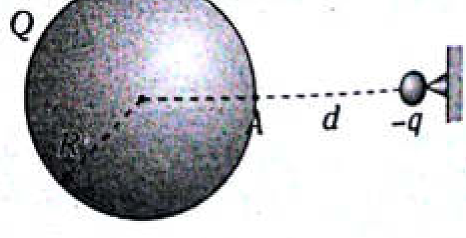
25. En la gráfica se muestra dos cascarones concéntricos electrizados. Determine la diferencia de potencial entre A y B.

$$\left(q = 4\ \mu C;\ d_{OA} = \frac{4}{15}\ m\right)$$



A) 0 B) 3 kV C) 6 kV
D) 7 kV E) 5 kV

26. El cascarón dieléctrico está electrizado uniformemente en toda su superficie con Q. Si a la distancia d hay una partícula electrizada con $-q$, determine el potencial eléctrico en el punto A. ($Q=2q$; $d=2R$).



A) $\dfrac{Kq}{2R}$ B) $\dfrac{3Kq}{R}$ C) $\dfrac{2Kq}{R}$

D) $-\dfrac{2Kq}{R}$ E) $\dfrac{3Kq}{2R}$

Electrodinámica y Capacitores

Capítulo XVII

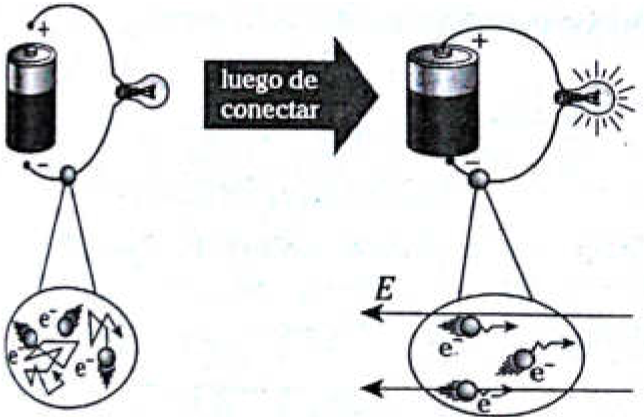
Objetivos

- Aprender en qué consiste la corriente eléctrica, las condiciones necesarias para que se establezca y las magnitudes relacionadas con ella.
- Conocer y aplicar las leyes para analizar circuitos eléctricos de corriente continua.
- Conocer en qué consiste la capacidad eléctrica, los factores de la que depende y su aplicación en los capacitores.

ELECTRODINÁMICA

1. Corriente eléctrica

Consideremos una pila y un pequeño foco unidos con un alambre de cobre.



Al conectar los terminales del alambre de cobre a la pila, como se muestra en el gráfico (II), notamos que el foco se enciende. Entonces surge la siguiente pregunta: ¿Qué sucede en el interior del alambre?

En el gráfico (I) notamos que la estructura interna del cobre, así como en la gran mayoría de los metales, se caracteriza por tener una gran cantidad de electrones que han logrado desligarse de la atracción nuclear, motivo por el cual son denominados **electrones libres**. Estos electrones se mueven caóticamente experimentando choques entre ellos y contra los iones vibrantes. Este movimiento electrónico, desordenado y desorientado no produce efectos externos en el sistema eléctrico.

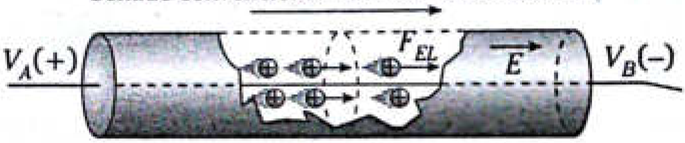
En el gráfico (II) notamos que, debido a la electrización de los extremos o bornes de la pila, se establece en el interior del alambre un campo eléctrico que "arrastra" a los electrones libres. Dicho de otra manera, en el interior del alambre se produce un flujo de electrones debido al campo eléctrico. Los electrones que constituyen el flujo electrónico chocan entre ellos y con los iones, pero en forma mucho más intensa que el caso anterior, originando de esta manera el calentamiento del filamento del foco hasta su incandescencia y logrando, por consiguiente, que el foco ilumine.

La corriente eléctrica es un fenómeno microscópico que consiste en el movimiento orientado de **portadores de carga,** que pueden ser electrones libres o iones en el interior de un conductor.

1.1. SENTIDO DE LA CORRIENTE ELÉCTRICA

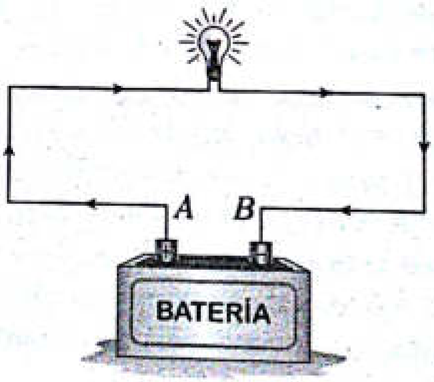
En un conductor metálico y sólido, la corriente eléctrica está determinada por el flujo de portadores de carga negativa (electrones); en las disoluciones de electrolitos, por el flujo de iones de ambos signos; y en los gases, por los iones y electrones.

Tengamos presente también que el flujo de portadores de carga positiva está en sentido del campo eléctrico; y el de carga negativa, contrario al campo. Entonces, ¿cuál es el sentido de la corriente eléctrica? Este problema fue planteado cuando nada se sabía de los electrones y de los iones. En aquellos tiempos suponían que en los conductores se movían portadores de carga positiva. Por este motivo, convencionalmente, fue adoptado el sentido en que se mueven las cargas positivas. Así se considera hasta hoy en día.



Note que en este caso consideramos que el flujo es de portadores de carga (+).

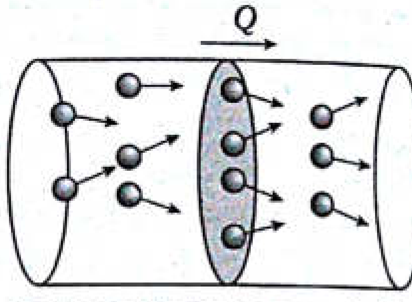
Para un circuito constituido por una batería y un foco, tenemos



La batería origina en el circuito una corriente eléctrica desde la zona de mayor potencial (V_A) hacia la de menor potencial (V_B).

1.2. INTENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA

Cuando se origina una corriente eléctrica en un conductor, pasa cierta cantidad de carga a través de su sección transversal con cierta rapidez, la cual depende de qué tan intenso sea el campo eléctrico o qué tan grande sea la diferencia de potenciales aplicadas. Por ello, para medir esta rapidez, se define una magnitud escalar denominada intensidad de corriente eléctrica (I), la cual mide la rapidez con que cierta cantidad de carga atraviesa la sección transversal de un conductor.



Q es la cantidad de carga que atraviesa la sección transversal del conductor en un tiempo Δt.

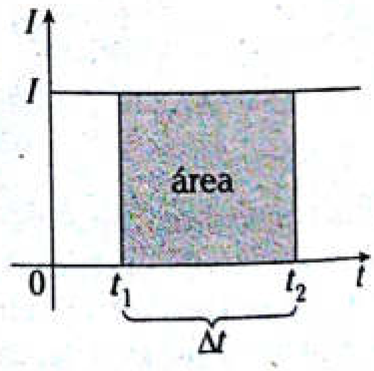
La intensidad se determina así:

$$\boxed{I=\frac{Q}{\Delta t}}$$

donde las unidades de medida son

$$\frac{\text{coulomb (C)}}{\text{segundo (s)}}=\text{amperio (A)}$$

Gráficamente, lo podemos representar así:

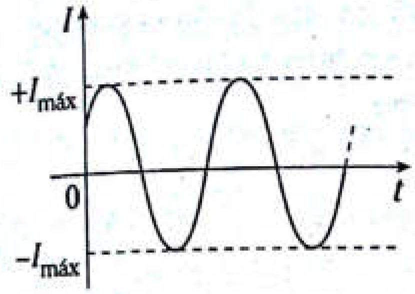


Además, si determinamos el área debajo de la gráfica, tenemos

$$\text{área}=\Delta t\cdot I=Q$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{área}=Q}$$

En el caso de los generadores eléctricos, dinamos, la corriente eléctrica que pasa por los conductores conectados a ellos tiene un comportamiento tal como se muestra en la siguiente gráfica:



El sentido de la corriente cambia periódicamente y la intensidad de corriente eléctrica muestra un comportamiento sinusoidal; a este tipo de corriente se le llama corriente alterna (C. A.).

Matemáticamente, la expresión de la intensidad de corriente alterna es

$$\boxed{I=I_{\text{máx}}\,\text{sen}(\omega t+\alpha)}$$

El hecho de que I sea positivo o negativo está relacionado con el sentido de la corriente eléctrica.

Ejemplo

¿Qué significado tiene $I=2$ A?

Si consideramos que la corriente eléctrica es continua y uniforme (I=cte), tenemos que

$$I=2\text{ A}=\frac{2\text{ C}}{1\text{ s}}$$

Es decir, en cada 1 s que transcurre, la cantidad de carga que atraviesa la sección del conductor es 2 C.

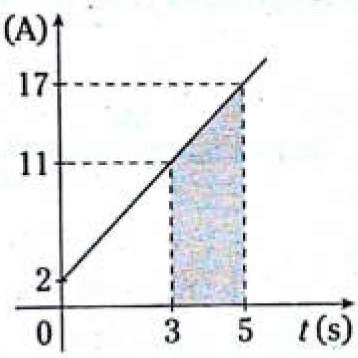
Aplicación 1

La intensidad de corriente eléctrica (I), a través de un conductor, depende del tiempo (t), según $I=3t+2$, donde I está en Amperios y t en segundos. Determine la cantidad de carga que pasa por la sección del conductor desde el instante $t=3$ s hasta el instante $t=5$ s.

Resolución

Como la corriente eléctrica es continua pero variable, no podemos determinar la cantidad de carga Q por medio de la expresión $Q=I/\Delta t$. Entonces lo que haremos es utilizar el criterio de las gráficas.

Graficamos I vs. t.



El área sombreada, en el intervalo de $t \in [3\text{ s}; 5\text{ s}]$, indica la cantidad de carga que atraviesa el conductor en dicho intervalo.

Luego

$$Q=\text{área}=\frac{(11+17)}{2}\times 2$$

$$\therefore\quad Q=28\text{ C}$$

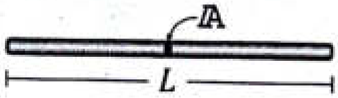
2. Resistencia eléctrica

Cuando se establece el campo eléctrico en el interior de un conductor metálico, los electrones son acelerados. Esto debería implicar que la intensidad de corriente aumente enormemente;

sin embargo, experimentalmente se demuestra que esto no ocurre. La explicación está en que en la red cristalina del metal hay imperfecciones debido a sus impurezas, además, los iones del cristal vibran continuamente. Esto da como resultado que los portadores de carga encuentren dificultades para moverse bajo la acción del campo eléctrico, lo que conlleva a pérdidas en su energía. Esta característica de los conductores se denomina resistencia eléctrica.

Fue el físico francés Pouillet quien determinó que la resistencia eléctrica (R) de un conductor depende de las dimensiones y el material con el que está hecho.

Matemáticamente, en el caso de un alambre, se calcula así:



$$R=\frac{\rho\cdot L}{A}$$ unidad de medida: ohmio (Ω)

donde

- L: longitud del alambre (m)
- A: área de la sección transversal (m^2)
- ρ: resistividad eléctrica ($\Omega\cdot m$)

La resistividad eléctrica (ρ) es una característica del material del conductor; depende de las propiedades del material y de la temperatura (aumenta con la temperatura).

Al inverso de la resistividad eléctrica (ρ) se le llama conductividad eléctrica (σ).

$$\sigma=\frac{1}{\rho}$$

Los buenos conductores eléctricos tienen muy baja resistividad (o alta conductividad); y los buenos aisladores tienen una elevada resistividad (baja conductividad). La tabla siguiente muestra la resistividad de algunos materiales. Note que la resistividad es baja para los buenos conductores, como la plata y el cobre, y muy elevada para los buenos aisladores, como la madera y el vidrio.

Material	$\rho(\Omega\cdot m)$ a 20 °C
plata	$1{,}6\times10^{-8}$
cobre	$1{,}7\times10^{-8}$
aluminio	$2{,}8\times10^{-8}$
tungsteno	$5{,}5\times10^{-8}$
hierro	10×10^{-8}
plomo	22×10^{-8}
nicrom	100×10^{-8}
germanio	0,45
silicio	640
madera	$10^{8}-10^{14}$
vidrio	$10^{10}-10^{14}$
ámbar	5×10^{14}

Aplicación 2

Determine la resistencia eléctrica (R) de un alambre de cobre de 100 m de longitud, cuya sección transversal es de 5 mm^2.

Resolución

De la tabla anterior obtenemos la resistividad del cobre: $\rho=1{,}7\times10^{-8}\ \Omega\cdot m$; luego, aplicamos la ley de Pouillet.

$$R=\frac{\rho L}{A}=\frac{1{,}7\times10^{-8}\ \Omega\cdot m\times100\ m}{5(10^{-6})\ m^2}$$

$$\therefore\quad R=0{,}34\ \Omega$$

Todo elemento conductor con determinada resistencia eléctrica se denomina resistor y se representa de la siguiente manera:

R=cte.

R≠cte.
(resistor variable o potenciómetro)

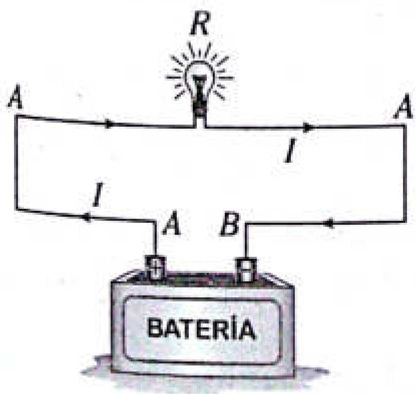
R=0
(conductor ideal; se usa para las conexiones)

NOTA

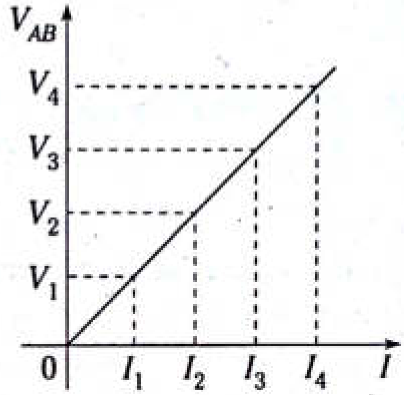
Debido a la resistencia eléctrica en un conductor metálico, la velocidad del movimiento de los propios electrones, por la acción del campo, es pequeña, un milímetro por segundo y a veces aun menos. Pero en el instante en que surge el campo eléctrico, este se propaga a enorme velocidad, próxima a la de la luz en el vacío (300 000 km/s), y se propaga por toda la longitud del conductor. Este campo eléctrico pone en movimiento todos los electrones libres del conductor, incluso los del filamento del foco conectado al conductor, razón por la cual este se enciende instantáneamente.

3. Ley de Ohm

Fue el físico alemán Georg S. Ohm (1787-1854) el que descubrió de forma teórica y por vía experimental la ley que expresa la ligazón entre la intensidad de la corriente (I) en el circuito, la diferencia de potencial (V_{AB}), llamada también voltaje, y la resistencia eléctrica (R).



Experimentalmente, si cambiamos en la batería el voltaje (V_{AB}), se detecta que también cambia la intensidad de corriente (I). Esto se representa en la siguiente gráfica:



Del gráfico note que

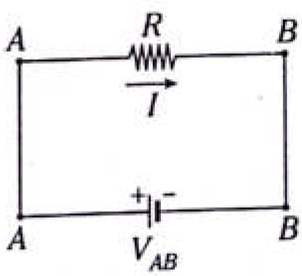
$$\frac{V_{AB}}{I} = \text{cte.}$$

La constante de proporcionalidad es propia para cada elemento resistivo y es igual a su resistencia eléctrica (R). Por consiguiente, nuestra ecuación queda expresada de la siguiente manera:

$$\frac{V_{AB}}{I} = R \quad \rightarrow \quad \boxed{V_{AB} = I \cdot R}$$

La diferencia de potencial o voltaje (V_{AB}), en los extremos de un conductor, es igual al producto de la intensidad de corriente (I) a través del conductor y su resistencia (R).

A continuación, tenemos el esquema simplificado del circuito.



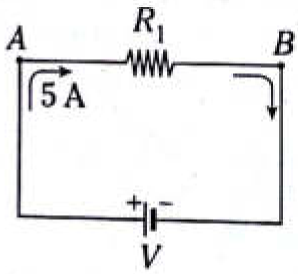
$$\boxed{V_{AB} = I \cdot R}$$

Ejemplo
Si tenemos una batería de 9 V y la resistencia eléctrica del foco es 300 Ω, entonces la intensidad de corriente eléctrica a través del foco se calcula así:

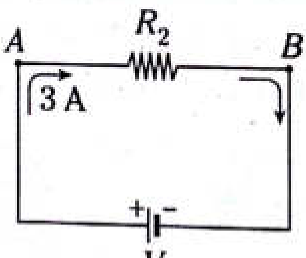
$$I=\frac{V_{AB}}{R}=\frac{9}{300}=0{,}03\ \text{A}=30\ \text{mA}$$

Aplicación 3
En los extremos de una batería de voltaje V se conecta un resistor R_1 originando una corriente de 5 A; luego se cambia el resistor por otro R_2, cuya resistencia eléctrica es 10 Ω mayor que el anterior, y que origina una corriente de 3 A. Determine el voltaje V de la batería y la resistencia eléctrica de los resistores R_1 y R_2.

Resolución
Grafiquemos los dos casos.



(I)



(II)

Aplicamos la ley de Ohm en cada uno de los casos planteados.

$$V_{AB}=V=5R_1 \qquad \text{(I)}$$
$$V_{AB}=V=3R_2 \qquad \text{(II)}$$

Como el voltaje de la batería no cambia, igualamos (I) y (II).

$$5R_1=3R_2 \qquad \text{(III)}$$

También por dato del problema

$$R_2=R_1+10$$

Reemplazamos en (III) y resolvemos.

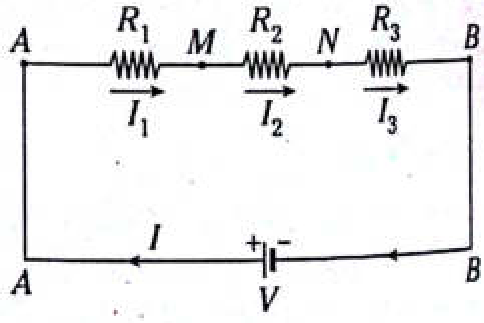
$$R_1=15\ \Omega;\ R_2=25\ \Omega;\ V=75\ \text{V}$$

4. Conexión de resistores

Los circuitos eléctricos no están constituidos solamente por un conductor (resistor) y una sola batería (fuente de voltaje), sino también de un conjunto de resistores y fuentes que están interconectados. Consideremos las conexiones más simples entre los resistores, y determinemos sus características. Estas conexiones son en serie y en paralelo.

4.1. CONEXIÓN EN SERIE

Se utiliza en las máquinas y dispositivos de alto consumo de energía eléctrica, tal como sucede en las hornillas eléctricas, los motores turbogeneradores, subestaciones de energía eléctrica y, por supuesto, también puede utilizarse en diversos juegos de luces.



Este tipo de conexión se caracteriza porque todos los resistores conducen una intensidad corriente de la misma intensidad.

$$I_1=I_2=I_3=I \qquad \text{(I)}$$

El voltaje aplicado a los extremos (V_{AB}) es igual a la suma de voltajes en cada resistor, es decir, el voltaje se reparte entre los resistores.

$$V_{AB}=V_{AM}+V_{MN}+V_{NB}=V \qquad \text{(II)}$$

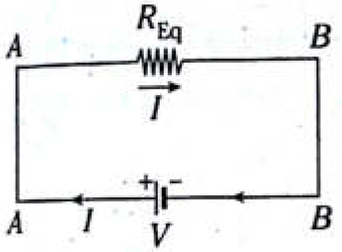
De (II) y la ley de Ohm, tenemos que

$$V_{AB}=I_1R_1+I_2R_2+I_3R_3$$

Reemplazamos (I) en esta última ecuación.

$$V_{AB}=I(R_1+R_2+R_3) \qquad \text{(III)}$$

Ahora podemos reemplazar los resistores por solo uno. El resistor que reemplaza al conjunto de resistores se denomina **resistor equivalente** (R_{Eq}).



$$\boxed{V_{AB}=I\cdot R_{Eq}}$$

De esto último y de la relación (III), podemos deducir que si los resistores R_1, R_2 y R_3 son reemplazados por uno solo, tal que origine la misma corriente, este resistor debe tener una resistencia eléctrica igual a la suma de resistencias eléctricas de todos los resistores.

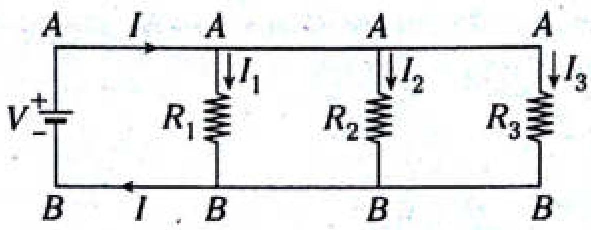
$$\boxed{R_{Eq}=R_1+R_2+R_3}$$

En general, si tenemos n resistores en serie

$$\boxed{R_{Eq}=\sum_1^n R_i}$$

4.2 CONEXIÓN EN PARALELO

Esta conexión es típica en las instalaciones de elementos que conducen poca corriente eléctrica o que operan con igual diferencia de potencial, tal es el caso de los aparatos electrodomésticos de nuestra casa.



Todos los resistores soportan igual diferencia de potencial o voltaje.

$$V_{AB}=V_1=V_2=V_3=V \qquad \text{(I)}$$

La corriente eléctrica (I) que origina el circuito resistivo se distribuye entre todos los resistores.

$$I=I_1+I_2+I_3 \qquad \text{(II)}$$

De (I), (II) y la ley de Ohm, tenemos

$$I=\frac{V}{R_1}+\frac{V}{R_2}+\frac{V}{R_3}$$

$$\therefore \quad \frac{I}{V}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$$

Análogamente a lo planteado en las conexiones en serie, I/V representa la inversa de la resistencia eléctrica del resistor equivalente. En este caso se deduce que

$$\boxed{\frac{1}{R_{Eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}$$

En general, si tenemos n resistores en paralelo

$$\boxed{\frac{1}{R_{Eq}}=\sum_1^n\frac{1}{R_i}}$$

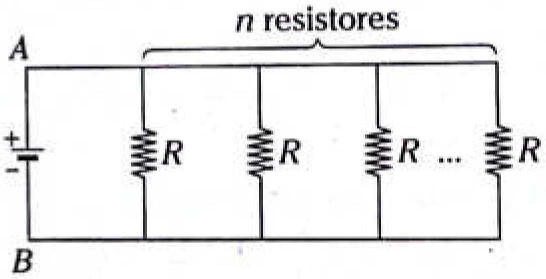
En el caso de dos resistores, R_1 y R_2, en paralelo, se tiene que

$$\frac{1}{R_{Eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

Resolvemos.

$$\boxed{\frac{1}{R_{Eq}}=\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}}$$

Si hay n resistores de igual valor en paralelo

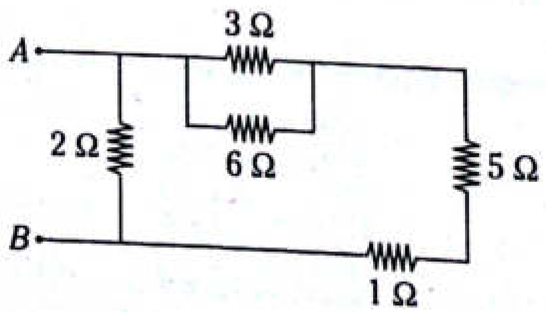


$$\frac{1}{R_{Eq}}=\underbrace{\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+\ldots+\frac{1}{R}}_{n\,\text{veces}}=\frac{n}{R}$$

$$\therefore \quad \boxed{R_{Eq}=\frac{R}{n}}$$

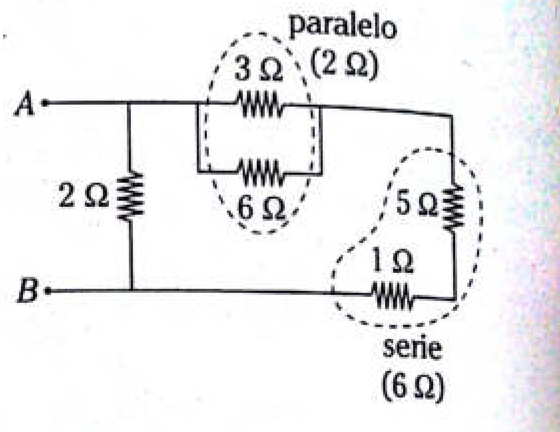
Aplicación 4

Determine la resistencia eléctrica del resistor equivalente entre A y B para el sistema resistivo mostrado.

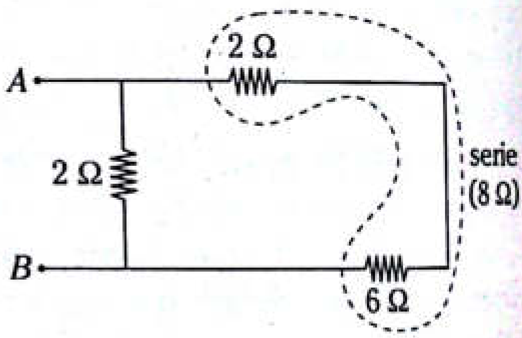


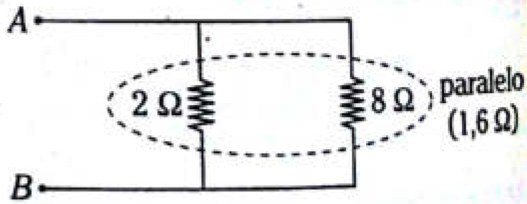
Resolución

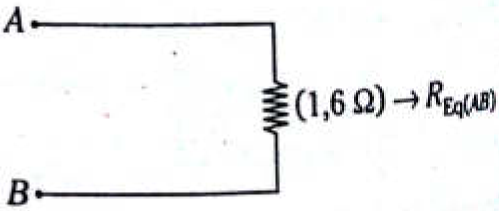
Una de las formas de determinar la resistencia del resistor equivalente es reduciendo los resistores hasta quedar con uno solo conectado entre los terminales señalados. Veamos.



Luego







$$\therefore \quad R_{Eq}=1{,}6\ \Omega$$

Todo el circuito resistivo se puede reemplazar por un solo resistor de 1,6 Ω.

5. Instrumentos de medición eléctrica

5.1. AMPERÍMETRO (←Ⓐ→)

Se utiliza para registrar la intensidad de la corriente que pasa por algún tramo de un circuito eléctrico. Se conecta en serie con los elementos eléctricos en pleno funcionamiento y normalmente presenta una resistencia interna pequeña en comparación con la resistencia de los elementos del circuito.

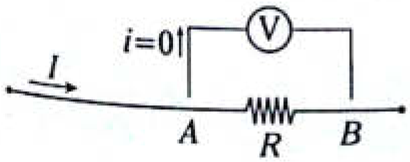
Un amperímetro se considera ideal cuando despreciamos su resistencia interna, de tal modo que se comporta como un simple alambre equipotencial.

$$\boxed{V_M = V_N}$$

5.2. VOLTÍMETRO (←Ⓥ→)

Indica la diferencia de potencial entre los dos puntos a los cuales se conectan sus terminales. Se conecta en paralelo a los elementos eléctricos que deseamos analizar y normalmente presenta una resistencia interna de gran valor en comparación con la resistencia de los elementos del circuito.

Un voltímetro se denomina ideal cuando asumimos que su resistencia interna es muy grande, de tal manera que impide el paso de la corriente eléctrica a través de él, comportándose así como si fuese un circuito abierto.

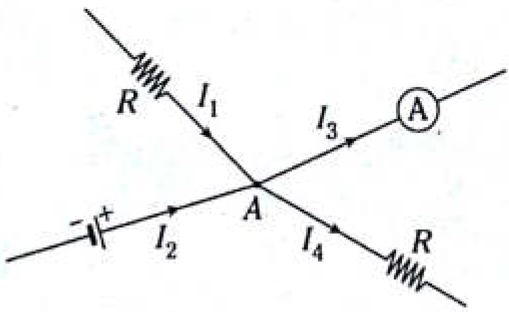


Multímetros analógico y digital. Tienen incorporados tres instrumentos de medida (amperímetro, voltímetro y ohmímetro).

6. Reglas de Kirchhoff

6.1. PRIMERA REGLA DE KIRCHHOFF

Llamada también ley de los nodos o corrientes, se basa en el principio de **conservación de la cantidad de carga eléctrica** y establece que, en todo nodo o nudo, la suma de corrientes que llegan es igual a la suma de corrientes que salen. (Cuando nos referimos a corriente, nos referimos a sus intensidades).



En el nodo A

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4$$

En general

$$\boxed{\sum I_{(\text{nodo})}^{\text{entran}} = \sum I_{(\text{nodo})}^{\text{salen}}}$$

6.2. SEGUNDA REGLA DE KIRCHHOFF

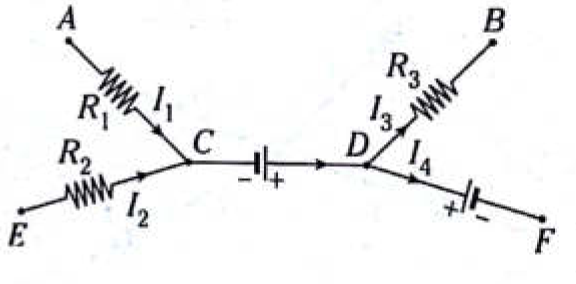
Llamada también ley de las mallas, se basa en el principio de **conservación de la energía** y establece que, cuando un portador de carga eléctrica realiza un recorrido cerrado (el portador de carga empieza y termina en el mismo punto), debe ganar tanta energía como la que pierde. Por ello, la suma de voltajes en un recorrido cerrado (o malla eléctrica) es igual a cero.

$$\boxed{\sum V_{\text{malla}} = 0}$$

Una forma de deducir la segunda regla de Kirchhoff es utilizando una característica de los circuitos eléctricos denominado método del recorrido.

Veamos.

Consideremos una parte de un circuito eléctrico complejo en el que deseamos calcular V_{AE}.



Como observamos, entre A y E resulta difícil utilizar la ley de Ohm porque no se trata de un solo resistor, ni lo podemos reducir a uno solo, pero sí podemos determinar los voltajes de cada uno de los elementos eléctricos entre dichos puntos.

$$V_{AC}=V_A-V_C \qquad \text{(I)}$$

$$V_{CD}=V_C-V_D \qquad \text{(II)}$$

$$V_{DB}=V_D-V_B \qquad \text{(III)}$$

Sumamos (I), (II) y (III).

$$\underbrace{V_{AC}+V_{CD}+V_{DB}}_{\substack{\text{suma de voltaje de}\\ \text{todos los elementos}\\ \text{desde } A \text{ hasta } B}} = \underbrace{V_A-V_B=V_{AB}}_{\substack{\text{voltaje o diferencia}\\ \text{de potencial entre}\\ A \text{ y } B}}$$

El voltaje o diferencia del potencial entre dos puntos de un circuito eléctrico es igual a la suma de voltajes de todos los elementos eléctricos que se encuentran en el recorrido, desde el punto inicial hasta el punto final.

$$\boxed{V_{AB}=V_A-V_B=\sum V_{\left(\substack{\text{elementos}\\ A\to B}\right)}} \qquad \text{(IV)}$$

En el caso de que el recorrido sea cerrado, implica que partimos de un punto inicial cualquiera, seguimos un recorrido y regresamos al mismo punto inicial. Tenemos entonces que la diferencia de potencial entre dichos puntos es cero. Por lo tanto, de la expresión (IV)

$$V_{AA}=\underbrace{V_A-V_A}_{0}=\sum V_{\left(\substack{\text{elementos}\\ A\to A}\right)}$$

$$\therefore \quad \boxed{\sum V_{\left(\substack{\text{recorrido}\\ \text{cerrado}}\right)}=0}$$

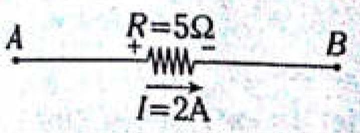
Recordemos que un recorrido cerrado, para la corriente eléctrica, es una malla eléctrica.

$$\boxed{\sum V_{\text{malla}}=0} \qquad \text{(segunda regla de Kirchhoff)}$$

Observación

1. Cuando apliquemos las reglas de los circuitos eléctricos, debemos tener presente que

- en un resistor, la corriente eléctrica siempre fluye de mayor a menor potencial eléctrico.

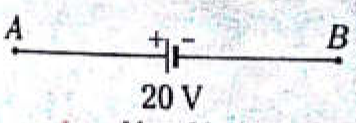


$V_A > V_B$

$V_{AB} = I \cdot R = +10\ \text{V}$

$V_{BA} = -I \cdot R = -10\ \text{V}$

- en una fuente ideal, sin interesar el sentido de la corriente, siempre el potencial eléctrico del polo positivo de la fuente es mayor que el del polo negativo.



$V_A > V_B$

$V_{AB} = +20\ \text{V}$

$V_{BA} = -20\ \text{V}$

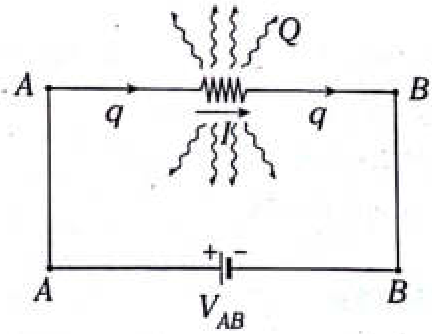
2. Cuando en un circuito eléctrico no es posible determinar por simple análisis el sentido de la corriente eléctrica, se recomienda asumir un sentido arbitrario (cualquier sentido). Una vez que se termine de resolver, se notará un signo negativo, que indicará que el sentido de la corriente es contrario al asumido, pero el valor es correcto.

7. Energía disipada en un resistor (efecto Joule)

Si se utiliza una batería para establecer corriente eléctrica, en el conductor hay una transformación continua de la energía química almacenada en la batería en energía cinética de los portadores de carga. Si en el conductor no se producen acciones químicas, solo tiene lugar el calentamiento del conductor, este cede energía calorífica al medio exterior.

La energía que transmite el campo eléctrico a los portadores de carga no aumenta la corriente eléctrica ni la energía interna del conductor, por lo tanto, el conductor cede al exterior una cantidad de calor (Q) igual a la energía que recibe la corriente debido al trabajo del campo eléctrico. La ley que determina la cantidad de calor, que desprende un conductor con corriente hacia el medio circundante, la establecieron por primera vez los científicos J. P. Joule y E.C. Lenz, y se la conoce como la ley de Joule-Lenz.

Veamos. Consideremos un circuito simple compuesto por un resistor y una batería.



En el estado estacionario, la energía que entrega la fuente a los portadores de carga (q), al llevarlos desde B hasta A (de menor a mayor potencial), se disipa como calor (Q) cuando pasa por el resistor R; luego

$$Q = q(V_A - V_B) = q \cdot V_{AB} \qquad (I)$$

En dicho intervalo de tiempo (Δt)

$$q = I \cdot \Delta t$$

Reemplazamos en (I).

$$\boxed{Q=I\cdot\Delta t\cdot V_{AB}}$$

Aplicamos la ley de Ohm en el resistor.

$$\boxed{Q=I\cdot\Delta t\cdot V_{AB}=I^2\cdot R\cdot\Delta t=\frac{V_{AB}^2}{R}\Delta t} \qquad \text{(II)}$$

La energía que disipa un resistor es igual a la que consume. Entonces el resistor (una plancha o un hervidor eléctrico) es un aparato eléctrico consumidor y disipador de energía. Todo aparato eléctrico, sea una lámpara, un motor u otro cualquiera, está diseñado para consumir y entregar cierta cantidad de energía por unidad de tiempo; por ello, para caracterizarlo, definimos una magnitud llamada **potencia** (P).

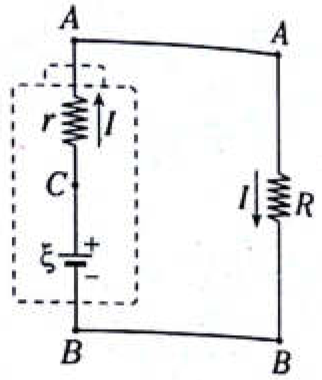
$$\boxed{P=\frac{E}{\Delta t}}$$

donde

- E: energía consumida o disipada (J)
- Δt: tiempo (s)
- P: potencia (W: watt o vatio)
- 1 J/s=1 vatio=1 W

8. Fuente real

Las pilas y baterías que usamos cotidianamente son fuentes reales. Una fuente real es aquella que, además de entregar energía al circuito a la que se conecta, también disipa energía en forma de calor debido a que presenta resistencia interna al paso de la corriente eléctrica, a diferencia de una fuente ideal que no tiene resistencia interna. Esquemáticamente, una fuente real está formada por una fuente ideal en serie con una resistencia interna, tal como se muestra.



La parte remarcada con líneas punteadas es la fuente real, donde

- ξ: diferencia de potencial o voltaje de la fuente ideal; también se le denomina fuerza electromotriz (fem), pero no es una fuerza, sino un voltaje y se mide en voltios.

  $$\xi=V_{CB}=V_C-V_B$$

- r: resistencia interna de la fuente real donde la fuente disipa parte de su energía.
- V_{AB}: diferencia de potencial o voltaje en los terminales A y B de la fuente real.

  $$V_{AB}=V_A-V_B$$

- R: resistencia del resistor externo conectado a los terminales de la fuente real.

En un circuito con fuente real se distinguen tres potencias:

- Potencia entregada por la fuente ideal (P_{ent})

  $$P_{ent}=I\cdot V_{CB}=I\cdot\xi \qquad \text{(I)}$$

- Potencia disipada en el resistor externo R, llamada potencia útil ($P_{útil}$) porque es una potencia que se aprovecha; por ejemplo, si el resistor es un foco, en luz; si es un calentador, para hervir agua, etc.

  $$P_{útil}=I\cdot V_{AB} \qquad \text{(II)}$$

- Potencia disipada por la resistencia interna, también llamada potencia perdida (P_{perd}) porque es una potencia no deseada y que se desperdicia.

  $$P_{perd}=I^2\cdot r$$

De acuerdo con el principio de conservación de la energía, estas tres potencias se relacionan de la siguiente forma:

$$\boxed{P_{ent}=P_{útil}+P_{perd}}$$

En general, la P_{perd} nunca es cero, por lo que la $P_{útil}$ siempre es un porcentaje de la P_{ent} menor al 100%. Este porcentaje se denomina eficiencia (η) de la fuente real. Se determina como

$$\boxed{\eta=\frac{P_{útil}}{P_{ent}}} \quad \text{(III)}$$

Reemplazamos (I) y (II) en (III).

$$\boxed{\eta=\frac{V_{AB}}{\xi}} \quad \text{(IV)}$$

De acuerdo con la ley de Ohm en el resistor externo se tiene

$V_{AB}=I\cdot R$

Aplicamos la ley de Ohm a todo el circuito (considerando que r y R están en serie).

$\xi=I(r+R)$

Reemplazamos en (IV).

$$\boxed{\eta=\frac{R}{r+R}}$$

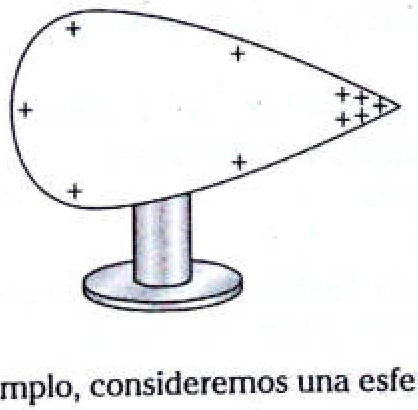
Esta última expresión nos indica que la eficiencia no depende realmente de la fem (ξ) o del voltaje en los terminales de la fuente. Depende básicamente de la resistencia interna (r) y sobre todo de la resistencia externa (R).

CAPACITORES

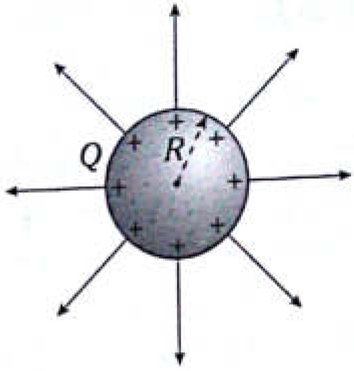
1. Capacidad eléctrica

Todo cuerpo conductor tiene la capacidad de almacenar cierta cantidad de carga eléctrica hasta cierto límite, el cual depende de ciertos factores:

- Tamaño del cuerpo
  Un cuerpo conductor de mayor tamaño puede almacenar más cantidad de carga que otro pequeño.
- Medio dieléctrico que rodea al conductor
  El campo eléctrico que el cuerpo conductor genera a su alrededor se hace más intenso a medida que el cuerpo gana mayor cantidad de carga eléctrica hasta el punto de ionizar el medio dieléctrico que lo rodea y convertirlo en un medio conductor (ruptura dieléctrica), entonces su cantidad de carga almacenada se dispersa en el medio, es decir, el cuerpo conductor se descarga.
- Forma del cuerpo
  Los cuerpos conductores puntiagudos concentran la mayor parte de su cantidad de carga almacenada en las puntas, donde se intensifica el campo eléctrico hasta ionizar el medio dieléctrico circundante, lo que produce la descarga del cuerpo por dichas zonas.



Por ejemplo, consideremos una esfera conductora electrizada positivamente en equilibrio electrostático.



En el capítulo de electrostática se demostró cómo se determina el potencial eléctrico en una esfera conductora.

$$V=\frac{K\cdot Q}{R}$$

Dado que K y R son constantes, el potencial eléctrico (V) de la esfera es directamente proporcional a la cantidad de carga eléctrica (Q) que adquiere, tal que

$$\frac{Q}{V}=\frac{R}{K}=\text{constante} \qquad (*)$$

Un aumento de la cantidad de carga producirá un aumento del potencial eléctrico en igual proporción.

La constante de proporcionalidad entre Q y V depende

- **del radio (R)**, que representa el tamaño y la forma del cuerpo conductor.

- **de la constante de Coulomb (K)**, que representa el medio que rodea al cuerpo conductor.

La capacidad de un cuerpo conductor también depende de todos estos factores para almacenar una cantidad de carga eléctrica. Por ello, la constante obtenida de la relación (*) es importante para medir esta capacidad.

1.1. CAPACITANCIA

La constante de proporcionalidad entre Q y V se denomina **capacitancia** (C) y es una medida de la capacidad eléctrica de un cuerpo conductor.

$$\boxed{C=\frac{Q}{V}}$$

donde la unidad (SI) es

$$\frac{\text{coulomb}}{\text{voltio}}=\text{faradio (F)}$$

Ejemplo

Si la capacitancia de un cuerpo es 1 F, significa que cuando se aumenta la cantidad de carga del cuerpo en 1 C, su potencial eléctrico aumenta en 1 V.

El faradio (F) es una unidad muy grande para ser usado en la práctica. Consideremos la capacitancia de la esfera, según la relación (*).

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{R}{K}$$

Despejamos el radio.

$$R=K\cdot C$$

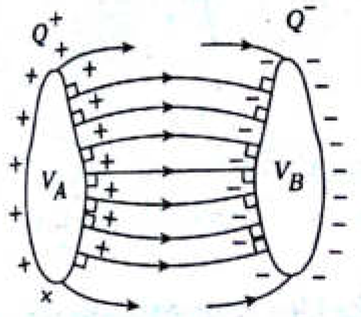
Para $C=1$ F, se tiene

$$R=9\times10^{9}(1)=9\times10^{9}\text{ m}$$

Un radio tan grande es imposible en la práctica (es mucho mayor que el radio de la Tierra). Por ello se usan submúltiplos del faradio, como el microfaradio ($\mu\text{F}=10^{-6}$ F) y el nanofaradio ($\text{nF}=10^{-9}$ F).

Un cuerpo conductor con mayor capacitancia (C) que otro puede almacenar mayor cantidad de carga eléctrica (Q), aun si experimentan ambos igual incremento en su potencial eléctrico.

2. Capacitor



El sistema así formado se denomina **capacitor**. La capacitancia de ambos cuerpos se incrementa por la presencia del otro y del dieléctrico entre ellos, por lo que el sistema tiene la capacidad de almacenar mayor cantidad de carga eléctrica que cada conductor por separado. Se define una capacitancia para el sistema como

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_{AB}}}$$

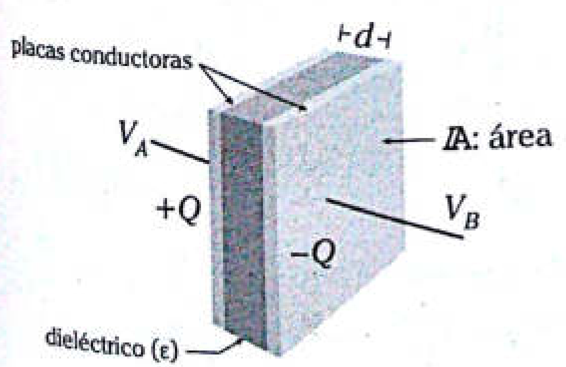
donde

- Q: cantidad de carga almacenada en uno de los conductores (en valor absoluto)
- V_{AB}: diferencia de potencial eléctrico entre los dos conductores

Esta capacitancia se mantendrá constante mientras

- no cambiemos el tamaño y la forma de los cuerpos.
- no los alejemos o acerquemos.
- no cambiemos el medio dieléctrico entre ellos.

