IDEA CENTRAL: ¿Cómo estimar π?

¿Cómo podemos calcular la probabilidad de que una aguja cruce alguna?

Solución $\ell \leq t$

$x \in [0, \frac{t}{2}] \longleftarrow$ Distancia entre el centro de la aguja y la línea más cercano.

$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \longleftarrow$ Ángulo entre la aguja y las líneas

Consideremos $X \sim U(0, \frac{t}{2})$

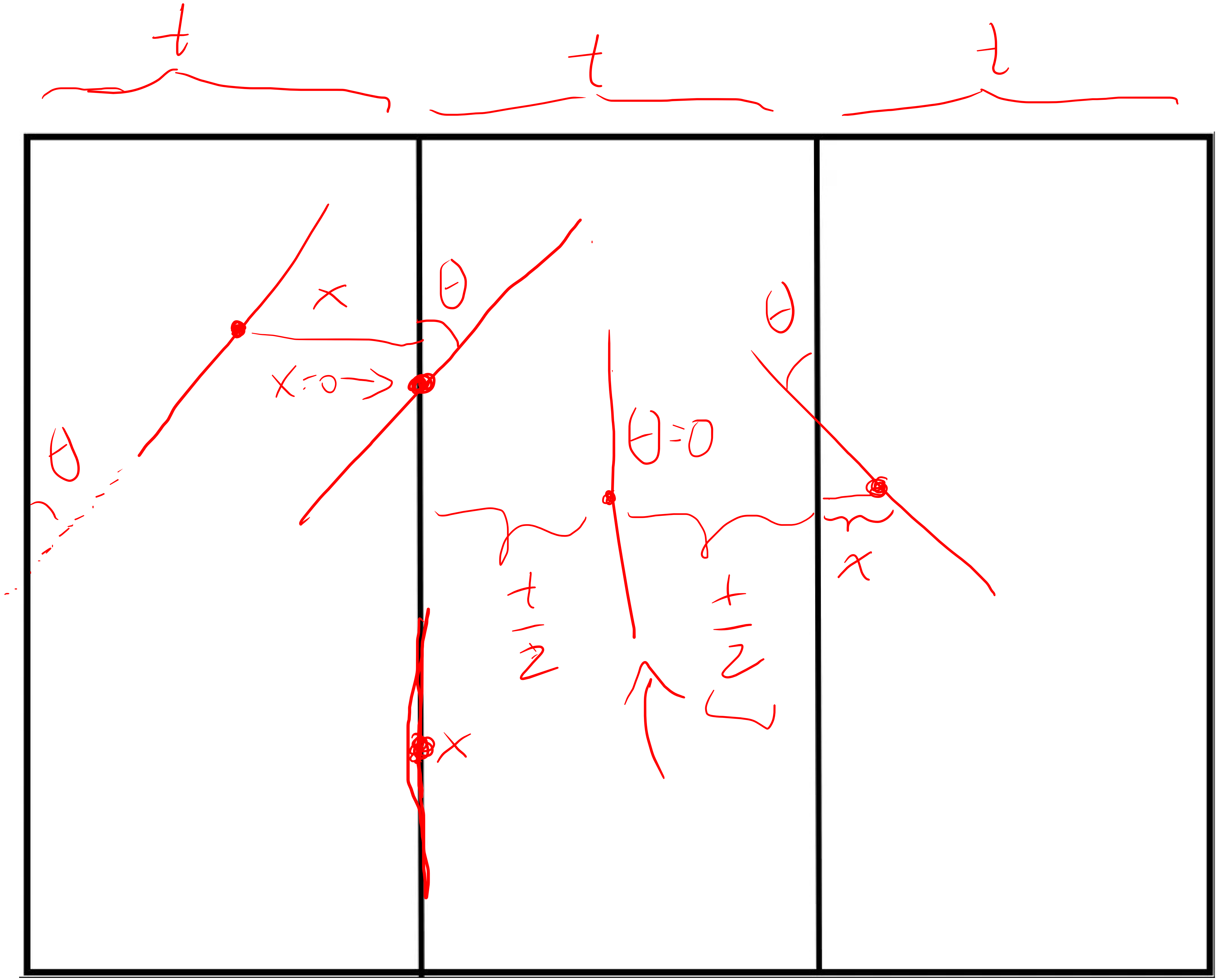
$\Theta \sim U(0, \frac{\pi}{2})$

$$f_X(x) = \frac{2}{t} \qquad f_\Theta(\theta) = \frac{2}{\pi}$$

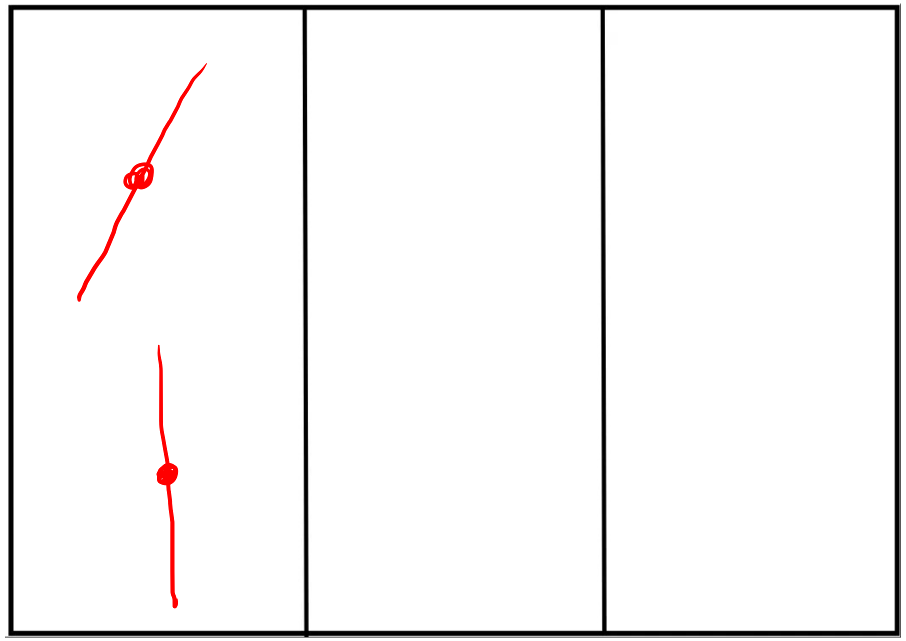
Tomamos $X \perp \Theta$

$$f_{X,\Theta}(x, \theta) = \frac{4}{t\pi}$$

$\mathbb{P}(\{\text{Aguja toque línea}\})$


t
t
t
x
θ
x=0
θ
θ
θ=0
t/2
t/2
x
x

¿Cómo describimos al evento de las agujas que cruzan las líneas?



Observemos al evento contrario.

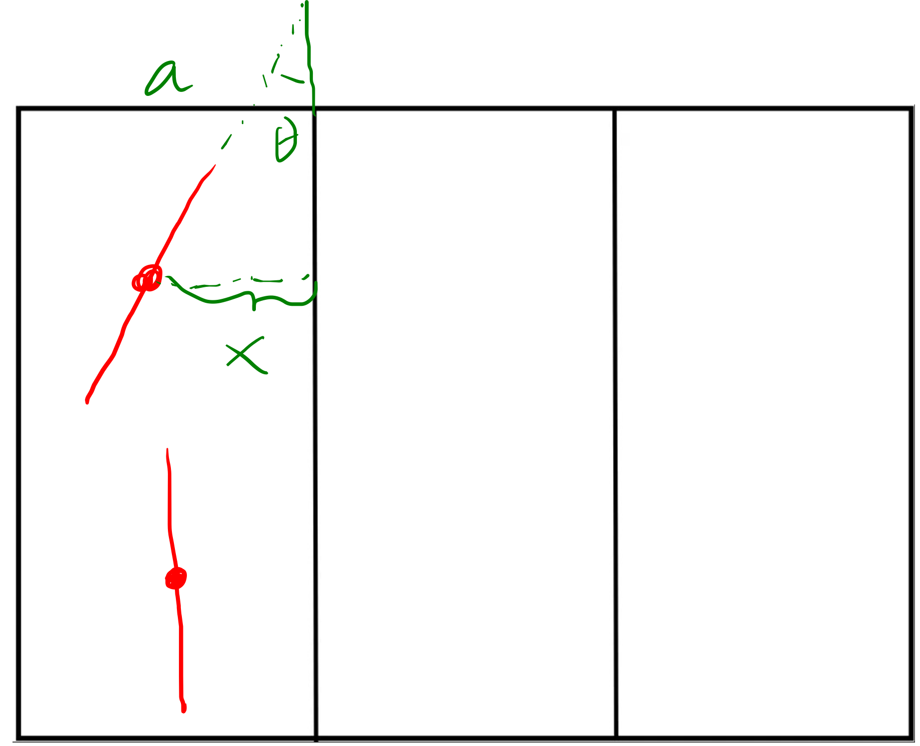
Consideremos una aguja L que no cruza las líneas. Ent. forzosamente $x > 0$.

Si $\theta = 0$, ent.

$\sin\theta = 0$,

$\frac{l}{2}\sin\theta = 0 < x$

$\therefore \frac{l}{2}\sin\theta < x$.



Si $\theta > 0$, ent. $\sin\theta = \frac{x}{a}$, $a > \frac{l}{2}$

$$x = a\sin\theta > \frac{l}{2}\sin\theta$$

