$\mathbb{E}_f[h(x)]$, $\mathcal{L}(f) \sim X$,

$$\mathbb{E}_f[h(x)] = \mathbb{E}_g\left[\frac{h(x)f(x)}{g(x)}\right]$$

$sop(h \times f) \subseteq sop(g)$

Calculemos el valor $\mathbb{E}_f[h(x)]$ $\mathcal{L}(f) \sim N(0,1)$

$$h(x) = \exp(-(x-3)^2/2) + \exp(-(x-6)^2/2)$$

$$\mathbb{E}_p[h(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left(e^{-\frac{(x-3)^2}{2}} + e^{-\frac{(x-6)^2}{2}} \right) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\begin{aligned}(x-3)^2 + x^2 &= x^2 - 6x + 9 + x^2 \\ &= 2x^2 - 6x + 9 \\ &= 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{2}\right) \\ &= 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}\right) \\ &= 2\left[(x - 3/2)^2 + \frac{9}{4}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x-6)^2 + x^2 &= x^2 - 12\cancel{x} + 36 + x^2 \\ &= 2(x^2 - 6x + 18) \\ &= 2\left[(x-3)^2 + 9\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp\left(-(x - 3/2)^2 - 9/4\right)$$

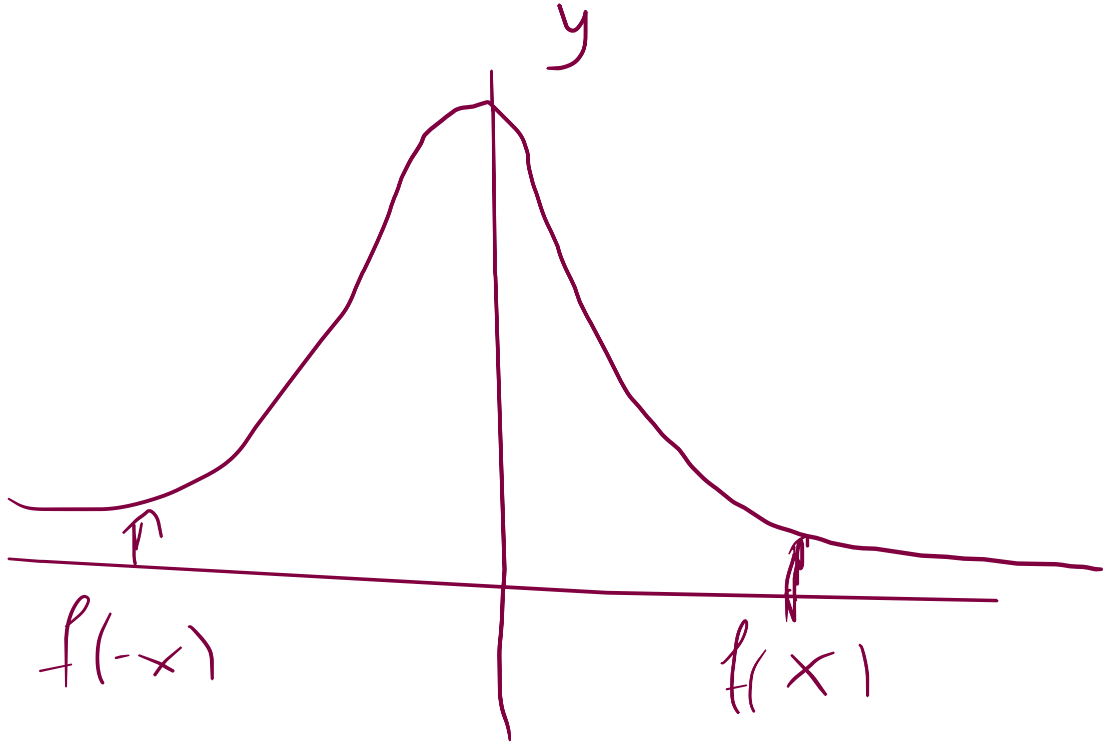
$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp\left(-(x-3)^2 - 9\right)$$

$$= \frac{e^{-9/4} + e^{-9}}{\sqrt{2}} \simeq 0.0746$$

Ahora, consideremos la variable $U(-8,-1)$ para hacer estimación por importancia.

$$E\left[\frac{h(x)f(x)}{7}\right] = \int_{-8}^{-1} \frac{h(x)f(x)dx}{7} \approx \frac{1.5164e\text{-}05}{7}$$

$$\neq \int h(x)f(x)dx = E[h(x)f(x)]$$



$$x \,,\ -x$$

$$(h(x), h(-x))$$

Integrales

Integral a estimar $\int_0^1 \sqrt{-\log(x)}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

Esto se puede reescribir como $\mathbb{E}\left[\sqrt{-\log(u)}\right]$, $u \sim (0,1)$

Primera propuesta

Variables antitéticas $\Rightarrow (u, 1-u)$

$\rightarrow \left(\sqrt{-\log(u)}, \sqrt{-\log(1-u)}\right)$

$$\operatorname{Corr}\left(\sqrt{-\log(u)}, \sqrt{-\log(1-u)}\right) \approx -0.94$$

Segunda propuesta

Estimador por importancia.