Por ejemplo, para el capacitor más sencillo formado por placas paralelas, como el que se muestra,



Estos tres factores se resumen en la siguiente relación para determinar su capacitancia:

$$\boxed{C = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \frac{\mathbb{A}}{d}}$$

donde

- $\mathbb{A}$: área de la superficie de las placas
- d: distancia entre las placas
- ε_0: permitividad dieléctrica del aire o vacío, donde $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m
- ε: permitividad dieléctrica relativa o constante dieléctrica

NOTA

En el capítulo de electrostática se muestra una tabla de valores de constantes dieléctricas para algunos materiales dieléctricos.

En la ecuación se observa que

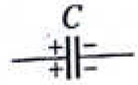
- con aire o vacío: $C = \dfrac{\varepsilon_0 \cdot \mathbb{A}}{d}$; $\varepsilon_{aire} = 1$
- con dieléctrico de $\varepsilon > 1$; $C' = \varepsilon\left(\dfrac{\varepsilon_0 \cdot \mathbb{A}}{d}\right)$

Se tiene que $C' = \varepsilon \cdot C$.

$$\boxed{C_{\text{con dieléctrico}} = \varepsilon \cdot C_{\text{vacío}}}$$

Se verifica que la capacitancia eléctrica es mayor cuando se utiliza un dieléctrico con mayor constante dieléctrica (ε).

Un capacitor de placas paralelas se representa con el siguiente símbolo:

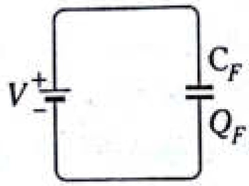


3. Efectos del dieléctrico en un capacitor

Tenemos dos casos:

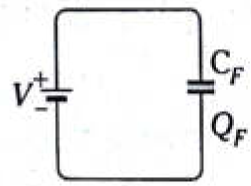
- Mientras el capacitor está conectado a un voltaje fijo, por ejemplo, una batería.

  - sin dieléctrico



$$V=\frac{Q_0}{C_0}\qquad \text{(I)}$$

  - con dieléctrico ($\varepsilon > 1$)



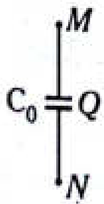
$$V=\frac{Q_F}{\varepsilon\cdot C_0}\qquad \text{(II)}$$

Igualamos (I) y (II).

$$\boxed{Q_F=\varepsilon\cdot Q_0}$$

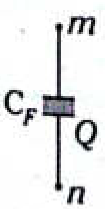
Observamos que, cuando se coloca dieléctrico, la cantidad de carga del capacitor aumenta.

- Cuando el capacitador está desconectado del circuito; la cantidad de carga en las armaduras, no cambia.
  - sin dieléctrico



$$Q=C_0\cdot V_{MN}$$
$$Q=C_0\cdot V_0\qquad \text{(III)}$$

  - con dieléctrico ($\varepsilon > 1$)



$$Q=C_F\cdot V_{mn}$$
$$Q=(\varepsilon\cdot C_0)V_F$$

Igualamos (III) y (IV).

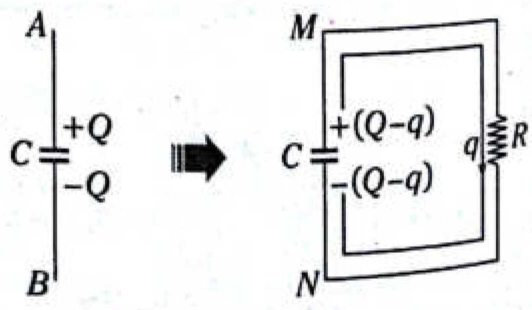
$$\boxed{V_F=\frac{V_0}{\varepsilon}}$$

Observamos que, cuando se coloca un dieléctrico, el voltaje del capacitor disminuye.

4. Energía almacenada en un capacitor

Una fuente de voltaje y un capacitor cargado almacenan energía debido a la diferencia de potencial entre sus terminales y, cuando los conectamos a un resistor, producen a través de este una corriente eléctrica en el sentido de mayor a menor potencial eléctrico. Si por un resistor pasa una corriente eléctrica, este disipa energía generalmente en forma de calor. Esta energía necesariamente tiene que provenir de la fuente o el capacitor, por lo cual la fuente o el capacitor tienen energía y lo van perdiendo en este proceso. La fuente almacena energía química y **el capacitor almacena energía potencial eléctrica (U)**. La energía perdida por ellos es igual al trabajo que el campo eléctrico realiza al transportar una cantidad de carga (q) de un terminal al otro.

En el caso del capacitor, la intensidad de corriente va disminuyendo porque disminuye la diferencia de potencial (V_{MN}), ya que, al establecerse la corriente, el capacitor se va descargando, la cantidad de carga en sus placas va disminuyendo y por ello disminuye la diferencia de potencial.



En el capacitor, se tiene

$$V_{MN}=\frac{Q-q}{C}\ \rightarrow\ V_{MN}=\frac{Q}{C}-\frac{q}{C}$$

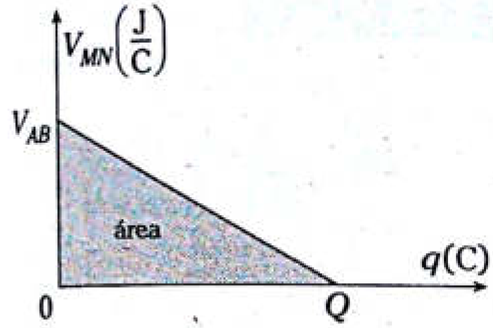
Al inicio, antes de conectar el resistor

$$V_{AB}=\frac{Q}{C}$$

Reemplazamos.

$$\boxed{V_{MN}=V_{AB}-\frac{q}{C}}$$

Si V_{AB} y C son constantes, el potencial eléctrico disminuye linealmente con q. Gráficamente se tiene



Si el capacitor se descarga completamente, por el resistor pasará toda la cantidad de carga Q almacenada y el resistor disipará energía hasta que la diferencia de potencial disminuya hasta cero. En este caso, como la diferencia de potencial varía, la única forma de determinar la energía disipada es con el área de la gráfica V vs. q

$$E_{\text{disipada}}=W_{A\to B}^{F_{EL}}=\text{área}=\frac{Q\cdot V_{AB}}{2}$$

Toda esta energía disipada era toda la energía potencial eléctrica (U) que almacenaba el capacitor, por consiguiente

$$\boxed{U=\frac{Q\cdot V_{AB}}{2}}$$

Como

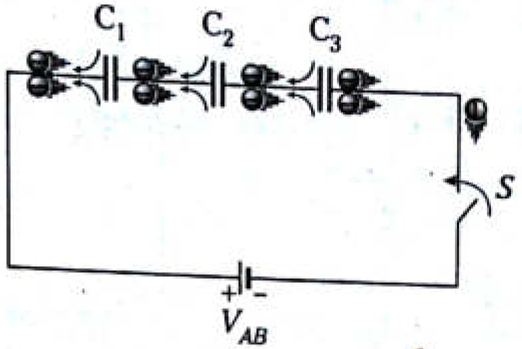
$$Q=C\cdot V_{AB}\ \rightarrow\ \boxed{U=\frac{1}{2}C\cdot V_{AB}^2}$$

Como

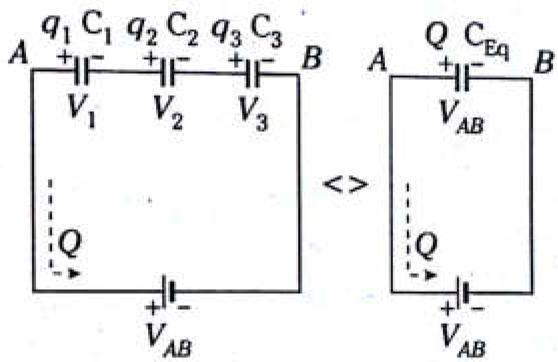
$$V_{AB}=\frac{Q}{C}\ \rightarrow\ \boxed{U=\frac{Q^2}{2C}}$$

5. Conexión de capacitores

5.1. EN SERIE



Cuando el interruptor S se cierra, a la placa colectora de C_3 se le transfiere electrones y ocasiona, por inducción, la expulsión de electrones de su placa condensadora; y, análogamente, ocurre con C_2 y C_1, quedando electrizados todos los capacitores.



Se tiene

- por la conservación de la cantidad de carga eléctrica

$$Q=q_1=q_2=q_3 \qquad (*)$$

- por la conservación de la energía

$$V_{AB}=V_1+V_2+V_3$$

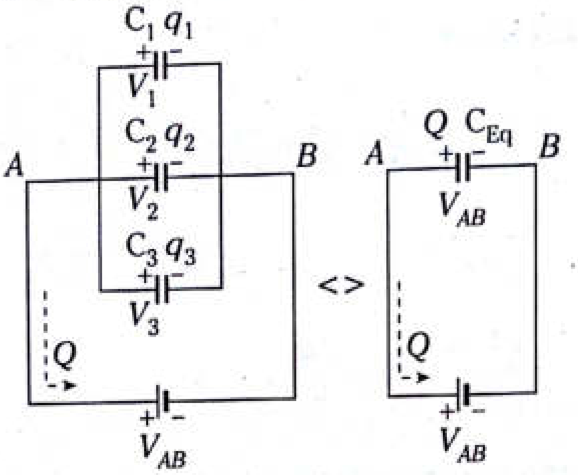
$$\frac{Q}{C_{Eq}}=\frac{q_1}{C_1}+\frac{q_2}{C_2}+\frac{q_3}{C_3}$$

Pero de (*)

$$\frac{Q}{C_{Eq}}=\frac{Q}{C_1}+\frac{Q}{C_2}+\frac{Q}{C_3}$$

$$\therefore\ \boxed{\frac{1}{C_{Eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}}$$

5.2. EN PARALELO



Se tiene

- de la conexión en paralelo

$$V_{AB}=V_1=V_2=V_3$$

- de la conservación de la cantidad de carga eléctrica

$$Q=q_1+q_2+q_3$$

$$C_{Eq}\cdot V_{AB}=C_1\cdot V_{AB}+C_2\cdot V_{AB}+C_3\cdot V_{AB}$$

$$\therefore \quad \boxed{C_{Eq}=C_1+C_2+C_3}$$

Problema N.° 1

Un alambre de nicrom, de sección recta uniforme, tiene una resistencia R. Si mediante un mecanismo se le alarga, con lo que al final presenta una longitud 20% mayor y una sección recta uniforme, determine en cuánto varía su resistencia.

(R=2 kΩ)

Resolución

Se tiene al inicio

De acuerdo con la ley de Poulliet

$$R=\rho\frac{L_0}{\mathbb{A}_0}$$

Al alargarse el alambre en un 20%, su longitud final es

$$L_F=L_0+20\%L_0=1{,}2L_0$$

Al final

Nos pide la variación de la resistencia.

$$\Delta R=R_F-R$$

Para ello, tenemos que calcular la resistencia final (R_F). Es necesario tener en cuenta que, si bien el alambre ha cambiado de dimensiones, sigue siendo del mismo material, por lo cual no ha cambiado su resistividad (ρ). Tampoco ha cambiado la cantidad de material, ya que solo ha sido estirado. Por lo tanto, en ambos casos el volumen es el mismo.

$$V_0=V_F$$

$$\mathbb{A}_0\cdot \cancel{L_0}=\mathbb{A}_F\cdot \underbrace{L_F}_{1{,}2\cancel{L_0}}$$

$$\mathbb{A}_F=\left(\frac{\mathbb{A}_0}{1{,}2}\right)$$

Finalmente

$$R_F=\rho\frac{L_F}{\mathbb{A}_F}=\frac{\rho(1{,}2L_0)}{\left(\frac{\mathbb{A}_0}{1{,}2}\right)}$$

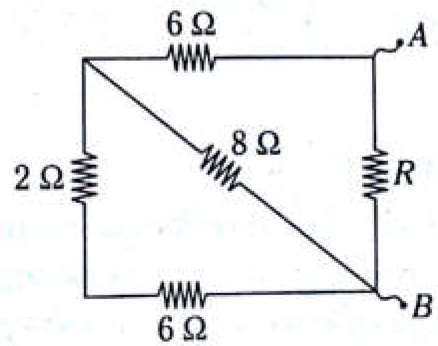
$$R_F=1{,}44\left(\frac{\rho L_0}{\mathbb{A}_0}\right)=1{,}44R$$

$$R_F=1{,}44(2000\ \Omega)=2880\ \Omega$$

$$\therefore\quad \Delta R=2880\ \Omega-2000\ \Omega=880\ \Omega$$

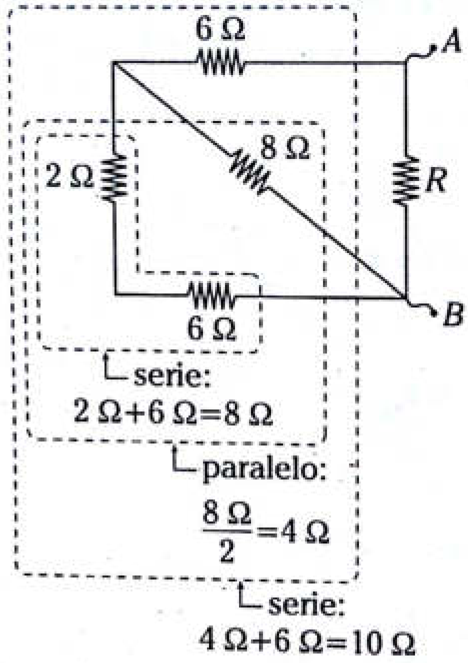
Problema N.° 2

Si la resistencia equivalente entre los puntos A y B es de 5 Ω, determine R.

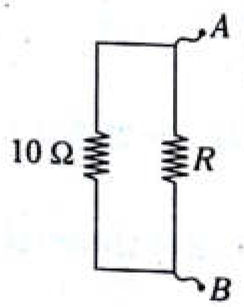


Resolución

Se pueden reducir las resistencias hasta que lleguemos a la resistencia R.



El circuito simplificado es el siguiente:



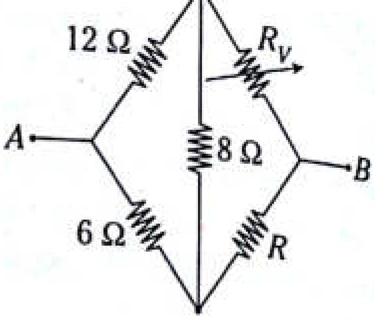
Los dos resistores están en paralelo y, por dato, su resistencia equivalente es 5 Ω.

$\rightarrow \quad 5\,\Omega=\dfrac{10R}{10+R}$

$\therefore \quad R=10\,\Omega$

Problema N.° 3

En el circuito que observamos, R_V representa una resistencia variable y cuando R_V=6 Ω, la intensidad de corriente por el resistor de 8 Ω es cero. Determine la resistencia equivalente entre A y B para tal condición.

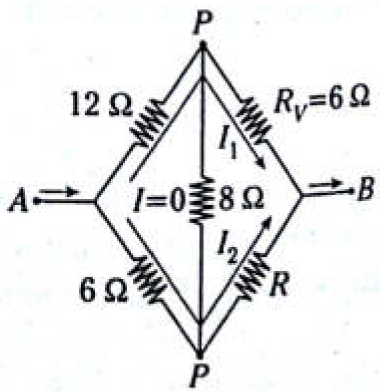


Resolución

Nos piden la resistencia equivalente entre A y B. Para esto, es necesario determinar la resistencia R. Este circuito es conocido como **puente Weastone** y justamente se utiliza para determinar resistencias desconocidas, como la resistencia R. En este circuito, la corriente eléctrica ingresa por A, se reparte por las resistencias del circuito y sale por B. Cuando se varía el valor de R_V, se modifica las intensidades de corriente por los demás resistores.

Según el problema, cuando R_V=6 Ω, por el resistor de 8 Ω no pasa corriente eléctrica.

De acuerdo con la ley de Ohm, por un resistor pasa una corriente eléctrica cuando presenta una diferencia de potencial diferente de cero, dado que la corriente debe fluir de mayor a menor potencial eléctrico. Como por el resistor de 8 Ω no pasa corriente, sus terminales tienen igual potencial eléctrico que hemos designado con la letra P. La corriente que ingresa por A se reparte de la siguiente forma:



donde 12 Ω y R_V están en serie, y 6 Ω y R también. Además, 12 Ω y 6 Ω están conectados entre los puntos A y P por lo que tienen igual diferencia de potencial, es decir, están conectados en paralelo.

Aplicamos la ley de Ohm ($V=I\cdot R$) a los dos resistores.

$$I_1(12\ \Omega)=I_2(6\ \Omega)$$

Lo mismo entre R_V y R.

$$I_1\cdot R_V=I_2\cdot R$$

Dividimos miembro a miembro ambas igualdades.

$$\frac{12\ \Omega}{R_V}=\frac{6\ \Omega}{R}$$

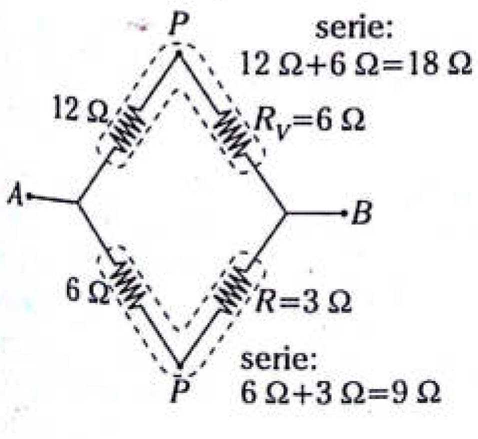
$$(12\ \Omega)R=(6\ \Omega)R_V$$

Esta igualdad es una relación muy útil en el puente Weastone, donde **el producto cruzado de las resistencias son iguales.** Esto solo ocurre cuando por la resistencia central no pasa corriente.

Reemplazamos $R_V=6\ \Omega$.

$$(12\ \Omega)R=(6\ \Omega)(6\ \Omega)\ \rightarrow\ R=3\ \Omega$$

Una vez que conocemos todas las resistencias, se pueden reducir a su equivalente entre A y B. Podemos eliminar al resistor de 8 Ω, dado que por él no pasa corriente; esto en nada altera al resto del circuito.



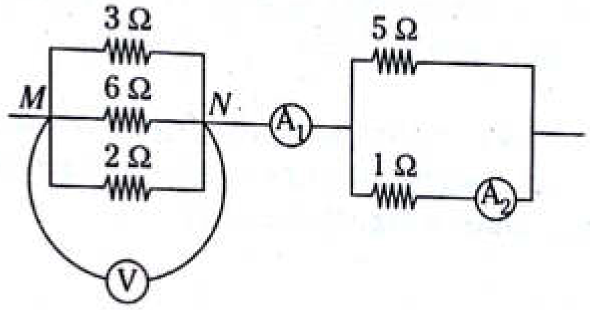
Luego 18 Ω y 9 Ω están en paralelo.

Finalmente, entre A y B,

$$\therefore\quad R_{Eq}=\frac{18\ \Omega\times 9\ \Omega}{18\ \Omega+9\ \Omega}=6\ \Omega$$

Problema N.° 4

Se muestra parte de un circuito eléctrico. Determine la lectura del voltímetro y el amperímetro A_2 si el amperímetro A_1 indica 12 A. Considere instrumentos ideales.



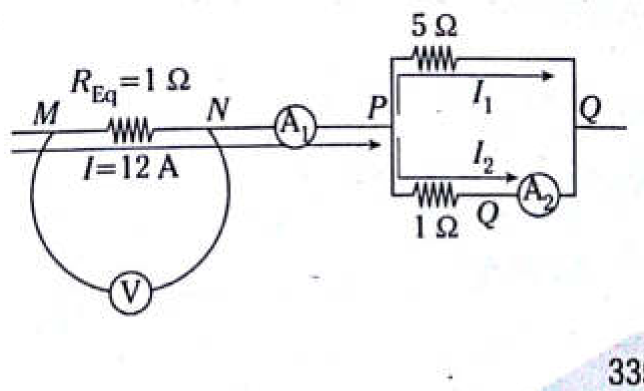
Resolución

El voltímetro mide la diferencia de potencial entre los puntos M y N. Para determinar su lectura reducimos los tres resistores de 3 Ω, 6 Ω y 2 Ω, conectados en paralelo, ya que la diferencia de potencial entre M y N se mantiene y por el resistor equivalente pasará igual intensidad de corriente que pasa por el amperímetro A_1, el cual registra 12 A, según dato del problema.

Determinamos la R_{Eq} entre M y N.

$$\frac{1}{R_{Eq}}=\frac{1}{3\ \Omega}+\frac{1}{6\ \Omega}+\frac{1}{2\ \Omega}\ \rightarrow\ R_{Eq}=1\ \Omega$$

Luego, el circuito parcialmente reducido es el siguiente:



Tengamos en cuenta que por el voltímetro no pasa corriente eléctrica, ya que al ser ideal tiene una gran resistencia que impide el paso de corriente.

Aplicamos la ley de Ohm en el resistor equivalente para saber lo que indica el voltímetro.

$$V_{MN}=I \cdot R_{\text{Eq}}=(12\text{ A})(1\ \Omega)=12\text{ V}$$

Para determinar la lectura del amperímetro A_2, es decir, la intensidad de corriente I_2, es necesario observar lo siguiente:

En el nodo P entra la corriente de 12 A y salen las corrientes de intensidades I_1 e I_2. De acuerdo con la primera regla de Kirchhoff

$$\sum I_{\text{salen}}=\sum I_{\text{entran}}$$

$$\rightarrow \quad I_1+I_2=12\text{ A} \qquad \text{(I)}$$

El amperímetro A_2 por ser ideal no presenta resistencia eléctrica por lo que sus terminales tienen igual potencial eléctrico (Q). Por ello, los resistores de 5 Ω y 1 Ω, que están conectados entre los puntos P y Q, tienen igual diferencia de potencial $\left(V_{PQ}\right)$, es decir, están en paralelo. Aplicamos la ley de Ohm ($V=I \cdot R$) a los dos resistores.

$$I_1(5\ \Omega)=I_2(1\ \Omega) \quad \rightarrow \quad I_2=5I_1 \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I).

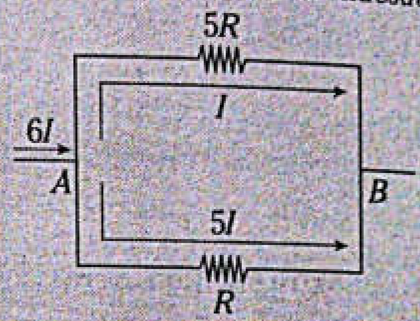
$$I_1+5I_1=12\text{ A} \quad \rightarrow \quad I_1=2\text{ A}$$

Reemplazamos en (II).

$$\therefore \quad I_2=10\text{ A}$$

Observación

Las intensidades de corriente por dos resistores en paralelo son inversamente proporcionales a sus resistencias, dado que los dos resistores tienen igual diferencia de potencial. Por ejemplo, para dos resistores cuyas resistencias están en la proporción de 5 a 1 sus intensidades están en la proporción de 1 a 5, tal como se muestra.

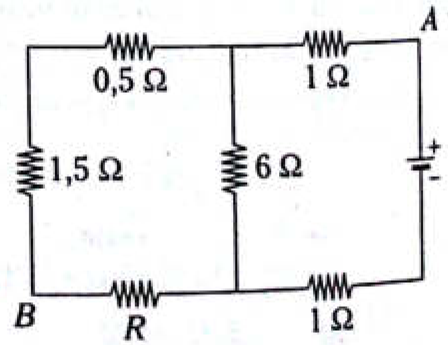


Cuando aplicamos la ley de Ohm, se verifica que la diferencia de potencial es $V_{AB}=5IR$ en ambos resistores.

Además, de acuerdo con la primera regla de Kirchhoff, por el nodo A debe entrar una corriente de intensidad igual a $6I$.

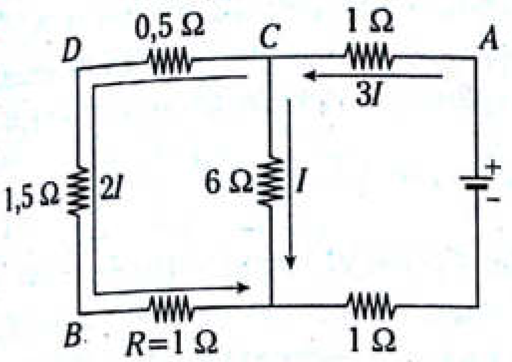
Problema N.° 5

Un voltímetro conectado entre A y B indica 14 V. Determine la potencia eléctrica que disipa la resistencia eléctrica ($R=1\ \Omega$).



Resolución

Los resistores de 0,5 Ω, 1,5 Ω y $R=1\ \Omega$ están en serie y se pueden reemplazar por un resistor equivalente de 3 Ω, el cual está en paralelo con el resistor de 6 Ω. Como su proporción es de 1 a 2, sus intensidades de corrientes estarán en la proporción de 2 a 1 según la propiedad indicada en la observación anterior.



Aplicamos la primera regla de Kirchhoff en el nodo C; por el resistor de 1 Ω debe pasar una intensidad de corriente igual a $3I$.

La potencia eléctrica que disipa el resistor R es

$$P=(2I)^2R \qquad (*)$$

Para determinar I, aplicamos el método del recorrido en el trayecto $ACDB$, ya que se tiene como dato que la diferencia de potencial entre A y B es 14 V, que es la lectura del voltímetro conectado en esos puntos.

$$V_{AB}=V_{AC}+V_{CD}+V_{DB}$$

Aplicamos la ley de Ohm para los voltajes de las resistencias.

$$14\ \text{V}=3I(1\ \Omega)+2I(0{,}5\ \Omega)+2I(1{,}5\ \Omega)$$

$$14\ \text{V}=7I\ \Omega$$

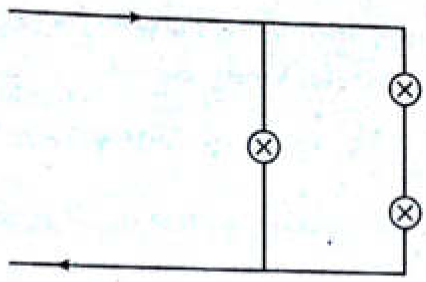
$$I=2\ \text{A}$$

Reemplazamos en (*).

$$\therefore\ P=(4\ \text{A})^2\times 1\ \Omega=16\ \text{W}$$

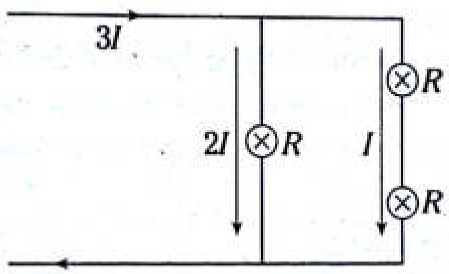
Problema N.° 6

Si la potencia máxima permisible para cada foco por separado es de 64 W, determine la potencia máxima que se puede disipar por medio del sistema mostrado (considere focos idénticos).



Resolución

Dado que los focos son idénticos (tienen igual resistencia), la distribución de corrientes en el circuito es el siguiente:



Nos piden la potencia máxima que el sistema puede disipar; esta es la suma de las potencias de los tres focos. Al aumentar la intensidad de corriente que llega al circuito ($3I$), aumenta las potencias de cada foco y la de todo el circuito.

Dado que la potencia disipada por un resistor, como el foco, se determina como $P=I^2\cdot R$, y los tres focos tienen igual resistencia, el foco que disipa más potencia es aquel por donde pase más intensidad de corriente; en este caso, por donde pasa $2I$. Cuando este foco llegue a su máxima potencia (64 W), los otros trabajarán con una menor potencia; sin embargo, ya no se podrá aumentar más la intensidad de corriente en el circuito porque el foco que está disipando su máxima potencia se quemará. En estas condiciones, el sistema está disipando su máxima potencia.

Para el foco que disipa su máxima potencia

$$P_1=(2I)^2R=64\ \text{W} \ \rightarrow\ I^2\cdot R=16\ \text{W}$$

Para los otros dos focos en serie, la potencia disipada por los dos juntos es

$$P_2 = I^2(2R) = 2\left(I^2 \cdot R\right) = 2(16\text{ W}) = 32\text{ W}$$

Por lo tanto, la potencia máxima disipada por el sistema es

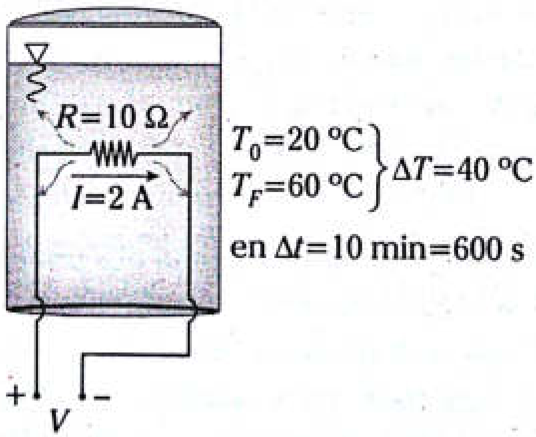
$$P_{\text{máx}} = P_1 + P_2 = 96\text{ W}$$

Problema N.° 7

Una terma usa un resistor de 10 Ω y por él pasa una corriente eléctrica de 2 A. Si en 10 minutos se calienta cierta cantidad de agua de 20 °C hasta 60 °C, determine la masa de agua. Considere que la terma es de capacidad calorífica despreciable.

(1 J <> 0,24 cal)

Resolución



El agua se calienta debido a la energía que va disipando el resistor cuando por él pasa corriente. En este caso, la energía disipada es igual al calor que gana el agua para cambiar su temperatura, y se desprecia las pérdidas al medio o el ganado por el recipiente, ya que su capacidad calorífica es despreciable. Esta disipación de energía en forma de calor (Q) por un resistor se conoce como efecto Joule, tal que

$$Q = I^2 \cdot R \cdot \Delta t \quad \text{(en joule)}$$

donde Δt es el intervalo de tiempo que dura la transferencia de energía.

Por otro lado, en el capítulo de Fenómenos térmicos, nos dicen que el calor (Q) que produce cambios en la temperatura de un cuerpo se denomina calor sensible y se determina con la relación

$$Q = C_e \cdot m \cdot \Delta T \quad \text{(en cal)}$$

donde C_e es el calor específico del agua, $C_e = 1$ cal/g °C; m es la masa de agua (en gramos) y ΔT es la variación de temperatura.

Igualamos ambas relaciones.

$$C_e \cdot m \cdot \Delta T\,(\text{cal}) = I^2 \cdot R \cdot \Delta t\,(\text{joule})$$

El primer miembro de la igualdad nos da el calor en calorías y el segundo miembro en Joule. No se puede operar sin igualar las unidades; para ello tenemos la equivalencia 1 J <> 0,24 cal.

Reemplazamos en la igualdad anterior.

$$C_e \cdot m \cdot \Delta T\,(\text{cal}) = I^2 \cdot R \cdot \Delta t\,(0{,}24\text{ cal})$$

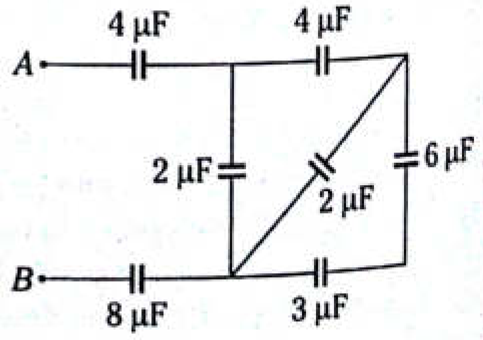
Reemplazamos los datos, con Δt en segundos, y despejamos la masa de agua en gramos.

$$(1)m(40)\ \cancel{\text{cal}} = 2^2(10)(600)0{,}24\ \cancel{\text{cal}}$$

$$\therefore \quad m = 144\text{ g}$$

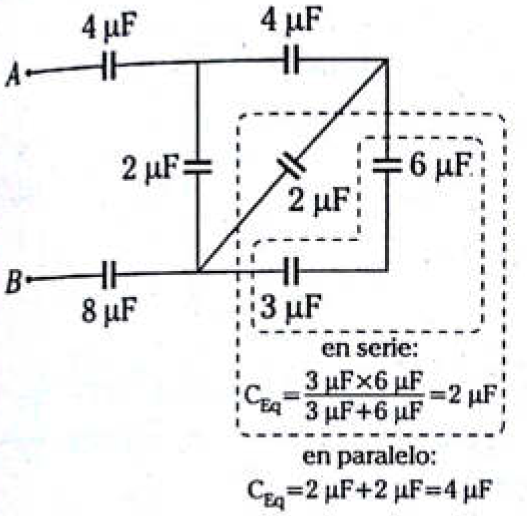
Problema N.° 8

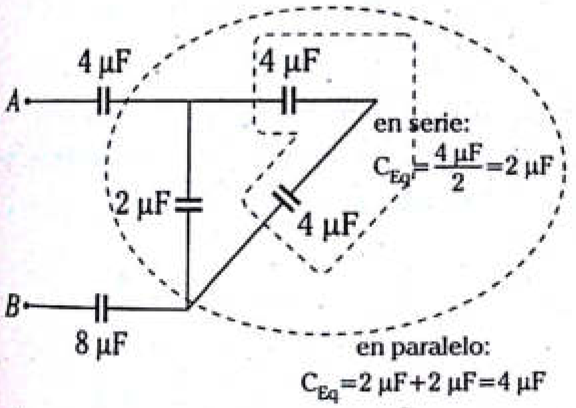
En el acoplamiento de capacitores mostrado, determine la capacitancia equivalente entre A y B.



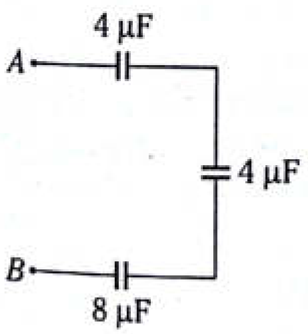
Resolución

Se procede de forma similar a como se determina la resistencia equivalente. Se identifican los capacitores que están en serie y paralelo, se determina su capacitancia equivalente y se reduce el circuito.





Finalmente entre A y B hay tres capacitores en serie.

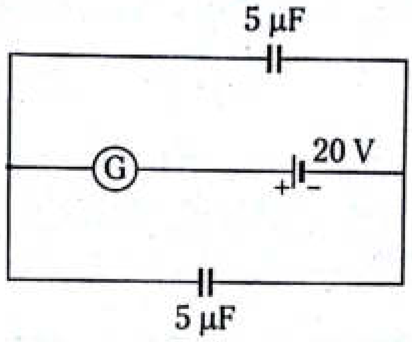


Finalmente,

$$\frac{1}{C_{Eq}}=\frac{1}{4\ \mu F}+\frac{1}{4\ \mu F}+\frac{1}{8\ \mu F} \rightarrow C_{Eq}=1{,}6\ \mu F$$

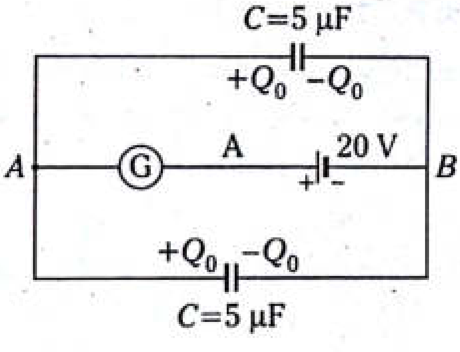
Problema N.° 9

Si en el sistema capacitivo mostrado, un capacitor se llena completamente con un dieléctrico de $\varepsilon=4$, ¿qué cantidad de carga eléctrica pasará por el galvanómetro?



Resolución

Inicialmente los capacitores tienen una diferencia de potencial de $V_{AB}=20$ V, por lo que ya tienen almacenado una cantidad de carga inicial (Q_0) cada uno.



$$Q_0=C\cdot V_{AB}=5\ \mu F\times 20\ V=100\ \mu C$$

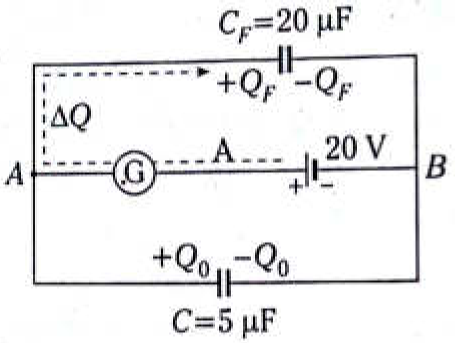
Si uno de los capacitores se llena completamente con un dieléctrico de $\varepsilon=4$, su capacitancia aumenta.

Entonces, la nueva capacitancia es

$$C_F=\varepsilon\cdot C=4\times 5\ \mu F=20\ \mu F$$

Como este capacitor sigue conectado a la fuente, su diferencia de potencial se mantiene en 20 V, por lo cual ahora almacena más cantidad de carga (Q_F).

$$Q_F=C_F\cdot V_{AB}=20\ \mu F\times 20\ V=400\ \mu C$$



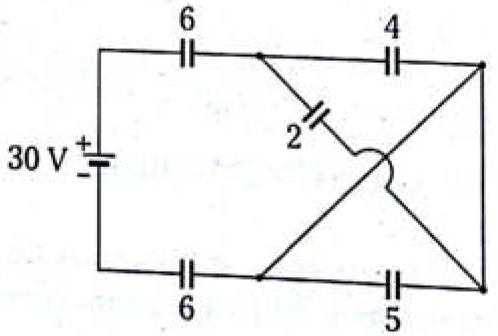
Solo este capacitor aumenta su cantidad de carga almacenada; el otro no porque no cambia su capacitancia.

Ese aumento en la cantidad de carga almacenada (ΔQ) significa que la fuente ha tenido que transferirle esa cantidad de carga, la cual pasó necesariamente por el galvanómetro.

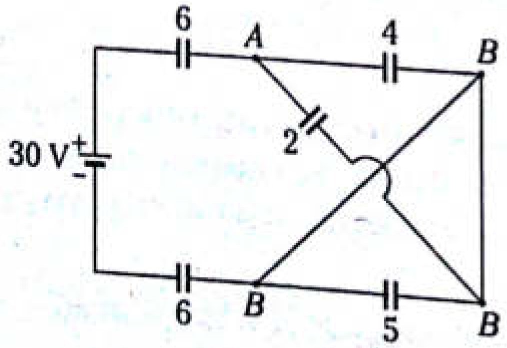
$\therefore \quad \Delta Q=Q_F-Q_0=400\mu C-100\mu C=300\mu C$

Problema N.° 10

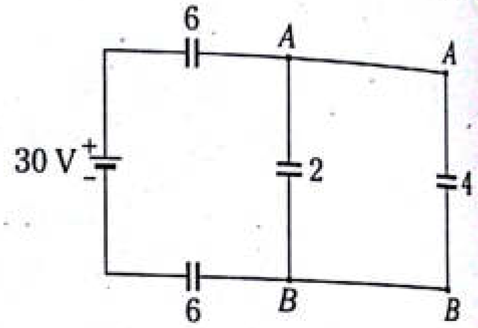
¿Cuánta energía almacena el capacitor de 4 μF? Considere que todos los condensadores tienen capacidad expresada en μF.



Resolución



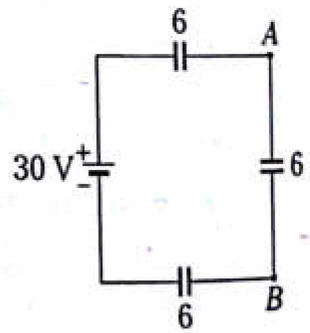
De acuerdo a los potenciales indicados, el capacitor de 5 μF tiene una diferencia de potencial igual a cero, por lo cual no almacena cantidad de carga. También observamos que los capacitores de 4 μF y 2 μF están conectados a los puntos A y B por lo que están conectados en paralelo. El circuito parcialmente simplificado es el siguiente:



Si conocemos la diferencia de potencial (V_{AB}), la energía almacenada por el capacitor de 4 μF se determina como

$$U=\frac{1}{2}C\cdot V_{AB}^2 \qquad (*)$$

Si reducimos los capacitores en paralelo, la diferencia de potencial (V_{AB}) se mantiene. La capacitancia equivalente de estos capacitores es $2\ \mu F+4\ \mu F=6\ \mu F$



En este caso, como los capacitores en el circuito final están en serie y son de igual valor, el voltaje de la fuente se reparte por igual en cada capacitor, por lo cual

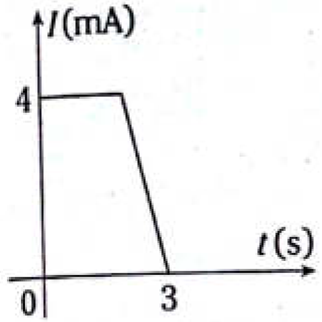
$$V_{AB}=10\ V$$

Por lo tanto, reemplazamos en (*) para el capacitor de 4 μF.

$$U=\frac{1}{2}(4\ \mu F)(10\ V)^2=200\ \mu J$$

NIVEL BÁSICO

1. La gráfica muestra el comportamiento de la corriente a través de un conductor. Si la corriente se mantuvo constante durante 2 s, ¿cuántos electrones pasaron por la sección transversal del conductor entre [0; 3] s?



A) $6{,}25\times10^{16}$ B) $12{,}5\times10^{-6}$ C) 8×10^{16}
D) 10^{17} E) 4×10^{16}

2. Determine el área en mm^2 de la sección transversal de un alambre de cobre #10 si se sabe que un rollo de 100 m de este alambre presenta una resistencia eléctrica de 0,325 Ω.

Considere que $\rho_{Cu} = 0{,}0171\left(\dfrac{\Omega\,\text{mm}^2}{\text{m}}\right)$.

A) 4,42 B) 5,26 C) 6,38
D) 7,24 E) 8,16

3. Un conductor es sometido a distintas diferencias de potencia, y las intensidades de corriente que se establecen se indican en el siguiente cuadro de datos. Determine su resistencia eléctrica.

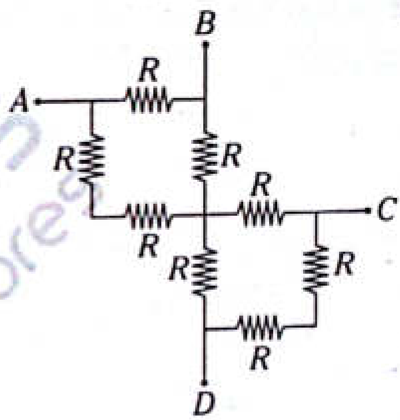
V (V)	9	M	y	x
I (A)	x	N	3	4

A) 0,5 Ω B) 1 Ω C) 1,5 Ω
D) 2 Ω E) 3 Ω

4. Un alambre de 40 cm de longitud y de sección transversal uniforme tiene cierta resistencia eléctrica, además, sus extremos se conectan a una batería de 20 V. ¿Qué diferencia de potencial existirá entre dos puntos que distan 3 cm y 15 cm, respectivamente, de un extremo del alambre?

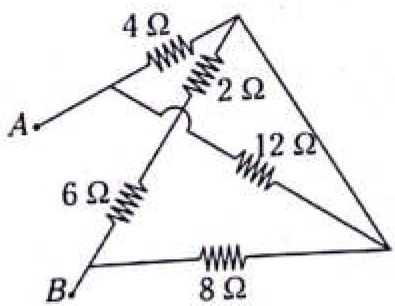
A) 8 V B) 12 V C) 10 V
D) 6 V E) 5 V

5. Si la resistencia equivalente entre A y B es 60 Ω, determine la resistencia equivalente entre A y D.



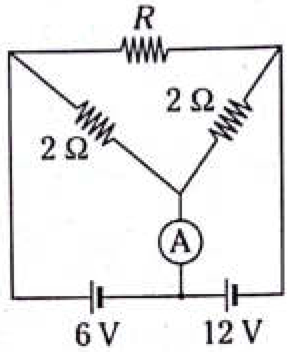
A) 20 Ω B) 25 Ω C) 40 Ω
D) 80 Ω E) 140 Ω

6. En el sistema mostrado, determine la resistencia equivalente entre A y B.



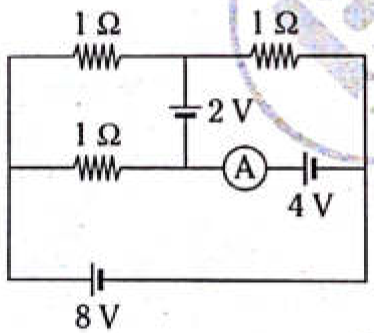
A) 3 Ω B) 4 Ω C) 5 Ω
D) 7 Ω E) 10 Ω

7. En el sistema mostrado, determine la lectura del amperímetro ideal.



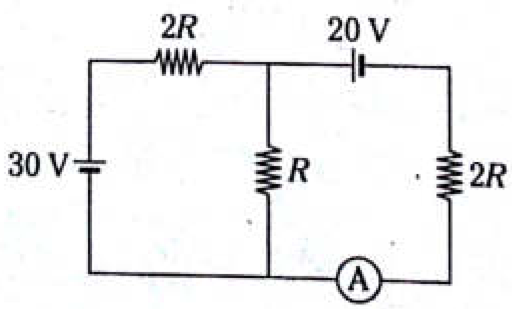
A) 1 A B) 2 A C) 3 A
D) 4 A E) 5 A

8. En el circuito mostrado, determine la lectura del amperímetro ideal.



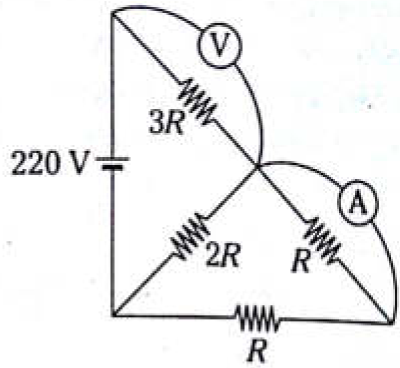
A) 0 A B) 1 A C) 2 A
D) 3 A E) 4 A

9. En el circuito eléctrico mostrado, determine la lectura del amperímetro ideal. (R=3 Ω).



A) 1 A B) 1,25 A C) 1,5 A
D) 2,25 A E) 2,5 A

10. En el circuito mostrado, determine la lectura de los instrumentos ideales. (R=4 kΩ).

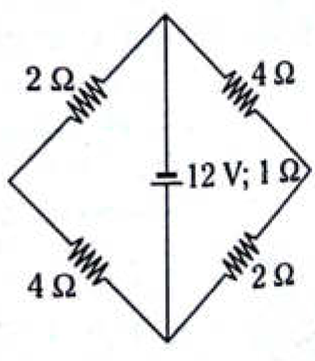


A) 180 V y 10 mA
B) 180 V y 5 mA
C) 90 V y 5 mA
D) 90 V y 10 mA
E) 180 V y 15 mA

11. Dos lámparas de 60 W-120 V y 40 W-120 V están conectados en serie a una línea de 120 V. ¿Qué potencia se disipa en las dos lámparas en estas condiciones?

