Tarea 1

Profesor: Alan-Riva Palacio Cohen
Ayudante: Marco Antonio Gallegos Herrada

19 de marzo de 2021

Ejercicio 1 (Algoritmo Aceptación-Rechazo)

Sea $f(x \mid \theta)$ una función de densidad para un conjunto de datos y $\pi(\theta)$ una función de densidad a priori para el parámetro θ. Dada la muestra $x = x_1, \dots, x_n$, la distribución posteriori de θ es

$$\pi(\theta \mid x) = \pi(\theta \mid x_1, \dots, x_n) \propto \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta)\pi(\theta)$$

donde $\prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta) = L(\theta \mid x_1, \dots, x_n)$ es la función de verosimilitud.

a) Si $\pi(\theta \mid x)$ es la función objetivo en un algoritmo de Aceptación-Rechazo, y si $\pi(\theta)$ es nuestra función candidato, muestre que la cota superior óptima M es la función de verosimilitud evaluada en el MLE. (**1 pt**)

b) Para estimar la media de una normal estándar, una distribución a priori robusta es la distribución Cauchy. Dado $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$, $\theta \sim \mathcal{C}(0, 1)$ la distribución a posteriori es

$$\pi(\theta \mid x) \propto \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+\theta^2} \frac{1}{2\pi} \prod_{i=1}^{n} \exp^{-(x_i-\theta)^2/2}.$$

Fijemos $\theta_0 = 3$, $n = 10$, y generemos $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta_0, 1)$. Utilice el algoritmo de Aceptación-Rechazo con distribución auxiliar Cauchy $\mathcal{C}(0, 1)$ para generar muestras de la distribución a posteriori:

- Genere 10,000 muestras de esta Cauchy, calcule la tasa de aceptación y obtenga la media de las muestras aceptadas. (**1 pt**)
- Evalúe qué tan bien se aproxima esta media a θ_0. (**0.5 pts**)
- Repita los dos procedimientos anteriores pero ahora contemplando $n = 100$ y $n = 500$ para las muestras iniciales $X_1, \dots, X_n$. ¿Qué tanto se mejora esta estimación al aumentar el número de muestras n? (**0.5 pts**)

Ejercicio 2 (Transformada Inversa y muestreo por importancia)

a) Muestre que para simular $Y \sim Exp^{+}(a, 1)$, una distribución truncada por la izquierda por a, basta con simular $X \sim Exp(1)$ y tomar $Y = a + X$. (**1 pt**)

b) Use el método de muestreo por importancia proponiendo una variable aleatoria X adecuada para calcular la probabilidades $P(U > 25)$ y $P(T > 50)$ con $U \sim \chi^2_3$ y $T \sim t_5$. (**1 pt**)

Ejercicio 3 (Técnicas de reducción de varianza)

Queremos calcular la siguiente integral vía Monte-Carlo:

$$\mu = \int_0^1 g(x) = \int_0^1 (1-x)e^{-x^2}dx = 0.4307639$$

1) Exprese la integral anterior en términos de la esperanza de una variable aleatoria con soporte en el intervalo $[0, 1]$. (**0.5 pts**)

2) En todos los casos, obtenga el error de la estimación del 95 % * y considere $n = 1,000$ número de muestras a generar:

   (a) Estime μ usando el método de aceptación rechazo en el cuadrado $[0, 1]^2$. (**1 pt**)

   (b) Estime μ por el método de Monte-Carlo crudo utilizando variables aleatorias uniformes. (**1 pt**)

   (c) Estime μ utilizando variables antitéticas.

   (d) Estime μ con el método de variables de control, con $W = f(x)$ variable de control, donde $f(x) = 1 - x$. (**1 pt**)

   (e) Compare los errores de estimación de cada uno de los estimadores utilizados. ¿Cuál muestra tener menor error? (**1 pt**)

3) Grafique la convergencia ergódica de cada una de estos estimadores. ¿Cuál de estos resulta ser menos costoso para la estimación de μ? (**0.5 pts**)

---

* Recuerde que el error de la estimación con confianza del 95 % está dado por

$$\varepsilon = \frac{1.96s}{\sqrt{n}}$$

donde $s = \hat{\sigma}$