Algoritmo de Metropolis-Hastings

Dado $\boldsymbol{X}_{n-1}$

1) Simule $\boldsymbol{Y}_n \sim \mathcal{L}\left(Q(\boldsymbol{X}), \cdot\right)$ y $U \sim \mathrm{Uniforme}(0,1)$.

2) Acepte $\boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{Y}_n$ si se cumple que

$$U \leq \alpha(\boldsymbol{X}_{n-1}, \boldsymbol{Y}_n) = \min\left\{1,\ \frac{f_k(\boldsymbol{Y}_n)q(\boldsymbol{Y}_n, \boldsymbol{X}_{n-1})}{f_k(\boldsymbol{X}_{n-1})q(\boldsymbol{X}_{n-1}, \boldsymbol{Y}_n)}\right\};$$

en caso contrario $\boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{X}_{n-1}$.

El algoritmo general de M-H permite un candidato q que sólo depende del estado prsente de la caena. Si ahora le pedimos que dicho candidato q sea independiente de este estado presente de la cadena (q(y|x)=g(y)), tenemos un caso especial del algoritmo.

Algoritmo de Metrópolis-Hastings independiente

Dado $x^{(t)}$,

1) Genera $Y_t \sim g(y)$ y $U \sim U(0,1)$. Tomemos $\alpha = \text{mín}\left(\frac{f(Y_t)\, g(x^{(t)})}{f(x^{(t)})\, g(Y_t)}, 1\right)$

2) Toma $X^{(t+1)} = \begin{cases} Y_t & \text{si } U \leq \alpha, \\ x^{(t)} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$

Sean f, g tales que $f \leq Mg$.

Ent. $\frac{f}{g} \leq M \Rightarrow \frac{1}{M} \leq \frac{g}{f}$

$$\mathbb{P}(\text{Aceptación A-R}) = \frac{1}{M}$$

Sea $x^{(t)}$ fija.

$$\mathbb{P}(\text{Aceptación M-H}) = \mathbb{P}\left(U \leq \frac{f(Y_t)\, g(x^{(t)})}{f(x^{(t)})\, g(Y_t)}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[U \leq \frac{f(Y_t)\, g(x^{(t)})}{f(x^{(t)})\, g(Y_t)} \,\middle|\, Y\right]\right]$$

$$= \frac{g(x^{(t)})}{f(x^{(t)})}$$

$$\therefore\ P(\text{Aceptación A-R}) \leq P(\text{Aceptación M-H})$$

Veamos el siguiente ejemplo:

f

$\downarrow$

Consideremos la distribución objetivo $G(\alpha, \beta)$ $\quad \alpha > 1$

Consideremos la distribución candidata $G(a, b)$ $\quad a = [\alpha]$

$\uparrow$

g

$[z]$ = parte entera de z

a) Construyamos la constante M para
el método de aceptación-rechazo:

$f \leq Mg \implies \frac{f}{g} \leq M$

$$\frac{\text{Beta}(\alpha, \beta)}{\text{Beta}(a, b)} \propto \frac{\beta^{\alpha} x^{\alpha} \exp(-\beta x)}{b^{a} x^{a} \exp(-bx)}$$

$$\propto b^{-a} x^{(\alpha - a)} \exp(-(\beta - b)x)$$

$$\ell(x) = -a\ell(b) + (\alpha - a)\ln(x) - (\beta - b)x$$

$$\ell'(x) = \frac{\alpha - a}{x} - (\beta - b)$$

$$\ell'(x) = 0 \iff \frac{\alpha - a}{\beta - b} = x$$

$$\ell''(x) = -\frac{(\alpha - a)}{x^2} < 0$$

Tomemos $\beta = 1$ Gamma $(\alpha, 1)$

Ent $x_0 = \dfrac{\alpha - a}{1-b}$ es máximo en $\dfrac{f}{g}$

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = b^{-a} \left(\frac{\alpha - a}{1-b}\right)^{\alpha - a} \exp\left(-(\alpha - a)\right) = M(b)$$

$$\ell(M(b)) = -a\ln(b) + (\alpha - a)\left[\ln(\alpha - a) - \ln(1-b)\right] - (\alpha - a)$$

$$\ell'(M(b)) = -\frac{a}{b} + \frac{(\alpha - a)}{1-b}$$

$$\ell'(M(b)) = 0 \iff \frac{a}{b} = \frac{(\alpha - a)}{1-b}$$

$$\iff a(1-b) = (\alpha - a)b$$

$$\iff a - ab = \alpha b - ab$$

$$\iff b = \frac{a}{\alpha} = \frac{[\alpha]}{\alpha}$$

$$\ell''(M(b)) = \frac{a}{b^2} + \frac{(\alpha - a)}{(1-b)^2} > 0$$

$\therefore\ b = \dfrac{a}{\alpha}$ minimiza a la cota $M(b)$