Volvemos con el estimador Rao-Blacwell

Llegamos a que, si $X|T \sim N(0, 1/T)$
$T \sim Gamma(\alpha, \beta)$

$$X \sim t_{(\nu=2\alpha,\ \mu=0,\ \sigma=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}})}$$

Si $\alpha=\beta=1$ y queremos estimar $\mathbb{E}[X]$, tenemos que $\mathbb{E}[X|T]=0$

Ahora, estimemos $\mathbb{E}[X^2]$.

Tenemos que $\mathbb{E}[X^2] = Var(X) = \begin{cases} \frac{\nu}{\nu-2} & \nu > 2 \\ \infty & 1 < \nu \leq 2 \\ \text{indefinido} & \nu < 1 \end{cases}$

Si $\alpha = \beta = 1$, $\nu = 2$, y por ende $\mathbb{E}[X^2] = \infty$.

Es decir, si $\nu > 2$, ent. $\mathbb{E}[X^2]$ estará definido.

Si seguimos con $\alpha = \beta = 3$, ent $X \sim t_{(6)}$,

y ent. el valor a estimar será

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{6}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Veamos qué pasa con la varianza de los estimadores X^2 $\mathbb{E}[X^2 \mid T]$

$$\mathrm{Var}(x^2) = \mathbb{E}[x^4] - \mathbb{E}^2[x^2]$$

$K = 4$
$\nu = 6$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left[\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-k}{2}\right)\nu^{\frac{k}{2}}\right] - \frac{\nu^2}{(\nu-2)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(3)}\left[\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\nu^2\right] - \frac{6^2}{4^2}$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,2}\left[\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\,6^2\right] - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)$$

$$= \frac{3}{2}3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{9}{4} = \frac{54-9}{4} = \frac{45}{4} = 11.25$$

$$= \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

Ahora, la varianza de $\mathbb{E}[X^2 | \tau]$

$$\mathrm{Var}(\mathbb{E}[X^2|\tau]) = \mathrm{Var}\left(\frac{\tau}{\tau}\mathbb{E}[X^2|\tau]\right)$$

$$= \mathrm{Var}\left(\frac{1}{\tau}\mathbb{E}[\tau X^2|\tau]\right)$$

$$= \mathrm{Var}\left(\frac{1}{\tau}\right)$$

$$= \frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$$

$$= \frac{9}{4} = 2.25$$

$X \sim N(0, 1/\tau)$

$\sqrt{\tau} X \sim N(0,1)$

Si $Z \sim N(0,1)$,

$Z^2 \sim \chi^2_1$

$\mathbb{E}[Z^2] = \#$ grados libertad

$= 1$

$\alpha = \beta = 3$

Si $Y \sim \mathrm{Inv\ Gamma}(\alpha, \beta)$

$$f_Y(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1}\exp\left(-\frac{\beta}{x}\right)$$

Considere integración por Monte-Carlo para $h \geq 0$ tal que $h \leq Mg$ con $M > 0$ y g una función de densidad de probabilidad. Para $U \sim \text{Uniforme}(0,1)$, $Y \sim \mathcal{L}(g)$ independientes definimos el estimador

$$\hat{I} = M\mathbb{1}\{UMg(Y) \leq h(Y)\}$$

$z = \int_0^1 h = \mathbb{E}[h(u)]$

Muestre que la esperanza de $\hat{I}$ es la integral de interés y que su varianza es mayor o igual a la varianza del estimador por importancia usando g.

Primero, veamos que en efecto $\mathbb{E}[\hat{I}] = z$

$$\mathbb{E}[\hat{I}] = \mathbb{E}[M\mathbb{1}\{UMg(Y) \leq h(Y)\}]$$

$$= M\,\mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}\{UMg(Y) \leq h(Y)\} \mid Y]]$$

$$= M\,\mathbb{E}[\mathbb{P}[UMg(Y) \leq h(Y) \mid Y]]$$

$$= M\,\mathbb{E}_Y\left[\mathbb{P}\left[U \leq \frac{h(Y)}{Mg(Y)} \,\middle|\, Y\right]\right]$$

$$= M\,\mathbb{E}_Y\left[\frac{h(Y)}{Mg(Y)}\right]$$

$$= M\int_0^1 \frac{h(y)}{Mg(y)}\,g(y)\,dy = \int_0^1 h(y)\,dy$$

$$= z$$

$$\mathbb{E}_f[h(x)] = \int h(x) f(x)\, dx$$

$$= \int \frac{h(x) f(x)}{g(x)} g(x)\, dx$$

$$= \mathbb{E}_g\left[\frac{h(x) f(x)}{g(x)} \right]$$

Ent., como $f(x) = 1$ para $U \sim U(0,1)$,

El estimador por importancia usando g es

$$\mathbb{E}\left[\frac{h(y)}{g(y)} \right]$$

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$$

Basta ver que $\mathbb{E}_g\left[\frac{h^2(x)}{g^2(y)}\right] \leq_g \mathbb{E}[\hat{I}^2]$

$$\mathbb{E}[\hat{I}^2] = \mathbb{E}[M^2 \hat{I}]$$

$$= M^2 z$$

$$\mathbb{E}_g\left[\frac{h^2(y)}{g^2(y)}\right] = \int \frac{h^2(y)}{g^2(y)} g(y)\,dy$$

Como $h \leq Mg$,

ent. $\frac{h}{g} \leq M$

$$= \int \frac{h^2(y)}{g(y)}\,dy$$

$$= \int h(y)\left(\frac{h(y)}{g(y)}\right) dy$$

$$\leq \int h(y) M\,dy$$

$$= M \int h(y)\,dy = Mz$$

$$\therefore \quad \mathbb{E}\left[\frac{h^2(Y)}{g^2(Y)}\right] \le \mathbb{E}[\hat{I}^2]$$

$$\therefore \quad \mathrm{Var}\left(\frac{h(Y)}{g(Y)}\right) \le \mathrm{Var}(\hat{I})$$

Objetivo: Calcular $\boxed{P(Z>4.5)}$ $Z \sim N(0,1)$

$\mathbb{1}_{\{Z>4.5\}} \leftarrow$ CMC

Distribución de una exponencial truncada por la izquierda en 4.5

$$g(y) = \frac{e^{-y}}{\int_{4.5}^{\infty} e^{-x}\,dx} = \frac{e^{-y}}{1-F(4.5)} = \frac{e^{-y}}{1-(1-e^{4.5})} = e^{-(y-4.5)}$$

$\exp(1) = \mathcal{L}(F)$

$$G(y) = \int_{4.5}^{y} \exp(-(t-4.5))\,dt$$

$$u = t - 4.5$$

$$du = dt$$

$$= \int_{0}^{y-4.5} \exp(-u)\,du$$

$\exp(1) = \mathcal{L}(F) =$ $$F(y-4.5) = 1 - e^{-(y-4.5)}$$

$$\therefore \quad G(y) = 1 - e^{-(y-4.5)}$$

$$x = 1 - e^{-(y-4.5)} \iff -(y-4.5) = \ln(1-x)$$

$$\iff y = -\ln(1-x) + 4.5$$

$$\therefore \; -\ln(u) + 4.5 \sim \exp(1)_{[4.5,\infty)}$$

Es decir, basta con simular una exponencial (1) y a las muestras agregarles 4.5.

El estimador por importancia queda de la siguiente forma

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f_Z(Y_i)}{g(Y_i)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{-Y_i^2/2 + Y_i - 4.5}}{\sqrt{2\pi}}$$