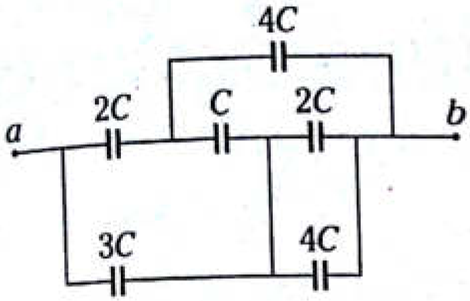
A) 100 W B) 24 W C) 144 W
D) 160 W E) 12 W

12. Determine el rendimiento de la fuente cuya fuerza electromotriz es de 12 V.



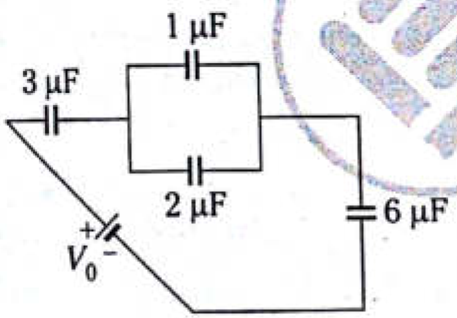
A) 0,5 B) 0,75 C) 0,6
D) 0,7 E) 0,35

13. Determine la capacidad equivalente entre a y b.



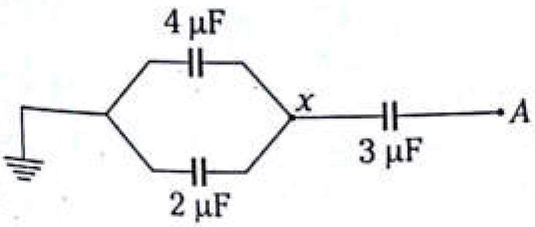
A) $\frac{10}{3}C$ B) $\frac{4}{3}C$ C) $10C$
D) $7C$ E) 0

14. Si el capacitor de 1 μF presenta una cantidad de carga eléctrica de .2 μC, determine V_0.



A) 5 V B) 6 V C) 12 V
D) 9 V E) 7,5 V

15. En el presente circuito, el potencial eléctrico en el punto A es igual a 1200 V. Determine el potencial eléctrico en el punto x.



A) 100 V B) 200 V C) 300 V
D) 400 V E) 500 V

NIVEL INTERMEDIO

16. En un tubo que contiene un gas se determina que en 4 s pasan por su sección transversal +12 mC en un sentido y −4 mC en sentido contrario. Determine la intensidad de corriente en el gas.

A) 1 mA B) 2 mA C) 3 mA
D) 4 mA E) 6 mA

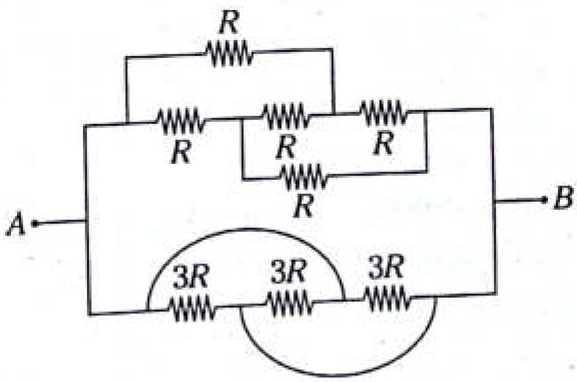
17. La intensidad de corriente eléctrica que se establece en un conductor depende del tiempo, según $I=(5t+M)$, I en amperios y t en segundos. Si la cantidad de carga eléctrica a través del conductor en los primeros dos segundos es 14 C, determine la intensidad de corriente eléctrica en el instante $t=3$ s.

A) 5 A B) 7 A C) 14 A
D) 15 A E) 17 A

18. Un alambre conductor metálico de resistencia eléctrica 150 Ω es fundido. Luego, con el 60% del material se fabrica otro alambre, pero de doble longitud. Determine la resistencia eléctrica de este nuevo alambre.

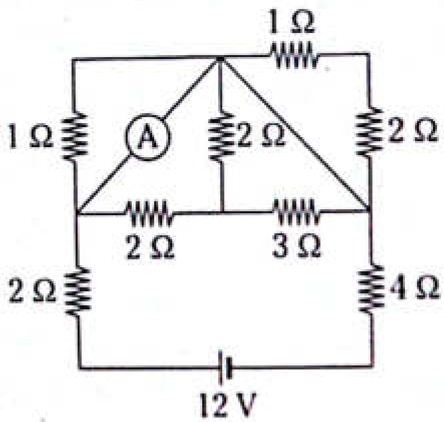
A) 0,5 kΩ B) 0,75 kΩ C) 1 kΩ
D) 1,2 kΩ E) 2 kΩ

19. En el sistema mostrado, determine la resistencia equivalente entre los puntos A y B.



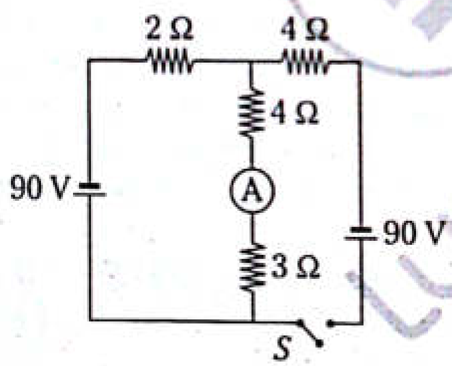
A) R B) $2R$ C) $R/2$
D) $R/4$ E) $3R$

20. En el circuito que se muestra, determine la diferencia de potencial en el resistor de 4 Ω. Considere que el amperímetro A es ideal.



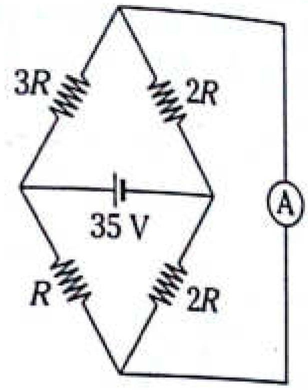
A) 8 V
B) 9 V
C) 11 V
D) 13 V
E) 16 V

21. Determine la variación en la lectura del amperímetro ideal al cerrar el interruptor *S*.



A) 3,6 A
B) 4,8 A
C) 6,4 A
D) 1,2 A
E) 0,8 A

22. En el circuito mostrado, determine la lectura del amperímetro ideal. (R=10 kΩ).

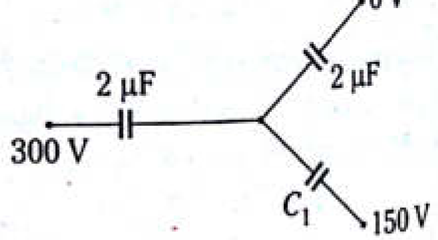


A) 1 mA
B) 0,8 mA
C) 0,75 mA
D) 0,5 mA
E) 0,25 mA

23. Dos capacitores en paralelo y con igual capacitancia *C* están conectados a una fuente de voltaje *V*. Si retiramos la fuente e introducimos un dieléctrico con $\varepsilon=3$ en uno de los capacitores (llenando completamente el espacio entre las placas), determine la cantidad de carga eléctrica que logra pasar de un capacitor a otro.

A) 3*CV*
B) 2*CV*
C) 0,2*CV*
D) 0,5*CV*
E) *CV*

24. Determine la cantidad de carga en el capacitor, cuya capacitancia es C_1=1 μF.



A) 0 μC
B) 2 μC
C) 3 μC
D) 4 μC
E) 6 μC

Electromagnetismo

Capítulo XVIII

OBJETIVOS

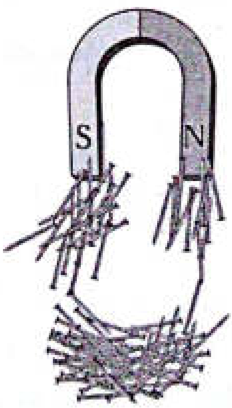
- Conocer y entender la relación que existe entre los fenómenos eléctricos y magnéticos en la naturaleza.
- Entender de manera cualitativa y cuantitativa las interacciones electromagnéticas.
- Comprender el fenómeno de generación de corriente eléctrica a partir de campos magnéticos, así como su aplicación en la técnica moderna.

1. Magnetismo

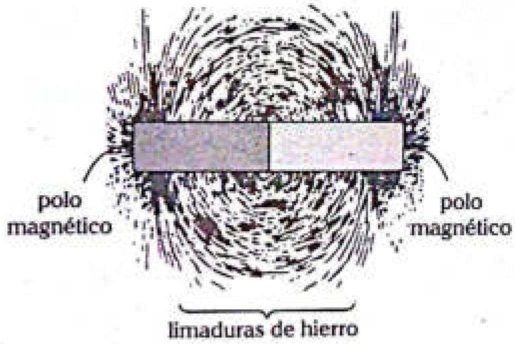
Es la propiedad que tienen ciertas sustancias de atraer trocitos de hierro.

Algunos aspectos importantes relacionado con el magnetismo son los siguientes:

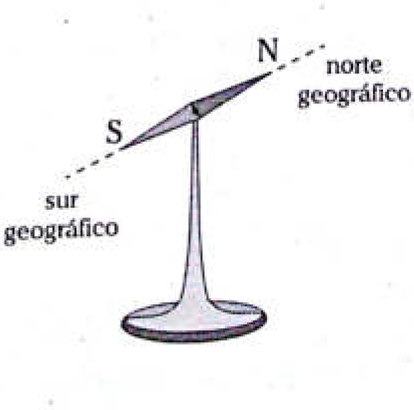
- A los cuerpos que en forma natural manifiestan esta propiedad, se les denomina imanes naturales; y a aquellos que la han adquirido por un tratamiento especial, se les denomina imanes artificiales, y pueden tener formas muy variadas.



- A las regiones donde aparentemente se concentra la propiedad magnética del imán, se les llama comúnmente polos magnéticos.

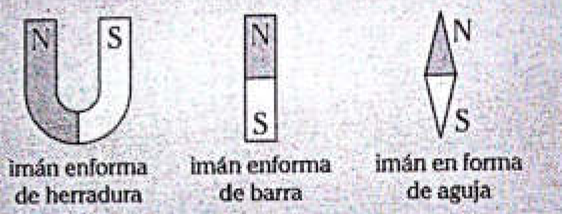


- Cuando suspendemos una aguja magnetica de su punto medio, notamos que esta se orienta según una línea próxima a la que une los polos norte y sur geográfico; por ello, a estos polos del imán se les denomina norte (N) y sur magnético (S).

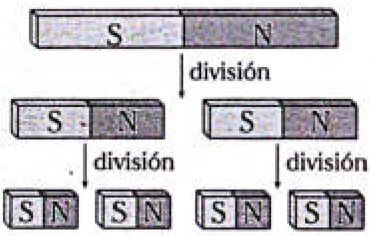


OBSERVACIÓN

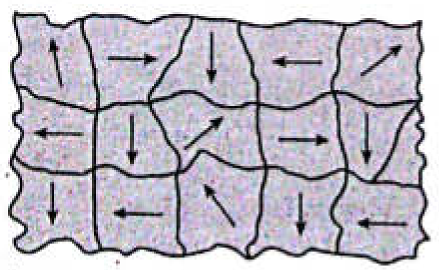
Por convención, el polo norte del imán se oscurece.



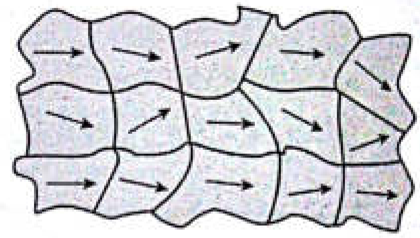
- Experimentalmente, se comprueba que al dividir el imán, se obtienen dos pequeños imanes cada uno con sus dos polos, esto muestra la inseparabilidad de los polos magnéticos al fraccionar el imán. Coulomb explicó este resultado, admitiendo que el magnetismo de los cuerpos se encuentra en las moléculas del imán.



- El magnetismo de los cuerpos se le atribuye al movimiento orbital del electrón alrededor del núcleo y su rotación respecto de su propio eje. Esto hace que los átomos y moléculas se comporten como imanes microscópicos. En unos cuerpos, las propiedades magnéticas de los átomos (dipolos magnéticos) dan una resultante nula; y en otros, pueden dar una resultante. Por lo tanto, las propiedades magnéticas del cuerpo dependen del momento magnético resultante de sus átomos y moléculas.

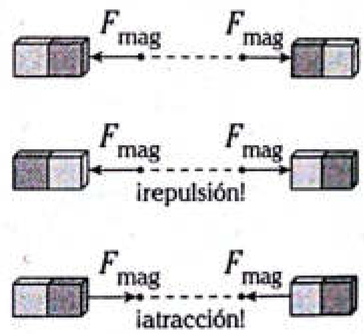


Los imanes elementales, al orientarse al azar, anulan sus efectos magnéticos. Es por ello que el magnetismo externo es prácticamente nulo.



Los imanes elementales al alinearse, se refuerzan intensificando sus efectos magnéticos. Es por ello que el magnetismo se manifiesta externamente.

- Experimentos realizados demuestran que polos magnéticos iguales (2 polos nortes o 2 polos sur), se repelen; y polos magnéticos diferentes (un polo norte y un polo sur), se atraen.



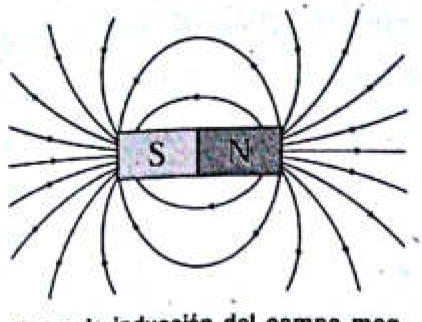
1.1. CAMPO MAGNÉTICO

El campo magnético es una forma especial de la materia, mediante el cual se efectúan las interacciones entre sustancias o cuerpos que poseen la propiedad del magnetismo.

1.1.1. Campo magnético en un imán

Las interacciones entre los imanes se producen aun cuando están separados cierta distancia, esto comprueba que todo imán tiene asociado en sus alrededores un campo denominado campo magnético.

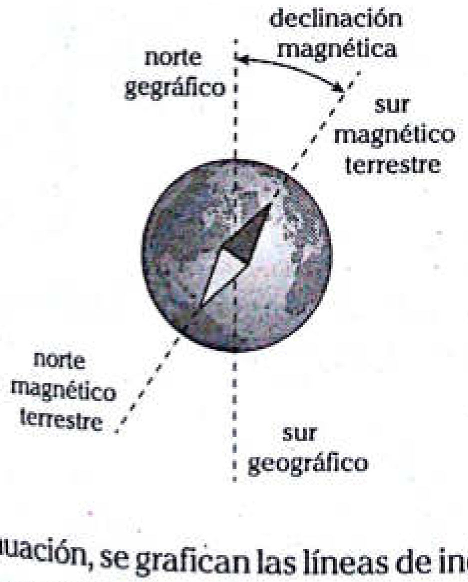
Fue Michael Faraday quien ideó una forma de representar el campo magnético, esto a través de líneas imaginarias llamadas **líneas de inducción** del campo magnético, las cuales se caracterizan por ser cerradas y orientadas desde el polo norte hacia el polo sur magnético del imán.



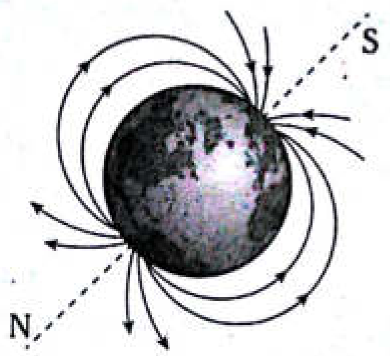
Líneas de inducción del campo magnético asociado a un imán

1.1.2. Campo magnético terrestre

Se ha observado que la aguja magnetizada puesta en libertad trata siempre de orientarse, aproximadamente, en la dirección norte-sur geográfico; sin importar en qué lugar nos encontramos sobre la superficie terrestre. Esto se debe a que la Tierra se comporta como un gigantesco imán y como el norte y sur se atraen, entonces aquel lugar donde apunta el norte magnético de la aguja será el polo sur magnético de la tierra y viceversa. También hay que tener presente que exactamente la aguja no se orienta en la dirección norte-sur geográfico, sino que se orienta con una desviación a la cual se denomina declinación magnética y que con el pasar de los años esta orientación va cambiando.



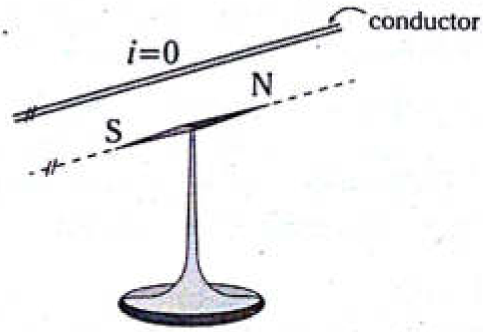
A continuación, se grafican las líneas de inducción que representan al campo magnético terrestre.



1.2. EXPERIENCIA DE OERSTED

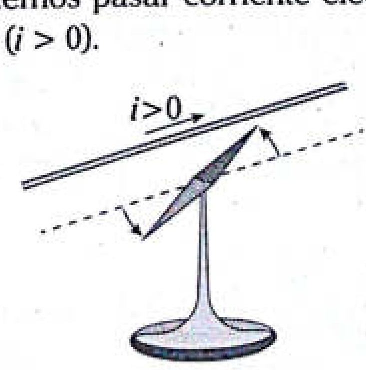
En 1820, el físico danés Hans Christian Oersted llevó a cabo un importante y trascendental descubrimiento al observar que una aguja magnética puede ser desviada por un conductor por el cual fluye corriente eléctrica.

Oersted, para comprobar la relación entre la electricidad y el magnetismo, colocó un conductor rectilíneo alineado por encima de la aguja de una brújula.



En el gráfico, se observa que la aguja se mantiene paralela al conductor cuando por él no pasa corriente eléctrica ($i=0$).

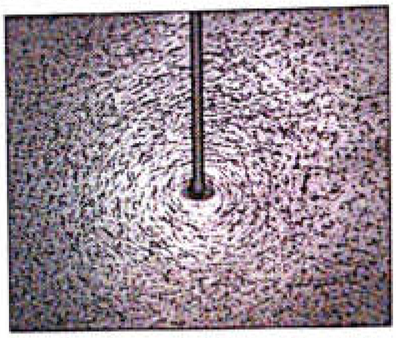
Luego hacemos pasar corriente eléctrica por el conductor ($i > 0$).



Cuando hay corriente eléctrica en el conductor, la aguja se desvía hasta colocarse perpendicular al conductor.

1.2.1. Explicación de la experiencia de Oersted

De la experiencia vista anteriormente, cuando la corriente eléctrica pasa por el conductor, la aguja se desvía; esto indica que el conductor con corriente y la aguja magnética interactúan y pone en evidencia la existencia de un campo magnético alrededor de un conductor con corriente eléctrica. Lo señalado se puede comprobar haciendo circular corriente eléctrica en un conductor que atraviesa una hoja de papel sobre la cual se ha esparcido limaduras de hierro.

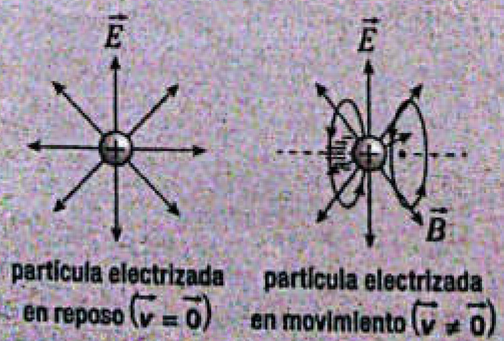


Las limaduras de hierro esparcidas alrededor del conductor con corriente forman circunferencias concéntricas.

De la experiencia se concluye que todo conductor por el que fluye corriente eléctrica tiene asociado en su alrededor un campo magnético rotacional y concéntrico al conductor.

OBSERVACIÓN

- El campo magnético alrededor del conductor se debe al movimiento orientado de los portadores de carga libres en el conductor.
- Cuando un portador de carga está en reposo, tiene asociado un campo eléctrico; y cuando se pone en movimiento, un campo eléctrico-magnético.



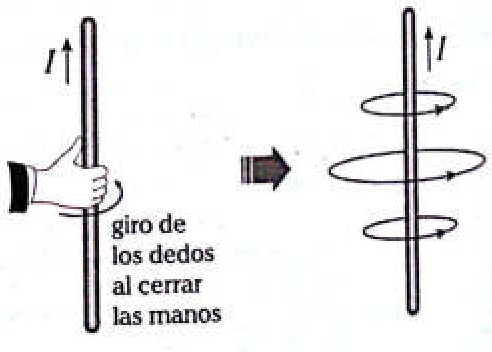
1.2.2. Campo magnético asociado a un conductor con corriente eléctrica

Hemos notado que al esparcir limaduras de hierro en las cercanías de un conductor con corriente, estos pequeños trocitos de hierro se colocan describiendo circunferencias concéntricas alrededor del conductor, esto nos da la idea de las líneas del campo magnético asociado al conductor.

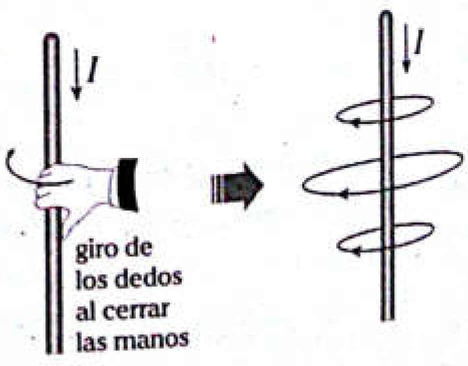
La orientación de las líneas de inducción del campo magnético se puede determinar en forma práctica utilizando **la regla de la mano derecha**.

La aplicación de la regla de la mano derecha es de la siguiente manera: Hacemos que el dedo pulgar de la mano derecha indique la dirección de la corriente eléctrica en el conductor, luego hacemos como si fuésemos a tomar el conductor, y el sentido de giro de los dedos restantes nos indicará la orientación de las líneas del campo magnético.

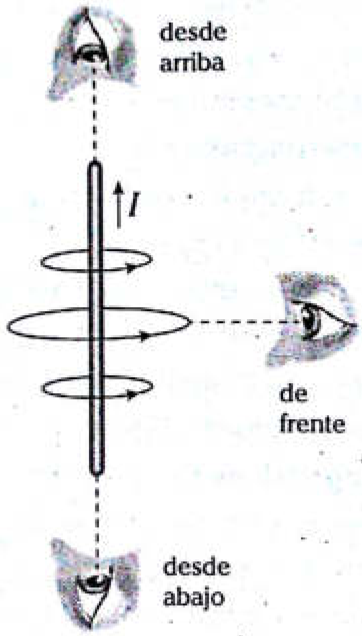
Para un conductor que lleva corriente en dirección vertical hacia arriba



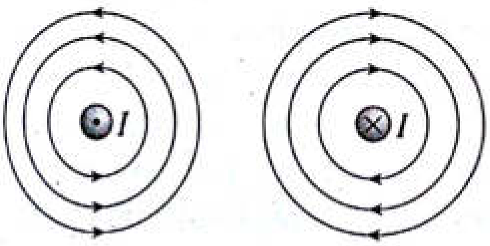
Para un conductor que lleva corriente en dirección vertical hacia abajo



Para un mejor estudio de los campos magnéticos, es necesario representarlos en un plano, por ello nos ubicaremos en una posición tal que las líneas del campo y el conductor puedan visualizarse fácilmente.



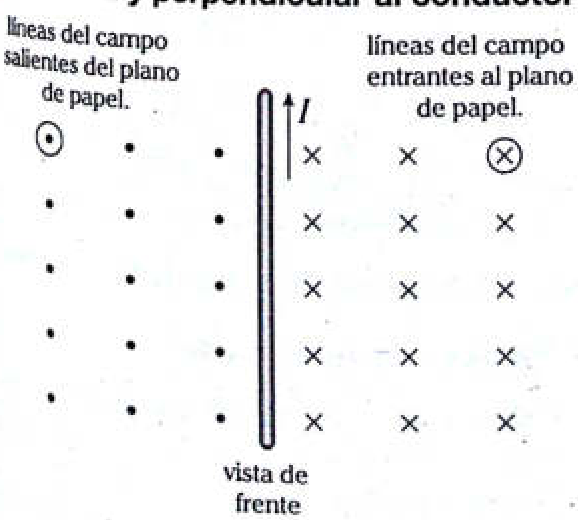
Visual colineal al conductor



desde arriba desde abajo

$\odot$: corriente saliente del plano del papel.
$\otimes$: corriente entrante al plano del papel.

Visual lateral y perpendicular al conductor

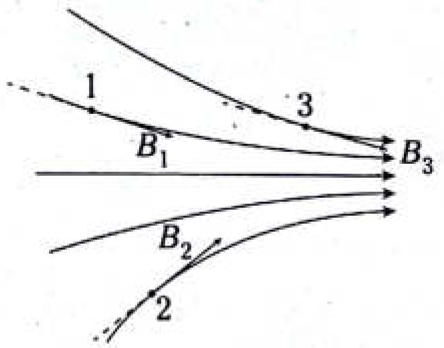


1.3. INDUCCIÓN MAGNÉTICA ($\vec{B}$)

Así como un punto del campo eléctrico, asociado a una partícula electrizada, está caracterizado por el vector intensidad de campo eléctrico ($\vec{E}$); asimismo, un punto del campo magnético asociado a un imán está caracterizado vectorialmente por el vector inducción magnética ($\vec{B}$), el cual nos indica en cierto grado qué tan intenso es el campo magnético en un punto dado del campo y qué dirección tiene.

Respecto al vector inducción magnética ($\vec{B}$), podemos decir lo siguiente:

- El vector $\vec{B}$, en un punto del campo magnético, es tangente a la línea de inducción del campo que pasa por dicho punto y ambos tienen la misma dirección en el punto.



  La unidad de medida de la inducción magnética $\vec{B}$ es el **tesla (T)**.

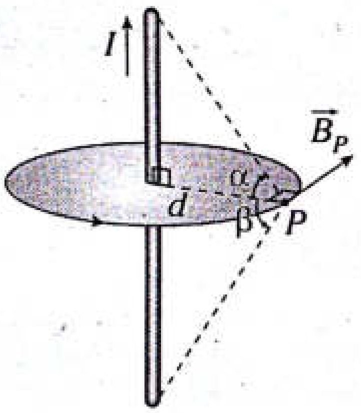
- Donde las líneas de inducción están más juntas, el módulo del vector inducción magnética $\vec{B}$ es mayor.

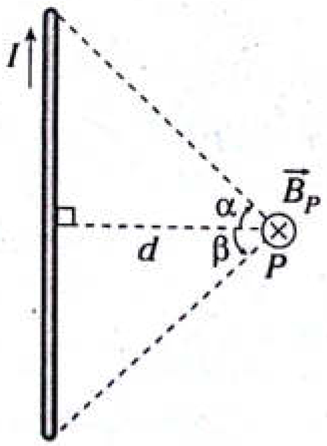
$$B_3 > B_2 > B_1$$

Conocida la forma de caracterizar al campo magnético, así como la forma de determinar la dirección del vector inducción magnética ($\vec{B}$), su módulo (valor) se determina aplicando la ley de Biot-Savart; esto es lo que pasaremos a ver a continuación.

1.3.1. Ley de Biot-Savart

Después de la experiencia de Oersted, muchos científicos investigaron las propiedades del magnetismo asociado con las corrientes eléctricas. Así pues, Jean Baptiste Biot y Félix Savart, a partir de sus investigaciones acerca de la fuerza ejercida sobre un polo magnético, propusieron una expresión que relaciona el vector inducción magnética $(\vec{B})$ en un punto cerca al conductor, con un elemento de la corriente que lo produce. Para nuestro estudio, analizaremos el campo magnético en un punto cercano a un segmento de conductor rectilíneo que transporta corriente eléctrica *I*.





El módulo de la inducción magnética $(\vec{B})$, en el punto *P*, se determina de la siguiente manera:

$$B_P = \frac{\mu_r \mu_0 I}{4\pi d}(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta)$$

donde

- unidad: tesla (T)
- μ_0: permeabilidad magnética en el vacío

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}}$$

- μ_r: permeabilidad relativa del medio con respecto al vacío (nos caracteriza en qué medida el medio favorece a que se den fenómenos magnéticos).

Dentro de los tipos de medios tenemos:

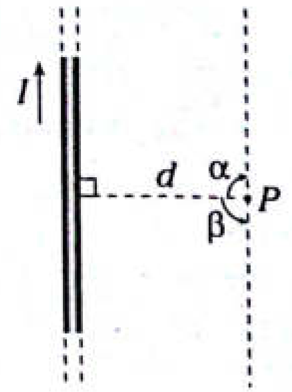
- **diamagnéticos ($\mu_r < 1$)**
  En presencia de un campo magnético externo, se imantan débilmente, de tal manera que el campo magnético externo disminuye su intensidad en forma ligera.
- **paramagnéticos ($\mu_r > 1$)**
  En presencia de un campo magnético externo, se imantan ligeramente, de tal manera que el campo magnético externo aumenta su intensidad también ligeramente. Si el campo magnético externo se suprime, pierde su imantación.
- **ferromagnéticos ($\mu_r >> 1$)**
  En presencia de un campo magnético externo, se imantan fuertemente, de tal manera que el campo magnético externo aumenta en intensidad considerablemente. Si el campo magnético externo se suprime, mantiene su imantación.
- **Para el aire o el vacío (μ_r=1)**
  La expresión de la ley de Biot-Savart quedaría así:

$$B_P = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi d}(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta)$$

1.3.2. Aplicaciones de la ley de Biot-Savart

a. Para conductores rectos

- Cálculo de la inducción magnética debido a un conductor recto de gran longitud (conductor infinito).



En el punto P (considerando aire o vacío)

$$B_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta) \qquad (*)$$

donde

$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}90^\circ = 1$

$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}90^\circ = 1$

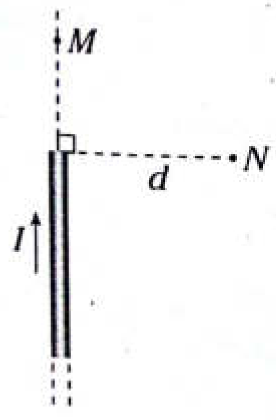
En (*)

$$B_P = \frac{\mu_r \mu_0 I}{4\pi d}(1+1)$$

$$\boxed{B_P = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi d}}$$

- Cálculo de la inducción magnética debido a un conductor semiinfinito.

En este caso, el conductor recto está limitado por uno de sus extremos.



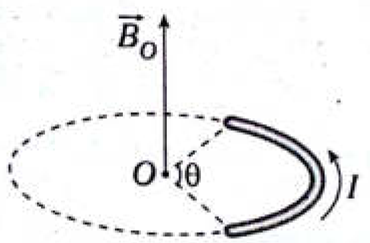
La inducción magnética $\vec{B}$ en un punto, que se encuentra en una línea colineal al conductor (punto M), es nula.

$$\boxed{B_M = 0}$$

En el punto N

$$\boxed{B_N = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi d}}$$

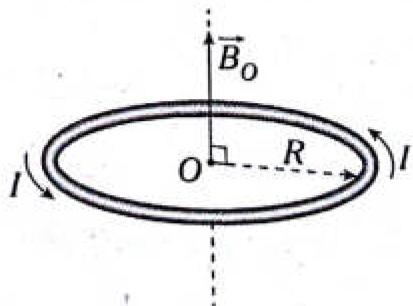
b. Para arcos de conductor circular



$$\boxed{B_O = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi R} \cdot \theta}$$

donde θ está expresado en radianes.

- Si $\theta = 2\pi$ rad, tendremos un conductor circular llamado también **espira circular**.

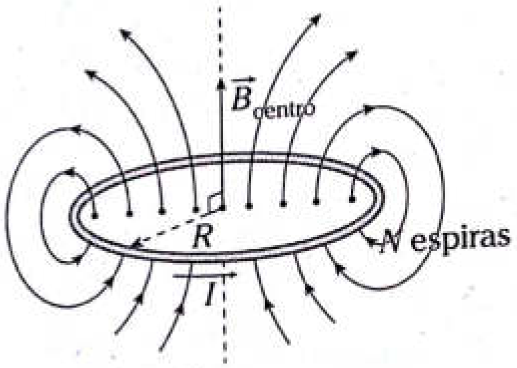


donde

$$B_O = \frac{\mu_O \cdot I}{4\pi \cdot R} \cdot (2\pi)$$

$$\boxed{B_O = \frac{\mu_O \cdot I}{2R}}$$

- Para el caso de N espiras concéntricas de igual radio (bobina) que transportan una corriente I, tendremos

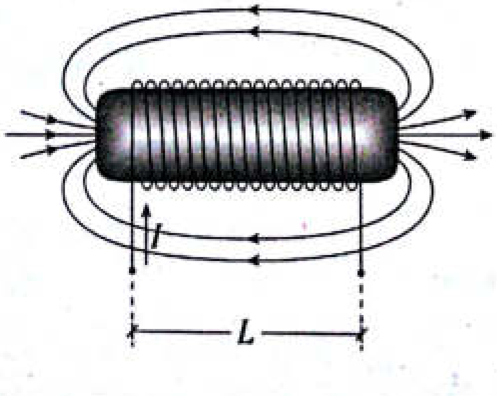


$$B_{centro} = \frac{N \cdot \mu_0 \cdot I}{2R}$$

¡El campo magnético se intensifica!

c. Para un solenoide

En este caso vamos a considerar un solenoide de gran longitud, es decir, la longitud del solenoide es mucho mayor que el radio de las vueltas que lo conforman. Si las vueltas están juntas, las líneas de inducción del campo magnético en el interior del solenoide son paralelas.



Al ser las líneas de inducción paralelas en el interior del solenoide, el módulo de la inducción magnética es constante.

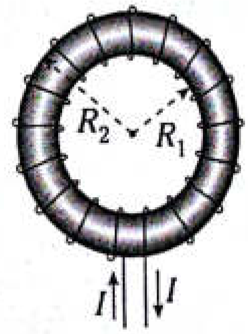
$$B = \frac{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot N \cdot I}{L}$$

Además, en el solenoide de gran longitud, la inducción en el extremo se reduce a la mitad del valor de la inducción en su interior.

$$B_{extremo} = \frac{B}{2}$$

d. Para un toroide

Consiste en un alambre conductor enrollado en un material no conductor que se utiliza como núcleo (toro).



El campo magnético que se genera en su interior se considera constante.

$$B = \frac{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot N \cdot I}{L_m}$$

donde

- $L_m = 2\pi \cdot R_m$
- $R_m = \dfrac{R_1 + R_2}{2}$
- μ_r: permeabilidad magnética relativa del núcleo

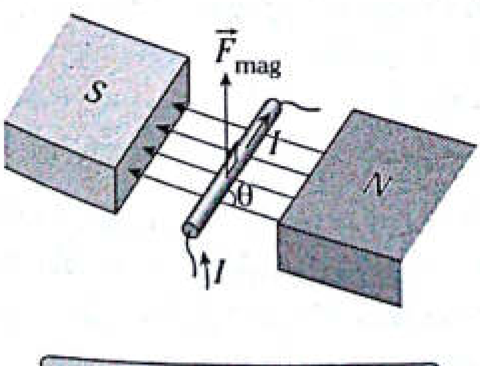
2. Interacción magnética

Luego de la experiencia de Oersted, que mostraba una conexión entre la electricidad y el magnetismo, el fenómeno fue ampliamente repetido y analizado por otros investigadores, quienes llegaron, mediante la experimentación, a conocer la interacción magnética sobre conductores que llevan corriente y sobre partículas electrizadas en movimiento. Sobre estos fenómenos ampliaremos a continuación.

2.1. FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UN CONDUCTOR RECTO QUE LLEVA CORRIENTE

Fue el físico y matemático francés André Marie Ampere (1775 - 1836) quien descubrió la interacción entre conductores con corriente eléctrica y estableció las relaciones cuantitativas para la fuerza de estas interacciones.

La explicación es la siguiente:
Cuando circula corriente eléctrica por la porción de conductor, a su alrededor se establece un campo magnético; este campo interactúa con el campo magnético generado por los imanes (campo externo), dando como resultado una fuerza sobre el conductor denominada "fuerza magnética" $(\vec{F}_{mag})$, llamada también fuerza de Ampere (F_A).

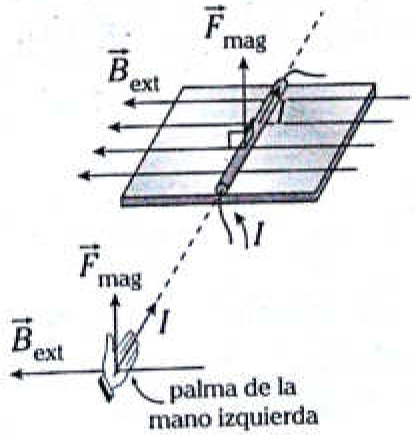


$$\boxed{F_{mag}=B_{ext}\cdot I\cdot L\cdot \text{sen}\theta}$$

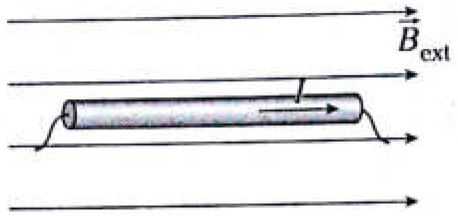
donde

- F_{mag} se expresa en newton (N).
- B_{ext} se expresa en teslas (T).
- I se expresa en amperios (A).
- L se expresa en metros (m).
- θ es el ángulo formado por el conductor y las líneas de inducción de campo magnético externo.

- La $\vec{F}_{mag}$ sobre el conductor es perpendicular al conductor y al vector inducción magnética $(\vec{B}_{ext})$, entonces es perpendicular al plano que forman.
- Para determinar en forma práctica la dirección de la fuerza magnética $(\vec{F}_{mag})$ que actúa sobre el conductor, aplicamos la "regla de la palma de la mano izquierda", que consiste en lo siguiente:
  - La palma de la mano izquierda debe estar extendida con los cuatro dedos juntos y el pulgar extendido perpendicularmente a los otros.
  - Se coloca la mano de tal manera que las líneas del campo magnético ingresen a la palma, y los cuatro dedos orientados en el sentido de la corriente eléctrica.
  - El dedo pulgar extendido apuntará en la dirección de la fuerza magnética.



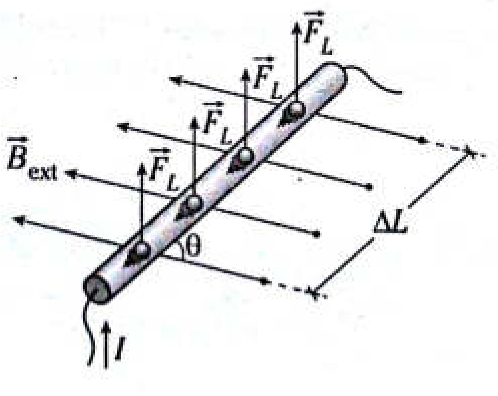
- Si las líneas del campo magnético son colineales al conductor, este no experimenta fuerza magnética. $(F_{mag}=0)$.



$$\boxed{F_{mag}=0}$$

2.2. FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UNA PARTÍCULA ELECTRIZADA EN MOVIMIENTO

Hemos visto que un conductor con corriente eléctrica, ubicado en un campo magnético externo, experimenta la acción de una fuerza magnética $(\vec{F}_{mag})$; pero la corriente eléctrica es un flujo de portadores de carga, entonces es posible deducir que la acción del campo magnético sobre el conductor es el resultado de la acción del campo sobre los portadores de carga en movimiento. Esta afirmación fue establecida por el físico holandés Hendrik A. Lorentz (1853-1928), por ello, a la fuerza que el campo magnético ejerce sobre un portador de carga en movimiento se le llama fuerza de Lorentz (F_L).



La fuerza magnética o fuerza de Lorentz sobre cada portador de carga se determina de la siguiente manera:

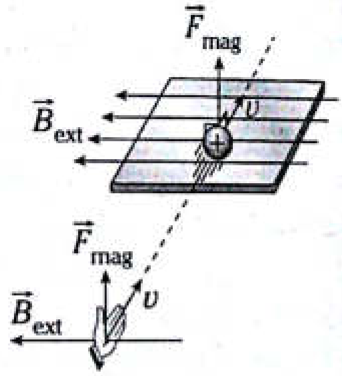
$$\boxed{F_{mag}=F_L=|q|\cdot B_{ext}\cdot V\cdot \text{sen}\theta}$$

donde

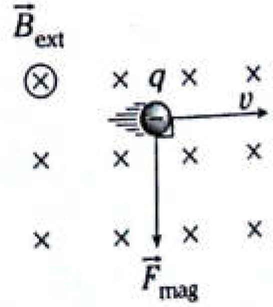
- q: cantidad de carga (C)
- V: rapidez (m/s)
- θ: ángulo que forma $\vec{V}$ y $\vec{B}_{ext}$

En relación a la fuerza magnética sobre una partícula electrizada en movimiento señalamos lo siguiente:

- Para determinar la dirección de la fuerza magnética sobre un portador de carga en movimiento, aplicamos de manera práctica la regla de la palma de la mano izquierda; pero debe tener presente que solo será válido si la partícula tiene carga eléctrica positiva (+).



- Si la partícula tiene carga negativa (–), la fuerza magnética $(\vec{F}_{mag})$ sobre ella tiene una dirección opuesta a la que tendría si la carga es positiva.

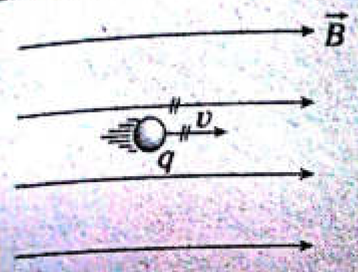


- Si la carga en movimiento se mueve en dirección perpendicular a las líneas de inducción (θ=90°), el módulo de la fuerza magnética será

$$\boxed{F_{mag}=|q|\cdot B_{ext}\cdot V}$$

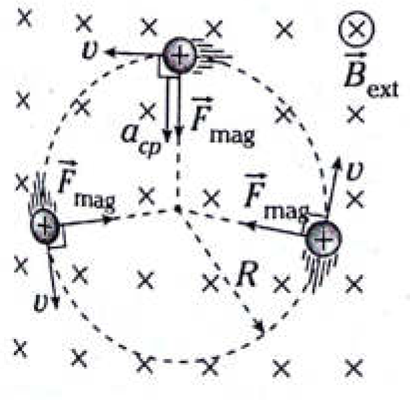
OBSERVACIÓN

De la expresión de la fuerza magnética podemos deducir que si la partícula se traslada colinealmente a las líneas del campo magnético ($\theta=0°$), la $\vec{F}_{mag}$ sobre dicha partícula es nula.



$$\vec{F}_{mag} = 0$$

- Si se lanza una partícula electrizada q con una velocidad $\vec{V}$ perpendicular a las líneas de un campo magnético homogéneo $(\vec{B})$ de forma tal que la partícula esté afectada únicamente por este campo, la fuerza magnética $(\vec{F}_{mag})$ y la velocidad $(\vec{V})$ siempre estarán en un plano perpendicular a $\vec{B}$. Por otro lado, la fuerza magnética $(\vec{F}_{mág})$ es perpendicular en todo momento a la velocidad y, por consiguiente, determina la aceleración centrípeta $(\vec{a}_{cp})$ de la partícula. Por lo planteado, la rapidez de la partícula se mantiene constante, esto hace que el módulo de la aceleración centrípeta y la fuerza magnética también se mantengan constantes, razón por la cual la trayectoria descrita por la partícula es una circunferencia de radio R.



De acuerdo a la segunda ley de Newton

$$F_{cp}=F_{mag}=m.a_{cp}$$

$$|q|\cdot V\cdot B_{ext}\cdot \text{sen}\,90°=m\cdot\frac{V^2}{R}$$

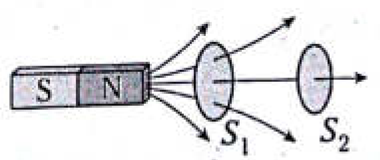
$$\boxed{R=\frac{m\cdot V}{|q|\cdot B_{ext}}}$$

3. Flujo magnético

El flujo magnético (Φ) es una magnitud escalar que caracteriza al campo magnético en una región del espacio donde se establece.