Consideramos $Y \sim Beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Variables de control

Supongamos que tenemos f tal que

$\mu = \mathbb{E}[f(X)]$ es conocida y

$f(x)$ está correlacionada con $g(X)$.

Target expectation $\mathbb{E}[g(X)]$

Ent. para cualquier cte. c,

$\hat{\theta}_c = g(X) + c(f(X) - \mu)$ es un

estimador insesgado de $\theta = \mathbb{E}[g(X)]$

La varianza

$$Var(\hat{\theta}_c) = Var(g(x)) + c^2 Var(f(x)) + 2c\,Cov(g(x), f(x))$$

es una función cuadrática de c, que

es minimizada en $c^* = -\dfrac{Cov(g(x), f(x))}{Var(f(x))}$

y la varianza mínima es

$$Var(\hat{\theta}_{c^*}) = Var(g(x)) - \frac{Cov(g(x), f(x))^2}{Var(f(x))}$$

f(x) es llamada variable de control de g(x)

Ent. el porcentaje de reducción en varianza es

$$100\,\frac{(\text{Cov}(g(x),f(x)))^2}{\text{Var}(g(x))\text{Var}(f(x))}$$

$$= 100\,\text{Cor}(g(x),f(x))^2$$

Por lo que es ventajoso que $f(x)$ y $g(x)$ estén fuertemente correlacionadas (no hay reducción si no lo están)

Apliquemos el enfoque de ctrol de variables para computar

$$\theta = \mathbb{E}[e^{u}] = \int_0^1 e^{u}\,du, \quad U \sim U(0,1)$$

$$\theta = e - 1 = 1.718282$$

Tomemos $g(x) = e^{x}$, ent. $Var(g(U)) = \mathbb{E}[e^{2u}] - \theta^2$

$$= \frac{e^2 - 1}{2} - (e-1)^2$$

$$= 0.2420351$$

¿Qué variable de control tomar?

Tomemos $U \sim \mathcal{U}(0,1)$, es decir,

$f(x) = x$. En el. $\mathbb{E}[U] = \frac{1}{2}$

$\text{Var}(U) = \frac{1}{12}$

$$\text{Cov}(g(U), f(U)) = \text{Cov}(e^U, U)$$

$$= \mathbb{E}[Ue^U] - \mathbb{E}[U]\mathbb{E}[e^U]$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)(e-1) = 0.1408591$$

Así, $c^* = -\dfrac{\operatorname{Cov}(e^u, u)}{\operatorname{Var}(u)} = -12 + 6(e-1)$

$= -1.690309$

Ent. nuestra variable de control será $\hat{\Theta}_{c^*} = e^u - 1.69\left(u - \frac{1}{2}\right)$

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_{c^*}) = \mathrm{Var}(e^u) - \frac{\mathrm{Cov}(e^u, u)^2}{\mathrm{Var}(u)}$$

$$= \frac{e^2 - 1}{2} - (e-1)^2 - 12\left(1 - \left(\frac{e-1}{2}\right)\right)^2$$

$$= 0.240 - 12(0.1408)^2 = 0.0039$$

Ent., el porcentaje de reducción de varianza comparado al CMC es $100 \operatorname{Var}(\hat{\theta}_{c^*}) = 98.37\%$

Ejemplo 2 para variables de ctrol.

Usa el método de control de variables para estimar $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+x^2}\,dx$

$$\theta = E[g(X)], \quad g(x) = \frac{e^{-x}}{1+x^2} \quad X \sim U(0,1)$$

Buscamos una función "cercana" a $g(x)$ con valor esperado conocido y tal que $f(x)$ y $g(x)$ estén fuertemente correlacionados.

Si tomamos $f(x) = \frac{e^{-1/2}}{1+x^2}$, esta es cercana a $g(x)$ en $(0,1)$ y podemos computar su esperanza.

Si $U \sim U(0,1)$, ent.

$$\mathbb{E}[f(U)] = e^{-1/2} \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$= e^{-1/2} \arctan(1) = e^{-1/2}\,\frac{\pi}{4}$$