$$\therefore x > \frac{l}{2}\sin\theta$$

$\therefore$ Una aguja no cruza alguna línea

$$\Longleftrightarrow$$

$$x > \frac{l}{2}\sin\theta$$

$\therefore$ Una aguja cruza alguna línea

$$\Longleftrightarrow$$

$$x \leq \frac{l}{2}\sin\theta$$

$\therefore P(1 \text{ aguja cruza linea}) =$

$$P\left(x \leq \frac{l}{2}\sin\theta\right) = \mathbb{E}_\theta\left[\mathbb{E}\left[x \leq \frac{l}{2}\sin\theta \,\middle|\, \theta\right]\right]$$

$$= \mathbb{E}_\theta\left[\int_0^{\frac{l}{2}\sin\theta} \frac{2}{t}\, dx\right]$$

$$= \mathbb{E}_\theta\left[\frac{2}{t}\,\frac{l}{2}\sin\theta\right]$$

$$= \frac{l}{t}\,\mathbb{E}_\theta[\sin\theta]$$

$$= \frac{l}{t}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,\frac{2}{\pi}\, d\theta$$

$$= \frac{2l}{t\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta = \frac{2l}{t\pi}\Big[-\cos\theta\Big]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2l}{t\pi}$$

$$\therefore \mathbb{P}(\{\text{Aguja cruza línea}\}) = \frac{2\ell}{t\pi}$$

Así, si se lanzan n agujas y h cruzan alguna línea, se tiene que

$$\frac{h}{n} \approx \frac{2\ell}{t\pi}$$

$$\pi \approx \frac{2\ell}{th} n$$