Geométricamente, el flujo magnético mide la cantidad de líneas del campo magnético que atraviesa una superficie determinada; es decir, si aumenta la cantidad de líneas que atraviesan una superficie, aumenta el flujo magnético.

A continuación, se muestra un imán y las líneas de inducción que representan el campo magnético que establece; además, se muestran dos superficies S_1 y S_2, ubicadas en el espacio donde se ha establecido el campo magnético. Notamos que la cantidad de líneas de inducción que pasan a través de la superficie S_1 es mayor que la cantidad de líneas que atraviesan la superficie S_2, entonces concluimos que el flujo magnético (Φ) a través de la superficie S_1 es mayor que a través de la superficie S_2.



$$\Phi_{S_1} > \Phi_{S_2}$$

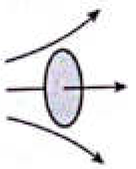
Si queremos cuantificar el flujo magnético, ¿de qué factores depende?

Veamos

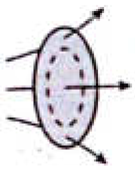
- Depende del número de líneas de inducción que atraviesan una superficie. A mayor número de líneas, mayor es el flujo magnético.

$$\Phi \text{ DP } B$$

- Si el área ($\mathbb{A}$) de una superficie aumenta, también aumenta el número de líneas que pasan a través de ella, entonces el flujo magnético aumenta.



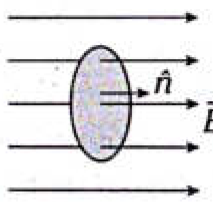
área inicial



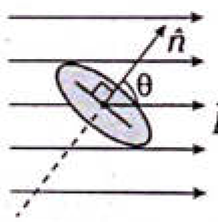
Al aumentar el área, aumenta el número de líneas que pasan a través de la superficie.

$$\Phi \text{ DP } \mathbb{A}$$

- El flujo magnético también depende del ángulo (θ) que forman las líneas de inducción con la normal ($\hat{n}$) a la superficie que atraviesan.



Existe un flujo inicial a través de la superficie.



El flujo magnético cambia al rotar la superficie un ángulo θ.

Por lo señalado, el flujo magnético (Φ) en un campo magnético homogéneo se determina de la siguiente manera:

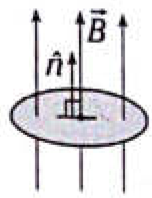
$$\boxed{\Phi = B\,\mathbb{A}\cos\theta}$$

donde

- B: inducción magnética (T)
- $\mathbb{A}$: área de la superficie (m^2)
- θ: ángulo que forman las líneas de inducción y la normal ($\hat{n}$) a la superficie

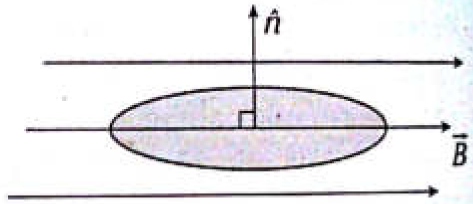
Respecto a la determinación del flujo magnético, tenemos lo siguiente:

- Si las líneas de inducción de un campo magnético homogéneo son perpendiculares a la superficie ($\theta=0°$), el flujo magnético es máximo.



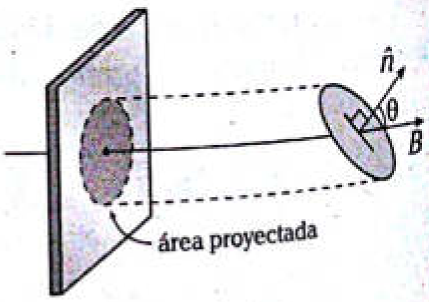
$$\boxed{\Phi = B\,\mathbb{A}}$$

- Si el número de líneas de inducción que atraviesan una superficie es nula ($\theta=90°$), el flujo magnético es cero.



$$\boxed{\Phi = 0}$$

- De la expresión del flujo magnético, debemos tener en cuenta que $A\cos\theta$ representa el área proyectada sobre una superficie plana perpendicular a las líneas de inducción magnética.



$$\Phi_S = B\,\underline{\mathbb{A}\cos\theta}$$

$$\boxed{\Phi_S = B \cdot \mathbb{A}_{proyectada}}$$

4. Inducción electromagnética

Fue Michael Faraday quien realizó, en agosto de 1831, el experimento que lo llevó a proponer el concepto de inducción electromagnética y a determinar los factores que rigen este fenómeno.

La inducción electromagnética encontró en poco tiempo numerosas aplicaciones, en el teléfono, los transformadores, los circuitos de corriente alterna, los generadores electromagnéticos, etc.

En otras palabras, el descubrimiento de la inducción electromagnética produjo una verdadera revolución tecnológica y un profundo cambio en las condiciones de vida del ser humano.

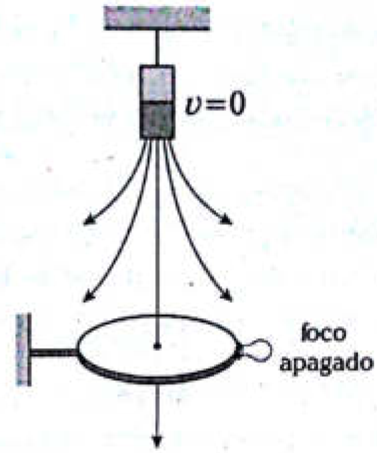
4.1. LEY DE FARADAY

Si la corriente eléctrica genera campos magnéticos, ¿por qué no a partir de un campo magnético generar corriente eléctrica?

Esta idea fue planteada por Faraday y luego de realizar una serie de experimentos, finalmente en el año 1831 logró generar por primera vez electricidad a partir de campos magnéticos. A este fenómeno se le denomina inducción electromagnética.

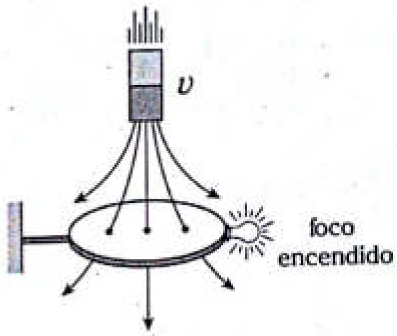
Veamos a continuación una experiencia sencilla que permite entender este hecho (aunque de esta manera no procedió Faraday, pero es un ejemplo más sencillo).

- Se ha realizado el siguiente montaje. Un imán se mantiene en reposo suspendido mediante una cuerda, por debajo se ubica una espira conductora fija a la cual se ha conectado una bombilla eléctrica (foco).



En las condiciones mostradas, notamos que el flujo magnético a través de la espira es constante (una sola línea de inducción pasa a través de la superficie que limita la espira), y el foco se mantiene apagado.

- Si cortamos la cuerda, el imán desciende y se acerca a la espira conductora.



En estas nuevas condiciones, notamos que el flujo magnético a través de la espira aumenta (más líneas pasan a través de la espira) y lo más asombroso es que el foco se enciende.
¿Cómo es posible que el foco se encienda?
La respuesta inmediata es que en la espira ha surgido una corriente eléctrica.

De la experiencia que hemos visto, deducimos que al acercarse la barra imantada a la espira conductora, el número de líneas de inducción a través de la espira aumenta y surge en esta una corriente eléctrica denominada corriente inducida.

En otras palabras, cuando varía el flujo magnético (Φ) que atraviesa la región que encierra la espira, se induce una corriente eléctrica.

También se deduce que al establecerse una corriente eléctrica en el circuito (espira), también se induce un voltaje; a esto se le llama **fuerza electromotriz inducida (ε_{ind})**.

Por otro lado, se comprueba que al acercar o alejar la barra imantada con mayor rapidez, se registra una mayor intensidad de corriente eléctrica; en otras palabras, al variar con mayor rapidez el flujo magnético (Φ) se induce una mayor fuerza electromotriz (ε_{ind}).

Matemáticamente, la ley de Faraday se expresa de la siguiente manera:

$$\varepsilon_{ind} = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right|$$

donde $\frac{d\Phi}{dt}$ es la rapidez con la cual cambia el flujo magnético.

Si el flujo magnético varía uniformemente, esta última expresión se puede plantear así:

$$\varepsilon_{ind} = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|$$

donde

$$|\Delta\Phi| = |\Phi_{final} - \Phi_{inicial}|$$

En el caso de que el circuito esté constituido por N espiras conductoras (en bobinas o solenoides), la fuerza electromotriz inducida quedará multiplicada por el factor N; luego

$$\varepsilon_{ind} = N\frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}$$

OBSERVACIÓN

En el caso más general, donde el flujo magnético (Φ) no varía uniformemente, la fuerza electromotriz inducida (ε_{ind}) calculada según la expresión anterior corresponde a la llamada fuerza electromotriz inducida media (ε_m).

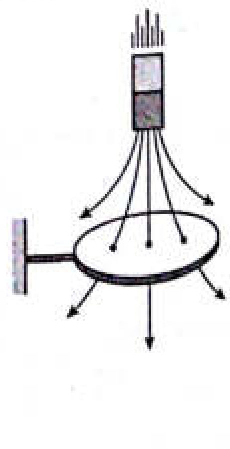
4.2. LEY DE LENZ

Fue planteada por Heinrich Lenz en 1831 y se fundamenta en la ley de conservación de la energía. Esta ley nos permite determinar el sentido de la corriente que se induce en un circuito. Esta ley establece que la corriente eléctrica que se induce en un circuito cerrado tiene un sentido tal que el campo magnético que este establece se opone a la variación del flujo magnético en el circuito.

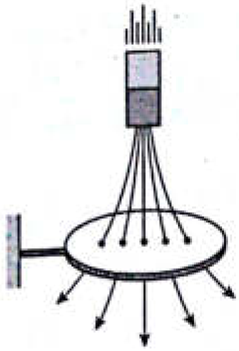
Dicho de otra manera, el campo magnético de la corriente inducida (campo magnético inducido) es la reacción que restaura el flujo magnético a través del circuito.

Veamos

- Para el instante mostrado, el imán desciende y en la superficie limitada por la espira ingresan 3 líneas de inducción.

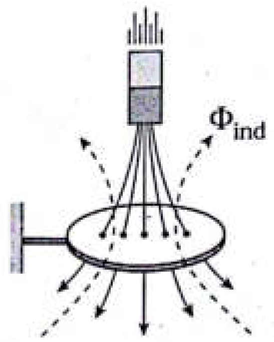


- El imán sigue descendiendo y se acerca más a la espira.



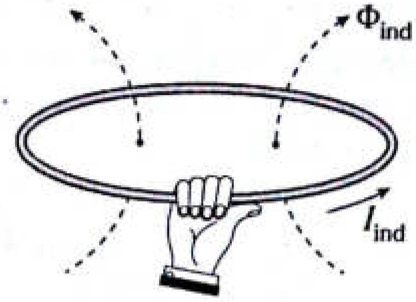
Se observa que el flujo magnético a través de la espira aumenta porque el número de líneas de inducción que pasa a través de la espira son 5, es decir, el flujo magnético está variando ($\Delta\Phi$).

- Esta variación de flujo implica una acción del imán sobre el anillo y esto genera una reacción del anillo sobre el imán que consiste en la inercia magnética, es decir, tiende a restaurar el estado inicial. Se genera un flujo inducido (Φ_{ind}), así:



El flujo neto es igual al estado inicial (ver figura inicial), es decir, si al inicio a través de la espira pasaban tres líneas de inducción, la espira busca (reacciona) que esta se mantenga.

- Conociendo la dirección del Φ_{ind} (reacción magnética), usamos la regla de la mano derecha y definimos el sentido de la corriente inducida (I_{ind}).



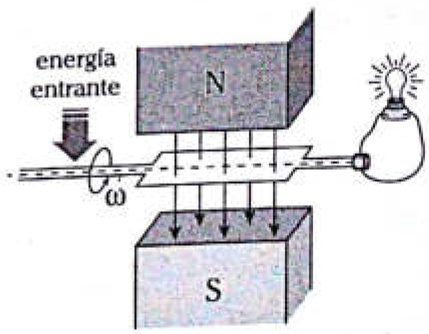
Finalmente, señalamos que el flujo magnético generado por la corriente eléctrica inducida debe oponerse a la variación del flujo magnético. Entonces la fuerza electromotriz inducida e instantánea se calculará de la siguiente manera:

$$\boxed{\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

5. Generador eléctrico

Es una máquina que transforma alguna forma de energía en energía eléctrica. En la actualidad predominan los generadores de corriente alterna (alternadores) debido a que permiten obtener corriente y tensiones eléctricas muy elevadas. Su funcionamiento se basa en el principio de inducción electromagnética.

El siguiente es un modelo simplificado de un generador de corriente alterna.



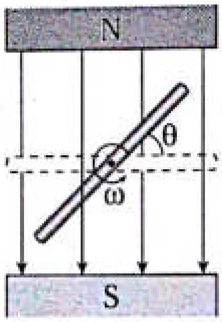
Mediante alguna forma de energía entrante (flujo de vapor, caídas de agua, entre otras) se hacen rotar las espiras, entonces el flujo magnético que atraviesa el área limitada por las espiras aumenta y disminuye, esto induce una corriente eléctrica en las espiras que es variable con el tiempo y permite que el foco se encienda.

Veamos

- La corriente inducida se debe a una fuerza electromotriz inducida, entonces por la ley de Faraday tenemos

$$\varepsilon=\left|\frac{d\Phi}{dt}\right|$$

- A medida que la espira gire, el flujo magnético varía. En un instante cualquiera t, el flujo magnético se obtiene de la siguiente manera:



$$\Phi=BA\cos\theta$$

Reemplazando la expresión del flujo magnético (Φ) en la expresión de la fuerza electromotriz (ε), tenemos

$$\varepsilon=\left|BA\frac{d(\cos\theta)}{dt}\right|$$

Como $\theta=\omega t$, se obtiene

$$\varepsilon=\left|BA\frac{d(\cos(\omega t))}{dt}\right|$$

Resolviendo la expresión obtenemos

$$\varepsilon=BA\omega\cdot\text{sen}(\omega t)$$

donde ω es la rapidez angular con la que rota la espira.

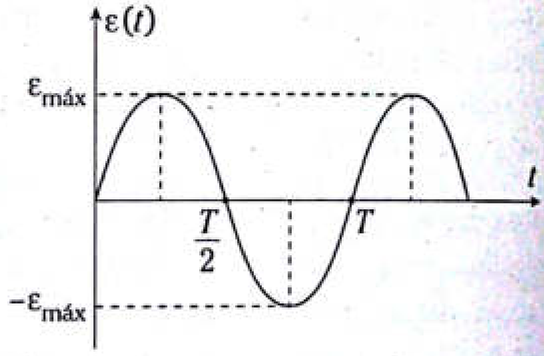
Resumiendo, la fuerza electromotriz producida por un generador de corriente alterna es de la forma siguiente:

$$\varepsilon_{(t)}=\varepsilon_{\text{máx}}\cdot\text{sen}(\omega t)$$

donde

- $\varepsilon_{\text{máx}}=BA\omega$
- $\omega=2\pi f=\dfrac{2\pi}{T}$

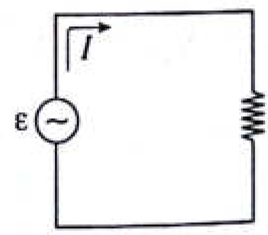
El comportamiento senoidal de la fuerza electromotriz (ε) es el siguiente:



6. Corriente alterna

Es aquella corriente eléctrica cuya intensidad y dirección varía con el tiempo, pero dependiendo de funciones armónicas (seno o coseno).

Si consideramos para el generador una carga netamente resistiva, la representación del circuito será



Cuando un circuito solo tiene resistores, las leyes de Ohm y de Kirchhoff se aplican tan igual como si se tratase de corriente continua.

Para el generador anterior, aplicando la ley de Ohm se obtiene

$$\varepsilon=IR$$

Para cualquier instante de tiempo, la intensidad de corriente es

$$I=\frac{\varepsilon}{R}$$

$$I=\frac{\varepsilon_{\text{máx}}.\text{sen}(\omega t)}{R}$$

Luego, la ecuación de la intensidad de la corriente alterna es la siguiente:

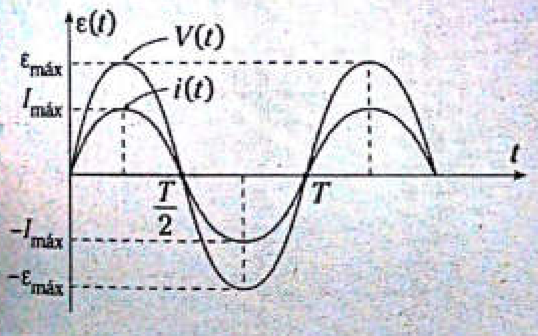
$$\boxed{I_{(t)}=I_{\text{máx}}\cdot\text{sen}(\omega t)}$$

donde

$$I_{\text{máx}}=\frac{\varepsilon_{\text{máx}}}{R}$$

Observación

Si se conecta una carga puramente resistiva a un generador, el voltaje y la intensidad de corriente estarán en fase.



6.1. Valor eficaz de la corriente alterna

La corriente eléctrica que llega a nuestro domicilio es corriente alterna, cuyo valor es variable en el tiempo como ya lo hemos explicado. Sin embargo, cuando medimos la tensión en los terminales de un tomacorriente, la lectura del voltímetro analógico o digital nos indica una lectura de 220 V. Esto ocurre porque los instrumentos de medición eléctrica no son capaces de oscilar al mismo ritmo de las elevadas frecuencias de corriente alterna, por ello los valores que nos indican son valores eficaces.

La corriente eficaz es la corriente equivalente (constante) con la cual se disipa la misma cantidad de calor que la que se disipa con corriente alterna. Experimentalmente, se obtiene que la cantidad de calor disipada con una corriente eficaz (I_{ef}) es la mitad de la disipada por la máxima intensidad de la corriente alterna ($I_{\text{máx}}$).

Es decir,

$$Q=0{,}24\left(I_{ef}\right)^2 Rt=\frac{1}{2}\left(0{,}24\left(I_{\text{máx}}\right)^2 Rt\right)$$

De donde se obtiene la expresión de la corriente eficaz (I_{ef}).

$$\boxed{I_{ef}=\frac{I_{\text{máx}}}{\sqrt{2}}}$$

Asimismo, se verifica que la expresión del voltaje eficaz (V_{ef}) es el siguiente:

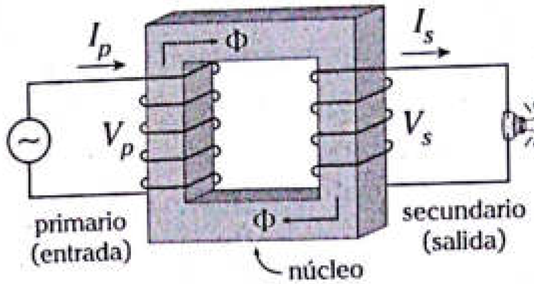
$$\boxed{V_{ef}=\frac{V_{\text{máx}}}{\sqrt{2}}}$$

Nota

Los instrumentos de medida en un circuito de corriente alterna nos indican los valores eficaces de voltaje y corriente eléctrica.

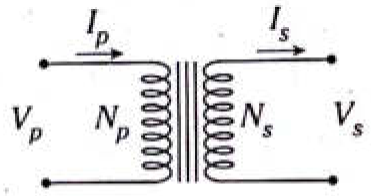
7. Transformador

Es aquel dispositivo que funciona con corriente alterna y que, mediante el fenómeno de inducción electromagnética, eleva o reduce el voltaje y la intensidad de corriente en los terminales de los arrollamientos primario y secundario. Estos arrollamientos están acoplados generalmente a un núcleo sólido o laminado de hierro o de acero, el cual sirve para intensificar el flujo magnético (confina las líneas del campo magnético que genera la corriente en el arrollamiento primario).



Debido a que la corriente de entrada es alterna, en el primario se establece un flujo magnético que es orientado por el núcleo hacia el secundario, donde se induce una corriente de acuerdo a la inducción electromagnética.

Esquema convencional de un transformador



donde

- N_p: número de vueltas en el primario
- N_s: número de vueltas en el secundario

De la ley de Faraday para la inducción electromagnética, se demuestra finalmente una relación entre los valores eficaces de las tensiones y el número de espiras tanto en el primario y secundario. Esta relación es la siguiente:

$$\boxed{\frac{V_p}{V_s}=\frac{N_p}{N_s}}$$

En los transformadores potentes modernos, las pérdidas totales de energía están en el orden del 2 %, de allí que para un transformador ideal se considera que las pérdidas son nulas y, por lo tanto, la potencia de entrada o primaria (P_{entrada}) es igual a la potencia de salida o secundaria (P_{salida}).

$$\boxed{P_{\text{entrada}}=P_{\text{salida}}}$$

De donde

$$V_p \cdot I_p=V_s \cdot I_s$$

Resumiendo lo señalado, se cumple

$$\boxed{\frac{V_p}{V_s}=\frac{I_s}{I_p}=\frac{N_p}{N_s}}$$

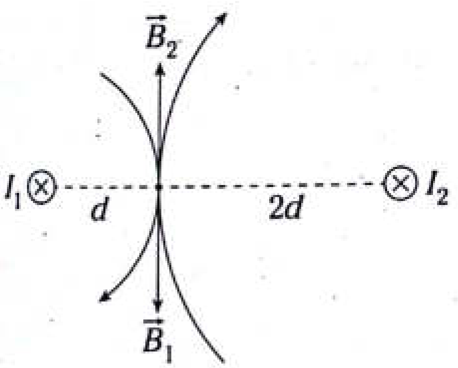
Problema N.º 1

En el gráfico, se muestra la sección transversal de dos conductores de gran longitud que llevan corriente I_1 e I_2, y que originan en P una inducción magnética nula. Determine $\frac{I_1}{I_2}$.

Resolución

Los conductores que llevan corriente establecen a su alrededor un campo magnético.

Graficamos las líneas de inducción de estos campos que pasan por P, para ello aplicamos la regla de la mano derecha; asimismo, los vectores inducción magnética $(\vec{B})$ generados por estos campos, que son tangentes a las líneas de inducción.



Por condición del problema, la inducción magnética resultante en P es nula, entonces se cumple lo siguiente:

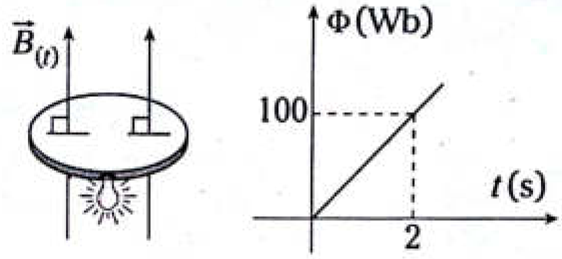
$$B_1 = B_2$$

$$\frac{\cancel{\mu_0} \cdot I_1}{\cancel{2\pi} d} = \frac{\cancel{\mu_0} \cdot I_2}{\cancel{2\pi}(2d)}$$

$$\therefore \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2}$$

Problema N.º 2

El flujo magnético a través de la región limitada por la espira circular varía de acuerdo a la gráfica que se muestra. Determine la intensidad de corriente que pasa por el foco de 100 Ω. Desprecie la resistencia de la espira.



Resolución

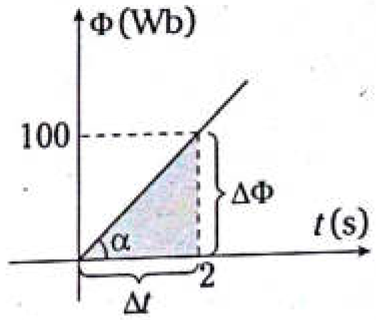
El flujo magnético variable induce una fuerza electromotriz (ε_{ind}) en la espira y se establece en esta una corriente eléctrica (i) que permite que el foco se encienda.

Aplicando la ley de Ohm tenemos

$$\varepsilon_{ind} = i \cdot R$$

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = i \cdot R \qquad (*)$$

Vamos al gráfico del flujo magnético (Φ).



Del gráfico tenemos

$$\tan\alpha = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

$$\frac{100}{2} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 50$$

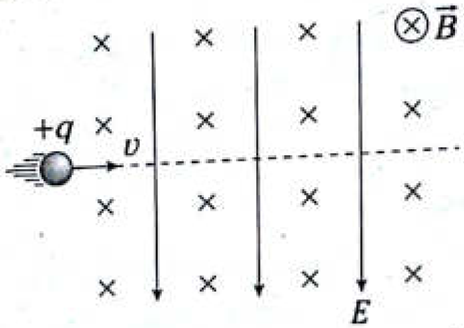
Reemplazamos en (*).

$$50 = i \cdot (100)$$

$$\therefore \quad i = 0{,}5\ \text{A}$$

Problema N.º 3

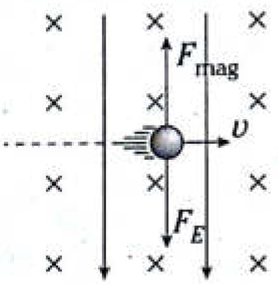
Una partícula electrizada ingresa en la dirección mostrada en la figura con rapidez de 2×10^4 m/s a una zona donde se tiene un campo compuesto eléctrico y magnético. Si el campo magnético es B=0,05 T y la partícula sigue una trayectoria rectilínea, encuentre (en kN/C) la intensidad del campo eléctrico E.



UNI 2017 - I

Resolución

Nos piden determinar la intensidad del campo eléctrico E (en kN/C). Graficamos las fuerzas que actúan sobre la partícula (despreciamos efectos gravitatorios). Para graficar la F_{mag}, nos apoyamos en la regla de la palma de la mano izquierda.



Como se mueve describiendo una trayectoria horizontal, la fuerza resultante vertical es cero, entonces el módulo de la fuerza eléctrica (F_E) y la fuerza magnética (F_{mag}) son iguales.

$$F_E=F_{mag}$$

$$\cancel{q}\cdot E=\cancel{q}\cdot \upsilon\cdot B\cdot \text{sen}90^\circ$$

$$E=\upsilon\cdot B$$

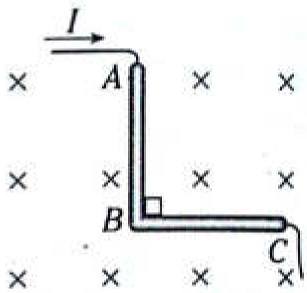
$$E=(2\times10^4\ \text{m/s})\cdot(0{,}05\ \text{T})$$

$$E=1000\ \text{N/C}$$

$$\therefore\ E=1\ \text{kN/C}$$

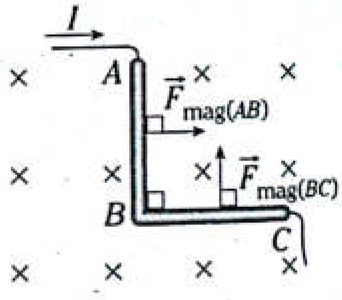
Problema N.º 4

El conductor mostrado lleva una corriente eléctrica de intensidad I=2 A. Determine el módulo de la fuerza magnética que experimenta por parte del campo magnético homogéneo de 5 T. (L_{AB}=40 cm; L_{BC}=30 cm)



Resolución

Para determinar la fuerza magnética sobre el conductor doblado, dividimos imaginariamente al conductor en dos tramos rectos y perpendiculares (tramo AB y tramo BC); seguidamente, graficamos la fuerza magnética sobre cada tramo de conductor, apoyándonos en la regla de la palma de la mano izquierda.



El módulo de las fuerzas magnéticas es el siguiente:

- $F_{mag(AB)}=BIL_{AB}\text{sen}90^\circ$

  $F_{mag(AB)}=(5)(2)(0{,}4)(1)$

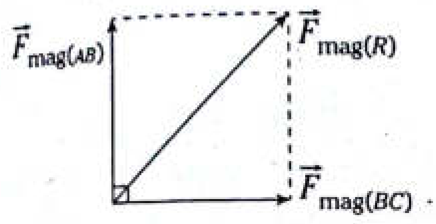
  $F_{mag(AB)}=4$ N

- $F_{mag(BC)}=BIL_{BC}\,\text{sen}90^\circ$

  $F_{mag(BC)}=(5)(2)(0{,}3)(1)$

  $F_{mag(BC)}=3$ N

El módulo de la fuerza resultante es el siguiente:



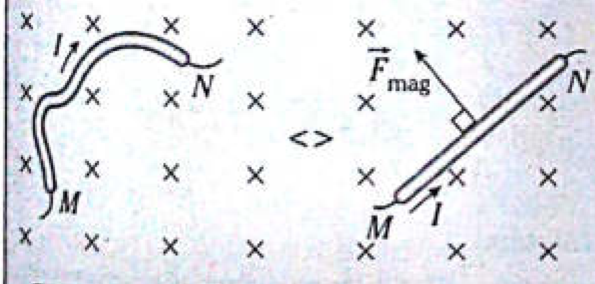
$$F_{mag(R)}=\sqrt{\left(F_{mag(AB)}\right)^2+\left(F_{mag(BC)}\right)^2}$$

$$F_{mag(R)}=\sqrt{(4)^2+(3)^2}$$

$$\therefore\quad F_{mag(R)}=5\text{ N}$$

Observación

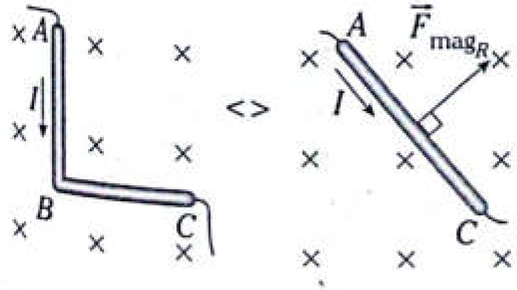
Si tenemos un conductor curvo que lleva corriente y se ubica en un campo magnético homogéneo de inducción B, la fuerza magnética sobre este conductor será igual a la fuerza magnética sobre un conductor rectilíneo (conductor equivalente) de longitud igual a la distancia entre los extremos (M) y (N) del conductor curvo.



$$F_{mag(curvo)}=F_{mag(rectilíneo)}=B\cdot I\cdot L_{MN}$$

Apliquemos la observación al problema que acabamos de ver.

Graficamos el conductor original y su equivalente.



Determinamos el valor de la fuerza magnética sobre el conductor equivalente.

$$F_{mag}=B\cdot I\cdot L_{AC}$$

$$F_{mag}=(5)\cdot(2)\cdot(0{,}5)$$

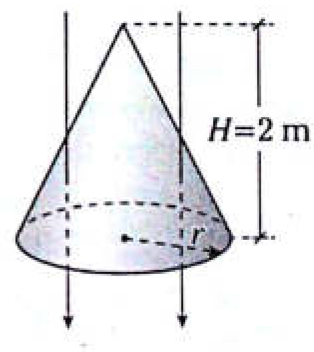
$$\therefore\quad F_{mag}=5\text{ N}$$

Problema N.° 5

Considera un cono de 2 m de altura y base circular de 1 m de radio, que no encierra fuentes magnéticas, y un campo magnético externo uniforme de 0,5 T que sigue la dirección del eje del cono, y cuya dirección va del vértice a la base del cono. Determine el flujo magnético neto a través del cono y el flujo magnético que entra al cono.

Resolución

Llevamos a un gráfico el enunciado del problema.



- En este caso, el flujo magnético neto (Φ_{neto}) a través de la superficie del cono es cero porque la superficie es cerrada.

$$\therefore\quad \Phi_{neto}=0$$

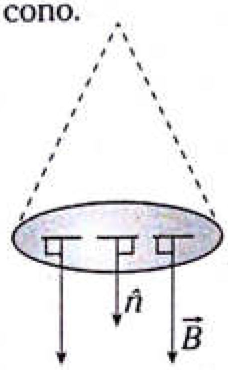
- También se sabe que el flujo neto es igual a la suma del flujo magnético entrante y el flujo magnético saliente.

$$\Phi_{neto}=\Phi_{ent}+\Phi_{sal}$$

$$0=\Phi_{ent}+\Phi_{sal}$$

$$\Phi_{ent}=-\Phi_{sal}\qquad(*)$$

El flujo magnético saliente se da a través de la base del cono.



Luego

$\Phi_{sal}=BA_{base}\cos\theta$

$\Phi_{sal}=B(\pi r^2)\cos\theta$

$\Phi_{sal}=0{,}5\cdot(\pi(1)^2)\cdot\cos 0°$

$\Phi_{sal}=\dfrac{\pi}{2}$

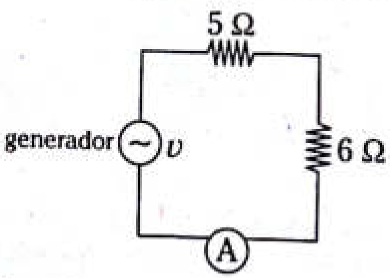
$\Phi_{sal}=1{,}57$ Wb

Finalmente, reemplazamos en (*).

$\therefore\ \Phi_{ent}=-1{,}57$ Wb

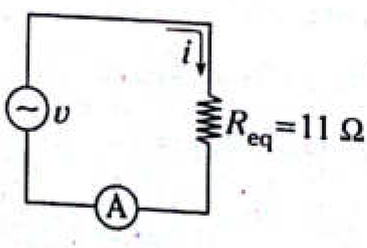
Problema N.° 6

En el circuito eléctrico mostrado, la tensión en los terminales del generador es $v=110\sqrt{2}\,\text{sen}(120\pi t)$. Determine la intensidad de corriente que pasa a través del resistor de 5 Ω y la lectura del amperímetro.



Resolución

- En nuestro caso, la intensidad de corriente (i) que fluye a través del resistor de 5 Ω es la misma que fluye a través del resistor de 6 Ω (resistores en serie). Luego, reduciendo el circuito tenemos



De donde

$$i=\frac{v}{R_{Eq}} \rightarrow i=\frac{110\sqrt{2}\,\text{sen}(120\pi t)}{11\,\Omega}$$

$$\therefore\ i=10\sqrt{2}\,\text{sen}(120\pi t)$$

- La lectura del amperímetro indica la corriente eficaz (I_{ef}) en el circuito.

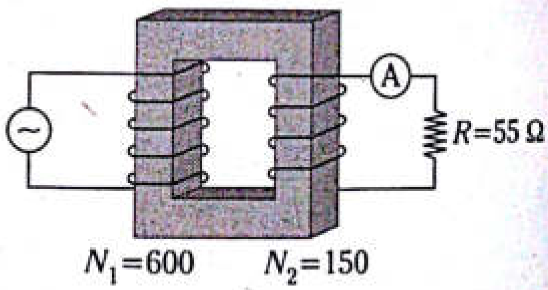
$$I_{ef}=\frac{I_{máx}}{\sqrt{2}}$$

$$I_{ef}=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ I_{ef}=10\text{ A}$$

Problema N.° 7

Se muestra un transformador ideal donde la lectura del amperímetro es 1A. Si la frecuencia de la corriente a través del resistor R es de 60 Hz, determine el voltaje de la fuente alterna senoidal en el primario.



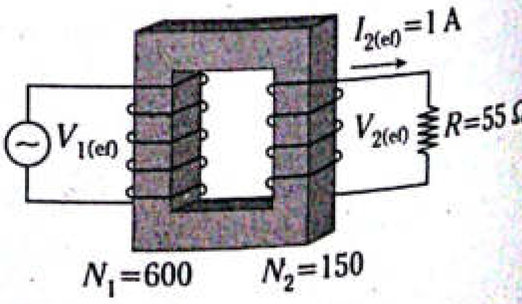
Resolución

La expresión de la tensión en el primario es

$v_1=V_{1(máx)}\text{sen}(\omega t)$

$v_1=V_{1(máx)}\text{sen}(2\pi f t)$ (I)

La lectura del amperímetro es la intensidad de corriente eficaz en el secundario del transformador, entonces $I_{2(ef)}=1$ A.



En el secundario del transformador, se cumple la ley de Ohm.

$$V_{2(ef)}=I_{2(ef)}\cdot R$$

$$V_{2(ef)}=(1\text{A})(55\ \Omega)$$

$$V_{2(ef)}=55\text{ V}$$

Como el transformador es ideal (no hay pérdida de energía), se cumple la siguiente relación:

$$\frac{V_{1(ef)}}{V_{2(ef)}}=\frac{N_1}{N_2}$$

$$\frac{V_{1(ef)}}{55}=\frac{600}{150}$$

$$V_{1(ef)}=220\text{ V}$$

Debido a que el voltaje en el primario es senoidal, el voltaje eficaz en el primario ($V_{1(ef)}$) es igual a la siguiente expresión:

$$V_{1(ef)}=\frac{V_{1(máx)}}{\sqrt{2}}$$

En donde

$$V_{1(máx)}=\sqrt{2}\cdot V_{1(ef)}$$

$$V_{1(máx)}=220\sqrt{2}\ V \qquad \text{(II)}$$

Por otro lado, la frecuencia (f) de la intensidad de corriente y voltaje en el primario y secundario son iguales.

$$f=60\text{ Hz} \qquad \text{(III)}$$

Finalmente, reemplazamos (II) y (III) en (I).

$$v_1=220\sqrt{2}\,\text{sen}(2\pi(60)t)$$

$$\therefore\ v_1=220\sqrt{2}\,\text{sen}(120\pi t)$$

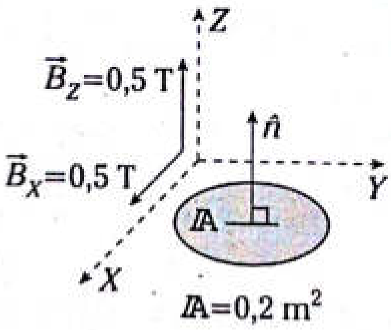
Problema N.º 8

Por una región circular contenida en el plano X-Y, de área 0,2 m^2 pasa el campo magnético $\vec{B}=0,5(\hat{\imath}+\hat{k})$ T. Halle el flujo magnético en Wb que pasa por la región circular.

UNI 2016-II

Resolución

Trasladamos a un gráfico el enunciado del problema.



El vector $\vec{B}$ tiene dos componentes, una que es paralela al eje $X(\vec{B}_X)$ y otra que es paralela al eje $Z(\vec{B}_Z)$; ambas componentes tienen el mismo valor de 0,5 T.

Nos piden el flujo magnético que pasa por la región circular. Este flujo magnético es igual a la suma de los flujos producidos por los componentes de $\vec{B}$ del campo magnético.

$$\Phi=\Phi_{B_X}+\Phi_{B_Z}$$

Pero el flujo magnético producido por la componente $\vec{B}_X$ es cero $(\Phi_{B_X}=0)$ debido a que este vector no pasa a través de la superficie (forma un ángulo de 90° con la normal $\hat{n}$ a la superficie). Luego tenemos

$$\Phi=\Phi_{B_Z}$$

$$\Phi=B_Z\cdot A\cdot\cos\theta$$

$$\Phi=(0,5\text{ T})(0,2\text{ m}^2)(1)$$

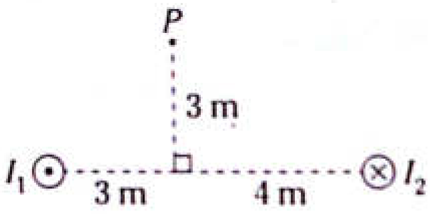
$$\therefore\ \Phi=0,1\text{ Wb}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

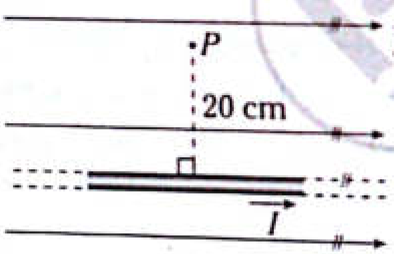
NIVEL BÁSICO

1. Se muestra la sección transversal de dos conductores de gran longitud y paralelos. Si el vector inducción magnética en P es vertical, determine I_1. (I_2=25 A).

A) 12 A
B) 6 A
C) 24 A
D) 9 A
E) 18 A

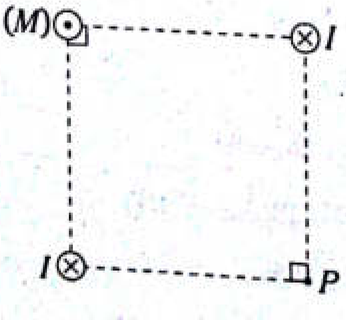


2. El conductor de gran longitud que lleva una corriente I=10 A se ubica en una región donde se ha establecido un campo magnético homogéneo B=7,5 μT. Determine la inducción magnética en el punto P.



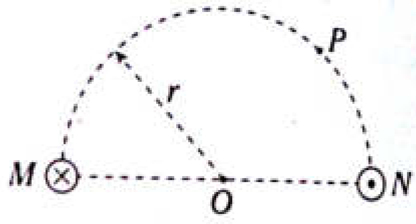
A) 10 μT
B) 12,5 μT
C) 15 μT
D) 5 μT
E) 18 μT

3. En tres de los vértices del cuadrado que se muestra, se observa la sección transversal de conductores paralelos de gran longitud. Determine la intensidad de corriente que debe salir en forma perpendicular al cuadrado por el conductor (M) para que la inducción magnética en el vértice P sea nula.



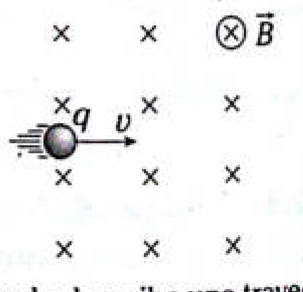
A) I
B) $2I$
C) $4I$
D) $I/2$
E) $I/4$

4. En el gráfico, se muestra la sección transversal de dos conductores de gran longitud que originan en P una inducción magnética B_P=100 μT. Si la intensidad de corriente que transporta el conductor M es 160 A, determine la intensidad de corriente en el conductor N si este dista 30 cm del punto P. (r=25 cm)



A) 45 A
B) 50 A
C) 90 A
D) 180 A
E) 60 A

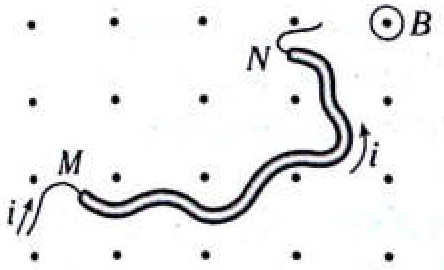
5. Una partícula electrizada con carga negativa (q) ingresa perpendicularmente a las líneas de inducción de un campo magnético homogéneo, que se ha establecido en una región. Si despreciamos efectos gravitatorios, señale la secuencia correcta de verdadero (V) o falso (F) según corresponda.



I. La partícula describe una trayectoria circunferencial en sentido horario.
II. La partícula describe una trayectoria circunferencial en sentido antihorario.
III. La partícula describe una trayectoria circunferencial de radio $R=\frac{mv}{qB}$.

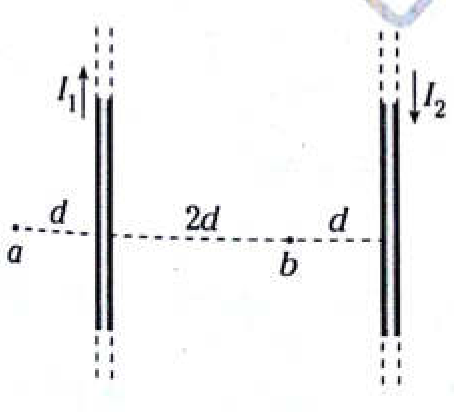
A) VFV
B) FVV
C) VFF
D) FVF
E) VVV

6. La barra curvilínea que se muestra lleva una corriente eléctrica $i=10$ A y se ubica en forma perpendicular a las líneas de inducción del campo magnético ($B=5$ T). Determine la fuerza magnética resultante sobre la barra ($\overline{MN}=20$ cm).



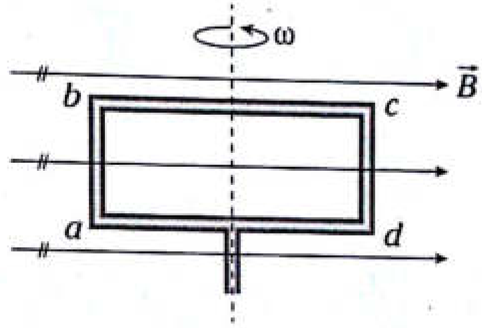
A) 2 N
B) 4 N
C) 5 N
D) 10 N
E) 20 N

7. Se tiene dos alambres paralelos, muy largos, que transportan corriente I_1 e I_2, respectivamente. Si la inducción magnética en a y b son de igual módulo, determine la relación I_1/I_2.



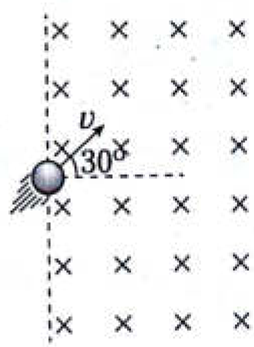
A) 3/4 B) 2/5 C) 5/2
D) 2/7 E) 2/3

8. Una bobina rectangular de 100 espiras está dentro de un campo magnético uniforme de 0,4 T. El plano de la bobina es paralelo a la dirección del campo magnético. Determine la intensidad de la corriente eléctrica que circula por la bobina si el valor del torque sobre esta es 27 N·m. ($ab=cd=15$ cm, $ad=bc=18$ cm).



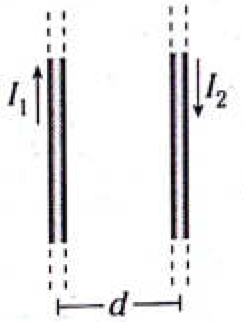
A) 2,5 A B) 5 A C) 25 A
D) 50 A E) 75 A

9. Una partícula electrizada con −100 μC y de 0,1 g de masa ingresa tal como se muestra a una región donde existe un campo magnético uniforme de 2 T con una rapidez de 2 m/s. ¿Cuál es la distancia entre el punto de ingreso y el punto en el que abandona la región?



A) $\sqrt{3}$ m B) 2 m C) 4 m
D) 1 m E) $2\sqrt{3}$ m

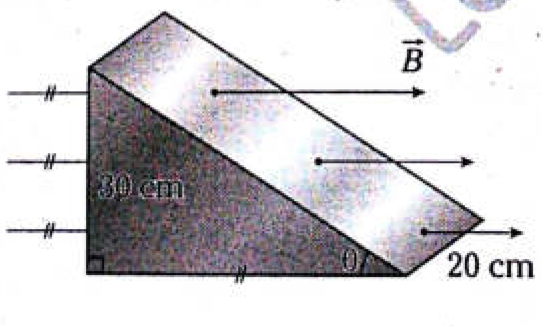
10. Se tienen dos conductores rectilíneos muy largos y paralelos que transportan corriente eléctrica de intensidad I_1 e I_2, respectivamente. Si los conductores están separados una distancia d, determine el módulo de la fuerza por unidad de longitud entre los conductores.



A) $\dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi d}$ B) $\dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$ C) $\dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi d}$

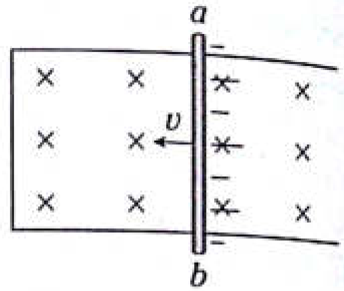
D) $\dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{8\pi d}$ E) $\dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{16\pi d}$

11. Se tiene un cuerpo en forma de cuña que se ubica en una región donde se ha establecido un campo magnético homogéneo $(\vec{B} = 10\ \text{T})$. Si las líneas de inducción son paralelas a la base por donde se apoya la cuña, determine el flujo magnético saliente.



A) 0,3 Wb B) −0,3 Wb C) 0,6 Wb
D) −0,6 Wb E) 0,4 Wb

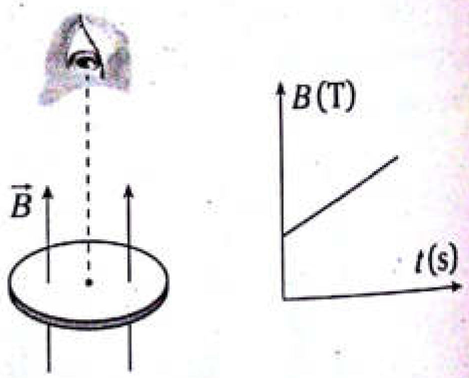
12. La barra conductora es desplazada sobre alambres conductores, tal como se muestra. Respecto a la corriente inducida en la barra, indique la secuencia correcta de verdadero (V) o falso (F) según corresponda.



I. No se induce corriente.
II. Se dirige de a hacia b.
III. Se dirige de b hacia a.

A) FVV
B) FVF
C) FFV
D) VVF
E) VFV

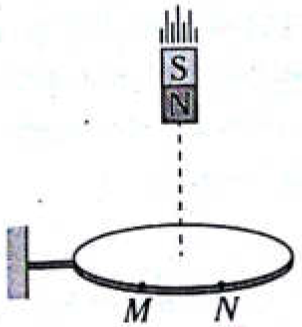
13. La inducción magnética a través de la espira varía con el tiempo de acuerdo a la gráfica indicada. Con respecto a las siguientes proposiciones, indique la secuencia correcta de verdadero (V) o falso (F).



I. El flujo magnético a través de la espira disminuye.
II. Para el observador, se induce corriente en sentido horario.
III. Para el observador, se induce corriente eléctrica en sentido antihorario.

A) VVV B) VFV C) VVF
D) FVF E) FFV

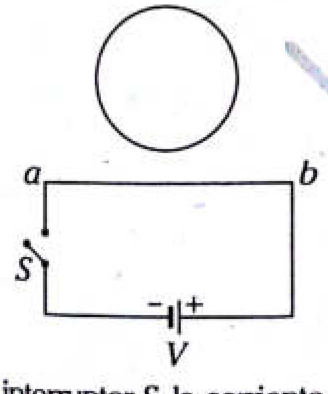
14. La espira conductora se mantiene fija y el imán desciende como se muestra. Respecto a ello, indique la secuencia correcta de verdadero (V) o falso (F).



I. La corriente inducida en la espira fluye de M a N.
II. Entre el imán y la espira existe atracción magnética.
III. El valor de la aceleración del imán se mantiene constante.

A) VVV B) VFV C) FFF
D) FVF E) VFF

15. Por encima del conductor a–b, y en un mismo plano, está situada una espira conductora.

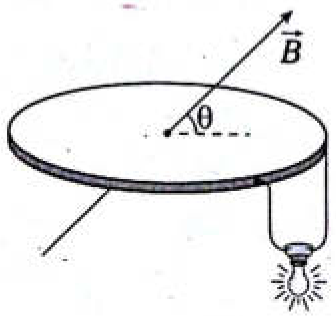


Al cerrar el interruptor S, la corriente en la espira es

I. nula.
II. horaria.
III. antihoraria.

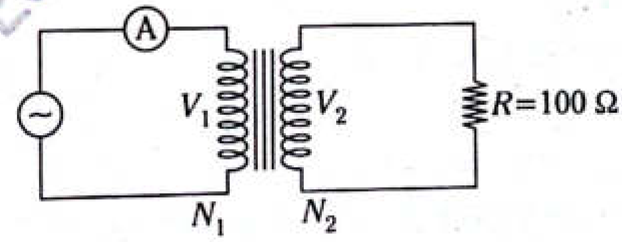
A) I, II y III B) I y II C) solo III
D) solo I E) solo II

16. Debido al campo magnético variable a través de la bobina, se induce en esta una corriente eléctrica $i = 2\sqrt{2}\text{sen}(10t)$. Si la intensidad de corriente está expresada en amperios, determine la lectura del voltímetro conectado entre los terminales del foco de 10 Ω.



A) 5 V B) $10\sqrt{2}$ V C) 10 V
D) $20\sqrt{2}$ V E) 20 V

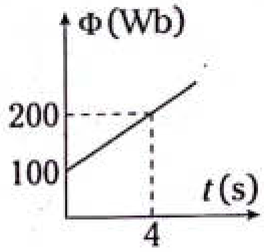
17. En el circuito eléctrico mostrado, la lectura del amperímetro es 4 A. Si la relación de transformación es $\frac{N_1}{N_2} = 4$, indique la secuencia correcta de verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

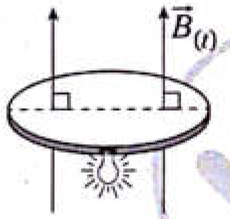


I. Un amperímetro conectado en serie con el resistor en el secundario indica una lectura de 1 A.
II. La potencia en el primario y secundario del transformador son iguales.
III. El valor eficaz de la caída de tensión en el resistor es de 400 V.

A) FVF
B) FFV
C) VVV
D) VVF
E) FVV

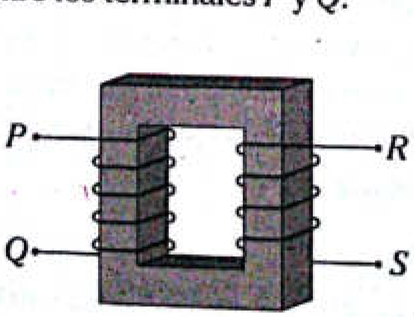
18. El flujo magnético a través de la región limitada por la espira circular varía de acuerdo a la gráfica que se muestra. Determine la resistencia del foco si la intensidad de corriente que pasa por este es de 2,5 A. Desprecie la resistencia de la espira.





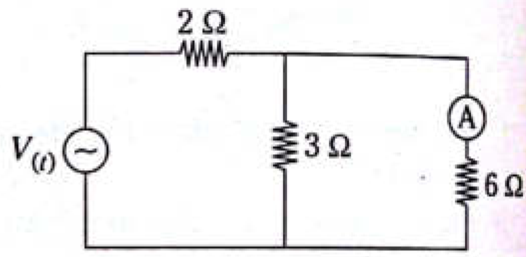
A) 2 Ω   B) 5 Ω   C) 10 Ω
D) 12 Ω   E) 20 Ω

19. Se conecta entre los terminales P y Q del transformador, un voltaje alterno de 200 V; y se establece entre los terminales R y S, un voltaje de 10 V. Si queremos que en los terminales R y S se establezca un voltaje de 25 V, determine el voltaje que debe conectarse entre los terminales P y Q.



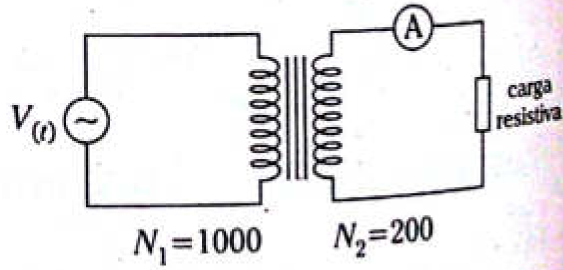
A) 50 V
B) 100 V
C) 400 V
D) 500 V
E) 250 V

20. En el circuito eléctrico mostrado, determine la lectura del amperímetro si el voltaje alterno en la fuente expresada en voltios es $V_{(t)} = 60\sqrt{2}\,\text{sen}(377t)$.



A) 2 A
B) 5 A
C) $6\sqrt{2}$ A
D) 10 A
E) $10\sqrt{2}$ A

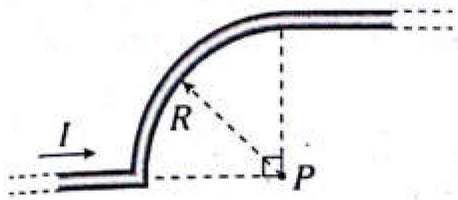
21. El voltaje en el generador es
$V_{(t)} = 220\sqrt{2}\,\text{sen}(120\pi t)$
y está expresado en voltios. Determine la lectura del amperímetro si la carga resistiva es de 100 Ω.



A) 0,11 A
B) 0,22 A
C) 0,55 A
D) 0,44 A
E) 0,6 A

NIVEL INTERMEDIO

22. El conductor que se muestra se ubica en un plano y lleva una intensidad de corriente I=40 A. Determine el módulo de la inducción magnética en P. (R=20 cm).

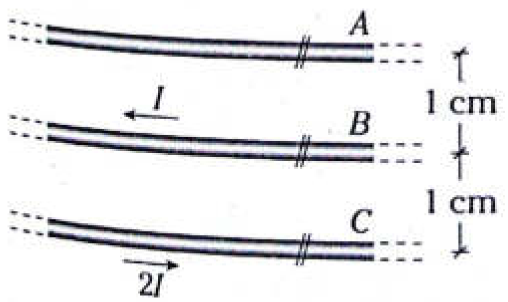


A) $10(\pi+2)$ μT
B) $5(\pi+1)$ μT
C) $20(\pi+4)$ μT
D) $10(\pi+1)$ μT
E) $5(\pi+4)$ μT

23. Dos conductores rectilíneos de gran longitud, paralelos y separados 0,4 m, transportan corriente eléctrica de intensidad I_1=20 A e I_2=10 A en sentidos opuestos. Determine el módulo de la inducción magnética $\vec{B}$ en el punto medio de la recta perpendicular a dichos conductores.

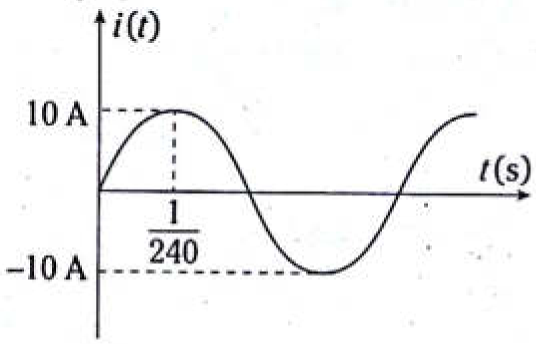
A) 5 μT B) 10 μT C) 20 μT
D) 30 μT E) 60 μT

24. Los conductores A y C están fijos, mientras que B es libre de moverse. Determine la intensidad de la corriente que debe circular por el conductor A, de modo que B permanezca en equilibrio. Se sabe que este último conductor tiene una densidad lineal de masa de 0,1 kg/m. (I=100 A; g=10 m/s).



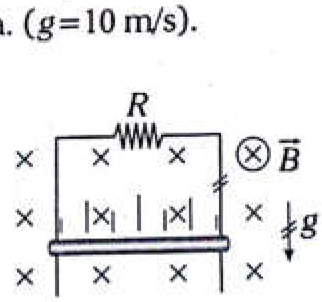
A) 100 A B) 200 A C) 300 A
D) 400 A E) 500 A

25. La corriente eléctrica que pasa a través de un resistor de 20 Ω varía según la gráfica. Determine la expresión del voltaje a través del resistor expresado en voltios.



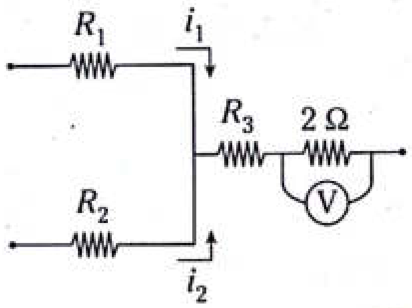
A) $200\text{sen}(120\pi t)$
B) $0{,}5\text{sen}(60\pi t)$
C) $50\text{sen}(240\pi t)$
D) $400\text{sen}(240\,\pi t)$
E) $200\text{sen}(60\pi t)$

26. Una barra de cobre desciende a velocidad constante por las varillas lisas conductoras separadas 1 m entre sí. El resistor de 2 Ω disipa 8 W. Determine la rapidez y la masa de la barra. El campo magnético homogéneo es de 0,8 T. Desprecie la resistencia eléctrica de la barra. (g=10 m/s).



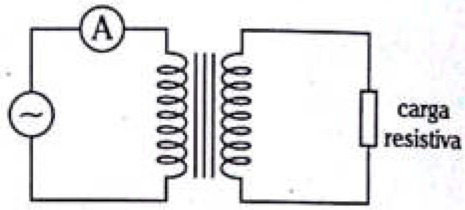
A) 5 m/s; 0,16 kg
B) 2,5 m/s; 0,8 kg
C) 10 m/s; 0,16 kg
D) 5 m/s; 0,8 kg
E) 2,5 m/s; 0,16 kg

27. Se muestra parte de un circuito resistivo donde se ha establecido una corriente eléctrica de frecuencia 60 Hz. Si la corriente eficaz a través del resistor R_1 es 2 A y la lectura del voltímetro es 12 V, determine la expresión de la corriente eléctrica a través del resistor R_2 expresado en amperios.



A) $4\text{sen}(120\pi t)$
B) $2\sqrt{2}\,\text{sen}(60\pi t)$
C) $4\sqrt{2}\,\text{sen}(120\pi t)$
D) $8\text{sen}(240\pi t)$
E) $8\sqrt{2}\,\text{sen}(60\pi t)$

28. El transformador tiene una eficiencia del 50%. Si la carga resistiva en el secundario está consumiendo 220 W, determine el voltaje máximo en el primario si la lectura del amperímetro es 4 A.



A) 55 V
B) $55\sqrt{2}$ V
C) 110 V
D) $110\sqrt{2}$ V
E) 220 V

Ondas electromagnéticas

Capítulo XIX

Objetivos

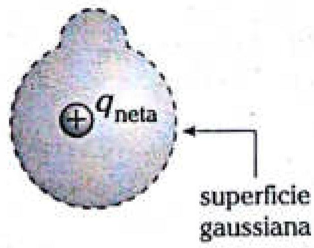
- Conocer y entender las leyes de Maxwell.
- Definir qué es una onda electromagnética y cómo se genera.
- Conocer las características de una onda electromagnética, su representación geométrica y las funciones matemáticas que la gobiernan.

1. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell son consideradas la base de todos los fenómenos electromagnéticos porque resumen sus principios básicos. Estas ecuaciones relacionan los campos eléctricos y magnéticos con sus fuentes; sin embargo, las expresiones de las ecuaciones requieren de matemática superior, pero en nuestro caso enunciaremos estas ecuaciones en su forma más sencilla tomando en cuenta nuestros conocimientos previos.

1.1. Primera ecuación de Maxwell

Esta ecuación expresa la ley de Gauss para campos eléctricos y se enuncia de la siguiente manera: El número de líneas de fuerza que pasan a través de una superficie cerrada (flujo eléctrico Φ_{EL}) es igual a la cantidad de carga eléctrica neta (q_{neta}) encerrada por la superficie y dividida entre la permitividad eléctrica ε_0.



$$\boxed{\Phi_{EL} = \frac{q_{neta}}{\varepsilon_0}}$$

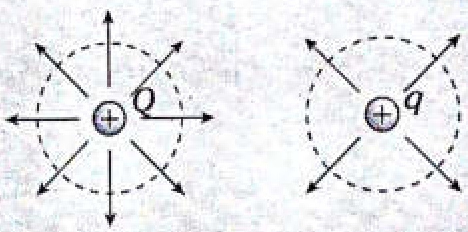
donde

- q_{neta}: carga eléctrica neta
- ε_0: permitividad o constante eléctrica

A la superficie que encierra a la carga se le denomina superficie gaussiana.

NOTA

Vamos a considerar que tenemos dos partículas electrizadas con cantidades de carga eléctrica Q y q. Luego, representamos los campos eléctricos que generan estas partículas mediante líneas de fuerza y trazamos una superficie gaussiana a su alrededor.



Si el flujo eléctrico (Φ_{EL}) nos indica la cantidad de líneas de fuerza que pasan a través de la superficie, entonces, siendo n_1 y n_2 la cantidad de líneas que pasan a través de la superficie que encierran a Q y q respectivamente, tenemos lo siguiente:

- $\Phi_{ELQ}=n_1$

$$\frac{Q}{\varepsilon_0}=n_1 \qquad \text{(I)}$$

- $\Phi_{ELq}=n_2$

$$\frac{q}{\varepsilon_0}=n_2 \qquad \text{(II)}$$

Dividiendo (I) y (II) se obtiene

$$\boxed{\frac{Q}{q}=\frac{n_1}{n_2}}$$

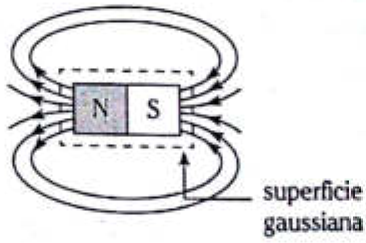
El resultado nos indica que la cantidad de líneas de fuerza que representan a un campo eléctrico es proporcional a la cantidad de carga eléctrica que genera dicho campo.

1.2. SEGUNDA ECUACIÓN DE MAXWELL

En el capítulo visto anteriormente con relación al magnetismo, se señaló que si dividimos un imán en dos partes, obteníamos dos imanes; es decir, no se puede obtener un polo norte separado del polo sur (monopolos magnéticos). Es justamente la segunda ecuación de Maxwell, que expresa la ley de Gauss para campos magnéticos, que demuestra la inexistencia de monopolos magnéticos, y se enuncia de la siguiente manera: El número de líneas de inducción que pasan a través de una superficie cerrada (flujo magnético) es igual a cero.

Lo anterior indica que si en una región del espacio, donde se ha establecido un campo magnético, trazamos una superficie cerrada, el número de líneas de inducción que ingresan y salen de la superficie es igual.

Gráficamente tenemos lo siguiente:

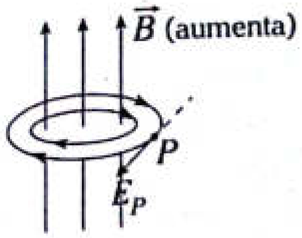


$$\boxed{\Phi=0}$$

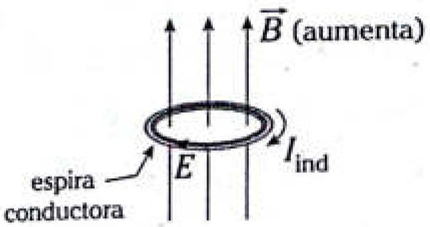
1.3. TERCERA ECUACIÓN DE MAXWELL

Esta ecuación expresa la ley de inducción de Faraday en un sentido más amplio, y se enuncia de la siguiente manera: Un campo magnético variable en cierta región del espacio induce en este un campo eléctrico.

Por lo planteado y de la ley de Faraday se deduce que un campo magnético variable induce un campo eléctrico rotacional y ambos son mutuamente perpendiculares.



Si una espira conductora se ubica en la región donde el campo magnético es variable, el campo eléctrico rotacional que se induce arrastra a los portadores de carga de la espira y se establece en esta una corriente eléctrica a la cual denominamos corriente inducida (I_{ind}).

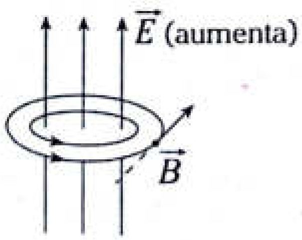


1.4. CUARTA ECUACIÓN DE MAXWELL

Esta ecuación expresa la ley de Ampere ampliada y se enuncia de la siguiente manera: Un campo eléctrico variable en cierta región del espacio induce en este un campo magnético.

Decimos que esta ecuación representa la ley de Ampere ampliada porque plantea que el campo magnético se crea por una corriente eléctrica y un campo eléctrico variable.

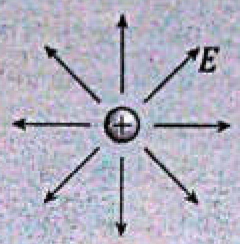
El campo eléctrico variable induce un campo magnético rotacional y perpendicular al campo inductor.



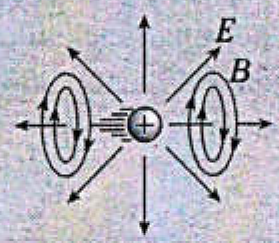
OBSERVACIÓN

De las ecuaciones de Maxwell se deduce lo siguiente:

- **Una partícula electrizada en reposo solo establece en su entorno un campo eléctrico.**



- Una partícula electrizada en movimiento con velocidad constante establece en su entorno un campo eléctrico y un campo magnético.

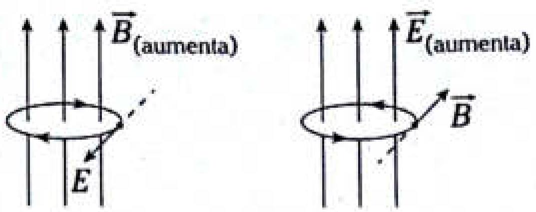


- De las ecuaciones de Maxwell también se puede demostrar que una partícula electrizada, que experimenta un movimiento acelerado, genera ondas electromagnéticas.

2. Ondas electromagnéticas

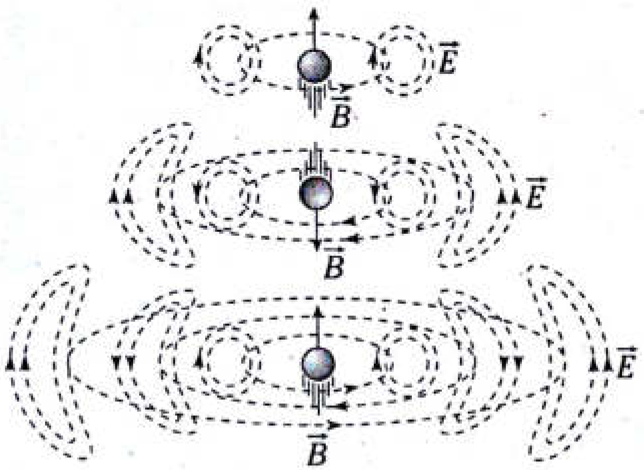
Se conoce que las formas de comunicación inalámbricas son posibles gracias a las ondas electromagnéticas. Veamos su forma de generación antes de señalar lo que son.

De acuerdo a las ecuaciones de Maxwell, vistas anteriormente, un campo magnético variable establece un campo eléctrico (tercera ecuación), y un campo eléctrico variable establece un campo magnético (cuarta ecuación).



Por otro lado, se conoce que una partícula electrizada en movimiento con velocidad constante establece en su entorno un campo magnético; sin embargo, si la partícula electrizada acelera el campo magnético que genera, se perturba, originándose un campo variable.

Por lo antes señalado, el campo magnético variable que establece la partícula acelerada induce un campo eléctrico variable, y este a su vez induce un campo magnético variable, y así sucesivamente se van induciendo los campos por la perturbación o variación que experimentan.



La perturbación o variación de los campos se va propagando y se manifiesta como la inducción alternada de campos eléctricos y magnéticos. A la propagación de la perturbación de los campos se le denomina onda electromagnética (OEM).

2.1. DEFINICIÓN

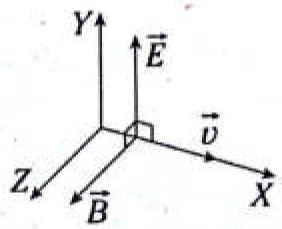
Una onda electromagnética se define como la propagación de la perturbación de los campos eléctrico y magnético que se inducen mutuamente.

OBSERVACIÓN

Las ondas electromagnéticas se generan por la aceleración u oscilación de partículas electrizadas.

2.2. CARACTERÍSTICAS

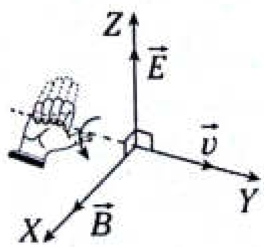
a. Las OEM son transversales, ya que en cualquier punto de la onda el campo eléctrico es perpendicular al campo magnético, y ambos oscilan perpendicularmente a la dirección de propagación de la onda.



b. La dirección de propagación de las OEM coincide con la dirección del producto vectorial $\vec{E}\times\vec{B}$.

En forma práctica, la dirección de propagación de la onda se determina aplicando la regla de la palma de la mano derecha, que consiste en lo siguiente:

- Extendemos la palma de la mano derecha y hacemos que el dedo pulgar forme 90° con los otros cuatro dedos.
- Hacemos coincidir los cuatro dedos extendidos con la dirección del vector $\vec{E}$.
- Formamos un puño haciendo girar los cuatro dedos desde $\vec{E}$ hacia $\vec{B}$.
- El dedo pulgar nos indicará la dirección de propagación de la onda.



c. Las ondas electromagnéticas se pueden establecer en el vacío, a diferencia de las ondas mecánicas que necesitan de un medio sustancial para establecerse.

d. La rapidez (v) de propagación de las OEM depende de las propiedades eléctricas y magnéticas del medio.

$$\boxed{v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}$$

donde

- ε: permitividad eléctrica absoluta del medio
- μ: permeabilidad magnética absoluta del medio

Además

$\varepsilon=\varepsilon_r\,\varepsilon_0$

$\mu=\mu_r\,\mu_0$

Luego

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

Pero

$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ es la rapidez de la luz (c).

Finalmente, para cualquier medio se tiene lo siguiente:

$$\boxed{v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}}$$

donde

- ε_r: permitividad eléctrica relativa
- μ_r: permeabilidad magnética relativa

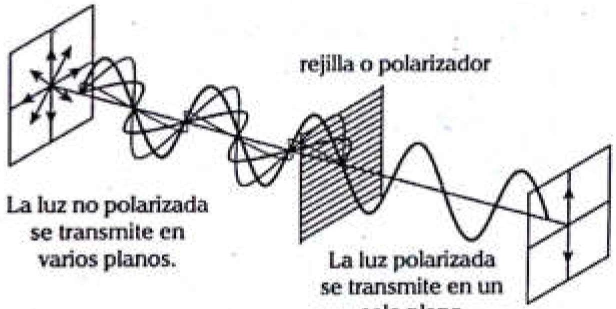
Observación

En el aire o vacío, la permitividad eléctrica relativa (ε_r) y la permeabilidad magnética relativa (μ_r) es 1.

$$\boxed{v=c}$$

Las ondas electromagnéticas en el vacío se propagan con la misma rapidez de la luz.

e. Si el campo eléctrico siempre oscila en un mismo plano, decimos que la onda electromagnética está linealmente polarizada.



f. Una OEM se puede clasificar según la forma geométrica de su frente de onda. Si el frente de onda es plano, la onda es plana.

Observación

Un frente de onda es el lugar geométrico formado por todos los puntos del espacio que son alcanzados simultáneamente por la perturbación que oscila en fase.

g. Para cualquier instante de tiempo, se cumple

$$\boxed{E=B\cdot v}$$

donde

- E: módulo de la intensidad del campo eléctrico
- B: módulo de la inducción magnética
- v: rapidez de propagación de la onda

Como $\vec{E}$ y $\vec{B}$ oscilan en fase, se verifica

$$\boxed{E_{\text{máx}}=B_{\text{máx}}v}$$

NOTA

- Para el aire o vacío $v=c$, se obtiene

$$\boxed{E_{\text{máx}}=B_{\text{máx}}c}$$

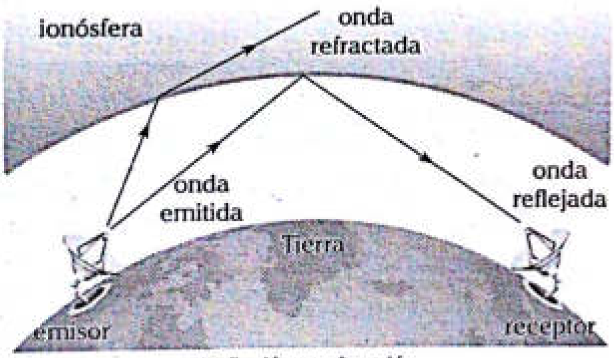
- La rapidez de propagación de la onda se determina de la siguiente manera:

$$\boxed{v=\lambda\cdot f}$$

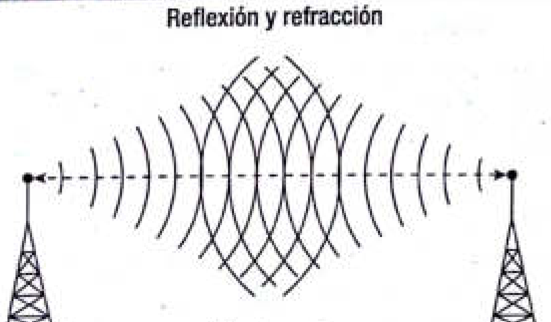
donde
- λ: longitud de onda (m)
- f: frecuencia (Hz)

h. La frecuencia de una OEM es igual a la frecuencia de la fuente que la genera.

i. Las ondas electromagnéticas experimentan los fenómenos de reflexión, refracción, difracción, polarización e interferencia.



Reflexión y refracción



Interferencia

j. Las ondas electromagnéticas transportan energía (E) y cantidad de movimiento (P), las cuales se determinan de la siguiente manera:

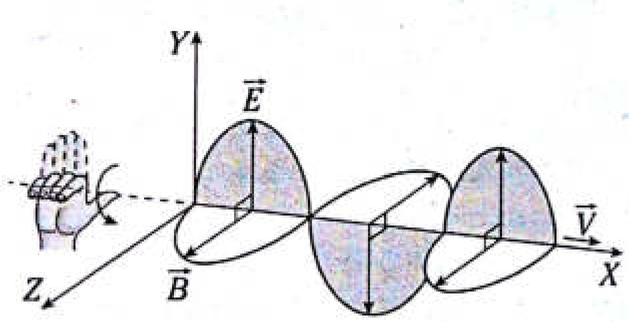
$$\boxed{E=h\cdot f} \qquad \boxed{P=\frac{h}{\lambda}}$$

donde
- h: constante de Planck $(h=3\times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})$
- f: frecuencia (s^{-1})
- λ: longitud de onda (m)

k. Una onda electromagnética se denomina armónica si los vectores de onda $(\vec{E}\text{ y }\vec{B})$ oscilan de acuerdo a las funciones seno y coseno.

2.3. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE UNA ONDA ELECTROMAGNÉTICA

Si una onda electromagnética es plana, monocromática, armónica y linealmente polarizada, se representa geométricamente de la siguiente manera:



donde los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ que oscilan en fase están descritos por las siguientes ecuaciones:

$$\boxed{\vec{E}=E_{\text{máx}}\cdot\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T}\pm\frac{X}{\lambda}\right)\right]\hat{\jmath}}$$

$$\boxed{\vec{B}=B_{\text{máx}}\cdot\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T}\pm\frac{X}{\lambda}\right)\right]\hat{k}}$$

donde
- $(\pm)$: eje en el cual se propaga la onda
- $(-)$: su dirección de propagación es $+X$
- $(+)$: su dirección de propagación es $-X$
- $\hat{\jmath}$: dirección en que oscila el campo eléctrico

- $\hat{k}$: dirección en que oscila el campo magnético
- $E_{máx}$: amplitud del campo eléctrico
- $B_{máx}$: amplitud del campo magnético
- λ: longitud de onda (m)
- T: periodo de la onda (s)
- f: frecuencia de la onda (Hz)

OBSERVACIÓN

Otra forma de expresar las ecuaciones de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ es la siguiente:

$$\vec{E} = E_{\text{máx}} \cdot \operatorname{sen}(\omega t \pm Kx)\hat{j}$$

$$\vec{B} = B_{\text{máx}} \cdot \operatorname{sen}(\omega t \pm Kx)\hat{k}$$

donde

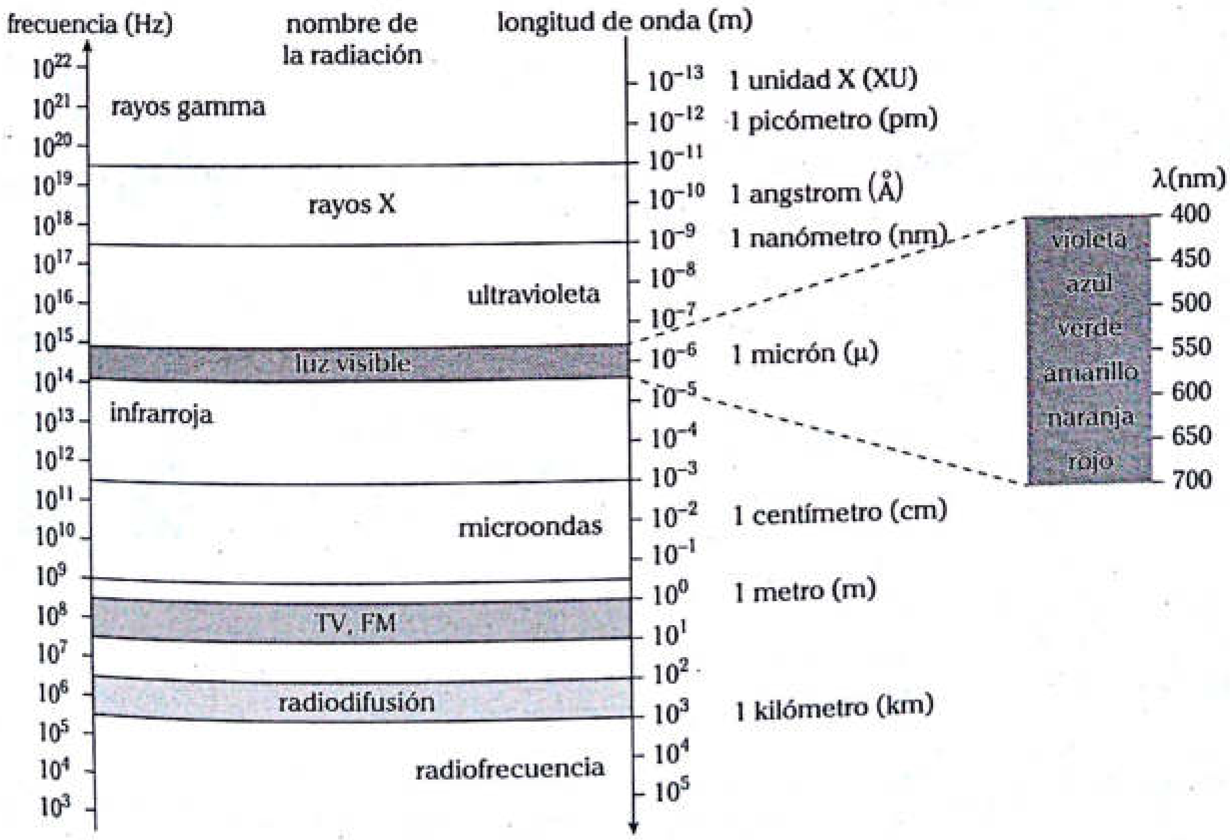
- w: frecuencia cíclica
  $\rightarrow w = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$
- K: número de onda
  $\rightarrow K = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

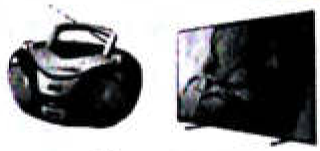
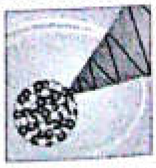
2.4. ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO

El espectro electromagnético clasifica las ondas electromagnéticas de acuerdo a su frecuencia (f) y longitudes de onda (λ), y se debe tener presente lo siguiente:

- No existen límites bien definidos entre los tipos de ondas contiguas, ellas se traslapan.
- Sin importar el tipo de onda electromagnética, todas ellas se propagan con la misma rapidez c en el vacío. (c: rapidez de la luz en el vacío).
- De todo el espectro electromagnético, nosotros solo podemos detectar, mediante nuestro sentido de la vista, un intervalo muy pequeño de dicho espectro al que denominamos luz visible.
- Las ondas electromagnéticas se diferencian por su frecuencia y longitud de onda; sin embargo, en el vacío para cualquier tipo de onda se cumple

  $c = \lambda \cdot f$



TIPO DE ONDA	λ (m)	FUENTE	APLICACIÓN
Ondas de radio	$10^{6}-10^{-1}$	corriente eléctrica alterna	 radio y televisión
Microondas	$3\times10^{-1}-10^{-4}$	circuitos electrónicos	 radar
Infrarrojo	$10^{-3}-7\times10^{-7}$	vibraciones atómicas o moleculares de cuerpos calientes	 visión nocturna
Luz visible	$7\times10^{-7}-4\times10^{-7}$	reorganización de los electrones en los átomos	 arcoíris
Ultravioleta	$4\times10^{-7}-6\times10^{-10}$	el Sol	 esterilización de alimentos
Rayos X	$10^{-8}-10^{-12}$	frenado de electrones de alta velocidad	 placa de rayos X
Rayos gamma	$10^{-10}-10^{-14}$	reacciones nucleares	 fisión nuclear

Problema N.° 1

Una radio emisora emite en una frecuencia de 90 MHz. Determine la longitud de onda de la estación.

Resolución

Por dato del problema, la frecuencia de la onda electromagnética es

f=90 MHz=90×10^6 Hz

La rapidez de propagación de la onda electromagnética se determina de la siguiente manera:

$v=\lambda f$ (*)

Como la onda electromagnética se propaga en el aire, tenemos lo siguiente:

$v=c=3\times10^8$ m/s

Finalmente, reemplazamos valores en (*).

$3\times10^8=\lambda\cdot(90\times10^6)$

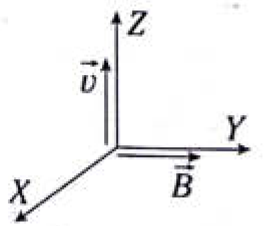
$\therefore\ \lambda=3{,}33$ m

Problema N.° 2

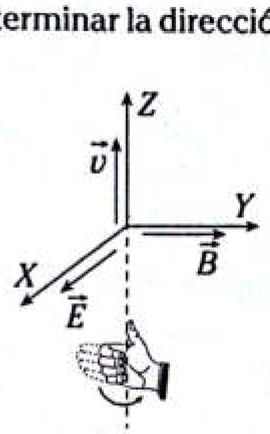
Una OEM se propaga en la dirección $+Z$ y el vector intensidad de campo eléctrico oscila en forma paralela al eje X. Si en un determinado instante el vector inducción magnética $(\vec{B})$ está orientada en la dirección $+Y$, para este instante, ¿cuál es la dirección del vector $\vec{E}$?

Resolución

De acuerdo al enunciado del problema, para el instante señalado tenemos:



Aplicamos la regla de la palma de la mano derecha para determinar la dirección del vector $\vec{E}$.



Del gráfico se deduce que la dirección del vector $\vec{E}$ es $+X$.

Problema N.° 3

El vector intensidad de campo eléctrico correspondiente a una onda electromagnética, en función de la posición respecto a la fuente de emisión y al tiempo, está definido por

$$\vec{E}=180\,\text{sen}\left[\frac{2\pi}{6\times10^{-7}}\left(3\times10^8t-y\right)\right]\hat{k}\left(\frac{\text{N}}{C}\right)$$

donde y está en metros y t, en segundos.
Determine la inducción magnética máxima.

Resolución

Considerando que la onda electromagnética se propaga en el vacío y que esta es transversal, para cualquier instante de tiempo se cumple lo siguiente:

$E_{\text{máx}}=B_{\text{máx}}\cdot c$ (*)

La expresión general del vector intensidad de campo eléctrico, y en términos de la expresión dada en el problema, es la siguiente:

$$\vec{E}=E_{\text{máx}}\cdot\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{y}{\lambda}\right)\right]\hat{k}\left(\frac{\text{N}}{C}\right)$$

Por analogía se deduce

$$E_{máx}=180\left(\frac{N}{C}\right)$$

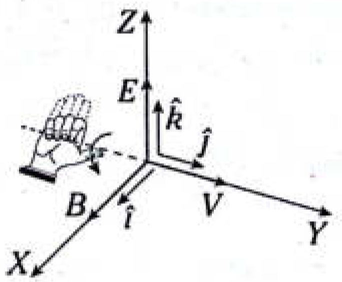
Reemplazamos en (*).

$$180=B_{máx}(3x\times 10^8)$$

$$B_{máx}=60\times 10^{-8}\ T$$

$$B_{máx}=0{,}6\ \mu T$$

Por otro lado, de la expresión de la intensidad del campo eléctrico dado en el problema, se deduce que la dirección del vector $\vec{E}$ en un determinado instante es $+\vec{k}$; asimismo, la dirección de propagación de la onda es $+\vec{J}$. Entonces, al aplicar la regla de la palma de la mano derecha, se deduce que la dirección del vector $\vec{B}$ es $+\vec{i}$.



$$\therefore\quad \vec{B}_{máx}=(0{,}6\hat{i})\ \mu T$$

Problema N.° 4

Se tienen 3 ondas electromagnéticas de longitudes de onda 10^3 km, 3 cm y 0,5 μm, respectivamente, en relación al nombre del tipo de radiación de cada longitud de onda, señale la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. radio, microondas, visible
II. microondas, radio, ultravioleta
III. radio, radio, rayos X

UNI 2016-I

Resolución

De acuerdo al espectro electromagnético, las longitudes de onda (λ) dadas están clasificadas de la siguiente manera:

- Las ondas de radio o radiofrecuencia
  $10^2\ km \leq \lambda \leq 10^5\ km$
- Las microondas
  $1\ mm \leq \lambda \leq 1\ m$
- La luz visible
  $0{,}4\ \mu m \leq \lambda \leq 0{,}7\ \mu m$

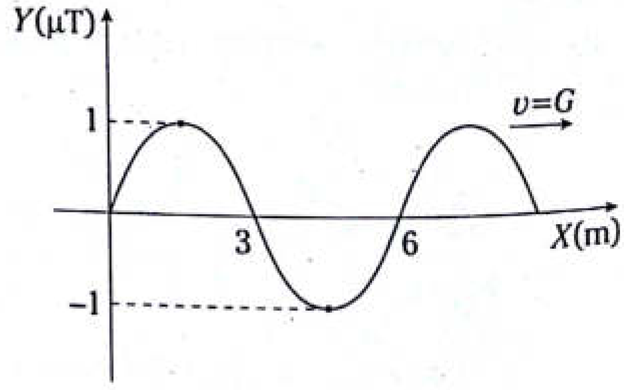
I. Verdadera
Las longitudes de onda dadas en el problema están dentro del rango y en la secuencia dada (radio, microondas, visible).

II. Falsa
La secuencia de longitudes de onda dadas en el problema no están en el orden de esta proposición; tampoco tenemos longitudes de onda dentro del rango de las ultravioletas.

III. Falsa
En el problema no se da una longitud de onda dentro del rango de los rayos X.

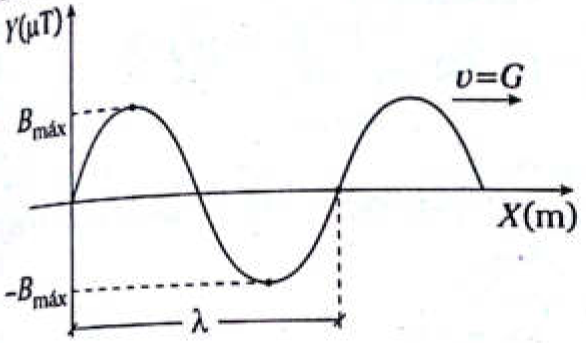
Problema N.° 5

Se muestra el perfil de la componente magnética de una onda electromagnética que se propaga en el vacío para el instante $t=0$. Determine la función de onda del campo eléctrico.



Resolución

Para nuestro caso, el perfil general de la componente magnética es de la forma siguiente:

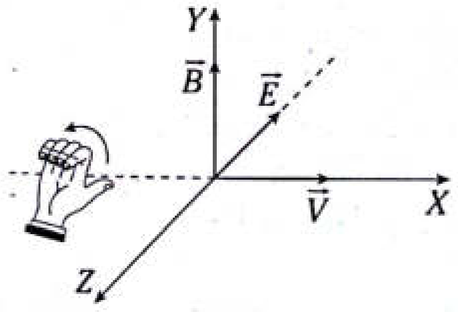


Comparando con el gráfico del enunciado, se obtiene

$B_{máx}=1\ \mu T=10^{-6}\ T$

$\lambda=6\ m$

Se observa en el gráfico que la onda se propaga en la dirección $+X$; además, se deduce que la componente eléctrica oscila en forma paralela al eje Z.



Por lo planteado, la función de onda del campo eléctrico es de la forma siguiente:

$$\vec{E}=E_{máx}\cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{X}{\lambda}\right)\right]\hat{k} \qquad (*)$$

La onda se propaga en el vacío y se cumple lo siguiente:

$$E_{máx}=B_{máx}\cdot c$$

$$E_{máx}=\left(10^{-6}\right)\left(3\times10^{8}\right)$$

$$E_{máx}=300\ N/C$$

La rapidez de la onda (υ_{onda}) se determina mediante la siguiente expresión:

$$\upsilon_{onda}=\lambda\cdot f$$

$$c=\frac{\lambda}{T}$$

$$3\times10^{8}=\frac{6}{T}$$

$$T=2\times10^{-8}\ s$$

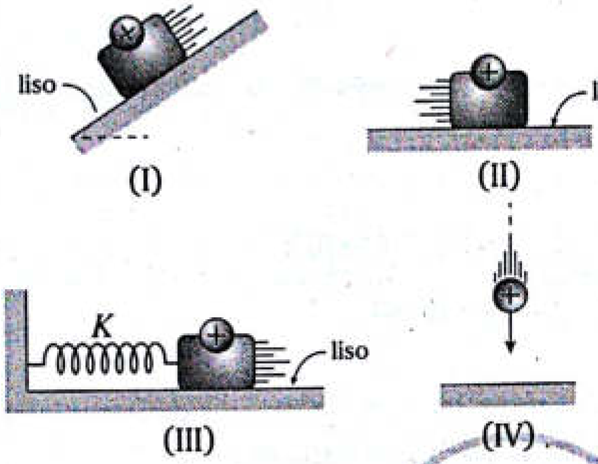
Finalmente, reemplazamos valores en (*).

$$\therefore\quad \vec{E}=300\cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{2\times10^{-8}}-\frac{X}{6}\right)\right]\hat{k}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

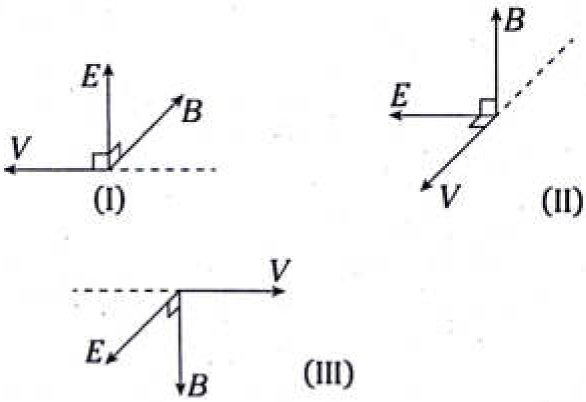
NIVEL BÁSICO

1. Según los gráficos mostrados, determine en qué casos se generan ondas electromagnéticas.



A) I, II, III y IV
B) I, III y IV
C) I y IV
D) III y IV
E) solo IV

2. Se muestran los vectores intensidad de campo eléctrico $(\vec{E})$ e inducción magnética $(\vec{B})$, que corresponden a una onda electromagnética que se propaga con una velocidad $\vec{V}$ en un determinado instante. Señale las representaciones correctas.



A) solo I   B) solo II   C) solo III
D) I y II   E) I y III

3. El vector intensidad de campo eléctrico de una onda electromagnética que se propaga en el vacío varía de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\vec{E} = 240 \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{10^6 y}{3}\right)\right]\hat{k}(\text{N/C})$$

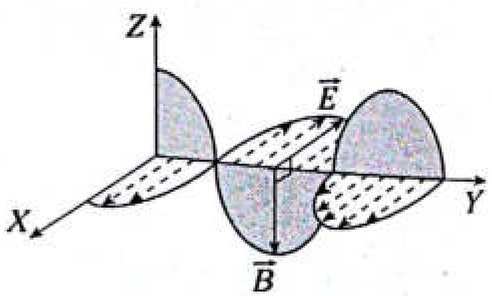
donde y está en metros y t, en segundos. Halle la frecuencia de la onda electromagnética.

A) 10^{14} Hz
B) 3×10^{12} Hz
C) 10^2 Hz
D) 3×10^{14} Hz
E) 10^{10} Hz

4. Un radar al operar emite ondas electromagnéticas con una frecuencia de 10^{10} Hz. Determine la longitud de onda y el tipo de onda electromagnética emitida.

A) 10^{-5} m; infrarrojo
B) 3×10^{-2} m; radio
C) 6×10^{-8} m; ultravioleta
D) 3×10^{-2} m; microondas
E) 8×10^{-6} m; luz visible

5. La figura representa una onda electromagnética linealmente polarizada. Determine la dirección de propagación de la onda.



A) $+X$ B) $-X$ C) $+Y$
D) $-Y$ E) $+Z$

6. El campo eléctrico de una onda electromagnética que se propaga en el vacío varía según la siguiente expresión:

$$\vec{E} = 300 \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + 10^8 Y\right) + \frac{\pi}{2}\right]\hat{\imath}$$

donde $\vec{E}$ se expresa en (V/m).
Con respecto a lo anterior, señale el enunciado incorrecto.

A) La onda electromagnética se propaga en la dirección $-Y$.
B) La rapidez de propagación de la onda electromagnética es 3×10^8 m/s.
C) La amplitud del campo magnético es 1 μT.
D) El vector inducción magnética $\vec{B}$ es paralelo al eje Z.
E) La frecuencia de la onda electromagnética es 3 Hz.

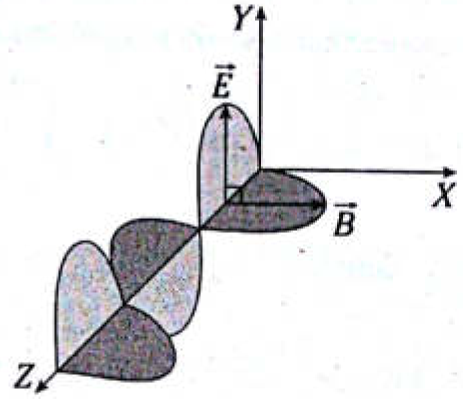
7. Señale la secuencia correcta de verdadero (V) o falso (F) según corresponda.
I. La frecuencia de la radiación ultravioleta es mayor a la frecuencia de una radiación infrarroja.
II. La longitud de onda (λ) de los rayos X es menor que la longitud de onda de las microondas.
III. La longitud de onda de la luz visible es mayor que el de los rayos ultravioleta.

A) VVV
B) VVF
C) VFV
D) FFV
E) FFF

8. Señale la secuencia correcta de verdadero (V) o falso (F) según corresponda.
I. La velocidad de la luz depende de las propiedades eléctricas y magnéticas del medio.
II. Una partícula electrizada en movimiento acelerado genera OEM.
III. Las OEM transportan energía que depende de su frecuencia.

A) VVV
B) VVF
C) VFF
D) FVF
E) FFV

9. Se muestra la representación de una OEM.



Indique cuál es la expresión del vector inducción magnética más aproximada.

A) $\vec{B} = B_{\text{máx}} \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{Z}{\lambda}\right)\right]\hat{\jmath}$

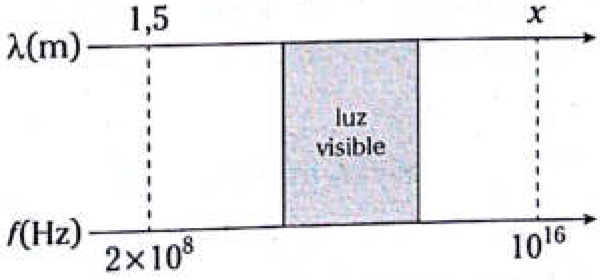
B) $\vec{B} = B_{\text{máx}} \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{Z}{\lambda}\right)\right]\hat{k}$

C) $\vec{B} = B_{\text{máx}} \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{Z}{\lambda}\right)\right]\hat{\imath}$

D) $\vec{B} = B_{\text{máx}} \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{Z}{\lambda}\right)\right]\hat{\jmath}$

E) $\vec{B} = B_{\text{máx}} \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{Z}{\lambda}\right)\right]\hat{\imath}$

10. Se muestra parte del espectro electromagnético. Determine x.



A) 10^{-6} m
B) 2×10^{-9} m
C) 3×10^{-8} m
D) 6×10^{-10} m
E) 5×10^{-7} m

11. Una onda electromagnética se propaga en la dirección $+X$. Si para determinado instante y posición el campo eléctrico $\vec{E}$ está en la dirección $+Z$ y con una amplitud de 900 (V/m), determine la ecuación que representaría al campo magnético.

A) $900\cdot\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{X}{\lambda}\right)\right]\hat{k}$ µT

B) $3\cdot\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{X}{\lambda}\right)\right]\hat{j}$ µT

C) $900\cdot\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{X}{\lambda}\right)\right]\hat{k}$ µT

D) $300\cdot\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{X}{\lambda}\right)\right]\hat{j}$ µT

E) $3\cdot\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{X}{\lambda}\right)\right]\hat{i}$ µT

12. Indique cuántas proposiciones son correctas.
    I. El color amarillo tiene menor frecuencia que el color violeta.
    II. El color rojo tiene mayor longitud de onda que el color azul.
    III. La sensibilidad relativa del ojo de un observador normal es máxima para una longitud de onda de 555 nm, aproximadamente.
    IV. Las microondas tienen una longitud de onda en el orden del milímetro.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

NIVEL INTERMEDIO

13. Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F) según corresponda.
    I. Todo campo eléctrico variable induce un campo magnético.
    II. Las fuentes de los campos eléctricos son solo los cuerpos electrizados.
    III. La segunda ecuación de Maxwell, que expresa la ley de Gauss para campos magnéticos, demuestra la inexistencia de los monopolos magnéticos.

A) VVV B) VFV C) FVF
D) VFF E) FVV

14. Una OEM sinusoidal plano de 20 MHz se propaga en el espacio "vacío" en la dirección $+X$, en algún instante el campo eléctrico toma su valor máximo de 1500 N/C y está a lo largo del eje $+Y$. Determine la longitud de onda y la magnitud del campo magnético en ese instante.

A) λ=15 m; $B_{\text{máx}}=5\times10^{-6}$ T

B) λ=30 m; $B_{\text{máx}}=7{,}5\times10^{-6}$ T

C) λ=45 m; $B_{\text{máx}}=2{,}5\times10^{-8}$ T

D) λ=30 m; $B_{\text{máx}}=7{,}5\times10^{-6}$ T

E) λ=15 m; $B_{\text{máx}}=5\times10^{-8}$ T

15. Tomando en cuenta los datos del problema anterior y los resultados obtenidos, determine las ecuaciones que definen a $\vec{B}$.

A) $1500\cdot\text{sen}\left[2\pi\left(2\times10^{7}t-\frac{X}{15}\right)\right]\hat{j}$ T

B) $5\times10^{-6}\text{sen}\left[2\pi\left(2\times10^{7}t+\frac{X}{15}\right)\right]\hat{k}$ T

C) $1500\cdot\text{sen}\left[2\pi\left(2\times10^{7}t+\frac{X}{15}\right)\right]\hat{j}$ T

D) $5\times10^{-6}\,\text{sen}\left[2\pi\left(2\times10^{7}t-\frac{X}{15}\right)\right]\hat{k}$ T

E) $5\times10^{-6}\,\text{sen}\left[2\pi\left(2\times10^{7}t+\frac{X}{15}\right)\right]\hat{j}$ T

16. Una onda electromagnética, cuya longitud de onda es 6×10^{-14} m, se propaga en el vacío. Determine su frecuencia y señale de qué tipo de onda electromagnética se trata.

A) 5×10^{6} Hz; radio
B) 2×10^{10} Hz; microondas
C) 5×10^{14} Hz; luz visible
D) 2×10^{16} Hz; ultravioleta
E) 5×10^{21} Hz; rayos gamma

17. A nuestra casa llega una señal de radio de 5 MHz. Desde la estación de emisión de ondas de radio se establecen hasta nuestra casa 200 longitudes de onda. Determine a qué distancia de la emisora de señal de radio se encuentra nuestra casa.

A) 6 km B) 12 km C) 13 km
D) 24 km E) 36 km

18. Los campos eléctricos de dos ondas electromagnéticas que se propagan en el aire seco se expresan tal como se indica a continuación:

$$\vec{E}_1 = E_{\text{máx}_1}\cdot \text{sen}\left(K_1x+\frac{2\pi\cdot10^6}{9}t\right)\hat{k}\ (\text{V/m})$$

$$\vec{E}_2 = E_{\text{máx}_2}\cdot \text{sen}\left(K_2x+\frac{2\pi\cdot10^6}{7}t\right)\hat{k}\ (\text{V/m})$$

Indique la proposición correcta.

A) $f_1 > f_2$
B) $\lambda_1 < \lambda_2$
C) $T_1 < T_2$
D) $\lambda_1 > \lambda_2$
E) $T_1 = T_2$

19. Una onda electromagnética luminosa se propaga de tal manera que su campo eléctrico varía de acuerdo a la siguiente expresión.
$\vec{E} = 500\cdot \text{sen}\left(37{,}7\times10^{14}t+12{,}6\times10^{6}Y\right)\hat{k}$
donde t está en segundos y Y, en metros; además, $\vec{E}$ está expresado en V/m.
De acuerdo a la siguiente tabla, determine el color del espectro visible al que corresponde la onda luminosa.

LONGITUDES DE ONDA APROXIMADA DE LA LUZ VISIBLE	
Color	λ (10^{-9} m)
violeta	400 - 440
azul	440 - 480
verde	480 - 560
amarillo	560 - 590
naranja	590 - 630
rojo	630 - 700

A) violeta B) azul C) verde
D) amarillo E) rojo

20. El vector inducción magnética de una OEM que se propaga en el aire, en función de su posición respecto de la antena de emisión y al tiempo, está definido por la siguiente expresión:

$$\vec{B} = 0{,}5\cdot \text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{0{,}01}\right)\right]\hat{k}\ \ (\mu\text{T})$$

donde x está en metros y t, en segundos. Determine la frecuencia (f) y el vector intensidad de campo eléctrico máximo.

A) 3×10^{6} Hz; $(150\hat{k})$ N/C
B) 3×10^{10} Hz; $(150\hat{j})$ N/C
C) 6×10^{6} Hz; $(-300\hat{i})$ N/C
D) 3×10^{10} Hz; $(-150\hat{k})$ N/C
E) 9×10^{8} Hz; $(450\hat{j})$ N/C

Óptica geométrica

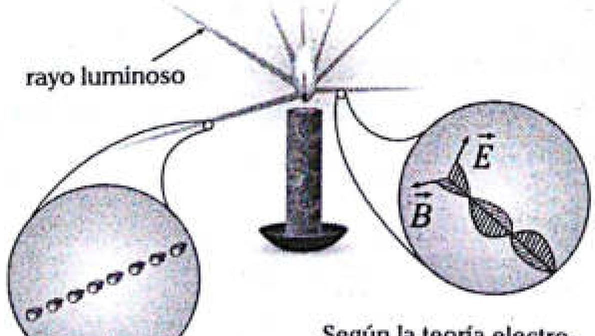
Capítulo XX

Objetivos

- Utilizar el concepto de rayo luminoso para describir los fenómenos de la reflexión y refracción de la luz.
- Construir imágenes formadas por la reflexión y refracción de la luz en espejos planos, esféricos y las lentes.

1. Naturaleza de la luz

La luz es una onda electromagnética que tiene un comportamiento dual, es decir se comporta como una onda en su propagación, la cual nos permite formar imágenes en espejos y lentes; también se comporta como una partícula en la interacción con los cuerpos, la cual permite explicar los fenómenos relacionados como ocurre en el efecto fotoeléctrico.



Según la cuántica, la luz es un chorro de fotones o cuantos de energía.

Según la teoría electromagnética, la luz es la perturbación de campo electromagnético.

2. Propagación y rapidez de la luz

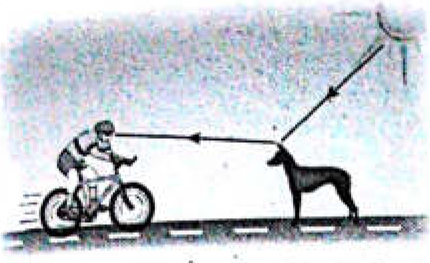
La luz es emitida por sus fuentes en todas las direcciones. Para indicar la dirección en que se propaga la luz, utilizaremos el concepto de rayo luminoso, el cual en un medio homogéneo se propaga con rapidez constante.

Esta imagen muestra la evidencia de que los rayos luz se propagan rectilíneamente.

3. Reflexión de la luz

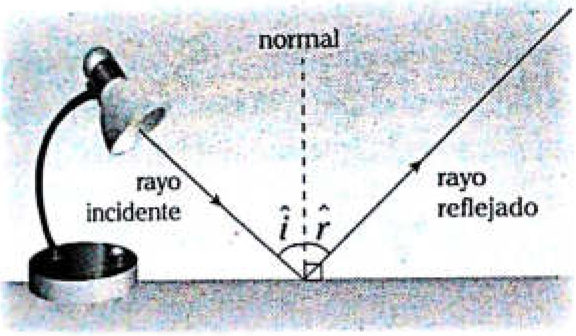
Al ingresar a una habitación completamente oscura, notamos que no es capaz de poder ver lo que hay en su interior; pero, al encender los focos, aparecen frente a nosotros un conjunto de objetos cuyos detalles pueden ser fácilmente observados. Entonces, surge una interrogante: ¿Cómo así la luz permite que podamos ver los objetos frente a nosotros y por qué antes no podíamos verlos?

La respuesta está en que la luz incide en los objetos y al rebotar en ellos, llega a nuestros ojos, y de esta manera podemos percibir su presencia.



La luz que proviene del sol incide en el cuerpo del perro y luego de reflejarse llega hasta a nuestros ojos.

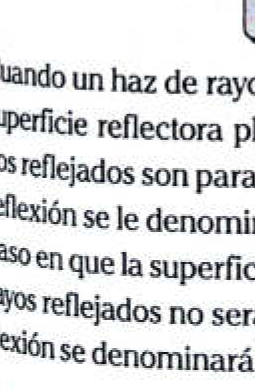
3.1. LEYES DE LA REFLEXIÓN



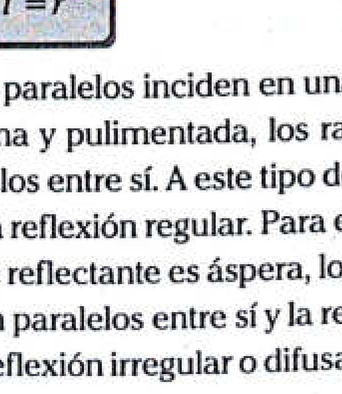
- El rayo incidente, el rayo reflejado y la normal están en un mismo plano que es perpendicular a la superficie.
- El ángulo de incidencia ($\hat{i}$) y el ángulo de reflexión ($\hat{r}$) son de igual medida.

$$\boxed{\hat{i} = \hat{r}}$$

Cuando un haz de rayos paralelos inciden en una superficie reflectora plana y pulimentada, los rayos reflejados son paralelos entre sí. A este tipo de reflexión se le denomina reflexión regular. Para el caso en que la superficie reflectante es áspera, los rayos reflejados no serán paralelos entre sí y la reflexión se denominará reflexión irregular o difusa.



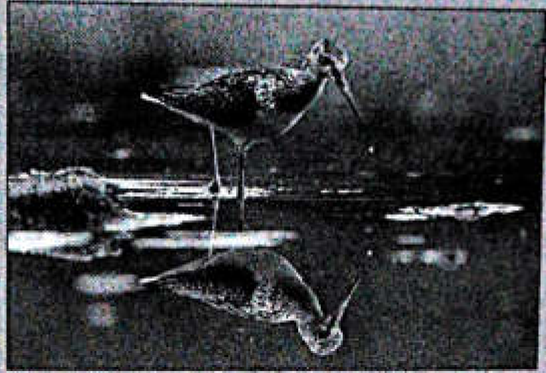
reflexión regular



reflexión difusa

¿SABÍA QUE...?

Podemos notar que en la reflexión difusa cada rayo reflejado tiene distinta dirección. Es por esto que las aves se pueden observar desde distintas posiciones.

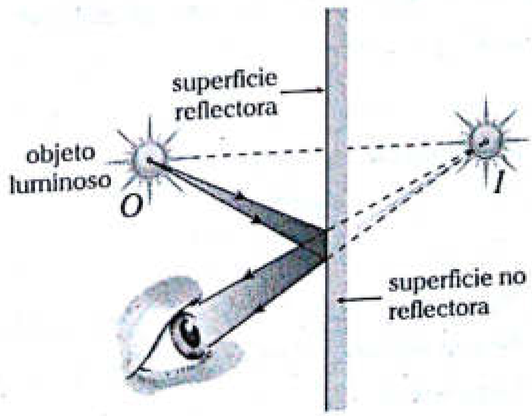


Toda superficie perfectamente reflectora recibe el nombre de espejo. Los espejos se construyen con láminas delgadas de vidrio transparente, donde una de sus caras es cubierta con una disolución de nitrato de plata amoniacal con aldehído, que al secarse forma una película delgadísima y perfectamente reflectora.

De acuerdo a la forma que tienen los espejos, pueden ser planos, esféricos, hiperbólicos, parabólicos, etc.

4. Espejos planos

Son aquellas superficies planas perfectamente reflectoras. En este tipo de espejo se produce la reflexión regular.

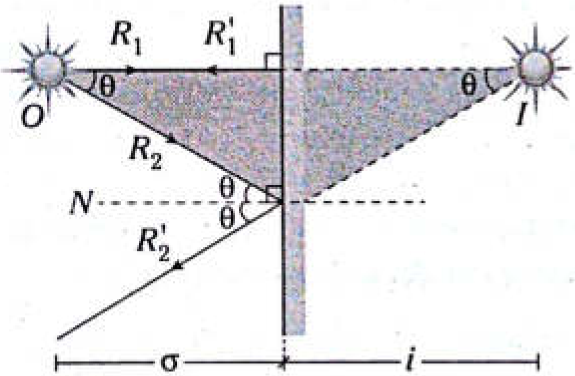


Al observador le da la impresión de que los rayos luminosos que llegan a él provienen del punto *I*, pero esto no es así. Los rayos luminosos que llegan al ojo provienen de la fuente puntual, y al incidir en el espejo se reflejan. Lo que se ve en el punto *I* solamente es la imagen de la fuente puntual.

4.1. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN ESPEJOS PLANOS

Para formar la imagen de un objeto puntual frente a un espejo plano, debemos interceptar las prolongaciones de los rayos reflejados provenientes del objeto.

Del objeto salen infinidad de rayos, pero solo será necesario considerar dos de ellas.



Describimos la gráfica.
Se traza un rayo incidente R_1 en forma perpendicular al espejo, el cual se refleja perpendicularmente al espejo R_1' (se refleja sobre sí mismo). Luego, se traza un segundo rayo R_2, reflejándose en el espejo como R_2'.

Finalmente, se interceptan las prolongaciones de los rayos reflejados R_1' y R_2'.

De la geometría de los rayos, aplicamos semejanza de triángulos y obtenemos

$$\boxed{\sigma = i}$$

El objeto puntual y su imagen equidistan del espejo y se encuentran en la misma línea perpendicular al espejo.

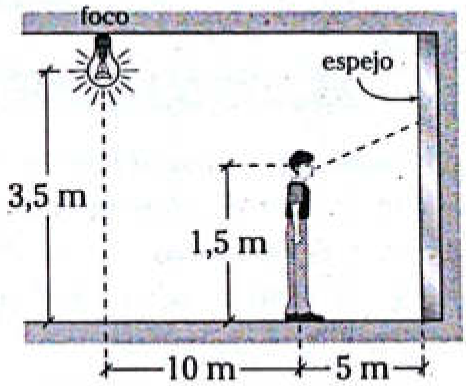
Para formar la imagen de un objeto no puntual, se determina la imagen de cada punto perteneciente al objeto.

NOTA

Las características de la imagen que se forman son virtual, porque se forma por la intersección de las prolongaciones de los rayos reflejados, derecha, porque tiene igual orientación que el objeto (ambos apuntan hacia arriba) y de igual tamaño, esto se puede deducir de la geometría.

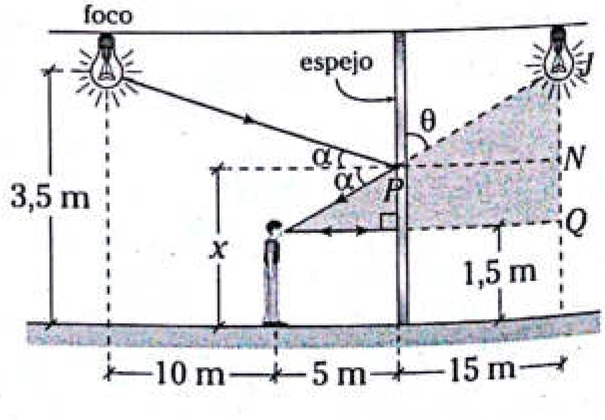
Aplicación 1

Determine a qué distancia del suelo se encuentra el punto del espejo, que el ojo del muchacho utiliza para ver la imagen del foco.



Resolución
Nos piden x.

Analizamos el rayo que sale del foco y luego de reflejarse en el espejo llega a los ojos de la persona, además formamos la imagen del foco en el espejo.



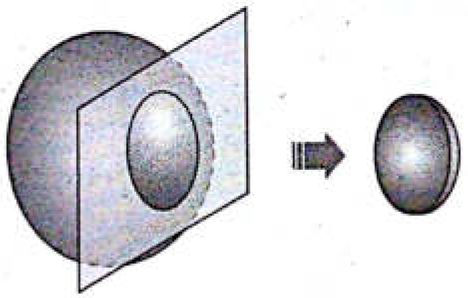
Para que la persona vea la imagen en el espejo debe fijar su visual en el punto *P*. Luego nos piden *x* por semejanza del triángulo sombreado y el triángulo *PNJ*.

$$\frac{20}{(3{,}5-1{,}5)}=\frac{15}{(3{,}5-x)}$$

$\therefore\ x=2\text{ m}$

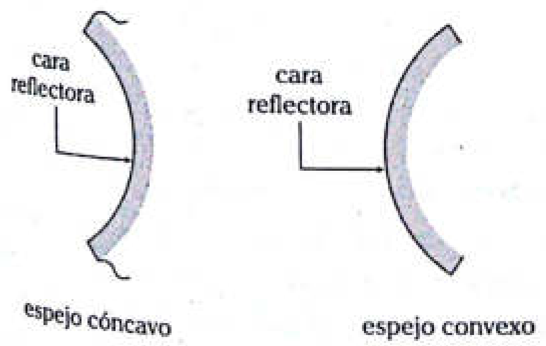
5. Espejos esféricos

Cuando la superficie reflectora es una superficie esférica, se tiene un espejo esférico. Los espejos esféricos son casquetes esféricos (parte de una esfera), donde una de sus caras es reflectora.



Si la cara interna del casquete es reflectora, el espejo se denomina **espejo cóncavo**; asimismo, si la cara externa del casquete es reflectora, se llama **espejo convexo**.

Representación de los espejos esféricos

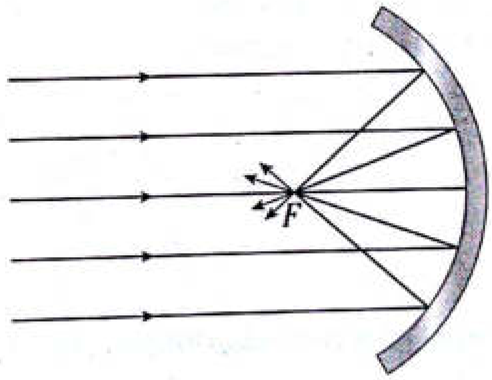


Nota

El espejo esférico permite ver la imagen completa de gran parte de nuestro entorno.

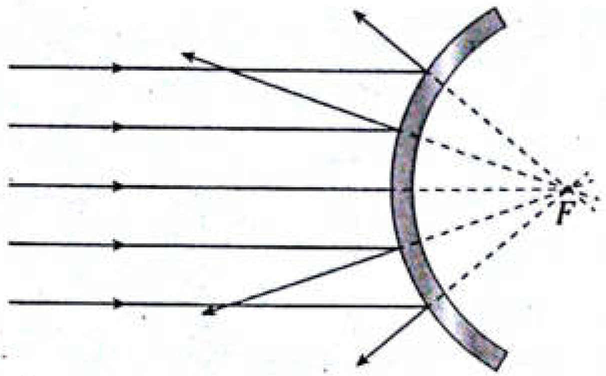
5.1. ESPEJO ESFÉRICO CÓNCAVO O CONVERGENTE

Se caracteriza porque los rayos paralelos que muestra el gráfico inciden en su parte reflectora, se reflejan para intersecarse en un punto llamado foco (*F*), por esta razón se le llama también convergente, por el tipo de reflexión que se da en él.

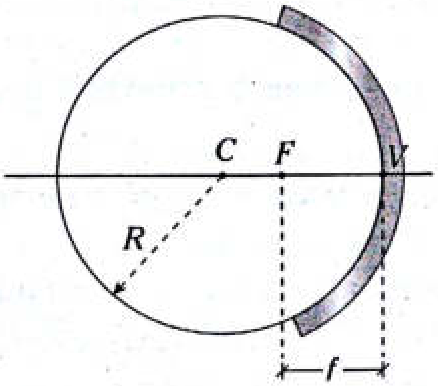


5.2. ESPEJO ESFÉRICO CONVEXO O DIVERGENTE

Se caracteriza porque los rayos paralelos que inciden en su parte reflectora se reflejan divergiendo, es decir, se alejan entre sí; de tal manera que al prolongar los rayos reflejados se cortan en un punto llamado foco (*F*).



5.3. ELEMENTOS DE UN ESPEJO ESFÉRICO



donde

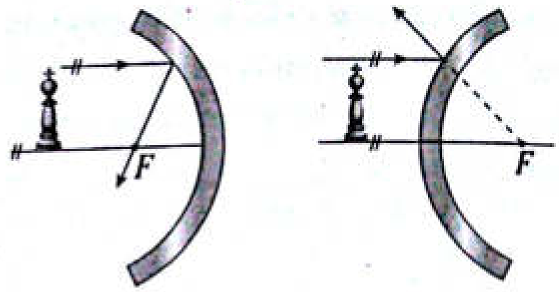
- R: radio de curvatura
- CV: eje óptico principal
- C: centro de curvatura
- F: foco del espejo
- V: vértice
- f: distancia focal → $\boxed{f = \frac{R}{2}}$

5.4. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN UN ESPEJO ESFÉRICO

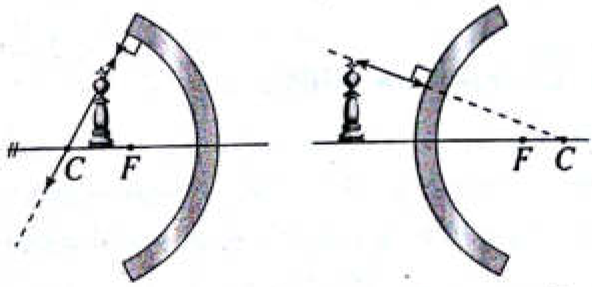
La imagen de un objeto puntual se formará en la intersección de los rayos reflejados, o de sus prolongaciones, de rayos provenientes del objeto.

Los rayos que se utilizan para formar la imagen de un punto del objeto son los siguientes:

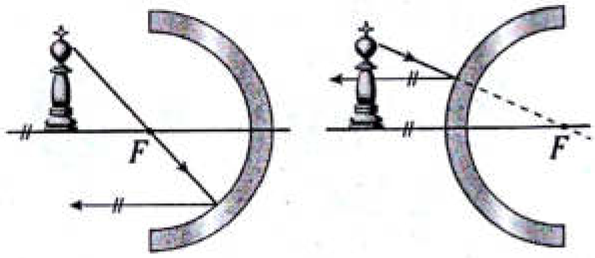
- Un rayo que proviene del objeto en forma paralela al eje principal. Este rayo al reflejarse en el espejo pasa, o lo hace su prolongación, por el foco.



- Un rayo que proviene del objeto y cuya línea pasa por el centro de curvatura. Este rayo se refleja regresando por la misma línea.



- Un rayo que sale del objeto y cuya línea pasa por el foco. Este rayo se refleja paralelamente al eje principal.



Observación

- Para construir la imagen de un punto del objeto es suficiente con dos rayos, quedando el otro para comprobación.
- Para construir la imagen de un objeto se puede determinar la imagen de cada punto del objeto, pero esta tarea es muy laboriosa. Por ello, generalmente los objetos se colocan apoyados en el eje principal, quedando su imagen apoyada también en el eje principal.

Características de una imagen

- Las imágenes reales se forman por la intersección de los rayos reflejados y las imágenes virtuales por la intersección de las prolongaciones de los rayos reflejados.

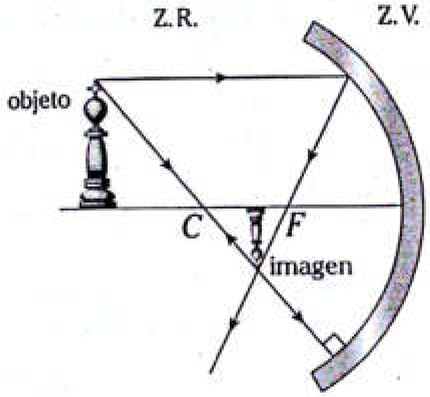
- La imagen puede ser derecha o invertida, esto dependerá de la orientación de la imagen respecto del objeto.
- La imagen puede ser de mayor tamaño, menor tamaño o igual tamaño. Esto dependerá de la ubicación del objeto.

5.4.1. Formación de imágenes en un espejo esférico cóncavo

Cuando un objeto se coloca frente a un espejo cóncavo, las características de la imagen que se forma pueden ser diversas (cinco casos), esto dependerá de la ubicación del objeto.

Caso 1

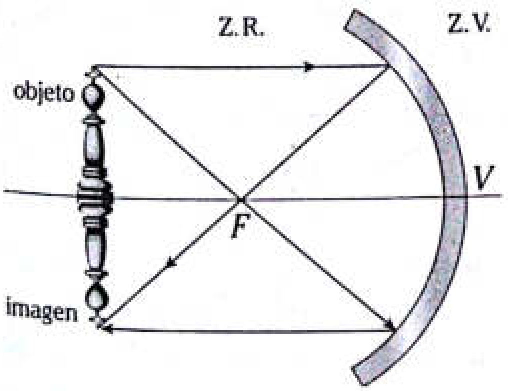
Si el objeto se encuentra ubicado antes del centro



Se observa que la imagen es real porque se forma con la intersección de los rayos reflejados, invertida y de menor tamaño que el objeto.

Caso 2

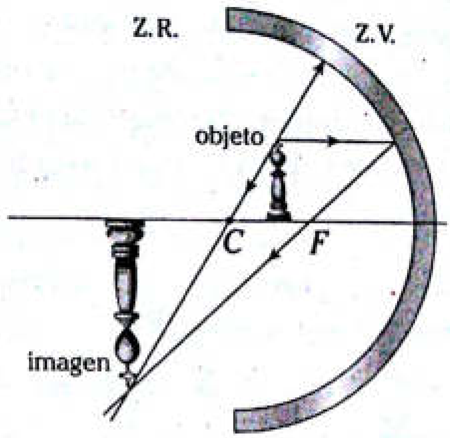
Si el objeto se ubica en el centro



Se observa que la imagen es real invertida y de igual tamaño que el objeto.

Caso 3

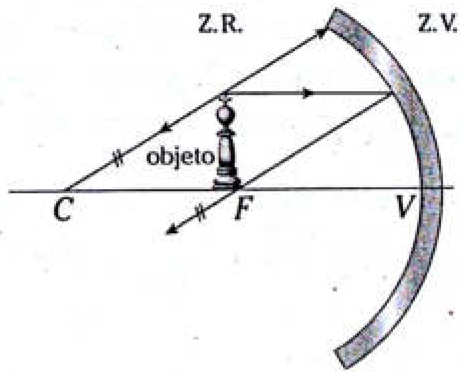
Si el objeto se ubica entre el foco y el centro



Se observa que la imagen es real invertida y de mayor tamaño que el objeto.

Caso 4

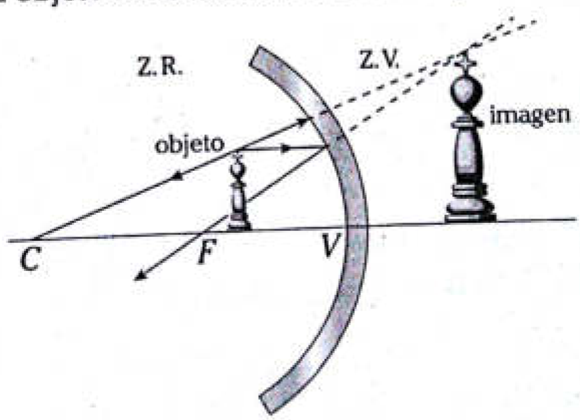
Si el objeto se ubica en el foco



En este caso, los rayos reflejados son paralelos y no se cortan, por lo que no se forma imagen.

Caso 5

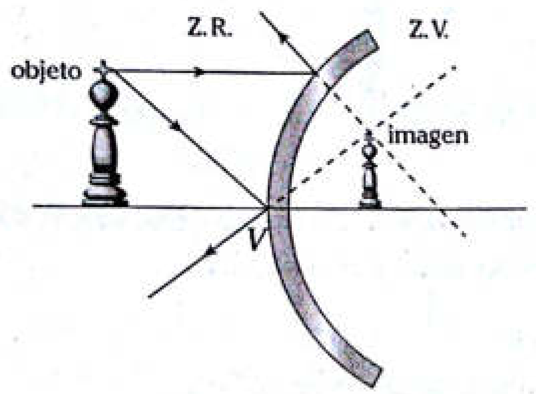
Si el objeto se ubica entre el vértice y el foco



Se observa que la imagen es virtual (se pueden ver), derecha y de mayor tamaño que el objeto.

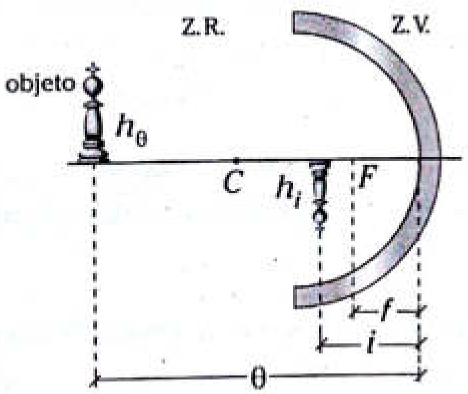
5.4.2. Formación de imágenes en un espejo esférico convexo

Independientemente del lugar donde se coloque el objeto, el espejo convexo siempre produce el mismo tipo de imágenes, las cuales son siempre virtuales, derechas y de menor tamaño que el objeto.



Este tipo de espejos amplían el campo de visión y se utilizan en garajes y esquinas; por ejemplo, en los espejos retrovisores (panorámicos).

5.5. ECUACIÓN DE LOS ESPEJOS ESFÉRICOS



5.5.1. Ecuación de los focos conjugados

Es una ecuación que nos indica la relación que existe entre la distancia focal (f), la distancia imagen (i) y la distancia objeto (θ).

$$\boxed{\frac{1}{f}=\frac{1}{i}+\frac{1}{\theta}}$$

donde

- $f\begin{cases}(+) \text{ si el espejo es cóncavo}\\(-) \text{ si el espejo es convexo}\end{cases}$

- $i\begin{cases}(+) \text{ Si la imagen es real}\\(-) \text{ Si la imagen es virtual}\end{cases}$

- θ: siempre es positivo

5.5.2. Aumento lineal (A)

Nos indica la relación que hay entre la altura de la imagen (h_i) y la del objeto (h_θ).

$$\boxed{|A|=\frac{\text{altura de la imagen}}{\text{altura del objeto}}=\frac{h_i}{h_\theta}}$$

También

$$\boxed{A=-\frac{i}{\theta}}$$

donde

- $A\begin{cases}(+) \text{ la imagen es derecha}\\(-) \text{ la imagen es invertida}\end{cases}$

- $A\begin{cases}>1 \text{ la imagen es de mayor tamaño que el objeto}\\=1 \text{ la imagen es de igual tamaño que el objeto}\\<1 \text{ la imagen es de menor tamaño que el objeto}\end{cases}$

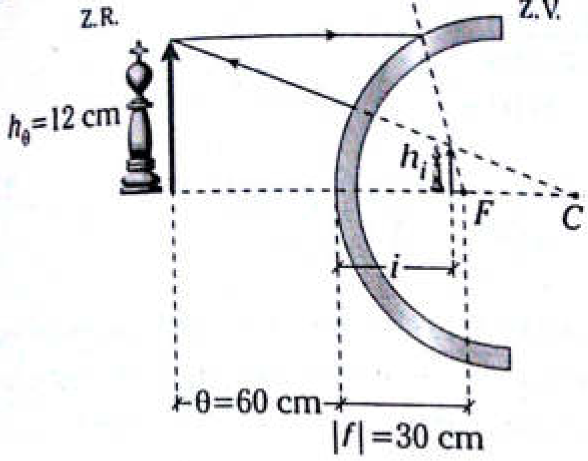
Aplicación 2

Un objeto de 12 cm de alto se coloca frente a un espejo convexo de 30 cm de distancia focal. Determine las características de la imagen, el aumento lineal y la altura de la imagen.

Resolución

Nos piden A y h_i.

Formamos la imagen del objeto.



Notamos que la imagen es virtual, derecha y de menor tamaño.

Para determinar el aumento necesitamos la distancia imagen (i), entonces de la ecuación de los focos conjugados

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{i}+\frac{1}{\theta}$$

$$\frac{1}{-30}=\frac{1}{i}+\frac{1}{60}$$

$\rightarrow$ i=–20 cm

El signo negativo indica que la imagen es virtual.

Luego

$$A=\frac{-i}{\theta}$$

$$A=\frac{-(-20)}{60}$$

$\rightarrow$ $A=+\frac{1}{3}$ La altura de la imagen es la tercera parte de la altura del objeto.

El signo positivo indica que la imagen es derecha.

Finalmente $|A|=\frac{h_i}{h_\theta}$

$$\frac{1}{3}=\frac{h_i}{12} \rightarrow h_i=4 \text{ cm}$$

6. Refracción de la luz

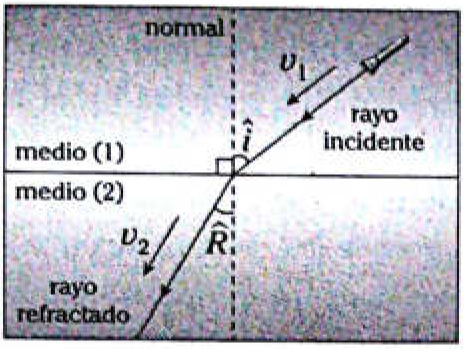
Cuando observamos un objeto con una lupa, notamos que el objeto tiene mayor tamaño; cuando vemos una moneda en el fondo de un estanque, esta parece que está más cerca de la superficie. Estos fenómenos y otros más ocurren porque los rayos de luz que salen de los objetos y alcanzan nuestro ojo pasan de un medio a otro (aire-vidrio; agua-aire). A este fenómeno, en el cual la luz pasa de un medio a otro de diferentes propiedades ópticas, se le denomina **refracción de la luz**. En el fenómeno de refracción de la luz ocurre una variación en la rapidez de propagación de la luz (rapidez media) casi siempre acompañado de un cambio en la dirección de propagación.

Observación

Los rayos luminosos se refractan al atravesar las superficies curvas de estas gotitas de agua.

El rayo de luz al pasar del aire al agua cambia aparentemente la forma del lápiz.

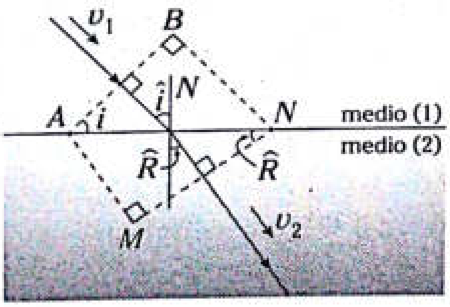
Esquema



donde

- $\hat{i}$; $\hat{R}$: ángulo de incidencia y refracción, respectivamente (se mide con respecto a la normal o de la perpendicular a la superficie, en el punto donde incide el rayo luminoso).
- v_1; v_2: rapidez media de la luz en los medios donde incide el rayo luminoso y donde se refracta, respectivamente.

El tiempo transcurrido para que un frente de onda se desplace de una a otra posición es el mismo, medido a lo largo de cualquier rayo.



Cuando cada punto del frente de onda plana AB, del rayo incidente, llega al medio (2) según muestra el gráfico, los átomos del medio (2) absorben e irradian la energía de la luz que incide en ellos. Se forma un nuevo frente de onda MN (notemos que el frente de onda cambió de dirección). Asimismo, el rayo luminoso en el medio (2) (rayo refractado) tiene dirección diferente a la del rayo incidente.

Según la geometría de los rayos, en el intervalo de tiempo (Δt)

$$\overline{BN}=v_1\cdot\Delta t \text{ y } \overline{AM}=v_2\cdot\Delta t$$

También

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\hat{i} &= \frac{\overline{BN}}{AN}=\frac{v_1\Delta t}{AN} \\ \operatorname{sen}\hat{R} &= \frac{AM}{AN}=\frac{v_2\Delta t}{AN} \end{aligned}\right\} \frac{\operatorname{sen}\hat{i}}{\operatorname{sen}\hat{R}}=\frac{v_1}{v_2} \qquad (*)$$

Considerando el índice de refracción (n) que nos caracteriza las propiedades ópticas del medio donde se propaga la luz, se cumple

$$\boxed{n=\frac{C}{v_m}}$$

donde

- C: rapidez de la luz en el vacío
- v_m: rapidez de la luz en el medio

De la relación (*), tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen}\hat{i}}{\operatorname{sen}\hat{R}}=\frac{v_1}{v_2} \qquad \frac{\operatorname{sen}\hat{i}}{v_1}=\frac{\operatorname{sen}\hat{R}}{v_2}$$

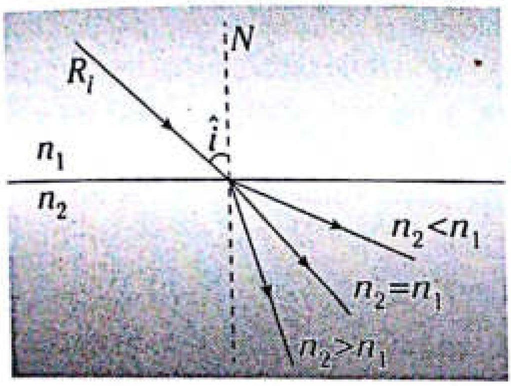
Multiplicamos ambos miembros por la rapidez de la luz C.

$$\operatorname{sen}\hat{i}\times\underbrace{\frac{C}{v_1}}_{n_1}=\operatorname{sen}\hat{R}\times\underbrace{\frac{C}{v_2}}_{n_2}$$

$$\boxed{n_1\operatorname{sen}\hat{i}=n_2\operatorname{sen}\hat{R}} \quad \text{Ley de Snell}$$

- Si el rayo luminoso va de un medio a otro de menor índice de refracción ($n_1 > n_2$), el ángulo de refracción es mayor que el de incidencia $(\hat{R} > \hat{i})$. Es decir, el rayo se aleja de la normal.

- Si el rayo luminoso va de un medio a otro de mayor índice de refracción ($n_1 < n_2$), se cumple que $(\hat{R} > \hat{\imath})$. El rayo se acerca a la normal.
- Si el rayo va de un medio a otro de igual índice de refracción, no experimentará desviación. $(\hat{R} > \hat{\imath})$



OBSERVACIÓN

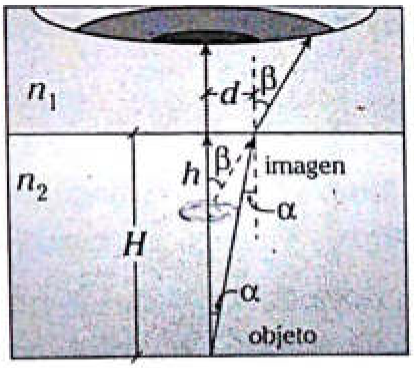
- El índice de refracción de un medio también suele llamarse densidad óptica del medio.
- El índice de refracción de un medio tiene un profundo significado físico. Está relacionado con la rapidez de propagación de la luz en el medio dado y depende del estado físico del medio en el cual se propaga la luz, es decir, de la temperatura de la sustancia, de su densidad y de la existencia en ella de tensiones elásticas. El índice de refracción depende también del carácter de la propia luz. Para la luz roja es menor que para la verde, y para la verde, menor que para la violeta. Esto permite explicar por qué la luz blanca se descompone al atravesar un prisma.
  Por eso en las tablas de valores del índice de refracción de distintas sustancias suele indicarse para qué luz se da el valor de n y en qué estado se encuentra el medio. Si estas indicaciones se omiten, quiere decir que la dependencia de dichos factores es despreciable.

La tabla muestra el valor del índice de refracción para algunas sustancias, con relación al aire. Esto porque su valor poco se diferencia del valor del índice de refracción absoluto del medio (los datos se refieren a la luz amarilla).

SUSTANCIA	n
agua (a 20 °C)	1,33
aceite de cedro (a 20 °C)	1,52
bisulfuro de carbono	1,63
hielo	1,31
cuarzo	1,54
diamante	2,42
vidrio de diversas clases	1,47→2,04

6.1. PROFUNDIDAD APARENTE

Cuando observamos una moneda en el fondo de una piscina, lo que percibimos no es la moneda sino su imagen, este hecho se debe a un efecto que experimenta la refracción de la luz llamado profundidad aparente.



Se cumple

$$\frac{h}{H}=\frac{n_1}{n_2}$$

donde

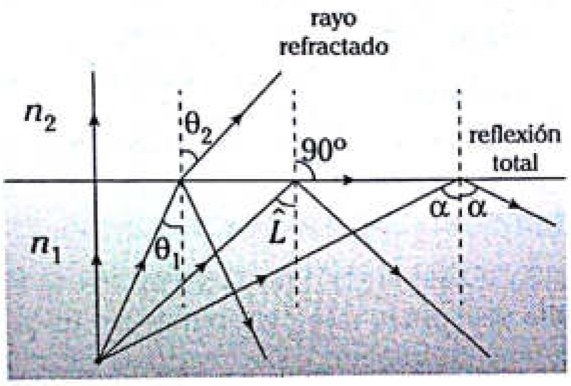
- h: profundidad aparente
- H: altura real
- n_1: índice de refracción del medio donde se encuentra el observador
- n_2: índice de refracción del medio donde se encuentra el objeto

En general

$$\frac{h}{H}=\frac{n_{\text{observador}}}{n_{\text{objeto}}}$$

6.2. ÁNGULO LÍMITE Y REFLEXIÓN INTERNA TOTAL

Analizamos el trayecto que sigue un rayo de luz que viaja de un medio de mayor a otro de menor índice de refracción.



- Notamos que a medida que el ángulo de incidencia va aumentando, el ángulo de refracción también lo hace.
- Los rayos refractados se alejan de la normal hasta formar con ella un ángulo de 90° (ángulo límite $\hat{L}$). Luego, los rayos mayores al $\hat{L}$ ya no se refractan, todos se reflejan íntegramente. A este fenómeno se le denomina reflexión interna total.

Luego de la ley de Snell

$$n_1 \operatorname{sen}\hat{L}=n_2 \operatorname{sen}\hat{r}$$

Si $\hat{r}=90^\circ \rightarrow \operatorname{sen}\hat{r}=1$

$$\operatorname{sen}\hat{L}=\frac{n_2}{n_1}$$

OBSERVACIÓN

El vidrio conduce la luz debido al fenómeno de la reflexión interna; de la misma manera las fibras ópticas conducen las ondas electromagnéticas.

7. Lentes

Hasta ahora solo se ha estudiado la refracción de la luz en el límite plano o curvo entre dos sustancias transparentes. Pero, en la práctica, el fenómeno de la refracción de la luz se utiliza en sustancias transparentes (vidrio, plástico), delimitados por dos superficies, donde por lo menos una es curva. Estas sustancias reciben el nombre de lentes y las encontramos en los anteojos, telescopios, microscopios, etc.

Las lentes utilizadas en los anteojos, o los de contacto, sirven para compensar diversos defectos de la visión (miopía, hipermetropía). En los telescopios y microscopios, para ver en mayor tamaño objetos que a simple vista son imperceptibles o están muy lejanos.

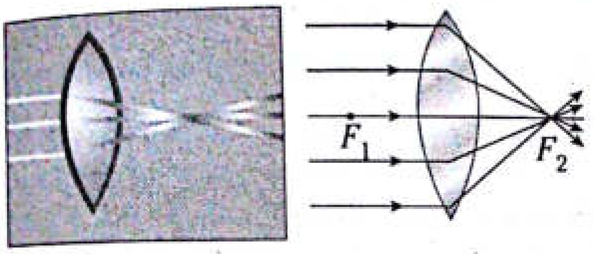
Las lentes pueden tener diversas formas, esto dependerá de las superficies que la limitan. En el presente estudio de las lentes analizaremos aquellas cuyas superficies son esféricas: **lentes esféricas**. Asimismo, estudiaremos el caso más simple, en el cual el espesor de la lente es despreciable, por su pequeñez en comparación con los radios de las superficies que limitan la lente y con la distancia del objeto a la lente. Esta lente se llama **lente delgada**. En adelante siempre que nos hablen de una lente, se sobreentiende que es delgada.

Las lentes esféricas pueden ser convergentes o divergentes.

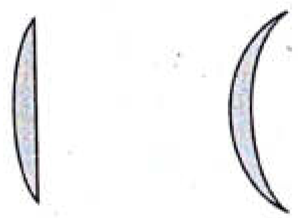
7.1. LENTES CONVERGENTES

Llamadas también lentes biconvexas. Son aquellas que se caracterizan por hacer concurrir (converger) en un punto los rayos paralelos que inciden en una de sus caras.

Las lentes convergentes se distinguen por tener sus bordes más delgados que su parte central.



Los haces de luz atraviesan la lente convexa, se refractan y convergen en el foco de la lente. Pueden ser lente plano-convexa o lente convexa-cóncava.



lente plano-convexa

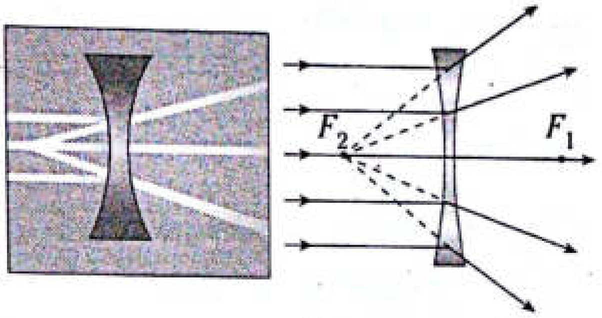
lente convexa-cóncava (menisco convergente)

Observación

La lupa es una lente convergente, la cual viene a ser cuerpo transparente que nos permite amplificar las dimensiones de las imágenes que vemos debido a que el rayo de luz al pasar del aire al vidrio, cambia aparentemente el tamaño de la letra.

7.2. LENTES DIVERGENTES

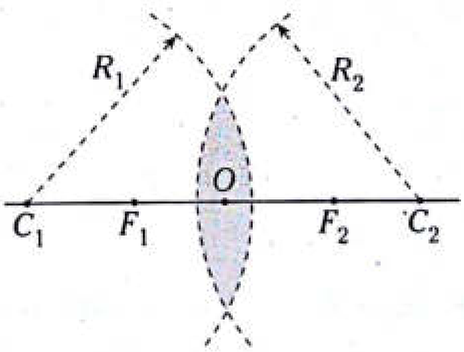
Llamadas también lentes bicóncavas. Son aquellas que se caracterizan por hacer divergir los rayos paralelos que inciden en una de sus caras. La divergencia de los rayos en la lente se hace de tal forma que la prolongación de los rayos refractados concurren en un punto.



Observación

- El punto donde convergen los rayos refractados (o sus prolongaciones) provenientes del objeto, se llama foco principal (F) de la lente.
- El foco de una lente puede estar a uno u otro lado de la lente, esto quiere decir que una lente tiene dos focos.

7.3. ELEMENTOS DE UNA LENTE ESFÉRICA



- En la lente hay dos centros de curvatura (C_1 y C_2) que corresponden a los centros de las superficies esféricas que delimitan la lente.
- La recta $\mathscr{L}$ que pasa por los centros de curvatura se llama eje principal.

- R_1 y R_2 son los radios de curvatura de las caras de la lente.
- F_1 y F_2 son los focos de la lente.
- O es el centro óptico de la lente. Este punto se caracteriza porque todo rayo dirigido hacia él prácticamente no experimenta desviación.
- La distancia desde el centro óptico hasta el foco principal de la lente se llama distancia focal (f).

donde

$$f\begin{cases}(+): \text{ si la lente es convergente}\\(-): \text{ si la lente es divergente}\end{cases}$$

7.4. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN LENTES

Para formar la imagen de un punto del objeto en una lente delgada, es suficiente con interceptar dos rayos refractados o las prolongaciones de dos rayos refractados provenientes del objeto.
Los rayos provenientes del objeto que nos permitirán determinar la imagen del objeto son los siguientes:

- **Rayo paralelo**. Es paralelo al eje principal, el cual al refractarse en la lente pasará él o su prolongación por una de los focos de la lente.

- **Rayo central.** Es aquel que pasa por el centro óptico de la lente; se refracta, pero no se desvía.

Observación

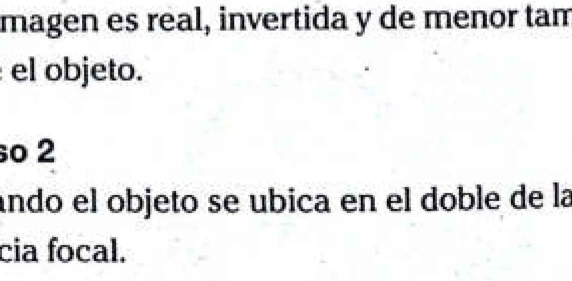
Para formar la imagen del objeto debe formarse la imagen de cada uno de los puntos pertenecientes al objeto. Pero esta tarea es muy tediosa; por ello, consideraremos objetos perpendiculares al eje principal, de tal manera que su imagen también será perpendicular al eje principal.

7.4.1. Formación de imágenes en lentes convergentes

Cuando un objeto se coloca frente a una lente convergente, las características de la imagen que se forma pueden ser diversos (cinco casos); esto dependerá de la ubicación del objeto.

Caso 1

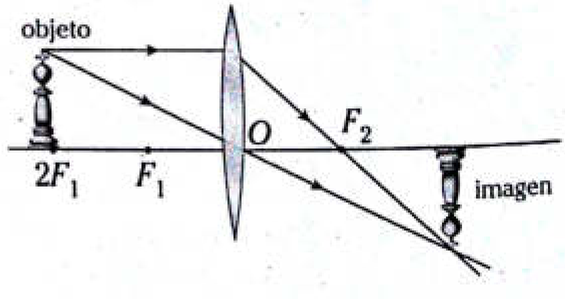
Cuando el objeto se ubica más allá del doble de la distancia focal.



La imagen es real, invertida y de menor tamaño que el objeto.

Caso 2

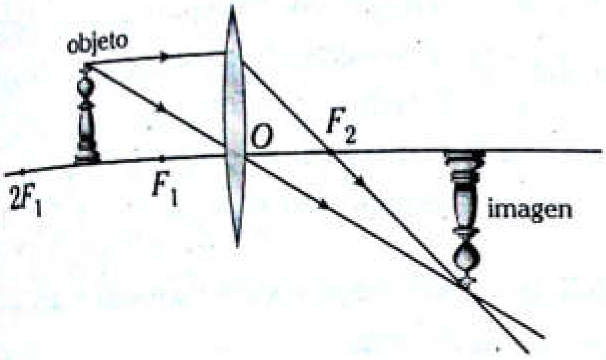
Cuando el objeto se ubica en el doble de la distancia focal.



La imagen es real, invertida y de igual tamaño que el objeto.

Caso 3

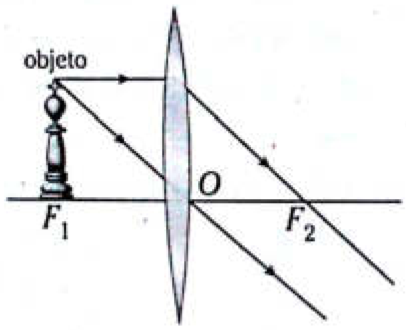
Cuando el objeto se ubica entre $2F_1$ y el foco.



La imagen es real (necesita una pantalla para verlo), invertida y de mayor tamaño.

Caso 4

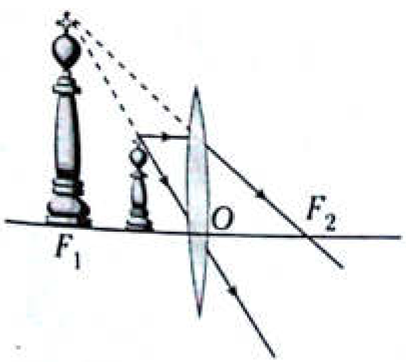
Cuando el objeto se ubica en uno de los focos de la lente



En este caso no se forma ninguna imagen, puesto que los rayos refractados nunca se cortan.

Caso 5

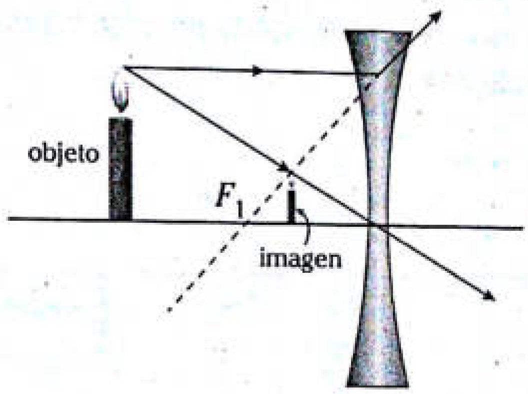
Cuando el objeto se encuentra entre el F y la lente.



La imagen es virtual, derecha y de mayor tamaño; este es el caso de la lupa.

7.4.2. Formación de imágenes en lentes divergentes

Existe un solo caso.



En este caso no es posible interceptar los rayos refractados para formar la imagen, por ello es necesario prolongar los rayos refractados hasta que se intercepten.

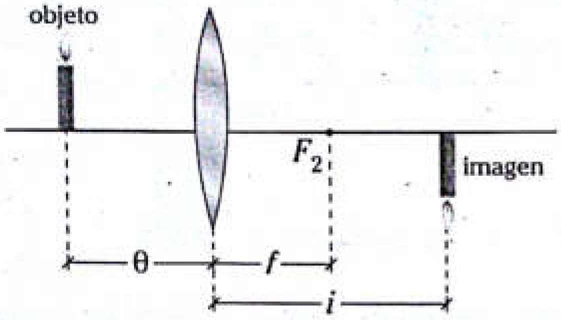
La imagen siempre es virtual y de menor tamaño. Las lentes divergentes tienen diversas aplicaciones y se emplean como lentes correctivas de miopía y también las encontramos en las mirillas de las puertas.

OBSERVACIÓN

En una lente divergente la imagen que se forma siempre tiene las mismas características: virtual, derecha y de menor tamaño.

7.5. ECUACIONES DE LAS LENTES DELGADAS

Así como en los espejos existe una ecuación que relaciona la distancia focal (f), la distancia imagen (i) y la distancia objeto (θ), en las lentes delgadas tenemos ecuaciones análogas; estas son las siguientes



7.5.1. Ecuación de los focos conjugados

$$\boxed{\frac{1}{f}=\frac{1}{i}+\frac{1}{\theta}}$$

donde

- $f(+)$: lente convergente
- $f(-)$: lente divergente

Además, si

- $i(+)$, la imagen es real.
- $i(-)$, la imagen es virtual.

  θ siempre es positiva.

7.5.2. Ecuación del aumento lineal (A)

$$\boxed{|A|=\frac{\text{altura de la imagen}}{\text{altura del objeto}}=\frac{h_i}{h_\theta}}$$

donde $\boxed{A=-\dfrac{i}{\theta}}$

Si

- A es (+), la imagen es derecha.
- A es (–), la imagen es invertida.

Además, si

$$|A|\begin{cases} =1, & \text{la imagen es de igual tamaño que el objeto.}\\ >1, & \text{la imagen es de mayor tamaño que el objeto.}\\ <1, & \text{la imagen es de menor tamaño que el objeto.}\end{cases}$$

7.5.3. Ecuación de la distancia focal o ecuación del fabricante

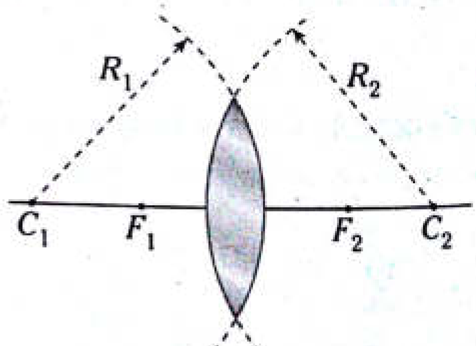
$$\boxed{\frac{1}{f}=\left(\frac{n_L}{n_m}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}$$

donde:

- f : distancia focal de la lente
- $n_L; n_m$: índices de refracción de la sustancia con la que se construye la lente (índice de refracción de la lente), y del medio donde se encuentra la lente.
- $R_1; R_2$: radios de curvatura de las caras de la lente.

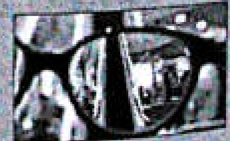
Además,

$$R\begin{cases} (-) \text{ si la cara es cóncava.}\\ (+) \text{ si la cara es convexa.}\end{cases}$$



OBSERVACIÓN

Estos lentes de anteojos satisfacen la aproximación de la lente delgada; su espesor es pequeño en comparación con las distancias de objeto y de imagen.



7.5.4. Ecuación de las potencia de una lente (P)

La potencia óptica nos expresa la potencia de una lente (o poder de convergencia) y se define como la inversa de la distancia focal.

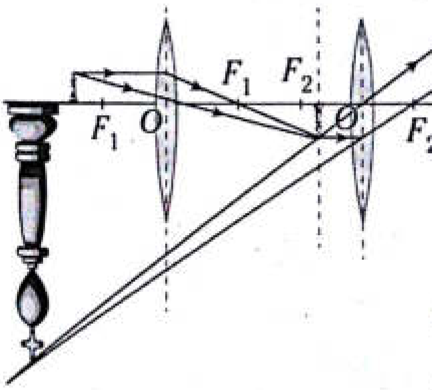
$$\boxed{P=\frac{1}{f}}$$ Unidad: dioptría $<>m^{-1}$

donde

f: distancia focal

7.5.5. Combinación de lentes delgadas

Se emplean para determinar la imagen final. Se considera a las lentes en forma individual, donde la imagen formada por la primera lente es el objeto de la segunda lente.



microscopio compuesto

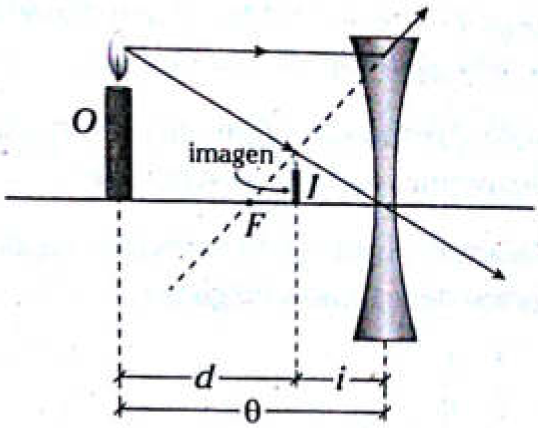
Aplicación 3

Un objeto se coloca a 60 cm frente a una lente divergente, cuya distancia focal es 20 cm. Determine a qué distancia del objeto se forma la imagen.

Resolución

Nos piden d.

Representemos gráficamente al objeto y a su imagen.



Se observa que

$$d=|\theta|-|i|. \qquad (*)$$

Calculamos i.

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{i}+\frac{1}{\theta} \rightarrow \frac{1}{-20}=\frac{1}{i}+\frac{1}{60}$$

$\rightarrow \quad i=15$ cm

Reemplazamos en (*).

$$d=60-15=45 \text{ cm}$$

Por lo tanto, la imagen aparece a 45 cm del objeto.

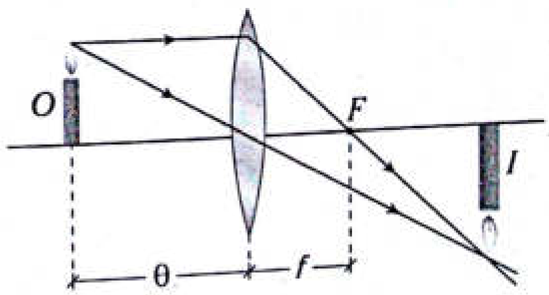
Aplicación 4

Una vela de 30 cm de largo se coloca a una distancia de 30 cm frente a una lente convergente, cuya distancia focal es 20 cm. Determine las características de la imagen que se forma y su altura.

Resolución

Nos piden h_i.

Representamos gráficamente al objeto y a su imagen.



Se nota gráficamente que la imagen que se forma es real, invertida y de mayor tamaño.

Este mismo resultado se puede determinar matemáticamente, veamos lo siguiente:

Calculamos la distancia de la imagen i aplicando la ecuación de las lentes delgadas.

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{i}+\frac{1}{\theta}$$

$$\frac{1}{+20}=\frac{1}{i}+\frac{1}{+30}$$

$\therefore \quad i=+60$ cm

Como la distancia de la imagen es (+), indica que es una imagen real.

- A continuación, calculamos el aumento.

$$A=-\frac{i}{\theta}=-\frac{60}{30}=-2$$

Como el aumento es (–), esto nos indica que es imagen invertida; además, por ser $|A|>1$ es imagen de mayor tamaño.

Finalmente, calculamos la altura de la imagen.

$$|A|=\frac{h_i}{h_\theta}$$

$$2=\frac{h_i}{30}$$

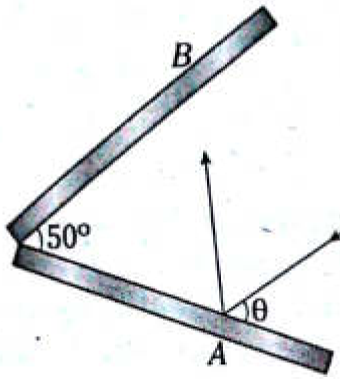
$\therefore \quad h_i=60$ cm

Observación

Para determinar las características de la imagen de un objeto, podremos hacerlo gráficamente o matemáticamente. La forma gráfica requiere que se domine el método de construcción de imágenes, y esto se logra con la práctica.

Problema N.° 1

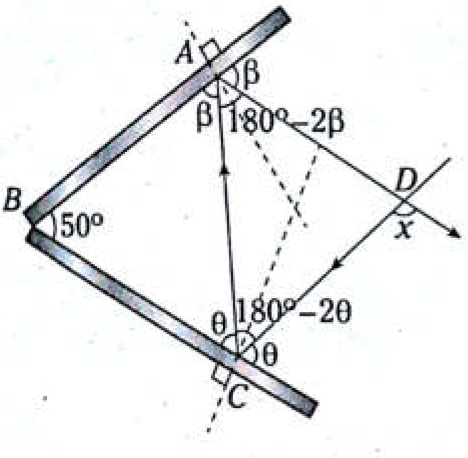
Si sobre el espejo A incide un rayo tal como se muestra, ¿qué ángulo formará el rayo reflejado en B con el que incide en A?



Resolución

Nos piden x.

Graficamos la trayectoria del rayo luminoso y aplicamos la ley de la reflexión.



Del gráfico, para el $\triangle ADC$, se tiene que

$x=(180°-2\beta)+(180°-2\theta)$

$x=360°-2(\beta+\theta)$ (*)

En el $\triangle ABC$

$50°+\beta+\theta=180°$

$\rightarrow$ $\beta+\theta=130°$

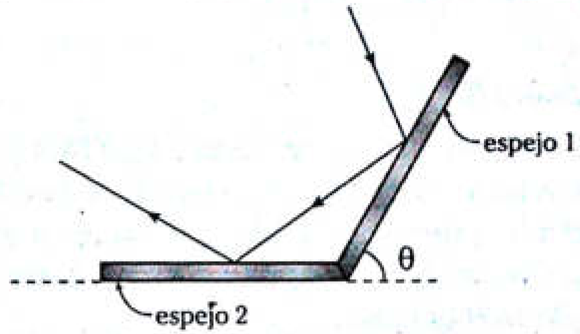
Reemplazamos en (*).

$x=360°-2(130°)$

$\therefore$ $x=100°$

Problema N.° 2

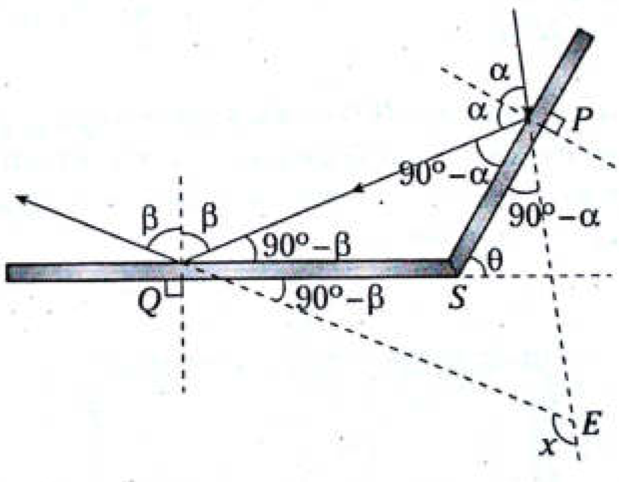
El gráfico muestra dos espejos planos. Indique el ángulo formado entre el rayo incidente y el último rayo reflejado.



Resolución

Nos piden $\hat{x}$.

Analizamos el fenómeno de reflexión en los puntos P y Q correspondiente a los espejos planos; así



Sea $\hat{x}$ el ángulo que forman el rayo incidente con el último rayo reflejado en Q.

En el $\triangle PSQ$, θ es ángulo exterior; entonces

$\rightarrow$ $\theta=(90°-\beta)+(90°-\alpha)$

$\alpha+\beta=180°-\theta$ (I)

Análogamente, en el $\triangle PEQ$, si $\hat{x}$ es ángulo exterior, entonces

$\hat{x}=(180°-2\beta)+(180°-\alpha)$

$\hat{x}=360°-2(\alpha+\beta)$ (II)

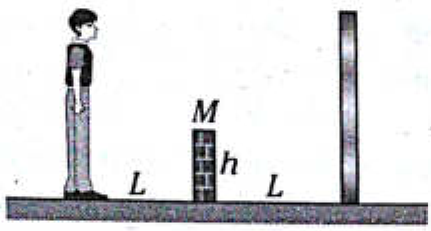
Reemplazamos (I) en (II).

$$\hat{x}=360°-2(180°-\theta)$$

$\therefore\quad x=2\theta$

Problema N.° 3

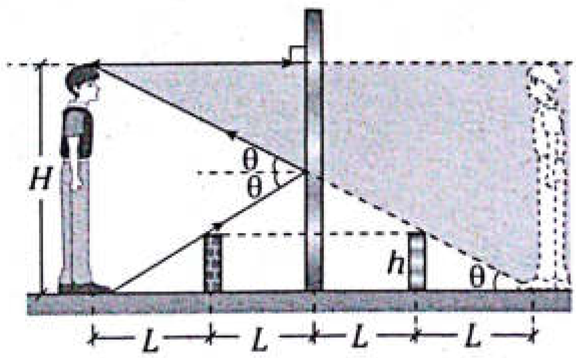
Entre el joven y el espejo se tiene un muro (M). Determine la máxima altura del muro, de tal forma que la persona pueda ver su imagen completa. Considere que sus ojos se encuentran a una altura H del piso.



Resolución

Nos piden h.

La altura máxima (h) del muro será aquella que le permita ver completamente su imagen en el espejo, para ello como mínimo debemos trazar dos rayos luminosos.



La región sombreada nos representa el campo visual del joven.

Luego del gráfico, tenemos que

$$\tan\theta=\frac{h}{L}=\frac{H}{4L}$$

$$\therefore\quad h=\frac{H}{4}$$

Problema N.° 4

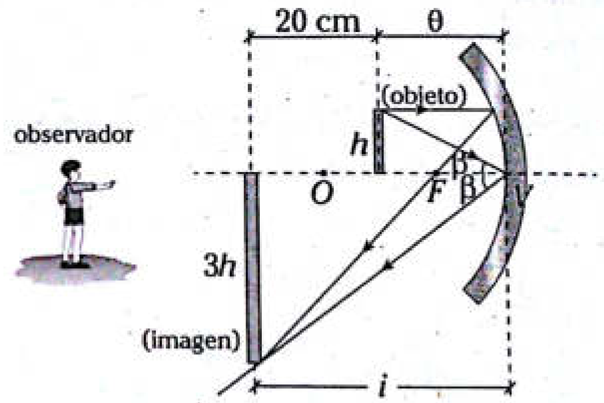
Un espejo esférico cóncavo produce una imagen real tres veces mayor que el objeto. Determine la distancia focal del espejo, en cm, si la distancia entre el objeto y su imagen es 20 cm.

UNI 2008 - II

Resolución

Nos piden f.

Para un espejo cóncavo, la imagen es real y de mayor tamaño cuando el objeto se ubica entre el foco y el centro óptico del espejo. A continuación, formemos la imagen según los datos dados en el enunciado.



Aplicamos

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{i}+\frac{1}{\theta}\qquad\text{(I)}$$

Además,

$i>0$ (imagen real)

Del gráfico,

$$i=\theta+20\text{ cm}\qquad\text{(II)}$$

Por otro lado,

$$\tan\beta=\frac{3\cancel{h}}{i}=\frac{\cancel{h}}{\theta}$$

$$\rightarrow\quad i=3\theta\qquad\text{(III)}$$

Reemplazamos (III) en (II).

$$3\theta=\theta+20\text{ cm}$$

$$\rightarrow\quad \theta=10\text{ cm}$$

En (III)

i=30 cm

Finalmente i, θ en (I).

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{\oplus 30\text{ cm}}+\frac{1}{10\text{ cm}}$$
└→ imagen real

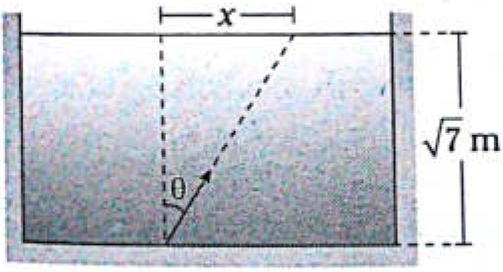
Operamos

∴ $f=\oplus 7{,}5$ cm
└→ concuerda con un espejo cóncavo

Problema N.° 5

Una linterna envía una haz de luz muy delgado desde el fondo de una piscina hacia la superficie. La linterna gira en un plano vertical de manera que el ángulo θ varía desde θ=0° hasta θ=90°. Halle el mayor valor de x, en metros, del cual la luz logra emerger de la piscina.

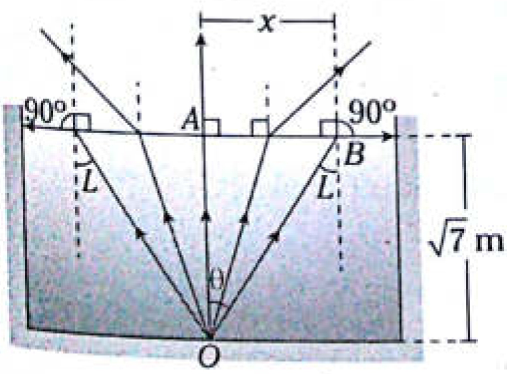
(Índice de la refracción del agua: n=4/3)



Resolución

Nos piden x.

Graficamos los posibles trayectos del haz de luz que incide en la interfase (aire-agua).



Cuando la linterna gira un ángulo θ mayor al ángulo límite $\hat{L}$, la luz deja de emerger experimentando reflexión total, siendo x la máxima distancia respecto de A por donde la luz refractase.

En el ⊿OAB

$$x=\sqrt{7}\tan\hat{L} \qquad \text{(I)}$$

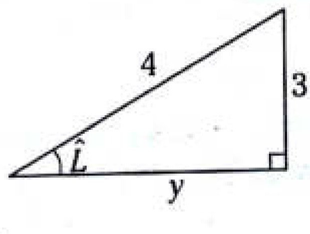
Por la ley de Snell, en B

$$n_{H_2O}\operatorname{sen}\hat{L}=n_{aire}\operatorname{sen}\hat{R}$$

$$\frac{4}{3}\operatorname{sen}\hat{L}=1\times\operatorname{sen}90°$$

$$\rightarrow \quad \operatorname{sen}\hat{L}=\frac{3}{4}$$

Entonces



Del teorema de Pitágoras

$$y=\sqrt{4^2-3^2}$$

$$y=\sqrt{7} \quad\rightarrow\quad \tan\hat{L}=\frac{3}{y}=\frac{3}{\sqrt{7}} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I).

$$x=\sqrt{7}\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)$$

∴ x=3 m

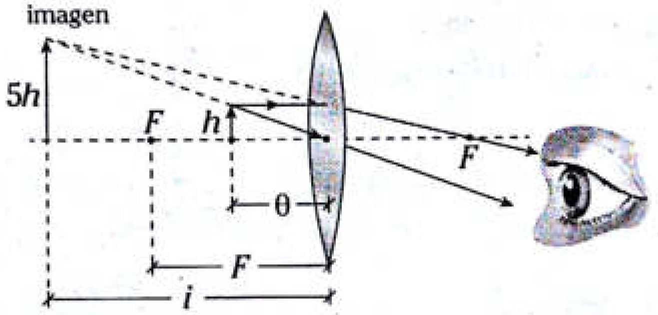
Problema N.° 6

Una lupa de 4 cm de distancia focal se emplea para ampliar un objeto 5 veces. ¿A qué distancia de la lupa debe colocarse el objeto?

Resolución

Nos piden θ.

Para utilizar una lente como lupa, el objeto debe estar muy cerca a la lente (entre la lente y su foco).



Como

$$h_{\text{imagen}}=5h_{\text{objeto}}$$

$\rightarrow \quad |i|=5\theta$

Por la ecuación de Descartes

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{i}+\frac{1}{\theta}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{-5\theta}+\frac{1}{\theta}$$

$\therefore \quad \theta=3{,}2$ cm

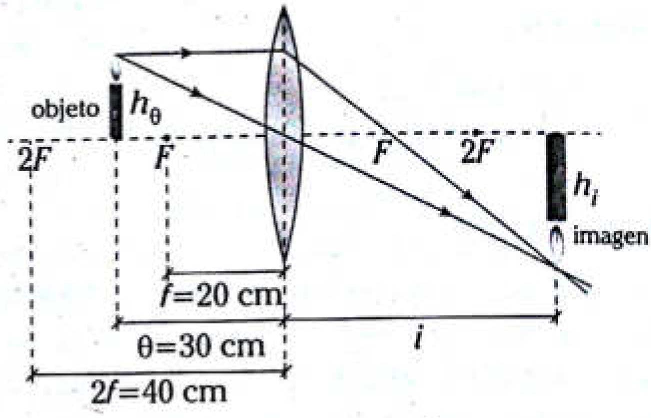
Problema N.° 7

Un objeto de 4 cm de altura se coloca frente a una lente convergente, de distancia focal 20 cm, a una distancia de 30 cm. Calcule la altura de la imagen.

Resolución

Nos piden h_i.

El objeto está ubicado a una distancia θ=30 cm, es decir, se encuentra entre los puntos F y $2F$, como se muestra en el gráfico. A partir de ello, formamos la siguiente imagen.



Nos piden la altura de la imagen (h_i).

$$\frac{h_i}{h_\theta}=\frac{|i|}{\theta}$$

Por dato

$$h_\theta=4 \text{ cm}$$

$$\frac{h_i}{4}=\frac{|i|}{30} \rightarrow h_i=\frac{2}{15}|i| \qquad \text{(I)}$$

Por la ecuación de Descartes

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{i}+\frac{1}{\theta}$$

$$\frac{1}{20}=\frac{1}{i}+\frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{20}-\frac{1}{30}=\frac{1}{i} \rightarrow i=+60 \text{ cm} \qquad \text{(II)}$$

El signo (+) de la distancia imagen (i) indica que la imagen es real, tal como se verifica en el gráfico.

Reemplazamos (II) en (I).

$$h_i=\frac{2}{15}(60)$$

$\therefore \quad h_i=8$ cm

Problema N.° 8

Un objeto se encuentra ubicado frente a una lente, de manera que su imagen presenta un aumento lineal de +2.

Luego, el objeto es desplazado 45 cm (paralelo al eje óptico principal) y el aumento lineal de la imagen resulta ser –1. Determine la distancia focal de la lente.

Resolución

Nos piden f.

En principio se señaló que el aumento lineal de la primera imagen es +2 (imagen de doble tamaño que el objeto y por el signo (+) resulta ser derecha, esto significa que es virtual). Esta característica solo se puede lograr si la lente es convergente con el objeto ubicado entre el foco y la lente.

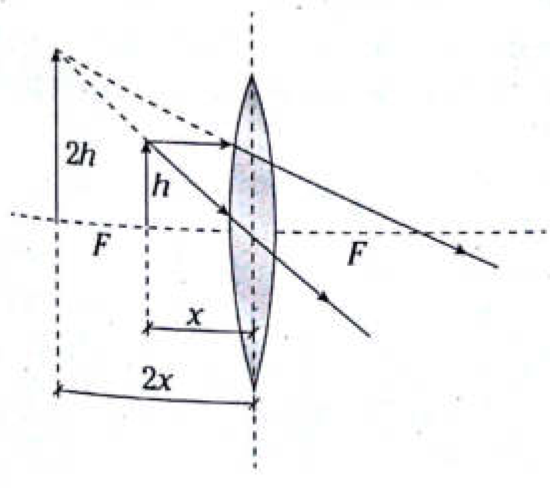
Recuerde que los lentes divergentes solo pueden formar imágenes virtuales, derechas y más pequeñas.

Realizamos la construcción de la imagen.

Como $h_{imagen}=2h_{objeto}$

$\rightarrow \ |i|=2\theta=2x$

La distancia imagen será negativa porque la imagen es virtual.

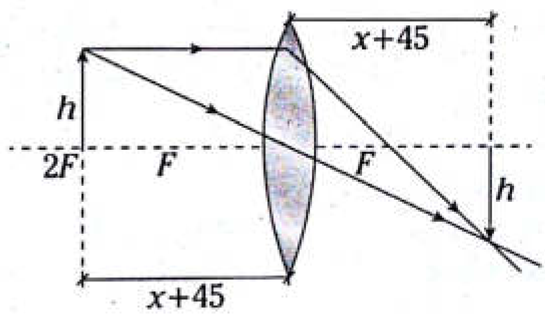


Por la ecuación de Descartes

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{\theta}+\frac{1}{i} \rightarrow \frac{1}{f}=\frac{1}{x}+\frac{1}{-2x}$$

$$f=+2x \qquad \text{(I)}$$

Ahora, para el segundo caso el objeto debe ser desplazado 45 cm de la lente, de manera que la imagen presente un aumento lineal de –1. Esto significa que la imagen presenta la misma altura del objeto e invertida. Por lo tanto, tiene que ser real. Esta característica de la imagen solo ocurre si el objeto se ubica a una distancia $2f$ de la lente.



Como las alturas de la imagen y el objeto son iguales, también lo serán sus distancias hacia la lente.

Del gráfico

$$2f=x+45 \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$2(2x)=x+45$$

$$\rightarrow \ x=15 \text{ cm}$$

Reemplazamos en (I).

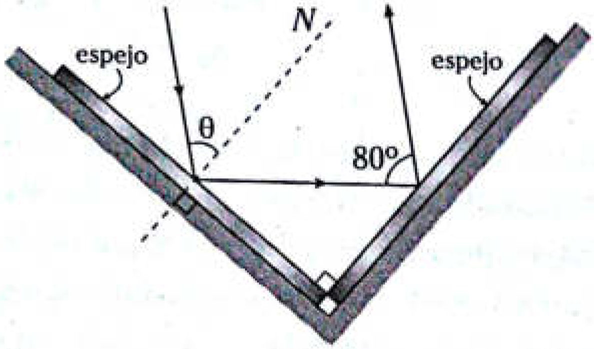
$$f=2(15)=\underset{\substack{\uparrow \\ \text{La lente es convergente.}}}{+}30 \text{ cm}$$

$$\therefore \ f=30 \text{ cm}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

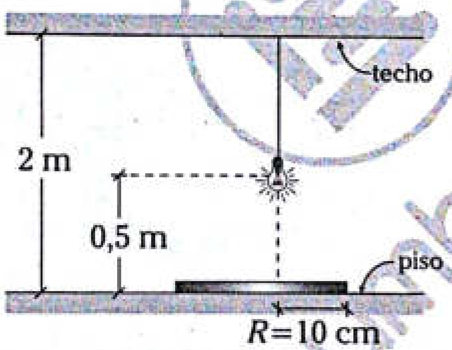
NIVEL BÁSICO

1. Dos espejos planos forman un ángulo de 90°. Si un rayo de luz incide y se refleja en ambos espejos, halle θ.



A) 20° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 100°

2. Sobre el piso se muestra un espejo plano circular de radio R. Determine el diámetro de la mancha luminosa en el techo.



A) 1 m
B) 0,8 m
C) 0,6 m
D) 0,4 m
E) 0,2 m

3. Un objeto de 10 cm de altura, se coloca a 20 cm de un espejo cóncavo, cuyo radio de curvatura es 60 cm. ¿Qué altura tendrá su imagen?

A) 10 cm B) 20 cm C) 30 cm
D) 40 cm E) 50 cm

4. ¿Qué tipo de imagen forma un objeto que se encuentra a 5 cm de distancia de un espejo cóncavo de 10 cm de distancia focal?

A) real - invertida
B) real - derecha
C) virtual - invertida
D) virtual - derecha
E) el aumento es infinito

UNI 2006 - I

5. Un objeto de 3 cm de altura se sitúa a 20 cm de un espejo convexo que tiene una distancia focal de 8 cm. Calcule, en centímetros, la altura de la imagen.

A) 0,86 B) 1,21 C) 1,84
D) 2,3 E) 2,6

UNI 2007 - II

6. Se tiene un espejo esférico cóncavo de radio de curvatura 20 cm. Si un objeto se ubica a 5 cm del espejo, ¿cuál será la distancia entre dicho objeto y su imagen?

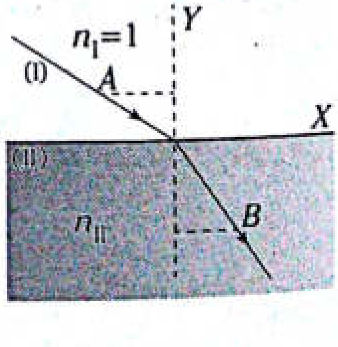
A) 5 cm B) 10 cm C) 15 cm
D) 20 cm E) 25 cm

7. Un objeto es colocado a 6 cm de un espejo esférico y se obtiene una imagen con un aumento de −5.
Respecto al enunciado, indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F).
I. La imagen del objeto es virtual.
II. El espejo es cóncavo y su radio de curvatura es 10 cm.
III. La distancia entre el objeto y su imagen es 30 cm.

A) VFV B) VFF C) FVF
D) FVV E) VVF

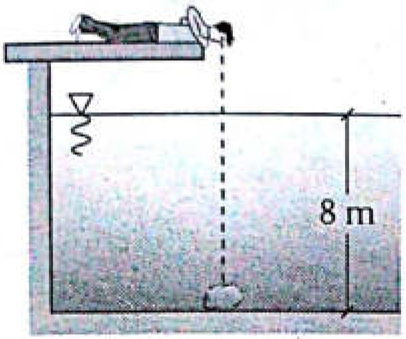
8. Se desea que un rayo de luz que pasa por el punto $A(-\sqrt{3};1)$ en el medio (I), de índice de refracción $n_1=1$, pase por el punto $B(1;-\sqrt{3})$ del medio (II). ¿Qué valor debe tener el índice de refracción del medio (II)?

A) 1
B) $\sqrt{2}$
C) $\sqrt{3}$
D) 2
E) $\sqrt{5}$



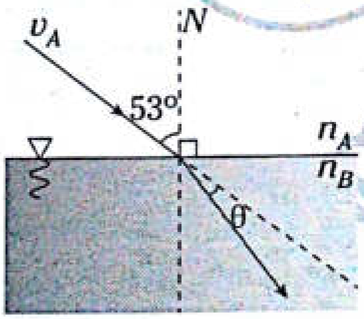
9. Una piedra sumergida en un estanque con agua es observada desde arriba, según se muestra en el gráfico. ¿A qué profundidad ve la persona dicha piedra? ($n_{agua}=4/3$)

A) 2 m
B) 4 m
C) 5 m
D) 6 m
E) 7 m



10. Un rayo luminoso se propaga en un medio A con una rapidez $v_A=8\times10^7$ m/s e incide con un ángulo de 53° en la superficie de un medio B, en el que se refracta propagándose allí con una rapidez de 6×10^7 m/s. Halle la desviación θ que experimenta el rayo luminoso al experimentar refracción.

A) 8°
B) 15°
C) 16°
D) 7°
E) 23°



11. Una lente de +3 de aumento tiene una distancia focal de +30 cm. Determine a qué distancia de la lente se ubica la imagen del objeto:

A) 140 cm
B) 120 cm
C) 100 cm
D) 80 cm
E) 60 cm

12. Una lente de potencia óptica –2D se ubica a 150 cm de una varilla vertical de 24 cm de altura. ¿Cuál es la altura de la imagen que se forma?

A) 12 cm
B) 8 cm
C) 6 cm
D) 16 cm
E) 48 cm

13. Si la imagen real de un objeto es del doble de tamaño, y se forma a 20 cm de una lente, determine la potencia de dicha lente.

A) 5 dioptrías
B) 10 dioptrías
C) 15 dioptrías
D) 20 dioptrías
E) 25 dioptrías

14. La estatua de 1,86 m de altura, que representa a una persona de pie, está ubicada a 5 m frente a una cámara equipada con una lente de 40 mm de longitud focal. ¿Cuál es la altura de la imagen nítida formada sobre la película?

A) 1,5 cm
B) 1,1 cm
C) 1,8 cm
D) 2 cm
E) 1,9 cm

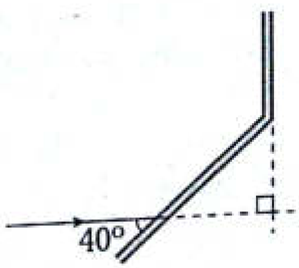
15. Un objeto de 10 cm de altura está ubicado frente a una lente biconvexa, obteniéndose una imagen real de 15 cm de altura. Si la separación entre el objeto y su imagen es 50 cm, calcule la distancia focal de la lente.

A) 8 cm
B) 15 cm
C) 12 cm
D) 16 cm
E) 20 cm

NIVEL INTERMEDIO

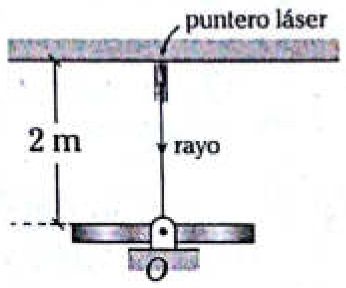
16. Un rayo de luz incidente se refleja en 2 superficies planas y altamente reflectantes. Determine cuántos grados se desvía el rayo reflejado en la segunda superficie respecto del rayo incidente inicial.

A) 40°
B) 50°
C) 80°
D) 100°
E) 120°



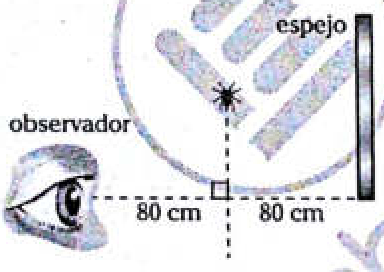
17. Un espejo plano se encuentra a 2 m por debajo de un puntero láser. Si el espejo gira en sentido horario alrededor del punto O un ángulo de 30°, determine a qué distancia del puntero se proyecta su reflejo en el techo.

A) 2 m
B) 1 m
C) 0,5 m
D) $2\sqrt{3}$ m
E) $\sqrt{3}$ m



18. El observador ve pasar la imagen de la araña en el espejo de 60 cm de alto durante 6 s. Determine la rapidez con la que baja dicha araña. Considere que realiza un MRU.

A) 10 cm/s
B) 15 cm/s
C) 25 cm/s
D) 12 cm/s
E) 20 cm/s



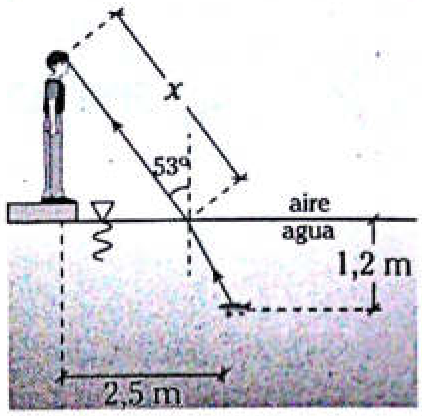
19. Un espejo convexo tiene 80 cm de radio de curvatura. ¿A qué distancia, en centímetros, de la superficie del espejo debe colocarse un objeto para que el tamaño de su imagen sea el 40% del tamaño del objeto?

A) 20 B) 30 C) 40
D) 50 E) 60

20. Un objeto se encuentra frente a un espejo esférico, de manera que su imagen es del doble de tamaño. Si el objeto se aleja del espejo 5 cm más, su imagen desaparece. Determine el radio de curvatura del espejo.

A) 5 cm B) 10 cm C) 20 cm
D) 25 cm E) 40 cm

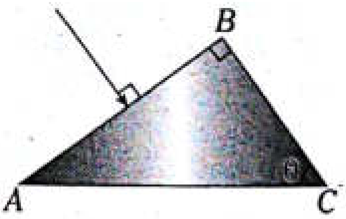
21. Un niño parado en un muelle tal como se muestra, logra ver un pez en el agua. Determine el valor de x. ($n_{H_2O}=4/3$)



A) 1,5 m B) 2,5 m C) 2,0 m
D) 3,0 m E) 2,4 m

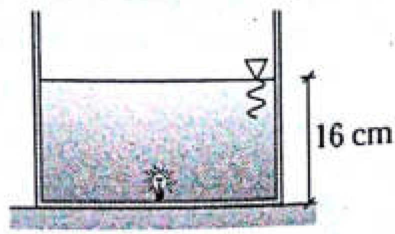
22. Un rayo de luz incide normalmente sobre la cara AB de un prisma transparente cuyo índice de refracción es 1,25. Determine el mayor del ángulo θ para que el rayo se refleje totalmente en la cara AC.

A) 16°
B) 37°
C) 22,5°
D) 53°
E) 45°



23. En el fondo de un recipiente se ha instalado una lámpara, de modo que en la superficie libre del líquido transparente se forma un círculo oscuro visto desde el interior. Determine el radio de este círculo. ($n_{líq}=5/3$).

A) 8 cm
B) 16 cm
C) 9 cm
D) 12 cm
E) 15 cm



Física moderna

Capítulo XXI

Objetivos

- Conocer la naturaleza corpuscular de la radiación, así como cuantizar su energía.
- Entender los fenómenos de efecto fotoeléctrico y generación de rayos X.
- Aplicar las ecuaciones que gobiernan estos fenómenos, así como conocer sus aplicaciones prácticas.

1. Naturaleza corpuscular de la radiación

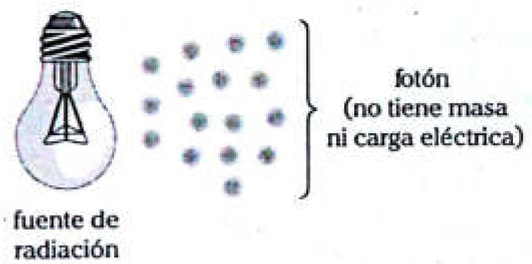
Cuando un cuerpo es calentado, emite radiación electromagnética en un amplio rango de frecuencias.

El **cuerpo negro** (ideal) es aquel que además absorbe toda la radiación que llega a él sin reflejarla, de tal forma que solo emite la correspondiente a su temperatura.

A fines del siglo XIX fue posible medir la radiación de un cuerpo negro con mucha precisión. La intensidad de esta radiación puede en principio ser calculada utilizando las leyes del electromagnetismo. El problema, a principios del siglo XX, consistía en que si bien el espectro teórico y los resultados experimentales coincidían para bajas frecuencias (infrarrojo), estos diferían radicalmente a altas frecuencias. Este problema era conocido con el provocativo nombre de la catástrofe ultravioleta, ya que la predicción teórica diverge a infinito en ese límite.

Quien logró explicar este fenómeno fue Max Planck, en 1900, que debió para ello sacrificar los conceptos básicos de la concepción ondulatoria de la radiación electromagnética.

Para resolver la catástrofe era necesario aceptar que la radiación no es emitida de manera continua, sino en cuantos de energía discreta a los que llamamos fotones.



La energía de un fotón es proporcional a la frecuencia de la radiación.

$$\boxed{E_{fotón} = hf}\text{; unidad: joule (J)}$$

donde

- f: frecuencia, en Hz
- h: constante de Planck

Su valor es

$$h = 6{,}625 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$$

$$h = 4{,}14 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s}$$

NOTA

En el vacío, la radiación se propaga con rapidez $c=3\times10^8$ m/s, entonces se cumple

$c=\lambda f$

Despejando obtenemos

$f=\dfrac{c}{\lambda}$

Reemplazamos en la ecuación de la energía del fotón y se tiene

$$\boxed{E_{\text{fotón}}=\frac{hc}{\lambda}}$$

2. Potencia de la radiación

Consideremos un haz de radiación, de frecuencia f y longitud de onda λ.

En dicho haz, se tiene un determinado número de fotones que emite la fuente de radiación, que depende de la potencia de la radiación.

Se determina así

$$\boxed{P=\frac{E_{\text{radiación}}}{\Delta t}} \qquad (*)$$

Unidad de medida: watt (W)

Como

$$E_{\text{radiación}}=nhf=\frac{nhc}{\lambda}$$

entonces reemplazando en (*), obtenemos

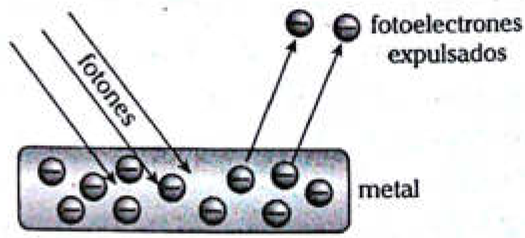
$$\boxed{P=\frac{nhf}{\Delta t}} \quad \vee \quad \boxed{P=\frac{nhc}{\Delta t\lambda}}$$

3. Efecto fotoeléctrico

Consiste en la emisión de electrones desde un material al incidir sobre este una radiación electromagnética.

El efecto fotoeléctrico fue descubierto y descrito por Heinrich Hertz, en 1887, al observar que el arco que salta entre dos electrodos conectados a alta tensión alcanza distancias mayores cuando se ilumina con luz ultravioleta que cuando se deja en la oscuridad.

Consideremos una radiación que incide sobre un metal.



Un electrón del metal necesita de una energía mínima para desprenderse de la superficie del metal; a esta energía se le denomina **función trabajo** (ϕ), dicho valor caracteriza al tipo de metal. A continuación se mencionarán algunas funciones trabajo, de metales, en unidad de electrón voltio.

Metal	ϕ (eV)
Na	2,46
Al	4,08
Cu	4,70
Zn	4,31
Ag	4,73
Pt	6,35
Pb	4,14
Fe	4,50

Los fotoelectrones al desprenderse tienen una energía cinética (E_C). La explicación teórica fue hecha por Albert Einstein, quien publicó en 1905 el revolucionario artículo "Heurística de la generación y conversión de la luz", basando su formulación de la fotoelectricidad en una extensión del trabajo sobre los cuantos de Max Planck. En 1921, Einstein recibe el Premio Nobel de Física por sus trabajos en el efecto fotoeléctrico.

La ecuación de Einstein, en el efecto fotoeléctrico, que representa la conservación de la energía es la siguiente:

$$\boxed{E_{\text{fotón}} = \phi + E_C}$$

¿Cómo se calcula la función trabajo (ϕ)?

En ocasiones será dato en la pregunta planteada, dependiendo del tipo de metal que sea; sin embargo, en algunas ocasiones lo podemos calcular de la siguiente manera:

Se considera que la frecuencia de la radiación es la mínima posible, **frecuencia umbral** (f_o), así la energía cinética del fotoelectrón que se arranca es prácticamente nula. Entonces, en la ecuación de Einstein se tiene lo siguiente:

$$E_{\text{fotón}} = \phi$$

$$\boxed{hf_o = \phi} \qquad (*)$$

NOTA

- Para que ocurra el efecto fotoeléctrico en un metal, la condición es que la frecuencia de la radiación incidente sea mayor o igual a la frecuencia umbral.

$$\boxed{f_{\text{radiación incidente}} \geq f_o}$$

Caso contrario, no ocurre tal fenómeno.

$$\boxed{f_{\text{radiación incidente}} < f_o}$$

- Para dicha frecuencia umbral o de corte, se asocia una longitud de onda de corte (λ_o), que es la máxima longitud de onda de la radiación para producir el efecto fotoeléctrico, donde

$$\lambda_o f_o = c$$

$$f_o = \frac{c}{\lambda_o}$$

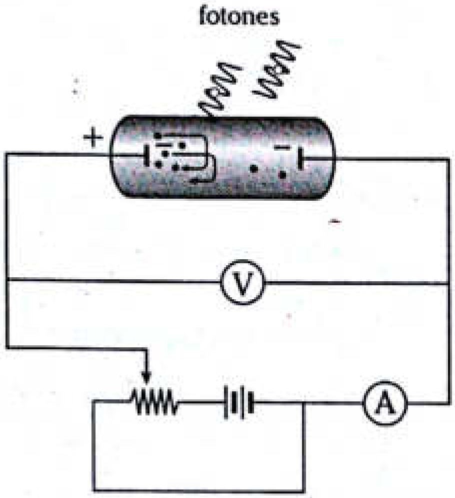
Reemplazando en la ecuación (*) se obtiene

$$\boxed{\frac{hc}{\lambda_o} = \phi}$$

¿Cómo se calcula la energía cinética de los fotoelectrones (E_C)?

A esta energía se le denomina **energía cinética máxima**, ya que posteriormente esta energía disminuirá, debido a lo que explicaremos a continuación.

Consideremos el siguiente circuito:



Los electrones son arrancados del ánodo, pero estos inmediatamente son frenados por el campo eléctrico que produce el voltaje entre ánodo y cátodo (voltaje de frenado o potencial de frenado), los fotoelectrones llegan a la otra placa, cátodo, con rapidez nula; por ello, el amperímetro (A) marca cero.

Debido a lo explicado, se cumple que

$$\boxed{E_{c(\text{máx})}=eV_0}$$

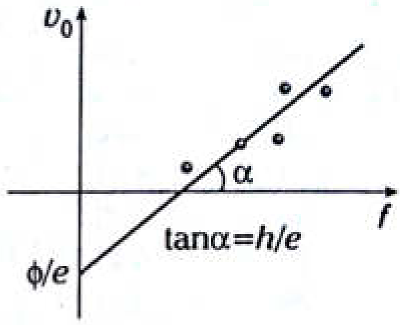
donde

- e: valor de la carga eléctrica del electrón ($1{,}6\times10^{-19}$ C)
- V_0: voltaje de frenado o potencial de frenado

3.1. GRÁFICA EN EL EFECTO FOTOELÉCTRICO

Variando la frecuencia f, se obtiene un conjunto de valores del potencial de frenado.

A continuación, el gráfico de potencial de frenado vs. frecuencia (que se aproximan a una línea recta).

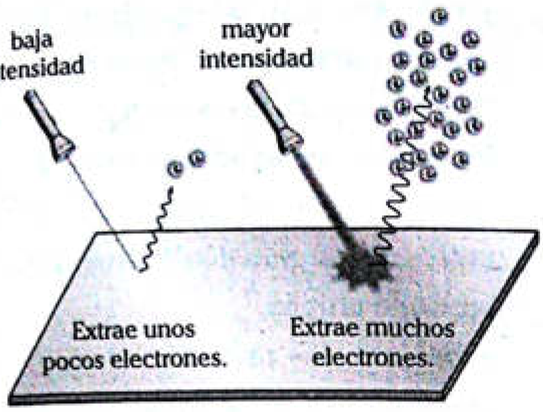


Los trabajos experimentales los realiza el físico estadounidense Robert Andrews Millikan, logrando confirmar las explicaciones de Einstein, motivo por el cual Millikan recibe el Premio Nobel de Física en 1923.

3.2. LEYES DE LA EMISIÓN FOTOELÉCTRICA

- Para cada metal dado, existe una cierta frecuencia mínima de radiación incidente debajo de la cual ningún electrón puede ser emitido. Esta frecuencia se llama frecuencia de corte, o frecuencia umbral.
- Por encima de la frecuencia de corte, la energía cinética máxima del fotoelectrón emitido es independiente de la intensidad de la radiación incidente, pero depende proporcionalmente de la frecuencia de dicha radiación.
- La cantidad de electrones emitidos por un metal no depende de la frecuencia de la radicación incidente, sino de su intensidad, de manera proporcional.

Luz ultravioleta (alta frecuencia)

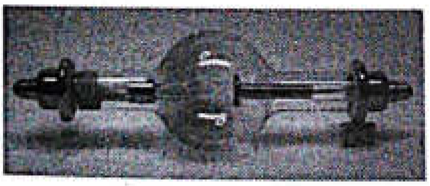


- La emisión del fotoelectrón se realiza de manera instantánea, independientemente de la intensidad de la luz incidente. Cada electrón del metal absorbe un fotón.

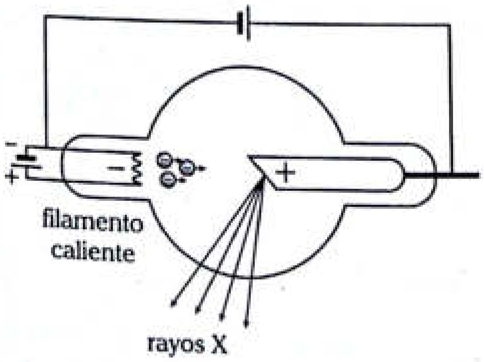
4. Rayos X

En 1895, Guillermo Conrado Roentgen, profesor de Física de la Universidad de Wurzburgo (Alemania), descubrió el efecto más importante que originan los rayos catódicos (radiación de electrones en gases enrarecidos): la generación de rayos X.

¿Cómo se generan los rayos X?
Consideremos un tubo de rayos X.



Esquema simplificado del tubo de rayos X



En el cátodo, se tiene un material termoiónico, es decir, desprende electrones a elevada temperatura. Estos electrones desprendidos, a energía cinética cero, son acelerados por la diferencia del potencial entre ánodo y cátodo del tubo (en el orden de 10^3 V), motivo por el cual los electrones altamente energéticos (del orden 1 keV) impactan en un blanco; los átomos de este blanco absorben la energía de los electrones, para luego emitirla en forma de fotones, cuya frecuencia pertenece al espectro de los rayos X.

Por la conservación de la energía

$$E_{C(\text{electrón})}=E_{\text{fotón}} \qquad (*)$$

Para que se cumpla esto, la longitud de onda de los rayos X debe ser mínima, entonces en la ecuación (*)

$$eV_{\text{tubo}}=\frac{hc}{\lambda_{\text{mín}}}$$

$$\boxed{\lambda_{\text{mín}}=\frac{hc}{eV_{\text{tubo}}}}$$

donde

- c: rapidez de la luz en el vacío
  ($c=3\times10^8$ m/s)
- e: valor de la cantidad de carga eléctrica del electrón ($e=1{,}6\times10^{-19}$ C)

¿Qué son los rayos X?
Son una radiación electromagnética y surgen de fenómenos extranucleares a nivel de la órbita electrónica, fundamentalmente producidos por desaceleración de electrones. Los rayos X son una radiación ionizante porque al interactuar con la materia producen la ionización de los átomos de la misma, es decir, originan partículas con carga (iones).

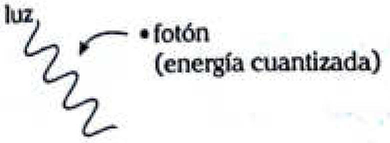
4.1. SOBRE LA NATURALEZA Y UTILIDAD DE LOS RAYOS X

- Todas las sustancias en mayor o menor medida son transparentes para los rayos X, estos las atraviesan con suma facilidad.
- Las placas fotográficas son sensibles a ellos.
- Los rayos X no son desviados por campos eléctricos o magnéticos.
- Hemos mencionado una de las más importantes utilidades que tienen los rayos X: han permitido el estudio de los cristales, conocer su estructura interna y de esa manera conocer sus propiedades para su posterior utilidad. La difracción de rayos X es una de las técnicas más usadas en la cristalografía.
- Quizá la aplicación más conocida de los rayos X sea en la radiografía, que hoy en día es tan común para fines de diagnóstico. Se cuenta que, a los 5 meses de su descubrimiento, se aplicaron rayos X con fines quirúrgicos en un hospital de Viena. Desde entonces, su difusión en medicina ha sido bastante amplia.
- Asimismo, los rayos X tienen enorme importancia en las investigaciones en física experimental y teórica, pues mediante ellos se han logrado importantísimos avances en el conocimiento de la estructura del átomo.

Problema N.° 1

Determine la energía, en eV, de un fotón correspondiente a una luz amarilla de longitud de onda de 500 nm. Considere $h=4{,}14\times10^{-15}$ eV·s.

Resolución



Según Planck

$$E_{\text{fotón}}=h\frac{c}{\lambda}$$

$$E_{\text{fotón}}=(4{,}14\times10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})\frac{(3\times10^{8}\ \text{m/s})}{500\times10^{-9}\ \text{m}}$$

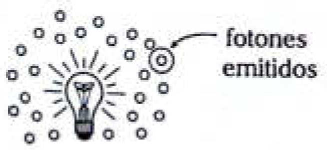
$\therefore\quad E_{\text{fotón}}=2{,}484$ eV

Problema N.° 2

Del ejercicio anterior (problema n.° 1), suponiendo que la bombilla que emite la luz amarilla tiene una potencia de 60 W, calcule el número de fotones que emite cada segundo. ($h=6{,}62\times10^{-34}$ J·s)

Resolución

Consideremos la bombilla.



La potencia de la radiación se calcula así:

$$P=\frac{E_{\text{radiación}}}{\Delta t}$$

$$P=n\frac{(hc)}{\Delta t\lambda}$$

donde n es el número de fotones emitidos.

Despejamos n.

$$n=\frac{P\Delta t\lambda}{hc};\ \text{donde } \Delta t=1\ \text{s}$$

$$n=\frac{60\times1\times500\times10^{-9}}{6{,}62\times10^{-34}\times3\times10^{8}}$$

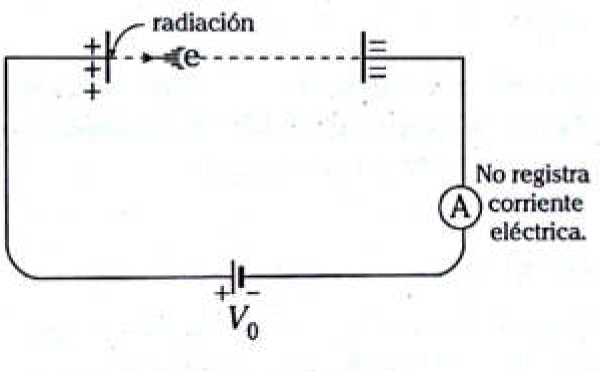
$\therefore\quad n=1{,}51\times10^{20}$ fotones cada segundo

Problema N.° 3

En un experimento de efecto fotoeléctrico, los fotoelectrones arrancados del metal presentan una energía cinética máxima de 4×10^{-19} J. ¿Cuánto voltaje debería aplicarse para detener a dichos fotoelectrones?

Resolución

Se tiene el siguiente circuito que detendrá a los fotoelectrones con el voltaje V_0.



Se cumple que

$$E_{C(\text{máx})}=eV_0$$

$$4\times10^{-19}=1{,}6\times10^{-19}\,V_0$$

$\therefore\quad V_0=2{,}5$ V

Problema N.° 4

La función trabajo del sodio es 2,3 eV. Si a este material se le irradia con luz naranja, cuya $\lambda=680$ nm, ¿se produce efecto fotoeléctrico? En caso afirmativo, ¿cuánto sería la energía cinética máxima de los fotoelectrones arrancados? ($h=4{,}14\times10^{-15}$ eV·s)

Resolución
Radiación λ =680 nm

El fotón de la radiación tiene una energía que se calcula así

$$E_{\text{fotón}} = h\frac{c}{\lambda}$$

$$E_{\text{fotón}} = \left(4{,}14\times10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s}\right)\frac{\left(3\times10^{8}\ \text{m/s}\right)}{680\times10^{-9}\ \text{m}}$$

$$\rightarrow\quad E_{\text{fotón}}=1{,}83\ \text{eV}$$

Por dato, la función trabajo del sodio es Φ=2,3 eV.

Entonces

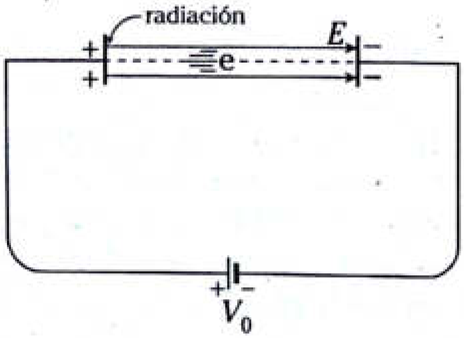
$$\underbrace{E_{\text{fotón}}}_{1{,}83\ \text{eV}} < \underbrace{\Phi}_{2{,}3\ \text{eV}}$$

Es por ello que no ocurre el efecto fotoeléctrico, ya que la energía del fotón no es la suficiente para arrancar electrones al metal.

Problema N.° 5

Cuando se ilumina el cátodo de una célula fotoeléctrica con radiación monocromática de frecuencia $1{,}2\times10^{15}$ Hz, se necesita aplicar un voltaje de 2,0 V para frenar a los fotoelectrones. Calcule la función trabajo del metal que es irradiado. (h=4,14$\times10^{-15}$ eV·s).

Resolución
Consideremos el siguiente circuito:



De la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico

$$E_{\text{fotón}}=\Phi+E_{C(\text{máx})}$$

$$hf=\Phi+eV_0$$

$$4{,}14\times10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s}\times1{,}2\times10^{15}\times\text{s}^{-1}=\Phi+\text{e}\cdot2\text{V}$$

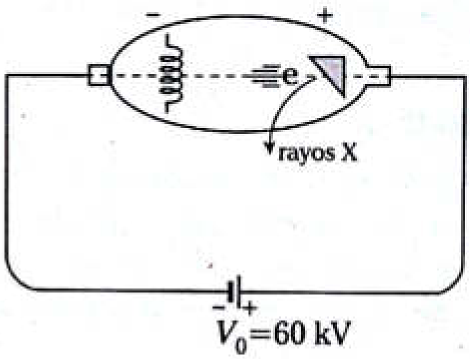
$$4{,}97\ \text{eV}=\Phi+2\ \text{eV}$$

$$\therefore\quad \Phi=2{,}97\ \text{eV}$$

Problema N.° 6

Un tubo de rayos X funciona con 60 kV. Determine la longitud de onda mínima asociada a un fotón de esta radiación. (h=4,14$\times10^{-15}$ eV·s).

Resolución



El electrón impacta contra el ánodo y desacelera rápidamente, por ello se generan los rayos X, donde la energía del fotón es igual a la energía del electrón al momento de impactar.

$$E_{C_{\substack{\text{electrón}\\ \text{impacto}}}} = E_{\text{fotón}}$$

$$eV_0 = h\frac{c}{\lambda_{\text{mín}}}$$

$$\lambda_{\text{mín}} = \frac{hc}{eV_0}$$

$$\lambda_{\text{mín}} = \frac{4{,}14\times10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s}\times3\times10^{8}\ \text{m/s}}{\text{e}\cdot\left(60\times10^{3}\ \text{V}\right)}$$

$$\lambda_{\text{mín}}=0{,}2\times10^{-10}\ \text{m}$$

$$\therefore\quad \lambda_{\text{mín}} = 0{,}2\ \text{Å}$$

NIVEL BÁSICO

1. Determine la frecuencia de una radiación que tiene fotones con energía de 2,07 keV. (h=4,14×10^{-5} eV·s)

A) 3×10^{17} Hz
B) 2×10^{18} Hz
C) 2×10^{17} Hz
D) 5×10^{18} Hz
E) 5×10^{17} Hz

2. Un haz de radiación tiene una longitud de onda de 400 nm. Determine la energía de un fotón en 10^{-19} J.
(c=3×10^{8} m/s; h=6,62×10^{-34} J·s)

A) 4,965 B) 2,635 C) 3,456
D) 6,265 E) 8,125

3. Una lámpara de fisioterapia muscular trabaja a la potencia de 200 W. Si esta lámpara emite principalmente fotones en la zona del infrarrojo de f=10^{13} Hz, determine, en 10^{24}, el número de fotones emitidos en 120 s. (h=6,62×10^{-34} J·s)

A) 1,48 B) 2,42 C) 2,80
D) 3,02 E) 3,63

4. Si la longitud de onda umbral para el cesio es de 685 nm, calcule su función trabajo. (h=4,14×10^{-15} eV·s)

A) 2,85 eV B) 2,25 eV C) 1,25 eV
D) 1,81 eV E) 1,62 eV

5. Sobre un metal de hierro de función trabajo de 4,50 eV incide un haz de radiación de frecuencia 2×10^{15} Hz. Determine la energía cinética máxima de los fotoelectrones desprendidos. (h=4,14×10^{-15} eV·s).

A) 3,54 eV B) 3,28 eV C) 3,78 eV
D) 4,24 eV E) 4,63 eV

6. Sobre una superficie metálica incide una radiación cuya longitud de onda es de 2500 Å. Si se emiten fotoelectrones cuya energía cinética máxima es de 1,8 eV, determine la función trabajo del metal, en eV.
(h=4,14×10^{-15} eV·s)

A) 9,25 B) 6,35 C) 5,27
D) 4,87 E) 3,17

7. Sobre una placa de plata se hace incidir luz ultravioleta de longitud de onda de 253,6 nm. Si el potencial de frenado es de 0,11 V, calcule la función trabajo de la plata, en eV. (h=4,14×10^{-15} eV·s).

A) 4,79 B) 3,78 C) 1,45
D) 6,07 E) 5,17

8. Si la función trabajo del aluminio es 4,08 eV, determine la frecuencia mínima para una radiación que genere fotoelectrones.
(h=4,14×10^{-15} eV·s)

A) 2,35×10^{15} Hz
B) 6,18×10^{15} Hz
C) 8,39×10^{14} Hz
D) 6,34×10^{14} Hz
E) 9,86×10^{14} Hz

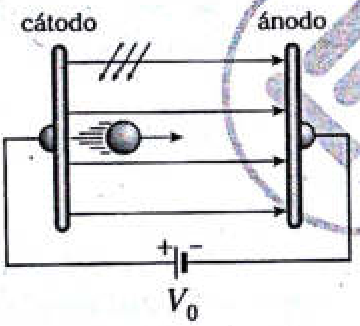
9. La frecuencia umbral de un metal es de 2×10^{14} Hz. Si la energía de un fotón es el triple de la función trabajo del metal, calcule la energía cinética máxima de los fotoelectrones. Considere h=4,14 ×10^{-15} eV·s.

A) 1,15 eV B) 1,66 eV C) 1,92 eV
D) 2,24 eV E) 2,65 eV

10. Se tiene una placa metálica cuya función trabajo es 5 eV. ¿Qué diferencia de potencial (en V) debe tener la fuente para detener a los electrones que se obtienen al iluminar la placa metálica con radiación de 200 nm? (h=4,14×10^{-15} eV·s)

A) 0,85 B) 1,21 C) 1,92
D) 2,22 E) 2,62

11. La energía de arranque para el potasio es de 2 eV suponiendo que sobre el potasio incide luz de λ=3,31×10^{7} m. Determine el voltaje mínimo para el frenado de los fotoelectrones más rápidos. (h=4,14×10^{-15} eV·s).



A) 2,15 V B) 2,2 V C) 1,85 V
D) 1,6 V E) 1,75 V

12. En un tubo de rayos X, los electrones justo antes de chocar con el ánodo tienen una energía cinética de 66 keV. Determine la longitud de onda mínima de los rayos X generados, en Å. (h=4,14×10^{-15} eV·s).

A) 0,15 B) 0,12 C) 0,19
D) 2,00 E) 2,40

13. Determine la longitud de onda de los rayos X generada cuando se aplica una diferencia de potencial de 40 kV entre los electrodos de un tubo de rayos X.

A) 0,45 Å B) 0,62 Å C) 0,86 Å
D) 0,31 Å E) 1,24 Å

14. Si el cátodo y ánodo del tubo de rayos X presenta una diferencia de potencial de 50 kV, determine la frecuencia de los rayos X que se obtiene. (h=4,14×10^{-15} eV·s).

A) 8×10^{15} Hz
B) 12×10^{14} Hz
C) 15×10^{14} Hz
D) 6×10^{15} Hz
E) 9×10^{16} Hz

15. El límite de las ondas cortas del espectro continuo de rayos X es 0,1 nm. Determine la diferencia de potencial con que son acelerados los electrones para conseguir dicha longitud de onda.

A) 12,4 kV B) 13,5 kV C) 10,0 kV
D) 11,0 kV E) 15,6 kV

NIVEL INTERMEDIO

16. Se tiene una lámpara que emite luz verde, cuya longitud de onda es 550 nm. Si la potencia de la lámpara es 50 W, determine cuántos fotones son emitidos por segundo. (h=6,62×10^{-34} J·s)

A) 1,12×10^{20}
B) 1,38×10^{20}
C) 1,57×10^{20}
D) 1,72×10^{20}
E) 1,95×10^{20}

17. Un profesor utiliza un puntero láser $(\lambda=4000\,\mathring{A})$, el cual tiene una potencia de 5 mW si lo utiliza para apuntar perpendicularmente a la pizarra. Determine aproximadamente el número de fotones que la pizarra recibe en cada segundo.
$(h=6{,}62\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})$

A) 10^{16} B) 10^{17} C) $2{,}2\times10^{17}$
D) $0{,}5\times10^{17}$ E) $1{,}2\times10^{17}$

18. Un haz de fotones incide sobre una superficie cuya función trabajo es $3{,}52\times10^{-19}$ J, produciéndose una emisión fotoelectrónica. Si cuando se aplica un potencial retardador de 5 V desaparece la fotocorriente, determine la longitud de onda de los fotones incidentes. $(h=6{,}62\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})$.

A) 172 nm B) 183 nm C) 165 nm
D) 153 nm E) 121 nm

19. El umbral de longitud de onda para la emisión fotoeléctrica en el wolframio es 2300 $\mathring{A}$. Determine la longitud de onda, en $\mathring{A}$, que debe usarse para expulsar a los electrones con una energía cinética máxima igual a la mitad de su función trabajo.

A) 1555 B) 1600 C) 1584
D) 1432 E) 1533

20. Una determinada placa metálica es irradiada con luz violeta ($\lambda=400$ nm), generándose fotoelectrones cuya energía cinética máxima es de 0,40 eV. Determine la longitud de onda máxima, en 10^{-9} m, que también generaría fotoelectrones arrancados. $(h=4{,}14\times10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})$

A) 600 B) 540 C) 459
D) 440 E) 428

21. Los electrones de un metal son arrancados por luz de longitud de onda igual a 1800 $\mathring{A}$. Si el umbral característico del metal es 2750 $\mathring{A}$, determine la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) según corresponda. Considere que la masa del electrón es $9{,}1\times10^{-31}$ kg.

I. La función trabajo del metal es de 4,5 eV.
II. Los electrones arrancados presentan una energía cinética máxima de $3{,}8\times10^{-19}$ J.
III. Los electrones arrancados presentan una rapidez máxima de $9{,}17\times10^{8}$ m/s.

A) FVF B) VVF C) VFF
D) FVV E) FFV

22. Con respecto al efecto fotoeléctrico, determine la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) según corresponda.

I. No se emite ningún electrón si la frecuencia de la luz incidente es menor que la frecuencia umbral o de corte f_0.
II. La energía cinética máxima de los fotoelectrones es independiente de la intensidad de la luz.
III. La energía cinética máxima de los fotoelectrones aumenta con el aumento de la frecuencia de la luz incidente.

A) VFV B) FVV C) VVF
D) FFV E) VVV

23. Determine la energía cinética, en keV, de un electrón en un haz de electrones para que produzcan una radiación X de 0,42 $\mathring{A}$ de longitud de onda.

A) 30,2 B) 36,5 C) 25,2
D) 41,5 E) 29,6

Claves

Capítulo I

1	D	4	D	7	B	10	D
2	D	5	E	8	E	11	E
3	C	6	B	9	D	12	C

Capítulo II

1	B	4	C	7	E	10	C
2	B	5	E	8	C	11	A
3	A	6	D	9	B	12	C

Capítulo III

1	D	5	B	9	B	13	A	17	A
2	B	6	C	10	C	14	D	18	C
3	C	7	C	11	B	15	C	19	B
4	A	8	A	12	C	16	C	20	B

Capítulo IV

1	A	5	D	9	E	13	A	17	B
2	B	6	E	10	B	14	E	18	B
3	B	7	A	11	A	15	B	19	C
4	A	8	D	12	A	16	D	20	D

Capítulo V

1	A	5	C	9	A	13	E	17	B
2	A	6	A	10	E	14	A	18	A
3	C	7	B	11	D	15	C	19	C
4	B	8	A	12	D	16	B	20	E

Capítulo VI

1	C	6	D	11	A	16	C	21	C
2	A	7	A	12	A	17	A		
3	B	8	D	13	B	18	C		
4	A	9	D	14	D	19	D		
5	E	10	D	15	E	20	D		

Capítulo VII

1	D	5	A	9	C	13	B	17	D
2	B	6	E	10	C	14	A	18	E
3	B	7	D	11	C	15	E	19	C
4	D	8	C	12	E	16	A	20	A

Capítulo VIII

1	E	6	A	11	B	16	D	21	A
2	A	7	B	12	C	17	C	22	A
3	C	8	B	13	B	18	C		
4	C	9	C	14	B	19	C		
5	D	10	E	15	D	20	C		

Capítulo IX

1	D	5	B	9	B	13	B	17	B
2	C	6	C	10	D	14	B	18	B
3	B	7	E	11	A	15	A	19	D
4	B	8	E	12	C	16	A	20	B

Capítulo X

1	B	5	A	9	D	13	C	17	A
2	C	6	C	10	B	14	B	18	C
3	C	7	A	11	C	15	C	19	C
4	B	8	E	12	D	16	C	20	A

Capítulo XI

1	A	5	E	9	D	13	A	17	C
2	B	6	A	10	E	14	D	18	E
3	C	7	B	11	C	15	B	19	B
4	D	8	C	12	D	16	A	20	E

Capítulo XII

1	A	6	A	11	A	16	B	21	A
2	C	7	B	12	D	17	A	22	C
3	E	8	E	13	C	18	A	23	B
4	A	9	C	14	D	19	C		
5	C	10	A	15	A	20	C		

Capítulo XIII

1	C	6	D	11	D	16	D	21	C
2	A	7	C	12	E	17	C	22	E
3	E	8	E	13	A	18	B	23	B
4	B	9	A	14	E	19	A		
5	A	10	B	15	B	20	C		

Capítulo XIV

1	A	7	A	13	B	19	A	25	A
2	B	8	E	14	C	20	B	26	B
3	C	9	D	15	B	21	C	27	A
4	A	10	D	16	A	22	B	28	D
5	C	11	C	17	B	23	C	29	B
6	D	12	B	18	A	24	B	30	A

Capítulo XV

1	D	7	A	13	B	19	D	25	D
2	A	8	B	14	B	20	C	26	C
3	C	9	D	15	C	21	A	27	E
4	A	10	E	16	D	22	C	28	E
5	B	11	C	17	C	23	D	29	E
6	B	12	C	18	E	24	C	30	A

Claves

Capítulo XVI

1	A	7	B	13	B	19	C	25	A
2	E	8	E	14	A	20	B	26	E
3	D	9	E	15	D	21	B		
4	A	10	D	16	A	22	A		
5	D	11	D	17	B	23	C		
6	C	12	C	18	E	24	B		

Capítulo XVII

1	A	6	D	11	B	16	D	21	E
2	B	7	C	12	B	17	E	22	D
3	C	8	A	13	A	18	C	23	D
4	D	9	B	14	A	19	C	24	A
5	E	10	A	15	D	20	A		

Capítulo XVIII

1	E	7	C	13	D	19	D	25	A
2	B	8	C	14	E	20	B	26	A
3	B	9	A	15	C	21	D	27	C
4	C	10	B	16	E	22	A	28	D
5	A	11	C	17	A	23	D		
6	D	12	B	18	C	24	C		

Capítulo XIX

1	B	5	D	9	C	13	B	17	B
2	E	6	E	10	C	14	A	18	D
3	A	7	A	11	B	15	D	19	C
4	D	8	A	12	E	16	E	20	B

Capítulo XX

1	D	6	C	11	E	16	D	21	C
2	A	7	C	12	C	17	D	22	B
3	C	8	C	13	C	18	B	23	D
4	D	9	D	14	A	19	E		
5	A	10	C	15	C	20	C		

Capítulo XXI

1	E	7	A	13	D	19	E	25	D
2	A	8	E	14	B	20	C	26	B
3	E	9	B	15	A	21	B	27	E
4	D	10	B	16	B	22	E	28	D
5	C	11	E	17	A	23	E	29	A
6	E	12	C	18	A	24	A	30	C

Bibliografía

- ✓ ALONSO, Marcelo y Edward J. FINN. *Mecánica*. México D. F.: Fondo Educativo Interamericano, 1970.
- ✓ ALVARENGA ÁLVAREZ, Beatriz. *Física general*. México D. F.: Editorial Harla, 1993.
- ✓ ASOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES. *Física*. Lima: Lumbreras Editores, 2018.
- ✓ ASOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES. *Física: una visión analítica del movimiento*. Volumen I. Lima: Lumbreras Editores, 2017.
- ✓ ASOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES. *Física: una visión analítica del movimiento*. Volumen II. Lima: Lumbreras Editores, 2018.
- ✓ ASOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES. *Física: una visión analítica del movimiento*. Volumen III. Lima: Lumbreras Editores, 2017.
- ✓ GIANCOLI, Douglas C. *Física para ciencias e ingeniería con física moderna*. 4.ª edición. México: Prentice Hall, 2009.
- ✓ HEWITT, Paul. *Física conceptual*. 9.ª edición. México D. F.: Pearson Educación, 2004.
- ✓ MÁXIMO, Antonio y Beatriz ALVARENGA. *Física general*. México D. F.: Editorial Oxford, 1997.
- ✓ PERELMAN, Yakov. *Física recreativa*. Volúmenes I y II. Moscú: Editorial Mir.
- ✓ SERWAY, Raymond A. y John W. JEWETT. *Física para ciencias e ingeniería con física moderna*. Volumen II. 7.ª edición. México D. F.: Cengage Learning, 2009.
- ✓ STRÉLKOV, S. P. *Mecánica*. Moscú: Editorial Mir.
- ✓ TIMOREVA, A. y S. FRISH. *Curso de física general*. Volúmenes I, II y III. Moscú: Editorial Mir, 1973.
- ✓ WILSON, Jerry; BUFA, Anthony J. y Bo LOU. *Física*. 6.ª edición. México: Pearson Educación, 2007.

Enlaces de páginas web

- ✓ https://es.wikibooks.org/wiki/Física/Física_moderna
- ✓ https://phet.colorado.edu/es/simulation/bending-light
- ✓ https://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_gravitaci%C3%B3n_universal